



Quelques aspects combinatoires et arithmétiques des variétés toriques complètes

Robin Guilbot

► To cite this version:

Robin Guilbot. Quelques aspects combinatoires et arithmétiques des variétés toriques complètes. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012. Français. NNT : . tel-00832228

HAL Id: tel-00832228

<https://theses.hal.science/tel-00832228>

Submitted on 10 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Mathématiques

Présentée et soutenue par

Robin Guilbot

le : 17 septembre 2012

Titre :

Quelques aspects combinatoires et arithmétiques des variétés toriques complètes.

École doctorale :

Mathématiques, Informatique et Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219

Directeur de thèse :

Marc Perret, Professeur, Université Toulouse II

Rapporteurs :

David A. Cox, Professeur, Amherst College (U.S.A.),

Philippe Satgé, Professeur, Université de Caen

Autres membres du jury :

Pierre Dèbes, Professeur, Université Lille I,

Emmanuel Hallouin, Maître de Conférence, Université Toulouse II,

Stéphane Lamy, Professeur, Université Toulouse III,

Olivier Wittenberg, Maître de Conférences, E.N.S. Paris

QUELQUES ASPECTS COMBINATOIRES ET ARITHMÉTIQUES DES VARIÉTÉS TORIQUES COMPLÈTES

Robin Guilbot

17 septembre 2012

Directeur de Thèse :

Marc Perret, Professeur, Université Toulouse II

Rapporteurs :

David A. Cox, Professeur, Amherst College (U.S.A.),

Philippe Satgé, Professeur, Université de Caen

Autres membres du jury :

Pierre Dèbes, Professeur, Université Lille I,

Emmanuel Hallouin, Maître de Conférence, Université Toulouse II,

Stéphane Lamy, Professeur, Université Toulouse III,

Olivier Wittenberg, Maître de Conférence, École Normale Supérieure

Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219

Université Paul Sabatier - Toulouse III

118, route de Narbonne 31062 TOULOUSE cedex 9

Remerciements

Mes remerciements vont naturellement en premier lieu à mon directeur de thèse Marc Perret qui m'a à la fois guidé et laissé beaucoup de liberté dans ma façon de mener mes recherches. Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir proposé un sujet aussi riche que celui des variétés toriques. Je suis également reconnaissant à Emmanuel Hallouin d'avoir été très présent durant les trois premières années de cette thèse. Je les remercie chaleureusement tous les deux d'avoir été à ce point disponibles (et compréhensifs à l'occasion). Arrivé au terme d'un parcours d'études long et sinueux, je souhaite exprimer ma gratitude à mes professeurs de mathématiques et particulièrement à Jacques Sauloy qui a joué un grand rôle au commencement et à certaines étapes importantes de mon orientation. Je veux aussi remercier Stéphane Lamy de m'avoir aidé à interpréter géométriquement certains de mes résultats combinatoires au cours des derniers mois et d'avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie également Pierre Dèbes et Olivier Wittenberg d'avoir accepté d'être membres du jury et de venir assister à ma soutenance. Enfin je remercie David Cox et Philippe Satgé d'avoir bien voulu être les rapporteurs de ma thèse et d'avoir pour cela travaillé tout l'été. Je les remercie particulièrement pour leur lecture attentive du texte et leurs remarques judicieuses.

Sur un plan plus personnel, mes plus grands remerciements vont bien entendu à ma compagne Anne, qui m'a supporté, dans tous les sens du terme, durant ces dernières années et tout particulièrement ces derniers mois. Je dit merci aussi à ma fille Alma qui ensoleille notre quotidien depuis plus de deux ans déjà. Je remercie tous mes amis qui ne m'ont pas complètement oublié malgré l'éloignement géographique et mon manque chronique de temps pour les voir ces dernières années. Je tiens aussi à remercier tous les gens de l'Amanita Muscaria pour l'énergie du lieu et spécialement pour les cours de Maracatu qui m'ont tant ressourcé. Pour finir je souhaite remercier bien fort ma famille qui m'a soutenu pendant ma thèse et tout au long de mes études.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
1 Variétés toriques - Généralités	7
1.1 Définition	7
1.1.1 Caractères et groupes à un paramètre	7
1.2 Cônes convexes et éventails	8
1.2.1 Cônes convexes	8
1.2.2 Eventails	10
1.2.3 Multiplicité d'un cône simplicial	11
1.3 Variétés toriques normales	12
1.3.1 Variétés toriques affines	12
1.3.2 Recollements - Variétés toriques normales	13
1.4 Morphismes toriques	14
1.5 La correspondance orbites-cônes	14
1.6 Diviseurs de Weil - Diviseurs de Cartier	15
1.6.1 Le diviseur d'un caractère	16
1.6.2 Calculs du groupe des classes et du groupe de Picard	16
1.6.3 Les diviseurs de Cartier : données locales	17
1.7 Coordonnées homogènes	18
1.7.1 L'anneau de coordonnées total	18
1.7.2 Homogénéité	19
1.7.3 L'ensemble exceptionnel	20
1.7.4 Bons quotients géométriques	20
1.7.5 Sous-variétés et équations homogènes	21
1.8 Théorie de l'intersection	22
1.8.1 L'anneau de Chow	22
1.8.2 La matrice d'intersection	24
1.9 Propriétés numériques	26
1.9.1 Equivalence numérique	26
1.9.2 Diviseurs sans point base, diviseurs numériquement effectifs	27
1.9.3 Diviseurs amples - Critère de Kleiman torique	28
1.10 Cone de Mori - Critères de projectivité	28

1.10.1	Cone de Mori - Cone nef	28
1.10.2	Projectivité des variétés toriques	30
1.11	Courbes extrémales - Classes contractibles - Courbes primitives	31
1.11.1	Courbes primitives	31
1.11.2	Courbes extrémales - Contractions extrémales	32
1.11.3	Classes contractibles	33
2	Générateurs du cône de Mori des variétés toriques $\mathbb{Q}$-factorielles complètes	35
2.1	Diviseurs rencontrés par une courbe : une propriété du rayon $\mathbb{R}_+[C]$	37
2.2	Courbes primitives et cône de Mori	41
2.2.1	La conjecture de Cox-von Renesse	41
2.2.2	Contrexemples à la conjecture de Cox-von Renesse	43
2.2.3	Le cas lisse - Courbes localement contractibles	47
2.3	Couloirs	50
2.3.1	Définitions	51
2.3.2	Couloirs droits	53
2.3.3	Couloirs circulaires	56
2.4	Décompositions directes de courbes	59
2.4.1	Le cas des surfaces	60
2.4.2	Courbes contractibles sur les variétés toriques singulières	62
2.4.3	Caractérisations combinatoires	64
2.5	Vers une décomposition indirecte des courbes	67
2.5.1	Couloirs circulaires polarisés	67
3	Points rationnels sur les corps C_1 dans les diviseurs de petit degré	75
3.1	Définitions - Théorème de J. Kollar - Exemples	76
3.1.1	Corps C_1 , exemples	76
3.1.2	Le théorème de Kollar	78
3.2	Points rationnels triviaux	79
3.3	Σ -convexité	81
3.4	Théorème principal	84
3.5	Cas ample et exemples	87
3.6	Cas semi-ample	93

Introduction

Nous étudions dans le présent mémoire deux aspects bien distincts des variétés toriques complètes. Le premier est de nature purement géométrique : nous étudions le cône de Mori des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles complètes (non nécessairement projectives) sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Le second est de nature arithmétique : nous donnons un critère d'existence de points rationnels dans des hypersurfaces de telles variétés, sur des corps quasi algébriquement clos (appelés aussi corps C_1).

Notons que la question de départ, suggérée par Marc Perret, était la question arithmétique. Ce n'est que tardivement que les outils combinatoires développés pour y répondre ont révélé leurs possibles applications à l'étude des questions de nature purement géométrique présentées ici.

Commençons par introduire l'aspect arithmétique. Un des problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres est la recherche de solutions d'équations diophantiennes. Il s'agit idéalement d'étudier aussi précisément que possible l'ensemble des points rationnels sur le corps $\mathbb{Q}$ de variétés algébriques définies sur $\mathbb{Q}$. Ce problème est en général d'une extrême complexité. En effet, si le cas des courbes coniques est bien connu depuis Ostrowski, celui des courbes elliptiques (les cubiques planes lisses possédant au moins un point rationnel) mène à la conjecture de Birch et Swinerton-Dyer, l'un des sept "problèmes du millénaire" !

Parmi les stratégies permettant d'avancer vers la résolution de tels problèmes on peut en distinguer deux particulières. La première consiste à considérer des variétés particulièrement commodes à étudier et la seconde à chercher les points rationnels sur des corps arithmétiquement simples. Nous combinons ces deux stratégies en cherchant des points rationnels dans des variétés relativement simples à appréhender puisqu'on choisit des hypersurfaces de variétés toriques (définies par une équation en coordonnées homogènes), sur des corps possédant relativement souvent des points rationnels : les corps quasi algébriquement clos. En outre nous ne traitons ici que la question de l'existence de points rationnels et ne considérons en aucun cas les propriétés de leur ensemble, ce qui simplifie encore davantage le problème.

Le choix du cadre est motivé par des résultats récents montrant que sur certains corps quasi algébriquement clos, toute variété propre, lisse et rationnellement connexe possède un point rationnel. Il s'agit de théorèmes d'Hélène Esnault pour le cas des corps finis (voir l'article original [Esn03] ou l'exposé d'Antoine Chambert-Loir au séminaire Bourbaki [CL04]) et de Graber, Harris et Starr pour le cas des corps de fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos (voir l'article original [TGS03] ou l'exposé d'Olivier Debarre au séminaire Bourbaki [Deb02].)

La question de la généralisation de ces résultats à tout corps quasi algébriquement clos (question 3.1.8 dans le chapitre 3 du présent mémoire) “fait partie du folklore” comme le dit Olivier Wittenberg ([Wit10], Question 1.12 page 69) et c’est dans cette idée que notre cadre d’étude initial a été choisi.

En effet les exemples les plus simples de variétés rationnellement connexes sont les hypersurfaces lisses de degré $d < n+1$ dans l’espace projectif $\mathbb{P}^n$. Ces variétés ont effectivement des points rationnels sur tout corps C_1 (par définition de corps C_1 !)

La notion de petit degré associée à la définition des corps C_1 se généralise aisément à l’espace projectif pondéré $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$. Le théorème 6.7 de [Kol96] montre que les hypersurfaces de degré pondéré $d < a_0 + \dots + a_n$ possèdent un point rationnel sur tout corps C_1 (qui satisfont une hypothèse supplémentaire toujours vérifiée en pratique).

Un exemple de telle hypersurface est donné par le revêtement de degré d' divisant d de $\mathbb{P}^n$ non ramifié hors d’une hypersurface lisse de degré $d < n + d'$. Cette variété peut être considérée comme plongée dans l’espace projectif pondéré $\mathbb{P}\left(1, \dots, 1, \frac{d}{d'}\right)$ (avec n un) et l’inégalité reliant d à n et d' correspond alors exactement à la condition de “petit degré pondéré”. Cette même condition assure, dans ce cas aussi, la connexité rationnelle de la variété, un argument de plus dans le sens d’une réponse positive à la question 3.1.8.

La variété $\tilde{Y}$ suivante constitue un troisième exemple de variété rationnellement connexe caractérisée par une inégalité de type “petit degré” :

Soit Y une hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n$, contenant avec multiplicité μ un sous-espace linéaire L de dimension k . Soit $\tilde{Y}$ la transformée stricte de Y dans l’éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de L . Alors $\tilde{Y}$ est un fibré en hypersurfaces de degré $d - \mu$ dans $\mathbb{P}^{k+1}$, paramétrées par $\mathbb{P}^{n-k}$. Puisqu’un fibré en variétés rationnellement connexes à base rationnellement connexe reste rationnellement connexe, $\tilde{Y}$ l’est donc si elle est lisse, et si chaque fibre est rationnellement connexe, c’est-à-dire si $d - \mu \leq k + 1$. On s’attend donc à ce que $\tilde{Y}$ possède au moins un point rationnel sur un corps C_1 dès que $d \leq \mu + k + 1$. Mais $\tilde{Y}$ est par définition plongée dans l’éclaté X de $\mathbb{P}^n$ le long de L , dont la graduation naturelle est une bigraduation, la notion de petit degré pour $\tilde{Y}$ n’est donc pas définie de manière évidente a priori.

Notre objectif a ainsi été dans un premier temps de dégager une notion d’hypersurface “de petit degré” propre à généraliser celle de $\mathbb{P}^n$ et celle de $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ donnée par le théorème de J. Kollar, c’est à dire assurant l’existence de points rationnels sur tout corps quasi algébriquement clos K (vérifiant l’hypothèse supplémentaire du théorème de Kollar).

Notre étude s’est donc naturellement portée sur la théorie de l’intersection des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes. Nous avons abouti à des résultats de la forme “si le diviseur effectif D a un petit nombre d’intersection avec un certain 1-cycle C alors il possède un point rationnel sur le corps K ” (voir les énoncés de nos théorèmes 3.4.4 et 3.5.3).

Il se trouve par exemple que l’inégalité $d \leq \mu + k + 1$ est précisément celle pour laquelle notre théorème 3.5.3 assure l’existence de points rationnels, et ceci même si $\tilde{Y}$ est singulière (voir théorème 3.5.4) ce qui, une fois encore va dans le sens d’une réponse affirmative à la question 3.1.8.

L’un des avantages de nos résultats par rapport aux théorèmes “difficiles” que sont les théorèmes de Esnault ou de Graber, Harris et Starr est qu’ils sont valables aussi bien pour

les hypersurfaces lisses que pour les singulières.

Rapidement, dans un souci d’effectivité, s’est posée la question du choix des 1-cycles pour déterminer la petitesse du degré d’un diviseur : Existe-t-il des “courbes test” privilégiées ? Et si oui sont elles en nombre fini ?

C’est pour répondre à ces questions que nous avons développé des outils combinatoires tels que les couloirs droits introduits à la sous-section 2.3.2. L’idée était au départ de d’utiliser le fait que si un diviseur D a un petit nombre d’intersection avec un 1-cycle C et que celui-ci peut s’écrire $C = C_1 + C_2$ alors D doit avoir un petit nombre d’intersection avec C_1 ou C_2 . Cette idée a partiellement abouti mais en utilisant les outils plus classiques de géométrie algébrique que sont les courbes extrémales (voir théorème 3.5.3).

Au tout départ (c’est à dire avant de découvrir le programme de Mori, les notions de classes extrémales ou contractibles et les deux beaux articles de Miles Reid et Cinzia Casagrande que sont [Rei83] et [Cas03]) nous avons adopté une démarche que l’on peut qualifier de frontale (voire brutale) : chercher directement une formule explicite donnant la décomposition d’une classe de 1-cycle en combinaison linéaire de classes de courbes toriques.

Plus précisément, le problème était le suivant : étant donnés les nombres d’intersection $(C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)}$ du 1-cycle C avec les diviseurs toriques D_ρ d’une variété torique $\mathbb{Q}$ -factorielle et complète X_Σ , comment peut on écrire la classe $[C]$ sous la forme

$$[C] = \sum_{i=1}^l \lambda_i [C_{\tau_i}] \text{ avec } C_{\tau_i} \text{ des courbes toriques et } \lambda_i \in \mathbb{Q}_+ \quad ?$$

En dimension 2, cela revient à calculer des combinaisons linéaires de lignes de la matrice d’intersection. Les formules sont relativement aisées à trouver (du moins pour les cas utiles à nos fins de calculs de degrés : voir la définition de 1-cycle graduant 3.4.2). Pour l’adapter en dimension supérieure il a fallu dans un premier temps un peu de témérité calculatoire et dans un second temps un peu d’astuce conceptuelle (cf les réseaux de couloirs droits de la proposition 2.3.5).

Les formules que nous obtenons sont similaires à celles qui apparaissent dans l’article “Intersection theory on toric varieties” de William Fulton et Bernd Sturmfels ([FS97]) même si elles répondent à des objectifs différents.

Finalement, les outils combinatoires que sont les couloirs ne nous sont d’aucune utilité pour la partie arithmétique du présent mémoire. Nous avons choisi de les présenter ici uniquement pour leurs applications géométriques. En effet, bien qu’ils ne nous aient permis de démontrer aucun nouveau résultat important pour l’instant, les couloirs (droits ou circulaires), apportent un point de vue en partie nouveau sur un certain nombre de résultats déjà connus, ce qui s’accompagne souvent d’un gain en précision et/ou en généralité.

Citons par exemple la proposition 4.1 d’Andrew Kresch ([Kre00] p. 381) qui décrit les propriétés des “arbres de courbes minimaux” reliant un point et un diviseur toriques. Les couloirs droits en fournissent une construction explicite. Citons également la proposition 9.3 de Tadao Oda ([Oda78] p. 68) qui permet de démontrer la non projectivité d’une variété

torique à partir de configurations particulières dans son éventail. Les couloirs circulaires en donnent une généralisation partielle.

Mais le domaine où notre approche s'est révélée la plus fructueuse (ou du moins la plus prometteuse) est sans aucun doute la description combinatoire des classes contractibles.

D'une part la notion de décomposabilité directe, basée sur la construction des réseaux de couloirs, nous a mené à de nouvelles caractérisations combinatoires des classes contractibles (dont nous avons étendu la définition aux variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles).

D'autre part la décomposition explicite des classes contractibles non extrémales, dont la formulation générale semblait hors de portée lors de la publication de [Cas03], apparaît grandement facilitée par notre méthode dès qu'il existe un couloir circulaire polarisable dans l'éventail (c'est à dire dans presque tous les cas connus).

Organisation du mémoire.

Nous donnons dans le chapitre 1 tous les ingrédients bien connus sur les variétés toriques sur un corps quelconque K nécessaires pour le développement de nos propres contributions, qui apparaissent dans les chapitres 2 (aspects géométriques) et 3 (aspects arithmétiques).

Ces ingrédients seront utilisés dans le cas où K est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans la partie géométrique, et dans le cas où K est un corps C_1 dans la partie arithmétique. Dans ce dernier cas, afin de pouvoir utiliser les coordonnées homogènes en toute généralité, nous ne considérons que les variétés toriques déployées sur K (c'est à dire dont le tore est déployé sur K). Bien entendu, cette hypothèse est vide sur le corps $\mathbb{C}$ algébriquement clos ! D'autre part, les deux parties nouvelles qui suivront nécessitent de supposer que la variété torique est simpliciale, ce que nous ferons donc dans ce chapitre 1.

Dans le chapitre 2, nous présentons des outils combinatoires nouveaux et quelques applications à l'étude du cône de Mori des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles complètes (projectives ou non).

Nous commençons à la section 2.1 par décrire une des propriétés commune à tous les 1-cycles dont les classes sont proportionnelles : l'ensemble des diviseurs toriques D_ρ rencontrés par ces 1-cycles. A la section 2.2 nous décrivons brièvement les résultats de D. Cox et C. von Renesse sur la génération du cône de Mori par les courbes primitives ainsi que la conjecture qui achève leur article [CvR09]. Nous donnons quelques contre-exemples à cette conjecture et en formulons une moins forte en précisant une famille de courbes primitives susceptible d'engendrer le cône de Mori : les *courbes localement contractibles*. La section 2.3 est consacrée à l'introduction des couloirs (droits et circulaires) dont le reste du chapitre explore les applications. Dans la section 2.4, nous étendons la notion de classe contractible à toutes les variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes et nous utilisons les couloirs droits pour en donner de nouvelles caractérisations combinatoires. Enfin la section 2.5 expose des possibilités d'utilisation des couloirs circulaires pour la description combinatoire des éventails non projectifs et esquisse une application possible à la décomposition des classes contractibles non extrémales.

Dans le chapitre 3, nous considérons un diviseur effectif D d'une variété torique ambiante X_Σ (simpliciale, complète et déployée). Il s'agit de donner une condition (aussi fine que possible) permettant d'assurer l'existence de points rationnels de D sur les corps C_1 .

Après quelques rappels sur les corps C_1 , nous énonçons le théorème de J. Kollar que nous souhaitons généraliser dans une première section. Nous montrons dans la deuxième section que le diviseur D possède bien un point rationnel s'il n'est pas de Cartier, ou bien s'il n'est pas numériquement effectif. On suppose donc dans les sections suivantes que D est de Cartier et nef. A la section 3 nous introduisons les notions d'enveloppe Σ -convexe et de clôture Σ -convexe qui sont nécessaires à la démonstration de notre résultat principal, lequel est énoncé et démontré dans la section 4 avec la plus grande généralité que nous avons pu atteindre (théorème 3.4.4). Pour rendre ce résultat plus maniable il est préférable de distinguer deux cas :

- (1) Le cas où le diviseur D est ample est traité à la section 5. Dans ce cas on peut reformuler le résultat sous une forme agréable (théorème 3.5.3), que nous appliquons à l'exemple ayant motivé ces recherches : l'éclaté d'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ contenant un sous espace linéaire avec grande multiplicité (théorème 3.5.4).
- (2) Le cas où D n'est pas ample n'a pas pu être traité par manque de temps. Nous le traiterons bien entendu dans un futur proche.

Chapitre 1

Variétés toriques - Généralités

Ce chapitre présente la théorie générale des variétés toriques déployées sur un corps quelconque. Dans tout ce chapitre K désigne un corps quelconque et $T \simeq (\mathrm{GL}_1)^n$ un tore déployé sur K (voir par exemple A. Borel, [Bor91] p. 114). Sauf mention explicite du contraire, les résultats présentés dans ce chapitre sont tirés de l'ouvrage de référence [CLS11]. La plupart des résultats se trouvent également dans le très classique [Ful93] ainsi que dans [Dan78] qui, contrairement aux précédents traite des variétés toriques sur un corps de base quelconque. Quelques remarques sont données, lorsque nécessaire, sur les résultats ou les preuves qui dépendent du corps de base.

Dans ce chapitre, on désignera par K un corps quelconque. On notera K_{sep} une clôture séparable et $\overline{K}$ une clôture algébrique.

1.1 Définition

Définition 1.1.1 *Une variété torique déployée sur K est une variété irréductible X contenant un tore T déployé sur K comme ouvert de Zariski et tel que l'action naturelle de T sur lui-même par multiplication s'étend en une action de T sur X tout entière.*

Toutes les variétés toriques considérées dans ce document sont des variétés toriques déployées. Tout au long du document le terme *variété torique* sera employé pour *variété torique déployée*.

Remarque – Puisque T est supposé déployé, son groupe des caractères M est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ d'après [Bor91] (paragraphe 8.4 et 8.5). Cela sera utile dans la section sur les coordonnées homogènes.

1.1.1 Caractères et groupes à un paramètre

Définition 1.1.2 *Soit $T \simeq (\mathrm{GL}_1)^n$ un tore déployé de dimension n . Un **caractère** (resp. un **groupe à un paramètre**) de T est une application $\chi : T \rightarrow \mathrm{GL}_1$ (resp. $\lambda : \mathrm{GL}_1 \rightarrow T$) qui est à la fois un morphisme de variétés affines et un morphisme de groupes. On note M*

(resp. N) leur ensemble. De plus pour tout $(\chi, \lambda) \in M \times N$ la composée $\chi \circ \lambda : \mathrm{GL}_1 \rightarrow \mathrm{GL}_1$ est un caractère de GL_1 , donc de la forme $t \mapsto t^k$, et l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\chi, \lambda) &\longmapsto k, \end{aligned}$$

met les deux groupes en dualité. On la note $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 1.1.3 La donnée de l'isomorphisme $T \simeq (\mathrm{GL}_1)^n$ induit des isomorphismes $M \simeq \mathbb{Z}^n$ et $N \simeq \mathbb{Z}^n$ définis respectivement par

$$m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \longmapsto (\chi^m : (a_1, \dots, a_n) \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}) \in M$$

et

$$u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n \longmapsto (\lambda^u : t \mapsto (t^{b_1}, \dots, t^{b_n})) \in N.$$

De plus à travers ces morphismes, le crochet de dualité s'identifie au produit scalaire usuel :

$$\chi^m \circ \lambda^u : t \mapsto t^{\langle m, u \rangle}$$

1.2 Cônes convexes et éventails

1.2.1 Cônes convexes

Définition 1.2.1 Un **cône polyédral convexe** dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$\sigma = \mathbf{Cone}(u_1, \dots, u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\},$$

où les u_i sont des vecteurs de $N_{\mathbb{R}}$. On dit que σ est le **cône engendré** par $u_1, \dots, u_k$. Le cône nul est par convention $\mathbf{Cone}(\emptyset) = \{0\}$.

Un **polytope** dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$P = \mathbf{Conv}(u_1, \dots, u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\},$$

où les u_i sont des vecteurs de $N_{\mathbb{R}}$. On dit que P est l'**enveloppe convexe** de $u_1, \dots, u_k$.

Proposition-Définition 1.2.2 Soit σ un cône dans $\mathbb{R}^n$. Le **cône dual** de σ est l'ensemble

$$\sigma^\vee = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } u \in \sigma\}.$$

Pour deux cônes σ_1 et σ_2 dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^\vee = \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$$

De plus si σ est un cône polyédral convexe alors il en est de même de son dual $\sigma^\vee$ et on a

$$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma.$$

Remarque – L'égalité $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ est vraie pour tout cône convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.3 Soit $m \in M_{\mathbb{R}}$ on définit l'hyperplan

$$H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\} \subset N_{\mathbb{R}},$$

et le demi-espace fermé

$$H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0\} \subset N_{\mathbb{R}}.$$

Par abus $H_0 = N_{\mathbb{R}}$ est considéré comme "hyperplan trivial".

Proposition-Définition 1.2.4 Soit σ un cône polyédral convexe de dimension d dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ et soit $\sigma^\vee$ son dual dans $M_{\mathbb{R}}$.

Une **face** de σ est un cône de la forme

$$\tau = \sigma \cap H_m.$$

Les **facettes** de σ sont ses faces de dimension $d - 1$. Une **face de dimension $k < d$** de σ est une facette d'une face de dimension $k + 1$, σ étant l'unique face de lui-même de dimension d (intersection de σ et de H_0). On note

$$\sigma(k) = \{\text{faces de } \sigma \text{ de dimension } k\}.$$

Une face τ de σ est appelée **face propre** si $\tau \neq \sigma$, on note alors $\tau < \sigma$. Le **bord du cône** σ est la réunion de toutes ses faces propres, on le note $\partial\sigma$. Le complémentaire du bord dans σ est appelé **intérieur relatif du cône**, on le note $\overset{\circ}{\sigma}$.

Définition 1.2.5 L'orthogonal d'une face α du cône polyédral convexe σ est le sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}$

$$\alpha^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in \alpha\}.$$

La **face duale** de α est la face de $\sigma^\vee$ définie par

$$\alpha^* = \sigma^\vee \cap \alpha^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ pour tout } u \in \alpha\}.$$

Proposition 1.2.6 Si α est une face du cône polyédral convexe σ et α^* sa face duale, on a

$$\dim(\alpha) + \dim(\alpha^*) = n.$$

De plus l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ est une bijection entre les faces de σ et les faces de $\sigma^\vee$, qui renverse l'inclusion :

$$\alpha \subset \beta \iff \beta^* \subset \alpha^*.$$

Proposition-Définition 1.2.7 Soit σ un cône polyédral convexe dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$. On dit que σ est **fortement convexe** s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (a) $\{0\}$ est une face de σ .

- (b) σ ne contient aucun sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ autre que $\{0\}$.
- (c) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.
- (d) Le cône dual $\sigma^{\vee}$ est de dimension n .

Définition 1.2.8 On dit qu'un cône $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ est un **cône polyédral rationnel** s'il est engendré par un nombre fini d'éléments du réseau $u_1, \dots, u_k \in N$. De plus on toujours on peut toujours supposer les u_i primitifs dans le réseau, c'est à dire à coefficients premiers entre eux. On les appelle alors les **générateurs minimaux** de σ . En outre on dit que

- (a) σ est un **cône simplicial** si ses générateurs minimaux sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.
- (b) σ est un **cône lisse** si la famille de ses générateurs minimaux peut être complétée en une $\mathbb{Z}$ -base du réseau N .

1.2.2 Eventails

Définition 1.2.9 Un **éventail** Σ dans $N_{\mathbb{R}}$ est une collection finie de cônes σ tel que

- (a) Tout $\sigma \in \Sigma$ est un cône polyédral rationnel fortement convexe.
- (b) Pour tout $\sigma \in \Sigma$, chaque face de σ est aussi dans Σ .
- (c) Pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, l'intersection des deux cônes $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face de chacun.

Pour tout $1 \leq k \leq n$ on appelle **k -cônes** de Σ , les cônes de l'éventail de dimension k et on note

$$\Sigma(k) = \{k\text{-cônes de } \Sigma\}$$

Le **support** de l'éventail Σ est le cône

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma.$$

Lemme 1.2.10 Les intérieurs relatifs de cônes de l'éventail Σ forment une partition de son support :

$$|\Sigma| = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \overset{\circ}{\sigma},$$

où l'on considère par convention que le cône nul est son propre intérieur relatif : $\overset{\circ}{\{0\}} = \{0\}$. Par conséquent pour tous cônes σ, τ de Σ on a

$$\overset{\circ}{\tau} \cap \sigma \neq \emptyset \implies \tau < \sigma.$$

Définition 1.2.11 Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$. On dit que Σ est

- (a) un **éventail lisse** si tous les cônes de Σ sont lisses.
- (b) un **éventail simplicial** si tous les cônes de Σ sont simpliciaux.
- (c) un **éventail complet** si son support $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ est égal à tout l'espace $N_{\mathbb{R}}$.

1.2.3 Multiplicité d'un cône simplicial

Définition 1.2.12 Pour tout $\sigma \in \Sigma$ on note N_σ le sous-réseau de N engendré par les éléments de $\sigma \cap N$ et $N(\sigma) = N/N_\sigma$. La dualité entre les réseaux N et M induit une dualité entre le sous-réseau $M(\tau) = M \cap \tau^\perp$ de M et le réseau quotient $N(\tau)$.

Définition 1.2.13 Soit $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_k) \in \Sigma(k)$ un cône simplicial. La **multiplicité** de σ est l'indice du sous-réseau engendré par $u_1, \dots, u_k$ dans le réseau N_σ :

$$\text{mult}(\sigma) = [N_\sigma : \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}u_i].$$

Lemme-Définition 1.2.14 Soit σ un cône simplicial de dimension $1 \leq k \leq n-1$ de Σ et soient $u_1, \dots, u_k$ ses générateurs minimaux. Le théorème de la base adaptée nous permet de considérer une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_k)$ soit une base de N_σ . La multiplicité de σ est alors le déterminant des générateurs minimaux $u_1, \dots, u_k$ dans la base $(e_1, \dots, e_k)$. En particulier pour $k = n$ on a

$$\Delta_\sigma := \text{mult}(\sigma) = |\det(u_1, \dots, u_n)|.$$

Lemme-Définition 1.2.15 Soit τ un cône simplicial de dimension $n-1$ de Σ et soient $u_1, \dots, u_{n-1}$ ses générateurs minimaux. Pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de N on a

$$\delta_\tau := \text{mult}(\tau) = \text{pgcd}(\det(u_1, \dots, u_{n-1}, e_i), i = 1, \dots, n).$$

Lemme-Définition 1.2.16 Soit Σ un éventail simplicial et $\tau \in \Sigma(n-1)$ un $(n-1)$ -cône de Σ . Le sous-réseau $M(\tau) = M \cap \tau^\perp$ de M est de rang 1. Pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ tel que $\tau + \rho = \sigma \in \Sigma(n)$ (il y en a au plus deux), il existe un unique générateur $m_{\sigma, \tau}$ de $M(\tau)$ tel que $\langle m_{\sigma, \tau}, u_\rho \rangle \geq 0$. De même il existe une unique classe de vecteurs $\overline{u_{\sigma, \tau}}$ modulo N_τ telle que tout $u \in \overline{u_{\sigma, \tau}}$ vérifie

$$\langle m_{\sigma, \tau}, u \rangle = 1,$$

c'est la base duale de $m_{\sigma, \tau}$.

Nous utiliserons la notation suivante :

Notation 1.2.17 Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ un cône simplicial de dimension n de Σ . Supposons l'ensemble $\sigma(1)$ de ses faces de dimension 1 numéroté de sorte que $\Delta_\sigma = \det(u_1, \dots, u_n)$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $v \in N$ on pose

$$\Delta_\sigma^{u_i, v} = \det(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

Remarque – La valeur de $\Delta_\sigma^{u_i, v}$ ne dépend pas de la numérotation de $\sigma(1)$ choisie. En fait d'après les formules de Cramer, $\Delta_\sigma^{u_i, v}$ n'est autre que la i -ème coordonnée de $\Delta_\sigma v$ dans la base $(u_1, \dots, u_n)$:

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_\sigma^{u_i, v}}{\Delta_\sigma} u_i.$$

Corollaire 1.2.18 *Soit Σ un éventail simplicial, $\tau \in \Sigma(n-1)$ et $\rho \in \Sigma(1)$ des cônes de Σ tels que $\tau + \rho = \sigma \in \Sigma(n)$. Pour tout $v \in N$, on a*

$$\langle m_{\sigma,\tau}, v \rangle = \frac{\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},v}}{\delta_{\tau}}$$

Si l'on note $\bar{v}$ la classe de v modulo N_{τ} , on en déduit que

$$\bar{v} = \langle m_{\sigma,\tau}, v \rangle \overline{u_{\sigma,\tau}} = \frac{\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},v}}{\delta_{\tau}} \overline{u_{\sigma,\tau}}.$$

En particulier on a

$$\overline{u_{\rho}} = \langle m_{\sigma,\tau}, u_{\rho} \rangle \overline{u_{\sigma,\tau}} = \frac{\Delta_{\sigma}}{\delta_{\tau}} \overline{u_{\sigma,\tau}}.$$

Preuve — D'après le théorème de la base adaptée, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit une base de N_{τ} . La classe de e_n modulo N_{τ} , engendre $N(\tau)$, on peut donc supposer que c'est $\overline{u_{\sigma,\tau}}$, c'est à dire que $\langle m_{\sigma,\tau}, e_n \rangle = 1$. Soit $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ un vecteur de N . Tout d'abord, comme $m_{\sigma,\tau} \in \tau^{\perp}$, on a

$$\langle m_{\sigma,\tau}, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \langle m_{\sigma,\tau}, e_i \rangle = v_n.$$

De plus pour tout $1 \leq i \leq n-1$, comme $e_i \in N_{\tau}$, on a $\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},e_i} = 0$. D'une part, par le lemme 1.2.15, ceci entraîne que

$$\delta_{\tau} = \text{pgcd}(\det(u_1, \dots, u_{n-1}, e_i), i = 1, \dots, n) = \text{pgcd}(\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},e_i}, i = 1, \dots, n) = \Delta_{\sigma}^{u_{\rho},e_n}.$$

D'autre part par linéarité, on a

$$\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},v} = \sum_{i=1}^n v_i \Delta_{\sigma}^{u_{\rho},e_i} = v_n \Delta_{\sigma}^{u_{\rho},e_n}.$$

On a donc bien

$$\langle m_{\sigma,\tau}, v \rangle = \frac{\Delta_{\sigma}^{u_{\rho},v}}{\delta_{\tau}} = v_n.$$

Les autres égalités en découlent immédiatement en remarquant que $\bar{e}_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. $\square$

1.3 Variétés toriques normales

1.3.1 Variétés toriques affines

Proposition-Définition 1.3.1 *Soit $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ un ensemble de caractères du tore déployé T . Soit $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ le groupe engendré par $\mathcal{A}$. On considère l'application suivante, à valeur dans l'espace affine de dimension s sur K :*

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} : T &\longrightarrow \mathbb{A}_K^s \\ t &\longmapsto (\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}). \end{aligned}$$

L'adhérence de Zariski de l'image de $\Phi_{\mathcal{A}}$ est une variété torique affine, d'anneau de coordonnées $K[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$. On la note $\mathbf{Y}_{\mathcal{A}}$. De plus le tore de $Y_{\mathcal{A}}$ a pour groupe de caractères $\mathbb{Z}\mathcal{A}$. En particulier la dimension de $Y_{\mathcal{A}}$ est égale au rang de $\mathbb{Z}\mathcal{A}$.

Proposition 1.3.2 (Lemme de Gordan) *Si σ est un cône polyédral rationnel de $N_{\mathbb{R}}$, le monoïde $\sigma^{\vee} \cap M$ est finiment engendré.*

Proposition-Définition 1.3.3 *Soit σ un cône polyédral rationnel de $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$, alors*

$$U_{\sigma} = \text{Spec}(K[\sigma^{\vee} \cap M])$$

est une variété torique affine normale. De plus on a

$$\dim(U_{\sigma}) = n \iff \text{le tore de } U_{\sigma} \text{ est } T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \text{GL}_1 \iff \sigma \text{ est fortement convexe.}$$

1.3.2 Recollements - Variétés toriques normales

Lemme 1.3.4 *Soient σ_1 et σ_2 deux cônes de Σ et $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ leur intersection. Soit $m \in \sigma_1^{\vee} \cap M$ tel que $\tau = \sigma_1 \cap H_m$. Alors on a $\tau = \sigma_2 \cap H_m$ et*

$$\tau^{\vee} \cap M = \sigma_1^{\vee} \cap M + \sigma_2^{\vee} \cap M = \sigma_1^{\vee} \cap M + \mathbb{N}(-m) = \sigma_2^{\vee} \cap M + \mathbb{N}m$$

Ainsi l'anneau $K[\tau^{\vee} \cap M]$ est égal aux anneaux localisés

$$K[\sigma_1^{\vee} \cap M]_{\chi^m} = K[\sigma_2^{\vee} \cap M]_{\chi^{-m}},$$

et la variété torique affine $U_{\tau} = \text{Spec}(K[\tau^{\vee} \cap M])$ est égale aux ouverts de Zariski

$$(U_{\sigma_1})_{\chi^m} = (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}.$$

Théorème-Définition 1.3.5 *Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$. Soit X_{Σ} la variété algébrique obtenue en recollant les variétés toriques affines U_{σ_1} et U_{σ_2} le long de leur ouvert commun $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Alors X_{Σ} est une variété torique séparée et normale.*

Proposition 1.3.6 *Soit X_{Σ} la variété torique définie à partir de l'éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$.*

- (a) *Si Σ est un éventail lisse alors la variété torique X_{Σ} est une variété lisse.*
- (b) *Si Σ est un éventail simplicial alors la variété torique X_{Σ} est une variété $\mathbb{Q}$ -factorielle, c'est à dire qui n'a que des singularités quotients finies.*
- (c) *Si Σ est un éventail complet alors la variété X_{Σ} est une variété complète, c'est à dire que le morphisme constant $X_{\Sigma} \rightarrow \{\text{pt}\}$ est propre.*

1.4 Morphismes toriques

Définition 1.4.1 Soient N_1 et N_2 deux réseaux, Σ_1 un éventail dans $(N_1)_{\mathbb{R}}$ et Σ_2 un éventail dans $(N_2)_{\mathbb{R}}$. Une application $\mathbb{Z}$ -linéaire $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$ est dite **compatible** avec les éventails Σ_1 et Σ_2 si pour tout cône $\sigma_1 \in \Sigma_1$ il existe un cône $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tel que $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$.

Définition 1.4.2 Soient Σ_1 un éventail dans $(N_1)_{\mathbb{R}}$, Σ_2 un éventail dans $(N_2)_{\mathbb{R}}$, et X_{Σ_1} , X_{Σ_2} les variétés toriques associées. On dit que le morphisme de variétés $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$ est un **morphisme torique** s'il est équivariant pour les actions des tores $\Phi_i : T_{N_i} \times X_{\Sigma_i} \rightarrow X_{\Sigma_i}$, $i = 1, 2$. Autrement ϕ est torique si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_{N_1} \times X_{\Sigma_1} & \xrightarrow{\Phi_1} & X_{\Sigma_1} \\ \phi|_{T_{N_1}} \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ T_{N_2} \times X_{\Sigma_2} & \xrightarrow{\Phi_2} & X_{\Sigma_2} \end{array}$$

Théorème 1.4.3 Soient N_1 et N_2 deux réseaux et Σ_i un éventail dans $(N_i)_{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$.

- (a) Si $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$ est une application $\mathbb{Z}$ -linéaire compatible avec Σ_1 et Σ_2 , alors il existe un morphisme torique $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$ tel que la restriction $\phi|_{T_{N_1}}$ soit l'application

$$\bar{\phi} \otimes 1 : N_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_1 \longrightarrow N_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_1$$

- (b) Réciproquement tout morphisme torique $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$ induit une application $\mathbb{Z}$ -linéaire $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$ compatible avec les éventails Σ_1 et Σ_2 .

Proposition 1.4.4 Soit N' un sous-réseau de N d'indice fini et soit $G = N/N'$ le groupe quotient. Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}} = N'_{\mathbb{R}}$. On note respectivement $X_{\Sigma, N}$ et $X_{\Sigma, N'}$ les variétés définies à partir de l'éventail Σ considéré par rapport à N ou à N' . Le morphisme torique

$$\phi : X_{\Sigma, N} \longrightarrow X_{\Sigma, N'}$$

induit par l'inclusion $N' \hookrightarrow N$ présente $X_{\Sigma, N}$ comme le quotient $X_{\Sigma, N'}/G$.

Définition 1.4.5 Soient Σ et Σ' deux éventails de $N_{\mathbb{R}}$. On dit que Σ est un **raffinement** de Σ' si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Les deux éventails ont même support $|\Sigma| = |\Sigma'|$.
(b) Tout cône de Σ' est contenu dans un cône de Σ , autrement dit l'application identité de N est compatible avec les deux éventails.

1.5 La correspondance orbites-cônes

Lemme 1.5.1 Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cône polyédral rationnel fortement convexe. Alors on a des isomorphismes naturels

$$O(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathrm{GL}_1) \simeq T_{N(\sigma)}$$

où $T_{N(\sigma)}$ est le tore associé à $N(\sigma) = N/N_{\sigma}$.

Théorème 1.5.2 (Correspondance orbite-cône) Soit X_Σ la variété torique associée à l'éventail Σ dans $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$.

(a) Il y a une correspondance bijective

$$\begin{aligned} \{\text{cônes de } \Sigma\} &\longleftrightarrow \{T_N\text{-orbites de } X_\Sigma\} \\ \sigma &\longleftrightarrow O(\sigma) \simeq \text{Hom}_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \text{GL}_1). \end{aligned}$$

(b) Pour chaque cône $\sigma \in \Sigma$, $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$.

(c) L'ouvert affine U_σ est égal à la réunion d'orbites

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} O(\tau)$$

(d) τ est une face de σ si et seulement si $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ et

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau < \sigma} O(\sigma).$$

où $\overline{O(\tau)}$ désigne l'adhérence à la fois pour la topologie de Zariski et pour la topologie usuelle.

Proposition-Définition 1.5.3 Pour tout cône $\tau \in \Sigma$, si l'on note $\bar{\sigma}$ l'image de $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ dans $N(\tau)_\mathbb{R}$, alors l'ensemble

$$\text{Star}(\tau) := \{\bar{\sigma} \subset N(\tau)_\mathbb{R} \mid \tau < \sigma\}$$

est un éventail dans $N(\tau)_\mathbb{R} = N/N_\tau \otimes \mathbb{R}$. La sous-variété $V(\tau) := \overline{O(\tau)}$ est isomorphe à la variété torique $X_{\text{Star}(\tau)}$. On dit que $V(\tau)$ est une sous-variété torique de X_Σ .

1.6 Diviseurs de Weil - Diviseurs de Cartier

Définition 1.6.1 On note respectivement $\text{Div}(X_\Sigma)$ et $\text{CDiv}(X_\Sigma)$ le groupe des diviseurs de Weil et le groupe des diviseurs de Cartier sur X_Σ . Le sous groupe des diviseurs principaux est noté $\text{Div}_0(X_\Sigma)$. On note

$$\text{Cl}(X_\Sigma) = \text{Div}(X_\Sigma) / \text{Div}_0(X_\Sigma)$$

le groupe des classes de X_Σ et

$$\text{Pic}(X_\Sigma) = \text{CDiv}(X_\Sigma) / \text{Div}_0(X_\Sigma)$$

son groupe de Picard. La classe du diviseur D est notée $[D]$.

Définition 1.6.2 Si $D \geq 0$ est un diviseur de Weil effectif on dit que la classe $[D] \in \text{Cl}(X_\Sigma)$ est une classe effective. Le monoïde des classes effectives est noté

$$\text{Eff}(X_\Sigma) \subset \text{Cl}(X_\Sigma),$$

et pour tout $D \in \text{Div}(X_\Sigma)$ on note

$$[D]^+ = [D] \cap \text{Eff}(X_\Sigma).$$

1.6.1 Le diviseur d'un caractère

Définition 1.6.3 Soient X une variété normale et D un diviseur premier sur X . On note

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{\phi \in K(X) \mid \exists U \subset X \text{ ouvert tel que } U \cap D \neq \emptyset \text{ et } \phi \in \mathcal{O}_U\}$$

l'anneau de valuation discrète associé à l'ordre d'annulation le long de D

$$\nu_D : K(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.6.4 Soit X_Σ une variété torique. Pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ et tout $m \in M$, on a

$$\nu_{D_\rho}(\chi^m) = \langle m, u_\rho \rangle.$$

Corollaire-Définition 1.6.5 Pour tout $m \in M$, le caractère χ^m est une fonction rationnelle sur X_Σ et on a

$$\operatorname{div}(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho.$$

En particulier le sous-groupe $\operatorname{Div}_{0,T_N}(X_\Sigma)$ des diviseurs principaux sur X_Σ et invariants sous l'action du tore T_N est engendré par les diviseurs

$$\mathbf{E}_i = \operatorname{div}(\chi^{e_i}) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle e_i, u_\rho \rangle D_\rho$$

où $e_1, \dots, e_n$ est une base donnée de M . Lorsque $\Sigma(n) \neq \emptyset$ ce groupe est isomorphe à M .

1.6.2 Calculs du groupe des classes et du groupe de Picard

Définition 1.6.6 Le sous-groupe des diviseurs de Weil invariants sous l'action du tore T_N est

$$\operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma) := \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho$$

De même les diviseurs de Cartier invariants sous l'action du tore T_N forment un sous-groupe

$$\operatorname{CDiv}_{T_N}(X_\Sigma) \subset \operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$$

Remarque – Tout diviseur principal est en particulier un diviseur de Cartier. On a donc les inclusions :

$$\operatorname{Div}_{0,T_N}(X_\Sigma) \subset \operatorname{CDiv}_{T_N}(X_\Sigma) \subset \operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma).$$

Théorème 1.6.7 Soit Σ un éventail dans $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma(n) \neq \emptyset$ et soit X_Σ la variété torique associée. On a les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma) \xrightarrow{\deg} \operatorname{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{CDiv}_{T_N}(X_\Sigma) \xrightarrow{\deg} \operatorname{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

où $\operatorname{div}(m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho$ et $\deg(D) = [D]$

Notation 1.6.8 Pour alléger les écritures, nous écrirons souvent $\sum_\rho$ au lieu de $\sum_{\rho \in \Sigma(1)}$.

Corollaire-Définition 1.6.9 Dans les conditions du théorème 1.6.7 ($\Sigma(n) \neq \emptyset$), le groupe de Picard est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang

$$\rho_{X_\Sigma} := \text{Card}(\Sigma(1)) - n.$$

On appelle ρ_{X_Σ} le nombre de Picard de X_Σ .

Proposition 1.6.10 Soit X_Σ la variété torique associée à l'éventail Σ les assertions suivantes sont équivalentes : (a) $\text{Div}(X_\Sigma) = \text{CDiv}(X_\Sigma)$.

(b) $\text{Cl}(X_\Sigma) = \text{Pic}(X_\Sigma)$.

(c) X_Σ est lisse.

Proposition 1.6.11 Soit X_Σ la variété torique associée à l'éventail Σ les assertions suivantes sont équivalentes : (a) Tout diviseur de Weil a un multiple entier qui est Cartier.

(b) $\text{Pic}(X_\Sigma)$ est un sous-groupe d'indice fini dans $\text{Cl}(X_\Sigma)$.

(c) X_Σ est $\mathbb{Q}$ -factorielle.

1.6.3 Les diviseurs de Cartier : données locales

Proposition 1.6.12 Pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a

$$\text{Pic}(U_\sigma) = 0.$$

Autrement dit pour tout $D \in \text{CDiv}_{T_N}$ $D|_{U_\sigma}$ est le diviseur d'un caractère.

Remarque – La définition suivante n'est pas présente dans les références standards. Nous l'introduisons car elle nous sera d'une grande utilité au chapitre 3.

Définition 1.6.13 Pour toute partie $J \subset \Sigma(1)$ on note

$$\mathcal{E}(J) = \left\{ \sum_{\rho \notin J} a_\rho D_\rho \right\} \subset \text{Div}_{T_N}(X_\Sigma)$$

l'ensemble des diviseurs T_N -invariants dont le support ne contient aucun des D_ρ pour $\rho \in J$. Pour tout diviseur de Weil $D \in \text{Div}(X_\Sigma)$ on note de même

$$\mathcal{E}_D(J) = \mathcal{E}(J) \cap [D] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_D^+(J) = \mathcal{E}(J) \cap [D]^+.$$

Théorème 1.6.14 Soit Σ un éventail dans $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma(n) \neq \emptyset$ et soit X_Σ la variété torique associée. Pour un diviseur T_N -invariant $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) D est Cartier.

(b) D est principal sur chaque ouvert U_σ , $\sigma \in \Sigma(n)$.

- (c) Pour chaque $\sigma \in \Sigma(n)$ il existe un unique $m_\sigma \in M$ tel que $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$.
- (d) Pour chaque $\sigma \in \Sigma(n)$ il existe un unique diviseur T_N -invariant $D_{(\sigma)} \in \mathcal{E}_D(\sigma(1))$.

Preuve — L'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) découle immédiatement de la proposition 1.6.12. L'implication (c) $\Rightarrow$ (b) est immédiate également en remarquant que $D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho D_\rho$. De même (b) entraîne immédiatement l'existence des $m_\sigma, \sigma \in \Sigma(n)$. Pour montrer leur unicité, soient $\sigma \in \Sigma(n)$ et $m_\sigma, m'_\sigma \in M$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \langle m_\sigma, u_\rho \rangle = \langle m'_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho \quad \text{pour tout } \rho \in \sigma(1) &\Leftrightarrow \langle m_\sigma - m'_\sigma, u_\rho \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in \sigma(1) \\ &\Leftrightarrow m_\sigma - m'_\sigma \in \sigma^\perp \cap M = \{0\}, \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant due au fait que σ est de dimension n .

Enfin l'équivalence (c) $\Leftrightarrow$ (d) peut se décomposer ainsi :

$$\begin{aligned} &\forall \sigma \in \Sigma(n), \exists! m_\sigma \in M, \langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho \quad \text{pour tout } \rho \in \sigma(1) \\ \Leftrightarrow &\forall \sigma \in \Sigma(n), \exists! E_\sigma = \operatorname{div}(\chi^{m_\sigma}) = \sum_\rho b_\rho D_\rho \in [0], \quad b_\rho = -a_\rho \quad \text{pour tout } \rho \in \sigma(1) \\ \Leftrightarrow &\forall \sigma \in \Sigma(n), \exists! D_{(\sigma)} = D + E_\sigma = \sum_\rho c_\rho D_\rho \in [D], \quad c_\rho = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in \sigma(1). \end{aligned}$$

□

Définition 1.6.15 Les caractères $m_\sigma \in M, \sigma \in \Sigma(n)$ du théorème 1.6.14 constituent ce qu'on appelle les données locales du diviseur de Cartier D . Par extension, on désignera aussi par données locales l'ensemble des diviseurs T_N -invariants $\{D_{(\sigma)} \mid \sigma \in \Sigma(n)\}$.

Remarque – Les m_σ dépendent des coefficients a_ρ du diviseur $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$. Les $D_{(\sigma)}$, eux, ne dépendent que de la classe $[D]$.

1.7 Coordonnées homogènes

1.7.1 L'anneau de coordonnées total

Définition 1.7.1 L'anneau de coordonnées total de la variété torique X_Σ est l'anneau de polynômes engendré par les indéterminées x_ρ pour $\rho \in \Sigma(1)$:

$$S = K[x_\rho, \rho \in \Sigma(1)].$$

Définition 1.7.2 Pour tout $\alpha = (a_\rho) \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ on note $x^\alpha = \prod_\rho x_\rho^{a_\rho} \in S$. Le degré du monôme x^α est par définition

$$\deg(x^\alpha) = \left[\sum_\rho a_\rho D_\rho \right] \in \operatorname{Cl}(X_\Sigma).$$

On note S_β l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $\beta \in \text{Cl}(X_\Sigma)$:

$$S_\beta = \bigoplus_{\deg(x^\alpha)=\beta} Kx^\alpha,$$

L'anneau de coordonnées total est ainsi (naturellement) muni d'une structure d'algèbre graduée :

$$S = \bigoplus_{\beta \in \text{Cl}(X_\Sigma)} S_\beta.$$

1.7.2 Homogénéité

Définition 1.7.3 On définit le groupe algébrique G dont le groupe des caractères est le groupe des classes de X_Σ :

$$G = \text{Hom}(\text{Cl}(X_\Sigma), \text{GL}_1).$$

Puisque T_N est supposé déployé, son groupe des caractères M est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ comme il l'a été remarqué en 1.1. Dans la suite duale de 1.6.7 comme ci-dessous, on obtient donc $\text{Hom}(M, \text{GL}_1) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, \text{GL}_1)^n \simeq (\text{GL}_1)^n \simeq T_N$.

Proposition 1.7.4 En appliquant le foncteur $\text{Hom}(-, \text{GL}_1)$ à la suite exacte courte du théorème 1.6.7, on obtient la suite exacte courte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow (\text{GL}_1)^{\Sigma(1)} \longrightarrow T_N \longrightarrow 1.$$

On en déduit que sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K on a

$$\begin{aligned} G_{\overline{K}} &= \left\{ (t_\rho) \in (\overline{K})^{\Sigma(1)} \mid \prod_{\rho} t_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle} = 1 \text{ pour tout } m \in M \right\} \\ &= \left\{ (t_\rho) \in (\overline{K})^{\Sigma(1)} \mid \prod_{\rho} t_\rho^{\langle e_i, u_\rho \rangle} = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \right\}. \end{aligned}$$

Lemme 1.7.5 A chaque classe $\beta = [\sum_{\rho} a_{\rho} D_{\rho}] \in \text{Cl}(X_\Sigma)$ correspond un caractère du groupe G :

$$\begin{aligned} \chi^\beta : G &\longrightarrow \text{GL}_1 \\ (t_\rho) &\longmapsto \prod_{\rho} t_\rho^{a_{\rho}}, \end{aligned}$$

et pour tout polynôme homogène de degré β , $f \in S_\beta$ on a

$$\forall g \in G, \forall x \in \mathbb{A}_K^{\Sigma(1)}, f(g \cdot x) = \chi^\beta(g) f(x).$$

1.7.3 L'ensemble exceptionnel

Définition 1.7.6 Pour chaque cône $\sigma \in \Sigma$ on définit le monôme impertinent

$$x^{\hat{\sigma}} := \prod_{\rho \notin \sigma} x_{\rho}.$$

L'idéal engendré par tous ces monômes est appelé idéal impertinent :

$$B(\Sigma) = \langle x^{\hat{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma \rangle \subset S.$$

L'ensemble exceptionnel est la réunion de sous-espaces

$$Z(\Sigma) = \mathbf{V}(B(\Sigma)) \subset \mathbb{A}_K^{\Sigma(1)}$$

Définition 1.7.7 Un sous-ensemble $P \subset \Sigma(1)$ est une collection primitive si :

- (a) $P \not\subset \sigma(1)$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.
 - (b) Pour toute partie stricte $Q \subsetneq P$ il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $Q \subset \sigma(1)$.
- On note $\mathcal{P}_{\Sigma}$ l'ensemble des collections primitives de Σ .

Proposition 1.7.8 Les composantes irréductibles de l'ensemble exceptionnel $Z(\Sigma)$ sont les $\mathbf{V}(x_{\rho}, \rho \in P)$ pour $P \in \mathcal{P}_{\Sigma}$ et on a

$$B(\Sigma) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\Sigma}} \langle x_{\rho}, \rho \in P \rangle, \quad Z(\Sigma) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{\Sigma}} \mathbf{V}(x_{\rho}, \rho \in P).$$

1.7.4 Bons quotients géométriques

Définition 1.7.9 Soit G un groupe algébrique qui agit sur une variété affine $X = \text{Spec}(R)$. L'action induite sur R est définie par

$$\forall g \in G, \forall f \in R, \forall x \in X, (g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

On définit l'anneau des invariants

$$\begin{aligned} R^G &= \{f \in R \mid g \cdot f = f \text{ pour tout } g \in G\} \\ &= \{f \in R \mid f(G \cdot x) = f(x)\} \end{aligned}$$

Définition 1.7.10 Soit G un groupe algébrique qui agit sur une variété X et $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme constant sur chaque G -orbite. Alors π est un bon quotient catégorique si :

- (a) Pour tout ouvert $U \subset Y$, l'application naturelle $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$ induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_Y(U) \simeq \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$$

- (b) Si $W \subset X$ est fermé et G -invariant, alors $\pi(W) \subset Y$ est fermé.

- (c) Si W_1 et W_2 sont fermés, disjoints, et G -invariants dans X alors $\pi(W_1)$ et $\pi(W_2)$ sont disjoints dans Y .

Si de plus toutes les G -orbites sont fermées alors on dit que π est un bon quotient géométrique.

Proposition-Définition 1.7.11 *Soit Σ un éventail simplicial. Soit $\{e_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ la base canonique du réseau $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$. Pour chaque $\sigma \in \Sigma$ posons $\tilde{\sigma} = \text{Cone}(e_\rho \mid \rho \in \sigma(1))$. Alors $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ est un éventail dans $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ et on a*

$$X_{\tilde{\Sigma}} = \mathbb{A}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma).$$

Théorème 1.7.12 *Soit Σ un éventail simplicial complet et X_Σ la variété torique associée. Soit G le groupe algébrique défini en 1.7.3. On suppose que la partie de torsion du groupe de classes $\text{Cl}(X_\Sigma)$ est d'ordre premier à la caractéristique de K . Alors*

- (a) *L'application $e_\rho \mapsto u_\rho$ définit un morphisme de réseaux $\bar{\pi} : \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \rightarrow N$ qui est compatible avec les éventails $\tilde{\Sigma}$ dans $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ et Σ dans $N_{\mathbb{R}}$.*
- (b) *Le morphisme torique associé $\pi : \mathbb{A}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma) \rightarrow X_\Sigma$ est un bon quotient géométrique, de sorte que*

$$X_\Sigma \simeq (\mathbb{A}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)) // G.$$

Remarque – La preuve originale du point (b) (Th 2.1 dans [Cox95]) invoque le théorème 1.1 du *Geometric Invariant Theory* de J. Fogarty et D. Mumford ([FM82]) et son amplification 1.3. Ces deux résultats ne dépendent que du caractère réductif du groupe G par lequel on quotiente. Si l'on note F la partie de torsion du groupe des classes $\text{Cl}(X_\Sigma)$ et s le cardinal de $\Sigma(1)$, on peut écrire

$$\text{Cl}(X_\Sigma) \simeq F \times \mathbb{Z}^{s-n},$$

de sorte que

$$G = \text{Hom}(\text{Cl}(X_\Sigma), \text{GL}_1) \simeq \text{Hom}(F, \text{GL}_1) \times (\text{GL}_1)^{s-n}.$$

Le facteur de droite est bien sûr un tore réductif. Celui de gauche est un schéma en groupes fini donc réductif par l'hypothèse faite sur le groupe des classes.

Définition 1.7.13 *Soit Σ un éventail simplicial. Pour tout point $p \in X_\Sigma$ on appelle coordonnées homogènes de p tout point $x \in \pi^{-1}(p)$. On dit qu'un polynôme homogène $f \in S_\beta$ s'annule en p s'il s'annule en l'un des $x \in \pi^{-1}(p)$ (et donc en tous puisque $\pi^{-1}(p) = G \cdot x$ et pour tout $g \in G$, $f(g \cdot x) = \chi^\beta(g)f(x)$).*

1.7.5 Sous-variétés et équations homogènes

Définition 1.7.14 *Un idéal $I \subset S$ est dit homogène s'il est engendré par des polynômes homogènes.*

Proposition 1.7.15 *Soit S l'anneau de coordonnées total de la variété torique simpliciale X_Σ . Alors :*

- (a) *Si $I \subset S$ est un idéal homogène, alors*

$$\mathbf{V}(I) = \{\pi(x) \in X_\Sigma \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$$

est une sous-variété fermée de X_Σ .

- (b) *Toute sous-variété fermée est de cette forme.*
- (c) *En particulier si D est une hypersurface de X_Σ , il existe un polynôme homogène $f \in S$ tel que $D = \mathbf{V}(f) = \{\pi(x) \in X_\Sigma \mid f(x) = 0\}$*

1.8 Théorie de l'intersection

1.8.1 L'anneau de Chow

Définition 1.8.1 Soit X une variété algébrique quelconque. Le groupe de Chow

$$A_k(X) = Z_k(X) / \text{Rat}_k(X)$$

est le quotient du groupe

$$Z_k(X) = \bigoplus_i \mathbb{Z}V_i$$

des k -cycles de X (combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers de sous-variétés irréductibles de dimension k , V_i) par le sous-groupe

$$\text{Rat}_k(X) = \bigoplus_{i,j} \text{div}_{W_i}(f_j)$$

des sommes formelles de diviseurs de fonctions rationnelles, f_j , sur des sous-variétés irréductibles de dimension $k+1$, W_i . On note $[V]$ la classe du cycle V et $V \sim V'$ l'équivalence linéaire entre les cycles V et V' .

En particulier pour $k = n-1$ on retrouve le groupe des classes $A_{n-1}(X) = \text{Cl}(X)$. On a vu au chapitre précédent (théorème 1.6.7) que le groupe des classes d'une variété torique normale est engendré par les classes de diviseurs toriques $[D_\rho]$. Ceci se généralise comme suit

Lemme 1.8.2 Soit X_Σ une variété torique normale. Pour tout $1 \leq k \leq n$ le groupe de Chow $A_k(X_\Sigma)$ est engendré par les classes de sous-variétés toriques de dimension k $[V(\alpha)]$, $\alpha \in \Sigma(n-k)$.

Théorème 1.8.3 (Fulton, Sturmfels [FS97]) Si X_Σ est une variété torique simpliciale et complète, pour tout $1 \leq k \leq n-1$ on a une suite exacte

$$\bigoplus_{\zeta \in \Sigma(n-k-1)} M(\zeta)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\tau \in \Sigma(n-k)} \mathbb{Q}[\mathbf{V}(\tau)] \xrightarrow{\beta} A_k(X_\Sigma)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

où $M(\zeta) = M/M_\zeta$ est le groupe des caractères du tore de $\mathbf{V}(\zeta)$, β est la surjection naturelle $\sum_\tau \lambda_\tau [C_\tau] \mapsto [\sum_\tau \lambda_\tau C_\tau]$ et

$$\alpha(m) = \sum_{\substack{\tau \in \Sigma(n-k) \\ \zeta < \tau}} \langle m, u_{\sigma, \tau} \rangle [\mathbf{V}(\tau)].$$

Corollaire 1.8.4 *Sur une variété torique simpliciale et complète X_Σ l'espace des relations rationnelles entre classes de courbes toriques est engendré par les relations de la forme*

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} \frac{\det(u_1, \dots, u_{n-1}, u_\rho)}{\text{mult}(\zeta)} [\mathbf{V}(\zeta)][D_\rho] = \sum_{\rho + \zeta \in \Sigma(n-1)} \frac{\det(u_1, \dots, u_{n-1}, u_\rho)}{\delta_{\zeta+\rho}} [C_{\zeta+\rho}] = 0$$

pour $u_1, \dots, u_{n-1} \in \Sigma(1)$ et $\zeta \in \Sigma(n-2)$.

Définition 1.8.5 *On définit le groupe de Chow $A^k(X_\Sigma)$ comme groupe dual de $A_k(X_\Sigma)$. Dans le cas d'une variété lisse celui-ci s'identifie canoniquement au groupe $A_{n-k}(X_\Sigma)$.*

On peut montrer (voir [Ful84]) que si X_Σ est projective et lisse, il existe un produit

$$A^k(X_\Sigma) \times A^l(X_\Sigma) \longrightarrow A^{k+l}(X_\Sigma)$$

appelé produit d'intersection car il coïncide avec l'intersection géométrique des cycles lorsque celle-ci est transverse.

Si X_Σ n'est que $\mathbb{Q}$ -factorielle, on peut encore définir un produit d'intersection mais sur les groupes de Chow rationnels

$$A^k(X_\Sigma)_\mathbb{Q} := A^k(X_\Sigma) \otimes \mathbb{Q}$$

Le produit d'intersection des classes de deux sous-variétés transverses V et W est alors un multiple rationnel de la classe de l'intersection géométrique $V \cap W$.

De plus le morphisme naturel “deg” : $A^n(X_\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$, tensorisé par $\mathbb{Q}$, met en dualité les espaces vectoriels $A_k(X_\Sigma)_\mathbb{Q}$ et $A^k(X_\Sigma)_\mathbb{Q}$ par la composition avec le produit d'intersection

$$\begin{aligned} A_k(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \times A^k(X_\Sigma)_\mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ ([V], [W]) &\longmapsto \text{“deg”}([V] \cdot [W]) \end{aligned}$$

Lorsque X_Σ est une variété torique simpliciale, d'après le lemme 1.8.2, il suffit de définir le produit d'intersection entre sous-variétés toriques, et quitte à prendre des variétés rationnellement équivalentes on peut se ramener au cas où celles-ci sont transverses ou disjointes. On a alors le résultat suivant :

Lemme 1.8.6 *Soit X_Σ une variété torique simpliciale. Soient $\alpha \in \Sigma(k)$ et $\beta \in \Sigma(l)$. Alors*

$$[V(\alpha)] \cdot [V(\beta)] = \begin{cases} \frac{\text{mult}(\alpha) \text{mult}(\beta)}{\text{mult}(\gamma)} [V(\gamma)] & \text{si } \gamma = \alpha + \beta \in \Sigma(k+l) \\ 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Sigma. \end{cases}$$

Ceci nous permet de définir l'anneau de Chow d'une variété torique simpliciale :

Proposition-Définition 1.8.7 *Soit X_Σ une variété torique simpliciale . Le produit d'intersection*

$$\begin{aligned} A^k(X)_\mathbb{Q} \times A^l(X)_\mathbb{Q} &\longrightarrow A^{k+l}(X)_\mathbb{Q} \\ ([V], [W]) &\longmapsto [V] \cdot [W] \end{aligned}$$

fait de

$$A^\bullet(X)_\mathbb{Q} = \bigoplus_{k=0}^n A^k(X)_\mathbb{Q}$$

une $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée.

1.8.2 La matrice d'intersection

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au calcul du nombre d'intersections $C \cdot D$ entre un 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ et un diviseur de Weil $D \in \text{Div}(X_\Sigma)$, défini à partir du produit des classes dans l'anneau de Chow et du morphisme "degré" $\text{deg} : A^n(X_\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$C \cdot D = \text{"deg"}([C] \cdot [D])$$

Dans le cas où C et D sont irréductibles, complets, lisses et transverses il s'agit exactement du nombre de points d'intersection des deux sous-variétés. Pour le cas général on se ramène, grâce au lemme 1.8.2 au calcul du nombre d'intersections entre courbes et diviseurs toriques : $C_\tau \cdot D_\rho$.

Dans le cas où l'une n'est pas contenu dans l'autre on peut appliquer directement le lemme 1.8.6 avec $k = n - 1$ et $l = 1$:

Lemme 1.8.8 *Soient $\tau \in \Sigma(n - 1)$ et $\rho \in \Sigma(1)$. Soient $C_\tau = V(\tau)$ et $D_\rho = V(\rho)$ les sous-variétés toriques associées. Alors*

$$C_\tau \cdot D_\rho = \begin{cases} \frac{\text{mult}(\tau)}{\text{mult}(\sigma)} & \text{si } \sigma = \tau + \rho \in \Sigma(n) \\ 0 & \text{si } \tau + \rho \notin \Sigma. \end{cases}$$

Preuve — C'est une application directe de la formule du lemme 1.8.6 (la multiplicité d'un cône de dimension 1 ne peut être que 1). $\square$

Pour pouvoir calculer le nombre d'intersections entre tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ et tout diviseur $D \in \text{Div}(X_\Sigma)$, il reste à traiter le cas où la courbe torique C_τ est contenue dans le diviseur torique D_ρ . On utilise pour cela le lemme fondamental suivant :

Lemme 1.8.9 *Pour tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ on a*

$$\sum_{\rho} C \cdot D_{\rho} u_{\rho} = 0 \in N_{\mathbb{R}}, \quad (1.1)$$

Preuve — Le lemme 1.6.5 nous dit que les générateurs de $\text{Div}_0(X_\Sigma)$ sont les

$$E_i = \sum_{\rho} u_{\rho,i} D_{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a ainsi

$$\sum_{\rho} C \cdot D_{\rho} u_{\rho,i} = C \cdot E_i = 0,$$

d'où le résultat. $\square$

Notation 1.8.10 Pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$ on note $\mathcal{S}_\tau$ la réunion des deux n -cônes qui contiennent τ . L'ensemble des 1-cônes de Σ contenus dans cette réunion est notée $\mathcal{S}_\tau(1)$.

D'après le lemme précédent, chaque 1-cycle donne une relation entre les générateurs primitifs u_ρ . Dans le cas d'une courbe torique C_τ , ceci nous donne le résultat suivant :

Théorème 1.8.11 Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ et C_τ la courbe torique associée. Soient σ_0 et σ_n les deux n -cônes de Σ tels que $\tau = \sigma_0 \cap \sigma_n$ et notons $\sigma_0(1) = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$, $\sigma_n(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n\}$. Soit $u_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ l'écriture de u_0 dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. Alors on a

$$C_\tau \cdot D_{\rho_0} = \frac{\delta_\tau}{\Delta_{\sigma_0}}, \quad C_\tau \cdot D_{\rho_n} = \frac{\delta_\tau}{\Delta_{\sigma_n}},$$

pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$C_\tau \cdot D_{\rho_i} = -\lambda_i \frac{\delta_\tau}{\Delta_{\sigma_0}} = -\frac{\Delta_{\sigma_n}^{u_i, u_0} \delta_\tau}{\Delta_{\sigma_0} \Delta_{\sigma_n}},$$

et pour tout $\rho \notin \mathcal{S}_\tau(1)$ on a

$$C_\tau \cdot D_\rho = 0.$$

Remarque – Les rôles de σ_0 et σ_n étant symétriques, on peut bien entendu écrire $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i u_i$ et en déduire $C_\tau \cdot D_{\rho_i} = -\mu_i \frac{\delta_\tau}{\Delta_{\sigma_n}} = -\frac{\Delta_{\sigma_0}^{u_i, u_n} \delta_\tau}{\Delta_{\sigma_0} \Delta_{\sigma_n}}$.

Pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$, la forme de la réunion $\mathcal{S}_\tau$ est déterminée par le signe des nombres d'intersection $C_\tau \cdot D_\rho$ pour $\rho \in \tau(1)$. En effet d'après la relation

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} C \cdot D_\rho u_\rho = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)} C \cdot D_\rho u_\rho = 0,$$

on a $C_\tau \cdot D_\rho > 0$ (resp. $= 0$, < 0) si et seulement si $\mathcal{S}_\tau$ est strictement convexe (resp. plat, strictement concave) le long de sa face Cone $(\tau(1) \setminus \{\rho\})$.

Définition 1.8.12 Pour tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ on note $\mathcal{J}_C^+$ (resp. $\mathcal{J}_C^-$) l'ensemble des 1-cônes de Σ associés à des diviseurs toriques dont le nombre d'intersection avec C est strictement positif (resp. négatif) :

$$\mathcal{J}_C^\pm = \{\rho \in \Sigma(1) \mid C \cdot D_\rho \gtrless 0\}.$$

La réunion des deux ensembles est notée

$$\mathcal{J}_C = \mathcal{J}_C^+ \cup \mathcal{J}_C^-.$$

On est à présent en mesure de construire la matrice d'intersection de X_Σ :

Définition 1.8.13 Soit X_Σ une variété torique simpliciale. La matrice d'intersection de X_Σ est la matrice de l'application multidegré

$$\begin{aligned} \mu : \operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma)_\mathbb{Q} = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho &\longrightarrow \mathbb{Q}^{\Sigma(n-1)} \\ D = \sum_\rho a_\rho D_\rho &\longmapsto (C_\tau \cdot D)_{\tau \in \Sigma(n-1)}. \end{aligned}$$

On la note

$$\mathcal{M}_{X_\Sigma} = (C_\tau \cdot D_\rho)_{\tau \in \Sigma(n-1), \rho \in \Sigma(1)}.$$

Proposition 1.8.14 On a $\ker \mu \cap \operatorname{CDiv}(X_\Sigma) = \operatorname{Div}_0(X_\Sigma)$. Autrement dit pour tout diviseur de Cartier T_N -invariant D sur X_Σ , on a

$$C_\tau \cdot D = 0 \text{ pour tout } \tau \in \sigma(n-1) \iff [D] = 0.$$

En particulier le rang de $\mathcal{M}_{X_\Sigma}$ est égal au nombre de Picard $\rho_{X_\Sigma} = \operatorname{Card}(\Sigma(1)) - n$.

Proposition-Définition 1.8.15 Soit $\operatorname{Rel}(\Sigma(1))$ le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel des relations à coefficients rationnels entre les générateurs primitifs u_ρ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$. L'application linéaire

$$\begin{aligned} {}^t\mu : Z_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} &\longrightarrow \operatorname{Rel}(\Sigma(1)) \\ C &\longmapsto (C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)} \end{aligned}$$

est surjective et induit un isomorphisme

$$\overline{{}^t\mu} : A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Rel}(\Sigma(1)).$$

On a ainsi deux suites exactes courtes d'espaces vectoriels duales l'une de l'autre :

$$0 \longrightarrow M_\mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Div}_{T_N}(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^{\Sigma(1)} \longrightarrow A^1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

qui n'est autre que la suite exacte du théorème 1.6.7 tensorisée par $\mathbb{Q}$, et

$$0 \longrightarrow A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\Sigma(1)} \longrightarrow M_\mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

où la seconde flèche désigne la composée de $\overline{{}^t\mu}$ avec l'injection naturelle de $\operatorname{Rel}(\Sigma(1))$ dans $\mathbb{Q}^{\Sigma(1)}$, et la troisième désigne l'application linéaire qui à tout élément e_ρ de la base canonique de $\mathbb{Q}^{\Sigma(1)}$ associe le générateur minimal u_ρ .

1.9 Propriétés numériques

1.9.1 Equivalence numérique

Définition 1.9.1 Soit X_Σ une variété torique simpliciale. On dit que deux diviseurs de Weil $D, D' \in \operatorname{Div}(X_\Sigma)$ sont numériquement équivalents s'ils ont même nombre d'intersections avec tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$:

$$D \equiv D' \iff C \cdot D = C \cdot D' \text{ pour tout } C \in Z_1(X_\Sigma).$$

On dit que deux 1-cycles $C, C' \in Z_1(X_\Sigma)$ sont numériquement équivalents s'ils ont même nombre d'intersections avec tout diviseur de Weil $D \in \text{Div}(X_\Sigma)$:

$$C \equiv C' \iff C \cdot D = C' \cdot D \text{ pour tout } D \in \text{Div}(X_\Sigma).$$

Il est naturel de se demander quelle est la relation entre équivalence linéaire et équivalence numérique. Pour les diviseurs de Cartier, la proposition 1.8.14 nous dit que les deux relations d'équivalences coïncident. Il en est de même pour les tensorisés, on a

$$(\text{Div}(X_\Sigma)/\equiv) \otimes \mathbb{Q} = \text{Cl}(X_\Sigma) \otimes \mathbb{Q} = A^1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} = \text{Pic}(X_\Sigma) \otimes \mathbb{Q} = (\text{CDiv}(X_\Sigma)/\equiv) \otimes \mathbb{Q}$$

Pour les 1-cycles, on a également

$$(Z_1(X_\Sigma)/\equiv) \otimes \mathbb{Q} = A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q},$$

1.9.2 Diviseurs sans point base, diviseurs numériquement effectifs

Définition 1.9.2 Un diviseur de Cartier D sur X_Σ est dit sans point base si pour tout point $p \in X_\Sigma$ il existe un diviseur effectif linéairement équivalent à D , $D' \in [D]^+$ tel que

$$p \notin \text{Supp}(D')$$

Définition 1.9.3 A chaque diviseur de Weil T_N -invariant $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ on peut associer le polytope

$$P_D := \{v \in M_\mathbb{R} \mid \langle v, u_\rho \rangle \leq a_\rho \text{ pour tout } \rho \in \Sigma(1)\}$$

Lemme 1.9.4 Pour tout diviseur de Weil T_N -invariant $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ on a :

$$P_D \cap M = \{m \in M, D - \text{div}(\chi^m) \in [D]^+\}$$

Théorème 1.9.5 Soient X_Σ une variété torique complète, $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ un diviseur de Cartier T_N -invariant et $(m_\sigma)_{\sigma \in \Sigma(n)}$ les données locales de D . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) D est sans point base.
- (b) Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, $D_{(\sigma)} \in [D]^+$.
- (c) Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, $m_{(\sigma)} \in P_D$.
- (d) $\{m_\sigma \mid \sigma \in \Sigma(n)\}$ est l'ensemble des sommets du polytope P_D .

Définition 1.9.6 Soit X une variété normale. Un diviseur de Weil $D \in \text{Div}(X)$ est dit numériquement effectif (ou nef) si

$$C \cdot D \geq 0 \text{ pour toute courbe } C \text{ irréductible et complète}$$

Proposition 1.9.7 Soit X_Σ une variété torique complète et D un diviseur de Cartier sur X_Σ . Il y a équivalence entre :

- (a) D est sans point base
- (b) D est nef
- (c) $C_\tau \cdot D \geq 0$ pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$

1.9.3 Diviseurs amples - Critère de Kleiman torique

Définition 1.9.8 Soit X_Σ une variété torique complète et D un diviseur de Cartier sans point base sur X_Σ . Notons $P_D \cap M = \{m_0, \dots, m_r\}$. On dit que D est **très ample** si le morphisme

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ p &\longmapsto (\chi^{m_0}(p), \dots, \chi^{m_r}(p)) \end{aligned}$$

est un plongement fermé. On dit que D est **ample** s'il existe un entier $k > 0$ tel que kD soit très ample.

Théorème 1.9.9 Soient X_Σ une variété torique complète, $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ un diviseur de Cartier nef T_N -invariant et $(m_\sigma)_{\sigma \in \Sigma(n)}$ les données locales de D . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) D est ample.
- (b) Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, $\text{Supp}(D_{(\sigma)}) = \{D_\rho \mid \rho \notin \sigma(1)\}$.
- (c) Tous les $m_{(\sigma)}$ sont distincts.

Théorème 1.9.10 (Critère de Kleiman torique) Soit D un diviseur de Cartier sur une variété torique complète X_Σ . Alors

$$D \text{ est ample} \iff C_\tau \cdot D > 0 \text{ pour tout } \tau \in \Sigma(n-1).$$

1.10 Cone de Mori - Critères de projectivité

1.10.1 Cone de Mori - Cone nef

Définition 1.10.1 Pour une variété normale X on définit

$$N^1(X_\Sigma) = A^1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}, \quad N_1(X_\Sigma) = A_1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}$$

Définition 1.10.2 Soit X une variété normale.

- (a) Le **cône nef** de X est le cône engendré par les diviseurs de cartier nef dans $N^1(X)$. On le note $\text{Nef}(X)$.
- (b) Le cône engendré par les classes de courbes irréductibles et complètes dans $N_1(X)$ est noté $\text{NE}(X)$.
- (c) Le **cône de Mori** de X est l'adhérence $\overline{\text{NE}}(X)$ de $\text{NE}(X)$ dans $N_1(X)$.

Lemme 1.10.3 Soit X une variété normale.

- (a) $\text{Nef}(X)$ et $\overline{\text{NE}}(X)$ sont deux cônes convexes fermés, dual l'un de l'autre :

$$\text{Nef}(X) = \overline{\text{NE}}(X)^\vee \text{ et } \overline{\text{NE}}(X) = \text{Nef}(X)^\vee$$

(b) $\overline{\text{NE}}(X)$ est de dimension maximale dans $N_1(X)$.

(c) $\text{Nef}(X)$ est fortement convexe dans $N^1(X)$.

Définition 1.10.4 On appelle **rayon de $N_1(X)$** les cônes de la forme $\mathbb{R}_+[C]$ où $[C] \in A_1(X)_{\mathbb{Q}}$ (la classe nulle engendre le rayon trivial $\{0\}$). Deux 1-cycles C et C' sont dits **numériquement proportionnels** si leurs classes appartiennent au même rayon et **numériquement effectifs** si ce rayon est dans le cône de Mori.

Remarque – Le terme numériquement effectif peut prêter à confusion en ce qui concerne les 1-cycles. Dans [Cas03], C. Casagrande l'utilise pour désigner les 1-cycles dont le nombre d'intersection avec tout diviseur torique est positif ou nul, de sorte qu'en dimension 2 les notions de numériquement effectif pour les diviseurs et pour les 1-cycles coïncident. Nous adoptons ici une convention différente. Un 1-cycle est dit numériquement effectif si son nombre d'intersection avec tout diviseur nef est positif ou nul, de sorte que les notions de numériquement effectif pour les diviseurs et pour les 1-cycles sont duales l'une de l'autre.

Théorème 1.10.5 (Théorème sur le Cône) Soit X_{Σ} une variété torique complète. Tout 1-cycle sur X_{Σ} est numériquement équivalent à une combinaison linéaire positive de courbes T_N -invariantes. En particulier $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$ est un cône polyédral rationnel dans $N_1(X_{\Sigma})$:

$$\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}) = \text{NE}(X_{\Sigma}) = \sum_{\tau \in \Sigma(n-1)} \mathbb{R}_+[C_{\tau}].$$

Preuve — Notons $\Gamma = \sum_{\tau \in \Sigma(n-1)} \mathbb{R}_+[C_{\tau}]$. C'est un cône polyédral rationnel inclus dans $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$. D'après le théorème 1.9.7 on a

$$\text{Nef}(X_{\Sigma}) = \Gamma^{\vee}.$$

On en déduit que

$$\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}) = \text{Nef}(X_{\Sigma})^{\vee} = \Gamma^{\vee\vee} = \Gamma \subset \text{NE}(X_{\Sigma}) \subset \overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}).$$

où la troisième égalité découle du fait que Γ est polyédral (proposition 1.2.2). □

Corollaire 1.10.6 Dans ce cas $\text{Nef}(X_{\Sigma})$ est un cône polyédral rationnel dans $N^1(X_{\Sigma})$.

Proposition 1.10.7 Pour tout 1-cycle rationnel $C \in Z_1(X_{\Sigma})_{\mathbb{Q}}$, si $\mathcal{J}_C^- = \emptyset$ ou s'il existe un cône $\alpha \in \Sigma$ tel que $\mathcal{J}_C^- = \alpha(1)$, alors C est numériquement effectif : $[C] \in \overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$.

Preuve — Il s'agit de montrer que pour tout diviseur nef D on a $C \cdot D \geq 0$. Soit donc D nef. Par hypothèse il existe $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_C^- \subset \sigma(1)$. D'après le théorème 1.9.5 il existe $D_{(\sigma)} = \sum_{\rho \notin \sigma} a_{\rho} D_{\rho} \in [D]$ avec $a_{\rho} \geq 0$ pour tout ρ . On a donc

$$C \cdot D = C \cdot D_{(\sigma)} = \sum_{\rho \notin \sigma} a_{\rho} C \cdot D_{\rho} = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_C^+} a_{\rho} C \cdot D_{\rho} \geq 0.$$

□

1.10.2 Projectivité des variétés toriques

Proposition-Définition 1.10.8 *L'ensemble des diviseurs amples sur X_Σ engendre un cône qui n'est autre que l'intérieur du cône $\text{Nef}(X_\Sigma)$. On l'appelle **cône ample** de X_Σ .*

Preuve — C'est une conséquence immédiate des critères numériques caractérisant les diviseurs nef et les diviseurs amples (proposition 1.9.7 et théorème 1.9.10). $\square$

Proposition 1.10.9 *Soit Σ un éventail simplicial et complet. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) X_Σ est projective.
- (b) Il existe un diviseur D ample sur X_Σ .
- (c) $\overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$ est fortement convexe.
- (d) Il n'existe aucune combinaison linéaire positive de courbes toriques numériquement équivalente à 0 :

$$[C] = \sum_{\tau \in \sigma(n-1)} \lambda_\tau [C_\tau], \quad \lambda_\tau \geq 0 \implies [C] \neq 0.$$

Définition 1.10.10 *Soit Σ un éventail complet dans N . On dit que Σ est un **éventail projectif** ou **fortement polytopal** si pour chaque 1-cône $\rho \in \Sigma(1)$ il existe un point $v_\rho \in \rho$ tel que Σ soit obtenu en projetant à partir de l'origine les faces du polytope*

$$\text{Conv}(v_\rho, \rho \in \Sigma(1))$$

dans $N_{\mathbb{R}}$.

Le résultat suivant est démontré dans [Ewa96] (Th 3.11 p.276) :

Proposition 1.10.11 *Une variété torique X_Σ est projective si et seulement si son éventail Σ est projectif.*

Corollaire 1.10.12 *Toute surface torique est projective.*

Preuve — Il suffit de considérer le polygone dont les sommets sont les points d'intersection des 1-cônes de l'éventail avec un cercle. $\square$

1.11 Courbes extrémales - Classes contractibles Courbes primitives

1.11.1 Courbes primitives

Proposition-Définition 1.11.1 *Soit Σ un éventail simplicial à support convexe. Soit $P = \{\rho_1, \dots, \rho_k\} \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive. Il existe un unique cône $\gamma_P \in \Sigma$ tel que*

$$v_P := u_{\rho_1} + \dots + u_{\rho_k} \in \overset{\circ}{\gamma}_P$$

où $\overset{\circ}{\gamma}_P$ désigne l'intérieur relatif de γ_P (avec la convention $\{0\} = \{0\}$.) On appelle γ_P le **focus** de P . L'appartenance de v_P à $\overset{\circ}{\gamma}_P$ se traduit par l'égalité

$$v_P = \sum_{\rho \in \gamma_P(1)} a_\rho u_\rho \quad \text{avec} \quad a_\rho \in \mathbb{Q}_+^*.$$

En soustrayant les deux égalités on obtient ce qu'on appelle la **relation primitive** associée à P :

$$u_{\rho_1} + \dots + u_{\rho_k} - \sum_{\rho \in \gamma_P(1)} a_\rho u_\rho = 0. \quad (1.2)$$

Le 1-cycle C_P associé à cette relation, c'est à dire vérifiant pour tout $\rho \in \Sigma(1)$

$$C_P \cdot D_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \in P, \rho \notin \gamma_P(1) \\ 1 - a_\rho & \text{si } \rho \in P \cap \gamma_P(1) \\ -a_\rho & \text{si } \rho \in \gamma_P(1), \rho \notin P \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est appelé **courbe primitive** associée à P . Pour tout $\rho \in P \cap \gamma_P(1)$ on a $a_\rho < 1$ de sorte que

$$\mathcal{J}_{C_P}^+ := \{\rho \in \Sigma(1) \mid C_P \cdot D_\rho > 0\} = P.$$

Enfin le 1-cycle C_P est numériquement effectif : $[C_P] \in \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$.

Preuve — L'existence et l'unicité de γ_P découlent de la partition du support de l'éventail en intérieurs relatifs de cônes :

$$|\Sigma| = \coprod_{\gamma \in \Sigma} \overset{\circ}{\gamma},$$

On peut associer le 1-cycle C_P à la relation primitive (1.2) en vertu de la bijectivité de l'application $\overline{t}_\mu$ (corollaire 1.8.15). Pour l'assertion finale soit $\rho \in P \cap \gamma_P(1)$. Quitte à renuméroter on peut supposer $\rho = \rho_1$. Notons α le cône de Σ tel que $P \setminus \{\rho_1\} = \alpha(1)$ et posons $w = v_P - u_{\rho_1} = u_{\rho_2} + \dots + u_{\rho_k} \in \overset{\circ}{\alpha}$. Comme $P \not\subset \gamma_P(1)$, on peut supposer

$\rho_2 \in P \setminus \gamma_P(1)$. En particulier $\rho_2 \notin \alpha(1)$ et α n'est donc pas une face de γ_P . D'après le lemme 1.2.10 ceci implique que $\overset{\circ}{\alpha} \cap \gamma_P = \emptyset$. On en déduit que

$$w = v_P - u_{\rho_1} = (a_{\rho_1} - 1)u_{\rho_1} + \sum_{\rho \in \gamma_P(1) \setminus \{\rho_1\}} a_{\rho} u_{\rho} \notin \gamma_P$$

ce qui implique $a_{\rho_1} - 1 < 0$. Ce raisonnement étant valable pour tout $\rho \in P \cap \gamma_P(1)$ on a bien $\mathcal{J}_{C_P}^+ = P$. On en déduit que $\mathcal{J}_{C_P}^- \subset \gamma_P(1)$ et donc $[C_P] \in \overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$ d'après la proposition 1.10.7, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque – Tel qu'il est construit, le 1-cycle associé à une collection primitive P est un 1-cycle rationnel : $C_P \in A_1(X_{\Sigma})_{\mathbb{Q}}$. On peut en fait montrer que $C_P \in A_1(X_{\Sigma})$, par exemple en utilisant la proposition 2.3.5 (voir corollaire 2.3.6).

1.11.2 Courbes extrémales - Contractions extrémales

Définition 1.11.2 Soit X_{Σ} une variété torique projective, les arrêtes de son cône de Mori $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$ sont appelées **rayons extrémaux**. Pour tout rayon extrémal R on a :

$$\forall [C], [C'] \in \overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}), \quad [C] + [C'] \in R \implies [C], [C'] \in R$$

En outre chaque rayon extrémal est de la forme $\mathcal{R} = \mathbb{R}_+[C_{\tau}]$ avec $\tau \in \Sigma(n-1)$. La classe $[C_{\tau}]$ correspondante est appelée **classe extrémale** et toute courbe torique C_{τ} lui appartenant est appelée **courbe extrémale**.

Théorème 1.11.3 Soient X_{Σ} une variété simpliciale projective, R un rayon extrémal de X_{Σ} et $\tau_1, \dots, \tau_m$ les $(n-1)$ -cônes tels que $C_{\tau} \in \mathcal{R}$. Les ensembles $\mathcal{J}_{C_{\tau_i}}, \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+$ et $\mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^-$ ne dépendent pas de i , on les note respectivement $\mathcal{J}, \mathcal{J}^+$ et $\mathcal{J}^-$. Pour tout $\rho \in \mathcal{J}^+$, et tout $1 \leq i \leq m$, le n -cône $\sigma_{i,\bar{\rho}} := \text{Cone}(\mathcal{S}_{\tau}(1) \setminus \{\rho\})$ est un cône de Σ . De plus soit Σ_R^* la collection de cônes obtenue à partir de Σ en enlevant $\tau_1, \dots, \tau_m$ ainsi que toutes leurs faces. Il y a trois possibilités :

- (1) Si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) > 1$ alors $\Sigma_R = \Sigma_R^*$ est un éventail complet non-simplicial.
- (2) Si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) = 1$, $\Sigma_R = \Sigma_R^*$ est un éventail simplicial et complet.
- (3) Enfin si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) = 0$ alors $U = \text{Cone}(\mathcal{J})$ est un espace vectoriel, Σ_R^* est un éventail dégénéré de sommet U et $\Sigma_R = \Sigma_R/U$ est un éventail simplicial de $N_{\mathbb{R}}/U$.

Corollaire-Définition 1.11.4 On appelle **contraction extrémale** le morphisme torique $\phi : X_{\Sigma} \rightarrow X_{\Sigma_R}$ associé au morphisme d'éventails $\bar{\phi} : \Sigma \rightarrow \Sigma_R$. Il contracte toutes les courbes extrémales de R et seulement celles-ci :

$$\forall \tau \in \Sigma(n-1), \quad \phi(C_{\tau}) = \{pt\} \Leftrightarrow [C_{\tau}] \in R.$$

De plus :

- (1) Si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) > 1$ alors ϕ est dit *flippant*, c'est un isomorphisme en codimension 1.

- (2) Si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) = 1$, ϕ est dit *divisoriel*. C'est un morphisme birationnel dont le lieu exceptionnel est un diviseur.
- (3) Enfin si $\text{Card}(\mathcal{J}^-) = 0$, ϕ est dit *fibrant*. Dans ce cas X_Σ est un fibré localement trivial au-dessus de X_{Σ_R} (de fibre isomorphe à un quotient abélien fini d'un espace projectif pondéré).

1.11.3 Classes contractibles

Les résultats et définitions suivants sont tirés de l'article de C. Casagrande "Contractible classes in toric varieties" ([Cas03]).

Théorème 1.11.5 Soit X_Σ une variété torique lisse et complète et soit $[C] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $[C] = [C_\tau]$ et toute courbe torique $C_\tau \in [C]$ est extrême dans chaque surface torique irréductible qui la contient.
- (b) Il existe une collection primitive P telle que $[C_P] = [C]$ et pour tout cône $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu(1) \cap \mathcal{J}_C = \emptyset$, si $\nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_C^-) \in \Sigma$ alors

$$\text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_C^+, \quad \nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}) \in \Sigma$$

- (c) Il existe $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $[C] = [C_\tau]$ et il existe une variété torique $X_{[C]}$ et un morphisme torique $\phi_{[C]} : X_\Sigma \rightarrow X_{[C]}$ à fibre connexes tel que pour toute courbe irréductible C' dans X_Σ

$$\phi_{[C]}(C') = \{pt\} \Leftrightarrow [C'] \in \mathbb{Q}_+[C].$$

Définition 1.11.6 On dit que la classe $[C]$ est une **classe contractible** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 1.11.5. Le morphisme $\phi_{[C]}$ correspondant est appelé **morphisme contractant** ou **contraction** associée à $[C]$.

Lemme 1.11.7 Si $[C]$ est une classe contractible sur une variété projective X_Σ et $\phi_{[C]} : X_\Sigma \rightarrow X_{[C]}$ est la contraction associée, alors $[C]$ est extrême si et seulement si $X_{[C]}$ est projective.

Proposition 1.11.8 Soit Σ un éventail lisse, $P \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive et C_P la courbe primitive associée. Alors $[C_P]$ est contractible si et seulement si pour toute collection primitive $Q \in \mathcal{P}_\Sigma$ telle que $Q \cap P \neq \emptyset$ et $Q \neq P$, il existe une collection primitive $R \in \mathcal{P}_\Sigma$ telle que

$$R \subset (Q \setminus P) \cup \gamma_P(1).$$

Théorème 1.11.9 Soit X_Σ une variété torique projective lisse. Pour toute classe de 1-cycle non nulle $[C] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma) \setminus \{0\}$, il existe une décomposition

$$[C] = \lambda_1[C_1] + \cdots + \lambda_r[C_r]$$

avec $[C_i]$ contractible et $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Chapitre 2

Générateurs du cône de Mori des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles complètes

Le théorème sur le cône de Miles Reid fournit une famille génératrice naturelle pour le cône de Mori $\overline{NE}(X_\Sigma)$ d'une variété torique complète X_Σ . Il s'agit des classes de courbes toriques $[C_\tau]$ pour $\tau \in \Sigma(n-1)$. Cependant, la détermination d'une famille génératrice minimale est un problème compliqué en général.

Dans le cas projectif, qui est le mieux connu, il existe une famille génératrice minimale canonique pour le cône de Mori : les classes de courbes extrémales. Cependant, comme le souligne Cinzia Casagrande dans [Cas03], il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer directement si une classe donnée est extrémale ou non. Le pas le plus important fait dans cette direction est sans doute la caractérisation combinatoire des classes contractibles donnée par Casagrande (voir théorème 1.11.5 et proposition 1.11.8 du présent mémoire) dans le cas des variétés toriques lisses et complètes. Étant donnée une classe contractible, déterminer si elle est extrémale ou non revient à déterminer si la variété torique obtenue en la contractant est projective ou non (lemme 1.11.7). Il s'agit là d'une question de nature plus globale, ce qui peut expliquer l'absence de caractérisation combinatoire directe.

Dans le cas non projectif très peu de résultats sont connus. Comme le cône de Mori n'est pas fortement convexe dans ce cas, on ne peut espérer trouver une famille génératrice minimale canonique en général. On peut toutefois espérer qu'une famille plus large comme celle des classes de courbes primitives introduite par Batyrev en 1991 dans [Bat91] (voir paragraphe 1.11.1), dont on sait qu'elle génère le cône de Mori dans le cas projectif, soit également génératrice, au moins dans certains cas non projectifs. David Cox et Christine von Renesse conjecturent ainsi dans [CvR09] que le cône de Mori est engendré par les classes de courbes primitives dès que l'éventail de la variété est convexe et de dimension maximale (donc en particulier dès que la variété est complète).

Nous commençons en section 2.1 par étudier une propriété importante commune à toutes les classes contenues dans un même rayon $\mathbb{R}_+[C]$ du cône de Mori. Nous prouvons la proposition 2.1.5, selon laquelle le rayon $\mathbb{R}^+[C]$ d'une courbe C est entièrement déterminé par

certaines ensembles $\mathcal{J}_C^+$ et $\mathcal{J}_C^-$ de 1-cônes de l'éventail. Il s'agit des ensembles de 1-cônes $\rho \in \Sigma(1)$ pour lesquels le nombre d'intersection $C \cdot D_\rho$ entre C et le diviseur torique D_ρ soit respectivement strictement positif ou strictement négatif.

Dans la section 2.2 nous rappelons les résultats obtenus par Cox et von Renesse sur la génération du cône de Mori dans le cas quasi-projectif et donnons une variante de preuve pour le cas facile (projectif simplicial). Nous énonçons ensuite la conjecture formulée par les deux auteurs dans [CvR09] et en fournissons plusieurs contre-exemples dans la section 2.2.2. Nous introduisons enfin la famille des courbes localement contractibles (légèrement plus large que celle des courbes dont la classe est contractible introduite par Casagrande) et nous la présentons comme une candidate possible à la génération du cône de Mori en énonçant une forme moins forte de la conjecture de Cox et Von Renesse, non remise en cause par les contre-exemples exhibés.

Nous présentons dans la section 2.3 un outil de construction de 1-cycles à partir de couloirs dans l'éventail Σ , c'est à dire à partir de suites de cônes de dimension maximale $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Sigma(n)$ qui rencontrent leur prédécesseur et leur successeur le long de cônes de codimension 1 $\tau_k \in \Sigma(n-1)$. Nous présentons essentiellement deux types de constructions :

- (1) Les couloirs droits introduits en section 2.3.2 permettent de construire des 1-cycles comme combinaisons linéaires de courbes toriques à coefficients positifs

$$C = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k C_{\tau_k}, \quad \lambda_k > 0$$

dont on maîtrise l'ensemble $\mathcal{J}_C$ des diviseurs toriques rencontrés.

- (2) Les couloirs circulaires introduits en section 2.3.3 fournissent des combinaisons linéaires de courbes toriques dont la classe numérique est nulle. On montre que pour chaque couloir circulaire on a un espace vectoriel de relations entre les classes des courbes toriques qui apparaissent dans le couloir.

L'application principale des couloirs droits est la décomposition explicite de la classe de certains 1-cycles en combinaisons linéaire de classes de courbes toriques. Plus précisément, étant donnée une classe de 1-cycle rationnel $[C] \in A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q}$ telle que tous les éléments de $\mathcal{J}_C^-$ soit contenus dans un même cône σ de l'éventail, on construit un réseau de couloirs reliant σ à tous les éléments de $\mathcal{J}_C^+$ extérieurs à σ . On en déduit une combinaison linéaire de courbes toriques C' , à coefficients rationnels positifs, numériquement équivalente à C .

De ces décompositions par réseaux de couloirs droits, on tire dans la section 2.4 le concept de courbe directement décomposable : il s'agit des courbes irréductibles C pour lesquelles la combinaison linéaire C' décrite ci-dessus fait intervenir des classes de courbes n'appartenant pas au rayon $\mathbb{R}_+[C]$ engendré par la classe de C dans $N_1(X_\Sigma)$. En dimension 2 nous montrons qu'il est relativement aisé de caractériser les courbes extrémales au moyen de leur auto-intersection et de donner des formules explicites de décomposition de toute classe non extrémale en combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de classes extrémales. Nous en déduisons un moyen d'étendre la notion de classe contractible à toute variété torique $\mathbb{Q}$ -factorielle et complète (dans [Cas03], Casagrande ne traite que de variétés torique lisses et complètes).

Dans le résultat principal de la section 2.4 nous montrons que la notion de contractibilité ainsi étendue est équivalente à la non décomposabilité directe introduite un peu plus tôt et nous en donnons quatre caractérisations combinatoires équivalentes.

Le chapitre se termine sur une prospective, donnant des résultats partiels et des pistes de recherches. Dans la section 2.5.1 on s'intéresse aux configurations “spirales” habituellement liées à la non projectivité dans les éventails simpliciaux et complets. Dans [Oda78], Tadao Oda en donne une description en termes de polygone dans l'éventail. Nous tentons ici de les caractériser à l'aide des couloirs circulaires. Plus précisément nous définissons la notion de couloir circulaire polarisé dont nous montrons que l'existence implique la non projectivité.

L'avantage de notre approche est d'être valable en toute dimension alors que le résultat de T. Oda (Prop. 9.3 de [Oda78]) ne traite que la dimension 3. En revanche, alors que tous les éventails non projectifs de la classification d'Oda (*ibid.* Th. 9.6) contiennent un polygone suffisant à montrer la non projectivité, nous avons su trouver des couloirs circulaires polarisés dans toutes les familles d'éventails sauf une.

Nous concluons en énonçant quelques questions que nous n'avons pas eu le temps de traiter portant sur l'éventualité d'aboutir par cette approche à un nouveau critère de projectivité et aux possibles applications, notamment à la décomposition des classes contractibles non extrémales.

Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, les variétés toriques considérées seront $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes (de même les éventails seront simpliciaux et complets.)

2.1 Diviseurs rencontrés par une courbe : une propriété du rayon $\mathbb{R}_+[C]$

Par définition, la classe numérique d'un 1-cycle $[C]$ est entièrement déterminée par les nombres d'intersection $(C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)}$. De plus, d'après la proposition 1.8.15, ceux-ci fournissent une relation entre les générateurs primitifs u_ρ des 1-cônes de l'éventail. Les ensembles $\mathcal{J}_C^+$ et $\mathcal{J}_C^-$ de 1-cônes de Σ associés à des diviseurs toriques dont le nombre d'intersection avec C est respectivement strictement positif ou négatif, jouent un rôle très important dans cette relation, ainsi que leur réunion $\mathcal{J}_C = \mathcal{J}_C^+ \cup \mathcal{J}_C^-$. En effet on a

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} C \cdot D_\rho u_\rho = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_C} C \cdot D_\rho u_\rho = 0 \quad \text{dans } N_{\mathbb{R}}, \quad (2.1)$$

ce qui se réécrit de manière plus précise

$$\sum_{\rho \in \mathcal{J}_C^+} \underbrace{C \cdot D_\rho}_{>0} u_\rho = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_C^-} \underbrace{(-C \cdot D_\rho)}_{>0} u_\rho. \quad (2.2)$$

Ces ensembles ne dépendent que du rayon $\mathbb{R}_+[C]$ engendré par la classe de C dans $N_1(X_\Sigma)$ et dans certains cas, que l'on va préciser ici, ils déterminent entièrement ce rayon.

Notons que, même s'ils jouent un rôle crucial dans certains raisonnements (notamment dans [Rei83], [Kre00] ou [Cas03]), les ensembles $\mathcal{J}_C^+$ et $\mathcal{J}_C^-$ semblent n'avoir pas fait l'objet d'une étude séparée auparavant excepté dans [CLS11] (section 15.3) d'où les notations $\mathcal{J}_C^+$ et $\mathcal{J}_C^-$ sont inspirées.

Définition 2.1.1 Soit $U = (u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **degré de liaison** de U et on note $\text{dgli}(U)$ la dimension de l'espace vectoriel des relations entre les u_i :

$$\text{dgli}(U) = m - \dim(\text{Vect}(U))$$

Si le degré de liaison de U est k , on dit que U est **k -liée**. On dit que u_i est un **pilier** de U si

$$\text{dgli}(U \setminus \{u_i\}) = \text{dgli}(U)$$

c'est à dire si le fait d'ôter u_i à U fait chuter la dimension de l'espace vectoriel engendré :

$$\dim(\text{Vect}(U \setminus \{u_i\})) = \dim(\text{Vect}(U)) - 1.$$

Lorsqu'il n'y a aucun pilier parmi les u_i , on dit que U est **liée minimal** ou plus précisément **k -liée minimale** ($k = \text{dgli}(U)$).

Les définitions précédentes s'étendent naturellement à des ensembles de cônes de dimension 1 :

Définition 2.1.2 Soient Σ un éventail de $N_{\mathbb{R}}$ et $J = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ un ensemble de 1-cônes de Σ . On dit que J est libre, k -lié ou k -lié minimal si la famille $U_J = (u_\rho)_{\rho \in J}$ est respectivement libre, k -liée ou k -liée minimale. On note $\text{dgli}(J)$ le degré de liaison de J . On dit que $\rho \in J$ est un pilier de J si u_ρ est un pilier de U_J . En outre on note

$$\text{Rel}(J) = \text{Rel}(U_J)$$

le sous-espace vectoriel de $\text{Rel}(\Sigma)$ des relations rationnelles entre les générateurs primitifs des cônes de J .

Le fait d'être lié minimal est une des propriétés caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{J}_C$, comme le précise le résultat suivant :

Lemme 2.1.3 Soit X_Σ une variété torique $\mathbb{Q}$ -factorielle complète. Pour tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$, l'ensemble

$$\mathcal{J}_C = \{\rho \in \Sigma(1) \mid C \cdot D_\rho \neq 0\}$$

est k -lié minimal avec $k = \text{dgli}(\mathcal{J}_C)$. En particulier si $\mathcal{J}_C$ n'est pas vide, il ne peut être contenu dans aucun $\sigma(1)$ pour $\sigma \in \Sigma$. Autrement dit :

$$\text{il existe } \sigma \in \Sigma \text{ tel que } \mathcal{J}_C \subset \sigma(1) \implies [C] = 0.$$

Preuve — C'est une conséquence directe du lemme 1.8.9 : la relation

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} C \cdot D_\rho u_\rho = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_C} C \cdot D_\rho u_\rho = 0$$

permet d'exprimer chaque u_ρ pour $\rho \in \mathcal{J}_C$ en fonction des autres. Pour tout $\rho \in \mathcal{J}_C$ on a donc $\dim(\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}) = \dim(\mathcal{J}_C)$, ce qui montre que $\mathcal{J}_C$ n'a aucun pilier. Si $\mathcal{J}_C$ n'est pas lié, c'est que tous les nombres d'intersection sont nuls, c'est à dire que $\mathcal{J}_C$ est en fait vide. La dernière implication découle du fait que, comme Σ est simplicial par hypothèse, pour tout $\sigma \in \Sigma$, l'ensemble $\sigma(1)$ est libre. $\square$

Tout ensemble de 1-cônes lié contient nécessairement une collection primitive. Dans le cas de l'ensemble $\mathcal{J}_C$ on peut préciser ceci comme suit :

Lemme 2.1.4 *Pour tout 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ non numériquement équivalent à 0, l'une des deux parties $\mathcal{J}_C^+$ ou $\mathcal{J}_C^-$ contient une collection primitive.*

Preuve — Par l'absurde, supposons qu'il existe deux cônes (distincts) $\alpha, \beta \in \Sigma$ tels que $\mathcal{J}_C^+ = \alpha(1)$ et $\mathcal{J}_C^- = \beta(1)$, alors les relations (2.1) et (2.2) entraînent l'existence d'un vecteur

$$v = \sum_{\rho \in \alpha(1)} \underbrace{C \cdot D_\rho}_{>0} u_\rho = \sum_{\rho \in \beta(1)} \underbrace{(-C \cdot D_\rho)}_{>0} u_\rho \in \overset{\circ}{\alpha} \cap \overset{\circ}{\beta},$$

ce qui est absurde d'après le lemme 1.2.10. $\square$

Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{J}_C$ est 1-lié, il caractérise la classe numérique de C à un multiple rationnel près. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.5 *Soit X_Σ une variété torique $\mathbb{Q}$ -factorielle complète et $C, C' \in Z_1(X_\Sigma)$ deux 1-cycles. Supposons l'ensemble $\mathcal{J}_C$ 1-lié et la classe $[C']$ non nulle, alors on a*

(a) *Si $\mathcal{J}_{C'} \subset \mathcal{J}_C$, alors $\mathcal{J}_{C'} = \mathcal{J}_C$ et les deux 1-cycles sont numériquement proportionnels :*

$$\mathbb{Q}[C'] = \mathbb{Q}[C].$$

(b) *Si de plus $\mathcal{J}_{C'}^+ = \mathcal{J}_C^+$ alors les rayons engendrés dans $N_1(X_\Sigma)$ sont les mêmes :*

$$\mathbb{R}_+[C'] = \mathbb{R}_+[C].$$

(c) *Enfin si $\mathcal{J}_{C'} \subset \mathcal{J}_C$ et s'il existe $\rho \in \mathcal{J}_C$ tel que $C' \cdot D_\rho = C \cdot D_\rho$ alors les deux 1-cycles sont numériquement équivalents :*

$$[C'] = [C].$$

En particulier, si $(d_\rho)_{\rho \in \Sigma} \in \text{Rel}(\mathcal{J}_C) \setminus \{0\}$ est une relation non triviale entre les générateurs minimaux des 1-cônes de $\mathcal{J}_C$, alors il existe un rationnel non nul $\mu \in \mathbb{Q}^*$ tel que pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ on ait

$$C \cdot D_\rho = \mu d_\rho.$$

Preuve — Comme l'ensemble $\mathcal{J}_C$ est 1-lié minimal par hypothèse, il est 1-lié minimal d'après le lemme 2.1.3 et l'unique relation à multiple rationnel près est la relation associée à C c'est à dire (2.1). Le fait que $\mathcal{J}_{C'}$ soit inclus dans $\mathcal{J}_C$ entraîne qu'il est 1-lié minimal également, engendré par la relation associée à C' . On a donc les inclusions suivantes entre espaces de relations :

$$\mathbb{Q}(C' \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma} = \text{Rel}(\mathcal{J}_{C'}) \subset \text{Rel}(\mathcal{J}_C) = \mathbb{Q}(C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma}.$$

Par le corollaire 1.8.15 on en déduit que les 1-cycles sont numériquement proportionnels et en particulier que $\mathcal{J}_{C'} = \mathcal{J}_C$. Ceci prouve (a), les assertions (b) et (c) en sont des conséquences immédiates. Enfin la dernière assertion est une simple traduction du fait que

$$\text{Rel}(\mathcal{J}_C) = \mathbb{Q}(d_\rho)_{\rho \in \Sigma} = \mathbb{Q}(C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma}$$

□

Le cas des courbes toriques mérite d'être précisé. Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ un cône de codimension 1. Comme les deux n -cônes qui contiennent τ sont engendrés par des bases de $N_{\mathbb{R}}$ (puisque l'éventail Σ est simplicial), leur réunion $\mathcal{S}_\tau(1)$ est 1-liée. Il en est donc de même du sous-ensemble $\mathcal{J}_{C_\tau}$ et on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.6 *Pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$, $\mathcal{J}_{C_\tau} \subset \mathcal{S}_\tau(1)$ est 1-lié minimal. De plus l'unique relation, à multiple rationnel près, entre les u_ρ pour $\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)$ est la relation murale*

$$\sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}} C_\tau \cdot D_\rho u_\rho = 0. \quad (2.3)$$

Enfin la classe de tout 1-cycle numériquement effectif C qui vérifie $\mathcal{J}_C \subset \mathcal{S}_\tau(1)$ engendre le même rayon du cône de Mori que $[C_\tau]$:

$$\mathbb{R}_+[C] = \mathbb{R}_+[C_\tau].$$

A travers l'isomorphisme du corollaire 1.8.15

$$\begin{array}{ccc} \overline{t_\mu} : A_1(X_\Sigma)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \text{Rel}(\Sigma(1)) \\ [C] & \longmapsto & (C \cdot D_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)}, \end{array}$$

on peut considérer le sous-espace vectoriel des classes de 1-cycles rationnels qui ne rencontrent qu'un sous-ensemble de diviseurs toriques donné, ce qui mène à la définition 2.1.7.

Définition 2.1.7 *Soit $J = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ un ensemble de 1-cônes de Σ dans $N_{\mathbb{R}}$. On pose*

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{J}) = \{[C] \in A_1(X_\Sigma) \mid \mathcal{J}_C \subset J\}.$$

C'est un sous-groupe de $A_1(X_\Sigma)$. On note $A_1(J)_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $A_1(J) \otimes \mathbb{Q}$. Par construction on a

$$\dim(A_1(J)_{\mathbb{Q}}) = \text{dgli}(J).$$

2.2 Courbes primitives et cône de Mori

2.2.1 La conjecture de Cox-von Renesse

Dans son article “On the classification of smooth projective toric varieties” ([Bat91]), V. Batyrev introduit en même temps les collections primitives, si importantes dans la construction des variétés toriques comme quotients (voir section 1.7), et les relations primitives qui permettent la construction des courbes primitives (présentées à la sous-section 1.11.1). Il énonce alors (sans démonstration) le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 (Batyrev - 1990) *Si X_Σ est une variété torique projective lisse, alors son cône de Mori est engendré par les courbes primitives :*

$$\overline{\text{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P].$$

Pour une preuve, Batyrev renvoie aux travaux de Oda et Park [OP91] ainsi qu’à la description des courbes extrémales donnée par Reid ([Rei83]). Plusieurs auteurs citent ce théorème, parfois en améliorant légèrement les hypothèses, mais il faut attendre la thèse de Christine von Renesse [vR07] et son article coécrit avec David Cox [CvR09] pour trouver les premières preuves détaillées du résultat, ainsi qu’une discussion sur les hypothèses nécessaires.

Cox et von Renesse donnent deux énoncés, un dans le cas simplicial et un dans le cas non-simplicial, en améliorant sensiblement les hypothèses. En particulier l’hypothèse de projectivité est remplacée par celle de quasi-projectivité dont voici la définition :

Définition 2.2.2 *Un éventail Σ à support convexe est dit quasi-projectif si le cône de Mori $\overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$ est fortement convexe. Dans ce cas on dit que X_Σ est une variété torique quasi-projective.*

Conformément à la définition usuelle de variété algébrique quasi-projective, toute variété torique quasi-projective est un ouvert de Zariski d’une variété torique projective.

Voici l’énoncé donné dans [CvR09] (originellement deux théorèmes distincts 2.3 et 3.4) :

Théorème 2.2.3 (Cox, von Renesse - 2009) *Si Σ est un éventail quasi-projectif de dimension maximale, alors le cône de Mori de la variété torique X_Σ est engendré par les courbes primitives :*

$$\overline{\text{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P].$$

Remarque – Les énoncés originaux sont exprimés en termes de fonctions support, l’équivalence entre les formulations est précisée dans la proposition 1.10 de [CvR09].

L'inutilité de l'hypothèse de lissité était déjà un fait commun dans la littérature, l'apport véritable de l'énoncé ci-dessus est l'abandon des hypothèses de complétude et de simplicialité.

Adapter la preuve du cas d'un éventail projectif à celui d'un éventail quasi-projectif de dimension maximale ne demande d'effort particulier. En effet dans les deux cas il s'agit de montrer que chaque classe extrémale contient une courbe primitive (l'essentiel du travail est donc fait une fois qu'on a adapté le théorème sur le cône au cas non complet).

En revanche démontrer le résultat dans le cas où l'éventail Σ n'est pas simplicial requiert une étude des différents raffinements simpliciaux de Σ possibles (voir [vR07] Ch. 4 ou [CvR09] sect. 3) ce qui est loin d'être immédiat.

Deux preuves différentes sont données dans [CvR09] pour le cas simplicial : une directement tirée des résultats de Reid ([Rei83]) et l'autre basée sur les arguments de Kresch ([Kre00]), dont nous donnons une variante ici.

Dans un souci de cohérence avec le reste du présent mémoire, nous nous plaçons dans le cas complet (c'est à dire projectif) mais les arguments s'adaptent sans difficulté au cas quasi-projectif. Nous découpons la preuve en trois parties : d'abord deux lemmes élémentaires qui, bien qu'entièrement combinatoires, nous semblent présenter un certain intérêt par eux mêmes. Ensuite la preuve du théorème, qui en découle aisément.

Lemme 2.2.4 *Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ un mur de l'éventail Σ . Toute collection primitive P contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$ contient la paire de 1-cônes $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \tau(1)$.*

Preuve — Si l'on note $S_\tau = \sigma \cup \sigma'$, on a pour toute collection primitive P contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$ on a $P \not\subset \sigma(1) \Rightarrow \sigma'(1) \setminus \sigma(1) \subset P$ et, de même, $P \not\subset \sigma'(1) \Rightarrow \sigma(1) \setminus \sigma'(1) \subset P$, donc finalement $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \tau(1) = (\sigma(1) \cup \sigma'(1)) \setminus (\sigma(1) \cap \sigma'(1)) \subset P$. $\square$

Lemme 2.2.5 *Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ un mur de l'éventail Σ et $P \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$. Il existe un nombre rationnel strictement positif $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que le 1-cycle rationnel $C = C_\tau - \lambda C_P$ soit numériquement effectif : $[C] \in A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$.*

Preuve — Notons σ et σ' les n -cône tels que $\sigma \cap \sigma' = \tau$ et ρ le 1-cône tel que $\{\rho\} = \sigma(1) \setminus \tau(1)$. D'après la proposition 1.10.7 il suffit de choisir $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\mathcal{J}_C^- \subset \sigma'(1)$ (ou $\mathcal{J}_C^- \subset \sigma(1)$.) Or par construction on a $\mathcal{J}_C^- \subset \mathcal{J}_{C_\tau}^- \cup \mathcal{J}_{C_P}^+ \subset \mathcal{S}_\tau(1) = \{\rho\} \cup \sigma'(1)$. Comme $\rho \in S_\tau(1) \setminus \tau(1)$, on a d'une part $C_\tau \cdot D_\rho > 0$ et d'autre part, d'après le lemme précédent, $\rho \in P = \mathcal{J}_{C_P}^+$.

On peut donc choisir $\lambda = \frac{C_\tau \cdot D_\rho}{C_P \cdot D_\rho} \in \mathbb{Q}_+^*$ de sorte que

$$C \cdot D_\rho = C_\tau \cdot D_\rho - \lambda C_P \cdot D_\rho = 0,$$

et donc $\mathcal{J}_C^- \subset \sigma'(1)$. $\square$

Remarque — Dans le cas où X_Σ est lisse, quitte à remplacer ρ par l'unique 1-cône ρ' tel que $\{\rho'\} = \sigma'(1) \setminus \tau(1)$ on peut supposer $\rho \in P \setminus \gamma_P(1)$ de sorte que $C_P \cdot D_\rho = C_\tau \cdot D_\rho = 1$. On a alors

$$[C] = [C_\tau] - [C_P] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma).$$

Une fois ces lemmes établis, le cas facile du théorème 2.2.3 est démontré en quelques lignes.

Démonstration du théorème 2.2.3, cas facile (projectif, $\mathbb{Q}$ -factoriel) — Par définition des rayons extrémaux on a

$$\overline{\text{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{R \text{ extr.}} R,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des rayons extrémaux. Il suffit donc de montrer que chacun de ces rayons extrémaux contient une courbe primitive. Soit donc $R = \mathbb{R}_+[C_\tau]$ un rayon extrémal. Comme $\mathcal{S}_\tau(1)$ est de cardinal $n+1$, il existe une collection primitive $P \in \mathcal{P}$ telle que $P \subset \mathcal{S}_\tau(1)$. Soit donc $C = C_\tau - \lambda C_P$ le 1-cycle donné par le lemme 2.2.5. On a $[C] + \lambda[C_P] = [C_\tau] \in R$ donc $\lambda[C_P] \in R$ et $[C_P] \in R$ ce qu'il fallait démontrer. $\square$

La question qui vient naturellement à la vue de ces résultats est "l'hypothèse de quasi-projectivité est-elle nécessaire?". C'est précisément sur cette question ouverte que se termine l'article [CvR09]. Les auteurs formulent deux conjectures, faisant suite à leurs deux théorèmes principaux. Nous les rassemblons ici en un unique énoncé :

Conjecture 2.2.6 (Cox, von Renesse - 2009) *Si Σ est un éventail à support convexe de dimension maximale, alors le cône de Mori de la variété torique X_Σ est engendré par les courbes primitives :*

$$\overline{\text{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P]$$

De plus, si Σ n'est pas simplicial alors pour toute collection primitive $P \in \mathcal{P}_\Sigma$, il existe un raffinement simplicial Σ' de Σ tel que $\Sigma'(1) = \Sigma(1)$ et $P \in \mathcal{P}_{\Sigma'}$.

Il est à noter que dans sa thèse, C. von Renesse donne déjà pour l'essentiel la preuve du théorème 2.2.3 basée sur l'article de Reid ([Rei83]). Mais elle ne mentionne pas explicitement l'hypothèse de quasi-projectivité, même si elle l'utilise puisque sa preuve repose sur les propriétés des courbes extrémales, lesquelles ne sont définies que lorsque le cône de Mori est fortement convexe (c'est à dire lorsque la variété est quasi-projective).

2.2.2 Contrexemples à la conjecture de Cox-von Renesse

La quasi-totalité des exemples de variétés toriques non projectives cités dans la littérature (notamment dans [Oda78], [Oda88] et [FP05]), sont des exemples lisses. Comme le remarquent Cox et von Renesse, sur tous ces exemples le cône de Mori est engendré par les courbes primitives. Cependant ce n'est pas le cas de toutes les variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles complètes comme le montrent les contrexemples suivants.

Contre-exemple 2.2.7 Soit Σ_1 l'éventail de $N_\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ dont les 1-cônes sont engendrés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et dont les 3-cônes sont

$$(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 6, 7), (3, 5, 7) \text{ et } (5, 6, 7),$$

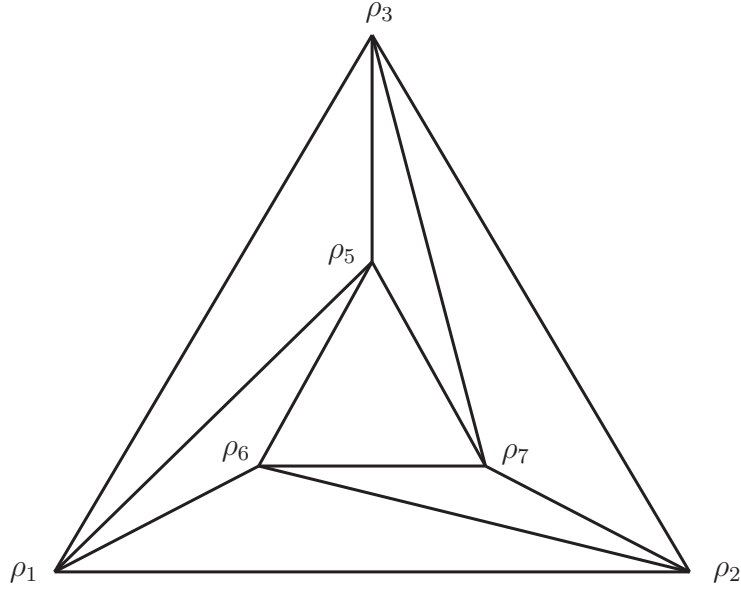


Figure 2.1 – Contre-exemple avec nombre de Picard 3

où l'on note pour simplifier $(i, j, k) = \text{Cone}(u_i, u_j, u_k)$. L'éventail Σ_1 peut-être obtenu en projetant depuis l'origine les faces du polyèdre dessiné à la figure 2.1

La variété torique X_{Σ_1} est simpliciale, complète et non-projective. Elle possède une unique singularité au point d'intersection des trois diviseurs toriques D_5, D_6 et D_7 . L'éventail Σ contient seulement 3 collections primitives qui sont toutes de cardinal 2 : $\{\rho_1, \rho_7\}$, $\{\rho_2, \rho_5\}$ et $\{\rho_3, \rho_6\}$. Les relations primitives associées sont respectivement

$$\begin{aligned} u_1 + u_7 &= u_2 + u_6, \\ u_2 + u_5 &= u_3 + u_7, \\ \text{et } u_3 + u_6 &= u_1 + u_5. \end{aligned}$$

Les courbes primitives correspondantes vérifient donc

$$C_{\{\rho_1, \rho_7\}} + C_{\{\rho_2, \rho_5\}} + C_{\{\rho_3, \rho_6\}} = 0.$$

En particulier elles sont toutes contenues dans un même plan de $A_1(X_{\Sigma})_{\mathbb{R}}$ et ne peuvent donc pas engendrer le cône de Mori $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$.

◇

Contre-exemple 2.2.8 Soit Σ_2 l'éventail de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ combinatoirement équivalent à Σ_1 et dont les 1-cônes sont engendrés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La variété torique X_{Σ_2} est également simpliciale, complète et non-projective et possède également une unique singularité au point d'intersection des trois diviseurs toriques D_5, D_6 et D_7 . Les relations primitives sont ici

$$\begin{aligned} u_1 + u_7 &= 4u_2 + 2u_6, \\ u_2 + u_5 &= 4u_3 + 2u_7, \\ \text{et } u_3 + u_6 &= 4u_1 + 2u_5. \end{aligned}$$

Les courbes primitives correspondantes $C_{\{\rho_1, \rho_7\}} = C_{(2,6)}$, $C_{\{\rho_2, \rho_5\}} = C_{(3,7)}$ et $C_{\{\rho_3, \rho_6\}} = C_{(1,5)}$ ne sont donc pas liées dans $A_1(X_{\Sigma})_{\mathbb{R}}$. En revanche elles sont toutes les trois de degré anticanonique strictement négatif, contrairement à toutes les autres courbes toriques. En particulier elles sont toutes contenues dans un même demi-espace de $A_1(X_{\Sigma_2})_{\mathbb{R}}$ et ne peuvent donc pas engendrer le cône de Mori $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma_2})$, qui dans ce cas est en fait égal à $A_1(X_{\Sigma_2})_{\mathbb{R}}$ tout entier.

◇

Les deux exemples précédents sont en fait des cas particuliers d'une même famille :

Proposition 2.2.9 *Si Σ est un éventail simplicial, complet, non fortement polytopal et combinatoirement équivalent à l'éventail de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, alors le cône de Mori de la variété torique X_{Σ} n'est pas engendré par les courbes primitives sur X_{Σ} :*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{\Sigma}} \mathbb{R}_+[C_P] \subsetneq \overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}).$$

Preuve — Par hypothèse l'éventail Σ comporte seulement trois collections primitives. Notons c le sous-cône de $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$ engendré par les classes des trois courbes primitives correspondantes. Comme X_{Σ} n'est pas projective, il existe un sous-espace vectoriel de $A_1(X_{\Sigma})_{\mathbb{R}}$ entièrement contenu dans $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$. Si c n'est pas de dimension 3, il n'a aucune chance d'être égal à $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$. Mais s'il est de dimension 3, étant engendré par exactement trois classes de courbes, il ne peut contenir aucun sous-espace vectoriel. Dans tous les cas c est strictement inclus dans $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma})$. □

Grossièrement parlant, les variétés pour lesquelles la conjecture 2.2.6 n'est pas valable sont celles dont l'éventail ne comporte pas suffisamment de collections primitives. On pourrait penser que ce manque de collections primitives est lié à la petitesse du nombre de Picard. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas.

Contre-exemple 2.2.10 Soit Σ_3 l'éventail de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ dont les 1-cônes sont engendrés par

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_8 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ u_9 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } u_{10} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et dont les 3-cônes sont

$$(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 8), (1, 6, 8), (2, 3, 7), (2, 6, 9), (2, 7, 9), (3, 7, 10), (5, 8, 10), (6, 8, 9), (7, 9, 10) \text{ et } (8, 9, 10)$$

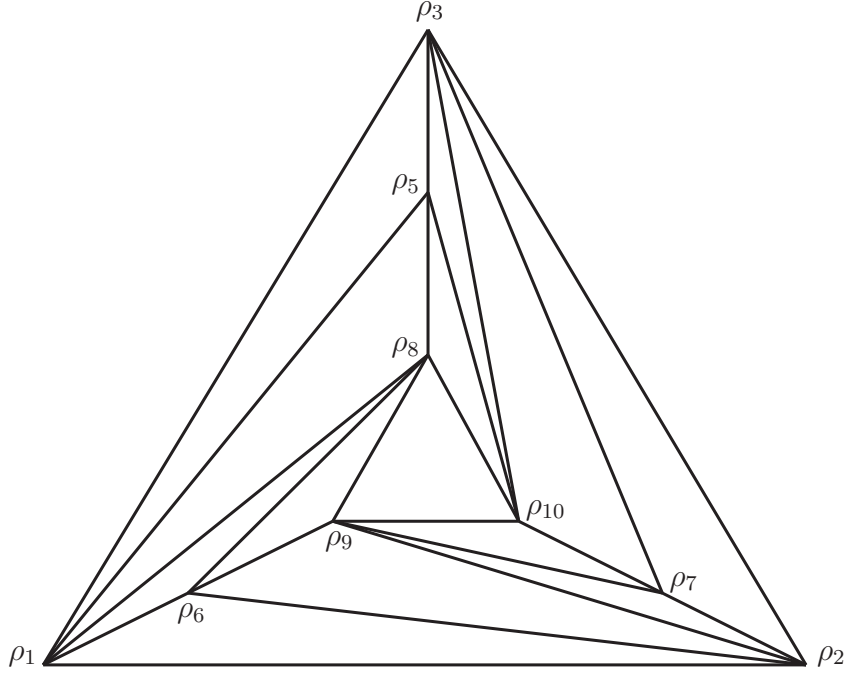


Figure 2.2 – Contre-exemple avec nombre de Picard 6

où on note $(i, j, k) = \text{Cone}(u_i, u_j, u_k)$.

La variété torique X_{Σ_1} est simpliciale, complète et non-projective. Elle possède une unique singularité au point d'intersection des trois diviseurs toriques D_8, D_9 et D_{10} . L'éventail Σ contient 15 collections primitives, toutes de cardinal 2, que nous notons pour simplifier $[i, j]$ au lieu de $\{\rho_i, \rho_j\}$:

$$[1, 7], [1, 9], [1, 10], [2, 5], [2, 8], [2, 10], [3, 6], [3, 8], [3, 9], [5, 6], [5, 7], [6, 7], [5, 9], [7, 8], [6, 10]$$

Les relations primitives associées sont respectivement

$$\begin{aligned} u_1 + u_9 &= 2u_6, & u_2 + u_{10} &= 2u_7, & u_3 + u_8 &= 2u_5, \\ u_5 + u_6 &= u_1 + u_8, & u_5 + u_7 &= u_3 + u_{10}, & u_6 + u_7 &= u_2 + u_9, \\ u_1 + u_7 &= u_2 + u_6, & u_2 + u_5 &= u_3 + u_7, & u_3 + u_6 &= u_1 + u_5, \\ u_5 + u_9 &= u_6 + u_8, & u_6 + u_{10} &= u_7 + u_9, & u_7 + u_8 &= u_5 + u_{10}, \\ u_1 + u_{10} &= u_2 + u_9, & u_2 + u_8 &= u_3 + u_{10}, & u_3 + u_9 &= u_1 + u_8, \end{aligned}$$

On en déduit les relations suivantes entre courbes primitives :

$$\begin{aligned} C_{[1,7]} &= C_{[1,9]} + C_{[6,7]}, & C_{[2,5]} &= C_{[2,10]} + C_{[5,7]}, & C_{[3,6]} &= C_{[3,8]} + C_{[5,6]}, \\ C_{[5,9]} &= C_{[5,6]} + C_{[1,9]}, & C_{[6,10]} &= C_{[6,7]} + C_{[2,10]}, & C_{[7,8]} &= C_{[3,8]} + C_{[5,7]}, \\ C_{[1,10]} &= C_{[1,7]} + C_{[6,10]}, & C_{[2,8]} &= C_{[2,5]} + C_{[7,8]}, & C_{[3,9]} &= C_{[3,6]} + C_{[5,9]}. \end{aligned}$$

En particulier le cône engendré par les 15 courbes primitives est engendré par les 6 courbes contractibles

$$C_{[1,9]}, C_{[2,10]}, C_{[3,8]}, C_{[5,6]}, C_{[5,7]} \text{ et } C_{[6,7]}$$

qui vérifient entre elles la relation

$$C_{[1,9]} + C_{[2,10]} + C_{[3,8]} + C_{[5,6]} + C_{[5,7]} + C_{[6,7]} = 0.$$

Ce cône n'est donc pas de dimension maximale et n'est donc pas égal au cône de Mori $\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma_3})$.

◇

Il semble qu'on puisse construire, sur le modèle des contre-exemples 2.2.7 et 2.2.10 une famille infinie de variétés non projectives X_k pour lesquelles la conjecture 2.2.6 n'est pas valable. X_k possède une unique singularité et son nombre de Picard est $3k$ mais le cône engendré par ses courbes primitives n'est que de dimension $3k - 1$.

2.2.3 Le cas lisse - Courbes localement contractibles

Etant donné que tous les contre-exemples donnés ici (et tous ceux que nous avons pu construire par éclatement à partir de ceux-ci) sont singuliers, on peut espérer que la conjecture 2.2.6 soit valable pour les variétés lisses. Cependant, comme le remarque C. Casagrande dans [Cas03], les classes contractibles (qui sont primitives par définition) ne suffisent pas à engendrer le cône de Mori en général. Nous proposons ici une famille un peu plus large de courbes primitives, qui engendrent le cône de Mori dans les exemples connus : les courbes localement contractibles.

Théorème 2.2.11 *Soit Σ un éventail simplicial et complet. Pour tout mur $\tau \in \Sigma(n-1)$, il y a équivalence entre*

- (a) *Il existe une unique collection primitive P contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$ et $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$.*
- (b) *Pour tout $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ il existe $\sigma_\rho \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho\} = \sigma_\rho(1)$.*
- (c)

$$\text{Cone}(\mathcal{S}_\tau) = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma(n) \\ \sigma(1) \subset \mathcal{S}_\tau(1)}} \sigma$$

Preuve —

(a) $\Rightarrow$ (b) Soit $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$. Comme $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau] \setminus \{0\}$, on a $\mathcal{J}_{C_\tau}^+ = \mathcal{J}_{C_P}^+ = P$, donc $\rho \in P$. De plus comme P est l'unique collection primitive contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$, le sous-ensemble $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho\}$ ne contient aucune collection primitive. Il existe donc un cône de l'éventail $\sigma_\rho \in \Sigma$ tel que $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho\} = \sigma_\rho(1)$. Enfin comme $\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho\}$ est de cardinal n , on a bien $\sigma_\rho \in \Sigma(n)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $v \in \text{Cone}(\mathcal{S}_\tau)$. Il existe des réels positifs $\lambda_\rho \geq 0$ tels que $v = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)} \lambda_\rho u_\rho$.

Soit $\rho' \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ tel que $\frac{\lambda_{\rho'}}{C_\tau \cdot D_{\rho'}}$ soit minimal parmi les $\frac{\lambda_\rho}{C_\tau \cdot D_\rho}$ pour $\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)$. On a

$$v = v - \underbrace{\frac{\lambda_{\rho'}}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)} C_\tau \cdot D_\rho u_\rho}_{=0} = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_\tau(1)} \left(\lambda_\rho - \lambda_{\rho'} \frac{C_\tau \cdot D_\rho}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} \right) u_\rho.$$

Or par définition de ρ' on a pour tout $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$

$$\lambda_\rho - \lambda_{\rho'} \frac{C_\tau \cdot D_\rho}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} = C_\tau \cdot D_\rho \left(\frac{\lambda_\rho}{C_\tau \cdot D_\rho} - \frac{\lambda_{\rho'}}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} \right) \geq 0.$$

Comme pour tout $\rho \notin \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ on a

$$\lambda_\rho - \lambda_{\rho'} \frac{C_\tau \cdot D_\rho}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} \geq \lambda_\rho \geq 0,$$

on en conclut que $v \in \text{Cone}(\mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho'\}) = \sigma_{\rho'}$ (pour $\rho = \rho'$ on a $\lambda_\rho - \lambda_{\rho'} \frac{C_\tau \cdot D_\rho}{C_\tau \cdot D_{\rho'}} = 0$).

Ceci montre l'inclusion du premier ensemble dans le second. L'inclusion réciproque est évidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Soit P une collection primitive contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$. Le vecteur $v_P = \sum_{\rho \in P} u_\rho$ est par définition contenu dans γ_P° . Par ailleurs v_P est clairement contenu dans $\text{Cone}(\mathcal{S}_\tau)$. Par hypothèse il existe donc $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\sigma(1) \subset \mathcal{S}_\tau(1)$ et $\gamma_P^\circ \cap \sigma \neq \emptyset$. On en conclut (avec le lemme 1.2.10) que $\gamma_P < \sigma$. On a donc $\mathcal{J}_{C_P} = \gamma_P(1) \cup P \subset \mathcal{S}_\tau(1)$. On en déduit par le corollaire 2.1.6 que les classes de C_P et C_τ engendrent le même rayon dans $N_1(X_\Sigma)$:

$$\mathbb{R}_+[C_P] = \mathbb{R}_+[C_\tau].$$

On en conclut d'une part que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$ et d'autre part que $\mathcal{J}_{C_P}^+ = P$ est égal à $\mathcal{J}_{C_\tau}^+$. L'ensemble $\mathcal{J}_{C_\tau}^+$ est donc l'unique collection primitive contenue dans $\mathcal{S}_\tau(1)$, ce qui achève la démonstration. □

Définition 2.2.12 Si $\tau \in \Sigma(n-1)$ vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 2.2.11 on dit que C_τ est une **courbe localement contractible**.

Remarque – L'implication (b) $\Rightarrow$ (c) n'est autre que le (i) du corollaire (2.10) de [Rei83] (p.406). M. Reid le démontre pour une courbe C_τ extrémale. En particulier, toute courbe extrémale est localement contractible et le théorème 2.2.11 fournit une nouvelle preuve du cas facile du théorème 2.2.3 (très proche de celle donnée dans [CvR09] pour le cas simplicial.)

Le terme *localement contractible* désignant une courbe torique C_τ exprime le fait (que nous ne démontrerons pas proprement ici) que, quitte à se restreindre à un ouvert (quasi-projectif) contenant C_τ on peut définir un morphisme qui contracte exactement les courbes contenues dans le rayon $\mathbb{R}_+[C_\tau]$.

En particulier nous verrons à la section 2.4.2 que toute courbe dont la classe est contractible est localement contractible.

Exemple 2.2.13 On considère dans $\mathbb{R}^2$ les éventails Σ_1, Σ_2 et Σ_3 définis à partir des générateurs minimaux suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ayant pour ensembles de cônes maximaux (où l'on note en abrégé $(i, j) = \text{Cone}(u_i, u_j)$) :

$$\begin{aligned} \Sigma_1(2) &= \{(1, 2), (2, 3)\}, \quad \Sigma_2(2) = \Sigma_1(2) \cup \{(3, 4), (4, 1)\}, \\ \text{et } \Sigma_3(2) &= \Sigma_1(2) \cup \{(3, 4), (4, 5), (5, 1)\}, \end{aligned}$$

On note $D_i = C_i$ le diviseur (courbe) torique correspondant au 1-cône $\rho_i = \mathbb{R}_+ u_i$. Σ_2 est l'éventail de la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_2$ et Σ_3 est celui de l'éclaté de $\mathcal{H}_2$ au point distingué $D_1 \cap D_4$. L'éventail Σ_1 est quasi-projectif et la variété torique X_{Σ_1} est un ouvert commun à X_{Σ_2} et X_{Σ_3} . Dans la variété X_{Σ_2} toutes les classes de courbes toriques sont contractibles (c'est à dire extrémales) sauf celle de la courbe C_3 (voir lemme 2.4.4). Dans la variété X_{Σ_3} seules les classes $[C_1]$, $[C_4]$ et $[C_5]$ sont contractibles, la courbe C_2 est seulement localement contractible. Voyons ce que ceci signifie du point de vue des morphismes.

La projection sur la première coordonnée $\bar{\phi} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ est compatible avec l'éventail Σ_1 de $\mathbb{R}^2$ et l'éventail $\Sigma_4 = \{0, \mathbb{R}_-\}$ de $\mathbb{R}$. De même $\bar{\phi}$ est compatible avec les éventails Σ_2 et Σ_3 de $\mathbb{R}^2$ et l'éventail $\Sigma_5 = \{\mathbb{R}_-, 0, \mathbb{R}_+\}$ de $\mathbb{R}$. Les morphismes toriques associés sont

$$\phi_1 : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_4} = \mathbb{A}^1, \quad \phi_2 : X_{\Sigma_2} = \mathcal{H}_2 \rightarrow X_{\Sigma_5} = \mathbb{P}^1 \quad \text{et} \quad \phi_3 : X_{\Sigma_3} \rightarrow X_{\Sigma_5} = \mathbb{P}^1.$$

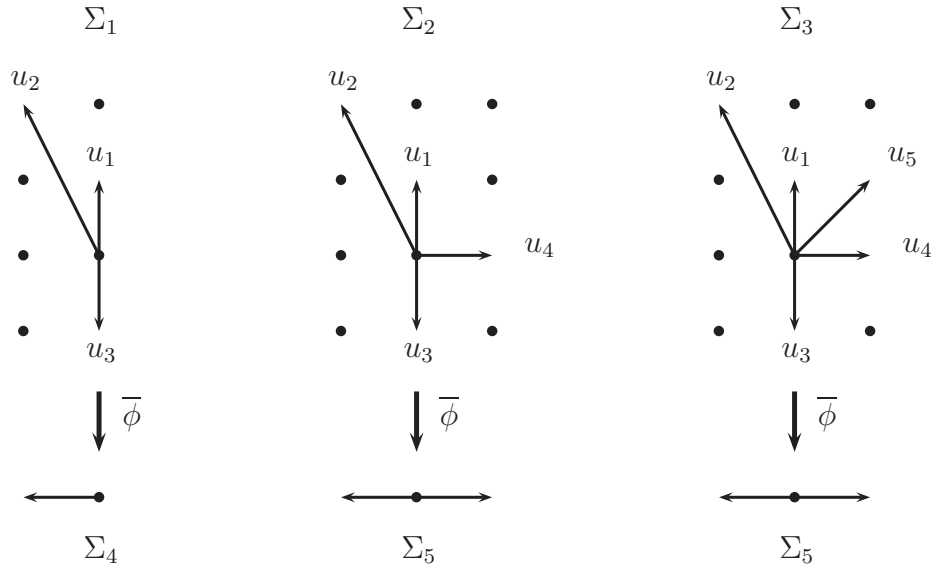


Figure 2.3 – “Contraction locale” de la classe $[C_2]$

Le morphisme ϕ_2 est la contraction extrême de la classe $[C_2] = [C_4] \in A_1(X_{\Sigma_2})_{\mathbb{Q}}$. Il s'agit d'une contraction fibrante puisque $\mathcal{J}_{C_2} = \{\rho_1, \rho_3\} = \mathcal{J}_{C_2}^+$. Le morphisme ϕ_3 n'est pas une contraction extrême puisqu'il contracte les trois classes distinctes $[C_4]$, $[C_5]$ et $[C_2] = [C_4] + [C_5]$. Mais ces deux morphismes coïncident sur l'ouvert X_{Σ_1} de sorte qu'on peut considérer ϕ_1 comme la “contraction locale” de la classe $[C_2]$.

◇

La famille candidate la plus naturelle pour la génération du cône de Mori d'une variété torique lisse et complète est bien entendu celle des classes de courbes toriques qui sont en même temps courbes primitives. Cependant le résultat suivant suggère que cette famille est strictement plus large que nécessaire.

Lemme 2.2.14 *Soit Σ un éventail lisse et complet et $\tau \in \Sigma(n-1)$ un mur tel que le cône $\text{Cone}(\mathcal{S}_\tau)$ soit fortement convexe. Si C_τ est primitive mais pas localement contractible, alors il existe une courbe primitive C_Q telle que*

$$[C_Q] \notin \mathbb{Q}_+[C_\tau] \text{ et } [C_\tau] - [C_Q] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma).$$

Preuve — Soit P la collection primitive telle que $[C_\tau] = [C_P]$. Comme C_τ n'est pas localement contractible, d'après le théorème 2.2.11, il existe une autre collection primitive $Q \neq P$ incluse dans $\mathcal{S}_\tau(1)$. De plus, comme $\mathcal{J}_{C_Q}^+ = Q \neq P = \mathcal{J}_{C_P}^+$, on a $[C_Q] \notin \mathbb{Q}_+[C_\tau]$. Enfin, l'éventail étant lisse, d'après la remarque qui suit le lemme 2.2.5 on a

$$[C_\tau] - [C_Q] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma).$$

□

Ces considérations nous mènent à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 2.2.15 *Le cône de Mori de toute variété torique lisse et complète est engendré par les classes de courbes localement contractibles. En particulier il est engendré par les classes de courbes primitives.*

2.3 Couloirs

Nous introduisons dans cette section des outils combinatoires, les couloirs, qui permettent de construire des 1-cycles comme combinaisons linéaires explicites de courbes toriques. En particulier ils permettent dans de nombreux cas de décomposer explicitement la classe numérique d'un 1-cycle donné en combinaison de classes de courbes toriques.

Cet outil a été conçu à l'origine pour répondre à la question (à visée arithmétique) suivante : “Pour un diviseur effectif D existe-t-il un ensemble fini de courbes graduantes suffisant à détecter un éventuel point rationnel sur D ?” (voir théorèmes 3.4.4 et 3.5.2). Il s'est avéré par la suite que

- 1) La décomposition explicite de classes n'est pas nécessaire pour traiter le cas d'un diviseur D ample, l'existence de classes extrémales suffit (théorème 3.5.2).
- 2) La méthode utilisée est extrêmement proche de celle qui est utilisée par W. Fulton et B. Strumfels dans [FS97] dans un but légèrement différent. L'expression des coefficients intervenant dans la combinaison linéaire s'en trouvent réinterprétés (voir sous-section 2.3.2).

Toute la suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude de diverses applications des couloirs. Outre l'apport d'un point de vue nouveau sur les résultats de C. Casagrande (développé au long de la section 2.4), les couloirs nous ont permis d'énoncer un nouveau critère de non-projectivité pour les variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes, et de trouver des pistes de méthode pour la décomposition des classes contractibles non extrémales (voir section 2.5).

Dans toute cette section on suppose donné un éventail Σ simplicial et complet.

2.3.1 Définitions

Un couloir n'est autre qu'une suite de n -cônes adjacents. Le terme couloir renvoie à l'image d'un passage de chambre en chambre (les cônes de dimension maximale) à travers une succession de murs (les cônes de codimension 1.) Voici la définition précise :

Définition 2.3.1 *Un **couloir** est une suite de n -cônes $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ de l'éventail Σ telle que*

(a) *Tous les σ_k sont distincts.*

(b) *Pour tout $1 \leq k \leq r-1$, $\tau_k = \sigma_k \cap \sigma_{k+1} \in \Sigma(n-1)$.*

*On appelle r la longueur du couloir. Pour tout $1 \leq k \leq r-1$, on note $\mathbf{b}_k$ l'unique élément de $\sigma_k(1) \setminus \tau_k(1)$ et $\mathbf{h}_k$ l'unique élément de $\sigma_{k+1}(1) \setminus \tau_k(1)$. Un couloir est dit **simple** si $b_1 \notin \sigma_r(1)$, on dit alors que c'est un couloir entre b_1 et σ_r . Si au contraire $b_1 \in \sigma_r(1)$ et $\sigma_r \cap \sigma_1 \in \Sigma(n-1)$ alors le couloir est dit **circulaire**.*

A tout couloir $\mathcal{C}$ est naturellement associé un 1-cycle $C_{\mathcal{C}}$ comme combinaison linéaire des courbes toriques associées aux murs rencontrés au long de $\mathcal{C}$:

Proposition-Définition 2.3.2 (1-cycle associé à un couloir) *Soit $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ un couloir. Pour $1 \leq k \leq r-1$ on pose*

$$\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle = \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}} \in \mathbb{Z},$$

et on définit le 1-cycle

$$C_{\mathcal{C}} = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k C_{\tau_k}.$$

On a alors

$$\mathcal{J}_{C_{\mathcal{C}}} \subset \{b_1\} \cup \sigma_r(1).$$

De plus la classe numérique de $C_{\mathcal{C}}$ ne dépend que de b_1 et σ_r : Si $b_1 \in \sigma_r(1)$ alors $[C_{\mathcal{C}}] = 0$, sinon on a

$$C_{\mathcal{C}} \cdot D_{b_1} = 1 \quad \text{et pour tout } \rho \in \sigma_r(1), \quad C_{\mathcal{C}} \cdot D_{\rho} = -\frac{\Delta_{\sigma_r}^{\rho, b_1}}{\Delta_{\sigma_r}}.$$

Remarque – Les coefficients $\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle = \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}}$ qui apparaissent peuvent être interprétés comme coordonnées de la classe $\overline{b_1}$ de b_1 modulo N_{τ_k} , dans la base $\overline{u_{\sigma_k, \tau_k}}$ (voir sous-section 1.2.3.) On peut aussi interpréter leur valeur absolue comme la maille d'un sous-réseau, révélant ainsi la grande similarité avec la construction de Fulton et Sturmfels (voir les commentaires qui suivent la proposition 2.3.3.)

La figure ci-dessous montre l'intersection d'un plan avec les cônes d'un couloir dans un éventail de dimension 3.

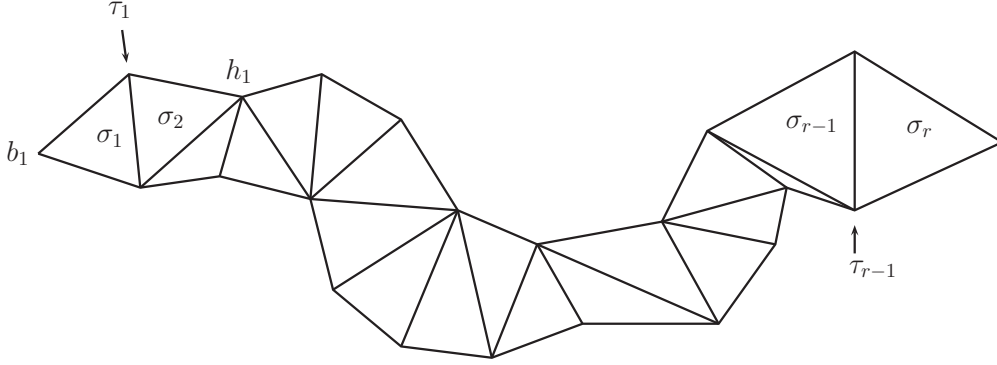


Figure 2.4 – Couloir en dimension 3.

Preuve de la proposition 2.3.2 — Pour $1 \leq k \leq r-1$ notons $C_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_{\tau_i}$, de sorte que $C_C = C_{r-1}$. Il nous suffit de montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, r-1\}$ on a

$$(a)_k \quad \mathcal{J}_{C_k} \subset \{b_1\} \cup \sigma_{k+1}(1).$$

$$(b)_k \quad C_k \cdot D_{b_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } b_1 \in \sigma_{k+1}(1) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(c)_k \quad \text{Pour tout } \rho \in \sigma_{k+1}(1) \setminus \{b_1\} \text{ on a } C_k \cdot D_\rho = -\frac{\Delta_{\sigma_{k+1}}^{\rho, b_1}}{\Delta_{\sigma_{k+1}}}.$$

On procède par récurrence. Pour $k=1$ on a

$$C_1 = \lambda_1 C_{\tau_1} = \frac{\Delta_{\sigma_1}}{\delta_{\tau_1}} C_{\tau_1}.$$

On en déduit que $\mathcal{J}_{C_1} = \mathcal{J}_{C_{\tau_1}} \subset \{b_1\} \cup \sigma_2(1)$ d'où $(a)_1$. De plus d'après le théorème 1.8.11 on a

$$C_{\tau_1} \cdot D_{b_1} = \frac{\delta_{\tau_1}}{\Delta_{\sigma_1}} \quad \text{et pour tout } \rho \in \sigma_2(1), \quad C_{\tau_1} \cdot D_\rho = -\frac{\Delta_{\sigma_2}^{\rho, b_1} \delta_{\tau_1}}{\Delta_{\sigma_1} \Delta_{\sigma_2}}.$$

On en déduit immédiatement que

$$C_1 \cdot D_{b_1} = 1 \quad \text{et pour tout } \rho \in \sigma_2(1), \quad C_1 \cdot D_\rho = -\frac{\Delta_{\sigma_2}^{\rho, b_1}}{\Delta_{\sigma_2}},$$

c'est à dire que $(b)_1$ et $(c)_1$ sont vérifiés. Il reste à montrer que pour $k \in \{2, \dots, r-1\}$, si $(a)_{k-1}, (b)_{k-1}$ et $(c)_{k-1}$ sont vérifiés alors il en est de même de $(a)_k, (b)_k$ et $(c)_k$. Supposons donc $(a)_{k-1}, (b)_{k-1}$ et $(c)_{k-1}$ vrais. Comme $C_k = C_{k-1} + \lambda_k C_{\tau_k}$ et $\mathcal{J}_{C_{\tau_k}} \subset \{b_k\} \cup \sigma_{k+1}(1)$, on sait déjà par $(a)_{k-1}$ que

$$\mathcal{J}_{C_k} \subset \mathcal{J}_{C_{k-1}} \cup \mathcal{J}_{C_{\tau_k}} \subset (\{b_1\} \cup \sigma_k(1)) \cup (\{b_k\} \cup \sigma_{k+1}(1)) = \{b_1, b_k\} \cup \sigma_{k+1}(1).$$

Si $b_1 = b_k$ on a déjà $(a)_k$. Sinon on a $b_k \in \sigma_{k+1}(1) \setminus \{b_1\}$ ce qui, d'après $(c)_{k-1}$, entraîne

$$C_{k-1} \cdot D_{b_k} = -\frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\Delta_{\sigma_k}}.$$

On en déduit que

$$C_k \cdot D_{b_k} = C_{k-1} \cdot D_{b_k} + \lambda_k C_{\tau_k} \cdot D_{b_k} = -\frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\Delta_{\sigma_k}} + \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}} \frac{\delta_{\tau_k}}{\Delta_{\sigma_k}} = 0,$$

d'où $\mathcal{J}_{C_k} \subset \{b_1\} \cup \sigma_{k+1}(1)$ ce qui montre que $(a)_k$ est vrai dans ce cas également.

On distingue ensuite trois cas :

- (1) Si $b_1 \in \sigma_{k+1}(1)$ on a $\mathcal{J}_{C_k} \subset \sigma_{k+1}(1)$ d'où $[C_k] = 0$ d'après le lemme 2.1.3. $(b)_k$ et $(c)_k$ sont donc vérifiés dans ce cas.
- (2) Si $b_1 = b_k \in \sigma_k(1) \setminus \sigma_{k+1}(1)$ on a $[C_{k-1}] = 0$ d'après le point précédent et on montre que $(b)_k$ et $(c)_k$ sont vérifiés de la même manière que pour $k = 1$.
- (3) Si $b_1 \notin \mathcal{S}_{\tau_k}(1) = \sigma_k(1) \cup \sigma_{k+1}(1)$ on a d'une part $C_{k-1} \cdot D_{b_1} = 1$ d'après $(b)_{k-1}$ et d'autre part $C_{\tau_k} \cdot D_{b_1} = 0$. On en déduit immédiatement $(b)_k$:

$$C_k \cdot D_{b_1} = C_{k-1} \cdot D_{b_1} + \lambda_k C_{\tau_k} \cdot D_{b_1} = 1 + 0 = 1.$$

Enfin comme dans ce cas $\{b_1\} \cup \sigma_{k+1}(1)$ est 1-lié, $(c)_k$ découle de $(a)_k$ et $(b)_k$ d'après la proposition 2.1.5 et la formule de Cramer

$$u_{b_1} = \sum_{\rho \in \sigma_{k+1}(1)} \frac{\Delta_{\sigma_{k+1}}^{\rho, b_1}}{\Delta_{\sigma_{k+1}}} u_{\rho}.$$

Ainsi $(a)_k$, $(b)_k$ et $(c)_k$ sont vrais dans tous les cas. Ceci achève la preuve par récurrence et la proposition est donc démontrée. $\square$

2.3.2 Couloirs droits

Comme son nom l'indique, un couloir droit est un couloir $\mathcal{C}$ qui relie un 1-cône de l'éventail à un n -cône de l'éventail en allant "tout droit". La première conséquence de cette rectitude est l'effectivité du 1-cycle $C_{\mathcal{C}}$ associé par la proposition 2.3.2. Ce 1-cycle étant de plus T -invariant par construction, les couloirs droits permettent donc d'exprimer certaines classes de 1-cycles comme combinaison linéaire positive de classes de courbes toriques. Ainsi, en faisant converger plusieurs couloirs droits vers le même cône de dimension maximale, on construit des réseaux de couloirs permettant de décomposer n'importe quelle classe $[C]$ pour laquelle l'ensemble $\mathcal{J}_{\bar{C}}$ engendre un cône de l'éventail (proposition 2.3.5.)

Proposition-Définition 2.3.3 *Pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ et tout $\sigma \in \Sigma(n)$, il existe un couloir simple $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ tel que $\rho = b_1$, $\sigma = \sigma_r$ et pour tout $1 \leq k \leq r-1$ on a*

$$\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle = \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}} > 0.$$

Un tel couloir est appelé **couloir droit** entre ρ et σ . La classe numérique du 1-cycle

$$C_{\mathcal{C}} = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}} C_{\tau_k}$$

est effective et entière :

$$[C_C] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{NE}(X_\Sigma)$$

et ne dépend que de ρ et de σ .

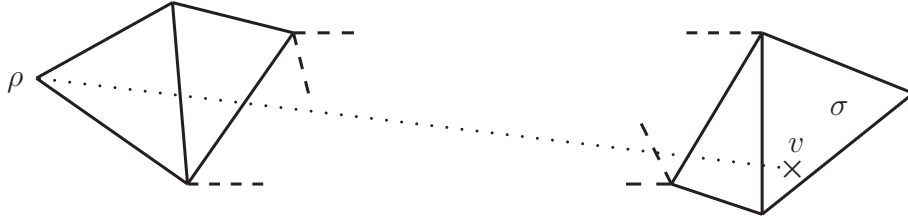


Figure 2.5 – Couloir droit en dimension 3.

Preuve — A tout vecteur $v \in N_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}u_\rho$, associons le segment de droite $[u_\rho, v]$. Comme $\mathring{\sigma}$ est un ouvert de $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur $v \in \mathring{\sigma} \setminus \mathbb{R}u_\rho$ tel que chaque intersection entre un mur $\tau \in \Sigma(n-1)$ et le segment $[u_\rho, v]$ soit transverse et intérieure à τ (il n’y a qu’un nombre fini de sous-espaces stricts à éviter). Autrement dit il existe $v \in \mathring{\sigma} \setminus \mathbb{R}u_\rho$ tel que pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$ on ait

$$\tau \cap [u_\rho, v] = \emptyset \text{ ou } \tau \cap [u_\rho, v] = \{w_\tau\} \in \mathring{\tau}.$$

Soit v un tel vecteur. En numérotant de 1 à r les n -cônes rencontrés par le segment $[u_\rho, v]$ en allant de u_ρ à v , on obtient un couloir $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ tel que $\rho = b_1$, $\sigma = \sigma_r$. De plus pour tout $1 \leq k \leq r-1$, $[u_\rho, v] \setminus w_{\tau_k}$ possède deux composantes connexes :

$$[u_\rho, w_\tau] = \{z \in [u_\rho, v] \mid \Delta_{\sigma_k}^{b_k, z} > 0\} \text{ et } [w_\tau, v] = \{z \in [u_\rho, v] \mid \Delta_{\sigma_k}^{b_k, z} < 0\}.$$

En particulier $\rho = b_1$ et σ_{k+1} sont donc de part et d’autre de τ_k , ce qui assure que le couloir est simple, et on a bien pour tout $1 \leq k \leq r-1$

$$\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1} > 0.$$

L’effectivité numérique en découle. Le fait que la classe ne dépend que de ρ et de σ est une conséquence de la proposition 2.3.2. $\square$

Une construction similaire à celle des couloirs droits est utilisée par W. Fulton et B. Sturmfels dans [FS97] pour exprimer la classe d’une sous variété Y de X_Σ de dimension quelconque k comme combinaison linéaire de classes de sous-variété toriques $\mathbf{V}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Sigma(n-k)$ (lemme 4.4 p.343). La similarité est très grande. En effet les α qui apparaissent dans la combinaison sont ceux qui sont rencontrés par un sous-espace $L_{\mathbb{R}}$ de dimension k dépendant de $[Y]$ et d’un vecteur $v \in N$ qualifié de générique car choisi de telle manière que les intersections soient transversales. Les coefficients y sont exprimés comme mailles des sous-réseaux $L + N_\alpha$ où $L = L_{\mathbb{R}} \cap N$.

Pour un couloir droit C_C , chaque coefficient λ_k qui apparait dans l'expression du 1-cycle associé C_C peut également être exprimé comme maille d'un sous-réseau. En effet comme on l'a déjà remarqué (remarque 2.3.1), $\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle$ peut être interprété comme coordonnée de la classe $\overline{b_1}$ de b_1 modulo N_{τ_k} , dans la base $\overline{u_{\sigma_k, \tau_k}}$, c'est à dire comme maille du sous-réseau $\mathbb{Z}\overline{b_1}$ dans $N(\tau_k) = \mathbb{Z}\overline{u_{\sigma_k, \tau_k}}$. En remontant dans N on en déduit que

$$\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle = [N : \mathbb{Z}b_1 + N_{\tau_k}].$$

Les deux seules vraies différences entre la construction de Fulton et Sturmfels et celle des couloirs droits sont

- 1) La construction décrite dans [FS97] s'applique à la décomposition de sous-variétés de dimension quelconque quand les couloirs droits ne traitent que des 1-cycles (ce qui peut éventuellement suggérer une généralisation.)
- 2) Le segment (fini) utilisé dans la construction des couloirs droits permet une plus grande variété de constructions que la droite (infinie) $L_{\mathbb{R}}$.

Ainsi le cas $k = 1$ de la construction de Fulton et Sturmfels peut être considéré comme un cas particulier de couloir droit ou plus précisément comme une “limite de couloirs droits”.

Il est à noter que A. Kresch dans la sous-section 4.1 de [Kre00], intitulée “Curves joining a Point and a Divisor”, donne une interprétation géométrique intéressante du 1-cycle C_C associé à un couloir droit C entre le 1-cône ρ et le n -cône σ . Il ne s'intéresse pas aux coefficients de l'expression de C_C comme combinaison de courbes toriques mais décrit le 1-cycle effectif obtenu comme “arbre de $\mathbb{P}^1$ ” joignant le point torique $\mathbf{V}(\sigma)$ et le diviseur D_ρ (Kresch travaille sur des variétés toriques de Fano lisses.) De plus il interprète le degré anticanonique

$$C_C \cdot \left(\sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho \right) = 1 - \sum_{\rho \in \sigma(1)} \frac{\Delta_{\sigma_r}^{\rho, b_1}}{\Delta_{\sigma_r}}$$

comme distance entière (signée) entre u_ρ et l'enveloppe affine des $u_{\rho'}$ pour $\rho' \in \sigma(1)$. La proposition 4.1 de [Kre00] affirme que parmi tous les “arbres de $\mathbb{P}^1$ ” joignant joignant le point torique $\mathbf{V}(\sigma)$ et le diviseur D_ρ , C_C est celui qui possède le plus petit degré anticanonique.

La construction d'un couloir droit dépend généralement de la donnée d'un 1-cône ρ et d'un n -cône σ . Le corollaire suivant permet de réaliser la construction à partir de ρ et d'un mur $\tau \in \Sigma(n-1)$ destiné à devenir le dernier mur τ_{r-1} traversé par le couloir :

Corollaire 2.3.4 *Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ et $\rho \in \Sigma(1)$. Si $\rho \notin \text{Vect}(\tau)$ alors il existe un couloir droit $C = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ entre ρ et $\sigma_r \in \Sigma(n)$ tel que $\tau_{r-1} = \sigma_{r-1} \cap \sigma_r = \tau$. De plus la classe numérique du 1-cycle C_C ne dépend que de ρ et τ .*

Preuve — Il suffit de raisonner comme dans la preuve de la proposition 2.3.3 en choisissant le vecteur v directement dans l'intérieur relatif de τ . $\square$

Le résultat suivant constitue l'application principale des couloirs droits : décomposer toute classe de 1-cycle rationnel $[C]$ qui vérifie $\text{Cone}(\mathcal{J}_C^-) \in \Sigma$ comme combinaison linéaire positive de courbes toriques.

Proposition-Définition 2.3.5 Soit $[C] \in A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q}$ une classe de 1-cycle rationnel et supposons qu'il existe $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_C^- \subset \sigma(1)$ (éventuellement $\mathcal{J}_C^- = \emptyset$.) Posons $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_C^+ \setminus \sigma(1)$ et pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$ soit C_ρ un couloir droit entre ρ et σ . Alors on a

$$[C] = \left[\sum_{\rho \in \mathcal{J}^*} C \cdot D_\rho C_\rho \right]. \quad (2.4)$$

En particulier la classe $[C]$ est effective. De plus si $C \cdot D_\rho \in \mathbb{N}$ pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$, alors $[C] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$.

La collection $(C_\rho)_{\rho \in \mathcal{J}^*}$ est appelée un **réseau de couloirs** reliant $\mathcal{J}^*$ à σ .

Preuve — Pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$ le 1-cycle numériquement effectif C_ρ est tel que

$$\mathcal{J}_{C_\rho} \subset \sigma(1) \cup \{\rho\} \text{ et } C_\rho \cdot D_\rho = 1.$$

Si on note $C' = \sum_{\rho \in \mathcal{J}^*} C \cdot D_\rho C_\rho$ on a donc $\mathcal{J}_{C'} \subset \sigma(1) \cup \mathcal{J}^*$. De plus si tous les $C \cdot D_{\rho'_i}$ sont entiers alors $[C'] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$. Par construction, pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$ on a $C' \cdot D_\rho = C \cdot D_\rho$. On en déduit que $\mathcal{J}_{C-C'} \subset \sigma(1)$. D'après le lemme 2.1.3 cela entraîne que $C' \approx C$ ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque – Pour chaque $\rho \in \mathcal{J}^*$, seule la classe numérique du 1-cycle $[C_\rho]$ est entièrement déterminée par ρ et σ . Il existe en général plusieurs couloirs droits entre ρ et σ . En particulier l'ensemble des courbes toriques qui interviennent dans la formule (2.4) n'est que partiellement déterminé.

Corollaire 2.3.6 Soit $P \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive et C_P le 1-cycle associé (voir définition 1.11.1). On a

$$[C_P] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma).$$

Preuve — Cela découle immédiatement de la proposition 2.3.5 en remarquant que pour tout n -cône $\sigma \in \Sigma(n)$ contenant le focus de P on a

$$\mathcal{J}_{C_P}^- \subset \gamma_P(1) \subset \sigma(1)$$

et pour tout $\rho \in \mathcal{J}^* = \mathcal{J}_{C_P}^+ \setminus \sigma(1) = P \setminus \gamma_P(1)$ on a

$$C_P \cdot D_\rho = 1 \in \mathbb{N}.$$

$\square$

2.3.3 Couloirs circulaires

Comme leur nom l'indique, les couloirs circulaires sont des couloirs qui effectuent un tour complet dans l'éventail Σ . L'exemple le plus simple de couloir circulaire est donné par l'ensemble des n -cônes dont les points toriques associés appartiennent à une même surface. Les 1-cycles associés ne sont autres que les générateurs de l'espace des relations entre courbes

toriques (voir théorème 1.8.3). Alors que les couloirs droits permettent de construire des 1-cycles effectifs, les couloirs circulaires permettent de construire des 1-cycles non triviaux numériquement équivalents à 0. Dans le cas des variétés toriques non projectives, les deux situations ne sont pas nécessairement exclusives l'une de l'autre, c'est ce que nous étudierons succinctement à la section 2.5.

Contrairement aux couloirs simples, les couloirs circulaires ne possèdent pas deux extrémités b_1 et σ_r . Comme $\sigma_r \cap \sigma_1$ est un mur de l'éventail on peut le noter τ_r et le traiter comme n'importe lequel des murs "intérieurs" au couloir. En particulier on peut étendre les définitions de b_k et h_k à $k = r$:

$$\{b_r\} = \sigma_r(1) \setminus \sigma_1(1) \text{ et } \{h_r\} = \sigma_1(1) \setminus \sigma_r(1).$$

De ce fait, lorsque $\mathcal{C}$ est un couloir circulaire, il est commode de considérer que les n -cônes $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont numérotés modulo r . Ainsi σ_r est situé "juste avant" σ_1 , et on peut dire que l'ensemble des n -cônes d'un couloir circulaire jouit d'une propriété de "symétrie circulaire". En particulier le rôle joué par b_1 dans un couloir simple, peut ici être joué par n'importe lequel des b_k , pour $1 \leq k \leq r$.

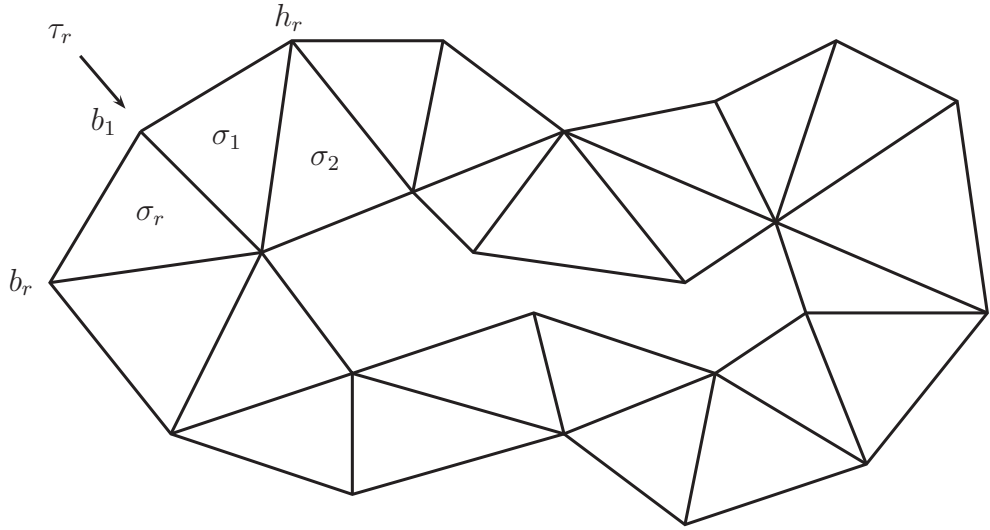


Figure 2.6 – Couloir circulaire en dimension 3.

Précisons la place des b_k parmi l'ensemble des 1-cônes qui apparaissent dans le couloir :

Lemme 2.3.7 *Pour tout couloir circulaire $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ on a*

$$\left(\bigcup_{k=1}^r \sigma_k(1) \right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^r \sigma_k(1) \right) = \{b_1, \dots, b_r\} = \{h_1, \dots, h_r\}.$$

Preuve — Montrons la première égalité (la seconde se prouve de manière similaire). Soit $\rho \in (\bigcup_{k=1}^r \sigma_k(1)) \setminus (\bigcap_{k=1}^r \sigma_k(1))$. Il existe $k, l \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\rho \in \sigma_k(1)$ et $\rho \notin \sigma_{k+l}(1)$. Si l_0 est le plus petit des tels l , on a $\rho = b_{l_0}$. Ceci montre l'inclusion du premier ensemble dans le second, l'autre inclusion découle des définitions. $\square$

Soit $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ un couloir circulaire. D'après la proposition 2.3.2, le 1-cycle associé est numériquement nul :

$$[C_{\mathcal{C}}] = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k [C_{\tau_k}] = 0,$$

On a donc une relation entre les classes $[C_{\tau_k}]$ dont les coefficients $\lambda_k = \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, b_1 \rangle$ dépendent linéairement du vecteur b_1 . S'il on remplace le couloir $\mathcal{C}$ "partant de b_1 " par le même couloir "partant de b_{k_0} " on obtient une nouvelle relation entre les mêmes $[C_{\tau_k}]$. Par linéarité on engendre ainsi tout un espace de relations entre les classes $[C_{\tau_k}]$ pour $1 \leq k \leq r$:

Proposition 2.3.8 *Soit $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ un couloir circulaire (de longueur $r > n$.) Pour tout $v \in N$ on a l'égalité*

$$\sum_{k=1}^r \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, v \rangle [C_{\tau_k}] = 0.$$

Preuve — D'après la proposition 2.3.2 l'égalité est vérifiée pour $v = u_{b_1}$. Considérons le couloir $\mathcal{C}' = (\sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_1)$. C'est également un couloir circulaire on peut donc également lui appliquer la proposition 2.3.2. En utilisant la numérotation modulo r cela nous donne

$$\sum_{k=1}^r \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, u_{b_2} \rangle [C_{\tau_k}] = \sum_{k=2}^{r+1} \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, u_{b_2} \rangle [C_{\tau_k}] = 0.$$

D'après le lemme 2.3.7, on peut faire de même avec tout $\rho \in (\bigcup_{k=1}^r \sigma_k(1)) \setminus (\bigcap_{k=1}^r \sigma_k(1))$. En outre, si $\rho \in \bigcap_{k=1}^r \sigma_k(1)$ on a aussi $\rho \in \bigcap_{k=1}^r \tau_k(1)$ et donc $\langle m_{\sigma_k, \tau_k}, u_{\rho} \rangle = 0$ pour tout $1 \leq k \leq r$. Finalement, l'égalité est vraie pour tout v qui engendre un des 1-cônes de $\bigcup_{k=1}^r \sigma_k(1)$. En particulier elle est vraie pour tous les générateurs minimaux de σ_1 . Comme ceux-ci forment une base de $N_{\mathbb{R}}$, par linéarité, l'égalité est vraie pour tout $v \in N$. $\square$

Le fait que pour tout $v \in N$ on ait une relation dans $N_1(X_{\Sigma})$ entre les classes $[C_{\tau_k}]$ ayant pour coefficients les produits scalaires $\langle m_{\sigma_k, \tau_k}, v \rangle$ se traduit par dualité en l'existence d'une relation dans M entre les vecteurs m_{σ_k, τ_k} ayant pour coefficients les nombres d'intersection $C_{\tau_k} \cdot D$.

Corollaire 2.3.9 *Soit $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ un couloir circulaire. Pour tout diviseur de Weil $D \in \text{Div}(X_{\Sigma})$ on a*

$$\sum_{k=1}^r C_{\tau_k} \cdot D m_{\sigma_k, \tau_k} = 0.$$

Preuve — Soit $D \in \text{Div}(X_{\Sigma})$ un diviseur de Weil sur X_{Σ} . D'après la proposition 2.3.8, on a

$$\sum_{k=1}^r \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, v \rangle C_{\tau_k} \cdot D = 0.$$

pour tout $v \in N$. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^r C_{\tau_k} \cdot D m_{\sigma_k, \tau_k}$ est orthogonal à tout $v \in N$. Il est donc nul, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

2.4 Décompositions directes de courbes

Les notions de rayon extrémal ou de classe extrémale peuvent être définis sur toute variété torique, même non projective, par la propriété caractérisant une arête $\mathcal{R}$ du cône polyédral convexe $\overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$:

$$\forall C, C' \in \overline{\text{NE}}(X_\Sigma), \quad C + C' \in R \implies C, C' \in R$$

Dans cette section nous introduisons une notion contraire, celle de courbe décomposable, et nous nous intéressons plus particulièrement aux décompositions explicites des classes de courbes toriques lorsque cela est possible.

On parle de décomposition directe de la courbe C_τ plutôt que de décomposition de sa classe $[C_\tau]$ car tout se passe dans l'éventail et les décompositions exhibées sont construites à partir des courbes toriques “voisines” de C_τ .

L'idée est de proposer une nouvelle façon de “contourner les murs” : alors que M. Reid et C. Casagrande ramène le problème de la décomposition d'une classe à l'existence d'une relation entre les courbes toriques contenues dans une même surface torique, nous utilisons ici les réseaux de couloirs droits de la proposition 2.3.5.

On commence par traiter le cas des surfaces où les deux méthodes coïncident. On montre ensuite que la notion de classe contractible de C. Casagrande peut être étendue aux variétés toriques complètes singulières.

Enfin on montre que les courbes dont la classe est contractible sont précisément celles qui ne sont pas directement décomposables et on en donne plusieurs caractérisations combinatoires qui n'étaient que sous-jacentes dans les travaux de Casagrande ou de Reid.

Définition 2.4.1 Une courbe irréductible C est dite **décomposable** si elle est numériquement équivalente à un 1-cycle rationnel T_N -invariant

$$C' = \sum_{\tau \in \Sigma(n-1)} \lambda_\tau C_\tau$$

tel que pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$, $\lambda_\tau \in \mathbb{Q}_+$ et il existe $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $\lambda_\tau > 0$ et $C_\tau \notin \mathbb{Q}[C]$. Dans ce cas on dit que C' est une **décomposition** de la courbe C . En particulier dans le cas projectif C est décomposable si et seulement si elle n'est pas extrémale.

La définition suivante fait le lien entre les réseaux de couloirs droits introduits à la sous-section 2.3.2 et le problème général de recherche de générateurs pour le cône de Mori :

Définition 2.4.2 Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ un mur, on a $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \tau(1)$. Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)$ et posons $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \sigma(1)$. Enfin pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$ soit C_ρ un couloir droit entre ρ et σ . Alors d'après la proposition 2.3.5 la courbe C_τ est numériquement équivalente à

$$C' = \sum_{\rho \in \mathcal{J}^*} C_\tau \cdot D_\rho C_{C_\rho}.$$

Si C' est une décomposition de C_τ , on dit que C_τ est **directement décomposable**.

2.4.1 Le cas des surfaces

Dans une surface torique, la décomposition directe d'une courbe ne nécessite qu'un unique couloir droit. On en déduit le résultat suivant :

Lemme 2.4.3 *Soit X_Σ une surface torique complète associée à un éventail Σ de $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$. On numérote les 1-cônes de Σ dans le sens trigonométrique : $\Sigma(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ de même que les diviseurs (courbes) toriques correspondant $D_1, \dots, D_s$. La courbe torique $C = D_i$ est directement décomposable dans les deux cas suivants :*

- (1) Si $s \geq 4$ et $C \cdot C > 0$.
- (2) Si $s > 4$ et $C \cdot C = 0$.

Preuve — On construit directement les décompositions à l'aide de couloirs droits (proposition 2.3.3.)

- (1) $s \geq 4$ et $C \cdot C > 0$. Quitte à effectuer un changement de base on peut supposer que l'éventail est donné par $u_1 = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \dots, u_{s-2} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, u_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_s = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a > 0, c < 0$ et $ad - bc > 0$, et que $C = D_{s-1}$. On a alors

$$C \cdot C = - \frac{\det(u_{s-2}, u_s)}{\det(u_{s-2}, u_{s-1}) \det(u_{s-1}, u_s)} = - \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 0 \\ d & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{vmatrix}} = \frac{ad - bc}{-ac} > 0.$$

On trace un segment de droite entre u_s et un point $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à l'intérieur du cône $\text{Cone}(u_{s-2}, u_{s-1})$ tel que $y > 0$. Le couloir droit ainsi construit est

$$\mathcal{C} = (\sigma_1 = \text{Cone}(u_s, u_1), \dots, \sigma_{s-2} = \text{Cone}(u_{s-3}, u_{s-2}), \sigma_{s-1} = \text{Cone}(u_{s-2}, u_{s-1})).$$

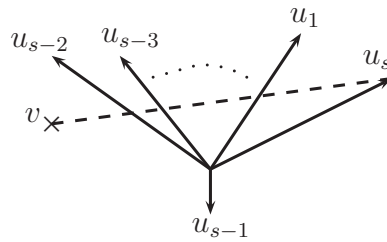


Figure 2.7 – Décomposition d'une courbe d'auto-intersection > 0 .

Le 1-cycle associé

$$C_C = \sum_{k=1}^{s-2} \frac{\Delta_{\sigma_k}^{b_k, b_1}}{\delta_{\tau_k}} C_{\tau_k} = \sum_{k=1}^{s-2} \frac{\det(u_s, u_k)}{1} D_k$$

décompose aC car on a

$$\begin{aligned} C_C + \det(u_s, u_{s-1}) D_{s-1} &= \sum_{k=1}^s \det(u_s, u_k) D_k = \sum_{k=1}^s (u_{s,1} u_{k,2} - u_{s,2} u_{k,1}) D_k \\ &= u_{s,1} E_2 - u_{s,2} E_1, \end{aligned}$$

où E_1 et E_2 sont les diviseurs principaux qui engendrent $\text{Div}_{0,T_N}(X_\Sigma)$. On en déduit que

$$[C_C] = - \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & -1 \end{vmatrix} [D_{s-1}] = a[C].$$

Enfin, du fait que $s \geq 4$, il y a parmi $D_1, \dots, D_{s-2}$ des courbes qui ne sont pas numériquement proportionnelles à $C = D_{s-1}$, ce qui permet de conclure.

- (2) $s > 4$ et $C \cdot C = 0$. On raisonne de la même manière. Dans ce cas on peut supposer $u_s = -u_{s-2}$. Un segment partant de u_s ne peut atteindre un point $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ intérieur au cône $\text{Cone}(u_{s-2}, u_{s-1})$ sans passer par ρ_{s-1} . On prend donc v dans l'intérieur de $\text{Cone}(u_{s-3}, u_{s-2})$.

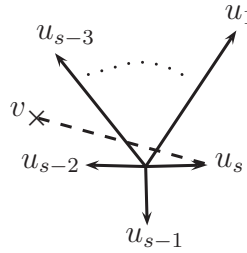


Figure 2.8 – Décomposition d'une courbe d'auto-intersection nulle.

On conclut comme précédemment : le déterminant $\det(u_s, u_{s-2})$ étant nul, le 1-cycle $C_C = \sum_{k=1}^{s-3} \det(u_s, u_k) D_k$ vérifie

$$C_C + \det(u_s, u_{s-1}) D_{s-1} = \sum_{k=1}^s \det(u_s, u_k) D_k = u_{s,1} E_2 - u_{s,2} E_1,$$

et on a encore $[C_C] = a[C]$. Le lemme est ainsi démontré. $\square$

D'après le corollaire 1.10.12, toute surface torique est projective. Le résultat suivant montre que dans une surface torique, toute courbe qui n'est pas directement décomposable est en fait extrémale.

Proposition 2.4.4 *Soit X_Σ une surface torique complète. On numérote les 1-cônes de son éventail Σ dans le sens trigonométrique : $\Sigma(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ de même que les diviseurs (courbes) toriques correspondant $D_1, \dots, D_s$. Pour une courbe torique $C = D_i$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $[C]$ est extrémale.
- (b) C n'est pas directement décomposable.
- (c) On est dans l'un des cas suivants :
 - (c1) $s = 3$ c'est à dire que X_Σ est un faux espace projectif à poids.
 - (c2) $s = 4$ et $C \cdot C = 0$. X_Σ est alors une surface fibrée sur $\mathbb{P}^1$ dont les fibres sont numériquement proportionnelles à C .
 - (c3) $s \geq 4$ et $C \cdot C < 0$.

Preuve — L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est évidente et le lemme 2.4.3 démontre (b) $\Rightarrow$ (c) mis à part la description géométrique de chaque cas. Le fait qu'une surface de nombre de Picard 1 soit un faux plan projectif pondéré est bien connu, chacune de ses courbes toriques est bien entendu extrémales. Dans le cas (c2) le fait que $C \cdot C = 0$ correspond au fait qu'il y a dans l'éventail deux 1-cônes opposés, disons ρ_2 et ρ_4 et donc au fait que la surface est un fibré sur $\mathbb{P}^1$ dont $C = D_1$ et D_3 sont des fibres. En particulier D_1 et D_3 sont extrémales. Enfin dans le cas (c3) la courbe $C = D_i$ est la seule courbe torique qui vérifie $C \cdot D_i < 0$, elle ne peut donc pas être combinaison linéaire à coefficients positifs des autres courbes toriques. On en déduit que C est extrémales ce qui conclut la preuve. $\square$

Nous donnons ci-dessous une nouvelle preuve de la proposition 4.2 de [Cas03]. Nous présentons le résultat comme conséquence directe de ce qui précède.

Corollaire 2.4.5 *Soit X_Σ une surface torique lisse et complète. Toute classe de 1-cycle $[C] \in A_1(X_\Sigma) \cap \overline{NE}(X_\Sigma)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de classes de courbes extrémales.*

Preuve — Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le montrer pour les courbes toriques puisque celles-ci engendrent $A_1(X_\Sigma) \cap \overline{NE}(X_\Sigma)$. Or, dans la preuve du lemme 2.4.3 on construit pour toute courbe torique $[C] = [D_{s-1}]$ non extrémales une décomposition de la forme

$$[\det(u_{s-1}, u_s) D_{s-1}] = \left[\sum_{k=1}^{s-2} \det(u_s, u_k) D_k \right]$$

où tous les déterminants sont des entiers positifs et en particulier $\det(u_{s-1}, u_s) = 1$ puisque la surface est lisse. En outre, quitte à changer le sens de numérotation, on peut supposer que tous les D_k sont des courbes extrémales pour $1 \leq k \leq s-2$. En effet si la surface contient une autre courbe torique $C' = D_k$ non extrémales, alors d'après la proposition 2.4.4 on a $D_k \cdot D_k \geq 0$, c'est à dire (d'après le théorème 1.8.11) $\det(u_{k-1}, u_{k+1}) \leq 0$. Pour des raisons d'angles, cela implique que $k = s-2$ ou $k = s$. Quitte à changer le sens de numérotation, on peut supposer que $k = s$ et la relation

$$[C] = \sum_{k=1}^{s-2} \det(u_s, u_k) [D_k]$$

est alors bien une écriture de $[C]$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de classes extrémales. $\square$

2.4.2 Courbes contractibles sur les variétés toriques singulières

Nous reprenons ici le résultat central de [Cas03] pour l'adapter au cas des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes. Ceci permet d'étendre la définition de classes contractibles, introduite par C. Casagrande dans le cas des variétés toriques complètes lisses, au cas plus général des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et complètes.

Théorème 2.4.6 Soit X_Σ une variété torique $\mathbb{Q}$ -factorielle complète. On considère une classe de 1-cycle $[C] \in A_1(X_\Sigma)_\mathbb{Q} \cap \overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $[C] = [C_\tau]$ et toute courbe torique $C_\tau \in C$ est extrémale dans chaque surface torique irréductible qui la contient.
- (b) Il existe une collection primitive P telle que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$ et pour tout cône $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu(1) \cap \mathcal{J}_C = \emptyset$, si $\nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_C^-) \in \Sigma$ alors

$$\text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_C^+, \quad \nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}) \in \Sigma$$

- (c) Il existe $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $[C] = [C_\tau]$ et il existe une variété torique $X_{[C]}$ et un morphisme torique $\phi_{[C]} : X_\Sigma \rightarrow X_{[C]}$ à fibre connexes tel que pour toute courbe irréductible C' dans X_Σ

$$\phi_{[C]}(C') = \{pt\} \Leftrightarrow [C'] \in \mathbb{Q}_+[C].$$

Définition 2.4.7 On dit que la classe $[C]$ est une **classe contractible** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 1.11.5.

Preuve du théorème 2.4.6 — La preuve de Casagrande [Cas03] s'adapte sans modification majeure au cas d'une variété $\mathbb{Q}$ -factorielle.

La preuve de l'implication (b) $\Rightarrow$ (c), en particulier, ne fait aucun usage de l'hypothèse de lissité.

Pour (c) $\Rightarrow$ (a) l'argument de Casagrande consiste à se ramener au cas des surfaces toriques lisses. Le fait que celles-ci soient obtenues par une suite finie d'éclatements à partir de $\mathbb{P}^2$ ou d'une surface de Hirzebruch ne se généralise pas au cas des surfaces singulières. Cependant, à partir de toute surface torique, il est possible d'aboutir, par une suite finie de contractions extrémales, à l'un des deux cas suivants :

- (1) un espace projectif à poids (éventuellement faux)
- (2) un fibré sur $\mathbb{P}^1$ (éventuellement singulier)

ce qui permet de reproduire le raisonnement de Casagrande grâce à la proposition 2.4.4.

Une adaptation semblable est nécessaire pour l'implication (a) $\Rightarrow$ (b). La seule modification supplémentaire concerne les coefficients de la relation primitive associée à $[C]$: ce ne sont plus nécessairement des entiers. Cependant ceci n'a pas de conséquence sur le raisonnement combinatoire qui peut être mené du début à la fin sans faire appel à l'hypothèse de lissité. $\square$

Nous pouvons à présent faire le lien en toute généralité entre les notions de contractibilité et de contractibilité locale.

Corollaire 2.4.8 Toute courbe torique C_τ dont la classe est contractible est localement contractible.

Preuve — Avec le (b) du théorème 2.4.6, on démontre le (a) du théorème 2.2.11. Par hypothèse il existe une collection primitive P telle que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$. Il suffit donc de montrer que P est la seule collection primitive incluse dans $\mathcal{S}_\tau(1)$. Tout d'abord, du fait que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$, on a

$$\mathcal{J}_{C_\tau}^+ = \mathcal{J}_{C_P}^+ = P.$$

Par ailleurs en appliquant (b) pour $\nu = \emptyset$ on a (puisque $\text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^-) \in \Sigma$)

$$\text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \quad \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\}) \in \Sigma.$$

Soit $Q \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive telle que $Q \subset \mathcal{S}_\tau(1)$. Pour tout $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$, Q n'est pas incluse dans $\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\}$, autrement dit $\rho \in Q$. Ceci montre que $P = \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \subset Q$. Or deux collections primitives incluse l'une dans l'autre sont nécessairement égales. $P = \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ est donc bien l'unique collection primitive incluse dans $\mathcal{S}_\tau(1)$. $\square$

2.4.3 Caractérisations combinatoires

Nous montrons ici que les courbes dont la classe est contractible sont exactement celles qui ne sont pas directement décomposables au sens de la définition 2.4.2. Nous en donnons au passage différentes caractérisations combinatoires.

Théorème 2.4.9 *Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ et soit $\mathcal{R} = \mathbb{R}_+[C_\tau]$ le rayon engendré par $[C_\tau]$ dans $\overline{\text{NE}}(X_\Sigma)$. Il y a équivalence entre*

(a) C_τ n'est pas directement décomposable.

(b) Pour tout $\tau' \in \Sigma(n-1)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \tau'(1)$ et tout $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ tel que $\rho \notin \mathbb{R}\tau'$ on a

$$[C_{\tau'}] \in \mathcal{R} \text{ et } \tau' + \rho \in \Sigma(n).$$

(c)

$$\{\sigma \in \Sigma(n) \mid \mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)\} = \{\tau' + \rho \mid [C_{\tau'}] \in \mathcal{R} \text{ et } \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \tau'(1)\}.$$

(d)

$$\bigcup_{\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)} \sigma = \bigcup_{[C_{\tau'}] \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_{\tau'}.$$

(e) Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$ on a

$$\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1) \Rightarrow \text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \quad \text{Cone}((\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1)) \setminus \{\rho\}) \in \Sigma(n).$$

(f) Il existe une collection primitive P telle que $[C_\tau] = [C_P]$ et pour tout cône $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu(1) \cap \mathcal{J}_{C_\tau} = \emptyset$, si $\nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^-) \in \Sigma$ alors

$$\text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \quad \nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\}) \in \Sigma.$$

Remarque – Aux points (c) et (d), l'inclusion de droite à gauche est évidente. Dans la preuve nous ne considérerons donc que l'inclusion dans l'autre sens.

Preuve —

(a) $\Rightarrow$ (b) D'après le corollaire 2.3.4, pour tous ρ et τ' comme dans (b) il existe un 1-cone ρ' et un couloir droit $\mathcal{C}_\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ entre ρ et $\sigma_r = \tau' + \rho'$ tel que ρ et ρ' soient de part et d'autre de $\text{Vect}(\tau')$ (en particulier $r \geq 2$.) Notons $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \sigma_r(1) = \{\rho_1 = \rho, \dots, \rho_m\}$. Pour chaque $2 \leq i \leq m$ il existe un couloir droit $\mathcal{C}_{\rho_i}$ entre ρ_i et σ , de telle sorte que C_τ soit numériquement équivalente à

$$C' = \sum_{i=1}^m C \cdot D_{\rho_i} C_{\mathcal{C}_{\rho_i}}.$$

Par définition, le fait que C' ne soit pas une décomposition de C_τ signifie que pour tout $1 \leq i \leq m$, tous les termes de $C_{\mathcal{C}_{\rho_i}}$ appartiennent à $\mathcal{R}$. De plus comme ces couloirs sont droits tous les coefficients qui apparaissent dans la définition des $C_{\mathcal{C}_{\rho_i}}$ sont strictement positifs. En particulier en notant $\tau_k = \sigma_k \cap \sigma_{k+1}$ on a

$$C_C = C_{\mathcal{C}_\rho} = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k C_{\tau_k} \text{ avec } [C_{\tau_k}] \in \mathcal{R} \text{ pour } 1 \leq k \leq r-1.$$

En particulier pour tout $1 \leq k \leq r-1$ on a $\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_k}}^+$. Or comme $\mathcal{C}_\rho$ est un couloir droit, pour tout $k \geq 2$ on a $\rho \notin \sigma_k(1)$ et $\rho \notin \sigma_{k+1}(1)$ donc $\rho \notin \mathcal{J}_{C_{\tau_k}} \subset \sigma_k(1) \cup \sigma_{k+1}(1)$. On en conclut que $r = 2$ et $\tau' + \rho = \sigma_1$ ce qui termine la preuve.

(b) $\Rightarrow$ (c) Il suffit de montrer l'inclusion de gauche à droite. Soit donc $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)$. Il suffit de montrer que σ a une face $\tau' < \sigma$ de dimension $(n-1)$ telle que $[C_{\tau'}] \in \mathcal{R}$. En effet le fait que $\sigma = \tau + \rho$ entraîne alors que $\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau'}}^+ = \mathcal{J}_{C_\tau}^+$. Posons $\alpha = \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^-)$. Comme α est une face de σ , il existe des faces $\tau_1, \dots, \tau_l \in \sigma(n-1)$ tels que $\alpha = \bigcap_{i=1}^l \tau_i$. Soit $\rho \in \mathcal{S}_\tau \setminus \tau(1) \subset \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ on a $\rho \notin \text{Vect}(\alpha)$ donc il existe $1 \leq i \leq l$ tel que $\rho \notin \text{Vect}(\tau_i)$. On en déduit en utilisant (b) que $[C_{\tau_i}] \in \mathcal{R}$ et l'inclusion est démontrée.

(c) $\Leftrightarrow$ (d) Cette équivalence est très facile. Les inclusions de droite à gauche sont dans les deux cas triviales. Il suffit donc de remarquer que pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$ on a

$$\{\sigma \in \Sigma(n) \mid \tau < \sigma\} = \{\tau + \rho \mid \rho \in \mathcal{S}_\tau \setminus \tau(1)\} = \{\text{Cone}(\mathcal{S}_\tau \setminus \{\rho\}) \mid \rho \in \mathcal{S}_\tau \setminus \tau(1)\}.$$

(c) $\Rightarrow$ (e) Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)$. D'après (c) il existe $\tau' \in \Sigma(n-1)$ et $\rho_1 \in \Sigma(1)$ tels que $[C_{\tau'}] \in \mathcal{R}$ et $\sigma = \tau' + \rho_1$. On peut supposer sans perte de généralité que $\tau' = \tau$, c'est à dire que σ contient τ . Notons ρ_2 l'unique élément de $\mathcal{S}_\tau \setminus \sigma(1)$. On veut montrer que pour tout 1-cône $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$. L'ensemble $I_\rho = \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1) \setminus \{\rho\}$ vérifie $\text{Cone}(I_\rho) \in \Sigma(n)$. Soit donc $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$. On a

$$\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \{\rho_2\} \subset \mathcal{S}_\tau(1) \setminus \{\rho_2\} \subset \sigma(1).$$

On en déduit que $\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1) = \sigma(1) \cup \{\rho_2\}$ et donc

$$I_\rho = (\sigma(1) \cup \{\rho_2\}) \setminus \{\rho\} = \mathcal{S}_\tau \setminus \{\rho\}.$$

On distingue deux cas. Si $\rho \notin \sigma(1)$, c'est à dire si $\rho = \rho_2$ on a $I_\rho = \sigma(1)$, il n'y a donc rien à démontrer. Si $\rho \in \sigma(1)$ on pose $\tau'' = \text{Cone}(\sigma(1) \setminus \{\rho\})$. On a $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \tau''(1)$ et $\rho_2 \notin \tau''(1)$. En appliquant (c) de nouveau on obtient $\sigma' := \tau'' + \rho_2 \in \Sigma(n)$. Il ne reste qu'à remarquer que

$$\sigma'(1) = \tau''(1) \cup \{\rho_2\} = \sigma(1) \setminus \{\rho\} \cup \{\rho_2\} = I_\rho,$$

c'est à dire que $\text{Cone}(I_\rho) = \sigma'$.

(e) $\Leftrightarrow$ (f) On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} & (\forall \sigma \in \Sigma(n), \quad \mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1) \Rightarrow \forall \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \text{Cone}((\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1)) \setminus \{\rho\}) \in \Sigma) \\ \Leftrightarrow & (\forall \alpha \in \Sigma, \quad \mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \alpha(1) \Rightarrow \forall \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \text{Cone}((\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \alpha(1)) \setminus \{\rho\}) \in \Sigma) \\ \Leftrightarrow & (\forall \nu \in \Sigma, \quad (\nu(1) \cap \mathcal{J}_{C_\tau} = \emptyset \text{ et } \nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^-) \in \Sigma) \\ & \Rightarrow \forall \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \nu + \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\}) \in \Sigma). \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à montrer que les conditions équivalentes ci-dessus entraînent l'existence d'une collection primitive P telle que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$. Du fait que $\text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^-) \in \Sigma$, pour $\nu = \emptyset$ on a

$$\text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+, \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\}) \in \Sigma. \quad (2.5)$$

A fortiori, pour tout $\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ on a $\text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \{\rho\}) \in \Sigma$, autrement dit $\mathcal{J}_{C_\tau}^+$ est une collection primitive $P \in \mathcal{P}_\Sigma$. Pour $\rho \in P$ notons $\alpha_\rho = \text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau} \setminus \{\rho\})$. En raisonnant comme dans la preuve du théorème 2.2.11, on montre à partir de (2.5) que

$$\text{Cone}(\mathcal{J}_{C_\tau}) = \bigcup_{\rho \in P} \alpha_\rho.$$

On en déduit que le focus γ_P vérifie

$$\gamma_P(1) \subset \bigcup_{\rho \in P} \alpha_\rho(1) \subset \mathcal{J}_{C_\tau}.$$

La proposition permet donc de conclure que $[C_P] \in \mathbb{Q}_+[C_\tau]$.

(e) $\Rightarrow$ (a) Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma(1)$ et posons $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \sigma(1)$. Soit $(\mathcal{C}_\rho)_{\rho \in \mathcal{J}^*}$ un réseau de couloirs reliant $\mathcal{J}^*$ à σ et C' le 1-cycle associé :

$$C' = \sum_{\rho \in \mathcal{J}^*} C \cdot D_\rho C_{\mathcal{C}_\rho}.$$

Montrer que C' ne décompose pas C_τ revient à montrer que pour tout $\rho \in \mathcal{J}^*$, le 1-cycle $C_{\mathcal{C}_\rho}$ associé au couloir droit $\mathcal{C}_\rho$ n'a que des termes appartenant à $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{J}_{C_\tau}^+$ contient une collection primitive (lemme 2.1.4), $\mathcal{J}^*$ n'est pas vide. Soit donc $\rho' \in \mathcal{J}^*$ et $\sigma' = \text{Cone}((\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1)) \setminus \{\rho'\})$. D'après (e) on a $\sigma' \in \Sigma(n)$. Or comme $\rho' \notin \sigma(1)$ on a

$$(\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \cup \sigma(1)) \setminus \{\rho'\} = \sigma(1) \cup (\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \{\rho'\}),$$

d'où $\sigma(1) \subset \sigma'(1)$. On en déduit que $\sigma' = \sigma$ et $\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \{\rho'\} \subset \sigma(1)$. En particulier on a $\mathcal{J}^*$ ne contient que ρ' et le réseau $(\mathcal{C}_\rho)_{\rho \in \mathcal{J}^*}$ est constitué d'un unique couloir $\mathcal{C}_{\rho'} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r = \sigma)$, de sorte que $C' = \mu_{\rho'} \mathcal{C}_{\rho'}$ avec $\mu_{\rho'} = C_\tau \cdot D_{\rho'} > 0$.

A présent soit $\rho'' \in \sigma(1) \setminus \sigma_{r-1}(1)$. Comme ρ' et ρ'' sont situés de part et d'autre de $\tau_{r-1} = \sigma_{r-1} \cap \sigma$, on a $\Delta_\sigma^{\rho'', \rho'} < 0$, d'où

$$C_\tau \cdot D_{\rho''} = \mu_{\rho'} C_{\mathcal{C}_{\rho'}} \cdot D_{\rho''} = \mu_{\rho'} \left(-\frac{\Delta_\sigma^{\rho'', \rho'}}{\Delta_\sigma} \right) > 0,$$

autrement dit $\rho'' \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+$. On en déduit que $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \sigma_{r-1}(1)$ et en raisonnant comme ci-dessus on montre à l'aide de (e) que $(\mathcal{J}_{C_\tau}^+ \setminus \{\rho''\}) \subset \sigma_{r-1}(1)$. En particulier $\rho' \in \sigma_{r-1}(1)$ ce qui signifie que $\sigma_1 = \sigma_{r-1}$ c'est à dire $r = 2$. On a donc $C_{\mathcal{C}_{\rho'}} = \lambda_1 C_{\tau_1}$ et comme $[C_\tau] = [C'] = \mu_{\rho'} C_{\mathcal{C}_{\rho'}}$ on en déduit que C_{τ_1} appartient à $\mathcal{R}$ ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire 2.4.10 *Une courbe torique C_τ n'est pas directement décomposable si et seulement si sa classe $[C_\tau]$ est contractible.*

2.5 Vers une décomposition indirecte des courbes

Dans cette section nous présentons une piste d'étude des variétés toriques non projectives basée sur la notion de couloir circulaire polarisé. Il s'agit essentiellement d'une tentative de caractérisation précise des configurations "en spirales" que l'on retrouve dans la plupart des éventails de variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles complètes non projectives. Nous présentons les couloirs circulaires polarisés puis en esquissons une application possible à la décomposition "indirecte" des classes contractibles non extrémales en combinaison positive de classes extrémales.

2.5.1 Couloirs circulaires polarisés

Les variétés algébriques non projectives sont relativement rares dans la littérature, y compris dans le cas torique. Comme le souligne Laurent Bonavero dans [Bon00], dans les quelques exemples connus, la cause géométrique de la non projectivité n'est pas toujours bien comprise. Le défaut de projectivité est généralement démontré à l'aide des fonctions supports (non évoquées dans cette thèse) et repose sur le choix judicieux d'un petit nombre de murs de l'éventail, permettant de montrer que de telles fonctions ne peuvent être strictement convexes sur tout $N_{\mathbb{R}}$. Le résultat le plus général dans cette direction est à notre connaissance la proposition 9.3 de [Oda78], qui permet selon Oda de montrer la non projectivité de toutes les variétés toriques (complètes lisses) non projectives de dimension 3 qui apparaissent dans sa classification (Th. 9.6 de [Oda78] ou Th. 1.34 de [Oda88]).

Nous proposons ici une nouvelle approche, un peu moins générale en ce qui concerne la dimension 3 mais qui a l'avantage d'être valable en toute dimension. Elle repose sur la notion de couloir circulaire polarisé dont voici la définition :

Définition 2.5.1 Soit Σ un éventail simplicial complet. Un couloir circulaire $\mathcal{C} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ est dit **polarisable** s'il existe un vecteur $p \in N$ tel que

$$\text{pour tout } 1 \leq k \leq r \text{ on a } \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, p \rangle \geq 0.$$

On dit alors que le vecteur p est un **pôle** pour $\mathcal{C}$ et le couple $(\mathcal{C}, p)$ est appelé **couloir circulaire polarisé**.

Remarque – L'ensemble des vecteurs p qui vérifient la condition ci-dessus forme un cône polyédral convexe dans N .

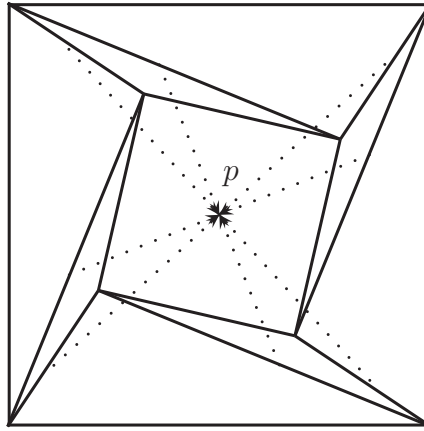


Figure 2.9 – Couloir circulaire polarisé.

Le résultat suivant peut être considéré comme une variante de la proposition 9.3 de [Oda78], non applicable à tous les cas connus mais valable en toute dimension.

Proposition 2.5.2 S'il existe un couloir circulaire polarisable $\mathcal{C}$ dans l'éventail Σ alors la variété torique X_Σ n'est pas projective.

Preuve — D'après la proposition 1.10.9, il suffit de montrer qu'il existe une relation linéaire entre classes de courbes toriques dont les coefficients sont tous positifs. D'après la proposition 2.3.8, pour tout $v \in N$ on a une relation entre les courbes toriques C_{τ_k} qui apparaissent dans le couloir circulaire $\mathcal{C}$ de la forme

$$\sum_{k=1}^r \langle m_{\sigma_k, \tau_k}, v \rangle [C_{\tau_k}] = 0.$$

Si $\mathcal{C}$ est polarisable il existe un pôle p tel que pour $v = p$ tous les coefficients sont positifs, la proposition est donc démontrée. $\square$

Remarque – L'hypothèse de complétude n'est pas nécessaire ici. Tout éventail à support convexe de dimension maximal qui contient un couloir circulaire polarisable est l'éventail d'une variété non quasi-projective.

La similarité avec le résultat de T. Oda est grande mais nous reportons la comparaison précise à des travaux ultérieurs. Contentons-nous de remarquer ici que dans la proposition 9.3 de [Oda78], le polygone considéré peut être regardé comme le “bord extérieur” d’un couloir circulaire et que les inégalités régissant l’existence d’un éventuel pôle y sont moins contraignantes que celles de la définition 2.5.1 ci-dessus.

Dans [Oda88], T. Oda affirme, sans le démontrer, qu’il est aisé d’appliquer la proposition 9.3 (de [Oda78]) à tous les cas non projectifs apparaissant dans sa classification, y compris lorsque l’éventail est défini avec des paramètres (jusqu’à quatre paramètres pour la variété notée [8-13’] ou $(4^4 5^4)$). S’il est effectivement aisé de le vérifier dans la plupart des cas, il peut s’avérer fastidieux de traiter tous les cas lorsque les paramètres sont nombreux. Il en est de même de la proposition 2.5.2 ci-dessus. Toutefois il est intéressant dans certains cas de voir comment, malgré les déformations de l’éventail induites par la variation des paramètres, la méthode peut rester efficace.

Dans [Bon00], Laurent Bonavero montre directement (sans utiliser la proposition 9.3 d’Oda) que la variété notée [8-13’] dans [Oda78] n’est pas projective. Nous le faisons ici à l’aide de couloirs circulaires polarisés. Nous distinguons 4 cas en fonction des signes des paramètres a et b .

Exemple 2.5.3 Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ soit $\Sigma(a, b)$ l’éventail de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ dont les 1-cônes sont engendrés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $u_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

et dont l’ensemble des 3-cônes est

$$\{ (1, 2, 4), (1, 2, 7), (1, 4, 6), (1, 6, 7), (2, 3, 4), (2, 3, 7), (3, 4, 5), (3, 5, 8), (3, 7, 8), \\ (4, 5, 6), (5, 6, 8), (6, 7, 8) \}$$

où on note $(i, j, k) = \text{Cone}(u_i, u_j, u_k)$.

La variété torique $X_{a,b} = X_{\Sigma(a,b)}$ est complète et lisse. Nous allons redémontrer à l’aide de la proposition 2.5.2 qu’elle est non-projective pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\})^2$. Pour cela nous exhibons quatre couloirs circulaires qui s’avèrent polarisables pour au moins l’un des quatre couple de signes des paramètres a et b .

(1) Supposons $a \geq 2$ et $b \geq 2$ et considérons le couloir circulaire $\mathcal{C}_{+,+} = (\sigma_1, \dots, \sigma_8)$ où

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_8) = ((1, 2, 4), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (3, 5, 8), (5, 6, 8), (6, 7, 8), (1, 6, 7), (1, 2, 7)).$$

Les murs intérieurs à $\mathcal{C}_{+,+}$, notés $\tau_k = \sigma_k \cap \sigma_{k+1}$ avec $\sigma_9 = \sigma_1$, sont dans l’ordre

$$\tau_1 = (2, 4), \tau_2 = (3, 4), \tau_3 = (3, 5), \tau_4 = (5, 8), \tau_5 = (6, 8), \tau_6 = (6, 7), \tau_7 = (1, 7) \\ \text{et } \tau_8 = (1, 2).$$

Si l’on note $m_k = m_{\sigma_k, \tau_k}$ pour $1 \leq k \leq 8$ on a

$$m_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, m_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, m_5 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, m_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ m_7 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } m_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

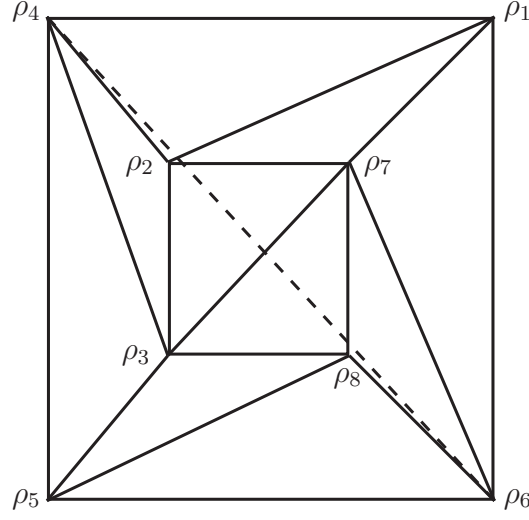


Figure 2.10 – Eventail de la variété notée [8-13'] dans [Oda78].

Pour tout $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N = \mathbb{Z}^3$ on a donc, d'après la proposition 2.3.8, la relation entre classes de courbes suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^8 \langle m_k, v \rangle [C_{\tau_k}] \\ &= (z - x) [C_{2,4}] + (z - x - y) [C_{3,4}] + (-x - y) [C_{3,5}] - y [C_{5,8}] + (ax - z) [C_{6,8}] \\ &\quad + x [C_{6,7}] + (bx + y) [C_{1,7}] + z [C_{1,2}], \end{aligned}$$

où l'on note $C_{i,j} = \mathbf{V}(\text{Cone}(u_i, u_j))$. On en déduit que $\mathcal{C}_{+,+}$ est un couloir circulaire polarisable puisqu'il existe un pôle $p \in N$ de sorte que tous les coefficients $\langle m_k, p \rangle$ soient positifs. Par exemple pour $p_{+,+} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient

$$[C_{3,4}] + [C_{5,8}] + (a - 1) [C_{6,8}] + [C_{6,7}] + (b - 1) [C_{1,7}] + [C_{1,2}] = 0$$

ce qui montre que $X_{a,b}$ n'est pas projective pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

(2) Pour $a \geq 2$ et $b \leq -2$ on considère le couloir circulaire

$$\mathcal{C}_{+,-} = ((1, 2, 4), (1, 4, 6), (1, 6, 7), (6, 7, 8), (5, 6, 8), (3, 5, 8), (3, 4, 5), (2, 3, 4)).$$

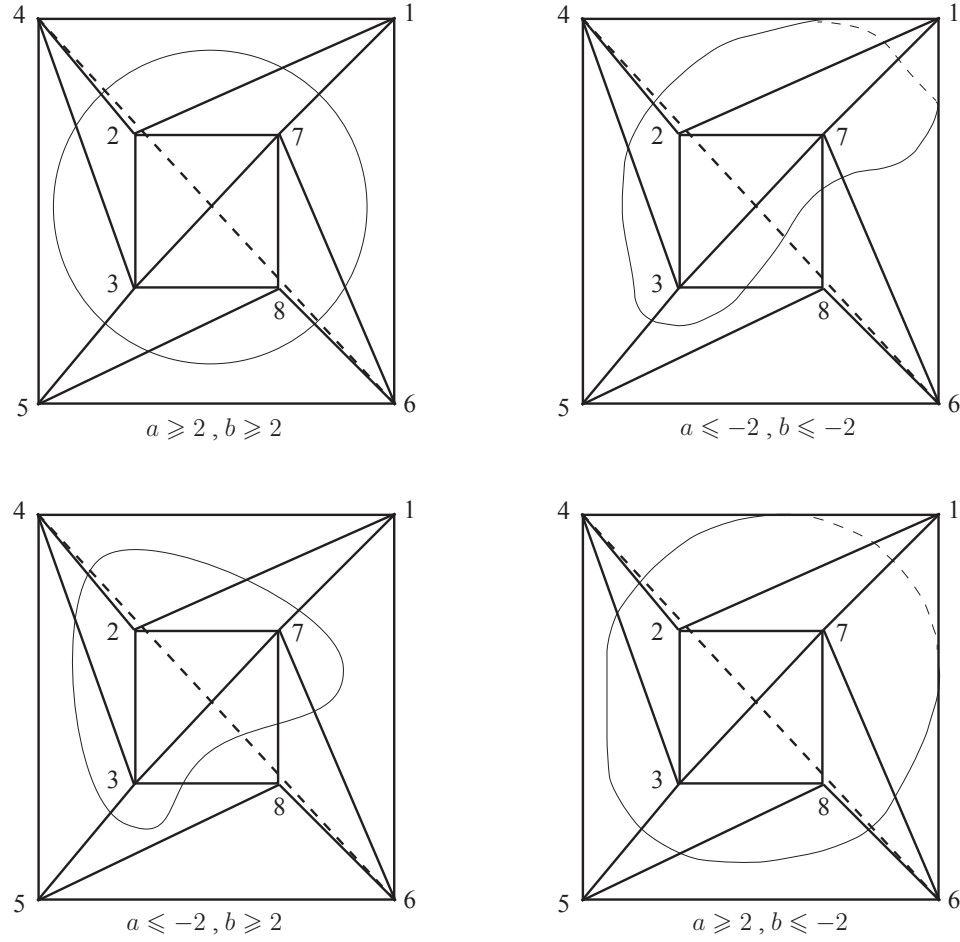
Pour tout $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N$ on a la relation entre classes de courbes suivante

$$\begin{aligned} 0 &= (bz - bx - y) [C_{1,4}] - z [C_{1,6}] - x [C_{6,7}] + (z - ax) [C_{6,8}] + y [C_{5,8}] \\ &\quad + (x + y) [C_{3,5}] + (x + y - z) [C_{3,4}] + (x - z) [C_{2,4}] \end{aligned}$$

On en déduit en choisissant $p_{+,-} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que

$$(-b - 1) [C_{1,4}] + 2 [C_{1,6}] + [C_{6,7}] + (a - 2) [C_{6,8}] + [C_{5,8}] + 2 [C_{3,4}] + [C_{2,4}] = 0$$

ce qui montre que $X_{a,b}$ n'est pas projective non plus pour $a \geq 2$ et $b \leq -2$.

**Figure 2.11** – Couloirs circulaires polarisables.

(3) Pour $a \leq -2$ et $b \geq 2$, le couloir circulaire

$$\mathcal{C}_{-,+} = ((1, 2, 4), (1, 2, 7), (1, 6, 7), (6, 7, 8), (3, 7, 8), (3, 5, 8), (3, 4, 5), (2, 3, 4)),$$

et le pôle $p_{-,+} = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}$ nous fournissent la relation

$$[C_{1,2}] + [C_{6,7}] + b[C_{7,8}] + (-a(b-1)-1)[C_{3,8}] + (b-1)[C_{3,5}] + b[C_{3,4}] = 0$$

qui montre que $X_{a,b}$ n'est pas projective non plus dans ce cas là.

(4) Enfin pour $a \leq -2$ et $b \leq -2$, le couloir circulaire

$$\mathcal{C}_{-,-} = ((1, 2, 4), (1, 4, 6), (1, 6, 7), (6, 7, 8), (3, 7, 8), (3, 5, 8), (3, 4, 5), (2, 3, 4)),$$

et le pôle $p_{-,-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nous fournissent la relation

$$(-b-1)[C_{1,4}] + [C_{1,6}] + [C_{7,8}] + (-a-1)[C_{3,8}] + [C_{3,5}] + 2[C_{3,4}] + [C_{2,4}] = 0$$

ce qui montre la non projectivité dans ce dernier cas.

Ainsi pour tout couple $(a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\})^2$, nous avons montré l'existence, à l'aide de couloirs circulaires polarisés, d'une relation entre classes de courbes toriques de $X_{a,b}$ dont tous les coefficients sont positifs démontrant ainsi la non projectivité de la variété torique $X_{a,b}$ dans ces cas.

La vérification des calculs peut être faite à l'aide de la matrice d'intersection de $X_{a,b}$ résumée ci-dessous :

$\cdot$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8
$C_{1,2}$	-1	-b	0	1	0	0	1	0
$C_{1,4}, C_{1,7}$	0	1	0	0	0	1	0	0
$C_{1,6}$	-1	0	0	1	0	b	1	0
$C_{2,3}$	0	-1	1	1	0	0	1	0
$C_{2,4}, C_{2,7}$	1	-1 + b	1	0	0	0	0	0
$C_{3,4}$	0	1	-1	-1	1	0	0	0
$C_{3,5}, C_{5,6}$	0	0	0	1	a - 1	0	0	1
$C_{3,7}$	0	1	-1	0	0	0	-a	1
$C_{6,8}, C_{3,8}$	0	0	0	0	1	0	1	0
$C_{4,5}$	0	0	1	1	-1	1	0	0
$C_{4,6}$	1	0	0	-1	1	-b	0	0
$C_{5,8}$	0	0	1	0	-a	1	0	-1
$C_{6,7}$	1	0	0	0	0	-b	-a	1
$C_{7,8}$	0	0	1	0	0	1	a	-1

◇

Comme nous l'avons affirmé, la méthode des couloirs circulaires utilisée ci-dessus semble moins généralement applicable que celle des polygones d'Oda. Il nous a par exemple été impossible de l'appliquer à la variété numérotée [8-13"] dans [Oda78] et $(4^4 5^4)''$ dans [Oda88] avec le quadruplet de paramètres $(a, b, c, d) = (2, 2, 1, 2)$.

Cependant, l'existence de couloirs circulaires polarisés possède un autre intérêt : celui de permettre la décomposition de classes contractibles non extrémales dans des variétés (projectives ou non) obtenues à partir d'une non projective par un éclatement ou par un flip.

Nous illustrons cette idée sur un exemple :

Exemple 2.5.4 Soit $X_{\Sigma'}$ la variété torique obtenue à partir de la variété $X_{2,2}$ définie comme dans l'exemple 2.5.3 par le flip de la courbe $C_{(3,4)}$. Les 1-cônes de Σ' sont ceux de $\Sigma(2, 2)$ et on a

$$\Sigma'(3) = \Sigma(2, 2)(3) \setminus \{(2, 3, 4), (3, 4, 5)\} \cup \{(2, 3, 5), (2, 4, 5)\}.$$

Pour ce qui est des murs on a

$$\Sigma'(2) = \Sigma(2, 2)(2) \setminus \{(3, 4)\} \cup \{(2, 5)\}.$$

La classe de la courbe torique $C'_{2,5}$ de Σ' est contractible. En effet les seuls 3-cônes qui contiennent $\mathcal{J}_{C'_{2,5}}^- = \{\rho_2, \rho_5\}$ sont $(2, 3, 5)$ et $(2, 4, 5)$ de sorte que la condition (c) du théorème 2.4.9 est trivialement vérifiée. Cependant cette classe n'est pas extrémale (en fait $X_{\Sigma'}$ n'est pas projective). Nous en donnons une décomposition à l'aide d'un couloir circulaire :

Le couloir circulaire polarisé $(\mathcal{C}_{+,+}, p_{+,+})$ de l'exemple 2.5.3, cas (1), nous fournissait une relation entre classes de courbes toriques dont tous les coefficients étaient positifs :

$$[C_{3,4}] + [C_{5,8}] + [C_{6,8}] + [C_{6,7}] + [C_{1,7}] + [C_{1,2}] = 0$$

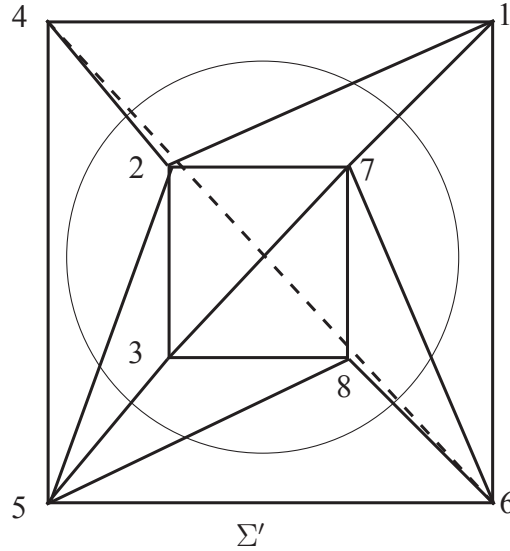


Figure 2.12 – Eventail de la variété $X_{2,2}$ “flipée”

Considérons à présent le couloir circulaire de Σ' suivant :

$$\mathcal{C}'_{+,+} = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_8) = ((1, 2, 4), (2, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 5, 8), (5, 6, 8), (6, 7, 8), (1, 6, 7), (1, 2, 7)).$$

Il s'agit d'une adaptation de $\mathcal{C}_{+,+}$ à l'éventail Σ' : on a simplement remplacé les 3-cônes $(2, 3, 4)$ et $(3, 4, 5)$ par $(2, 3, 5)$ et $(2, 4, 5)$. La relation entre courbes toriques associée au vecteur $p_{+,+}$ est alors

$$-[C'_{2,5}] + [C'_{5,8}] + [C'_{6,8}] + [C'_{6,7}] + [C'_{1,7}] + [C'_{1,2}] = 0$$

Nous avons ainsi obtenu une décomposition de la classe contractible $[C'_{2,5}]$.

◇

Remarquons que dans le cas d'une variété torique projective lisse obtenue à partir d'une variété non projective lisse par un éclatement ou un flip, la méthode ci-dessus permet dans de

nombreux cas d'expliciter une première étape de la décomposition des classes contractibles non extrémales en combinaisons linéaires de classes extrémales. Comme le remarque Cinzia Casagrande dans [Cas03], cette décomposition constitue la clé de la réponse à la question suivante :

Question 2.5.5 ([Cas03] p.116) *Soit X_Σ une variété torique projective lisse. Peut-on décomposer toute classe de $A_1(X_\Sigma) \cap \overline{NE}(X_\Sigma)$ comme combinaison linéaire à coefficients naturels de classes extrémales ?*

Nous terminons ce chapitre en formulant quelques nouvelles questions que nous n'avons eu le temps de traiter avant la fin de la rédaction du présent mémoire.

Question 2.5.6 *Est-il possible de se servir des couloirs circulaires pour adapter la proposition 9.3 de [Oda78] à toute dimension ? Peut-on ainsi trouver une condition nécessaire et suffisante de non projectivité ?*

Question 2.5.7 *Peut-on dégager une méthode générale, basée sur les couloirs circulaires, permettant d'expliciter la décomposition des classes contractibles non extrémales ? Et si oui, peut-on en déduire une réponse à la question 2.5.5 de Casagrande ?*

Chapitre 3

Points rationnels sur les corps C_1 dans les diviseurs de petit degré

Dans ce chapitre nous étendons un théorème de J. Kollar (théorème 3.1.10 ci-dessous) assurant l'existence de points rationnels sur les corps C_1 (qui vérifient une petite hypothèse supplémentaire) dans les sous-variétés de petits degrés pondérés d'un espace projectif à poids au cas des diviseurs D de “petit degré” dans des variétés ambiantes toriques X_Σ (théorèmes 3.4.4 et 3.5.3), ce sous certaines hypothèses (H1), (H2) et (H3) que nous énonçons ci-dessous. Le théorème 3.5.3 permettra de prouver l'existence de points rationnels sur un corps C_1 possédant des formes normiques pour les variétés d'une famille intéressante (voir théorème 3.5.4).

Notons que ce théorème de Kollar est en fait facile à prouver. Sa généralisation, que nous établissons ici dans le cas des variétés ambiantes toriques, est quand-à elle plus délicate. Cela tient au fait que dans les deux cas, on écrit la variété ambiante comme quotient d'un ouvert d'un espace affine par un tore (ici déployé) : c'est la notion de coordonnées homogène de Cox, introduite en section 1.7.2. Il se trouve que dans le cas projectif à poids, l'ouvert affine que l'on quotiente est le complémentaire de l'origine, alors que dans le cas général c'est le complémentaire d'un ensemble exceptionnel Z non trivial. Pour affirmer l'existence d'un point de la variété, il s'agit donc de trouver un point de l'espace affine hors de cet ensemble exceptionnel. On s'aperçoit alors qu'il est bien plus malaisé de montrer qu'on peut éviter un ensemble exceptionnel Z complexe plutôt que l'origine. Une bonne partie du travail préparatoire est justement de mettre en place les outils permettant d'éviter Z .

Nous insistons ici sur le fait que, contrairement aux théorèmes de Esnault et de Harris et al. la méthode utilisé ne requiert aucune hypothèse de lissité sur les variétés. C'est en effet le cas dans la condition définissant les corps C_1 (*toute* hypersurface de petit degré a nécessairement un point rationnel), pour le théorème de Kollar, ainsi que pour nos théorèmes du présent chapitre. Ainsi, nous obtenons ici de nouveaux résultats même dans les cas des corps finis et des corps de fonctions des courbes algébriques sur les corps algébriquement clos.

À partir de la section 3.2 et jusqu'à la fin de ce chapitre, **K sera un corps C_1 de**

caractéristique quelconque possédant des formes normiques de tout degré. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- (H1) Σ est un éventail simplicial et complet.
- (H2) La partie de torsion du groupe des classes $\text{Cl}(X_\Sigma)$ est d'ordre premier à la caractéristique de K .
- (H3) X_Σ est déployée.

Nous expliquerons dans la section 3.2 pourquoi on peut supposer que le diviseur effectif D sur lequel on cherche des points rationnels est un diviseur de Cartier numériquement effectif, sans quoi il posséderait des points rationnels triviaux (ceci sans aucune hypothèse sur le corps K).

Dans la section 3.3 nous développons les outils nécessaires à la preuve du théorème principal de ce chapitre (théorème 3.4.4 pour la version générale). Celui-ci est énoncé et prouvé dans la section 3.4.

Cependant, sous sa forme la plus générale, ce théorème manque de maniabilité. C'est pourquoi nous étudions plus en détail le cas où le diviseur D est ample en section 3.5. Nous obtenons le théorème 3.5.3, version moins générale mais beaucoup plus pratique du théorème 3.4.4. Nous l'illustrons notamment dans le théorème 3.5.4 sur l'exemple des transformées strictes d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ contenant un sous espace linéaire avec grande multiplicité.

Dans la dernière section nous discutons très brièvement du cas semi-ample que nous espérons pouvoir développer dans un futur proche.

3.1 Définitions - Théorème de J. Kollar - Exemples

3.1.1 Corps C_1 , exemples

Définition 3.1.1 ([Lan52]) *On dit que K est un **corps C_1** (ou **quasi algébriquement clos**) si tout polynôme $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ homogène de degré $d < n$ possède une racine non triviale (c'est à dire différente de $(0, \dots, 0)$).*

Le premier cas d'application non triviale est celui des courbes coniques planes, qui possèdent nécessairement un point rationnel sur un corps C_1 .

Les premiers exemples de corps C_1 ont été donné dans les années trente. Lang a ensuite donné deux autres familles de corps C_1 , puis il a conjecturé encore une autre famille (conjecture qualifiée d'"audacieuse" par Olivier Wittenberg dans [Wit10]). La conjecture d'Artin et la question (encore ouverte) posée par Ax ci-dessous, montrent que la liste n'est peut-être pas encore close.

Exemple 3.1.2 – Les corps finis sont C_1 (théorème de Chevalley-Warning, 1936, voir [Che36] et [War36])

- Les corps de fonctions de courbes algébriques sur les corps algébriquement clos sont C_1 (théorème de Tsen, 1936, voir [Tse36]).
- Le corps des fractions de l’anneau des séries formelles $K((t))$, lorsque K est algébriquement clos, est C_1 (Lang, voir [Lan52])
- L’extension non ramifiée maximale du corps des nombres p -adiques $\mathbb{Q}_p^{nr}$ est C_1 .

◇

Conjecture 3.1.3 (*S. Lang, 1953, [Lan53]*) Soit X une courbe intègre sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Si $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, alors le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{R}(X)$ est C_1 .

Conjecture 3.1.4 (*E. Artin, [LT65]*) La clôture abélienne $\mathbb{Q}^{ab}$ de $\mathbb{Q}$ est C_1 .

Rappelons qu’un corps K est dit pseudo-algébriquement clos si toute variété géométriquement intègre sur K possède un point rationnel sur K .

Question 3.1.5 (*Ax, 1966, [Ax68]*) Tout corps parfait et pseudo-algébriquement clos est-il C_1 ?

Amplification diophantienne de la propriété C_1 . De façon tautologique, toute hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \leq n$ possède un point rationnel sur un corps C_1 . Lorsque ces hypersurfaces sont de plus lisses, elles sont Fano donc rationnellement connexes. Deux très jolis théorèmes ont été prouvés en 2003, montrant que cette propriété diophantienne sur les hypersurfaces projectives de petit degré s’étend à la classe bien plus importante de variétés rationnellement connexes, au moins pour les deux exemples les plus anciens de corps C_1 :

Théorème 3.1.6 (H. Esnault, 2003) (*[Esn03] ou [CL04]*) Toute variété propre et lisse rationnellement connexe sur un corps fini admet au moins un point rationnel.

Théorème 3.1.7 (T. Graber, M. Harris et J. Starr, 2003) (*[TGS03] ou [Deb02]*) Toute variété propre et lisse rationnellement connexe sur le corps des fonctions d’une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos admet au moins un point rationnel.

Il est donc naturel de se demander si cette propriété d’amplification du cas des hypersurfaces de petit degré au cas rationnellement connexe n’est pas toujours vraie. Il s’agit là d’une question faisant partie du folklore :

Question 3.1.8 Est-il vrai que toute variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps C_1 admet toujours un point rationnel ?

3.1.2 Le théorème de Kollar

Afin de prouver des théorèmes allant dans la direction de la question 3.1.8 sur les corps C_1 autres que ceux traités par les théorèmes 3.1.6 et 3.1.7, on peut essayer de pousser dans la direction impulsée par Janos Kollar dans le théorème ci-dessous.

Définition 3.1.9 *Une forme normique de degré d sur un corps K est un polynôme homogène $f \in K[x_1, \dots, x_d]$ de degré d ne possédant aucune racine non triviale.*

Si le corps K possède une extension L de degré d , alors la norme $N_{L/K}$ définit une forme normique de degré d sur K . Tous les exemples cités ci-dessus possèdent donc des formes normiques de tout degré. En fait nous ne connaissons aucun exemple de corps C_1 ne qui ne possède pas cette propriété !

Ainsi, sur tous ces corps, le nombre n de variables forme une limite stricte pour le degré des équations. En dessous de cette limite, tout polynôme homogène a une racine non triviale mais dès que la limite est atteinte il existe un polynôme homogène qui n'en a pas. Autrement dit l'inégalité $d < n$ dans la définition de corps C_1 est optimale.

Dans son livre “Rational curves and algebraic varieties” ([Kol96]), J. Kollar prouve le théorème suivant (Th. 6.7 p.232). Notons qu’il est incomparablement plus aisé à prouver que les théorèmes de Esnault et de Graber et al. La preuve, de quelques lignes, consiste en une simple utilisation astucieuse des formes normiques permettant de ramener le problème à un espace projectif standard de plus grande dimension. Nous allons, dans la suite de ce chapitre, étendre ce théorème aux diviseurs de “petit degrés” dans des variétés toriques ambiantes autres que les espaces projectifs à poids.

Théorème 3.1.10 (J. Kollar, 1996) *Soit K un corps quasi-algébriquement clos possédant des formes normiques de degré arbitraire. Soit $K[x_0 \dots x_n]$ l’algèbre de polynômes graduée par $\deg(x_i) = a_i \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, \dots, f_k \in K[x_0 \dots x_n]$ des polynômes homogènes pour cette graduation. Si*

$$\sum_{j=1}^k \deg(f_j) < \sum_{i=0}^n \deg(x_i),$$

Alors l’équation $f_1 = \dots = f_k = 0$ possède une solution non triviale dans K .

Preuve — Pour tout i soit $g_i(y_{i,1}, \dots, y_{i,a_i})$ une forme normique de degré a_i . Posons

$$F_j := f_j(g_0, \dots, g_n) \in K[y_{i,a_i}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k_i \leq a_i].$$

Par construction le degré (standard) de F_j est le degré (pondéré) de f_j et le nombre de variables y_{i,a_i} est $\sum a_i$, donc $F_1 = \dots = F_k = 0$ a une solution (b_{i,a_i}) telle que $b_{s,t} \neq 0$ pour un certain couple (s, t) . Comme g_s est normique, $c_s := g_s(b_{s,1}, \dots, b_{s,a_s})$ est non nul. Donc

$$c_j = g_j(b_{j,1}, \dots, b_{j,a_j}) \quad j = 0, \dots, n$$

est une solution non triviale de $f_1 = \dots = f_k = 0$. □

Remarque – On peut considérer ce théorème comme une extension de la définition de corps C_1 . En effet pour $k = 1$ et $a_0 = \dots = a_n = 1$ on retrouve exactement le critère de “petit degré” de la définition.

Exemple d’application du théorème de Kollar

Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ (non nécessairement lisse) d’équation $P(x_0, \dots, x_n) = 0$. Soient d son degré et d' un entier naturel divisant d . Considérons la sous-variété X de l’espace projectif à poids $\mathbb{P}(1, \dots, 1, \frac{d}{d'})$ de dimension $n + 1$, d’équation homogène de degré d pour la graduation à poids

$$y^{d'} = P(x_0, \dots, x_n).$$

L’application $X \rightarrow \mathbb{P}^n$ donnée par $(x_0, \dots, x_n, y) \mapsto (x_0, \dots, x_n)$ est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré d' non ramifié hors de Y (lorsque $n = 3$ et $d' = 2$, X est appelé un solide double). Lorsque Y est lisse et $d < n + d'$, la variété X est Fano donc rationnellement connexe.

Le théorème de Kollar assure l’existence d’un point rationnel de X sur n’importe quel corps C_1 possédant des formes normiques de tous degré précisément lorsque $d < n + d'$, c’est à dire lorsque Y est de “petit degré à poids”. Un exemple non trivial est fourni par le cas où $n = 2$, $d' = d = 3$: dans ce cas la condition C_1 n’assure pas l’existence d’un point rationnel sur la cubique $Y \subset \mathbb{P}^2$ (qui donnerait naissance à un point rationnel “trivial” de X). Mais on a bien $3 < 2 + 3$ donc X possède un point rationnel.

Exemple non couvert par le théorème de Kollar

Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d (non nécessairement lisse) contenant un sous-espace linéaire L de dimension k , avec multiplicité μ . Soit X la transformée stricte de Y après éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de L . Comme il l’a été expliqué dans l’introduction, X est rationnellement connexe si elle est lisse et si $d \leq \mu + k + 1$. Dans ce cas on s’attend, si la réponse à la question 3.1.8 est affirmative, à ce que X possède un point rationnel sur un corps C_1 . C’est ce que nous allons établir dans le théorème 3.5.4 (sous l’hypothèse supplémentaire que K possède des formes normiques de tout degré), comme application du théorème 3.4.4 central de ce chapitre.

Un exemple non trivial est celui où $n = 4$, $d = 5$, $k = 1$ et $\mu = 3$. Dans ce cas, X est l’éclatée d’une hypersurface de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$ contenant une droite de multiplicité 3. Ni la définition des corps C_1 , ni le théorème de Kollar, n’assurent l’existence d’un point sur X .

3.2 Points rationnels triviaux

On considère ici une variété torique sur un corps K vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). On ne suppose pas ici que K est C_1 . On va montrer que si le diviseur D n’est pas de Cartier ou s’il n’est pas nef, alors il possède un point rationnel “trivial” sur K .

Définition 3.2.1 Soit $f \in K[x_\rho, \rho \in \Sigma(1)]$ un polynôme homogène pour la graduation par le groupe des classes $\text{Cl}(X_\Sigma)$. On dit qu’une racine $x \in \overline{K}^{\Sigma(1)}$ de f est pertinente si elle n’appartient pas à l’ensemble exceptionnel $Z(\Sigma)$. Dans le cas contraire on dit que x est une

racine impertinente. Une racine pertinente $x \in \mathbb{A}_1^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)$ de f est dite triviale si elle n'a que des 0 et des 1 pour coordonnées. Si D est le diviseur $\mathbf{V}(f)$ de X_Σ on dit alors que D a un point rationnel trivial.

Lemme 3.2.2 *Soit $f \in S$ un polynôme homogène. S'il existe $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que tout monôme de f est facteur d'un x_ρ pour $\rho \in \sigma(1)$ alors f a une racine pertinente triviale.*

Preuve — En posant $x_\rho = 0$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$ et $x_\rho = 1$ pour tous les autres, on obtient une racine de f qui n'est pas dans $Z(\Sigma)$ puisque $\sigma(1)$ ne contient aucune collection primitive. $\square$

Proposition 3.2.3 *Soit $f \in S$ un polynôme homogène et soit $D = \mathbf{V}(f) \in \text{Eff}(X_\Sigma)$. Si D n'est pas de Cartier et numériquement effectif, alors il possède un point rationnel trivial.*

Preuve — On raisonne par contraposée. Supposons que D n'a pas de point rationnel trivial, c'est à dire que f n'a pas de racine pertinente triviale. D'après le lemme 3.2.2, pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, il existe $(a_\rho) \in \mathbb{N}^{\Sigma(1)}$ tel que $\prod_\rho x_\rho^{a_\rho}$ soit un monôme de f et $a_\rho = 0$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$. Pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, il existe donc dans $[D]$ un diviseur

$$D_{(\sigma)} = \sum_{\rho \notin \sigma(1)} a_\rho D_\rho \in \mathcal{E}_D^+.$$

Ceci entraîne que D est de Cartier par la proposition 1.6.14 et qu'il est de plus numériquement effectif par la proposition 1.9.7. $\square$

Corollaire-Définition 3.2.4 *Si $D = \mathbf{V}(f)$ est un diviseur sans point rationnel trivial alors pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$, il existe un unique monôme de f de la forme $\prod_{\rho \notin \sigma(1)} x_\rho^{a_\rho}$. On le note $\chi_{D_{(\sigma)}}$.*

Preuve — L'existence est démontrée dans la preuve précédente. L'unicité découle de celle de la donnée locale $D_{(\sigma)}$ pour tout D de Cartier nef. $\square$

Proposition 3.2.5 *Soit $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$ un diviseur de Cartier nef et soient $\{D_{(\sigma)}\}_{\sigma \in \Sigma(n)}$ les données locales de D . Tout diviseur effectif $D' = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} b_\rho D_\rho$ linéairement équivalent à D est barycentre à coefficients positifs des $D_{(\sigma)}$:*

$$\text{il existe } \mu \in \mathbb{N}^{\Sigma(n)} \text{ tel que } \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D' = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D_{(\sigma)}.$$

Autrement dit on a

$$[D]^+ = \text{Conv}(D_{(\sigma)}, \sigma \in \Sigma(n)) \cap \text{Div}(X_\Sigma).$$

Preuve — D'après le théorème 1.9.5, le polytope P_D est l'enveloppe convexe des m_σ (tels que $\text{div}(\chi^{m_\sigma}) = D - D_{(\sigma)}$) pour $\sigma \in \Sigma(n)$. Comme $E' := D' - D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} (b_\rho - a_\rho) D_\rho$ est un diviseur principal T_N -invariant, il existe $m' \in M$ tel que pour tout $\rho \in \Sigma(1)$, $b_\rho - a_\rho = \langle m, u_\rho \rangle$ (voir corollaire 1.6.5). On en déduit que

$$D' \geq 0 \Leftrightarrow \forall \rho \in \Sigma(1), b_\rho \geq 0 \Leftrightarrow m' \in P_D.$$

Il existe donc $(\mu_\sigma) \in \mathbb{N}^{\Sigma(n)}$ tel que $\sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma m' = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma m_\sigma$. On en déduit immédiatement que $\sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D' = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D_{(\sigma)}$. $\square$

Corollaire 3.2.6 *Si D est de Cartier et nef alors pour tout $I \subset \Sigma(1)$ on a*

$$\mathcal{E}_D^+(I) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Sigma(n), D_{(\sigma)} \in \mathcal{E}_D^+(I).$$

Preuve — On peut supposer que D est T_N -invariant : $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$. Soit $D' \in \mathcal{E}_D^+(I)$. Par la proposition 3.2.5 il existe $\mu \in \mathbb{N}^{\Sigma(n)}$ tel que $\sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D' = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mu_\sigma D_\sigma$, et donc pour tout $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\mu_\sigma \neq 0$ on a $D_\sigma \in \mathcal{E}_D^+(I)$ (car tous les $D_{(\sigma)}$ sont effectifs.) Le sens direct est ainsi démontré, la réciproque est évidente. $\square$

3.3 Σ -convexité

On considère ici une variétés torique sur un corps K vérifiant les hypothèses (H1) et (H2), sans supposer que K est C_1 .

Définition 3.3.1 *On appelle **Σ -réunions** les cônes de $\mathbb{R}^n$ qui sont réunion de cônes de Σ . On note **$\mathcal{U}(\Sigma)$** leur ensemble. On note également **$\mathcal{CU}(\Sigma)$** l'ensemble des cônes convexes qui sont réunion de cônes de Σ . On les appelle **réunions Σ -convexes**.*

Définition 3.3.2 *Pour $c \in \mathcal{U}(\Sigma)$ et $1 \leq k \leq n$ on note **$c(k)$** = $\{\alpha \in \Sigma(k), \alpha \subset c\}$ et on définit les notions suivantes :*

- (a) *On dit que α et $\beta \in c(k)$ sont **voisins dans c** si $\alpha \cap \beta \in c(k-1)$.*
- (b) *On dit que c est **k -connexe** si pour tous $\alpha, \beta \in c(k)$ il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in c(k)^m$ tel que $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_m = \beta$ et pour tout $1 \leq i \leq m-1$, α_i et α_{i+1} sont voisins dans c .*
- (c) *On dit qu'une propriété P des cônes de $c(k)$ est une **propriété contagieuse** sur $c(k)$ si pour tout couple de voisins $(\alpha, \beta) \in c(k)^2$ on a*

$$P(\alpha) \Rightarrow P(\beta).$$

Avec ces définitions, le résultat suivant est immédiat :

Lemme 3.3.3 (Principe de contagion) *Si c est k -connexe et si P est une propriété contagieuse sur $c(k)$ alors*

$$\exists \alpha \in c(k), P(\alpha) \Rightarrow \forall \beta \in c(k), P(\beta)$$

Lemme 3.3.4 *Pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$E \in \mathcal{U}(\Sigma) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Sigma, \left(\overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \subset E \right)$$

où $\overset{\circ}{\alpha}$ désigne l'intérieur relatif du cône α (sans les faces.)

Preuve — On commence par remarquer que, l'éventail Σ étant complet, on a

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \bigsqcup_{\alpha \in \Sigma} \overset{\circ}{\alpha},$$

On en déduit successivement le fait que tout $E \subset \mathbb{R}^n$ vérifie

$$E \subset \bigcup_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ \overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset}} \alpha$$

et l'équivalence suivante :

$$\forall \alpha \in \Sigma, \left(\overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \subset E \right) \Leftrightarrow E = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ \overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset}} \alpha$$

Montrons à présent l'équivalence :

$$E \in \mathcal{U}(\Sigma) \Leftrightarrow E = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ \overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset}} \alpha.$$

L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Pour $\Rightarrow$ on a déjà l'inclusion $\subset$ par la remarque ci-dessus. Pour montrer l'inclusion inverse considérons un cône $\alpha \in \Sigma$ tel que $\overset{\circ}{\alpha} \cap E \neq \emptyset$. Par hypothèse il existe des cônes $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Sigma$ tels que $E = \bigcup_{i=1}^m \beta_i$. Il existe donc $1 \leq i \leq m$ tel que $\overset{\circ}{\alpha} \cap \beta_i \neq \emptyset$. Par le lemme 1.2.10 on en déduit que $\alpha < \beta_i$ et donc $\alpha \subset E$, ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 3.3.5 Pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$, on appelle **enveloppe Σ -convexe** de E la plus petite Σ -réunion contenant le cône engendré par E . On la note $\text{Conv}_{\Sigma}(E)$:

$$\text{Conv}_{\Sigma}(E) = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ \overset{\circ}{\alpha} \cap \text{Cone}(E) \neq \emptyset}} \alpha.$$

La plus petite réunion Σ -convexe qui contient E s'appelle la **clôture Σ -convexe** de E . On la note $\overline{E}^{\Sigma}$.

Remarque – L'enveloppe Σ -convexe d'une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas convexe en général, c'est à dire qu'en général on a $\text{Conv}_{\Sigma}(E) \subsetneq \overline{E}^{\Sigma}$.

Lemme 3.3.6 Pour tout cône $c = c_0 \subset \mathbb{R}^n$ la suite définie par $c_{i+1} = \text{Conv}_{\Sigma}(c_i)$ est stationnaire en $\overline{c}^{\Sigma}$.

Preuve — Le fait que la suite soit stationnaire découle du fait que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on a (par construction) $c_i \in \mathcal{U}(\Sigma)$ (une suite croissante de Σ -réunions étant nécessairement stationnaire). De plus si le cône c_i n'est pas convexe alors il est strictement inclus dans c_{i+1} . Donc si $j \in \mathbb{N}$ est tel que $c_j = c_{j+1}$, on a $c_j \in \mathcal{CU}(\Sigma)$. Enfin pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $c_i \subset \overline{c}^{\Sigma} \Rightarrow c_{i+1} \subset \overline{c}^{\Sigma}$ de sorte que $c_j \subset \overline{c}^{\Sigma} \Rightarrow c_j = \overline{c}^{\Sigma}$ par minimalité de $\overline{c}^{\Sigma}$. $\square$

Proposition-Définition 3.3.7 *Pour toute réunion Σ -convexe $c \in \mathcal{CU}(\Sigma)$ on a*

$$c = \text{Cone}(c(1)) = \bigcup_{\alpha \in c(k)} \alpha$$

où k est la dimension de c . De plus on a

$$c(1) \text{ est libre} \Leftrightarrow c \in \Sigma.$$

Lorsque ces dernières conditions sont vérifiées on dit que c est **triviale**.

Preuve — Tout est évident, sauf peut-être la fait que si $c(1)$ est libre alors c ne peut contenir qu'un seul cône de $\Sigma(k)$. Cela découle du fait que $c(1)$ est alors de cardinal k donc tout $\alpha \in c(k)$ vérifie $\alpha(1) = c(1)$. $\square$

Proposition 3.3.8 *Pour tout $D \in \text{Div}(\Sigma)$ sans point rationnel trivial et toute Σ -réunion $c \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$\mathcal{E}_D^+(c(1)) = \mathcal{E}_D^+(\bar{c}^\Sigma(1)).$$

Preuve — Démontrons que $\mathcal{E}_D^+(c(1)) \subset \mathcal{E}_D^+(\bar{c}^\Sigma(1))$ (l'inclusion inverse est évidente). Soit $c_0 = c$ et $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite du lemme 3.3.6. Il suffit de montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathcal{E}_D^+(c_i(1)) \subset \mathcal{E}_D^+(c_{i+1}(1)).$$

Soit donc $D' = \sum_{\rho \in \Sigma(1) \setminus c_i(1)} a_\rho D_\rho \in \mathcal{E}_D^+(c_i(1))$ et $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha \subset c_{i+1}$ c'est à dire tel qu'il existe $v \in \alpha \cap \text{Cone}(c_i)$. Il existe donc $d \in (\mathbb{N}^*)^{\alpha(1)}$ et $d' \in \mathbb{N}^{c_i}$ tels que

$$v = \sum_{\rho \in \alpha(1)} d_\rho u_\rho = \sum_{\rho \in c_i} d'_\rho u_{\rho'}.$$

On a ainsi la relation

$$\sum_{\rho \in \alpha(1)} (-d_\rho) u_\rho + \sum_{\rho' \in c_i} d'_{\rho'} u_{\rho'} = 0,$$

d'où, par le lemme 1.8.9, on déduit l'existence d'un 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ tel que $\mathcal{J}_C^+ \subset c_i(1)$, $\mathcal{J}_C^- \subset \alpha(1)$ et $c_i(1) \cup \alpha(1) = \mathcal{J}_C \cup (c_i(1) \cap \alpha(1))$. En particulier C est numériquement effectif d'après la proposition 1.10.7 et comme D est nef on a

$$0 \leq C \cdot D = C \cdot D' = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_C \setminus c_i(1)} a_\rho C \cdot D_\rho.$$

Or $\mathcal{J}_C^+ \subset c_i(1)$ équivaut à $\mathcal{J}_C \setminus c_i(1) \subset \mathcal{J}_C^-$, on en déduit donc

$$a_\rho = 0 \quad \text{pour tout } \rho \in \mathcal{J}_C \setminus c_i(1) = \alpha(1) \setminus c_i(1).$$

Autrement dit on a $D' \in \mathcal{E}_D^+(\alpha(1) \setminus c_i(1))$ et comme par hypothèse $D' \in \mathcal{E}_D^+(c_i(1))$ on obtient $D' \in \mathcal{E}_D^+(\alpha(1) \cup c_i(1))$. Ceci étant valable pour tout $\alpha \subset c_{i+1}$ on en déduit que $D' \in \mathcal{E}_D^+(c_{i+1}(1))$ ce qui termine la démonstration. $\square$

3.4 Théorème principal

On considère ici une variété torique sur un corps K vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). On suppose que K est C_1 et possède des formes normiques de tout degré.

Proposition 3.4.1 *Pour tout diviseur de Cartier numériquement effectif $D \in \text{Div}(\Sigma)$ et toute réunion Σ -convexe $c \in \mathcal{CU}(\Sigma)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\mathcal{E}_D^+(c(1)) \neq \emptyset$.
- (b) Pour tout $[C] \in A_1(c(1))$, $C \cdot D = 0$.
- (c) Pour tout $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $\mathcal{J}_{C_\tau} \subset c$, $C_\tau \cdot D = 0$.

Preuve — Les implications (a) $\Rightarrow$ (b) et (b) $\Rightarrow$ (c) sont évidentes. Montrons (c) $\Rightarrow$ (a). Soit k la dimension de E (c'est à dire la dimension du plus petit sous-espace vectoriel qui contient c .) Comme c est convexe, pour tout $\rho \in c(1)$ il existe un $\alpha \in c(k)$ tel que $\rho \in \alpha(1)$. Autrement dit on a

$$c = \bigcup_{\alpha \in c(k)} \alpha.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un diviseur effectif et linéairement équivalent à D , $D' \in [D]^+$, tel que pour tout $\alpha \in c(k)$, $D' \in \mathcal{E}_D^+(\alpha(1))$. Or si $\alpha_0 \in c(k)$, d'après la proposition 1.9.2, il existe un diviseur

$$D' = \sum_{\rho \in \Sigma(1) \setminus \alpha_0(1)} a_\rho D_\rho \in \mathcal{E}_D^+(\alpha_0(1)).$$

Il ne reste donc qu'à montrer que la propriété

$$P(\alpha) : D' \in \mathcal{E}_D^+(\alpha(1))$$

est contagieuse sur $c(k)$. Soit donc α_1 et $\alpha_2 \in c(k)$ voisins dans c . Notons $\beta = \alpha_1 \cap \alpha_2$ et $\{\rho_2\} = \alpha_2(1) \setminus \beta(1)$. Soient $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $\alpha_2 < \sigma$ et $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que $\tau(1) = \sigma(1) \setminus \{\rho_2\}$. Comme c est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension k , la famille $(u_\rho)_{\rho \in \alpha_1(1) \cup \alpha_2(1)}$ est liée, ce qui par le lemme 2.1.6 entraîne que

$$\mathcal{J}_{C_\tau} \subset \alpha_1(1) \cup \alpha_2(1) \subset c(1).$$

Si l'on suppose $P(\alpha_1)$ on a

$$0 = C_\tau \cdot D = C_\tau \cdot D' = \sum_{\rho \in \alpha_1(1) \cup \alpha_2(1)} a_\rho C_\tau D_\rho = a_{\rho_2} C_\tau D_{\rho_2}.$$

Or par construction $\rho_2 \in C'(\tau)$ donc $C_\tau D_{\rho_2} > 0$ d'où nécessairement $a_{\rho_2} = 0$ et on a $P(\alpha_2)$. La propriété est donc bien contagieuse, ce qui termine la démonstration. $\square$

Définition 3.4.2 Soit D un diviseur de Weil effectif sur X_Σ . Un 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ est dit *graduante pour D* s'il vérifie les conditions suivantes :

- (G1) Il existe $\alpha \in \Sigma$ tel que $\mathcal{J}_C^- = \alpha(1)$.
- (G2) L'ensemble $I(C, D) = \left\{ \rho \in \mathcal{J}_C^+ \mid \forall C' \in A_1 \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1) \right), C' \cdot D = 0 \right\}$ est de cardinal au moins 2.
- (G3) Pour toute collection primitive P contenue dans $\mathcal{J}_C$, le cardinal de $I(C, D) \setminus P$ est au plus 1.

Lemme 3.4.3 Soit D un diviseur de Weil effectif. Toute courbe localement contractible C_τ est graduante pour D .

Preuve — Soit C_τ une courbe localement contractible. La condition (G1) est vérifiée puisque $\mathcal{J}_{C_\tau}^- \subset \tau(1)$. D'après le théorème 2.2.11 $P = \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ est l'unique collection primitive incluse dans $\mathcal{J}_{C_\tau}$. En particulier pour tout $\rho \in P$ on a $\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma = \text{Cone}(\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}) \in \Sigma$ d'où

$$A_1 \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1) \right) = 0.$$

On en déduit que $I(C, D) = \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ et la condition (G3) est donc trivialement vérifiée. Enfin le fait que $\mathcal{S}_\tau \setminus \tau(1) \subset \mathcal{J}_{C_\tau}^+$ assure que la condition (G2) est vérifiée également. $\square$

Nous pouvons à présent énoncer et prouver le théorème central de ce chapitre.

Théorème 3.4.4 Soit X_Σ une variété torique vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et K un corps C_1 possédant des formes normiques de tout degré. Soit D un diviseur de Weil effectif sur X_Σ . Soit $C \in Z_1(X_\Sigma)$ un 1-cycle graduant pour D . Si

$$0 < C \cdot D < \sum_{\rho \in I(C, D)} C \cdot D_\rho \quad (3.1)$$

alors D possède un point rationnel sur K .

Remarque – À la lecture de cet énoncé, il apparaît évidemment nécessaire de :

- déterminer le plus explicitement possible quelles sont les courbes graduantes pour D sur une variété ambiante torique X_Σ donnée. Le lemme 3.4.3 est un premier élément de réponse.
- En particulier, déterminer si le nombre maximum de tests possibles est fini ou non, c'est-à-dire si il n'y a qu'un nombre fini de classes de courbes graduantes.

Nous verrons dans la section suivante la réponse à ces questions dans le cas où D est ample.

Nous en déduirons le théorème 3.5.3, avec un exemple d'application 3.5.4.

Preuve — Soit $f \in S$ un polynôme homogène de degré $[D]$ tel que $D = \mathbf{V}(f)$. Si D a des points rationnels triviaux, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas et en particulier, d'après la proposition 3.2.3, que le diviseur D est de Cartier et nef. D'autre part, C étant graduant pour D , la condition (G1) entraîne que C est numériquement effectif (proposition 1.10.7.) Quitte à multiplier C par un entier, on peut en outre supposer que pour tout $\rho \in \Sigma(1)$, le degré $C \cdot D_\rho$ de D_ρ le long de C est un nombre entier (et que ces degrés sont premiers entre eux). Pour la graduation $\deg_C(x_\rho) = C \cdot D_\rho$, f est alors homogène de degré $d = C \cdot D \in \mathbb{N}^*$. Notons $I = I(C, D)$, $I_1 = \Sigma(1) \setminus \mathcal{J}_C$, $I_0 = \mathcal{J}_C \setminus I$ et

$S' = K[x_\rho]_{\rho \in I(C,D)}$. On définit le polynôme $g \in S'$ à partir de f en posant $x_\rho = 1$ pour tout $\rho \in I_1$ et $x_\rho = 0$ pour tout $\rho \in I_0$. Ainsi g est homogène de degré d pour la graduation induite par $\deg_C$ sur S' .

En particulier les degrés $C \cdot D_\rho$ étant des entiers naturels non nuls pour tout $\rho \in I$, les inégalités 3.1 nous permettent d'appliquer le théorème 3.1.10 au polynôme g (le nombre d'indéterminées est ≥ 2 d'après la condition (G2).) On obtient ainsi une racine non triviale $\alpha' \in K^I$ de g , ce qui nous donne une racine $\alpha \in K^{\Sigma(1)}$ de f en rajoutant des 0 pour les coordonnées indicées par I_0 et des 1 pour celles indicées par I_1 . Il reste à montrer que cette racine est pertinente, c'est à dire qu'elle n'appartient pas à l'ensemble exceptionnel $Z(\Sigma)$.

Soit donc P une collection primitive de Σ . Montrons que la racine α obtenue possède nécessairement une coordonnée non nulle $\alpha_\rho \neq 0$ avec $\rho \in P$.

On distingue trois cas :

- (i) Si P n'est pas inclus dans $\mathcal{J}_C$ alors il existe $\rho \in P \cap I_1$ d'où $\alpha_\rho = 1$.
- (ii) Si $I \subset P$ alors, comme α' est non triviale il existe $\rho \in I \subset P$ tel que $\alpha_\rho \neq 0$.
- (iii) Sinon il existe un $\rho' \in I \setminus P$, qui est unique puisque C vérifie la condition (G3). Dans ce cas, comme on a $C' \cdot D = 0$ pour tout $C' \in A_1 \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho'\}}^\Sigma(1) \right)$, la proposition 3.4.1 nous dit que l'ensemble $\mathcal{E}_D^+ \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho'\}}^\Sigma(1) \right)$ est non vide.

Or par la proposition 3.3.8, on a

$$\mathcal{E}_D^+ \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho'\}}^\Sigma(1) \right) = \mathcal{E}_D^+ (\mathcal{J}_C \setminus \{\rho'\}).$$

Enfin par le corollaire 3.2.6 on sait qu'il existe $\sigma \in \Sigma(n)$ tel que $D_{(\sigma)} \in \mathcal{E}_D^+ (\mathcal{J}_C \setminus \{\rho'\})$ c'est à dire tel que

$$D_{(\sigma)} = \sum_{\rho \in I_1 \cup \{\rho'\}} a_\rho D_\rho.$$

En particulier comme on a supposé D sans point trivial, le monôme de f correspondant (voir corollaire 3.2.4) est de la forme

$$\chi_{D_{(\sigma)}} = x_{\rho'}^{a_{\rho'}} \prod_{\rho \in I_1} x_\rho^{a_\rho}.$$

On en conclut que le polynôme h de la seule variable $x_{\rho'}$ obtenu à partir de g en posant $x_\rho = 0$ pour tout $\rho \in P$ est de la forme $\lambda x_{\rho'}^{a_{\rho'}}$ avec $\lambda \in K^*$. Autrement dit toute racine de g $\beta' \in K^I$ qui vérifie $\beta'_\rho = 0$ pour tout $\rho \in P$ vérifie également $h(\beta'_{\rho'}) = 0$ c'est à dire $\beta'_{\rho'} = 0$. Une telle racine est donc une racine triviale de g ce qui n'est pas le cas de α' . On a ainsi montré que la racine $\alpha \in K^\Sigma$ possède une coordonnée $\alpha_\rho \neq 0$ pour un $\rho \in P$ ce qui achève la démonstration.

□

3.5 Cas ample et exemples

On considère ici une variétés torique sur un corps K vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). On suppose que K est C_1 et possède des formes normiques de tout degré.

Lemme 3.5.1 *Soit D un diviseur ample sur X_Σ . Si C est un 1-cycle graduant pour D alors*

$$I(C, D) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{J}_C}} P.$$

Preuve — Notons $I = \bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{J}_C}} P$. Comme D est ample on a

$$\forall C' \in A_1 \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1) \right) C' \cdot D = 0 \Leftrightarrow A_1 \left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1) \right) = 0 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1) \text{ est libre,}$$

où la seconde équivalence découle du corollaire 1.8.15. D'après la proposition 3.3.7, ceci est aussi équivalent à l'existence d'un $\alpha \in \Sigma$ tel que $\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma \in \Sigma$, c'est à dire $\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\} = \alpha(1)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}$ ne contient aucune collection primitive si et seulement si toute collection primitive contenue dans $\mathcal{J}_C$ contient ρ . Ainsi ρ appartient à $I(C, D)$ si et seulement s'il appartient à toutes les $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{J}_C}$. $\square$

Comme il l'a été souligné avant l'énoncé du théorème 3.4.4, la question se pose de savoir si celui-ci nécessite la vérification du critère numérique d'une part sur un nombre fini ou infini des "courbes tests" que sont les courbes dites graduantes pour D , d'autre part nécessite la détermination explicite de ces courbes graduantes. Le théorème qui suit répond à ces deux questions lorsque D est ample.

Théorème 3.5.2 *Soit D un diviseur ample sur X_Σ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe un 1-cycle C graduant pour D tel que $0 < C \cdot D < \sum_{\rho \in I(C, D)} C \cdot D_\rho$*
- (b) *Il existe une courbe extrémale C_τ telle que*

$$C_\tau \cdot D < \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_\tau}^+} C_\tau \cdot D_\rho.$$

Preuve — D'après le lemme 3.4.3 toute courbe extrémale est graduante pour D . De plus, comme D est ample, la condition $0 < C \cdot D$ est trivialement vérifiée puisque C est numériquement effective par la condition (G1). Ceci démontre l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Pour montrer la réciproque on remarque que, comme X_Σ est projective, il existe des courbes extrémales $C_{\tau_1}, \dots, C_{\tau_m}$ telles que

$$[C] = \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i C_{\tau_i} \right] \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Il suffit de montrer qu'il existe $1 \leq i \leq l$ tel que $C_{\tau_i} \cdot D < \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho}$. On raisonne par contraposée : Supposons que pour tout $1 \leq i \leq l$, $C_{\tau_i} \cdot D \geq \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho}$. On a donc

$$C \cdot D = \sum_{i=1}^l \lambda_i C_{\tau_i} \cdot D \geq \sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho}.$$

Or pour tout $1 \leq i \leq l$ on a

$$\sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho} \geq \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau_i}}^+ \cap I(C,D)} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho} \geq \sum_{\rho \in I(C,D)} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho}.$$

On en conclut que

$$C \cdot D \geq \sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{\rho \in I(C,D)} C_{\tau_i} \cdot D_{\rho} = \sum_{\rho \in I(C,D)} \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i C_{\tau_i} \right) \cdot D_{\rho} = \sum_{\rho \in I(C,D)} C \cdot D_{\rho},$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Nous pouvons à présent énoncer une version très maniable du théorème 3.4.4, et l'illustrer sur un exemple intéressant. Le théorème précédent assure que l'énoncé qui suit ne présente aucune "perte" par-rapport au théorème 3.4.4.

Théorème 3.5.3 *Soit X_{Σ} une variété torique vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et K un corps C_1 possédant des formes normiques de tout degré.*

Soit D un diviseur effectif et ample sur X_{Σ} . Soit $\tau \in \Sigma(n-1)$ tel que C_{τ} soit extrémale. Si

$$C_{\tau} \cdot D < \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{\tau}}^+} C_{\tau} \cdot D_{\rho}. \quad (3.2)$$

alors D possède un point rationnel sur K .

Il est important de remarquer ici que dans le cas où X_{Σ} est un espace projectif pondéré, le théorème 3.5.3 n'est autre que le théorème 3.1.10 pour $k = 1$:

Supposons d'abord que X_{Σ} soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. D'abord, l'éventail Σ de $\mathbb{P}^n$ vérifie bien les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Ensuite, il est bien connu que le cône de Mori de $\mathbb{P}^n$ est $\mathbb{R}^+[L]$, où L est la classe de n'importe quelle droite de $\mathbb{P}^n$, en particulier de n'importe quelle courbe C_{τ} pour un $(n-1)$ -cône τ de l'éventail définissant $\mathbb{P}^n$. Ces classes $[C_{\tau}] = [L]$ sont donc extrémales pour tout τ . De plus pour un diviseur D de $\mathbb{P}^n$, on a $C_{\tau} \cdot D = \deg D$. D'autre part, pour tout τ , on a $\mathcal{J}_{C_{\tau}}^+ = \Sigma(1)$ tout entier, donc la condition (4.2) est équivalente à $\deg D < n+1$, et on retrouve bien la version originelle projective des corps C_1 : une variété de degré $d \leq n$ de $\mathbb{P}^n$ possède un point rationnel sur un corps C_1 .

Si X_{Σ} est l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$, alors le raisonnement ci-dessus vaut presque entièrement, à l'exception de la traduction de (4.2), qui s'écrit ici

$$\deg D < a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

de sorte que le théorème 3.5.3 n'est autre que le théorème de Kollar 3.1.10 pour $k = 1$.

Remarque – Il est bien entendu très probable que, comme dans le cas du théorème de Kollar, on puisse énoncer un théorème pour les intersections de diviseurs d’une torique ambiante X_Σ . Nous espérons revenir sur cette question dans un avenir proche.

Venons-en à présent à notre application cible : l’éclaté d’une hypersurface projective de grand degré contenant un sous-espace avec grande multiplicité.

Théorème 3.5.4 *Soit K un corps C_1 . Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d contenant un sous-espace L de dimension k avec multiplicité μ . On considère l’éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de L :*

$$\eta : X_\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Alors la transformée stricte $\tilde{Y}$ de Y par η possède un point rationnel sur K dès que

$$d < k + \mu + 2.$$

Remarques –

- (1) Le fait que les cas limites de connexité rationnelle de $\tilde{Y}$ et d’application du théorème 3.5.3 coïncident (c’est-à-dire $d = \mu + k + 1$ dans les deux cas) indique que l’énoncé 3.5.3 est en un certain sens optimal!
- (2) Comme nous l’avons expliqué dans l’introduction, $\tilde{Y}$ est rationnellement connexe sous la condition $d \leq \mu + k + 1$ (lorsqu’elle est lisse). La conclusion de ce théorème était donc attendue si la réponse à la question 3.1.8 est affirmative. Dans ce cas on peut d’ailleurs déduire l’existence de points rationnels sur les corps finis (resp. sur $\overline{K}(t)$) du théorème général de [Esn03] (resp. [TGS03]). Cependant ici aucune hypothèse n’est faite sur l’existence de singularités dans la sous-variété $\tilde{Y}$. Ainsi, en plus d’assurer l’existence de points rationnels sur les deux exemples de corps C_1 fournis par Lang, ce qui est nouveau, ce théorème permet aussi d’affirmer l’existence de points rationnels sur ces variétés lorsqu’elles sont singulières sur les corps finis et de fonctions des courbes, ce qui n’entre pas dans le cadre des théorèmes d’Esnault et de Harris et al.

Preuve — Commençons par la description géométrique et combinatoire de la variété torique ambiante :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$. Soit Σ' l’éventail dont les 1-cônes $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$ sont engendrés par

$$u_1 = e_1, \dots, u_n = e_n \text{ et } u_{n+1} = -(e_1 + \dots + e_n)$$

et dont les cônes de dimension maximale sont les cônes de la forme

$$\sigma_i = \text{Cone}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{n+1}),$$

de sorte que $X_{\Sigma'} = \mathbb{P}^n$.

On peut supposer sans perte de généralité que la sous-variété L est torique, égale à $V(\alpha)$ pour un $\alpha \in \Sigma(n-k)$ et quitte à renuméroter $\Sigma'(1)$, on peut également supposer que $\alpha(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_{n-k}\}$. On pose

$$u_{n+2} = \sum_{i=1}^{n-k} u_i \text{ et } \rho_{n+2} = \mathbb{R}_+ u_{n+2}.$$

D'après [CLS11] (section 3.3), l'éventail Σ de l'éclaté de $\mathbb{P}^n$ le long de L est donné par

$$\Sigma = \{\beta \in \Sigma' \mid \alpha \not\subset \beta\} \cup \bigcup_{\alpha \subset \beta} \Sigma_{\beta}^*(\alpha),$$

où

$$\Sigma_{\beta}^*(\alpha) = \{\text{Cone}(A) \mid A \subset \{\rho_{n+2}\} \cup \beta(1)\}$$

Autrement dit on a

$$\Sigma(1) = \{u_1, \dots, u_{n+2}\}$$

et

$$\Sigma(n) = \{\sigma_i \in \Sigma', i = 1, \dots, n-k\} \cup \bigcup_{i=n-k+1}^{n+1} \{\text{Cone}(\sigma_i(1) \cup \{\rho_{n+2}\} \setminus \{u_j\}), j = 1, \dots, n-k\}.$$

Par construction l'éventail Σ est simplicial et complet. L'hypothèse (H1) est donc vérifiée. De plus le groupe des caractères de X_{Σ} est le réseau $N \simeq \mathbb{Z}^3$ de sorte que l'hypothèse (H3) est vérifiée également.

Σ contient exactement deux collections primitives :

$$\mathcal{P}_{\Sigma} = \{\alpha(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_{n-k}\}, \Sigma(1) \setminus \alpha(1) = \{\rho_{n-k+1}, \dots, \rho_{n+2}\}\}$$

On a les relations suivantes entre classes de diviseurs toriques :

$$[D_1] = [D_2] = \dots = [D_{n-k}] = [D_{n+1}] - [D_{n+2}] \text{ et } [D_{n-k+1}] = \dots = [D_n] = [D_{n+1}].$$

On en déduit que le groupe des classes (ainsi que le monoïde des classes effectives) est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ engendré par les classes $[D_1]$ et $[D_{n+2}]$, en particulier l'hypothèse (H2) est vérifiée.

Le degré de liaison de $\Sigma(1)$ est 2. Les courbes toriques de X_{Σ} se répartissent donc en 3 classes numériques $[C_1], [C_2]$ et $[C_3]$ correspondant respectivement aux 3 relations entre générateurs minimaux suivantes :

$$\begin{array}{lll} u_1 + \dots + u_{n+1} & = 0 & \text{pour les } C_{\tau} \text{ telles que } \tau(1) \subset \sigma_i(1), i \leq n-k \\ u_1 + \dots + u_{n-k} & = u_{n+2} & \text{pour les } C_{\tau} \text{ telles que } \tau(1) \subset \sigma_i(1), i > n-k \\ \text{et } u_{n_k+1} + \dots + u_{n+2} & = 0 & \text{pour les autres } . \end{array}$$

Si l'on retire les lignes redondantes, la matrice d'intersection de X_{Σ} est donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{n-k} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k+1}$$

On voit que $[C_1] = [C_2] + [C_3]$. On en déduit que le cône de Mori de X_{Σ} est

$$\overline{\text{NE}}(X_{\Sigma}) = \mathbb{R}_+[C_2] + \mathbb{R}_+[C_3] \subset N_1(X_{\Sigma}) \simeq \mathbb{R}^2.$$

Venons-en à présent à la description de l'hypersurface $\tilde{Y}$:

Si l'équation homogène de l'hypersurface $Y \subset \mathbb{P}^n$ est

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0,$$

alors la transformée totale $\hat{Y} \subset X_\Sigma$ a pour équation homogène

$$P(x_1 x_{n+2}, \dots, x_{n-k} x_{n+2}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

Comme par hypothèse Y est de degré d on a donc $[\hat{Y}] = d[D_{n+1}] = d[D_1] + d[D_{n+2}]$.

Comme de plus Y contient la sous-variété torique $\mathbf{V}(\alpha)$ avec multiplicité μ , l'équation de $\hat{Y}$ est divisible par x_{n+2}^μ et la transformée stricte $D = \tilde{Y}$ vérifie donc

$$[D] = [\tilde{Y}] = [\hat{Y}] - \mu[D_{n+2}] = d[D_1] + (d - \mu)[D_{n+2}]$$

On en déduit les nombres d'intersection suivants :

$$C_1 \cdot D = d, \quad C_2 \cdot D = \mu \quad \text{et} \quad C_3 \cdot D = d - \mu.$$

En particulier le diviseur D est ample.

On est donc en mesure d'appliquer le théorème 3.5.3 avec l'une des courbes extrémales de $[C_2]$ ou de $[C_3]$ pour 1-cycle graduant. Or on a

$$\mathcal{J}_{C_2}^+ = \alpha(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_{n-k}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{C_3}^+ = \Sigma(1) \setminus \alpha(1) = \{\rho_{n-k+1}, \dots, \rho_{n+2}\},$$

d'où

$$\sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_2}^+} C_2 \cdot D_\rho = n - k + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_3}^+} C_3 \cdot D_\rho = k + 2.$$

On en conclut que pour $d < k + \mu + 2$ on a

$$C_3 \cdot D = d - \mu < k + 2 = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_3}^+} C_3 \cdot D_\rho$$

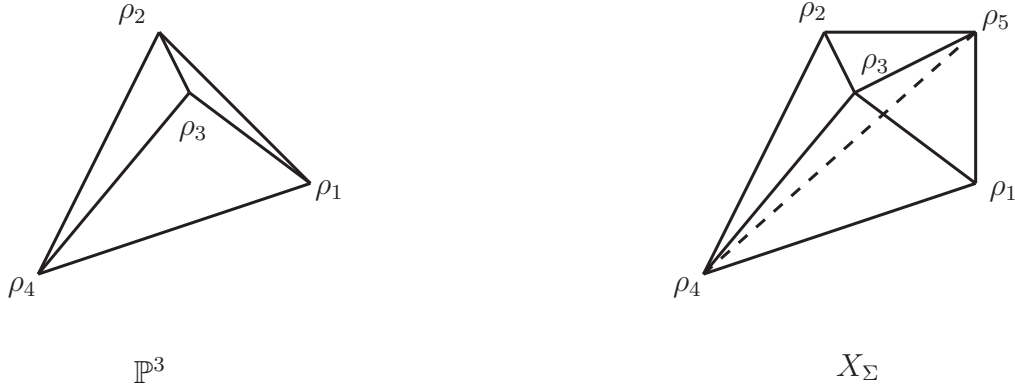
et $D = \tilde{Y}$ possède un point rationnel par le théorème 3.5.3. □

Remarque – Dans l'application du théorème 3.5.3 ci-dessus, il n'est pas nécessaire de faire appel au théorème de Kollar (théorème 3.1.10). En effet les nombres d'intersection d'une courbe extrême de $[C_3]$ avec les diviseurs toriques $D_{n-k+1}, \dots, D_{n+2}$ étant tous égaux à 1, la définition même de corps C_1 suffit pour conclure. C'est pourquoi on ne fait aucune hypothèse sur l'existence de formes normiques.

Afin de rendre les choses encore plus concrètes, on peut donner un exemple d'application du théorème 3.5.4 en petite dimension :

Exemple 3.5.5 Pour $n = 3$ et $k = 1$, la multiplicité μ avec laquelle l'hypersurface $Y \subset \mathbb{P}^3$ contient la droite $L = \mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{V}(\text{Cone}(u_1, u_2))$ doit être $\geq d - 2$ où d est le degré de Y . Σ est l'éventail de $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ dont les 1-cônes sont engendrés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Figure 3.1** – Eventails de $\mathbb{P}^3$ et de son éclatée X_Σ

et dont l'ensemble des cônes de dimension maximale est

$$\Sigma(3) = \{ \sigma_{1,3,4}, \sigma_{1,3,5}, \sigma_{1,4,5}, \sigma_{2,3,4}, \sigma_{2,3,5}, \sigma_{2,4,5} \}$$

où l'on note $\sigma_{i,j,k} = \text{Cone}(u_i, u_j, u_k)$.

Les deux collections primitives sont :

$$\alpha(1) = \{\rho_1, \rho_2\} \text{ et } \Sigma(1) \setminus \alpha(1) = \{\rho_3, \rho_4, \rho_5\}.$$

La matrice d'intersection de X_Σ se résume à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $[C_{3,4}] = [C_{3,5}] + [C_{1,5}]$ et le cône de Mori de X_Σ est

$$\overline{\text{NE}}(X_\Sigma) = \mathbb{R}_+[C_{3,5}] + \mathbb{R}_+[C_{1,5}] \subset N_1(X_\Sigma) \simeq \mathbb{R}^2.$$

Si on note $D = \tilde{Y}$ la transformée stricte on a

$$[D] = d[D_4] - \mu[D_5] = d[D_1] + (d - \mu)[D_5]$$

Comme $\mu \geq d - 2$ on conclut que D possède un point rationnel sur K grâce à l'inégalité

$$C_{1,5} \cdot D = d - \mu \leq 2 < 3 = k + 2 = \sum_{\rho \in \mathcal{J}_{C_{1,5}}^+} C_{1,5} \cdot D_\rho = C_{1,5} \cdot D_3 + C_{1,5} \cdot D_4 + C_{1,5} \cdot D_5.$$

◇

3.6 Cas semi-ample

Le cas semi-ample est le plus compliqué. C'est celui où la géométrie de la variété ambiante est la plus déterminante.

En effet pour tout diviseur D nef sur X_Σ , il existe un morphisme propre $\phi : X_\Sigma \rightarrow X_D$ tel que D soit le tiré en arrière d'un diviseur ample D' sur X_D .

Grossièrement parlant, la complexité du théorème 3.4.4 traduit le fait que pour trouver un point rationnel dans le diviseur D par notre méthode, il faut non seulement que D' ait un point rationnel par le théorème 3.5.3 mais aussi que celui-ci puisse être tiré en arrière en un point rationnel de D .

Nous nous promettons de traiter ce cas dans un futur très proche.

Bibliographie

- [Ax68] J. Ax. The elementary theory of finite fields. *Annals of Maths*, 88 :239–271, 1968.
- [Bat91] Victor V. Batyrev. On the classification of smooth projective varieties. *Tohoku Math. J.*, 43 :569–585, 1991.
- [Bon00] Laurent Bonavero. Sur des variétés toriques non projectives. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 128 :407–431, 2000.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, 1991.
- [Cas03] Cinzia Casagrande. Contractible classes in toric varieties. *Math. Z.*, 243 :99–126, 2003.
- [Che36] Claude Chevalley. Démonstration d’une hypothèse de m. artin. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11 :73–75, 1936.
- [CL04] Antoine Chambert-Loir. Points rationnels et groupes fondamentaux : applications de la cohomologie p -adique. *Astérisque*, 294(viii) :125–146, 2004.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric Varieties*. AMS, 2011.
- [Cox95] David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, 4 :15–50, 1995.
- [CvR09] David A. Cox and Christine von Renesse. Primitive collections and toric varieties. *Tohoku Math. J.*, 61 :309–332, 2009.
- [Dan78] V. Danilov. The geometry of toric varieties. *Russian Math. Surveys*, 33 :97–154, 1978.
- [Deb02] Olivier Debarre. Variétés rationnellement connexes. *Sém. Bourbaki*, 54e ann.(905) :243–266, 2001-2002.
- [Esn03] Hélène Esnault. Varieties over a finite field with trivial chow group of 0-cycles have a rational point. *Invent. Math.*, 151(1) :187–191, 2003.
- [Ewa96] Günter Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer, 1996.
- [FM82] J. Fogarty and D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1982.
- [FP05] Osamu Fujino and Sam Payne. Smooth complete toric threefolds with non trivial nef line bundles. *Proc. Japan Acad.*, 81(A) :174–179, 2005.
- [FS97] William Fulton and Bernd Sturmfels. Intersection theory on toric varieties. *Topology*, 36(2) :335–353, 1997.

- [Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 1984.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, 1993.
- [Kol96] Janos Kollar. *Rational Curves on Algebraic Varieties*. Springer, 1996.
- [Kre00] Andrew Kresch. Gromov-witten invariants of a class of toric varieties. *Michigan Math. J.*, 48 :369–391, 2000.
- [Lan52] Serge Lang. On quasi algebraic closure. *Annals of math.*, 55(2) :373–390, 1952.
- [Lan53] Serge Lang. The theory of real places. *Annals of Maths*, 57 :378–391, 1953.
- [LT65] S. Lang and J. Tate. *The collected papers of Emil Artin*. Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- [Oda78] Tadao Oda. *Torus Embeddings and Applications*. Tata Institute of Fundamental Research, 1978.
- [Oda88] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1988.
- [OP91] Tadao Oda and Hye Sook Park. Linear gale transform and gelfand-kapranov-zelevinskij decompositions. *Tohoku Math. J.*, 43 :375–399, 1991.
- [Rei83] Miles Reid. Decomposition of toric morphisms. In *Arithmetic and geometry*, volume II, pages 395–418, Progr. Math. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [TGS03] J. Harris T. Graber and J. Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :57–67, 2003.
- [Tse36] C. Ch. Tsen. Zur stufentheorie der quasi-algebraisch-abgeschlossenheit kommutativer korper. *J. Chinese Math. Soc.*, 1 :81–92, 1936.
- [vR07] Christine von Renesse. *Combinatorial aspects of toric varieties*. PhD thesis, University of Massachussets, 2007.
- [War36] Ewald Warning. Bemerkung zur vorstehenden arbeit von herrn chevalley. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg*, 11 :76–83, 1936.
- [Wit10] Olivier Wittenberg. La connexité rationnelle en arithmétique. *Panoramas et Synthèses.*, 31 :61–114, 2010.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions deux aspects distincts des variétés toriques, l'un purement géométrique, sur $\mathbb{C}$, et l'autre de nature arithmétique, sur des corps quasi algébriquement clos (corps C_1).

Les courbes extrémales qui engendrent le cône de Mori d'une variété torique projective sont des courbes primitives (V. Batyrev). En 2009, D. Cox et C. von Renesse ont conjecturé que les courbes primitives engendrent le cône de Mori de toute variété torique dont l'éventail est à support convexe, de dimension maximale. Nous présentons une famille de contre-exemples à cette conjecture et en proposons une nouvelle formulation basée sur la notion de contractibilité locale, généralisant la notion de contractibilité de C. Casagrande. Grâce aux couloirs, outils combinatoires que nous introduisons, nous montrons comment écrire une classe de 1-cycle donnée comme combinaison linéaire à coefficients entiers de classes de courbes toriques. Les couloirs nous permettent de donner une décomposition explicite de toute classe qui n'est pas contractible (couloirs droits) ainsi que de certaines classes contractibles (couloirs circulaires).

Les corps C_1 sont les corps sur lesquels l'existence de points rationnels dans une variété Y est assurée par le plongement en petit degré de Y dans un espace projectif (par définition) ou dans un espace projectif pondéré (d'après un théorème facile de Kollar). Pour un diviseur ample dans une variété torique dont l'éventail est simplicial et complet, nous montrons qu'il existe encore une notion de petit degré qui assure l'existence de points rationnels. Ceci nous permet notamment de montrer l'existence de points rationnels sur une large classe de variétés rationnellement connexes.

Abstract

In this thesis we study two distinct aspects of toric varieties, one purely geometric, over $\mathbb{C}$, and the other of arithmetic nature, over quasi algebraically closed fields (C_1 fields).

Extremal curves, which generate the Mori cone of a projective toric variety, are primitive curves (V. Batyrev). In 2009, D. Cox and C. von Renesse conjectured that the classes of primitive curves generate the Mori cone of any toric variety whose fan has full dimensional convex support. We present a family of counterexamples to this conjecture and propose a new formulation based on the notion of local contractibility, generalizing the contractibility defined by C. Casagrande. Using the corridors, a combinatorial tool that we introduce, we show how to write any given 1-cycle class as a linear combination with integer coefficients of toric curve classes. Corridors enable us to give an explicit decomposition of any class that is not contractible (straights corridors) as well as contractible classes in some particular cases (circular corridors).

C_1 fields are those over which the existence of rational points on a variety Y is ensured by any small degree embedding of Y in a projective space (by definition) or in a weighted projective space (according to an easy theorem of Kollar). For an ample divisor in a toric variety whose fan is simplicial and complete, we show that there is also a notion of small degree which ensures the existence of rational points. This way, we show the existence of rational points on a large class of rationally connected varieties.