Jeux booléens statiques et représentation compacte de préférences

Elise Bonzon, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, Jérôme Lang

Jeux booléens statiques et représentation compacte de préférences

Elise Bonzon Marie-Christine Lagasquie-Schiex Jérôme Lang

IRIT / RR- -2006-13- -FR

Juillet 2006

Résumé

La théorie des jeux est probablement le modèle formel le plus abouti pour l'étude des interactions stratégiques entre agents. Les jeux booléens, introduits par Harrenstein et al. [HvdHMW01, Har04a], sont des jeux à deux joueurs et à somme nulle. L'utilité des joueurs est représentée par une formule en logique propositionnelle, et les stratégies de chaque joueur consistent à assigner une valeur de vérité à chaque variable qu'il contrôle.

Nous avons dans un premier temps généralisé ce cadre à des jeux à *n* joueurs et à somme non nulle, et nous avons donné dans ce cadre une simple caractérisation des équilibres de Nash et des stratégies dominées. Cela nous a permis de calculer la complexité des problèmes qui en découlent.
Ensuite, nous avons introduit plusieurs langages de représentation compacte de préférences afin d'enrichir encore ces jeux : les préférences des joueurs ne seront plus binaires mais représentées grâce à deux de ces langages : les buts à priorité et les CP-nets.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie des jeux est probablement le modèle formel le plus abouti pour l'étude des interactions stratégiques entre agents. Informellement, un jeu consiste en un ensemble d'agents (ou joueurs), et pour chaque agent, la donnée d'un ensemble de stratégies possibles et une fonction d'utilité associant une valeur réelle à chaque combinaison possible de stratégies, et, pour les jeux dynamiques à information incomplète, des hypothèses sur les croyances de l'agent au cours du jeu (que nous ne considérerons pas ici).

Pour simplifier un peu la tâche, nous nous plaçons maintenant (et jusqu'à la fin du rapport) dans le cadre des jeux statiques. Que le jeu soit statique signifie que les agents choisissent leur stratégie en parallèle, sans observer quoi que ce soit du choix des autres joueurs.
En outre, pour les jeux statiques les deux modes de représentation usuels des jeux (forme extensive et forme normale) coïncident. Cette représentation ne fait pas l'économie de la description explicite de la fonction d'utilité de chaque agent. Or, cette description est de taille exponentielle en fonction du nombre d'agents : par exemple, si n agents ont chacun un choix entre deux actions possibles, il faudra spécifier $n \times 2^n$ valeurs numériques ; si deux agents contrôlent chacun un ensemble de p variables booléennes (il suffit de penser à de telles variables comme à des boutons que l'agent peut choisir d'enfoncer ou non), chaque agent a 2^p stratégies possibles et il faudra donc expliciter $2 \times (2^p)^2 = 2^{2p+1}$ valeurs numériques.
Cette explosion combinatoire est encore plus flagrante lorsqu'à la fois l'ensemble des agents et l'ensemble des stratégies pour chacun des agents sont de taille importante. Il devient alors déraisonnable de spécifier les fonctions d'utilité de manière explicite, en listant les valeurs pour chaque combinaison de stratégies. Il est tout aussi déraisonnable de penser pouvoir calculer des propriétés du jeu en appliquant un algorithme nécessitant une énumération explicite des combinaisons de stratégies. Pensons par exemple au calcul des équilibres de Nash en stratégies pures (dont nous rappelons la définition plus loin) : ce calcul nécessite, dans le cas des jeux précédents, et dans le pire des cas, un temps de calcul de l'ordre de $n \times 2^n$ (pour le jeu à n joueurs avec 2 actions chacun) et de $2 \times 2^p \times 2^{2p} = 2^{3p+1}$ (pour le jeu à deux joueurs contrôlant chacun p variables booléennes).

D'un autre côté, une sous-branche de l'intelligence artificielle s'intéresse aux langages de représentation compacte de préférences (ordinales ou numériques). Ces langages permettent une représentation concise de relations de préférences, ou de fonctions d'utilité, sur un ensemble de conséquences qui possède une structure combinatoire (c'est-à-dire un produit cartésien de domaines de valeurs finis pour un ensemble fini de variables), en exploitant dans une large mesure des propriétés structurelles des relations de préférences (comme l'indépendance préférentielle entre variables). En particulier, lorsque les variables en jeu sont binaires, ces langages sont fondés sur la logique propositionnelle, dont ils héritent l'expressivité et les méthodes algorithmiques (pour la déduction et la recherche de modèles, notamment). L'expressivité et le pouvoir de concision des langages de représentation logique de préférences sont étudiés dans [CMLLM04] et leur complexité algorithmique dans [Lan04].

Partant de là, puisque la spécification d'un jeu statique nécessite la description des préférences des agents, il apparaît naturel de représenter de tels jeux en utilisant des langages de représentation compacte de préférences. C'est l'objectif premier de ce rapport, qui donne des résultats préliminaires et pour l'instant simples, mais qui par ailleurs pose quelques questions plus complexes.

Il existe déjà un cadre répondant (très) partiellement aux problèmes que nous avons posés plus haut : il s'agit des *jeux booléens* [HvdHMW01, Har04a]. Un jeu booléen est un jeu à deux joueurs et à somme nulle, la fonction d'utilité du joueur 1 (et donc celle du joueur 2 qui est son opposé) est représentée par une formule de la logique propositionnelle, appelée *forme booléenne* du jeu.

Après avoir donné chapitre 2 quelques rappels sur la logique propositionnelle, puis chapitre 3 une description (simplifiée) des jeux booléens, nous montrerons chapitre 4 que ces jeux booléens peuvent facilement être généralisés de manière à représenter des jeux avec un nombre arbitraire de joueurs et à somme non nulle, mais en gardant l'hypothèse que les préférences de chaque joueur sont représentées par une formule propositionnelle unique, ce qui ne permet de représenter que des utilités binaires. Nous verrons comment des outils simples issus de la logique propositionnelle permettent de caractériser certaines propriétés du jeu, et nous donnerons quelques résultats de complexité algorithmique.
Nous introduirons ensuite dans le chapitre 5 plusieurs langages de représentation de préférences afin d'enrichir encore les jeux booléens : les préférences des joueurs ne seront plus des formules uniques. Dans le chapitre 6, nous exposerons quelques uns des travaux existants sur le sujet en montrant le lien avec nos solutions. Nous poserons enfin chapitre 7 plusieurs pistes de recherche.

Chapitre 2

Notations et rappels de logique propositionnelle

Soit $V = \{a,b,\ldots\}$ un ensemble fini de variables propositionnelles et L_V le langage propositionnel construit à partir de V, des connecteurs habituels et des constantes booléennes $\top$ (*vrai*) et $\perp$ (*faux*). Les formules de L_V seront notées φ, ψ etc.
Un littéral est, soit une variable de V, soit sa négation. Une conjonction finie de littéraux est appelée *terme*. On note $Lit(\alpha)$ l'ensemble des littéraux formant le terme α. Une formule φ est en DNF si c'est une disjonction de termes.
2^V est l'ensemble des interprétations pour V avec la convention suivante : soit M une interprétation pour V et pour tout $x \in V$, M donne la valeur *vrai* à x si $x \in M$ et *faux* sinon. Soit M une interprétation pour V et $\psi \in L_V$, la conséquence logique $M \models \psi$ est définie de la manière usuelle.
Soit $X \subseteq V$. 2^X est l'ensemble des X-*interprétations*. Une *interprétation partielle* de L_V est une X-interprétation pour $X \subseteq V$. Les interprétations partielles sont représentées par une liste de variables de X, le symbole $\bar{}$ représentant la négation d'une variable. Par exemple, si $X = \{a,b,d\}$, la X-interprétation $M = \{a,d\}$ sera notée $a\bar{b}d$.
Si $\{V_1,\ldots,V_p\}$ est une partition de V et si $\{M_1,\ldots,M_p\}$ sont des interprétations partielles, avec $M_i \in 2^{V_i}$, $(M_1,\ldots,M_p)$ représente alors l'interprétation $M_1 \cup \ldots \cup M_p$.
Rappellons que, quelle que soit la formule φ, une interprétation qui rend φ vrai est un *modèle* de φ.
L'interprétation partielle d'une formule φ sera notée par une X-interprétation M_X :

$$(\varphi)_{M_X} = \varphi_{v \in M_X \leftarrow \top, v \in X \setminus M_X \leftarrow \perp}$$

Nous aurons également besoin dans ce rapport de plusieurs notions d'impliquants premiers. Les définitions suivantes sont reprises du rapport de synthèse [Mar00].
Intuitivement, un impliquant premier d'une formule propositionnelle ψ est un des plus petits termes dont tous les modèles sont des modèles de ψ.

Définition 1 (Impliquant, impliquant premier)
Soit ψ *une formule propositionnelle.*
- *Un terme* α *est un* impliquant *de* ψ *ssi* $\alpha \models \psi$.
- *Un terme* α *est un* impliquant premier *de* ψ *ssi*
  - α *est un impliquant de* ψ*, et*
  - *pour chaque impliquant* α' *de* ψ*, si* $\alpha \models \alpha'$*, alors* $\alpha' \models \alpha$.

  On notera PI(ψ) *l'ensemble des impliquants premiers de* ψ.

Un L-impliquant premier est un impliquant premier dont tous les littéraux appartiennent à l'ensemble L.

Définition 2 (L-impliquant, L-impliquant premier)
Soit $L \subseteq V$ *et soit* ψ *une formule propositionnelle de* L_V.
- *Un terme* α *est un* L-impliquant *de* ψ *ssi* $\alpha \models \psi$ *et* $Lit(\alpha) \subseteq L$.

– *Un terme* α *est un* L-impliquant premier *de* ψ *ssi*
  – α *est un L-impliquant de* ψ*, et*
  – *pour chaque L-impliquant* α' *de* ψ*, si* $\alpha \models \alpha'$*, alors* $\alpha' \models \alpha$*.*

  On notera $PI_L(\psi)$ *l'ensemble des L-impliquants premiers de* ψ*.*

La notion de projection d'une formule sur un ensemble de variables correspond à l'utilisation de l'opérateur *forget*, qui a été étudié par [LLM02, LLM03].
On dit que l'on "oublie complètement" la variable x dans une formule φ si et seulement si on s'intéresse à la formule (notée $\forall x : \varphi$) : $\varphi_{x \leftarrow \top} \wedge \varphi_{x \leftarrow \bot}$.
On peut aussi "oublier partiellement" x dans φ en s'intéressant à la formule (notée $\exists x : \varphi$) : $\varphi_{x \leftarrow \top} \vee \varphi_{x \leftarrow \bot}$.
On note que l'on a :

$$\forall i : \varphi \equiv \neg \exists i : \neg \varphi$$

Par exemple, soit la formule φ suivante :

$$\varphi = (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge d)$$

La projection de φ sur la variable c sera calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \exists c : \varphi &= [(a \wedge \neg b \wedge \top) \vee (b \wedge \bot) \vee (a \wedge b \wedge d)] \vee [(a \wedge \neg b \wedge \bot) \vee (b \wedge \top) \vee (a \wedge b \wedge d)] \\ &= (a \wedge \neg b) \vee b \vee (a \wedge b \wedge d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall c : \varphi &= [(a \wedge \neg b \wedge \top) \vee (b \wedge \bot) \vee (a \wedge b \wedge d)] \wedge [(a \wedge \neg b \wedge \bot) \vee (b \wedge \top) \vee (a \wedge b \wedge d)] \\ &= ((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge d)) \wedge (b \vee (a \wedge b \wedge d)) \\ &= a \wedge b \wedge d \end{aligned}$$

Chapitre 3

Introduction aux jeux booléens

Un jeu booléen sur V [HvdHMW01, Har04a] est un jeu à deux joueurs 1 et 2, à somme nulle, ayant les spécificités suivantes :

– les actions que peuvent entreprendre les deux joueurs consistent à donner une valeur de vérité à des variables de V ;
– les fonctions d'utilité des deux joueurs sont représentées au moyen d'une formule propositionnelle φ formée sur les variables V, appelée *forme booléenne* du jeu.

φ représente le but du joueur 1 : l'utilité de celui-ci est +1 lorsque φ est satisfaite [1] (et alors le joueur 1 gagne), et -1 sinon (et c'est alors le joueur 2 qui gagne). Le jeu étant à somme nulle, c'est-à-dire $u_2 = -u_1$, le but du joueur 2 n'est autre que $\neg\varphi$. Le jeu n'a donc que deux issues possibles : le gain de 1 ou celui de 2.

Pour construire ces jeux booléens, [HvdHMW01, Har04a] commencent par définir deux jeux booléens atomiques, dénotés par **1** et **0**. Le premier est gagné par 1 sans qu'aucun des joueurs n'ait à prendre la moindre décision, tandis que le second est gagné par 2. Des jeux booléens plus complexes sont ensuite construits récursivement à partir de ces jeux atomiques et d'un ensemble de variables propositionnelles que l'on appellera variables de décision binaires. Pour tous jeux booléens g_0 et g_1, et pour toute variable de décision a, il existe un autre jeu booléen dénoté $a(g_0, g_1)$. Chaque variable de décision est contrôlée de manière exclusive par l'un des deux joueurs.

Exemple 1 *Soit* $V = \{a, b, c\}$ *un ensemble de variables propositionnelles. Soit* 1, 2 *deux joueurs ayant pour buts :* $\varphi_1 = (a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$, $\varphi_2 = \neg\varphi_1 = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)$.
Le joueur 1 *contrôle les variables a et c, tandis que* 2 *contrôle la variable b.*
La représentation proposée par Harrenstein dans [Har04a] de ce jeu booléen est donnée figure 3.1. Sur cette figure, la flèche gauche partant du nœud x représente la mise à faux de x, tandis que la flèche droite représente la mise à vrai de x.

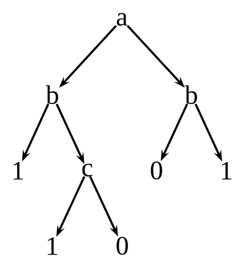


FIG. 3.1 – Jeu booléen $(a, (b(\mathbf{1}, c(\mathbf{1}, \mathbf{0})), b(\mathbf{0}, \mathbf{1})))^2$

[1] Une formule booléenne est satisfaite ssi la formule est vraie.
[2] La flèche gauche partant du nœud *x* représente la mise à *faux* de *x*, tandis que la flèche droite représente la mise à *vrai* de *x*.

Comme l'ont constaté Dunne et Van der Hoek [DvdH04], cette construction basée sur un modèle dynamique n'est pas nécessaire. En effet, l'hypothèse disant que les stratégies des agents sont choisies en parallèle (c'est-à-dire sans que l'un observe la décision de l'autre) est implicite. Cette forme extensive, sous forme d'arbre, est donc inutile.

Il est possible ici d'utiliser une représentation plus simple, correspondant à un jeu statique.
Cette représentation utilise la forme normale du jeu : c'est un tableau à deux dimensions, chacune d'entre elles correspondant à un des deux joueurs. On associe à chaque joueur l'ensemble des choix qu'il peut faire pour chacune des variables qu'il contrôle. On associe à chaque état du tableau un couple, dont la première composante représente l'utilité du joueur 1 et la seconde l'utilité du joueur 2. *Stricto sensu, les jeux obtenus ne sont pas à somme nulle, mais à somme constante (égale à 1) – ce qui, en pratique, n'a aucune importance – on utilisera donc, par abus de langage, la terminologie "à somme nulle".*
Ainsi, si l'on reprend l'exemple 1 page précédente on aura la représentation suivante :

Exemple 1 – suite *Soit $V = \{a,b,c\}$ un ensemble de variables propositionnelles. Soit* 1, 2 *deux joueurs ayant pour buts :* $\varphi_1 = (a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$, $\varphi_2 = \neg\varphi_1 = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)$.
Le joueur 1 *contrôle les variables a et c, tandis que* 2 *contrôle la variable b.*

La forme normale de ce jeu est la suivante :

1 \ 2	b	$\overline{b}$
ac	*(1, 0)*	*(0, 1)*
$a\overline{c}$	*(1, 0)*	*(0, 1)*
$\overline{a}c$	*(0, 1)*	*(1, 0)*
$\overline{ac}$	*(1, 0)*	*(1, 0)*

Cette représentation a l'avantage de montrer clairement pour chaque issue du jeu quel joueur gagnera.

Nous allons à présent essayer d'étendre le cadre des jeux booléens classiques.

Chapitre 4

Jeux booléens à *n* joueurs

Avant de revenir plus en détail aux jeux booléens tels qu'ils ont été définis dans [HvdHMW01, Har04a], nous allons d'abord les généraliser en nous intéressant à des jeux à n joueurs et à somme non nulle. Nous verrons ensuite que le cadre étudié par [HvdHMW01, Har04a] est un cas particulier de ce cadre plus général.

4.1 Formalisation des jeux booléens

Commençons par formaliser la notion de jeu booléen.

Définition 3 (Jeu booléen)
Soit :
– *un ensemble V de variables propositionnelles (appelées désormais variables de décision),*
– *un ensemble de joueurs $A = \{1, 2, \dots, n\}$,*
– *un ensemble de contraintes intra-agent C,*
– *une fonction d'assignement de contrôle $\pi : A \to V$, et*
– $\Phi = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ *les formules représentant les buts des joueurs, où chaque φ_i est une formule de L_V.*
Le jeu booléen *correspondant est alors représenté par le quintuplet (A, V, C, π, Φ).*

π représentant la *fonction d'assignement de contrôle* qui associe à chaque joueur les variables qu'il contrôle, on note π_i l'*ensemble des variables contrôlées* par le joueur i. Ainsi, $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ forme une partition de V. C représente l'ensemble des contraintes intra-agent, c'est-à-dire l'ensemble des contraintes que chaque agent doit satisfaire. On suppose dans tout le document que l'ensemble C est un ensemble consistant, et que le but de chaque joueur est consistant avec l'ensemble des contraintes :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ C \wedge \varphi_i \not\models \bot$$

L'utilisation des jeux booléens permet d'avoir une représentation compacte du problème.
Pour illustrer ce propos, nous allons utiliser une variante de l'exemple du dilemme des prisonniers : nous considérons ici n prisonniers qui ne peuvent bénéficier que d'un seul type de remise de peine afin de simplifier le problème.

Exemple 2 *Dans le jeu du prisonnier à n joueurs, n détenus (notés p_i, $i = 1, \dots, n$) sont emprisonnés dans des cellules séparées. La police fait à chacun d'eux le même marché :*

> *"Tu as le choix entre trahir tes complices en les dénonçant (noté T_i, $i = 1, \dots, n$) ou les couvrir (noté C_i, $i = 1, \dots, n$). Si tu les dénonces, tu auras une remise de peine et tes partenaires purgeront le maximum (sauf si l'un d'eux t'a dénoncé aussi, auquel cas il bénéficiera comme toi d'une remise de peine). Mais si vous vous couvrez mutuellement, vous aurez tous une remise de peine."*

La représentation de ce jeu en forme normale pour n $= 3$ *est la suivante :*

$p_3 : C_3$		
$p_1 \backslash p_2$	C_2	T_2
C_1	*(1, 1, 1)*	*(0, 1, 0)*
T_1	*(1, 0, 0)*	*(1, 1, 0)*

$p_3 : T_3$		
$p_1 \backslash p_2$	C_2	T_2
C_1	*(0, 0, 1)*	*(0, 1, 1)*
T_1	*(1, 0, 1)*	*(1, 1, 1)*

On constate ici que pour n prisonniers, on aura une matrice[1] *à n dimensions, chaque dimension étant égale à 2, donc* 2^n *n-uplets à spécifier.*
Or, ce jeu peut être traduit très simplement par le jeu booléen $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ *suivant :*
- $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$,
- $V = \{C_1, \ldots, C_n\}$ *(avec* $\neg C_i = T_i$, $\forall i$*),*
- $C = \varnothing$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \pi_i = \{C_i\}$, *et*
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi_i = (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots C_n) \vee \neg C_i$.

L'utilisation des jeux booléens permet donc de réduire de manière très significative la taille de la représentation du problème.

4.2 Les stratégies

4.2.1 Définitions

Après avoir défini les jeux booléens, nous pouvons introduire la notion de stratégie pour un joueur.

Définition 4 (Stratégie)
Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ *un jeu booléen. Une* stratégie s_i *pour un joueur i dans G est une fonction qui associe à chaque variable contrôlée par le joueur i la valeur de vérité vrai ou faux.*

Par abus de langage on considérera que $s_i = \{x | x \in \pi_i \text{ et } x \text{ mis à } vrai\}$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, s_i \in 2^{\pi_i}$$

Cela signifie donc que $\forall x \in \pi_i \setminus s_i$, x est mis à *faux* pour la stratégie s_i.

Définition 5 (profil de stratégies)
Un profil de stratégies *S correspond à l'instanciation de toutes les variables de décision d'un jeu G :*

$$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

Par abus de langage, et sachant que chaque s_i est un ensemble de variables, on considère S comme étant l'union des s_i. On a donc $S \in 2^V$. S représente l'ensemble des variables mises à *vrai* (toutes celles qui ne seront pas dans S seront considérées comme étant mises à *faux*). S est donc une interprétation pour V et chaque s_i est une interprétation partielle de L_V.

Notations : Un ensemble de profils de stratégies sera désigné par Ω.

Reprenons l'exemple 1 page 9 pour illustrer les notions de stratégie et de profil de stratégies.

[1]Ou un arbre binaire à 2^n feuilles si on utilise une représentation sous forme extensive.

Exemple 1 – suite *Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec*
– $V = \{a,b,c\}$, $A = \{1,2\}$, $C = \varnothing$
– $\varphi_1 = (a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$,
– $\varphi_2 = \neg\varphi_1 = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)$,
– $\pi_1 = \{a,c\}$ *et* $\pi_2 = \{b\}$.
Le joueur 1 a 4 stratégies possibles : $s_{1_1} = ac$, $s_{1_2} = a\overline{c}$, $s_{1_3} = \overline{a}c$ ou $s_{1_4} = \overline{ac}$. Le joueur 2 a deux stratégies possibles : $s_{2_1} = b$ ou $s_{2_2} = \overline{b}$.
G possède donc 8 profils de stratégies : $S_1 = (s_{1_1}, s_{2_1})$, $S_2 = (s_{1_1}, s_{2_2})$, $S_3 = (s_{1_2}, s_{2_1})$, $S_4 = (s_{1_2}, s_{2_2})$, $S_5 = (s_{1_3}, s_{2_1})$, $S_6 = (s_{1_3}, s_{2_2})$, $S_7 = (s_{1_4}, s_{2_1})$ et $S_8 = (s_{1_4}, s_{2_2})$.
On a donc $\Omega = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7,S_8\}$.
Les profils de stratégies S_1, S_3, S_6, S_7 et S_8 donnent la victoire à 1, tandis que S_2, S_4 et S_5 permettent à 2 de gagner.

Reprenons à présent ce même exemple en ajoutant des contraintes :

Exemple 3 *Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec*
– $V = \{a,b,c\}$, $A = \{1,2\}$, $C = \{a \leftrightarrow \neg c\}$
– $\varphi_1 = (a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$,
– $\varphi_2 = \neg\varphi_1 = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)$,
– $\pi_1 = \{a,c\}$ *et* $\pi_2 = \{b\}$.
Dans un premier temps, on vérifie que l'on a bien :
– $C \wedge \varphi_1 \not\models \bot$ *(avec par exemple $\{a \leftarrow \top$, $b \leftarrow \top$ et $c \leftarrow \bot\}$, qui est un modèle de $C \wedge \varphi_1$)*
– $C \wedge \varphi_2 \not\models \bot$ *(avec par exemple $\{a \leftarrow \bot$, $b \leftarrow \top$ et $c \leftarrow \top\}$, qui est un modèle de $C \wedge \varphi_2$)*
Le joueur 1 n'a plus que 2 stratégies possibles, car les deux autres ne satisfont pas C : $s_{1_1} = a\overline{c}$ ou $s_{1_2} = \overline{a}c$.
Le joueur 2 a deux stratégies possibles : $s_{2_1} = b$ ou $s_{2_2} = \overline{b}$.
G possède donc 4 profils de stratégies : $S_1 = (s_{1_1}, s_{2_1})$, $S_2 = (s_{1_1}, s_{2_2})$, $S_3 = (s_{1_2}, s_{2_1})$ et $S_4 = (s_{1_2}, s_{2_2})$.
On a donc $\Omega = \{S_1,S_2,S_3,S_4\}$.
Les profils de stratégies S_1 et S_4 donnent la victoire à 1, tandis que S_2 et S_3 permettent à 2 de gagner.

Notations : Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec $A = \{1,\ldots,n\}$. Soit $S = (s_1,\ldots,s_n)$ et $S' = (s'_1,\ldots,s'_n)$ deux profils de stratégies.

On note s_{-i} le *profil de stratégies S privé de la stratégie du joueur i* :

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

On note (s_{-i}, s'_i) *le profil de stratégies S dans lequel on a remplacé la stratégie du joueur i par celle du profil S'* :

$$(s_{-i}, s'_i) = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Similairement, on note π_{-i} *l'ensemble des variables contrôlées par tous les joueurs sauf le joueur i* :

$$\pi_{-i} = V \setminus \pi_i$$

On peut à présent définir la notion de stratégie gagnante.

Définition 6 (Stratégie gagnante)
Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec $\Phi = \langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$, et $A = \{1,\ldots,n\}$. La stratégie s_i est une stratégie gagnante *pour le joueur i si, quels que soient les choix effectués par ses adversaires, i est sûr de gagner en choisissant cette stratégie.*

$$\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}} (s_{-i}, s_i) \models \varphi_i$$

Dans le cas de jeux à n joueurs, il peut être intéressant de définir la notion de coalitions efficaces.

Définition 7 (Coalitions efficaces)
Une coalition *est un sous-ensemble non-vide I de l'ensemble des joueurs A. I est une* coalition efficace *si et seulement si l'ensemble des joueurs de I ont une stratégie satisfaisant tous leurs buts. I est une* coalition efficace minimale *si et seulement si elle est efficace et pour tout $J \subset I$, J n'est pas efficace.*

On peut à présent étudier les propriétés des stratégies gagnantes pour un joueur ou pour une coalition de joueurs.

Propriété 1 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen.*

1. *$\forall i \in A, i$ a une stratégie gagnante ssi*
$$PI_{\pi_i}(\varphi_i) \neq \varnothing$$
2. *Une coalition de joueurs $I \subseteq A$ est efficace si et seulement si*
$$PI_{\bigcup_{i\in I}\pi_i}(\bigwedge_{i\in I}\varphi_i) \neq \varnothing$$

Preuve : Intuitivement, si le but qu'un joueur, ou un ensemble de joueurs noté I, cherche à satisfaire contient un terme (donc une conjonction de littéraux) α dont tous les littéraux sont contrôlés par le joueur ou par I, alors le joueur ou I ont une stratégie gagnante. En effet, ce terme α peut être satisfait, donc le but qui le contient est aussi satisfait, et le joueur ou l'ensemble des joueurs I gagnent.

1. Pour un joueur.
   – D'après la définition 2 page 7, si $PI_{\pi_i}(\varphi_i) \neq \varnothing$, alors $\exists \alpha \in 2^V$ tel que : $\alpha \models \varphi_i$ et $Lit(\alpha) \subseteq \pi_i$. Donc, i possède une stratégie $s_i \in 2^{\pi_i}$ telle que : $\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}(s_{-i}, s_i) \models \varphi_i$.
   – D'après la définition 6 page précédente, i possède une stratégie gagnante si et seulement si :
$$\exists s_i \in 2^{\pi_i}, \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}(s_{-i}, s_i) \models \varphi_i$$
   Le joueur i peut donc satisfaire son but quels que soient les choix de ses adversaires. Il existe donc $\alpha \in 2^{\pi_i}$ tel que : $\alpha \models \varphi_i$ et $Lit(\alpha) \subseteq \pi_i$. α est un π_i-impliquant de φ_i. Donc, il existe α' π_i-impliquant premier de φ_i. Donc $PI_{\pi_i}(\varphi_i) \neq \varnothing$.
2. Pour une coalition de joueurs, la preuve est identique en remplaçant π_i par $\bigcup_{i\in I}\pi_i$ et φ_i par $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$.

■

Une coalition de joueurs aura donc une stratégie gagnante si et seulement si il existe un impliquant premier de la conjonction de tous les buts des membres de la coalition, cet impliquant premier étant composé uniquement de variables contrôlées par les membres de la coalition.
Etudions ce problème sur un exemple simple.

Exemple 4 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. On donne*
– $V = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$,
– $\varphi_1 = (a \leftrightarrow (b \wedge c))$,
– $\varphi_2 = (\neg a \vee \neg c)$ *et*
– $\varphi_3 = (a \wedge \neg b)$.
On constate tout d'abord qu'aucun joueur isolé n'a de stratégie gagnante.
On remarque ensuite que les trois joueurs ne peuvent pas gagner tous ensemble. En effet, $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ est incohérent. Donc il ne peut pas exister de coalition entre 1 *et* 3*, et les seules coalitions possibles sont* $\{1, 2\}$ *et* $\{2, 3\}$*. Etudions-les.*
– $\{1, 2\}$
$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$$
Il existe un impliquant premier, $(\neg a \wedge \neg b)$, qui ne contient que des variables contrôlées par 1 *et* 2*. Cette coalition a donc une stratégie gagnante. Comme c'est la plus petite coalition contenant* 1 *et* 2*, c'est une coalition efficace minimale.*
– $\{2, 3\}$
$$(\varphi_2 \wedge \varphi_3) = (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$
Cette coalition n'a pas de stratégie gagnante car la variable a, qui n'est contrôlée par aucun joueur de cette coalition, appartient au seul impliquant premier. Ce n'est donc pas une coalition efficace pour le jeu G.

Remarquons par ailleurs que de façon (presque) équivalente, la recherche d'une stratégie gagnante correspond à une résolution de $QBF_{2,\exists}$[Sto77].
En effet, comme on l'a vu dans la propriété 1 page précédente, la recherche d'une stratégie gagnante correspond à la recherche d'un impliquant premier. Or, cette recherche est du type $\exists A \forall B \varphi(A,B)$: pour un but φ donné, qui peut être le but d'un joueur ou d'une coalition I, on cherche *s'il existe* un impliquant α de φ ne contenant que des variables contrôlées par I. Si α existe, on veut que *pour tout* autre impliquant, α soit le "plus petit".

Par ailleurs, l'existence d'une stratégie gagnante est une instance du problème de *contrôlabilité* en logique propositionnelle [Bou94, LM98] (voir aussi [CC02] pour une extension de la contrôlabilité à un cadre multi-agents).

4.2.2 Equilibres de Nash

Nous allons à présent définir la notion d'utilité afin de caractériser les équilibres de Nash sur les jeux booléens.

Définition 8 (Utilité)
Une fonction d'utilité *pour le joueur i est une fonction* $u_i : \Omega \to I\!R$.
$u_i(S)$ *mesure la satisfaction du joueur i lorsque le profil de stratégies S est choisi.*

Dans une première phase, nous allons nous situer dans un cadre particulier, nous étudions des jeux à utilité binaire[2], dont voici la définition :

Définition 9 (Utilité binaire)
Pour chaque joueur i, la fonction d'utilité binaire *induite par le but de ce joueur est la fonction* $u_i : \Omega \to I\!R$ *telle que :*

$$u_i(S) = \begin{cases} 0 \text{ si } S \models \neg\varphi_i \\ 1 \text{ si } S \models \varphi_i \end{cases}$$

Nous pouvons à présent définir les équilibres de Nash en stratégies pures des jeux booléens à n joueurs.
Un équilibre de Nash est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs.

Définition 10 (Equilibres de Nash)
Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ *un jeu booléen, avec* $A = \{1,\ldots,n\}$ *l'ensemble des joueurs.*
$S = (s_1,\ldots,s_n)$ *est un* équilibre de Nash en stratégies pures *si et seulement si :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, u_i(S) \geq u_i(s_{-i},s'_i)$$

Etudions un exemple simple.

Exemple 5 *Soit* $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ *un jeu booléen avec*
– $V = \{a,b,c\}$, $A = \{1,2,3\}$, $C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$,
– $\varphi_1 = (\neg a \vee (a \wedge b \wedge \neg c))$,
– $\varphi_2 = (a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c))$ *et*
– $\varphi_3 = ((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c))$.
On peut à présent construire la forme normale de G[3] *:*

stratégie de 3 : c		
1 \ 2	$\overline{b}$	b
$\overline{a}$	*(1, 1, 0)*	*(1, 0, 1)*
a	*(0, 0, 0)*	*(0, 1, 0)*

stratégie de 3 : $\overline{c}$		
1 \ 2	$\overline{b}$	b
$\overline{a}$	*(1, 0, 0)*	*(1, 1, 0)*
a	*(0, 1, 1)*	*(1, 0, 0)*

[2]Dans la suite, nous verrons comment lever cette contrainte.
[3]Les n-uplets (ici des triplets) donnent le résultat obtenu par les n joueurs dans l'ordre : (résultat joueur 1, résultat joueur 2, ...). Le 0 (resp. 1) signifie que le joueur concerné perd (resp. gagne).

On constate tout d'abord que le joueur 1 a une stratégie gagnante. En effet, si 1 choisit d'instancier la variable a à faux, alors il est sûr de gagner quels que soient les choix de 2 et 3.
Etudions à présent les équilibres de Nash. Pour cela, il faut étudier chaque profil de stratégies.

$S_1 = abc$: 1, *qui contrôle a, préfère* $\overline{a}bc$
$S_2 = ab\overline{c}$: 2, *qui contrôle b, préfère* $a\overline{b}\overline{c}$
$S_3 = a\overline{b}c$: 2 , *qui contrôle b,préfère* abc
$S_4 = \overline{a}bc$: 2, *qui contrôle b, préfère* $\overline{a}\overline{b}c$
$S_5 = a\overline{b}\overline{c}$: 1, *qui contrôle a, préfère* $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
$S_6 = \overline{a}b\overline{c}$: 3, *qui contrôle c, préfère* $\overline{a}bc$
$S_7 = \overline{a}\overline{b}c$: *Equilibre de Nash (aucun joueur ne préfère un autre profil)*
$S_8 = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$: 2, *qui contrôle b, préfère* $\overline{a}b\overline{c}$

Le profil de stratégies $S = \overline{a}\overline{b}c$ *est donc le seul équilibre de Nash du jeu G.*

Donnons enfin une caractérisation simple des équilibres de Nash aux stratégies pures.

Propriété 2 *Soit $S \in 2^V$. Alors S est un équilibre de Nash en stratégies pures pour G si et seulement si pour tout $i \in A$, on a :*
– *soit* $S \models \varphi_i$,
– *soit* $s_{-i} \models \neg\varphi_i$.

Preuve : S est un équilibre de Nash en stratégies pures pour G si et seulement si pour tout $i \in A$ et pour tout $s'_i \in 2^{\pi_i}$ on a $u_i(S) \geq u_i(s_{-i}, s'_i)$. Or, puisque $u_i(S)$ et $u_i(s_{-i}, s'_i)$ ne peuvent prendre que deux valeurs, cette inégalité est équivalente à

$$\forall i \in A \text{ et } \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, u_i(S) = 1 \text{ ou } u_i(s_{-i}, s'_i) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in A \quad \text{soit} \quad u_i(S) = 1 \tag{4.1}$$
$$\text{soit} \quad \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, u_i(s_{-i}, s'_i) = 0 \tag{4.2}$$

4.1 est équivalente à $S \models \varphi_i$.
4.2 est équivalente à $\forall s'_i \in 2^{\pi_i}$, $(s_{-i}, s'_i) \models \neg\varphi_i$, donc $s_{-i} \models \neg\varphi_i$.

■

Cette caractérisation des équilibres de Nash en stratégies pures peut être encore simplifiée. En effet, vérifier que $s_{-i} \models \neg\varphi_i$ revient à vérifier que s_{-i} peut inférer $\neg\varphi_i$ *quelles que soient* les valeurs prises par les variables contrôlées par le joueur i. Cela évoque la notion de projection que nous avons présenté au Chapitre 2 page 7.

On a donc :

$$s_{-i} \models \neg\varphi_i \quad \Leftrightarrow \quad s_{-i} \models \forall i : \neg\varphi_i \tag{4.3}$$
$$\Leftrightarrow \quad (s_i, s_{-i}) \models \forall i : \neg\varphi_i \tag{4.4}$$
$$\Leftrightarrow \quad S \models \forall i : \neg\varphi_i \tag{4.5}$$

L'équation 4.3 est équivalente à l'équation 4.4 car les variables contrôlées par le joueur i ont disparu de $\forall i : \neg\varphi_i$.

Ce qui nous permet de donner le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit $S \in 2^V$. Alors S est un équilibre de Nash en stratégies pures pour G si et seulement si :*

$$S \models \bigwedge_i (\varphi_i \vee (\forall i : \neg\varphi_i))$$

Cette formule caractérise les équilibres de Nash en stratégie pure.

Preuve :

$$\begin{array}{rl} & \forall i \in A, S \models \varphi_i \text{ ou } s_{-i} \models \neg\varphi_i \\ \Leftrightarrow & \forall i \in A, S \models \varphi_i \text{ ou } S \models \forall i : \neg\varphi_i \\ \Leftrightarrow & \forall i \in A, S \models \varphi_i \vee (\forall i : \neg\varphi_i) \\ \Leftrightarrow & S \models \bigwedge_i (\varphi_i \vee (\forall i : \neg\varphi_i)) \end{array}$$

■

4.2.3 Stratégies dominées

Il arrive parfois que le calcul des équilibres de Nash donne des résultats mal adaptés :

Exemple 6 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen avec*
- $V = \{a, b\}$, $A = \{1, 2\}$, $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$,
- $\varphi_1 = a \wedge \neg b$ *et*
- $\varphi_2 = a \wedge \neg b$

On peut à présent construire la forme normale de G :

1 \ 2	$\overline{b}$	b
$\overline{a}$	*(0, 0)*	*(0, 0)*
a	*(1, 1)*	*(0, 0)*

Etudions à présent les équilibres de Nash. Pour cela, il faut étudier chaque profil de stratégies.

$S_1 = ab$: 2 *préfère* $a\overline{b}$
$S_2 = a\overline{b}$: *Equilibre de Nash*
$S_3 = \overline{a}b$: *Equilibre de Nash*
$S_4 = \overline{a}\overline{b}$: 1 *préfère* $a\overline{b}$

Ce jeu a donc 2 équilibres de Nash : les profils de stratégies $S_2 = a\overline{b}$ et $S_3 = \overline{a}b$. Pourtant, un seul de ces équilibres est intéressant. En effet, si les joueurs 1 et 2 sont rationnels, ils choisiront tous deux le profil de stratégies S_2 qui leur permet de gagner.

Dans ce cas on peut utiliser le principe d'éliminations itératives des stratégies dominées. Ce processus repose sur l'hypothèse que chaque joueur se comporte de manière rationnelle et sait que les autres joueurs sont rationnels.

Commençons par définir les stratégies strictement et faiblement dominées.

Définition 11 (Stratégie strictement dominée)
La stratégie s_i du joueur i est dite strictement dominée *s'il existe une autre stratégie s'_i telle que, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s'_i assure au joueur i une utilité strictement plus grande que s_i. Donc :*
$s_i \in 2^{\pi_i}$ *est* strictement dominée *si*

$$\exists s'_i \in 2^{\pi_i} \text{ telle que } \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s'_i, s_{-i})$$

Définition 12 (Stratégie faiblement dominée)
La stratégie s_i du joueur i est dite faiblement dominée *s'il existe une autre stratégie s'_i telle que, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s'_i assure au joueur i une utilité au moins aussi grande que s_i, et qu'il existe au moins une combinaison des stratégies des autres joueurs telle que l'utilité du joueur i avec s'_i soit strictement plus grande que celle avec s_i. Donc :*
$s_i \in 2^{\pi_i}$ *est* faiblement dominée *si* $\exists s'_i \in 2^{\pi_i}$ *telle que*

$$\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s'_i, s_{-i})$$

et que

$$\exists s'_{-i} \in 2^{\pi_{-i}} \text{ telle que } u_i(s_i, s'_{-i}) < u_i(s'_i, s'_{-i})$$

Reprenons donc l'exemple 6 et voyons l'intérêt de la méthode d'élimination des stratégies dominées :

Exemple 6 — suite *Si l'on étudie les stratégies dominées, on trouve :*
– *Pour le joueur* 1*, la stratégie* a *domine faiblement la stratégie* $\overline{a}$*.*
– *Pour le joueur* 2*, la stratégie* $\overline{b}$ *domine faiblement la stratégie* b*.*

Eliminons les stratégies dominées. On obtient une seule stratégie résultat, la stratégie $S_2 = a\overline{b}$ *qui permet aux deux joueurs de gagner.*
Un résultat bien connu de la théorie des jeux nous dit qu'une stratégie strictement dominée ne peut jamais être présente dans un équilibre de Nash, tandis qu'une stratégie faiblement dominée peut apparaitre dans un équilibre de Nash (voir par exemple [OR94, HK02]).
La propriété suivante est également issue de la théorie classique des jeux.

Propriété 3 *L'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final. L'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées peut affecter le résultat final.*

Le premier point de cette propriété, sur la dominance stricte, est évidemment applicable dans le cas simple des jeux booléens [HK02].
On aurait pu croire que l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées dans le cas simple des jeux booléens n'affecte pas le résultat final, mais il n'en n'est rien. Nous en donnons ici un contre-exemple.

Exemple 7 *Soit* $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ *un jeu booléen avec*
– $V = \{a, b\}$, $A = \{1, 2\}$, $C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$,
– $\varphi_1 = a \wedge b$ *et*
– $\varphi_2 = a \wedge \neg b$
On peut à présent construire la forme normale de G :

1 \ 2	$\overline{b}$	b
$\overline{a}$	*(0, 0)*	*(0, 0)*
a	*(0, 1)*	*(1, 0)*

Etudions les stratégies dominées de ce jeu :
– *Pour le joueur* 1*, la stratégie* a *domine faiblement la stratégie* $\overline{a}$*.*
– *Pour le joueur* 2*, la stratégie* $\overline{b}$ *domine faiblement la stratégie* b*.*
Eliminons dans un premier temps la stratégie dominée du joueur 1*. On élimine donc* $\overline{a}$*. Après cette élimination, la stratégie* $\overline{b}$ *du joueur* 2 *domine faiblement la stratégie* b*. On obtient donc une seule stratégie résultat :* $a\overline{b}$*.*
Eliminons à présent la stratégie dominée du joueur 2 *en premier. On élimine donc la stratégie* b*. Après cette élimination, le joueur* 1 *n'a plus de stratégie dominée. On obtient donc deux stratégies résultat :* ab *et* $a\overline{b}$*.*
On voit ici que nous n'avons pas obtenu le même résultat suivant l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées.

Reprenons l'exemple 5 page 15 pour calculer l'élimination des stratégies dominées après avoir calculé les équilibres de Nash.

Exemple 5 – suite *Etudions les stratégies dominées de ce jeu :*

– *Pour le joueur* 1*, la stratégie* $\overline{a}$ *domine faiblement la stratégie a. Eliminons cette stratégie.*
– *Une fois cette stratégie éliminée, la stratégie c du joueur* 3 *domine faiblement sa stratégie* $\overline{c}$*. On élimine donc cette dernière.*
– *Enfin, pour le joueur* 2*, la stratégie* $\overline{b}$ *domine faiblement la stratégie b. On élimine également cette stratégie.*

On obtient ainsi un seul profil de stratégies résultat, $S_7 = \overline{a}\overline{b}c$ *qui permet aux joueurs* 1 *et* 2 *de gagner.*

Nous avons vu que l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées a un impact sur le résultat. On est donc en droit de se demander si on aurait pu trouver un autre résultat en éliminant les stratégies des joueurs dans un ordre différent.
Ici, c'est le seul ordre d'élimination possible. En effet, le joueur 1 *est le seul joueur qui a une stratégie dominante avant élimination d'autres stratégies. Et, une fois la stratégie dominée du joueur* 1 *éliminée, le joueur* 3 *est également le seul à avoir une stratégie dominante.*

Une seconde propriété se dégage immédiatement :

Propriété 4 *Dans un jeu booléen, si la stratégie* s_i *du joueur i domine strictement une autre stratégie* s'_i*, alors* s_i *est une stratégie gagnante pour ce joueur.*

Preuve : s_i domine strictement s'_i. Donc,

$$\begin{array}{cl} & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \Leftrightarrow & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) = 1 \text{ et } u_i(s'_i, s_{-i}) = 0 \\ \Rightarrow & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i, s_{-i}) \models \varphi_i \\ \Rightarrow & s_i \text{ est une stratégie gagnante pour le joueur } i. \end{array}$$

■

L'utilisation de la notion de projection nous permet ici aussi de donner une caractérisation logique des stratégies strictement dominées.

Propriété 5 *Soit G un jeu booléen. La stratégie* s_i *du joueur i* domine strictement *la stratégie* s'_i *si et seulement si :*

$$s_i \models (\forall -i : \varphi_i) \text{ et } s'_i \models (\forall -i : \neg\varphi_i)$$

Preuve : Supposons que la stratégie s_i du joueur i domine strictement s'_i.

$$\begin{array}{cl} & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \\ \Leftrightarrow & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) = 1 \text{ et } u_i(s'_i, s_{-i}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i, s_{-i}) \models \varphi_i \text{ et } (s'_i, s_{-i}) \models \neg\varphi_i \\ \Leftrightarrow & s_i \models (\forall -i : \varphi_i) \text{ et } s'_i \models (\forall -i : \neg\varphi_i) \end{array}$$

■

Etudions cette caractérisation sur un exemple.

Exemple 8 *Soit* $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ *un jeu booléen. On donne*

– $V = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$,
– $\varphi_1 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b)$, *et*
– $\varphi_2 = (a \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c)$

On peut à présent construire la forme normale de G :

2 / 1	$\overline{c}$	c
$\overline{a}\overline{b}$	*(0, 1)*	*(1, 0)*
$a\overline{b}$	*(0, 1)*	*(0, 1)*
$\overline{a}b$	*(0, 0)*	*(0, 0)*
ab	*(1, 0)*	*(1, 1)*

Etudions les stratégies dominées du joueur 1 *en utilisant les caractérisations de la propriété 5. Pour cela, commençons par calculer les formules qui nous seront utiles.*
- $\varphi_1 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b)$
- $\neg\varphi_1 = (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
- $\forall - 1 : \varphi_1 = a \wedge b = \varphi_1'$
- $\forall - 1 : \neg\varphi_1 = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = \varphi_1''$

Nous devons ensuite étudier chaque stratégie du joueur 1 *pour voir si elle permet d'inférer* φ_1' *ou* φ_1''*.*
- $s_{1_1} = \overline{a}\overline{b}$, $s_{1_1} \not\models \varphi_1'$ *et* $s_{1_1} \not\models \varphi_1''$
- $s_{1_2} = a\overline{b}$, $s_{1_2} \not\models \varphi_1'$ *et* $s_{1_2} \models \varphi_1''$
- $s_{1_3} = \overline{a}b$, $s_{1_3} \not\models \varphi_1'$ *et* $s_{1_3} \models \varphi_1''$
- $s_{1_4} = ab$, $s_{1_4} \models \varphi_1'$ *et* $s_{1_4} \not\models \varphi_1''$

On peut à présent calculer les stratégies strictement dominées de 1*.*
s_{1_4} *domine strictement* s_{1_2} *et* s_{1_3}*. En effet, on a bien :*
- *pour* s_{1_2} *:* $s_{1_4} \models \varphi_1'$ *et* $s_{1_2} \models \varphi_1''$
- *pour* s_{1_3} *:* $s_{1_4} \models \varphi_1'$ *et* $s_{1_3} \models \varphi_1''$

Essayons à présent de caractériser les stratégies faiblement dominées. Cette fois ce n'est pas la notion de projection qui est utilisée mais celle d'interprétation partielle.

Propriété 6 *Soit G un jeu booléen. La stratégie* s_i *du joueur* i domine faiblement *la stratégie* s_i' *si et seulement si :*

$$(\varphi_i)_{s_i'} \models (\varphi_i)_{s_i} \text{ et } (\varphi_i)_{s_i} \not\models (\varphi_i)_{s_i'}$$

Preuve : La stratégie s_i du joueur i domine faiblement s_i' si et seulement si :

$$\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad (4.6)$$

$$\text{et} \quad \exists s{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad (4.7)$$

L'équation 4.6 nous permet d'obtenir les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 4.6 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (u_i(s_i, s_{-i}) = 1 \text{ ou } u_i(s_i', s_{-i}) = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i, s_{-i}) \models \varphi_i \text{ ou } (s_i', s_{-i}) \models \neg\varphi_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall s{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, \text{ si } (s_i', s_{-i}) \models \varphi_i \text{ alors } (s_i, s_{-i}) \models \varphi_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall s{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, \text{ si } s_{-i} \models (\varphi_i)_{s_i'} \text{ alors } s_{-i} \models (\varphi_i)_{s_i} \\ &\Leftrightarrow \quad (\varphi_i)_{s_i'} \models (\varphi_i)_{s_i} \end{aligned}$$

Ensuite, il est possible de remarquer que l'on a : (4.7) $\Leftrightarrow \neg$(4.6) si l'on intervertit s_i et s_i'. Donc :

$$4.7 \Leftrightarrow (\varphi_i)_{s_i} \not\models (\varphi_i)_{s_i'}$$

■

4.3 Cas particulier : Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Dans cette section, on montre que les jeux booléens étudiés dans [HvdHMW01, Har04a], et qui nous ont inspirés au départ, sont un cas particulier des jeux booléens à n joueurs présentés dans la section 4.1 page 11. Les définitions sont les mêmes, mis à part la notion de coalition qui n'a aucun sens ici.

Certains paramètres sont simplifiés. En effet, comme chaque variable de décision de V ne peut être contrôlée que par un seul des deux joueurs, on a $\pi_2 = V \setminus \pi_1$. D'autre part, on a $\varphi_2 \equiv \neg\varphi_1$ et $C = \varnothing$.
Etudions à présent un exemple simple.

Exemple 9 *Soit* $V = \{a,b,c,d\}$, $A = \{1,2\}$, $C = \varnothing$, $\pi_1 = \{a,c\}$ *et* $\varphi_1 = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge d)$.
Le jeu booléen $G = (A,V,C,\pi_1,\varphi_1)$ *est totalement défini.*
En effet, on sait que $\pi_2 = V \setminus \pi_1$, *et que*

$$\varphi_2 = \neg\varphi_1 = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d)$$

On peut à présent construire la forme normale de G[4] *:*

1 \ 2	$\overline{b}\overline{d}$	$b\overline{d}$	$\overline{b}d$	bd
$\overline{a}\overline{c}$	*0*	*0*	*0*	*1*
$a\overline{c}$	*1*	*0*	*1*	*1*
$\overline{a}c$	*0*	*0*	*0*	*1*
ac	*1*	*0*	*1*	*1*

On constate ici que le joueur 2, *qui contrôle les variables b et d a une stratégie gagnante. En effet, s'il choisit de mettre b à vrai et d à faux, il est sûr de gagner quels que soient les choix de* 1.
La propriété 1 page 14 nous permet de vérifier ce résultat. En effet, le but de 2 *:*

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d)\\ &= (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg d) \vee (b \wedge \neg d)\end{aligned}$$

contient un impliquant premier $(b \wedge \neg d)$ *qui est composé uniquement de variables contrôlées par* 2.
Par contre, le but du joueur 1, $\varphi_1 = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge d)$, *ne contient aucun impliquant premier composé uniquement des variables a et c.* 1 *n'a donc pas de stratégie gagnante.*

La propriété suivante donne une caractérisation simple des équilibres de Nash en stratégies pures dans les jeux booléens à deux joueurs et à somme nulle qui est obtenue par une simple transposition de résultats issus de la théorie des jeux à somme nulle.

Propriété 7 *Si G est un jeu booléen à deux joueurs et à somme nulle,* $S = (s_1, s_2)$ *est un équilibre de Nash en stratégies pures si et seulement si* s_1 *est une stratégie gagnante pour le joueur* 1 *ou* s_2 *est une stratégie gagnante pour le joueur* 2.

Preuve :

1. Soit $S = (s_1, s_2)$ un équilibre de Nash en stratégies pures.
   - Supposons que l'on a $u_1(S) = 1$. Le jeu étant à somme nulle, on a $u_2(S) = 0$. Comme S est un équilibre de Nash, $\forall s'_2, u_2(S) \geq u_2(s_1, s'_2)$ ce qui entraîne $\forall s'_2, u_2(s_1, s'_2) = 0$. Donc, $\forall s'_2, (s_1, s'_2) \models \neg\varphi_2$, ce qui implique que $\forall s'_2, (s_1, s'_2) \models \varphi_1$. s_1 est donc une stratégie gagnante pour le joueur 1.
   - On a $u_1(S) = 0$ et $u_2(S) = 1$. En faisant le même raisonnement que précédemment, on montre que s_2 est donc une stratégie gagnante pour le joueur 2.

[4] 1 signifie que 1 gagne et 2 perd et vice-versa pour 0

2. Supposons que s_1 est une stratégie gagnante pour le joueur 1. On a donc $\forall s_2, u_1(s_1,s_2) = 1$ et $\forall s_2, u_2(s_1,s_2) = 0$. Posons $S = (s_1,s_2)$. On a bien $\forall s'_1, u_1(S) \geq u_1(s'_1,s_2)$ et $\forall s'_2, u_2(S) \geq u_2(s_1,s'_2)$. S est donc bien un équilibre de Nash.
   On raisonne de la même façon si l'on suppose que s_2 est une stratégie gagnante pour le joueur 2.

■

Par conséquent, dans un jeu booléen à deux joueurs et à somme nulle, il existe un équilibre de Nash en stratégies pures si et seulement si l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

4.4 Complexité algorithmique

La propriété 7 page précédente permet de déterminer facilement la complexité algorithmique du problème d'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures. On rappelle que $\Sigma_2^p = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ est la classe des langages reconnaissables en temps polynomial par une machine de Turing non-déterministe munie d'oracles NP (voir [Pap94]). Les résultats de complexité suivants ont été trouvés avec l'aide de Bruno Zanuttini, et ont fait l'objet d'une publication [BLSLZ06].

Propriété 8 *Le problème de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans un jeu booléen à deux joueurs et à somme nulle est Σ_2^p-complet.*

Preuve : L'appartenance à Σ_2^p est immédiate. La difficulté est obtenue par la réduction du problème consistant à décider la validité de $2,\exists$-QBF. Etant donné une formule $Q = \exists A, \forall B \Phi$, où A et B sont des ensembles disjoints de variables et Φ est une formule propositionnelle de $L_{A\cup B}$, on définit le jeu booléen à 2 joueurs et à somme nulle suivant : $\varphi_1 = \Phi \vee (x \leftrightarrow y)$, où x,y sont des nouvelles variables (i.e., $x,y \notin A \cup B$), $\varphi_2 = \neg\varphi_1$, $\pi_1 = A \cup \{x\}$ et $\pi_2 = B \cup \{y\}$. Ce jeu peut être évidemment construit en temps polynomial étant donné Q. D'après la propriété 7 page précédente, ce jeu a un équilibre de Nash si et seulement si un des joueurs 1 ou 2 a une stratégie gagnante.
Supposons que Q est valide. Soit $M_A \in 2^A$ un modèle de Q. Alors, (M_A, x) et $(M_A, \overline{x})$ sont des stratégies gagnantes pour 1.
Supposons maintenant que Q n'est pas valide ; alors quel que soit $M_A \in 2^A$ que 1 choisit de jouer, 2 peut jouer $M_B \in 2^B$ tel que $(M_A, M_B) \not\models \Phi$. De plus, si 1 joue x (resp. $\overline{x}$), alors 2 peut jouer $\overline{y}$ (resp. y), avec dans les deux cas la victoire de 2. D'autre part, 2 n'a pas non plus de stratégie gagnante puisque 1 peut toujours rendre $x \leftrightarrow y$ vrai, et donc gagner.
Il existe donc une stratégie gagnante pour 1 (ou 2, au choix) si et seulement si Q est valide.

■

On en tire le corollaire suivant, concernant cette fois les jeux booléens à n joueurs.

Corollaire 2 *Le problème de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans un jeu booléen à n joueurs est Σ_2^p-complet.*

Ce résultat est à rapprocher de la complexité de la contrôlabilité – également un problème Σ_2^p-complet [LM98]. Or, le problème de l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu à plusieurs joueurs et à somme non nulle étant bien plus général que la contrôlabilité, le fait qu'il ne soit pas situé plus haut dans la hiérarchie des classes de complexité est plutôt une bonne nouvelle.
On peut expliquer intuitivement le fait que le problème de l'existence d'un équilibre de Nash soit au second niveau de la hiérarchie polynomiale par le fait que la résolution de ce problème comporte deux sources indépendantes de complexité NP-difficiles : la recherche du "bon" profil de stratégies, et la vérification qu'il constitue un équilibre de Nash en stratégies pures. Par comparaison, l'existence d'un profil de stratégies dont l'utilité cumulée est supérieure à une borne donnée est seulement un problème NP-complet.

De la propriété 8, nous tirons aussi ce second corollaire :

Corollaire 3 *Le problème de l'existence d'une coalition efficace dans un jeu booléen à n joueurs est Σ_2^p-complet.*

Preuve : L'appartenance à Σ_2^p est immédiate ; la difficulté est obtenue, dès que $n = 2$, par la réduction polynomiale suivante de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans un jeu booléen à deux joueurs et à somme nulle. Soit G un tel jeu, où φ_1 est le but du joueur 1. Comme $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1 \equiv \bot$, $\{1,2\}$ ne peut pas être une coalition efficace, les seules coalitions efficaces possibles sont donc $\{1\}$ et $\{2\}$.

■

Nous allons à présent essayer de simplifier le problème en étudiant les restrictions syntaxiques sur les formules représentant les buts des joueurs. Nous nous interessons particulièrement aux formules en DNF. Rappelons que toute formule booléenne peut être mise en DNF, et que c'est donc une restriction syntaxique et non sémantique.

Tant que l'on considère des jeux à 2 joueurs et à somme nulle, et sachant que décider la validité de $\exists A, \forall B, \Phi$, une formule $\texttt{QBF}_{2,\exists}$, est Σ_2^P-complet même si Φ est en DNF, la propriété 8 page précédente reste correcte même si le but du joueur 1 est en DNF (le but du joueur 2 étant implicite).
Pourtant, lorsque nous représentons explicitement les buts de chaque joueur en DNF, la complexité du problème descend en NP, comme le montre la propriété suivante :

Propriété 9 *Soit G un jeu booléen. Si $\forall i \in A$, φ_i est en DNF, alors le problème de l'existence d'un équilibre de Nash en stratégie pure est NP-complet.*
Ce résultat de complexité reste valable dans le cas de jeux à 2 joueurs, chacun ne contrôlant qu'une seule variable.

Preuve :
Si φ_i est en DNF, alors $\exists i : \varphi_i$ peut être calculé en temps linéaire [LLM03, Propositions 17–18].
Alors, si chaque φ_i est en DNF, la formule $\psi \equiv \bigwedge_i(\varphi_i \vee (\neg\exists i : \varphi_i))$ peut être calculée en temps linéaire.
Comme la propriété 2 page 16 permet de trouver un profil de stratégies S et de vérifier que $S \models \psi$, le problème est en NP.

La difficulté est obtenue par la réduction du complément du problème consistant à décider si une DNF $\Phi = \bigvee_{i=1}^k T_i$ est une tautologie, qui est un problème *coNP*-complet bien connu. Soit X l'ensemble des variables de Φ et soit $x, y \notin X$. On définit un jeu G à deux joueurs par :
- $\varphi_1 = \bigvee_{i=1}^k (T_i \wedge x \wedge \neg y) \vee (T_i \wedge \neg x \wedge y)$,
- $\varphi_2 = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$,
- $\pi_1 = \{y\}$,
- $\pi_2 = X \cup \{x\}$.

G peut être construit en temps linéaire et φ_1, φ_2 sont en DNF.

On a $\varphi_1 \equiv \Phi \wedge (x \neq y)$ et $\varphi_2 \equiv (x = y)$. Grâce à la propriété 2 page 16 et à son corollaire 1 page 16, nous savons que G a un équilibre de Nash si et seulement si $((\Phi \wedge (x \neq y)) \vee \neg\Phi) \wedge (x = y)$ est satisfiable.
En effet, comme y n'apparaît pas dans Φ, nous avons

$$\neg\exists y : (\Phi \wedge x \neq y) \equiv \neg(\Phi \wedge \exists y : x \neq y) \equiv \neg(\Phi \wedge \top) \equiv \neg\Phi$$

et nous avons aussi

$$\neg\exists X \cup \{x\} : (x = y) \equiv \bot$$

Comme $\Phi \wedge (x \neq y) \wedge (x = y)$ n'est pas satisfiable, le jeu G a un équilibre de Nash si et seulement si $\neg\Phi \wedge (x = y)$ est satisfiable, c'est à dire si et seulement si $\neg\Phi$ est satisfiable, étant donné que x et y n'apparaissent pas dans Φ.
Donc, G a un équilibre de Nash si et seulement si Φ n'est pas une tautologie.

■

Lorsqu'on considère uniquement des jeux à deux joueurs, la complexité de ce problème peut descendre à P pour quelques classes non triviales de formules : si les buts des joueurs sont représentés par des formules en DNF renommables en Horn, affines, 2CNF ou CNF monotones.

On ne développe pas ces démonstrations ici, car la résolution de la projection en est le résultat principal, et que les détails sont en grande partie les mêmes que dans [Zan03, Section 6].

Propriété 10 *Décider si une stratégie s_i' donnée est faiblement dominée est Σ_2^p-complet. La difficulté reste valable même si φ_i est restreint aux DNF.*

Preuve : L'appartenance à Σ_2^p est immédiate. La difficulté est obtenue cette fois encore par la réduction du problème consistant à décider la validité de $\mathtt{QBF}_{2,\exists}$.
Soit $Q = \exists A, \forall B, \Phi$, et a, b deux nouvelles variables. On définit :
- $\varphi_1 = (a \wedge \Phi) \vee (\neg a \wedge b)$, $\pi_1 = A \cup \{a\}$,
- $\pi_2 = B \cup \{b\}$ (φ_2 est quelconque et n'est pas définie ici car sa valeur n'intervient pas dans la démonstration).

Soit M_A' une A-interprétation, et soit $s_1' = (M_A', \overline{a})$. On a $(\varphi_1)_{s_1'} \equiv (b)$.

Supposons que Q est valide, avec $M_A \in 2^A$ un modèle de A, et $s_1 = (M_A, a)$. s_1 est alors une stratégie gagnante pour 1, contrairement à s_1'. Donc s_1 domine faiblement s_1'.

Supposons à présent que Q n'est pas valide. Soit $M_A \in 2^A$, et $s_1 = (M_A, \overline{a})$. Alors, $(\varphi_1)_{s_1} \equiv (b) \equiv (\varphi_1)_{s_1'}$, donc, d'après la propriété 6 page 20, s_1 ne domine pas faiblement s_1'.
A présent, soit $s_1 = (M_A, a)$. Comme Q n'est pas valide, il existe $M_B \in 2^B$ tel que $(M_A, M_B) \not\models \Phi$. Donc $(M_B, b) \models (\varphi_1)_{s_1'}$ mais $(M_B, b) \not\models (\varphi_1)_{s_1}$, et d'après la propriété 6 page 20, s_1 ne domine pas faiblement s_1'.

Donc, s_1' est faiblement dominée si et seulement si Q est valide.
On peut remarquer que si Φ est en DNF, alors $\exists A, \forall B, \Phi$ est toujours Σ_2^p-complet et que φ_1 peut être transformée en DNF efficacement. ■

Chapitre 5

Complexification des préférences des joueurs

La notion de jeu booléen introduite par [HvdHMW01, Har04a] permet de modéliser de manière compacte les préférences des joueurs dans le cadre de jeux statiques. Toutefois, ces jeux booléens correspondent à une spécification très particulière (2 joueurs, jeux à somme nulle, utilités binaires) et nous avons dans un premier temps étendu cette notion en introduisant un nombre quelconque de joueurs et des jeux à somme non nulle, mais en gardant la notion d'utilités binaires (cf. [BLSL05]).

La généralisation à des utilités non binaires peut être faite sans grande difficulté, et, qui plus est, sans saut de complexité. Pour cela, on utilise des *formules pondérées*, où les préférences d'un agent sont décrites par un ensemble de buts, chaque but ayant un poids propre. La définition des jeux booléens à utilités non binaires est la même que celle de la définition 3 page 11, à une différence près : le but φ_i de chaque joueur i, qui était une formule propositionnelle, devient maintenant un *ensemble* de formules propositionnelles, chaque formule étant associée à un poids numérique : $\varphi_i = \{(\varphi_{i,1}, w_{i,1}), \ldots, (\varphi_{i,p_i}, w_{i,p_i})\}$ où $\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,p_i} \in L_V$ et $w_{i,1}, \ldots, w_{i,p_i} \in \mathbb{R}$.

Chacune des formules $\varphi_{i,j}$ est un "but élémentaire" et $w_{i,j}$ est sa contribution à l'utilité du joueur i. Cette fonction d'utilité étant définie comme la somme des valeurs numériques des buts élémentaires satisfaits : pour tout profil de stratégies S, et tout joueur i, $u_i(S) = \sum\{w_{i,k} \mid S \models \varphi_{i,k}\}$ (avec la convention $\sum\varnothing = 0$).

La généralisation à des utilités non binaires, *avec le choix de ce langage de représentation*, ne s'accompagne pas d'un saut de complexité.

Il est cependant extrêmement difficile de réussir à pondérer des formules selon ses préférences. Si l'on préfère le thé au café par exemple, comment dire "de combien" on préfère le premier au second ? La quantification de ces préférences est quelque chose de très délicat à obtenir.

Nous aimerions donc que chaque joueur puisse représenter ses préférences de manière plus souple. En effet, n'avoir qu'un seul but (utilités binaires), ou devoir associer un poids numérique à chacun de ses buts quand on en a plusieurs (utilités non binaires avec formules pondérées), est extrêmement restrictif.

Nous allons alors étudier d'autres langages de représentation des préférences et essayer de les adapter à notre modèle. Nous étudierons d'abord des buts à priorité, fondés sur la représentation de préférences en logique propositionnelle, puis un langage de représentation dit "graphique", les CP-nets (cf. [BLSL06]).

Dans un premier temps, nous devons adapter nos "outils" (calcul des équilibres de Nash, élimination des stratégies dominées) à cette nouvelle configuration de jeu.

5.1 Equilibre de Nash et stratégies dominées

Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec $A = \{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des joueurs, et $\Phi = \langle\phi_1,\ldots,\phi_n\rangle$[1] l'ensemble des buts des joueurs. Soit Ω l'ensemble des profils de stratégies pour G.
On aimerait associer à chaque joueur une relation de préférence partielle[2] sur Ω. Nous avons pour cela plusieurs raisons.
Tout d'abord, les préférences des agents gagnent parfois à être partielles, notamment pour les économistes. D'autre part, les langages de représentation des préférences de la littérature ne nous permettent pas en général d'induire des préférences totales.

Si on se situe dans ce cadre, il faut redéfinir les équilibres de Nash en utilisant ces préférences. En effet, les équilibres de Nash sont classiquement définis pour des jeux avec des préférences totales, ce qui n'est plus nécessairement le cas ici. Nous allons donc définir deux notions d'équilibre de Nash, une forte et une faible (elles sont équivalentes aux notions d'équilibre maximal et maximum dans [Har04a]).
On rappelle qu'un équilibre de Nash est un profil de stratégies tel que la stratégie de chaque joueur est une réponse optimale aux stratégies des autres joueurs.

Définition 13 (Equilibres de Nash faibles et forts)
Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec $A = \{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des joueurs, $\Phi = \langle\phi_1,\ldots,\phi_n\rangle$ l'ensemble des buts des joueurs, et $Pref_G = \langle\succeq_1,\ldots,\succeq_n\rangle$ l'ensemble des préférences de chaque joueur[3].
Deux définitions, une faible et une forte, peuvent ici caractériser les équilibres de Nash.
$S = (s_1,\ldots,s_n)$ *est un* équilibre de Nash faible en stratégies pures *si et seulement si :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i',s_{-i}) \not\succ_i (s_i,s_{-i}) \tag{5.1}$$

$S = (s_1,\ldots,s_n)$ *est un* équilibre de Nash fort en stratégies pures *si et seulement si :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i',s_{-i}) \preceq_i (s_i,s_{-i}) \tag{5.2}$$

L'ensemble des équilibres de Nash forts (resp. faibles) en stratégie pure sera noté par NE_{fort} (resp. NE_{faible}).

Il est clair que tout équilibre de Nash fort est un équilibre de Nash faible. On a donc $NE_{fort}(G) \subseteq NE_{faible}(G)$.
Nous devons également raffiner la notion de stratégies dominées, définies initialement à partir des utilités binaires (définitions 11 page 17 et 12 page 17), et que l'on redéfinit ici à partir des relations de préférence partielles.

Définition 14 (Stratégie strictement dominée)
Soit i un joueur et $\succeq_i$ sa relation de préférence sur l'ensemble Ω. La stratégie s_i du joueur i est dite strictement dominée *s'il existe une autre stratégie s_i' telle que, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s_i' est strictement préférée à s_i pour $\succeq_i$. Donc, $s_i \in 2^{\pi_i}$ est* strictement dominée *si et seulement si :*

$$\exists s_i' \in 2^{\pi_i} \; telle\ que \; \forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i,s_{-i}) \prec_i (s_i',s_{-i})$$

Définition 15 (Stratégie faiblement dominée)
Soit i un joueur et $\succeq_i$ sa relation de préférence sur l'ensemble Ω. La stratégie s_i du joueur i est dite faiblement dominée *s'il existe une autre stratégie s_i' telle que, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s_i' est préférée à s_i pour $\succeq_i$, et qu'il existe au moins une combinaison des stratégies des autres*

[1] Nous utilisons ici le symbole ϕ pour désigner les buts de chaque joueur, car ce ne sont plus de simples formules propositionnelles comme dans les chapitres précédents.

[2] Une relation de préférence partielle est une relation transitive et reflexive.
Une relation de préférence totale est une relation transitive, reflexive et qui vérifie : $\forall x,y : x \succeq y$ ou $y \succeq x$

[3] On utilisera les notations usuelles : soit $\succeq_i$ une relation de préférence partielle sur Ω, $S_1 \succ_i S_2$ sera définie par $S_1 \succeq_i S_2$ et non $S_2 \succeq_i S_1$.

joueurs telle que s'_i soit strictement préférée à s_i pour $\succeq_i$. Donc, $s_i \in 2^{\pi_i}$ est faiblement dominée *si $\exists s'_i \in 2^{\pi_i}$ telle que :*

$$\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i, s_{-i}) \preceq_i (s'_i, s_{-i})$$

et que

$$\exists s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}} \text{ telle que } (s_i, s_{-i}) \prec_i (s'_i, s_{-i})$$

L'introduction de préférences partielles, et donc de la notion d'incomparabilité, nous permet d'introduire un nouveau cas de stratégie dominée. Cette nouvelle notion est très faible, il est en effet possible que toutes les stratégies d'un joueur soient partiellement dominées.

Définition 16 (Stratégie partiellement dominée)
Soit i un joueur et $\succeq_i$ sa relation de préférence sur l'ensemble Ω. La stratégie s_i du joueur i est dite partiellement dominée *s'il existe une autre stratégie s'_i telle que, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s_i n'est pas strictement préférée à s'_i pour $\succeq_i$, et qu'il existe au moins une combinaison des stratégies des autres joueurs telle que s'_i soit strictement préférée à s_i pour $\succeq_i$. Donc, $s_i \in 2^{\pi_i}$ est* partiellement dominée *si $\exists s'_i \in 2^{\pi_i}$ telle que :*

$$\forall s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}}, (s_i, s_{-i}) \not\succ_i (s'_i, s_{-i})$$

et que

$$\exists s_{-i} \in 2^{\pi_{-i}} \text{ telle que } (s_i, s_{-i}) \prec_i (s'_i, s_{-i})$$

Lorsque la relation $\succeq_i$ est un pré-ordre total, il y a équivalence entre stratégies faiblement et partiellement dominées.

La propriété 3 page 18, issue de la théorie des jeux, reste valable ici. Donc :
- l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées *n'affecte pas* le résultat final.
- Par contre, l'ordre d'élimination des stratégies partiellement et faiblement dominées *affecte* le résultat final.

Le premier point de cette propriété, sur la dominance stricte, est applicable dans le cas toujours simple où l'on complexifie les préférences des joueurs dans les jeux booléens [HK02]. Et il est facile de trouver des exemples montrant que l'ordre d'élimination des stratégies faiblement et partiellement dominées affecte le résultat final.

5.2 Buts à priorité

5.2.1 Adaptation des définitions au contexte des jeux booléens

Il existe différents critères permettant de représenter les préférences issues des bases de connaissances stratifiées et ainsi de sélectionner des sous-bases préférées de ces bases stratifiées. Ces critères s'appliquent sans difficulté aux jeux booléens bien que nous ne soyons pas dans un contexte où nous manipulons des bases stratifiées : nous avons plusieurs joueurs, un ensemble de contraintes à gérer, un ensemble stratifié de buts par joueur, et des profils de stratégies. Dans ce contexte, il va donc falloir comparer des profils de stratégies et non plus des sous-bases consistantes, chaque joueur devant pouvoir choisir la stratégie, et donc les profils de stratégies, lui permettant d'obtenir le "meilleur résultat possible".

Dans ce contexte, les préférences d'un joueur sont exprimées par un ensemble de buts ordonnés selon une relation de priorité :

Définition 17 (Base de buts à priorité)
Une base de buts à priorité Σ *est une collection $\langle \Sigma^1 ; \ldots ; \Sigma^p \rangle$ d'ensemble de formules propositionnelles. Σ^j représente l'ensemble des buts de priorité j, avec la convention suivante : plus j est petit, plus les formules dans Σ^j sont prioritaires.*

Dans ce contexte, plusieurs critères peuvent être utilisés pour générer une relation de préférence $\succeq$ à partir de Σ. Si S est une interprétation de 2^V, alors on pose $Sat(S,\Sigma^j) = \{\varphi \in \Sigma^j \mid S \models \varphi\}$.

Le premier de ces critères consiste à maximiser l'inclusion tout en respectant la strafication ([Bre89, Gef92, BCD+93]).

Définition 18 (Critère "discrimin")
$S \succ^{disc} S'$ si et seulement si $\exists k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que :

1. *$Sat(S,\Sigma^k) \supset Sat(S',\Sigma^k)$, et*
2. *$\forall j < k$, $Sat(S,\Sigma^j) = Sat(S',\Sigma^j)$*

Le second consiste à maximiser la cardinalité tout en respectant la strafication ([DLP92, BCD+93, Leh95]).

Définition 19 (Critère "leximin")
$S \succ^{lex} S'$ si et seulement si $\exists k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que :

1. *$|Sat(S,\Sigma^k)| > |Sat(S',\Sigma^k)|$, et*
2. *$\forall j < k$, $|Sat(S,\Sigma^j)| = |Sat(S',\Sigma^j)|$.*

Enfin, l'idée du troisième critère est de repérer la strate la plus prioritaire amenant une inconsistance, et de considérer alors que les seules formules intéressantes à prendre en compte sont celles de priorité supérieure à cette strate fatidique ([DLP92, BCD+93]).

Définition 20 (Ordre "Best Out")
Soit $a(s) = \min\{j$ tel que $\exists\varphi \in \Sigma^j, S \not\models \varphi\}$, avec la convention $\min(\varnothing) = +\infty$.
Alors, $S \succeq^{bo} S'$ si et seulement si $a(S) \geq a(S')$.

On note que $\succeq^{bo}$ et $\succeq^{lex}$ sont des relations de préférence totales, tandis que $\succeq^{disc}$ est en général une relation de préférence partielle.

Définition 21 (BP-jeux booléens)
Un BP-jeu booléen *est un 5-uple $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$, où $\Phi = (\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n)$ est une collection de bases de buts à priorité. On note $\Sigma_i = \langle\Sigma_i^1,\ldots,\Sigma_i^p\rangle$, Σ_i^j représentant la strate j de Σ_i ((multi)ensemble de buts de priorité j pour le joueur i).*

On suppose ici qu'un joueur ne peut avoir de buts incohérents. On pose donc :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \Sigma_i^1 \wedge \ldots \wedge \Sigma_i^p \not\models \bot$$

Rappelons que l'ensemble C des contraintes doit toujours être consistant, et que l'on a aussi consistance avec l'ensemble de buts de chaque joueur.

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \Sigma_i^1 \wedge \ldots \wedge \Sigma_i^p \wedge C \not\models \bot$$

L'hypothèse que le nombre de niveaux de priorité est le même (p) pour chaque joueur n'entraîne pas de perte de généralité. En effet, ajouter des strates vides à une base de buts à priorité ne modifie pas la relation de préférence induite.
Nous utiliserons les notations suivantes :

- Si G est un BP-jeu booléen et que $c \in \{disc, lex, bo\}$, alors $Pref_G^c = \langle\succeq_1^c,\ldots,\succeq_n^c\rangle$.
- $NE_{faible}^c(G)$ (resp. $NE_{fort}^c(G)$) représente l'ensemble des équilibres de Nash faibles (resp. forts) pour $Pref_G^c$.

A l'aide de ces trois relations de pré-ordre partiel ou total sur les profils de stratégies nous allons à présent étudier deux exemples. Pour ce faire, nous utiliserons les définitions de la section 5.1 page 26 pour calculer les équilibres de Nash et les stratégies dominées.

5.2.2 Exemple 1

Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, avec :
- $A = \{1, 2\}$ l'ensemble des joueurs,
- $V = \{a, b, c\}$, $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a, c\}$, $\pi_2 = \{b\}$,
- $\Sigma_1 = \langle a; (\neg b, c) \rangle$,
- $\Sigma_2 = \langle (\neg b, \neg c); \neg a \rangle$

Nous allons maintenant appliquer chacun des trois critères présentés plus haut afin d'obtenir un pré-ordre sur les profils de stratégies.

5.2.2.1 Discrimin

Pour chacun des joueurs, appliquons le critère discrimin (cf. définition 18). Par exemple, regardons ce qui se passe pour le joueur 1 :

$$a\bar{b}c \succ_1^{discr} a\bar{b}\bar{c} \succ_1^{discr} ab\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}c \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}b\bar{c}$$

$$a\bar{b}c \succ_1^{discr} abc \succ_1^{discr} ab\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}c \succ_1^{discr} \bar{a}bc \succ_1^{discr} \bar{a}b\bar{c}$$

$$a\bar{b}c \succ_1^{discr} abc \succ_1^{discr} ab\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}c \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}b\bar{c}$$

$$a\bar{b}c \succ_1^{discr} a\bar{b}\bar{c} \succ_1^{discr} ab\bar{c} \succ_1^{discr} \bar{a}\bar{b}c \succ_1^{discr} \bar{a}bc \succ_1^{discr} \bar{a}b\bar{c}$$

Puis, afin de pouvoir exploiter plus facilement ce résultat, nous le traduisons sous forme graphique. Ainsi, nous trouvons pour chacun des joueurs les relations partielles représentées figure 5.1.
Les flèches vont du profil de stratégies le plus préféré vers le profil de stratégies le moins préféré.

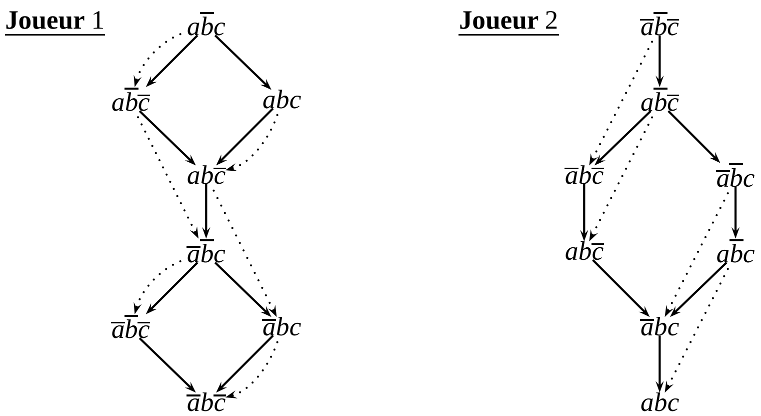


FIG. 5.1 – Relations partielles sur les profils de stratégies calculées à partir du critère Discrimin

Pour calculer facilement les équilibres de Nash de ce jeu, nous mettons en exergue les relations qui nous intéressent pour chaque joueur. Ces relations apparaissent sous la forme de flèches en pointillé sur la figure 5.1.
En effet, pour le joueur 1, qui contrôle les variables a et c, nous comparons les états abc, $ab\bar{c}$, $\bar{a}bc$ et $\bar{a}b\bar{c}$ entre eux d'une part, et les états $a\bar{b}c$, $a\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}c$ et $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ d'autre part.
De même, pour le joueur 2 qui contrôle la variable b, nous comparons $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ avec $\bar{a}b\bar{c}$, $a\bar{b}\bar{c}$ avec $ab\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}c$ avec $\bar{a}bc$ et $a\bar{b}c$ avec abc.
Cela revient à comparer pour chaque joueur uniquement les stratégies de ce dernier pour chaque combinaison de stratégies des autres joueurs.
Notons que ces flèches en pointillé représentent une relation d'ordre transitive.

Nous pouvons à présent calculer les équilibres de Nash faibles et forts à partir de la définition 13 page 26, et de ces relations partielles (figure 5.1 page précédente) :

$$NE^{disc}_{faible} = \{a\overline{b}c\}$$

$$NE^{disc}_{fort} = \{a\overline{b}c\}$$

Ici, il n'y a qu'un seul équilibre de Nash, qu'il soit faible ou fort. Ce dernier permet de satisfaire tous les buts de priorité 1 et 2 du joueur 1, mais ne permet de satisfaire qu'un seul but de priorité 1 du joueur 2. Cela s'explique par le fait que ce dernier ne contrôle pas les variables a et c qui lui permettraient de satisfaire ses 2 autres buts.
Etudions à présent les stratégies dominées de ce jeu :

– Joueur 1 : Il est possible d'éliminer itérativement 3 des 4 stratégies de ce joueur. En effet :
  – La stratégie $\overline{a}\overline{c}$ est strictement dominée par la stratégie $\overline{a}c$. On l'élimine.
  – Après cette élimination, la stratégie $\overline{a}c$ est strictement dominée par la stratégie $a\overline{c}$. On l'élimine.
  – De nouveau, après cette élimination, la stratégie $a\overline{c}$ est strictement dominée par la stratégie ac. Il ne nous reste donc plus que la stratégie ac.
– Joueur 2 : Après élimination des 3 stratégies du joueur 1, la stratégie b est strictement dominée par la stratégie $\overline{b}$. On ne conserve donc que cette dernière.

En éliminant itérativement les stratégies strictement dominées, on obtient donc un profil de stratégies résultat : $\{a\overline{b}c\}$, qui se trouve être aussi l'équilibre de Nash faible et fort.
De plus, ce sont ici des stratégies *strictement* dominées. L'ordre d'élimination de ces stratégies n'affecte donc pas le résultat.

5.2.2.2 Leximin

On applique ici de la même manière que précédemment le critère leximin (cf. définition 19) à chacun des joueurs. Nous trouvons ainsi les relations totales suivantes données en figure 5.2, et nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts en appliquant la définition 13 page 26.

$$NE^{lex}_{faible} = \{a\overline{b}c\}$$

$$NE^{lex}_{fort} = \{a\overline{b}c\}$$

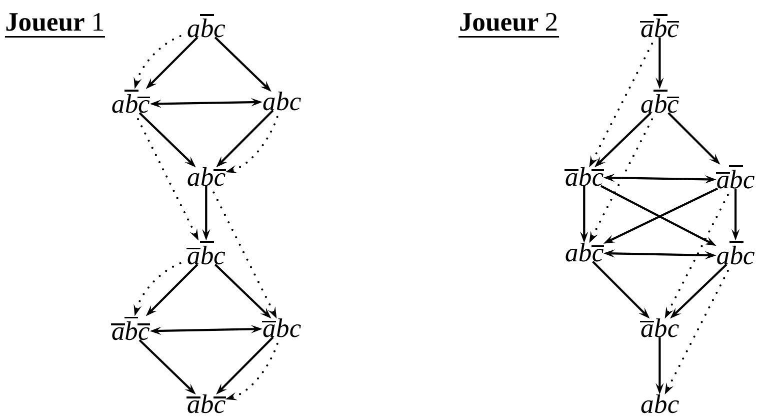


FIG. 5.2 – Relations totales sur les profils de stratégies calculées à partir du critère Leximin

Nous sommes encore dans la situation ici où il n'y a qu'un seul équilibre de Nash, qu'il soit faible ou fort, le même que précédemment.
L'élimination des stratégies dominées se déroule selon le même schéma que précédemment, et nous fournit le même unique résultat : $\{a\overline{b}c\}$

5.2.2.3 Best out

Si l'on applique l'ordre Best out (cf. définition 20) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites en figure 5.3 à partir desquelles nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts (avec la définition 13 page 26)[4] :

$$NE^{bo}_{faible} = \{abc, a\overline{b}c\}$$

$$NE^{bo}_{fort} = \{abc, a\overline{b}c\}$$

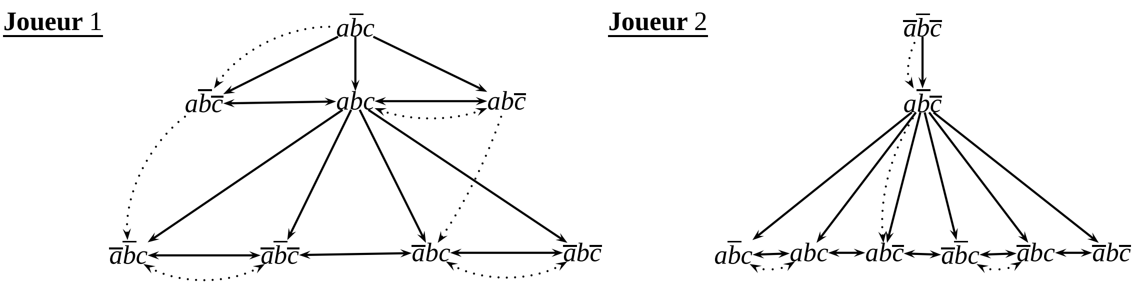


FIG. 5.3 – Relations totales sur les stratégies calculées à partir de l'ordre Best out

Cette fois, quand nous éliminons les stratégies dominées, le schéma est légèrement différent :

- Joueur 1 : Il est possible d'éliminer itérativement 3 des 4 stratégies de ce joueur. En effet :
  - La stratégie $\overline{a}\overline{c}$ est strictement dominée par la stratégie $a\overline{c}$. On l'élimine.
  - La stratégie $\overline{a}c$ est strictement dominée par la stratégie $a\overline{c}$. On l'élimine.
  - La stratégie $a\overline{c}$ est partiellement dominée par la stratégie ac, on l'élimine donc également.
- Joueur 2 : Après élimination des 3 stratégies du joueur 1, aucune des deux stratégies b ou $\overline{b}$ ne domine partiellement, faiblement ou strictement l'autre.

En éliminant itérativement les stratégies dominées, on obtient donc deux profils de stratégies résultat : $\{abc\}$ et $\{a\overline{b}c\}$. On obtient donc le même résultat qu'avec les équilibres de Nash faibles et forts.
Comme ici deux stratégies sur 3 sont strictement dominées, l'ordre d'élimination choisi n'affecte pas les résultats obtenus.

5.2.2.4 Conclusion

L'étude de ce jeu grâce à ces 3 critères nous montre que les équilibres de Nash trouvés dans cet exemple sont identiques mis à part avec l'ordre Best-out.
En effet, les critères discrimin et leximin nous permettent de trouver des équilibres de Nash faibles et forts identiques : $NE^{disc,lex}_{faible} = NE^{disc,lex}_{fort} = \{a\overline{b}c\}$. Cet équilibre permet de satisfaire tous les buts de priorité 1 et 2 du joueur 1, mais ne permet de satisfaire qu'un seul but de priorité 1 du joueur 2. Cela s'explique par le fait que le joueur 1, qui contrôle les variables a et c, préfère que ces deux variables soient instanciées à *Vrai*, tandis que le joueur 2, qui contrôle la variable b préfère qu'elle soit instanciée à *Faux*. Comme il n'y a pas d'interférence entre les choix des joueurs dans ce jeu, chacun d'entre eux instancie ses variables de la façon qui le satisfait le mieux.
L'ordre Best out permet lui de trouver deux équilibres de Nash faibles et forts, abc et $a\overline{b}c$. Le profil de stratégies $a\overline{b}c$ est le même que celui trouvé avec les autres méthodes. Quant au profil de stratégies abc, il permet de satisfaire le but de priorité 1 du joueur 1, ainsi qu'un de ses buts de priorité 2, mais ne permet pas au joueur 2 de satisfaire au moins un de ses buts. Ce profil de stratégies n'est pas très intéressant. En effet, le joueur 2 n'a aucune raison d'instancier la variable b à *Vrai* alors que son instanciation à *Faux* lui permet de satisfaire un but de priorité 1. L'ordre Best-out nous donne donc ici un résultat moins pertinent que celui trouvé avec les critères discrimin ou leximin.

[4]Pour le joueur 2, les nœuds du bas sont tous reliés les uns aux autres, mais nous n'indiquons pas toutes les flèches afin de ne pas alourdir le dessin. Comme cette relation de préférence est transitive, le résultat n'en est pas affecté. Nous faisons de même pour le joueur 1.

Quant à l'élimination de stratégies dominées, elle nous permet ici de trouver les mêmes résultats que les équilibres de Nash.

5.2.3 Exemple 2

Etudions un second exemple.
Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, avec :
- $A = \{1, 2\}$ l'ensemble des joueurs,
- $V = \{a, b\}$, $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$,
- $\Sigma_1 = \langle (a \vee \neg b); \neg a \rangle$,
- $\Sigma_2 = \langle (b \vee \neg a); a \rangle$

Nous allons maintenant étudier chacun des trois critères présentés plus haut.

5.2.3.1 Discrimin

Si l'on applique le critère discrimin (cf. définition 18) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations partielles décrites en figure 5.4. On constate ici que pour calculer les équilibres de Nash de ce jeu, il faudrait comparer les profils de stratégies $\overline{a}b$ et $\overline{a}\overline{b}$ pour le joueur 2, pourtant incomparables. Nous les représentons sur la figure par une ligne avec des pointillés plus larges. Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts à partir de la définition 13 page 26 nous donne les résultats suivants :

$$NE_{faible} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{ab\}$$

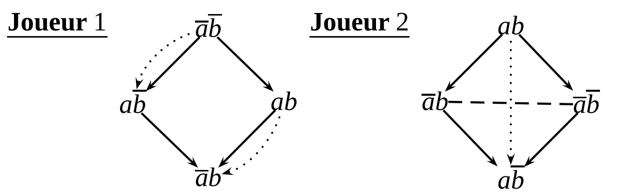


FIG. 5.4 – Relations partielles calculées à partir du critère Discrimin

Il n'y a ici qu'un équilibre de Nash fort. Et ce dernier semble être en effet l'issue la plus probable du jeu : afin d'être sûrs de satisfaire leur but de niveau 1, les deux joueurs vont rationnellement choisir de jouer a et b. En effet, la stratégie a permet au joueur 1 d'être sûr de satisfaire son but de niveau 1, et il en est de même pour le joueur 2 s'il choisit la stratégie b.

Etudions à présent les stratégies dominées de ce jeu :
- Joueur 2 : la stratégie b domine partiellement la stratégie $\overline{b}$. On élimine donc cette dernière.
- Joueur 1 : Une fois la stratégie $\overline{b}$ éliminée, la stratégie a domine strictement la stratégie $\overline{a}$.

En éliminant les stratégies dominées, on obtient donc un profil de stratégies résultat : ab, qui correspond à l'équilibre de Nash fort trouvé.

Les stratégies ne sont pas ici strictement dominées, l'ordre d'élimination affecte donc les résultats. Mais ici, le joueur 1 n'a pas de stratégie dominante avant l'élimination de la stratégie de 2. On a donc qu'une seule solution possible.

5.2.3.2 Leximin

Si l'on applique le critère leximin (cf. définition 19) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites en figure 5.5 à partir desquelles nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts (avec la définition 13 page 26) :

$$NE_{faible} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

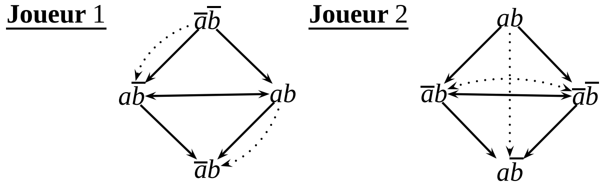


FIG. 5.5 – Relations totales calculées à partir du critère Leximin

Ici, nous avons deux équilibres de Nash, qu'ils soient faibles ou forts. Or, comme nous l'avons vu précédemment, le profil de stratégies *ab* semble plus rationnel, puisqu'il permet aux joueurs d'être sûrs de satisfaire leur but de niveau 1. Sur cet exemple, le critère leximin semble donc un peu moins pertinent que le critère discrimin.

Etudions à présent les stratégies dominées de ce jeu :
– Joueur 2 : la stratégie b domine faiblement la stratégie $\overline{b}$. On élimine donc cette dernière.
– Joueur 1 : Une fois la stratégie $\overline{b}$ éliminée, la stratégie a domine strictement la stratégie $\overline{a}$.
En éliminant les stratégies dominées, on obtient donc un profil de stratégies résultat : *ab*, qui raffine les résultats trouvés avec les équilibres de Nash.

Les stratégies ne sont pas ici strictement dominées, l'ordre d'élimination affecte donc les résultats. Mais ici, le joueur 1 n'a pas de stratégie dominante avant l'élimination de la stratégie de 2. On a donc qu'une seule solution possible.

5.2.3.3 Best out

Si l'on applique l'ordre Best out (cf. définition 20) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites sur la figure 5.6 et partir desquelles nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts (avec la définition 13 page 26) :

$$NE_{faible} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

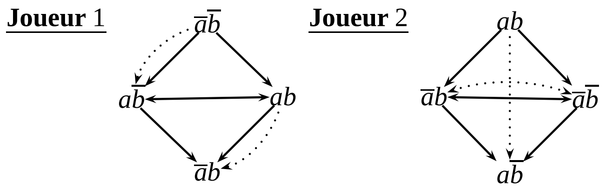


FIG. 5.6 – Relations totales calculées à partir de l'ordre Best out

Nous trouvons ici exactement les mêmes résultats qu'avec le critère leximin.
Il en est de même pour l'élimination des stratégies dominées.

5.2.3.4 Conclusion

Contrairement au premier exemple, ici, pour le calcul des équilibres de Nash, les critères leximin et best-out donnent les mêmes résultats, tandis que le critère discrimin est un peu plus pertinent.
Par contre, l'élimination des stratégies dominées donne le même résultat pour chacun des critères, résultat qui semble le plus pertinent.

5.2.4 Exemple 3 : le jeu du prisonnier

Reprenons l'exemple 2 page 11 du jeu du prisonnier, mais cette fois-ci dans sa forme classique. Dans cette version du dilemme du prisonnier, 2 détenus sont emprisonnés dans des cellules séparées. La police fait à chacun d'eux le même marché :

> "Tu as le choix entre trahir ton complice en le dénonçant (noté $\neg C_i$, $i = 1,2$) ou le couvrir (noté C_i, $i = 1,2$). Si tu le dénonces, et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et lui écopera de 10 ans de prison. Si vous vous dénoncez mutuellement, vous écoperez tous les deux de 5 ans de prison. Si aucun de vous ne dénonce l'autre, vous aurez tous les deux 6 mois de prison."

Voila la forme normale de ce jeu, avec 2 prisonniers :

1 \ 2	C_2	$\overline{C}_2$
C_1	(-1/2, -1/2)	(-10, 0)
$\overline{C}_1$	(0, -10)	(-5, -5)

Si l'on calcule l'équilibre de Nash de ce jeu à partir de cette forme normale, on trouve :

$$NE = \{\overline{C_1C_2}\}$$

Nous pouvons traduire ce jeu avec le BP-jeu booléen $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ suivant :
- $A = \{1, 2\}$ l'ensemble des joueurs,
- $V = \{C_1, C_2\}$, $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{C_1\}$, $\pi_2 = \{C_2\}$,
- $\Sigma_1 = \langle C_2; \neg C_1 \rangle$,
- $\Sigma_2 = \langle C_1; \neg C_2 \rangle$

Nous allons maintenant étudier chacun des trois critères présentés plus haut.

5.2.4.1 Discrimin

Si l'on applique le critère discrimin (cf. définition 18 page 28) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites en figure 5.7.

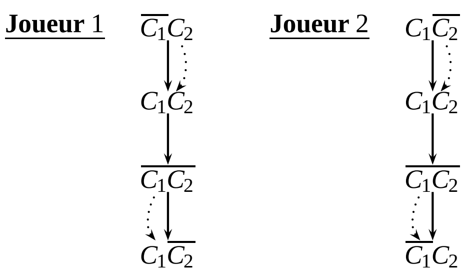


FIG. 5.7 – Relations partielles calculées à partir du critère Discrimin

On constate que ces relations totales, même si elles ne sont qu'ordinales, respectent bien l'ordre donné par la forme normale du jeu.
Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts à partir de la définition 13 page 26 nous donne les résultats suivants :

$$NE_{faible} = NE_{fort} = \{\overline{C_1C_2}\}$$

Cet équilibre de Nash correspond à celui trouvé avec les préférences cardinales du dilemme du prisonnier.
D'autre part, ce jeu n'a pas de stratégie dominée, on ne peut donc pas en éliminer.

5.2.4.2 Leximin

Si l'on applique le critère leximin (cf. définition 19 page 28) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites en figure 5.8. On constate que ce sont exactement les mêmes que celles trouvées en figure 5.7 page précédente.

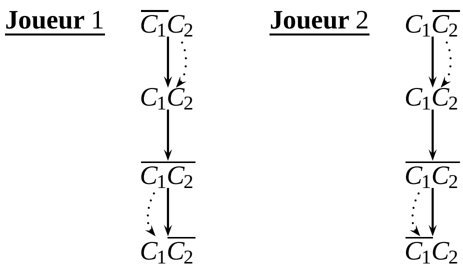


FIG. 5.8 – Relations partielles calculées à partir du critère Leximin

Ce jeu n'a toujours pas de stratégie dominée, et on obtient le même équilibre de Nash faible et fort :

$$NE_{faible} = NE_{fort} = \{\overline{C_1C_2}\}$$

5.2.4.3 Best out

Si l'on applique l'ordre Best out (cf. définition 20 page 28) à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales décrites sur la figure 5.9 et partir desquelles nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts (avec la définition 13 page 26) :

$$NE_{fort} = NE_{faible} = \{C_1\overline{C_2}, \overline{C_1}C_2, \overline{C_1C_2}\}$$

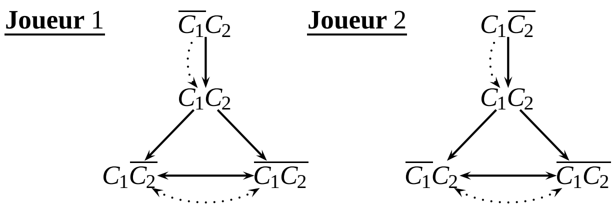


FIG. 5.9 – Relations totales calculées à partir de l'ordre Best out

Etudions à présent les stratégies dominées de ce jeu :
- Joueur 1 : la stratégie $\overline{C_1}$ domine faiblement la stratégie C_1. On élimine donc cette dernière.
- Joueur 2 : Une fois la stratégie C_1 éliminée, le joueur 2 n'a plus de stratégie dominée.

En éliminant les stratégies dominées, on obtient donc deux profils de stratégies résultats : $\{\overline{C_1}C_2, \overline{C_1C_2}\}$, ce qui raffine les résultats trouvés avec les équilibres de Nash.

Les stratégies ne sont pas ici strictement dominées, l'ordre d'élimination affecte donc les résultats. Etudions donc ce qui se passe si on élimine d'abord les stratégies dominées du joueur 2 :
- Joueur 2 : la stratégie $\overline{C_2}$ domine faiblement la stratégie C_2. On élimine donc cette dernière.
- Joueur 1 : Une fois la stratégie C_2 éliminée, le joueur 1 n'a plus de stratégie dominée.

En éliminant les stratégies dominées, on obtient deux autres profils de stratégies résultats : $\{C_1\overline{C_2}, \overline{C_1C_2}\}$, ce qui raffine les résultats trouvés avec les équilibres de Nash.

5.2.5 Quelques propriétés

Comme cela a déjà été prouvé par [BCD+93], les critères discrimin, leximin et best-out ne sont pas totalement indépendants. La propriété suivante est toujours valable dans le cadre des jeu booléens.

Propriété 11 *Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, et soit S et S' deux profils de stratégies. On a alors :*

$$(S \succ^{bo} S') \Rightarrow (S \succ^{discr} S') \Rightarrow (S \succ^{lex} S') \tag{5.3}$$

et :

$$(S \succeq^{discr} S') \Rightarrow (S \succeq^{lex} S') \Rightarrow (S \succeq^{bo} S') \tag{5.4}$$

Preuve : Nous allons démontrer ces implications l'une après l'autre.
Commençons par $(S \succ^{bo} S') \Rightarrow (S \succ^{discr} S') \Rightarrow (S \succ^{lex} S')$:

$$\begin{aligned}(S \succ^{bo} S') &\Leftrightarrow a(S) > a(S') \\ &\Leftrightarrow \underbrace{min\{j \mid \exists \varphi_i \in \Sigma^j, S \not\models \varphi_i\}}_{\text{noté } x} > \underbrace{min\{j \mid \exists \varphi_i \in \Sigma^j, S' \not\models \varphi_i\}}_{\text{noté } y}\end{aligned}$$

On sait donc que :
- $\forall j < y, \forall \varphi_i \in \Sigma^j, S \models \varphi_i, S' \models \varphi_i$
- pour la strate y, $\forall \varphi_i \in \Sigma^y, S \models \varphi_i, S' \not\models \varphi_i$
- pour la strate x, $\forall \varphi_i \in \Sigma^x, S \not\models \varphi_i$

On en déduit que :
- $Sat(S,\Sigma^y) \supset Sat(S',\Sigma^y)$
- $\forall j < y, Sat(S,\Sigma^y) = Sat(S',\Sigma^y)$.

On a donc : $S \succ^{discr} S'$
Il est alors évident que :
- $\mid Sat(S,\Sigma^y) \mid > \mid Sat(S',\Sigma^y) \mid$
- $\forall j < y, \mid Sat(S,\Sigma^y) \mid = \mid Sat(S',\Sigma^y) \mid$.

Donc : $S \succ^{lex} S'$
Démontrons à présent $(S \succeq^{discr} S') \Rightarrow (S \succeq^{lex} S') \Rightarrow (S \succeq^{bo} S')$:

$$\begin{aligned}(S \succeq^{discr} S') &\Leftrightarrow S \succ^{discr} S' \text{ ou } \forall k \in \{1,\dots p\}, Sat(S,\Sigma^k) = Sat(S',\Sigma^k) \\ &\Rightarrow S \succ^{lex} S' \text{ ou } \forall k \in \{1,\dots p\}, \mid Sat(S,\Sigma^k) \mid = \mid Sat(S',\Sigma^k) \mid \\ &\Rightarrow (S \succeq^{lex} S') \\ &\Leftrightarrow \exists k \text{ tq } \mid Sat(S,\Sigma^k) \mid \geq \mid Sat(S',\Sigma^k) \mid \text{ et } \forall j < k, \mid Sat(S,\Sigma^j) \mid = \mid Sat(S',\Sigma^j) \mid \\ &\Rightarrow a(S) \geq a(S') \\ &\Leftrightarrow (S \succeq^{bo} S')\end{aligned}$$

■

Lemme 1 *Soit $\succeq = \langle \succeq_1, \dots, \succeq_n \rangle$ et $\succeq' = \langle \succeq'_1, \dots, \succeq'_n \rangle$ deux collections de relations de préférence, et soit S un profil de stratégies.*

1. *Si $\succeq$ est contenu dans $\succeq'$ et si S est un équilibre de Nash fort en stratégies pures pour $\succeq$, alors S est un équilibre de Nash fort en stratégies pures pour $\succeq'$.*
2. *Si $\succ$ est contenu dans $\succ'$ et si S est un équilibre de Nash faible en stratégies pures pour $\succ'$, alors S est un équilibre de Nash faible en stratégies pures pour $\succ$.*

Preuve :

1. Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un équilibre de Nash fort en stratégies pures pour $\succeq = \langle \succeq_1, \dots, \succeq_n \rangle$. On a alors :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, (s'_i, s_{-i}) \preceq_i (s_i, s_{-i}) \tag{5.5}$$

Or, nous savons que $\succeq$ est contenu dans $\succeq'$, *i.e.* $\forall i = 1 \dots n$, $\succeq_i$ est contenu dans $\succeq'_i$. On a donc, d'après l'équation 5.5,

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, (s'_i, s_{-i}) \preceq'_i (s_i, s_{-i})$$

Le profil de stratégies S est donc bien un équilibre de Nash fort pour $\succeq' = \langle \succeq'_1, \dots, \succeq'_n \rangle$.

2. Soit $S = (s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash faible en stratégies pures pour $\succ' = \langle \succ'_1, \ldots, \succ'_n \rangle$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, (s'_i, s_{-i}) \not\succ'_i (s_i, s_{-i}) \tag{5.6}$$

Or, nous savons que $\succ$ est contenu dans $\succ'$, donc $\not\succ'$ est contenu dans $\not\succ$, *i.e.* $\forall i = 1 \ldots n$, $\not\succ'_i$ est contenu dans $\not\succ_i$. On a donc, d'après l'équation 5.6,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i}, (s'_i, s_{-i}) \not\succ_i (s_i, s_{-i})$$

Le profil de stratégies S est donc bien un équilibre de Nash faible pour $\succeq' = \langle \succeq'_1, \ldots, \succeq'_n \rangle$.

■

De la propriété 11 page 35 et du lemme 1 page ci-contre on déduit la propriété suivante :

Propriété 12 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un BP-jeu booléen et $Pref^c_G = \langle \succeq^c_1, \ldots, \succeq^c_n \rangle$ l'ensemble des relations de préférence sur G à partir du critère $c \in \{disc, lex, bo\}$.*

1. *Si S est un équilibre de Nash fort en stratégie pure pour $Pref^{disc}_G$ (noté $S \in NE^{disc}_{fort}$), alors S est un équilibre de Nash fort pour $Pref^{lex}_G$ (noté $S \in NE^{lex}_{fort}$). Dans ce cas, S est aussi un équilibre de Nash fort pour $Pref^{bo}_G$ (noté $S \in NE^{bo}_{fort}$). On a donc :*

$$NE^{disc}_{fort}(G) \subseteq NE^{lex}_{fort}(G) \subseteq NE^{bo}_{fort}(G)$$

2. *Si S est un équilibre de Nash faible en stratégie pure pour $Pref^{lex}_G$ (noté $S \in NE^{lex}_{faible}$), alors S est un équilibre de Nash faible pour $Pref^{disc}_G$ (noté $S \in NE^{disc}_{faible}$). Dans ce cas, S est aussi un équilibre de Nash faible pour $Pref^{bo}_G$ (noté $S \in NE^{bo}_{faible}$). On a donc :*

$$NE^{lex}_{faible}(G) \subseteq NE^{disc}_{faible}(G) \subseteq NE^{bo}_{faible}(G)$$

Preuve :

1. La suite d'implications "$S \in NE^{disc}_{fort} \Rightarrow S \in NE^{lex}_{fort} \Rightarrow S \in NE^{bo}_{fort}$" est une conséquence directe de l'équation 5.4 page précédente :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i} : (s_i, s_{-i}) \succeq^{discr}_i (s'_i, s_{-i}) \quad \Rightarrow \quad (s_i, s_{-i}) \succeq^{lex}_i (s'_i, s_{-i}) \tag{5.7}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i} : (s_i, s_{-i}) \succeq^{lex}_i (s'_i, s_{-i}) \quad \Rightarrow \quad (s_i, s_{-i}) \succeq^{bo}_i (s'_i, s_{-i}) \tag{5.8}$$

L'équation 5.7 nous montre que $\succeq^{discr}_i$ est contenu dans $\succeq^{lex}_i$. Donc, d'après le lemme 1 page précédente, si $S \in NE^{disc}_{fort}$, alors $S \in NE^{lex}_{fort}$.

L'équation 5.8 nous montre que $\succeq^{lex}_i$ est contenu dans $\succeq^{bo}_i$. Donc, d'après le lemme 1 page précédente, si $S \in NE^{lex}_{fort}$, alors $S \in NE^{bo}_{fort}$.

2. La suite d'implications "$S \in NE^{lex}_{faible} \Rightarrow S \in NE^{discr}_{faible} \Rightarrow S \in NE^{bo}_{faible}$" est une conséquence directe de l'équation 5.3 page ci-contre :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i} : (s_i, s_{-i}) \succ^{bo}_i (s'_i, s_{-i}) \quad \Rightarrow \quad (s_i, s_{-i}) \succ^{discr}_i (s'_i, s_{-i}) \tag{5.9}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s'_i \in 2^{\pi_i} : (s_i, s_{-i}) \succ^{discr}_i (s'_i, s_{-i}) \quad \Rightarrow \quad (s_i, s_{-i}) \succ^{lex}_i (s'_i, s_{-i}) \tag{5.10}$$

L'équation 5.9 nous montre que $\succ^{bo}_i$ est contenu dans $\succ^{discr}_i$. Donc, d'après le lemme 1 page ci-contre, $\not\succ^{discr}_i$ est contenu dans $\not\succ^{bo}_i$, et donc si $S \in NE^{disc}_{faible}$, alors $S \in NE^{bo}_{faible}$.

L'équation 5.10 nous montre que $\succ^{discr}_i$ est contenu dans $\succ^{lex}_i$. Donc, d'après le lemme 1 page ci-contre, $\not\succ^{lex}_i$ est contenu dans $\not\succ^{discr}_i$, et donc si $S \in NE^{lex}_{faible}$, alors $S \in NE^{discr}_{faible}$.

■

Nous allons à présent essayer de décomposer le jeu booléen pour voir s'il est plus facile de l'étudier ainsi. Pour cela, nous introduisons la notion de jeu booléen réduit.

Définition 22 (Jeu booléen k-réduit)
Soit $G = (A = \{1, \ldots, n\}, V, C, \pi, \Phi)$ un BP-jeu booléen. Soit $1 \leq k \leq n$.
$G^{[1\to k]} = (A, V, C, \pi, \Phi^{[1\to k]})$ représente le jeu booléen k-réduit de *G dans lequel les buts de chaque joueur sont réduits à leurs k premières strates : $\Phi^{[1\to k]} = \langle \Sigma^{[1\to k]}_1, \ldots, \Sigma^{[1\to k]}_n \rangle$.*

Lemme 2 *Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un BP-jeu booléen, et soit $G^{[1\to k]} = (A,V,C,\pi,\Phi^{[1\to k]})$ le jeu booléen k-réduit associé à G.*
$\forall c \in \{discr, lex, bo\}$, $\forall i \in A$, on a :

$$S \succeq_i^{c,[1\to k]} S' \Rightarrow S \succeq_i^{c,[1\to k-1]} S' \tag{5.11}$$

$$S \not\succeq_i^{c,[1\to k]} S' \Rightarrow S \not\succeq_i^{c,[1\to k-1]} S' \tag{5.12}$$

Preuve :

1. Démontrons les implications $S \succeq_i^{c,[1\to k]} S' \Rightarrow S \succeq_i^{c,[1\to k-1]} S'$ une par une.

   (a) Discrimin

   $S \succeq_i^{discr,[1\to k]} S' \Leftrightarrow \exists l \in \{1,\dots,k\}$ tel que :

   $$Sat(S,\Sigma_i^l) \supseteq Sat(S',\Sigma_i^l) \text{ et } \forall j < l, Sat(S,\Sigma_i^j) = Sat(S',\Sigma_i^j)$$

   2 cas sont maintenant possibles.

   i. $l = k$.
   On a alors, $\forall j < k$, et donc $\forall j \in \{1,\dots,k-1\}$, $Sat(S,\Sigma_i^j) = Sat(S',\Sigma_i^j)$.
   Ce qui nous donne bien $S \succeq_i^{discr,[1\to k-1]} S'$.

   ii. $l < k$, donc $l \leq k-1$.
   Dans ce cas, on a $l \in \{1,\dots,k-1\}$. Et on a donc bien $S \succeq_i^{discr,[1\to k-1]} S'$.

   (b) Leximin

   $S \succeq_i^{lex,[1\to k]} S' \Leftrightarrow \exists l \in \{1,\dots,k\}$ tel que

   $$|Sat(S,\Sigma_i^l)| \geq |Sat(S',\Sigma_i^l)| \text{ et } \forall j < l, |Sat(S,\Sigma_i^j)| = |Sat(S',\Sigma_i^j)|$$

   2 cas sont maintenant possibles.

   i. $l = k$.
   On a alors, $\forall j < k$, et donc $\forall j \leq k-1$, $|Sat(S,\Sigma_i^j)| = |Sat(S',\Sigma_i^j)|$.
   Ce qui nous donne bien $S \succeq_i^{lex,[1\to k-1]} S'$.

   ii. $l < k$, donc $l \leq k-1$.
   Dans ce cas, on a $l \in \{1,\dots,k-1\}$. Et on a donc bien $S \succeq_i^{lex,[1\to k-1]} S'$.

   (c) Best-out

   $$\begin{aligned} S \succeq_i^{bo,[1\to k]} S' \quad &\Leftrightarrow \quad a_i^{[1\to k]}(S) \geq a_i^{[1\to k]}(S') \\ & \quad \underbrace{min(\{j \in [1,k] \text{ tel que } \exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S \not\models \varphi_l\})}_{\text{noté } A} \\ &\Leftrightarrow \quad \geq \\ & \quad \underbrace{min(\{j \in [1,k] \text{ tel que } \exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S' \not\models \varphi_l\})}_{\text{noté } B} \end{aligned}$$

   3 cas sont maintenant possibles.

   i. $A < k$, et $B \leq A < k$.
   Alors, on a $A \leq k-1$, et $B \leq A \leq k-1$.
   Et donc, $a_i^{[1\to k-1]}(S) \geq a_i^{[1\to k-1]}(S')$.

   ii. $A = k$, et $B \leq A = k$.
   Dans ce cas, $min(\{j \in [1,k-1]$ tel que $\exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S \not\models \varphi_l\}) = \infty$.
   Donc $B \leq A = \infty$.
   On a encore bien $a_i^{[1\to k-1]}(S) \geq a_i^{[1\to k-1]}(S')$.

iii. $A = \infty$.
On aura alors toujours $min(\{j \in [1,k-1]$ tel que $\exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S \not\models \varphi_l\}) = \infty$.
Et donc $B \leq A = \infty$, et $a_i^{[1\to k-1]}(S) \geq a_i^{[1\to k-1]}(S')$.

Pour chacun de ces cas possibles, on a bien $S \succeq_i^{bo,[1\to k-1]} S'$.

2. Démontrons les implications $S \not\succ_i^{c,[1\to k]} S' \Rightarrow S \not\succ_i^{c,[1\to k-1]} S'$ une par une. Pour cela, on remarque que :

$$(S \not\succ_i^{c,[1\to k]} S' \Rightarrow S \not\succ_i^{c,[1\to k-1]} S') \Leftrightarrow (S \succ_i^{c,[1\to k-1]} S' \Rightarrow S \succ_i^{c,[1\to k]} S')$$

(a) Discrimin

$S \succ_i^{discr,[1\to k-1]} S' \Leftrightarrow \exists l \in \{1,\ldots,k-1\}$ tel que

$$Sat(S,\Sigma_i^l) \supset Sat(S',\Sigma_i^l) \text{ et } \forall j < l, Sat(S,\Sigma_i^j) = Sat(S',\Sigma_i^j)$$

On a donc bien :

$$\exists l \in \{1,\ldots,k\} \text{ tel que } Sat(S,\Sigma_i^l) \supset Sat(S',\Sigma_i^l) \text{ et } \forall j < l, Sat(S,\Sigma_i^j) = Sat(S',\Sigma_i^j)$$

Donc, $S \succ_i^{discr,[1\to k]} S'$

(b) Leximin

$S \succ_i^{lex,[1\to k-1]} S' \Leftrightarrow \exists l \in \{1,\ldots,k-1\}$ tel que

$$|Sat(S,\Sigma_i^l)| > |Sat(S',\Sigma_i^l)| \text{ et } \forall j < l, |Sat(S,\Sigma_i^j)| = |Sat(S',\Sigma_i^j)|$$

On a donc bien : $\exists l \in \{1,\ldots,k\}$ tel que

$$\exists l \in \{1,\ldots,k\} : |Sat(S,\Sigma_i^l)| > |Sat(S',\Sigma_i^l)| \text{ et } \forall j < l, |Sat(S,\Sigma_i^j)| = |Sat(S',\Sigma_i^j)|$$

Donc, $S \succ_i^{lex,[1\to k]} S'$

(c) Best-out

$$\begin{array}{rcl} S \succ_i^{bo,[1\to k-1]} S' & \Leftrightarrow & a_i^{[1\to k-1]}(S) > a_i^{[1\to k-1]}(S') \\ & & \underbrace{min(\{j \in [1,k-1] \text{ tel que } \exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S \not\models \varphi_l\})}_{\text{noté } A} \\ & \Leftrightarrow & > \\ & & \underbrace{min(\{j \in [1,k-1] \text{ tel que } \exists \varphi_l \in \Sigma_i^j : S' \not\models \varphi_l\})}_{\text{noté } B} \end{array}$$

Ces equations sont évidemment toujours vraies pour $j \in [1,k]$.
On a donc bien $S \succ_i^{bo,[1\to k]} S'$.

■

Propriété 13 *Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un BP-jeu booléen, et soit $G^{[1\to k]} = (A,V,C,\pi,\Phi^{[1\to k]})$ le jeu booléen k-réduit associé à G .*
Si S est un équilibre de Nash fort (resp. faible) en stratégie pure pour $Pref^c_{G^{[1\to k]}} = \{\succeq_1^{[1\to k]},\ldots,\succeq_n^{[1\to k]}\}$, alors S est aussi un équilibre de Nash fort (resp. faible) pour $Pref^c_{G^{[1\to k-1]}} = \{\succeq_1^{[1\to k-1]},\ldots,\succeq_n^{[1\to k-1]}\}$.

Preuve :

1. Equilibres de Nash forts en stratégie pures :
Soit $S = (s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash fort en stratégie pure pour $Pref^c_{G^{[1\to k]}}$. Alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i', s_{-i}) \preceq_i^{[1\to k]} (s_i, s_{-i})$$

Or, d'après le lemme 2, quel que soit le critère utilisé, $S \succeq_i^{[1\to k]} S' \Rightarrow S \succeq_i^{[1\to k-1]} S'$.
On a donc :

$$\forall i \in \{1, \ldots n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i', s_{-i}) \preceq_i^{[1\to k-1]} (s_i, s_{-i})$$

S est donc un équilibre de Nash fort en stratégie pure pour $Pref^c_{G^{[1\to k]}}$.
2. Equilibres de Nash faibles en stratégie pures :
Soit $S = (s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash faible en stratégie pure pour $Pref^c_{G^{[1\to k]}}$. Alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i', s_{-i}) \not\succ_i^{[1\to k]} (s_i, s_{-i})$$

Or, d'après le lemme 2, quel que soit le critère utilisé, $S \not\succ_i^{[1\to k]} S' \Rightarrow S \not\succ_i^{[1\to k-1]} S'$.
On a donc :

$$\forall i \in \{1, \ldots n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i', s_{-i}) \not\succ_i^{[1\to k-1]} (s_i, s_{-i})$$

S est donc un équilibre de Nash faible en stratégie pure pour $Pref^c_{G^{[1\to k]}}$.

■

Conséquence 1 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un BP-jeu booléen, et soit $G^{[1]} = (A, V, C, \pi, \Phi^{[1]})$ le jeu booléen 1-réduit associé à G.*
Si le jeu $G^{[1]}$ n'a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure, alors le jeu G n'en a pas non plus pour aucun des critères discrimin, leximin ou best-out.

Preuve : Supposons que le jeu G a un équilibre de Nash. Sachant que $G = G^{[1\to p]}$, d'après la propriété 13, le jeu $G^{[1\to p-1]}$ aura aussi un équilibre de Nash. Puis, en appliquant la même propriété, il en sera de même pour les jeux $G^{[1\to p-2]}$, $G^{[1\to p-3]}$, jusqu'au jeu $G^{[1]}$.

Donc, si G a un équilibre de Nash, alors $G^{[1]}$ a un équilibre de Nash.
Et donc, si $G^{[1]}$ n'a pas d'équilibre de Nash, alors G n'aura pas d'équilibre de Nash.

■

La réciproque est fausse : le jeu $G^{[1]}$ peut avoir un équilibre de Nash, alors que le jeu G n'en a pas. Voici un contre-exemple :

Exemple 10 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, avec :*
– $A = \{1, 2\}$ *l'ensemble des joueurs,*
– $V = \{a, b\}, C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}, \pi_2 = \{b\}$,
– $\Sigma_1 = \langle a \to b; b \to a\rangle$,
– $\Sigma_2 = \langle a \leftrightarrow \neg b; \neg b\rangle$
Si l'on applique l'ordre Best out à chacun des joueurs, nous trouvons les relations totales données dans la figure 5.10.
Ce jeu n'a pas d'équilibre de Nash.

Si on étudie à présent le jeu booléen $G^{[1]}$ associé dans lequel les buts des joueurs sont réduits à la première strate de leurs buts dans G, on obtient le jeu suivant : $G^{[1]} = \{A, V, C, \pi, \Phi^{[1]}\}$ un jeu booléen, avec :
– $A = \{1, 2\}$ *l'ensemble des joueurs,*
– $V = \{a, b\}, C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}, \pi_2 = \{b\}$,

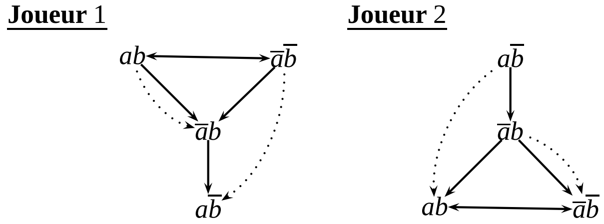


FIG. 5.10 – Relations totales calculées à partir de l'ordre Best out

– $\Sigma_1^{[1]} = \{a \rightarrow b\}$,
– $\Sigma_2^{[1]} = \{a \leftrightarrow \neg b\}$

On peut à présent construire la forme normale de $G^{[1]}$:

1 \ 2	$\overline{b}$	b
$\overline{a}$	*(1, 0)*	*(1, 1)*
a	*(0, 1)*	*(1, 0)*

Ce jeu a un équilibre de Nash : $\overline{a}b$.

5.3 CP-nets

Nous allons ici étudier une autre famille de langages, un langage de représentation dit "graphique" : les CP-nets. Ce langage est fondé sur le critère de comparaison Ceteris Paribus que nous allons présenter en section 5.3.1.

5.3.1 Ceteris Paribus

Quand un agent exprime en langage naturel une préférence telle que "une table ronde sera mieux dans le salon qu'une table carrée", il ne veut sans doute pas dire que n'importe quelle table ronde sera préférée à n'importe quelle table carrée. Il veut exprimer le fait qu'il préfèrera une table ronde à une table carrée si ces deux tables ne diffèrent pas significativement dans leurs autres caractéristiques (la taille, la couleur, le bois utilisé, les finitions ou encore le prix). Le principe qui est à l'oeuvre dans l'interprétation de telles préférences est que les alternatives doivent être comparées *toutes choses étant égales par ailleurs*, ou encore *Ceteris Paribus*.
Les préférences *Ceteris Paribus* ont été découvertes par G. H. von Wright dans [vW63], puis ont été introduites en IA par Boutilier, Brafman, Hoos et Poole dans [BBHP99].

Soit $V = \{X_1, \dots, X_n\}$ un ensemble de variables, chaque variable X_i étant associée à un domaine $D(X_i)$.
Soit $\{X_1, \dots, X_p\}$ est contenu dans V. $D(\{X_1 \dots X_p\}) = D(X_1) \times \dots \times D(X_p)$, produit cartésien des domaines de chaque variable.

Définition 23 (Indépendance préférentielle)
Un sous-ensemble de variables X est préférentiellement indépendant *à son complément $Y = V \setminus X$ ssi $\forall x_1, x_2 \in D(X)$ et $\forall y_1, y_2 \in D(Y)$ on a :*

$$x_1 y_1 \succeq x_2 y_1 \text{ ssi } x_1 y_2 \succeq x_2 y_2$$

On dit que x_1 est préférée *à x_2* ceteris paribus.

En d'autres mots, la structure de la relation de préférence sur les instanciations de X, quand toutes les autres variables sont fixées, est la même quelle que soit la valeur de ces autres variables.

Définition 24 (Indépendance préférentielle conditionnelle)
Soit X, Y et Z trois ensembles non vides disjoints formant une partition de V. X et Y sont conditionnellement préférentiellement indépendants *selon $z \in D(Z)$ ssi $\forall x_1, x_2 \in D(X)$ et $\forall y_1, y_2 \in D(Y)$ on a :*

$$x_1 y_1 z \succeq x_2 y_1 z \text{ ssi } x_1 y_2 z \succeq x_2 y_2 z$$

En d'autres mots, l'indépendance préférentielle de X et Y n'est valable que si Z est instancié à z.

5.3.2 CP-nets

5.3.2.1 Définitions générales

Les CP-nets ont été introduits dans [BBHP99] comme un outil pour représenter compactement les relations de préférence qualitatives. Ce modèle graphique utilise l'indépendance préférentielle conditionnelle pour structurer les préférences d'un agent sous l'hypothèse *Ceteris Paribus*. Ils ont été principalement étudiés dans [Dom02], [BBD$^+$04a] ou encore [BBD$^+$04b].

Les CP-nets peuvent être utilisés dans le cadre des jeux-booléens de façon à représenter les préférences de chaque joueur. On ne considèrera plus que les buts des joueurs sont représentés par une formule logique, mais directement par un CP-net. Dans ce contexte, $\forall x_i \in V, D(x_i) = \{x_i, \overline{x_i}\} = 2^{x_i}$ et $D(\{x_1 \dots x_p\}) = 2^{\{x_1,\dots,x_p\}}$. Ainsi, un élément de $D(x_i)$ correspond à une $\{x_i\}$-interprétation, et un élément de $D(\{x_1 \dots x_p\})$ est une $\{x_1 \dots x_p\}$-interprétation.

Pour chaque variable $X \in V$, l'agent spécifie un ensemble de *variables parents*, notées $Pa(X)$. Ces variables sont celles qui influent sur les préférences de l'agent entre les différentes valeurs de X. Formellement, X et $V \setminus (\{X\} \cup Pa(X))$ sont conditionnellement préférentiellement indépendants étant donné $Pa(X)$. Cette information est utilisée pour créer le graphe des CP-nets dans lequel chaque nœud X a $Pa(X)$ comme prédécesseur immédiat.

Définition 25 (Table de préférence conditionnelle (CPT))
La table de préférence conditionnelle *(notée CPT) décrit les préférences de l'agent sur les valeurs de la variable X, étant données toutes les combinaisons des valeurs des variables parents.*
Pour chaque instanciation de $Pa(X)$, $CPT(X)$ spécifie un ordre total sur $D(X)$ tel que $\forall x_i, x_j \in D(X)$ on ait soit $x_i \succ x_j$, soit $x_j \succ x_i$.

Définition 26 (CP-net)
Soit $V = \{X_1, \dots, X_n\}$ un ensemble de variables. $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{T} \rangle$ est un CP-net *sur V, $\mathcal{G}$ étant un graphe orienté sur V, et $\mathcal{T}$ étant un ensemble de tables de préférences conditionnelles $CPT(X_i)$ pour chaque $X_i \in V$. Chaque table de préférence conditionnelle $CPT(X_i)$ est associée à un ordre total $\succ^i_p$, selon chaque instanciation $p \in D(Pa(X_i))$.*

Illustrons ces définitions avec un exemple simple :

Exemple 11 *Soit le CP-net présenté figure 5.11 page ci-contre(a) qui exprime mes préférences sur le menu du dîner. Ce CP-net est composé de deux variables, S et V qui correspondent respectivement à la soupe et au vin. Je préfère strictement manger une soupe de poisson (S_p) plutôt qu'une soupe de légumes (S_l), tandis que mes préférences sur le vin rouge (V_r) ou blanc (V_b) dépendent de la soupe que je mangerai (donc $D(S) = \{S_p, S_l\}$ et $D(V) = \{V_r, V_b\}$). En effet je préfèrerai du vin rouge avec une soupe de légumes, mais du blanc avec une soupe de poisson.*

> **La représentation graphique des préférences que nous utilisons ici dans le cadre des CP-nets est contraire à la représentation utilisée dans la littérature : dans cette dernière les flèches vont de l'état le moins préféré vers le plus préféré. Afin d'homogénéiser cette section avec la section 5.2 nous choisissons ici d'orienter les flèches de l'état le plus préféré vers l'état le moins préféré.**

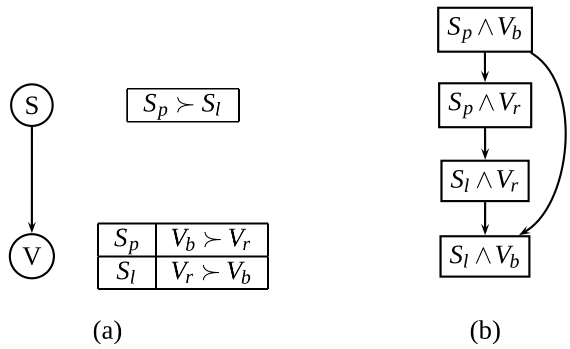


FIG. 5.11 – CP-net “Mon dîner simple” et le pré-ordre associé

La figure 5.11(b) représente la relation de préférence induite par ce CP-net. L'élément du haut ($S_l \wedge V_b$) représente le pire état tandis que l'élément du bas ($S_p \wedge V_b$) est le meilleur état possible.
Nous remarquons ici que nous avons une flèche entre les nœuds $(S_p \wedge V_b)$ et $(S_l \wedge V_b)$ car nous comparons les états 2 par 2, toutes choses étant égales par ailleurs.

5.3.2.2 Sémantique des CP-nets

La sémantique des CP-nets a été principalement étudiée dans [Dom02], [BBD+04a] ou encore [BBD+04b].

Définition 27 (Satisfiabilité d'un CP-net)
Soit $\mathcal{N}$ un CP-net sur les variables V. Soit $X \in V$ une variable, $U \subset V$ les parents de X dans $\mathcal{N}$, et $Y = V \setminus (U \cup \{X\})$. Soit $\succ_u$ une relation d'ordre sur $D(X)$ dictée par $CPT(X)$ pour l'instanciation $u \in D(U)$ des parents de X. Soit enfin $\succ$ une relation de préférence sur $D(V)$.

1. *Une relation de préférence $\succ$* satisfait *$\succ_u$ ssi $yux_i \succ yux_j$, pour tout $y \in D(Y)$, à chaque fois que $x_i \succ_u x_j$.*
2. *Une relation de préférence $\succ$* satisfait *$CPT(X)$ ssi $\succ$ satisfait $\succ_u$ pour chaque $u \in D(U)$.*
3. *Une relation de préférence $\succ$* satisfait *le CP-net $\mathcal{N}$ ssi elle satisfait $CPT(X)$ pour chaque variable X.*

Un CP-net $\mathcal{N}$ est satisfiable *ssi il existe une relation $\succ$ qui le satisfait.*

Informellement, un CP-net $\mathcal{N}$ est satisfait par $\succ$ si $\succ$ satisfait chacune des préférences conditionnelles exprimées dans les CPTs de $\mathcal{N}$ sous l'interprétation *ceteris paribus*.

Si on reprend l'exemple 11 page ci-contre présenté en section 5.3.2.1 page précédente, la figure 5.11 permet d'ordonner totalement les états possibles (du plus préféré au moins préféré) :

$$(S_p \wedge V_b) \succ (S_p \wedge V_r) \succ (S_l \wedge V_r) \succ (S_l \wedge V_b)$$

Cette relation $\succ$ est la seule relation de préférence qui satisfasse ce CP-net.

Le théorème suivant est démontré dans [BBD+04a] :

Théorème 1 *Tout CP-net acyclique est satisfiable.*

Définition 28
Soit $\mathcal{N}$ un CP-net sur les variables V, et $o, o' \in D(V)$ deux états quelconques. $\mathcal{N}$ entraîne *$o \succ o'$ (i.e. l'état o est préféré à o'), noté $\mathcal{N} \models o \succ o'$, ssi $o \succ o'$ dans chaque relation de préférence qui satisfait $\mathcal{N}$.*

Lemme 3 ([BBD+04a]) *La conséquence préférentielle en ce qui concerne un CP-net est transitive. Donc, si $\mathcal{N} \models o \succ o'$ et $\mathcal{N} \models o' \succ o''$ alors $\mathcal{N} \models o \succ o''$.*

Ce lemme nous permet de simplifier les futurs schémas.
Par exemple, sur la figure 5.11 de l'exemple 11 page ci-contre, nous pouvons supprimer la flèche entre les nœuds $(S_l \wedge V_b)$ et $(S_p \wedge V_b)$ car elle est déductible par transitivité.

5.3.2.3 Utilisation des CP-nets dans les jeux booléens

Les définitions classiques des CP-nets doivent être adaptées pour pouvoir être appliquées à des jeux booléens. En effet, nous sommes ici dans un contexte particulier où les variables que nous manipulons sont booléennes, et où nous avons plusieurs joueurs. Dans ce contexte, chaque joueur doit pouvoir choisir la stratégie qui lui permettra d'obtenir le "meilleur résultat possible". Pour ce faire, nous pouvons utiliser les notions définies en section 5.1 page 26 pour calculer les équilibres de Nash et les stratégies dominées, à condition de disposer d'une relation de préférence pour chaque joueur sur l'ensemble des profils de stratégies. Les CP-nets interviennent ici puisqu'ils constituent un outil de représentation des préférences et donc fourniront ainsi les relations de préférence de chaque joueur.

Soit $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ un jeu booléen, avec $A = \{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des joueurs, et $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ l'ensemble des buts des joueurs. Ces buts ne sont plus ici représentés par une formule en logique propositionnelle, mais par un CP-net.
On définit donc :

Définition 29 (Table de préférence conditionnelle pour un jeu booléen (CPT))
La table de préférence conditionnelle *pour un jeu booléen (notée $CPT_i(X)$) décrit les préférences du joueur i sur les valeurs de la variable X, étant données toutes les combinaisons des valeurs des variables parents. Pour chaque instanciation p de $Pa_i(X)$, $CPT_i(X)$ spécifie un ordre total tel que l'on ait soit $x \succ_{i,p} \overline{x}$, soit $\overline{x} \succ_{i,p} x$.*

Définition 30 (CP-jeu booléen)
Un CP-jeu booléen *est un 5-tuple $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$, où $A = \{1,\ldots,n\}$ est un ensemble de joueurs, $V = \{x_1,\ldots,x_n\}$ est un ensemble de variables et $\Phi = \langle \mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n \rangle$, chaque $\mathcal{N}_i$ étant un CP-net sur V.*

Dans ce cadre, nous ne pouvons plus vérifier :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ C \wedge \varphi_i \not\models \bot$$

Pourtant, il est possible de garder les contraintes des joueurs en supprimant les états impossibles à satisfaire du pré-ordre associé aux CP-nets des joueurs. Nous en montrerons un exemple simple (Exemple 3 en section 5.3.3.3 page 51) après avoir étudié quelques exemples plus simples.

5.3.3 Exemples

5.3.3.1 Exemple 1

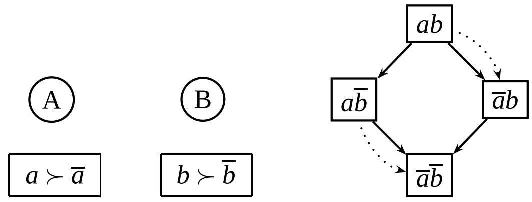
Etudions un exemple simple. Soit le jeu $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ suivant :
- $A = \{1,2\}$
- $V = \{a,b\}$, avec $D(a) = \{a,\overline{a}\}$ et $D(b) = \{b,\overline{b}\}$.
- $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$,
- Le but du joueur 1 est représenté par un CP-net,
- Le but du joueur 2 est représenté par un CP-net.

Dans le cas où nous avons un jeu à deux joueurs et deux variables, nous avons 9 possibilités d'influence des variables les unes sur les autres, dont certaines sont symétriques. Nous allons donc étudier 6 cas intéressants pour voir ce qui se passe.

- **Cas n°1 : les variables sont indépendantes pour les deux joueurs**

  Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.12 page suivante (a). Il permet d'obtenir en figure 5.12 page ci-contre (b)[5] le pré-ordre partiel entre les stratégies.

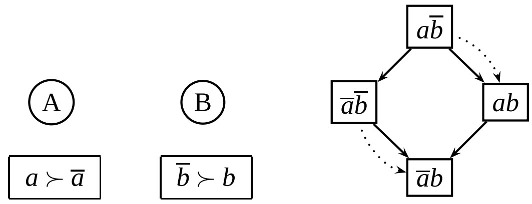
[5] Pour calculer facilement les équilibres de Nash de ce jeu, nous mettons en exergue les relations qui nous intéressent pour chaque joueur. Ces relations apparaissent sous la forme de flèches en pointillé sur la figure.



(a) (b)

FIG. 5.12 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n˚1

Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.13(a). Il permet d'obtenir en figure 5.13(b) le pré-ordre partiel entre les stratégies.



(a) (b)

FIG. 5.13 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n˚1

Grâce aux figures 5.12(b), 5.13(b) et à la définition 13 page 26, nous pouvons calculer les équilibres de Nash faibles et forts. Ce calcul nous donne ici un seul résultat :

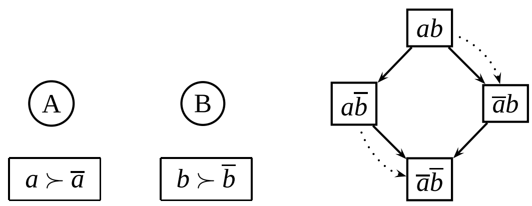
$$NE_{faible} = \{a\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{a\overline{b}\}$$

Ce résultat est pertinent : en effet, chaque joueur va instancier la variable qu'il contrôle de façon à satisfaire ses préférences.
L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.

– **Cas n˚2 : les variables sont indépendantes pour** 1**, et la variable** a **influe sur l'instanciation de** b **pour** 2
  Ce cas est symétrique avec le cas où les variables sont indépendantes pour 2, et la variable b influe sur l'instanciation de a pour 1

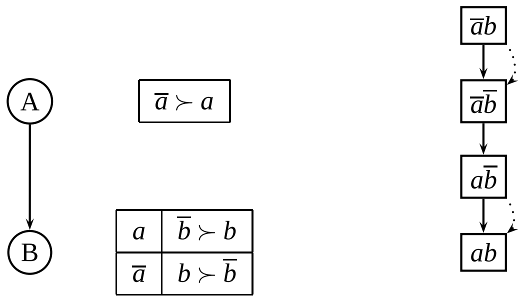
Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.14(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.14(b).



(a) (b)

FIG. 5.14 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n˚2

Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.15 page suivante(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.15 page suivante(b).



(a) (b)

FIG. 5.15 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n˚2

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ici nous donne un seul résultat :

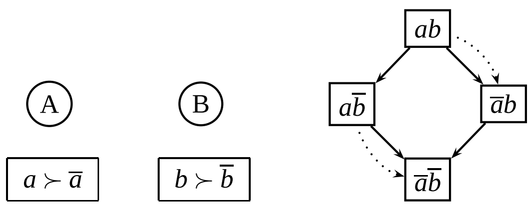
$$NE_{faible} = \{a\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{a\overline{b}\}$$

Ce résultat est pertinent : en effet, le joueur 1 va instancier a à *vrai*, et le joueur 2 le sait. Il va donc instancier b à *faux*.
L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.

– **Cas n˚3 : les variables sont indépendantes pour** 1**, et la variable** b **influe sur l'instanciation de** a **pour** 2
Ce cas est symétrique avec le cas où les variables sont indépendantes pour 2, et la variable a influe sur l'instanciation de b pour 1.

Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.16(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.16(b).



(a) (b)

FIG. 5.16 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n˚3

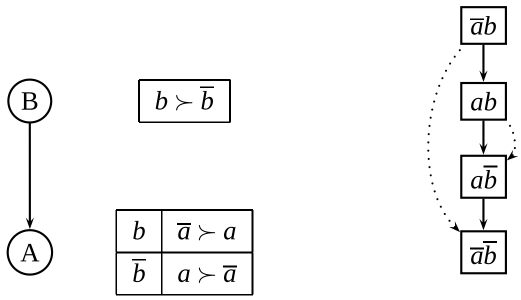
Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.17 page ci-contre(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.17 page suivante(b).

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ici nous donne un seul résultat :

$$NE_{faible} = \{ab\}$$

$$NE_{fort} = \{ab\}$$

Ce résultat est pertinent : en effet, chaque joueur va instancier la variable qu'il contrôle de façon à satisfaire ses préférences.
L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.

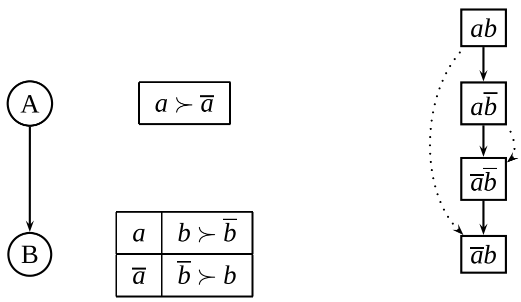


(a) (b)

FIG. 5.17 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n˚3

– **Cas n˚4 : la variable *a* influe sur l'instanciation de la variable *b* pour les deux joueurs**
Ce cas est symétrique avec le cas où la variable b influe sur l'instanciation de la variable a pour les deux joueurs.

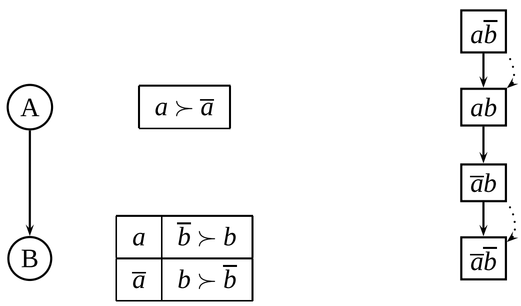
Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.18(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.18(b).



(a) (b)

FIG. 5.18 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n˚4

Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.19(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.19(b).



(a) (b)

FIG. 5.19 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n˚4

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ici nous donne un seul résultat :

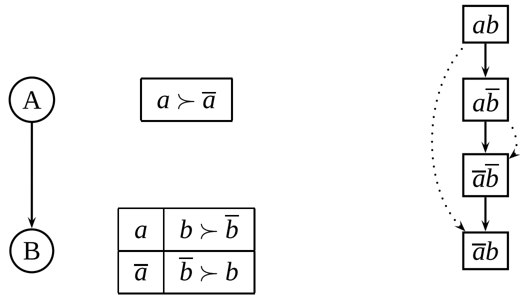
$$NE_{faible} = \{a\bar{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{a\bar{b}\}$$

Ce résultat est pertinent : en effet, chaque joueur va instancier la variable qu'il contrôle de façon à satisfaire ses préférences.
L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.

- **Cas n˚5 : la variable** a **influe sur l'instanciation de la variable** b **pour** 1 **et la variable** b **influe sur l'instanciation de la variable** a **pour** 2

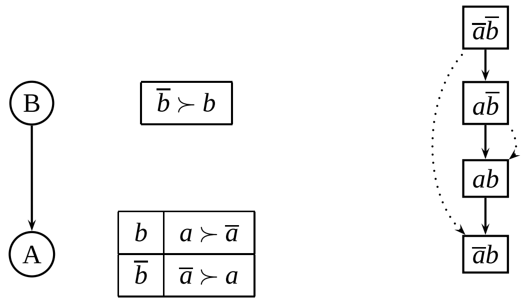
  Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.20(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.20(b).



(a) (b)

FIG. 5.20 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n˚5

  Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.21(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.21(b).



(a) (b)

FIG. 5.21 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n˚5

  Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ici nous donne un seul résultat :

$$NE_{faible} = \{a\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{a\overline{b}\}$$

  Ce résultat est pertinent : en effet, chaque joueur va instancier la variable qu'il contrôle de façon à satisfaire ses préférences.
  L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.

- **Cas n˚6 : la variable** b **influe sur l'instanciation de la variable** a **pour** 1 **et la variable** a **influe sur l'instanciation de la variable** b **pour** 2

  Joueur 1 : Le CP-net représentant le but du joueur 1 est donné en figure 5.22 page ci-contre(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.22 page suivante(b).
  Joueur 2 : Le CP-net représentant le but du joueur 2 est donné en figure 5.23 page ci-contre(a), ainsi que le pré-ordre correspondant en figure 5.23 page suivante(b).

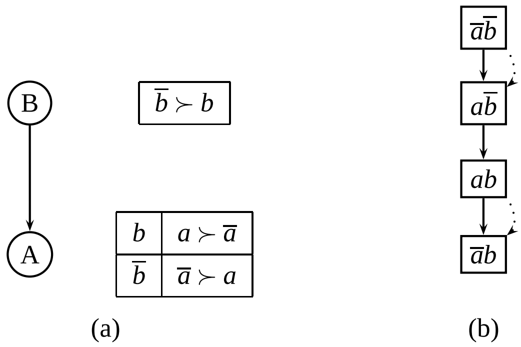


FIG. 5.22 – CP-net des préférences du joueur 1 et le pré-ordre associé pour le cas n°6

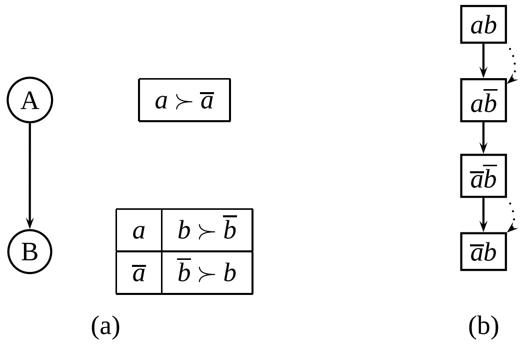


FIG. 5.23 – CP-net des préférences du joueur 2 et le pré-ordre associé pour le cas n°6

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ici nous donne deux résultats :

$$NE_{faible} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

Comme ici les préférences principales de chaque joueur ne portent pas sur la variable qu'ils contrôlent, ils sont obligés d'essayer d'anticiper le choix de l'autre joueur. Ils ont donc une chance sur 2 de choisir ensemble une stratégie qui leur conviendra à tous les deux.
L'élimination des stratégies dominées ne fournit ici aucun résultat : aucune stratégie n'étant dominée pour aucun des deux joueurs, on ne peut en éliminer aucune.

5.3.3.2 Exemple 2

Etudions à présent un exemple un peu plus compliqué avec 3 joueurs pour voir comment cela se déroule.
Soit le jeu $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ suivant :
- $A = \{1, 2, 3\}$
- $V = \{a, b, c\}$, avec $D(a) = \{a, \overline{a}\}$, $D(b) = \{b, \overline{b}\}$ et $D(c) = \{c, \overline{c}\}$.
- $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$,
- Le but du joueur 1 est représenté par le CP-net figure 5.24 page suivante,
- Le but du joueur 2 est représenté par le CP-net figure 5.25 page suivante,
- Le but du joueur 3 est représenté par le CP-net figure 5.26 page suivante.

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts nous donne ici comme résultat :

$$NE_{faible} = \{\overline{a}b\overline{c}\}$$

$$NE_{fort} = \{\overline{a}b\overline{c}\}$$

L'élimination des stratégies dominées fournit le même résultat.
Ce résultat est cohérent : en effet, les joueurs 1 et 2 vont instancier les variables qu'ils contrôlent de façon

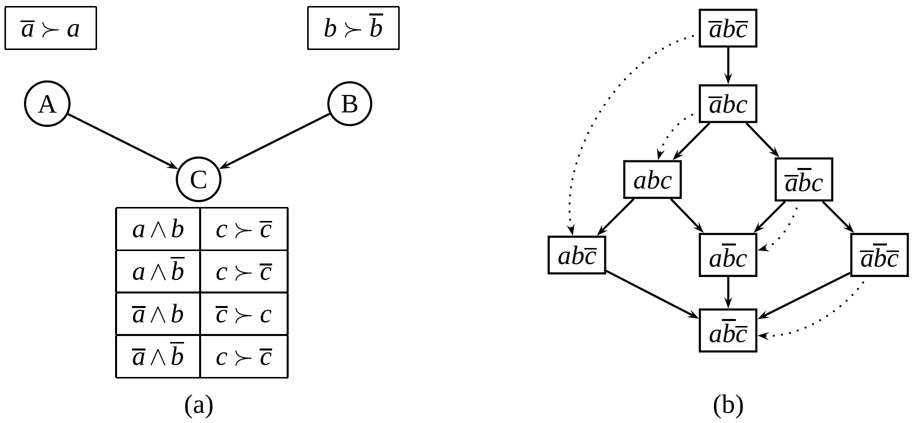


FIG. 5.24 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1

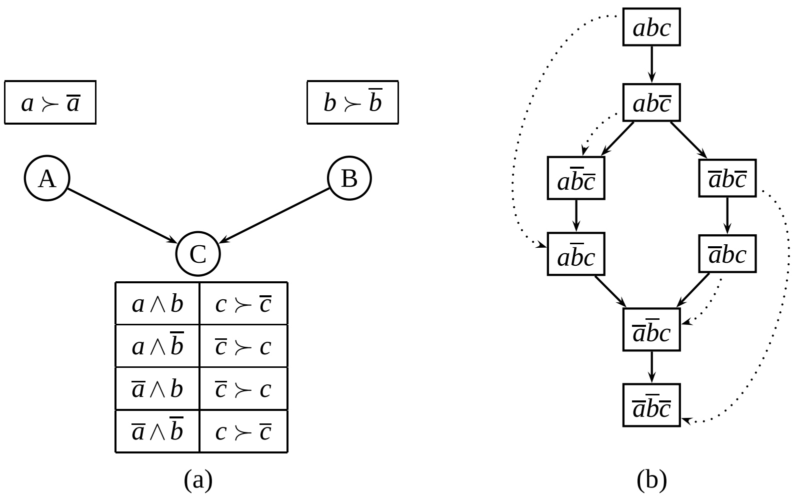


FIG. 5.25 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

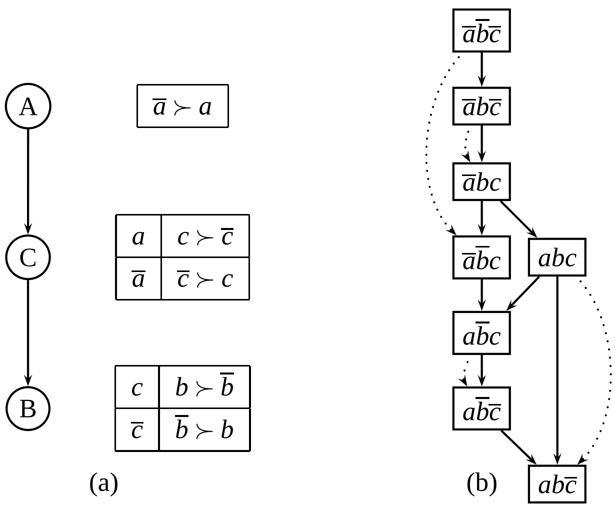


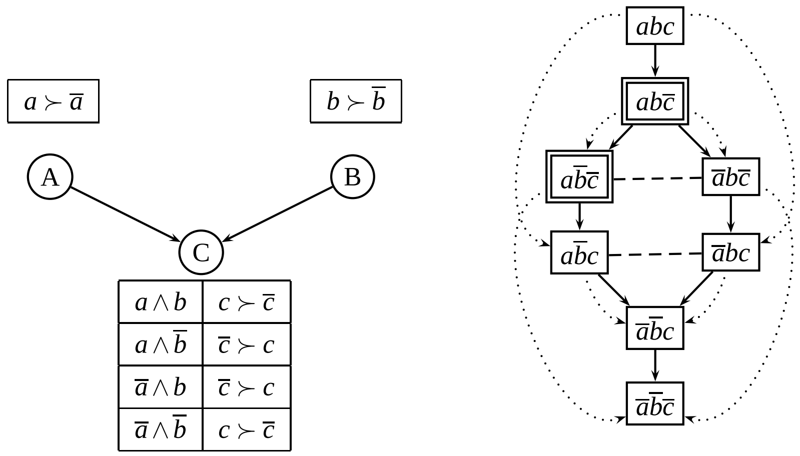
FIG. 5.26 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 3

à satisfaire leurs préférences (1 va instancier a à *faux*, 2 va instancier b à *vrai*). Le joueur 3, sachant cela, instanciera c selon l'instanciation de a, donc instanciera c à *faux*.

5.3.3.3 Exemple 3

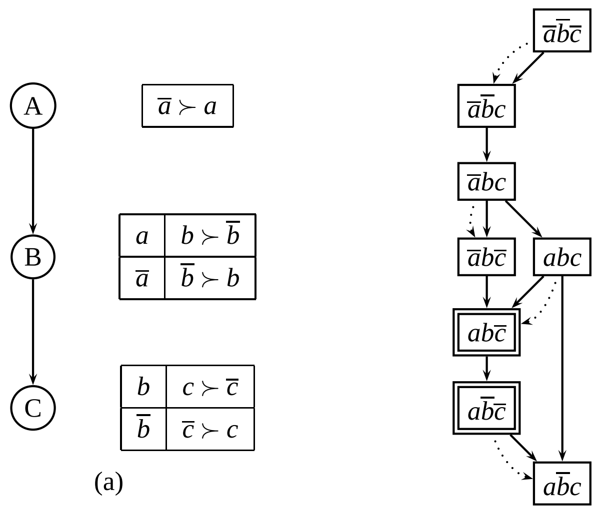
Etudions à présent un exemple avec des contraintes.

Soit le jeu $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ suivant :
- $A = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$, avec $D(a) = \{a, \overline{a}\}$, $D(b) = \{b, \overline{b}\}$ et $D(c) = \{c, \overline{c}\}$.
- $C = \neg a \vee c$,
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$,
- Le but du joueur 1, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.27,
- Le but du joueur 2, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.28.



(a) (b)

FIG. 5.27 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1



(a)

$\mathcal{N}_2$ (b)

FIG. 5.28 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

Sur ces figures, les états entourés par un trait double sont inaccessibles : ce sont les états ne respectant pas l'ensemble C de contraintes.

Nous devons donc réécrire les pré-ordres associés aux CP-nets des préférences de chacun des joueurs. Mais, on peut remarquer ici que comme les états contenant $a\overline{c}$ sont interdits, on peut également modifier les CPTs. Ces derniers sont représentés en figures 5.29 et 5.30.

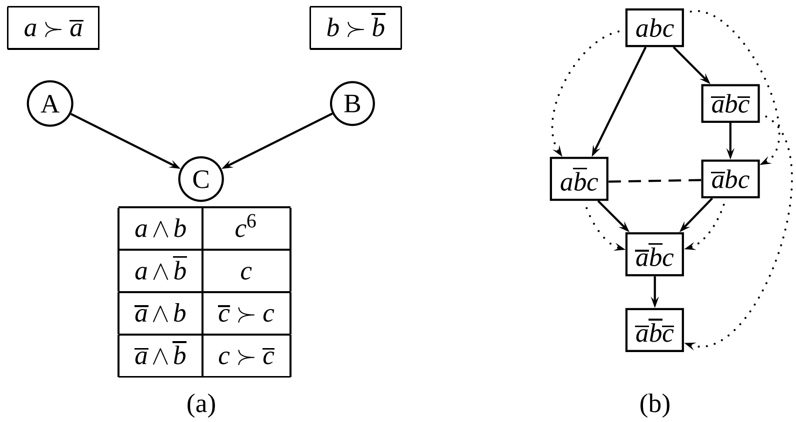


FIG. 5.29 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1

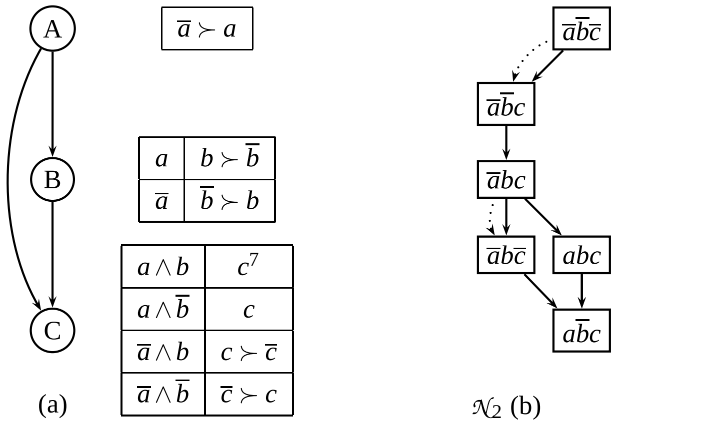


FIG. 5.30 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

On voit sur la figure 5.30 que certains états ne peuvent plus être comparés pour calculer les équilibres de Nash : en effet l'état *abc* par exemple ne peut être comparé à l'état $ab\overline{c}$ pour le joueur 2. Ce dernier étant interdit par C, on considérera donc que l'état *abc* est préféré pour ce joueur, tout comme l'état $a\overline{b}c$.
Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts nous donne ici comme résultat :

$$NE_{faible} = \{abc\}$$

$$NE_{fort} = \{abc\}$$

5.3.4 Propriétés des CP-nets dans les jeux booléens

Dans un premier temps, examinons ce qui se passe lorsque tous les joueurs ont le même graphe, ce dernier étant acyclique (ce qui correspond aux cas 1 et 4 de l'exemple 1 (section 5.3.3.1 page 44)).

Exemple 12 *Soit le jeu* $G = (A, V, C, \pi, \varphi)$ *suivant :*
– $A = \{1, 2, 3\}$

[6] Il est inutile de marquer que $c \succ \overline{c}$ car l'état $ab\overline{c}$ est interdit par l'ensemble de contraintes.
[7] Ici, il faut rajouter une dépendance entre A et C afin de pouvoir éliminer les cas interdits par l'ensemble de contraintes.

– *$V = \{a,b,c,d,e\}$, avec $D(a) = \{a,\overline{a}\}$, $D(b) = \{b,\overline{b}\}$, $D(c) = \{c,\overline{c}\}$, $D(d) = \{d,\overline{d}\}$, $D(e) = \{e,\overline{e}\}$*
– *$C = \varnothing$,*
– *$\pi_1 = \{a,d\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c,e\}$,*
– *Les buts des trois joueurs sont représentés par un même graphe acyclique donné en figure 5.31*

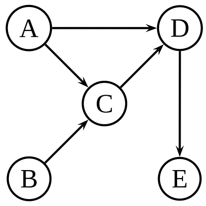


FIG. 5.31 – Graphe acyclique représentant les préférences de tous les joueurs

Par contre, les joueurs n'ont pas les mêmes tables de préférences conditionnelles. Les préférences propres aux joueurs sont représentées figure 5.32 pour le joueur 1*, figure 5.33 pour le joueur* 2 *et figure 5.34 page suivante pour le joueur* 3*.*

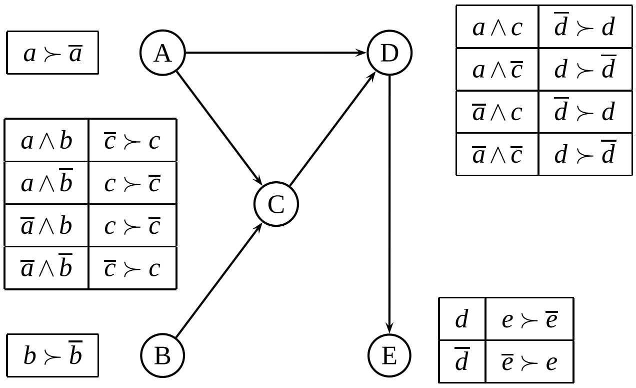


FIG. 5.32 – CP-net des préférences du joueur 1

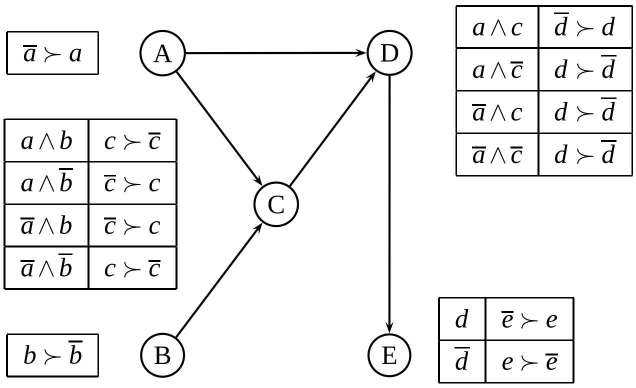


FIG. 5.33 – CP-net des préférences du joueur 2

En étudiant ce jeu, on constate tout d'abord que le joueur 1 *va instancier la variable a, qui est indépendante préférentiellement, de façon à satisfaire le mieux ses préférences. On aura donc a instancié à vrai. De même, le joueur* 2 *instanciera b à vrai.*
Le joueur 3 *sait que les joueurs* 1 *et* 2 *ont instancié leurs variables a et b de cette façon : il connaît leurs préférences et sait que ce sont des joueurs rationnels. Il va donc instancier la variable c qu'il contrôle en conséquence. Cette variable devient donc indépendante préférentiellement selon l'instanciation de a et b. On aura forcément c instancié à vrai.*
De même, l'instanciation de la variable c par le joueur 3 *permet à* 1 *d'instancier d à faux, ce qui permet enfin à* 3 *d'instancier e à faux.*
On obtient donc le profil de stratégies $S = abc\overline{d}\overline{e}$.
S est le seul et unique équilibre de Nash de ce jeu.

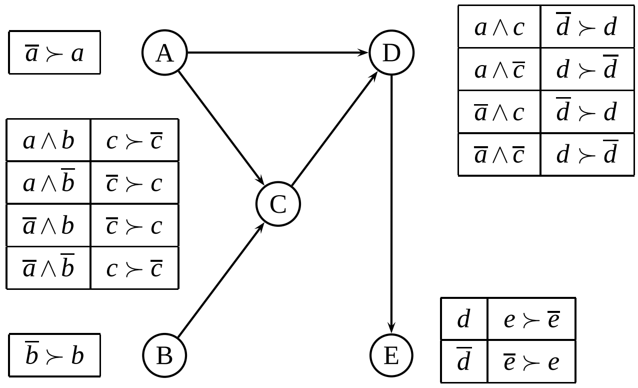


FIG. 5.34 – CP-net des préférences du joueur 3

Essayons de généraliser et de démontrer le résultat que nous pressentons sur cet exemple.

Propriété 14 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un CP-jeu booléen, tel que les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous identiques ($\forall i, j$, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j$) et acycliques.*
Ce jeu G ainsi défini aura alors un et un seul équilibre de Nash fort en stratégie pure.

La preuve de cette propriété utilise la notion de *recherche du résultat optimal* (*Outcome optimization queries*) introduite par [BBHP99, BBD$^+$04a]. En effet, chercher le résultat optimal d'un CP-net $\mathcal{N}$ consiste intuitivement à parcourir le graphe de haut en bas (c'est à dire des parents aux descendants), en instanciant chaque variable à sa valeur préféré selon l'instanciation de ses parents. Cette procédure est appelée *recherche avant* (*forward sweep*).
Il a été montré dans [BBHP99] que si le graphe ne permet généralement pas de déterminer une unique relation de préférence, il permet de déterminer un unique résultat optimal.
C'est exactement cette procédure que nous appliquons pour prouver la propriété précédente, et qui nous permet de déterminer l'unique équilibre de Nash d'un jeu dont les CP-nets représentant les buts des joueurs forment tous le même graphe acyclique.
Preuve : Nous allons faire cette démonstration en deux temps : tout d'abord nous démontrerons l'existence de cet équilibre de Nash, puis nous en démontrerons l'unicité.

– **Existence** :
  Les CP-nets représentant les buts des joueurs forment un graphe acyclique, donc il existe au moins une variable qui est préférentiellement indépendante (et qui sera donc sommet du graphe).
  Soit $A \neq \varnothing$ l'ensemble des variables préférentiellement indépendantes. On a donc $Pa(A) = \varnothing$. Soit $a \in A$ et soit i le joueur qui contrôle a ($a \in \pi_i$). Soit $D(a) = \{a, \overline{a}\}$. Comme les préférences des CP-nets sont représentées par des préférences strictes, on a soit $a \succ_i \overline{a}$, soit $\overline{a} \succ_i a$. Le joueur i peut ainsi fixer la valeur de a.

  Une fois que la valeur de toutes les variables appartenant à l'ensemble A sont fixées, on peut instancier de la même façon les variables ayant comme parents des variables appartenant à l'ensemble A.

  Soit B l'ensemble de variables tel que $Pa(B) \subseteq A$. Cet ensemble existe car le graphe est acyclique. Les variables de B sont conditionnellement préférentiellement indépendantes selon $s_A \in D(A)$.
  Soit $b \in B$, et soit j le joueur qui contrôle b ($b \in \pi_j$). Les valeurs de toutes les variables appartenant à $Pa(b)$ étant fixées, il ne reste plus qu'un choix pour fixer la valeur de b. Soit $D(b) = \{b, \overline{b}\}$. On a alors soit $b \succ_j \overline{b}$, soit $\overline{b} \succ_j b$. Le joueur j peut ainsi fixer la valeur de b.
  On peut ainsi instancier toutes les variables de l'ensemble B. Puis, en procédant de la même façon, il est possible d'instancier toutes les variables ayant comme parents des variables appartenant à l'ensemble $A \cup B$. On procède de cette façon jusqu'à ce que toutes les variables de l'ensemble V soient instanciées.

  Une fois toutes les variables instanciées, le profil de stratégies $S = s_1 \dots s_n$ obtenu est un équilibre de Nash fort en stratégies pures.
  Soit le joueur i. Toutes les variables que ce joueur contrôle sont préférentiellement indépendantes ou conditionnellement préférentiellement indépendantes. La stratégie s_i, appartenant au profil de stratégies

S, correspond à l'instanciation optimale pour i des variables de π_i, quels que soient les choix des autres joueurs. On a donc :

$$\forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i, s_{-i}) \succeq_i (s_i', s_{-i})$$

Cette équation est valable pour toutes les stratégies composant S. On a donc bien :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i, s_{-i}) \succeq_i (s_i', s_{-i})$$

Le profil de stratégies $S = (s_1, \ldots, s_n)$ est donc bien un équilibre de Nash en stratégies pures.

– **Unicité** :
Supposons que ce jeu ait deux équilibres de Nash : les profils de stratégies$S = s_1 s_2 \ldots s_n$ et $T = t_1 t_2 \ldots t_n$. S et T doivent être différents. On a donc $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, $s_i \neq t_i$, avec :

$$\forall s_i' \in 2^{\pi_i}, (s_i, s_{-i}) \succeq_i (s_i', s_{-i})$$

$$\forall t_i' \in 2^{\pi_i}, (t_i, t_{-i}) \succeq_i (t_i', t_{-i})$$

Soit i le joueur pour qui $s_i \neq t_i$. Il existe donc une variable contrôlée par i qui n'a pas la même instanciation pour les stratégies s_i et t_i. Notons cette variable v sachant que $v \in \pi_i$ et que $D(v) = \{v, \overline{v}\}$ (donc soit $v \in S$ et $\overline{v} \in T$, soit $\overline{v} \in S$ et $v \in T$).
Or, comme le graphe est acyclique,
  – soit v est préférentiellement indépendant, auquel cas on a soit $v \succ_i \overline{v}$, soit $\overline{v} \succ_i v$.
  Supposons que $v \succ_i \overline{v}$, que $v \in S$ et donc que $\overline{v} \in T$. Dans ce cas, $\forall t_i' \in 2^{\pi_i}, (t_i, t_{-i}) \succeq_i (t_i', t_{-i})$ n'est plus vérifié puisqu'il suffit de poser t_i' comme étant t_i dans lequel on remplace $\overline{v}$ par v. T n'est donc pas un équilibre de Nash (et vice versa pour S si $\overline{v} \succ_i v$). On a le même raisonnement si $\overline{v} \in S$ et $v \in T$.
  – soit v n'est pas préférentiellement indépendant. Mais, comme le graphe est acyclique, si on applique l'algorithme précédent pour instancier tous les parents de v, il n'y a qu'une et une seule possibilité à chaque fois en partant des variables préférentiellement indépendantes. Et une fois toutes ces variables instanciées, on peut considérer v comme étant préférentiellement indépendante. On montre alors de la même façon que précédemment que soit T soit S ne sont pas des équilibres de Nash.

■

Les définitions classiques de la théorie des graphes nous permettent d'introduire les notions suivantes :

Définition 31 (Union de graphes)
Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un CP-jeu booléen tel que $\forall i \in A$, les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous acycliques.
Pour chaque joueur i, $\mathcal{G}_i = \langle V, Arc_i \rangle$, V étant l'ensemble des nœuds du graphe[8], et Arc_i représentant l'ensemble des arcs orientés du graphe représentant le CP-net de i.
L'union des graphes *de G sera le graphe $\mathcal{G} = \langle V, Arc_1 \cup \ldots \cup Arc_n \rangle$.*

Définition 32 (Jeu équivalent par réecriture)
Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un CP-jeu booléen tel que $\forall i \in A$, les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous acycliques.
On appelle $G^* = (A, V, C, \pi, \Phi^*)$ le jeu équivalent par réecriture de G *dans lequel on a remplacé le graphe issu du CP-net représentant le but de chacun des joueurs par l'union de tous les graphes des joueurs.*
Les tables de préférences conditionnelles sont modifiées de façon à correspondre avec le nouveau graphe, tout en donnant les mêmes préférences qu'avant : si l'arc (X, Y) est ajouté au graphe, la table de préférence conditionnelle de la variable Y sera la même que précédemment pour chaque instanciation $x \in D(X)$. Plus formellement, si on note $\succ_i^y$ la relation associée à la table de préférence conditionnelle $CPT_i(Y)$ pour le CP-net du joueur i dans le jeu G, on a pour le jeu G^* : $\forall x \in D(X), \succ_{i,x}^y = \succ_{i,\overline{x}}^y = \succ_i^y$.

Propriété 15 *Soit $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ un CP-jeu booléen tel que $\forall i \in A$, les graphes $\mathcal{G}_i$ sont tous acycliques.*
Soit $G^* = (A, V, C, \pi, \Phi^*)$ le jeu équivalent par réecriture de G.
Le jeu G^* permet d'obtenir les mêmes pré-ordres sur les profils de stratégies que le jeu G. On dit que G et *G^** sont équivalents.

[8]ici identique pour chacun des joueurs puisque c'est l'ensemble des variables du jeu.

Preuve : Soit, pour chaque joueur $i \in A$, $\succeq_i$ la relation de préférence qui satisfait le CP-net du joueur i pour le jeu G. Montrons que $\succeq_i$ satisfait le CP-net du joueur i pour le jeu G^*.
$\forall X \in V$ deux cas se présentent :

1. X a les mêmes parents dans le CP-net de G^* et de G. Dans ce cas là, la relation $\succeq_i^x$ est la même $\forall x \in D(X)$.
2. X n'a pas les mêmes parents que dans le CP-net du jeu G. Un arc a été ajouté. Notons $\langle Y, X\rangle$ cet arc. On a alors $\forall y \in D(Y), \succeq_{i,y}^x = \succeq_i^x$. On a donc bien la même relation.

La relation $\succeq_i$ satisfait donc bien le CP-net du joueur i pour le jeu G^*. ■

Exemple 13 *Etudions le jeu G correspondant au cas numéro 2 de l'exemple 1 (section 5.3.3.1 page 44). Les CP-nets représentant les buts des deux joueurs sont présentés figure 5.35.*

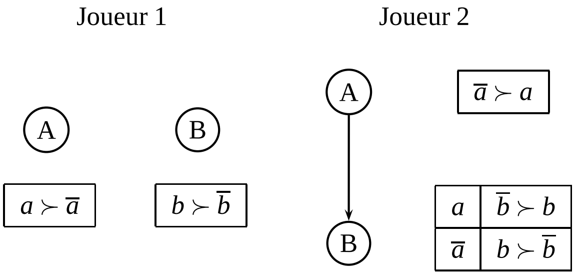


FIG. 5.35 – CP-nets des préférences des joueurs

Le CP-net du joueur 1 *est donc représenté par le graphe* $\mathcal{G}_1 = (\{A,B\}, \emptyset)$, *celui du joueur* 2 *par le graphe* $\mathcal{G}_2 = (\{A,B\}, \{(A,B)\})$.
Le graphe représentant l'union de ces deux graphes sera le graphe : $\mathcal{G}^* = (\{A,B\}, \{(A,B)\})$.
Si l'on remplace $\mathcal{G}_1$ *et* $\mathcal{G}_2$ *par* $\mathcal{G}^*$*, on obtient les CP-nets présentés figure 5.36.*

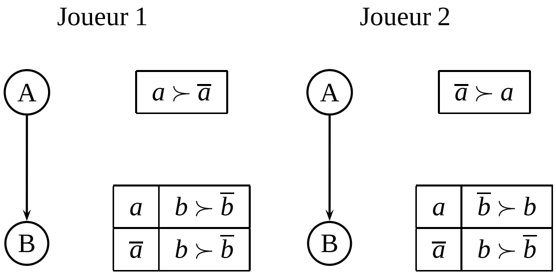


FIG. 5.36 – CP-nets des préférences des joueurs après l'union des graphes

Les jeux G et G^* *induisent les mêmes pré-ordres sur les profils de stratégies.*

Remarque : Si l'union des graphes des joueurs d'un jeu G permet d'obtenir un graphe acyclique, alors la propriété 14 page 54 est applicable sur le jeu G^* équivalent par réecriture à G. Comme ces deux jeux sont équivalents, le jeu G aura un et un seul équilibre de Nash en stratégie pure (voir exemple 14).
Par contre, si l'union des graphes des joueurs est un graphe cyclique, ni l'unicité ni l'existence d'un équilibre de Nash en stratégie pure ne sont plus garantis (voir exemple 15 page 59).

Exemple 14 *Soit le jeu* $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ *suivant :*
- $A = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$, *avec* $D(a) = \{a, \overline{a}\}$, $D(b) = \{b, \overline{b}\}$ *et* $D(c) = \{c, \overline{c}\}$.
- $C = \emptyset$,
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$,
- *Le but du joueur* 1*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.37 page suivante,*

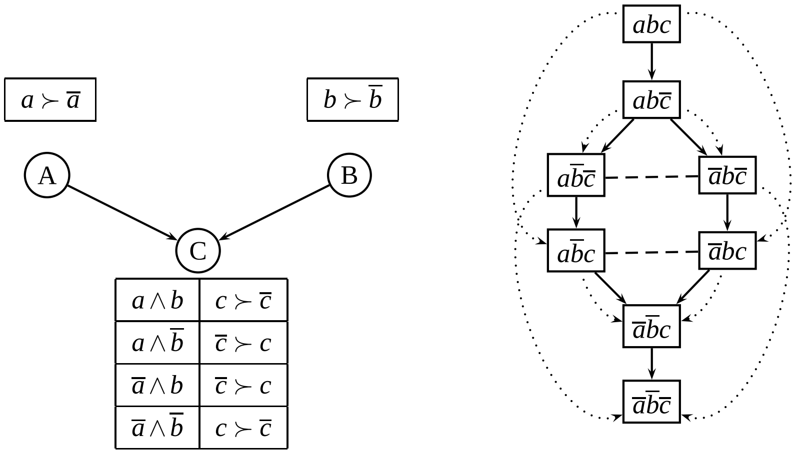


FIG. 5.37 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1

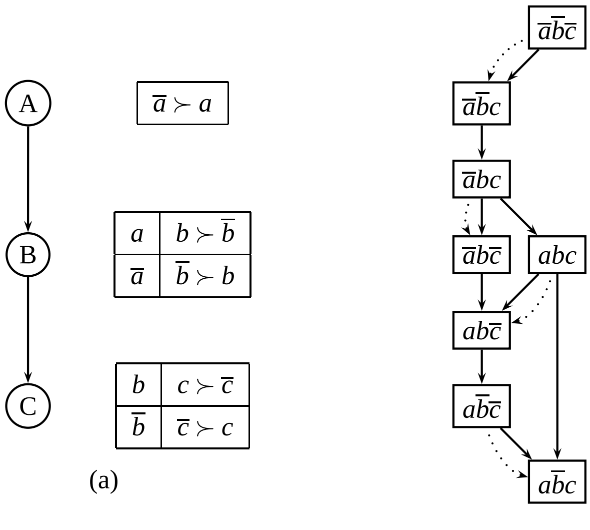


FIG. 5.38 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

– *Le but du joueur 2, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.38 page précédente.*

On calcule à présent l'union des graphes issus des CP-nets représentant les buts de ces deux joueurs, et l'on crée ainsi le jeu G^* équivalent par réecriture au jeu G. Les buts des deux joueurs sont alors représentés par les CP-nets représentés figure 5.39 et 5.40.

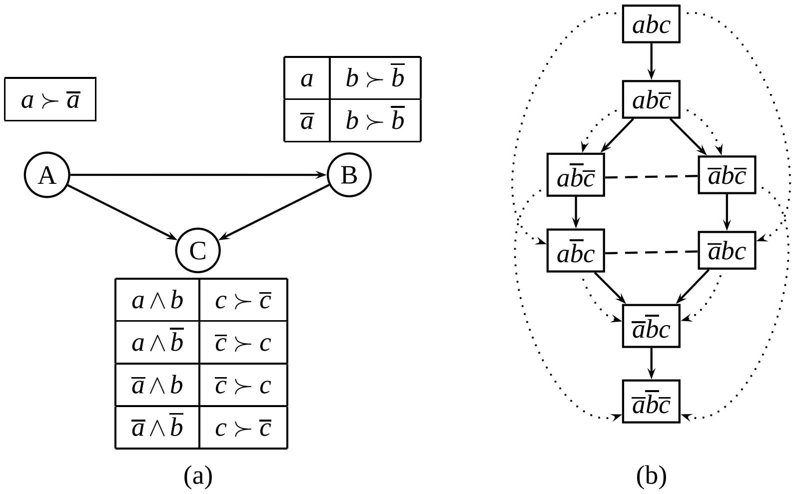


FIG. 5.39 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1 pour le jeu G^* équivalent par réecriture de G

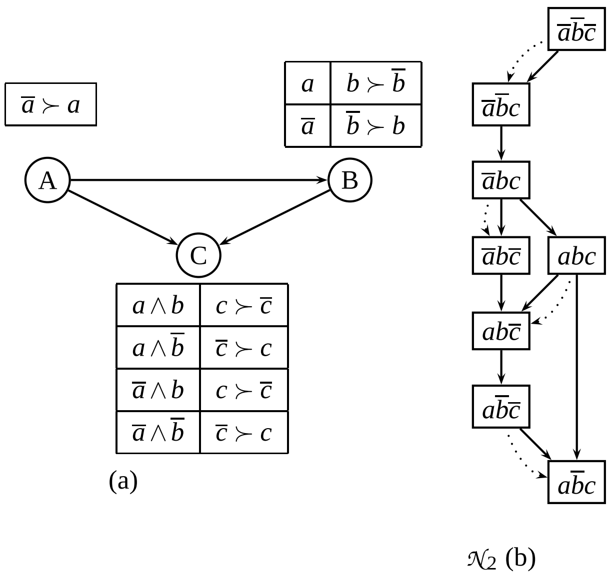


FIG. 5.40 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2 pour le jeu G^* équivalent par réecriture de G

L'union des graphes donne ici un graphe acyclique. On peut donc appliquer la propriété 14 page 54 : le jeu G a un et un seul équilibre de Nash.

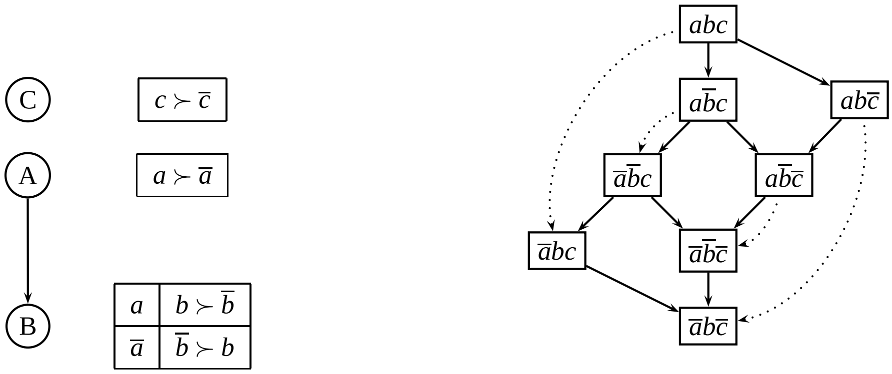
En effet, le calcul des équilibres de Nash faibles et forts nous donne ici comme résultat :

$$NE_{faible} = \{abc\}$$

$$NE_{fort} = \{abc\}$$

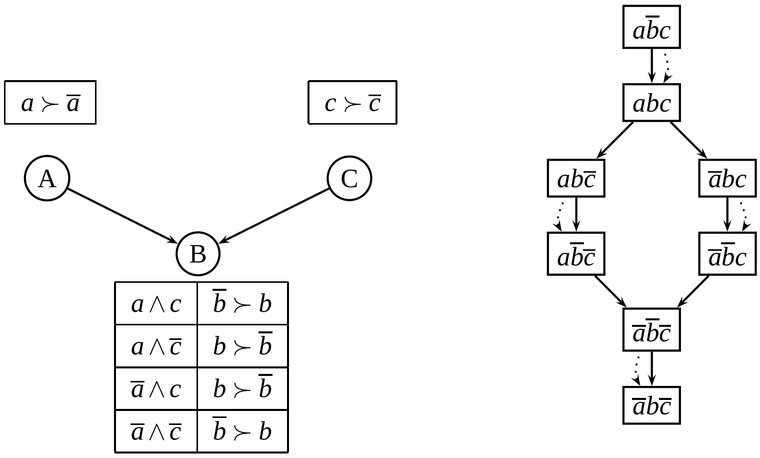
Par contre, l'exemple suivant montre bien que si l'union des graphes fournit un graphe cyclique, alors il peut ne pas y avoir d'équilibre de Nash en stratégie pure.

Exemple 15 *Soit le jeu $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ suivant :*
- $A = \{1,2,3\}$
- $V = \{a,b,c\}$, *avec* $D(a) = \{a,\overline{a}\}$, $D(b) = \{b,\overline{b}\}$ *et* $D(c) = \{c,\overline{c}\}$.
- $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a\}, \pi_2 = \{b\}, \pi_3 = \{c\}$,
- *Le but du joueur* 1*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.41,*
- *Le but du joueur* 2*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.42,*
- *Le but du joueur* 3*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.43 page suivante.*



(a) (b)

FIG. 5.41 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1



(a) (b)

FIG. 5.42 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts ne nous donne ici aucun résultat. Il n'y en a pas.

Si l'on calcule l'union des graphes de ce jeu, on trouve le graphe donné en figure 5.44.
Ce graphe est bien cyclique.

De même, si on étudie le cas n°6 de l'exemple en section 5.3.3.1 page 44, on constate que si l'union des graphes est cyclique il peut y avoir plusieurs équilibres de Nash en stratégie pure.

Exemple 16 *Etudions le jeu G correspondant au cas numéro 6 de l'exemple 1 (section 5.3.3.1 page 44). Les CP-nets représentant les buts des deux joueurs sont présentés figure 5.45 page suivante.*

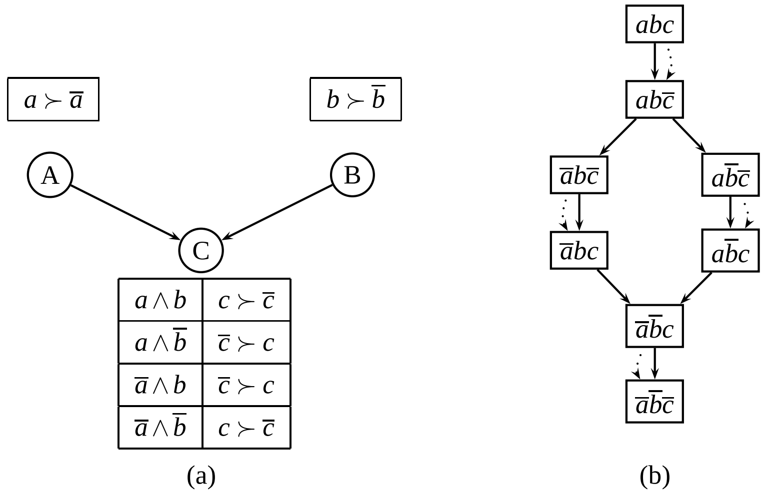


FIG. 5.43 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 3

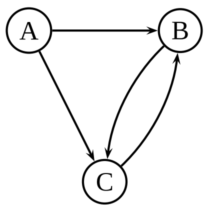


FIG. 5.44 – Union des graphes

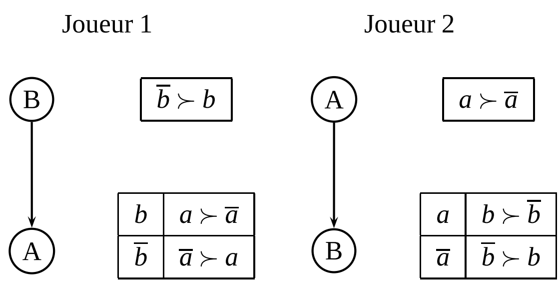


FIG. 5.45 – CP-nets des préférences des joueurs

Ce jeu a deux équilibres de Nash faibles et forts :

$$NE_{faible} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

$$NE_{fort} = \{ab, \overline{a}\overline{b}\}$$

Si l'on calcule l'union des graphes de ce jeu, on trouve le graphe sur la figure 5.46 :

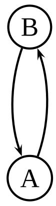


FIG. 5.46 – Union des graphes

Ce graphe est bien cyclique.

5.3.5 Introduction d'une relation d'indifférence

Nous supposons à présent que les relations d'ordre qui décrivent les préférences des joueurs dans les tables de préférences conditionnelles ne sont plus totales mais partielles. Il peut y avoir des relations d'indifférence entre deux valeurs pour une variable donnée.
On redéfinit alors dans ce cadre les tables de préférences conditionnelles et les CP-nets.

Définition 33 (Table de préférence conditionnelle (CPT))
La table de préférence conditionnelle *(notée $CPT_i(X)$) décrit les préférences du joueur i sur les valeurs de la variable X, étant données toutes les combinaisons des valeurs des variables parents.*
Pour chaque instanciation p de $Pa_i(X)$, $CPT_i(X)$ spécifie un **ordre partiel** *tel que l'on ait soit $x \succ_{i,p} \overline{x}$, soit $\overline{x} \succ_{i,p} x$, soit $x \sim_{i,p} \overline{x}$.*

Définition 34 (CP-net)
Un CP-net *pour le joueur i sur les variables $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ est un graphe orienté G sur $X_1, \ldots, X_n$. Chaque nœud X_j est annoté avec la table de préférence conditionnelle $CPT_i(X_j)$ correspondante. Chaque table de préférence conditionnelle $CPT_i(X_j)$ est associée à un* **ordre partiel** *$\succ^j_{i,p}$, selon chaque instanciation $p \in D(Pa(X_j))$.*

Présentons un exemple de jeu utilisant cette nouvelle définition des CP-nets.

Exemple 17 *Soit le jeu $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ suivant :*
- $A = \{1, 2\}$
- $V = \{a, b, c\}$, *avec* $D(a) = \{a, \overline{a}\}$, $D(b) = \{b, \overline{b}\}$ *et* $D(c) = \{c, \overline{c}\}$.
- $C = \varnothing$,
- $\pi_1 = \{a, b\}$, $\pi_2 = \{c\}$,
- *Le but du joueur* 1*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.47 page suivante,*
- *Le but du joueur* 2*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.48 page suivante,*

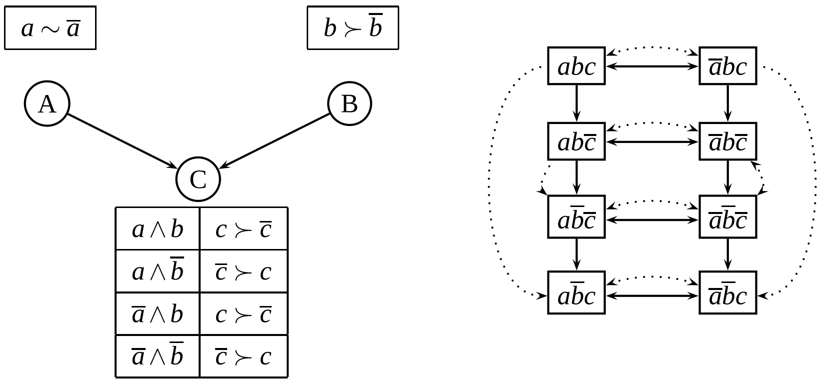
Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts nous donne ici comme résultat :

$$NE_{faible} = \{abc, ab\overline{c}, \overline{a}bc, \overline{a}b\overline{c}\}$$

$$NE_{fort} = \{abc, ab\overline{c}, \overline{a}bc, \overline{a}b\overline{c}\}$$

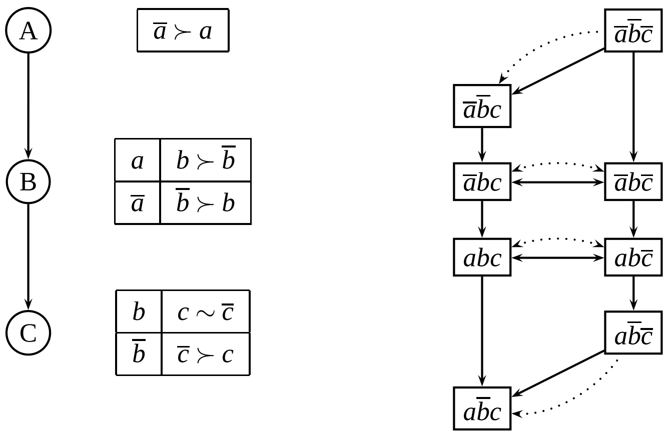
Etudions maintenant sur un exemple ce qu'il se passe lorsque tous les joueurs ont un graphe commun acyclique, et que l'on a des préférences partielles.

Exemple 18 *Soit le jeu $G = (A, V, C, \pi, \Phi)$ suivant :*
- $A = \{1, 2, 3\}$



(a) (b)

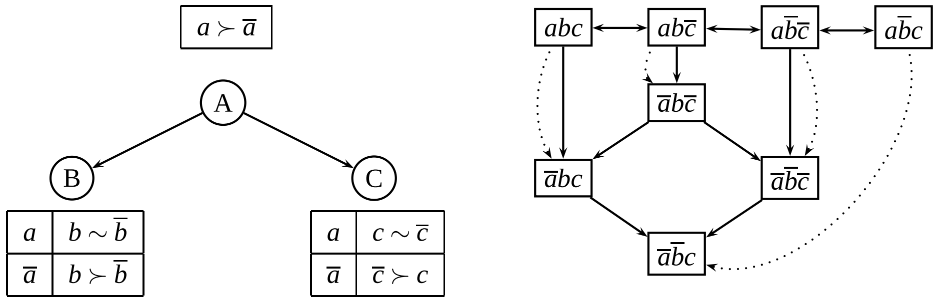
FIG. 5.47 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1



(a) (b)

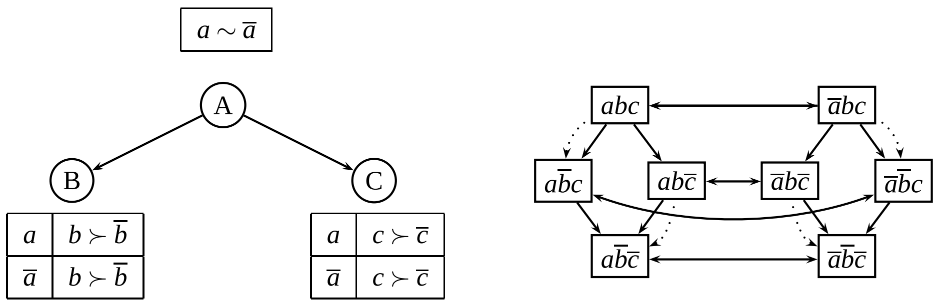
FIG. 5.48 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2

– $V = \{a, b, c\}$, *avec* $D(a) = \{a, \overline{a}\}$, $D(b) = \{b, \overline{b}\}$ *et* $D(c) = \{c, \overline{c}\}$.
– $C = \varnothing$,
– $\pi_1 = \{a\}, \pi_2 = \{b\}, \pi_3 = \{c\}$,
– *Le but du joueur* 1*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.49,*
– *Le but du joueur* 2*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.50,*
– *Le but du joueur* 3*, et le pré-ordre associé sur les profils de stratégies, sont représentés par la figure 5.51.*



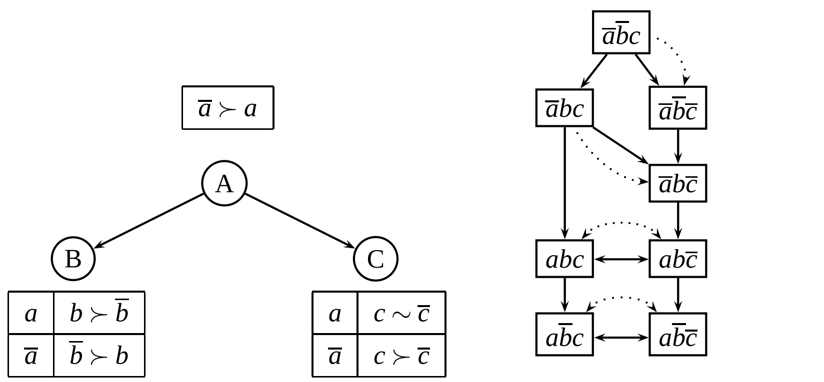
(a) (b)

FIG. 5.49 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 1



(a) (b)

FIG. 5.50 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 2



(a) (b)

FIG. 5.51 – CP-net des préférences et le pré-ordre associé du joueur 3

Le calcul des équilibres de Nash faibles et forts nous donne ici comme résultat :

$$NE_{faible} = \{abc, ab\overline{c}\}$$

$$NE_{fort} = \{abc, ab\overline{c}\}$$

Cet exemple nous montre que l'unicité des équilibres de Nash n'est plus assurée. Nous allons montrer que l'existence l'est toujours.

Propriété 16 *Soit* $G = (A,V,C,\pi,\Phi)$ *un jeu booléen, dont les CP-nets représentant les buts des joueurs forment tous le même graphe acyclique (les tables de préférences conditionnelles pouvant être différentes selon les joueurs), et avec des préférences conditionnelles partielles.*
Ce jeu ainsi défini aura alors au moins un équilibre de Nash en stratégie pure.

Preuve : La démonstration de cette propriété est exactement la même que celle de la propriété 14 page 54. En effet, cette partie de la démonstration n'utilise pas le fait que les préférences conditionnelles sont totales.
■

Remarque : Nous pouvons ici comme dans la section 5.3.4 page 52 calculer le jeu G^* équivalent par réécriture de G en faisant l'union des graphes.
Si l'union des graphes des joueurs d'un jeu G permet d'obtenir un graphe acyclique, la propriété 16 est applicable sur le jeu G^* équivalent par réécriture à G. Comme ces deux jeux sont équivalents, le jeu G aura au moins un équilibre de Nash en stratégie pure.

5.4 Comparaison entre buts à priorité et CP-nets

On peut se demander pourquoi définir ces deux méthodes de représentation des préférences. Y en a t'il une meilleure, plus efficace que l'autre ?

Les préférences Ceteris Paribus, utilisées pour construire les CP-nets, sont plus intuitives et sont plus proches des préférences des utilisateurs. Elles sont plus faciles à spécifier.
Mais ces préférences ne suffisent pas. En effet, certaines préférences ne peuvent pas être traduites grâce à des CP-nets. C'est pour cela qu'il est nécessaire d'exploiter une seconde méthode, ici les buts à priorité, moins intuitive, mais qui permet d'élargir le cadre de travail.
Par exemple, le jeu présenté en section 5.2.3 page 32 utilise des buts à priorité, mais ne pourrait pas être traduisible avec des CP-nets : les buts des joueurs permettent de comparer des états qui ne sont pas identiques toutes choses étant égales par ailleurs.
D'autres jeux seront exploitables avec les CP-nets mais ne le seront pas avec les buts à priorités. Par exemple, le jeu présenté dans l'exemple 18 page 61 ne peut pas être traduit avec des buts à priorité. En effet, si l'on considère le but du joueur 1, représenté figure 5.49 page précédente, la relation d'ordre associée comprend des états incomparables ($\bar{a}bc$ et $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ par exemple), et des états équivalents (abc et $ab\bar{c}$ par exemple). Or, parmi les critères que nous avons étudiés, seul le critère discrimin permet de représenter des relations de préférences partielles. Il est donc le seul susceptible d'être utilisé ici. Mais il ne permet pas de représenter deux états équivalents, et ne peut donc pas traduire cette relation de préférence.

Chapitre 6

Les autres travaux existants

Nous ne sommes pas les premiers à étudier des concepts tels que les équilibres de Nash et les stratégies dominées d'un point de vue logique. Mis à part les jeux booléens [HvdHMW01, Har04a, DvdH04], il existe un certain nombre d'autres travaux sur l'étude des jeux statiques dans une perspective logique et IA.

Deux lignes récentes de travail permettent d'exprimer des jeux avec des préférences *ordinales* dans des cadres bien connus en intelligence artificielle.
Dans Foo et al [FMB04], un jeu en forme normale est traduit par un *programme logique avec des disjonctions ordonnées* (logic program with ordered disjunction - LPOD), dans lequel un ensemble de clauses représente les préférences de chaque joueur sur ses actions possibles, étant donné tous les profils de stratégies des autres joueurs. Il est alors démontré que les équilibres de Nash en stratégies pures correspondent exactement à l'ensemble des réponses préférées. Cette traduction a une limitation : sa taille. Les LPODs ont la même taille que les formes normales du jeu (chaque joueur a besoin d'un nombre de clauses égal au nombre de profils de stratégies des autres joueurs). Cependant, cette limitation vient de la façon dont les LPODs sont construits à partir des jeux, et peut être corrigée en permettant aux joueurs d'exprimer leurs préférences par des LPODs (et des buts à priorité) quelconques, ce qui permettrait d'avoir une représentation beaucoup plus compacte.
Dans De Vos et al [DVV99], un jeu est représenté par un *programme logique de choix* (choice logic program), dans lequel un ensemble de règles exprime que le joueur a choisi la “meilleure réponse” étant donné les choix des autres joueurs. Il existe alors pour chaque jeu un programme logique de choix tel que l'ensemble des modèles stables du programme coincide avec l'ensemble des équilibres de Nash du jeu. Cette propriété fournit une méthode systématique permettant de calculer les équilibres de Nash dans les jeux finis.
Dans Apt et al [ARV05], les CP-nets sont vus comme des jeux en forme normale et vice versa. Chaque joueur i est associé à une variable X_i du CP-net, dont le domaine est l'ensemble des actions possibles du joueur. Les préférences sur les actions d'un joueur étant donné les stratégies des autres joueurs sont exprimées dans une table de préférences conditionnelles. Exprimer un jeu avec des CP-nets peut être parfois plus compact que la forme normale explicite du jeu, pourvu que les préférences de certains joueurs ne dépendent pas de tous les autres joueurs.

Une différence importante avec notre cadre de travail est que nous permettons aux joueurs de contrôler un ensemble arbitraire de variables : nous ne voyons donc pas les joueurs comme étant des variables. La seule façon d'exprimer dans un CP-net qu'un joueur contrôle plusieurs variables consisterait à introduire une nouvelle variable dont le domaine serait l'ensemble de toutes les combinaisons de valeurs pour ces variables. La taille du CP-net serait alors exponentielle en fonction du nombre de variables.
Une seconde différence importante, qui est valable aussi bien avec Foo et al [FMB04] qu'avec De Vos et al [DVV99], est que les joueurs peuvent exprimer des préférences binaires arbitraires, jusqu'au cas extrême où la satisfaction du but d'un joueur dépend uniquement de variables contrôlées par d'autres joueurs.
Une dernière différence (moins technique et plus fondamentale) entre ces deux lignes de travail, qui explique en fait les deux différences exprimées plus haut, est que nous ne *traduisons* pas des jeux en forme normale en autre chose, mais que nous *exprimons* des jeux en utilisant un langage logique.

En Section 4.2.1 page 12, nous avons mentionné un lien avec le problème de contrôlabilié en logique propositionnelle étudié par Boutilier [Bou94] et Lang et al [LM98]. Une récente ligne de travail dans ce domaine [vdHW05] étudie une logique de coopération dans lequel on suppose que chaque agent contrôle un ensemble de variables propositionnelles. Pendant que l'on se concentre sur les préférences et le concept de solution, van der Hoek et Wooldridge [vdHW05] s'intéressent au pouvoir réel des agents : ils raisonnent sur l'ensemble des états qu'un groupe d'agents peut atteindre.

Chapitre 7

Conclusion

La notion de jeu booléens étudiée par [HvdHMW01, Har04a] semble prometteuse quand on cherche à modéliser de manière compacte les préférences des joueurs dans le cadre de jeux statiques. Toutefois, ces jeux booléens correspondent à une spécification très particulière (2 joueurs, jeux à somme nulle, utilités binaires) et nous avons donc du étendre cette notion. Cette extension porte sur plusieurs points :

- accepter un nombre quelconque de joueurs (et plus seulement 2) ; la notion de coalition de joueurs prend alors tout son sens ;
- envisager des jeux à somme non nulle ; ainsi le gain d'un joueur n'est plus la perte d'un autre ;
- introduire deux langages de représentation de préférence dans les jeux booléens, afin de pouvoir mieux représenter les préférences entre agents : les buts à priorité et les CP-nets.

Bien entendu, les jeux booléens évoqués par Harrenstein et co. dans [HvdHMW01, Har04a] peuvent être vus comme des cas particulier de ces "jeux booléens étendus".

En parallèle, nous avons aussi établi un lien entre les jeux booléens (étendus ou pas) et les notions d'impliquants et d'impliquants premiers (notions bien connues de tous ceux qui s'intéressent au problème de la satisfiabilité en logique classique). Ainsi, pour un joueur ou une coalition de joueurs, la détection de stratégies gagnantes dans un jeu booléen revient au simple calcul des impliquants premiers liés à l'ensemble des variables contrôlées par ce joueur ou cette coalition de joueurs. Nous avons également identifié la complexité algorithmique de quelques problèmes liés aux jeux booléens.

Ce travail, encore très préliminaire, ouvre de nombreuses perspectives :

- poursuivre l'extension des jeux booléens pour permettre aux joueurs de partager le contrôle des variables ; une même variable pourra alors être contrôlée par plusieurs joueurs ;
- étudier la notion de préférences entre coalitions, et établir des liens avec des notions bien connues en théorie des jeux coopératifs (valeur de Shapley, cœur etc.) ;
- définir des relations de conséquence sur le modèle des travaux d'Harrenstein [Har04b] à partir de ces jeux booléens étendus ;
- introduire de la dynamicité dans ces jeux booléens
- affiner l'étude des contraintes intra-agents : que se passe-t'il lorsque C est inconsistant ? Lorsque C est inconsistant avec les buts d'un agent ?
- modéliser ces jeux à l'aide de la logique des actions ;
- utiliser ces jeux pour l'étude de processus de raisonnement faisant intervenir n agents en interaction (argumentation, prise de décision, ...).

Bibliographie

[ARV05] Krzysztof R. Apt, Fancesca Rossi, and Kristen Brent Venable. Cp-nets and nash equilibria. In Elsevier, editor, *Proc. CIRAS 2005 (Third International Conference on Computational Intelligence, Robotics and Autonomous Systems)*, Singapore, December 13-16 2005.

[BBD+04a] C. Boutilier, R. Brafman, C. Domshlak, H. Hoos, and D. Poole. Cp-nets : A tool for representing and reasoning with conditional *Ceteris Paribus* preference statements. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 21 :135–191, 2004.

[BBD+04b] C. Boutilier, R. Brafman, C. Domshlak, H. Hoos, and D. Poole. Preference-based constrained optimization with cp-nets. *Computational Intelligence*, 20(2) :137–157, 2004. Special Issue on Preferences.

[BBHP99] Craig Boutilier, Ronen I. Brafman, Holger H. Hoos, and David Poole. Reasoning with conditional ceteris paribus preference statements. In *Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-99)*, 1999.

[BCD+93] Salem Benferhat, Claudette Cayrol, Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In Bajcsy, editor, *Proc. of the 13th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'93), ChambÃ©ry*, pages 640–645, Chambéry, France, 28 aoÃ»t-3 septembre 1993.

[BLSL05] Elise Bonzon, Marie Christine Lagasquie-Schiex, and Jérôme Lang. Jeux booléens statiques et représentation compacte de préférences : rapport préliminaire. In Andreas Herzig, Yves Lespérance, and Abdel-Illah Mouaddib, editors, *Modèles Formels de l'Interaction (MFI'05)*, pages 55–64. Editions Cépaduès, 25-27 mai 2005.

[BLSL06] Elise Bonzon, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, and Jérôme Lang. Compact preference representation for boolean games. submitted to PRICAI 2006, 2006.

[BLSLZ06] Elise Bonzon, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, Jérôme Lang, and Bruno Zanuttini. Boolean games revisited. submitted to ECAI 2006, 2006.

[Bou94] C. Boutilier. Toward a logic for qualitative decision theory. In *KR-94*, pages 75–86, 1994.

[Bre89] Gerhard Brewka. Preferred subtheorie : An extended logical framework for default reasoning. In Sridharan, editor, *Proceedings of the 11th IJCAI*, pages 1043–1048, Detroit, 1989.

[CC02] L. Cholvy and Garion C. Deriving individual goals from goals allocated to a group of agents. *JEDAI*, 2002.

[CMLLM04] S. Coste-Marquis, J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2004)*, pages 203–212, 2004.

[DLP92] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Inconsistency in possibilistic knowledge bases : To live with it or not live with it. In L.A. Zadeh and J. Kacprzyk, editors, *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, pages 335–351. Wiley, New York, 1992.

[Dom02] Carmel Domshlak. *Modeling And Reasoning About Preferences With CP-nets*. Ph. d. thesis, Ben-Gurion University of the Negev, Negev, IsraÃ«l, 2002.

[DvdH04] P.E. Dunne and W. van der Hoek. Representation and complexity in boolean games. In *Proc. of JELIA2004*, volume LNCS 3229, pages 347–359. José Júlio Alferes et João Alexandre Leite (eds), 2004.

[DVV99] M. De Vos and D. Vermeir. Choice logic programs and nash equilibria in strategic games. In Jorg Flum and Mario Rodriguez-Artalejo, editors, *Computer Science Logic (CSL'99)*, volume 1683, pages 266–276, 1999.

[FMB04] N. Foo, T. Meyer, and G. Brewka. Lpod answer sets and nash equilibria. In M. Maher, editor, *Proceedings of the 9th Asian Computer Science Conference (ASIAN 2004)*, pages 343–351. Chiang Mai, Thailand, Springer LNCS 3321, 2004.

[Gef92] Hector Geffner. Default reasoning : causal and conditional theories. *MIT Press*, 1992.

[Har04a] P. Harrenstein. *Logic in Conflict*. PhD thesis, Utrecht University, 2004.

[Har04b] P. Harrenstein. Logical consequence and the theory of games. *Philosophia Scientiae*, 8(2) :179–193, 2004. Special issue on logic and games.

[HK02] J. Hillas and E. Kohlberg. Foundations of strategic equilibrium. In R. Aumann and S. Hart, editors, *Handbook of Game Theory*, volume 3, pages 1598–1663. North-Holland, 2002.

[HvdHMW01] P. Harrenstein, W. van der Hoek, J.J Meyer, and C. Witteveen. Boolean games. In J. van Benthem, editor, *Proceedings of the Eighth Conference (TARK 2001)*, volume Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, pages 287–298. San Francisco, Morgan Kaufmann, 2001.

[Lan04] J. Lang. Logical preference representation and combinatorial vote. In *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. Kluwer, 2004.

[Leh95] D Lehmann. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 15 :61–82, 1995.

[LLM02] J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Conditional independence in propositional logic. *Artificial Intelligence*, 141 (1-2) :79–121, 2002.

[LLM03] J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Propositional independence - formula-variable independence and forgetting. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 18 :391–443, 2003.

[LM98] J. Lang and P. Marquis. Two forms of dependence in propositional logic : controllability and definability. In *Proceedings of AAAI-98*, pages 268–273, 1998.

[Mar00] P. Marquis. *Consequence Finding Algorithms*, in *Handbook on Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 5 : Algorithms for Defeasible and Uncertain Reasoning, S. Moral and J. Kohlas, chapter 2, pages 41–145. Kluwer Academic Publisher, 2000.

[OR94] M. Osborne and A. Rubinstein. *A course in game theory*. MIT Press, 1994.

[Pap94] C. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.

[Sto77] L. J. Stockmeyer. The polynomial-time hierarchy. *Theoretical Computer Science*, 3 :1–22, 1977.

[vdHW05] W. van der Hoek and M. Wooldridge. On the logic of cooperation and propositional control. *Artificial Intelligence*, 164(1-2) :81–119, 2005.

[vW63] G. H. von Wright. *The logic of preference*. Edinburgh University Press, 1963.

[Zan03] B. Zanuttini. New polynomial classes for logic-based abduction. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 19 :1–10, 2003.