

**UNIVERSITE TOULOUSE III – PAUL SABATIER**  
**LAAS du CNRS**  
**AIRBUS FRANCE**

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE TOULOUSE III**

***Discipline : Systèmes Automatiques***

présentée et soutenue  
par

**Jean DUPREZ**

Le 24/09/2004

**Titre :**

***Automatisation du pilotage au sol pour la  
navigation aéroportuaire***

---

**Directeur de thèse : Félix Mora-Camino**  
**Responsable industriel : Fabrice Villaumé / Marc Fervel**

---

**MEMBRES DU JURY :**

**M. R. Hurteau**, Directeur du département de génie électrique de l'Université de Montréal  
**M. J. R. Azinheira**, Professeur de l'Université de Lisbonne  
**M. F. Mora-Camino**, Professeur de l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile  
**M. F. Villaumé**, Docteur / Ingénieur R&D, Airbus France  
**M. P. Ménard**, Responsable du service « Recherche, Fonctions de pilotage », Airbus France  
**M. M. Courdesses**, Professeur de l'Université Toulouse III

**MEMBRES INVITES :**

**M. J. Levine**, Professeur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris  
**M. P. Mouyon**, Enseignant-Chercheur, ONERA-CERT



# Sommaire général

## Introduction générale

1. Objectifs de la thèse
2. Contexte de travail
3. Contenu du mémoire

## **Chapitre 1 :**      **Etude de la dynamique de l'avion au sol**

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduction .....                                  | 2  |
| 2. Représentation non linéaire de l'avion au sol.....  | 2  |
| 3. Réduction, simplification et analyse du modèle..... | 32 |
| 4. Conclusion.....                                     | 43 |

## **Chapitre 2 :**      **Commande des systèmes non linéaires : éléments théoriques**

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduction et cadre de l'étude théorique.....                    | 2  |
| 2. Commande au premier ordre .....                                    | 3  |
| 3. Linéarisation entrée/sortie et commande non linéaire inverse ..... | 9  |
| 4. Le Backstepping .....                                              | 20 |
| 5. La commande par régime glissant.....                               | 25 |
| 6. Conclusion.....                                                    | 29 |

## **Chapitre 3 :**      **Commande supervisée de la dynamique longitudinale de l'avion au sol**

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduction .....                                  | 2  |
| 2. Utilisation de la poussée motrice.....              | 3  |
| 3. Utilisation du système de freinage .....            | 18 |
| 4. Couplage des commandes en poussée et freinage ..... | 34 |
| 5. Conclusion.....                                     | 53 |

## **Chapitre 4 :**      **Etude d'une loi de pilotage latéral de l'avion au sol**

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduction .....                                                                | 2  |
| 2. Travaux de référence .....                                                        | 3  |
| 3. Mise en oeuvre d'une loi adaptée aux spécificités du roulage à basse vitesse..... | 4  |
| 4. Etude de la robustesse de la loi.....                                             | 14 |
| 5. Le problème des très basses vitesses et de l'arrêt.....                           | 38 |
| 6. Mise en œuvre opérationnelle .....                                                | 46 |
| 7. Conclusion.....                                                                   | 51 |

## Conclusion générale

1. Bilan du travail réalisé
2. Bilan méthodologique
3. Evolutions envisagées

## Références bibliographiques

---



# Introduction générale

La croissance soutenue du Transport Aérien a conduit aux problèmes de congestion actuels (ou prévisibles) des grands aéroports nationaux ou internationaux. L'accroissement du nombre de mouvements au sol se traduit par d'importants retards, pénalisant compagnies et passagers. Ainsi, les capacités aéroportuaires étant très souvent fortement limitées dans leurs possibilités d'extension, il est nécessaire d'accélérer les déplacements et d'imposer une vigilance accrue en ce qui concerne la sécurité.

Les phases de roulage et les manœuvres au sol deviennent donc de plus en plus délicates à réaliser et l'amélioration du pilotage et du guidage de l'avion au sol devient un enjeu majeur.

Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans le cadre d'un ensemble d'études visant à améliorer l'efficacité et la sécurité du trafic aéroportuaire. Si une partie de ces études est associée à des projets d'évolution des systèmes de contrôle du trafic sur la plate-forme aéroportuaire (on peut notamment citer les projets concernant l'Advanced Surface Movement Guidance and Control Systems : ASMGCS), d'autres projets, sont spécifiques à l'étude de nouveaux systèmes embarqués.

Ces systèmes se divisent suivant trois axes de recherche :

- les systèmes de navigation regroupant l'ensemble des systèmes embarqués qui permettent de déterminer la "route" de l'appareil au sein du réseau aéroportuaire (taxiways, intersections...) ;
- les systèmes d'aide au guidage qui facilitent le suivi d'une trajectoire précise correspondant à la route de consigne, comme le fait le "directeur de vol" lors des phases de vol ;
- les systèmes de pilotage de l'aéronef, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions et des asservissements permettant au pilote de contrôler les mouvements de l'aéronef au sol à l'aide de différents actionneurs.

Cette thèse porte principalement sur la commande des mouvements de l'avion à basse vitesse (circulation le long des taxiways et des pistes) et à très basse vitesse (virages, "U-turn", positionnement au voisinage des postes de stationnement) [thèse 2001].

Elle cherche ainsi à étudier, à évaluer et à mettre au point des fonctions de pilotage latéral et longitudinal s'appuyant sur l'utilisation des systèmes d'orientation des roues avant (ORA), de la gouverne de direction, du système de freinage et des moteurs. Pour cela, cette étude s'appuie sur les techniques de synthèse de lois de commande pour les systèmes non-linéaires. Après en avoir analysé les fondements théoriques et les conditions de mise en œuvre, elles seront adaptées au cas de la conduite de l'avion au sol.

# 1. Objectifs de la thèse

Les travaux réalisés ont pour objectif principal d'alléger la charge de travail exigée par le pilotage de l'avion au sol et d'utiliser de manière optimisée et transparente les différents actionneurs disponibles. Les déplacements de l'avion au sol seront alors plus sûrs et précis, et pourront être exécutés plus rapidement.

On peut recenser les objectifs opérationnels suivants :

- stabiliser la trajectoire suivie par l'avion (limitation du nombre de corrections à appliquer pour conserver l'avion sur une trajectoire rectiligne : problème dit du "veering"),
- faciliter et optimiser le contrôle de l'avion, notamment lors des manœuvres,
- améliorer et stabiliser le contrôle de la vitesse de l'appareil,
- améliorer le confort des passagers (éviter les variations des accélérations longitudinales et latérales et réduire leurs amplitudes),
- minimiser l'usure des freins et des pneumatiques,
- limiter les charges sur les trains et sur la structure.

Les perspectives de développement de telles fonctions ouvrent la voie à l'automatisation du roulage et donc aux atterrissages en catégorie III C (atterrissages sans visibilité).

Sur le plan industriel, certaines contraintes sont aussi à prendre en compte. Elles sont relatives à l'intégration dans le système avionique, de la loi de commande.

Cette loi doit :

- être compatible avec les éléments hardware et software déjà certifiés (calculateurs et langages de programmation),
- n'entraîner que peu de modifications hardware du système déjà embarqué, et ainsi satisfaire un double objectif : faciliter l'installation sur un démonstrateur et minimiser le coût relatif à l'implantation de la fonction (coût du matériel et coût de la certification),
- conserver une architecture globale la plus cohérente possible avec les différentes architectures déjà utilisées sur l'avion,
- rester facilement "maintenable" et le plus adaptable possible aux différents programmes et évolutions pouvant subvenir dans la vie de l'avion.

Sur le plan des performances, la loi de commande doit permettre d'améliorer la « pilotabilité » de l'avion au sol. Cet objectif peut se traduire par des spécifications sur la réponse indicielle du système (temps de réponse, amplitude d'un dépassement de la consigne, nombre d'oscillations, dynamique initiale, etc.) et sur des critères de stabilité et de robustesse.

Cet objectif de pilotabilité fait principalement appel à deux types de critères :

- la stabilité, la performance et la robustesse de l'ensemble formé du système, de la loi de pilotage et du pilote.
- la charge de travail imposée au pilote qui doit pouvoir gérer plusieurs tâches parallèlement et l'adaptation de la loi sur un plan interface homme/machine.

## 2. Contexte de travail

Ces travaux de recherche se sont déroulés d'octobre 2001 à octobre 2004, dans le cadre d'un contrat CIFRE en collaboration avec Airbus France et le LAAS du CNRS. Cette thèse a été initialement co-encadrée par Félix Mora-Camino (Directeur de la thèse et professeur à l'ENAC) et par Marc Fervel (Responsable industriel). Elle a été réalisée au sein du LAAS-CNRS, dans le groupe DISCO (Diagnostic, supervision et Conduite qualitatifs) et a débuté au sein d'Airbus, dans le département EYLST (Systèmes trains d'atterrissage – Toulouse). Suite à la réorganisation des activités d'Airbus sur les fonctions de pilotage sol, la thèse a été transférée en avril 2003 dans le département EYCDR (Commande de vol – Méthodes et outils). Son encadrement sur le plan industriel est alors passé sous la responsabilité de Fabrice Villaumé.

### *Contexte des travaux de recherche sur les fonctions de pilotage sol :*

Les travaux réalisés par Airbus sur le thème des fonctions de pilotage sol sont rassemblés sous le projet de recherche dénommé "DTP PIL" (PILotage). En ce qui concerne les basses et très basses vitesses, ces travaux couvrent deux thèmes :

- L'amélioration de l'asservissement du système d'Orientation des Roues Avant (ORA) qui a fait l'objet du stage de DEA précédant la réalisation de la thèse [Duprez 2001].
- La réalisation d'une commande globale du control latéral et longitudinal de l'avion lors des phases de taxi et de manœuvre. Cet axe de recherche encadre une partie des travaux liés à la thèse et relatifs aux fonctions de pilotage.

Ce projet repose sur un double objectif industriel : le développement d'un démonstrateur sur A340-600 (actuellement en essais) et l'application, à terme, des résultats à l'A380.

L'implantation des lois de commande sur le démonstrateur nécessite l'intégration et la validation préalable de ces lois sur "l'Iron Bird". Cet instrument combine des éléments réels de l'avion à une simulation informatique de leur environnement.

Les lois de commande latérale couvertes par le projet de recherche « DTP PIL » se limitent à l'utilisation du braquage des roues avant pour les basses vitesses et à l'utilisation de la dérive pour les vitesses importantes.

Les travaux relatifs au contrôle longitudinal de l'avion ont été étudiés de manière complémentaire. Ils n'ont pas, pour le moment, fait l'objet d'une mise en œuvre sur démonstrateur.

A ces travaux est aussi associé un ensemble d'essais destinés à approfondir, à identifier et à valider la modélisation de l'avion et de ses systèmes. Ces essais ont été initiés en 2001. En plus de ces essais, la mise en oeuvre d'un banc d'essais spécifique est prévue pour fin 2004. Ce banc d'essais est destiné à mesurer avec précision le comportement des pneumatiques avion sur un large domaine de fonctionnement pour améliorer la modélisation des pneumatiques aéronautiques et affiner son identification.

### **3. Contenu du mémoire**

Le mémoire s'articule autour des quatre grands thèmes suivants :

- La modélisation de l'avion au sol et de ses systèmes ;
- Une présentation des techniques de commande des systèmes non-linéaires abordées dans l'étude ;
- La synthèse d'une loi de pilotage longitudinal de l'avion au sol ;
- L'étude et la mise au point d'une loi de pilotage latéral pour le roulage.

Il se conclut par un bilan des résultats obtenus et par quelques perspectives d'évolution.

# **Chapitre 1 : Etude de la dynamique de l'avion au sol**

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introduction .....</b>                                  | <b>2</b>  |
| <b>2. Représentation non linéaire de l'avion au sol.....</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1. Notations et conventions .....                           | 2         |
| 2.2. Les équations du mouvement .....                         | 11        |
| 2.3. Les forces et moments.....                               | 13        |
| <b>3. Réduction, simplification et analyse du modèle.....</b> | <b>32</b> |
| 3.1. Objectif.....                                            | 32        |
| 3.2. Simplification des équations .....                       | 32        |
| 3.3. Réduction de l'ordre du modèle.....                      | 33        |
| 3.4. Linéarisation du comportement latéral de l'avion.....    | 38        |
| 3.5. Analyse du comportement de l'avion au sol.....           | 41        |
| <b>4. Conclusion.....</b>                                     | <b>43</b> |

# 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement de l'avion et de ses systèmes lors du roulage au sol. Une première partie a ainsi pour but de décrire les principales équations et les principaux phénomènes régissant la dynamique de l'appareil. Elle pourra ainsi permettre de bien appréhender les spécificités de l'application dont il est question ici et d'en donner les principales clefs.

Une deuxième partie est consacrée à la présentation de quelques pistes permettant de réduire la complexité et l'ordre du modèle que l'on peut déduire de ces équations. L'objectif de cette partie est ainsi de proposer différents niveaux de modélisation pouvant être utilisés pour la synthèse des lois de pilotage faisant l'objet de cette étude. L'ordre et la complexité des modèles obtenus pourront alors être choisis en fonction des besoins et des contraintes des différentes applications.

Cette seconde partie conclue le chapitre par une analyse qualitative globale du comportement de l'avion au sol.

## 2. Représentation non linéaire de l'avion au sol

Avant de traiter des principes physiques régissant la dynamique de l'avion au sol, on présente les notations, les conventions et les principaux repères qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

### 2.1. Notations et conventions

Avant de décrire le comportement de l'avion et le modèle qui lui est associé, il est important de clarifier les conventions et les notations qui seront utilisées par la suite. Tout d'abord, on s'intéressera aux différents référentiels mis en jeu. Après les avoir décrits et avoir donné les principales matrices de passage, cette partie présentera le principe mis en oeuvre pour élaborer les notations et définira quelques variables de base.

#### 2.1.1. Les conventions de signe

De manière générale, les conventions de signes seront prises telles que, dans les différents référentiels, l'axe longitudinal (X) sera positif vers l'avant, l'axe latéral (Y) vers la droite et l'axe « vertical » (Z) vers le bas. Les angles et moments relatifs à ces axes sont orientés de manière directe dans le repère (X,Y,Z) ainsi défini.

### 2.1.2. Présentation des différents repères utilisés

#### *Le repère « avion »*

Ce repère dénommé repère « avion » est un repère mobile (c.g. ;  $X_{AVION}$ ,  $Y_{AVION}$ ,  $Z_{AVION}$ ). Son origine est le centre de gravité de l'appareil et ses trois axes longitudinal, latéral et vertical correspondent respectivement aux trois axes longitudinal, latéral et vertical associés aux caractéristiques de symétrie de l'avion. Les translations et rotations de ce repère sont donc directement liées aux mouvements réalisés par l'appareil.

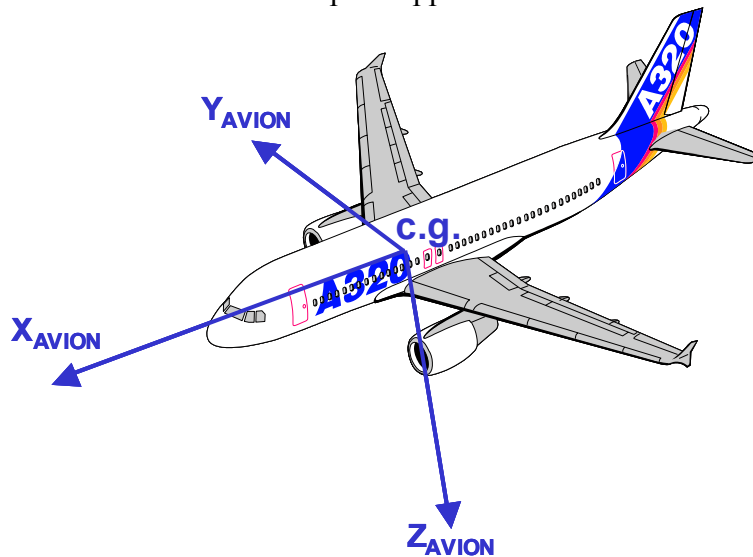


figure 1.1 : représentation du repère “avion”.

#### *Le repère terrestre*

Ce repère ( $O$  ;  $X_T$ ,  $Y_T$ ,  $Z_T$ ) est un repère Galiléen qui a pour origine un point de référence arbitraire fixe de l'espace. En général, ce point est choisi égal à la position initiale du centre de gravité. Il pourrait être envisagé de choisir un point de référence de l'aéroport ou encore l'intersection du méridien de Greenwich et de l'équateur. De telles modifications correspondraient alors à une correction de la valeur initiale des coordonnées du centre de gravité.

Les trois axes ( $X_T$ ,  $Y_T$ ,  $Z_T$ ) du trièdre associé à ce référentiel sont orientés respectivement vers le Nord, vers l'Est, et vers le bas (selon la verticale).

#### Passage du repère terrestre au repère avion

La position de l'origine du repère avion est donnée par les coordonnées géographiques du centre de gravité rapportées à celle de l'origine du repère terrestre. Ces nouvelles coordonnées sont notées respectivement « x », « y » et « z ».

L'orientation relative du trièdre avion vis-à-vis du trièdre terrestre peut être déterminée à partir du cap ( $\psi$ ), de l'assiette ( $\theta$ ), et du gîte ( $\varphi$ ) de l'avion.

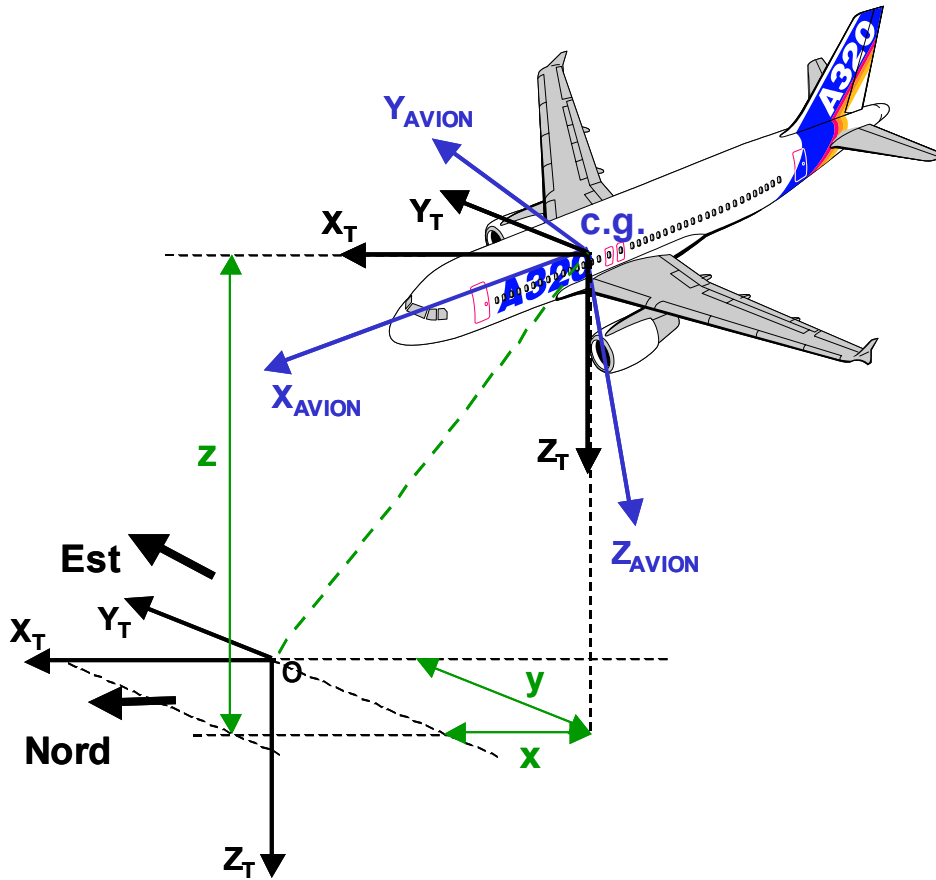


figure 1.2 : Position du repère avion vis-à-vis du repère terrestre.

La matrice de changement de repère associée à ces transformations s'écrit :

$$\begin{aligned}
 M_{\text{AVION} \rightarrow \text{T}} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.1) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \psi & (\cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \varphi) & (\cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + \sin \psi \cdot \sin \varphi) \\ \cos \theta \cdot \sin \psi & (\sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \varphi) & (\sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \cos \psi \cdot \sin \varphi) \\ -\sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \varphi & \cos \theta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

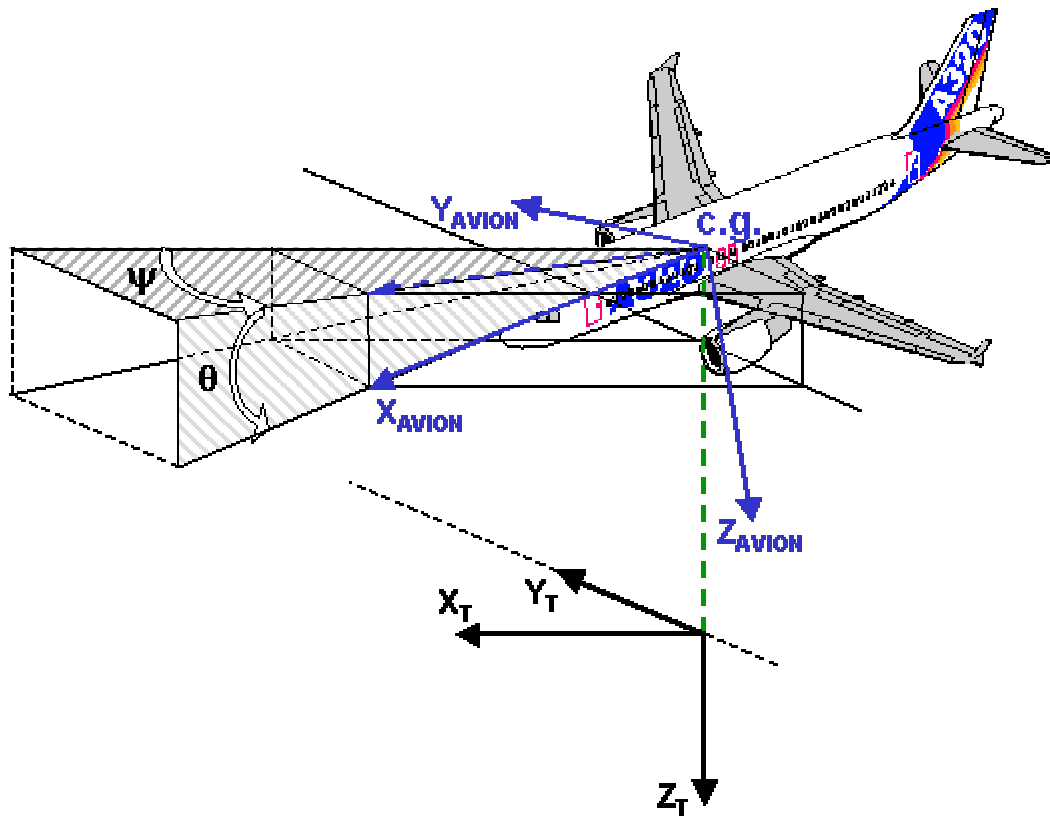


figure 1.3 : rotation en  $\theta$  et  $\psi$  du repère avion par rapport au repère terrestre.

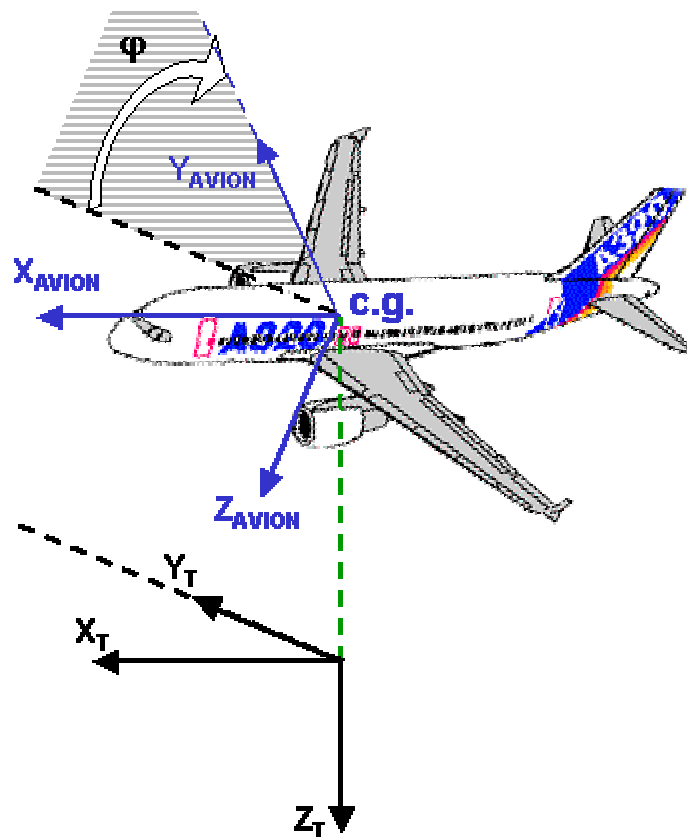


figure 1.4 : rotation en  $\phi$  du repère avion par rapport au repère terrestre.

### *Le repère aérodynamique*

Le repère aérodynamique est un repère mobile (c.g. ;  $X_{AERO}$ ,  $Y_{AERO}$ ,  $Z_{AERO}$ ) associé à l'orientation du vecteur vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air ( $V_{AIR}$ ).

Son origine est le centre de gravité. L'axe longitudinal  $X_{AERO}$  est orienté dans la direction de ce vecteur vitesse « air ». Par rapport au trièdre avion, le trièdre associé au repère aérodynamique est obtenu à partir d'une rotation d'angle  $\alpha$  (l'incidence) autour de l'axe  $Y_{AVION}$  et d'angle  $\beta_{AERO}$  (le dérapage aérodynamique) autour de l'axe  $Z_{AVION}$ .

La matrice de changement de repère associée à ces transformations s'écrit :

$$M_{AERO \rightarrow AVION} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{AERO} & \sin \beta_{AERO} & 0 \\ -\sin \beta_{AERO} & \cos \beta_{AERO} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta_{AERO} & \sin \beta_{AERO} & -\cos \beta_{AERO} \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta_{AERO} \cdot \cos \alpha & \cos \beta_{AERO} & \sin \alpha \cdot \sin \beta_{AERO} \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

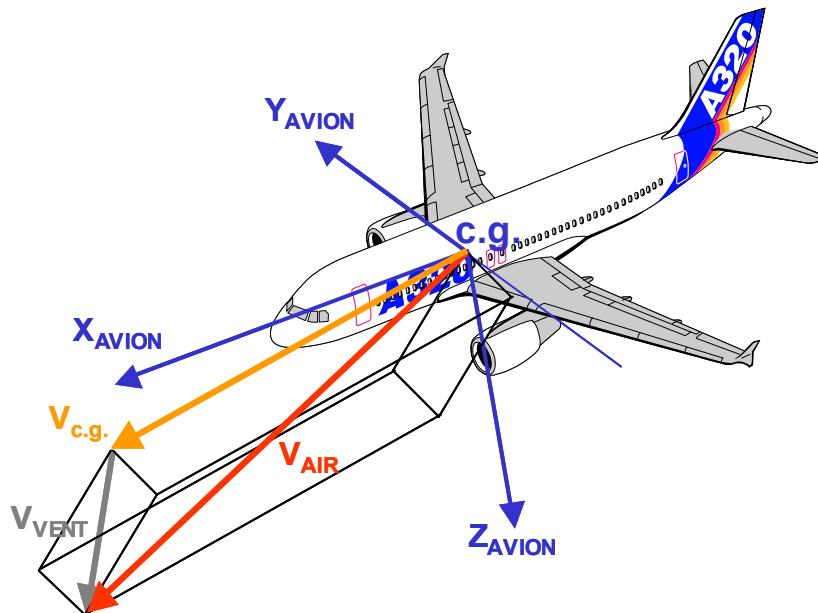


figure 1.5 : Représentation schématique du repère aérodynamique.

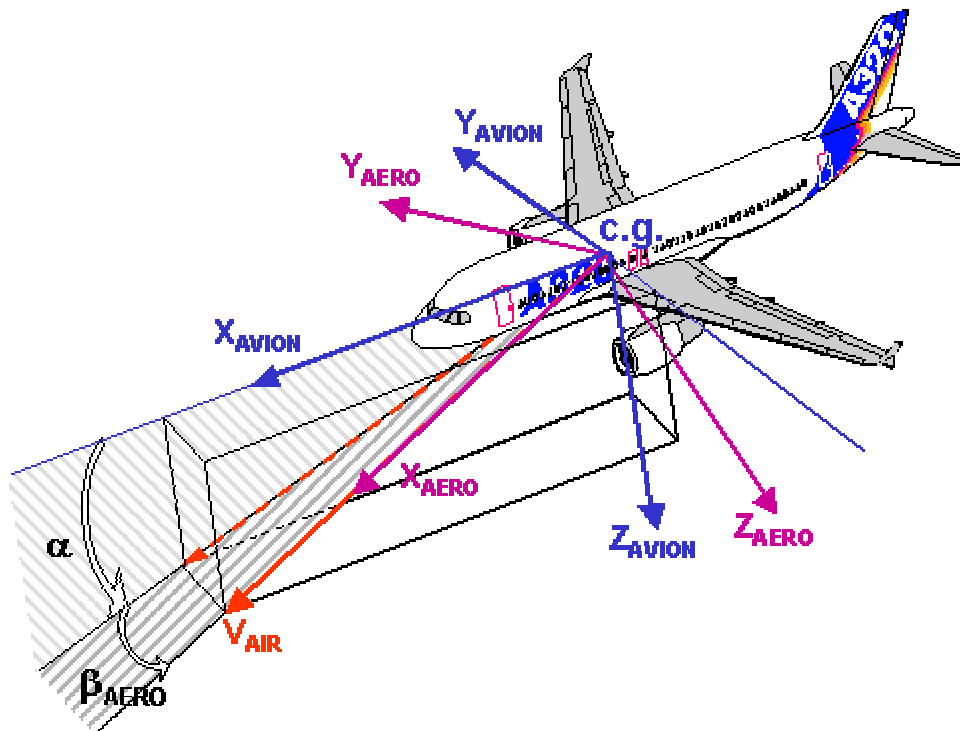


figure 1.6 : Transformation liant le repère aérodynamique au repère avion.

### *Les repères « roues »*

Ces repères constituent un ensemble de repères mobiles associés à chaque roue. Pour une roue donnée (indiquée « i »), le repère roue i ( $O_i$  ;  $X_{ROUE\ i}$ ,  $Y_{ROUE\ i}$ ,  $Z_{ROUE\ i}$ ) est positionné au point de contact entre la roue et le sol (point moyen d'application des forces). Le plan ( $X_{ROUE\ i}$ ,  $Y_{ROUE\ i}$ ) est tangent à la surface du sol en ce point (l'axe  $Z_{ROUE\ i}$  y est orthogonal) et l'axe  $X_{ROUE\ i}$  appartient au plan de la roue.

Dans le cas d'une chaussée parfaitement horizontale, un tel repère peut être déduit du repère terrestre par une rotation autour de l'axe vertical, de sorte à l'orienter suivant le plan de la roue. Pour les roues des trains principaux, cet angle d'orientation peut alors être pris équivalent au cap de l'avion. Pour les roues du train avant, il faut tenir compte de l'angle de braquage du train. Dans ce cas de figure, les repères « roue » sont au nombre de deux : un repère roues avant (« RA ») et un repère trains principaux (« TP »).

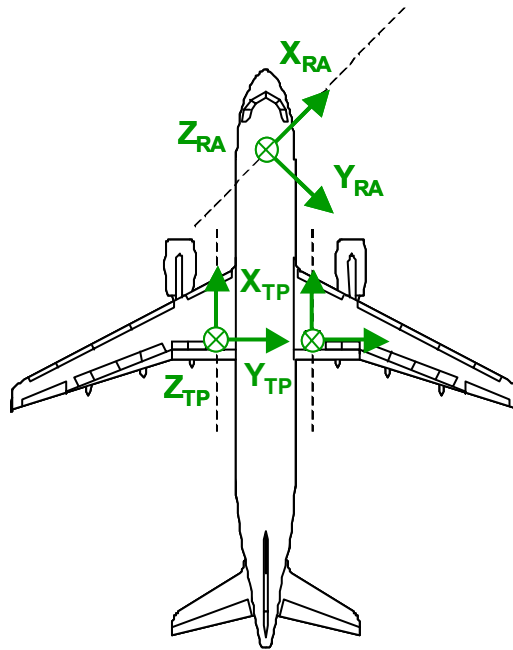


figure 1.7 : Représentation schématique du repère roués.

Les matrices de changement de repère associées à ces transformations s'écrivent :

$$M_{TP \rightarrow AVION} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_{TP \rightarrow AVION} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ \cos \varphi \cdot \sin \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_{RA \rightarrow AVION} = M_{TP \rightarrow AVION} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_{RA} & -\sin \theta_{RA} & 0 \\ \sin \theta_{RA} & \cos \theta_{RA} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### ***Les repères « trains d'atterrissage »***

Ces « repères trains » forment un ensemble de repères dont l'axe « vertical » est confondu avec l'axe du train d'atterrissage. Ces repères permettent de déterminer les couples de torsion exercés sur ces trains (couple de rappel des roues avant par exemple) et permettent de modéliser le comportement des amortisseurs en y projetant les efforts transmis.

Nous ne les décrivons pas plus ici mais y ferons référence dans la partie consacrée à la modélisation des amortisseurs.

### 2.1.3. Présentation des notations

Cette partie a pour objectif de présenter brièvement les notations de base utilisées dans la suite du document. Le but est de familiariser le lecteur avec ces notations qui seront clarifiées au fur et à mesure des chapitres.

#### *Principe de la notation*

Les notations utilisées dans ce document sont basées sur l'utilisation successive de suffixes. Ces notations permettent de désigner de manière plus intuitive les éléments mis en jeu. L'ordre des suffixes est établi de façon à désigner les caractéristiques de ces éléments des plus « proches » au plus « générales ».

Entre autre, les suffixes « x », « y » et « z » font référence aux projections du vecteur considéré dans les trois axes d'un trièdre donné. Hors indications particulières, ce trièdre correspond au trièdre avion.

Les suffixes « p », « q » et « r » sont associés respectivement à des actions en roulis, en tangage et en lacet.

Les variables associées aux différentes parties de l'appareil sont distinguées par un ensemble de suffixes y faisant référence. On peut par exemple citer les suffixes :

- « D » et « G » pour droit et gauche,
- « RA » et « TP » pour respectivement les roues avant et le train principal,
- « MOT », « ORA », « FREIN » et « AM » pour respectivement les moteurs, le système d'orientation des roues avant, les freins, et les amortisseurs,
- « AIR », « VENT » et « AERO » pour les variable associées à la masse d'air, au vent et aux effets aérodynamiques,
- etc...

Sans indications particulières, les variables sont alors associées au centre de gravité.

Comme précisé précédemment, ces notations seront établies au fil du document.

#### *Les variables principales*

##### *Positions, attitudes, vitesses, et accélérations de l'avion*

Comme l'a déjà présenté la partie précédente, la position du centre de gravité dans le référentiel terrestre est associée aux trois coordonnées x, y et z.

Les vitesses linéaires sont désignées par la lettre V et suivies du suffixe approprié.

Les vitesses de roulis, de tangage et de lacet sont respectivement définies par lettres p, q et r.

Les accélérations linéaires et angulaires sont désignées par les dérivées des vitesses qui leur sont associées (et signalées par l'ajout d'un point sur la variable).

Les vitesses se rapportant à un point décentré de l'avion (vitesses « locales ») comportent un suffixe désignant cet élément. Par exemple, la vitesse longitudinale, en axes avion, au niveau des roues du train d'atterrissage avant s'écrit :  $V_{x_{RA}}$ .

### Masse et centrage et inertie

La masse de l'avion et son centrage sont respectivement notés  $m$  et  $X_{cg}$ . Le centrage est exprimé en pourcentage de la corde aérodynamique moyenne de l'avion.

La matrice d'inertie de l'avion est notée  $I$ .

### Forces et moments

Les forces sont désignées par la lettre  $F$  et les moments par la lettre  $M$ . Comme indiqué précédemment, sans indication particulière, ils font référence à des forces et moments appliqués au centre de gravité.

### Distances entre deux points de l'avion

Les distances entre deux points de l'avion sont désignées par la lettre  $L$ . Si un seul point est désigné par le suffixe, cette distance est alors la distance du point considéré au centre de gravité.

Les principales distances utilisées dans les équations de la dynamique de l'avion sont présentées sur la figure ci-dessous :

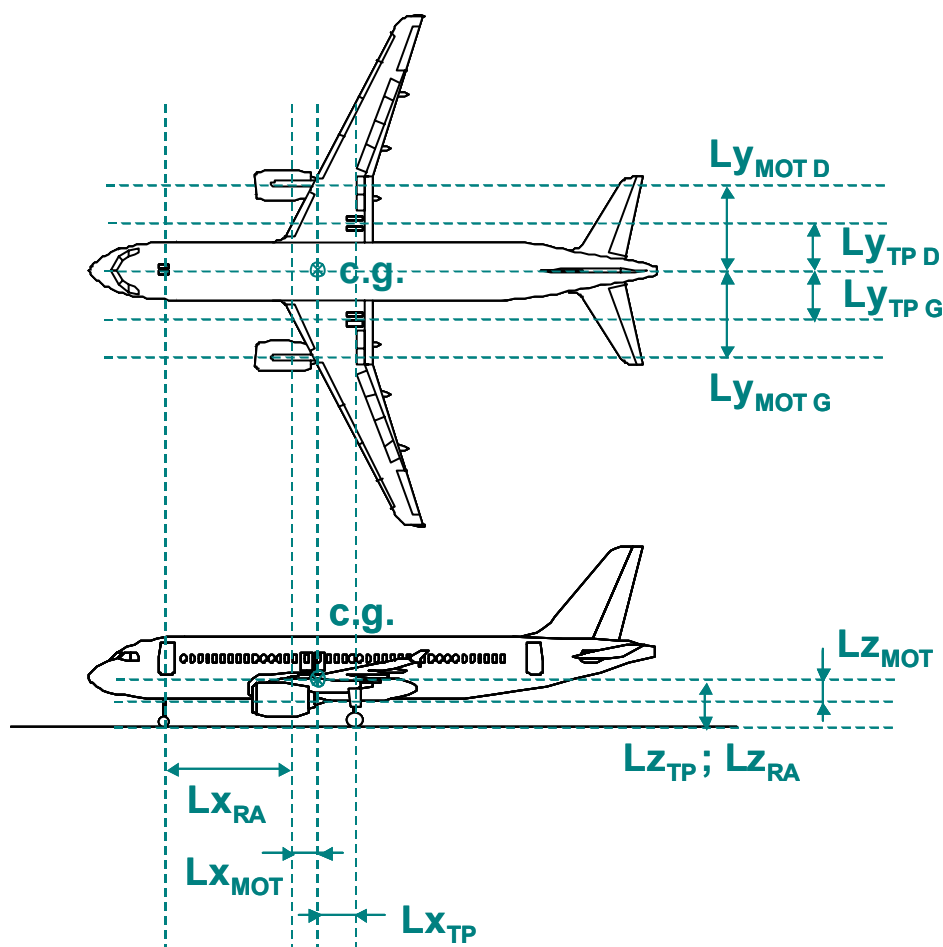


figure 1.8 : Présentation des principaux éléments géométriques utilisés dans le modèle.

## 2.2. Les équations du mouvement

On représente ici le comportement de l'avion au sol au travers d'un modèle dont le cœur est basé sur les équations différentielles issues des lois de la mécanique du solide et du formalisme des angles d'Euler.

### 2.2.1. Equations des forces et des moments

L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir les équations :

$$\vec{F} = m \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right) \quad (\text{on suppose la masse constante}) \quad (1.3)$$

$$\vec{M} = \frac{\partial (\mathbf{I} \cdot \vec{\Omega})}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge (\mathbf{I} \cdot \vec{\Omega}) \quad (1.4)$$

$$\text{avec, } \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} p = \text{vitesse de roulis} \\ q = \text{vitesse de tangage} \\ r = \text{vitesse de lacet} \end{bmatrix}$$

$$\text{et, } \vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \text{ la vitesse de déplacement du centre de gravité, projetée dans le repère avion.}$$

$\vec{F}$  représente la somme des forces extérieures appliquées au système et  $\vec{M}$  la somme des moments. La masse et matrice d'inertie de l'avion sont représentées par les variables  $m$  et  $\mathbf{I}$ .

En projetant la première équation sur les axes avion, on peut écrire :

$$\dot{V}_x = \frac{F_x}{m} - (q V_z - r V_y) \quad (1.5)$$

$$\dot{V}_y = \frac{F_y}{m} - (r V_x - p V_z)$$

$$\dot{V}_z = \frac{F_z}{m} - (p V_y - q V_x)$$

Du fait des propriétés de symétrie d'un avion, sa matrice d'inertie peut être représentée sous la forme :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

A partir de (1.4), on peut calculer les trois accélérations angulaires dont l'expression peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = I^{-1} \cdot (\vec{M} - \vec{\Omega} \wedge (I \cdot \vec{\Omega})) \quad \text{avec,} \quad I^{-1} = \begin{bmatrix} iI_{xx} & 0 & iI_{xz} \\ 0 & iI_{yy} & 0 \\ iI_{xz} & 0 & iI_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\text{et,} \quad iI_{xx} = \frac{I_{zz}}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2} \quad iI_{xz} = \frac{I_{xz}}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2}$$

$$iI_{zz} = \frac{I_{xx}}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2} \quad iI_{yy} = \frac{1}{I_{yy}}$$

Cette expression peut aussi s'écrire de manière développée :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= iI_{xx} \cdot Mp + iI_{xz} \cdot Mr + Ip_{pq} \cdot pq + Ip_{qr} \cdot qr \\ \dot{q} &= iI_{yy} \cdot Mq + Iq_{pr} \cdot pr + Iq_{pp} \cdot p^2 + Iq_{rr} \cdot r^2 \\ \dot{r} &= iI_{zz} \cdot Mr + iI_{xz} \cdot Mp + Iq_{pq} \cdot pq + Iq_{qr} \cdot qr \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{avec,} \quad Ip_{pq} = \frac{I_{xz}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2} \quad Ip_{qr} = -\frac{I_{zz}^2 + I_{xz}^2 - I_{yy} I_{zz}}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2}$$

$$Iq_{pp} = -Iq_{rr} = -\frac{I_{xz}}{I_{yy}} \quad Iq_{pr} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$$

$$Ir_{pq} = \frac{I_{xx}^2 + I_{xz}^2 - I_{yy} I_{xx}}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2} \quad Ir_{qr} = -\frac{I_{xz}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2}$$

Les coefficients de la matrice d'inertie peuvent être déduits de la masse et du centrage de l'avion et d'un ensemble de constantes propres à chaque type d'appareil.

Pour cette étude, on utilise une représentation de la matrice d'inertie développée et identifiée pour les simulateurs de développement d'Airbus (modèle OSMA : « Outil de Simulation des Mouvements Avion ») et qui se met sous la forme :

$$I_{xx} = \text{masse} * \rho_x^2 \quad I_{yy} = \text{masse} * \rho_y^2 \quad I_{zz} = \text{masse} * \rho_z^2 \quad I_{xz} = e_0 - e_1 * \text{centrage}$$

$$\text{avec,} \quad \rho_x = \rho_{x1} - \rho_{x2} * (\text{masse} - m_1) / m_2 \quad (1.9)$$

$$\rho_y = \rho_{y1} - \rho_{y2} * (\text{masse} - m_1) / m_2$$

$$\rho_z = \rho_{z1} - \rho_{z2} * (\text{masse} - m_1) / m_2$$

( $\rho_{x1}, \rho_{x2}, \rho_{y1}, \rho_{y2}, \rho_{z1}, \rho_{z2}, m_1, m_2, e_0, e_1$  sont des constantes.)

On aboutit ainsi à une représentation à 6 degrés de liberté dont les variables d'état sont les vitesses longitudinale, latérale et verticale, et les vitesses de roulis, tangage et lacet. Ces équations permettent de décrire le comportement de l'avion à partir de la somme des forces et moments exercés (contacts pneu/sol longitudinal et latéral, poussées motrices, efforts aérodynamiques, pesanteur, ...).

### 2.2.2. Détermination de l'attitude et de la position de l'avion

La résolution des équations précédentes peut nécessiter la détermination de l'attitude et de la position de l'avion car participant au calcul de certains efforts (via par exemple l'incidence ou la pression atmosphérique). Ces informations peuvent aussi s'avérer intéressantes pour reconstituer le comportement et la trajectoire de l'avion.

Les dérivées des trois angles d'Euler relatifs à l'attitude de l'avion sont données par les équations :

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{q \sin \varphi + r \cos \varphi}{\cos \theta} \\ \dot{\theta} &= q \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= p + (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \tan \theta = p + \dot{\psi} \sin \theta\end{aligned}\tag{1.10}$$

La position de l'avion peut être déterminée par intégration de la projection dans le repère terrestre de sa vitesse, précédemment déterminée dans le repère avion. Ce changement de repère peut être réalisé sur la base de la matrice (1.1). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{V_x \cos \theta + (V_y \sin \varphi + V_z \cos \varphi) \sin \theta\} \cos \psi + (-V_y \cos \varphi + V_z \sin \varphi) \sin \psi \\ \dot{y} &= \{V_x \cos \theta + (V_y \sin \varphi + V_z \cos \varphi) \sin \theta\} \sin \psi + (V_y \cos \varphi - V_z \sin \varphi) \cos \psi \\ \dot{z} &= -V_x \sin \theta + (V_y \sin \varphi + V_z \cos \varphi) \cos \theta\end{aligned}\tag{1.11}$$

Le modèle correspondant à cette représentation est un modèle non linéaire d'ordre 12 dont les variables d'état sont :

- les projections de la vitesse de déplacement du centre de gravité sur les trois axes du repère « avion »,
- les trois vitesses angulaires de l'avion en tangage, roulis et lacet,
- les trois coordonnées donnant la position du centre de gravité dans le repère terrestre
- les trois angles ( $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) donnant l'attitude de l'avion.

Le vecteur d'état correspondant sera augmenté par la suite pour prendre en compte les dynamiques propres à certains sous-ensembles du système tels que les roues, le système de freinage, les systèmes d'orientation des roues avant, les moteurs, etc.

## 2.3. Les forces et moments

Les principales forces et moments agissant sur l'avion sont dus aux effets aérodynamiques, à la pesanteur, aux efforts liés aux interactions avec le sol (roulement) et à la poussée motrice. Cette partie a pour but de présenter comment s'établissent ces différents efforts, de manière à donner une vision d'ensemble du comportement de l'avion et du modèle qui peut y être associé.

### 2.3.1. Les efforts aérodynamiques

Les principaux efforts entrant dans les équations de la mécanique du vol sont les efforts aérodynamiques.

Habituellement, ces efforts sont représentés de manière macroscopique par un ensemble de moments et de forces appliqués au centre de gravité et projetés, soit dans le repère avion, soit dans le repère aérodynamique.

Ces forces et moments aérodynamiques dépendent de l'état du système (vitesses, attitude, altitude), des conditions extérieures (vitesse et orientation du vent, ...), de la configuration de l'avion (becs, volets, spoilers, ...), de la position des gouvernes aérodynamiques (ailerons, gouverne de direction, profondeur, ...). Leur détermination est le plus souvent basée sur l'identification de coefficients aérodynamiques.

Par soucis de simplicité, on exprimera ces efforts dans le trièdre avion (cf. figure 1.9).

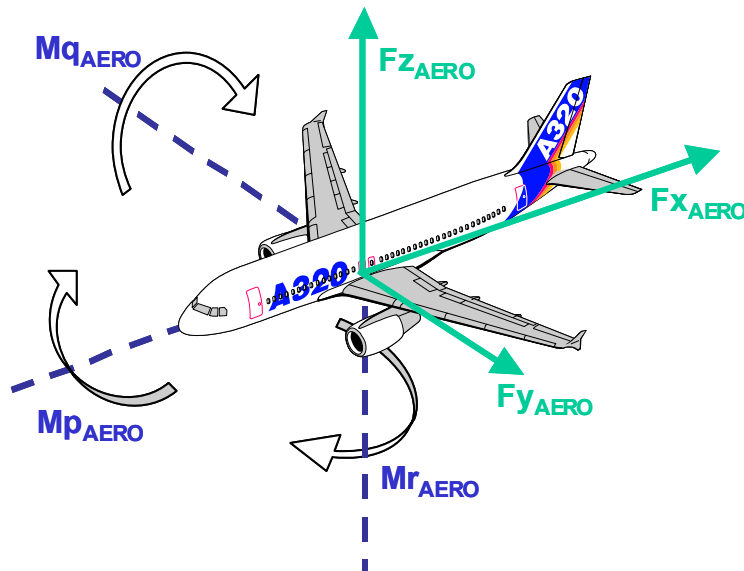


figure 1.9 : Représentation des forces et moments aérodynamiques, dans le trièdre avion.

Les forces et moments aérodynamiques sont souvent représentés sous la forme de fonctions proportionnelles à la pression dynamique ( $\rho$ ), à la surface de référence de l'avion ( $S$ ), au carré de la vitesse air ( $V_{AIR}$ ) et à des coefficients aérodynamiques ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ ,  $C_n$ ) :

$$\begin{aligned}
 F_{x_{AERO}} &= -\frac{1}{2} \rho S V_{AIR}^2 C_x & M_{p_{AERO}} &= \frac{1}{2} \rho S e_{AERO} V_{AIR}^2 C_l \\
 F_{y_{AERO}} &= \frac{1}{2} \rho S V_{AIR}^2 C_y & M_{q_{AERO}} &= \frac{1}{2} \rho S c_{AERO} V_{AIR}^2 C_m \\
 F_{z_{AERO}} &= -\frac{1}{2} \rho S V_{AIR}^2 C_z & M_{r_{AERO}} &= \frac{1}{2} \rho S e_{AERO} V_{AIR}^2 C_n
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

$e_{AERO}$  représente l'envergure et  $c_{AERO}$  la corde aérodynamique.

Les coefficients aérodynamiques sont déterminés à partir des angles d'incidence, de dérapage (air), des vitesses de tangage, roulis, lacet, du braquage de la dérive, des ailerons, de la profondeur, de la configuration de l'avion, etc.

En général, ces coefficients sont souvent identifiés à l'aide de polynômes et de tables d'interpolation.

Dans l'étude réalisée ici, les coefficients aérodynamiques ont été obtenus à partir de réseaux de neurones mis au point par Airbus dans le cadre d'une autre thèse CIFRE (cf. [Lavergne 2003]).

Les réseaux de neurones sont identifiés à partir d'un modèle de référence certifié (OSMA). Les données d'apprentissage sont obtenues par le biais d'un grand nombre de simulation dont les paramètres sont définis par tirage aléatoire dans le domaine de fonctionnement devant être couvert.

L'outil de modélisation utilisé pour mettre au point les modèles neuronaux permet aussi de réaliser une évaluation précise de corrélation entre le modèle de référence et le modèle obtenu. Cette analyse se base sur une évaluation statistique réalisée à partir d'un autres jeux de données de simulation tirées aléatoirement.

L'utilisation d'une telle modélisation des coefficients aérodynamiques a pour principal intérêt de fournir un modèle facilement utilisable pour la simulation et la commande, ne nécessitant pas d'importantes capacités de calcul et garantissant une bonne représentativité (vis-à-vis du modèle de référence certifié).

Ces travaux de modélisation n'étant pas directement liés aux travaux effectués durant la thèse, on limitera leur présentation à la description générale réalisée ci-dessus. Une description plus approfondie de ces réseaux de neurones peut être retrouvée dans [Lavergne 2003].

Par contre, pour permettre une prise en compte plus physique du comportement de l'avion, dans les analyses numériques qui suivront, nous considérerons ici une représentation simple des coefficients  $C_y$  et  $C_n$  :

$$C_y = C_{y_0} + C_{y_\beta} \cdot \beta + C_{y_{\delta r}} \cdot \delta r + C_{y_r} \cdot \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{\text{AERO}}}{V_{\text{AIR}}} \right) \quad (1.13)$$

$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r + C_{n_r} \cdot \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{\text{AERO}}}{V_{\text{AIR}}} \right) \quad (1.14)$$

$\delta r$  représente l'angle de braquage de la gouverne de direction.

L'expression (1.14) sera aussi utilisée pour réaliser la synthèse de la commande. Cette synthèse se basera alors sur un modèle neuronal du coefficient  $C_{n_{\delta r}}$  (obtenu sur le principe des autres coefficients aérodynamiques).

### 2.3.2. Effet de la pesanteur

Le poids de l'avion est considéré comme appliqué en son centre de gravité, suivant l'axe vertical. Lorsque l'assiette de l'avion est non nulle, il induit des forces longitudinales et latérales dues à la projection dans le trièdre avion (cf. figure 1.10).

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } F_{x_p} &= -\sin \theta \cdot mg \\ F_{y_p} &= \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot mg \\ F_{z_p} &= \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot mg \end{aligned} \quad (1.15)$$

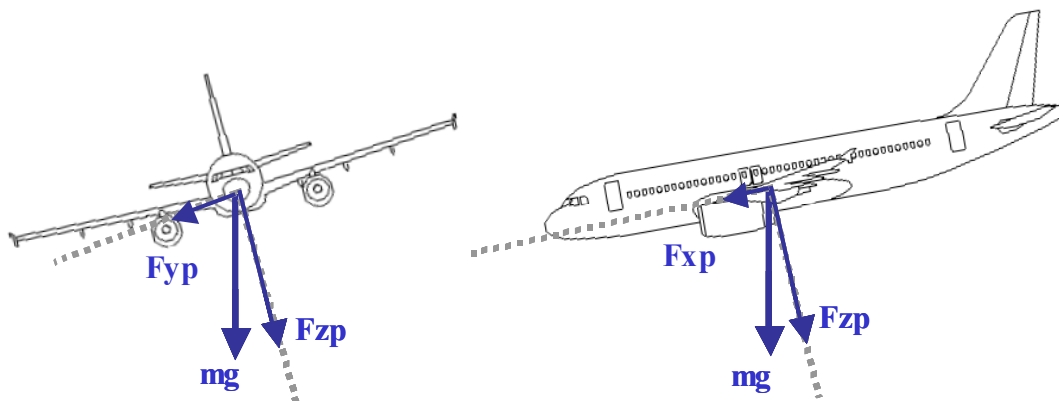


figure 1.10 : Projection de la force de pesanteur dans le trièdre avion.

### 2.3.3. Les efforts générés par les moteurs

Les efforts générés par la poussée des moteurs permettent de maintenir et de contrôler la vitesse longitudinale de l'avion. Ils peuvent aussi, par l'application de poussées différentes sur les moteurs gauche(s) et droit(s), aider au contrôle latéral de l'avion (génération d'un couple en lacet).

Ces efforts sont modélisés par des forces appliquées au niveau de chaque moteur et dirigées suivant leurs axes longitudinaux. On assimilera ces axes à l'axe longitudinal avion.

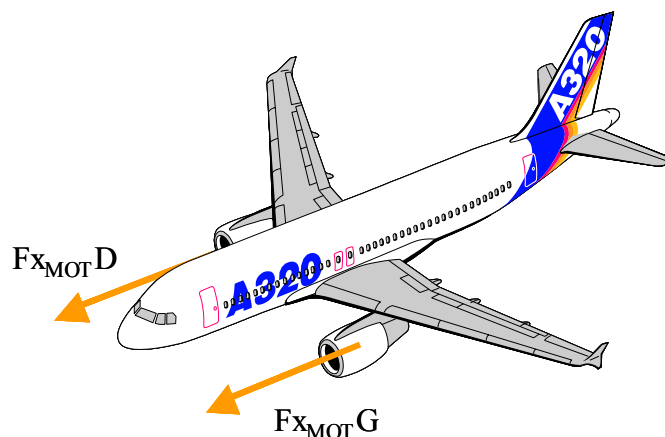


figure 1.11 : Représentation des forces de poussée motrice.

La poussée est générée à partir de l'énergie fournie par le carburant. Pour ce faire, on cherche à réaliser un cycle thermodynamique régi par les étapes suivant :

- compression de l'air entrant dans le moteur au travers d'un compresseur ;
- échauffement des gaz par injection et combustion du carburant ;
- détente de l'ensemble au travers de la turbine et de la tuyère ;
- entraînement du compresseur par la turbine.

Les turboréacteurs utilisés sur les avions de transport civil actuels pour réaliser ces étapes de la manière la plus optimisée possible utilisent des turbines et compresseurs pouvant tourner à différentes vitesses, dont le calage peut varier, ou encore, utilisent un ensemble de valves permettant d'enrichir ou de décharger le flux d'air dans le moteur. Ces moteurs mettent aussi en œuvre un double flux : le compresseur basse vitesse permet alors de générer un flux d'air « secondaire » ne passant pas par les chambres de combustion et par les turbines. La génération de ce second flux permet de ralentir la vitesse d'éjection des gaz tout en augmentant la quantité d'air expulsé. Le moteur est alors nettement moins bruyant et voit son rendement augmenter (tant que la vitesse ne devient pas trop grande).

Ainsi, ces réacteurs associent à une mécanique complexe, des problèmes pointus d'aérodynamique et de thermodynamique. On peut notamment citer en exemple tout les problèmes d'extinction pauvre ou riche des moteurs, les problèmes de pompage (souvent dus à des décrochages aérodynamiques des aubes des compresseurs ou des turbines), etc.

Pour éviter ces problèmes et assurer un contrôle optimal du moteur les constructeurs utilisent des logiques extrêmement complexes agissant principalement sur le débit carburant, sur le calage de certaines aubes et sur les valves dont il a été question précédemment. Cette régulation est effectuée par un calculateur dédié implanté directement sur le moteur (ECU (Engine Control Unit) ou FADEC (Full Authority Digital Computer)). Ce calculateur permet le contrôle du niveau de poussée au travers d'un paramètre de commande. Ce paramètre est en général soit associé à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du moteur (EPR), soit associé à la vitesse de rotation du corps basse vitesse ( $N1$ ). Dans le cadre de cette étude, on considère le cas d'un avion de type A320 et des moteurs de type CFM56 commandés en  $N1$ .

Pour permettre la mise en œuvre de lois de commande utilisant les moteurs, il est nécessaire de disposer d'un modèle mathématique (du turboréacteur et de sa logique de régulation) suffisamment simple et d'ordre relativement réduit et ainsi, ne pas rendre la loi de commande exagérément complexe et irréalisable (acquisition de grandeurs inaccessibles).

Vu la complexité que représente le comportement d'un turboréacteur, un modèle physique ne permettrait pas de satisfaire ces objectifs. Il est donc nécessaire de considérer le moteur sur un plan macroscopique.

Le comportement des moteurs peut alors être évalué en deux étapes :

- Tout d'abord, en se plaçant de le cas quasi-statique, il s'agit alors de mettre au point une fonction permettant de déterminer la poussée d'équilibre associée à une consigne en  $N1$  et à des conditions données (nombre de Mach, température, altitude pression, etc.). Comme dans le cas des coefficients aérodynamiques (cf. paragraphe 2.3.1) on déduit ici cette fonction d'un réseau de neurone identifié à partir d'un modèle de référence certifié (OSMA/SPPMS).
- Ensuite, il s'agit de représenter la dynamique de ce système. Pour ce faire, une étude particulière a été entreprise durant la thèse. Cette étude a montré qu'il était possible de retrouver relativement finement le comportement du moteur en utilisant une représentation non-linéaire du second ordre. Cette représentation se base sur un modèle linéaire auquel on associe des saturations en amplitude et en vitesse. De plus, la pulsation propre, l'amortissement et les seuils de saturation varient en fonction du  $N1$  et des conditions de vol.

On peut la résumer par les équations :

$$\ddot{N1} = -2 \cdot z_{N1}(N1, \dots) \cdot \omega_{N1}(N1, \dots) \cdot \dot{N1} + \omega_{N1}(N1, \dots)^2 \cdot (N1_c - N1) \quad (1.16)$$

avec  $\dot{N1}_{\min}(N1, \dots) \leq \dot{N1} \leq \dot{N1}_{\max}(N1, \dots)$  et  $N1_{\min}(\dots) \leq N1 \leq N1_{\max}(\dots)$

où les points de suspension correspondent à la prise en compte des conditions d'utilisation (nombre de Mach, température, altitude pression, etc.).

#### 2.3.4. Les amortisseurs

Les amortisseurs ont pour rôle d'amortir les efforts transmis par les roues et de dissiper l'énergie due à l'impact de l'avion à l'atterrissage.

Vu de l'avion, les amortisseurs filtrent les efforts verticaux issus des roues.

Vu des roues, ils filtrent les variations de charges verticales dues aux moments en tangage et en roulis.

La plupart des amortisseurs (dit « oléopneumatiques ») peuvent être divisés en deux sous ensembles :

- une chambre contenant un gaz compressible générant un effort lié à l'enfoncement de la jambe de train.
- Deux chambres communiquant via un orifice de laminage et contenant un fluide incompressible (fluide hydraulique). Le passage de ce fluide au travers de l'orifice de laminage développe des forces de viscosité dépendant de la vitesse de déplacement du fluide et donc de la vitesse d'enfoncement de la jambe de train.

Un exemple de ce type d'amortisseur est présenté figure 1.12.

Les forces générées par ce type d'amortisseurs peuvent être représentées simplement à l'aide d'une raideur et d'un amortissement dépendant respectivement de l'enfoncement et de la vitesse d'enfoncement de la jambe de train. Pour se faire, il est possible d'utiliser directement des abaques obtenues en essai ou d'utiliser des fonctions telles que des fonctions polynomiales identifiées sur la base de ces abaques.

La force alors obtenue est orientée dans l'axe du train. Dans le cas où le train d'atterrissage considéré présente une inclinaison (vis-à-vis du trièdre avion) non négligeable, il est alors nécessaire de projeter cette force dans le trièdre avion.

L'influence d'une éventuelle inclinaison d'un train d'atterrissage sur le comportement longitudinal et latéral de l'avion étant très indirecte et extrêmement réduite, les amortisseurs seront considérés, tout au long de l'étude, orienté selon l'axe « vertical » du trièdre avion.

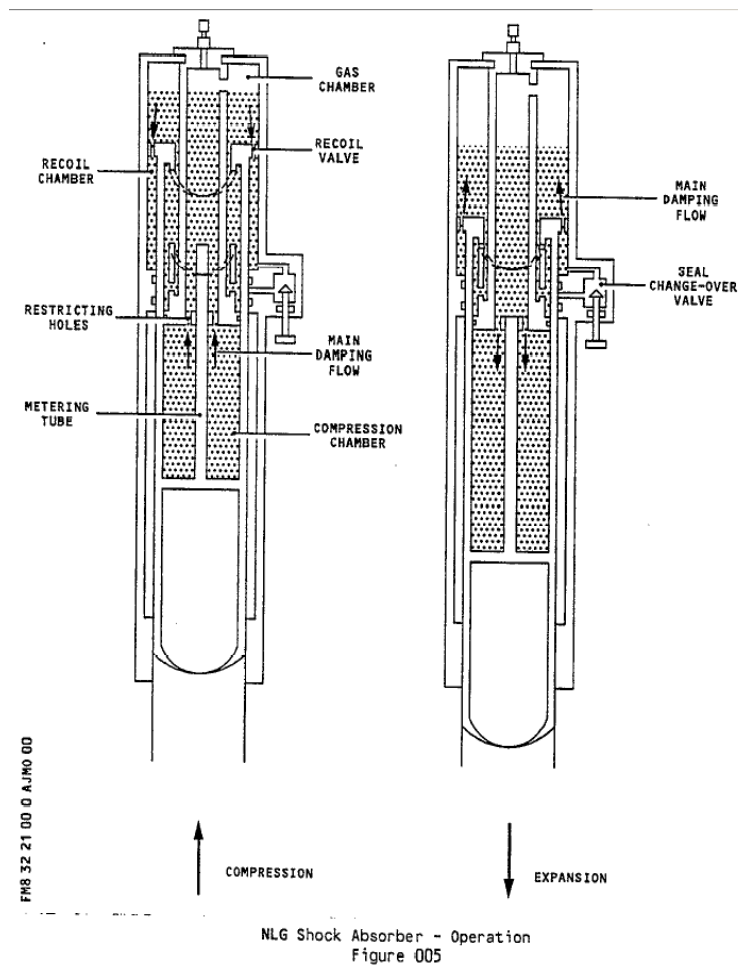


figure 1.12 : Représentation schématique d'une coupe des amortisseurs du train d'atterrissage avant d'un Airbus A340.

### 2.3.5. Les efforts liés au roulement

Les efforts que l'on nomme ici efforts « de roulement » regroupent l'ensemble des efforts induits par le contact entre les pneus et le sol. Ces efforts s'appliquent sur la surface de contact et sont en général exprimés dans des trièdres associés aux différentes roues. Ces trièdres sont tels que :

- l'axe « x » est orienté dans le plan de la roue considéré,
- l'axe « z » est orthogonal à la surface du sol au point de contact pneu/sol.

Pour une roue, la composante d'effort en « z » est associée à la résistance du sol. Pour une chaussée rigide, cette résultante est opposée à la projection de la force issue de la compression des amortisseurs.

Les composantes longitudinales et latérales (suivant les axes x et y) sont dues aux frottements entre les pneumatiques et le sol. La suite de ce paragraphe a pour but de présenter succinctement ces deux forces.

### ***La force latérale***

La force latérale apparaît lorsque la vitesse de la roue n'est plus orientée dans le plan de cette dernière : la roue dérape sur le sol. Ce dérapage peut être assimilé à une composante latérale de la vitesse, générant déformations du pneu et efforts de frottements. Cette force est généralement présentée comme une fonction non linéaire de l'angle de dérapage.

### ***Calcul des angles de dérapage au niveau des roues avant et des trains principaux***

Pour simplifier la modélisation, on considère que les deux roues d'un même diabolos sont superposées au centre du train d'atterrissage, de façon à en appréhender le comportement moyen.

Les angles de dérapage locaux, au niveau respectivement des roues avant et des trains principaux droit et gauche s'écrivent alors :

$$\beta_{RA} = \arctg\left(\frac{V_{y_{RA}}}{V_{x_{RA}}}\right) - \theta_{RA} = \arctg\left(\frac{V_y + L_{x_{RA}} \times r}{V_x}\right) - \theta_{RA} \quad (1.17)$$

$$\beta_{TPD} = \arctg\left(\frac{V_{y_{TPD}}}{V_{x_{TPD}}}\right) = \arctg\left(\frac{V_y - L_{x_{TP}} \times r}{V_x - L_{y_{TP}} \times r}\right) \quad (1.18)$$

$$\beta_{TPG} = \arctg\left(\frac{V_{y_{TPG}}}{V_{x_{TPG}}}\right) = \arctg\left(\frac{V_y - L_{x_{TP}} \times r}{V_x + L_{y_{TP}} \times r}\right) \quad (1.19)$$

### ***Le comportement latéral des pneumatiques***

Les efforts générés par les interactions entre les pneumatiques et le sol sont principalement dus à deux effets : la déformation latérale de la bande de roulement (et donc du pneu) et les frottements entre la gomme du pneu et le sol.

Ces deux actions reposent sur des phénomènes physiques complexes associant :

- des frottements entre une chaussée plus ou moins rugueuse, aux propriétés mal connues et une surface de gomme sculptée, pouvant s'échauffer, se déformer et s'user ;
- des déformations de l'ensemble du pneu qui associe à une géométrie complexe, une matrice hétérogène formée de gomme renforcée de métal ;
- la compression et l'échauffement du gaz remplissant le pneu.

Vu la complexité du comportement du pneu, les modèles physiques cherchant à reconstituer ces phénomènes ne permettent d'obtenir un niveau de représentativité suffisant qu'au coût d'une complexité extrême. On basera donc cette étude sur des modèles macroscopiques issus d'une identification mathématique, réalisée à partir de données d'essais. Un exemple de tels résultats est donné figure 1.13. A partir de ces courbes, il est possible de mettre au point une fonction mathématique dont les principales caractéristiques, prises en compte dans cette étude, sont :

- la dérivée à l'origine de la force en fonction de l'angle de dérapage local (Cette dérivée est aussi appelée « cornering gain » :  $G_y$ ) ;
- la force maximale pouvant être obtenue ( $F_{y_{MAX}}$ ) ;
- l'angle de dérapage correspondant, qui sera appelé angle de dérapage optimal ( $\beta_{OPT}$ ).

Ces éléments dépendent de façon complexe de nombreux paramètres tels que la charge appliquée sur les roues, l'état d'adhérence du sol (piste sèche, mouillée, enneigée, verglacée, etc.) et la vitesse de l'avion. La prise en compte de ces éléments pourra varier suivant les modèles utilisés.

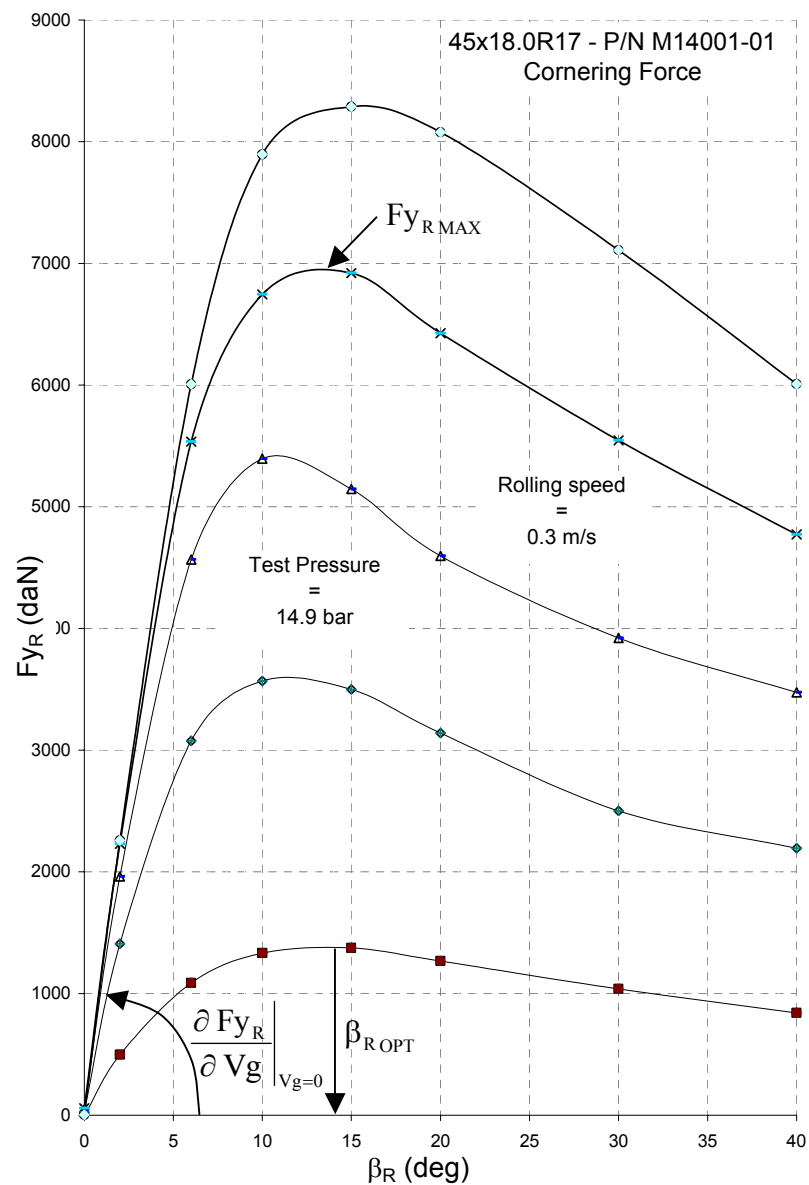


figure 1.13 : Exemple de résultats d'essais issus de données Michelin pour des pneus avant d'Airbus A340 et pour différentes charges verticales.

Trois principaux modèles ont été utilisés pour l'étude :

- un modèle développé au LAAS du CNRS ([Clot 1998]), dans le cadre de l'étude d'un simulateur d'automobiles (Il sera appelé ici modèle LAAS). Ce modèle simple a pour principal avantage d'être facilement inversible, ce qui permettra de fortement faciliter la synthèse de loi dont il sera question dans la suite.
- un modèle développé par Pacejka ([Pacejka 1987] et [Pacejka 1989]) à partir de pneus automobile. Ce modèle très complet et précis reste relativement complexe car utilisant un formalisme basé sur des équations trigonométriques.
- Un modèle développé par la NASA dans le cadre des projets AGARD ([AGARD 1998]). Ce modèle se base sur les travaux de Pacejka. Il les adapte au domaine aéronautique et le traduit sous la forme d'équations associant des polynômes.

Le modèle utilisé dans cette étude pour la synthèse des lois de commande met à profit plusieurs éléments de ces différentes modélisations.

L'équation principale du modèle est issue du modèle développé par le LAAS :

$$F_{y_R} = 2 F_{y_{R\text{MAX}}} \times \frac{\beta_{R\text{OPT}} \times \beta_R}{\beta_{R\text{OPT}}^2 + \beta_R^2} \quad (1.20)$$

Le «  $R$  » fait référence à la roue considérée.

Ce modèle permet de caractériser le comportement du pneu au travers de deux paramètres caractéristiques. Dans (1.20), ces paramètres sont la force maximale pouvant être obtenue et l'angle de dérapage correspondant. Le « cornering gain » (efficacité du pneu pour de faibles dérapages) peut alors être défini par :

$$G_{y_R} = \left. \frac{\partial F_{y_R}}{\partial \beta_R} \right|_0 = \frac{2 F_{y_{R\text{MAX}}}}{\beta_{R\text{OPT}}} \quad (1.21)$$

Ainsi, par exemple, il est possible de réécrire l'expression (1.20) et de caractériser le comportement des pneumatiques à partir du « cornering gain » et de l'angle de dérapage optimal. On a alors :

$$F_{y_R} = G_{y_R} \times \beta_R \times \frac{\beta_{R\text{OPT}}^2}{\beta_{R\text{OPT}}^2 + \beta_R^2} \quad (1.22)$$

Les efforts générés par les pneus, dépendent fortement de la charge verticale. Cette dépendance peut être prise en compte dans la représentation précédente au travers de l'identification des paramètres caractéristiques du modèle. Par exemple, cette identification peut être basée sur une représentation polynomiale telle que celle-ci :

$$F_{y_{R\text{MAX}}} = (a_1 \cdot F_{z_R} + a_2) F_{z_R} \quad (1.23)$$

$$\text{et, } G_{y_R} = \left. \frac{\partial F_{y_R}}{\partial \beta_R} \right|_{\beta_R \approx 0} = \begin{cases} G_{y_{1R}} = A_1 \cdot F_{z_R} + A_2 \cdot F_{z_R}^2 & \text{si } F_{z_R} < SFz \\ G_{y_{2R}} = B_0 + B_1 \cdot F_{z_R} & \text{si } F_{z_R} > SFz \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_0$  et  $B_1$  sont des variables dépendantes conditions de fonctionnement.  $SFz$  correspond au point d'intersection entre les courbes  $G_{y_1}(Fz)$  et  $G_{y_2}(Fz)$ .

Cette représentation correspond à celle du modèle AGARD.

### ***La force longitudinale***

La force longitudinale associe traînée de roulement et forces de freinage.

La traînée de roulement est principalement due aux pertes d'énergie associées à l'écrasement de la roue (déformation périodique de la bande de roulement due à la souplesse du pneu et à la rotation de la roue). Elle est souvent modélisée par une force constante ou évoluant légèrement avec la vitesse.

Les forces de freinage apparaissent lorsque la vitesse de défilement de la bande de roulement est différente de la vitesse d'avancement de la roue (différence due à l'application d'un couple de freinage sur la roue). Il y a alors « glissement » et donc frottement du pneu sur le sol.

Ce glissement est communément caractérisé par une vitesse de glissement définie comme :

$$V_{g_R} = \frac{V_{X_R} - r_R \cdot \omega_R}{V_{X_R}} \quad (1.25)$$

Dans cette expression,  $V_{X_R}$  est la vitesse longitudinale locale exprimée dans le repère lié à la roue considérée,  $r_R$  est le rayon du pneu et  $\omega_R$  est la vitesse de rotation de la roue.

La vitesse de glissement est donc directement liée à la dynamique de la roue au travers de sa vitesse de rotation.

La dynamique d'une roue peut être représentée par l'équation différentielle :

$$\dot{\omega}_R = \frac{1}{I_R} \cdot (C_{FREIN} (P_{FREIN}) - r_R \cdot F_{X_R} (V_{g_R})) \quad (1.26)$$

avec,  $C_{FREIN}$  : le couple de freinage appliqué sur la roue,  
 $P_{FREIN}$  : la pression de freinage dans les freins,  
 $F_{X_R}$  : la force longitudinale issue du glissement des pneus,  
 $I_R$  : le moment d'inertie de la roue.

### ***Le comportement longitudinal du pneu***

Le comportement longitudinal d'un pneu est très comparable à son comportement latéral. Ainsi, comme dans le cas précédent, on se contentera de considérer des modélisations macroscopiques, issus d'une identification mathématique.

Ces modélisations sont réalisées sur les mêmes bases mathématiques que celles mises en œuvre dans le cas latéral. Elles s'appuient ainsi sur quelques éléments caractéristiques tels que :

- la dérivée à l'origine de la force obtenue en fonction de la vitesse de glissement,
- la force maximale pouvant être obtenue ( $F_{Y_{MAX}}$ ),
- la vitesse de glissement correspondante qui sera appelée vitesse de glissement optimale ( $V_{g_{OPT}}$ ).

Ces éléments sont identifiés à partir de données d'essais comparables à celles présentées figure 1.14.

Cette étude se base ainsi sur les trois modèles que sont le modèle du LAAS, le modèle de Pacejka et le modèle AGARD.

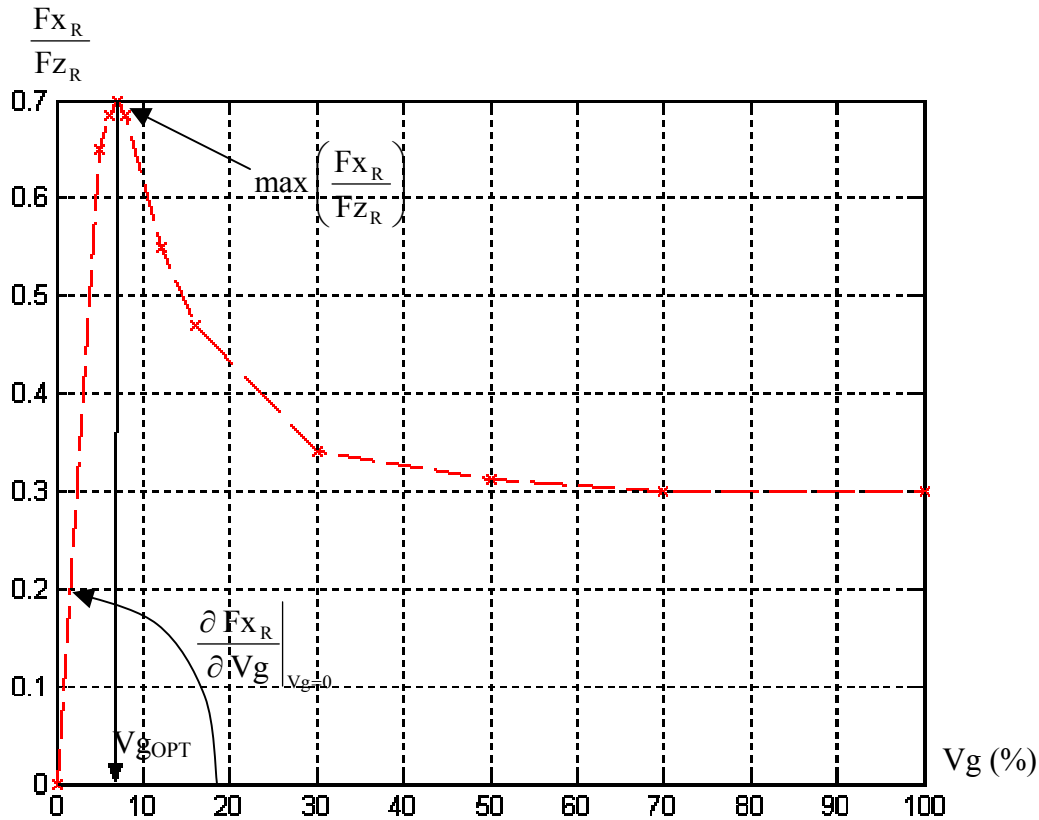


figure 1.14 : Exemple de caractéristique longitudinale d'un pneu d'airbus A320.

Comme dans le cas latéral, le modèle utilisé pour la synthèse des lois de commande met à profit plusieurs éléments de ces différentes modélisations et se base sur l'équation :

$$F_{X_R} = 2 F_{X_{R \text{ MAX}}} \times \frac{V_{g_{R \text{ OPT}}} \times V_{g_R}}{V_{g_{R \text{ OPT}}}^2 + V_{g_R}^2} \quad (1.27)$$

Par contre, la dynamique des roues étant très rapide (comportement haute-fréquence), la modélisation utilisée pour la synthèse de lois de commande ne considère pas ce modèle qui sera restreint à l'étude « haute fréquence » de la mise en freinage.

Le couple généré par les freins se traduit alors immédiatement par une force longitudinale appliquée sur le pneu :

$$F_{X_R} = \frac{C_{\text{FREIN}} (P_{\text{FREIN}})}{r_R} \quad (1.28)$$

Pour pouvoir modéliser l'influence du couplage entre le comportement longitudinal du pneu et son comportement latéral (cf. le paragraphe suivant), il est alors nécessaire de pouvoir calculer la vitesse de glissement du pneu. Cette vitesse peut être obtenue à partir de la force longitudinale par inversion de l'équation (1.27) (hors cas de départ au blocage :  $|F_{X_R}| < F_{X_{R \text{ MAX}}}$ ).

La connaissance de la vitesse de glissement de la roue permet aussi de modéliser les effets produits par l'anti-skid (système permettant d'éviter le blocage de la roue lors d'un freinage maximum).

### Couplage des comportements latéraux et longitudinaux du pneu

Les formules présentées précédemment pour les modèles latéraux et longitudinaux ne s'appliquent qu'à des pneus produisant des forces latérales ou longitudinales découplées. Ainsi, un pneu délivrant un effort latéral ne peut, en même temps, délivrer un effort longitudinal maximal (et vice versa).

La modélisation de ce couplage la plus souvent utilisée se base sur le concept de cercle de traction. Cette modélisation consiste à modifier les paramètres caractéristiques du modèle, de façon à rester toujours dans un cercle donné, appelé cercle de traction.

Ce type de modélisation se base sur les critères suivants :

- $\|F_R\| = \sqrt{(F_{Y_R})^2 + (F_{X_R})^2}$  doit avoir son maximum autour du cercle de traction.  
D'où : 
$$\sqrt{\left(\frac{F_{Y_R}}{F_{X_{R\text{MAX}}}}\right)^2 + \left(\frac{F_{X_R}}{F_{X_{R\text{MAX}}}}\right)^2} = 1$$
- Si la vitesse de glissement est nulle ou si la roue ne dérape pas, les expressions des forces latérales et longitudinales doivent rester inchangées.
- Pour une valeur positive fixée de vitesse de glissement, si  $\beta$  augmente, la force longitudinale déterminée à partir du modèle couplé équivalent doit être réduite. De la même façon, pour une valeur positive fixée de  $\beta$ , si la vitesse de glissement augmente, la force latérale déterminée à partir du modèle couplé doit aussi réduire.
- Si la vitesse de glissement et l'angle de dérapage restent réduits, l'impact du couplage longitudinal / latéral ne doit pas provoquer de modifications importantes des efforts obtenus.

La prise en compte de ces critères peut conduire à plusieurs types de modifications des modèles présentés précédemment.

A l'heure actuelle, la quantité très réduite des données accessibles relatives à ce fonctionnement couplé des pneumatiques ne peut permettre de bien identifier et valider cette modélisation. Elle n'a donc été prise en compte que dans le modèle de simulation et non dans les modèles de synthèse utilisés durant l'étude. Les lois de commande étudiées devront ainsi être robustes à ces effets de couplage. La modélisation des pneumatiques étant fortement incertaine par nature (incertitude vis à vis de la nature de sol et de son état), cette hypothèse de robustesse ne constituera pas une contrainte à part entière.

### ***Conclusion sur le calcul des efforts liés au roulement***

Les différents efforts liés au roulement ont été modélisés dans les trièdres « roues ». Pour prendre en compte ces efforts dans les équations de la mécanique de l'avion, il est donc nécessaire de se ramener au trièdre avion par des changements de repère adaptés. Les moments associés à ces efforts pourront alors être obtenus à partir de la détermination des bras de levier correspondants (distance des points d'application des forces au centre de gravité).

Il est ainsi possible de dissocier le calcul de ces efforts en trois étapes :

- détermination des vitesses locales et des angles de dérapages associés,
- détermination du glissement à partir de la dynamique de la roue,
- calcul des forces longitudinales, latérales et verticales dans les repères liés aux roues,
- projection de ces forces dans le repère avion,
- détermination des moments associés.

### 2.3.6. Le système de freinage

Le système de freinage (cf. [Garcia] et [Messier-Bugatti]) peut être divisé en cinq sous-ensembles (figure 1.15) :

- Les disques de frein : modélisation quasi-statique du gain de frein
- Le système hydraulique : servovalves et pistons
- La logique de commande du système : asservissement en pression et filtre anti-skid

Le modèle de référence utilisé pour cette étude regroupe ces éléments pour former un ensemble du troisième ordre (dynamique des roues, du système hydraulique et de sa commande).

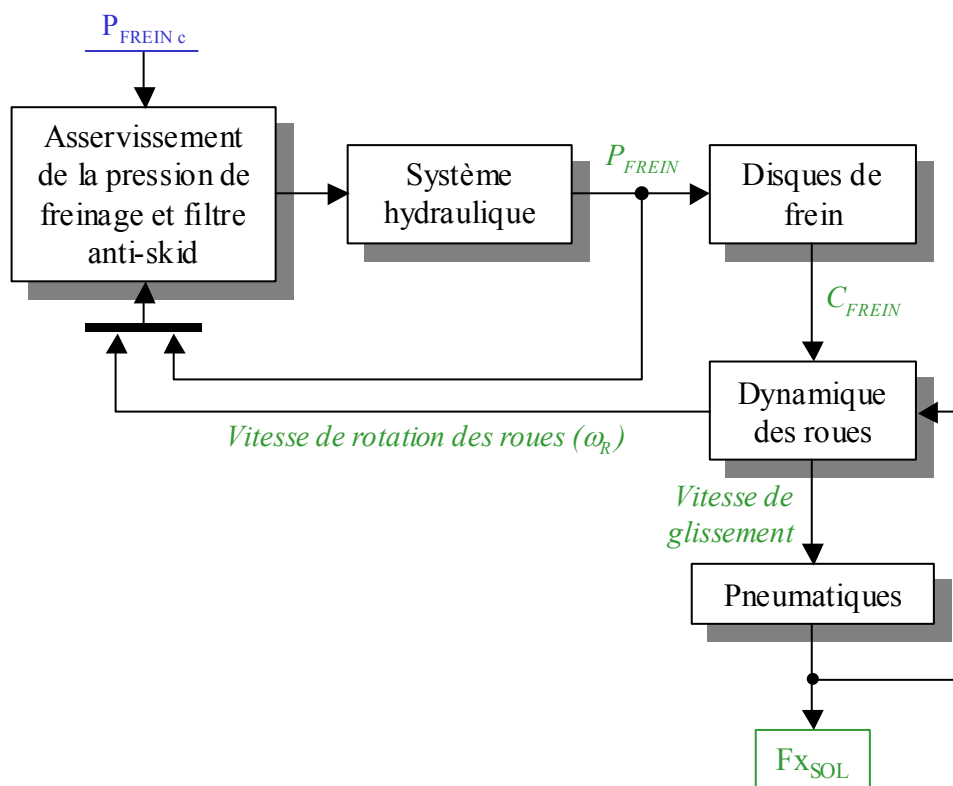


figure 1.15 : Représentation schématique de la modélisation du système de freinage.

### **Représentation mathématique du comportement du système :**

La représentation mathématique du comportement du système, décrite ci-dessous, se base sur un niveau de modélisation intermédiaire permettant de reconstituer les éléments principaux constituant sa dynamique.

Le comportement des disques de freins peut être modélisé par un gain ( $G_{\text{FREIN}}$ ) dont la valeur peut varier fortement d'un frein à l'autre. La génération du couple de freinage ( $C_{\text{FREIN}}$ ) à partir d'une pression de freinage appliquée dans les pistons ( $P_{\text{FREIN}}$ ) est relativement rapide.

Pour plus de représentativité, elle est cependant en général représentée par une fonction de transfert du premier ordre :

$$C_{\text{FREIN}}(p) = \frac{G_{\text{FREIN}}}{1 + \tau_{\text{FREIN}} \cdot p} \cdot P_{\text{FREIN}}(p) \quad (p \text{ est la variable de Laplace}) \quad (1.29)$$

La pression de freinage est générée par le système hydraulique à partir d'un débit ( $Q_{\text{FREIN}}$ ) envoyé dans les pistons :

$$P_{\text{FREIN}} = \int_0^t \frac{\beta'}{V_{\text{FREIN}}} Q_{\text{FREIN}} dt \quad (1.30)$$

La variable  $\beta'$  représente un coefficient de compressibilité équivalent qui permet d'assimiler les variations de volume des pistons (et le coefficient de raideur non-linéaire qui y est associée) à la compressibilité du fluide hydraulique.

La valeur de  $\beta'$  pourra varier en fonction de la pression appliquée dans les pistons.

Le débit en entrée des pistons est généré par la différence entre la pression d'alimentation  $P_a$  et la pression de retour  $P_r$  et est lié à la position du tiroir de la servovalve ( $x_{\text{FREIN}}$ ).

Ce débit s'écrit :

$$Q_{\text{FREIN}} = \eta S(x_{\text{FREIN}}) \sqrt{\Delta P} \quad (1.31)$$

avec :

Si  $x_{\text{FREIN}} = 0$ ,  $\Delta P = 0$

Si  $x_{\text{FREIN}} > 0$ ,  $\Delta P = P_a - P_{\text{FREIN}}$

Si  $x_{\text{FREIN}} < 0$ ,  $\Delta P = P_{\text{FREIN}} - P_a$

$\eta$  est le coefficient d'écoulement.

$S(-)$  la section algébrique de passage du fluide hydraulique au travers de la servovalve. Elle est définie par :

$$S(x_{\text{FREIN}}) = K \cdot x_{\text{FREIN}} \quad (1.32)$$

La position du tiroir de la servovalve peut être déduite de l'équation :

$$x_{\text{FREIN}} = \frac{K_2 S_2 - K_1 S_1}{r} \cdot (a_{\text{SVFREIN}} - \text{ISV}_{\text{FREIN}}) + x_{0\text{FREIN}} + \frac{S_2 - S_1}{r} \cdot P_{\text{FREIN}} \quad (1.33)$$

$\text{ISV}_{\text{FREIN}}$  est le courant de commande de la servovalve.

$S_1$  et  $S_2$  font référence aux sections du tiroir dans les chambres gauche (1) et droite (2) de la servovalve.  $r$  est la raideur du ressort permettant de recentrer le tiroir. Les constantes  $K_1$ ,  $K_2$  et  $a_{\text{SV FREIN}}$  caractérisent le comportement du premier étage de la servovalve (système buses palette).

L'asservissement de la pression de freinage peut être approximé par un correcteur du premier ordre pouvant s'écrire :

$$ISV_{FREIN} = k_{1FREIN} + k_{2FREIN} \cdot \int_0^t K_{ASSFREIN} \cdot (P_{FREINc} - P_{FREIN}) dt \quad (1.34)$$

Le choix des constantes  $k_{1FREIN}$  et  $k_{2FREIN}$  se base sur une inversion de la relation donnant la pression de freinage à l'équilibre en fonction du courant de commande et correspond à :

$$k_{1FREIN} = a_{SVFREIN} + \frac{r \cdot x_{0FREIN}}{K_2 S_2 - K_1 S_1} \quad (1.35)$$

$$k_{2FREIN} = \frac{S_2 - S_1}{K_2 S_2 - K_1 S_1} \quad (1.36)$$

Le filtre anti-skid est un filtre complexe ayant pour but d'éviter le départ au blocage des roues. Pour ce faire, ce filtre limite la consigne en pression de freinage de sorte à maintenir la vitesse de glissement proche de sa valeur optimale. Pour ce faire, l'algorithme de détection compare les vitesses des roues avec celle de l'avion.

### **Modélisation du premier ordre**

Un deuxième niveau d'approximation consiste à considérer le comportement du système en négligeant la dynamique du système hydraulique et des disques de frein. On obtient alors une représentation du premier ordre telle que :

$$\dot{P}_{FREIN} = K_{ASSFREIN} \cdot (P_{FREINc} - P_{FREIN}) \quad (1.37)$$

### **2.3.7. Le système d'orientation des roues avant**

Le système d'orientation des roues avant (cf. [Garcia] et [Messier-Bugatti]) peut être divisé en quatre sous ensembles rassemblant le système proprement dit et son système de commande (cf. figure 1.16) :

- Le BSCU (Braking and Steering Control Unit) :  
Ce sous-ensemble définit la valeur du courant de commande de la servovalve ( $ISV_{RA}$ ) à partir de la consigne du pilote et de l'angle de braquage obtenu.
- La partie hydraulique :  
Elle détermine la caractéristique liant la vitesse de braquage des roues à l' $ISV_{RA}$  défini précédemment. Cette caractéristique est non-linéaire et dépend de la différence de pression entre les chambres du vérin.
- La partie mécanique :  
Elle permet de déterminer cette différence de pression à partir des efforts qui s'exercent sur le fût du train d'atterrissage : frottements secs, frottements visqueux et couple généré par les roues.
- Les roues :  
Cette partie du modèle a pour but de calculer les efforts qui s'exercent sur l'avion et de déterminer la valeur du couple généré sur le fût du train d'atterrissage.

La description du système réalisée ici se cantonne à quelques équations formant un modèle simplifié qui servira de base à la synthèse de commande. Ce modèle correspond au système d'orientation des roue avant d'un avion de type Airbus A320 (support de l'étude).

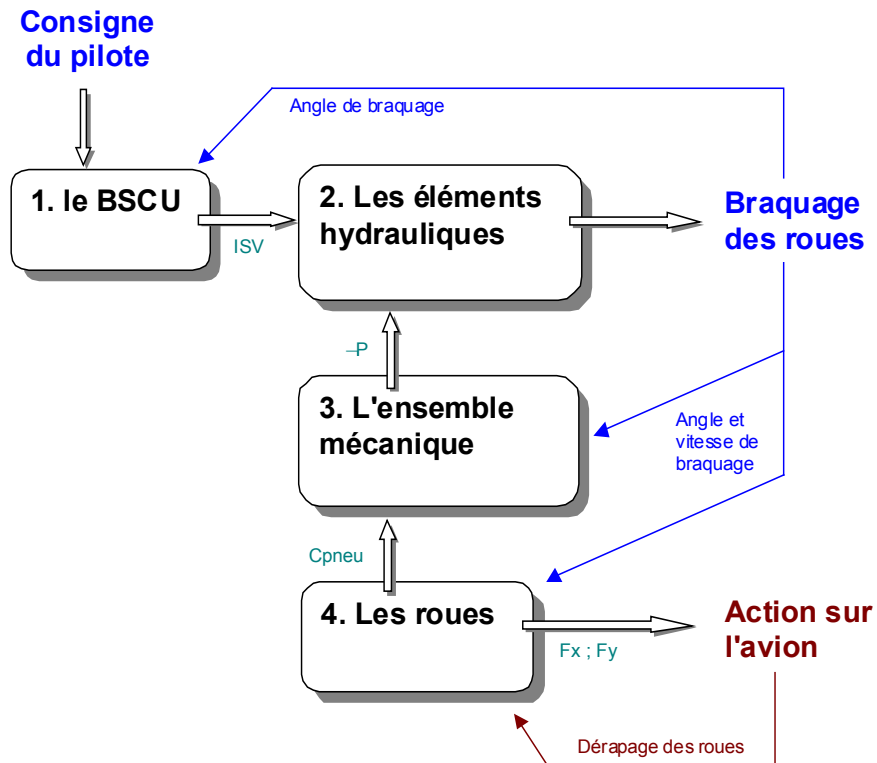


figure 1.16 : Représentation schématique du système d'orientation des roues avant.

Dans le BSCU, l'asservissement du système d'orientation des roues avant peut être représenté par l'équation :

$$ISV_{RA} = 1,4 \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (1.38)$$

et par des saturations de la commande en amplitude et vitesse :

$$\theta_{RA MIN} < \theta_{RA} < \theta_{RA MAX} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_{RA MIN} < \dot{\theta}_{RA} < \dot{\theta}_{RA MAX} \quad (1.39)$$

Pour un A320, ces saturations correspondent à un débattement des roue de +/- 74° et de +/- 20°/s.

A cet asservissement est associé des cinématiques de commande permettant de définir la consigne de braquage des roues ( $\beta_{RAc}$ ) en fonction de la vitesse et des sollicitations du pilote sur le tiller et le palonnier.

En négligeant la dynamique du premier étage de la servovalve et en considérant le fluide hydraulique incompressible, il est possible de représenter le comportement de l'ensemble formé de la servovalve, du bloc hydraulique, le vérin, et du système d'entraînement des roues par :

$$\dot{\theta}_{RA} = \frac{\sqrt{P_{GENE} - P_{ACC} - |\Delta P|}}{S_{PIS} \times R_{fût}} \times \sqrt{1 - \frac{(K_1 \times K_2 \times ISV)^2}{\frac{1}{K_3} + (K_1 \times K_2 \times ISV)^2}} \times K_1 \times K_2 \times ISV_{RA} \quad (1.40)$$

$|\Delta P|$  est la différence de pression entre les chambres du vérin,  $S_{PIS}$  la section du piston et  $R_{fût}$  le rayon du fût.

Les non-linéarités de cette fonction traduisent les pertes de débit dues aux diaphragmes présents dans le bloc hydraulique. Ces diaphragmes permettent de limiter la vitesse de braquage à 18°/s à vide (pour  $\Delta P=0$  bar : pas de pertes de charge).

L'évaluation de  $\Delta P$  permet de représenter les pertes de charge. Cette différence de pression entre les chambres du vérin est due aux frottements apparaissant entre les parties fixes et mobiles du train d'atterrissage et surtout au couple généré par le pneu autour de l'axe du fût. Ce couple est principalement issu de la chasse du train (déport de l'axe des roues par rapport à l'axe de rotation du fût, pour en assurer la stabilité en rotation), des dissymétries d'effort pouvant apparaître entre les roues et des déformations des pneus. Ce couple est très difficile à déterminer. Il ne sera donc pas pris directement en compte pour la synthèse de la commande mais pourra être estimé de manière macroscopique pour des points de fonctionnement donnés.

### 2.3.8. Architecture générale du modèle

La représentation de l'avion au sol que l'on vient de développer ici peut être résumée par le schéma ci-dessous :

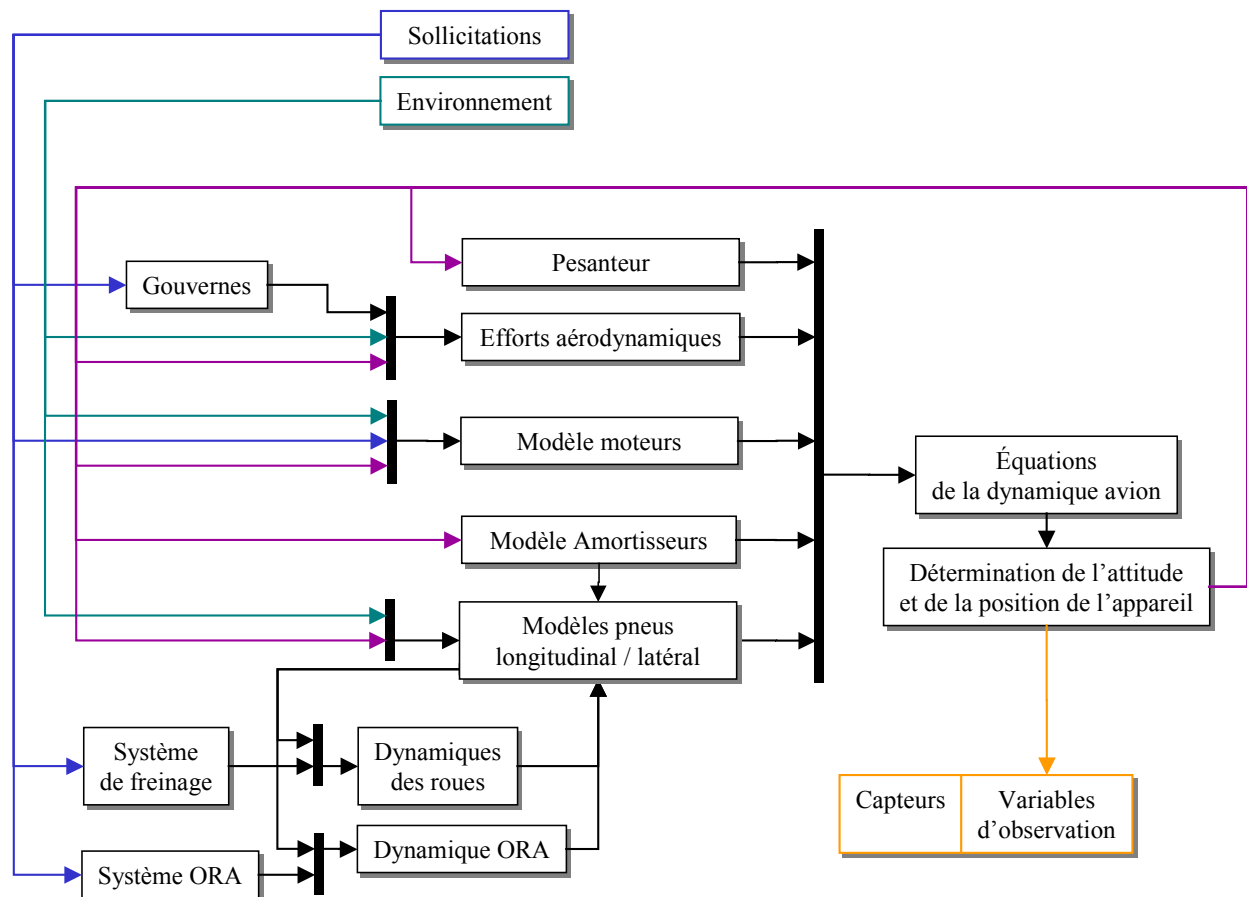


figure 1.17 : Représentation schématique de l'architecture de la modélisation de l'avion au sol.

## 3. Réduction, simplification et analyse du modèle

### 3.1. Objectif

Pour satisfaire les différents besoins liés à la mise au point des lois de commande, à leur réglage et à leur validation, il est nécessaire de disposer de modélisations plus ou moins complexes. Cette partie a pour objet de montrer les différentes simplifications envisageables, permettant de subvenir à ce besoin.

Le modèle précédent présente une complexité relativement importante. Celle-ci peut-être réduite par différentes simplifications :

- Assimilation des effets aérodynamiques à des perturbations,
- Simplification du modèle inertiel et des modèles actionneurs,
- Réduction de l'ordre du modèle,
- Modélisation de type "bicyclette" (deux roues alignées),
- Modélisation Linéaire.

### 3.2. Simplification des équations

On présente ici quelques pistes utilisées durant l'étude pour réduire la complexité du modèle de synthèse.

#### 3.2.1. Expression de l'inertie

Dans la matrice inverse de la matrice d'inertie, le terme  $I_{xz}^{-1}$  est négligeable par rapport aux autres termes. On peut alors simplifier cette matrice et ne conserver que des termes diagonaux.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{-1} & 0 & I_{xz}^{-1} \\ 0 & I_{yy}^{-1} & 0 \\ I_{xz}^{-1} & 0 & I_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_p \\ M_q \\ M_r \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_p \\ M_q \\ M_r \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Les équations de la dynamique de l'avion seront alors fortement simplifiées.

#### 3.2.2. Les effets aérodynamiques

Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque la vitesse de déplacement de l'avion est suffisamment faible, les effets aérodynamiques peuvent être assimilés à des perturbations. Ces effets peuvent donc ne plus être considérés comme faisant directement partie du modèle de synthèse. Ils n'interviennent plus qu'au travers d'un ensemble de perturbations non définies, auxquelles la loi de commande devra être robuste.

### 3.2.3. Projection du poids

En considérant le terrain horizontal et l'assiette constante (cf. partie 3.3 ci-dessous), il est possible de négliger les composantes longitudinale et latérale du poids.

On a alors :

$$F_{Zp} = mg \quad \text{et} \quad F_{Xp} = F_{Yp} = 0 \quad (1.42)$$

### 3.2.4. Simplification des modèles actionneurs

Le comportement des actionneurs est complexe, fortement non linéaire et comporte des paramètres incertains (systèmes hydrauliques, frottement des disques de freins, algorithmes de commande, ...).

De nombreux niveaux de simplification peuvent être considérés. Ces niveaux sont déterminés au cas par cas et peuvent aller du simple gain unitaire à un modèle complet prenant en compte les boucles de commande.

Il est à noter que ces actionneurs comportent des saturations en position (ex : butés mécaniques) et en vitesse (ex : capacité hydraulique) et donc qu'un modèle linéaire n'est utilisable que pour des sollicitations d'amplitudes et de dynamiques réduites.

Pour l'étude qui suit, on se contentera donc de considérer les actionneurs comme des systèmes infiniment rapides (modèle quasi-statique) ou comme des systèmes du premier ordre (cf. parties 2.3.6 et 2.3.7).

## 3.3. Réduction de l'ordre du modèle

Il est possible de réduire l'ordre du modèle en considérant les amortisseurs comme infiniment rigides et la piste parfaitement plate. Ces deux hypothèses ont pour conséquence de rendre la hauteur du centre de gravité et les assiettes longitudinales et latérales constantes (vitesse verticale et vitesses de tangage et de roulis nulles). Les trois équations relatives à ces paramètres sont alors purement algébriques et la répartition de la charge verticale entre les différents trains d'atterrissages est quasi-statique.

Le résultat issu de cette approche "physique" du système est proche du résultat plus "formel" que l'on peut obtenir par l'application de la méthode des perturbations singulières ([Fossard 1993]). Pour des amortisseurs suffisamment rigides et suffisamment peu amortis, les dynamiques en vitesse verticale, en roulis et tangage seront "rapides" et pourront être négligées. L'impact de ces raideurs et amortissements sur les changements d'assiette, sur la hauteur du centre de gravité, sur la projection de la pesanteur et sur la géométrie de l'avion pourra donc aussi être pris en compte dans les équations algébriques dont il a été question précédemment et ce, sans pour autant augmenter l'ordre du système.

### 3.3.1. Dynamique verticale de l'avion

En prenant pour hypothèse que le terrain est parfaitement horizontal, que la portance reste quasi-constante et que l'effet des variations d'assiette n'influence pas la hauteur du centre de gravité, il est possible de considérer la position verticale du centre de gravité de l'avion comme constante. Cela revient alors à réduire l'ordre du modèle en négligeant sa dynamique en vitesse verticale. L'équation différentielle correspondante se ramène alors à une équation algébrique assurant l'équilibrage entre le poids, la portance et les charges verticales sur les trains.

On a en effet :

$$\dot{V}_Z = \frac{F_Z}{m} - (p V_y - q V_x) = 0 \quad (1.43)$$

En développant cette équation, on obtient alors :

$$F_{Z_p} + F_{Z_{AERO}} - m(p V_y - q V_x) = -F_{Z_{RA}} - F_{Z_{TP}}D - F_{Z_{TP}}G \quad (1.44)$$

On définit la « résultante du poids » comme :

$$R_p = F_{Z_p} + F_{Z_{AERO}} = -F_{Z_{RA}} - F_{Z_{TP}}D - F_{Z_{TP}}G \quad (1.45)$$

### 3.3.2. Approximation des dynamiques en tangage et en roulis

Il est possible de considérer que les assiettes longitudinale et latérale de l'avion sont quasi-statiques. Cette simplification suppose de négliger l'effet dû à l'enfoncement des amortisseurs des trains principaux et avant. On peut ainsi négliger les dynamiques en tangage et en roulis de l'avion. L'effet issu des moments associés à ces deux axes reste pris en compte par l'introduction d'une équation permettant de déterminer la répartition des charges verticales sur les trains.

Cette répartition peut être divisée en deux éléments, une répartition dite « statique », correspond à l'état de l'avion à l'arrêt et une répartition « dynamique » prenant en compte l'effet des moments en roulis et tangage.

#### *La répartition « statique »*

Lorsque l'avion est à l'arrêt, l'équation des moments autour de l'axe latéral peut s'écrire :

$$L_{X_{RA}} F_{Z_{RA}} - L_{X_{TP}} (F_{Z_{TP}}D + F_{Z_{TP}}G) = 0 \quad (1.46)$$

En considérant la réduction précédente du modèle et en associant (1.46) à (1.44), on aboutit alors à :

$$L_{X_{RA}} F_{Z_{RA}} = L_{X_{TP}} (F_{Z_{TP}}D + F_{Z_{TP}}G) = L_{X_{TP}} (-R_p - F_{Z_{RA}}) \quad (1.47)$$

Ce qui donne :

$$F_{Z_{RA}} = - \frac{L_{X_{TP}} R_p}{L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}}} \quad (1.48)$$

De même, en considérant la charge appliquée sur les trains principaux, on peut obtenir :

$$F_{Z_{TP}} D + F_{Z_{TP}} G = - \frac{L_{X_{RA}} R_p}{L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}}} \quad (1.49)$$

La répartition des charges sur les trains principaux étant symétrique, on a alors :

$$F_{Z_{TP}} D = F_{Z_{TP}} G = - \frac{L_{X_{RA}} R_p}{2(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}})} \quad (1.50)$$

### ***La répartition « dynamique »***

L'apparition de moments suivant les axes de roulis et tangage a pour conséquence de modifier la répartition de ces charges sur les trains. Cette modification de la répartition des charges traduit les équations dynamiques en roulis et tangage pour des assiettes longitudinales et latérales quasi-statiques.

Sur l'axe latéral, on a :

$$Mq_{\text{horsFz}} + h(F_{X_{RA}} + F_{X_{TP}}) + h_{\text{MOT}}(F_{X_{\text{MOT}}} D + F_{X_{\text{MOT}}} G) - L_{X_{RA}} F_{Z_{RA}} + L_{X_{TP}}(F_{Z_{TP}} D + F_{Z_{TP}} G) = 0 \quad (1.51)$$

que l'on écrit sous la forme :

$$Mq_{\text{horsFz}} - L_{X_{RA}} F_{Z_{RA}} + L_{X_{TP}}(F_{Z_{TP}} D + F_{Z_{TP}} G) = 0 \quad (1.52)$$

$Mq_{\text{horsFz}}$  représente l'ensemble des moments de tangage n'ayant pas de liens avec les efforts verticaux appliqués sur les amortisseurs.

D'où,

$$L_{X_{RA}}(F_{Z_{RA \text{ STAT}}} + \Delta F_{Z_q}) - L_{X_{TP}}(F_{Z_{TP \text{ STAT}}} D + F_{Z_{TP \text{ STAT}}} G - \Delta F_{Z_q}) = Mq_{\text{horsFz}} \quad (1.53)$$

et, en considérant (1.46), on a alors :

$$\Delta F_{Z_q}(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}}) = Mq_{\text{horsFz}} \quad (1.54)$$

et donc :

$$\Delta F_{Z_q} = \frac{Mq_{\text{horsFz}}}{L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}}} \quad (1.55)$$

Le suffixe « STAT » désigne la répartition de charge obtenue précédemment (avion à l'arrêt).

De même, suivant l'axe longitudinal, on peut écrire :

$$Mp_{\text{horsFz}} - h(F_{Y_{RA}} + F_{Y_{TP}}) + L_{Y_{TP}}(F_{Z_{TP}} G - F_{Z_{TP}} D) = 0 \quad (1.56)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$Mp_{\text{horsFz}} + L_{Y_{TP}}(F_{Z_{TP}} G - F_{Z_{TP}} D) = 0 \quad (1.57)$$

On obtient donc :

$$F_{Z_{TP}} D_{\text{STAT}} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} + \Delta F_{Z_p} - F_{Z_{TP}} G_{\text{STAT}} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} + \Delta F_{Z_p} = \frac{Mp_{\text{horsFz}}}{L_{Y_{TP}}} \quad (1.58)$$

En utilisant (1.46), on peut alors obtenir :

$$\Delta F_{Z_p} = \frac{M p_{\text{hors Fz}}}{2 L y_{TP}} \quad (1.59)$$

Les expressions des charges verticales sur les trains sont alors ramenées à :

$$F_{Z_{RA}} = - \frac{L x_{TP} R_p}{L x_{RA} + L x_{TP}} + \Delta F_{Z_q} \quad (1.60)$$

$$= - \frac{L x_{TP} R_p - M q_{\text{hors Fz}}}{L x_{RA} + L x_{TP}}$$

$$F_{Z_{TPD}} = - \frac{L x_{RA} R_p}{2 (L x_{RA} + L x_{TP})} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} + \Delta F_{Z_p} \quad (1.61)$$

$$= - \frac{L x_{RA} R_p + M q_{\text{hors Fz}}}{2 (L x_{RA} + L x_{TP})} + \frac{M p_{\text{hors Fz}}}{2 L y_{TP}}$$

$$F_{Z_{TPG}} = - \frac{L x_{RA} R_p}{2 (L x_{RA} + L x_{TP})} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} - \Delta F_{Z_p} \quad (1.62)$$

$$= - \frac{L x_{RA} R_p + M q_{\text{hors Fz}}}{2 (L x_{RA} + L x_{TP})} - \frac{M p_{\text{hors Fz}}}{2 L y_{TP}}$$

### *Cas où la matrice d'inertie n'est pas simplifiée*

Pour le calcul précédent, nous avons pris en compte la première hypothèse simplificatrice, permettant de négliger des termes de la matrice inverse à la matrice d'inertie. Sans cette hypothèse, le résultat aurait alors été :

$$M p + M r \frac{I_{XZ}^{-1}}{I_{XX}^{-1}} = 0 \quad (1.63)$$

d'où,

$$\Delta F_{Z_p} = \frac{M p_{\text{hors Fz}} + M r \frac{I_{XZ}^{-1}}{I_{XX}^{-1}}}{2 L y_{TP}} \quad (1.64)$$

Ce qui donne :

$$F_{Z_{RA}} = - \frac{L x_{TP} R_p}{L x_{RA} + L x_{TP}} + \Delta F_{Z_q} \quad (1.65)$$

$$= - \frac{L x_{TP} R_p - M q_{\text{hors Fz}}}{L x_{RA} + L x_{TP}}$$

$$F_{Z_{TP}} D = - \frac{L_{X_{RA}} R_p}{2(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}})} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} + \Delta F_{Z_p} \quad (1.66)$$

$$= - \frac{L_{X_{RA}} R_p + M q_{\text{hors } F_z}}{2(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}})} + \frac{M p_{\text{hors } F_z} + M r \frac{I_{xz}^{-1}}{I_{xx}^{-1}}}{2 L_{y_{TP}}}$$

$$F_{Z_{TP}} G = - \frac{L_{X_{RA}} R_p}{2(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}})} - \frac{\Delta F_{Z_q}}{2} - \Delta F_{Z_p} \quad (1.67)$$

$$= - \frac{L_{X_{RA}} R_p + M q_{\text{hors } F_z}}{2(L_{X_{RA}} + L_{X_{TP}})} - \frac{M p_{\text{hors } F_z} + M r \frac{I_{xz}^{-1}}{I_{xx}^{-1}}}{2 L_{y_{TP}}}$$

### ***Le modèle réduit***

Cette approximation des dynamiques de roulis et tangage et de la vitesse verticale revient à négliger les vitesses qui leurs sont associées. On peut alors simplifier les équations de la dynamique de l'avion (on ne considère ici que la dynamique des vitesses linéaires et angulaires) qui se retrouve ainsi réduite à un système d'ordre 3 :

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \frac{F_x}{m} + r V_y \\ \dot{V}_y = \frac{F_y}{m} - r V_x \\ \dot{r} = i_{lzz} \cdot M r + i_{lxz} \cdot M p + I_{q_{pq}} \cdot p q + I_{q_{qr}} \cdot q r \end{cases} \quad (1.68)$$

### **3.3.3. Le modèle "bicyclette"**

Jusqu'à présent, l'avion était considéré comme un véhicule tricycle, les diabolos des trains principaux étant assimilés à deux roues identiques, superposées au point central de chaque train d'atterrissage. Il est envisageable de ne prendre en compte que deux points de contact avec le sol, en considérant l'action des trains principaux comme symétrique et l'assiette de l'avion comme constante.

A partir de cette hypothèse, on peut alors ne travailler qu'avec un unique train principal, positionné au centre du fuselage et comportant quatre roues superposées.

Pour pouvoir continuer à prendre en compte l'effet du freinage dissymétrique, il faut alors introduire, dans l'expression du moment  $M r$ , le couple qui aurait alors été généré.

Du fait de cette hypothèse de symétrie, ni les transferts de charge latéraux, ni l'influence de la vitesse de lacet sur les vitesses longitudinales locales (en chaque train) ne sont pris en compte. Les angles de dérapage locaux peuvent alors s'écrire :

$$\beta_{RA} = \arctg\left(\frac{Vy_{RA}}{Vx_{RA}}\right) - \theta_{RA} = \arctg\left(\frac{Vy + Lx_{RA} \times r}{Vx}\right) - \theta_{RA} \quad (1.69)$$

$$\beta_{TP} = \arctg\left(\frac{Vy_{TP}}{Vx_{TP}}\right) = \arctg\left(\frac{Vy - Lx_{TP} \times r}{Vx}\right) \quad (1.70)$$

Et la répartition de charge ne considère que les deux points de contact, on a aussi :

$$\begin{aligned} Fz_{RA} &= - \frac{Lx_{TP} R_p}{Lx_{RA} + Lx_{TP}} + \Delta Fz_q \\ &= - \frac{Lx_{TP} R_p - Mq_{hors Fz}}{Lx_{RA} + Lx_{TP}} \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} Fz_{TP} D &= - \frac{Lx_{RA} R_p}{(Lx_{RA} + Lx_{TP})} - \Delta Fz_q \\ &= - \frac{Lx_{RA} R_p + Mq_{hors Fz}}{(Lx_{RA} + Lx_{TP})} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Au vu des simplifications réalisées, il est important de remarquer qu'un modèle du type "bicyclette" n'est pas adapté à la simulation de manœuvres rapides et relativement serrées (vitesse de lacet et transfert de charge importants).

### 3.4. Linéarisation du comportement latéral de l'avion

Le comportement de l'avion tel qu'il a été décrit est fortement non linéaire. Pour faciliter l'étude et la synthèse de la commande, il serait très avantageux de pouvoir disposer d'un modèle linéaire du processus. Si l'on considère la vitesse stabilisée et la trajectoire suivie par l'avion peu incurvée, il est possible d'obtenir facilement une représentation linéaire du comportement latéral de l'avion au sol.

Pour réaliser une telle linéarisation du comportement de l'avion, il est nécessaire de linéariser les modélisations des sous-ensembles non-linéaires du modèle global. Ces sous-ensembles sont principalement les angles de dérapage locaux, le comportement des pneumatiques et le système d'orientation des roue avant (ORA).

### 3.4.1. Calcul des angles de dérapage locaux :

Les angles de dérapage locaux sont déterminés à partir des équations (1.17), (1.18) et (1.19). Pour pouvoir obtenir une représentation linéaire de ces angles (par rapport aux variables d'état du système), il est tout d'abord nécessaire de linéariser la fonction « arctangente ». Comme on suppose la trajectoire peu incurvée, les angles de dérapage obtenus conserveront une valeur réduite. Il sera ainsi possible de les exprimer en écrivant (approximation du premier ordre dans un voisinage de l'angle nul) :

$$\beta_{RA} = \frac{V_{y_{RA}}}{V_{x_{RA}}} - \theta_{RA} = \frac{V_y + L_{x_{RA}} \times r}{V_x} - \theta_{RA} \quad (1.73)$$

$$\beta_{TPD} = \frac{V_{y_{TPD}}}{V_{x_{TPD}}} = \frac{V_y - L_{x_{TP}} \times r}{V_x - L_{y_{TP}} \times r} \quad (1.74)$$

$$\beta_{TPG} = \frac{V_{y_{TPG}}}{V_{x_{TPG}}} = \frac{V_y - L_{x_{TP}} \times r}{V_x + L_{y_{TP}} \times r} \quad (1.75)$$

Du fait des hypothèses simplificatrices évoquées ci-dessus, il est possible d'éviter de conserver la vitesse de lacet au dénominateur en utilisant une représentation du type « modèle bicyclette ». On ne considère alors plus qu'un train principal équivalent, placé à la verticale de l'axe du fuselage. Les angles de dérapage peuvent alors être mis sous la forme :

$$\beta_{RA} = \frac{V_{y_{RA}}}{V_{x_{RA}}} - \theta_{RA} = \frac{V_y + L_{x_{RA}} \times r}{V_x} - \theta_{RA} \quad (1.76)$$

$$\beta_{TP} = \frac{V_{y_{TP}}}{V_{x_{TP}}} = \frac{V_y - L_{x_{TP}} \times r}{V_x} \quad (1.77)$$

On ne considère ici que la dynamique latérale de l'avion. La vitesse est supposée stabilisée et n'est donc pas considérée comme une variable d'état mais comme un paramètre exogène. Cette hypothèse revient à réaliser une réduction du modèle à l'ordre 2.

### 3.4.2. Modélisation des pneumatiques :

A de faibles angles de dérapage, le comportement des pneus peut être considéré comme linéaire par rapport à l'angle de dérapage. Ce comportement est alors caractérisé par un gain appelé "cornering gain" (Gy). Ce gain correspond à la dérivée initiale, par rapport à l'angle de dérapage, de la force générée par les pneus. Ce paramètre est en fait une fonction non-linéaire de la charge verticale, de l'adhérence, de la vitesse, du type de pneu utilisé, etc. Il dépend donc de paramètres issus de l'état du processus et de paramètres incertains. Ainsi, il devra être choisi pour différents cas de figure et être adapté à l'état courant du système.

Les forces générées par les pneus peuvent ainsi s'écrire :

$$F_{y_{RA}} = G_{y_{RA}} \cdot \beta_{RA} \quad \text{et} \quad F_{y_{TP}} = G_{y_{TP}} \cdot \beta_{TP} \quad (1.78)$$

$$\text{avec : } G_{y_i} = \left. \frac{\partial F_{y_i}}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_i=0}$$

### 3.4.3. Modélisation du système d'orientation des roues avant :

Une modélisation linéaire du système d'orientation des roues avant n'est utilisable que pour des sollicitations d'amplitude et de dynamique réduites. Cette modélisation peut se limiter à un gain unitaire ou, si le temps de réponse devient significatif, à une fonction de transfert du premier ordre.

Pour ce faire, il est alors nécessaire de linéariser l'équation (1.40) pour de faibles ISV. Cette linéarisation permet d'aboutir à l'expression :

$$\dot{\theta}_{RA} = \frac{\sqrt{P_{GENE} - P_{ACC} - |\Delta P|}}{S_{PIS} \times R_{fit}} \times K_1 \times K_2 \times ISV \quad (1.79)$$

La commande du système d'orientation des roues avant est réalisée via l'équation :

$$ISV = 1,4 \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (1.80)$$

$$\text{Ce qui donne alors : } \dot{\theta}_{RA} = \gamma \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (1.81)$$

Le système ORA se comporte comme un filtre du premier ordre de fonction de transfert :

$$\frac{\theta_{RA}}{\theta_{RAc}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma} p} \quad (1.82)$$

### 3.4.4. Modèle linéarisé du comportement latéral autour de trajectoires rectilignes

A partir de linéarisations précédentes, le comportement de l'avion peut donc être décrit par un modèle linéaire d'ordre 2. Cependant, une telle modélisation n'est applicable qu'à un domaine de fonctionnement relativement réduit (approximation des petits angles) : faibles braquages, rayon de courbure de la trajectoire peu important, sollicitations relativement lentes.

Cette modélisation permet d'aboutir à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1.83)$$

$$\text{avec pour vecteur d'état : } X = \begin{bmatrix} r \\ V_y \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

$$\text{et comme entrée : } U = \begin{bmatrix} \theta_{RA} \\ \delta r \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

On a alors :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

$$\text{avec : } A_{11} = - \frac{I_{zz}^{-1} (4 G_{y_{TP}} L_{tp}^2 + 2 G_{y_{RA}} L_{ra}^2)}{V_X} + \frac{I_{zz}^{-1}}{2} \rho S e_{AERO}^2 V_{AIR} C_{n_r} \quad (1.87)$$

$$A_{12} = \frac{I_{zz}^{-1} (4 G_{y_{TP}} L_{tp} - 2 G_{y_{RA}} L_{ra})}{V_X} + \frac{I_{zz}^{-1}}{2} \rho S e_{AERO} V_{AIR} C_{n_\beta}$$

$$A_{21} = - V_X + \frac{4 G_{y_{TP}} L_{tp} - 2 G_{y_{RA}} L_{ra}}{m V_X} + \frac{1}{2 m} \rho S V_{AIR} C_{y_r} \cdot e_{AERO}$$

$$A_{22} = - V_X + \frac{4 G_{y_{TP}} L_{tp} - 2 G_{y_{RA}} L_{ra}}{m V_X} + \frac{1}{2 m} \rho S V_{AIR} C_{y_\beta}$$

$$\text{et, } B_{11} = 2 I_{zz}^{-1} L_{ra} G_{y_{RA}} \quad (1.88)$$

$$B_{12} = \frac{I_{zz}^{-1}}{2} \rho S e_{AERO} V_{AIR}^2 C_{n_{\delta r}}$$

$$B_{21} = \frac{2 G_{y_{RA}}}{m}$$

$$B_{22} = \frac{1}{2 m} \rho S V_{AIR}^2 C_{y_{\delta r}}$$

### 3.5. Analyse du comportement de l'avion au sol

Le but ici est de donner une compréhension globale, qualitative du comportement de l'avion lors du roulage. Pour ce faire cette explication s'appuiera sur 3 parties :

- une analyse de la stabilité de l'avion au roulage,
- une étude du cas de mise en virage,
- une analyse du comportement de l'avion en limite d'adhérence.

Pour simplifier cette analyse, on se contentera de cas de fonctionnement à vitesse suffisamment réduite pour négliger l'effet des forces aérodynamiques. A des vitesses de roulement plus élevées, l'avion conservera un comportement similaire qui sera rendu plus stable du fait des forces aérodynamiques qui tendent à le ramener sur une trajectoire rectiligne (dans l'axe du vent).

#### 3.5.1. Stabilité de l'avion au roulage

Au roulage, la stabilité de l'avion peut être directement associée à un rapport entre le moment généré par les trains principaux et celui dû aux roues avant. En effet, les roues avant étant placées devant le centre de gravité, leur action sur la dynamique de l'appareil est déstabilisante. A l'inverse, les trains principaux, du fait de leur position arrière, génèrent un moment stabilisant.

Par exemple, on considère le cas du suivi d'une trajectoire rectiligne.

On suppose l'apparition d'une perturbation (par exemple une rafale de vent) induisant un léger dérapage de l'avion vers la droite ( $V_y > 0$ ). Cet angle de dérapage des roues induit alors sur chacun des trains d'atterrissage une force négative.

Dans le cas du train d'atterrissage avant, cette force se traduit par un moment négatif en lacet, augmentant la rotation de l'avion et donc son dérapage. La force issue des trains principaux, à l'inverse, génère un moment positif qui tend à ramener l'avion sur une trajectoire rectiligne. Si ce moment est inférieur au moment dû au train d'atterrissage avant, l'avion est alors instable (départ en tête à queue).

En ce basant sur la représentation linéaire (1.83), il est possible de retrouver ce résultat de manière théorique. En effet, en analysant la stabilité de cette représentation d'état, il est possible de conclure que le système est bien instable si l'on a :

$$4 \text{ Gy}_{\text{TP}} \text{ Ltp} < 2 \text{ Gy}_{\text{RA}} \text{ Lra} \quad (1.89)$$

Cette analyse permet aussi de mettre en évidence un deuxième cas d'instabilité correspondant à un avion dont le comportement est tel que :

$$4 \text{ Gy}_{\text{TP}} \text{ Ltp} - 2 \text{ Gy}_{\text{RA}} \text{ Lra} > m \cdot V_{X2} \quad (1.90)$$

En effet, dans ce cas de figure, une légère rotation de l'avion (vitesse de lacet non nulle considérée positive ici) génère des efforts positifs sur les trains principaux et des efforts négatifs associés aux roues avant et aux forces centrifuges. Dans le cas où le système est tel que l'on ait (1.90), la somme de ces efforts sera alors positive et entraînera donc une légère dérive de l'avion faisant augmenter  $V_y$ . Cette apparition de dérapage aura alors pour conséquence un accroissement de la vitesse de lacet qui à nouveau générera du dérapage.

Il est important de noter que ce résultat n'est valable que pour des vitesses suffisamment importantes. En effet, le modèle utilisé n'est pas représentatif du comportement de l'avion à des vitesses très faibles et dans le cas d'un arrêt (i.e. souplesse des pneumatiques négligée et division par  $V_x$  dans l'expression de l'angle de dérapage).

On peut aussi noter que ce modèle ne prend pas non plus en compte les efforts aérodynamiques qui, aux grandes vitesses, ajoutent un effet stabilisant au comportement de l'avion.

### 3.5.2. Cas d'une mise en virage

Lors d'une mise en virage, le braquage des roues du train d'atterrissage avant a pour effet d'augmenter l'angle de dérapage. La force latérale ainsi produite génère un moment de lacet qui déclenche le virage.

Durant celui-ci, du dérapage apparaît aussi au niveau des trains principaux. Ce dérapage génère une force s'opposant à la force centrifuge et à la force latérale issue des roues avant. Cette force a pour particularité de produire un moment opposé à la rotation de l'avion. Pour maintenir la rotation stable, il sera alors nécessaire de conserver un braquage des roues avant suffisant pour générer un moment s'opposant à celui produit par les trains principaux.

La dynamique latérale de l'avion en virage peut donc être expliquée sur la base de ces constatations :

- La dynamique en vitesse latérale a pour but de générer un dérapage suffisant au niveau des trains principaux pour compenser la force centrifuge et la force due aux roues avant.
- La dynamique en lacet est, quant à elle, directement issue de l'équilibre entre le moment dû au braquage des roues et l'effet stabilisateur des trains principaux.

### **3.5.3. Comportement en limite d'adhérence**

On s'intéresse ici au cas où l'angle de dérapage atteint ou dépasse sa valeur optimale ( $\beta_{OPT}$ ). La force générée par les roues concernées est alors maximale.

#### ***Effet sur les roues avant :***

Si la force sur le train d'atterrissage avant atteint sa valeur maximum, le moment de lacet qui en résulte est maximum. Cette limitation se traduira ainsi par une saturation de la dynamique de mise en virage.

En général (cas de piste sèche), cette limitation ne peut être rencontrée. En effet, la limitation du système d'orientation des roues avant en vitesse de braquage (limitation du débit hydraulique en entrée du piston) a pour conséquence de restreindre l'angle de dérapage à une valeur inférieure à sa valeur optimale.

#### ***Effet sur les trains principaux :***

Lorsque les trains principaux atteignent leur limite d'adhérence, l'augmentation de la vitesse de lacet se traduit alors par une mise en dérapage de l'avion. La force générée par les pneus ne permet plus de contrer les forces centrifuges et l'avion continue son virage en glissade.

Lorsque le virage réalisé est tel que le dérapage au niveau des trains principaux atteint sa valeur optimale ( $\beta_{OPT}$ ), le rayon de giration obtenu correspond alors au rayon minimum pouvant être atteint par l'avion dans de telles conditions.

## **4. Conclusion**

Comme on vient de le voir dans ce chapitre, la modélisation des mouvements de l'avion au sol et des systèmes qu'il met en œuvre est une tâche extrêmement difficile. Elle peut aussi déboucher sur des modèles dont la complexité ne pourrait que difficilement permettre la mise en œuvre efficace des méthodes actuelles de synthèse de lois de commande. Un ensemble de simplifications possibles a été envisagé et analysé. Cet ensemble sert de base aux modélisations qui seront finalement retenues dans les chapitres suivants. Il sera alors possible de mener à bien la synthèse des lois de commande en longitudinal et en latéral des mouvements de l'avion au sol, aux basses et très basses vitesses.



## Chapitre 2 : Commande des systèmes non linéaires : éléments théoriques

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introduction et cadre de l'étude théorique .....</b>                   | <b>2</b>  |
| <b>2. Commande au premier ordre.....</b>                                     | <b>3</b>  |
| 2.1. La linéarisation tangente .....                                         | 3         |
| 2.2. Principe de la commande au premier ordre.....                           | 5         |
| <b>3. Linéarisation entrée/sortie et commande non linéaire inverse .....</b> | <b>9</b>  |
| 3.1. Inversion de la dynamique du système .....                              | 9         |
| 3.2. La linéarisation entrée/sortie .....                                    | 9         |
| 3.3. Application à la commande de systèmes non linéaires SISO .....          | 11        |
| 3.4. Robustesse et stabilité locale.....                                     | 12        |
| 3.5. Linéarisation partielle en boucle ouverte .....                         | 15        |
| 3.6. Commande non linéaire inverse partielle.....                            | 18        |
| <b>4. Le Backstepping .....</b>                                              | <b>20</b> |
| 4.1. Utilisation en cascade de la commande non linéaire inverse .....        | 21        |
| 4.2. Méthode du backstepping.....                                            | 22        |
| <b>5. La commande par régime glissant.....</b>                               | <b>25</b> |
| 5.1. Bases de la théorie de la commande par régime glissant .....            | 25        |
| 5.2. Approximation continue de la commande par régime glissant .....         | 26        |
| 5.3. Commande intégrale par régime glissant .....                            | 28        |
| 5.4. Commande par régime glissant et commande non linéaire inverse .....     | 28        |
| <b>6. Conclusion.....</b>                                                    | <b>29</b> |

# 1. Introduction et cadre de l'étude théorique

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principales méthodes de synthèse utilisées pour la commande des systèmes présentant une dynamique non-linéaire continue, afin d'avoir un référentiel théorique pour l'étude développée dans cette thèse.

Cette présentation se limite donc aux méthodes de synthèse applicables à des systèmes présentant des caractéristiques similaires à celles des applications étudiées dans cette thèse qui considère la dynamique de l'avion au sol.

Le chapitre précédent a montré que l'on cherche à commander un système dont la dynamique est régie par les équations de la mécanique du solide. Dans chacune des situations considérées, il s'agit de contrôler l'évolution d'une unique sortie, une variable scalaire qui correspond soit à une composante du vecteur vitesse (linéaires ou angulaires), soit à une composante du vecteur d'accélération (linéaires ou angulaires). On s'intéresse donc à la commande d'un système mono-sortie.

La commande du système est assurée par un ou plusieurs actionneurs (cas multi-entrées) qui génèrent des efforts permettant d'influer sur l'évolution de cette variable de sortie ou de sa dérivée. Dans le cas où plusieurs actionneurs sont mis en oeuvre, ceux-ci ont ainsi une action complémentaire, produisant un effort global (force suivant l'axe longitudinal dans le cas du pilotage longitudinal, moment suivant l'axe de lacet dans le cas du contrôle latéral). On peut donc chaque fois associer à cet effort global une variable d'entrée unique dans la formulation mathématique du problème de commande étudié.

Ce problème de commande peut donc être ramené à celui d'un système mono-entrée/mono-sortie (SISO).

Cette transformation du problème initial multi-entrées en un problème mono-entrée conduit alors à la mise au point d'une fonction de supervision des différents actionneurs de façon à effectivement obtenir l'action globale attendue. De nombreux travaux existent déjà pour cela aussi bien dans le domaine aéronautique [Villaume 2002] que dans d'autres domaines [Berge 1997].

Compte tenu des conditions opérationnelles et du système considéré, il semble acceptable de représenter la dynamique du système par un modèle indépendant du temps. Ainsi, les facteurs environnementaux (inclinaison de la piste, adhérence du sol, vent, etc.) seront pris comme quasi-statiques ou comme de simples perturbations extérieures.

On limite donc la présentation des techniques de synthèse de lois abordées dans ce chapitre au cas de systèmes dynamiques de type SISO (« Single input, single output ») et NLTI (« Non-Linear Time Invariant »).

Une représentation mathématique générale de tels systèmes est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + g(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x$  est un vecteur d'état prenant ses valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  où  $\mathbf{R}$  est le corps des réels,  $u$  et  $y$  étant des scalaires de  $\mathbf{R}$ . On supposera dans la suite de l'étude que  $f$  et  $h$  sont des fonctions définies sur  $\mathbf{R}^n$  et que  $g$  est définie sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  seront supposées être de classe  $C^\infty$ .

## 2. Commande au premier ordre

La commande au premier ordre est une méthode de commande non-linéaire très utilisée dans le cadre de nombreuses applications et notamment dans le domaine aéronautique. Sa mise en œuvre conduit à l'utilisation des nombreux outils déjà disponibles pour la synthèse de lois de commande des systèmes linéaires [Devaud 1999], [Mouyon 1993].

Cette technique de commande se base sur un ensemble de représentations linéarisées du système non-linéaire à commander. On divise le domaine de fonctionnement du système en un ensemble de sous-domaines suffisamment réduits pour que l'on puisse considérer qu'une représentation linéaire de son fonctionnement autour d'un point de référence (« linéarisation tangente » ou encore « linéarisation au premier ordre ») inclus dans chaque sous-domaine y soit acceptable. Dans le cas où l'on dispose effectivement d'un modèle analytique complet de la dynamique non-linéaire du système, ce modèle linéarisé peut être calculé par dérivation, sinon, il est possible d'obtenir directement de façon expérimentale des modèles linéaires autour de chacun de ces points.

On peut alors, pour chaque sous-domaine, synthétiser une loi de commande se basant sur cette représentation approchée du système. Il devient ainsi possible d'utiliser les nombreuses techniques d'analyse et de synthèse de la commande des systèmes linéaires.

Le but de ce paragraphe est de décrire les grands principes de cette technique de commande et d'en évoquer les principaux résultats et limitations. Après avoir décrit le principe de la linéarisation tangente et le problème lié à l'analyse de la stabilité de cette première approximation, on évoquera rapidement comment, à partir de ces résultats il est possible de déterminer une loi de commande non linéaire adaptée à l'ensemble d'un domaine de fonctionnement.

### 2.1. La linéarisation tangente

#### 2.1.1. Principe

La dynamique du système non-linéaire considéré est représentée par (2.1).

Dans le cadre de l'approche analytique, la linéarisation tangente se base sur un développement en série de Taylor des équations du modèle disponible et sur une approximation de ces équations à l'ordre 1. Pour quantifier le modèle linéaire obtenu, il est nécessaire de se fixer un point de référence qui doit être un point d'équilibre du système afin de satisfaire l'hypothèse de stationnarité temporelle. Le modèle linéaire quantifié obtenu correspondra à une approximation de la dynamique du système au voisinage de ce point d'équilibre.

Dans le cas de l'approche expérimentale, il s'agira de mettre en œuvre des techniques d'identification et d'estimation afin d'obtenir pour chaque point de référence choisi un modèle linéaire localement représentatif de la dynamique du système. Dans le reste du paragraphe, on privilégiera la première situation.

### ***L'ensemble d'équilibre :***

Les points d'équilibre d'un système (ensemble d'équilibre) sont les points singuliers des équations représentant sa dynamique (i.e. les points de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  où la fonction non-linéaire  $f(x)+g(x,u)$  s'annule).

Mathématiquement, cet ensemble est défini par :

$$\varepsilon = \left\{ (x_0, u_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} / f(x_0) + g(x_0, u_0) = 0 \right\} \quad (2.2)$$

La projection de l'ensemble de ces points d'équilibre sur l'espace d'état est définie par :

$$\xi = \left\{ x_0 \in \mathbf{R}^n / \exists u_0 \in \mathbf{R} / f(x_0) + g(x_0, u_0) = 0 \right\} \quad (2.3)$$

### ***Linéarisation locale :***

Cette linéarisation est réalisée au voisinage d'un point d'équilibre (2.3) via une approximation au premier ordre du comportement du système. Pour se faire, on développe le champs de vecteur  $f$  en série de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de ce point d'équilibre  $(x_0, u_0)$ .

On obtient alors :

$$f(x) + g(x, u) = f(x_0) + g(x_0, u_0) + \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)} \cdot (u - u_0) + o^2(x - x_0, u - u_0) \quad (2.4)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1, on peut alors obtenir une approximation linéaire du modèle au premier ordre en considérant les variables d'écart :

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)} \cdot \delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)} \cdot \delta u \quad (2.5)$$

avec  $\delta x = x - x_0$  et  $\delta u = u - u_0$

Cette approximation correspond donc à une linéarisation locale du modèle non-linéaire.

### ***Le modèle linéaire tangent :***

A partir de cette linéarisation locale, on peut alors définir le modèle linéaire tangent comme le modèle linéaire paramétré par les points d'équilibre du système correspondant donc à l'ensemble des modèles linéarisés locaux.

Ce modèle linéaire tangent est ainsi défini par un ensemble de systèmes d'équations linéaires de la forme :

$$\delta \dot{x} = A(x_0, u_0) \cdot \delta x + B(x_0, u_0) \cdot \delta u \quad (2.6)$$

$$\text{où, } A(x_0, u_0) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)} \quad \text{et} \quad B(x_0, u_0) = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)}, \quad \forall (x_0, u_0) \in \varepsilon \quad (2.7)$$

Dans le cas où, à chaque état d'équilibre ( $x_0$ ) correspond une unique valeur de commande ( $u_0$ ), il existe une fonction  $\varphi$  telle que :

$$u_0 = \varphi(x_0) \quad \text{et donc,} \quad f(x_0) + g(x_0, \varphi(x_0)) = 0 \quad (2.8)$$

La projection de l'ensemble d'équilibre sur l'espace d'état est alors injective et le modèle linéaire tangent peut être défini par une représentation linéaire de la forme :

$$\delta \dot{x} = \mathcal{A}(x_0) \cdot \delta x + \mathcal{B}(x_0) \cdot \delta u \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des opérateurs paramétrés par  $x_0$ .

### 2.1.2. Stabilité de la première approximation

L'étude des modèles linéaires tangents décrits précédemment permet d'introduire la notion de stabilité locale. En effet, les propriétés de stabilité associées à ces modèles linéaires peuvent être étendues au voisinage des points d'équilibre considérés dans chaque cas et ainsi, permettre une évaluation locale de la stabilité du système non linéaire.

Cette notion de stabilité locale conduit aux résultats suivants :

- si toutes les valeurs propres de  $A(x_0)$  (la matrice Jacobienne de  $f$  en  $x_0$ ) sont dans le demi plan gauche ouvert, alors  $x_0$  est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable.
- si une des valeurs propres au moins de  $A(x_0)$  se trouve dans le demi plan droit ouvert alors  $x_0$  est un point d'équilibre instable.
- si une des valeurs propres au moins de  $A(x_0)$  a une partie réelle nulle, il n'est généralement pas possible de conclure directement.

La représentation de la dynamique du système non linéaire par son linéarisé tangent en un point d'équilibre donné n'est acceptable qu'au voisinage de ce même point d'équilibre. Cette approximation est uniquement locale et il n'est pas possible d'étendre directement cette analyse locale à l'ensemble du domaine de fonctionnement du système non-linéaire. On peut ici se référer aux conjectures d'Aizerman et de Kalman qui se sont avérées fausses [Aizerman 1994], [Kalman 1957], [Fitts 1966].

## 2.2. Principe de la commande au premier ordre

L'élaboration de la loi de commande d'un système non-linéaire par l'approche du premier ordre passe par deux étapes : d'abord la synthèse d'une commande linéaire locale faisant appel aux techniques de la commande linéaire des systèmes LTI (« Linear Time Invariant »), puis l'intégration de celle-ci dans un niveau de commande globale. Cette deuxième étape est souvent complexe à réaliser et peut nécessiter une discrétisation du domaine de fonctionnement.

### 2.2.1. Commande locale du système non-linéaire

On se place au voisinage du point  $(x_0, u_0)$  auquel est associée la sortie  $y$  de valeur :  
 $y_0 = h(x_0)$  (2.10)

Comme l'a présenté la partie précédente, l'approximation au premier ordre du comportement du système permet, lorsque l'état et la commande effective sont accessibles à la mesure, de définir un modèle LTI qui peut être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A \cdot \delta x + B \cdot \delta u \\ \delta y = C \cdot \delta x \end{cases} \quad (2.11)$$

avec  $\delta x = x - x_0$  ,  $\delta u = u - u_0$  et  $\delta y = y - y_0$   
 et,  $A = \left. \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$  ,  $B = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$  et  $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$

A partir de ce modèle, il est devient donc possible d'utiliser les techniques de commande des systèmes LTI et ainsi, de synthétiser une loi linéaire pouvant, par exemple, se présenter sous la forme :

$$\delta u = -G \cdot \delta x + H \cdot (y_c - y_0) \quad (2.12)$$

Le modèle linéarisé utilisé pour la synthèse n'étant représentatif du comportement réel du système que dans un voisinage du point de référence pour la linéarisation, le domaine de validité de la loi commande (2.12) est donc restreint à ce voisinage.

### 2.2.2. Extension de la commande à l'ensemble du domaine de fonctionnement

Dès lors que les objectifs de commande sont compatibles avec l'utilisation d'un modèle linéarisé tangent (régulation autour d'un point de fonctionnement, amélioration des modes dynamiques naturels du système, suivi de trajectoire, etc), il est envisageable de synthétiser une loi de commande non linéaire reposant sur l'utilisation de ce même modèle linéaire tangent. C'est dans ce cadre qu'est définie la commande au premier ordre.

Sa définition repose sur une synthèse en deux étapes :

- On élabore une commande locale en chaque point de fonctionnement en appliquant les techniques de l'automatique linéaire à chaque modèle linéarisé associé (approximation au premier ordre).
- On définit une commande non linéaire dont la linéarisation correspond localement aux commandes calculées lors de la première étape.

On suppose que l'on dispose de modèles linéaires tangents sur un compact  $\Delta$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Remarquons que cette hypothèse est extrêmement coûteuse en temps de calcul. On envisagera, dans le sous-paragraphe suivant, l'utilisation d'un référentiel discret pour la synthèse d'une loi de commande globale.

Sur ce domaine, le modèle linéaire tangent correspondant à (2.1) peut s'écrire :

$$\delta \dot{x} = A(x_0, u_0) \cdot \delta x + B(x_0, u_0) \cdot \delta u \quad \text{où} \quad (x_0, u_0) \in \Delta \quad (2.13)$$

La commande locale peut alors être prise telle que :

$$\delta u = -G(x_0, u_0) \cdot \delta x + H(x_0, u_0) \cdot (y_c - y_0) \quad (2.14)$$

avec,  $y_0 = h(x_0)$

La méthode de commande au premier ordre suppose de déterminer une loi de commande non-linéaire dont la linéarisation correspond localement à la commande (2.14).

Soit  $u = \gamma(x, y_c)$  cette loi de commande non-linéaire. (2.15)

Sa linéarisation au premier ordre en  $(x_0, u_0)$  s'écrit :

$$\delta u = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \cdot \delta x + \left. \frac{\partial u}{\partial y_c} \right|_{(x_0, u_0)} \cdot (y_c - y_0) \quad (2.16)$$

Cette loi de commande doit donc être telle que :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} = -G(x_0, u_0) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y_c} \right|_{(x_0, u_0)} = H(x_0, u_0), \quad \forall (x_0, u_0) \in \Delta \quad (2.17)$$

La loi de commande peut donc être, en théorie, déterminée à partir de la résolution des équations aux dérivées partielles (2.17) Cependant, cette intégration est en général impossible à réaliser de façon analytique et sa résolution numérique est extrêmement lourde.

Il est aussi à noter qu'il est indispensable d'associer aux deux étapes de synthèse de la loi une étape de validation du bon comportement de cette dernière. En effet, rien ne garantit que la trajectoire suivie par le système restera proche d'un état d'équilibre (points de références utilisés pour la synthèse locale) et que l'on ne sollicitera pas les actionneurs au delà de leur propre domaine de linéarité (saturations en position et vitesse, par exemple) et donc que les propriétés de stabilité locale que la loi de commande devrait garantir seront réellement satisfaites. Une évaluation a posteriori de la stabilité globale du système commandé semble donc incontournable. En pratique, avant toute mise en œuvre, cette évaluation est souvent réalisée à partir des résultats statistiques obtenus par simulation à l'aide d'un modèle non-linéaire complet de différentes situations générées aléatoirement ou à partir de résultats issus de la simulation de situations particulières définies par exemple comme des situations extrêmes.

### **Remarque :**

Si l'on se place dans le cas où l'objectif de commande locale correspond à un placement de pôles (commande modale) invariant dans le domaine de fonctionnement, le comportement du système ainsi commandé s'apparentera à celui d'un système linéaire.

### 2.2.3. Intégration discrète de la commande par séquençement de gains

Cette technique utilise une discrétisation du domaine de fonctionnement, basée sur la définition d'un maillage de ce domaine. A ce maillage est associé un ensemble dénombrable  $\Omega$  de points de référence pour lesquels on dispose d'un linéarisé local. Il est donc possible, en chaque point, de disposer d'une loi de commande locale linéaire telle que définie en (2.14).

Une loi de commande globale peut ainsi être définie par juxtaposition de ces commandes locales, via un algorithme de commutation d'une loi locale à l'autre. En effet, il est possible d'associer à chaque point du maillage une « zone » du domaine de fonctionnement dans laquelle la loi de commande locale pourra être utilisée. Le passage d'une zone de fonctionnement à une autre entraîne alors la commutation d'une loi locale à une autre [Mora-Camino 1993a].

Une telle loi de commande permet de satisfaire les critères (2.17) en tout point du maillage. Cette méthodologie de synthèse peut ainsi être assimilée à une discrétisation de l'intégration de ces critères différentiels sur  $\Omega$ .

Il est aussi possible de réaliser cette intégration discrète par interpolation entre les lois locales. Cette interpolation peut être basée sur une modification des matrices de gain  $G$  et  $H$  ou sur une interpolation des sorties des lois locales considérées (ces correcteurs fonctionnent alors en parallèle) [Kelly 1997].

L'emploi de telles techniques de commande nécessite de déterminer le niveau de discrétisation et les points référence de sorte à obtenir un maillage pertinent, assurant le bon comportement du système commandé non seulement localement, au voisinage de chaque point du maillage mais aussi globalement, dans tout le domaine de fonctionnement.

L'étape de validation a posteriori évoquée précédemment permettra aussi de vérifier ce point.

### 3. Linéarisation entrée/sortie et commande non linéaire inverse

#### 3.1. Inversion de la dynamique du système

L'ensemble des techniques qui seront abordées dans le reste de ce chapitre se base en partie sur une inversion de la dynamique du système, représentée sous la forme d'une équation liant la dynamique de la sortie considérée à l'entrée du système.

Cette équation est obtenue par dérivation successive de la sortie ( $y$ ). Le degré de dérivation nécessaire à l'obtention de cette relation est appelé le degré relatif ( $\rho$ ). Ces dérivations successives permettent de représenter la dynamique liant l'entrée et la sortie du système (dynamique externe) sous la forme d'une équation algébrique unique et d'une série d'intégrateurs.

En inversant cette relation et en l'utilisant pour solliciter l'entrée du système ( $u$ ), il devient possible de commander directement l'évolution de cette dérivée  $\rho^{\text{ème}}$  de la sortie. Cette inversion a alors pour effet de « contrer » la dynamique propre de la sortie pour la rendre comparable à la dynamique obtenue avec une chaîne d'intégrateurs.

#### 3.2. La linéarisation entrée/sortie

Cette technique s'appuie sur la méthode d'inversion de la dynamique du système énoncée de manière synthétique ci-dessus. De nombreuses présentations détaillées de cette technique existent dans la littérature, on peut notamment citer [Isidori 1981], [Isidori 1995], [Slotine 1991].

En reprenant cette méthode d'inversion sous un formalisme mathématique adéquat, on définit le degré relatif de l'unique sortie du système (cas SISO ici) par un entier positif satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} L_g L_f^k h(x, u) &= 0, \quad k = 0, \dots, \rho - 2 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x, u) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec :  $L_f h = \nabla h f$  (dérivée de Lie de  $h$  suivant  $f$ )

et,  $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}$  ( $\nabla h$  est le gradient de  $h$ )

Si l'entrée («  $u$  ») a une quelconque influence sur la sortie du système, ce degré relatif est défini. Il est alors inférieur ou égal à l'ordre du système.

Si, de plus,  $L_g L_f^{\rho-1}$  est inversible par rapport à  $u$  dans le domaine de fonctionnement considéré (domaine de  $\mathbf{R}^n$ ), il existe alors une relation causale directe entre la dérivée  $\rho^{\text{ème}}$  de la sortie et la commande du système :

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, u) = A(x) + B(x, u) = v \tag{2.19}$$

Cette relation peut être mise à profit grâce à une transformation de l'état du système par un difféomorphisme  $\Phi(x)$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , pour obtenir une nouvelle représentation d'état qui adopte le vecteur d'état :

$$\hat{x} \equiv \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \equiv \Phi(x) \quad (2.20)$$

$$\text{avec, } \xi \equiv [h(x), \dots, L_f^{p-1}h(x)]^T \in \mathfrak{R}^p \quad (2.21)$$

### ***Cas où le degré relatif est égal à l'ordre du système :***

Si le degré relatif est égal à l'ordre du système (on a alors  $\hat{x} = \xi$ ), ce difféomorphisme permet d'exprimer totalement la dynamique du système sous une forme compagne :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_p = L_f^p h(\Phi^{-1}(\hat{x})) + L_g L_f^{p-1} h(\Phi^{-1}(\hat{x}), u) \\ \quad = A(\Phi^{-1}(\hat{x})) + B(\Phi^{-1}(\hat{x}), u) = A(x) + B(x, u) \\ y = \xi_1 \end{cases} \quad (2.22)$$

(Les fonctions non-linéaire  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont introduites de sorte à simplifier les notations.)

Afin de compenser les non-linéarités du système et compte tenu des hypothèses d'inversibilité précédentes, on peut choisir  $u$  telle que :

$$u = B_u^{-1}(x, v - A(x)) \quad (2.23)$$

$B_u^{-1}$  est l'inverse de  $B$  par rapport à  $u$  tel que :

$$B(x, B_u^{-1}(x, \gamma)) = \gamma \quad (2.24)$$

$v$  est un terme indépendant qui peut être considéré comme une commande auxiliaire.

La dynamique de la sortie  $y$  est alors ramenée à une chaîne d'intégrateurs :

$$y^{(p)} = v. \quad (2.25)$$

Cette commande permet donc de linéariser la dynamique de la sortie (en considérant l'entrée auxiliaire  $v$  comme l'entrée du système).

### ***Cas où le degré relatif est inférieur à l'ordre du système :***

Si le degré relatif est d'ordre inférieur à celui du système, la dynamique de ce dernier pourra être décomposée en deux :

- la première ( $\Sigma_1$ ), sous forme compagne, représente la dynamique externe du système ;
- la seconde ( $\Sigma_2$ ), représente la dynamique interne du système. Elle est inobservable à partir de la sortie  $y$ .

La dynamique du système peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \quad & \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_p = L_f^p h(\Phi^{-1}(\hat{x})) + L_g L_f^{p-1} h(\Phi^{-1}(\hat{x}), u) \\ \quad = A(\Phi^{-1}(\hat{x})) + B(\Phi^{-1}(\hat{x}), u) = A(x) + B(x, u) \\ y = \xi_1 \end{cases} \\ \Sigma_2 : \quad & \dot{\eta} = f_\eta(\xi, \eta) + g_\eta(\xi, \eta, u) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comme précédemment, en prenant comme commande  $u = B_u^{-1}(x, v - A(x))$ , la dynamique entre l'entrée auxiliaire (v) et la sortie (y) est ramenée à une chaîne d'intégrateurs.

La dynamique du système est alors représentée sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \quad & \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_p = v \\ y = \xi_1 \end{cases} \\ \Sigma_2 : \quad & \dot{\eta} = f_\eta(\xi, \eta) + g_\eta(\xi, \eta, B_u^{-1}(\Phi^{-1}(\hat{x}), v - A(\Phi^{-1}(\hat{x})))) \end{aligned} \quad (2.27)$$

### 3.3. Application à la commande de systèmes non linéaires SISO

Sous réserve de stabilité de la dynamique interne, lorsqu'il y en a une (dynamique de  $\Sigma_2$  dans (2.27)), la loi de commande peut être synthétisée via une technique de commande linéaire appliquée à l'entrée auxiliaire v.

On peut amener la sortie à suivre une dynamique prédéfinie du  $\rho^{\text{ème}}$  ordre en utilisant une commande basée sur un terme correcteur, tel que celui présenté ci-dessous :

$$v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i \cdot y^{(i)} \quad (2.28)$$

où  $y_d$  est une valeur de consigne pour la sortie du système qui suivra alors, en théorie, une dynamique linéaire du  $\rho^{\text{ème}}$  ordre donnée par l'équation différentielle :

$$y^{(\rho)} + \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i \cdot y^{(i)} + k_0 \cdot y = k_0 y_d \quad (2.29)$$

Les lois de commande de type non-linéaires inverses peuvent donc être décomposées en deux sous-ensembles :

- un bouclage linéarisant n'ayant pas pour but d'asservir le système mais de transformer sa dynamique entrée/sortie, pour l'amener à se comporter comme une chaîne d'intégrateurs.
- un correcteur linéaire permettant de réaliser l'asservissement tout en amenant le système à suivre une dynamique entrée/sortie prédéfinie.

### 3.4. Robustesse et stabilité locale

La commande non-linéaire inverse telle que présentée précédemment (partie 3.3) permet, en théorie, de contrôler entièrement la dynamique de la sortie et donc de garantir la stabilité globale du système. Pour cela, la dynamique du système doit satisfaire les conditions nécessaires d'inversibilité de  $L_g L_f^{p-1}$  et de stabilité de la dynamique interne. Il faut aussi que le modèle de synthèse reste parfaitement représentatif du comportement du système réel, dans tout le domaine de fonctionnement.

Cette seconde hypothèse est, dans la pratique, très rarement satisfaite. En règle générale, le modèle de synthèse est une approximation d'un modèle plus complexe et représentatif, utilisé pour l'évaluation en simulation de la commande. Ce modèle de synthèse doit rester suffisamment simple pour permettre de ne pas générer de lois de commande exagérément complexes. Il doit aussi permettre de satisfaire les hypothèses de synthèse telles que, par exemple, l'hypothèse d'inversibilité de  $L_g L_f^{p-1}$  qui interdit implicitement la prise en compte des saturations dans la synthèse des lois de commande.

La modélisation du système fait aussi souvent appel à des paramètres incertains, peu connus, ou dont la valeur varie aléatoirement (variations supposées quasi-statiques). Enfin, des perturbations extérieures non négligeables peuvent aussi apparaître et influencer sur le comportement du système.

Dans de telles conditions, les propriétés dynamiques et la stabilité du système commandé ne peuvent plus être garanties, si ce n'est à partir d'une évaluation a posteriori (comme dans le cas de la commande au premier ordre).

L'objectif de cette partie est de présenter quelques pistes supplémentaires permettant une telle évaluation a posteriori et ainsi de pallier en partie ce problème souvent présenté comme le talon d'Achille de la commande non-linéaire inverse.

Plusieurs études ont déjà porté sur le sujet. On peut notamment citer celle présentée en [Devaud 1999] qui s'intéresse à l'évaluation de la stabilité  $L_2$  d'un système commandé face à des erreurs paramétriques. L'approche développée conduit à des conditions de stabilité extrêmement restrictives, compte tenu des majorations adoptées pour les différents termes du modèle et de la commande. En effet, ce calcul ne permet pas de prendre en compte les simplifications pouvant apparaître entre les non-linéarités du modèle et leurs fonctions inverses (dans la commande).

L'approche d'analyse proposée ici se base plutôt sur une représentation non-linéaire complète incluant le modèle utilisé, ses termes incertains et la loi nominale de commande non-linéaire inverse (obtenue à partir du modèle de synthèse).

On considère la dynamique du système représentée par (2.1)

On adopte la représentation et les notations suivantes pour le modèle de synthèse :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(\hat{x}) + \hat{g}(\hat{x}, u) \\ \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \end{cases} \quad (2.30)$$

On suppose la dynamique interne du modèle de synthèse stable et sa structure comparable à celle du système étudié.

En dérivant  $\rho$  fois la sortie du système, on peut écrire :

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, u) = A(x) + B(x, u) \quad (2.31)$$

En réalisant de même pour le modèle de synthèse, on a :

$$\hat{y}^{(\rho)} = L_{\hat{f}}^\rho \hat{h}(\hat{x}) + L_{\hat{g}} L_{\hat{f}}^{\rho-1} \hat{h}(\hat{x}, u) = \hat{A}(\hat{x}) + \hat{B}(\hat{x}, u) \quad (2.32)$$

Comme les expressions de  $\hat{A}(-)$  et  $\hat{B}(-)$  sont supposées connues, il est possible de les évaluer en  $x$  est non en  $\hat{x}$  (en mesurant l'état du système).

On peut alors définir deux fonctions d'erreur :

$$\Delta A(x) = A(x) - \hat{A}(x) \quad \text{et} \quad \Delta B(x, u) = B(x, u) \cdot \hat{B}(x, u)^{-1} \quad (\text{pour } \hat{B}(x, u) \text{ inversible}) \quad (2.33)$$

Ces fonctions sont supposées bornées dans le domaine de fonctionnement considéré.

La loi de commande non-linéaire inverse nominale calculée à partir du modèle (2.30) peut s'écrire :

$$u = \hat{B}_u^{-1}(x, v - \hat{A}(x)) \quad \text{avec,} \quad v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i \cdot y^{(i)} \quad (2.34)$$

où les  $k_i$  sont des constantes réelles qui confèrent à cette dynamique d'ordre  $\rho$  une dynamique conforme au cahier des charges.

En associant les équations (2.31), (2.34) et (2.24) on peut alors représenter la dynamique de la sortie par :

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= A(x) + B(x, u) = \hat{A}(x) + \Delta A(x) + \Delta B(x, u) \cdot \hat{B}(x, u) \\ &= \Delta B(x, u) \cdot v + \hat{A}(x) \cdot (1 - \Delta B(x, u)) + \Delta A(x) \quad \text{avec,} \quad u = \hat{B}_u^{-1}(x, v - \hat{A}(x)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

La dynamique de la sortie du système ainsi commandé peut donc être mise sous la forme de l'équation différentielle non-linéaire (2.35). Cette relation permet de mettre en évidence les écarts entre la dynamique théoriquement suivie ( $y^{(\rho)}=v$ ) et celle qui serait suivit dans le cas ou le système se comporte comme (2.1).

On peut noter que ces écarts peuvent se résumer à deux fonctions :

- la première ( $\Delta B(x, u)$ ) est un fonction multiplicative de l'entrée auxiliaire. Elle agit sur le système comme une modification des gains du correcteur (2.28) ;
- la seconde ( $\hat{A}(x) \cdot (1 - \Delta B(x, u)) + \Delta A(x)$ ) est une fonction additive. Elle est due à la mauvaise estimation de  $A(x)$  et à son inversion partielle (du fait de la mauvaise inversion de  $B(x, u)$ ). En règle générale, c'est cette deuxième fonction qui apporte le plus de risques d'instabilité.

On peut ainsi mettre l'équation (2.35) sous la forme :

$$y^{(p)} = \Delta a(x, v) + \Delta b(x, v) \cdot v \quad (2.36)$$

$$\text{avec, } \Delta a(x, v) = \hat{A}(x) \cdot (1 - \Delta B(x, u)) + \Delta A(x) \quad (2.37)$$

$$\text{et, } \Delta b(x, v) = \Delta B(x, \hat{B}_u^{-1}(x, v - \hat{A}(x))) \quad (2.38)$$

A partir de cette représentation, si la modélisation utilisée reste suffisamment simple et le degré relatif suffisamment réduit, une analyse physique du comportement du système peut être envisagée.

Dans la pratique, ce type d'analyse nécessite souvent l'utilisation d'un ensemble d'hypothèses simplificatrices basées sur des particularités du comportement du système dans des conditions données. Ce type d'analyse ne permet alors souvent qu'une évaluation qualitative de la robustesse et de la stabilité, valable uniquement pour des portions données du domaine de fonctionnement.

La dynamique de la sortie du système commandée peut aussi être étudiée localement, à partir d'une approximation au premier ordre de son comportement au voisinage de points de références.

Il s'agit alors de déterminer un modèle linéaire tangent de (2.35) :

$$\delta y^{(p)} = \left. \frac{\partial(\Delta a + \Delta b)}{\partial x} \right|_{(x_0, v_0)} \cdot \delta x + \left. \frac{\partial(\Delta a + \Delta b)}{\partial v} \right|_{(x_0, v_0)} \cdot \delta v \quad \forall (x_0, v_0) \in \varepsilon \quad (2.39)$$

La détermination d'une telle approximation linéaire du comportement de la sortie permet alors d'utiliser les outils de l'automatique linéaire et ainsi d'en étudier la robustesse et la stabilité.

Ce type d'analyse, permet donc de réaliser une évaluation locale des propriétés de stabilité d'un niveau comparable à ce que permet d'obtenir la commande au premier ordre.

En associant cette analyse locale à une analyse « physique », il devient alors possible d'étendre ce résultat à des portions du domaine de fonctionnement.

La commande non-linéaire inverse permet donc, dans le cas nominal, (modèle de synthèse parfait), d'amener le système à suivre une dynamique prédéfinie et donc de garantir la stabilité globale et les performances.

Lorsque le modèle de synthèse ne représente pas exactement le comportement de ce système, une analyse théorique a posteriori peut alors garantir la robustesse locale de la loi vis-à-vis des imperfections de modélisation.

Comme dans le cas de la commande au premier ordre (cf. paragraphe 2.2.2), il est aussi possible d'évaluer le comportement du système dans le reste du domaine de fonctionnement, et ainsi de compléter ce résultat local. Par exemple, Cette évaluation peut être réalisée au travers d'une études statistiques, utilisant de nombreuses simulations et couvrant l'ensemble du domaine de fonctionnement.

Il est à noter que ce type d'évaluations ne peut amener à obtenir une garantie (théorique) du bon comportement du système mais peut cependant permettre d'atteindre un niveau de confiance suffisant pour implanter la loi de commande.

### 3.5. Linéarisation partielle en boucle ouverte

La commande non linéaire inverse telle que présentée ci-dessus suppose l'utilisation d'un bouclage dit « linéarisant », utilisant la mesure de l'état du système pour réaliser l'inversion. Ce type de commande suppose donc de disposer à tout instant de mesures précises de toutes les composantes du vecteur d'état qui n'est pas forcément entièrement mesurable. En plus de cette première limitation, ce bouclage peut aussi présenter de nombreux problèmes. Notamment, il peut faire apparaître des éléments déstabilisants pouvant devenir très pénalisants du point de vue de la robustesse. En effet, le but de l'inversion n'est que de « gommer » la dynamique du système de sorte à obtenir une dynamique équivalente à celle d'une chaîne d'intégrateurs. Le bouclage linéarisant a donc pour effet de s'opposer aux éléments constitutifs de la dynamique de la sortie, qu'ils soient stabilisants ou non. Si, par exemple, des éléments stabilisants sont surestimés, on risque alors, du fait de l'utilisation du bouclage, de dégrader voire de supprimer la stabilité globale du système.

Ainsi, la commande non linéaire inverse peut, selon les cas, être adaptée aux spécificités de chaque système. C'est cet aspect que cherche à développer ce paragraphe, d'abord par un exemple introductif simple, puis par une approche formelle.

#### 3.5.1. Exemple introductif

Si, par exemple, on considère un système linéaire stable du premier ordre :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot x + u \quad (2.40)$$

dont le paramètre  $a_0$  est incertain et positif.

Pour calculer la commande, on suppose la valeur de  $a_0$  égale à  $\hat{a}_0$ .

$$\text{On représente alors l'erreur de modélisation par : } \Delta = a_0 - \hat{a}_0. \quad (2.41)$$

#### *Cas de la commande non linéaire inverse « classique »*

La technique de commande non-linéaire inverse conduit à définir une commande du type :

$$u = v + \hat{a}_0 \cdot x \quad \text{avec, } v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.42)$$

(L'objectif de commande est la stabilisation de  $x$  en  $x_c$  suivant une dynamique du 1<sup>er</sup> ordre de constante de temps  $\tau$ .)

Le comportement du système ainsi commandé est alors tel que :

$$\dot{x} = -(a_0 - \hat{a}_0) \cdot x + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) = \left( -\Delta - \frac{1}{\tau} \right) \cdot x + \frac{1}{\tau} \cdot x_c \quad (2.43)$$

$$\text{Le système restera stable tant que : } \left( \Delta + \frac{1}{\tau} \right) > 0. \quad (2.44)$$

La compensation («  $\hat{a}_0 \cdot x$  ») a alors pour effet, dans cet exemple, d'introduire dans la commande un bouclage déstabilisant pouvant rendre instable le système initialement stable.

Dans certaines conditions (détaillée ci-dessous) une partie de ces bouclages peut être évitée. En effet, suivant les cas, il peut être possible de déduire une partie du vecteur d'état de la commande auxiliaire et de ses intégrales. La linéarisation peut alors être partiellement réalisée en boucle ouverte.

### ***Mise en œuvre d'une linéarisation en boucle ouverte***

Dans l'exemple ci-dessus (2.40), le système devrait théoriquement (dans le cas parfait où  $\Delta=0$ ) suivre une dynamique du premier ordre telle que :

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad \text{et} \quad x = \int_{t_0}^t \dot{x} dt \quad (2.45)$$

On note  $x_{th}$  une fonction représentant cette évolution théorique de l'état et définie par :

$$x_{th} = \int_{t_0}^t \dot{x} dt \quad (2.46)$$

En remplaçant, dans le bouclage linéarisant défini en (2.42), l'état mesuré du système par cette valeur théorique, il est possible de définir la commande comme :

$$u = v + \hat{a}_0 \cdot x_{th} \quad \text{avec,} \quad v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad \text{et} \quad x_{th} = \int_{t_0}^t \dot{x} dt \quad (2.47)$$

Le système est alors amené à suivre la dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a_0 \cdot x + \hat{a}_0 \cdot x_{th} + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \\ &= -a_0 \cdot x + \hat{a}_0 \cdot \int_{t_0}^t \dot{x} dt + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Il restera donc stable quel que soit la valeur de  $\Delta$ .

De plus, dans le cas parfait où  $\Delta=0$ , on obtient alors :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot (x - x_{th}) + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.49)$$

$$\text{et donc :} \quad \frac{d(x - x_{th})}{dt} = -a_0 \cdot (x - x_{th}) \quad (2.50)$$

La dynamique de  $(x - x_{th})$  est stable et en supposant l'état initial tel que  $x_{th}(0)=x(0)$  (cela suppose de connaître exactement l'état du système pour initialiser le calcul de  $x_{th}$ ), on peut conclure que cette modification de la loi de commande n'a pas d'impact sur le comportement théoriquement suivi par le système (cas d'un modèle de synthèse parfait).

Il est possible de considérer une expression simplifiée de cette commande en prenant :

$$u = v + \hat{a}_0 \cdot x_c \quad \text{avec,} \quad v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.51)$$

Cela revient à supposer que  $x$  suive parfaitement la consigne initiale  $x_c$ .

Le comportement du système est alors tel que :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot x + \hat{a}_0 \cdot x_c + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) = -\left(a_0 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot x + \left(\hat{a}_0 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot x_c \quad (2.52)$$

Quel que soit la valeur de  $\Delta$ , le système est toujours stable. Par contre, dans le cas où  $\Delta=0$ , son comportement n'est plus identique à celui obtenu en utilisant la commande non-linéaire inverse dans sa forme « traditionnelle ». Il suit alors une dynamique du type :

$$\dot{x} = \left( a_0 + \frac{1}{\tau} \right) \cdot (x_c - x) \quad (2.53)$$

### 3.5.2. Cas où le système ne comporte pas de dynamique interne.

Lorsque l'on se place dans le cas d'un système ne comportant pas de dynamique interne, le difféomorphisme présenté en (2.20) s'écrit alors :

$$\hat{x} = \xi \quad (2.54)$$

Cette transformation permet de présenter la dynamique du système sous la forme (2.22).

$$\text{On peut alors en déduire que } \xi = [y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)}]^T. \quad (2.55)$$

$$\text{et que : } [y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)}]^T = \Phi(x) \quad (2.56)$$

Par inversion de ce difféomorphisme, on peut alors exprimer l'état du système en fonction de la sortie et de ses dérivées successives :

$$x = \Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)}) \quad (2.57)$$

Le but de la commande non linéaire inverse étant d'amener la sortie du système à suivre une dynamique prédéterminée, il est donc possible, à partir des consignes envoyées à la loi, de prévoir les valeurs que devraient suivre la sortie et ses dérivées. De ce fait, il est ainsi possible d'estimer comment devrait évoluer l'état du système et donc, en utilisant cette estimation pour inverser le système, de réaliser la linéarisation sans nécessiter de retour d'état.

Le bouclage linéarisant présenté dans la partie 3.2 a pour but d'amener le système à suivre une dynamique définie au travers d'une commande auxiliaire  $v$ , par l'expression :  $y^{(p)}=v$ .

Il est alors possible de déterminer les valeurs théoriques des dérivées de la sortie plate  $(y_{th}, \dot{y}_{th}, \dots, y_{th}^{(p-1)})$  par intégration successive de cette commande auxiliaire  $v$ .

La propriété (2.57) peut donc permettre de déduire la valeur théorique de l'état du système à partir de  $v$ :

$$x_{th} = \Phi^{-1}(y_{th}, \dot{y}_{th}, \dots, y_{th}^{(p-1)}) \quad (2.58)$$

Il est ainsi possible de réaliser le bouclage linéarisant sans nécessiter la mesure de l'état du système :

$$u = B_u^{-1}(x_{th}, v - A(x_{th})) \quad (2.59)$$

### 3.5.3. Cas général

Suivant les propriétés du système considéré, dans le cas où seule une partie de l'état peut être déduite de la valeur que prend la sortie et ses dérivées, il est possible d'éviter une partie du retour d'état nécessaire à la linéarisation.

Soit  $\Omega$  cette partie du vecteur d'état de dimension  $r$ .

On peut alors définir une fonction  $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_r]^T$  telle que :

$$x_i = \phi_i(y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)}), \quad \forall x_i \in \Omega \quad (2.60)$$

En suivant le principe développé précédemment, on peut alors déduire de cette propriété un état reconstitué du système :

$$\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n] \quad (2.61)$$

$$\text{tel que :} \quad \begin{aligned} \forall x_i \in \Omega, \quad \tilde{x}_i &= \phi_i(y_{th}, \dot{y}_{th}, \dots, y_{th}^{(p-1)}) \\ \forall x_i \notin \Omega, \quad \tilde{x}_i &= x_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

On peut alors éviter une partie du retour d'état nécessaire à la linéarisation en prenant :

$$u = B_u^{-1}(\tilde{x}, v - A(\tilde{x}))$$

## 3.6. Commande non linéaire inverse partielle

La commande non linéaire inverse dans son formalisme « traditionnel » a pour but de ramener la dynamique de la sortie à une dynamique linéaire prédéterminée. Pour se faire, elle se base sur un retour d'état linéarisant obtenu grâce à une inversion totale de la dynamique de la sortie.

Il est possible de ne réaliser qu'une inversion partielle de cette dynamique et ainsi de ne pas introduire de retour d'état difficile à réaliser (problème de mesure de l'état) ou risquant de déstabiliser le système (notamment en cas d'erreurs de modélisation).

La réalisation d'une telle inversion partielle peut permettre d'adapter la commande non-linéaire inverse « classique », en prenant en compte certaines spécificités du système considéré. Cette adaptation peut permettre, suivant les cas, d'améliorer la robustesse de la loi. Comme précédemment, le but de cette partie est de développer cet aspect, tout d'abord par un exemple introductif simple, puis par une approche plus formelle.

### 3.6.1. Exemple introductif

Par exemple, en considérant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot |x| \cdot x - a_1 \cdot x^2 + u \quad (2.63)$$

dont les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sont incertains et positifs.

Pour le calcul de la commande, on suppose la valeur de ces paramètres égale à  $\hat{a}_0$  et  $\hat{a}_1$  (ces paramètres estimés sont supposés être positif).

On représente alors l'erreur de modélisation par :

$$\Delta_0 = a_0 - \hat{a}_0 \quad \text{et} \quad \Delta_1 = a_1 - \hat{a}_1 . \quad (2.64)$$

L'application de la commande non-linéaire inverse dans sa forme « traditionnelle » conduit à définir la commande :

$$u = v + \hat{a}_0 \cdot |x| \cdot x + \hat{a}_1 \cdot x^2 \quad \text{avec,} \quad v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.65)$$

La dynamique du système sera alors telle que :

$$\dot{x} = -\Delta_0 \cdot |x| \cdot x - \Delta_1 \cdot x^2 + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.66)$$

Suivant les valeurs de  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$ , la stabilité du système ne sera pas garantie.

Ce risque d'instabilité peut être limité en n'inversant plus le terme «  $-a_0 \cdot |x| \cdot x$  » qui a une action bénéfique sur la stabilité du système.

On définit alors la commande comme :

$$u = v + \hat{a}_1 \cdot x^2 \quad \text{avec,} \quad v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.67)$$

et la dynamique du système commandé devient :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot |x| \cdot x - \Delta_1 \cdot x^2 + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.68)$$

Le risque d'instabilité n'est alors plus associé qu'à la capacité qu'a la loi de commande à « contrer » le terme «  $-a_1 \cdot x^2$  ». Dans l'équation (2.68), du fait de la présence d'erreurs de modélisation, ce terme n'est que partiellement « contré ».

Pour rendre cette loi de commande plus robuste, il est possible d'y ajouter un terme non-linéaire permettant d'amortir l'impact de «  $\Delta_1 \cdot x^2$  » aux grandes amplitudes.

On peut alors définir la commande comme :

$$u = v + \hat{a}_1 \cdot x^2 - k \cdot x^3 \quad \text{avec,} \quad v = \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.69)$$

$k$  est un réel positif.

La dynamique du système est alors telle que :

$$\dot{x} = -a_0 \cdot |x| \cdot x - \Delta_1 \cdot x^2 - k \cdot x^3 + \frac{1}{\tau} \cdot (x_c - x) \quad (2.70)$$

En choisissant  $k$  tel que  $k > |\Delta_1|$  et  $\tau$  tel que  $1/\tau > |\Delta_1| - a_0$ , la stabilité du système est alors garantie dans tout le domaine de fonctionnement.

### 3.6.2. Cas général

La mise en œuvre de telles modifications de la commande peut être formalisée, dans le cas général (système de type (2.1) dont le modèle de synthèse est représenté par (2.30)) par le terme non-linéaire «  $n(x)$  » qui rassemble à la fois les termes stabilisants que l'on ne souhaite pas inverser et les termes non-linéaires permettant de renforcer la robustesse de la loi.

La loi de commande s'écrit alors :

$$u = \hat{B}_u^{-1}(x, v - \hat{A}(x) + n(x)) \quad \text{avec,} \quad v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} \quad (2.71)$$

et le comportement du système est donné par (cf. partie 3.4) :

$$\begin{aligned} y^{(p)} &= \Delta B(x, u) \cdot v + \hat{A}(x) \cdot (1 - \Delta B(x, u)) + \Delta A(x) + \Delta B(x, u) \cdot n(x) \\ &= \Delta b(x, v) \cdot v + \Delta a(x, v) + \Delta B(x, u) \cdot n(x) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Cette inversion partielle ne permet plus de linéariser la dynamique de la sortie. Cependant, elle peut permettre d'amener le système à suivre une dynamique non-linéaire stable, adaptée aux besoins devant être couvert par la loi de commande.

Par contre, il n'est alors plus possible d'utiliser les outils disponibles dans le domaine linéaire et donc il peut devenir difficile d'évaluer le comportement obtenu.

On peut aussi noter que ce type d'adaptation de la commande est relativement facile à mettre en oeuvre dans le cas de système du premier ordre, tels que celui de l'exemple. Mais lorsque l'ordre du système devient plus important, la mise au point de tel retour non-linéaire peut s'avérer très délicat à utiliser.

## 4. Le Backstepping

La technique du backstepping est apparue dans la littérature à partir de la fin des années 80. Elle a depuis suscité un attrait important dans le milieu de la commande non-linéaire, car permettant de construire de manière systématique la loi de commande et la fonction de Lyapunov associée. De nombreux travaux ont ainsi porté sur l'étude de cette technique. On peut notamment citer [Sepulchre 1997] et [Fossen 1998].

L'application de cette technique suppose de pouvoir mettre le modèle de synthèse sous forme triangulaire inférieure.

Un tel système peut être représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad (2.73)$$

La technique du backstepping considère ce système comme la mise « en cascade » de sous-systèmes du premier ordre, dont la dynamique est représentée par chacune des lignes. Le but de cette technique est de définir une architecture de commande permettant de garantir la stabilité exponentielle, à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique de la forme :

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T z \quad \text{où } z \text{ est un vecteur d'erreur.} \quad (2.74)$$

#### 4.1. Utilisation en cascade de la commande non linéaire inverse

Avant de décrire la technique du backstepping, il peut être intéressant d'analyser quel serait l'évolution de la fonction de Lyapunov (2.74) dans le cas de l'utilisation d'une loi de commande basée sur l'application successive de la commande non linéaire inverse à chaque sous-système (« ligne par ligne ») de (2.73).

A partir des résultats obtenus, on pourra alors clairement identifier les apports du backstepping lorsque l'on considère une telle approche en cascade.

L'application de la commande non linéaire inverse aux différents sous systèmes (en considérant que la variable d'état issue de la dynamique du niveau immédiatement inférieure constitue une entrée pour la dynamique du niveau immédiatement supérieur) amène à définir une loi de commande du type :

$$\begin{aligned} \dot{y}_d &= -k_0 \cdot (y - y_d) \\ \text{et, } \begin{cases} x_{2c} &= \frac{1}{L_{g_1} h(x_1)} [\dot{y}_d - L_{f_1} h(x_1)] \\ x_{3c} &= \frac{1}{g_2(x_1, x_2)} [\dot{x}_{2c} - f_2(x_1, x_2)] \\ &\vdots \\ x_{i+1c} &= \frac{1}{g_i(x_1, \dots, x_i)} [\dot{x}_{ic} - f_i(x_1, \dots, x_i)] \\ &\vdots \\ x_{nc} &= \frac{1}{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} [\dot{x}_{n-1c} - f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})] \\ u &= \frac{1}{g_n(x_1, \dots, x_n)} [\dot{x}_{nc} - f_n(x_1, \dots, x_n)] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.75)$$

On étudie alors l'évolution de la fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T z \quad (2.76)$$

$z$  est un vecteur constitué des erreurs de suivi de la consigne et des états intermédiaires.

$$z = [z_1, \dots, z_n]^T \quad \text{avec, } \begin{cases} z_1 = h(x_1) - y_d \\ z_i = x_i - x_{ic} \quad (i = 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2.77)$$

En associant la loi de commande (2.75) aux équations du système (2.73), on obtient :

$$\dot{z} = T(x) \cdot z \quad (2.78)$$

avec,  $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & L_{g_1} h(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & g_2(x_1, \dots, x_n) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & g_n(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

En effet, la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la dérivée de l'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{ic} \\ &= f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i) \cdot x_{i+1} - \dot{x}_{ic} \\ &= f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i) \cdot z_{i+1} + g_i(x_1, \dots, x_i) \cdot x_{i+1c} - \dot{x}_{ic} \\ &= g_i(x_1, \dots, x_i) \cdot z_{i+1}\end{aligned}\tag{2.79}$$

Si on considère la fonction de Lyapunov (2.76), sa dérivée s'écrit alors :

$$\dot{V}(z) = \frac{1}{2}(\dot{z}^T z + z^T \dot{z}) = \frac{1}{2}(z^T \cdot T(x)^T \cdot z + z^T \cdot T(x) \cdot z) = \frac{1}{2} \cdot z^T \cdot (T(x)^T + T(x)) \cdot z\tag{2.80}$$

où  $(T^T(x) + T(x))$  est bien symétrique mais n'est pas particulièrement définie.

A partir d'une telle fonction, on ne peut donc pas conclure quant à la stabilité du système global.

## 4.2. Méthode du backstepping

La méthode du backstepping consiste à choisir la commande de sorte à transformer la matrice  $T(x)$  en la somme d'une matrice diagonale définie négative  $(-K(z))$  et d'une matrice antisymétrique  $S(x)$ . on aurait alors :

$$z^T \cdot S(x) \cdot z = 0 \quad \text{et} \quad K(z) > 0\tag{2.81}$$

Du fait de ces propriétés, il devient possible de vérifier la stabilité exponentielle du système.

En considérant la fonction de Lyapunov quadratique (2.76), on a alors :

$$\dot{V}(z) = \frac{1}{2}(\dot{z}^T \cdot z + z^T \cdot \dot{z})\tag{2.82}$$

$$\text{Comme :} \quad \dot{z} = -K(z) \cdot z + S(x) \cdot z\tag{2.83}$$

$$\text{avec,} \quad z^T \cdot S(x) \cdot z = 0 \quad \text{et} \quad K(z) = K(z)^T > 0$$

$$\text{On obtient donc :} \quad \dot{V}(z) = -z^T \cdot K(z) \cdot z < 0\tag{2.84}$$

Une telle modification de la commande permet donc de satisfaire une condition suffisante de stabilité exponentielle.

Cette modification de la loi est réalisée en rajoutant des termes à chaque ligne de la commande obtenue par application successive de la commande non-linéaire inverse.

Concrètement, elle se traduit par :

- l'ajout des termes «  $L_{f_1}h(x_1).z_1$  » et «  $g_i(\cdot).z_i$  » (pour  $i$  variant de 2 à  $n$ ), de sorte à rendre  $T(z)$  antisymétrique,
- l'ajout de termes proportionnels à l'erreur («  $k_i(z_i).z_i$  ») permettant d'obtenir la matrice diagonale définie positive  $K(z)$ , conférant au système ses propriétés de stabilité exponentielle,
- l'ajout éventuel de termes non-linéaires («  $n_i(z_i).z_i$  ») permettant d'assurer la robustesse de la loi (stabilité robuste). L'implantation de tels termes a déjà été abordée précédemment dans la partie consacrée à la commande non linéaire inverse partielle (3.6). Dans le cas du backstepping, l'utilisation de ces termes est grandement facilitée. En effet, la commande étant calculée « ligne par ligne », on se ramène alors au cas de systèmes du premier ordre.

L'application du backstepping au système conduit ainsi à définir la loi de commande :

$$\dot{y}_d = -k_0 \cdot (y - y_d) \quad (2.85)$$

$$\text{et, } \begin{cases} x_{2c} = \frac{1}{L_{g_1} h(x_1)} [\dot{y}_d - L_{f_1} h(x_1) - k_1 z_1 - n_1(z_1) z_1] \\ x_{3c} = \frac{1}{g_2(x_1, x_2)} [\dot{x}_{2c} - f_2(x_1, x_2) - L_{g_1} h(x_1) z_1 - k_2 z_2 - n_2(z_2) z_2] \\ \vdots \\ x_{i+1c} = \frac{1}{g_i(x_1, \dots, x_i)} [\dot{x}_{ic} - f_i(x_1, \dots, x_i) - g_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) z_{i-1} - k_i z_i - n_i(z_i) z_i] \\ \vdots \\ x_{nc} = \frac{1}{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} [\dot{x}_{n-1c} - f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ - g_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) z_{n-2} - k_{n-1} z_{n-1} - n_{n-1}(z_{n-1}) z_{n-1}] \\ u = \frac{1}{g_n(x_1, \dots, x_n)} [\dot{x}_{nc} - f_n(x_1, \dots, x_n) - g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) z_{n-1} - k_n z_n - n_n(z_n) z_n] \end{cases}$$

Cette technique de synthèse de la commande utilise donc de façon récursive la méthode d'inversion de la dynamique et les propriétés des matrices antisymétriques pour construire la fonction de Lyapunov quadratique (2.74). Elle permet ainsi de garantir la stabilité exponentielle du système avec un taux de convergence donné.

En effet, comme on l'a pu le voir précédemment, si l'on associe à la commande les équations du modèle, on obtient alors :

$$\dot{z} = -K(z) \cdot z + S(x) \cdot z \quad (2.86)$$

avec,

$$K(z) = \text{diag}\{k_1 + n_1(z_1), k_2 + n_2(z_2), \dots, k_n + n_n(z_n)\} \quad (2.87)$$

et,

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & L_{g_1} h(x_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -L_{g_1} h(x_1) & 0 & g_2(x_1, x_2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_2(x_1, x_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) & 0 & g_n(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -g_n(x_1, \dots, x_n) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$S(x)$  étant antisymétrique, on obtient donc bien :

$$\dot{V}(z) = -z^T \cdot K(z) \cdot z < 0 \quad (2.89)$$

Ce type de loi de commande a pour principal avantage de permettre d'aborder le système considéré comme une succession de sous-systèmes élémentaires, ce qui permet une prise en compte progressive des problèmes de robustesse pouvant se poser. En effet, cette technique permet de se ramener à des systèmes du premier ordre, nettement plus faciles à analyser et permettant l'emploi efficace des terme «  $n_i(z_i).z_i$  » (inversion partielle) pour garantir la robustesse de la commande.

Cependant, on peut noter que lorsque ces termes sont utilisés pour compenser d'éventuelles incertitudes de modélisation, leur utilisation peut impliquer un coup non négligeable en terme de performance de la commande.

Ces lois présentent aussi l'inconvénient de nécessiter la dérivation successive des équations constituant la loi de commande. Cette dérivation peut être réalisée de deux manières :

- soit de manière analytique, en utilisant directement les expressions formelles de ces dérivées successives,
- soit de manière numérique, en estimant en ligne la variation des consignes intermédiaires.

Dans le premier cas, la complexité de la loi de commande obtenue pourra rapidement devenir inacceptable. Ce problème de complexité est directement lié à la nature des équations constituant le modèle de synthèse et à l'ordre de ce modèle.

Dans le second cas, la discrétisation de la loi de commande, nécessaire à son implantation dans les calculateurs, peut poser de nombreux problèmes de stabilité numérique (directement liés au nombre de dérivations successives nécessaires et donc à l'ordre du modèle de synthèse). Ce second point n'étant pas pris en compte dans l'étude théorique, il sera donc indispensable, dans le cas d'une mise en application pratique, d'y consacrer une attention particulière.

## 5. La commande par régime glissant

La commande par régime glissant est une technique de commande non linéaire apparue dans la littérature anglo-saxonne dans les années 70 [Utkin 1974], [Utkin 1977]. Elle s'est depuis largement développée et a fait l'objet d'applications dans de nombreux domaines [Mora-Camino 1993b]. L'engouement pour cette technique s'explique par sa relative simplicité et par ses propriétés de robustesse. En effet cette technique permet de prendre en compte explicitement perturbations et incertitudes de modélisation (supposées bornées) [Slotine 1984], [Fernandez 1987], [Slotine 1991].

Cette technique de commande peut être utilisée de façon complémentaire à la commande non linéaire inverse et peut se décomposer en 2 étapes distinctes :

- La définition d'un régime de glissement, ou surface de glissement ( $S(t)$ ), sur la base d'une équation :  $s(x,t)=0$ .  
Ce régime de glissement doit être défini de sorte à ce que, lorsque le système le suit, il est alors naturellement amené à se stabiliser sur l'état d'équilibre désiré.
- La définition d'une loi de commande permettant d'amener le système à rejoindre et à se maintenir sur le régime de glissement. Cette action revient à faire converger  $s$  vers 0.

Cette technique a ainsi pour intérêt de ramener le problème de commande, au problème de la convergence de  $s$  (variable de dimension une) vers 0. Ce problème de commande peut alors être résolu en utilisant le principe d'inversion.

Comme nous le verrons, la solution obtenue sera alors, dans certain cas, fortement liée à celle obtenue avec la commande non linéaire inverse.

### 5.1. Bases de la théorie de la commande par régime glissant

On considère le système SISO :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + g(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.90)$$

Le régime de glissement peut, par exemple, être défini par une équation du type :

$$s \equiv \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{p-1} e = \sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k \cdot \lambda^{p-1-k} \cdot e^{(k)} \quad (2.91)$$

$$\text{avec, } e = (y_d - y) \quad \text{et} \quad \lambda > 0 \quad (2.92)$$

$$p \text{ est le degré relatif du système et, } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2.93)$$

Dans le cas général, on choisirait une équation de référence telle que «  $s=0$  » correspondrait à un système linéaire stable.

En définissant le régime de glissement par cette équation, on retrouve bien les propriétés énoncées précédemment (1<sup>ère</sup> étape de la technique de commande). En effet, si la sortie suit ce régime, l'erreur de suivi de la consigne convergera bien vers 0.

Il s'agit maintenant de définir une loi de commande permettant de faire converger  $s$  vers 0.

Une condition suffisante de convergence au sens de Lyapunov est :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} s^2 = s \cdot \dot{s} \leq -\eta \cdot |s|, \quad \eta > 0 \quad (2.94)$$

Elle permet de garantir la stabilité exponentielle de  $s$ .

Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\dot{s} \leq -\eta \cdot \text{sign}(s), \quad \eta > 0 \quad (2.95)$$

Comme :

$$\dot{s} = y_d^{(\rho)} - y^{(\rho)} + \sum_{k=1}^{\rho-1} C_{\rho-1}^{k-1} \cdot \lambda^{\rho-k} \cdot e^{(k)} \quad (2.96)$$

Il est donc possible de définir une loi de commande satisfaisant ce critère, en se basant sur le principe d'inversion.

Cette commande peut alors s'écrire :

$$u = B_u^{-1}(x, v - A(x)) \quad (2.97)$$

$$\text{avec, } v = y_d^{(\rho)} + \sum_{k=1}^{\rho-1} C_{\rho-1}^{k-1} \cdot \lambda^{\rho-k} \cdot e^{(k)} + \eta \cdot \text{sign}(s) \quad (2.98)$$

Une des caractéristiques d'une telle loi est sa capacité à prendre en compte les perturbations et les incertitudes de modélisation.

Ainsi, si on considère  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  comme étant les représentations de  $A$  et  $B$  utilisées comme référence pour la synthèse, la stabilité exponentielle en présence d'erreurs de modélisation bornées pourra être garantie en adaptant la loi de commande de sorte à avoir :

$$u = \hat{B}_u^{-1}(x, v - \hat{A}(x)) \quad (2.99)$$

$$\text{avec, } v = y_d^{(\rho)} + \sum_{k=1}^{\rho-1} C_{\rho-1}^{k-1} \cdot \lambda^{\rho-k} \cdot e^{(k)} + K \cdot \text{sign}(s) \quad (2.100)$$

ici,  $K$  est donné par la relation :

$$K \equiv \beta \cdot (\Delta A + \eta) + (\beta - 1) \cdot |v - \hat{A}| \quad (2.101)$$

$$\text{avec, } |A(x) - \hat{A}(x)| < \Delta A(x; t) \quad (2.102)$$

$$\text{et, } \beta^{-1}(x; t) \leq \hat{B}(x; u) \cdot B(x; u)^{-1} \leq \beta(x; t) \quad (2.103)$$

## 5.2. Approximation continue de la commande par régime glissant

La commande par régime glissant telle que décrite précédemment présente une forte discontinuité au voisinage de la surface de glissement ( $S(t)$ ) et risque ainsi de provoquer des phénomènes vibratoires gênants, appelés « chattering ».

Cette activité haute fréquence de la commande peut être évitée en rendant la variation de la commande « progressive » dans un voisinage donné de la surface de glissement.

On peut apporter une modification à la loi précédente (2.100) afin d'éviter l'apparition de ce phénomène [Slotine 1991]. La nouvelle loi de commande qui en résulte peut alors s'écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}_d^{(\rho)} + \sum_{k=1}^{\rho-1} \mathbf{C}_{\rho-1}^{k-1} \cdot \lambda^{\rho-k} \cdot \mathbf{e}^{(k)} + \mathbf{K} \cdot \text{sat}\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda^{\rho-1} \varepsilon}\right) \quad (2.104)$$

$\varepsilon$  représente la largeur d'un voisinage de la surface de glissement considéré (cf. figure 2. 1) et la fonction "sat" est telle que :

- si  $|y| < 1$ ,  $\text{sat}(y) = y$  ;
  - si  $|y| \geq 1$ ,  $\text{sat}(y) = \text{sign}(y)$ .
- (2.105)

Hors de ce voisinage, la commande reste inchangée : ses propriétés de robustesse y sont conservées. Ce voisinage du régime de glissement est une variété invariante.

A l'intérieur de ce voisinage, sans perturbations ou erreurs de modélisation, une telle loi de commande permet de garantir la stabilité asymptotique du système :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} s^2 = s \cdot \dot{s} \leq -\eta \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\lambda^{\rho-1} \varepsilon}\right) \cdot s < 0 \quad (2.106)$$

En cas d'erreurs de modélisation ou si des perturbations apparaissent, cette stabilité n'est plus garantie et la précision de la réponse obtenue sera alors limitée par la largeur du voisinage considéré ( $\varepsilon$ ).

Cette précision peut ainsi être ramenée à un ratio entre la bande passante du système à l'ordre  $\rho$  et l'amplitude des incertitudes de modélisation ramenées à la trajectoire désirée du système.

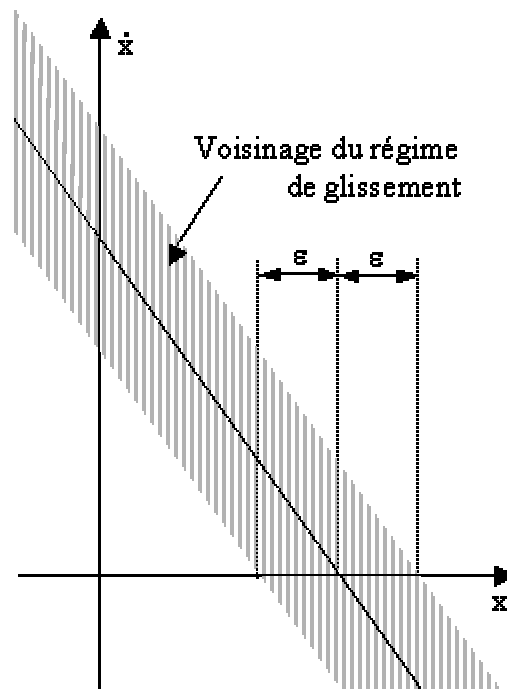


figure 2. 1 : Exemple de définition d'un voisinage du régime de glissement dans le cas où  $n=\rho=2$ .

### 5.3. Commande intégrale par régime glissant

La précision de cette loi de commande peut être accrue en ne considérant plus, lors de la définition de l'expression du régime de glissement, l'erreur de suivie de la consigne mais son intégrale notée  $\chi$  :

$$\chi = \int_0^t e \, d\tau. \quad (2.107)$$

On parlera alors de commande intégrale par régime glissant.

La surface de glissement peut alors être définie grâce à l'équation :

$$\begin{aligned} s &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^p \chi = \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot \chi^{(k)} \\ &= \int_0^t \left( \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot e^{(k)} \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.108)$$

On a alors :

$$\dot{s} = y_d^{(p)} - y^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot e^{(k)} \quad (2.109)$$

La loi de commande qui en résulte peut être obtenue en définissant  $v$  comme :

$$v = y_d^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot e^{(k)} + K \cdot \text{sat} \left( \frac{s}{\lambda^p \varepsilon} \right) \quad (2.110)$$

### 5.4. Commande par régime glissant et commande non linéaire inverse

Si l'on considère que la consigne est constante, l'entrée auxiliaire  $v$  est alors égale à :

$$v = - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot y^{(k)} + \lambda^p \cdot (y_d - y) + K \cdot \text{sat} \left( \frac{s}{\lambda^p \varepsilon} \right) \quad (2.111)$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} + K \cdot \text{sat} \left( \frac{s}{\lambda^p \varepsilon} \right) \quad (2.112)$$

$$\text{avec, } k_i = C_p^i \cdot \lambda^{p-i} \quad (2.113)$$

La commande intégrale par régime glissant est comparable à une commande non linéaire inverse à laquelle on aurait associé un terme dépendant à  $s$  (qui comprend une intégrale de l'erreur), améliorant stabilité et robustesse.

**Remarque :**

L'expression de  $v$  peut être linéarisée en utilisant l'équation :

$$v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} + \frac{K}{\lambda^p \epsilon} \cdot s \quad (2.114)$$

A l'intérieur du voisinage de la surface de glissement, la loi de commande reste inchangée.

A l'extérieur de ce voisinage, on peut alors obtenir :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} s^2 = s \cdot \dot{s} \leq -\eta \cdot \frac{s^2}{\lambda^{p-1} \epsilon} \leq -\eta \cdot |s| \quad (2.115)$$

La stabilité exponentielle  $y$  reste donc garantie.

En développant l'expression de  $s$ , on peut alors écrire :

$$v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} + \frac{K}{\lambda^p \epsilon} \cdot \int_0^t \left( \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot \lambda^{p-k} \cdot e^{(k)} \right) d\tau \quad (2.116)$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$v = k_0 \cdot (y_d - y) - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} + \frac{K}{\lambda^p \epsilon} \cdot \int_0^t \left( -y^{(p)} - \sum_{i=1}^{p-1} k_i \cdot y^{(i)} + k_0 \cdot (y_d - y) \right) d\tau \quad (2.117)$$

La commande est alors comparable à une commande de type non linéaire inverse associée à l'intégrale de l'erreur de suivi de la dynamique théorique prédéfinie.

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre consacré à la théorie de la commande des systèmes non-linéaire SISO, divers approches de synthèse de lois de commande ont été analysées. L'approche la plus classique dans le domaine aéronautique, la commande au premier ordre, présente en fait d'importantes limitations :

- Elle reste limitée à des non-linéarités très progressives de la dynamique du processus considéré.
- De part sa nature, il est extrêmement difficile de dégager des preuves formelles de stabilité globale.
- Sa mise en œuvre implique un niveau de complexité important.

Ainsi d'autres techniques, basées sur un traitement analytique des non-linéarités du processus ont été étudiées. Il s'agit de la Commande non-linéaire inverse, de la commande par backstepping et de la commande par régime glissant. De part leur nature analytique, ces trois techniques qui présentent de fortes similarités, semblent permettre une prise en compte efficace des particularités de la dynamique du système considéré.

Dans les chapitres qui suivent, on verra comment ces techniques peuvent servir de support au développement de systèmes de commande des mouvements de l'avion au sol.



# **Chapitre 3 :           Commande supervisée de la dynamique longitudinale de l'avion au sol**

|                                                                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introduction .....</b>                                                                                           | <b>2</b>  |
| 1.1. Objectif de l'étude .....                                                                                         | 2         |
| 1.2. Cadre de l'étude .....                                                                                            | 2         |
| <b>2. Utilisation de la poussée motrice.....</b>                                                                       | <b>3</b>  |
| 2.1. Modèle de référence .....                                                                                         | 3         |
| 2.2. Commande non linéaire inverse .....                                                                               | 6         |
| 2.3. Utilisation du Backstepping .....                                                                                 | 9         |
| 2.4. Comparaison avec une loi existante de contrôle de la vitesse.....                                                 | 12        |
| 2.5. Bilan de l'étude relative au contrôle de la poussée .....                                                         | 16        |
| <b>3. Utilisation du système de freinage .....</b>                                                                     | <b>18</b> |
| 3.1. Modèle de référence .....                                                                                         | 18        |
| 3.2. Synthèse de la commande .....                                                                                     | 19        |
| 3.3. Comparaison avec des fonctions de contrôle de la décélération à l'atterrissage<br>(« l'Autobrake » d'Airbus)..... | 27        |
| 3.4. Bilan de l'étude relative à l'utilisation du système de freinage .....                                            | 32        |
| <b>4. Couplage des commandes en poussée et freinage.....</b>                                                           | <b>34</b> |
| 4.1. Cadre de l'étude .....                                                                                            | 34        |
| 4.2. Position du problème.....                                                                                         | 34        |
| 4.3. Solutions étudiées.....                                                                                           | 35        |
| 4.4. Adaptation de la loi de pilotage aux besoins opérationnels .....                                                  | 42        |
| 4.5. Bilan des entrées et sorties .....                                                                                | 51        |
| <b>5. Conclusion.....</b>                                                                                              | <b>53</b> |

# 1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la synthèse d'une loi de pilotage de la vitesse de l'avion lors de ses déplacements sur une plate-forme aéroportuaire.

Cette partie a pour objet, après avoir présenté les objectifs de l'étude et les travaux l'ayant précédée, de réaliser une première évaluation de différentes techniques et architectures de commande, d'en décrire les résultats et d'approfondir la loi de commande offrant le meilleur compromis.

Pour permettre cette étude, on s'intéresse tout d'abord au problème du contrôle de la poussée motrice et à celui du contrôle du freinage. Ensuite, grâce à l'étude de la supervision des ces deux chaînes commandes, on cherche à obtenir une loi globale couplant freins et moteurs.

## 1.1. Objectif de l'étude

Le but de cette étude est de proposer de nouvelles lois de commande permettant de faciliter et d'améliorer le contrôle de la vitesse lors du roulage. Le comportement de l'appareil sera rendu plus stable et homogène, ce qui facilitera son pilotage, le rendra plus instinctif et allégera la charge de travail de l'équipage.

La mise en œuvre de cette loi de commande sur avion pourra alors être réalisée au travers de nouvelles fonctions permettant :

- de suivre une vitesse de consigne, sélectionnée par le pilote (fonctionnement de type « Pilote Automatique »),
- de commander directement l'accélération longitudinale de l'appareil (par exemple à l'aide d'un Pôde remplaçant le tiller),
- de réaliser une fonction automatique de maintien de la vitesse.

## 1.2. Cadre de l'étude

Deux types de systèmes de commande permettent actuellement, sur les gros porteurs civiles, de contrôler la vitesse de l'avion : « l'automanette » (contrôle de la vitesse en vol par les moteurs) et « l'autobrake » (contrôle de la décélération lors des atterrissages et accélérations/arrêts par le système de freinage). En plus de ces deux lois de commande, on peut aussi citer les travaux réalisés par Fabrice Villaumé [Villaumé 2002] et Cécile Saint-Marcoux [S-Marcoux 2001]. Ces travaux ont, entre autres, porté sur une fonction de gestion de la décélération (s'appuyant sur la loi « autobrake ») et sur une première fonction de contrôle de la vitesse au roulage. Les lois de commande qui en sont issues sont basées sur les techniques de commande non-linéaire inverse. Deux principaux types de lois ont été réalisés :

- une commande du premier ordre basée sur l'inversion de l'équation de poussée,
- une commande du second ordre basée sur l'inversion d'un modèle (appelé modèle de synthèse) comportant l'équation associée à des modélisations du premier ordre des moteurs et des freins.

## 2. Utilisation de la poussée motrice

Ce paragraphe s'intéresse au cas où seul les moteurs sont utilisés pour contrôler la vitesse. Après avoir brièvement décrit le modèle moteur servant de référence à l'étude, on présentera les travaux effectués pour mettre au point une telle loi de pilotage. On présentera d'abord des développements basés sur la technique de commande non linéaire inverse, puis on s'intéressera au principe du Backstepping, permettant de réaliser une commande « en cascade » de l'avion et de ses systèmes.

Pour chaque technique, on abordera le problème de commande à partir de modèles de synthèse plus ou moins réduits. On pourra alors étudier les propriétés des lois de commande issues de ces associations modèle de synthèse / technique de commande et les comparer sur la base d'une analyse par simulation.

### 2.1. Modèle de référence

Les principaux modèles de turboréacteur cités dans la littérature peuvent être dissociés en deux grandes catégories :

- Des modèles « physiques », cherchant à prendre en compte l'ensemble des phénomènes qui régissent le comportement de ce type de systèmes (effets thermodynamiques, mécanique des fluides, équations mécanique liées aux parties tournantes) et l'ensemble des tâches de régulations liées au fonctionnement du calculateur de régulation du moteur (appelé, suivant les cas, FADEC (Full Authority Digital Computer) ou ECU (Engine Control Unit)). Ces modèles sont complexes, volumineux et leur simulation nécessite souvent d'importantes capacités de calcul.
- Des modèles « macroscopiques » identifiés sur la base d'une étude précise du comportement entrée-sortie du système. Le plus souvent ces modèles associent des tables d'interpolation plus ou moins complexes (permettant de retrouver le comportement statique du moteur) à un correcteur du premier ou du second ordre.

Dans le cadre de cette étude, on se base sur une modélisation macroscopique et non-linéaire du moteur (cf. chapitre 1, partie 2.3.3). Ce modèle représenté schématiquement sur la figure 3.1 est divisé en deux parties distinctes :

- Un modèle dynamique relatif aux variations du paramètre de commande du moteur (ici, le  $N1$ ) qui rassemble :
  - un filtre d'ordre 2 dont la pulsation et l'amortissement sont adaptés en fonction du régime moteur ( $N1$  courant) et du point de vol (mach, altitude et température)
  - des saturations du paramètre de commande et de sa dérivée.Il est à noter que les limites supérieures et inférieures de cette dérivée sont variables en fonction du régime moteur courant et du point de vol. Les limites du paramètre de commande correspondent au régime Idle et TOGA.
- Une modélisation statique de la poussée associée à ce paramètre de commande. Cette modélisation utilise des réseaux de neurones dont l'apprentissage est basé sur des échantillons obtenus par simulation à partir du modèle de référence d'Airbus (SPPMS) [Lavergne 2003].

Ce modèle a pour intérêt d'être suffisamment simple pour être utilisé lors de la synthèse de lois de commande non-linéaires, tout en conservant une très bonne représentativité tant sur le plan statique que dynamique. Il isole les effets dus aux saturations en  $N1$  et en dérivée du  $N1$  et permet leur prise en compte lors de la synthèse de la commande.

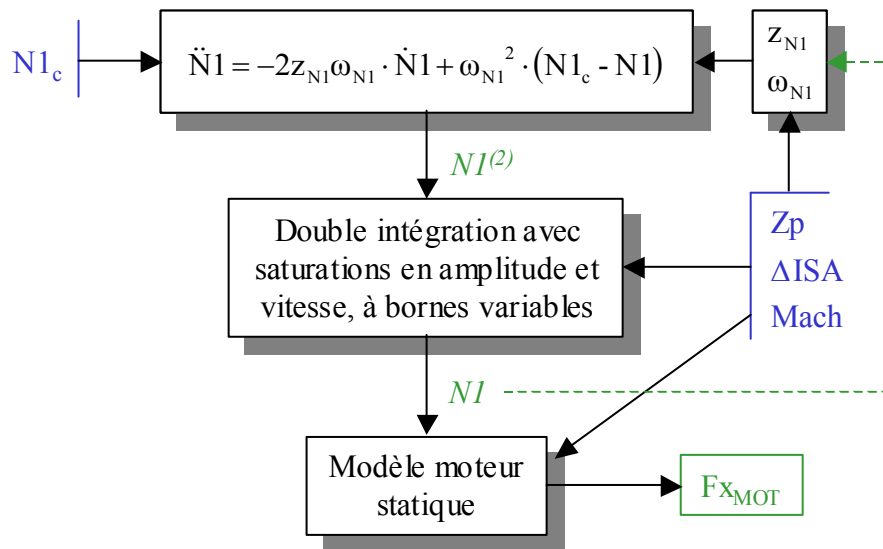


figure 3.1 : Représentation schématique du modèle moteur de référence

L'avion considéré dans le cadre de cette étude est un A320. Pour des raisons de disponibilité des modèles neuronaux, la modélisation statique des moteurs que l'on utilise correspond au CFM 56-5C4 (qui reste proche par ces caractéristiques des CFM 56-5B2). Le modèle dynamique est identifié sur la base de comparaisons faites avec les résultats obtenus pour un A340-600, et pour des conditions fortement pénalisantes : haute altitude et température élevée. La dynamique de ce modèle est ainsi fortement contrainte et correspond donc à un comportement « pire cas » des moteurs.

Cette étude ayant pour but une évaluation globale des lois de commande envisageables (Complexité, performance, précision, etc.), on se contentera ici de ce niveau de modélisation qui est cohérent avec la réalité, mais qui, dans le détail, ne correspond à aucun avion précis.

Dans le but d'obtenir une évaluation, la plus rigoureuse possible, des différentes commandes, on utilise pour la simulation, un modèle plus précis que le modèle utilisé pour la synthèse de loi. Ce modèle de simulation est basé sur le modèle de référence présenté précédemment. En ce qui concerne le modèle de synthèse, dans le cas de la représentation statique du moteur, on considère un modèle polynomial simple, identifié à partir des réseaux de neurones (cf. figure 3.2 et 3.3). De même, en ce qui concerne le modèle dynamique, les tables donnant l'évolution de l'amortissement et de la pulsation propre en fonction du régime moteur et des conditions extérieures sont largement simplifiées. La pulsation propre, qui évolue entre 1 et 0,5 dans le modèle de simulation est modélisée par une constante égale à 1 dans le modèle de synthèse. De même, l'amortissement qui est initialement de 0,6 est pris égal à 0,4 pour la synthèse de lois.

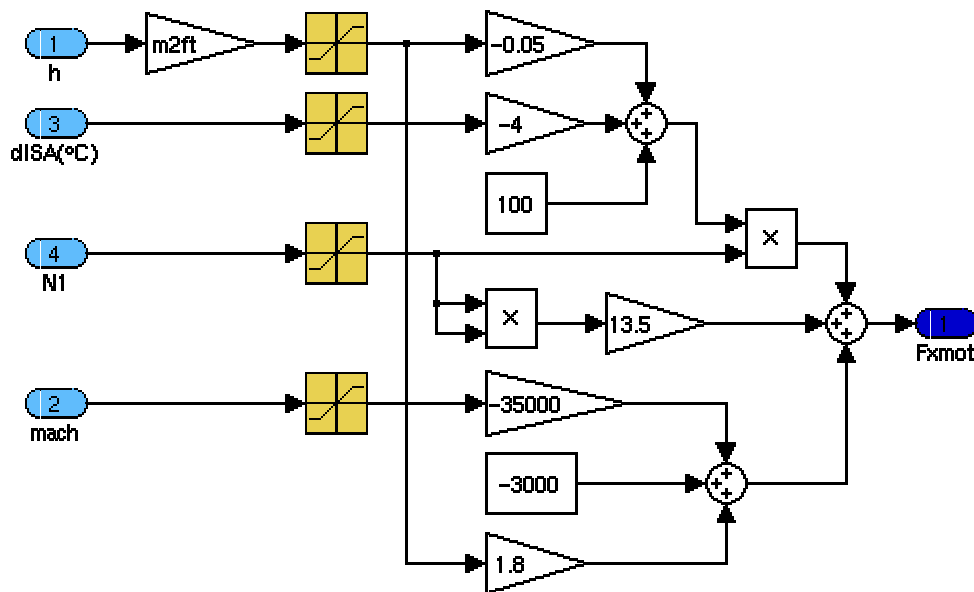


figure 3.2 : Modélisation statique du CFM56-5C4 utilisée dans le modèle de synthèse.

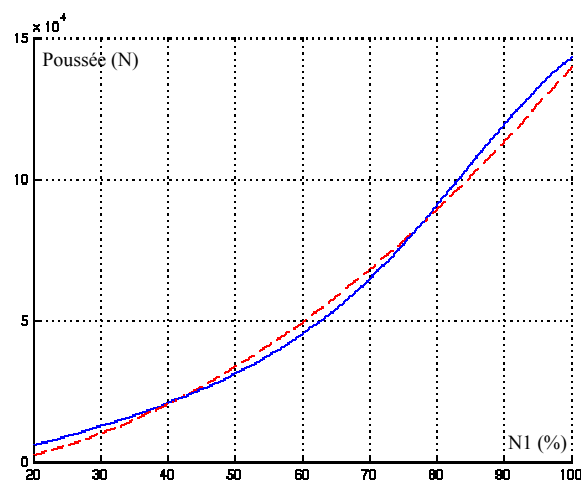


figure 3.3 : Comparaison entre le modèle de simulation, en rouge (précision par rapport au modèle OSMA :  $[-2.67\% ; 1.99\%]$  à  $10^{-3}$ ) et le modèle de synthèse, en bleu. Le mach est de 0.06 (correspondant à une vitesse d'environ 30 kt), l'altitude est nulle et la température est standard ( $\Delta ISA=0$ ).

## 2.2. Commande non linéaire inverse

Le comportement longitudinal de l'avion au sol est principalement issu de l'équation de poussée (en axes avion) :

$$m \dot{V}_x = F_{x_{MOT}}(N1, mach, Zp, \Delta ISA) + F_{x_T} \quad (3.1)$$

avec,

$F_{x_{MOT}}$  : la force longitudinale issue de la poussée des réacteurs

$F_{x_T}$  : l'ensemble des forces de traînée (forces aérodynamique, de roulement, de freinage)

Le principe de la commande non linéaire inverse appliqué au pilotage longitudinal au sol peut être résumé de la manière suivante :

- On dérive l'équation de poussée pour obtenir une relation entre une dérivée donnée de la sortie à commander ( $V_x^{(p)}$ ) et la variable de commande (ici la consigne en  $N1$  ( $N1_c$ )). Le degré de dérivation nécessaire (degré relatif) est directement lié à l'ordre du modèle utilisé pour représenter le comportement des moteurs dans le modèle de synthèse (trois dans le cas d'un modèle moteur d'ordre deux).
- Par inversion de cette relation, on peut alors déterminer l'expression de la commande permettant de suivre une dynamique objectif de la sortie. Le système est alors théoriquement ramené à une chaîne d'intégrateurs.

L'emploi de cette technique suppose l'inversibilité de la relation entrée/sortie obtenue. Il est à noter que cette hypothèse ne permet pas de prendre en compte les saturations dans le modèle de synthèse. Leur impact sera considéré a posteriori, en contraignant le réglage des gains de la loi de commande et en adaptant les éventuels intégrateurs à l'aide de dispositifs « Anti-Windup ».

### 2.2.1. Modèle de synthèse d'ordre 3

L'utilisation du modèle de référence présenté précédemment conduit à considérer, dans le modèle de synthèse, une dynamique des moteurs linéaire du deuxième ordre (dont la pulsation et amortissement sont variables en fonction du point de vol et du régime moteur courant), donnée par :

$$\ddot{N1} = -2z_{N1}\omega_{N1} \cdot \dot{N1} + \omega_{N1}^2 \cdot (N1_c - N1) \quad (3.2)$$

Le modèle de synthèse rassemble cette modélisation des moteurs et l'équation de poussée. Il est donc d'ordre 3. D'après (3.1) et (3.2), il est nécessaire de dériver deux fois l'équation de poussée pour y faire apparaître le terme  $N1_c$  :

$$\begin{aligned} \ddot{V}_x &= \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial^2 F_{x_{MOT}}}{\partial N1^2} \times \dot{N1}^2 + \frac{\partial F_{x_{MOT}}}{\partial N1} \times \ddot{N1} \right] \\ &= \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial^2 F_{x_{MOT}}}{\partial N1^2} \times \dot{N1}^2 + \frac{\partial F_{x_{MOT}}}{\partial N1} \times \left( -2z_{MOT}\omega_{MOT} \cdot \dot{N1} + \omega_{MOT}^2 \cdot (N1_c - N1) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

(L'influence de la dérivée seconde de la traînée aérodynamique est négligée et on suppose qu'aucun freinage n'est appliqué.)

On peut alors en déduire la loi de commande :

$$N1_c = N1 + \frac{2 z_{N1}}{\omega_{N1}} \cdot \dot{N1} - \frac{\frac{\partial^2 Fx_{MOT}}{\partial N1^2}}{\omega_{N1}^2 \cdot \frac{\partial Fx_{MOT}}{\partial N1}} \times \dot{N1}^2 + \frac{m}{\omega_{N1}^2 \cdot \frac{\partial Fx_{MOT}}{\partial N1}} \times [\ddot{V}_x]_c \quad (3.4)$$

$$\text{avec, } [\ddot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_3} \cdot \left( \frac{1}{\tau_2} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) - \dot{V}_x \right) - \ddot{V}_x \right) \quad (3.5)$$

$V_{x_c}$  est la consigne de vitesse et  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont des paramètres de réglage de la loi.

Dans ce chapitre, l'objectif principal de commande est le contrôle de la vitesse. Il est cependant aisément possible d'interpréter ces résultats dans le cadre du contrôle de l'accélération.

$$\text{Pour ce faire, il suffit de remplacer : } \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) \text{ par } [\dot{V}_x]_c. \quad (3.6)$$

Dans le cas présent, la loi de commande s'écrit alors :

$$N1_c = N1 + \frac{2 z_{N1}}{\omega_{N1}} \cdot \dot{N1} - \frac{\frac{\partial^2 Fx_{MOT}}{\partial N1^2}}{\omega_{N1}^2 \cdot \frac{\partial Fx_{MOT}}{\partial N1}} \times \dot{N1}^2 + \frac{m}{\omega_{N1}^2 \cdot \frac{\partial Fx_{MOT}}{\partial N1}} \times [\ddot{V}_x]_c \quad (3.7)$$

$$\text{avec, } [\ddot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_3} \cdot \left( \frac{1}{\tau_2} \cdot ([\dot{V}_x]_c - \dot{V}_x) - \ddot{V}_x \right) \quad (3.8)$$

Il pourrait être envisagé d'ajouter à l'expression ci-dessus une intégration de l'erreur de sortie, de sorte à annuler d'éventuelles erreurs statiques. Il faudrait alors y associer un dispositif anti-windup pour limiter les effets dus aux saturations. (Une telle réalisation sera décrite ultérieurement.)

Cette loi de commande suppose de pouvoir mesurer la dérivée du  $N1$  et la dérivée seconde de la vitesse. Ces mesures n'étant pas directement accessibles, il faut alors dériver le  $N1$  et l'accélération. Pour se faire, il est possible d'utiliser un filtre de type « Wash-Out », réglé au minimum à 2 fois la fréquence de séquençage du calculateur et défini par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{p}{1 + \tau_{Wash} \cdot p} \quad (3.9)$$

Les figures qui suivent, présentent les consignes et réponses obtenues, en vitesse longitudinale et  $N1$ , pour une loi de commande telle que :

$$\frac{1}{\tau_1} = \omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_3} = 4 \cdot \omega \quad (3.10)$$

$\omega$  est une constante positive, utilisée pour le réglage de la loi.

Cette mise en forme permet théoriquement d'obtenir un amortissement de 1.

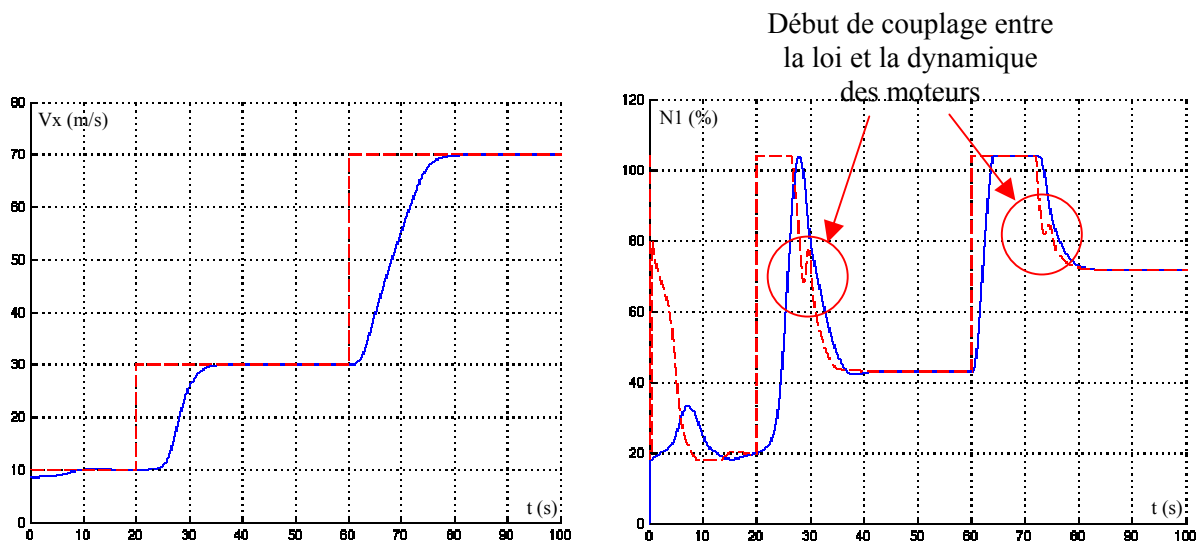
Les consignes sont représentées par des lignes rouges pointillées et les réponses du système par des lignes bleues pleines.

Le système étant fortement non-linéaire, le temps de réponse n'est pas constant mais varie en fonction des sollicitations et des conditions de fonctionnement.

Le réglage de  $\omega$  peut être choisi de sorte à obtenir un temps de réponse minimum tel que, dans le pire des cas, la consigne en N1 entre en limite de régime oscillant (apparition de couplage entre le calcul de la consigne en N1 et la dynamique des moteurs).

Dans le cas de la commande non-linéaire inverse avec un modèle de synthèse d'ordre 3, les différentes simulations réalisées (cf. figures 3.4 a et b) montrent que, pour un réglage de  $\omega$  allant jusqu'à 0,3, le comportement de l'avion est tout à fait satisfaisant.

Ces simulations ont été réalisées avec un Wash-Out tel que  $\tau_{\text{Wash}} = 0,2$  s. Il est à noter que l'utilisation de ce filtre n'induit pas de modification significative de la dynamique obtenue.



figures 3.4 a et b : Réponse obtenue pour une commande de type non-linéaire inverse d'ordre 3 avec  $\omega = 0,3$ .

## 2.2.2. Modèle de synthèse d'ordre 2

Pour éviter d'avoir à utiliser des estimations de la dérivée du N1 et de la dérivée seconde de la vitesse, il est possible de considérer, dans le modèle de synthèse, une dynamique des moteurs réduite à un premier ordre linéaire dont le temps de réponse dépend du régime moteur et du point de vol :

$$\dot{N1} = \frac{1}{\tau_{N1}} \cdot (N1_c - N1) \quad (3.11)$$

Par dérivation de l'équation de poussée, on obtient alors :

$$\ddot{V}_x = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F_{x_{\text{MOT}}}}{\partial N1} \times \dot{N1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F_{x_{\text{MOT}}}}{\partial N1} \times \frac{1}{\tau_{N1}} \cdot (N1_c - N1) \quad (3.12)$$

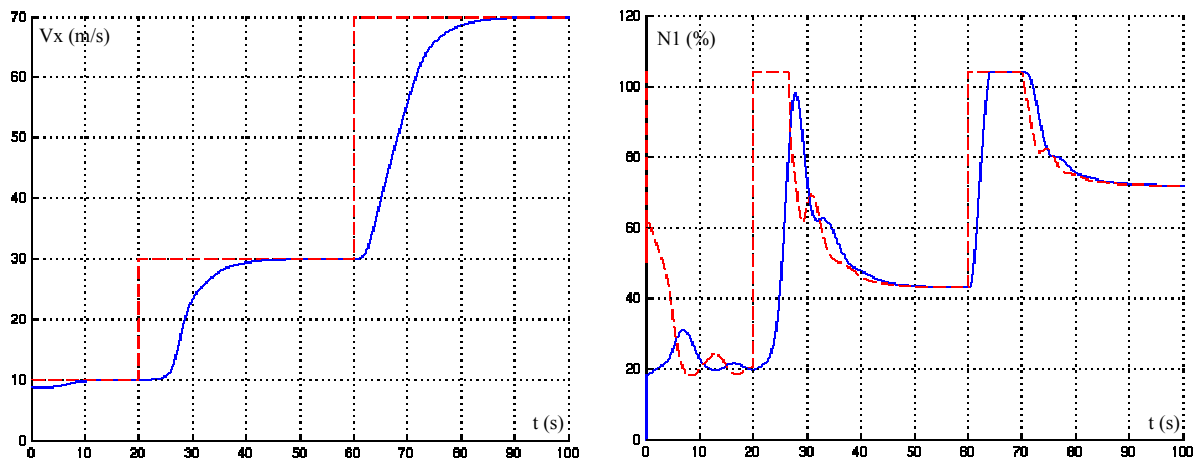
On peut donc en déduire la loi de commande :

$$N1_c = N1 + \frac{\tau_{N1} \cdot m}{\frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1}} \times [\ddot{V}_X]_c \quad (3.13)$$

$$\text{avec, } [\ddot{V}_X]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{X_c} - V_X) - \dot{V}_X \right) \quad (3.14)$$

Comme précédemment, les différentes simulations réalisées (cf. figures 3.5 a et b) montrent le bon comportement de cette loi. Cependant, le temps de réponse minimum pouvant être obtenu est limité par des problèmes de déphasage dus à la simplification du modèle moteur. Le réglage correspondant de  $\omega$  ne doit alors pas excéder 0,2.

Malgré cette légère dégradation de la performance, dans la mesure où la dynamique obtenue est suffisamment rapide pour satisfaire les besoins de pilotabilité, la loi de commande reste très intéressante. Elle est nettement plus simple que la précédente et s'appuie sur des données mieux maîtrisées et plus fiables.



figures 3.5 a et b : Réponse obtenue pour une commande de type non-linéaire inverse d'ordre 2 avec  $\omega = 0,2$ .

## 2.3. Utilisation du Backstepping

Dans le cas du pilotage de la vitesse par les moteurs, il est possible de considérer le comportement longitudinal de l'appareil comme la mise en cascade de la dynamique de l'avion au sol (ici l'équation de poussée) avec celle des moteurs. Ceci conduit à considérer des lois de commande utilisant la technique du Backstepping qui se base sur une architecture « en cascade » des différents sous-ensembles qui composent le système.

On cherche donc dans cette partie à appliquer cette technique (décrite dans le deuxième chapitre), aux différents modèles de synthèse utilisés précédemment (d'ordre 2 et 3).

### 2.3.1. Modèle de synthèse d'ordre 2

En utilisant le modèle de synthèse d'ordre 2 présenté précédemment, la loi de commande peut être définie par :

$$N1_c = \alpha_2 \quad (3.15)$$

avec,

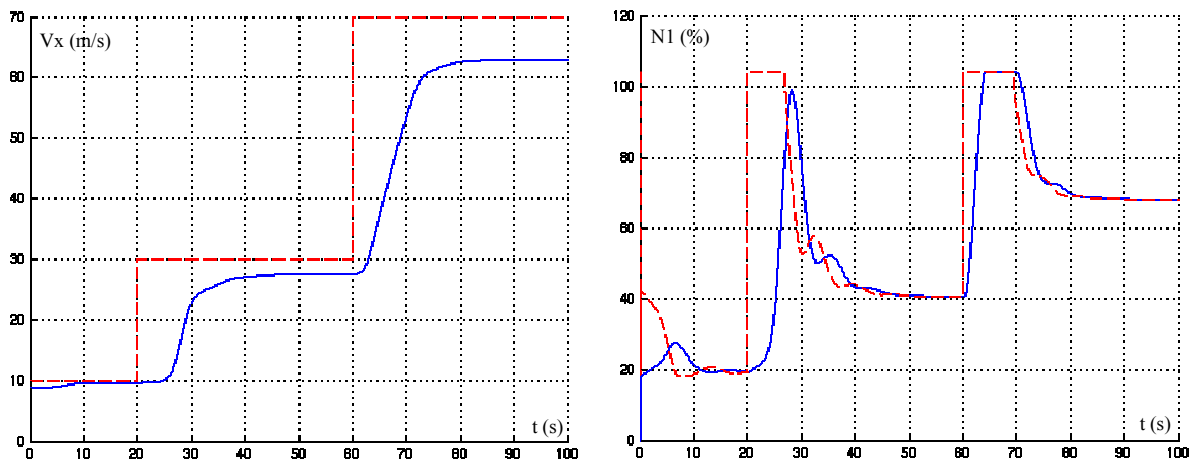
$$\begin{cases} \alpha_1 = F_{X_{MOT}}^{-1} \left( m \cdot \left( \frac{d V_{X_c}}{d t} + \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{X_c} - V_X) \right) - F_{X_T} \right) \\ \alpha_2 = N1 + \tau_{N1} \cdot \left( \frac{d \alpha_1}{d t} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1} \times (V_{X_c} - V_X) + \frac{1}{\tau_2} \cdot (\alpha_1 - N1) \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

$F_{X_{MOT}}^{-1}$  est l'inverse de la caractéristique statique des moteurs. Ces derniers se comportant de façon monotone, cette inverse existe. Elle correspond à une fonction permettant de calculer le régime moteur associé à une poussée établie donnée. Dans le cas de l'utilisation de modèle neuronaux, cette fonction peut être directement établi en réalisant un apprentissage spécifique (poussée et conditions d'utilisation en entrée, N1 en sortie).

Comme pour la commande non linéaire inverse d'ordre 2, le temps de réponse minimum pouvant être obtenu par cette loi reste limité par les problèmes de déphasage liés à la réduction du modèle moteur. La performance obtenue est toutefois légèrement meilleure, comme le montre les figures 3.6 a et b ( $\omega = 0,25$ ). Cependant, si un filtre « Wash-out » est utilisé pour réaliser la dérivation de  $\alpha_1$ , le temps de réponse minimum reste comparable à celui du cas non-linéaire inverse.

Une autre solution consiste à écrire : 
$$\frac{d \alpha_1}{d t} = - \frac{m \cdot \dot{V}_X}{\tau_1 \cdot \frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1}} \quad (3.17)$$

La loi de commande ainsi obtenue permet de conserver la performance initiale tout en évitant le problème de dérivation.



figures 3.6 a et b : Réponse obtenue pour une commande de type Backstepping d'ordre 2 avec  $\omega = 0,25$  et sans utiliser de filtre « Wash-Out ».

Dans le cadre de cette application, cette loi de commande s'avère nettement moins robuste que celles obtenues grâce à la commande non-linéaire inverse. Comme le montre les simulations présentées ici, des erreurs statiques significatives peuvent apparaître. Les écarts entre le modèle utilisé lors de la synthèse et celui utilisé pour la simulation ne sont pas entièrement compensés par cette technique de commande.

Cette compensation pourrait être accrue grâce à l'utilisation de termes non-linéaire de type :  $n_i(z_i) \cdot z_i$  (cf. chapitre 2). Cependant, les erreurs statiques obtenues ne pourraient jamais être entièrement annulées et le temps de réponse serait alors nettement augmenté.

Pour mettre en œuvre cette loi sur avion, il sera donc indispensable d'y associer un correcteur intégral et un dispositif « Anti-Windup » (du fait de la présence de saturations). Le surplus de complexité lié à l'utilisation du Backstepping (complexité des équations, dérivation de  $\alpha_1$ , mise en œuvre d'un dispositif « Anti-Windup » suffisamment performant) n'apportant pas de gains en terme de temps de réponse réellement significatifs, la réalisation d'un tel correcteur ne sera pas étudiée ici.

### 2.3.2. Modèle de synthèse d'ordre 3

Si l'on conserve dans le modèle de synthèse un modèle moteur du 2<sup>ème</sup> ordre, la technique du backstepping nécessite alors l'utilisation d'un changement de variable pour mettre le système sous forme triangulaire inférieure. La définition de la nouvelle variable d'état « s » est basée sur des travaux réalisés par Slotine et Lie [Slotine 1987] et consiste en l'équation :

$$s = \dot{N1} + N1 \quad (3.18)$$

d'où,

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{N1} + \dot{N1} = (1 - 2 z_{N1} \omega_{N1}) \cdot \dot{N1} + \omega_{N1}^2 \cdot (N1_c - N) \\ &= (1 - 2 z_{N1} \omega_{N1}) \cdot s + (2 z_{N1} \omega_{N1} - 1 - \omega_{N1}^2) \cdot N1 + \omega_{N1}^2 \cdot N1_c \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le modèle de synthèse peut alors être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{V}_X = \frac{1}{m} \cdot (F_{X_{MOT}}(N1) + F_{X_T}) \approx \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1} \times N1 + F_{X_T} \\ \dot{N1} = s - N1 \\ \dot{s} = (1 - 2 z_{N1} \omega_{N1}) \cdot s + (2 z_{N1} \omega_{N1} - 1 - \omega_{N1}^2) \cdot N1 + \omega_{N1}^2 \cdot N1_c \end{cases} \quad (3.20)$$

On peut donc en déduire la loi de commande :

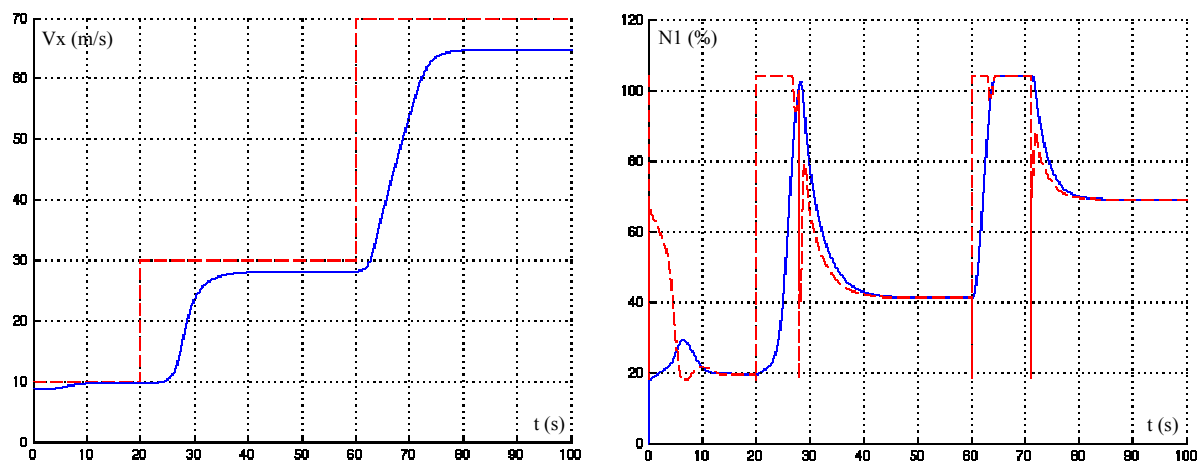
$$N1_c = \alpha_3 \quad (3.21)$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha_1 = F_{X_{MOT}}^{-1} \left( m \cdot \left( \frac{d V_{X_c}}{d t} + \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{X_c} - V_X) \right) - F_{X_T} \right) \\ \alpha_2 = \frac{d \alpha_1}{d t} + N1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1} \times (V_{X_c} - V_X) + \frac{1}{\tau_2} \cdot (\alpha_1 - N1) \\ \alpha_3 = \frac{1}{\omega_{N1}^2} \left( \frac{d \alpha_2}{d t} - (1 - 2 z_{N1} \omega_{N1}) \cdot \dot{N1} + \omega_{N1}^2 \cdot N1 + (\alpha_1 - N1) + \frac{1}{\tau_3} \cdot (\alpha_2 - \dot{N1} - N1) \right) \end{cases} \quad (3.22)$$

Cette loi de commande nécessite de dériver 2 fois la première « sous-commande » ( $\alpha_1$ ) et une fois la seconde ( $\alpha_2$ ). La théorie du Backstepping suppose que ces dérivations sont réalisées de manière continue. Cependant, l'implantation d'une telle loi dans les calculateurs de l'avion conduit à discrétiser ces dérivées successives. Le bon comportement et la stabilité numérique d'une loi de commande aussi complexe ne peut alors plus être garanti. En pratique, la forte imbrication de ces dérivées peut laisser présager d'importantes difficultés de mise au point et de validation. Dans le cas de l'emploi de « Wash-Out », ceux-ci ayant pour effet de filtrer l'action haute fréquence de ces dérivations successives, le résultat final pourra être significativement différent de la théorie.

Une analyse par simulation montre que, si les dérivations sont parfaites et continues, ce type de loi de commande permet d'obtenir un temps de réponse inférieur à ce que permet la commande non linéaire inverse d'ordre 3, comme le montre les figures 3.7 a et b ( $\omega = 0,35$ ). Cependant, si un filtre de type « Wash-Out » est utilisé (ne serait-ce que pour la détermination de la dérivée du N1) les performances obtenues redeviennent alors comparables, voir même inférieures, à celles de la commande non-linéaire inverse.



figures 3.7 a et b : Réponse obtenue pour une commande de type Backstepping d'ordre 3 avec  $\omega = 0,35$  et sans utiliser de filtre « Wash-Out ».

Comme dans le cas précédant, une loi de commande de type backstepping basée sur un modèle d'ordre 3, n'apporte pas non plus satisfaction. Ce type de commande peut potentiellement permettre de réduire le temps de réponse mais il présente des difficultés liées à la réalisation des multiples dérivations, et nécessite de compenser les erreurs statiques pouvant apparaître.

## 2.4. Comparaison avec une loi existante de contrôle de la vitesse

Cette comparaison se base sur le document [Ménard 1998] décrivant le fonctionnement d'une loi « automanette » développée au sein d'Airbus et dénommée « automanette générique » (cf. figure 3.8 et figure 3.9).

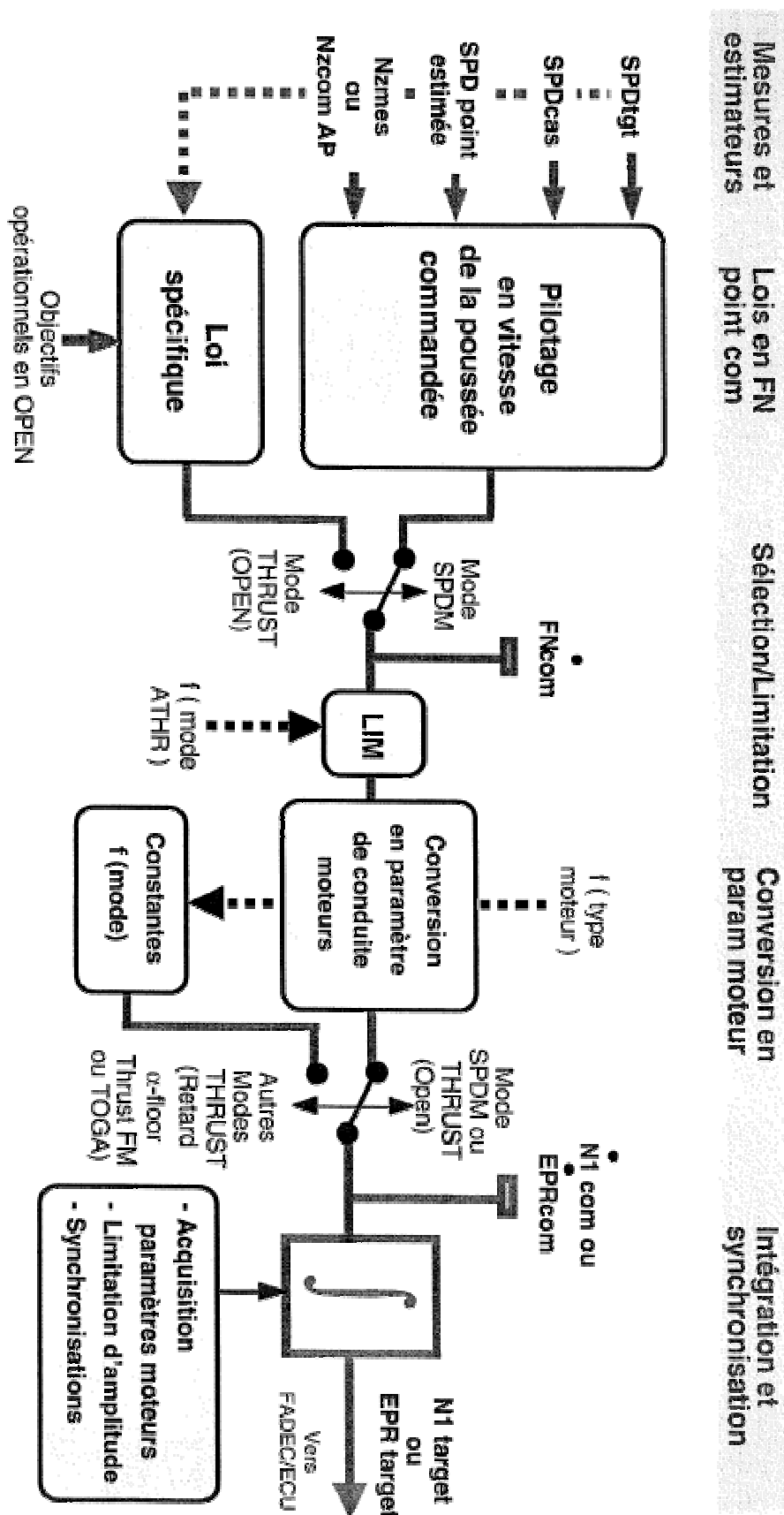


figure 3.8 : Synoptique simplifié de l'automanette générique.

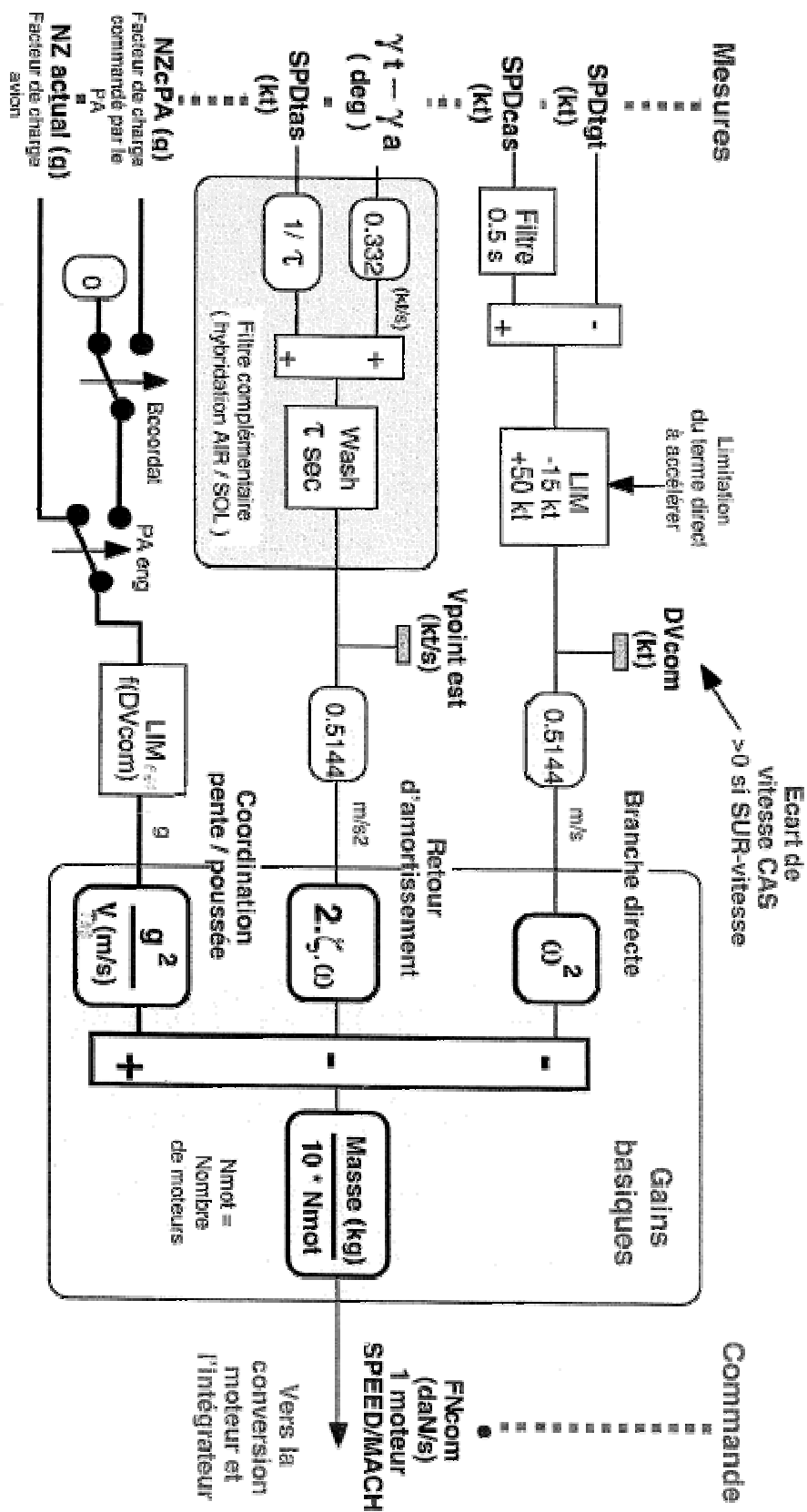


figure 3.9 : Génération de la commande en dérivée de la poussée (Sous fonction de pilotage en vitesse de la poussée commandée).

Le but de cette loi est de contrôler la vitesse de l'avion en vol. Plusieurs éléments spécifiques à ce domaine de fonctionnement impactent directement la définition de la loi de commande. Le principal concerne l'influence de la pente sol. Pour permettre la comparaison avec les travaux présentés ci-dessus, les éléments propres à la coordination pente/poussée ne seront pas pris en compte.

On peut remarquer que cette loi de commande est semblable à une loi de type non-linéaire inverse, utilisant comme commande la dérivée de la poussée. La consigne en  $N1$  est alors obtenue par conversion (inversion du gradient d'efficacité) et intégration de cette dérivée. L'automanette générique est donc proche de la loi de type non-linéaire inverse avec un modèle de synthèse d'ordre 2.

Ces deux lois de commandes sont basées sur l'inversion de la dérivée de l'équation de poussée. Cette inversion permet de calculer une consigne en dérivée de la force générée par les moteurs. Cette consigne est alors convertie en dérivée du  $N1$  en la divisant par le gradient d'efficacité.

Dans le cas de l'automanette générique, cette dérivée du  $N1$  est directement intégrée pour aboutir à une consigne en  $N1$ .

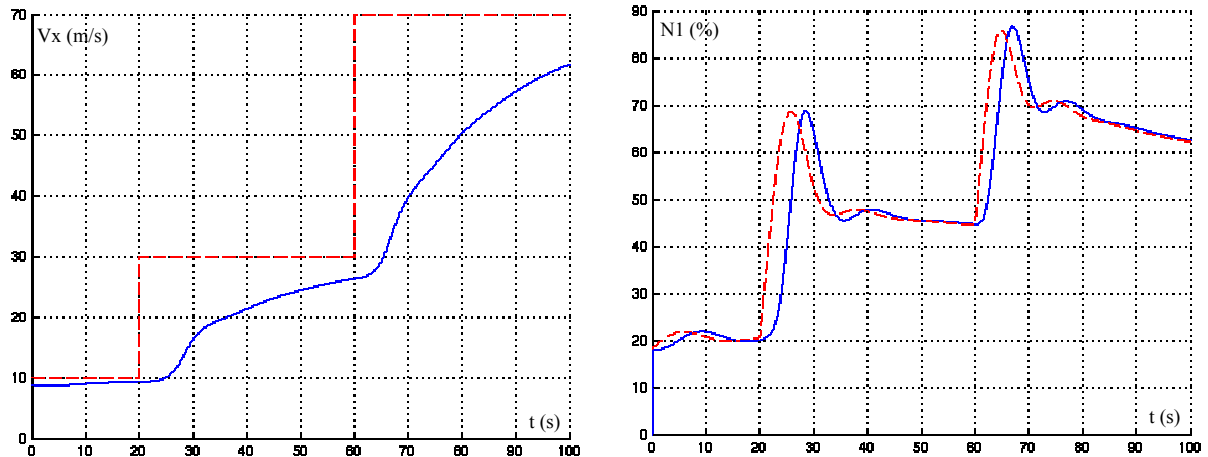
Dans le cas de la commande non-linéaire inverse, le  $N1$  commandé est calculé en inversant la dynamique du moteur (filtre du premier ordre à constante de temps variable) :

$$N1_c = N1 + \tau_{N1} \cdot [\dot{N1}]_c \quad \text{avec,} \quad [\dot{N1}]_c = \frac{m}{\frac{\partial F_{x_{MOT}}}{\partial N1}} \times [\ddot{V}_x]_c \quad (3.23)$$

Cette inversion permet de prendre explicitement en compte dans la synthèse de la commande l'influence de la dynamique de mise en poussée, alors que l'intégrateur utilisé par l'automanette générique néglige cette dynamique en la considérant infiniment rapide.

Des comparaisons entre ces deux types de lois ont été réalisées par simulation, dans le cas du contrôle de la vitesse lors du roulage au sol. La loi de commande correspondant à l'automanette générique a été réalisée en remplaçant, dans la loi de commande non linéaire inverse d'ordre 2, «  $N1_c = N1 + \tau_{N1} \cdot [\dot{N1}]_c$  » par une intégrale de  $[\dot{N1}]_c$ , limitée aux régimes Idle et TOGA. Cette limitation (mise en œuvre sur l'automanette générique implantée sur avion) a pour but de générer des consignes en  $N1$  adaptées aux saturations du régime moteur et d'ainsi éviter de laisser l'intégrateur « diverger » lorsque le moteur est à saturation (effet « anti-windup » vis à vis des saturations en  $N1$ ).

Comme le montre les figures 3.10 a et b, le temps de réponse minimum pouvant être obtenu avec la loi de type automanette générique est nettement supérieur à celui obtenu avec la commande non-linéaire inverse ( $\omega = 0,04$ ) du paragraphe 2.2



figures 3.10 a et b : Réponse obtenue pour une commande de type « automanette générique » avec  $\omega = 0,04$ .

Sur le plan de la robustesse, les lois de commandes de type non linéaire inverse d'ordre 2 et automanette générique semblent relativement similaires, tant que l'asservissement du régime moteur réalisé par le FADEC ne comporte pas d'erreurs statiques et que la mesure du N1 est non biaisée. En effet, dans le cas de la loi de type non linéaire inverse, l'association de la dynamique des moteurs et du sous-ensemble constitué par l'inversion de cette dynamique se comporte comme un intégrateur.

La dynamique des moteurs est modélisée par la relation :

$$N1 = \int \frac{1}{\tau_{N1}} \cdot (N1_c - N1) dt \quad (3.24)$$

$$\text{d'où, } N1 = \int [\dot{N1}]_c dt \quad (3.25)$$

Les écarts entre la dynamique réelle de mise en poussée et sa modélisation modifient la réponse transitoire du système mais ne modifient pas les capacités de la loi à annuler d'éventuelles erreurs statiques.

## 2.5. Bilan de l'étude relative au contrôle de la poussée

Cette première étude a permis d'évaluer un ensemble de solutions techniques permettant de réaliser une première loi de contrôle de la poussée délivrée par les moteurs. Un résumé de ces résultats est présenté dans le tableau de la figure 3.11 et est illustré par les courbes de la figure 3.12.

Il ressort de cette étude que les deux solutions semblant les plus intéressantes sont les commandes non-linéaire inverses basées sur des modèles de synthèse du deuxième et du troisième ordre. Le choix entre ces deux lois doit être fait sur la base des besoins à satisfaire, en terme de temps de réponse. Si les performances de la commande du deuxième ordre restent acceptables, il sera préférable de choisir cette loi qui est nettement plus simple et dont les données d'entrée sont mieux maîtrisées.

Cette étude a aussi permis de montrer que, dans le cas de cette application, la technique du backstepping ne permet pas d'aboutir à des améliorations significatives, alors qu'elle pose des problèmes de complexité, de précision et d'implantation de la loi dans les calculateurs.

|                                         | Complexité      | Performance                 | Précision              | Points particuliers                                                                                                                   |
|-----------------------------------------|-----------------|-----------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Commande non linéaire inverse d'ordre 2 | réduite         | très bonne ( $\omega=0,2$ ) | assurée (si N1 précis) | Non prise en compte de l'effet de déphasage dû aux moteurs                                                                            |
| Commande non linéaire inverse d'ordre 3 | importante      | excellente ( $w=0,3$ )      | assurée (si N1 précis) | Nécessite la détermination de la dérivée du N1 et de l'accélération                                                                   |
| Commande par Backstepping d'ordre 2     | importante      | très bonne ( $w=0,25$ )     | non assurée            | N'apportent pas de plus value, posent des problèmes vis à vis de la discrétisation de la loi et nécessite l'ajout d'un terme intégral |
| Commande par Backstepping d'ordre 3     | très importante | excellente ( $w=0,35$ )     | non assurée            |                                                                                                                                       |
| Commande de type auto manette           | réduite         | faible ( $w=0,05$ )         | assurée                | Très sensible à l'impact des saturations                                                                                              |

figure 3.11 : Tableau récapitulatif des résultats obtenus sur la commande de la poussée.

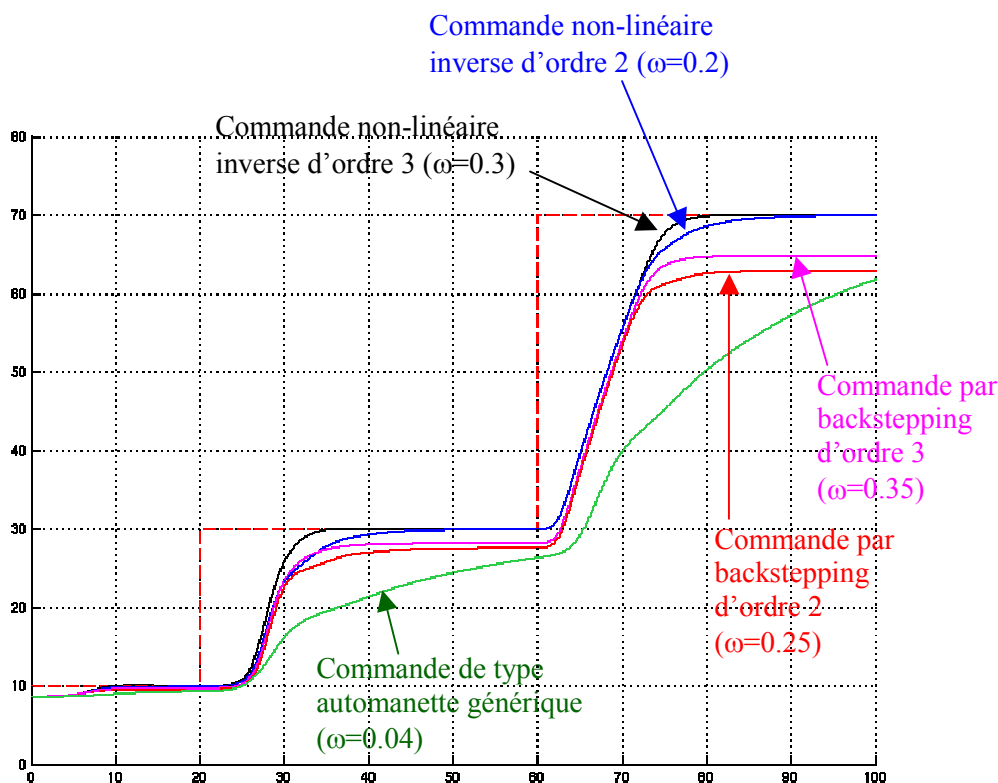


figure 3.12 : Superposition des réponses obtenues avec les différentes lois de commande.

### 3. Utilisation du système de freinage

On cherche maintenant à piloter la vitesse de l'avion en commandant le couple de freinage. Comme précédemment, cette partie débutera par une description succincte de la modélisation du système de freinage, servant de référence à l'étude. Ensuite, elle se poursuivra par une présentation des travaux réalisés sur la synthèse de cette loi de commande.

#### 3.1. Modèle de référence

Le système de freinage peut être divisée en cinq sous-ensembles (figure 3.13) :

- Les pneumatiques
- La dynamique des roues
- Les disques de frein : modélisation quasi-statique du gain de frein
- Le système hydraulique servovalves/pistons
- La logique de commande du système : asservissement en pression et filtre anti-skid

Le modèle de référence utilisé pour cette étude (que nous ne détaillerons pas ici) regroupe ces éléments pour former un ensemble du troisième ordre (dynamique des roues et du système hydraulique).

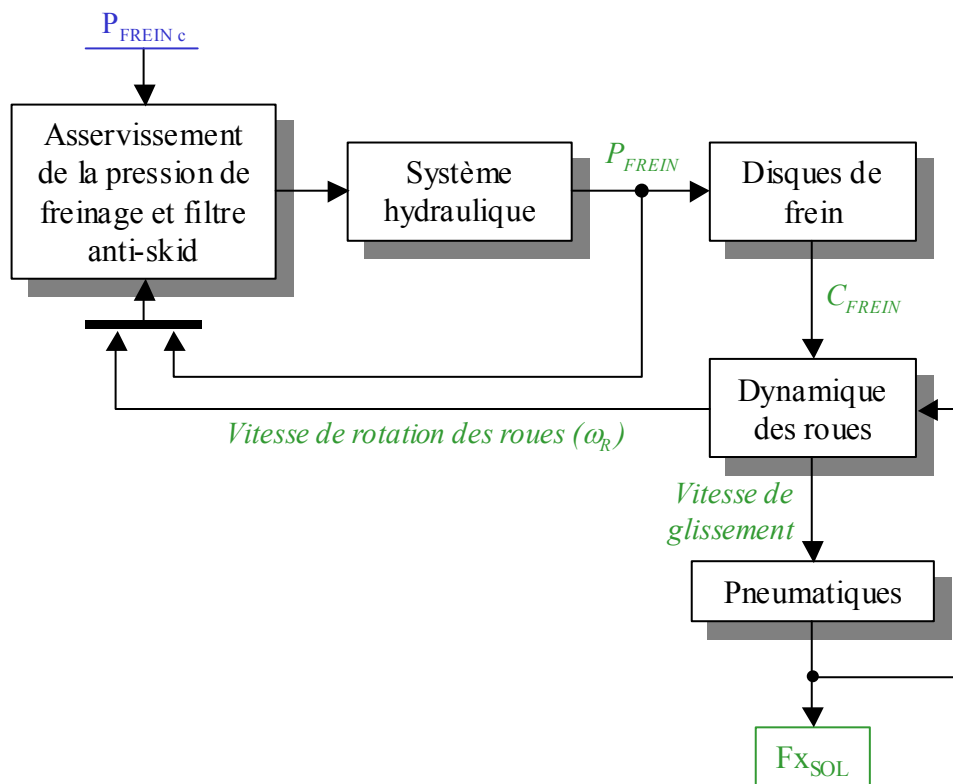


figure 3.13 : Représentation schématique de la modélisation du système de freinage.

La dynamique des roues étant extrêmement rapide, sa simulation nécessite l'utilisation d'un pas de simulation très court (de 1 à 0,1 ms) et donc d'importants temps de calcul. De ce fait, la plupart des résultats présentés dans ce document ont été obtenus à l'aide d'un modèle négligeant cette dynamique (simulation à 10ms). Le filtre anti-skid n'a donc pu être reproduit fidèlement (détection de départ au blocage des roues) mais son impact sur le freinage a été simulé de sorte à limiter la vitesse de glissement à une vitesse proche de sa valeur optimale.

Comme dans le cas précédent, du fait de la présence de fortes incertitudes de modélisation, les différents modèles de synthèse utilisés diffèrent légèrement du modèle de simulation. Ces écarts entre le modèle de simulation et le modèle de synthèse permettront de faire apparaître des problèmes liés à la robustesse des différents algorithmes de commande testés. Ces écarts concernent principalement l'efficacité des freins ( $G_{\text{FREIN}}$ ) dont la valeur spécifiée peut varier de plus ou moins 20%. Les modèles de synthèse utilisés considèrent le cas où le gain de frein est de 30% supérieure à celle du modèle de simulation (cas le plus contraignant).

## 3.2. Synthèse de la commande

La dynamique du système de freinage étant beaucoup plus rapide que celle des moteurs, elle peut être réduite ou négligée dans le modèle de synthèse, sans générer d'approximations significatives.

### 3.2.1. Synthèse de la commande négligeant la dynamique de freinage

Si la dynamique du système de freinage n'est pas prise en compte dans le modèle de synthèse, la dynamique longitudinale de l'avion au sol se résume à l'équation de poussée :

$$m \dot{V}_x = F_{x_{\text{SOL}}} (P_{\text{FREIN}_c}) + F_{x_{\text{MOT}}} + F_{x_{\text{AERO}}} \quad (3.26)$$

$$\text{avec : } F_{x_{\text{SOL}}} = \frac{n_R}{R_R} \cdot C_{\text{FREIN}_c} = \frac{n_R \cdot G_{\text{FREIN}}}{R_R} \cdot P_{\text{FREIN}_c} \quad (3.27)$$

$P_{\text{FREIN}_c}$  est la consigne en pression de freinage,  $R_R$  le rayon d'une roue et  $n_R$  le nombre de roues freinées. Le Couple de freinage ( $C_{\text{FREIN}}$ ) est considéré comme proportionnel à la pression appliquée dans les freins, via la définition d'un gradient d'efficacité :  $G_{\text{FREIN}}$ .

L'application du principe de la commande non linéaire inverse permet d'obtenir la loi de commande (commande d'ordre 1) :

$$P_{\text{FREIN}_c} = F_{x_{\text{SOL}}}^{-1}(F_{x_{\text{SOL}_c}}) = \frac{R_R \cdot F_{x_{\text{SOL}_c}}}{n_R \cdot G_{\text{FREIN}}} \quad (3.28)$$

$$\text{avec, } F_{x_{\text{SOL}_c}} = m [\dot{V}_x]_c - F_{x_{\text{MOT}}} - F_{x_{\text{AERO}}} \quad (3.29)$$

$$\text{et, } [\dot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) \quad (3.30)$$

Par souci de simplicité, la loi de commande mise en œuvre pour l'étude est une forme simplifiée de celle présentée précédemment. L'impact des efforts aérodynamiques et de la poussée délivrée par les moteurs y est négligé :

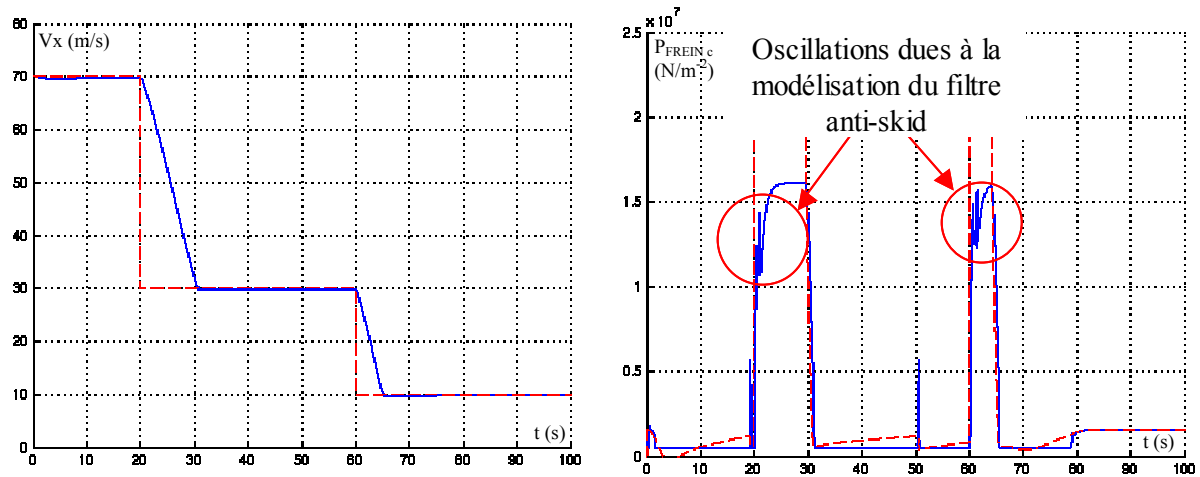
$$F_{x_{\text{MOT}}} = F_{x_{\text{AERO}}} = 0 \quad (3.31)$$

Deux exemples de simulation sont présentés dans ce document. Un premier présente un cas de freinage important, avec utilisation d'anti-skid. Un second présente une variation de vitesse plus réduite permettant d'évaluer la loi pour des sollicitations de faible amplitude.

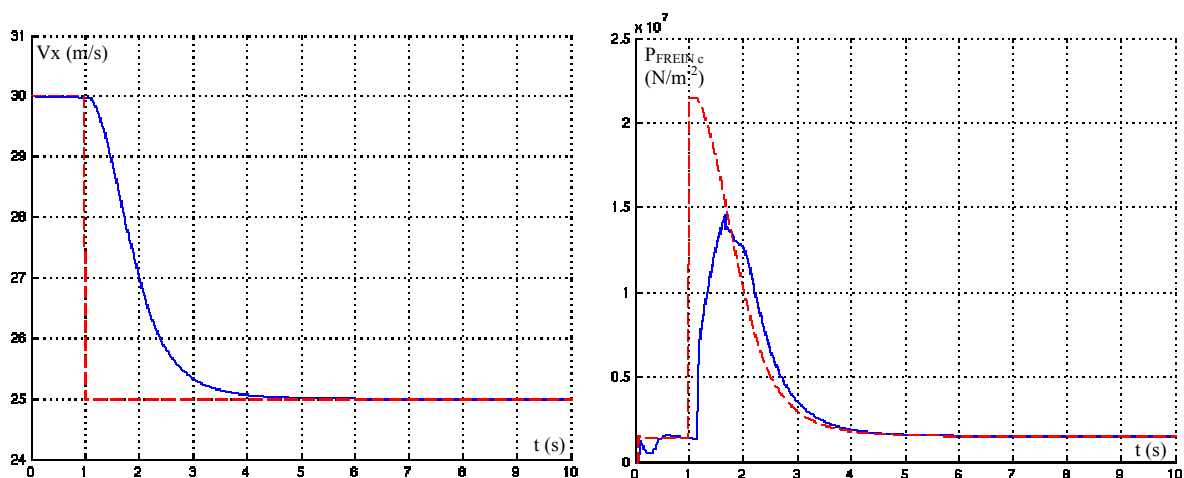
Comme dans le cas du contrôle de la poussée, les résultats présentés correspondent à des réglages de lois minimisant le temps de réponse. Ces réglages sont réalisés de sorte à avoir :

$$\frac{1}{\tau_1} = \omega. \quad (\omega \text{ est une constante positive servant au réglage de la loi.}) \quad (3.32)$$

Les figures 3.14 a et b et 3.15 a et b montrent un exemple d'utilisation de la loi de commande dans ces deux cas. Le régime moteur (N1) y est commandé de manière à atteindre la poussée d'équilibre correspondant à la vitesse de consigne.



figures 3.14 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre avec  $\omega = 1$  et un régime moteur adapté à la consigne en vitesse.

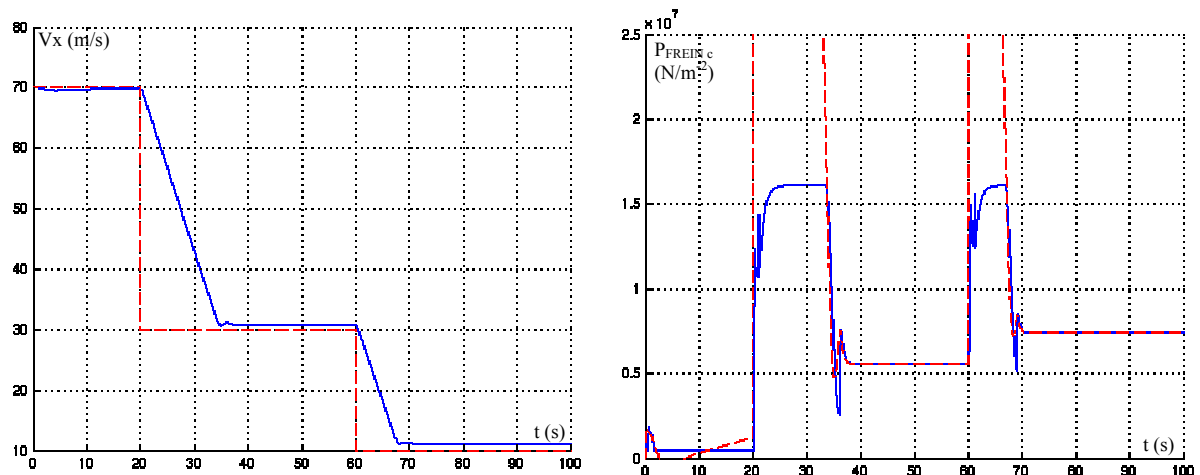


figures 3.15 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre avec  $\omega = 1$  et un régime moteur adapté à la consigne en vitesse.

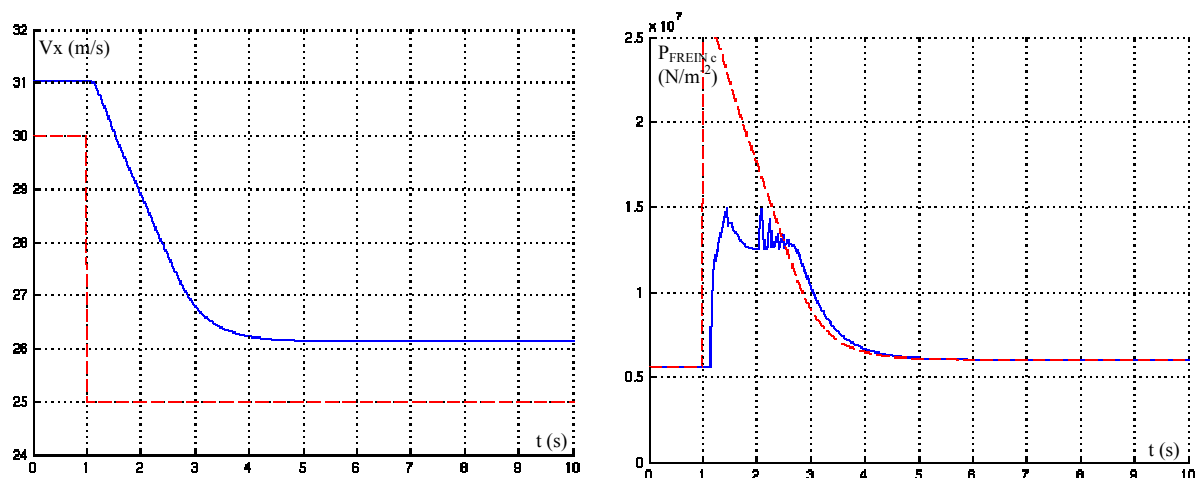
Comme le montre ces résultats, bien que cette loi de commande soit très simple, elle permet déjà d'atteindre un très bon niveau de performance. Par contre, contrairement aux cas précédents, ce type de loi de commande ne comporte pas d'asservissement de la décélération (retour en  $\dot{V}_x$ ) et donc, ne permet pas le contrôle direct de cette dernière. L'utilisation d'une telle loi implique donc de limiter son domaine d'application au contrôle de la vitesse (cf. le paragraphe 1.1).

Dans un deuxième temps, le régime moteur est maintenu à une valeur constante de 72 % de  $N_1$  (correspondant à sa valeur d'équilibre à 70m/s), introduisant ainsi un biais significatif entre le modèle de simulation et le modèle de synthèse. Ce biais a pour but de tester le comportement de la loi dans de telles conditions (écarts entre ces deux modèles) et ainsi de réaliser une évaluation partielle de la robustesse obtenue.

Les tracés des figures 3.16 a et b et 3.17 a et b présente un exemple de résultats.



figures 3.16 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre ( $\omega = 1$  et  $N_1 = 72\%$ ).



figures 3.17 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre ( $\omega = 1$  et  $N_1 = 72\%$ ).

L'apparition d'erreurs statiques (générées par ces biais de forte amplitude) permet de mettre en évidence les limites de ce type de lois sur le plan de la robustesse. En effet, seul l'asservissement « proportionnel » en vitesse permet de compenser d'éventuelles perturbations ou erreurs de modélisation. On peut aussi ajouter que ces erreurs peuvent être importantes, notamment du fait de la méconnaissance du « gain de frein » ( $G_{FREIN}$ ) qui peut fortement varier (de l'ordre de  $\pm 20\%$  pour deux freins de même type, neufs et dans des conditions identiques).

Il peut donc s'avérer nécessaire, dans le cas de l'utilisation d'une telle loi, d'y associer un correcteur intégral.

$$[\dot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) + \frac{1}{\tau_0} \cdot \int (V_{x_c} - V_x) d\tau \quad (3.33)$$

Du fait de la présence de saturations, ce correcteur ne peut être utilisé tel quel. Il est indispensable d'y associer un dispositif le protégeant des effets de ces limitations des capacités de l'avion. Ce dispositif doit, entre autre, permettre d'empêcher l'intégrateur de se « charger » lorsque les actionneursaturent. Par abus de langage, dans ce document, il sera assimilé à un dispositif « anti-windup ».

Dans le cadre de cette application, la mise en saturation concerne le système de freinage et est liée à :

- une pression de freinage commandée nulle ou supérieure ou égale à sa valeur maximum,
- la mise en marche du filtre « anti-skid » (système d'anti-patinage).

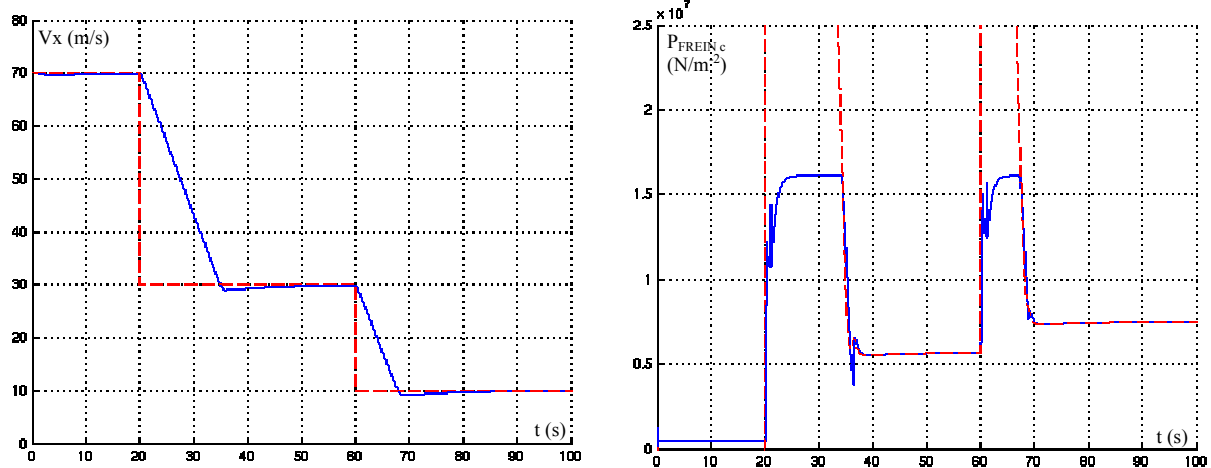
Ces deux cas de mise en saturation sont donc détectables et ainsi, un tel dispositif peut être réalisé en annulant, en cas de saturation, toute entrée de l'intégrateur de signe identiques à celui de la sortie.

Les figures 3.18 a et b et 3.19 a et b présentent un exemple de résultats de simulation obtenus avec ce type de commande.

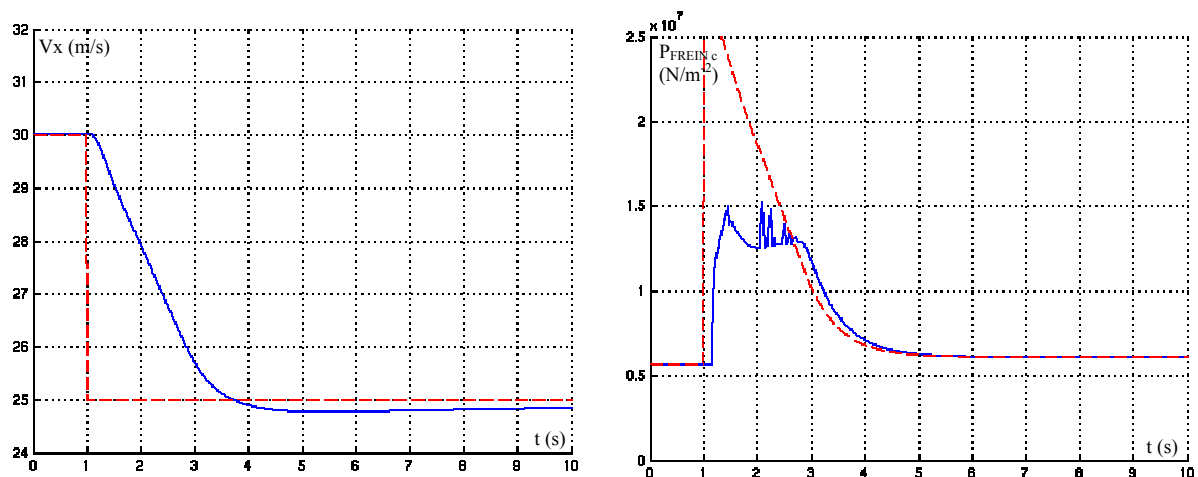
Les erreurs statiques sont bien annulées. Cependant, l'impact des saturations n'est pas entièrement gommé et continue à générer des dépassements de consigne. Pour limiter ces dépassements le correcteur intégral ne doit avoir qu'un faible impact sur les phases transitoires. Pour ces simulations, le réglage utilisé correspond à :

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\omega}{10} \quad (3.34)$$

Pour faciliter la comparaison des résultats obtenus avec les différentes lois, l'ensemble des tracés présentés dans la suite de cette partie sera obtenu à l'aide de simulations utilisant un régime moteur constant de 72 % de  $N1$ .



figures 3.18 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre associée à un correcteur intégral et à un dispositif anti-windup ( $\omega = 1$  et  $N1 = 72\%$ ).



figures 3.19 a et b : Réponse obtenue pour une commande du 1<sup>er</sup> ordre associée à un correcteur intégral et à un dispositif anit-windup ( $\omega = 1$  et  $N1 = 72\%$ ).

### 3.2.2. Commande en dérivée de la force de freinage

Une solution pour permettre une prise en compte explicite de l'accélération de l'avion consiste à se ramener à un modèle de synthèse d'un degré relatif de 2. Ceci peut être réalisé en utilisant une architecture similaire à celle de la loi de type automanette (présentée dans la partie consacrée au contrôle de la poussée motrice). On considère alors la dérivée de la force de freinage comme la variable de commande et on obtient la consigne finale par intégration de cette dérivée.

La loi de commande qui en résulte s'écrit :

$$P_{\text{FREIN}_c} = F_{X_{\text{SOL}}}^{-1}(F_{X_{\text{SOL}_c}}) \quad (3.35)$$

$$\text{avec, } F_{X_{\text{SOL}_c}} = \int [\dot{F}_{X_{\text{SOL}}}]_c dt \quad ; \quad [\dot{F}_{X_{\text{SOL}}}]_c = m [\ddot{V}_X]_c - \frac{\partial F_{X_{\text{MOT}}}}{\partial N1} \times \dot{N1} \quad (3.36)$$

$$\text{et, } [\ddot{V}_X]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{X_c} - V_X) - \dot{V}_X \right) \quad (3.37)$$

$$\text{On considère pour les simulations : } \frac{1}{\tau_2} = 4 \cdot \omega. \quad (3.38)$$

Pour ne pas avoir à mesurer la dérivée du N1, on pourra soit négliger ce terme, soit le remplacer par sa valeur calculée sur la base du modèle du 1<sup>er</sup> ordre :

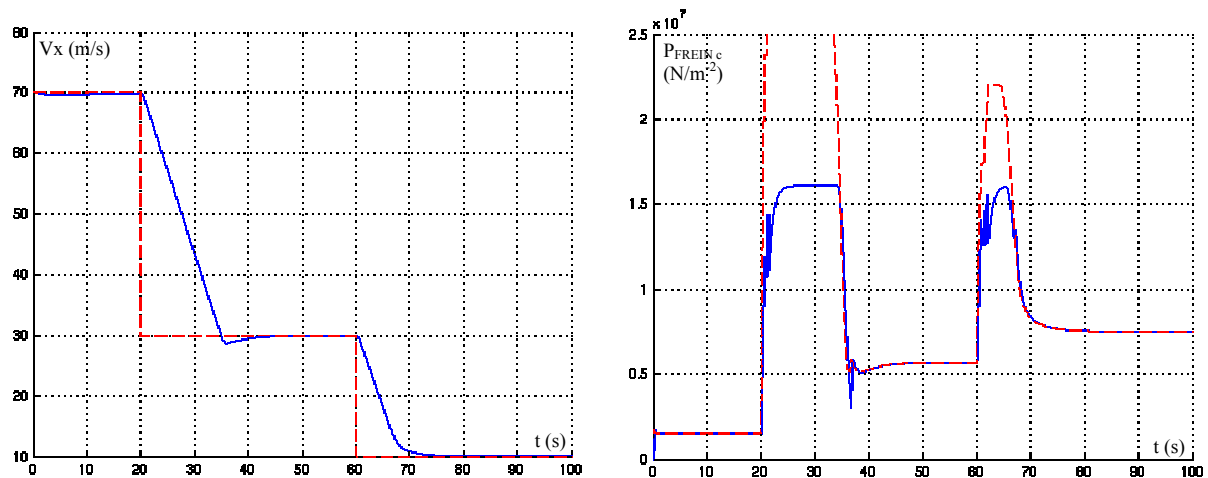
$$\dot{N1} = \frac{1}{\tau_{N1}} \cdot (N1_c - N1) \quad \text{avec, en phase de freinage, } N1_c = \text{Idle}. \quad (3.39)$$

Comme dans le cas précédent, du fait des saturations, l'intégrateur ne peut être utilisé tel quel et nécessite l'ajout d'un dispositif anti-windup. Ce dispositif pourra être mis au point sur le même principe.

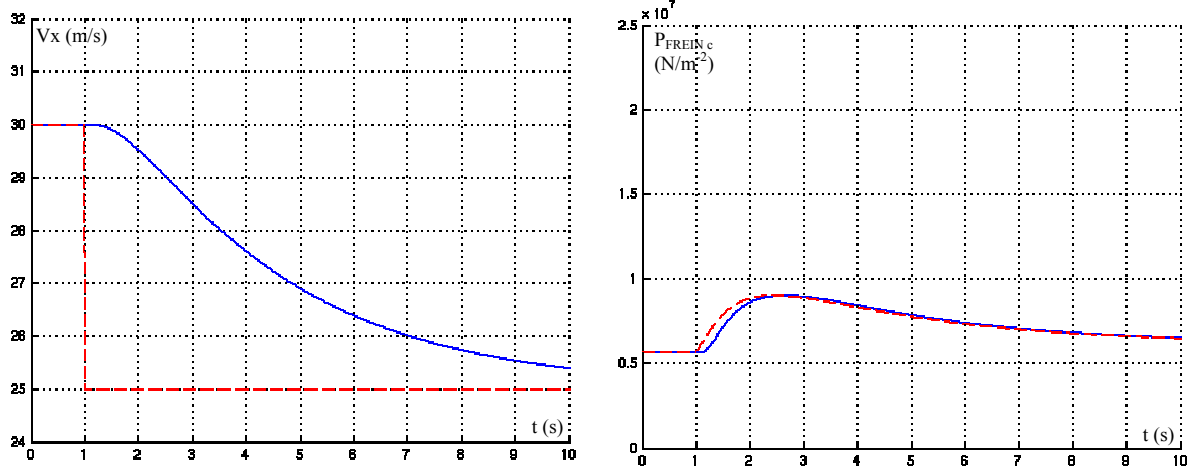
Du fait de l'intégration de la commande en dérivée de la force de freinage, cette loi résout les problèmes de robustesse évoqués précédemment, annulant toute erreur statique. Elle permet aussi de prendre explicitement en compte l'accélération de l'avion et ainsi, de réaliser, le cas échéant, une loi de pilotage de l'accélération de l'avion au sol.

Cependant, comme le montre les figures 3.20 a et b et 3.21 a et b, cette loi est nettement moins performante, ne permettant qu'un réglage maximum de  $\omega$  à 0,25.

Cette restriction significative des capacités de la commande est directement liée aux problèmes apparus lors du réglage du correcteur intégral précédemment décrit. De manière équivalente, l'action de l'intégrateur doit rester cantonnée à une certaine gamme de fréquence. La principale différence repose sur le fait qu'ici, l'intégrateur influence toute la loi de commande et non un unique correcteur indépendant et dont le rôle est restreint.



figures 3.20 a et b : Réponse obtenue pour une commande en dérivée de la force de freinage, avec  $\omega = 0,25$  et  $N1 = 72 \%$ .



figures 3.21 a et b : Réponse obtenue pour une commande en dérivée de la force de freinage, avec  $\omega = 0,25$  et  $N1 = 72 \%$ .

### 3.2.3. Réduction de la dynamique de freinage à un premier ordre

La synthèse d'une commande utilisant un modèle de la dynamique de freinage réduit à un premier ordre permet de conserver les caractéristiques de robustesse obtenues précédemment, tout en évitant les contraintes liées à la présence des saturations (limitation des performances de la loi).

Pour obtenir cette réduction du modèle de synthèse, on néglige la dynamique des roues (très rapide) et la dynamique du système hydraulique. Seule la dynamique de l'asservissement de freinage est prise en compte. Le modèle se réduit alors à :

$$\dot{P}_{FREIN} = K_{FREIN} (P_{FREIN_c} - P_{FREIN}) \quad (3.40)$$

$K_{FREIN}$  est le gain de l'asservissement en pression de freinage.

En appliquant le principe de la commande non-linéaire inverse à ce nouveau modèle de synthèse, on obtient alors une loi de commande d'ordre 2 qui s'écrit :

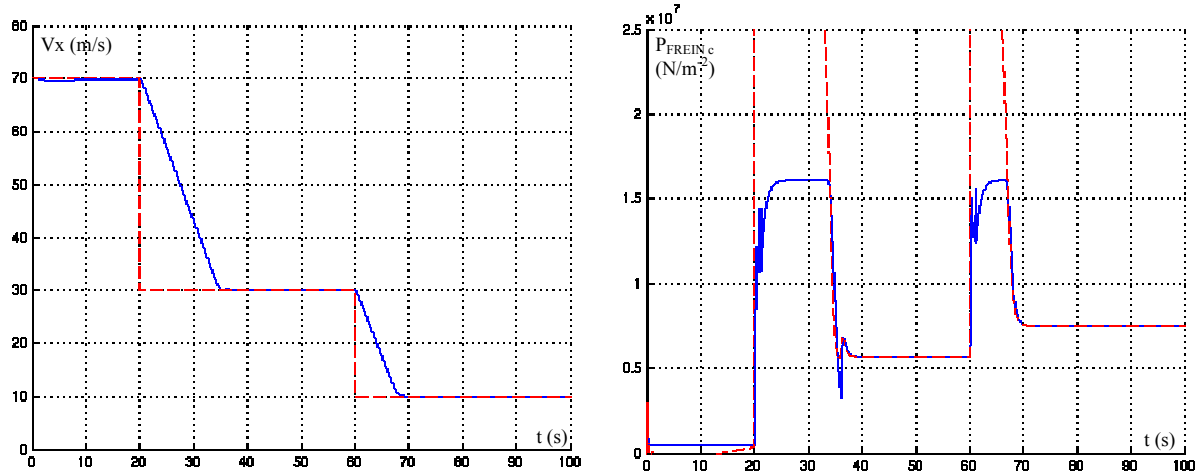
$$P_{FREIN_c} = P_{FREIN} + \frac{[\dot{P}_{FREIN}]_c}{K_{FREIN}} \quad (3.41)$$

$$\text{avec, } [\dot{P}_{FREIN}]_c = \frac{R_R \cdot [\dot{F}_{X_{SOL}}]_c}{n_R \cdot G_{FREIN}} ; \quad [\dot{F}_{X_{SOL}}]_c = m [\ddot{V}_X]_c - \frac{\partial F_{X_{MOT}}}{\partial N1} \times \dot{N1} \quad (3.42)$$

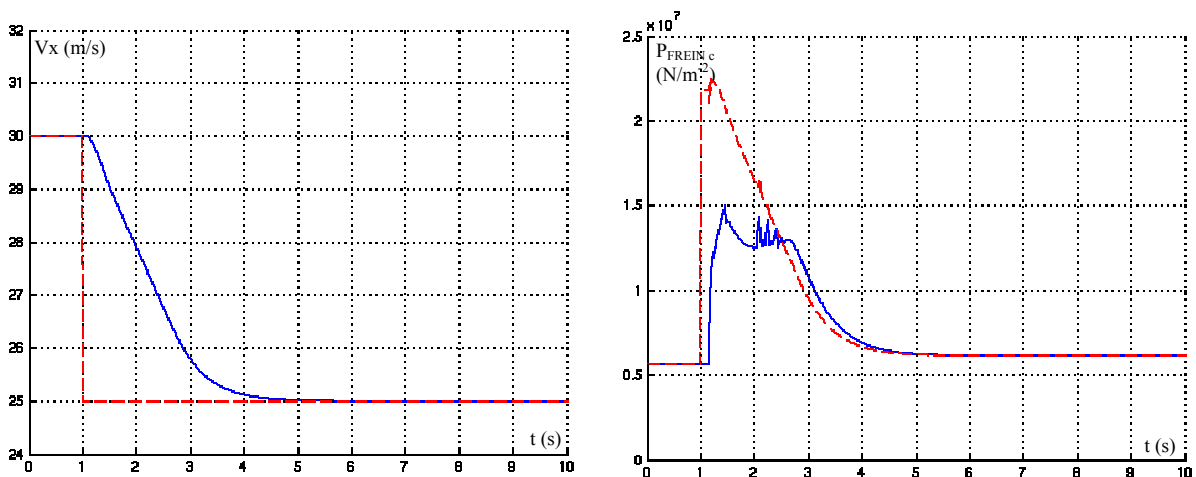
$$\text{et, } [\ddot{V}_X]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{X_c} - V_X) - \dot{V}_X \right) \quad (3.43)$$

Comme précédemment, pour ne pas avoir à mesurer la dérivée du  $N1$ , on pourra, soit négliger ce terme, soit le remplacer par la modélisation du 1<sup>er</sup> ordre de la dynamique des moteurs.

Deux exemples de simulations réalisés avec cette loi de commande sont présentés figures 3.22 a et b et 3.23 a et b.



figures 3.22 a et b : Réponse obtenue pour une commande d'ordre 2 ( $\omega = 1,2$  et  $N1 = 72 \%$ ).



figures 3.23 a et b : Réponse obtenue pour une commande d'ordre 2 ( $\omega = 1,2$  et  $N1 = 72 \%$ ).

Ces exemples permettent de constater qu'un tel type de loi permet d'assurer la précision du résultat, tout en obtenant des temps de réponses très réduits, utilisant les capacités du système à un niveau proche des limites autorisées par les saturations. Tant que l'asservissement en pression et que la mesure de cette même pression ne comportent pas de biais, l'ensemble formé du système de freinage et de l'inversion de sa dynamique conservera les propriétés de robustesse d'un intégrateur, sans pour autant en avoir les inconvénients vis à vis des saturations.

Cette loi de commande prend aussi explicitement en compte l'accélération effective de l'avion et donc permet un contrôle de la dite accélération.

### 3.2.4. Utilisation d'un modèle du système de freinage d'ordre 2

Il pourrait aussi être envisagé, pour la synthèse de loi, d'utiliser une modélisation du système de freinage à l'ordre 2 (dynamique du système hydraulique couplé à l'asservissement du freinage). Une telle commande pourrait permettre de réduire le temps de réponse minimum pouvant être obtenu. Cependant, cette commande nécessite la détermination de la dérivée de la pression appliquée dans les freins. Etant donné les aspects hautes fréquences qui y sont associés, l'utilisation de filtres de type « wash-out » n'est pas envisageable. La seule solution utilisable à l'heure actuelle serait de reconstituer cette dérivée à partir de la mesure du courant de commande du système hydraulique (ISV) : lui-même directement lié au débit hydraulique et donc, aux variations de pression (cf. le descriptif du système de freinage résumé au paragraphe 3.1).

De plus, les dynamiques mises en jeu étant ici très rapides, l'influence des « retards » liés au fonctionnement discret des calculateurs devient non-négligeable et limite fortement les gains qu'une telle loi de commande pourrait permettre d'envisager.

En regard de la complexité d'un tel dispositif et vu les résultats déjà satisfaisants, obtenus précédemment, cette solution n'a pas été explorée plus avant.

### 3.3. Comparaison avec des fonctions de contrôle de la décélération à l'atterrissage (« l'Autobrake » d'Airbus)

Comme le présente la figure 3.27, la fonction autobrake (A/B) utilisée sur Airbus est basée sur un correcteur non-linéaire complexe associant plusieurs filtres et saturations. Cette structure de correcteur permet de moduler l'action de la loi suivant l'amplitude et la fréquence des sollicitations.

Cette architecture de commande étant complexe et très différente de celles étudiées dans cette note, une comparaison entre ces lois, sur un plan théorique, ne peut être aisément menée. On se contentera donc de présenter des exemples où la commande d'ordre 2 est utilisée pour contrôler la décélération de l'avion, et on comparera alors les résultats obtenus avec les critères de spécification de la loi autobrake de l'A320.

Ces critères peuvent être résumés selon les points suivants :

- Le système doit être réalisé de sorte à minimiser les variations de décélération, et ses fréquences propres doivent être le plus éloignées possible de celles du train d'atterrissage et du système de freinage.
- Le système ne doit considérer que la décélération globale.
- La décélération obtenue en régime stabilisé ne doit pas s'écarter de la consigne de plus de 3 %.
- Le système ne doit pas générer de dépassements de la consigne de plus de 3 %.
- Hors anti-skid, dans le cas de variations rapides de la poussée reverse et de l'adhérence du sol (entre 0.8 et 0.1), les variations transitoires de la décélération doivent rester inférieures à 10 % de la consigne durant moins de 500ms.
- Le temps de réponse doit être tel que la variation de décélération ne doit pas excéder  $1,2 \text{ m/s}^3$  pour les modes « LOW » et « MED ».

Pour permettre la rejointe et le suivi de la consigne de décélération, la loi de commande d'ordre 2 est modifiée de sorte à intégrer cette consigne. Elle s'écrit alors :

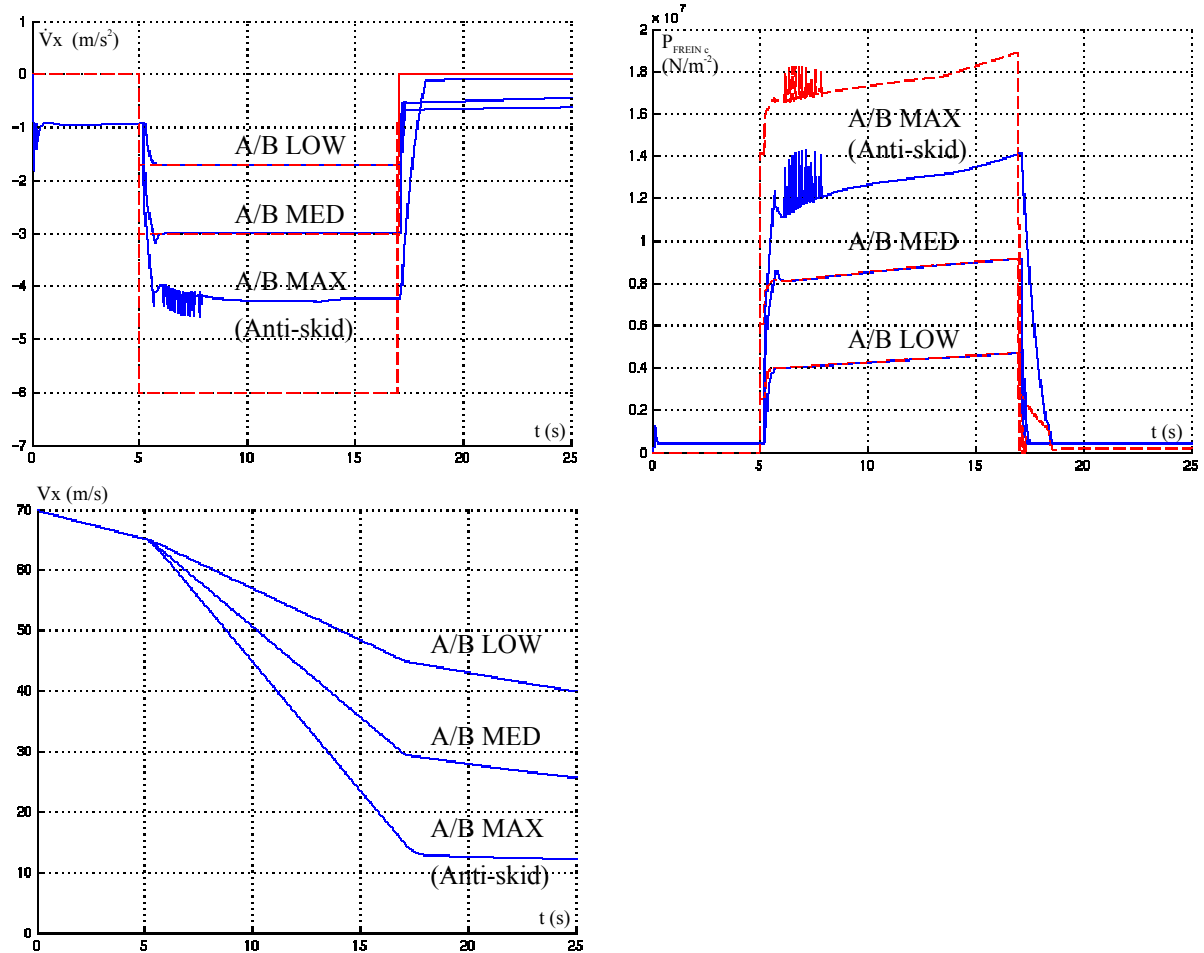
$$P_{\text{FREIN}_c} = P_{\text{FREIN}} + \frac{\dot{P}_{\text{FREIN}}]_c}{K_{\text{FREIN}}} \quad (3.44)$$

$$\text{avec, } [\dot{P}_{\text{FREIN}}]_c = \frac{R_R \cdot [\dot{F}_{X_{\text{SOL}}}]_c}{n_R \cdot G_{\text{FREIN}}} ; \quad [\dot{F}_{X_{\text{SOL}}}]_c = m [\ddot{V}_X]_c - \frac{\partial F_{X_{\text{MOT}}}}{\partial N1} \times \dot{N1} \quad (3.45)$$

$$\text{et, } [\ddot{V}_X]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot ([\dot{V}_X]_c - \dot{V}_X) \quad (3.46)$$

$[\dot{V}_X]_c$  est la consigne de décélération.

Dans l'exemple des figures 3.24 a, b et c, on sollicite la loi avec des échelons de commande correspondant aux niveaux de décélération de l'autobrake de l'A320 : « A/B LOW » (1,7 m/s<sup>2</sup>), « A/B MED » (3 m/s<sup>2</sup>) et « A/B MAX » (6 m/s<sup>2</sup> limité par l'anti-skid). Le réglage de la loi est conservé identique à celui utiliser pour le contrôle la vitesse ( $\omega=1,2$ ).



figures 3.24 a, b et c : Réponse obtenue avec une commande d'ordre 2, pour des échelons de décélération aux niveaux « LOW », « MED » et « MAX ».

Ces tracés permettent de constater que, sans même avoir à modifier le réglage des gains, cette loi de commande permet d'obtenir des performances remarquables, avec un temps de réponse inférieur à 0,6 secondes. On peut aussi remarquer qu'elle ne pose aucun problème de précision (tant que la mesure et l'asservissement de la pression de freinage ne sont pas biaisées).

En réalisant un agrandissement des figures 3.24 a et b, on peut constater que la réponse obtenue est significativement influencée par la modélisation du comportement « hardware » des calculateurs (cf. figure 3.25). Les variables représentées correspondent aux variables acquises et émises par le calculateur des commandes de vol.

Dans le modèle utilisé pour la simulation, le transfert des données entre le calculateur des commandes de vol, le calculateur réalisant l'asservissement de freinage et le système de freinage est de 120 ms. Comme le montre la figure, ce retard pur intervient pour environ 20 % du temps de réponse global. De même, l'impact de la fréquence de calcul (de 40 ms dans le modèle) sur la consigne de freinage est directement visible. Pour affiner ces résultats, il est donc indispensable de s'assurer de la représentativité de la modélisation « hardware » de l'architecture avionique mise en oeuvre.

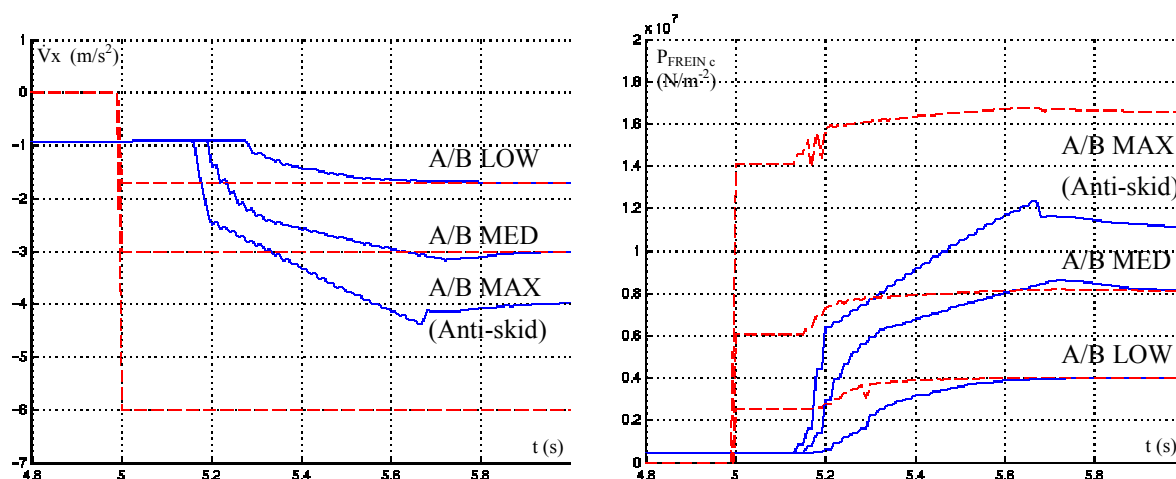


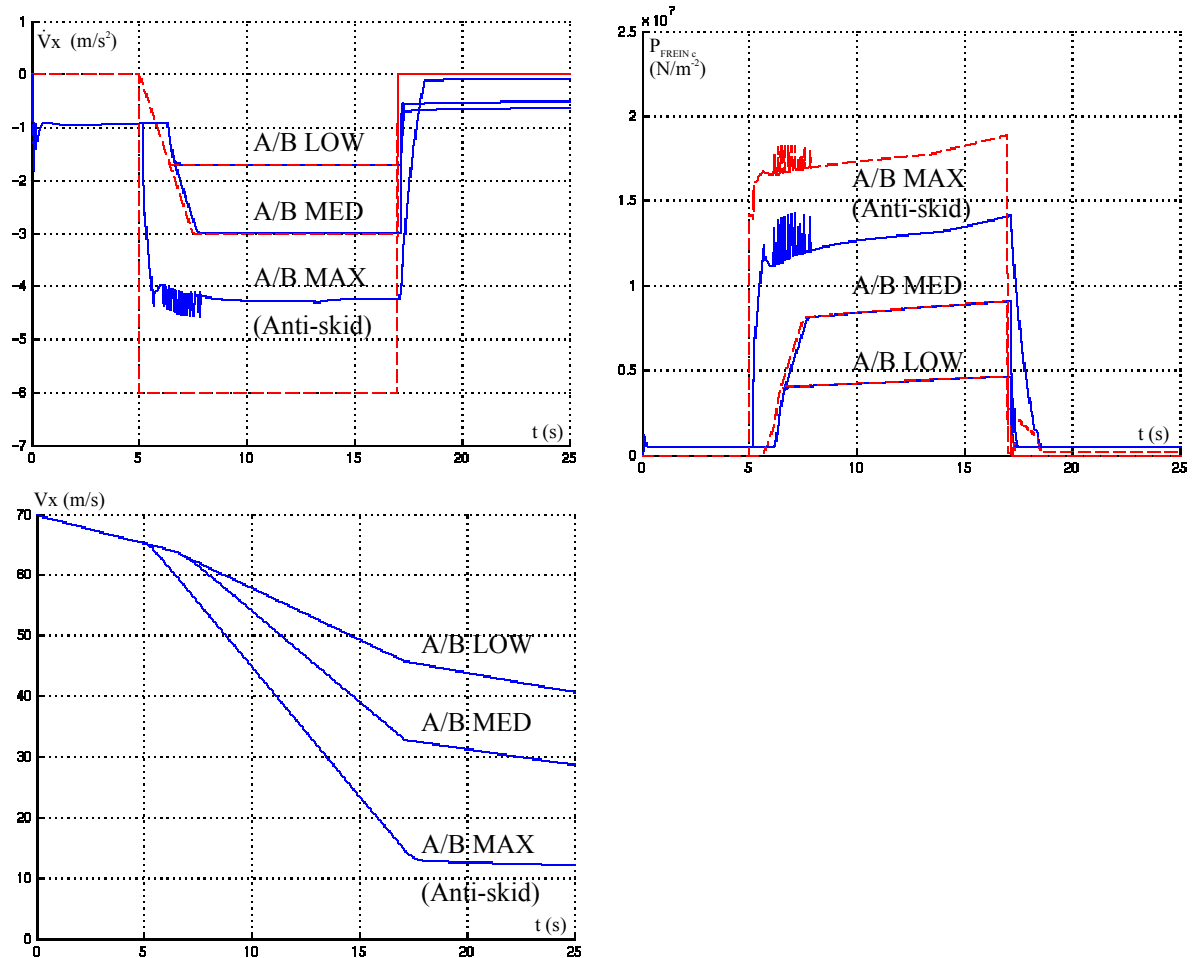
figure 3.25 : Agrandissement des figures 3.24 a et b.

Pour être plus représentatif du comportement de l'autobrake, il est nécessaire de limiter les variations de la consigne de décélération à  $1,2 \text{ m/s}^3$ , pour les niveaux « LOW » et « MED ». Les résultats alors obtenus sont présentés sur les figures 3.26 a, b et c.

Le principal écart entre les consignes A/B et le taux de décélération réellement obtenu est principalement dû au retard pur lié au fonctionnement des calculateurs.

Comme le montre ces résultats, ce type de loi devrait pouvoir aisément permettre de satisfaire les exigences de spécification de l'autobrake en ce qui concerne le suivi de la consigne de décélération. En modifiant le réglage de la loi, il est aussi possible d'en adapter la plage de fréquence et ainsi de satisfaire l'objectif de découplage fréquentiel avec les dynamiques du train et du système de freinage.

La seule exigence encore non satisfaite ici implique de n'utiliser que la mesure de la décélération globale en entrée alors que la loi de commande d'ordre 2 nécessite aussi l'acquisition de la pression de freinage courante.



figures 3.26 a, b et c : Réponse obtenue avec une commande d'ordre 2, pour des sollicitations « autobrake » aux niveaux « LOW », « MED » et « MAX ».

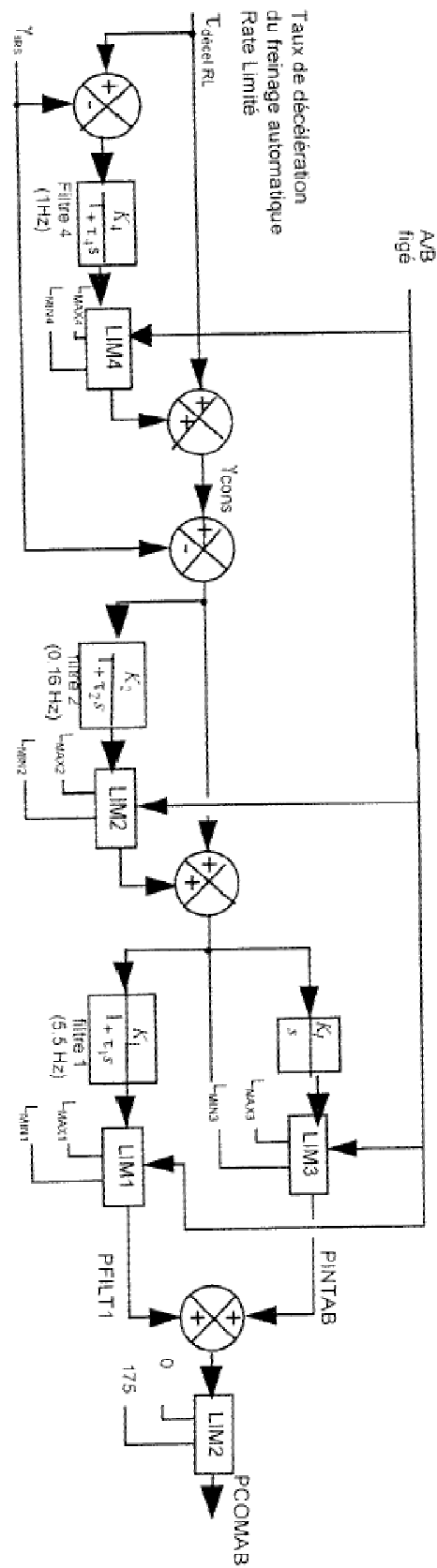


figure 3.27 : Calcul de la pression de commande autobrake (BSCU EMM)

### 3.4. Bilan de l'étude relative à l'utilisation du système de freinage

Comme dans le cas du contrôle de la poussée motrice, cette étude a permis d'évaluer un ensemble de solutions techniques permettant de réaliser une première loi de contrôle longitudinal de l'avion au sol (via un pilotage de la vitesse ou de l'accélération), basée sur l'utilisation du système de freinage. Un résumé de ces résultats est présenté dans le tableau de la figure 3.28 et est illustré par les courbes de la figure 3.29.

Il ressort de cette étude que la loi de commande du 2<sup>ème</sup> ordre (basée sur une modélisation du système de freinage réduite à un 1<sup>er</sup> ordre) semble être la solution la plus intéressante, associant simplicité, robustesse et performance. Elle permet de satisfaire les objectifs de précision sans nécessiter l'emploi d'intégrateurs, en se basant uniquement sur l'acquisition de la pression appliquée dans les freins. Celle-ci étant déjà acquise par le calculateur assurant l'asservissement du système de freinage (BSCU), cette loi peut donc être mise en œuvre facilement dans l'architecture avionique actuelle.

La performance obtenue en simulation semble aussi satisfaire les besoins du pilotage longitudinal de l'avion au sol. Si ultérieurement, des essais avec pilote dans la boucle montraient qu'il faut aller plus loin, on pourrait alors étudier une loi de commande (d'ordre 3) se basant sur une modélisation du système de freinage du deuxième ordre, de façon à réduire le temps de réponse. Cependant, cette loi serait nettement plus complexe et difficile à mettre en œuvre.

|                                      | Complexité   | Performance        | Précision              | Points particuliers                                |                          |
|--------------------------------------|--------------|--------------------|------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------|
| Commande du 1 <sup>er</sup> ordre    | très réduite | très bonne (w=1)   | non assurée            | Non adaptation au contrôle en accélération         |                          |
| Commande avec correcteur intégral    | moyenne      | très bonne (w=1)   | assurée                |                                                    | Nécessite un anti-windup |
| Commande en dérivée de $F_{x_{SOL}}$ | moyenne      | moyenne (w=0,25)   | assurée                | Nécessite un dispositif anti-windup                |                          |
| Commande du 2 <sup>ème</sup> ordre   | faible       | excellente (w=1,2) | assurée (si N1 précis) | Nécessite l'acquisition de la pression de freinage |                          |

figure 3.28 : Tableau récapitulatif des résultats obtenus sur la commande en freinage.

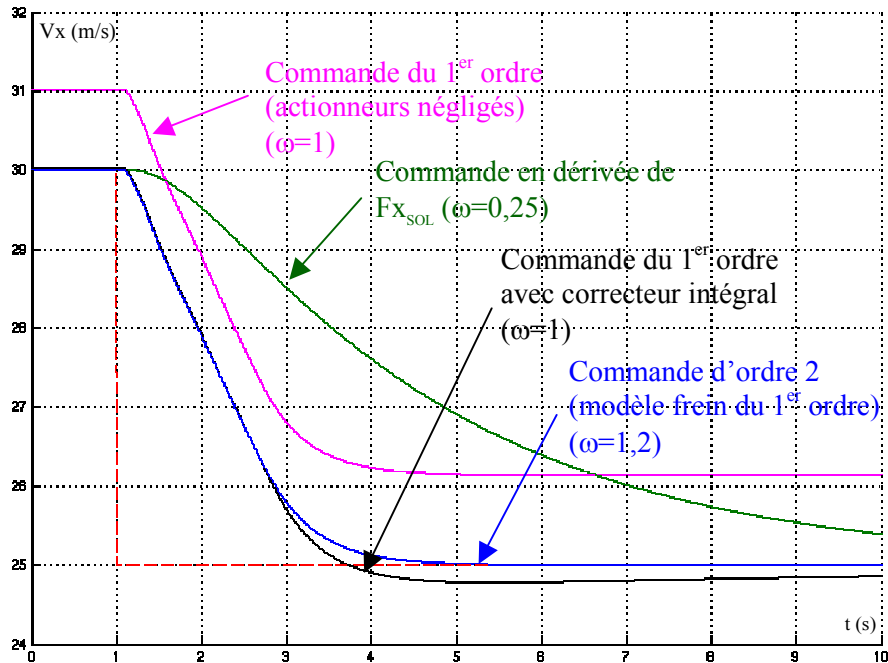


figure 3.29 : Réponses obtenues avec les différentes lois de commande.

## 4. Couplage des commandes en poussée et freinage

Ce paragraphe a pour but d'étudier les différentes possibilités permettant de coupler les lois de commande en poussée et freinage présentées précédemment. La loi de pilotage finale issue de l'association de ces éléments pourra alors nous amener à contrôler la vitesse (ou l'accélération), de manière adaptée, dans tout le domaine de fonctionnement (maintien de la vitesse, accélération, freinage, course au décollage, ...).

Ceci se traduit par un algorithme de supervision capable d'assurer un contrôle coordonné des différents actionneurs (moteurs et freins) pour permettre de rejoindre la consigne tout en suivant une dynamique prédéterminée. Cet algorithme doit aussi permettre, tant que possible, d'optimiser l'utilisation de ces actionneurs en limitant la consommation des moteurs et la montée en température des freins. Une règle simple sera d'éviter l'utilisation simultanée de ces deux actionneurs (leur action étant antagoniste). Les développements théoriques présentés dans cette partie s'attacheront donc, non seulement au problème de suivi de la consigne (au travers d'objectifs de performance et de robustesse) mais aussi au bon respect de cette règle d'utilisation des moteurs et des freins.

### 4.1. Cadre de l'étude

Le problème du couplage de commandes en poussée et freinage a déjà été abordé, notamment dans [Villaumé 2002]. Le principe de supervision qui y est proposé se base sur les règles suivantes :

- si la force à commander est positive, le pilotage de la vitesse de l'avion sera assuré à l'aide des moteurs. La consigne en freinage restera nulle ;
- à l'inverse, si la force à commander est négative, seuls les freins seront utilisés. La consigne en poussée sera alors nulle et le régime moteur se stabilisera sur l'Idle (régime minimum commandable).

### 4.2. Position du problème

Si l'on retient ce principe, sa mise en œuvre conduit à l'utilisation d'un modèle de synthèse dont les dynamiques des systèmes propulsif et de freinage sont :

- soit négligées : l'efficacité et la précision de la loi de commande obtenue seront alors nettement réduites.
- soit représentées (pour les deux systèmes) par des filtres linéaires du premier ordre. Ce 2<sup>ème</sup> cas revient à utiliser des commandes en poussée et freinage du 2<sup>ème</sup> ordre. Par contre, ces travaux ayant été réalisés sur la base d'une représentation « globale » de la dynamique en freinage, l'inversion de cette dernière implique de disposer d'une mesure précise et fiable du couple de freinage, non disponible actuellement sur avion.

Ainsi, les travaux présentés dans ce paragraphe ont pour but de permettre l'utilisation des lois de commande présentées précédemment, dont la combinaison pourrait s'avérer plus performante.

On peut noter que ce premier algorithme de supervision suppose la poussée des moteurs au régime réduit (« Idle ») parfaitement nulle. Lors de roulages à basse vitesse, une poussée résiduelle (non négligeable) subsiste : pour maintenir une vitesse constante, il est alors nécessaire de conserver un léger freinage. De ce fait, dans un tel cas de fonctionnement, il s'avère indispensable de prendre en compte la poussée réelle au régime Idle.

On peut chercher à adapter cet algorithme pour prendre en compte cette poussée résiduelle, cependant, dans la pratique, celle-ci est relativement mal connue. Les erreurs qui en résultent peuvent alors générer un battement parasite de la consigne.

Il est aussi à noter que la traînée de roulement est très difficile à estimer alors qu'elle joue un rôle significatif à basse vitesse. Le problème, présenté ci-dessus, s'en trouve alors encore accentué.

### 4.3. Solutions étudiées

Les premières études réalisées sur la base des travaux décrits dans [Villaumé 2002] ont montré qu'un algorithme basé sur l'analyse de consignes en amont de l'inversion de la dynamique du système (consignes en force globale, en dérivé  $n^{\text{ème}}$  de cette force, en accélération, etc...) ne peut permettre de résoudre facilement les problèmes de robustesse évoqués précédemment et ce, tout en respectant la contrainte de non-utilisation simultanée des freins et des moteurs (usage non-optimal). Sur la base de ces constatations, des solutions alternatives sont étudiées et évaluées ici. Elles correspondent à deux architectures possibles : l'une basée sur la mise en série de la commande des moteurs et des freins, l'autre basée sur un algorithme de supervision des consignes finales en  $N1$  et  $P_{\text{FREIN}}$ .

#### 4.3.1. Mise en « série » de la commande des moteurs et des freins

Dans ce cas, on utilise le système de freinage pour générer une force complémentaire à celle issue des moteurs. Ainsi, lorsque la consigne en  $N1$  devient inférieure à sa valeur minimale (Idle), on commande une pression de freinage correspondant à un effort équivalent à celui ne pouvant être restitué par les moteurs (cf. figure 3.30) :

$$F_{X_{\text{SOL}}} = \frac{\partial F_{X_{\text{MOT}}}}{\partial N1} \times (N1_c - \text{Idle}) \quad (3.47)$$

Cette solution permet d'obtenir un résultat conforme aux exigences précédentes. Cependant, elle nécessite de commander le système de freinage en force et non en variation de cette force (cas de la synthèse négligeant la dynamique actionneur). Elle ne permet donc pas d'utiliser la commande en dérivée de la force de freinage et la commande du  $2^{\text{ème}}$  ordre qui semble donner la meilleure performance.

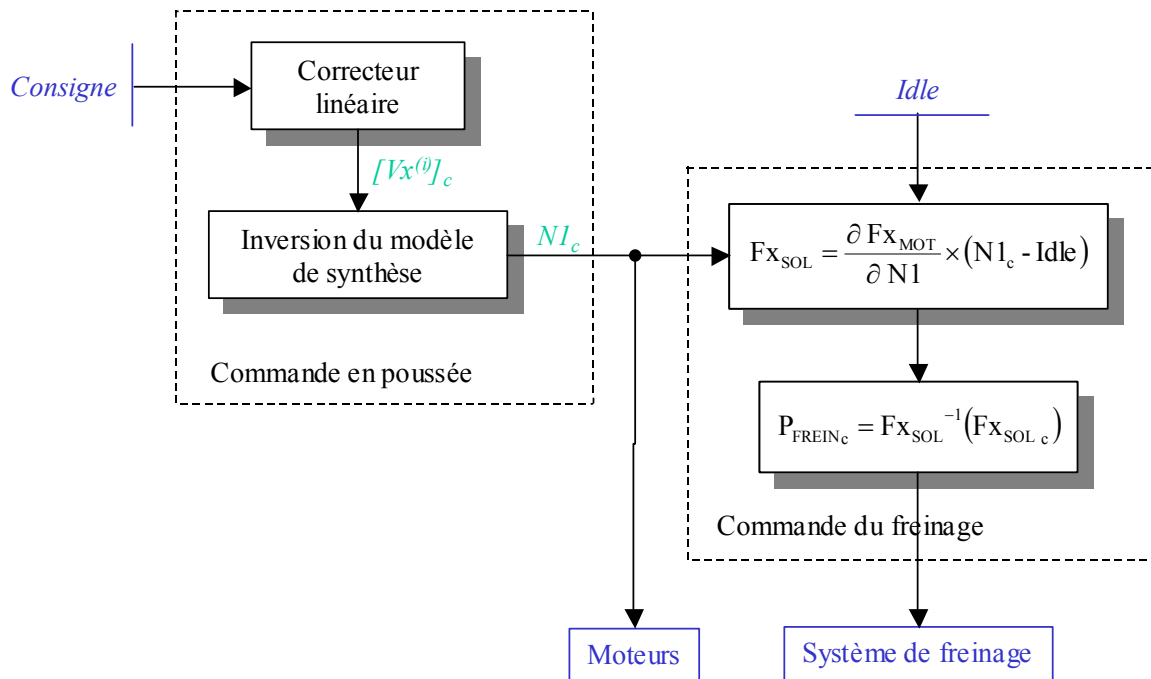
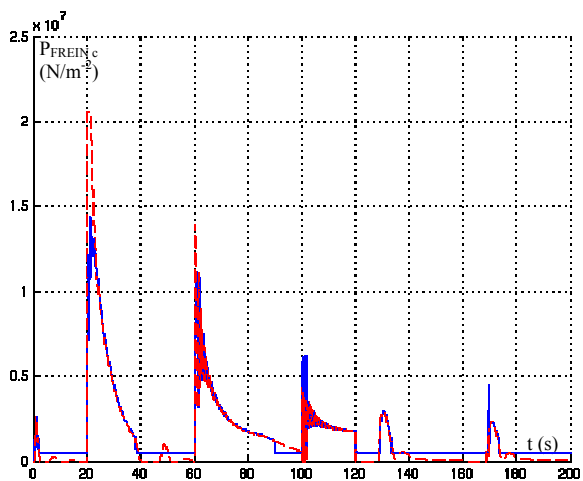
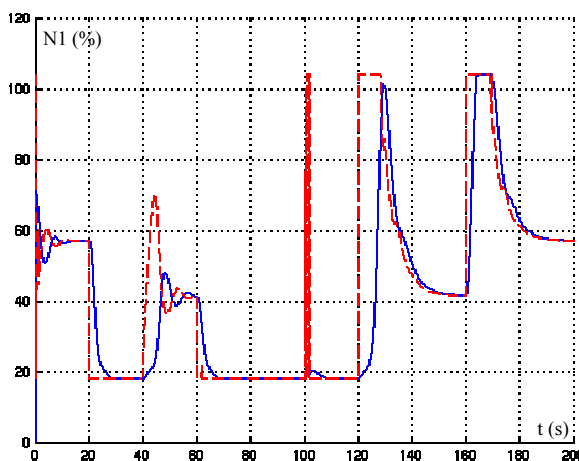
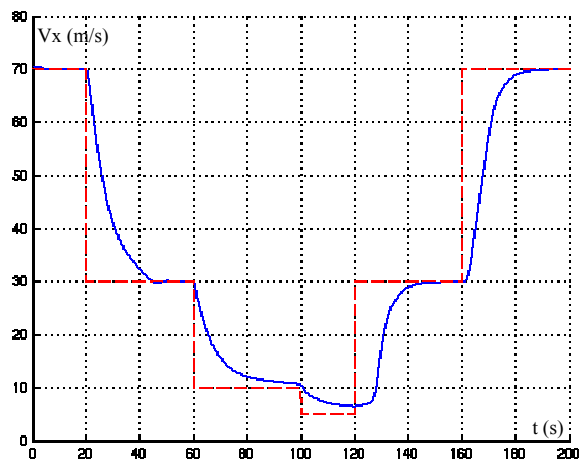


figure 3.30 : Mise en « série » de la commande des moteurs et des freins

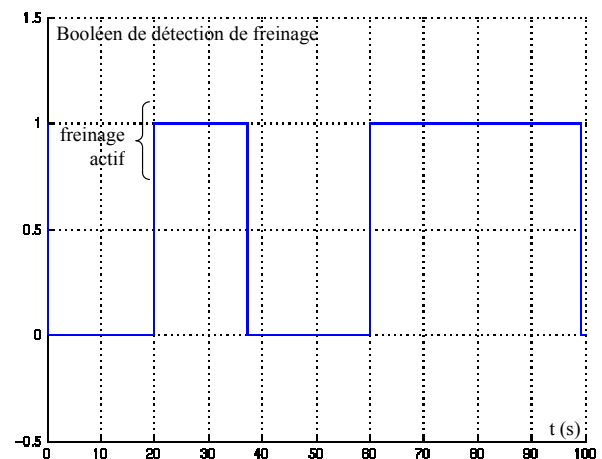
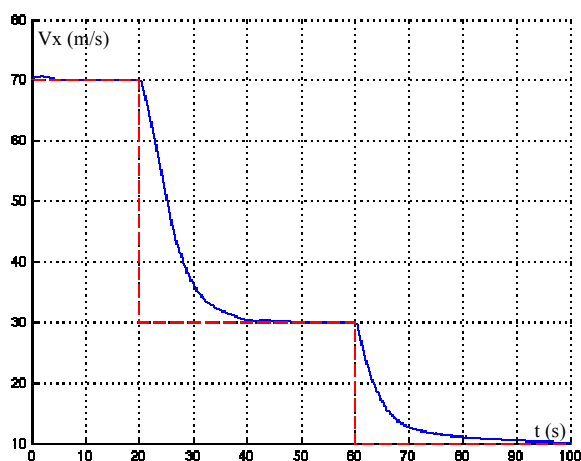
On peut aussi noter que le réglage de la dynamique objectif de la loi est directement dicté par les capacités de la commande en poussée, très pénalisantes en terme de temps de réponse. A titre d'exemple, les figures 3.31 a, b et c présentent un cas d'utilisation de ce type d'algorithme de supervision, pour  $\omega=0,2$  (réglage correspondant au réglage maximum admissible de la commande en poussée (non linéaire inverse du 2<sup>ème</sup> ordre)).

Si l'on désire utiliser une dynamique plus rapide dans les cas de freinages, des problèmes de couplage entre les moteurs et les freins peuvent survenir. En effet, la consigne en  $N1$  prend en compte l'inversion de la dynamique des moteurs qui est nettement plus lente que celle des freins. Ceux-ci sont alors commandés de manière excessive et non-adaptée à leur dynamique propre. Un exemple de ce type de problème est présenté sur les figures 3.32 a, b, c et d qui reprennent un scénario de freinage avec  $\omega=0,3$  lors des phases de freinage et  $\omega=0,2$  en dehors. Comme le montre les tracés des  $N1_c$  et  $P_{FREINc}$ , le couplage moteurs/freins peut rapidement générer des oscillations de forte amplitude.

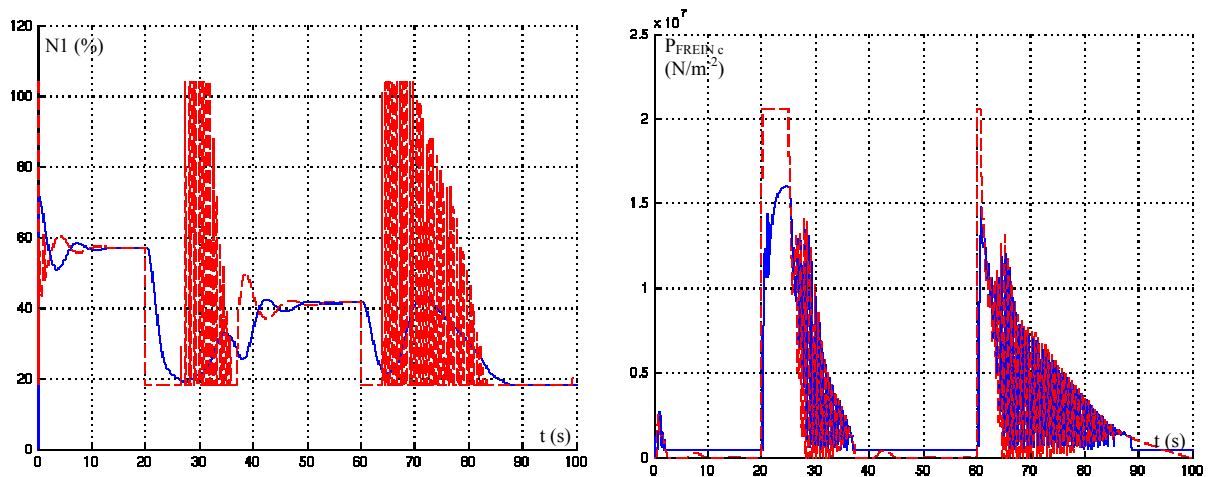
Ce couplage peut être limité en filtrant la consigne de freinage de manière à ralentir « artificiellement » cette dynamique. Cependant, dans ce cas, le temps de réponse serait alors fortement augmenté et ne permettrait plus de conserver de bonnes performances lors du freinage.



figures 3.31 a, b et c : Réponse obtenue avec un algorithme de supervision mettant en « série » les commandes en poussée d'ordre 2 et en freinage ( $\omega=0,2$ ).



figures 3.32 a et b : Réponse obtenue avec un algorithme de supervision mettant en « série » les commandes en poussée d'ordre 2 et en freinage ( $\omega=0,3$  en phase de freinage et  $\omega=0,2$  en dehors).



figures 3.32 c et d : Réponse obtenue avec un algorithme de supervision mettant en « série » une commande en poussée d'ordre 2 et la commande en freinage ( $\omega=0,3$  en phase de freinage et  $\omega=0,2$  en dehors).

#### 4.3.2. Supervision basée sur les consignes finales en N1 et $P_{FREIN}$

Ce type d'algorithme est basé sur une commutation entre commande en poussée et commande en freinage. La logique de supervision qui y est associée ne se base plus sur des consignes globales « amonts », mais sur les consignes envoyées aux différents systèmes :

- Lorsque la commande en freinage est active ( $b_{FREIN}=1$ ), on reste dans ce mode tant que la pression commandée  $P_{FREIN}$  reste positive. Lorsqu'elle devient négative ou nulle, on active la commande en poussée ( $b_{FREIN}=0$ ) et la consigne en pression est annulée.
- De même, lorsque la commande en poussée est active ( $b_{FREIN}=0$ ), on reste dans ce mode tant que le N1 commandé reste supérieur au régime Idle. Lorsqu'il devient inférieur ou égal à ce régime, on revient en mode freinage et on fixe le N1 de consigne au Idle.

##### *Remarques :*

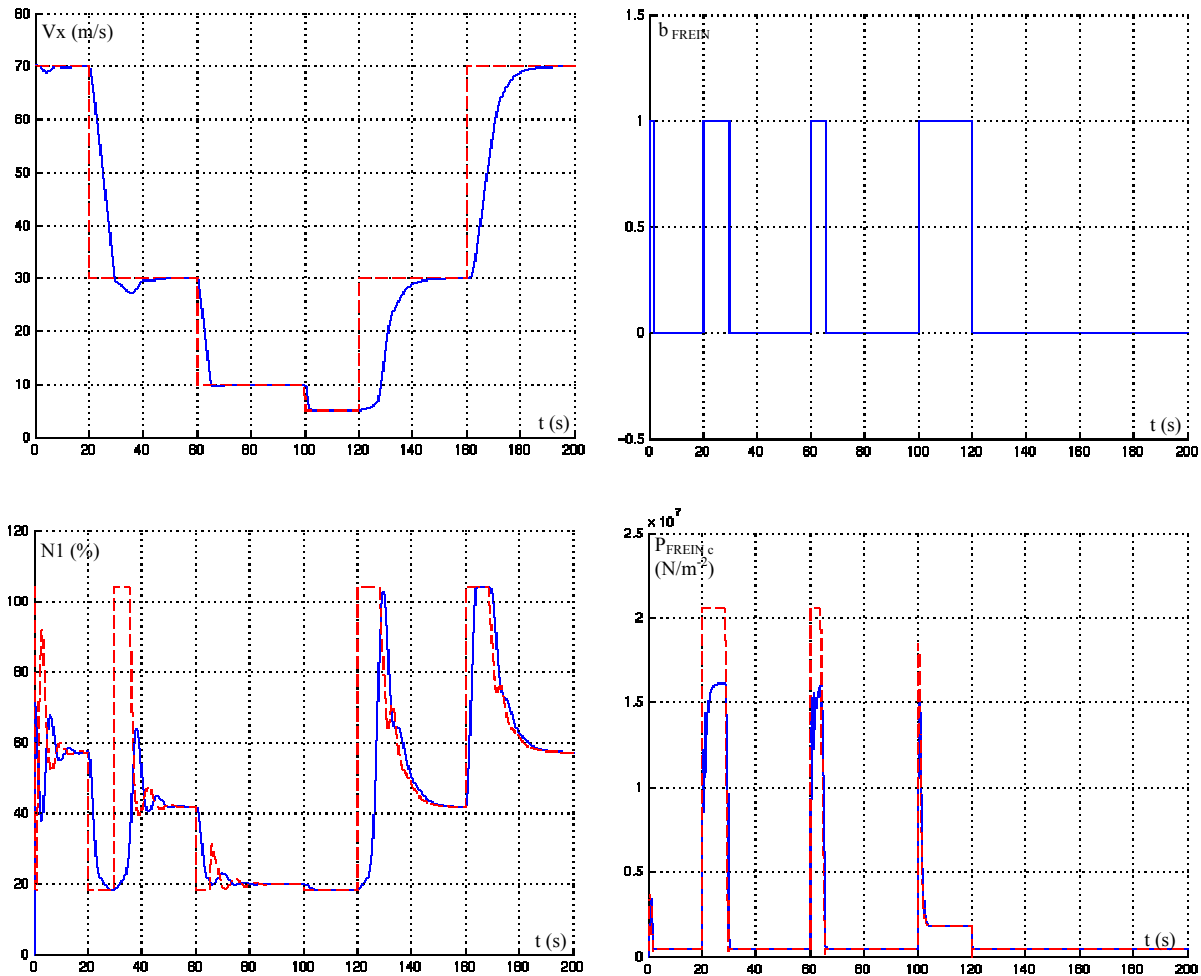
- La continuité de la consigne de freinage est assurée par la prise en compte, dans le modèle de synthèse, des variations de la poussée résiduelle issue des moteurs.
- De son côté, la consigne en N1 présente une discontinuité. En mode freinage, pour ramener le régime des moteurs à leur minimum, on positionne la consigne sur Idle. En revenant en mode poussée, si le régime des moteurs est encore supérieur au Idle, la consigne en N1 devient alors, elle aussi, supérieure à ce régime moteur.

Cette discontinuité est justifiée car elle traduit la modification de l'objectif suivi :

- Lors du freinage, la commande a pour but de ramener la poussée à son minimum ( $N1=Idle$ ) pour limiter l'utilisation des moteurs et des freins ;
- Hors freinage, il faut adapter le N1 commandé au N1 mesuré pour permettre le contrôle de la vitesse de l'avion.

Cette discontinuité peut engendrer des dépassements de consigne en fin de freinage, lorsque la vitesse est élevée. En effet, dans ce cas de figure, au lieu de se stabiliser sur la vitesse désirée, l'avion continue de décélérer, le temps que le N1 rejoigne son régime d'équilibre.

Un exemple de ce type de comportement est présenté sur les figures 3.33 a, b, c et d. La loi qui y est utilisée se base sur des commandes en poussée et freinage d'ordre 2 et est telle que  $\omega=1,2$  pour le contrôle en freinage et  $\omega=0,2$  pour le contrôle aux moteurs.



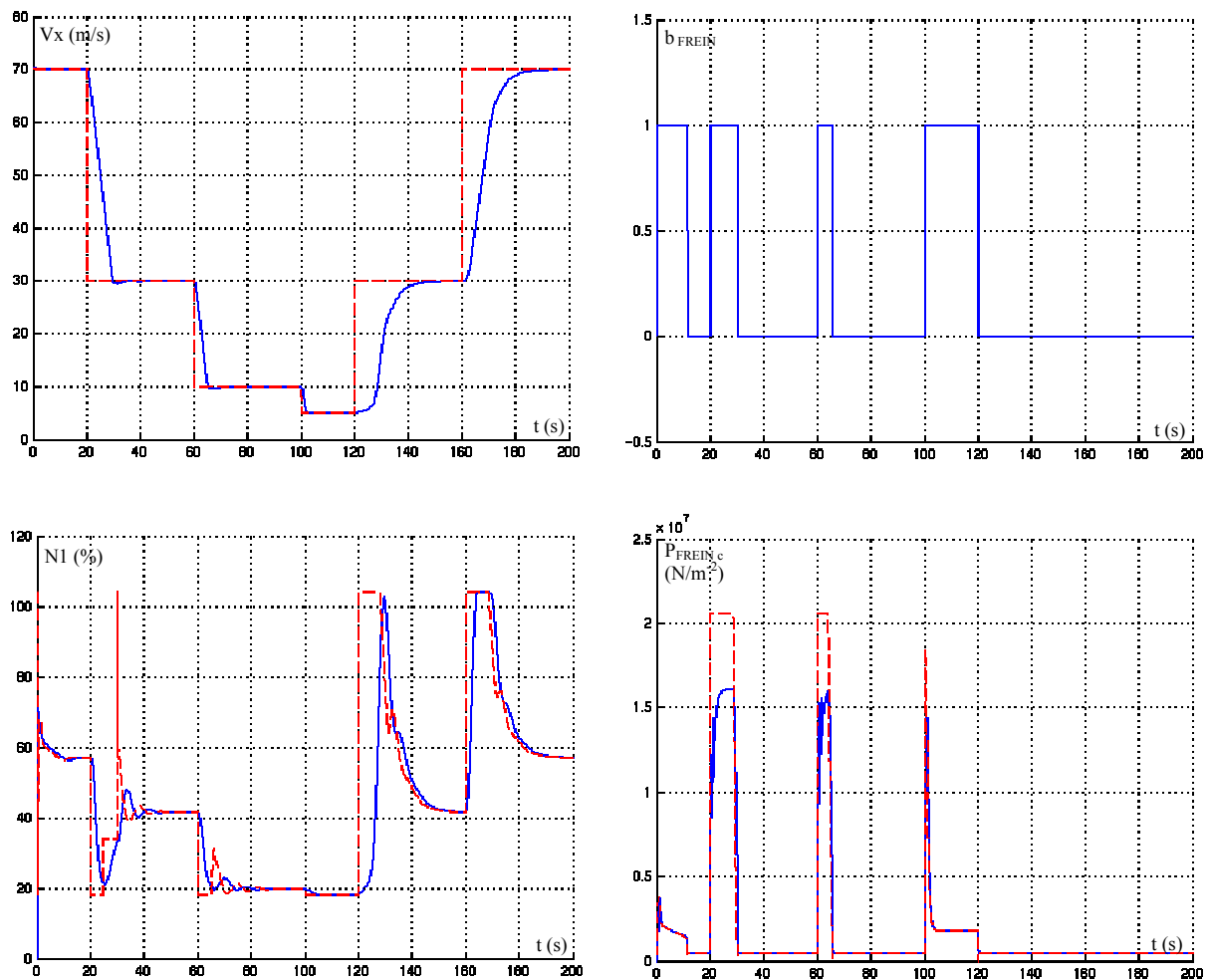
figures 3.33 a, b, c et d : Réponse obtenue avec un algorithme de supervision basé sur les consignes finales, pour des commandes du 2<sup>ème</sup> ordre en poussée (avec  $\omega=0,2$ ) et freinage (avec  $\omega=1,2$ ) et avec  $N1=Idle$  en phase de freinage.

Il est possible d'éviter une telle discontinuité en conservant active la loi de contrôle des moteurs. La variation de poussée étant prise en compte dans la consigne de freinage, la cohérence globale de la loi reste assurée et la consigne en  $N1$  ne présentant plus de discontinuité, le comportement du système devient plus proche de celui espéré. Par contre, l'utilisation des freins et des moteurs est alors sous-optimale et la consigne de  $N1$  doit être limitée à une valeur inférieure à sa valeur d'équilibre. Cette limitation permet de garantir qu'en régime permanent, les deux actionneurs ne peuvent être utilisés de manière antagoniste.

La détermination de ce régime moteur maximum commandable peut être réalisée, soit sur la base de la mesure de la vitesse courante (cas du pilotage en accélération), soit sur la base de la vitesse de consigne.

Une description schématique de ce type de loi de commande est présentée figure 3.35 et un exemple de résultat de simulation y est associé, figures 3.34 a, b, c et d. Comme précédemment, la loi de commande utilise des sous-commandes d'ordre 2, et  $\omega$  varie entre 1,2 et 0,2 (suivant que l'on est en phase de freinage ou non).

Comme le montrent ces figures, cette méthode de supervision des consignes en poussée et freinage peut permettre de satisfaire les objectifs précédemment cités, elle n'impose pas de contraintes fortes sur la synthèse des lois de commande en poussée et freinage et n'influence que peu leurs performances respectives.



figures 3.34 a, b, c et d : Réponse obtenue avec l'algorithme présenté figure 3.35, pour  $\omega$  variant entre 1,2 (commande en freinage) et 0,2 (commande en poussée).

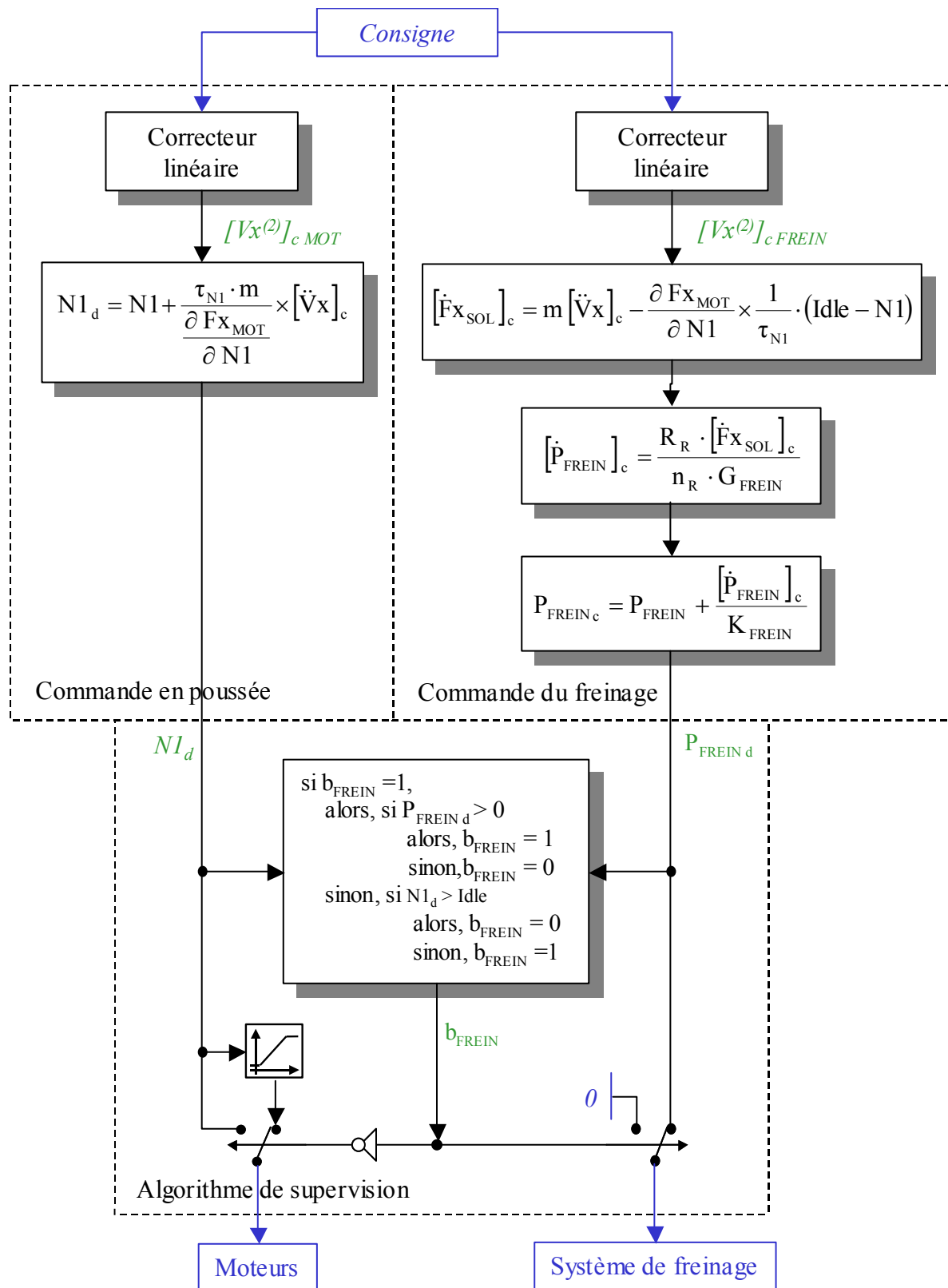


figure 3.35 : Supervision basée sur les consignes finales en poussée et freinage pour des commandes d'ordre 2.

### **4.3.3. Choix des types de commandes en poussée et freinage**

Comme l'ont présenté les parties 2 et 3, les lois de commande en poussée et freinage qui semblent les plus intéressantes sont les commandes d'ordre 2. En effet, elles offrent un très bon compromis entre performance et simplicité, elles assurent la précision de la réponse du système et ne semblent pas poser de problèmes de mise en œuvre majeurs.

S'il s'avère que les performances d'une telle loi de pilotage ne sont pas suffisantes pour assurer les objectifs de pilotabilité, il pourra être envisagé d'utiliser une commande des moteurs de type « non-linéaire inverse d'ordre 3 ».

Comme la partie 2.2 a déjà pu l'expliquer, une telle modification permettrait de diminuer légèrement le temps de réponse. Cependant, elle impliquerait aussi une importante augmentation de la complexité de la loi et nécessiterait d'acquérir (ou d'estimer) les dérivées du  $N1$  et de l'accélération de l'avion.

De même, dans le cas du freinage, il serait envisageable de réduire légèrement le temps de réponse en se ramenant à une commande d'ordre 3. Cependant, cela impliquerait aussi une forte augmentation de la complexité de la loi et nécessiterait l'estimation de la dérivée de la pression appliquée dans les freins. De plus, comme il a été décrit brièvement dans la partie qui y est consacrée, ces gains potentiels en temps de réponse seraient réduits par l'influence des retards purs dus au fonctionnement discret des calculateurs.

## **4.4. Adaptation de la loi de pilotage aux besoins opérationnels**

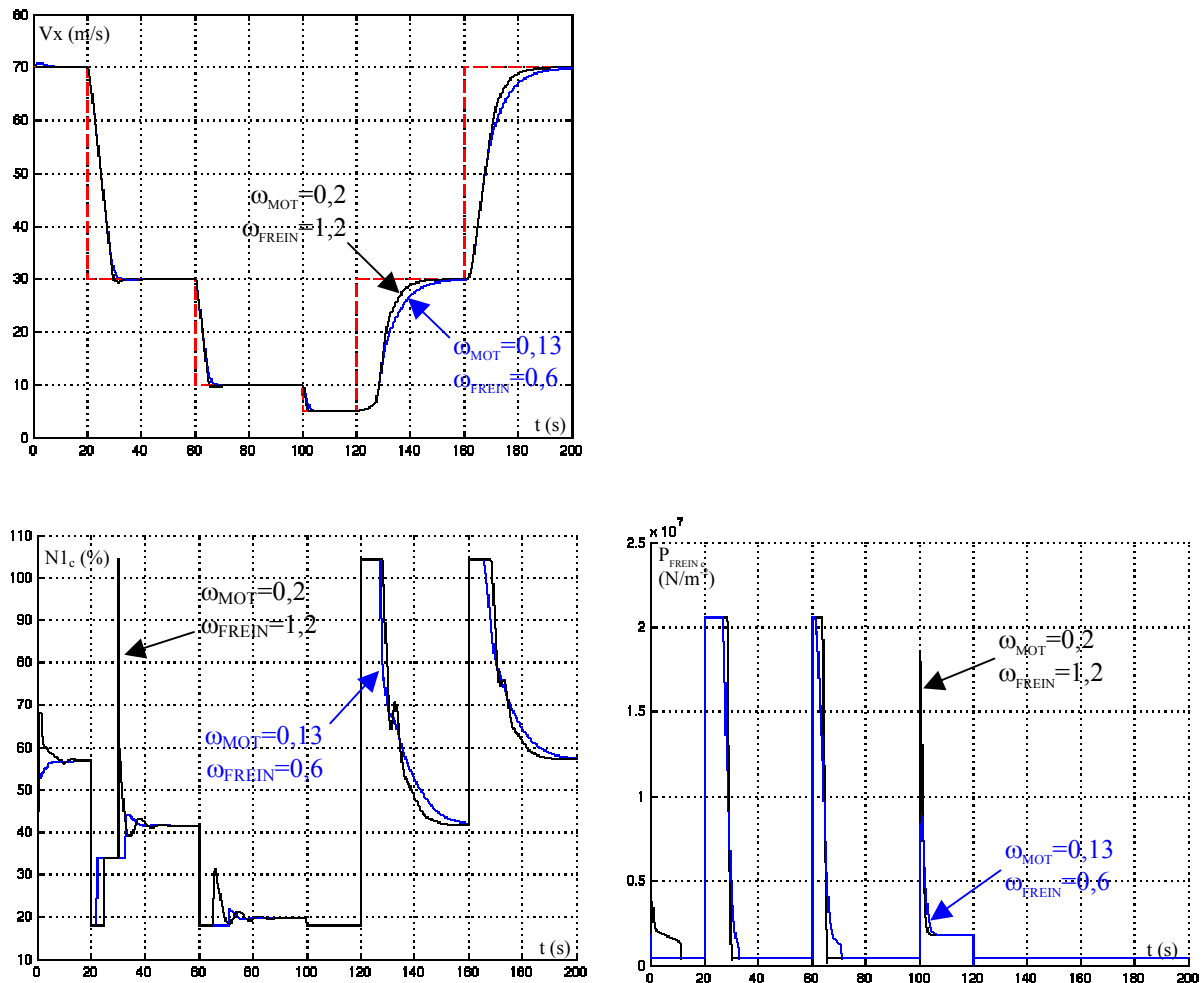
Les solutions de couplage qui viennent d'être analysées visent à minimiser le temps de réponse. Dans la pratique, la loi de pilotage retenue devra non seulement prendre en compte les aspects de performance liés à la pilotabilité, mais aussi prendre en compte les aspects liés au confort, à la consommation, à l'usure des systèmes, voir aux limitations de charges. Pour ce faire, il est nécessaire d'adapter la loi précédente pour satisfaire ces critères. Plusieurs moyens peuvent être envisagés. Il est possible, non seulement de jouer sur le réglage des gains de la loi (dynamique des commandes en poussée et freinage), mais aussi d'y associer des éléments spécifiques tels qu'un pré-traitement des consignes issues du pilote et l'ajout de saturations sur les consignes en accélération et en jerk.

### **4.4.1. Réglage des gains**

Le réglage des gains utilisé dans les exemples présentés précédemment était un réglage « limite » qui avait pour seul but l'évaluation du temps de réponse minimum pouvant être obtenu. Le réglage à utiliser doit donc être inférieur à cette limite, de sorte à « relâcher » les objectifs de performance, à obtenir un comportement plus stable et à limiter les sollicitations des actionneurs.

La dynamique des moteurs étant déjà relativement lente, l'impact du choix des gains ne doit toutefois pas engendrer d'augmentation significative du temps de réponse lors de la mise en poussée.

Comme le montrent les figures 3.36 a, b et c, en ramenant le réglage de la commande en poussée de  $\omega=0,2$  à  $\omega=0,13$  et celui de la commande en freinage de  $\omega=1,2$  à  $\omega=0,6$  la stabilité peut être augmentée et les sollicitations réduites sans pour autant pénaliser la réponse en vitesse.



figures 3.36 a, b et c : Réponses obtenues pour deux réglages de la loi de commande globale.

Dans cet exemple, l'augmentation du temps de réponse n'excède pas quelques secondes. Les oscillations de la consigne en  $N1$ , liés au couplage entre la commande en poussée et le régime moteur ont presque disparues. Les « pics » de consigne en  $N1$  et  $P_{FREIN}$  ont nettement été réduits : Le pic de  $N1_c$  associé à la fin de la première phase de décélération a quasiment disparu et le troisième pic de  $P_{FREIN_c}$  a été divisé par 2 (de plus de 180 bar à 90 bar).

#### 4.4.2. Pré-traitement des consignes issues du pilote

L'adaptation de la dynamique de la loi de pilotage aux contraintes opérationnelles consiste à traiter les consignes données par le pilote, en les filtrant, en en faisant varier le gain, voire même en y associant des saturations en position ou en vitesse (« rate-limiteurs »). Dans le cas de l'utilisation de la commande non linéaire inverse, l'emploi de tels pré-traitements peut s'avérer très utile. Ils permettent alors de générer des consignes plus proches des capacités réelles de l'avion et donc d'obtenir un comportement du système plus proche du comportement théoriquement attendu.

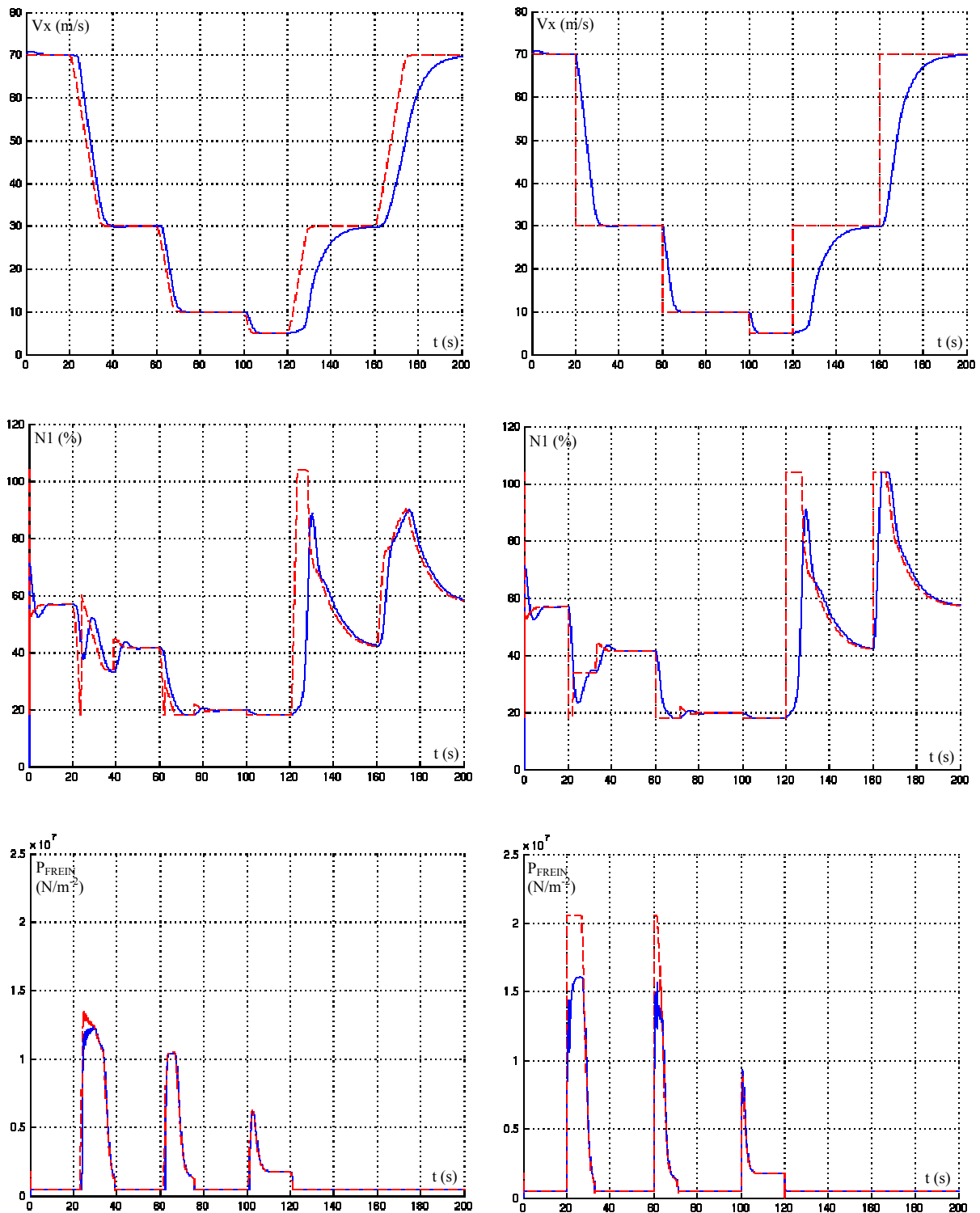
L'architecture de la loi de pilotage organisée en deux commandes séparées, en poussée et freinage, permet de filtrer indépendamment les consignes associées à chacun des deux systèmes et donc permet une prise en compte plus précise des spécificités des deux actionneurs.

Un exemple d'utilisation de tels pré-traitements est présenté sur les figures 3.37 a à j, qui reprennent les résultats obtenus et les comparent avec ceux obtenus précédemment. Dans cet exemple, le module de traitement des consignes comporte un filtre passe bas du premier ordre ( $\omega=1$ ) et un rate limiteur saturant l'accélération commandée par le pilote. Le seuil de saturation est pris égal à plus ou moins  $3 \text{ m/s}^2$  (ce qui correspond, sur un avion de type A320, à un niveau de décélération « autobrake MED »).

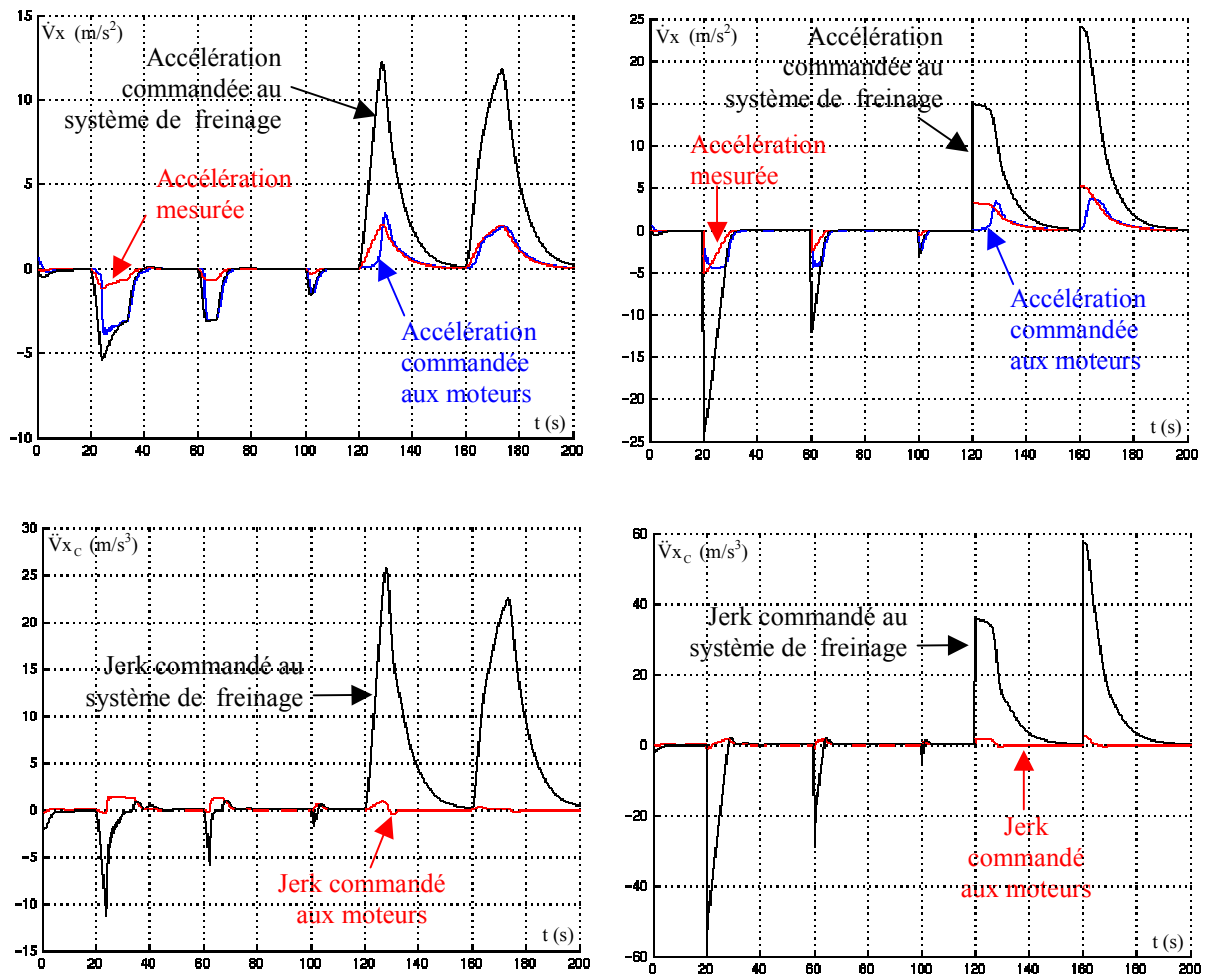
Comme le montrent ces tracés, la poussée et surtout les pressions dans les freins sont nettement plus proches des valeurs commandées et les sollicitations des moteurs et des freins sont d'amplitudes plus réduites. En ce qui concerne les consignes en accélération et en jerk, on peut aussi remarquer une très nette diminution de l'amplitude des sollicitations transitoires.

Le temps de réponse est cependant légèrement augmenté et un retard entre la consigne initiale et la « réaction » de l'avion apparaît. Il est à noter que ce retard qui, en proportion, reste relativement restreint, peut devenir très pénalisant dans certains cas de freinage car augmentant significativement la distance de freinage.

Ce type de solution semble prometteur mais implique aussi une mise au point délicate, nettement plus complexe que celle utilisée dans cet exemple.



figures 3.37 a à f : Comparatif des résultats obtenus avec (colonne de gauche) et sans (colonne de droite) pré-traitement des consignes en vitesse ; avec  $\omega_{MOT}=0,13$  et  $\omega_{FREIN}=0,6$  (Les échelles utilisées pour les tracés de l'accélération et du jerk sont normalisée).



figures 3.37 f à j : Comparatif des résultats obtenus avec (colonne de gauche) et sans (colonne de droite) pré-traitement des consignes en vitesse ; avec  $\omega_{\text{MOT}}=0,13$  et  $\omega_{\text{FREIN}}=0,6$  (Les échelles utilisées pour les tracés de l'accélération et du jerk sont normalisée).

#### 4.4.3. Saturation des consignes en accélération et jerk

Les caractéristiques propres à la loi de pilotage utilisée font que plusieurs paramètres internes à la commande peuvent être directement associés au comportement de l'avion.

Entre autre, si l'on s'intéresse au terme :

$$[\ddot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) - \dot{V}_x \right) \quad (3.48)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$[\ddot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_2} \cdot ([\dot{V}_x]_c - \dot{V}_x) \quad \text{avec,} \quad [\dot{V}_x]_c = \frac{1}{\tau_1} \cdot (V_{x_c} - V_x) \quad (3.49)$$

$[\dot{V}_x]_c$  peut alors être considéré comme une « sous-consigne » en accélération et  $[\ddot{V}_x]_c$  comme une « sous-consigne » en jerk

En saturant, ces consignes il est alors possible d'agir directement sur la dynamique de la commande, au travers de ces termes.

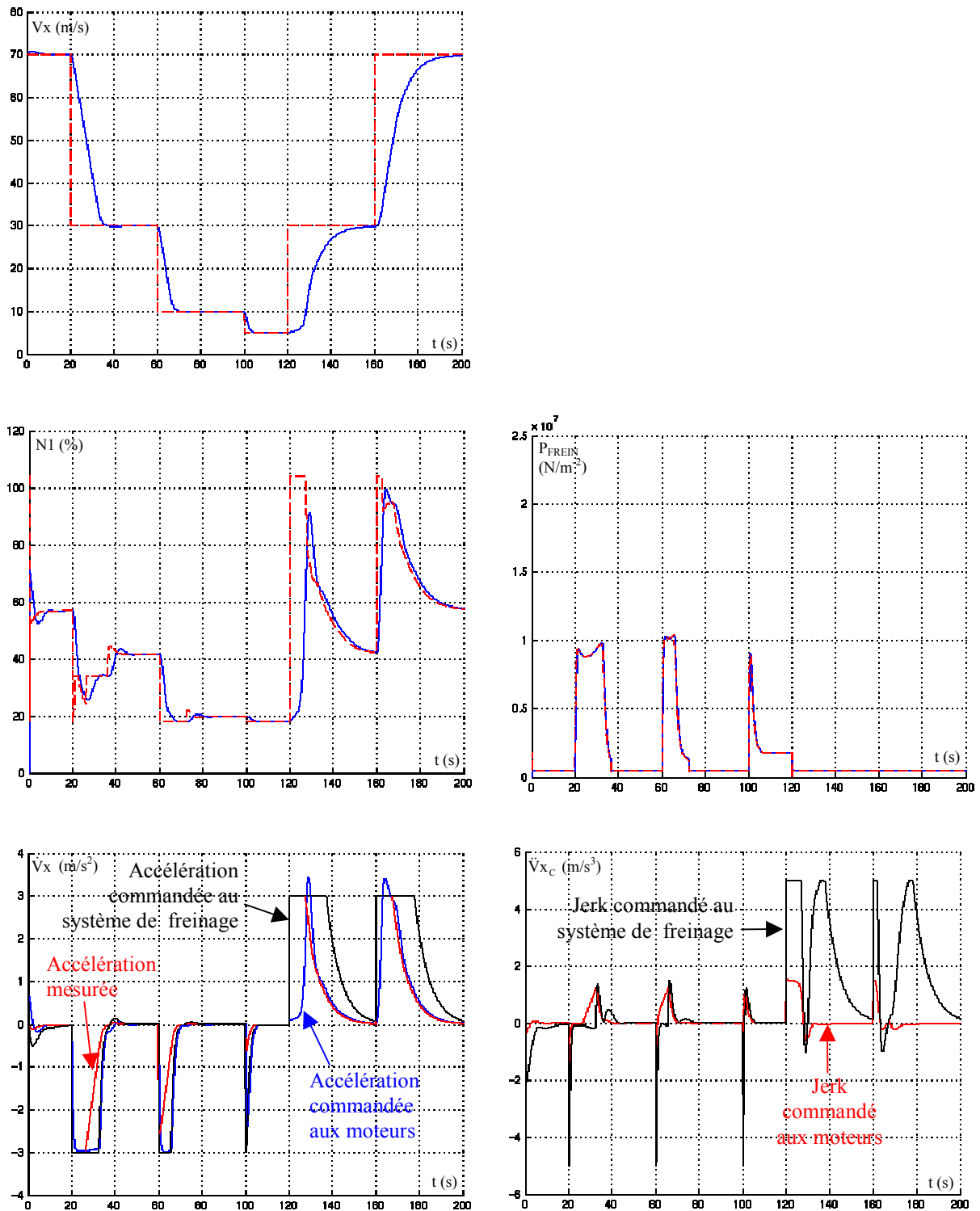
Sachant que cette sous-partie de la loi de pilotage existe indépendamment dans les commandes en poussée et freinage, il sera aussi possible de distinguer les cas d'utilisation des freins et des moteurs. Une représentation schématique de la loi de commande ainsi modifiée est présentée figure 3.39 et une représentation équivalente dans le cas d'une loi de pilotage en accélération y est associée figure 3.40.

Les figures 3.38 a à e, présentent un exemple de réponse obtenue pour des saturations de la consigne en accélération de plus ou moins  $3\text{m/s}^2$  et de la consigne en jerk de plus ou moins  $5\text{m/s}^3$ .

Comme le montrent ces courbes, l'ajout des saturations génèrent une légère augmentation du temps de réponse, principalement due à la limite d'accélération qui restreint l'action des freins. Cependant, elle permet aussi de conserver des pressions de freinage inférieures à 100 bar et des niveaux de décélération inférieurs au niveau « autobrake MED ». De même, les sollicitations des moteurs sont moins importantes et l'accélération qu'ils génèrent est mieux maîtrisée. La saturation des consignes de jerk permet aussi d'écarter les pics qui pouvaient être observés précédemment.

L'emploi de telles saturations, en bornant les sous-consignes, pourrait aussi permettre d'aider à mettre au point les fonctions de surveillance de la loi et du calculateur (tâche de « monitoring »), indispensables à l'implémentation de ce type de lois de commande sur avion.

Il est cependant important de vérifier que l'impact de ces limitations ne devient pas excessif, notamment dans le cas du jerk qui est nettement plus délicat à traiter. En effet, en ajoutant ces saturations, on ajoute de fortes non-linéarités, non prises en compte lors du calcul de la loi de commande et qui peuvent, dans certains cas extrêmes, devenir déstabilisantes.



figures 3.38 a à e : Réponse obtenue pour une loi de commande avec saturation des consignes en accélération (à plus ou moins  $3\text{m/s}^2$ ) et jerk (à plus ou moins  $5\text{m/s}^3$ ).

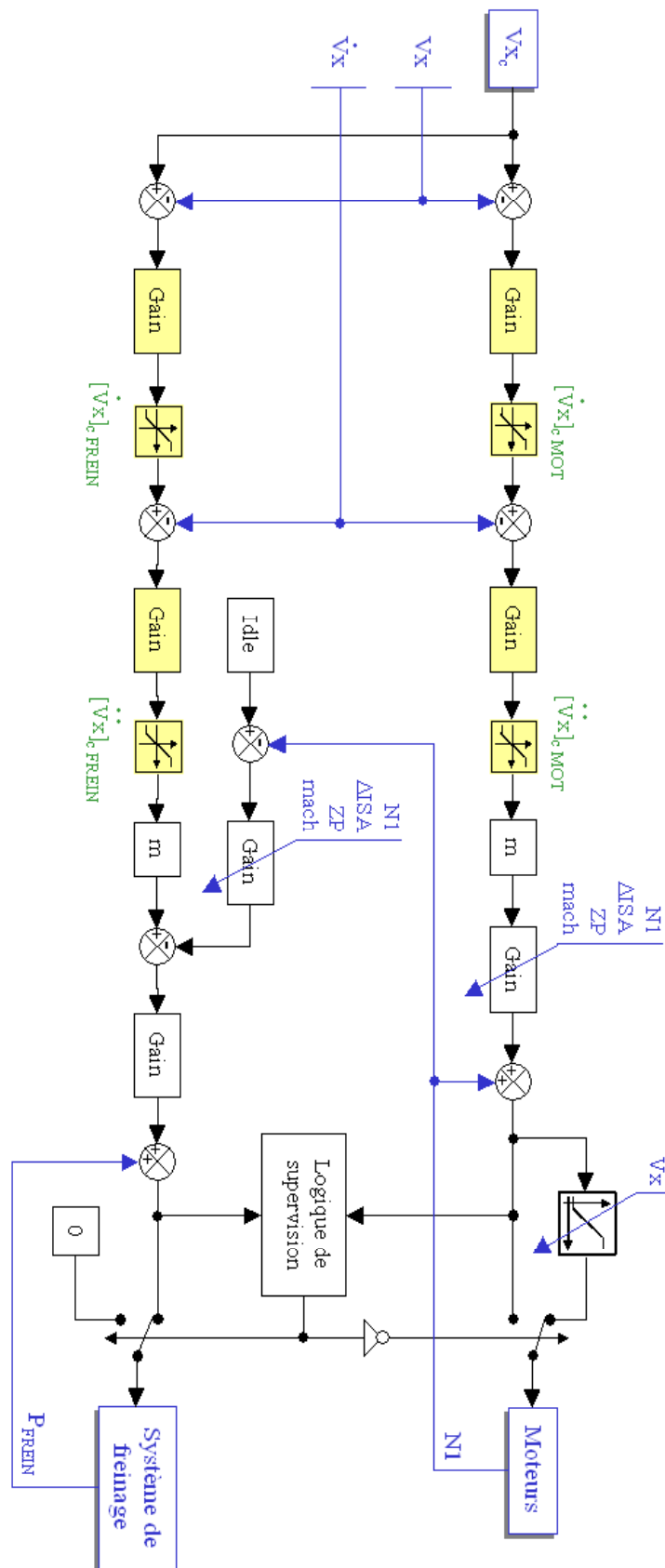


figure 3.39 : Représentation schématique de la loi proposée pour le pilotage en vitesse.

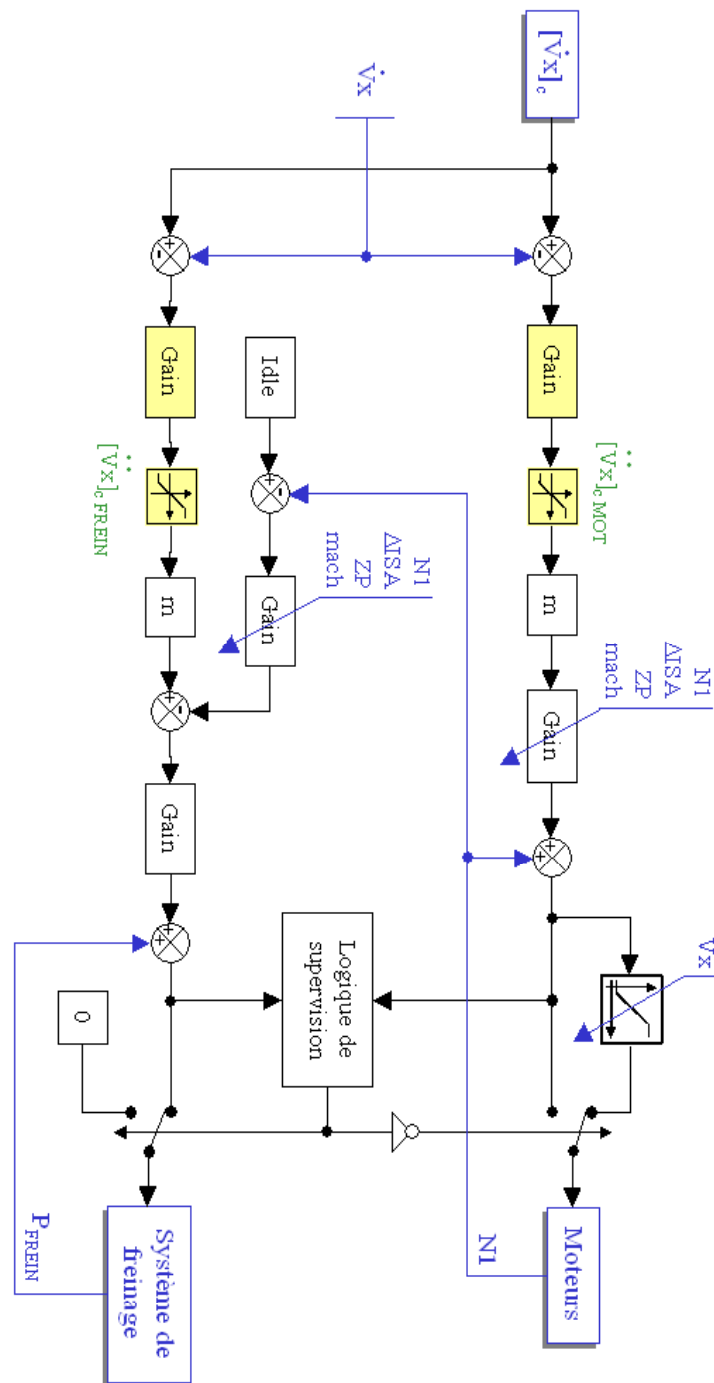


figure 3.40 : Représentation schématique de la loi proposée pour le pilotage en accélération.

## 4.5. Bilan des entrées et sorties

Ce dernier paragraphe propose un bilan des entrées et sorties des deux lois de pilotage en vitesse et accélération, proposées précédemment.

Ces lois de commande sont toutes deux basées sur le principe de la commande non-linéaire inverse, appliquée à des modèles de synthèse considérant le comportement des moteurs et du système de freinage comme des sous-ensembles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre. La loi de pilotage en vitesse est présentée figure 3.39 et celle en accélération figure 3.40.

Les variables en entrée de ces lois peuvent être séparées en trois parties :

- Les mesures de vitesse (uniquement dans le cas de la loi de pilotage en vitesse) et d'accélération. Ces mesures sont réalisées par les ADIRS et sont à la base de l'asservissement.
- La mesure du régime moteur moyen ( $N1$ ) et de la pression réellement appliquée dans les freins ( $P_{FREIN}$ ).  
L'acquisition de ces grandeurs est essentielle au bon fonctionnement de l'inversion des dynamiques des moteurs et des freins. Elle est déjà réalisée par les calculateurs dédiés à la régulation de ces deux systèmes (FADEC et BSCU).  
Ces grandeurs sont obtenues en moyennant les mesures instantanées de pression et de  $N1$ , des moteurs d'une part et des freins d'autre part (on exclut ici une utilisation différentielle des freins et des moteurs).
- Un ensemble de mesures destinées à estimer indirectement la masse de l'avion et le gradient d'efficacité des moteurs.  
Dans l'exemple présenté ici, ce gradient est évalué sur la base des polynômes utilisés dans le modèle de synthèse (présenté dans la partie relative au contrôle des moteurs) et donc, suppose la mesure de la température ( $\Delta ISA$ ), de l'altitude ( $Zp$ ) et du nombre de mach, déjà fournie par les ADIRS. La masse de l'avion est supposée déjà disponible.  
L'impact d'une erreur d'estimation peut être comparé à une modification des gains de l'asservissement et pourra en partie être compensé grâce aux propriétés de robustesse de la loi de commande utilisée.  
La liste des variables à acquérir pourra donc varier en fonction de la technique d'estimation utilisée et de la précision recherchée.

Les lois de pilotage en vitesse et en accélération génèrent l'une comme l'autre deux consignes globales, une consigne en pression de freinage et une consigne en  $N1$ .

Ces consignes sont destinées respectivement au FADEC et au BSCU, de sorte à solliciter l'ensemble des moteurs et des freins considérés.

Un résumé de ces entrées/sorties est présenté figure 3.41 dans le cas du pilotage de la vitesse et figure 3.42 dans le cas de l'accélération.

| Entrées         | Description                                                      | Remarques                                                                                                        |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V_x$           | Vitesse longitudinale par rapport au sol, en m/s                 | Base de l'asservissement en vitesse                                                                              |
| $\dot{V}_x$     | accélération longitudinal par rapport au sol en m/s <sup>2</sup> |                                                                                                                  |
| N1              | Régime moteur moyen                                              | Nécessaire à l'inversion de la modélisation des moteurs et des freins (modèles du 1 <sup>er</sup> ordre)         |
| $P_{FREIN}$     | Pression moyenne appliquée dans les freins                       |                                                                                                                  |
| $\Delta ISA$    | Écart à la température standard                                  | Mesures destinées à estimer le gradient d'efficacité des moteurs. Impacte indirect sur le comportement de la loi |
| Zp              | Altitude pression                                                |                                                                                                                  |
| mach            | nombre de mach                                                   |                                                                                                                  |
| m               | masse de l'avion                                                 | Impact indirect sur le comportement de la loi                                                                    |
| Sorties         |                                                                  |                                                                                                                  |
| N1 <sub>c</sub> | Consigne en N1 destinée à chaque moteur                          | Envoyée au FADEC                                                                                                 |
| $P_{FREINC}$    | Consigne de pression à appliquer dans les différents freins      | Envoyée au BSCU                                                                                                  |

figure 3.41 : Bilan des entrées et sortie de la loi de pilotage en vitesse.

| Entrées         | Description                                                      | Remarques                                                                                                        |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\dot{V}_x$     | accélération longitudinal par rapport au sol en m/s <sup>2</sup> | Base de l'asservissement en vitesse                                                                              |
| N1              | Régime moteur moyen                                              | Nécessaire à l'inversion de la modélisation des moteurs et des freins (modèles du 1 <sup>er</sup> ordre)         |
| $P_{FREIN}$     | Pression moyenne appliquée dans les freins                       |                                                                                                                  |
| $\Delta ISA$    | Écart à la température standard                                  | Mesures destinées à estimer le gradient d'efficacité des moteurs. Impacte indirect sur le comportement de la loi |
| Zp              | Altitude pression                                                |                                                                                                                  |
| mach            | nombre de mach                                                   |                                                                                                                  |
| m               | masse de l'avion                                                 | Impact indirect sur le comportement de la loi                                                                    |
| Sorties         |                                                                  |                                                                                                                  |
| N1 <sub>c</sub> | Consigne en N1 destinée à chaque moteur                          | Envoyée au FADEC                                                                                                 |
| $P_{FREINC}$    | Consigne de pression à appliquer dans les différents freins      | Envoyée au BSCU                                                                                                  |

figure 3.42 : Bilan des entrées et sortie de la loi de pilotage en accélération.

## 5. Conclusion

Les travaux réalisés ont permis d'évaluer plusieurs types de loi de pilotage longitudinal de l'avion au sol, à partir de différents principes de commande (la commande non-linéaire inverse, le backstepping, les principes mis en place sur l'automanette générique) et de différents modèles de synthèse.

Cette étude a ainsi permis de définir et de comparer différentes commandes en poussée et freinage pouvant être utilisées. Les résultats obtenus ont permis de montrer l'intérêt de la technique de commande non-linéaire inverse (d'ordre deux) qui, dans le cadre de cette application, reste beaucoup plus simple et facile à mettre en œuvre que la technique du backstepping. Ils ont aussi montré que la commande non-linéaire inverse permet d'assurer la précision de la réponse sans nécessiter l'usage d'intégrateur, ce qui minimise l'impact des saturations sur le comportement du système commandé et rend ce type de lois de commande nettement plus performante que des lois de commande classiques (de type « automanette »). L'absence d'intégrateur permet de faciliter la mise en œuvre de ce type de lois sur avion, notamment vis-à-vis des cas de réinitialisation des calculateurs ou des problèmes liés à la mise au point de fonctions de surveillance de leur fonctionnement.

De plus, une méthode de design concurrente de l'autobrake actuel a pu être proposée. En effet, la loi de pilotage longitudinal a permis de satisfaire le cahier des charges de cette fonction, tout en restant inchangée et en conservant le même réglage de gains.

L'étude de différentes logiques de couplage des consignes en poussée et en freinage a aussi permis de montrer l'intérêt de mettre en œuvre un algorithme de supervision basé sur l'utilisation des consignes finales en  $N1$  et  $P_{FREINS}$ .

Ainsi, une loi de pilotage longitudinale complète (décrite figure 3.39 dans le cas du pilotage de la vitesse et figure 3.40 dans le cas du pilotage de l'accélération) a été proposée et semble donner des résultats tout à fait satisfaisants.

Il pourrait être envisageable, pour approfondir ces travaux, d'affiner la modélisation utilisée et ainsi permettre d'obtenir des résultats quantitatifs plus précis :

- La dynamique du modèle moteur utilisé pour la simulation n'a pas encore pu être identifiée finement pour un moteur précis. Elle permet de reproduire de manière cohérente, et avec une bonne précision, le comportement réel des réacteurs de génération récente mais n'est pas représentative d'un avion donné.
- La modélisation des pneumatiques peut aussi être complétée pour prendre en compte l'ensemble des profils d'adhérence de piste utilisés au sein d'Airbus (outils de simulation ASF (Atelier de Simulation de Freinage)).
- L'impact du comportement discret des calculateurs pourrait être approfondi en utilisant des moyens de simulation plus proche du fonctionnement réel des systèmes avionique.



# **Chapitre 4 : Etude d'une loi de pilotage latéral de l'avion au sol**

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introduction .....</b>                                                                | <b>2</b>  |
| <b>2. Travaux de référence .....</b>                                                        | <b>3</b>  |
| <b>3. Mise en oeuvre d'une loi adaptée aux spécificités du roulage à basse vitesse.....</b> | <b>4</b>  |
| 3.1. Modèle de synthèse .....                                                               | 5         |
| 3.2. Inversion de la dynamique en vitesse de lacet .....                                    | 6         |
| 3.3. Inversion des modèles actionneurs.....                                                 | 7         |
| 3.4. Asservissement de la vitesse de lacet.....                                             | 9         |
| 3.5. Supervision des actionneurs .....                                                      | 9         |
| 3.6. Adaptation de la cinématique de commande.....                                          | 10        |
| 3.7. Description globale de la loi de commande .....                                        | 12        |
| <b>4. Etude de la robustesse de la loi .....</b>                                            | <b>14</b> |
| 4.1. Erreurs de modélisation et perturbations extérieures .....                             | 14        |
| 4.2. Impact des saturations .....                                                           | 21        |
| 4.3. Influence de l'asservissement des roues avant.....                                     | 31        |
| 4.4. Correction des erreurs statiques .....                                                 | 36        |
| <b>5. Le problème des très basses vitesses et de l'arrêt.....</b>                           | <b>38</b> |
| 5.1. Position du problème.....                                                              | 38        |
| 5.2. Exemple de transition entre loi de pilotage et loi directe .....                       | 39        |
| 5.3. Adaptation de Loi de pilotage latéral aux vitesses nulles .....                        | 40        |
| <b>6. Mise en œuvre opérationnelle.....</b>                                                 | <b>46</b> |
| <b>7. Conclusion.....</b>                                                                   | <b>51</b> |

# 1. Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude d'une loi de pilotage latéral ayant pour but de faciliter le pilotage de l'avion au sol. A l'heure actuelle, ce contrôle est réalisé par le pilote au travers d'une loi de commande sollicitant directement le système d'orientation des roues avant et la gouverne de direction. Ainsi, selon la vitesse de l'avion, un braquage des tillers (petits volants à côté des manches) et des palonniers génère directement une consigne d'orientation donnée, soit des roues avant (à basse vitesse), soit de la gouverne de direction (à plus haute vitesse).

Le but de cette étude est de mettre au point une loi de pilotage permettant de contrôler l'attitude de l'avion au sol. Cette loi sera ainsi comparable à celles mises en œuvre en vol (cas des commandes vol électriques : « fly by wire ») et permettra ainsi de conserver, au sol, la même philosophie de pilotage.

Une telle loi permettra ainsi de rendre l'avion plus stable. Si le pilote n'agit pas sur ses organes de commande, la loi assurera le maintien d'une trajectoire rectiligne, même en cas de comportement dissymétrique de l'appareil (panne moteur, vent de travers, mauvais calage des roues avant, etc.). Elle permettra aussi de rendre le contrôle de l'avion au sol plus « instinctif » en introduisant des objectifs de contrôle adaptés aux spécificités du comportement de l'avion. De plus, cette loi doit permettre d'optimiser l'utilisation des actionneurs en supervisant leur action de manière transparente.

Une loi de pilotage latéral a déjà été réalisée pour le cas du roulage à "haute vitesse", que se soit lors des décollages, des atterrissages ou des accélérations arrêts [Villaume 2002], Cette loi était destinée à améliorer le suivi de l'axe de piste.

Compte tenu des spécificités liées au comportement de l'avion lors du suivi de taxiways et lors des manœuvres à basse vitesse, des travaux complémentaires devaient être envisagés. L'objectif de cette partie est ainsi de mettre au point une loi de pilotage latéral adaptée au comportement de l'avion à basse vitesse et cohérente avec les travaux déjà réalisés pour le suivi d'axe de piste, afin d'obtenir une unique loi de pilotage, utilisable dans tout le domaine de fonctionnement.

Les travaux développés dans le cadre de ce chapitre ont été appliqués à un avion de type Airbus A320. Leur mise en oeuvre peut aussi être étendue à d'autres types d'appareils. C'est d'ailleurs actuellement le cas au travers d'une campagne d'essais menée sur A340-600 (cf. paragraphe 6 ).

Ce chapitre est tout d'abord consacré à une brève présentation des travaux réalisés sur le suivi d'axe de piste. Ensuite, après avoir étudié les spécificités dues au domaine de fonctionnement considéré, il conduira à définir une nouvelle loi de pilotage latéral adaptée à l'ensemble du domaine de fonctionnement.

## 2. Travaux de référence

Lors des évolutions le long de l'axe de piste, à l'atterrissage et au décollage, les angles de dérapage, le braquage des roues et la courbure de la trajectoire restent relativement faibles. Dans un tel cas de figure, le modèle de la dynamique latérale de l'avion peut être fortement simplifié. Celui utilisé dans [Villaume 2002] pour la synthèse de loi est proche d'un modèle linéaire d'ordre deux de type "bicyclette" dont les angles de dérapage et le modèle des pneumatiques sont linéarisés (sans prise en compte des actionneurs). On peut remarquer que ce modèle dépend non-linéairement d'un paramètre exogène essentiel : la vitesse longitudinale.

Après avoir envisagé l'utilisation d'une commande de type placement de pôles (commande modale), une approche basée sur la commande non-linéaire inverse a été retenue. Cette technique a pour avantage de permettre l'adaptation continue du correcteur à la vitesse, de prendre en compte les transferts de charge entre trains et de permettre d'exprimer explicitement les gains en évitant la mise en œuvre de techniques de "gain scheduling".

La consigne est obtenue en inversant l'équation différentielle de la dynamique en lacet :

$$\dot{r} = \ddot{\psi} = a_{21} \cdot Vy + a_{22} \cdot r + \frac{M_{ACT}}{I_{zz}} \quad (4.1)$$

avec :  $r$  : la vitesse de lacet  $\psi$  : le cap  
 $Vy$  : la vitesse latéral (en axes avion)  $I_{zz}$  : l'inertie suivant l'axe du lacet

Par inversion de cette équation, on obtient :

$$M_{ACT} = -I_{zz} \times (a_{21} \cdot Vy + a_{22} \cdot r) + I_{zz} \times [\ddot{\psi}]_c \quad (4.2)$$

$M_{ACT}$  est la somme des moments, dus au braquage des actionneurs, suivant l'axe de lacet. Une logique de répartition de ce moment global entre les différents actionneurs (fonction de la vitesse) est alors mise en place pour déterminer les consignes relatives à chaque système [Villaume 2001]. Le problème de commande est donc réduit à la définition d'une consigne en dérivée de la vitesse de lacet.

Deux types d'asservissement ont été considérés, suivant que l'on choisit des consignes :

- En vitesse de lacet :  $[\dot{r}]_c = -2z\omega r + \frac{\omega^2}{p}(r_c - r) \quad (4.3)$

- En cap :  $[\ddot{\psi}]_c = -2z\omega r + \omega^2(\psi_c - \psi) \quad (4.4)$

Ce qui permet d'aboutir à une dynamique en boucle fermée du deuxième ordre :

$$\frac{\psi}{\psi_c} = \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega}p + \frac{1}{\omega^2}p^2} \quad (4.5)$$

### 3. Mise en oeuvre d'une loi adaptée aux spécificités du roulage à basse vitesse

Aux basses vitesses, deux cas de fonctionnement peuvent être distingués :

- le suivi de taxiways rectilignes à basse vitesse,
- la réalisation de manœuvres.

#### *Cas du suivi de taxiways rectilignes :*

Dans le cas du suivi de taxiways rectilignes, le but de la commande est de stabiliser l'avion sur une trajectoire rectiligne [Hade 1999]. Les différentes hypothèses simplificatrices utilisées dans [Villaume 2002] restent donc valables et le comportement de l'avion peut alors être représenté par un système dont la matrice d'état correspond à (voir l'équation 1.83) :

$$A = \frac{1}{V_X} \begin{bmatrix} -I_{zz}^{-1}(4 G_{y_{TP}} L_{tp}^2 + 2 G_{y_{RA}} L_{ra}^2) & I_{zz}^{-1}(4 G_{y_{TP}} L_{tp} - 2 G_{y_{RA}} L_{ra}) \\ -V_X^2 + \frac{4 G_{y_{TP}} L_{tp} - 2 G_{y_{RA}} L_{ra}}{m} & -\frac{4 G_{y_{TP}} + 2 G_{y_{RA}}}{m} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Factorisation par l'inverse de la vitesse

Terme de couplage entre vitesse de lacet et vitesse latérale.

(Par souci de simplification, on se place dans le cas d'un roulage à basse vitesse : les efforts aérodynamiques sont négligés.)

Les notations utilisées dans cette partie sont légèrement simplifiées. Elles sont telles que :

$$L_{RA} = L_{X_{RA}} \text{ et } L_{TP} = L_{X_{TP}}. \quad (4.7)$$

Comme le montre cette représentation matricielle (4.6), le système se comporte de manière plus saine qu'à haute vitesse. L'avion réagit plus rapidement aux sollicitations du pilote et les couplages entre la vitesse de lacet et la vitesse latérale sont fortement réduits. Cette modification du comportement de l'avion est liée au fait que la matrice d'état peut être factorisée par l'inverse de la vitesse longitudinale et au fait qu'un des termes de couplage est proportionnel au carré de cette vitesse. Ce terme correspond aux variations de l'angle de dérapage au centre de gravité, générées par les forces centrifuges.

Ainsi, aux basses vitesses, les valeurs propres du système associées aux dynamiques en vitesse latérale et en vitesse de lacet ne sont plus complexes conjuguées. Lorsque la vitesse longitudinale décroît, le système devient de plus en plus amorti et la pulsation propre croît.

Ce cas de fonctionnement s'inscrit donc dans la continuité directe des travaux réalisés pour les hautes vitesses et n'impose pas de modifications du modèle de synthèse et de la loi de commande. Nous ne les détaillerons donc pas plus.

### ***Cas de la réalisation de manœuvres :***

Dans ce cas de fonctionnement, le comportement du système est beaucoup plus non-linéaire. Les hypothèses simplificatrices relatives aux angles de dérapage et de braquage ou relatives à la courbure de la trajectoire ne sont plus valables. La synthèse de la loi de commande doit donc être entièrement revue sur la base d'un modèle de synthèse prenant en compte ces non-linéarités.

L'étude présentée dans cette partie a ainsi pour but d'étudier une loi de pilotage en vitesse de lacet, cohérente avec les travaux réalisés précédemment, tout en étant adaptée au cas particulier de la réalisation de manœuvres à basse vitesse. Cette étude permettra ainsi aboutir à la définition d'une loi de pilotage unique, utilisable quelle que soit la vitesse de roulage.

## **3.1. Modèle de synthèse**

Pour déterminer une telle loi de commande il est nécessaire de définir un modèle de synthèse le plus représentatif possible du comportement de l'avion quelle que soit la vitesse, et ce, tout en conservant une structure de modèle cohérente avec le modèle de synthèse utilisé pour traiter le cas des hautes vitesses. Notamment, il est donc indispensable de conserver inchangé le degré relatif du système. Ce nouveau modèle de synthèse devra donc négliger la dynamique des actionneurs. L'impact de cette hypothèse de modélisation sur le comportement du système commandé sera abordé à la fin de l'étude (au paragraphe 4.3).

Ce modèle de synthèse se base sur une représentation à trois degrés de liberté de l'avion au sol. Pour se faire, on néglige les dynamiques de l'avion en roulis, tangage et suivant l'axe vertical. Comme l'a présenté le 1<sup>er</sup> chapitre, cette réduction du modèle revient à considérer les amortisseurs comme infiniment rigides et le sol comme parfaitement plat.

En considérant que la vitesse évolue suffisamment lentement, il est aussi possible de ne pas prendre en compte la dynamique longitudinale de l'avion.

Le modèle de synthèse ainsi obtenu est donc un modèle d'ordre 2 (en vitesse de lacet et en vitesse latérale) que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} [L_{RA} \cdot F_{y_{RA}} - L_{TP} \cdot F_{y_{TP}} + Mr'_{AERO} + Mr_{RUD}] \\ \dot{V}_y = \frac{1}{m} [F_{y_{RA}} + F_{y_{TP}} + F_{y_{AERO}}] - r \cdot V_x \end{cases} \quad (4.8)$$

$Mr'_{AERO}$  désigne la composante du moment aérodynamique de lacet, généré par le dérapage air et la vitesse de lacet et  $Mr_{RUD}$ , le moment dû au braquage de la dérive.

$$Mr'_{AERO} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot e_{AERO} \cdot V_{AIR}^2 \cdot \left( Cn_{\beta} \cdot \beta_{CG} + Cn_r \cdot \frac{e_{AERO}}{V_{AIR}} \cdot r \right) \quad (4.9)$$

$$\text{avec : } \beta_{CG} = \arctg\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \quad (4.10)$$

Pour faciliter l'inversion d'un tel modèle, on représente les efforts latéraux générés par le dérapage des pneus de la forme (modèle LAAS) :

$$F_y = 2 F_{y_{MAX}} \times \frac{\beta_{OPT} \times \beta}{\beta_{OPT}^2 + \beta^2} \quad (4.11)$$

Les angles de dérapage locaux peuvent quand à eux être obtenus à l'aide des équations (1.17, 1.18 et 1.19).

### 3.2. Inversion de la dynamique en vitesse de lacet

Cette étape reprend les travaux réalisés pour le suivi d'axe de piste. Elle consiste à inverser la dynamique de l'avion en lacet.

L'expression de la dérivée de la vitesse de lacet peut être écrite directement en fonction du moment global issu des actionneurs :

$$\dot{r} = I_{ZZ}^{-1} [Mr_{TP} + Mr'_{AERO} + Mr_{ACT}] \quad (4.12)$$

( $Mr_{TP}$  correspond au moment de lacet dû aux efforts sur les trains principaux.)

avec dans le cas de l'utilisation possible de la gouverne de direction et des roues avant :

$$Mr_{ACT} = Mr_{RUD} + Mr_{RA} \quad (4.13)$$

( $Mr_{RA}$  : moment dû au braquage des roues avant.)

La dynamique de l'avion en vitesse latérale est rendue inobservable par l'inversion. Cette dynamique étant parfaitement stable, ce point ne présente aucune difficulté majeure.

En inversant cette équation, il est possible de déterminer un moment de consigne à partir d'un objectif en dérivée de la vitesse de lacet :

$$Mr_{ACT} = I_{ZZ} \cdot [\dot{r}]_C - Mr_{TP} - Mr'_{AERO} \quad (4.14)$$

Le moment aérodynamique  $Mr'_{AERO}$  peut être estimé à partir de l'équation (4.9) sur la base d'une estimation du dérapage air ( $\beta_{CG}$ ) et des coefficients aérodynamiques. Ces derniers peuvent, par exemple, être obtenus à l'aide de tableaux d'interpolation ou encore de réseaux de neurones.

On peut noter que ce moment est proportionnel au carré de la vitesse longitudinale (air). Ainsi, ce terme n'est significatif qu'aux vitesses importantes.

De son côté, le moment dû aux efforts sur les trains principaux dépend, au travers du contact pneu/sol, des angles de dérapages locaux et des charges verticales appliquées sur chaque train. Deux solutions différentes peuvent permettre d'évaluer ces efforts :

- utiliser un modèle des pneumatiques,
- utiliser des mesures accélérométriques et gyroscopiques.

La première solution conduit forcément à des erreurs d'estimation significatives (modélisation des pneumatiques très incertaine) et entraîne une quantité de calculs importante. La deuxième solution, par contre, semble relativement intéressante.

Cette deuxième solution s'appuie sur l'équation de la dynamique latérale de l'avion :

$$m \cdot (\dot{V}_y + r \cdot V_x) = F_{y_{TP}} + F_{y_{RA}} + F_{y_{AERO}} \quad (4.15)$$

$F_{y_{AERO}}$  rassemble l'ensemble des forces aérodynamiques latérales. Au basse vitesses, ce terme n'a qu'une faible influence sur la dynamique de l'avion. Il ne sera donc pas pris en compte dans cette étude (les forces aérodynamiques latérales sont assimilées à des perturbations).

On obtient alors :

$$M_{TP} = -L_{TP} \cdot F_{y_{TP}} = -L_{TP} \cdot m \cdot (\dot{V}_y + r \cdot V_x) + L_{TP} \cdot F_{y_{RA}} \quad (4.16)$$

De son côté, la dynamique en lacet est représentée par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= I_{zz}^{-1} \cdot [M_{r_{TP}} + M_{r'_{AERO}} + M_{r_{RUD}} + M_{r_{RA}}] \\ &= I_{zz}^{-1} \cdot [-L_{TP} \cdot m \cdot (\dot{V}_y + r \cdot V_x) + M_{r'_{AERO}} + M_{r_{RUD}} + (L_{RA} + L_{TP}) \cdot F_{y_{RA}}] \\ &= I_{zz}^{-1} \cdot [-L_{TP} \cdot m \cdot (\dot{V}_y + r \cdot V_x) + M_{r'_{AERO}} + M_{r_{RUD}} + \tilde{M}_{r_{RA}}] \end{aligned} \quad (4.17)$$

En considérant un nouveau moment global :

$$\tilde{M}_{r_{ACT}} = M_{r_{RUD}} + \tilde{M}_{r_{RA}} \quad \text{avec,} \quad \tilde{M}_{r_{RA}} = (L_{RA} + L_{TP}) \cdot F_{y_{RA}} \quad (4.18)$$

Le moment de consigne correspondant peut alors être obtenu grâce à la loi de commande :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{r_{ACT}} &= I_{zz} \cdot [\dot{r}]_C + L_{TP} \cdot m \cdot (\dot{V}_y + r \cdot V_x) - M_{r'_{AERO}} \\ &= I_{zz} \cdot [\dot{r}]_C + L_{TP} \cdot m \cdot n_y - M_{r'_{AERO}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Cette formulation présente l'avantage d'être adaptée à toute configuration de trains principaux (nombre, type et position des roues). Seule la distance entre le centre de gravité et le point moyen d'application des forces ( $L_{TP}$ ) doit être évaluée.

### 3.3. Inversion des modèles actionneurs

N'est pour l'instant considéré que le braquage des roues avant et de la gouverne de direction.

#### 3.3.1. Inversion du modèle de la gouverne de direction :

L'efficacité de la gouverne de direction est donnée par l'équation :

$$M_{r_{RUD}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot e_{AERO} \cdot V_{AIR}^2 \cdot C_n \delta_r \cdot \delta_r \quad (4.20)$$

En inversant cette équation (4.20), on obtient alors la consigne de braquage :

$$\delta_{r_C} = \frac{2 M_{r_{RUDC}}}{\rho \cdot S \cdot e_{AERO} \cdot V_{AIR}^2 \cdot C_n \delta_r} \quad (4.21)$$

### 3.3.2. Inversion du modèle des roues avant :

Comme l'a présenté le premier chapitre, le moment généré par les roues avant peut s'écrire :

$$M_{r_{RA}} = L_{RA} \times F_{y_{RA}}(\beta_{RA}, F_{z_{RA}}, V_X, \dots) \quad (4.22)$$

$$\text{avec, } \beta_{RA} = \arctg\left(\frac{V_y + L_{RA} \times r}{V_X}\right) - \theta_{RA} \quad (4.23)$$

$$= \beta_{AV} - \theta_{RA}$$

$\theta_{RA}$  est l'angle de braquage des roues avant.

En inversant cette équation, on peut écrire :

$$\theta_{RA} = \beta_{AV} - F_{y_{RA}}^{-1}\left(\frac{M_{r_{RA}}}{L_{RA}}, F_{z_{RA}}, V_X, \dots\right) \quad (4.24)$$

$F_{y_{RA}}^{-1}$  est l'inverse de la fonction  $F_{y_{RA}}$  par rapport à l'angle de dérapage ( $\beta_{RA}$ ). Cette fonction non-linéaire n'est inversible que pour des angles de dérapage compris entre  $-\beta_{OPT}$  et  $\beta_{OPT}$ . La réalisation de cette inversion suppose donc de ne pas sortir de cet intervalle. Cette limitation de l'angle de dérapage revient à introduire une saturation en entrée du système.

Cette deuxième inversion, implique aussi le calcul de l'angle d'orientation du vecteur vitesse aux roues avant ( $\beta_{AV}$ ) et l'inversion de l'équation caractéristique des pneumatiques.

#### *Inversion de l'équation caractéristique des pneumatiques :*

L'inversion de l'équation caractéristique des pneumatiques ( $F_{y_{RA}}(\beta_{RA})$ ) peut s'avérer plus ou moins complexe suivant la précision du modèle de pneu utilisé. Dans le cas du suivi d'axe de piste, les angles de dérapage restant petits, il est possible de modéliser l'adhérence pneu/sol par un gain, le cornering gain. Cette modélisation n'est pas représentative du comportement des pneumatiques durant les manœuvres. Ainsi, à partir d'un angle de dérapage donné ( $\beta_{RA\ OPT}$ ), l'effort généré par les pneus atteint un maximum ( $F_{y\ PNEU\ MAX}$ ) avant de décroître. Plusieurs modélisations ont pu être introduites au chapitre 1. La modélisation utilisée ici présente l'avantage de rester relativement simple et facilement inversible. En assimilant les pneus avant droit et gauche à un pneu unique, on a alors :

$$F_{y_{RA}} = 2 \cos(\theta_{RA}) \times F_{y\ PNEU} \quad (4.25)$$

$$\text{et, } F_{y\ PNEU} = 2 F_{y\ PNEU\ MAX} \times \frac{\beta_{RA\ OPT} \times \beta_{RA}}{\beta_{RA\ OPT}^2 + \beta_{RA}^2} \quad (4.26)$$

Cette expression peut être réécrite en fonction du cornering gain :

$$G_{y_{RA}} = \left. \frac{\partial F_{y\ PNEU}}{\partial \beta_{RA}} \right|_0 = \frac{2 F_{y\ PNEU\ MAX}}{\beta_{RA\ OPT}} \quad (4.27)$$

Ce qui donne :

$$F_{y\ PNEU} = G_{y_{RA}} \times \beta_{RA} \times \frac{\beta_{RA\ OPT}^2}{\beta_{RA\ OPT}^2 + \beta_{RA}^2} \quad (4.28)$$

En linéarisant cette expression pour de petits dérapages, on retrouve bien la relation de proportionnalité entre l'angle de dérapage et la force latérale, utilisée dans le cas du suivi d'axe de piste.

En inversant cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_{RA\ C} &= \frac{F_{y\ PNEU\ C}}{G_{y\ RA}} \times \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \times F_{y\ PNEU\ C}^2}{G_{y\ RA}^2 \times \beta_{RA\ OPT}^2}}\right)} \\ &= \frac{F_{y\ PNEU\ C}}{G_{y\ RA}} \times \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{F_{y\ PNEU\ C}^2}{F_{y\ PNEU\ MAX}^2}}\right)}\end{aligned}\quad (4.29)$$

On peut remarquer que, dans un voisinage de zéro, cette équation correspond bien à l'inverse de la modélisation linéaire du comportement de pneus.

Les paramètres utilisés dans cette modélisation des pneumatiques (4.28) dépendent de nombreux paramètres : la charge verticale, la vitesse, l'état de la piste, le type de pneu, entre autre. Certains de ces paramètres peuvent être mesurés ou estimés (la vitesse, la charge verticale), d'autres sont incertains (l'adhérence, le type de pneu). La prise en compte de ces différents éléments permettra d'améliorer la réponse de la loi mais augmentera aussi le nombre de calculs à effectuer.

Dans tous les cas, la loi de commande doit être robuste à l'apparition d'écarts entre le comportement réel des pneumatiques et le comportement théorique décrit par le modèle de synthèse. Ce problème de robustesse sera abordé de façon détaillée dans la partie 4.

### 3.4. Asservissement de la vitesse de lacet

On cherche dans ce paragraphe à asservir la vitesse de lacet de sorte à générer une consigne de variation de cette vitesse  $[\dot{r}]_c$ . (cf. (4.14) et (4.19)).

Cet asservissement peut être réalisé au travers d'un correcteur proportionnel tel que :

$$[\dot{r}]_c = \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.30)$$

Le système est alors théoriquement amené à suivre une dynamique linéaire du premier ordre :

$$\dot{r}_c = [\dot{r}]_c = \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.31)$$

### 3.5. Supervision des actionneurs

Le problème de la supervision des actionneurs a déjà été largement étudié dans le travaux relatifs au suivi d'axe de piste.

La solution proposée ici se base directement sur ces travaux. Elle permet de répartir la commande entre les roues avant et la gouverne de direction suivant une caractéristique basée sur la vitesse de l'avion.

Pour ce faire, on définit un gain  $k_{ACT}$  dépendant de la vitesse.

La consigne en moment liée au braquage de la dérive est définie par :

$$Mr_{RUD} = k_{ACT} \cdot Mr_{ACT} \quad (4.32)$$

La consigne d'orientation des roues avant doit alors être telle que :

$$Mr_{ACT} = Mr_{RUD} + Mr_{RA} \quad (4.33)$$

Elle s'écrit donc :

$$Mr_{RA} = (1 - k_{ACT}) \cdot Mr_{ACT} \quad (4.34)$$

Un exemple simple de définition du gain  $k_{ACT}$  est donné sur la figure 4.1. Ce type de transition est comparable aux transitions déjà mises en oeuvre sur avion.

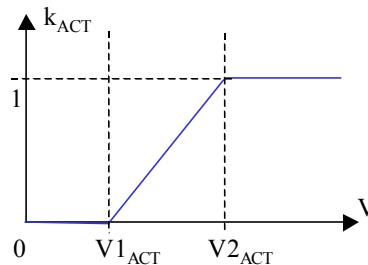


figure 4.1 : Exemple de fonction de répartition de la consigne entre roues avant et gouverne de direction.

### 3.6. Adaptation de la cinématique de commande

On appelle cinématique de commande une fonction permettant de traduire les actions du pilote sur ses organes de commande en consignes pour les lois. Cette cinématique permet ici de définir une consigne en vitesse de lacet. Elle est directement associée à des questions d'ergonomie et aux sensations qu'a le pilote en contrôlant l'appareil. Sa détermination détaillée ne peut être réalisée qu'avec un pilote dans la boucle, en essais ou en simulation.

En amont de cette évaluation détaillée, une première étude a permis d'obtenir une définition initiale de cette cinématique. Elle se base sur l'expérience acquise par l'avionneur.

Dans le cas du suivi d'axe de piste, ces travaux ont abouti à calibrer le palonnier en vitesse de lacet. Cette calibration est réalisée en fonction de la vitesse de l'avion. Pour un débatement maximum du palonnier, la consigne en vitesse de lacet est choisie de sorte à obtenir une accélération maximale donnée ( $ny_{MAX}$ ), en régime stabilisé. (L'autorité du pilote est alors réduite avec la vitesse.)

Cette vitesse de lacet maximale commandée s'écrit :

$$r_{MAX} = - \frac{ny_{MAX} \ g}{V_X} \quad (4.35)$$

Les résultats obtenus, aussi bien en simulation qu'en essai sur avion, semblent confirmer l'intérêt d'utiliser une telle cinématique.

Dans le cas de vitesses longitudinales plus faibles, ce maximum est impossible à atteindre. L'utilisation des organes de commande n'est alors pas optimale. De plus, la cinématique actuelle du tiller (le volant de commande du braquage des roues) ne posant pas de problème, il peut s'avérer avantageux de conserver une cinématique proche de celle de la loi directe et ainsi de conserver un pilotage proche de celui des autres avions de la gamme (maintient des « cross crew qualifications » permettant aux pilotes de passer facilement d'un type d'appareil à un autre).

Ainsi, dans le cas du tiller, un autre critère de pilotage est utilisé. Ce critère est relatif à l'orientation de la vitesse au niveau des roues avant ( $\beta_{AV}$ ) (voir figure 4.2) qui peut être calculée par l'équation :

$$\beta_{AV} = \arctg\left(\frac{V_y + L_{RA} \times r}{V_x}\right) \quad (4.36)$$

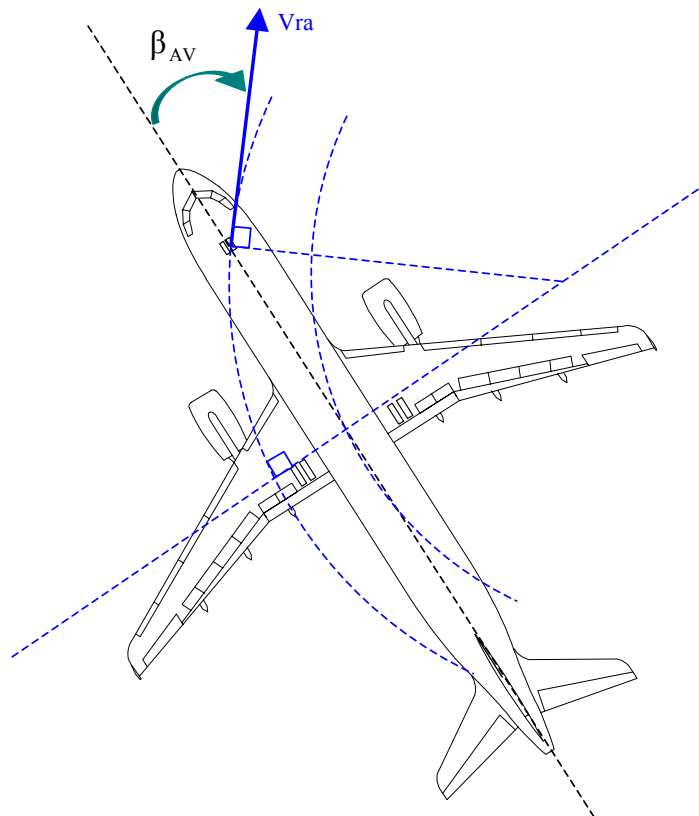


figure 4.2 : Représentation schématisée de l'angle d'orientation du vecteur vitesse aux roues avant ( $\beta_{AV}$ ).

A partir de ce nouveau critère de pilotage, il est possible de déterminer une consigne en vitesse de lacet, cohérente avec la consigne issue du palonnier. De ce fait, l'utilisation d'un tel critère n'impose pas de modifications de la loi de commande.

Cette consigne en vitesse de lacet s'écrit :

$$r_C = \frac{\operatorname{tg}(\beta_{AVC}) \times V_X - V_Y}{L_{RA}} \quad (4.37)$$

Il s'agit alors de déterminer  $\beta_{AVC}$  en fonction de la déflexion des organes de commande. Deux solutions sont envisagées :

- Utiliser la cinématique de commande actuellement utilisée dans la loi directe d'orientation des roues avant.
- Utiliser une cinématique optimisée, proche de celle mise au point pour le palonnier, basée sur un maximum en facteur de charge.

En suivant ce principe, on introduit alors un  $\beta_{AVC}$  maximum que l'on peut définir par :

$$\beta_{AVMAX} = \arctg\left(\frac{V_Y + L_{RA} \times r_{MAX}}{V_X}\right) = \arctg\left(\frac{V_Y}{V_X} - \frac{L_{RA} \times n_{YMAX} g}{V_X^2}\right) \text{ tant que } \beta_{AVMAX} \leq 74^\circ. \quad (4.38)$$

Lorsque  $\beta_{AVMAX}$  devient supérieur, on le limite alors à cette valeur ( $\beta_{AVMAX} = 74^\circ$ ).

(Par soucis de simplification, il est possible de négliger  $V_Y$  dans l'équation (4.38).)

## 3.7. Description globale de la loi de commande

### 3.7.1. Architecture de la loi

La loi de commande, ainsi définie, peut être divisée en cinq parties distinctes :

- Une cinématique de commande servant d'interface entre la loi de commande et le pilote.  
La sortie de l'organe de commande (tiller, palonnier, ...) est transformée de manière à définir la consigne de l'asservissement. Cette transformation est un élément essentiel de la loi notamment vis à vis de la "pilotabilité".
- La boucle d'asservissement en lacet.  
A partir de la consigne du pilote, cette boucle aura pour but de définir une consigne globale en variation de la vitesse de lacet, permettant de suivre une dynamique déterminée.
- L'inversion de la dynamique de l'avion.  
Cette inversion permet de traduire la consigne de variation de la vitesse de lacet en une consigne globale de moment à générer par les actionneurs, suivant l'axe du lacet.
- Une supervision des actionneurs.  
Elle correspond à la logique de répartition du moment de consigne présentée précédemment pour le suivi d'axe de piste. Elle permet l'utilisation optimisée des différents actionneurs pouvant agir sur l'attitude de l'avion (braquage des roues avant, de la gouverne de direction, freinage ou poussée moteur dissymétrique, ...).
- L'inversion des modèles des actionneurs.  
Le but de cette inversion est d'estimer les sollicitations à commander aux actionneurs pour obtenir les moments désirés.

### 3.7.2. Représentation schématique

La loi de commande peut-être aussi être décrite par le schéma suivant :

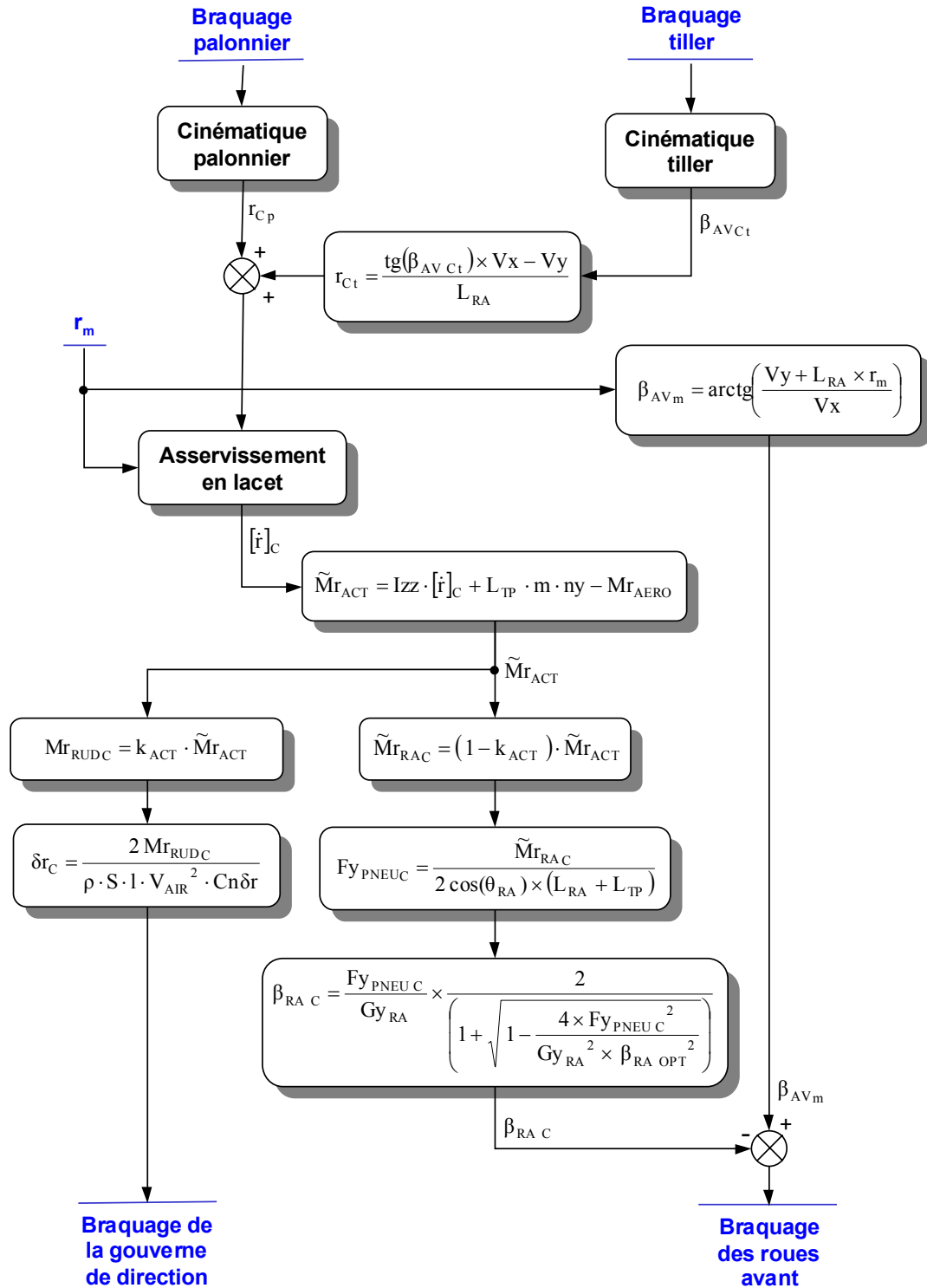


figure 4.3 : Représentation schématique de la loi de pilotage latérale dans sa définition initiale

## 4. Etude de la robustesse de la loi

La détermination de la loi de commande est basée sur l'utilisation d'un modèle de synthèse sensé représenter parfaitement le processus. Dans le cas où cette hypothèse est vérifiée, la dynamique suivie par le système est alors directement déterminée par le réglage des gains de l'asservissement.

En fait, le modèle de synthèse n'est qu'une représentation simplifiée du système et la dynamique réellement suivie par l'avion peut, dans certains cas, différer significativement de la dynamique théoriquement obtenue.

Cette partie a pour but d'évaluer le comportement du système commandé dans le cas où il existe des écarts entre le modèle de synthèse et la réalité, d'en déduire des contraintes relatives au réglage des gains et de chercher à déterminer des adaptations possibles de la loi.

Dans le cas qui nous occupe, les causes des principaux écarts qui peuvent apparaître entre le modèle de synthèse et le comportement réel de l'avion sont :

- les incertitudes relatives au contact pneus/sol et à la présence de perturbations (vent de travers, panne moteur, offset sur le braquage des roues,...),
- les saturations en braquage et vitesse de braquage et à l'adhérence maximum des roues (ces saturations ne peuvent être directement prises en compte dans le design de la commande),
- la dynamique du système d'orientation des roues avant (négligée dans le modèle de synthèse).

### 4.1. Erreurs de modélisation et perturbations extérieures

La mise au point de la loi de pilotage latéral est basée sur une modélisation dont certaines composantes présentent un degré d'incertitude élevé. La principale source d'incertitude est liée à la méconnaissance de l'adhérence pneu/sol. L'objectif de cette étude est de vérifier la robustesse de la loi de commande vis à vis d'écarts entre la modélisation des pneumatiques utilisée lors de la synthèse de la loi et leur comportement réel. Cette étude prendra aussi en compte l'influence de perturbations (vent de travers, dissymétries de poussée, mauvais calage des roues avant, etc.) sur la dynamique latérale (force latérale parasite :  $F_{y_p}$ ) et sur la dynamique en lacet (moment parasite :  $M_p$ ).

#### 4.1.1. Comportement de l'avion aux basses vitesses

Par soucis de simplification, cette étude a d'abord été réalisée pour le cas du roulage à basse vitesse, pour lequel les efforts aérodynamiques deviennent négligeables. Le cas de vitesse plus importantes sera abordé dans le paragraphe 4.1.2.

On se place donc dans le cas où toute l'autorité est donnée au braquage des roues (aucune commande de braquage de la dérive) et où les efforts aérodynamiques sont négligeables (cas où les erreurs d'estimation sont maximum).

Deux erreurs de modélisation sont considérées :

- une erreur relative aux efforts sur les roues avant, notée  $\varepsilon_{RA}$
- une erreur relative aux efforts sur les trains principaux, notée  $\varepsilon_{TP}$

Ces erreurs sont définies par les relations :

$$\varepsilon_{RA} = \frac{F_{y_{RA}} - \hat{F}_{y_{RA}}}{\hat{F}_{y_{RA}}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{TP} = \frac{F_{y_{TP}} - \hat{F}_{y_{TP}}}{\hat{F}_{y_{TP}}} \quad (4.39)$$

Les chapeaux désignent les paramètres calculés dans le modèle de synthèse.

$$\text{En définissant } \begin{cases} \lambda_{RA} = (1 + \varepsilon_{RA}) \\ \lambda_{TP} = (1 + \varepsilon_{TP}) \end{cases}, \quad \text{on obtient : } \begin{cases} F_{y_{RA}} = \lambda_{RA} \times \hat{F}_{y_{RA}} \\ F_{y_{TP}} = \lambda_{TP} \times \hat{F}_{y_{TP}} \end{cases} \quad (4.40)$$

La modélisation de l'avion au sol s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} [L_{RA} \cdot F_{y_{RA}} - L_{TP} \cdot F_{y_{TP}} + M_p] \\ \dot{V}_y = \frac{1}{m} [F_{y_{RA}} + F_{y_{TP}} + F_{y_p}] - r \cdot V_x \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\text{soit, } \begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} [L_{RA} \cdot \hat{F}_{y_{RA}} \cdot \lambda_{RA} - L_{TP} \cdot \hat{F}_{y_{TP}} \cdot \lambda_{TP} + M_p] \\ \dot{V}_y = \frac{1}{m} [\hat{F}_{y_{RA}} \cdot \lambda_{RA} + \hat{F}_{y_{TP}} \cdot \lambda_{TP} + F_{y_p}] - r \cdot V_x \end{cases} \quad (4.42)$$

La consigne de braquage définie par la loi est :

$$\theta_{RA} = \beta_{AV} - \hat{F}_{y_{RA}}^{-1} \left( \frac{[\dot{r}]_C \cdot I_{ZZ} + L_{TP} \cdot \hat{F}_{y_{TP}}}{L_{RA}} \right) \quad (4.43)$$

$$\text{d'où : } \hat{F}_{y_{RA}} = \frac{[\dot{r}]_C \cdot I_{ZZ} + L_{TP} \cdot \hat{F}_{y_{TP}}}{L_{RA}} \quad (4.44)$$

On obtient une représentation de la dynamique de l'avion comparable à celle obtenue dans la partie 3.4 du chapitre 2 (équation 2.36) :

$$\dot{r} = \lambda_{RA} \times [\dot{r}]_C + (\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times \frac{L_{TP}}{I_{ZZ}} \cdot \hat{F}_{y_{TP}} + \frac{M_p}{I_{ZZ}} \quad (4.45)$$

Cette équation fait apparaître deux conséquences issues des erreurs de modélisation : l'une est équivalente à une modification des gains de l'asservissement, l'autre se traduit par l'apparition d'un biais proportionnel aux efforts générés par les trains principaux.

On peut constater que les efforts parasites interviennent par l'intermédiaire d'un biais supplémentaire.

Le biais lié aux efforts sur les trains principaux est dû à l'influence de la dynamique interne. Lors du roulage, cette dynamique modifie la vitesse latérale de manière à équilibrer les forces centrifuges et les efforts sur les trains.

Ce comportement du système peut être mis en avant dans l'expression des efforts sur les trains principaux grâce à l'utilisation du facteur de charge.

Il est ainsi possible, à partir de l'expression de la dynamique interne, d'exprimer la dynamique de l'avion en lacet sous la forme :

$$\dot{r} = \rho \times [\dot{r}]_c + \Delta \quad (4.46)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \rho = \frac{\lambda_{RA} \cdot \lambda_{TP} \cdot (L_{RA} + L_{TP})}{L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA}} \\ \Delta = \frac{(\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA}}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} \times [m \cdot n_y - F_{y_p}] + \frac{M_p}{I_{ZZ}} \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\text{et, } n_y = \dot{V}_y + r V_x$$

Le facteur de charge est en fait principalement dû aux forces centrifuges :  $\dot{V}_y$  peut être négligée.

On obtient alors :

$$\Delta = \frac{(\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA} \cdot m \cdot V_x}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} \times r - \frac{(\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA} \times F_{y_p}}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} + \frac{M_p}{I_{ZZ}} \quad (4.48)$$

Dans le cas de l'utilisation d'un correcteur de type proportionnel, la dynamique de l'avion en lacet correspond alors à :

$$\dot{r} = \rho' \times \frac{1}{\tau} (r_c - r) + \Delta' \quad (4.49)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \rho' = \rho - \frac{\tau \times (\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA} \cdot m \cdot V_x}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} \\ \Delta' = \frac{(\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA}}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} \times [m \cdot V_x \cdot r_c - F_{y_p}] + \frac{M_p}{I_{ZZ}} \end{cases} \quad (4.50)$$

L'évaluation des erreurs potentielles de modélisation doit permettre de borner les variations de  $\lambda_{RA}$  et  $\lambda_{TP}$ . A partir de ces intervalles, il devient alors possible de vérifier que le comportement du système commandé correspond bien aux objectifs et contraintes relatives à la loi de commande et ainsi de vérifier la robustesse de la loi :

- Pour assurer la stabilité du système,  $\rho'$  doit toujours rester positif. Il faut donc que :

$$\lambda_{TP} \geq \lambda_{RA} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP}) \cdot I_{ZZ}}{\lambda_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP}) \cdot I_{ZZ} + \tau \cdot L_{RA} \cdot L_{TP} \cdot m \cdot V_x} \right) \quad (4.51)$$

- En ayant  $\rho'$  inférieur à 1, le réglage de la loi sera facilité. En effet, ce réglage est limité par l'influence de la dynamique du système d'orientation des roues avant et par la présence des saturations sur la commande. Comme nous le verrons dans la suite, si la dynamique suivie par le système est trop rapide, la loi de commande risque alors de générer des dépassements inacceptables de la consigne, voire même, dans des cas extrêmes, des oscillations entretenues. Ce réglage étant réalisé pour obtenir un comportement théorique du système correspondant au cas  $\rho' = 1$  (modèle de synthèse), on se place alors dans le cas le plus pénalisant (dynamique la plus rapide) et donc, on garantit un bon comportement du système dans des conditions dégradées.

Les deux remarques précédentes signifient qu'il est préférable de surestimer les efforts dans le modèle de synthèse et d'avoir une meilleure précision pour les trains principaux que pour les roues avant. Cela revient donc à considérer l'adhérence comme maximale et à privilégier l'utilisation des mesures accélérométriques pour estimer les efforts sur les trains principaux (cf. partie 3.2).

Le terme  $\Delta'$ , de son côté, induit une erreur statique. Cette erreur est fonction de la consigne en lacet et des forces et moments parasites. Lorsque la vitesse de lacet atteint cette consigne ( $r = r_c$ ), on peut constater que l'erreur statique est partiellement due à la force centrifuge ( $r.Vx$ ). Sur des trajets rectilignes, seuls les efforts parasites interviennent encore.

Cette erreur statique met en évidence l'intérêt de l'introduction d'un correcteur intégral pour assurer la rejointe de la consigne. On peut par exemple utiliser un asservissement de type proportionnel intégral. Dans ce cas, on a :

$$[\dot{r}]_c = 2z\omega(r_c - r) + \frac{\omega^2}{p}(r_c - r) \quad (4.52)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \rho \times 2z\omega(r_c - r) + \rho \times \frac{\omega^2}{p}(r_c - r) + \Delta \\ &= \rho' \times 2z\omega(r_c - r) + \rho \times \frac{\omega^2}{p}(r_c - r) + \Delta' \end{aligned} \quad (4.53)$$

La valeur de  $\frac{1}{2z\omega}$  correspond au  $\tau$  utilisé précédemment.

Dans ce cas, la dynamique du système commandé correspond à :

$$r = \frac{\left(1 + \frac{2z'}{\omega'}p\right) \times r_c}{1 + \frac{2z'}{\omega'}p + \frac{1}{\omega'^2}p^2} + \frac{1}{\omega'^2} \times \frac{p\Delta}{1 + \frac{2z'}{\omega'}p + \frac{1}{\omega'^2}p^2} \quad \text{avec : } \begin{cases} \omega' = \sqrt{\rho} \times \omega \\ z' = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho}} \times z \end{cases} \quad (4.54)$$

Lorsque l'adhérence est dégradée, la dynamique du système est ralentie et son amortissement est réduit. La stabilité est assurée mais il faudra vérifier que, pour un fonctionnement normal de l'avion, dans le cas le plus défavorable,  $z$  est choisi assez grand pour garantir que l'amortissement reste suffisant et ainsi qu'il ne dégrade pas outre mesure le pilotage.

Une étude plus complète du problème de l'ajout d'une correction intégrale sera réalisée dans la partie 4.4.

### **Remarque :**

Il est possible d'englober dans les erreurs de modélisation l'influence d'éventuels bruits ou erreurs de mesure. Pour borner les variations de  $\lambda_{RA}$  et  $\lambda_{TP}$ , il faudra alors prendre aussi en compte l'impact des variables mesurées sur la détermination des efforts dans le modèle de synthèse.

#### 4.1.2. Comportement de l'avion aux vitesses importantes

Lorsque la vitesse devient plus importante, les efforts aérodynamiques ne sont plus négligeables. On peut alors les dissocier en deux composantes. La première rassemble les efforts dus à la vitesse de déplacement de l'avion (vitesse sol). La deuxième correspond à l'action du vent qui est considérée ici comme une perturbation extérieure. Les écarts entre le moment aérodynamique réel et son estimation (réalisée dans la loi) sont donc assimilés à des perturbations ( $M_p$ ).

La gouverne de direction agissant sur l'avion de manière complémentaire à l'action des roues avant, on assimile ici le terme  $\lambda_{RA}$  à un terme d'erreur relatif à la somme des moments générés par le braquage de la gouverne de direction et des roues avant.

En supposant que la loi de commande surestime la contribution de la gouverne de direction,  $\lambda_{RA}$  restera inférieur à 1. Le moment aérodynamique ne sera alors pas entièrement « contrôlé » par la loi. La configuration aérodynamique d'un avion de transport civil étant stable, ce moment aura alors pour effet d'accroître la stabilité globale de l'avion.

Le moment aérodynamique étant proportionnel au carré de la vitesse, plus cette dernière augmentera, plus son action stabilisante sera significative.

De plus, l'efficacité de la gouverne de direction étant beaucoup mieux connue que celle des roues avant, plus la vitesse sera élevée et plus  $\lambda_{RA}$  sera proche de 1. Le comportement de l'avion sera alors nettement plus proche du comportement théorique donné par le modèle de synthèse.

On voit ainsi, à partir de cette présentation qualitative de l'impact des efforts aérodynamiques sur le comportement du système commandé, que les critères de robustesse présentés précédemment pourront être en partie relaxés aux grandes vitesses.

#### 4.1.3. Application de ces résultats au cas de l'A320 :

Le but de ce paragraphe est d'appliquer l'analyse précédente à un avion de type A320, fortement chargé ( $m=66,9$  t) et centré très avant ( $X_{cg}=18,5$  %).

On a alors :

$$\begin{array}{lll} I_{zz} = 3,77 \cdot 10^6 & L_{RA} = 10,9 \text{ m} & Gy_{RA} = 1,65 \cdot 10^5 \text{ N/rad} \\ l = 4,19 \text{ m} & L_{TP} = 1,74 \text{ m} & Gy_{TP} = 5,7 \cdot 10^5 \text{ N/rad} \end{array}$$

Cette étude considère les variations d'adhérence et toutes les mesures et estimations intervenant dans la linéarisation du modèle. Elle sera reprise et complétée à la fin de ce chapitre pour la loi de commande adaptée au cas des très basses vitesses et de l'arrêt.

#### *Détermination des évolutions possibles de $\lambda_{TP}$ :*

On se place dans le cas où les efforts sur les trains principaux sont estimés à partir de mesures accélérométriques. La précision de cette estimation est alors directement due à la qualité de la mesure de l'accélération latérale et à la qualité de l'estimation de la masse et de la position du centre de gravité.

$$\text{On a alors : } \lambda_{TP} = 1 + \frac{\Delta m}{m} + 1 \cdot \frac{\Delta X_{cg}}{L_{TP}} + \frac{\Delta y}{ny} \quad (4.55)$$

(Le préfixe  $\Delta$  désigne l'erreur de détermination de la variable.)

A  $ny$  très petit ou nul, les erreurs relatives à la mesure de l'accélération se traduisent par l'apparition d'un biais ( $\lambda_{TP}$  tend alors vers l'infini) :

$$\max(\Delta\theta_{RA}) = \frac{(1 - k_{ACT}) \cdot L_{TP} \cdot m}{2 \cos(\theta_{RA}) \cdot Gy_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP})} \times \Delta ny \quad (4.56)$$

Pour  $k_{ACT} = 0$ , on aura :

$$\max(\Delta\theta_{RA}) = \frac{L_{TP} \cdot m}{2 \cdot Gy_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP})} \times \Delta ny \quad (4.57)$$

La précision des mesures accélérométriques annoncée est :  $|\Delta ny| \leq 0.01 g$ . Pour une masse importante de l'avion (66,9 tonnes), on obtient :

$$|\Delta\theta_{RA}| \leq 0,156^\circ \quad (4.58)$$

Ce biais sera annulé grâce à la présence de l'intégrateur dont on traitera de l'implémentation en 4.4.

$\frac{\Delta m}{m}$  et  $\frac{\Delta X_{cg}}{L_{TP}}$  étant supposés très faibles,  $\lambda_{TP}$  restera proche de 1.

#### **Détermination des évolutions possibles de $\lambda_{RA}$ :**

Le calcul des efforts sur les roues avant est basé sur une modélisation correspondant à une adhérence maximum. Ce calcul nécessite la détermination de l'angle d'orientation de la vitesse aux roues avant, qui se base sur la mesure de la vitesse de lacet et des vitesses longitudinale et latérale. L'estimation de la position du centre de gravité joue aussi un rôle au travers de la distance  $L_{RA}$ . Cette estimation intervient dans la détermination de l'angle d'orientation de la vitesse mais aussi permet de réaliser le lien entre la force et le moment. Pour prendre en compte ce dernier élément, on associe à  $\lambda_{RA}$  le calcul du moment et non plus de la force. La mesure du braquage des roues avant interviendra aussi, mais de façon mineure.

On a :

$$\begin{aligned} \max(\lambda_{RA}) &= 1 + \varepsilon_{RA} + \Delta\theta_{RA} - 1 \cdot \frac{\Delta X_{cg}}{L_{RA}} + \frac{\Delta\beta_{AV}}{\beta_{AV}} \\ &= 1 + \varepsilon_{RA} + \Delta\theta_{RA} - 1 \cdot \frac{\Delta X_{cg}}{L_{RA}} + \frac{\Delta Vy + L_{RA} \cdot \Delta r_m + 1 \cdot \Delta X_{cg} \cdot r}{Vx \cdot \beta_{AV}} + \frac{\Delta Vx}{Vx + \Delta Vx} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Le terme  $\varepsilon_{RA}$  se rapporte uniquement ici aux problèmes liés à l'estimation de l'adhérence.

L'erreur de détermination de l'angle d'orientation de la vitesse aux roues avant se traduit en fait par l'apparition d'un biais équivalent qui modifie directement l'angle d'orientation des roues :

$$\Delta\theta_{RA} = \Delta\beta_{AV} \quad (4.60)$$

Pour des vitesses nulles ou faibles, cette expression fait apparaître le problème de la division par  $V_x$ , nécessaire à la détermination de  $\beta_{AV}$ . Ce problème, lié aux très basses vitesses, sera étudié et résolu dans la partie 5 ; l'impact de la mesure de la vitesse de lacet et des vitesses longitudinale et latérale y sera donc abordé plus en détail.

L'influence du centrage et de l'angle d'orientation des roues est négligeable vis à vis de l'impact des modifications possibles de l'adhérence : nous ne les distinguerons donc pas. Pour considérer le cas de la piste verglacée, on prend  $\lambda_{RA}$  borné entre 1 et 0,25.

L'estimation de l'inertie de l'avion suivant l'axe de lacet apparaît aussi dans le calcul de la commande. Une erreur sur cette estimation peut être répercutée directement et de manière identique sur  $\lambda_{RA}$  et  $\lambda_{TP}$ . Son effet correspond donc à une modification d'autant des gains de l'asservissement.

### **Conclusions sur la robustesse de la loi :**

L'étude précédente a permis d'obtenir la contrainte de stabilité :

$$\lambda_{TP} \geq \lambda_{RA} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP}) \cdot I_{ZZ}}{\lambda_{RA} \cdot (L_{RA} + L_{TP}) \cdot I_{ZZ} + \tau \cdot L_{RA} \cdot L_{TP} \cdot m \cdot V_x} \right) \quad (4.61)$$

Pour  $V_x = 0$ , cette inéquation signifie que  $\lambda_{TP}$  doit être positif.

Pour  $V_x = 70$  kt, dans le cas de cette application, on peut assurer la stabilité en ayant :

$$\lambda_{TP} \geq 0.4352 \quad (\text{correspond au cas le plus contraignant où } \lambda_{RA} = 1)$$

La stabilité sera donc assurée jusqu'à des erreurs de plus de 55 % sur l'estimation des efforts sur les trains principaux. De plus, la vitesse utilisée (70 kt) correspond à un cas extrême : cette étude s'est restreinte à un "pire cas" où la gouverne de direction n'est pas utilisée et où les effets aérodynamiques sont négligés. En fait, à une telle vitesse, la commande se divise en parts quasiment égales entre le système d'orientation des roues avant et la gouverne de direction. Ainsi, cette gouverne réagissant beaucoup plus rapidement que les roues avant et les effets aérodynamiques ayant tendance à augmenter la stabilité de l'avion (effet girouette), même pour des erreurs de plus de 55 % la stabilité restera largement assurée.

En ce qui concerne le temps de réponse, le comportement du système sur piste verglacée devra être validé par simulation, pour vérifier que l'augmentation du temps de réponse ne dégrade pas outre mesure la pilotabilité de l'avion.

Dans le cas de l'A320, on a :

$$\rho = \frac{\lambda_{RA} \cdot \lambda_{TP} \cdot (L_{RA} + L_{TP})}{L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA}} \geq 0,2786 \quad (4.62)$$

et,

$$\rho' = \rho - \frac{(\lambda_{RA} - \lambda_{TP}) \times L_{TP} \times L_{RA} \cdot m \cdot V_x}{I_{ZZ} (L_{RA} \cdot \lambda_{TP} + L_{TP} \cdot \lambda_{RA})} \geq 0.2786 + 0.0222 \cdot V_x \quad (4.63)$$

Quel que soit  $\lambda_{RA}$ , pour  $V_x \leq \frac{I_{ZZ}}{L_{TP} \cdot m} \approx 32,6$  m/s soit environ 63 kt, on aura  $\rho' \leq 1$ .

A une telle vitesse, le système d'orientation des roues est nettement moins sollicité, au profit de la gouverne de direction et, comme expliqué précédemment, les efforts aérodynamiques deviennent significatifs. Le cas de vitesses importantes doit ainsi être étudié indépendamment.

En ce qui concerne le domaine de fonctionnement dont il est question dans cette partie du document, on peut conclure que, dans le cas de l'utilisation d'un correcteur de type proportionnel, le temps de réponse restera compris entre sa valeur nominale et quatre fois cette valeur.

Comme on le verra par la suite, le temps de réponse nominal le plus court pouvant être choisi est de 1,3 secondes. Dans le cas de la piste verglacée, on aura alors un temps de réponse de 5,2 s. Ce temps de réponse minimum semble tout à fait convenable, sachant qu'à titre de comparaison le temps de réponse idéal des lois de pilotage est estimé par les spécialistes à 6s.

Si le correcteur est de type proportionnel intégral, l'amortissement nominal devra être d'au moins 1,9 pour garantir de conserver un amortissement supérieur à 1 quelles que soient les conditions.

$$z' = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho}} \times z \geq 1, \text{ donc } z \geq \frac{\sqrt{\rho}}{\rho'} \geq \frac{1}{\sqrt{\rho}} \approx 1,9 \quad (4.64)$$

## 4.2. Impact des saturations

La technique de linéarisation entrée/sortie (base de la commande non linéaire inverse) ne tient pas compte des différentes saturations pouvant apparaître. Cependant, en pratique, le système d'orientation des roues avant est fréquemment saturé. Les résultats théoriques précédents ne sont donc plus valables dans un tel cas de figure.

### 4.2.1. Impact sur la dynamique de l'avion

L'objectif de cette partie consiste à évaluer l'impact des saturations sur le comportement du système en boucle fermée et d'en tirer des conclusions vis à vis du réglage des gains.

#### *Approche intuitive du problème :*

Cette approche se base sur le fait que les saturations ont pour effet de limiter les capacités de l'avion à tourner rapidement. On peut constater que ces saturations limitent non seulement la vitesse de lacet mais aussi les variations de cette vitesse de lacet. Ainsi, pour atteindre rapidement un état final donné, la loi de commande doit chercher à augmenter la vitesse de lacet et à la stabiliser sur la consigne le plus rapidement possible. La commande en temps minimum permettant d'atteindre cette consigne sans la dépasser sera donc une commande de type "bang-bang" : se plaçant à saturation pour mettre en mouvement le système et, à partir d'un instant de commutation bien défini, se plaçant sur la saturation opposée pour le stabiliser sur la consigne.

Cette commande en temps minimum peut permettre d'aboutir à une propriété intéressante pour la loi de commande. En effet, la trajectoire de stabilisation décrite dans le plan de phase par cette réponse en temps minimum sera la plus rapide possible : toute évolution dépassant cette trajectoire conduira donc à un dépassement de la consigne. La loi de commande devra ainsi être réglée de telle sorte que la trajectoire théoriquement décrite par le système n'excède pas cette trajectoire limite de stabilisation.

**Définition d'un domaine accessible par la sortie :**

On cherche tout d'abord à déterminer l'impact des saturations sur les évolutions possibles de la sortie et de ses dérivées.

Le système est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} [L_{RA} \cdot F_{y_{RA}} - L_{TP} \cdot F_{y_{TP}} + M_p] \\ \dot{V}_y = \frac{1}{m} [F_{y_{RA}} + F_{y_{TP}} + F_{y_p}] - r \cdot V_x \end{cases} \quad \text{avec,} \quad \begin{cases} \theta_{RA \min} \leq \theta_{RA} \leq \theta_{RA \max} \\ \dot{\theta}_{RA \min} \leq \dot{\theta}_{RA} \leq \dot{\theta}_{RA \max} \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\text{On note : } \dot{r} = f_r(r, V_y, \theta_{RA}). \quad (4.66)$$

Pour un état donné du système ( $r$  et  $V_y$  données), la dérivée de  $r$  est bornée par deux fonctions de  $r$  et  $V_y$  :

$$[\dot{r}]_{\min 0} \leq \dot{r} \leq [\dot{r}]_{\max 0} \quad (4.67)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} [\dot{r}]_{\min 0} = \min_{\theta_{RA}} \{f_r(r, V_y, \theta_{RA})\} \\ [\dot{r}]_{\max 0} = \max_{\theta_{RA}} \{f_r(r, V_y, \theta_{RA})\} \end{cases} \quad (4.68)$$

L'énergie du système étant bornée,  $r$  l'est aussi (on ne se base pas ici sur une quelconque modélisation du système mais sur son comportement supposé réel). Il existe donc des états du système pour lesquels ces deux limites s'annuleront.

A  $V_y$  donnée, on note respectivement  $[r]_{\min 0}$  et  $[r]_{\max 0}$  les solutions des équations  $[\dot{r}]_{\min 0}(r, V_y) = 0$  et  $[\dot{r}]_{\max 0}(r, V_y) = 0$ . (Du fait des propriétés d'inversibilité du système, il y a unicité de la solution.)

On aura donc :

$$[r]_{\min 0} \leq r \leq [r]_{\max 0} \quad (4.69)$$

En dérivant l'équation  $\dot{r} = f_r(r, V_y, \theta_{RA})$ , on obtient :

$$\ddot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ L_{RA} \cdot \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \times \dot{\beta}_{AV} - L_{TP} \cdot \frac{\partial F_{y_{TP}}}{\partial \beta_{TP}} \times \dot{\beta}_{TP} \right] - \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \times \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \times \dot{\theta}_{RA} \quad (4.70)$$

$$\text{On note : } \ddot{r} = \Psi(r, V_y, \theta_{RA}, \dot{\theta}_{RA}). \quad (4.71)$$

Comme précédemment, pour un état et une entrée donnés, cette dérivée seconde de  $r$  sera bornée.

$$\text{On a : } [\ddot{r}]_{\min} \leq \ddot{r} \leq [\ddot{r}]_{\max} \quad (4.72)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} [\ddot{r}]_{\min} = \min_{\dot{\theta}_{RA}} \{\Psi(r, V_y, \theta_{RA}, \dot{\theta}_{RA})\} \\ [\ddot{r}]_{\max} = \max_{\dot{\theta}_{RA}} \{\Psi(r, V_y, \theta_{RA}, \dot{\theta}_{RA})\} \end{cases} \quad (4.73)$$

(Ces limitations sont des fonctions de  $r$ ,  $V_y$  et  $\theta_{RA}$ .)

Remarque :

Pour  $\theta_{RA} = \theta_{RA \max}$ , on a  $\ddot{r} = \Psi(r, Vy, \theta_{RA \max}, 0)$ . (4.74)

L'énergie du système étant bornée (pour le système réel), en suivant la même démarche que précédemment, il est possible de définir deux nouvelles bornes pour  $r$  et sa dérivée.

Soit respectivement  $[\dot{r}]_{\min 1}$ ,  $[\dot{r}]_{\max 1}$ ,  $[r]_{\min 1}$  et  $[r]_{\max 1}$  les solutions de  $[\ddot{r}]_{\min}(r, Vy, \theta_{RA}) = 0$ ,  $[\ddot{r}]_{\max}(r, Vy, \theta_{RA}) = 0$ ,  $[\dot{r}]_{\min 1}(r, Vy) = 0$  et  $[\dot{r}]_{\max 1}(r, Vy) = 0$ .

Les saturations du système ont donc pour effet de borner  $r$  et ses dérivées première et seconde. On peut définir un domaine de l'espace formé par  $r$  et ses dérivées tel que :

$$[r]_{\min} \leq r \leq [r]_{\max}, \quad [\dot{r}]_{\min} \leq \dot{r} \leq [\dot{r}]_{\max} \quad \text{et} \quad [\ddot{r}]_{\min} \leq \ddot{r} \leq [\ddot{r}]_{\max} \quad (4.75)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} [r]_{\min} = \max \{ [r]_{\min 0} ; [\dot{r}]_{\min 1} \} \\ [r]_{\max} = \min \{ [r]_{\max 0} ; [\dot{r}]_{\max 1} \} \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} [\dot{r}]_{\min} = \max \{ [\ddot{r}]_{\min 0} ; [\dot{r}]_{\min 1} \} \\ [\dot{r}]_{\max} = \min \{ [\ddot{r}]_{\max 0} ; [\dot{r}]_{\max 1} \} \end{cases} \quad (4.76)$$

On nomme ce domaine "*domaine accessible de r*".

Il est à noter que ses bornes sont fonction de l'état du système et de l'angle de braquage des roues : il n'est donc pas fixe mais peut se modifier dans le temps.

#### 4.2.2. Détermination de la réponse en temps minimum :

On cherche maintenant, à partir de ces résultats, à déterminer la réponse en temps minimum permettant de passer d'un état initial à un état final donné. Cette réponse ne sera pas forcément réalisable mais servira de support à la suite de cette étude sur le comportement de la commande non-linéaire inverse en cas de saturations.

Ce problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{min de } J &= \int_{t_0}^{t_f} dt & (4.77) \\ \text{sous, } \begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{I_{zz}} [L_{RA} \cdot F_{Y_{RA}} - L_{TP} \cdot F_{Y_{TP}} + M_p] \\ \dot{Vy} = \frac{1}{m} [F_{Y_{RA}} + F_{Y_{TP}} + F_{Y_p}] - r \cdot V_x \end{cases} & \text{avec, } \begin{cases} \theta_{RA \min} \leq \theta_{RA} \leq \theta_{RA \max} \\ \dot{\theta}_{RA \min} \leq \dot{\theta}_{RA} \leq \dot{\theta}_{RA \max} \end{cases} \\ \begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ \dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 \end{cases} & \text{et } \begin{cases} r(t_f) = r_c \\ \dot{r}(t_f) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On se place dans le cas où la consigne est supérieure à la valeur initiale de  $r$  (dans le cas opposé les calculs seront similaires). Pour éviter de dépasser cette consigne, on peut ajouter la contrainte :  $r \leq r_c$ .

A partir de la linéarisation du modèle présentée dans le chapitre 2, partie 3 et des résultats précédents, il est possible de réduire ce problème à :

$$\begin{aligned} \min \text{ de } J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad \text{sous, } \dot{r} = [\dot{r}]_c = v, \quad [r]_{\min} \leq r \leq r_c \leq [r]_{\max}, \quad (4.78) \\ \begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ \dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r(t_f) = r_c \\ \dot{r}(t_f) = 0 \end{cases} \\ \text{avec : } \begin{cases} [\dot{r}]_{\min} \leq v \leq [\dot{r}]_{\max} \\ [\ddot{r}]_{\min} \leq \dot{v} \leq [\ddot{r}]_{\max} \end{cases} \end{aligned}$$

L'analyse des conditions d'optimalité montre que la solution de ce problème est une commande de type "bang-bang". En supposant que la dérivée initiale de  $r$  est peu importante, dans une première phase, la commande  $v$  sera maximum pour chercher à rejoindre la consigne le plus rapidement possible. L'augmentation de la vitesse de lacet sera maximale : elle suivra la limite supérieure du domaine accessible.

Ensuite, à partir d'un instant de commutation noté  $t_{\text{com}}$ , le système cherchera à se stabiliser le plus rapidement possible sur la consigne. La commande  $v$  sera donc minimum pour annuler le plus vite possible la dérivée de  $r$ . Elle suivra alors la limite inférieure du domaine accessible, jusqu'à avoir  $\dot{r} = 0$ . On nomme cette deuxième phase, "*la phase de stabilisation*".

L'instant de commutation  $t_{\text{com}}$  est tel que cette phase de stabilisation se termine de manière à ce que la vitesse de lacet soit stabilisée sur la consigne ( $r(t_f) = r_c$  et  $\dot{r}(t_f) = 0$ ).

Durant cette phase de stabilisation ( $r \in [r_{\text{com}}, r_c]$ ), on a :

$$\dot{r}(t) = - \int_t^{t_f} [\ddot{r}]_{\min}(\tau) \cdot d\tau \equiv \chi_1(t) \quad (4.79)$$

$$r(t) = r_c - \int_t^{t_f} [\dot{r}]_{\min}(\tau) \cdot d\tau^2 \equiv \chi_0(t) \quad (\chi_0 \text{ est supposée monotone.}) \quad (4.80)$$

La trajectoire correspondant à cette phase de stabilisation peut être représentée dans le plan de phase par :

$$\dot{r} = \chi_1(\chi_0^{-1}(r)) \quad (4.81)$$

Dans le cas où la consigne est inférieure à la valeur initiale de la vitesse de lacet, La réponse en temps minimum est comparable mais opposée.

La trajectoire de stabilisation est alors telle que :

$$\dot{r} = \chi_1(\chi_0^{-1}(r)) \quad (4.82)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \chi_1(t) = - \int_t^{t_f} [\ddot{r}]_{\max}(\tau) \cdot d\tau \\ \chi_0(t) = r_c - \int_t^{t_f} [\dot{r}]_{\max}(\tau) \cdot d\tau^2 \end{cases} \quad (4.83)$$

Ces équations correspondent aux trajectoires les plus rapides permettant de rejoindre la consigne sans générer de dépassements. Ces "*trajectoires de stabilisation*" représentent donc un ensemble d'états limites au-delà desquels il n'est plus possible d'éviter de dépasser la consigne.

On peut en déduire que toute loi de commande satisfaisant cet objectif de non-dépassement doit satisfaire la contrainte :

$$\dot{r} \times \text{sign}(r_c - r) \leq \chi_1(\chi_0^{-1}(r)) \times \text{sign}(r_c - r) \quad (4.84)$$

Dans la pratique, les calculs précédents peuvent devenir fortement complexes. Malgré cela, ces résultats peuvent être exploités grâce à une étude par simulation : en réalisant une série de simulations avec commande à saturation et pour différents états initiaux, il est possible d'obtenir des réseaux de courbes correspondant à différentes trajectoires de stabilisation et pour différentes consignes. La contrainte précédente peut alors être prise en compte grâce à une analyse graphique de la réponse du système dans le plan de phase.

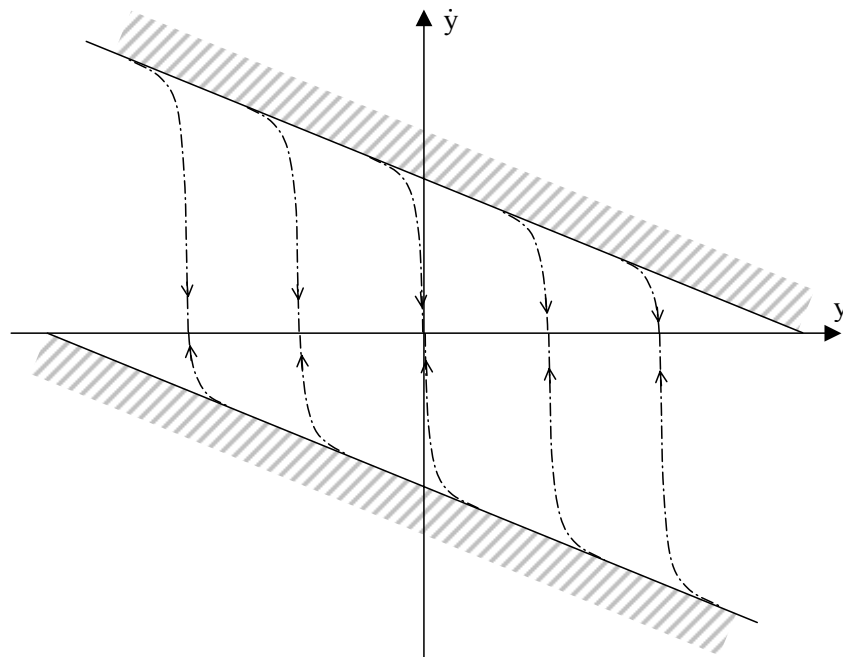


figure 4.4 : Représentation dans le plan de phase d'un exemple théorique « type » de comportement saturé, pour un système de degré 1.

- Les lignes plaines correspondent aux  $\dot{y}$  limites,
- Les lignes pointillées correspondent aux trajectoires de stabilisation.

#### 4.2.3. Implication sur le réglage des gains de la loi de commande :

La commande non linéaire inverse doit théoriquement permettre d'obtenir :

$$\dot{r} = \frac{1}{\tau}(r_c - r) \quad (4.85)$$

Cependant, ce résultat ne tient pas compte des saturations. Si l'on considère que la commande et sa dérivée première sont saturées, sur la base des résultats précédents, on peut déterminer une contrainte sur le choix de  $\tau$  permettant d'assurer le non-dépassement de la consigne (cas d'une réponse indicielle).

La vitesse de lacet doit être contrôlée de sorte que :

$$\dot{r} \times \text{sign}(r_c - r) = \frac{1}{\tau} |r_c - r| \leq \chi_1(\chi_0^{-1}(r)) \times \text{sign}(r_c - r). \quad (4.86)$$

On peut en déduire une valeur minimum de  $\tau$  telle que :

$$\frac{1}{\tau} \leq \min_{r \in \Omega} \left\{ \frac{\chi_1(\chi_0^{-1}(r))}{(r_c - r)} \right\} \quad (4.87)$$

$\Omega$  correspond au domaine décrit par  $r$  : c'est l'intersection entre le domaine accessible et le domaine de fonctionnement du système.

Si le  $\tau$  utilisé est supérieur à ce  $\tau$  minimum, la trajectoire décrite par le système dans le plan de phase (ligne épaisse sur la figure 4.5) n'est pas optimale. Le temps de réponse est légèrement accru. Par contre, si le  $\tau$  utilisé est inférieur au  $\tau$  minimum, il y a dépassement de la consigne (cas de la figure 4. 6).

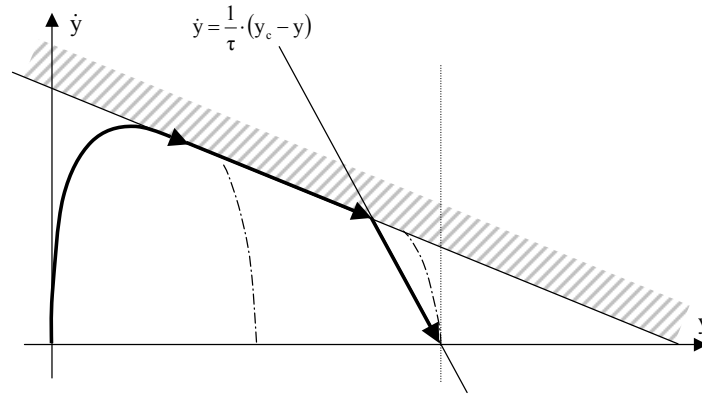


figure 4.5 : Tracé d'une réponse du système pour un réglage ne générant pas de dépassement.

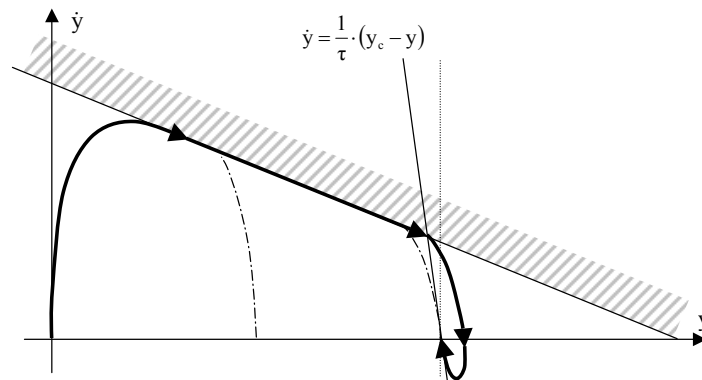


figure 4. 6 : Tracé d'une réponse du système pour un réglage générant un dépassement.

Pour assurer la robustesse de ce résultat, il sera préférable de minimiser le domaine accessible de  $r$ .

Dans la pratique, la valeur minimale de  $\tau$  peut être déterminée graphiquement dans le plan de phase en traçant la droite passant par la consigne ( $r = r_c$  et  $\dot{r} = 0$ ) et tangente à la trajectoire de stabilisation, préalablement obtenue sur la base de simulations.

#### 4.2.4. Application au cas de l'A320 :

On cherche à reprendre l'étude précédente en l'appliquant au cas de l'A320. On se base ici sur un ensemble de simulations obtenues à l'aide d'un modèle précis de l'avion et de l'actionneur.

##### *Evaluation graphique:*

Cette étude a pour but de déterminer les trajectoires de stabilisation. Celles-ci sont obtenues par simulation puis tracées dans le plan de phase. Un exemple d'un tel tracé est donné figure 4.7. Trois trajectoires de convergence y sont représentées : elles correspondent respectivement à des stabilisations sur des consignes d'environ 5, 10 et 15 degrés par seconde. Le cas le plus pénalisant correspond à une consigne d'environ 15 °/s. Un agrandissement de la trajectoire est présenté figure 4.8. L'analyse graphique réalisée à partir de cet agrandissement permet d'obtenir une valeur minimum de  $\tau$  de  $1/2,3=0,43$ .

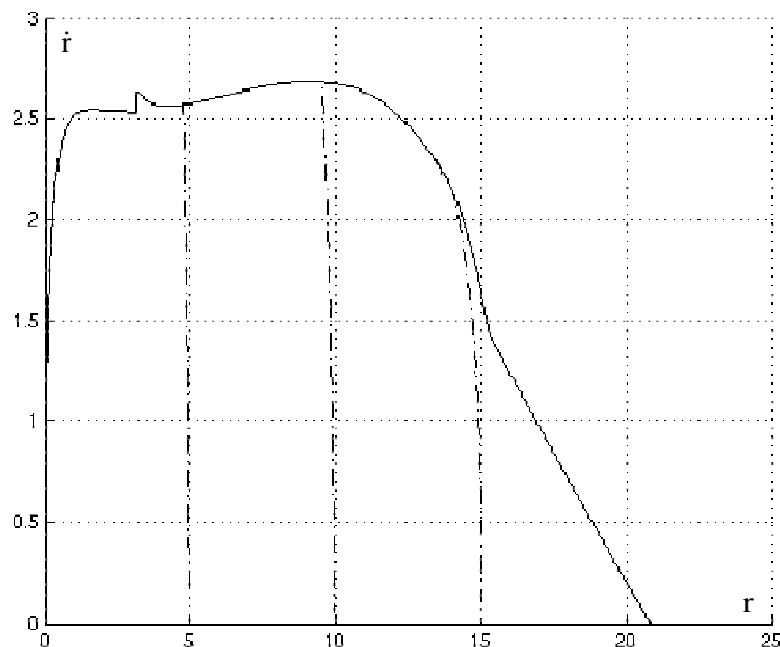


figure 4.7 : Exemple de tracés obtenus à l'aide de simulations, actionneur à saturation.

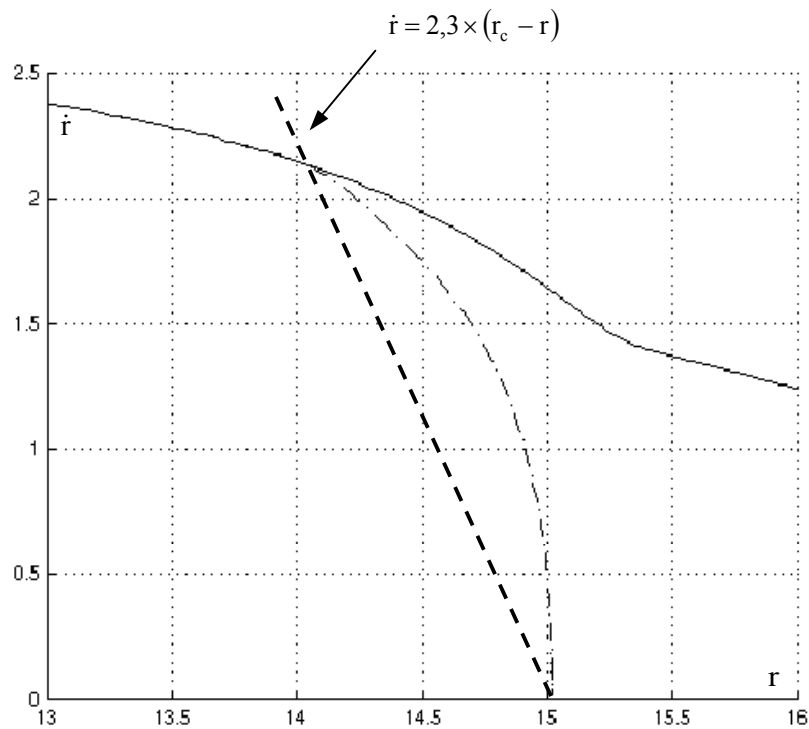


figure 4.8 : Agrandissement du trace de la figure 4.7.

Ce résultat n'est que partiel. Du fait de l'influence des non-linéarités et de la dynamique du système d'orientation des roues avant (cf. partie suivante), le système ne suivra pas exactement cette dynamique linéaire du premier ordre et cette valeur devra donc être affinée et vérifiée en simulation.

Une telle vérification est présentée sur la figure 4.9. Les tracés obtenus pour des valeurs de  $\tau$  de 0,43 et 0,39 sont comparés à la trajectoire de stabilisation. On peut constater que ces tracés ne sont pas des droites : le système ne suit pas exactement sa dynamique théorique. Cependant, le résultat précédant reste valide : pour un  $\tau$  égal à environ 0,43 la trajectoire obtenue est proche mais reste en dessous de la trajectoire de stabilisation, pour un  $\tau$  égal à environ 0,39 un net dépassement de la consigne est constaté.

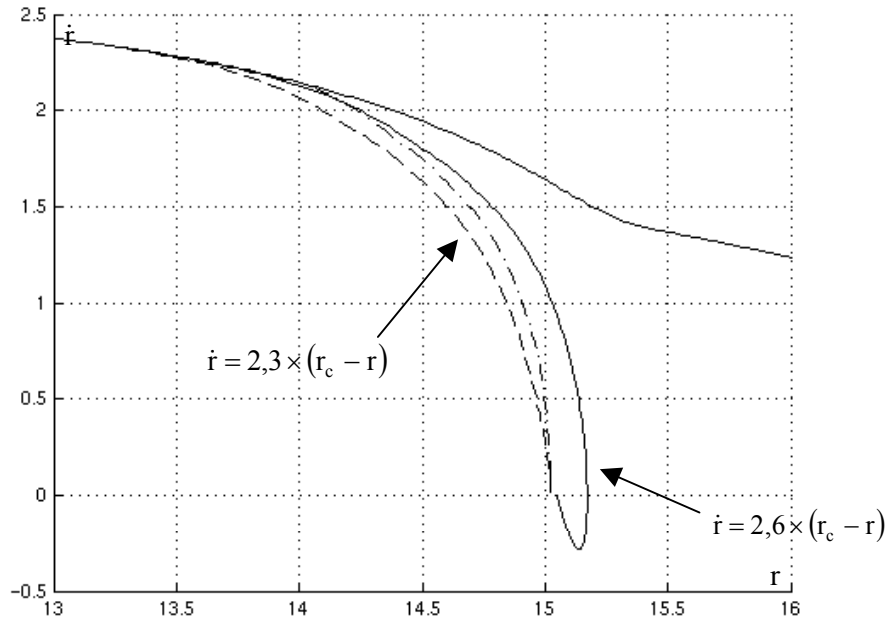


figure 4.9 : Exemple de trace dans le plan de phase, obtenu pour différents réglage de la loi.

### **Evaluation par calcul :**

Les résultats de simulation montrent que, durant la phase de stabilisation, la dérivée seconde de la vitesse de lacet reste quasiment constante. Les équations du modèle étant relativement complexes, on ne cherchera pas à calculer précisément cette dérivée seconde mais on cherchera à la minorer à partir de ces simulations (on considère le cas d'une consigne supérieure à la valeur initiale de la vitesse de lacet).

La figure 4.10 montre l'évolution de la dérivée de la vitesse de lacet dans le temps. Les lignes pointillées correspondent aux phases de stabilisation. On peut remarquer que la dérivée seconde de la vitesse de lacet est minimale lorsque cette dernière est importante.

On peut donc facilement évaluer un minorant de cette dérivée seconde.

Pour une dérivée seconde de  $r$  constante, la trajectoire de stabilisation correspond à :

$$\dot{r} = \chi_1(\chi_0^{-1}(r)) \quad (4.88)$$

avec :

$$\begin{cases} \chi_1(t) = \dot{r}(t) = -\int_t^{t_f} [\ddot{r}]_{\min} \cdot d\tau = -[\ddot{r}]_{\min} \cdot (t_f - t) \\ \chi_0(t) = r(t) = r_c - \int \int_t^{t_f} [\ddot{r}]_{\min} \cdot d\tau^2 = r_c + \frac{[\ddot{r}]_{\min}}{2} \cdot (t_f - t)^2 \end{cases} \quad (4.89)$$

On obtient :  $\dot{r} = \sqrt{2 \times |[\ddot{r}]_{\min} \cdot (r_c - r)|}$  (4.90)

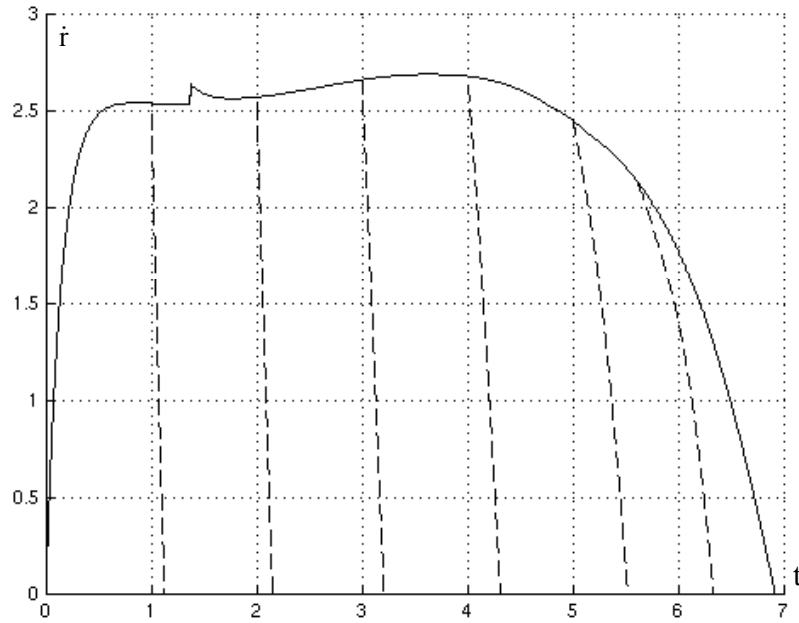


figure 4.10 : Exemple de traces de la dérivée de la vitesse de lacet pour différentes sollicitations.

Pour satisfaire la contrainte : 
$$\frac{1}{\tau} \leq \min_{r \in \Omega} \left\{ \frac{\chi_1(\chi_0^{-1}(r))}{(r_c - r)} \right\} \quad (4.91)$$

Il faut donc, pour  $r$  dans le domaine accessible et sur la trajectoire de stabilisation, satisfaire à la condition :

$$\frac{1}{\tau} \leq \sqrt{2 \times \frac{|\ddot{r}|_{\min}}{(r_c - r)}} \quad (4.92)$$

Le terme précédent atteint sa valeur minimale (cas critique) pour une consigne proche de  $15^\circ/\text{s}$ . En effet, lorsque la vitesse de lacet est faible,  $|\ddot{r}|_{\min}$  est très important et  $(r_c - r)$  reste limité par le domaine accessible. A l'opposé, lorsque cette vitesse de lacet est supérieure à  $15^\circ/\text{s}$ ,  $|\ddot{r}|_{\min}$  continu à réduire légèrement et  $(r_c - r)$  diminue beaucoup plus rapidement.

Pour cette consigne critique d'environ  $15^\circ/\text{s}$ ,  $(r_c - r)$  ne peut dépasser  $1^\circ/\text{s}$  et le minorant de la dérivée seconde de la vitesse de lacet est d'environ  $2,8^\circ/\text{s}^2$ .

On obtient alors :

$$\frac{1}{\tau} \leq \sqrt{2 \times \frac{|\ddot{r}|_{\min}}{(r_c - r)}} \approx 2,3 \quad (4.93)$$

La valeur minimum de  $\tau$  correspondante est donc d'environ 0,43. Cette analyse est donc cohérente avec l'analyse précédente.

### 4.3. Influence de l'asservissement des roues avant

La loi de commande a été déterminée sans tenir compte de la dynamique de l'actionneur. L'objectif de cette partie est d'étudier l'influence de cette dynamique sur le comportement du système commandé.

On associe à la dynamique de l'avion la dynamique de l'actionneur représentée ici par un filtre du 1<sup>er</sup> ordre de la forme :

$$\dot{\theta}_{RA} = k_{\theta_{RA}} \cdot (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (4.94)$$

La dynamique de la gouverne de direction étant nettement plus rapide que celle du système d'orientation des roues avant, cette étude se concentrera sur le cas du roulage à basse vitesse (efforts aérodynamiques négligés).

La consigne d'orientation des roues avant peut être représentée par l'équation :

$$\theta_{RAc} = \beta_{AV} - Fy_{RA}^{-1} \left( \frac{[\dot{r}]_C \cdot I_{ZZ} + L_{TP} \cdot Fy_{TP}}{L_{RA}} \right) \quad \text{avec : } [\dot{r}]_C = \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.95)$$

En dérivant l'équation de la dynamique de l'avion en lacet on obtient :

$$\ddot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ L_{RA} \cdot \frac{\partial Fy_{RA}}{\partial \beta_{RA}} \times \dot{\beta}_{RA} - L_{TP} \cdot \frac{\partial Fy_{TP}}{\partial \beta_{TP}} \times \dot{\beta}_{TP} \right] \quad (4.96)$$

$$\text{Or, } \dot{\beta}_{RA} = \dot{\beta}_{AV} - \dot{\theta}_{RA} = \dot{\beta}_{AV} - k_{\theta_{RA}} \cdot (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (4.97)$$

D'où :

$$\ddot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ L_{RA} \cdot \frac{\partial Fy_{RA}}{\partial \beta_{RA}} \times \dot{\beta}_{AV} - L_{TP} \cdot \frac{\partial Fy_{TP}}{\partial \beta_{TP}} \times \dot{\beta}_{TP} \right] - \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \times \frac{\partial Fy_{RA}}{\partial \beta_{RA}} \times k_{\theta_{RA}} \cdot (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (4.98)$$

$$\text{On a : } ([\dot{r}]_C - \dot{r}) = \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \cdot (Fy_{RA}(\theta_{RAc}) - Fy_{RA}(\theta_{RA})) \quad (4.99)$$

Par une linéarisation au premier ordre, on peut obtenir (on suppose qu'entre  $\theta_{RA}$  et  $\theta_{RAc}$  le gradient de  $Fy_{RA}$  reste quasiment constant) :

$$([\dot{r}]_C - \dot{r}) = - \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \cdot \frac{\partial Fy_{RA}}{\partial \beta_{RA}} \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (4.100)$$

D'où :

$$\ddot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ L_{RA} \cdot \frac{\partial Fy_{RA}}{\partial \beta_{RA}} \times \dot{\beta}_{AV} - L_{TP} \cdot \frac{\partial Fy_{TP}}{\partial \beta_{TP}} \times \dot{\beta}_{TP} \right] + k_{\theta_{RA}} \cdot ([\dot{r}]_C - \dot{r}) \quad (4.101)$$

En supposant  $V_x$  constant, on a :

$$\dot{\beta}_{AV} = \frac{(\dot{V}_y + L_{RA} \times \dot{r}) \cdot V_x}{V_x^2 + (V_y + L_{RA} \times r)^2} = \frac{V_x}{V_{RA}^2} \times (\dot{V}_y + L_{RA} \times \dot{r}) \quad (4.102)$$

$$\text{et, } \dot{\beta}_{TP} = \frac{(\dot{V}_y - L_{TP} \times \dot{r}) \cdot V_x}{V_x^2 + (V_y - L_{TP} \times r)^2} = \frac{V_x}{V_{TP}^2} \times (\dot{V}_y - L_{TP} \times \dot{r}) \quad (4.103)$$

On peut donc écrire :

$$\ddot{r} = \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot \dot{V}_y + k_{\theta_{RA}} \cdot [\dot{r}]_C \quad (4.104)$$

$$\text{avec : } \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \times \frac{L_{RA} \cdot V_x}{V_{RA}^2} - \frac{\partial F_{y_{TP}}}{\partial \beta_{TP}} \times \frac{L_{TP} \cdot V_x}{V_{TP}^2} \right] \quad (4.105)$$

$$\text{et, } \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = \frac{1}{I_{ZZ}} \left[ \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \times \frac{L_{RA}^2 \cdot V_x}{V_{RA}^2} + \frac{\partial F_{y_{TP}}}{\partial \beta_{TP}} \times \frac{L_{TP}^2 \cdot V_x}{V_{TP}^2} \right]$$

On peut constater que, pour une dynamique actionneur très rapide ( $k_{\theta_{RA}}$  très grand), la dynamique du système telle que présentée ci-dessus peut être ramenée à un premier ordre (factorisation par  $k_{\theta_{RA}}$  et réduction par la méthode des perturbations singulières).

$$\text{L'avion étant naturellement stable et sous vireur, on a } \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \leq 0 \text{ et } \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \geq 0. \quad (4.106)$$

Le terme  $\frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot \dot{V}_y$  est dû au couplage entre les dynamiques en vitesse latérale et en lacet.

On nomme centre de rotation le point de l'axe de l'avion où le vecteur vitesse est aligné avec cet axe. Lorsque l'avion se déplace à basse vitesse, ce point est situé entre le centre de gravité et les trains principaux. Lorsque les forces centrifuges ( $m \cdot r \cdot V_x$ ) augmentent, ce point s'avance progressivement vers l'avant de l'appareil.

Soit  $L_{CR}$  la distance de ce point au centre de gravité ( $0 \leq L_{CR} \leq L_{TP}$ ).

$$\text{On a : } V_{y_{CR}} = V_y - L_{CR} \cdot r = 0 \quad (4.107)$$

$$\text{d'où, } \dot{V}_y = L_{CR} \cdot \dot{r} \quad (4.108)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot L_{CR} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + k_{\theta_{RA}} \cdot [\dot{r}]_C \\ &= \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot L_{CR} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + k_{\theta_{RA}} \times \frac{1}{\tau} (r_c - r) \end{aligned} \quad (4.109)$$

En fait, dans le cas de vitesse réduites lors de la prise de virage, ce couplage joue un rôle peu important.

Le terme  $\frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot L_{CR}$  peut alors être négligé et on a alors :

$$\ddot{r} = \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + k_{\theta_{RA}} \times \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.110)$$

Le système ainsi obtenu est un système de deuxième ordre avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\theta_{RA}}}{\tau}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} \left( k_{\theta_{RA}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right) \sqrt{\frac{\tau}{k_{\theta_{RA}}}} \quad (4.111)$$

Si l'on désire ne pas générer de dépassement de la consigne ( $z \geq 1$ ), le choix de  $\tau$  doit être tel que :

$$\frac{1}{\tau} \leq \frac{\left(k_{\theta_{RA}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial r}\right)^2}{4 k_{\theta_{RA}}} \quad (4.112)$$

La dynamique de la loi de commande est limitée par celle de l'actionneur. Pour obtenir une dynamique du système en boucle fermée plus rapide, il est nécessaire de modifier l'asservissement de l'actionneur ou de l'intégrer dans le modèle de synthèse qui sera alors d'ordre deux. On verra que, dans le cas d'un Airbus A320, les saturations du système d'orientation des roues avant en vitesse de braquage sont plus contraignantes et donc qu'il n'est pas intéressant de considérer un tel modèle de synthèse, rendant la loi de commande nettement plus complexe.

Lorsque les vitesses de déplacement sont plus importantes, le couplage avec la dynamique interne devient significatif. Pour traiter simplement ce cas de figure, il est nécessaire de se restreindre à des angles de braquage et de dérapages faibles : il est alors possible de linéariser les équations du modèle :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \cdot r + \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot V_y + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}} \cdot \theta_{RA} \\ \dot{V}_y = \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial r} \cdot r + \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial V_y} \cdot V_y + \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial \theta_{RA}} \cdot \theta_{RA} \end{cases} \quad (4.113)$$

$$\text{avec, } \begin{cases} \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial r} = \frac{2 \cdot L_{RA} \cdot G_{y_{RA}} - 4 \cdot L_{TP} \cdot G_{y_{TP}}}{m \cdot V_x} - V_x \\ \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial V_y} = \frac{2 \cdot G_{y_{RA}} + 4 \cdot G_{y_{TP}}}{m \cdot V_x} \\ \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial \theta_{RA}} = - \frac{2 \cdot G_{y_{RA}}}{m} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = \frac{2 \cdot L_{RA}^2 \cdot G_{y_{RA}} + 4 \cdot L_{TP}^2 \cdot G_{y_{TP}}}{I_{zz} \cdot V_x} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} = \frac{2 \cdot L_{RA} \cdot G_{y_{RA}} - 4 \cdot L_{TP} \cdot G_{y_{TP}}}{I_{zz} \cdot V_x} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}} = - \frac{2 \cdot L_{RA} \cdot G_{y_{RA}}}{I_{zz}} \end{cases}$$

On associe alors à ce système les équations :

$$([\dot{r}]_C - \dot{r}) = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}} \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad \text{avec :} \quad [\dot{r}]_C = \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.114)$$

$$\text{et } \ddot{r} = \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot \dot{V}_y + k_{\theta_{RA}} \times \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.115)$$

En résolvant l'ensemble de ces équations, il est alors possible d'obtenir  $\ddot{r}$  en fonction de  $\dot{r}$ ,  $r$  et des consignes en vitesse de lacet et en orientation des roues avant :

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + \frac{\frac{\partial \dot{V}_y}{\partial \theta_{RA}} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y}}{\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}}} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + \left( \frac{\frac{\partial \dot{V}_y}{\partial V_y} \cdot \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + \frac{1}{\tau} \right) - \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial r} - \frac{\frac{\partial \dot{V}_y}{\partial \theta_{RA}} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y}}{\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}} \times \tau} + \frac{k_{\theta_{RA}}}{\tau} \right) \cdot (r_c - r) \\ & + \left( \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial \theta_{RA}} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} - \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial V_y} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta_{RA}} \right) \cdot \theta_{RAc} + \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial V_y} \cdot \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial r} - \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial V_y} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right) \cdot r_c \end{aligned} \quad (4.116)$$

A grande vitesse, la plupart des termes seront négligeables. On aura alors :

$$\ddot{r} \approx -k_{\theta_{RA}} \cdot \dot{r} - \left( \frac{2 \cdot L_{RA} \cdot Gy_{RA} - 4 \cdot L_{TP} \cdot Gy_{TP}}{I_{ZZ}} + \frac{k_{\theta_{RA}}}{\tau} \right) \cdot r \quad (4.117)$$

Pour obtenir un amortissement de 1, il faut donc que :

$$\frac{1}{\tau} \leq \frac{k_{\theta_{RA}}}{4} - \frac{2 \cdot L_{RA} \cdot Gy_{RA} - 4 \cdot L_{TP} \cdot Gy_{TP}}{4 \cdot k_{\theta_{RA}} \cdot I_{ZZ}} \quad (4.118)$$

Ce résultat est plus restrictif que la réalité : lorsque la vitesse devient très importante, les efforts aérodynamiques auront tendance à amortir le système et la gouverne de direction sera largement utilisée. L'impact du couplage entre la loi de commande et le système d'orientation des roues avant sera donc fortement réduit.

Lorsque les angles de braquage et de dérapage deviennent important, les non-linéarités du système ont alors pour effet de réduire la valeur des gains  $Gy_{RA}$  et  $Gy_{TP}$ .

#### 4.3.1. Cas de l'A320 :

*Détermination de  $k_{\theta_{RA}}$  :*

Lorsque  $(\theta_{RAc} - \theta_{RA})$  est petit, il est possible de linéariser le comportement du système d'orientation des roues avant (cf. chapitre 1 partie 2.3.7 et 3.4.3). On obtient alors une modélisation linéaire du premier ordre telle que :

$$\dot{\theta}_{RA} = k_{\theta_{RA}} \times (\theta_{RAc} - \theta_{RA}) \quad (4.119)$$

Il est à noter que le gain  $k_{\theta_{RA}}$  peut varier en fonction des efforts exercés (effet des pertes de charge) et que lorsque  $(\theta_{RAc} - \theta_{RA})$  devient plus important, les non linéarités du système (dues au réglage des diaphragmes du bloc hydraulique) ont pour conséquence de ralentir sa dynamique. Le " $k_{\theta_{RA}}$  équivalent" est alors réduit.

Dans le cas d'avions du type A340 ou A380, ce gain est aussi dépendant de l'angle de braquage des roues.

Pour un A320, on a :  $k_{\theta_{RA}} \in [4,2 ; 7,7]$  (4.120)

$k_{\theta_{RA}}$  devient petit lorsque les pertes de charges sont importantes (cas d'angles de dérapage très importants) ou lorsque le système d'orientation des roues avant est proche de la saturation. Ainsi, pour un fonctionnement normal, la valeur de  $k_{\theta_{RA}}$  reste élevée.

*Analyse du comportement de l'avion commandé :*

On s'intéresse au cas de l'A320 présenté précédemment ( $m=66,9$  t et  $X_{cg}=18,5$  %) et on considère  $k_{\theta_{RA}}$  égal à une valeur seuil de 6.

Pour des vitesses suffisamment importantes, on obtient :

$$\ddot{r} = \left( -\frac{11,7619}{V_X} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + \left( \frac{476,8583}{V_X^2} - \frac{39,4866}{V_X \cdot \tau} + 0,0916 + \frac{k_{\theta_{RA}}}{\tau} \right) \cdot (r_c - r) + \frac{37,7261}{V_X} \cdot \theta_{RAc} - \frac{476,8583}{V_X^2} \cdot r_c \quad (4.121)$$

En prenant  $\frac{1}{\tau} = 2,3$ , la valeur maximale définie dans la partie précédente :

- Pour une vitesse infinie, l'amortissement obtenu est d'environ 0,8 et à 70 kt, il est d'environ 0,93. A de telles vitesses, du fait de l'action de la gouverne de direction et des effets aérodynamiques, cet amortissement est en réalité bien supérieur.
- Lorsque la vitesse décroît l'amortissement augmente jusqu'à atteindre un maximum d'environ 1,19 pour une vitesse proche de 15 kt.
- Pour des vitesses inférieures l'amortissement décroît : 1,1 à 10 kt et 0,74 à 5 kt. Cependant, à ces faibles vitesses, cette dynamique n'est plus représentative. Il faut utiliser une autre expression de la dynamique du système commandé.

Comme nous l'avons vu précédemment, à basse vitesse (cf. équation (4.110)), on peut écrire :

$$\ddot{r} \approx \left( -\frac{12}{V_X} - k_{\theta_{RA}} \right) \cdot \dot{r} + k_{\theta_{RA}} \times \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.122)$$

Ce qui donne un amortissement de 1,12 à 10 kt et 1,44 à 5 kt. Plus la vitesse diminue, plus l'amortissement augmente : il devient infini pour une vitesse nulle.

En fait, pour des vitesses très faibles, la souplesse des pneumatiques et les non-linéarités du modèle font que les dérivées partielles calculées précédemment ont une valeur beaucoup plus réduite.

On peut donc en conclure que pour un gain de l'asservissement de 2,3 le système se comportera dans tous les cas de manière convenable. Les résultats obtenus montrent aussi que cette valeur ne pourrait être significativement augmentée sans risquer, dans certains cas extrêmes, de générer des dépassements significatifs de la consigne. Dans tout les cas, ces résultats ne représentent qu'une première analyse théorique : une étude plus précise, basée sur des simulations sera nécessaire pour vérifier et affiner ces tendances.

#### 4.3.2. Prise en compte des variations d'adhérence et des erreurs de mesure

Cette analyse de l'impact de la dynamique du système d'orientation des roues sur le comportement de l'avion n'a pas tenu compte du problème de la robustesse. Cependant, les résultats de la partie 3.2.1 ont montré que, moyennant le respect de quelques règles, la dynamique la plus "rapide" suivie par l'avion est obtenue lors de roulages sur piste sèche. Lorsque l'adhérence est dégradée, la loi de commande devient moins efficace et le temps de réponse est accru. Par conséquent, le cas le plus critique en ce qui concerne le couplage avec l'actionneur est le cas nominal de la piste sèche : les problèmes de robustesse n'auront ainsi aucun effet aggravant.

## **4.4. Correction des erreurs statiques**

L'étude de la robustesse paramétrique du système a montré la nécessité d'ajouter un terme intégral à la loi de commande. Cette partie a pour but d'étudier plusieurs solutions techniques envisageables pour mettre en oeuvre une telle correction intégrale.

L'utilisation d'un intégrateur associé à la forte présence de saturations peut générer des dépassements de consigne inacceptables pour le pilote. En cas de saturation, la linéarisation n'est plus assurée, les actionneurs atteignent leur maximum d'efficacité et l'intégrateur se "charge" excessivement. Lors de la stabilisation sur la consigne, l'intégrateur doit alors se "décharger", engendrant un dépassement de la consigne qui peut parfois devenir significatif. Ces saturations sont régulièrement rencontrées lors des manœuvres : elles ne peuvent être évitées (besoins d'une performance maximum).

Plusieurs techniques ont déjà été élaborées pour limiter ces dépassements. Les résultats présentés ci-après, tout en s'inspirant de ces techniques, se sont largement basés sur une approche pragmatique du fonctionnement propre du système.

### **4.4.1. Utilisation de saturations et "filtrage" de l'entrée de l'intégrateur :**

En plaçant une saturation avant le terme intégral, on peut limiter l'influence de grands décalages entre la commande et la réaction réelle de l'avion. Du fait de cette saturation, seule une partie de l'erreur de suivi de la consigne est prise en compte par l'intégrateur. Cette portion reste limitée à un seuil prédéfini. Le système est alors peu sensible à des écarts importants et de courtes durées entre commande et braquage. Cette saturation dégrade les capacités dynamiques de correction de l'intégrateur.

Dans le cas de l'utilisation du correcteur proportionnel intégral, en plaçant une saturation après le terme intégral, il est possible de limiter l'amplitude du dépassement. Cependant sa durée est alors augmentée d'autant et les possibilités de correction des erreurs statiques sont limitées par un seuil. Des erreurs statiques trop importantes ne sont plus entièrement corrigées. Cet inconvénient peut toutefois s'avérer utile : une erreur statique excessive peut être révélatrice d'un fonctionnement dissymétrique anormal dont les pilotes doivent se rendre compte (mauvais fonctionnement d'un actionneur, problème sur une roue, panne moteur, ...).

Une autre protection contre ces dépassements, pouvant remplacer cette dernière saturation, consiste à « filtrer » l'entrée de l'intégrateur lorsque la valeur atteinte par ce dernier dépasse un niveau prédéfini. Ce filtrage consiste à annuler toute entrée du même signe que la sortie de l'intégrateur. Une entrée de signe opposée ne sera pas modifiée. Comme dans le cas précédent, le dépassement et les possibilités de correction seront limités à un seuil. L'intérêt de cette protection vis à vis d'une saturation placée en aval de l'intégrateur, est de ne pas augmenter la durée des dépassements.

#### 4.4.2. Déconnexions de l'intégrateur en cas de saturation :

Les particularités liées au fonctionnement du système peuvent permettre de supprimer l'influence des saturations (en braquage et vitesse de braquage) sur l'intégrateur. En effet, deux cas de mise en saturation du système peuvent être détectés :

- par les capteurs mesurant le braquage (pour l'ORA, une mesure RVDT à 74°),
- par évaluation des courants électriques commandant les servovalves (la vitesse de braquage maximum et atteinte pour un courant de 8 mA).

Lors de cette mise en saturation, on adapte alors l'intégration de la consigne en vitesse de lacet de manière à ne pas augmenter l'écart entre le cap de consigne (correspondant à l'intégration de la consigne en vitesse de lacet) et le cap obtenu en intégrant la vitesse de lacet mesurée. Cet intégrateur "adapté" se définit de manière discrétisée par :

$$\psi_c(t+1) = \psi_c(t) + \tilde{r}(t) \cdot dt \quad (4.123)$$

$$\text{avec : - hors saturation :} \quad \tilde{r} = r_c \quad (4.124)$$

$$\text{- en cas de saturation :} \quad \begin{aligned} &\text{si } |r_c| \leq |r|, \quad \tilde{r} = r_c \\ &\text{si } |r_c| > |r|, \quad \tilde{r} = r \end{aligned} \quad (4.125)$$

Ce correcteur, tel qu'il est présenté ici, nécessite l'intégration de la mesure du lacet : pour éviter tout problème de cumul d'erreurs de mesure, cette intégration peut être évitée en utilisant directement la mesure du cap.

Grâce à l'utilisation de cette logique d'activation, la seule saturation pouvant encore influencer le fonctionnement de l'intégrateur est due à la limitation de l'adhérence des pneumatiques.

L'utilisation cumulée de ces différentes solutions permet de déterminer une boucle de correction des erreurs statiques protégée et n'engendrant que de faibles risques de dépassement.

#### 4.4.3. Intégration de l'erreur de suivi de la dynamique théorique :

L'objectif ici est de ne plus intégrer l'écart entre la mesure et la consigne mais entre cette mesure et la valeur théorique que devrait avoir la vitesse de lacet. On se ramène alors au cas développé dans le chapitre 2 (partie 5.4) qui se basait sur l'utilisation de la commande par régime glissant.

Cette valeur théorique de l'évolution de la vitesse de lacet est définie à partir de l'expression :

$$r_{th} = \int \frac{1}{\tau} (r_c - r) \quad (4.126)$$

On peut alors modifier la loi de commande en :

$$[\dot{r}]_c = 2z\omega(r_c - r) + \frac{\omega^2}{p}(r_{th} - r), \quad \text{avec : } 2z\omega = \frac{1}{\tau} \quad (4.127)$$

L'intégrateur sera nettement moins sollicité que précédemment, ne cherchant plus qu'à corriger les écarts entre la dynamique du système réel et la dynamique du premier ordre théoriquement suivie.

Lorsque le système est à saturation, il ne peut atteindre  $r_{th}$  : le système n'est plus sensé suivre un comportement du premier ordre. Dans ce cas de figure, on remplace le terme  $r_{th}$  par la vitesse de lacet mesurée (en sortant de la saturation, il faudra réinitialiser  $r_{th}$  sur cette valeur mesurée). On se ramène ainsi à un fonctionnement proche du cas précédent, en annulant l'entrée de l'intégrateur lorsque la saturation est détectée.

Cet intégrateur a aussi pour conséquence d'augmenter la robustesse de la loi : il contre les écarts entre le comportement théorique et le comportement réel du système. Comme l'a présenté la partie 5.4 du deuxième chapitre, en utilisant une telle loi de commande, il est alors possible de vérifier la stabilité du système à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique.

Le régime de glissement correspondant est alors :  $s = \dot{r} - \frac{1}{\tau}(r_c - r) = 0$ . (4.128)

## 5. Le problème des très basses vitesses et de l'arrêt

La loi de pilotage de l'avion au sol étudiée précédemment ne peut être utilisée dans le cas de vitesses nulles ou très faibles. Cette partie a pour but d'étudier comment adapter cette loi pour étendre son champ d'application à tout le domaine de fonctionnement de l'avion au sol. Pour ce faire, cette partie débutera par une présentation du problème posé puis, étudiera comment le résoudre.

### 5.1. Position du problème

Le modèle de synthèse utilisé pour déterminer la loi de commande n'est pas représentatif du comportement de l'avion à l'arrêt et à de très basses vitesses. En effet, la souplesse des pneumatiques (qui y est négligée) joue alors un rôle significatif. La non prise en compte de cette souplesse implique, entre autre, l'apparition d'une discontinuité (en  $V_x=0$ ) dans l'expression des angles de dérapage au niveau des trains.

De même, l'angle d'orientation de la vitesse aux roues avant présente cette discontinuité. Il est représenté par l'équation :

$$\beta_{AV} = \arctg\left(\frac{V_y + L_{RA} \times r}{V_x}\right) \quad (4.129)$$

où la vitesse longitudinale apparaît au dénominateur.

Pour pouvoir utiliser cette équation dans la loi de commande, la vitesse doit donc rester suffisamment importante pour ne pas entraîner de division par zéro, notamment lorsque la mesure est biaisée.

De plus, on peut remarquer que pour des vitesses faibles, les erreurs de mesure peuvent fortement dégrader la qualité de l'estimation de cet angle et ainsi, dégrader la qualité du suivi de la consigne en lacet.

Une autre dimension s'ajoute aussi à ce problème. En effet, lorsque l'avion est arrêté, la commande en vitesse de lacet perd tout son sens. Quel que soit l'angle de braquage des roues, l'avion ne peut se déplacer. La loi de pilotage décrite précédemment n'est donc plus utilisable dans ce cas de fonctionnement. Il faut revenir à une commande directe d'orientation des roues avant.

Deux solutions sont envisagées à l'heure actuelle :

- Utiliser une transition entre la loi de pilotage latéral et la loi directe.
- Modifier l'architecture de la loi de pilotage pour permettre le contrôle direct de l'orientation des roues avant lorsque la vitesse est très faible.

## 5.2. Exemple de transition entre loi de pilotage et loi directe

Dans cet exemple, la transition est réalisée en multipliant les consignes issues respectivement de la loi de pilotage et de la loi directe par un gain  $k$  et un gain  $(1-k)$ . Ce gain est compris entre 0 et 1. Son évolution est donnée par la figure 4.11.

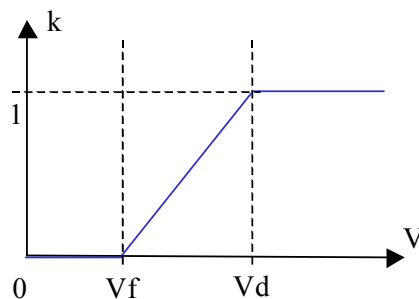


figure 4.11 : Exemple de définition du gain de transition entre la loi de pilotage et la loi directe ( $V_d$  est la vitesse de début de transition et  $V_f$  la vitesse de fin de transition).

Dans cet exemple,  $V_f$  est déterminée sur la base des précisions fournies par les moyens de mesure : une erreur "résiduelle" sur la vitesse ne doit pas permettre de laisser la loi de pilotage latéral active lorsque l'avion est à l'arrêt.  $V_d$  doit être suffisante pour permettre une transition progressive. La transition ne doit pas représenter une gêne pour le pilote.

Les cinématiques de commande des deux lois, aux très basses vitesses, doivent aussi être telles que l'angle de braquage ne variera que peu durant la transition. Le choix d'une commande en orientation de la vitesse au niveau des roues avant va dans ce sens.

Ce type de transition entre loi de pilotage et loi directe peut s'avérer relativement difficile à mettre en œuvre. En effet, cette transition doit être transparente pour le pilote et ne doit pas induire de modification significative du comportement de l'appareil. Pour ce faire, il semble nécessaire d'adapter la loi de pilotage au cas par cas. Ces adaptations peuvent ainsi conduire à restreindre l'autorité de la loi durant la transition, à en adapter la dynamique et tendre ainsi vers la dynamique de l'avion piloté en loi directe, ou encore, à atténuer l'effet de l'intégrateur (correction des erreurs statiques qui réapparaissent en loi directe) et à le ré-initialiser (sans générer de discontinuités de la commande).

### 5.3. Adaptation de Loi de pilotage latéral aux vitesses nulles

Comme nous l'avons vu précédemment, une partie de la « cinématique tiller » consiste à traduire une consigne en  $\beta_{AVc}$  en une consigne en vitesse de lacet. Il est possible d'éviter le calcul de  $\beta_{AV}$  ( basé sur des mesures) en le remplaçant par la grandeur désirée correspondante,  $\beta_{AVc}$ .

Cette approche est directement liée à celle décrite dans le partie 3.5 du deuxième chapitre.

Dans le cas de l'utilisation d'une telle modification, deux ordres de braquage sont générés : une consigne "boucle ouverte" ( $\beta_{AVc}$ ) et une consigne "boucle fermée" ( $\beta_{RAc}$ ) issue de l'asservissement en vitesse de lacet. Cette consigne "boucle fermée" compense l'angle de dérapage des pneumatiques.

Pour pouvoir appliquer cette modification au palonnier, la consigne en vitesse de lacet issue de la cinématique de commande doit être traduite en une consigne en  $\beta_{AVc}$ . Cependant, un tel calcul implique une division par la vitesse longitudinale :

$$\beta_{AVc} = \arctg\left(\frac{V_y + L_{RA} \times r_c}{V_x}\right) \quad (4.130)$$

Pour éviter tout problème de division par zéro, l'expression de la vitesse utilisée ici devra rester supérieure à un seuil donné. La modification de cette mesure aura pour conséquence, aux basses vitesses, de limiter l'amplitude du braquage commandable par le palonnier.

Un ordre de braquage  $\beta_{AVc}$  unique pourra alors être déterminé en sommant les consignes issues du tiller et du palonnier. Pour conserver les propriétés d'additivité entre ces deux consignes, il ne sera plus possible d'additionner directement les commandes en vitesse de lacet issues du tiller et du palonnier. La solution envisagée consiste à retranscrire le  $\beta_{AVc}$  unique sous forme d'une consigne globale en  $r_c$  :

$$r_c = \frac{\tan(\beta_{AVc}) \times V_x - V_y}{L_{RA}} \quad (4.131)$$

La description schématique de la loi de commande est présentée figure 4.12.

La loi de commande ainsi obtenue permet de s'affranchir du problème de la division par  $V_x$  et permet de générer, aux vitesses quasi-nulles, une consigne directe de braquage des roues. Elle présente donc l'avantage de ne pas nécessiter de transition vers une loi directe.

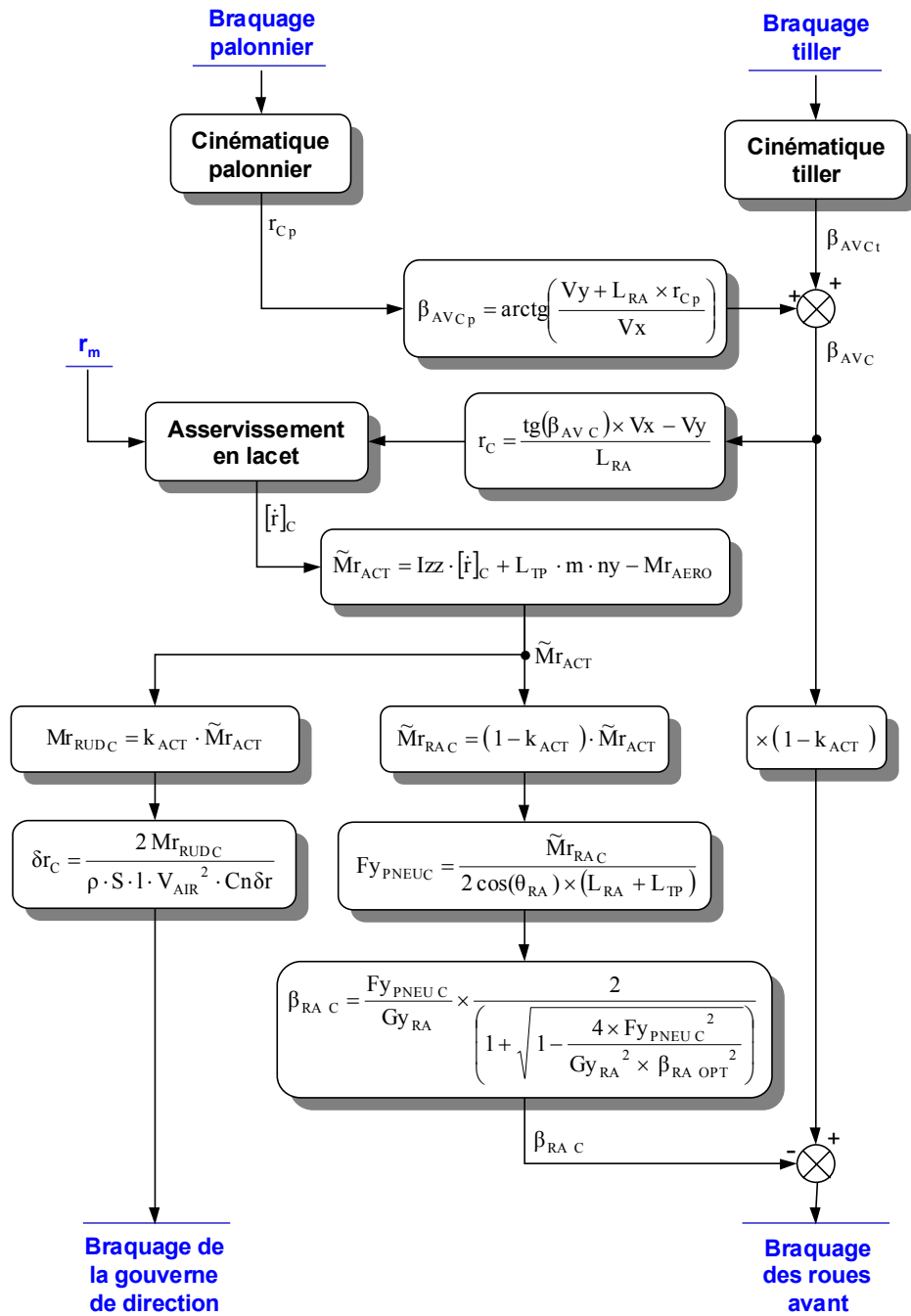


figure 4.12 : Description schématique de la loi adaptée aux cas du roulage à très basse vitesse et de l'arrêt.

### 5.3.1. Impact de la modification

Cette partie a pour but d'étudier l'impact de cette adaptation sur la dynamique du système commandé.

$$\text{On a : } \dot{r} = \frac{1}{I_{ZZ}} [L_{RA} \cdot F_{Y_{RA}}(\beta_{RA}) + Mr_{TP}] \quad (4.132)$$

La commande de braquage des roues s'écrit : (4.133)

$$\theta_{RA} = \beta_{AVC} - F_{Y_{RA}}^{-1} \left( \frac{[\dot{r}]_C \cdot I_{ZZ} - Mr_{TP}}{L_{RA}} \right) = \beta_{AVC} - \beta_{RAC}$$

$$\text{et donc, } \frac{Mr_{TP}}{I_{ZZ}} = [\dot{r}]_C - \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \times F_{Y_{RA}}(\beta_{RAC}) \quad (4.134)$$

On obtient ainsi : (4.135)

$$\dot{r} = [\dot{r}]_C + \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} [F_{Y_{RA}}(\beta_{RA}) - F_{Y_{RA}}(\beta_{RAC})]$$

$$\text{avec, } \beta_{RA} = \beta_{AV} - \beta_{AVC} + \beta_{RAC} = \beta_{RAC} - \Delta\beta_{AV} \quad (4.136)$$

Lorsque l'angle mesuré ( $\beta_{AV}$ ) et l'angle désiré ( $\beta_{AVC}$ ) sont proches (gradients quasi-constants), il est possible de faire une linéarisation du 1<sup>er</sup> ordre :

$$F_{Y_{RA}}(\beta_{RA}) - F_{Y_{RA}}(\beta_{RAC}) \approx \left. \frac{\partial F_{Y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \right|_{\beta_{RA}} \times (\beta_{RA} - \beta_{RAC}) = - \left. \frac{\partial F_{Y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \right|_{\beta_{RA}} \times \Delta\beta_{AV} \quad (4.137)$$

$$\text{et, } \Delta\beta_{AV} = \beta_{AVC} - \beta_{AV} = \left. \frac{\partial \beta_{AV}}{\partial r} \right|_r \times (r_C - r) \quad (4.138)$$

A partir des équations du modèle, on obtient alors :

$$\left. \frac{\partial F_{Y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \right|_{\beta_{RA}} = 2 \cos(\theta_{RA}) \times \left. \frac{\partial F_{Y_{PNEU}}}{\partial \beta_{RA}} \right|_{\beta_{RA}} \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cos(\theta_{RA}) \times \left[ G_{Y_{RA}} \times \frac{\beta_{RA \text{ OPT}}^2}{\beta_{RA \text{ OPT}}^2 + \beta_{RA}^2} \left( 1 - 2 \times \frac{\beta_{RA}^2}{\beta_{RA \text{ OPT}}^2 + \beta_{RA}^2} \right) \right] \\ &= 2 \cos(\theta_{RA}) \times G_{Y_{RA}} \times \frac{\beta_{RA \text{ OPT}}^2 \times (\beta_{RA \text{ OPT}}^2 - \beta_{RA}^2)}{(\beta_{RA \text{ OPT}}^2 + \beta_{RA}^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \beta_{AV}}{\partial r} \right|_r &= \frac{L_{RA}}{V_X} \times \frac{1}{1 + \beta_{AV}^2} \\ &= \frac{L_{RA} \times V_X}{V_X^2 + (V_Y + L_{RA} \times r)^2} \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\text{d'où, } \dot{r} = [\dot{r}]_C + \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} [F_{Y_{RA}}(\beta_{RA}) - F_{Y_{RA}}(\beta_{RAC})] \quad (4.141)$$

$$= [\dot{r}]_C - \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \times \left. \frac{\partial F_{Y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \right|_{\beta_{RA}} \times \left. \frac{\partial \beta_{AV}}{\partial r} \right|_r \times (r_C - r)$$

Cette modification a pour effet d'ajouter, à l'asservissement en lacet, un terme proportionnel.

Dans le cas d'un correcteur de type proportionnel intégral on aura :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left[ 2z\omega - \left( \frac{L_{RA}}{I_{ZZ}} \times \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \right)_{\beta_{RA}} \times \frac{\partial \beta_{AV}}{\partial r} \right]_{r} \times (r_c - r) + \frac{\omega^2}{p} (r_c - r) \\ &= (2z\omega - \Delta) \times (r_c - r) + \frac{\omega^2}{p} (r_c - r) \end{aligned} \quad (4.142)$$

Ainsi, quand  $\Delta\beta_{AV}$  est petit, il est possible de conserver la même dynamique théorique que celle initialement définie en modifiant les gains du correcteur. Le correcteur proportionnel intégral devient alors :

$$[\dot{r}]_c = (2z\omega + \Delta) \times (r_c - r) + \frac{\omega^2}{p} (r_c - r) \quad (4.143)$$

$$\text{avec : } \Delta = 2 \cos(\theta_{RA}) \times G_{y_{RA}} \times \frac{L_{RA}^2}{I_{ZZ} \cdot V_X} \times \frac{1}{1 + \beta_{AV}^2} \times \frac{\beta_{RA \text{ OPT}}^2 \times (\beta_{RA \text{ OPT}}^2 - \beta_{RA}^2)}{(\beta_{RA \text{ OPT}}^2 + \beta_{RA}^2)^2} \quad (4.144)$$

On peut remarquer que  $\Delta$  est toujours négatif, tant que le dérapage reste inférieur au dérapage optimum ( $G_{y_{RA}}$  négatif)

Pour de faibles angles de braquage et de dérapage, les expressions de ces angles et des caractéristiques des pneumatiques peuvent être linéarisées en prenant :

$$\Delta\beta_{AV} \approx \frac{L_{RA}}{V_X} \times (r_c - r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_{y_{RA}}}{\partial \beta_{RA}} \bigg|_{\beta_{RA}} \approx 2 \times G_{y_{RA}} \quad (4.145)$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \dot{r} \approx [\dot{r}]_c - 2 \times \frac{L_{RA}^2 \cdot G_{y_{RA}}}{I_{ZZ} \cdot V_X} \times (r_c - r) \quad (4.146)$$

On aura alors :

$$\Delta = 2 \times \frac{L_{RA}^2 \cdot G_{y_{RA}}}{I_{ZZ} \cdot V_X} \quad (4.147)$$

On peut remarquer que ce terme linéaire correspond à l'expression non linéaire calculée précédemment pour  $r$  et  $\beta_{AV}$  nuls. Lorsque l'avion se met à tourner  $\Delta$  se réduit progressivement, jusqu'à s'annuler lorsque le dérapage atteint son optimum.

Pour de faibles vitesses, le terme proportionnel du correcteur peut devenir négatif. En effet, dans un tel cas, la consigne "directe" peut induire une dynamique plus rapide que la dynamique objectif. L'asservissement cherche alors à contrer cette consigne "directe" et devient déstabilisant. Pour éviter de tels phénomènes, il est donc essentiel de s'assurer que  $\Delta$  reste limité quelle que soit la vitesse.

Les études réalisées sur la base de simulations semblent indiquer qu'il serait avantageux de considérer  $\Delta$  comme constant. Pour ne pas pénaliser la dynamique de l'asservissement aux grandes vitesses, il est possible d'annuler progressivement ce terme. Cela revient à seuiller l'expression de  $V_X$  et à calculer  $\Delta$  pour des valeurs figées de  $\beta_{AV}$  et  $\beta_{RA}$ .

Le réglage optimal de  $\Delta$  (déterminé en simulation) correspond aux  $\beta_{AV}$  et  $\beta_{RA}$  obtenus lors d'un virage à environ 15°/s (point de fonctionnement où la dynamique du système est la plus pénalisante). Avec ce réglage, lors de virages moins serrés, la dynamique en lacet sera plus rapide que celle initialement prévue. L'avion conservera un excellent comportement et le temps de réponse sera réduit. D'après ces résultats de simulation, un tel réglage semble donc indirectement permettre d'adapter la dynamique du système aux capacités de l'avion (très sollicités lors de virages serrés).

### 5.3.2. Traitement des mesures :

Cette adaptation de la loi de commande permet de s'affranchir du problème de la division par  $V_x$ . Cependant, certaines précautions doivent tout de même être prises vis à vis d'erreurs de mesure ou d'estimation.

Lorsque l'avion est à l'arrêt, pour assurer le pilotage direct du braquage des roues il est impératif que la vitesse utilisée au niveau de la loi de commande soit nulle. Deux solutions sont envisageables :

- Minimiser la mesure de  $V_x$  : Pour une erreur de mesure "standard", la vitesse utilisée doit toujours être inférieure à la valeur mesurée.
- Forcer progressivement cette vitesse à zéro entre deux seuils prédéfinis sur la base de la précision de la mesure.

L'impact des erreurs de mesure des vitesses longitudinale et latérale, de la vitesse de lacet et de l'estimation du centrage doit aussi être pris en compte pour ne pas générer d'effets indésirables. Une première analyse de la robustesse a été réalisée dans la troisième partie de cette thèse. Nous cherchons ici à compléter cette analyse sur la base des modifications précédentes.

Trois conséquences peuvent être distinguées :

- Apparition d'un biais sur la consigne en orientation de la vitesse aux roues avant :

$$\text{On a : } \beta_{AVC} = \beta_{AVCt} + \arctg\left(\frac{V_y + L_{RA} \times r_{Cp}}{V_x}\right) \quad (4.148)$$

Dans cette expression,  $V_x$  est limitée à un seuil prédéfini ( $V_{xs}$ ), positif.

Pour une vitesse inférieure à cette limitation, on peut considérer la consigne issue des palonniers comme une consigne directe en orientation de la vitesse aux roues avant.

Pour une vitesse supérieure à cette limitation, cette consigne en orientation de la vitesse aux roues avant peut comporter un biais ( $\Delta\beta_{AVC}$ ) :

$$\Delta\beta_{AVC} \leq \frac{\Delta V_y + l \cdot \Delta X_{cg} \cdot r_{Cp}}{V_x} + \frac{\Delta V_x}{V_x + \Delta V_x} \cdot \beta_{AVC} \quad (4.149)$$

Si le seuil de  $V_x$  est choisi suffisamment important pour majorer les erreurs de mesure, ce biais sera borné et donc pourra être corrigé par l'intégrateur.

- Apparition d'un biais sur la consigne en vitesse de lacet ( $\Delta r_c$ ) :

$$\Delta r_c = \frac{\text{tg}(\beta_{AVC}) \times \Delta V_x - \Delta V_y}{L_{RA}} \quad (4.150)$$

Si  $\beta_{AVCt} = 0$  et que la  $V_x$  est supérieure au seuil  $V_{xs}$ , ce biais est nul et  $r_c = r_{cp}$ .

$$\text{Si la } V_x \text{ est inférieure à } V_{xs}, \text{ on a alors : } r_c = r_{cp} \cdot \frac{V_x}{V_{xs}} - \frac{V_y}{L_{RA}} \times \frac{V_{xs} - V_x}{V_{xs}} \quad (4.151)$$

- Apparition d'un biais sur la vitesse de lacet obtenue ( $\Delta r$ ). Ce biais peut être dû à un biais sur la consigne ( $\Delta r_c$ ) ou à un biais de mesure ( $\Delta r_m$ ) :

$$\Delta r = \Delta r_m + \Delta r_c = \Delta r_m + \frac{\text{tg}(\beta_{AVC}) \times \Delta V_x - \Delta V_y}{L_{RA}} \quad (4.152)$$

Dans le cas du suivi de trajectoires rectilignes ( $\beta_{AVCt} = r_{cp} = 0$ ), ce biais peut être source de veering (déviations de la trajectoire).

$$\text{On a alors, pour } V_x > V_{xs} : \Delta r = \Delta r_m \quad (4.153)$$

$$\text{pour } V_x < V_{xs} : \Delta r = \Delta r_m + \Delta r_c = \Delta r_m - \frac{\Delta V_y}{L_{RA}} \times \frac{V_{xs} - V_x}{V_{xs}} \quad (4.154)$$

L'influence de  $\Delta r_m$  peut être limitée en utilisant la mesure du cap directement dans l'intégrateur. Ce biais sera alors lié à la variation de l'erreur de mesure du cap (La précision de cette mesure est annoncée à 0,4° pour un A320).

Si  $V_{xs}$  est important, l'impact de  $\Delta V_y$  peut devenir significatif. Il faut alors s'assurer que  $\Delta V_y$  reste suffisamment petit. Si ce n'est pas le cas, il pourrait être envisagé, pour les basses vitesses, de remplacer la mesure de  $V_y$  par une estimation basée sur la mesure de  $V_x$  et sur la valeur de la consigne en vitesse de lacet  $r_c$ .

Par exemple, il serait possible de prendre :

$$\hat{V}_y = \text{tg}(\hat{\beta}_{TP}) \times V_x - L_{TP} \cdot r_c \quad (4.155)$$

$$\text{avec, } \hat{\beta}_{TP} = \frac{\hat{F}_{y_{TP}}}{4 \cdot G_{y_{TP}}} \times \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{F_{y_{TP}}^2}{G_{y_{TP}}^2 \times \beta_{TP \text{ OPT}}^2}}\right)} = \frac{\hat{F}_{y_{TP}}}{G_{y_{TP}}} \times \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{F_{y_{TP}}^2}{F_{y_{TP \text{ MAX}}}^2}}\right)}$$

$$\text{et, } \hat{F}_{y_{TP}} = \frac{L_{RA} \cdot m \cdot V_x \cdot r_c}{L_{RA} + L_{TP}}$$

Cette estimation nécessite de connaître les valeurs des paramètres caractéristiques du modèle des pneumatiques  $G_{y_{TP}}$ ,  $F_{y_{TP \text{ MAX}}}$  et  $\beta_{TP \text{ OPT}}$ . Ces paramètres sont partiellement incertains et peuvent évoluer dans les temps. Suivant la qualité de l'adhérence, le  $V_y$  estimé sera plus ou moins important. L'expression précédente peut donc permettre de borner la mesure du  $V_y$  entre une valeur correspondant à une adhérence maximum et une valeur correspondant à une adhérence minimum.

Pour une consigne nulle, on aura alors  $V_y = 0$  et donc aucun biais ne sera généré.

A l'arrêt, pour ne pas solliciter intempestivement le système ORA (consommation hydraulique),  $r$ ,  $V_y$  et  $n_y$  doivent être conservés nuls quand  $V_x=0$ . On peut alors :

- soit les forcer à 0,
- soit les limiter par des bornes dépendantes de  $V_x$ , qui convergent vers 0 avec  $V_x$ .

En bornant  $V_y$  comme présenté précédemment et en remplaçant la mesure du facteur de charge ( $n_y$ ) par une approximation du type " $r.V_x$ ", la convergence de ces deux variables sera assurée.

## 6. Mise en œuvre opérationnelle

La loi de pilotage ainsi modifiée permet de conserver la liaison directe entre commande tiller et braquage des roues. Elle y associe la consigne de dérapage issue de l'asservissement de la vitesse de lacet et de l'inversion du modèle de synthèse. Cette nouvelle loi de commande, utilisable jusqu'à l'arrêt de l'appareil, reste donc cohérente avec le fonctionnement actuel du système, tout en profitant des apports issus de la loi de pilotage latérale initialement développée.

### *Réalisation permettant de conserver la loi directe actuelle active :*

Cette architecture de la loi de commande peut s'avérer très avantageuse du point de vue de son intégration sur avion. Par exemple (cas de l'A340-600), en dupliquant la cinématique des tillers et en dissociant les consignes issues des palonniers et des tillers, il est possible de continuer à utiliser la loi de commande directe actuelle (cf. figure 4.13). Les modifications à réaliser dans le BSCU sont alors très peu importantes et les risques induits par cette architecture s'en trouvent réduits d'autant.

Cette loi de pilotage au sol peut ainsi être intégrée dans le système avionique actuel de l'A340-600 sans nécessiter de modifications du BSCU, ni hardware, ni software (moyennant la limitation de l'autorité de l'asservissement). Cependant, pour une application en service de la loi, la réalisation de quelques modifications serait préférable. La duplication de la cinématique tiller pourrait être évitée grâce à la création d'un nouveau label sur le bus ARINC liant le BSCU au FCPC. Ce nouveau label permettrait au FCPC (dans le cas de l'A340-600) d'acquiescer la consigne de braquage des roues (en entrée de l'asservissement ORA) et non l'angle d'orientation du tiller (en entrée de la cinématique tiller).

De plus, pour permettre au FCPC de détecter la mise en saturation du système ORA, il est nécessaire de reconstituer le courant de commande ORA à partir de la mesure de l'angle de braquage et de la consigne associée. Il serait beaucoup plus sûr de réaliser cette détection directement dans le BSCU (modification du software) et ensuite, de transmettre cette information au FCPC (génération d'un booléen de détection de la mise en saturation du système).

On peut remarquer que cette solution permet de limiter fortement les éventuels problèmes que pourraient poser les retards dus à la communication entre calculateurs. Les consignes "boucle ouverte" étant comparables aux consignes actuelles, seule la consigne "boucle fermée" subira des retards supplémentaires : l'avion réagira donc aux sollicitations du pilote aussi rapidement qu'actuellement.

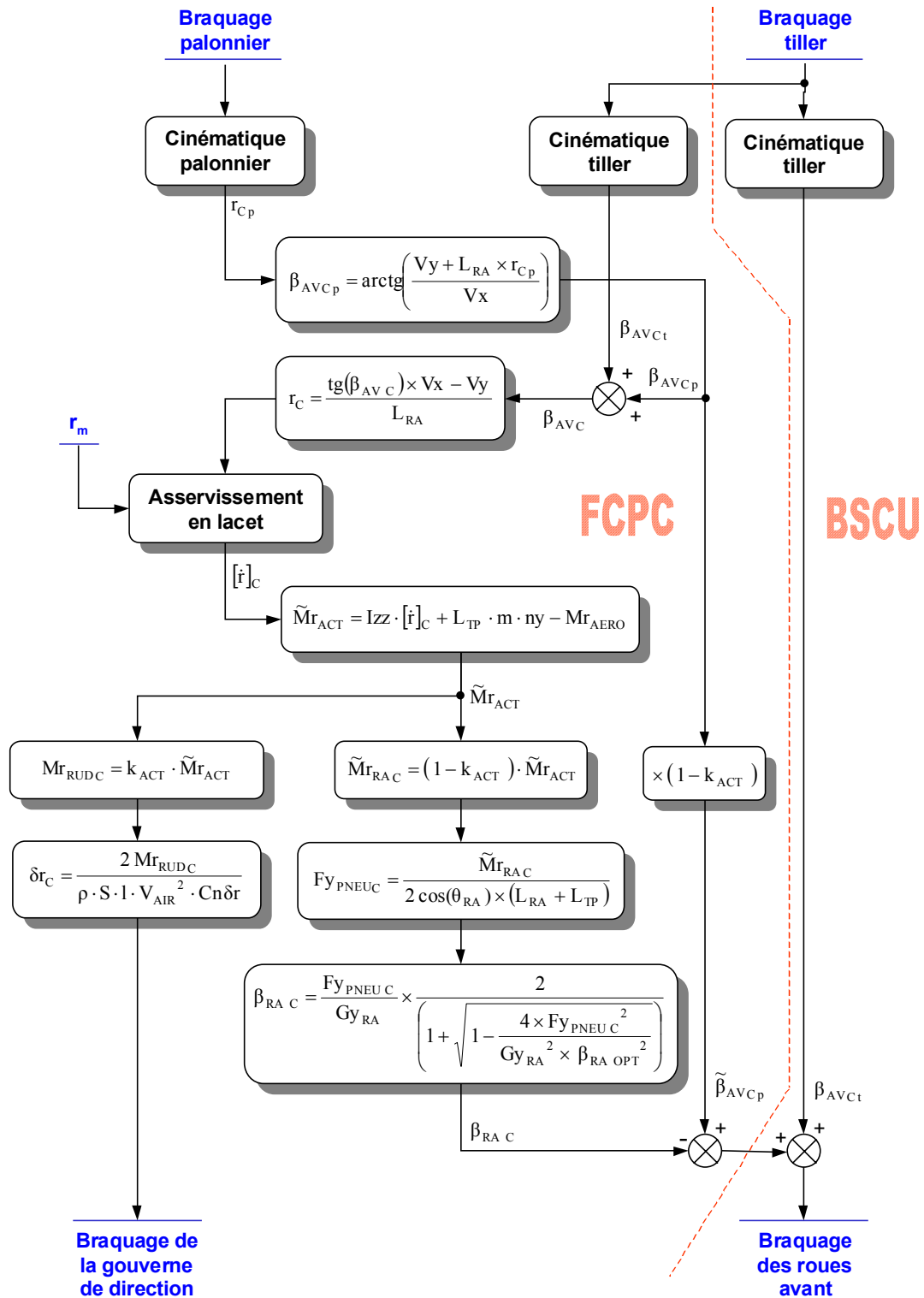


figure 4.13 : Exemple d'intégration possible de la loi pilotage latéral (figure 4.12) entre le FCPC et le BSCU.

Une évaluation avec avion réel est actuellement en cours sur un démonstrateur A340-600. Les premières campagnes d'essais réalisées ont déjà permis de confirmer l'intérêt d'une telle loi de pilotage et de vérifier son bon comportement pour les phases de roulage sur les taxiways et pour des déplacements le long de l'axe de piste à vitesse faible et moyenne.

Entre autre, l'étude de l'impact de la loi sur la réduction des effets de veering (comportement dissymétrique de l'avion rendant difficile le suivi de trajectoires rectilignes) a fait l'objet d'une attention particulière. Un exemple de résultat obtenu est présenté figure 4.14 et figure 4.15. Ces tracés correspondent à un essai réalisé sur l'aéroport de Toulouse Blagnac par fort vent d'Autan (150° 12 à 18 kts, turbulent), avec la présence d'un biais de braquage des roues avant de 1°. Cet essai comporte 2 étapes distinctes :

- Tout d'abord, au travers d'une première phase de roulage, loi inactive, sans actions du pilote. On peut constater que les effets de veering ont alors amené l'avion à s'écarter de l'axe de piste rapidement et de façon de plus en plus accentuée (écart d'environ 22m de la position du train d'atterrissage avant à l'axe de piste (~14m en référence GPS) après 200m de roulage).
- Ensuite, après que le pilote ait ramené l'avion sur l'axe de piste, une seconde phase de roulage est réalisée, loi active, toujours sans action du pilote. La loi utilisée est une version simplifiée de la loi de pilotage proposée précédemment qui, entre autre, ne comporte pas de correcteur intégral. On peut toute fois observer que cette loi de commande permet de conserver une vitesse de lacet proche de zéro (cf. figure 4.15) et que, malgré une légère déviation de la trajectoire de l'appareil au début du roulage, cette trajectoire reste bien maîtrisée et l'écart à l'axe de piste n'excède pas 10m après 1550m de roulage. Cette version simplifiée de la loi permet ainsi d'obtenir un gain de 10 sur la compensation des effets de veering par rapport au cas « avion naturel ».

On peut noter que l'absence de correction intégrale dans cette première version de la loi de pilotage est principalement due au problème de la panne moteur lors de décollages. En effet, l'action de la loi ne doit pas immédiatement et entièrement contrer une telle dissymétrie du comportement de l'avion, sous peine de dissimuler cette panne au pilote et d'entraîner de grosses limitations en terme de performance. La mise en œuvre opérationnelle d'un intégrateur sur la loi nécessitera donc des campagnes d'essais à hautes vitesses de sorte à bien appréhender ce problème et à trouver le réglage le plus adapté possible à ces différentes contraintes.



figure 4.14 : Tracé de l'écart latéral à l'axe de piste (référence GPS) en fonction de l'avancement de l'appareil – FCR T67 MSN 360 –.

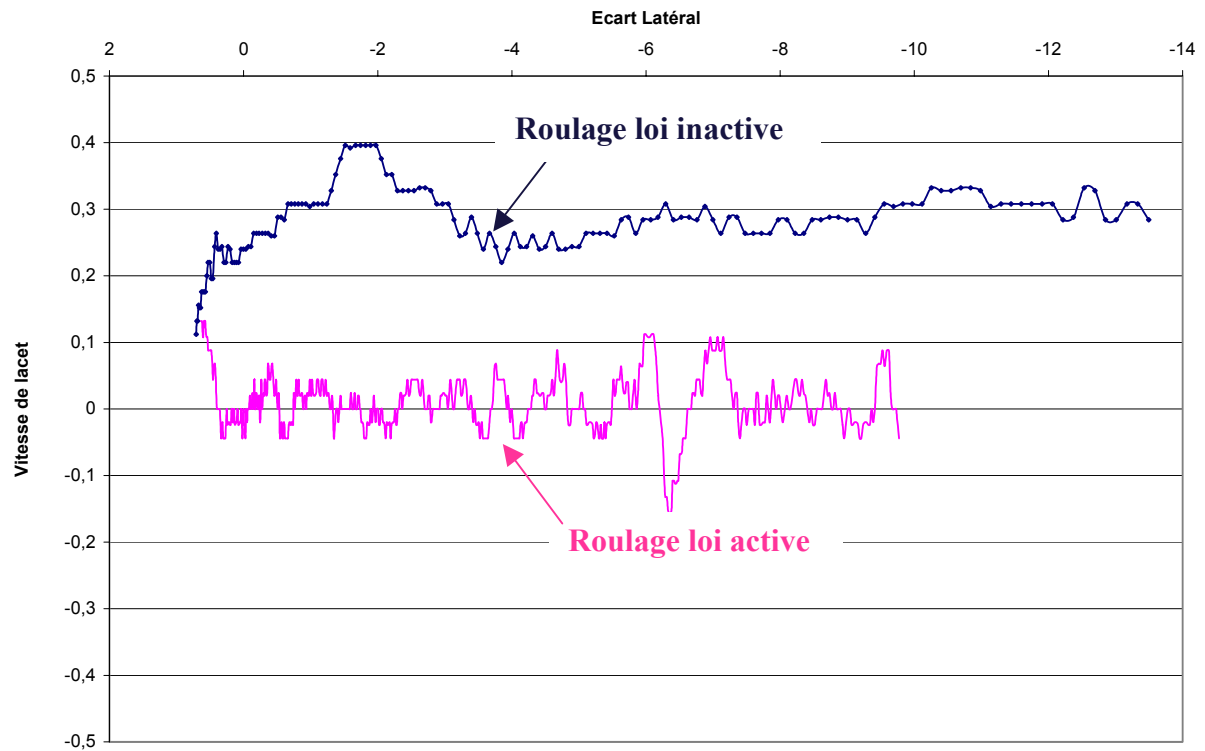


figure 4.15 : Evolution de la vitesse de lacet en fonction de l'écart à l'axe de piste, sans actions du pilote, loi inactive puis active – FCR T67 MSN 360 –.

## 7. Conclusion

Ce chapitre a porté sur l'étude et la conception d'une loi de pilotage latéral, adaptée à l'ensemble des évolutions de l'avion au sol, sur toute la gamme de vitesses et jusqu'à l'arrêt de l'appareil. La robustesse de cette loi a été évaluée vis à vis d'erreurs de mesure ou d'estimation, vis à vis de perturbations, ou encore vis à vis de l'adhérence de la piste. Ainsi, pour un A320 (avion qui a été utilisé comme cas d'application et de validation), l'impact sur la robustesse de l'ensemble des mesures ou estimations utilisées par la loi a été étudié. Cela a permis de conclure au bon comportement de cette dernière quel que soit l'état de la piste (de sèche à verglacée). La prise en compte de l'influence des saturations du système d'orientation des roues avant a aussi permis de définir un critère de réglage des gains et d'adapter l'intégrateur pour assurer un bon comportement de l'avion en manœuvre. Enfin, l'étude de l'impact de la dynamique du système d'orientation des roues avant (négligée dans le modèle de synthèse) a permis de vérifier que son influence n'est pas plus pénalisante que celle des saturations. Cependant, elle a aussi permis de constater que cette influence n'est pas négligeable pour autant et donc qu'elle nécessite d'être vérifiée dans chaque cas.

Cela montre aussi qu'il n'est pas nécessaire de considérer la dynamique actionneur dans le modèle de synthèse et ainsi, que la mise en œuvre de techniques de commande telles que le backstepping n'apporterait pas de gain significatif et remettrait en cause les possibilités d'adaptation de la loi au cas des très basses vitesses et de l'arrêt (cf. partie 5)

Dans le cas de la commande non-linéaire inverse, la prise en compte d'une représentation au 1<sup>er</sup> ordre de la dynamique des actionneurs pourrait permettre, comme dans le cas du pilotage longitudinal étudié au chapitre 3, de corriger une partie des erreurs statiques. La mise en œuvre de ce type de commande dans le cas d'une loi de pilotage latéral de l'avion au sol permettrait de compenser une dissymétrie du comportement de l'appareil ou une erreur de mesure de l'angle de braquage des roues. Cependant, les biais dus au fonctionnement de la servovalve continueraient à nécessiter l'utilisation d'un intégrateur. La mise en œuvre d'une telle loi (alors d'ordre 2) impliquerait, pour le cas des très basses vitesses et de l'arrêt, de réaliser une transition entre cette loi et une loi directe. Cette solution semble ainsi présenter plus d'inconvénients que d'avantages et n'a donc pas été étudiée plus en détail.

Comme à pu aussi le montrer ce chapitre, la technique de commande choisie a permis d'obtenir une loi de commande tout à fait cohérente avec la loi actuelle, autant par son architecture que par son action (pilotage en orientation de la vitesse aux roues avant, consigne "boucle ouverte" identique à la consigne actuelle). Elle peut donc être réalisée moyennant peu ou pas de modifications hardware et ne nécessite que très peu de modifications du BSCU.

Enfin, sur le plan industriel, une évaluation sur avion réel, actuellement en cours, doit permettre de compléter cette étude. Son but est de poursuivre la validation des résultats théoriques présentés précédemment à l'aide des moyens d'essais dont dispose Airbus. Elle semble déjà confirmer l'intérêt d'une telle loi de pilotage et vérifier les analyses et résultats de simulations décrits dans ce chapitre (pour les phases de roulage sur les taxiways et pour des déplacements le long de l'axe de piste à vitesse faible et moyenne).



# Conclusion générale

Cette conclusion s'articule autour de trois points : un bilan des travaux réalisés et des livrables produits, un bilan méthodologique de l'étude théorique et son application et une présentation de plusieurs concepts opérationnels liés aux évolutions envisageables des lois de pilotage de l'avion au sol.

## 1. Bilan du travail réalisé

Les travaux réalisés durant la thèse ont porté sur quatre points principaux :

- La modélisation de l'avion au sol et de ses systèmes ;
- L'étude des techniques de commande des systèmes non-linéaires ;
- La réalisation d'une loi de pilotage longitudinal de l'avion au sol ;
- La mise au point d'une loi de pilotage latérale.

### *Les travaux de modélisation :*

Ces travaux qui ont représenté une part importante de l'étude. Ils ont permis :

- d'aider à l'analyse du comportement de l'avion au sol et des systèmes mis en jeu lors du roulage ;
- de permettre la mise en œuvre de modèles pour la synthèse de lois de commande ;
- de développer un outil de simulation suffisamment précis, détaillé et représentatif pour permettre l'évaluation et la validation des lois de commande.

Ces travaux ont, dans un premier temps, porté sur la mise au point d'un modèle non-linéaire détaillé du système d'orientation des roues avant. Ce modèle a notamment fait l'objet d'une implantation sur le simulateur de développement ASF (Atelier de Simulation de Freinage : simulation précise de la dynamique de l'avion, servant à l'étude et au développement des systèmes ATA 32 (système liés aux trains d'atterrissage)) et sur « Iron Bird » (simulateur semi-réel d'intégration système).

Une part importante des travaux entrepris a aussi été consacrée à l'étude de la modélisation des pneumatiques, lors du freinage et en présence de dérapage. Elle s'est ainsi intéressée aux différents modèles présents dans la littérature et s'est consacrée plus spécifiquement à certains modèles macroscopiques de référence. Elle s'est aussi penchée sur les problématiques liées aux vitesses très basses et nulles et sur la problématique du couplage entre efforts longitudinaux et latéraux.

En ce qui concerne, le comportement longitudinal de l'avion, d'importants travaux ont aussi porté sur la mise au point d'un modèle non-linéaire macroscopique de la dynamique des moteurs et sur la modélisation du système de freinage.

L'ensemble de ces travaux a conduit à la réalisation sous Matlab/Simulink d'un outil de simulation de l'avion au sol et en vol. Cet outil a été développé de sorte à pouvoir générer des simulations temps réel « pilotées ».

### ***Etude des techniques de commande des systèmes non-linéaires :***

Une étude théorique des techniques de commande des systèmes non-linéaires SISO a permis d'obtenir une base solide pour les travaux applicatifs dont il est question ci-dessous. Elle a ainsi permis de réaliser un bilan méthodologique que l'on abordera dans la partie suivante. Cette étude a notamment porté sur :

- la commande au premier ordre ;
- la commande non-linéaire inverse ;
- le backstepping ;
- la commande par régime glissant.

Elle a permis, par comparaisons réciproques, de dégager les avantages et inconvénients de la mise en œuvre de chacune de ces méthodes.

### ***Etude, mise en œuvre et évaluations de différentes techniques permettant le pilotage longitudinal de l'avion au sol :***

Cette étude s'est basée sur l'évaluation de différentes techniques de commande non-linéaire pour permettre le contrôle de la vitesse et de l'accélération.

Elle s'est tout d'abord intéressée au cas du contrôle de la vitesse par l'intermédiaire de la poussée motrice, puis s'est intéressée au contrôle longitudinal de l'avion basé sur l'utilisation du système de freinage.

Dans un troisième temps, elle a cherché à proposer un algorithme de supervision de ces actionneurs pour couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement.

Cette étude s'est finalement appliquée à définir différentes modifications envisageables pour adapter la loi de pilotage retenue aux contraintes opérationnelles.

Elle a ainsi permis de définir une loi de commande dont les performances et la précision satisfont aux contraintes opérationnelles.

Cette loi de commande, grâce à l'inversion de la dynamique des actionneurs (modélisés par un système du premier ordre), a permis d'éviter l'utilisation d'un intégrateur et a de ce fait conduit à une réelle amélioration des performances de l'asservissement (par rapport à des lois de commande plus « classiques »). Cette étude a donc permis de mettre en avant une adaptation possible et prometteuse des lois « automanettes » utilisées pour contrôler la vitesse en vol.

L'application de la loi de pilotage longitudinal au contrôle de la décélération offre de plus une alternative intéressante à « l'autobrake » actuel. L'utilisation de la loi de pilotage dans ce cadre d'application permettrait de grandement simplifier la mise au point de cette fonction et notamment son réglage. Cependant, l'ensemble des contraintes liées au fonctionnement détaillé du système de freinage n'ayant pu être pris en compte, une validation complémentaire devra être envisagée.

Les travaux réalisés ont fait l'objet d'un brevet dont la demande a été déposée en avril 2004.

### ***Etude d'une loi de pilotage latéral de l'avion au sol***

Cette étude s'est basée sur les travaux déjà réalisés au sein d'Airbus dans le cadre du suivi d'axe de piste, à l'atterrissage et au décollage. Son objectif était de proposer une loi de pilotage de structure similaire à celle déjà existante pour permettre de couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement à l'aide d'une loi unique. Il s'agit alors d'adapter la loi de commande initiale aux problèmes posés par les fortes non-linéarités de la dynamique du système lors de manœuvres, ou encore de résoudre le problème posé par le cas de l'arrêt de l'appareil (discontinuité du modèle et modification de l'objectif de commande).

Les travaux réalisés ont été conclu par une analyse a posteriori de la robustesse paramétrique de la loi, de son comportement vis-à-vis des dynamiques actionneurs (négligées lors de la synthèse) et de l'impact des saturations sur le système. Ils ont montré que, dans le cadre très contraignant de cette application (modèle fortement non-linéaire, incertain et saturé), une loi de commande de type non-linéaire inverse permet de synthétiser une loi de pilotage performante, tout à fait adaptable aux différentes contraintes opérationnelles.

Cette étude a servi de support à la mise en œuvre de la loi de pilotage latéral sur démonstrateur. Les premiers résultats d'essais semblent confirmer l'intérêt de ce type de loi et valider les analyses théoriques et les résultats de simulation, présentés dans ce mémoire.

Cette deuxième application a fait l'objet d'un brevet déposé en mai 2003.

## **2. Bilan méthodologique**

L'étude théorique réalisée durant la thèse s'est basée sur l'association entre modèle de synthèse et loi de commande. Il s'agissait alors de trouver un juste équilibre entre le niveau de réalisme des modèles considérés et la difficulté de mise en œuvre des techniques de synthèse. Cette étude a aussi montré que la structuration du modèle a un impact direct sur les propriétés de la loi de commande. Il est ainsi possible d'adapter cette commande aux spécificités du système, en choisissant judicieusement le modèle de synthèse.

A chaque étape du développement, une évaluation et une validation très poussée de ces compromis a pu être réalisée, grâce aux moyens humains et matériels pointus auxquels l'environnement industriel de la thèse a donné accès.

L'étude a ainsi nécessité une évaluation exhaustive des modèles déjà disponibles dans le domaine et a conduit, sur la base des choix de modélisation retenus, à un important effort de modélisation.

Elle a ainsi permis de disposer à la fois de modèles complets pour réaliser la synthèse des lois et de modèles fins destinés à l'évaluation et à la validation préliminaire (avant essais) de celles-ci.

Le choix des techniques de commande abordées, s'est basé sur une étude théorique des principales méthodes de synthèse non linéaires. Elle s'est ainsi principalement intéressée à la commande au premier ordre, à la commande non-linéaire inverse, au backstepping et à la commande par régime glissant.

Aucune de ces techniques ne traite de façon explicite des contraintes qui, dans la pratique, s'exercent sur le système (perturbations, incertitudes paramétriques, saturations, dynamiques négligées). Ainsi un des principaux résultats de la thèse, sur le plan méthodologique, a été de montrer qu'une analyse fine des processus mis en jeu et des différentes situations opérationnelles peut, non seulement permettre la mise à profit de ce genre de technique (et notamment la commande non-linéaire inverse), mais peut aussi permettre d'en évaluer le comportement dans des situations non nominales et donc d'aborder la question de la robustesse.

Dans le futur, ces travaux d'analyse pourraient faire l'objet d'une formalisation théorique plus poussée, de sorte à classifier différents comportements non-linéaire spécifiques et d'y associer des résultats « types » en terme de robustesse, de réglage de la dynamique de la loi de commande ou encore, de définition d'une couche de supervision des intégrateurs.

### **3. Evolutions envisagées**

A partir de la mise au point de ces lois de pilotage longitudinal et latéral et compte tenu des bilans présentés précédemment, plusieurs évolutions peuvent être envisagées. Les principales concernent l'utilisation couplée de la poussée et du freinage différentiel, la mise en place d'une gestion optimisée de la vitesse lors de la prise de virage et enfin, le développement d'une fonction globale de roulage automatique.

#### **3.1. Utilisation couplée freinage/poussée différentielle**

Cette fonction a pour but d'améliorer le pilotage latéral de l'avion en associant au couple généré par le braquage des roues et de la dérive, un couple issu d'une action différentielle sur les moteurs et les freins. On considère ici une action simultanée des deux systèmes pour permettre de maintenir, autant que possible, le découplage entre le comportement longitudinal et latéral de l'avion : cette action différentielle ne doit pas avoir d'impact significatif sur la vitesse. Pour se faire l'algorithme à développer devra modifier les consignes issues de la loi de pilotage longitudinal de sorte à obtenir le couple désiré, tout en conservant un bilan neutre vis-à-vis de la force longitudinale globale. La bande passante de cette fonction sera donc limitée par la dynamique du système le plus lent (en l'occurrence, les moteurs).

Une telle fonction permettrait d'améliorer la manœuvrabilité de l'avion lorsque la loi de pilotage latéral est à saturation et uniquement dans une bande de fréquence réduite (limitée par la dynamique des moteurs).

On peut ainsi, entre autres, distinguer deux cas de fonctionnement où cette fonction pourrait s'avérer très utile :

- Lors de manœuvres serrées, à basse vitesse, le système d'orientation des roues avant (ORA) peut rester à saturation sur une longue période. Par exemple, lors d'un U-turn (demi-tour sur la piste), la mise en place progressive d'une action différentielle sur les moteurs et les freins devrait permettre de réduire le rayon de giration.
- En cas de perte du système ORA, cette fonction permettrait de conserver un minimum de manœuvrabilité. Les problèmes associés au faible temps de réponse des moteurs peuvent, dans ce cas, être résolus en acceptant un usage non-optimal des moteurs et des freins. En conservant une poussée et un niveau de freinage supérieur à la consigne issue de la loi de pilotage longitudinal, il est en effet possible de générer uniquement du freinage différentiel sans impacter le comportement longitudinal de l'avion (réduction du freinage sur un côté et augmentation de l'autre). De plus, le régime moteur étant alors supérieur au régime Idle, la dynamique des moteurs est aussi plus rapide.

### **3.2. Optimisation de la vitesse lors de la prise de virage**

La grandeur limitant le plus la manœuvrabilité de l'avion lors de ses déplacements au sol est sa vitesse. Lors d'un virage, du fait des forces centrifuges, plus la vitesse est importante, plus le virage réalisé doit être large, afin d'éviter une mise en dérapage de l'avion. Pour faire face aux cas d'urgence (évitement, prise de virage trop rapide, etc.), l'avion doit pouvoir suivre des trajectoires plus serrées qu'en condition standard.

Pour une vitesse donnée, le rayon de giration minimum est directement issu des saturations des dynamiques actionneurs. Pour réduire ce rayon de giration, il pourrait être envisagé de générer un moment de lacet supplémentaire via l'utilisation du freinage différentiel. La manœuvrabilité ne serait alors plus limitée que par l'adhérence maximale des trains principaux (longitudinale et surtout latérale). Cette action aurait aussi pour effet de réduire la vitesse. Elle réduirait de ce fait les forces centrifuges et ainsi, aurait pour conséquence de réduire encore le rayon de giration.

Cependant, la génération de forces de freinage a aussi pour conséquence indirecte de réduire fortement l'adhérence des roues. Cette fonction devra donc être optimisée sur la base d'une connaissance précise des effets de couplage entre l'adhérence latérale et la génération de freinage. De telles données ne sont pas pour l'instant accessibles.

Enfin, même en possession d'une parfaite connaissance du comportement des pneumatiques, les capacités d'une telle fonction resteront bridées par la méconnaissance de l'état de la chaussée (sèche, mouillée, verglacée, etc.).

### **3.3. Automatisation du roulage**

Une troisième fonction pouvant profiter des travaux réalisés sur le pilotage latéral et longitudinal est la fonction de roulage automatique. Ces lois de commande peuvent, en effet, être considérées comme les « petites boucles » de pilotage, commandées par une boucle de guidage. La faisabilité d'une telle fonction reste principalement liée à des problèmes de positionnement de l'avion (problèmes de précision, de fiabilité et de disponibilité de la mesure) et d'acquisition de l'état précis du trafic et des bases de données aéroportuaires mises à jour (problème de mise en œuvre d'une transmission de donnée performante et fiable lors de l'approche et du roulage). Il restera alors à générer des trajectoires précises et à traduire ces dernières par des variables utilisables par une boucle de guidage.

Ainsi le travail de recherche présenté dans ce mémoire ouvre la voie à un ensemble d'études, vaste et variée.

Sur le plan applicatif, le problème de la conduite au sol des avions de transport civil représente un nouveau champ de développement pour systèmes embarqués. La mise en œuvre de telles lois de commande permettra en effet de relever en partie les nouveaux défis posés par l'augmentation continue du trafic aérien et par les possibilités limitées d'extension des plate-formes aéroportuaires.

Sur le plan méthodologique, les résultats obtenus montre l'intérêt de la mise en œuvre des techniques de commandes non-linéaires pour assurer, de la manière la plus efficace possible, le contrôle de systèmes complexes tels que les avions de transport. Un travail important reste cependant à réaliser pour que les méthodes de synthèse mises en œuvre dans cette étude deviennent des outils industriels à part entière.

## Références bibliographiques

- [AGARD 1998] AGARDograph 333 "Enhancement of aircraft ground handling simulation capability", AGARD-AG-333
- [Aizerman 1994] M.A. Aizerman, "On a problem concerning stability in the large of dynamical systems", *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, Vol. 4, pp. 722-723, 1994.
- [Berge 1997] S.P. Berge, T.I. Fossen, "Robust Non-Linear Control Allocation of Overactuated Ships", *MCMC'97*, Croatia, 1997.
- [Clot 1998] J. Clot et al. "Système d'alarme et de sécurité active pour la conduite automobile", *Rapport LAAS-CNRS n°98441*, Oct. 1998
- [Devaud 1999] E. Devaud, "Méthodologie de prise en compte de la robustesse dans les techniques de linéarisation : application au pilotage d'un missile fortement manœuvrant", *Thèse CIFRE Université de Paris-Sud / Supélec*, 1999.
- [Duprez 2001] J. Duprez, "Optimisation de la loi de commande du système d'orientation des roues avant sur A320", *Mémoire de DEA LAAS-CNRS*, Oct. 2001
- [Fernandez 1987] B.R. Fernandez, J. K. HEDRICK, "Control of multivariable nonlinear by the sliding mode method", *Int. J. Control*, Vol. 46, No. 3, 1019-1040, 1987.
- [Fitts 1966] E. Fitts, "Two counterexamples to Aizerman's conjecture", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, pp. 553-556, 1966.
- [Fossard 1993] A.J. Fossard, D. Normand-Cyrot, "Systèmes non linéaires", Tome III, Ed. Masson, 1993
- [Fossen 1998] T.I. Fossen, J.P. Strand, "Nonlinear Ship Control", *Tutorial session IFAC-CAMS'98*, Fukuoka Japan, Oct. 1998.
- [Garcia] J.P. Garcia, D. Martin, "System Description Note (SDN) - A320 - ATA32-20/40/50 relating to : Nose Landing Gear Wheels and Brakes / Steering", *Document Airbus*.
- [Hade 1999] M. Hade, "NWS stabilization law", *Rapport de stage (Airbus Industrie)*, 1999.
- [Isidori 1981] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, S.V. Monaco, "Nonlinear decoupling via feedback differential geometric approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, 1981.

- [Isidori 1995] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", 3rd edition, Belin : Springer-Verlag, 1995.
- [Kalman 1957] R.E. Kalman, "Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems", Transactions of the ASME, Vol. 79, pp. 553-566, 1957.
- [Kelly 1997] J.H. Kelly, J.H. Evers, "An interpolation strategy for scheduling dynamic compensators", AIAA Guidance and Control Conference, No 97-3764, 1997.
- [Klyde 2000] D.H. Klyde, T.T. Myers, R.E. Magdaleno, J.G. Reinsberg, "Identification of the dominant ground handling characteristics of a navy jet trainer", AIAA-2000-3903 A00-39679
- [Lavergne 2003] F. Lavergne, "Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoires – Rapport d'avancement de thèse pour l'année 2002/2003", Note technique Airbus France
- [Ménard 1998] Ph. Ménard, "Projet PA Générique : Contrôle de vitesse – Automanette générique", 1998, Note technique Airbus France
- [Messier-Bugatti] Messier-Bugatti, MSAO BSCU A319/A320/A321, réf. : DR 35357
- [Mora-Camino 1993a] F. Mora-Camino, A. K. Achaibou, "Design of Guaranteed Performance Controllers for Systems with Varying Parameters", J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, pages 1185-1188, 1993.
- [Mora-Camino 1993b] F. Mora-Camino, A. K. Achaibou, "Zero-gravity atmospheric flight by robust nonlinear inverse dynamics", J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, pages 604-607, 1993.
- [Mouyon 1993] P. Mouyon, "Commande au premier ordre des systèmes non linéaires, Systèmes non linéaires", Tome III, A.J. Fossard et D. Normand-Cyrot, Ed. Masson, 1993
- [Pacejka 1987] E. Bakker, L. Nyborg, H.B. Pacejka, "Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies", SAE paper 870421.
- [Pacejka 1989] E. Bakker, H.B. Pacejka, L. Lidner "A new Tire Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies", SAE paper 890087
- [Sepulchre 1997] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic, "Constructive Nonlinear Control", Springer-Verlag, 1997,
- [Slotine 1984] J.J.E. Slotine, "Sliding controller design for non-linear systems", Int. J. Control, vol.40, n° 2, 421-434, 1984.
- [Slotine 1987] J.J.E. Slotine et W. Lie, "Adaptive Manipulator Control : A Case Study", 1987, IEEE Robotics and Automation, pp. 1392-1400.

- [Slotine 1991] J.J.E. Slotine et W. Li. "Applied Nonlinear Control", 1st edition Prentice-Hall, 1991.
- [S-Marcoux 2001] C. Saint-Marcoux, "Etude des lois de pilotage manuel de l'avion au sol", 2001, Mémoire de fin d'études (Airbus / ENAC)
- [Thèse 2001] "Sujet de thèse – BTE/SY/ENAT/FREINAGE", Document EADS Airbus SA, réf. : 514.0115/01
- [Utkin 1974] V.I. Utkin, "Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems" (1974). Translated from Russian by A. Parnakh. Automn remote Control, Vol. 44, page 1105, 1984.
- [Utkin 1977] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding Mode : a survey", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 2, 1977,
- [Villaume 2001] F. Villaumé, F. Fabre, S.N. Singh, F. Mora-Camino, "Control of Input Redundant Affine Systems : Application to Runway Axis Tracking at Landing ", 15th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Bologna (Italy), 2-7 September 2001,
- [Villaumé 2002] F. Villaumé, "Contribution à la commande des systèmes complexes : application à l'automatisation du pilotage au sol des avions de transport", Mémoire de thèse (Airbus / LAAS-CNRS), 2002.

### **Publications réalisées pendant la thèse :**

- J. Duprez, F. Mora-Camino, F. Villaume, "Control of the Aircraft-on-Ground Lateral Motion During Low Speed Roll and Manoeuvres", IEEE Aerospace Conference 2004, Big Sky (MT), USA, 8 au 13 Mars 2004.
- J. Duprez, F. Mora-Camino, F. Villaume, "Aircraft-on-Ground Lateral Control for Low Speed Maneuvers", 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aeropsace, St. Petersburg, Russia, 14 au 18 Juin 2004.
- J. Duprez, F. Mora-Camino, F. Villaume, "Robust Control of the Aircraft-on-Ground Lateral Motion", 24th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences - ICAS, Yokohama, Japan, 29 Août au 3 Septembre 2004.
- J. Duprez, F. Mora-Camino, "Application de la linéarisation entrée/sortie au pilotage d'un avion au sol", 4ème Congrès des doctorants, Toulouse, France, 2003.

### **Brevets déposés :**

J. Duprez, F. Villaume, “Procédé et dispositif de pilotage d’un aéronef”, numéro de demande : FR03 05764 - du 14 mai 2003

J. Duprez, F. Villaume, “Système de pilotage longitudinal d’un aéronef roulant sur le sol”, numéro de demande : FR04 03972 du 16 avril 2004



---

## RESUME

Cette thèse concernant l'*Automatisation du pilotage au sol pour la navigation aéroportuaire*, a été réalisée par Jean Duprez dans le cadre d'un contrat CIFRE entre Airbus France et le LAAS du CNRS.

Elle s'inscrit dans un ensemble de travaux d'amélioration et d'optimisation des déplacements au sol des aéronefs, concernant aussi bien les systèmes liés à la navigation sur la plate-forme aéroportuaire (détermination de la "route" à suivre), les systèmes de guidage (aide automatique au suivi de trajectoire) ou les systèmes de pilotage (fonctions et asservissements permettant le contrôle actif de l'aéronef par le pilote).

L'objectif de la thèse est d'évaluer et de proposer des lois de pilotage d'un avion de transport civil facilitant ses déplacements sur la plate-forme aéroportuaire. Ces lois de pilotage permettront d'alléger la charge de travail et la complexité du pilotage de l'avion au sol, tout en utilisant de manière optimisée et transparente les différents actionneurs disponibles. Les déplacements seront alors plus sûrs et précis, et pourront être exécutés plus rapidement.

Les travaux réalisés s'articulent autour de 4 points principaux :

- la modélisation de l'avion au sol et des systèmes associés (moteurs, système d'orientation des roues, système de freinage, pneumatiques, etc.) ;
- l'étude théorique de la commande des systèmes non-linéaires (commande au premier ordre, commande non-linéaire inverse, backstepping, commande par régime glissant) ;
- l'étude d'une loi de pilotage longitudinal de l'avion au sol. Elle s'appuie sur l'utilisation du système de freinage et des moteurs pour permettre un pilotage de l'appareil en vitesse ou en accélération ;
- l'étude d'une loi de pilotage latéral de l'avion au sol pour permettre le contrôle de la trajectoire (au travers de critères adaptés aux conditions opérationnelles d'utilisation de la loi) et l'utilisation de la gouverne de direction et du système d'orientation des roues avant.

L'approche retenue est basée principalement sur une technique d'inversion et sur la supervision des actionneurs. Elle associe à l'utilisation de ces techniques de commande certaines adaptations des lois, nécessaires à leur mise œuvre dans la pratique.

---

## SUMMARY

This PhD study concerns *the aircraft-on-ground control for airport navigation*. It has been made by Jean Duprez and has been supported by a CIFRE agreement between Airbus France and the LAAS – CNRS.

This work is linked with different studies concerning the navigation, guidance and control to improve the aircraft motion on the airports network.

It aims to ease ground handling by proposing and assessing different control laws for civilian transportation aircraft. These control laws goal is to reduce pilot workload while using the actuators in a more optimal manner. Aircraft-on-ground motion will then be more precise and safer and thus, will lead to a potential reduction of the taxiing duration.

This study concerns 4 main research axis :

- the aircraft-on-ground modelling, including the associated sub-systems (engines, steering and breaking systems, tires, etc.) ;
- the non-linear control theory (first order control, non-linear inverse control, backstepping, sliding mode control) ;
- the study of an aircraft-on-ground longitudinal control law, to allow whether speed or acceleration control, using the breaking system and the engines ;
- the study of an aircraft-on-ground lateral control law, to allow the aircraft trajectory control (through adapted criterions), using rudder deflection and the steering system.

The proposed results are manly based on the non-linear inverse control and on actuator supervision algorithms. They mix theoretical control methodologies and specific control law adaptations to deal with the practical constraints of such application.