UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

et d'Informatique

Mémoire pour l'obtention du

Diplôme d'Etudes Approfondies de Mathématiques Pures

(D.E.A.)

Spécialité : PROBABILITE

UNE REPRESENTATION PROBABILISTE DE POISSON DES SOLUTIONS POSITIVES DE $\Delta u = u^2$ DANS UN DOMAINE D DE $\mathbb{R}^2$

Soutenu le 08 août 2008

par :

RASOLOFONDRAINIBE Lafiarizaka Volana Helinirina Tiana

maître es science

Devant la Commission d'Examen formée de

Président :

Monsieur Michel RAJOELINA

Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Rapporteur :

Monsieur Victor HARISON

Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Examinateurs :

Monsieur Toussaint RABEHERIMANANA

Professeur à l'Université d'Antananarivo

Monsieur Marc RABIAZAMAHOLY

Maître de Conférence à l'Université d'Antananarivo

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

et d'Informatique

Mémoire pour l'obtention du

Diplôme d'Etudes Approfondies de Mathématiques Pures

(D.E.A.)

Spécialité : PROBABILITE

UNE REPRESENTATION PROBABILISTE DE POISSON DES SOLUTIONS POSITIVES DE $\Delta u = u^2$ DANS UN DOMAINE D DE $\mathbb{R}^2$

Soutenu le 08 août 2008

par :

RASOLOFONDRAINIBE Lafiarizaka Volana Helinirina Tiana

maître es science

Devant la Commission d'Examen formée de

Président :

Monsieur Michel RAJOELINA

Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Rapporteur :

Monsieur Victor HARISON

Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Examinateurs :

Monsieur Toussaint RABEHERIMANANA

Professeur à l'Université d'Antananarivo

Monsieur Marc RABIAZAMAHOLY

Maître de Conférence à l'Université d'Antananarivo

REMERCIEMENTS

Merci à Dieu le créateur tout puissant d'avoir permis la réalisation de ce mémoire.

J'adresse ma gratitude à Monsieur Victor HARISON, mon directeur de mémoire qui m'a proposé l'étude d'une représentation probabiliste de Poisson des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Je tiens donc en premier à le remercier, d'abord pour toutes ses initiatives, ensuite pour la grande tâche qu'il a accompli, celui de diriger et mener à bien cet écrit.

Monsieur Michel RAJOELINA m'a fait l'honneur en acceptant de présider le jury de mon mémoire, malgré ses multiples responsabilités. Je lui adresse mes remerciements chaleureux.

Je remercie Monsieur Toussaint RABEHERIMANANA qui a eu l'amabilité d'examiner ce travail. Son apport est inestimable dans la version définitive de cet écrit.

Je remercie également Monsieur Marc RABIAZAMAHOLY d'avoir accepté d'être examinateur de ce mémoire. Je lui exprime ma reconnaissance pour ses commentaires éclairés sur le manuscrit.

Enfin, j'aimerais ici présenter ma joie et ma reconnaissance infinie aux membres de ma famille pour leur soutien moral et matériel.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cet article intitulé "UNE REPRESENTATION PROBABILISTE DE POISSON DES SOLUTIONS POSITIVES DE $\Delta u = u^2$ DANS UN DOMAINE D DE $\mathbb{R}^2$" de Le Gall [5] a pour but de déterminer les solutions positives de l'équation différentielle partielle $\Delta u = u^2$ dans un domaine D de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$, en utilisant le processus stochastique appelé serpent brownien. D'abord, nous allons définir ce serpent brownien et parler des mesures usuelles à notre étude. Ensuite, nous donnons quelques estimations de la mesure de sortie. Et pour terminer, nous montrons que ces solutions positives sont en correspondance bijective avec les couples (K, ν) où K est un sous-ensemble fermé de ∂D et ν une mesure de Radon sur $\partial D \backslash K$ pour D un domaine borné, simplement connexe puis pour D un domaine de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$.

PREMIERE PARTIE :

LE SERPENT BROWNIEN

1. LE SERPENT BROWNIEN

Nous utilisons le processus stochastique appelé serpent brownien pour déterminer les solutions d'une équation différentielle partielle $\Delta u = u^2$ dans un domaine plan D de classe C^2. Il fournit une approche plus efficace et plus "trajectorielle" pour démontrer des énoncés analytiques par des méthodes probabilistes.

1.1 Définition

On appelle serpent brownien, un processus fort de Markov, continu à valeurs dans un espace de trajectoires arrêtées dans $\mathbb{R}^2$ où la trajectoire arrêtée est une application continue $w : [0, \zeta] \to \mathbb{R}^2$ et le nombre $\zeta = \zeta_w \geq 0$ est appelé temps de vie de la trajectoire.

1.2 Propriétés

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble de toutes les trajectoires arrêtées dans $\mathbb{R}^2$. Cet ensemble est associé à une distance

$$d(w, w') = |\zeta - \zeta'| + \sup_{t \geq 0} |w(t \wedge \zeta) - w'(t \wedge \zeta')|$$

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{W}_x$ l'ensemble de toutes les trajectoires arrêtées avec élément initial $w(0) = x$.
Le serpent brownien avec point initial x est le processus de Markov $W = (W_s, s \geq 0)$ dans $\mathcal{W}_x$ dont la loi est caractérisée comme suit :

1. Si ζ_s signifie le temps de vie de W_s, le processus $(\zeta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$ (un temps de vie ne peut pas être négatif).
2. Conditionné par $(\zeta_s, s \geq 0)$, le processus W reste un processus de Markov non homogène. Ses noyaux de transition conditionnels sont décrits par les propriétés suivantes :
   Pour $s < s'$,
   (a) $W_{s'}(t) = W_s(t)$, pour tout $t \leq m(s, s') := \inf_{r \in [s, s']} \zeta_r$;
   (b) $(W_{s'}(m(s, s') + t) - W_{s'}(m(s, s')),\ 0 \leq t \leq \zeta_{s'} - m(s, s'))$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^2$ indépendant de W_s.

De manière informelle, quand ζ_s décroît, la trajectoire W_s est raccourcie à partir de son point terminal(le point de départ ne change jamais) et quand ζ_s croît, la trajectoire W_s est allongée en lui ajoutant au niveau de son point terminal des "petits bouts" de trajectoires suivant la loi de ζ.

1.3 Définitions de quelques mesures usuelles

Maintenant, nous allons définir les outils importants dans notre étude à savoir : la mesure d'excursion que nous utilisons lors du déplacement du serpent brownien dans le domaine D et la mesure de sortie à la frontière, et enfin, la mesure de Radon.

1.3.1 Mesure d'excursion

Soit $\underline{x}$ la trajectoire triviale dans $\mathcal{W}_x$ avec valeur 0. On note par $\mathbb{N}_x$ la mesure d'excursion associée. $\mathbb{N}_x$ est une mesure infinie caractérisée par les propriétés suivantes[3] :

- Le processus de temps de vie (ζ_s) est distribué sous $\mathbb{N}_x$ comme une mesure d'Itô d'excursion positive du mouvement brownien linéaire.
- $W_o = \underline{x}$ $\mathbb{N}_x$ p.s. où $\underline{x}$ est caractérisée par la relation

$$\{s, W_s = \underline{x}\} = \{s, \zeta_s = 0\}, \mathbb{P}_{\underline{x}} \text{ p.s}$$

Donc, sous $\mathbb{N}_x$, la loi de W est décrite par des propriétés analogues aux 1 et 2 sauf que la loi du mouvement brownien réfléchi dans 1 est remplacée par la mesure d'excursions positives du mouvement brownien linéaire.

Notons que $W_s = \underline{x}$ pour tout s suffisamment grand, $\mathbb{N}_x$ p.s.

On peut normaliser $\mathbb{N}_x$ afin que, pour tout $\varepsilon \geq 0$,

$$\mathbb{N}_x\left(\sup_{s\geq 0} \zeta_s > \varepsilon\right) = \frac{1}{2\varepsilon}$$

Bien que $\mathbb{N}_x$ soit une mesure infinie, nous avons :

pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{N}_x\left(\sup_{s\geq 0, t\geq 0} |W_s(t) - x| > \delta\right) = c\delta^{-2} < \infty \tag{1.1}$$

où c est une constante positive.

Pour tout $s \geq 0$ fixé, conditionné par ζ_s, W_s est répartie sous $\mathbb{N}_x$ comme une trajectoire brownienne plane démarrant en x et s'arrêtant au temps ζ_s.

1.3.2 Mesure de sortie

Dans la solution probabilistique du problème classique de Dirichlet, les points de sortie du mouvement brownien du domaine D jouent un rôle important. Dans notre cas, nous avons un nombre infini de trajectoires arrêtées, et donc un nombre infini de points de sortie. Nous construisons ainsi une mesure appelée mesure de sortie, sur cet ensemble de points de sortie.
Considérons un domaine plan D tel que $x \in D$.
Pour toute trajectoire arrêtée $w \in \mathcal{W}_x$, posons

$$\tau(w) = \inf\{s \geq 0\,,\, w(s) \notin D\}$$

avec la convention usuelle $inf\emptyset = \infty$.
Le support du serpent brownien dans D est l'ensemble aléatoire

$$\mathcal{R}^D = \{W_s(t \wedge \tau(W_s)), s \geq 0, t \geq 0\}$$

qui représente la réunion des trajectoires W_s arrêtées à leurs temps de sortie respectifs de D.
$\mathcal{R}^D$ est fermé $\mathbb{N}_x$ p.s.
La mesure de sortie X^D de D, définie $\mathbb{N}_x$ p.s, est une mesure aléatoire concentrée sur l'ensemble $\mathcal{R}^D \cap \partial D$ des points de sortie des trajectoires W_s. Cette mesure peut être définie par l'approximation suivante :

$$< X^D, \varphi >= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi(W_s(\tau(W_s))).1_{\{\tau(W_s)<\zeta_s<\tau(W_s)+\varepsilon\}} ds$$

pour toute fonction continue φ sur ∂D, $\mathbb{N}_x$ p.s.
Remarquons qu'on utilise un processus continu pour résoudre $\Delta u = u^2$ et on introduit la notion de mesure ponctuelle car les trajectoires sortent du domaine D en passant point par point sur la frontière.

1.3.3 Mesure de Radon[1]

Soit E un espace topologique séparé.
On dit qu'une mesure ν sur E est une mesure de Radon si :

1. tout point de E admet un voisinage ouvert V tel que $\nu(V) < +\infty$;

2. pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on a :

$$\nu(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}(E), K \subset A} \nu(K)$$

où $\mathcal{K}(E)$ est un ensemble de parties de E contenant la partie vide, constitué par les compacts d'un espace séparé.

Une mesure non nécessairement positive est dite de Radon si elle est différence de deux mesures de Radon positives.

Remarquons que la propriété 1) entraîne que $\nu(K) < \infty$ pour tout compact K. Inversement, sur un espace localement compact, cette propriété entraîne 1).

Toute mesure de Radon sur un espace compact est bornée.

Soit F un espace localement compact à base dénombrable.

Si ν est une mesure finie sur $\mathcal{B}(F)$, finie sur les compacts donc σ-finie, la formule

$$I(\varphi) = \int \varphi d\nu$$

où $\varphi \in \mathcal{C}_K(F)$ qui est un ensemble de fonctions continues à support compact définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(F)$.

1.4 Correspondance bijective entre u et (K, ν)

En supposant que D est de classe C^2, nous notons par $\sigma(dz)$ la mesure de Lebesgue sur ∂D. Pour tout $z \in \partial D$, soit N_z le vecteur unitaire normal dirigé vers l'intérieur en z et pour $x \in D$, posons

$$\rho(x) = dist(x, \partial D) = \inf_{z \in \partial D} |z - x|$$

Le théorème suivant sera démontré dans la troisième partie pour le cas simplement connexe et dans la quatrième pour le cas général mais nous allons donner quelques remarques importantes.

Théorème 1.1. *Soit D un domaine de classe C^2 du plan.*

Alors, les solutions positives de l'équation $\Delta u = u^2$ dans D sont en correspondance bijective avec les couples (K, ν) où K est un sous-ensemble fermé de la frontière de D et ν une mesure de Radon sur $\partial D \backslash K$.

Le couple (K, ν) est déterminé de u par les formules :

$$K = \left\{ z \in \partial D \, , \limsup_{D \ni x \to z} \rho(x)^2 u(x) > 0 \right\} \tag{1.2}$$

$$< \nu, \varphi >= \lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D \backslash K} u(z + rN_z) \varphi(z) \sigma(dz) \tag{1.3}$$

où la dernière convergence est vraie pour toute fonction continue φ à support compact sur $\partial D \backslash K$, avec la convention $u(z + rN_z) = 0$ si $z + rN_z \notin D$.

Inversement, u est exprimée en termes du couple (K,ν) par :

$$u(x) = 4\mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset) + 4\mathbb{N}_x\left(1_{\mathcal{R}^D\cap K=\emptyset}\left(1 - exp\left\{-\frac{1}{4}\int Z^D(z)\nu(dz)\right\}\right)\right) \tag{1.4}$$

où la fonction $(Z^D(z), z \in \partial D)$ est la densité continue de la mesure de sortie X^D par rapport à $\sigma(dz)$.

Remarque 1.2. *La preuve du théorème 1.1 rapporte d'information additionnelle à propos du comportement de la limite des solutions. Il existe une constante c_1 telle que pour toute solution u et $x \in D$,*

$$u(x) \leq c_1\rho(x)^{-2}$$

Soit $(P(x,y), x \in D, z \in \partial D)$ le noyau de Poisson de D. $P(x,z)$ est minoré par $c\rho(x)^{-1}$ quand x s'approche de z non tangentiellement. La preuve du théorème 1.1 montre que pour tout $R > 0$, il existe une constante $c_2 = c_2(R,D) > 0$ telle que si u est une solution associée au couple (K,ν) alors pour tout $z \in K, |z| \leq R$

$$\liminf_{D\ni x\to z} P(x,z)^{-2}u(x) \geq c_2 \tag{1.5}$$

D'autre part, pour $z \in \partial D\backslash K$, on a :

$$\limsup_{D\ni x\to z} \rho(x)u(x) \leq c_3\nu(x) \tag{1.6}$$

où c_3 est une constante. La solution u a une limite non tangentielle dans $[0,\infty]$ au point $z \in \partial D$ p.s. Cette limite est infinie pour tout $z \in K$ et est finie p.s quand $z \in \partial D\backslash K$. Donc, si ν a une densité continue f par rapport à σ sur un sous-ensemble ouvert O de $\partial D\backslash K$ alors la fonction v définie par

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in D \\ f(x) & si \quad x \in O \end{cases}$$

est continue sur $D \cup O$.

Remarque 1.3. *Deux cas de la formule de représentation (1.4) sont importants.*

- *Premièrement, quand $\nu = 0$,*

  $$u(x) = 4\mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset)$$

  est la solution positive maximale tendant vers 0 en tout point de $\partial D\backslash K$. En particulier, quand $K = \partial D$, u est la solution positive maximale dans D.
- *Deuxièmement, quand $K = \phi$ et $\nu(dy) = \varphi(y)\sigma(dy)$ où φ est une fonction positive continue sur ∂D,*

  $$u(x) = 4\mathbb{N}_x\left(1 - exp\left\{-\frac{1}{4} < X^D, \varphi >\right\}\right)$$

est l'unique solution positive du problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= u^2 \text{ dans } D \\ u_{|\partial D} &= \varphi \end{aligned} \tag{1.7}$$

DEUXIEME PARTIE :

ESTIMATIONS DE LA MESURE DE SORTIE

2. ESTIMATIONS DE LA MESURE DE SORTIE

Notre but est de fournir des expressions explicites pour certaines importances de la mesure de sortie X^D. Ces estimations diffèrent selon la nature du domaine D.

Dans cette partie, D est un domaine borné de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$.

Notons par $(G(x,y), x, y \in D)$ la fonction de Green de D et par $(P(x,y), x \in D, z \in \partial D)$ son noyau de Poisson. Rappelons que la fonction de Green, pour la résolution du problème de Dirichlet, se définit comme une fonction harmonique dans D, s'annulant à la frontière et devant être infinie en un point A du domaine D. Ainsi, si B représente un mouvement brownien plan qui commence en x avec P la mesure de probabilité et si τ représente le premier temps de sortie de B du D, nous avons pour la fonction mesurable positive g sur $\mathbb{R}^2$.

$$E_x\left(\int_0^\tau g(B_s)ds\right) = \int_D G(x,y)g(y)dy$$

$$E_x\left(g(B_\tau)\right) = \int_{\partial D} P(x,z)g(z)\sigma(dz)$$

Soient φ,φ' deux fonctions mesurables positives sur ∂D. Alors,

$$\mathbb{N}_x\left(< X^D, \varphi >\right) = \int_{\partial D} \varphi(z)P(x,z)\sigma(dz) \tag{2.1}$$

$$\mathbb{N}_x\left(< X^D, \varphi > . < X^D, \varphi' >\right) = 4\int_{\partial D\times\partial D} \varphi(z)\varphi(z')\sigma(dz)\sigma(dz')\int_D G(x,y)P(y,z)P(y,z')dy \tag{2.2}$$

Il existe un processus $(Z(z), z \in \partial D)$ continu dans L^2-norme et tel que

$$X^D(dz) = Z(z)\sigma(dz)\ , \mathbb{N}_x \text{ p.s}$$

En outre, la majoration

$$|\mathbb{N}_x(Z(z) - Z(z'))| \le \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap \partial D \neq \emptyset)^{1/2}.\mathbb{N}_x\left((Z(z) - Z(z'))^2\right)^{1/2}$$

implique que l'application $z \to \mathbb{N}_x(Z(z))$ est continue.

Donc, pour $z, z' \in \partial D$,

$$\mathbb{N}_x\left(Z(z)\right) = P(x,z)$$

$$\mathbb{N}_x\left(Z(z)Z(z')\right) = \int_D G(x,y)P(y,z)P(y,z')dy$$

Lemme 2.1. *(quatrième formule du moment) Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ les fonctions mesurables positives sur ∂D. Alors,*

$$\mathbb{N}_x\left(\prod_{i=1}^{4} < X^D, \varphi_i >\right) = 8\int_{(\partial D)^4} \varphi_1(z_1)\ldots\varphi_4(z_4)h_x(z_1,\ldots,z_4)\sigma(dz_1)\ldots\sigma(dz_4)$$

où pour $z_1, \ldots, z_4 \in \partial D$,

$$\begin{aligned}
h_x(z_1,\ldots,z_4) &= \sum_{\theta\in S_4}(f_x(z_{\theta(1)},\ldots,z_{\theta(4)}) + 4g_x(z_{\theta(1)},\ldots,z_{\theta(4)}))\\
f_x(z_1,\ldots,z_4) &= \int_{D^3} G(x,y_1)G(y_1,y_2)P(y_2,z_1)P(y_2,z_2)G(y_1,y_3)P(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3\\
g_x(z_1,\ldots,z_4) &= \int_{D^3} G(x,y_1)P(y_1,z_1)G(y_1,y_2)P(y_2,z_2)G(y_2,y_3)P(y_3,z_3)P(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3
\end{aligned}$$

et S_4 représente l'ensemble de toutes les permutations de $\{1,2,3,4\}$.

Preuve. Nous pouvons limiter notre attention au cas où $\varphi_1 = \ldots = \varphi_4 = \varphi$ et φ est bornée sur ∂D. Pour tout $\lambda > 0$, la fonction

$$u_\lambda(x) = \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\lambda < X^D, \varphi >\right)\right), (x \in D)$$

résoud l'équation

$$u_\lambda(x) = \lambda E_x\left(\varphi(B_\tau)\right) - 2E_x\left(\int_0^\tau u(B_t)^2 dt\right)$$

ou équivalent à

$$u_\lambda(x) + 2\int_D G(x,y)u_\lambda(y)^2 dy = \lambda\int_{\partial D} P(x,z)\varphi(z)\sigma(dz)$$

Posons

$$c_1(x) = \int_{\partial D} P(x,z)\varphi(z)\sigma(dz)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
u_\lambda(x) &= \lambda c_1(x) - 2\int_D G(x,y)u_\lambda(y)^2 dy\\
&= \lambda c_1(x) - 2\int_D G(x,y)\left[\lambda c_1(y) - 2\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2 dt\right]^2 dy\\
&= \lambda c_1(x) - 2\lambda^2\int_D G(x,y)c_1(y)^2 dy - 2\int_D G(x,y)4\left(\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2 dt\right)^2 dy\\
&- 2\int_D G(x,y)\left[-4\lambda c_1(y)\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2 dt\right]dy\\
&= \lambda c_1(x) + \lambda^2\left(-2\int_D G(x,y)c_1(y)^2 dy\right) - 8\int_D G(x,y)((\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2 dt)^2\\
&- \lambda c_1(y)\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2 dt)dy
\end{aligned}$$

Posons

$$c_2(x) = -2\int_D G(x,y)c_1(y)^2 dy$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_\lambda(x) &= \lambda c_1(x)+\lambda^2 c_2(x) - 8\int_D G(x,y)\\
&(\quad (\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2dt)^2 - \lambda c_1(y)\int_D G(y,t)u_\lambda(t)^2dt)dy\\
&= \lambda c_1(x)+\lambda^2 c_2(x) - 8\int_D G(x,y)((\int_D G(y,t)(\lambda c_1(t) - 2\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2dt)^2\\
&- \lambda c_1(y)\int_D G(y,t)(\lambda c_1(t) - 2\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2dt)dy\\
&= \lambda c_1(x)+\lambda^2 c_2(x) - 8\int_D G(x,y)((\int_D G(y,t)(\lambda^2 c_1(t)^2 + 4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2\\
&- 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)^2 - \lambda c_1(y)\int_D G(y,t)(\lambda^2 c_1(t)^2\\
&+ 4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2 - 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)dy\\
&= \lambda c_1(x)+\lambda^2 c_2(x) - 8\int_D G(x,y)(\int_D G(y,t)(\lambda^2 c_1(t)^2 + 4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2\\
&- 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)^2dy - 4\int_D G(x,y)(-2\lambda^3 c_1(y)\int_D G(y,t)c_1(t)^2dt)dy\\
&- 8\int_D G(x,y)(-\lambda c_1(y)\int_D G(y,t)(4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2\\
&- 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)dy\\
&= \lambda c_1(x)+\lambda^2 c_2(x) + \lambda^3(-4\int_D G(x,y)c_1(y)c_2(y)dy)\\
&- 8\int_D G(x,y)(\int_D G(y,t)(\lambda^2 c_1(t)^2 + 4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2\\
&- 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)^2dy\\
&- 8\int_D G(x,y)(-\lambda c_1(y)\int_D G(y,t)(4(\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)^2\\
&- 4\lambda c_1(t)\int_D G(t,v)u_\lambda(v)^2dv)dt)dy
\end{aligned}$$

En remplaçant $u_\lambda(v)$ par $\lambda c_1(w) - 2\int_D G(v,w)u_\lambda(w)^2dw$ et ainsi de suite, nous obtenons

$$u_\lambda(x) = \lambda c_1(x) + \lambda^2 c_2(x) + \ldots + \lambda^n c_n(x) + O\left(\lambda^{n+1}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
c_3(x) &= -4\int_D G(x,y)c_1(y)c_2(y)dy\\
c_4(x) &= -2\int_D G(x,y)(c_2(y)^2 + 2c_1(y)c_3(y))dy
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\lambda < X^D, \varphi >\right)\right) = \lambda c_1(x) + \ldots + \lambda^n c_n(x) + O\left(\lambda^{n+1}\right)$$

Ce qui implique que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{N}_x \left(- \sum_{n \geq 1} \frac{(-\lambda < X^D, \varphi >)^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n c_n(x)$$

d'où,

$$\mathbb{N}_x \left(< X^D, \varphi >^n \right) = (-1)^{n+1} n! c_n(x)$$

Nous avons le résultat pour $n = 4$. □

Lemme 2.2. *Soit D' un autre domaine de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ tel que $D \subset D'$. Soit $\sigma'(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\partial D'$ et $P'(x, y)$ le noyau de Poisson de D'.*
Alors, si φ, respectivement φ', est une fonction mesurable positive sur ∂D, respectivement $\partial D'$, nous avons pour tout $x \in D$,

$$\mathbb{N}_x \left(< X^D, \varphi >< X^{D'}, \varphi' > \right) = 4 \int_{\partial D \times \partial D'} \varphi(z)\varphi(z')\sigma(dz)\sigma(dz') \int_D G(x, y)P(y, z)P'(y, z')dy$$

2.1 Estimations de la mesure de sortie pour le disque unité

Dans cette partie, soit $D = D_0$ le disque unité du plan et soit $\sigma_0(dz)$ la mesure de Lebesgue sur le cercle unité ∂D_0. La fonction de Green et le noyau de Poisson sont exprimés par :

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= \frac{1}{\pi} \log \frac{|\tilde{y} - x|.|y|}{|y - x|}, x, y \in D_0 \\ P_0(x, z) &= \frac{1}{2\pi} . \frac{1 - |x|^2}{|z - x|^2}, x \in D_0, z \in \partial D_0 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{y} = \frac{y}{|y|^2}$$

Soit $(Z(z), z \in \partial D_0)$ comme dans la sous-partie précédente. Rappelons que

$$\rho(x) = dist(x, \partial D_0) = 1 - |x|$$

Proposition 2.3. *Il existe une constante C_1 telle que, pour $z, z' \in \partial D_0$ et $x \in D_0$,*

$$\mathbb{N}_x \left((Z(z) - Z(z'))^4 \right) \leq C_1 \rho(x)^{\frac{-1}{2}} |z - z'|^2 \tag{2.3}$$

Le processus $(Z(z), z \in \partial D_0)$ a une version continue.

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin de deux lemmes. Dans les preuves ci-dessous, les symboles C, C', C'' signifient des constantes qui peuvent varier de ligne en ligne.

Lemme 2.4. *i) Il existe une constante C_2 telle que, pour tout $x \in D_0$ et $z \in \partial D_0$,*

$$\int_{D_0} G_0(x,y)P_0(y,z)^2 dy \leq \int_{D_0} G_0(x,y)|z-y|^{-2} dy \leq C_2 \tag{2.4}$$

ii) Pour tout $z, z' \in \partial D_0$ tel que $z \neq z'$

$$\lim_{D_0 \ni x \to z'} \int_{D_0} G_0(x,y)P_0(y,z)^2 dy = 0$$

Preuve. i)Pour $y \in D_0, z \in \partial D_0$, nous avons :

$$1 - |y|^2 \leq 2\rho(y) \leq 2|z-y|$$

donc,

$$\frac{1-|y|^2}{2} \leq |z-y|$$
$$\frac{1-|y|^2}{2|z-y|^2} \leq |z-y|^{-1}$$

d'où,

$$\begin{aligned} P_0(y,z) &\leq |z-y|^{-1} \\ P_0(y,z)^2 &\leq |z-y|^{-2} \end{aligned}$$

alors,

$$\int_{D_0} G_0(x,y)P_0(y,z)^2 dy \leq \int_{D_0} G_0(x,y)|z-y|^{-2} dy$$

Prouvons maintenant la deuxième inégalité.

Pour $x, y \in D_0$,

$$G_0(x,y) = G_0(y,x)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} G_0(x,y) &\leq \log \frac{|\tilde{y}-x|.|y|}{|y-x|} \\ &\leq 1_{\{|y-x| \leq \rho(x)\}} \log \frac{|\tilde{y}-x|.|y|}{|y-x|} + 1_{\{|y-x| > \rho(x)\}} \log \frac{|\tilde{y}-x|.|y|}{|y-x|} \\ &= 1_{\{|y-x| \leq \rho(x)\}} \log \frac{|y-x|y|^2|}{|y||y-x|} + 1_{\{|y-x| > \rho(x)\}} \log \frac{|y-x|y|^2}{|y||y-x|} \\ &= 1_{\{|y-x| \leq \rho(x)\}} log \frac{|1-x|y||}{|y-x|} + 1_{\{|y-x| > \rho(x)\}} \log \frac{|1-x|y||}{|y-x|} \\ &\leq 1_{\{|y-x| \leq \rho(x)\}} log \frac{C\rho(x)}{|y-x|} + 1_{\{|y-x| > \rho(x)\}} \frac{C'\rho(x)}{|y-x|} \end{aligned}$$

En particulier,

$$G_0(x,y) \leq C \frac{\rho(x) \wedge \rho(y)}{|y-x|} \tag{2.5}$$

d'où,

$$\begin{aligned}\int_{\{|y-x|<\frac{1}{2}|z-y|\}} G_0(x,y)|z-y|^{-2}dy &\leq C\rho(x)\int_{\{|y-x|<\frac{1}{2}|z-x|\}}|y-x|^{-1}|z-y|^{-2}dy\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}|z-x| &\leq |z-y|+|y-x| \\ &\leq |z-y|+\frac{1}{2}|z-x|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|z-x| &\leq |z-y| \\ \frac{1}{4}|z-y|^{-2} &\leq |z-x|^{-2} \\ |z-y|^{-2} &\leq 4|z-x|^{-2}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{\{|y-x|<\frac{1}{2}|z-x|\}} G_0(x,y)|z-y|^{-2}dy &\leq 4C\rho(x)\int_{\{|y-x|<\frac{1}{2}|z-x|\}}|z-x|^{-2}|y-x|^{-1}dy \\ &\leq 4C\rho(x)|z-x|^{-2}\int_{\{|y-x|<\frac{1}{2}|z-x|\}}|y-x|^{-1}dy \\ &\leq C' \\ \int_{\{|y-z|<\frac{1}{2}|z-x|\}} G_0(x,y)|z-y|^{-2}dy &\leq C\int_{\{|y-z|<\frac{1}{2}|z-x|\}}\frac{\rho(y)}{|y-x|}|z-y|^{-2}dy \\ &\leq \frac{2C}{|z-x|}\int_{\{|y-z|<\frac{1}{2}|z-x|\}}\rho(y)|z-y|^{-2}dy \\ &\leq C'\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\{|y-x|\geq\frac{1}{2}|z-x|\}} G_0(x,y)|z-y|^{-2}dy &\leq C\rho(x)\int_{\{|y-x|\geq\frac{1}{2}|z-x|\}}\frac{|z-y|^{-2}}{|y-x|}dy \\ &\leq C\rho(x)\int_{\{|y-x|\geq\frac{1}{2}|z-x|\}}|y-x|^{-3}dy \\ &\leq C'\end{aligned}$$

donc,

$$\int_{D_0} G_0(x,y)|z-y|^{-2}dy \leq C_2$$

La preuve de ii) utilise les mêmes arguments. □

Lemme 2.5. *Il existe une constante C_3 telle que, pour $x\in D_0$, $z,z'\in\partial D_0$,*

$$\int_{D_0} G_0(x,y)\left(P_0(y,z)-P_0(y,z')\right)^2 dy \leq C_3\left(\frac{1}{|z-x|}\vee\frac{1}{|z'-x|}\right)|z-z'|$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
P_0(y,z)-P_0(y,z') &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-|y|^2}{|z-y|^2}-\frac{1-|y|^2}{|z'-y|^2}\right)\\
&= (2\pi)^{-1}(1-|y|^2)\left(\frac{|z'-y|^2-|z-y|^2}{|z-y|^2|z'-y|^2}\right)\\
&= (2\pi)^{-1}(1-|y|^2)\frac{(z'-z)(z'+z-2y)}{|z-y|^2|z'-y|^2}\\
&= (2\pi)^{-1}(1-|y|^2)\frac{2y(z'-z)}{|z-y|^2|z'-y|^2}
\end{aligned}
$$

où $u.v$ représente le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$.

Comme $(1-|y|)^2 \geq 0$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
1-2|y|+|y|^2 &\geq 0\\
2(1-|y|)-1+|y|^2 &\geq 0\\
2\rho(y)^2 &\geq 1-|y|^2
\end{aligned}
$$

alors,

$$
\begin{aligned}
(P_0(y,z)-P_0(y,z'))^2 &\leq \frac{1}{\pi^2}\rho(y)^2\frac{4(y.(z-z'))^2}{|z-y|^4|z'-y|^4}\\
&\leq \rho(y)^2\frac{(y.(z-z')^2)}{|z-y|^4|z'-y|^4}
\end{aligned}
$$

Nous majorons l'intégrale

$$
I=\int_{D_0} G_0(x,y)\rho(y)^2\frac{(y.(z-z')^2)}{|z-y|^4|z'-y|^4}dy
$$

Posons $\alpha = \frac{1}{2}(|z-x| \wedge |z'-x|)$ et notons que $\rho(x) \leq 2\alpha$

Alors, $I = I_1 + I_2 + I_3$ où I_j représente l'intégrale sur l'ensemble E_j avec

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{y \in D_0, |y-x| \leq \alpha\}\\
E_2 &= \{y \in D_0, |y-x| > \alpha, |y-z| \vee |y-z'| \leq 3|z-z'|\}\\
E_3 &= \{y \in D_0, |y-x| > \alpha, |y-z| \vee |y-z'| > 3|z-z'|\}
\end{aligned}
$$

Majoration de I_1.

$$
I_1=\int_{E_1} G_0(x,y)\rho(y)^2\frac{(y.(z-z'))^2}{|z-y|^4|z'-y|^4}dy
$$

or,

$$
\begin{aligned}
|y-x| &\leq \frac{1}{2}|z-x|\\
&\leq \frac{1}{2}|z-y|+\frac{1}{2}|y-x|\\
\frac{1}{2}|y-x| &\leq \frac{1}{2}|z-y|
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}|y-x| &\leq \frac{1}{2}|z-x| \\ &\leq \frac{1}{2}|z-y|+\frac{1}{2}|y-x|\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|z-x| &\leq |z-y| \\ \frac{1}{2^4}|z-x|^4 &\leq |z-y|^4 \\ |z-x|^{-4} &\leq 2^4|z-x|^{-4}\end{aligned}$$

de même,

$$|z'-y|^{-4} \leq 2^4|z-x|^{-4}$$

d'où,

$$I_1 \leq 2^8|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}\int_{E_1} G_0(x,y)\rho(y)^2\left(y.(z'-z)\right)^2 dy$$

Si $y=x+u$, nous avons

$$\begin{aligned}\left(y.(z'-z)\right)^2 &= \left((x+u).(z'-z)\right)^2 \\ &= \left(x.(z'-z)+u.(z'-z)\right)^2 \\ &= \left(x.(z'-z)\right)^2+\left(u.(z'-z)\right)^2+2\left(x.(z'-z)\right)\left(u.(z'-z)\right) \\ &\leq 2\left((x.(z'-z))^2+(u.(z'-z))^2\right) \\ &\leq 2\left((x.(z'-z))^2+\alpha^2|z'-z|^2\right)\end{aligned}$$

car $u=y-x$ et sur E_1, $|y-x|\leq\alpha$ donc $u^2\leq\alpha^2$.

Alors,

$$I_1 \leq 2^8|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}2\left((x.(z-z'))^2+\alpha^2|z-z'|^2\right)\int_{E_1} G_0(x,y)\rho(y)^2dy$$

Nous avons de (2.5),

$$\begin{aligned}\int_{D_0\cap\{|y-x|\leq\rho(x)\}} G_0(x,y)\rho(y)^2dy &\leq \int_{\{|y-x|\leq\rho(x)\}}\rho(y)^2 log\frac{C\rho(x)}{|y-x|}dy \\ &\leq C'\rho(x)^4 \\ &\leq 8C'\rho(x)\alpha^3\end{aligned}$$

car $\rho(x)\leq 2\alpha$

donc

$$\int_{E_1} G_0(x,y)\rho(y)^2dy \leq C\rho(x)\alpha^3$$

En combinant les majorations précédentes, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2^8|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}2\left((x.(z-z'))^2+\alpha^2|z-z'|^2\right)C\rho(x)\alpha^3 \\ &\leq C|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}\left((x.(z-z'))^2\rho(x)\alpha^3+|z-z'|^2\rho(x)\alpha^5\right) \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} |x.(z-z')| &= \left|\left(x-\frac{1}{2}(z+z')\right).(z-z')\right| \\ &\leq |z-z'|\left|\frac{1}{2}(x-z)+\frac{1}{2}(x-z')\right| \\ &\leq |z-z'|\frac{1}{2}\left(|z-x|+|z'-x|\right) \\ &\leq |z-z'|\left(|z-x|\vee|z'-x|\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho(x) &\leq |z-x|\wedge|z'-x| \\ |z-z'| &\leq |z-x|+|z'-x| \\ |z-z'| &\leq 2\left(|z-x|\vee|z'-x|\right) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}(|z-z'|^2(|z-x|\vee|z'-x|)^2\rho(x)\alpha^3+|z-z'|^2\rho(x)\alpha^5) \\ &\leq C|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}|z-z'|(|z-x|\wedge|z'-x|)2(|z-x|\vee|z'-x|)\frac{1}{8}(|z-x|\wedge|z'-x|)^3 \\ (& (|z-x|\vee|z'-x|)^2+\frac{1}{4}(|z-x|\wedge|z'-x|)^2) \\ &= \frac{C}{4}|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}(|z-x|\wedge|z'-x|)^4(|z-x|\vee|z'-x|)|z-z'|(((|z-x|\vee|z'-x|)^2 \\ &+ \frac{1}{4}(|z-x|\wedge|z'-x|)^2) \\ &\leq C|z-x|^{-4}|z'-x|^{-4}|z-z'|(|z-x|\vee|z'-x|)^{-1}(|z-x|\vee|z'-x|)^4(|z-x|\wedge|z'-x|)^4 \\ (& \frac{1}{4}+\frac{1}{8}(\frac{|z-x|\wedge|z'-x|}{|z-x|\vee|z'-x|})^2) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_1 \leq C(|z-x|\vee|z'-x|)^{-1}|z-z'|$$

Majoration de I_2.

$$I_2 = \int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2\frac{(y.(z-z'))^2}{|z-y|^4|z'-y|^4}dy$$

Pour $y \in E_2$,

$$\begin{aligned}
|y.(z-z')| &= \left|\left(y-\frac{1}{2}(z+z')\right).(z-z')\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(y-z)+\frac{1}{2}(y-z')\right|.|z-z'| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|y-z|+|y-z'|\right).|z-z'| \\
&\leq (|y-z| \vee |y-z'|).(z-z') \\
&\leq 3|z-z'|
\end{aligned}$$

En utilisant la majoration $|z-y| \vee |z'-y| \geq \frac{1}{2}|z-z'|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2 \frac{9|z-z'|^4}{|z-y|^4|z'-y|^4} dy \\
&\leq C\int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2 \frac{(|z-y| \vee |z'-y|)^4}{|z-y|^4|z'-y|^4} dy \\
&\leq C\int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2 \left(|z-y|^{-4}+|z'-y|^{-4}\right) dy
\end{aligned}$$

Considérons le premier terme

$$\begin{aligned}
\int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2|z-y|^{-4}dy &\leq C\int_{E_2} \frac{\rho(y)^3}{|y-x|}|z-y|^{-4}dy, \text{ d'après (2.5)} \\
&= C\int_{D_0\cap\{|y-z|\leq 3|z-z'|\}} \frac{\rho(y)^3}{|y-x|}|z-y|^{-4}dy \\
&\leq 2C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1}) \int_{D_0\cap\{|y-z|\leq 3|z-z'|\}} \rho(y)^3|z-y|^{-4}dy
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
|y-x| &\geq \alpha \\
&\geq \frac{1}{2}(|z-x| \wedge |z'-x|)
\end{aligned}$$

$$|y-x|^{-1} \leq 2(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})$$

Comme $\rho(y) \leq |z-y|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{E_2} G_0(x,y)\rho(y)^2|z-y|^{-4}dy &\leq 2C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1}) \int_{D_0\cap\{|y-z|\leq 3|z-z'|\}} |z-y|^3|z-y|^{-4}dy \\
&\leq C'(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})|z-z'|
\end{aligned}$$

car $|z-y|^{-1} \leq |z-z'|$

Evidemment, la même majoration est vraie pour le deuxième terme et nous obtenons

$$I_2 \leq C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})|z-z'|$$

Majoration de I_3.

Sur E_3,

$$|y-z| \wedge |y-z'| \geq \frac{2}{3}(|y-z| \vee |y-z'|)$$

En utilisant l'inégalité

$$|y.(z-z')| \leq (|y-z| \vee |y-z'|)|z-z^{'}|$$

et(2.5) pour la troisième majoration, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_{E_3} G_0(x,y)\rho(y)^2 \frac{(|y-z| \vee |y-z'|)^2 |z-z'|^2}{|z-y|^4|z'-y|^4} dy \\
&\leq C\int_{E_3} G_0(x,y)\rho(y)^2 \frac{|z-z'|^2}{|z-y|^6} dy \\
&\leq C\int_{E_3} \frac{\rho(y)^3}{|y-x|}\frac{|z-z'|^2}{|z-y|^6} dy
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
|y-x| &> \alpha \\
|y-x| &> \frac{1}{2}(|z-x| \wedge |z'-x|) \\
|y-x| &\leq 2\left(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1}\right)
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})\left(\int_{E_3} \rho(y)^3 |z-y|^{-6} dy\right)|z-z'|^2 \\
&\leq 2C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})\left(\int_{\{|y-z|\geq 2|z-z'|\}} |z-y|^{-3} dy\right)|z-z'|^2 \\
&\leq 2C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})\frac{1}{8}|z-z'|^{-1} \\
&= C'(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})|z-z'|
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C(|z-x| \vee |z'-x|)^{-1}|z-z'| \\
I_2 &\leq C(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})|z-z'| \\
I_3 &\leq C'(|z-x|^{-1} \vee |z'-x|^{-1})|z-z'|
\end{aligned}$$

alors

$$I \leq C_3\left(\frac{1}{|z-x|} \vee \frac{1}{|z'-x|}\right)|z-z'|$$

□

Preuve de la proposition 2.3

Preuve. D'abord, nous affirmons que, pour un $x \in D_0$ fixé, les fonctions f_x et g_x introduites dans le lemme 2.1 sont continues sur $(\partial D_0)^4$(en fait, continues de Hölder d'exposant $\frac{1}{2}$). Considérons f_x.

$$\begin{aligned}
|f_x(z_1,z_2,z_3,z_4) - f_x(z_1',z_2,z_3,z_4)| &= |\int_{D_0^3} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_1)P_0(y_2,z_2)G_0(y_1,y_3) \\
&\times P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3 \\
&- \int_{D_0^3} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_1')P_0(y_2,z_2)G_0(y_1,y_3) \\
&\times P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3| \\
&= |\int_{D_0^3} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_2) \\
&[P_0(y_2,z_1) - P_0(y_2,z_1')]P_0(y_2,z_2) \\
&\times G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3| \\
&= |\int_{D_0^2} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4) \\
&\times \int_{D_0} G_0(y_1,y_2)[P_0(y_2,z_1) - P_0(y_2,z_1')]P_0(y_2,z_2)dy_1dy_2dy_3| \\
&\leq \int_{D_0^2} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4) \\
&\times (\int_{D_0} G_0(y_1,y_2)[P_0(y_2,z_1) - P_0(y_2,z_1')]^2dy_2)^{\frac{1}{2}} \\
&\times (\int_{D_0} G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_2)^2dy_2)^{\frac{1}{2}}dy_1dy_3 \\
&\leq \int_{D_0^2} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4) \\
&\times C(|z_1-y_1|^{\frac{-1}{2}} \vee |z_1'-y_1|^{\frac{-1}{2}})|z_1-z_1'|^{\frac{1}{2}}dy_1dy_3 \quad \text{,des lemmes 2.4 et 2.5} \\
&\leq C|z_1-z_1'|^{\frac{1}{2}} \int_{D_0} G_0(x,y_1) \\
&(|z_1-y_1|^{\frac{-1}{2}} \vee |z_1'-y_1|^{\frac{-1}{2}}) \\
&(\int_{D_0} G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_3)^2dy_3)^{\frac{1}{2}} \\
&(\int_{D_0} G_0(y_1,y_3)P_0(y_3,z_4)^2dy_3)^{\frac{1}{2}}dy_1 \\
&\leq C'|z_1-z_1'|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

L'argument pour g_x est similaire.

$$\begin{aligned}
|g_x(z_1,z_2,z_3,z_4)-g_x(z_1',z_2,z_3,z_4)| &= |\int_{D_0^3} G_0(x,y_1)P_0(y_1,z_1)G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_2)G_0(y_2,y_3)\\
&\times\ P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3\\
&-\ \int_{D_0^3} G_0(x,y_1)P_0(y_1,z_1')G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_2)G_0(y_2,y_3)\\
&\times\ P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3|\\
&= |\int_{D_0^3} G_0(x,y_1)[P_0(y_1,z_1)-P_0(y_1,z_1')]\\
&\times\ G_0(y_1,y_2)P_0(y_2,z_2)G_0(y_2,y_3)\\
&\times\ P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3|\\
&= |\int_{D_0^2} G_0(y_1,y_2)G_0(y_2,y_3)\\
&\times\ P_0(y_2,z_2)P_0(y_3,z_3)P_0(y_3,z_4)dy_2dy_3\\
\textstyle\int_{D_0} &\ G_0(x,y_1)[P_0(y_1,z_1)-P_0(y_1,z_1')]dy_1|\\
&\le (\int_{D_0} G_0(y_1,y_2)P_0^2(y_2,z_2)dy_2)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\ (\int_{D_0} G_0(y_2,y_3)P_0^2(y_3,z_3)P_0^2(y_3,z_4)dy_3)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\ (\int_{D_0} G_0(x,y_1)\\
[&\ P_0(y_1,z_1)-P_0(y_1,z_1')]^2dy_1)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\ (\int_{D_0} G_0(x,y_1)dy_1)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C(|z_1-x|^{\frac{-1}{2}}\vee|z_1'-x|^{\frac{-1}{2}})|z_1-z_1'|^{\frac{1}{2}}\\
&\le C|z_1-z_1'|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Nous obtenons que la fonction h_x du lemme 2.1 est continue sur $(\partial D_0)^4$.

Pour $\varepsilon>0, z\in\partial D_0$, posons

$$\begin{aligned}
Z_\varepsilon(z) &= (2\varepsilon)^{-1}\int_{\partial D_0} 1_{\{|z-z'|<\varepsilon\}}X^{D_0}(dz')\\
&= (2\varepsilon)^{-1}\int_{\partial D_0} 1_{\{|z-z'|<\varepsilon\}}Z(z')\sigma(dz')
\end{aligned}$$

Du lemme 2.1 et de la continuité de h_x, nous avons

$$\lim_{\varepsilon_i\to 0}\mathbb{N}_x\left(Z_{\varepsilon_1}(z)\cdots Z_{\varepsilon_4}(z)\right)=8h_x(z,\cdots,z)$$

Donc, $Z_\varepsilon(z)$ converge dans $L^4(\mathbb{N}_x)$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

La limite doit être $Z(z)$ et pour $z_1,\dots,z_4\in\partial D_0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x\left(Z(z_1)\dots Z(z_4)\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{N}_x(Z_\varepsilon(z_1)\dots Z_\varepsilon(z_4))\\
&= 8h_x(z_1,\dots,z_4)
\end{aligned}$$

Il résulte que pour $z, z^{'} \in \partial D_0$

$$\mathbb{N}_x((Z(z) - Z(z^{'}))^4) = 8.4!(F_1(z, z^{'}) + 4F_2(z, z^{'}))$$

où

$$\begin{aligned} F_1(z, z^{'}) &= \int_{D_0^3} G_0(x, y_1)G_0(y_1, y_2)G_0(y_1, y_3)(P_0(y_2, z) - P_0(y_2, z'))^2 \\ &\times (P_0(y_3, z) - P_0(y_3, z^{'}))^2 dy_1 dy_2 dy_3 \\ F_2(z, z^{'}) &= \int_{D_0^3} G_0(x, y_1)G_0(y_1, y_2)G_0(y_2, y_3) \\ &\times (P_0(y_1, z) - P_0(y_1, z^{'}))(P_0(y_2, z) - P_0(y_2, z^{'}))(P_0(y_3, z) - P_0(y_3, z^{'}))^2 dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

Pour majorer $F_1(z, z^{'})$,nous appliquons le lemme 2.5 deux fois :

$$\begin{aligned} F_1(z, z^{'}) &= \int_{D_0} G_0(y_1, y_2) \left(P_0(y_2, z) - P_0(y_2, z^{'})\right)^2 dy_2 \\ &\times \int_{D_0} G_0(y_1, y_3) \left(P_0(y_3, z) - P_0(y_3, z^{'})\right)^2 dy_3 \times \int_{D_0} G_0(x, y_1) dy_1 \\ &\leq \int_{D_0} C_3(\frac{1}{|z - y_1|} \vee \frac{1}{|z^{'} - y_1|})|z - z^{'}| C_3(\frac{1}{|z - z^{'}|} \vee \frac{1}{|z^{'} - y_1|})|z - z^{'}| G_0(x, y_1) dy_1 \\ &\leq C \int_{D_0} G_0(x, y_1)(|z - y_1|^{-1} + |z^{'} - y_1|^{-1})^2 |z - z^{'}|^2 dy_1 \\ &\leq C^{'} |z - z^{'}|^2, \text{du lemme 2.4.} \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant les lemmes 2.4 et 2.5

$$\begin{aligned}
F_2(z,z') &= \int_{D_0^2} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_2)(P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z'))(P_0(y_2,z)-P_0(y_2,z'))dy_1dy_2 \\
\textstyle\int_{D_0} & G_0(y_2,y_3)(P_0(y_3,z)-P_0(y_3,z'))^2dy_3 \\
&\leq \int_{D_0^2} G_0(x,y_1)G_0(y_1,y_2)|P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'})||P_0(y_2,z)-P_0(y_2,z^{'})|dy_1dy_2 \\
&\times \ C(|z-y_2|^{-1}+|z^{'}-y_2|^{-1})|z-z^{'}| \\
&\leq C|z-z^{'}|\int_{D_0} G_0(x,y_1)|P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'})|dy_1 \\
&\times \ (\int_{D_0} G_0(y_1,y_2)(P_0(y_2,z)-P_0(y_2,z^{'}))^2dy_2)^{1/2} \\
&\times \ (\int_{D_0} G_0(y_1,y_2)(|z-y_2|^{-1}+|z^{'}-y_2|^{-1})^2dy_2)^{1/2} \\
&\leq C|z-z^{'}|\int_{D_0} G_0(x,y_1)|P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'})|dy_1(C_3(|z-y_1|^{-1}\vee|z^{'}-y_1|^{-1})^{1/2}|z-z^{'}|^{1/2}) \\
(& \int_{D_0} G_0(y_1,y_2)(|z-y_2|^{-1}+|z^{'}-y_2|^{-1})^2dy_2)^{1/2} \\
&\leq C|z-z^{'}|^{3/2}\int_{D_0} G_0(x,y_1)|P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'})|(|z-y_1|^{-1}\vee|z^{'}-y_1|^{-1})^{1/2}dy_1 \\
&\leq C|z-z^{'}|^{3/2}(\int_{D_0} G_0(x,y_1)(P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'}))^2dy_1)^{1/2} \\
(& \int_{D_0} G_0(x,y_1)(|z-y_1|^{-1}\vee|z^{'}-y_1|^{-1})dy_1)^{1/2} \\
&\leq C^{'}|z-z^{'}|^{3/2}(\int_{D_0} G_0(x,y_1)(P_0(y_1,z)-P_0(y_1,z^{'}))^2dy_1)^{1/2} \\
&\leq C^{''}|z-z^{'}|^{3/2}((|z-x|^{-1}\vee|z^{'}-x|^{-1})|z-z^{'}|)^{1/2} \\
&\leq C^{''}|z-z^{'}|^{2}(|z-x|^{-1}\vee|z^{'}-x|^{-1})^{1/2} \\
&\leq C^{''}\rho(x)^{-1/2}|z-z^{'}|^2
\end{aligned}$$

car

$$\rho(x)\leq|z-x|\wedge|z^{'}-x|$$

$$\rho(x)^{-1}\geq|z-x|^{-1}\vee|z^{'}-x|^{-1}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x((Z(z)-Z(z^{'}))^4) &\leq 8.4!(C^{'}|z-z^{'}|^2+4C^{''}\rho(x)^{-1/2}|z-z^{'}|^2) \\
&\leq C|z-z^{'}|^2\rho(x)^{-1/2}
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Estimations de la mesure de sortie pour un domaine simplement connexe

Supposons maintenant que D est un domaine borné simplement connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons trouver une application conforme ψ de D_0 dans D. Sous nos suppositions, ψ prolonge une application bijective continue de $\bar{D}_0$ dans $\bar{D}$. ψ' a aussi une extension continue à $\bar{D}_0$ et ψ' ne s'annule pas sur $\bar{D}_0$. En particulier, $|\psi'|$ est bornée par des constantes positives sur $\bar{D}_0$.

Pour $x, y \in D$ et $z \in \partial D$,

$$\begin{aligned} G(x,y) &= G_0(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) \\ P(x,z) &= |\psi'(\psi^{-1}(z))|^{-1}.P_0(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(z)) \end{aligned}$$

Notons par $\tilde{\sigma}$ l'image de σ_0 sous ψ :

$\tilde{\sigma}(dz) = |\psi'(\psi^{-1}(z))|^{-1}\sigma(dz)$

Introduisons

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x,z) &= |\psi'(\psi^{-1}(z))|.P(x,z) \\ &= P_0(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(z)) \end{aligned}$$

$\tilde{P}(x,z)\tilde{\sigma}(dz) = P(x,z)\sigma(dz)$ est une distribution de B_τ sous P_x.

Nous posons $\tilde{Z}(z) = |\psi'(\psi^{-1}(z))|Z(z)$.

$\tilde{Z}(z)$ est la densité de la mesure de sortie par rapport à $\tilde{\sigma}$.

Proposition 2.6. *Il existe une constante C_4 telle que, pour $z, z' \in \partial D, x \in D$*

$$\mathbb{N}_x((\tilde{Z}(z) - \tilde{Z}(z'))^4) \leq C_4\rho(x)^{-1/2}|z - z'|^2$$

Les processus $(\tilde{Z}(z), z \in \partial D)$ et $(Z(z), z \in \partial D)$ ont des versions continues.

Preuve. Remarquons que la formule du lemme 2.1 peut être écrite de la forme :

$$\mathbb{N}_x(\prod_{i=1}^{4} < X^D, \varphi_i >) = 8\int_{(\partial D)^4} \varphi_1(z_1)\cdots\varphi_4(z_4)\tilde{h}_x(z_1,\ldots,z_4)\tilde{\sigma}(dz_1)\cdots\tilde{\sigma}(dz_4)$$

où

$$\tilde{h}_x(z_1,\ldots,z_4) = h_x(z_1,\ldots,z_4)\prod_{i=1}^{4}|\psi'(\psi^{-1}(z_i))|$$

Comme dans le lemme 2.1, nous avons

$$\tilde{h}_x(z_1,\ldots,z_4) = \sum_{\theta\in S_4}(\tilde{f}_x(z_{\theta(1)},\ldots,z_{\theta(4)}) + 4\tilde{g}_x(z_{\theta(1)},\ldots,z_{\theta(4)})$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_x(z_1,\ldots,z_4) &= \int_{D^3} G(x,y_1)G(y_1,y_2)\tilde{P}(y_2,z_1)\tilde{P}(y_2,z_2)G(y_1,y_3)\tilde{P}(y_3,z_3)\tilde{P}(y_3,z_4)dy_1dy_2dy_3 \\
&= \int_{D_0^3} G_0(\psi^{-1}(x),y_1')G_0(y_1',y_2') \\
&(\prod_{i=1}^{3}|\psi'(y_i')|^2)P_0(y_2',z_1')P_0(y_2',z_2')G_0(y_1',y_3')P_0(y_3',z_3')P_0(y_3',y_4')dy_1'dy_2'dy_3'
\end{aligned}$$

où $z_i^{'} = \psi^{-1}(z_i)$

En se rappelant de la majoration de $|\psi^{'}|$ sur D_0 et en utilisant la dernière formule de $\tilde{f}_x(z_1,\ldots,z_4)$, nous pouvons argumenter exactement comme dans la preuve de la proposition 2.3 pour obtenir la continuité de $\tilde{f}_x$.

De la même manière, nous obtenons la continuité de $\tilde{g}_x$ et par le même argument que précédemment, nous avons

$$\mathbb{N}_x(\tilde{Z}(z_1)\ldots\tilde{Z}(z_4))^4 = 8.4!(\tilde{F}_1(z,z^{'})+4\tilde{F}_2(z,z^{'}))$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(z,z^{'}) &= \int_{D^3} G(x,y_1)G(y_1,y_2)G(y_1,y_3)(\tilde{P}(y_2,z)-\tilde{P}(y_2,z^{'}))^2(\tilde{P}(y_3,z)-\tilde{P}(y_3,z^{'}))^2dy_1dy_2dy_3 \\
&= \int_{D_0^3}(\prod_{i=1}^{3}|\psi^{'}(y_i^{'})|^2)G_0(\psi^{-1}(x,y_1^{'}))G_0(y_1',y_2')G_0(y_1',y_2')G_0(y_1',y_3') \\
&(\quad P_0(y_2',\psi^{-1}(z))-P_0(y_2',\psi^{-1}(z^{'})))^2(P_0(y_3',\psi^{-1}(z))-P_0(y_3',\psi^{-1}(z^{'})))^2dy_1'dy_2'dy_3'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_2(z,z^{'}) &= \int_{D^3} G(x,y_1)G(y_1,y_2)G(y_1,y_3)(\tilde{P}(y_1,z)-\tilde{P}(y_1,z^{'}))(\tilde{P}(y_2,z)-\tilde{P}(y_2,z^{'})) \\
&(\quad \tilde{P}(y_3,z)-\tilde{P}(y_3,z^{'}))^2dy_1dy_2dy_3 \\
&= \int_{D_0^3}(\prod_{i=1}^{3}|\psi^{'}(y_i^{'})|^2)G_0(\psi^{-1}(x),y_1')G_0(y_1',y_2')G_0(y_1',y_3') \\
&\times \quad (P_0(y_1',\psi^{-1}(z))-P_0(y_1',\psi^{-1}(z^{'})))\times(P_0(y_2',\psi^{-1}(z))-P_0(y_2',\psi^{-1}(z^{'}))) \\
&\times \quad (P_0(y_3',\psi^{-1}(z))-P_0(y_3',\psi^{-1}(z^{'})))dy_1'dy_2'dy_3'
\end{aligned}$$

La méthode de la partie 2.2 s'applique encore pour majorer $\tilde{F}_1(z,z^{'})$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(z,z^{'}) &\leq C|\psi^{-1}(z)-\psi^{-1}(z^{'})|^2 \\
&\leq C^{'}|z-z^{'}|^2
\end{aligned}$$

et de la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_2(z,z') &\leq C\rho(\psi^{-1}(x))^{\frac{-1}{2}}|\psi^{-1}(z)-\psi^{-1}(z')|^2 \\
&\leq C'\rho(x)^{\frac{-1}{2}}|z-z'|^2
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_x(\tilde{Z}(z)-\tilde{Z}(z^{'}))^4 &\leq 8.4!\left(C^{'}|z-z^{'}|^2+4C^{'}\rho(x)^{-1/2}|z-z^{'}|^2\right) \\ &\leq C_4\rho(x)^{-1/2}|z-z^{'}|^2 \end{aligned}$$

Les processus $(\tilde{Z}(z), z\in\partial D)$ et $(Z(z), z\in\partial D)$ ont des versions continues en utilisant le lemme de Kolmogorov. □

2.3 Continuité radiale

Pour tout $r\in(0,1]$, nous posons

$$\begin{aligned} D_0^r &= \{x\in D_0, |x|<r\} \\ D^r &= \psi(D_0^r) \end{aligned}$$

D^r est aussi un domaine simplement connexe de classe C^2. Si $\tilde{\sigma_r}$ représente l'image sous ψ de la mesure de Lebesgue sur ∂D_0^r, nous avons pour $x\in D^r$,

$$X^{D^r}(dz)=\tilde{Z}_r(z)\tilde{\sigma_r}(dz), \mathbb{N}_x \text{ p.s.}$$

et le processus $(\tilde{Z}_r(z), z\in\partial D^r)$ a une version continue sous B_x.
Pour $\theta\in\Pi:=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, nous posons

$$Z(r,\theta)=\tilde{Z}(\psi(re^{i\theta})$$

Proposition 2.7. *Il existe une suite (r_n) strictement croissante convergeant vers 1 telle que, pour tout $x\in D$,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\theta\in\pi}|Z(r_n,\theta)-Z(1,\theta)|\right)=0\,,\mathbb{N}_x \ p.s$$

Nous avons besoin du lemme suivant pour prouver cette proposition.

Lemme 2.8.

$$\lim_{r\uparrow 1}\left(\sup_{\theta\in\Pi}\mathbb{N}_x((Z(r,\theta)-Z(1,\theta))^2\right)=0$$

et la convergence est uniforme quand x varie sur un sous-ensemble compact de D.

Preuve. Notons par G^r et P^r, respectivement G_0^r et P_0^r, la fonction de Green et le noyau de Poisson de D^r, respectivement D_0^r.
Posons $\tilde{P}^r(x,z)=|\psi^{'}(\psi^{-1}(z))|.P^r(x,z)$ comme dans la partie 2.3.

Pour $z \in \partial D^r, z^{'} \in \partial D$ et $r < |x|$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x\left(\tilde{Z}_r(z).\tilde{Z}(z^{'})\right) &= \mathbb{N}_x\left(X^{D^r}(dz)\tilde{\sigma}_r^{-1}(dz).X^D(dz^{'})\tilde{\sigma}^{-1}(dz^{'})\right) \\
&= 4\int_{\partial D^r\times\partial D}\tilde{\sigma}_r^{-1}(dz)\tilde{\sigma}^{-1}(dz^{'})\tilde{\sigma}_r(dz)\tilde{\sigma}(dz')\int_{D^r}G^r(x,y)\tilde{P}^r(y,z)\tilde{P}(y,z^{'})dy, \\
&\text{du lemme 2.2} \\
&= 4\int_{D^r}G^r(x,y)\tilde{P}^r(y,z)\tilde{P}(y,z^{'})dy
\end{aligned}$$

et en utilisant les relations :

$$\begin{aligned}
G^r(x,y) &= G_0^r(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(y)) \\
\tilde{P}_r(x,z) &= P_0^r(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(z))
\end{aligned}$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x(Z(r,\theta)Z(1,\theta)) &= \mathbb{N}_x(\tilde{Z}(\psi(re^{i\theta})).\tilde{Z}(\psi(e^{i\theta}))) \\
&= 4\int_{D_0^r}G_0^r(\psi(\psi^{-1}(x)),\psi(\psi^{-1}(y))) \\
&\times\ P_0^r(\psi(\psi^{-1}(y)),\psi(\psi^{-1}(re^{i\theta})))P_0(\psi(\psi^{-1}(y)),\psi(\psi^{-1}(e^{i\theta})))d\psi^{-1}(y) \\
&= 4\int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0^r(x,y)P_0^r(y,re^{i\theta})P_0(y,e^{i\theta})dy
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x((Z(1,\theta)-Z(r,\theta))^2 &= \mathbb{N}_x(Z(1,\theta)^2+Z(r,\theta)^2-2Z(1,\theta)Z(r,\theta)) \\
&= \mathbb{N}_x(Z(1,\theta)^2)+\mathbb{N}_x(Z(r,\theta)^2)-2\mathbb{N}_x(Z(1,\theta)Z(r,\theta)) \\
&= 4(\int_{D_0\setminus D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0(x,y)P_0(y,e^{i\theta})^2dy \\
&+ \int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0(x,y)P_0(y,e^{i\theta})^2dy \\
&+ \int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0^r(x,y)P_0^r(y,re^{i\theta})^2dy \\
&- 2\int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0^r(x,y)P_0^r(y,re^{i\theta})P_0(y,e^{i\theta})dy) \\
&= 4(\int_{D_0\setminus D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0(x,y)P_0(y,e^{i\theta})^2dy \\
&+ \int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2G_0^r(x,y)(P_0(y,e^{i\theta})-P_0^r(y,re^{i\theta}))^2dy \\
&+ \int_{D_0^r}|\psi^{'}(y)|^2(G_0(x,y)-G_0^r(x,y))P_0(y,e^{i\theta})^2dy)
\end{aligned}$$

Rappelons que $|\psi^{'}|$ est majorée sur D_0, nous pouvons donc majorer $|\psi^{'}(y)|^2$ par une constante c'est à dire $|\psi^{'}(y)|^2 \leq C$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{D_0\backslash D_0^r} |\psi^{'}(y)|^2 G_0(x,y)P_0(y,e^{i\theta})^2 dy &\leq C\int_{D_0\backslash D_0^r} G_0(x,y)P_0(y,e^{i\theta})^2 dy \\
&= C\int_{D_0\backslash D_0^r} G_0(x,y)(\frac{1}{2\pi}.\frac{1-|y|^2}{|e^{i\theta}-y|^2})^2 dy \\
&= C\int_{D_0\backslash D_0^r} G_0(x,y)(\frac{1}{2\pi}.\frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-y|^2})^2 dy
\end{aligned}$$

car pour $y \in D_0\backslash D_0^r$, $|y| = r$.

donc,

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\uparrow 1}\sup_{\theta\in\Pi} \mathbb{N}_x(Z(r,\theta)-Z(1,\theta))^2 &\leq \limsup_{r\uparrow 1}\sup_{\theta\in\Pi} C(\int_{D_0\backslash D_0^r} G_0(x,y)(\frac{1}{2\pi}.\frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-y)|^2})^2 dy \\
&+ \int_{D_0^r} G_0^r(x,y)(P_0(y,e^{i\theta})-P_0^r(y,re^{i\theta}))^2 dy \\
&+ \int_{D_0^r} (G_0(x,y)-G_0^r(x,y))P_0(y,e^{i\theta})^2 dy) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Preuve de la proposition 2.7. Soit K un sous-ensemble compact de D. Supposons que $x \in K$. Nous affirmons premièrement que la majoration

$$\mathbb{N}_x((Z(r,\theta)-Z(r,\theta^{'}))^4) \leq C_K(\theta-\theta^{'})^2 \tag{2.6}$$

restant vraie pour une constante C_K indépendante de x et r entraîne que $x \in K$ et r est suffisamment fermé en 1.

Dans le cas d'un disque unité, la constante peut être choisie indépendamment de r.

Dans le cas général, les formules explicites tirées dans la partie 2.3 nous permettent de majorer $\mathbb{N}_x(\tilde{Z}^r(z)-\tilde{Z}^r(z^{'}))^4$ par les quantités correspondantes pour le disque unité.

Pour $n \geq 1, p \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, posons $\theta_p^n = 2\pi p 2^{-n} \in \Pi$.

Soit $\gamma > 0$. La majoration (2.6) donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x((Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k))^4) &\leq C_K(\theta_p^k-\theta_{p+1}^k)^2 \\
&= C_K(2\pi p 2^{-k}-2\pi(p+1)2^{-k})^2 \\
&= C_K 4\pi^2 2^{-2k} \\
&= C^{'} 2^{-2k}
\end{aligned}$$

où $C^{'} = 4\pi^2 C_K$.

donc $\mathbb{N}_x((Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k))^4) \leq C^{'} 2^{-2k}$

or,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_x(|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>2^{-\gamma k}) &= \mathbb{N}_x(2^{\gamma k}|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>1) \\ &\le \mathbb{N}_x\left[(2^{\gamma k}|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|)^4\right] \\ &= 2^{4\gamma k}\mathbb{N}_x((Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k))^4) \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\mathbb{N}_x(|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>2^{-\gamma k})\le C^{'}2^{4\gamma k}2^{-2k}$$

Nous prenons $\gamma=\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_x(\exists k\ge n;\exists p:|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>2^{-k/8}) &= \sum_{k\ge n}\sum_p \mathbb{N}_x(|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>2^{-k/8}) \\ &\le \sum_{k\ge n}\sum_p C^{'}2^{\frac{k}{2}-2k} \\ &= \sum_{k\ge n} pC^{'}2^{\frac{k}{2}-2k} \\ &\le \sum_{k\ge n} C^{'}2^{-k/2} \\ &= C^{'}\left(\frac{1-\left(2^{-1/2}\right)^{\infty}}{1-2^{-1/2}}\right)2^{-n/2} \end{aligned}$$

donc,nous avons

$$\mathbb{N}_x(\exists k\ge n,\exists p:|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|>2^{-k/8})\le C^{''}2^{-n/2} \tag{2.7}$$

où $C^{''}=\frac{C^{'}}{1-2^{\frac{-1}{2}}}$

Notons par $E_n(r)$ l'évènement

$$E_n(r)=\left\{\forall k\ge n,\forall p:|Z(r,\theta_p^k)-Z(r,\theta_{p+1}^k)|\le 2^{-k/8}\right\}$$

L'argument classique enchaîné de la preuve du lemme de Kolmogorov(avec la continuité de l'application $\theta\to Z(r,\theta)$) montre que sur l'ensemble $E_n(r)$, nous avons pour tout $\theta,\theta^{'}\in\Pi$ tels que $|\theta-\theta^{'}|\le 2\pi 2^{-n}$

$$|Z(r,\theta)-Z(r,\theta^{'})|\le 2(1-2^{-1/8})^{-1}|\theta-\theta^{'}|^{1/8} \tag{2.8}$$

D'autre part, du lemme 2.8, nous pouvons choisir une suite (r_n) qui croît en 1 telle que

$$\lim_{r_n\uparrow 1}(\sup_{\theta_p^n\in\Pi}\mathbb{N}_x((Z(r_n,\theta_p^n)-Z(1,\theta_p^n))^2)=0$$

donc,

$$\mathbb{N}_x\left(\sum_{\{n,r_n>|x|\}}\sum_{p=0}^{2^n-1}\left(Z(r_n,\theta_p^n)-Z(1,\theta_p^n)\right)^2\right)<\infty.$$

La suite (r_n) peut être choisie indépendamment de K par extraction d'une sous-suite diagonale. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le p\le 2^n-1} |Z(r_n,\theta_p^n) - Z(1,\theta_p^n)| = 0 \ \mathbb{N}_x \ p.s$$

Remarquons que

$$\sum_n \mathbb{N}_x(E_n(r_n)^c) < \infty, \text{de } (2.7).$$

Donc, la majoration (2.8) est vraie pour $r = r_n$ pour tout n suffisamment grand, $\mathbb{N}_x$ p.s. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sup_{\theta\in\Pi} |Z(r_n,\theta) - Z(1,\theta)| &\le \sup_{0\le p\le 2^n-1} |Z(r_n,\theta_p^n) - Z(1,\theta_p^n)| + \sup_{|\theta-\theta'|\le 2\pi 2^{-n}} |Z(r_n,\theta) - Z(r_n,\theta^{'})| \\ &+ \sup_{|\theta-\theta'|\le 2\pi 2^{-n}} |Z(1,\theta) - Z(1,\theta^{'})|\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}|Z(r_n,\theta) - Z(r_n,\theta')| &\le 2(1-2^{-1/8})^{-1}|\theta-\theta'|^{1/8} \sup_{|\theta-\theta'|\le 2\pi 2^{-n}} |Z(r_n,\theta) - Z(r_n,\theta')| \\ &\le 2(1-2^{-1/8})^{-1}(2\pi 2^{-n})^{1/8} \\ &= \frac{2}{1-2^{-1/8}}(2\pi)^{1/8}\frac{1}{2^{n/8}}\end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\theta-\theta'|\le 2\pi 2^{-n}} |Z(r_n,\theta) - Z(r_n,\theta^{'})| = 0$$

par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\pi} |Z(r_n,\theta) - Z(1,\theta)| = 0.$$

□

TROISIEME PARTIE :

PREUVE DU THEOREME 1.1 DANS LE CAS SIMPLEMENT CONNEXE

3. PREUVE DU THÉORÈME 1.1 DANS LE CAS SIMPLEMENT CONNEXE

Dans cette partie, nous prouvons le théorème 1.1 lorsque D est un domaine borné, simplement connexe de classe C^2. Pour éviter les 4 facteurs comme dans la formule (1.4), il sera pratique de traiter l'équation $\Delta u = 4u^2$ plutôt que $\Delta u = u^2$. Ainsi, pour prouver le théorème 1.1, il suffit de vérifier que toutes les assertions de ce théorème donnent des solutions de $\Delta u = 4u^2$, avec une petite modification que la formule de représentation (1.4) est remplacée par :

$$u(x) = \mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\right) + \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\}}\left(1 - exp\left(-\int_D Z(z)\nu(dz)\right)\right)\right) \tag{3.1}$$

Cette preuve comporte quatre démarches.

Dans la première démarche, nous avons besoin de la propriété particulière de Markov[7] que nous rappelons ci-dessous.

Nous définissons les excursions de(W_s), en dehors du domaine D. Nous utilisons la mesure de probabilité $\mathbb{N}_{r,x}$ où $(r, x) \in D$. L'ensemble ouvert aléatoire $\{s \in [0, \sigma], \tau(W_s) < \zeta_s\}$ peut être écrit comme une réunion dénombrable des intervalles ouverts disjoints (a_i, b_i), $i \in I$.

Pour tout $i \in I$ fixé, nous avons

$$\tau(W_s) = \tau(W_{a_i}) = \zeta_{a_i}, \text{ pour tout } s \in [a_i, b_i]$$

et les trajectoires W_s, $s \in [a_i, b_i]$ coïncident à leurs temps de sortie de D.

Posons $y^i = \hat{W}_{a_i} = W_s(\tau(W_s))$, pour tout $s \in [a_i, b_i]$.

Nous définissons un élément aléatoire W^i de $\mathcal{C}_0\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{W}_{y_i}^{(\tau_i)}\right)$ par la formule

$$W_s^i(t) = W_{(a_i+s)\wedge b_i}(t), t \geq \tau_i$$

afin que W_s^i soit un élément de $\mathcal{W}_{y^i}^{(\tau_i)}$ avec temps de vie $\zeta_s^i = \zeta_{(a_i+s)\wedge b_i}$.

Les processus W^i, $i \in I$ sont les excursions de W "en dehors de D".

Et nous sommes intéressés à $\sum_{i \in I} \delta_{W_i}$ qui est une mesure ponctuelle sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{W})$ et nous prenons le cas pour $r = 0$.

Conditionné par $\mathcal{E}^D$, cette mesure est une mesure de Poisson d'intensité $\int \mathbb{N}_y(.)X^D(dy)$.

Nous avons besoin aussi d'un théorème et d'un corollaire à propos des relations des processus à trajectoire évaluée avec les équations différentielles partielles.

Théorème 3.1. [4] *Soit g une fonction mesurable positive sur ∂D telle que pour tout $x \in \Omega$, $E_x^\Omega(g(\hat{w})) < \infty$. Alors, la fonction*

$$v(x) = \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\left\langle X^\Omega, g\right\rangle\right)\right), (x \in \Omega)$$

résoud l'équation

$$v(x) = E_x^\Omega(g(\hat{w})) - 2E_x\left(\int_0^\tau v(w(u))^2\, du\right)$$

Remarquons que la mesurabilité de l'application $x \to \mathbb{N}_x$ implique facilement que la fonction v est aussi mesurable.

Corollaire 3.2. [4] *Supposons que (ζ_s) est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ et que Ω est un domaine de Green dans $\mathbb{R}^d$. Sous nos suppositions dans le théorème ci-dessus, la fonction v est deux fois continuellement différentiable dans Ω et résoud $\Delta v = 4v^2$ dans Ω. De plus, en supposant que Ω est borné et régulier et que g est continue sur $\partial\Omega$. Alors, pour tout $y \in \partial D$,*

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} v(x) = g(y)$$

3.1 La solution de $\Delta u = 4u^2$

La fonction u définie par (3.1) est une solution de $\Delta u = 4u^2$ dans D. Nous avons :

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^D \cap K\right) + \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\}}\left(1 - exp\left(-\int Z(z)\nu(dz)\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}}(1 - exp - \infty)\right) + \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\}}\left(1 - exp\left(-\int Z(z)\nu(dz)\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}}\left(1 - exp\left(-\infty.1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}} - \int Z(y)\nu(dy)\right)\right)\right) \\ &+ \mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\}}\left(1 - exp\left(-\infty.1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}} - \int Z(y)\nu(dy)\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\infty.1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}} - \int Z(y)\nu(dy)\right)\right) \end{aligned}$$

En posant

$$F = \infty.1_{\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\}} + \int Z(y)\nu(dy)$$

nous pouvons écrire

$$u(x) = \mathbb{N}_x(1 - exp - F)$$

De (1.1), la fonction u est minorée sur tout sous-ensemble compact de D. De plus, la fonction F possède la propriété d'additivité suivante. Soit D' un sous-domaine de D tel que $D' \subset D$, et $(W^i, i \in I)$ les excursions de W à l'extérieur de D'.

Alors, pour $x \in D'$,

$$F = \sum_{i \in I} F(W^i), \mathbb{N}_x \text{ p.s}$$

D'où, de la propriété particulière de Markov[7], nous avons pour $x \in D'$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\sum_{i\in I} F(W^i)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\int N_z\left(1-e^{-F}\right) X^{D'}(dz)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\left\langle X^{D'}, u\right\rangle\right)\right) \end{aligned}$$

Et d'après le théorème 3.1 et le corollaire 3.2, cela implique que u résoud $\Delta u = 4u^2$ dans D.

3.2 Construction du couple (K, ν)

Nous construisons maintenant un couple (K, ν) pour une solution donnée. Jusqu'à la fin de la preuve, nous fixons une solution positive u. Nous vérifions que u peut être uniquement écrite sous la forme (3.1) et le couple (K, ν) est déterminé à partir de u par les formules du théorème 1.1. En se rappelant de la notation de la partie 2.3, nous choisissons une suite (r_n) convergeant vers 1 telle que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\theta\in\Pi}|Z(r_n,\theta) - Z(1,\theta)|\right) = 0\,\mathbb{N}_x \text{ p.s}$$

Alors, pour $p, q \in \Pi$, nous posons

$$a_n(p,q) = \int_{(p,q)} u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) d\theta$$

(Nous utilisons la convention évidente pour les intervalles dans Π : si a, respectivement b, est le représentant de p, respectivement q, dans $[0, 2\Pi)$, nous prenons

$$(p,q) = (a,b) \text{ si } a \leq b$$

$$(p,q) = (a, b+2\Pi) \text{ si } a > b)$$

En remplaçant (r_n) par une sous-suite, nous pouvons supposer que,pour tout $p, q \in \Pi_1 := \Pi \cap 2\Pi\mathbb{Q}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n(p,q) = a(p,q) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Notons que

$$a(p,r) = a(p,q) + a(q,r) \text{ si } p,q,r \in \Pi_1 \text{ et } q \in (p,r)$$

Nous posons

$$K_0 = \{y \in \Pi, a(p,q) = \infty \;\; quand \;\; p,q \in \Pi_1, y \in (p,q)\}$$

Alors, K_0 est un sous-ensemble compact de Π, qui est identifié à ∂D_0 par l'application $\theta \to e^{i\theta}$. En utilisant cette identification, nous prenons $K = \psi(K_0)$.

Aussi, nous posons $O = \Pi \backslash K_0$ et définissons une mesure finie ν_n sur O par

$$\nu_n(d\theta) = 1_O(\theta) u\left(\psi(r_n e^{i\theta})\right) d\theta$$

De la définition de K_0, nous voyons que pour tout sous-ensemble compact H de O,

$$\sup_n \nu_n(H) < \infty$$

D'où, par extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite (ν_n) converge p.s dans l'espace des mesures de Radon sur O. De l'identification $\partial D_0 = \Pi$, la mesure bornée ν_∞ est une mesure de Radon sur $\partial D_0 \backslash K_0$.

Soit $\tilde{\nu}$ l'image de ν_∞ sous ψ et nous posons

$$\nu(dy) = \left|\psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)\right| \tilde{\nu}(dy)$$

3.3 Preuve de la formule (3.1)

Nous montrons maintenant la formule (3.1). La fonction u résoud le problème de Dirichlet pour $\Delta u = 4u^2$ dans D^{r_n} avec condition à la frontière $u_{|D^{r_n}}$. D'après le corollaire 3.2, nous avons pour $x \in D^{r_n}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\left\langle X^{D^{r_n}}, u\right\rangle\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-\int u(z)\tilde{Z}_{r_n}(z)\tilde{\sigma}_{r_n}(dz)\right)\right) \\ &= \mathbb{N}_x\left(1 - exp\left(-r_n \int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(r_n, \theta\right) d\theta\right)\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemme 3.3. *Pour tout $x \in D$, nous avons $\mathbb{N}_x$ p.s sur $\left\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\right\}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(r_n, \theta\right) d\theta = +\infty \tag{3.3}$$

et $\mathbb{N}_x$ p.s sur $\left\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\right\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(r_n, \theta\right) d\theta = \int_\Pi Z\left(1, \theta\right) \nu_\infty(d\theta) \tag{3.4}$$

Preuve. Nous montrons premièrement (3.4). Pour $\varepsilon > 0$, notons par $K_{(\varepsilon)}$ l'ε-voisinage ouvert de K dans $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathcal{R}^D$ est compact, sur l'ensemble $\left\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\right\}$, nous pouvons trouver $\varepsilon = \varepsilon(w) > 0$ aussi petite que $\mathcal{R}^D \cap K_{(\varepsilon)} = \emptyset$.

Donc, $Z_r(y) = 0$ pour $y \in \partial D^r \cap K_{(\varepsilon)}$, $r \in (0, 1]$.

Pour $\eta > 0$, soit $\left(K_0\right)_\eta$ le η-voisinage fermé de K_0 dans Π. Alors, pour $\delta > 0$ et $\eta > 0$ petit aussi, nous avons

$\left\{\psi\left(re^{i\theta}\right) : 1-\delta \leq r \leq 1, \theta \in (K_0)_\eta\right\} \subset K_{(\varepsilon)}$

Donc, pour n suffisamment grand et $\theta \in (K_0)_\eta$, nous avons

$$Z\left(r_n, \theta\right) = Z\left(1, \theta\right) = 0$$

Soit $O_\eta = \Pi \backslash (K_0)_\eta$.

Puisque O_η est relativement compact sur O, nous avons

$$\sup_n \int_{O_\eta} u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) d\theta < \infty$$

De la proposition 2.7, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) \left|Z\left(r_n, \theta\right) - Z\left(1, \theta\right)\right| d\theta = 0 \ \ \mathbb{N}_x \text{ p.s}$$

sur l'ensemble $\left\{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset\right\}$.

D'autre part, sur le même évènement, nous avons pour n grand

$$\int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(1, \theta\right) d\theta = \int_O Z\left(1, \theta\right) \nu_n(d\theta)$$

qui par la convergence vague de ν_n vers ν_∞ converge vers

$$\int_O Z\left(1, \theta\right) \nu_\infty(d\theta) = \int_\Pi Z\left(1, \theta\right) \nu_\infty(d\theta)$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Pi u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(r_n, \theta\right) d\theta = \int_\Pi Z\left(1, \theta\right) \nu_\infty(d\theta)$$

Nous revenons à la preuve de (3.3).

Nous utilisons la notation $\hat{w} = w(\zeta)$ pour le point final de la trajectoire arrêtée w. Nous posons

$$T = \inf\left\{s \geq 0, \zeta_s = \tau(W_s), \hat{W}_s \in K\right\}$$

de telle manière que$\left\{\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\right\} = \{T < \infty\}$p.s

Notons que, sur$\{T < \infty\}$, $\hat{W}_T \in K$ d'où $\psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right) \in K_0 \subset \Pi$.

Nous montrerons que

$$Z\left(1, \psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right)\right) > 0 \, \mathbb{N}_x \text{ p.s. sur } \{T < \infty\} \tag{3.5}$$

La propriété (3.3) résulte de (3.5) :

de la proposition 2.7 et de la continuité de $Z\left(1, \theta\right)$, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour n suffisamment grand et $\left|\theta - \psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right)\right| < \varepsilon$,

$$Z\left(r_n, \theta\right) \geq \frac{1}{2} Z\left(1, \psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right)\right)$$

Ainsi

$$\int_{\Pi} u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) Z\left(r_n,\theta\right) d\theta \geq \frac{1}{2} Z\left(1,\psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right)\right) \int_{\left|\theta-\psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right)\right|<\varepsilon} u\left(\psi\left(r_n e^{i\theta}\right)\right) d\theta$$

qui tend vers ∞ par le fait que $\psi^{-1}\left(\hat{W}_T\right) \in K_0$ et la définition de K_0.

Pour prouver (3.5), nous appliquons la propriété forte de Markov au serpent brownien au temps T.

Premièrement, nous inscrivons quelques propriétés de la trajectoire arrêtée W_T.

Pour tout $\delta > 0$, posons

$$\begin{aligned} D^{(\delta)} &= \{y \in D, dist\,(y,\partial D) > \delta\} \\ D\,(x,y) &= \left\{y \in \mathbb{R}^2, |y-x| < \delta\right\} \end{aligned}$$

Alors, la trajectoire arrêtée W_T satisfait le suivant($\mathbb{N}_x$ *p.s. sur* $\{T<\infty\}$)

(a) $\tau\,(W_T)$=ζ_{W_T} et $\hat{W}_T \in K$ et

(b) Il existe des constantes positives δ et A telles que $\left\{W_T\left(\zeta_{W_T-t}\right), \frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right) \leq t \leq 2^{-n}\right\} \subset D^{\left(\delta 2^{-\frac{n}{2}}\right)} \cap D\left(\hat{W}_T, A2^{-\frac{n}{2}}\right)$,pour $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, nous fixons une trajectoire arrêtée $w \in \mathcal{W}_x$ telle que (a) et (b) restent vraies quand W_T est remplacée par w. Nous argumenterons sous la mesure de probabilité P_w^*, qui est la loi du serpent brownien commencé à w et terminé quand le processus qui a existé s'annule. Notons que la définition de la mesure de sortie a une signification sous P_w^*. En outre, de la proposition 2.5 de [4], nous pouvons écrire

$$\left\langle X^D,\varphi\right\rangle = \int \left\langle X^D(\omega,\varphi)\right\rangle \mathcal{N}(d\omega)\, P_w^* \text{ p.s}$$

où $\mathcal{N}(d\omega)$ est sous $P_w^*(d\omega)$ une mesure de Poisson sur l'espace canonique $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+,\mathcal{W}\right)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathcal{W}$ d'intensité

$$2\int_0^{\zeta_W} \mathbb{N}_{W_{(t)}}(d\omega)dt$$

Ecrivons

$$\mathcal{N} = \sum_{j\in J} \delta_{\omega_j}$$

et observons que, P_w^* p.s pour tout $j \in J$, $X^D(\omega_j)$ a une densité continue $(Z(\omega_j)(z), z \in \partial D)$ par rapport à $\sigma(dz)$.

Nous vérifions que

$$P_w^*\left(\exists j \in J, Z(\omega_j)(\hat{w}) > 0\right) = 1 \tag{3.6}$$

Ce fait implique que X^D est P_w^* p.s minorée par une mesure sur ∂D qui a une densité positive à $\hat{w}$.

Des propriétés des mesures de Poisson, nous avons

$$P_w^*\left(\exists j \in J, Z(\omega_j)(\hat{w}) > 0\right) = 1 - exp\left(-2\int_0^{\zeta_w} \mathbb{N}_{w(t)}\left(Z(\hat{w}) > 0\right) dt\right)$$

Alors, pour $y \in D$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}_y\left(Z(\hat{w})>0\right) &= \mathbb{N}_y\left(\tilde{Z}(\hat{w})>0\right)\\
&\geq \frac{\left(\mathbb{N}_y\left(\tilde{Z}(\hat{w})\right)\right)^2}{\mathbb{N}_y\left(\tilde{Z}(\hat{w})^2\right)}\\
&= \frac{\tilde{P}\left(y,\hat{w}\right)^2}{\int_D G(y,y')\tilde{P}(y',\hat{w})^2 dy'}
\end{aligned}
$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les première et seconde formules du moment de $Z(z)$, rappelées au début de la deuxième partie.

Alors, d'une part,

$$\int_D G(y,y')\tilde{P}(y',\hat{w})^2 dy' = \int_{D_0} \left|\psi'(y'')\right|^2 G_0\left(\psi^{-1}(y),y''\right) P_0\left(y'',\psi^{-1}(\hat{w})\right)^2 dy'' \leq C \text{ ,du lemme 2.4}$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}\left(y,\hat{w}\right) &= P_0\left(\psi^{-1}(y),\psi^{-1}(\hat{w})\right)\\
&\geq c\frac{1-|\psi^{-1}(y)|}{\left|\psi^{-1}(\hat{w})-\psi^{-1}(y)\right|^2}\\
&\geq c'\frac{\rho(y)}{\left|\hat{w}-y\right|^2}
\end{aligned}
$$

où c,c' sont des constantes positives.

Soit n un entier tel que $2^{-n} \leq \zeta_w$ et$\left\{w\left(\zeta_w-t\right), \frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right) \leq t \leq 2^{-n}\right\} \subset D^{\left(\delta 2^{-\frac{n}{2}}\right)} \cap D\left(\hat{w}, A2^{-\frac{n}{2}}\right)$

Alors, pour $t \in \left[\zeta_w - 2^{-n}, \zeta_w - \frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right)\right]$, nous avons :

$$\zeta_w - 2^{-n} \leq t \leq \zeta_w - \frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right)$$

$$-2^{-n} \leq t-\zeta_w \leq -\frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right)$$

$$\frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right) \leq \zeta_w - t \leq 2^{-n}$$

donc

$w(t) \in D^{\left(\delta 2^{-\frac{n}{2}}\right)} \cap D\left(\hat{w}, A2^{-\frac{n}{2}}\right)$

pour $w(t) \in D^{\left(\delta 2^{-\frac{n}{2}}\right)}$, nous avons

$$
\begin{aligned}
dist\left(w(t),\partial D\right) &> \delta 2^{-\frac{n}{2}}\\
\rho\left(w(t)\right) &> \delta 2^{-\frac{n}{2}}\\
\rho\left(w(t)\right)^2 &> \delta^2\left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2
\end{aligned}
$$

pour $w(t) \in D\left(\hat{w}, A2^{-\frac{n}{2}}\right)$,

$$\left|w(t)-\hat{w}\right| < A2^{-\frac{n}{2}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{w(t)}\left(Z(\hat{w})>0\right) &\geq \frac{c'\rho\left(w(t)\right)^2}{c\left|\hat{w}-w(t)\right|^4}\\
&\geq \frac{c'\delta^2\left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2}{cA^4\left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^4}\\
&\geq \frac{c'}{c}\left(\frac{\delta}{A^2}\right)^2 2^n
\end{aligned}$$

d'où,

$$\int_{\zeta_w-2^{-n}}^{\zeta_w-\frac{3}{2}\left(2^{-n-1}\right)} \mathbb{N}_{w(t)}\left(Z(\hat{w})>0\right)dt \geq \frac{c'}{4c}\left(\frac{\delta}{A^2}\right)^2$$

De (b), il y a infiniment de valeurs adaptées de n.

Nous concluons que

$$\int_0^{\zeta_w} \mathbb{N}_{w(t)}\left(Z(\hat{w})>0\right)dt=\infty$$

et ainsi la relation (3.6) est vérifiée.

De (3.6) et la propriété forte de Markov pour le serpent brownien, nous concluons que, $\mathbb{N}_x$ p.s sur $\{T<\infty\}$, X^D est minorée par une mesure sur ∂D qui a une densité positive à $\hat{w}_T$. Cela implique que $Z\left(\hat{w}_T\right)>0$ qui est équivalent à (3.5). □

Revenons à la formule (3.2). En passant à la limite $n\to\infty$, nous déduisons du lemme 3.3 que

$$u(x)=\mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^D\cap K\neq\emptyset\right)+\mathbb{N}_x\left(1_{\{\mathcal{R}^D\cap K=\emptyset\}}\left(1-exp\left(-\int_\Pi Z\left(1,\theta\right)\nu_\infty\left(d\theta\right)\right)\right)\right)$$

Pourtant,

$$\begin{aligned}
\int Z\left(1,\theta\right)\nu_\infty\left(d\theta\right) &= \int \tilde{Z}(z)\tilde{\nu}(dz)\\
&= \int Z(z)\nu(dz)
\end{aligned}$$

et nous obtenons la formule de représentation (3.1).

3.4 Unicité du couple (K,ν)

Pour établir l'unicité du couple (K,ν), nous vérifions d'abord la formule (1.2).

Si $z\in K$, nous avons

$$\begin{aligned}
u(x) &\geq \mathbb{N}_x\left(z\in\mathcal{R}^D\right)\\
&\geq \mathbb{N}_x\left(Z(z)>0\right)\\
&\geq \frac{\tilde{P}(x,z)^2}{\int_D G(x,y)\tilde{P}(y,z)^2dy}\\
&\geq c\frac{\rho(x)^2}{\left|z-x\right|^4}
\end{aligned}$$

des arguments que nous avons utilisés dans la preuve du lemme 3.3.

Donc,

$$\limsup_{D\ni x\to z}\rho(x)^2u(x)>0$$

Ainsi,

$$K\subset\left\{z\in\partial D,\limsup_{D\ni x\to z}\rho(x)^2u(x)>0\right\}$$

Pour obtenir l'autre inclusion, supposons que $z\in\partial D\backslash K$.

Nous pouvons choisir $\varepsilon>0$ afin que $z\notin K_{(\varepsilon)}$.

Alors, si $x\in D$ et $|z-x|<\frac{\varepsilon}{3}$,

$$u(x)\le\mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^D\cap D\left(x,\frac{\varepsilon}{3}\right)^c\neq\emptyset\right)+\mathbb{N}_x\left(1_{\left\{\mathcal{R}^D\subset D\left(x,\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}}\left(1-exp\left(-\int Z(z')\nu(dz')\right)\right)\right)$$

D'une part, de (1.1),

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^D\cap D\left(x,\frac{\varepsilon}{3}\right)^c\neq\emptyset\right)&\le\mathbb{N}_x\left(\sup_{s\ge0,t\ge0}w_s(t)\ge\frac{\varepsilon}{3}\right)\\&=C\varepsilon^{-2}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_x\left(1_{\left\{\mathcal{R}^D\subset D\left(x,\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}}\left(1-exp\left(-\int Z(z')\nu(dz')\right)\right)\right)&\le\mathbb{N}_x\left(1_{\left\{\mathcal{R}^D\subset D\left(x,\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}}\int Z(z')\nu(dz')\right)\\&\le\int_{\left\{|z'-z|\le2\frac{\varepsilon}{3}\right\}}\mathbb{N}_x\left(Z(z')\right)\nu(dz')\\&=\int_{\left\{|z'-z|\le2\frac{\varepsilon}{3}\right\}}P(x,z')\nu(dz')\\&\le C\rho(x)^{-1}\nu\left(\left\{z'\in\partial D,|z'-z|\le2\frac{\varepsilon}{3}\right\}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, puisque ν est une mesure de Radon sur $\partial D\backslash K$ et $y\notin K_{(\varepsilon)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\limsup_{D\ni x\to z}\rho(x)u(x)&\le C\nu\left(\left\{z'\in\partial D,|z'-z|\le2\frac{\varepsilon}{3}\right\}\right)\\&<\infty\end{aligned}$$

Cela complète la preuve de (1.2).

Nous avons encore à prouver (1.3).

Pour $z\in\partial D$ et $\varepsilon>0$ suffisamment petit, posons

$$z_\varepsilon=z+\varepsilon N_z$$

Alors, $z_\varepsilon\in D$.

Soit φ une fonction continue positive sur ∂D dont le support est contenu dans $\partial D\backslash K$. Soit $\delta>0$ tel que $\varphi = 0$ sur $K_{(\delta)} \cap \partial D$.

Alors,

$$\int \mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\right)\varphi(z)\sigma(dz) \leq \left(\int \varphi(z)\sigma(dz)\right) \sup_{z\in\partial D\backslash K_{(\delta)}} \mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset\right)$$

et la dernière quantité tend vers 0 quand ε tend vers 0 de la proposition 4.4 de [6].

Soit $\bar{\nu}$ la restriction de ν sur $\partial D\backslash K_{(\delta/2)}$ de telle manière que $\bar{\nu}$ est une mesure finie et $\langle\bar{\nu},\varphi\rangle = \langle\nu,\varphi\rangle$.

Alors,

$$|\int \varphi(z)\sigma(dz)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}(1 - exp(-\int Z(z')\nu(dz'))) - \int \varphi(z)\sigma(dz)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}(1 - exp(-\int Z(z')\bar{\nu}(dz')))|$$

$$\leq (\int \varphi(z)\sigma(dz)) \sup_{z\in\partial D\backslash K_{(\delta)}} \mathbb{N}_{z_\varepsilon}(\mathcal{R}^D \cap K_{(\delta/2)} \neq \emptyset)$$

qui tend vers 0 quand ε tend vers 0 par le même argument que précédemment.

Vérifions que

$$\langle\bar{\nu},\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(1 - exp\left(-\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\right)\right)\sigma(dz) \tag{3.7}$$

pour compléter la preuve de (1.3).

Premièrement, nous notons que

$$\begin{aligned}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(1 - exp\left(-\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\right)\right)\sigma(dz) &\leq \int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\right)\sigma(dz)\\ &= \int \varphi(z)\sigma(dz)\int P\left(z_\varepsilon, z'\right)\bar{\nu}(dz')\\ &= \int \bar{\nu}(dz')\int \varphi(z)P\left(z_\varepsilon, z'\right)\sigma(dz)\end{aligned}$$

et la dernière quantité tend vers $\langle\bar{\nu},\varphi\rangle$ quand ε tend vers 0.

D'autre part, nous avons pour $\eta > 0$

$$\begin{aligned}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(\int Z(z')\bar{\nu}(dz')1_{\left\{\int Z(z')\bar{\nu}(dz')>\eta\right\}}\right)\sigma(dz) &\leq \eta^{-1}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left((Z(z')\bar{\nu}(dz'))^2\right)\sigma(dz)\\ &\leq \langle\bar{\nu},1\rangle\,\eta^{-1}\int \varphi(z)N_{z_\varepsilon}\left(\int Z(z')^2\bar{\nu}(dz')\right)\sigma(dz)\\ &= \langle\bar{\nu},1\rangle\,\eta^{-1}\int \varphi(z)\sigma(dz)\int \bar{\nu}(dz')\\ &\int_D G\left(z_\varepsilon, y\right)P\left(y, z'\right)^2 dy\end{aligned}$$

La dernière quantité tend vers 0 quand ε tend vers 0 par la convergence dominée en utilisant le lemme 2.4 (ii).

En outre, pour $\gamma > 0$, nous pouvons choisir $\eta > 0$ telle que

$\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(1 - exp\left(-\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\right)\right)\sigma(dz) \geq (1-\gamma)\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(Z(z')1_{\left\{\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\leq\eta\right\}}\bar{\nu}(dz')\right)\sigma(dz)$

d'où

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}\left(1 - exp\left(-\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\right)\right)\sigma(dz)$$

$$\geq (1-\gamma)\liminf_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}(\int Z(z')1_{\left\{\int Z(z')\bar{\nu}(dz')\leq\eta\right\}}\bar{\nu}(dz'))\sigma(dz)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\gamma)\liminf_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(z)\mathbb{N}_{z_\varepsilon}(\int Z(z')\bar{\nu}(dz'))\sigma(dz)) \\
&= (1-\gamma) < \bar{\nu}, \varphi >
\end{aligned}
$$

Puisque γ était arbitraire,cela complète la preuve de (3.7) et du théorème 1.1 dans le cas borné, simplement connexe. Nous observons aussi que les estimations (1.5) et (1.6) s'ensuivent immédiatement des arguments au début de la quatrième démarche.

QUATRIEME PARTIE :

PREUVE DU THEOREME 1.1 DANS LE CAS GENERAL

4. PREUVE DU THÉORÈME 1.1 DANS LE CAS GÉNÉRAL

Dans cette partie, nous montrons le théorème 1.1 quand D est un domaine de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$. Nous supposons d'abord que D est borné. Le cas d'un domaine non borné n'exige pas de nouvelles idées mais quelques modifications qui sont détaillées à la fin de cette partie.

4.1 Détermination du couple (K, ν)

De la définition d'un domaine de classe C^2, pour tout $z \in \partial D$, nous pouvons trouver un nombre $\delta_z > 0$, une base orthonormale (V_z, N_z) de $\mathbb{R}^2$, et une application ψ_z de $[-\delta_z, \delta_z]$ dans $[-\delta_z/4, \delta_z/4]$ de classe C^2 tels que $\psi_z(0) = \psi_z'(0) = 0$ et les propriétés suivantes restent vraies :
si $\bar{R}_z(\delta_z)$ représente le carré fermé

$$\bar{R}_z(\delta_z) = \{x = z + \lambda V_z + \lambda' N_z, |\lambda| \leq \delta_z, |\lambda'| \leq \delta_z\}$$

alors

$$D \cap \bar{R}_z(\delta_z) = \{x = z + \lambda V_z + \lambda' N_z, |\lambda| \leq \delta_z, |\lambda'| \leq \delta_z, \lambda' > \psi_z(\lambda)\}$$

$$\partial D \cap \bar{R}_z(\lambda_z) = \{x = z + \lambda V_z + \lambda' N_z, |\lambda| \leq \delta_z, \lambda' = \psi_z(\lambda)\}$$

En choisissant δ_z assez petit, nous pouvons facilement construire un domaine simplement connexe D_z de classe C^2 tel que $D_z \subset D$ et

$$\partial D_z \cap \bar{R}_z(\delta_z) = \partial D \cap \bar{R}_z(\delta_z) = \partial D \cap \partial D_z \tag{4.1}$$

Ainsi, D_z est un sous-domaine simplement connexe de D dont la frontière coïncide avec celle de D au voisinage de z.
Notons par $R_z(\delta_z)$ le carré ouvert(l'intérieur de $\bar{R}_z(\delta_z)$).
De la compacité de ∂D, nous pouvons choisir $z_1, \ldots, z_p \in \partial D$ tels que

$$\partial D \subset \bigcup_{i=1}^{p} R_{z_i}\left(\frac{\delta z_i}{4}\right)$$

Pour simplifier notre notation, nous écrivons
$\delta_i = \delta_{z_i}$, $D_i = D_{z_i}$
Soit u une solution positive de $\Delta u = 4u^2$ dans D. Pour le cas simplement connexe, pour tout

$i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un sous-ensemble compact $K_i \subset \partial D_i$ et une mesure de Radon ν_i sur $\partial D_i \backslash K_i$ tels que, si $x \in D_i$,

$$u(x) = \mathbb{N}_x\left(\mathcal{R}^{D_i} \cap K_i \neq \emptyset\right) + \mathbb{N}_x\left(1_{\left\{\mathcal{R}^{D_i} \cap K_i = \emptyset\right\}}\left(1 - exp\left(-\int Z_i(z)\nu_i(dz)\right)\right)\right)$$

où $(Z_i(z), z \in \partial D_i)$ représente la densité continue de la mesure de sortie X^{D_i}. Comme $(\partial D_i \backslash \partial D) \subset D$, nous avons $K_i \subset (\partial D_i \cap \partial D)$. Posons

$$K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$$

qui est un sous-ensemble compact de ∂D.

Lemme 4.1. *(i) Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,$K \cap \partial D_i = K_i$*

(ii) Il existe une mesure de Radon ν sur $\partial D \backslash K$ telle que pout tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$\nu_{|\partial D \cap R_{z_i}(\delta_i)} = \nu_{i_{|\partial D \cap R_{z_i}(\delta_i)}}$$

En outre, pour la fonction ψ continue à support compact sur $\partial D \backslash K$,

$$\langle \nu, \psi \rangle = \lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D} \psi(z) u\left(z + rN_z\right) \sigma(dz)$$

Preuve. (i)Pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
K_i \cap \partial D_j &= \left\{y \in \partial D_i \cap \partial D_j, \limsup_{r \downarrow 0} r^2 u\left(z + rN_z\right) > 0\right\} \\
&= \left\{y \in \partial D_j \cap \partial D_i, \limsup_{r \downarrow 0} r^2 u\left(z + rN_z\right) > 0\right\} \\
&= K_j \cap \partial D_i
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
K \cap \partial D_i &= \left(\bigcup_{j=1}^{p} K_j\right) \cap \partial D_i \\
&= K_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p} \partial D_j\right) \\
&= K_i \cap \partial D_i \\
&= K_i \text{ car } K_i \subset \partial D_i
\end{aligned}$$

(ii)Nous pouvons trouver une collection $(g_i, i \in \{1, \ldots, p\})$ de fonctions positives sur ∂D telle que *supp* $g_i \subset R_{z_i}(\delta_i)$ et,pour tout $z \in \partial D$,

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(z) = 1$$

Nous posons

$$\langle \nu, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \nu_i, g_i \psi \rangle$$

pour la fonction continue ψ sur ∂D.

Si ψ est supportée sur $(\partial D \cap \partial D_i) \backslash K_i$,pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ alors le cas simplement connexe donne

$$\begin{aligned}\langle \nu_i, \psi \rangle &= \lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D \cap \partial D_i} \psi(z) u\left(z + rN_z\right) \sigma(dz) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D} \psi(z) u\left(z + rN_z\right) \sigma(dz)\end{aligned}$$

Alors, pour la fonction continue ψ à support compact dans $\partial D \backslash K$,

$$\begin{aligned}\langle \nu, \psi \rangle &= \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D} g_i(z) \psi(z) u\left(z + rN_z\right) \sigma(dz) \right) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D} \psi(z) u\left(z + rN_z\right) \sigma(dz)\end{aligned}$$

Ce résultat donne la deuxième assertion dans (ii).

ψ étant à support compact sur $(\partial D \cap \partial D_i) \backslash K_i$, nous avons

$$\langle \nu_i, \psi \rangle = \langle \nu, \psi \rangle$$

Ce qui implique que

$$\nu_{i_{|(\partial D \cap \partial D_i) \backslash K}} = \nu_{|(\partial D \cap \partial D_i) \backslash K}$$

La première assertion dans (ii) s'ensuit de cette égalité. $\square$

Ainsi,le couple (K, ν) satisfait les propriétés (1.2) et (1.3) du théorème 1.1.

4.2 Preuve de la formule (3.1)

Nous ne savons pas encore que la mesure de sortie X^D a une densité continue par rapport à $\sigma(dz)$. Pour obtenir la formule de représentation (3.1), nous utilisons l'argument de localisation suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, posons

$$D_{(\varepsilon)} = \{x \in D, \rho(x) > \varepsilon\}$$

Soit $(W_k^\varepsilon, k \in I_\varepsilon)$ les excursions du serpent brownien à l'extérieur de $D_{(\varepsilon)}$ ([7], *partie* 2).

Notons par $z_k^\varepsilon \in \partial D_{(\varepsilon)}$ le début du point de l'excursion W_k^ε et par $\mathcal{R}^D(W_k^\varepsilon)$ le support de W_k^ε dans D.

Pour ε suffisamment petit, $(\varepsilon < \inf\{\delta_i/4, i = 1, \ldots, p\})$,pour tout $k \in I_\varepsilon$, nous pouvons trouver $i = i(k) \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $z_k^\varepsilon \in R_{z_i}(\delta_i/2)$.

Nous affirmons alors que, $\mathbb{N}_x$ p.s., pour tout ε assez petit et $k \in I_\varepsilon$,nous avons

$$\mathcal{R}^D\left(W_k^\varepsilon\right) \subset \left(R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)}) \cap \bar{D}\right) \tag{4.2}$$

Cela s'ensuit des propriétés du serpent brownien.

De plus, si notre affirmation était fausse, un argument compact produit un temps $s > 0$ et un nombre $\eta > 0$ tels que

$$\tau(W_s) + \eta \le \zeta_s$$

et $W_s(t) \in \bar{D}$ pour tout $t \in [0, \tau(W_s) + \eta]$.

Du comportement du serpent brownien, nous pouvons aussi supposer que s est rationnel. Cela donne une contradiction puisqu'une trajectoire brownienne atteind immédiatement le complément de $\bar{D}$ après avoir atteinte ∂D.

Du cas simplement connexe, la mesure de sortie de W_k^ε de $D_{i(k)}$ a une densité continue $Z(W_k^\varepsilon)(z)$, qui (*de* (4.2)) est supportée par

$$R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)}) \cap \partial D_{i(k)} = R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)}) \cap \partial D$$

De (4.1) et (4.2), cette densité coïncide aussi sur $R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)}) \cap \partial D$ avec la densité de la mesure de sortie de W_k^ε de D et la dernière densité s'annule en dehors de $R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)})$.

Pour ε fixé mais suffisamment petit, nous obtenons que

$$Z^D(z) = \sum_{k \in I_\varepsilon} 1_{\left\{z \in R_{z_{i(k)}}(\delta_{i(k)})\right\}} Z(W_k^\varepsilon)(z)$$

est la densité continue de la mesure de sortie de D.

Ainsi, le deuxième membre de la formule (3.1) a une signification que nous notons par $v(x)$. Nous affirmons maintenant que $u = v$. La première démarche de la preuve dans la troisième partie montre que v résoud $\Delta v = 4v^2$ dans D.

Alors, soit $z \in \partial D$ et choisissons i tel que $z \in R_{z_i}(\delta_i/4)$.

Pour $x \in D \cap R_{z_i}(\delta_i/4)$, nous avons

$$\begin{aligned} |v(x) &- \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap K \neq \emptyset, \mathcal{R}^D \subset R_{z_i}(\delta_i)) \\ &- \mathbb{N}_x(1_{\mathcal{R}^D \cap K = \emptyset, \mathcal{R}^D \subset R_{z_i}(\delta_i)}(1 - exp(-\int Z^D(z)\nu(dz))))| \\ &\le \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap R_{z_i}(\delta_i)^c \neq \emptyset) \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant la formule pour u dans D_i,

$$|u_i(x) - \mathbb{N}_x(\mathcal{R}_i^D \cap K_i \neq \emptyset, \mathcal{R}_i^D \subset R_{z_i}(\delta_i)) - \mathbb{N}_x((1_{\mathcal{R}_i^D \cap K_i = \emptyset, \mathcal{R}_i^D \subset R_{z_i}(\delta_i)}(1 - exp(-\int Z_i(z)\nu_i(dz))))|$$

$$\begin{aligned} &\le \mathbb{N}_x(\mathcal{R}_i^D \cap R_{z_i}(\delta_i)^c \neq \emptyset) \\ &= \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^D \cap R_{z_i}(\delta_i)^c \neq \emptyset) \end{aligned}$$

Sur l'évènement$\{\mathcal{R}^D \subset R_{z_i}(\delta_i)\}$, nous avons

$$\mathcal{R}^D = \mathcal{R}_i^D$$

et

$$Z^D(z) = Z_i(z)$$

pour $z \in \partial D \cap \partial D_i$.

En utilisant le lemme 4.1, nous obtenons aussi

$$|u(x) - v(x)| \leq 2\mathbb{N}_x \left(\mathcal{R}^D \cap R_{z_i}(\delta_i)^c \neq \emptyset\right)$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers z ([6], *proposition* 4.4).

Du principe du maximum([2], *appendix*), nous concluons que $u = v$, ce qui complète la preuve.

Quand D n'est pas borné, les arguments précédents s'appliquent avec des petites modifications : l'application du principe du maximum est un peu différent.

Nous avons besoin de considérer une suite infinie $(z_i, i = 1, 2\ldots)$ mais la construction du couple (K, ν) procède de la même manière.

Pour tout $a > 0$, nous considérons les fonctions v_0 et v_∞ définies sur $D^a := D \cap D(0, a)$ par :

$$v_0(x) = \mathbb{N}_x \left(\mathcal{R}^{D^a} \cap K \neq \emptyset\right) + \mathbb{N}_x \left(1_{\{\mathcal{R}^{D^a} \cap K = \emptyset\}} \left(1 - exp\left(-\int Z^{D^a}(z)\nu(dz)\right)\right)\right)$$

$$v_\infty = \mathbb{N}_x \left(\mathcal{R}^{D^a} \cap (K \cup \partial D(0,a)) \neq \emptyset\right) + \mathbb{N}_x \left(1_{\{\mathcal{R}^{D^a} \cap (K \cup \partial D(0,a)) = \emptyset\}} \left(1 - exp\left(-\int Z^{D^a}(z)\nu(dz)\right)\right)\right)$$

Le principe du maximum donne $v_0 \leq u \leq v_\infty$ sur D^a et en faisant tendre a vers ∞, nous avons (3.1).

Nous expliquons finalement les résultats déclarés dans la remarque 1.2 suivant le théorème 1.1.

Les majorations (1.5) et (1.6) ont déjà été démontrées dans la troisième partie pour le cas borné, simplement connexe. Le cas général s'ensuit de la technique de localisation utilisée dans cette partie. Alors, le fait que u n'a pas une limite tangentielle à tout $z \in K$ s'ensuit de (1.5). Pour $z \in \partial D \backslash K$, nous considérons une collection dénombrable de C^2-sous-domaines bornés simplement connexes D_i de D construits au début de cette partie afin que $(\partial D_i \cap \partial D) \subset (\partial D \backslash K)$ et tout sous-ensemble compact de $\partial D \backslash K$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini des ensembles $\partial D_i \cap \partial D$.

Du théorème 1.1 appliqué à la solution u dans D_i et de la condition $(\partial D_i \cap \partial D) \subset (\partial D \backslash K)$, nous pouvons écrire pour $x_i \in D_i$,

$$u(x) = \mathbb{N}_x \left(1 - exp\left(-\int Z_i(z)\mu_i(dz)\right)\right)$$

où μ_i est une mesure finie sur ∂D_i.

Soit h_i la fonction harmonique positive sur D_i associée à la mesure μ_i sur la frontière.En argumentant comme dans la partie 3,pour tout $z \in \partial D_i$ tel que $\mu_i(z) = 0$, nous avons :

$$\lim_{D_i \ni x \to z} (h_i(x) - u(x)) = 0 \tag{4.3}$$

Et le résultat souhaité pour u s'ensuit de (4.3).

CONCLUSION

La correspondance bijective entre les couples (K, ν) et les solutions de l'équation $\Delta u = u^2$ se déroule comme suit : K et ν sont déterminés à partir du comportement de la limite de la solution u et u est exprimée en terme du couple (K, ν) par la formule de représentation (1.4). Cette formule peut être étendue dans les dimensions élevées. Dans les domaines bornés et réguliers de grandes dimensions, des solutions positives sont bornées par une fonction harmonique(pour la dimension $d = 2$, ces solutions correspondent aux couples (K, ν) où $K = \emptyset$). Dans les grandes dimensions, il peut exister des différentes solutions correspondant au même couple (K, ν).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dellacherie C.,Meyer P.A. : *Probabilités et Potentiel.* Chapitres I à IV, Edition entièrement refondue, Publication de l'institut de mathématique de l'université de Strasbourg,XV.

[2] Dynkin E.B. : *A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations.* Probability Theory and Related Fields, 89, 89-115, 1991.

[3] Harison V. : *Cours de probabilité de l'A.E.A.* Université d'Antananarivo, Madagascar, Département de Mathématiques et d'Informatique, 2006-2007.

[4] Le Gall J.F. : *A path-valued Markov processes and its connections with partial differential equations.* Proc. First European Congress of Mathematics, Vol. II, 185-212, Boston : Birkhäuser, 1994.

[5] Le Gall J.F. : *A Probabilistic Poisson Representation for Positive Solutions of* $\Delta u = u^2$ *in a Planar Domain.* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.L, 0069-0103, 1997.

[6] Le Gall J.F. : *Hitting probabilities and potential theory for Brownian path-valued process.* Annales de l'Institut Fourier, 44, 277-306, 1994.

[7] Le Gall J.F. : *The Brownian snake and solutions of* $\Delta u = u^2$ *in a domain.* Probability Theory and Related Fields, 102, 393-432, 1995.

RESUME

Nous utilisons le processus stochastique appelé serpent brownien pour déterminer les solutions d'une équation différentielle partielle $\Delta u = u^2$ dans un domaine plan D de classe C^2. Nous montrons que des solutions positives sont en correspondance bijective avec les couples (K, ν) où K est un sous-ensemble fermé de ∂D et ν est une mesure de Radon sur $\partial D \backslash K$. D'une part, K et ν sont déterminés à partir du comportement de la limite de la solution u. D'autre part, u peut être exprimée en terme du couple (K, ν) par une représentation probabiliste explicite de la formule entraînant le serpent brownien.

MOTS-CLES : serpent brownien, équation différentielle stochastique, mesure de Radon

ABSTRACT

We use the stochastic process called the brownian snake to investigate solutions of the partial differential equation $\Delta u = u^2$ in a domain D of class C^2 of the plane. We prove that nonnegative solutions are in one-to-one correspondence with pairs (K, ν) where K is a closet subset of ∂D and ν is a Radon measure on $\partial D \backslash K$. Both K and ν are determined from the boundary behavior of the solution u. On the other hand, u can be expressed in terms of the pair (K, ν) by an explicit probabilistic representation formula involving the brownian snake.

KEY WORDS : brownian snake, stochastic differential equation, Radon measure

RASOLOFONDRAINIBE

Lafiarizaka Volana

Helinirina Tiana

helinirina@gmail.com

HARISON Victor

vharison@gmail.com