

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et d'Informatique



Mémoire pour l'obtention du
Diplôme d'Etudes Approfondies de Mathématiques Pures

OPTION : Analyse Harmonique

CONVERGENCE ET DIVERGENCE DES SERIES
TRIGONOMETRIQUES GENERALES

Soutenue par : ANDRIANJAFINITSIRY Nirina Jean Narlys
le : 19 Janvier 2006

Devant la Commission d'Examen formée de

Président :

Monsieur RANDRIANARIVONY Arthur, Professeur à l'Université d'Antananarivo

Rapporteur :

Monsieur RAJOELINA Michel, Professeur titulaire à l'Université d'Antananarivo

Examineur :

Monsieur RAOSOAMIARAMANANA Daniel, Maître de Conférence à
l'Université d'Antananarivo

REMERCIEMENTS

C'est un plaisir de pouvoir exprimer ici ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué de façon directe ou indirecte à l'élaboration de ce travail.

-Tout d'abord, je remercie mon rapporteur, Monsieur Michel RAJOELINA, Professeur titulaire à l'Université d'Antananarivo, de m'avoir laissé une grande liberté dans mes activités de recherche tout en me donnant, avec disponibilité, les moyens nécessaires aussi bien scientifiques que matériels. Je suis sensible aux nombreux conseils et commentaires qu'il m'a donnés tout au long de ces années.

-Je suis, de plus, enchanté de la présence de Monsieur Daniel RASOAMIARAMANANA, Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo, parmi les membres du jury.

-Je remercie, Monsieur Arthur RANDRIANARIVONY, Professeur à l'Université d'Antananarivo, par l'intérêt qu'il m'a porté et par les questions qu'il m'a posées, a motivé une grande partie de ces travaux. Je l'en remercie chaleureusement et je suis flatté qu'il ait présidé ce jury.

-Je remercie, bien sûr, ma famille, mes proches et surtout mes formidables parents pour leurs encouragements et pour toutes ces choses qu'ils m'ont données sans compter.

-Je remercie également mes amis de DEA, Paul Andrée RAZAFIMANDIMBY et Rija Fidèle FANIRIANTSOA, pour tous les échanges de réflexions que nous avons eus et dont les apports ne me sont que bénéfiques.

-Pour terminer, je voudrais présenter mes excuses à toutes les personnes que j'ai oubliées de citer ici. J'espère qu'elles me le pardonneront un jour...

Table des matières

INTRODUCTION

Les séries trigonométriques constituent un des outils de base en analyse. De nombreux auteurs se sont mis à étudier les conditions sous lesquelles une série trigonométrique donnée est un développement en série de Fourier d'une fonction au début du siècle dernier. Toutefois, beaucoup de problèmes ont été rencontrés à cette époque sur la convergence de ces séries.

Le premier d'entre eux concerne sur l'existence des séries trigonométriques divergentes et dont les coefficients tendent vers zéro : On a montré que si une série trigonométrique converge alors ses coefficients tendent vers zéro. Par contre, l'existence des séries trigonométriques divergentes et qui ont des coefficients tendant vers zéro est douteuse et Fatou a posé la question : Est ce qu'une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro devrait-elle converger ?

La réponse est négative puisqu'en 1911, Lusin a réussi à construire une. De nombreux auteurs ont suivi comme Steinhilber et Kolmogoroff mais ce problème n'est entièrement résolu qu'avec l'étude des vitesses auxquelles les coefficients d'une telle série tendent vers zéro par Neder et Stechkin.

Un deuxième problème touche les ensembles des points de convergence des séries trigonométriques dont les coefficients ne tendent pas vers zéro. Viola a montré que si nous considérons une série trigonométrique de la forme $\sum r_n \cos(nx + \alpha_n)$ telle que

$r_{n_k} > a > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) ; alors

-si $n_{k+1} - n_k < C$ ($k = 1, 2, \dots$) , l'ensemble de points où la série converge est au moins fini.

-et si, $n_{k+1} / n_k < C$ $k+1 \leq n_k < C$, cet ensemble est au plus dénombrable.

En résumé, on savait seulement qu'un tel ensemble devrait être de première catégorie, donc de mesure nulle. Plus tard, tous les ensembles de mesure nulle seront divisés en ceux sur lesquels convergent des séries trigonométriques sans que ses coefficients tendent vers zéro (on les appelle les $\mathfrak{N}$ -ensembles) et ceux où ceci est impossible.

Le présent exposé, tiré du livre écrit par Nina (Karl) Bary(chapitre XII) et dont le titre est « A treatise on trigonometric series » et qui fut traduit et réédité en 1964, est entièrement consacré à la résolution de ces deux problèmes et sera divisé en trois chapitres :

-le chapitre I nous donne les notions utiles pour la compréhension de ce travail.

- dans le chapitre II, il sera question d'étudier les taux auxquels les coefficients d'une série trigonométrique divergente tendent vers zéro et de la divergence sur un ensemble de seconde catégorie.

- le chapitre III est totalement consacré aux études des ensembles de points de convergence d'une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro (les $\mathfrak{N}$ -ensembles).

1. NOTIONS DE MESURE ET DE TOPOLOGIE

1.1 Un théorème sur la mesure de Lebesgue.

Notation. Dans tout ce qui suit, m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 Considérons un sous-ensemble mesurable E de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de E . Nous

dirons que x_0 est un point de densité de E si $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap]x_0 - r, x_0 + r[)}{2r} = 1$.

Comme conséquence de cette définition, si x_0 est un point de densité de E , alors pour un $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $r_\varepsilon > 0$ tel que

$$m(E \cap]x_0 - r, x_0 + r[) > 2r(1 - \varepsilon) \text{ pour } 0 < r \leq r_\varepsilon$$

Concernant le point de densité, nous avons le théorème de Lebesgue que nous admettrons:

Théorème 1.2 *Tous les points d'un ensemble mesurable sont points de densité de cet ensemble, sauf peut-être les points formant un ensemble de mesure nulle.*

1.2 Notions de topologie.

Soient un espace topologique (X, τ) et A un sous-ensemble de X ($A \subseteq X$).

Définition 1.3 - A est rare si l'adhérence $\overline{A}$ est d'intérieur vide.

- A est un sous-ensemble de première catégorie ou maigre si A est une réunion dénombrable de sous-ensembles rares.
- Si A n'est pas de première catégorie, on dit qu'il est de seconde catégorie.
- Le complémentaire d'un sous-ensemble de première catégorie est appelé un ensemble résiduel.

1.3 Ensembles parfaits symétriques.

Définition 1.4 - Une partie C d'un espace topologique (X, τ) est parfait si tout point de C est un point d'accumulation de C .

- Un ensemble E est de type M -ensemble (ensemble de multiplicité) s'il existe une série

- Si E n'est pas un M -ensemble, nous l'appellerons un U -ensemble (ensemble d'unicité).

Définition 1.5 Dans le présent exposé, nous allons considérer un ensemble parfait symétrique obtenu comme suit : de l'intervalle initial $\rho_0 = [0, 2\pi]$, on enlève l'intervalle central de longueur $\delta^{(1)}$ et les deux intervalles restants ont une même longueur égale à $\rho^{(1)}$; nous enlevons de chacun d'eux un intervalle central de même longueur $\delta^{(2)}$ et les 4 segments restants de longueur $\rho^{(2)}$, ...; à la k -ième étape, nous enlevons de chacun des 2^{k-1} intervalles de longueur $\rho^{(k-1)}$ un intervalle central de longueur $\delta^{(k-1)}$ et il reste 2^k segments de longueur $\rho^{(k)}$, etc.

Si $2^k \rho^{(k)} \rightarrow 0$, alors l'ensemble symétrique obtenu est de mesure 0.

Notons par $\xi_k = \rho^{(k+1)} / \rho^{(k)}$ et par $\lambda_k = \delta^{(k)} / \rho^{(k-1)}$, on a : $\rho^{(k+1)} = \frac{\rho^{(k)} - \delta^{(k+1)}}{2}$,

C'est-à-dire

$$\xi_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^{(k+1)}}{\rho^{(k)}} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_{k+1})$$

Théorème 1.6 Si $\lambda_k \rightarrow 0$, alors E est un M -ensemble.

Définition 1.7 Lorsque $\xi_k = \xi$ ($k = 1, 2, \dots$), l'ensemble obtenu est appelé un ensemble parfait avec rapport constant.

Exemple 1 (Ensemble parfait de Cantor). Nous donnons ici deux manières de construction de cet ensemble :

-Premièrement, en prenant $\xi_k = \frac{1}{3}$, on a l'ensemble de Cantor sur $[0, 2\pi]$.

-Une deuxième façon de le construire est la suivante :

Sachant que l'ensemble de Cantor sur $[0, 2\pi]$ est l'image de l'ensemble triadique de Cantor sur $[0, 1]$ par l'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ définie par : $f(t) = 2\pi t$.

Nous allons donner certaines propriétés de ce dernier que nous utiliserons plus tard.

Pour $I = [a, b]$ ($a < b$) un segment de $\mathbb{R}$, nous noterons par I' , le segment $\left[a, a + \frac{(b-a)}{3} \right]$; par I'' , le segment $\left[b - \frac{(b-a)}{3}, b \right]$ (autrement dit, I' et I'' sont deux intervalles restant après avoir enlevé l'intervalle central de I de longueur $\frac{1}{3}$).

Considérons l'intervalle initial $I_0 = [0, 1]$ et notons $I_0 = I' = \left[0, \frac{1}{3} \right]$ et $I_1 = I'' = \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$. Puis, notons par I_{00} l'intervalle I_0' , I_{01} l'intervalle I_0'' , I_{10} l'intervalle I_1' , I_{11} l'intervalle I_1'' , et ainsi de suite.

Par récurrence, pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, posons $I_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0)} = I'_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$ et $I_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1)} = I''_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$

On pose alors $F_0 = I = [0, 1]$, $F_1 = I_0 \cup I_1$ et plus généralement, pour $n \geq 1$, posons

$$F_n = \bigcup_{\varepsilon \in \{0, 1\}^n} I_\varepsilon,$$

On vérifie facilement que (F_n) est une suite décroissante de compacts non vides de $[0, 1]$. On en déduit que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un compact non vide (théorème de segments emboîtés dans $[0; 1]$): C est appelé l'ensemble triadique de Cantor.

Théorème 1.8 (quelques propriétés de C). - Les extrémités des I'' sont dans C .

- C est d'intérieur vide, donc totalement discontinu.

- La mesure de Lebesgue de C est nulle.

- C est égal à l'ensemble des sommes des séries de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n} \text{ où } a_n \in \{0, 2\}$$

Démonstration. - Puisque $(F_n)_n$ est une suite décroissante d'intervalles, il suffit de vérifier que pour un entier $n \geq 1$ et un $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$ donnés, les extrémités de I'' appartiennent à F_{n+k} pour tout entier k .

Soit $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$; $I_\varepsilon \subset F_n$ par construction. Notons $I_\varepsilon = [a, b]$; on voit que a est extrémité de

$$I'_\varepsilon = I_{\varepsilon,0} = \left[a, a + \frac{b-a}{3} \right] \text{ et } b \text{ est extrémité de } I''_\varepsilon = I_{\varepsilon,1} = \left[b - \frac{b-a}{3}, b \right].$$

a et b sont donc des extrémités d'un I_ζ avec $I_\zeta \in \{0, 1\}^{n+1}$; par suite $a, b \in F_{n+1}$. Une récurrence élémentaire montre

alors que a et b appartiennent à tous les F_{n+k} pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc dans $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{n+k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = C$.

- Considérons x , un élément de C . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\subset C$. Si

$\varepsilon \in \{0, 1\}^n$, le diamètre de I'' est $\frac{1}{3^n}$. Choisissons un entier naturel N tel que $\frac{1}{3^N} < \alpha$; il existe

$\varepsilon \in \{0, 1\}^N$ tel que $x \in I_\varepsilon$ (puisque $x \in F_N$) et comme

$\text{diam } I_\varepsilon < \alpha$, on a donc $I_\varepsilon \subset]x - \alpha, x + \alpha[\subset C$. Ainsi $I_\varepsilon \setminus (I'_\varepsilon \cup I''_\varepsilon) \subset C$, ce qui constitue une contradiction. Donc C est d'intérieur vide.

- Si m désigne la mesure de Lebesgue, on a : $m(F_n) = 2^n \times \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$; Comme $m(C) \leq m(F_n)$, pour

tout entier n , on déduit par passage à la limite que $m(C) = 0$.

- La démonstration de la dernière partie de notre théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 1.9.

$$I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n} = \left[\sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right].$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$: pour $n=1$, $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ et $I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ et la

propriété est vérifiée. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 1$. Notons

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} \text{ et } \beta = \sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^n};$$

On peut alors écrire:

$$I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n 0} = \left[\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3} \right] = \left[\sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \right], \text{ car } \varepsilon_{n+1} = 0 \text{ et}$$

$$I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n 1} = \left[\beta - \frac{\beta - \alpha}{3}, \beta \right] = \left[\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3}, \beta \right] = \left[\sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{2}{3^{n+1}}, \sum_{k=1}^n \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \right]$$

et comme $\varepsilon_{n+1} = 1$ et $\frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}$, on en déduit que :

$$I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n 1} = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \right]$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Maintenant, nous sommes en mesure de montrer la dernière partie de notre théorème:

Posons $C' = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{3^n} / a_n \in \{0, 2\} \right\}$ et montrons que $C' = C$. Considérons un élément x

de C' et $N \geq 1$ fixé. On a :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{2\varepsilon_n}{3^n} + y$$

où l'on a posé $\varepsilon_n = \frac{a_n}{2} \in \{0, 1\}$ et $y = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. On vérifie alors que :

$$0 \leq y \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^N}$$

et donc que $x \in I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N}$ d'après le lemme. Ainsi $x \in F_N$ pour tout entier N non nul, et par suite $x \in C$. On a donc $C' \subset C$.

Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que si un élément x de $[0 ; 1]$ n'appartient pas à C' alors il n'est pas dans C .

Considérons x un tel élément. Déjà x est distinct de 1 car $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \in C'$.

Le développement triadique de x permet d'écrire:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0, 1, 2\}$$

la suite (a_n) ne stationne pas à 2 à partir d'un certain rang.

Puisque $x \notin C'$, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $a_n = 1$.

Posons alors N le plus petit entier tel que $a_N = 1$.

On peut alors écrire:

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad (\text{si } N=1, \text{ la première somme est nulle})$$

Posons $y = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$

On vérifie comme précédemment que:

$$0 \leq y \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^N}$$

En fait, $0 < y$, sinon on aurait :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \end{aligned}$$

et donc x appartient à C' , ce qui contredit l'hypothèse de départ. Par ailleurs $y < \frac{1}{3^N}$ car la suite

(a_n) ne stationne à 2 à partir d'un certain rang. On a donc :

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} + y \quad \text{avec } 0 < y < \frac{1}{3^N}$$

- Si $N = 1$, on a $x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$ et donc $x \notin C$.

- Si $N > 1$, comme $\frac{1}{3^N} + y < \frac{2}{3^N} \leq \frac{1}{3^{N-1}}$, on a donc:

$$x \in I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{N-1}} = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^{N-1}} \right].$$

$$\text{Mais } x \notin I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{N-1} 0} = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^N} \right] \quad (\text{car } y > 0)$$

$$\text{puis } x \notin I_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{N-1} 1} = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{2}{3^N}, \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k} + \frac{2}{3^N} + \frac{1}{3^{N+1}} \right] \quad (\text{car } y < \frac{1}{3^N}); \text{ d'où } x \notin C.$$

En prenant l'ensemble $f(C)$, image de C par la fonction f , on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.10 - Les éléments de l'ensemble P , ensemble de Cantor construit sur

l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont de la forme $2\pi \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n \in \{0, 2\}$

- En notant par P_k , l'ensemble des éléments x de la forme $x = ky$ où $y \in P$, on a: $P_{3^k} = P$ pour tout entier k .

- L'intervalle $\left] \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right[$ est le plus grand intervalle contenu dans $[0, 2\pi]$ ne contenant pas des éléments de P .

Démonstration. La première et la troisième partie de cet énoncé sont évidentes puisque f est une application bijective et que la suite (F_n) est décroissante.

Pour la seconde partie, il suffit de voir que

$$P_{3^k} = \left\{ 3^k \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2\pi a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \right\} = \left\{ 2\pi \sum_{n \geq k} \frac{2\pi a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \right\} = P$$

1.4 Théorème de Minkowski en géométrie de nombres

1.4.1 Notions préliminaires

Dans cette section, $GL(n, \mathbb{i})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et ayant des déterminants non nuls, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{i}^n$, alors $(x)_i$ est la i -ème composante de x .

1.4.2 Approximation simultanée de réels par des rationnels.

Remarque 1.11 Cette section est un résumé des résultats de [Cas57].

Avant tout, établissons le lemme suivant :

Lemme 1.12 Soit x un irrationnel positif. Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'entiers naturels telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$$

Démonstration. Si x est un nombre irrationnel, alors pour tout entier naturel non nul n ,

$d\left(x, \frac{1}{n}\mathbb{Q}\right) > 0$, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle de longueur $l_n > 0$, centré en x ne

contenant aucun rationnel de la forme $\frac{p}{n}$.

Soit N un entier naturel. L'intervalle centré en x , de longueur $\min_{n \leq N} l_n$, ne contient alors

aucun rationnel de dénominateur inférieur ou égal à N . Mais comme la suite $\frac{p_n}{q_n}$

tend vers x , tous ses termes sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang. Autrement dit, à partir d'un certain rang, tous les dénominateurs q_n sont plus grands que N .

On a montré que :

Pour tout entier N , il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $q_n \geq N$

c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$.

Théorème 1.13 (Minkowski) Soit $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Supposons donnés des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

vérifiant $\prod_{j=1}^n \lambda_j \geq |\det A|$. Alors il existe $x \in \mathbb{Q}^n - 0$ (c'est-à-dire que x est un vecteur dont les éléments

sont des entiers relatifs non tous nuls) tel que

$$|(Ax)_i| \leq \lambda_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Démonstration. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.14 Etant donnée dans l'espace euclidien à n dimension, $\mathbb{R}^n$, un corps convexe X admettant l'origine des coordonnées comme centre de symétrie et tel que son volume V soit strictement supérieur à 2^n et fini. Il existe dans X au moins un point à coordonnées toutes entières, distinct de l'origine.

Démonstration. Nous désignerons dans tout ce qui suit, par x un point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de

$\mathbb{R}^n$ et par z un point $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Soit $f(x)$ une fonction de carré sommable, nulle hors de X ; considérons la fonction

$$F(x) = \sum_{z \in \mathbb{C}^n} f(2x + 2z)$$

Cette somme est finie puisque $f(2x + 2z) = 0$ si $2x + 2z \notin C$ et que le volume de V est fini. La fonction $F(x)$ admet la période 1 par rapport à chaque composante x_j . Elle est développable en série de Fourier n-uplet

$$F(x) \approx \sum_{l \in \mathbb{C}^n} c_l e^{2\pi i \langle l, x \rangle}$$

où $\langle l, x \rangle$ est le produit scalaire $l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n$ du vecteur x par le vecteur à coordonnées entières l , le coefficient c_l étant donné par

$$c_l = \int_T F(x) e^{-2\pi i \langle l, x \rangle} dx$$

l'intégrale multiple étant prise dans le tore unité T et $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

En particulier

$$c_0 = \int_T F(x) dx = \sum_{z \in \mathbb{C}^n} \int_T f(2x + 2z) dx = \int_{\mathbb{C}^n} f(2x) dx = \frac{1}{2^n} \int_C f(x) dx$$

D'autre part, l'égalité de Parseval donne

$$\begin{aligned} \sum_l |c_l|^2 &= \int_T |F(x)|^2 dx = \int_T \sum_{z \in \mathbb{C}^n} \sum_{z' \in \mathbb{C}^n} f(2x + 2z) + \overline{f(2x + 2z')} dx \\ &= \sum_{z \in \mathbb{C}^n} \sum_{z' \in \mathbb{C}^n} \int_T f(2x + 2z) + \overline{f(2x + 2z')} dx \end{aligned}$$

Remarquons que pour que l'on ait $f(2x + 2z) \overline{f(2x + 2z')} \neq 0$ il faut que $2x + 2z \in C$ et $2x + 2z' \in C$, c'est-à-dire, à cause de la symétrie de C

$$\begin{aligned} x + z &\in C \\ -x - z' &\in C \end{aligned}$$

d'où, en vertu de la convexité de C , $z - z' \in C$.

S'il n'existe pas dans C des points à coordonnées entières distincts de l'origine, alors

$$\sum_{z \in \mathbb{C}^n} \sum_{z' \in \mathbb{C}^n} \int_T f(2x + 2z) + \overline{f(2x + 2z')} dx = \sum_{z \in \mathbb{C}^n} \int_T |f(2x + 2z)|^2 dx$$

$$\int_X |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2^n} \int_C |f(x)|^2 dx.$$

car $x+z \in C$ et $x+z' \in C$ implique $z = z'$.

Supposons maintenant que C ne contienne aucun point z à coordonnées entières distinct de l'origine et choisissons pour f la fonction caractéristique de C . Nous aurons, en (1.1), (1.2) et (1.3)

$$c_o = \frac{V}{2^n}$$

$$\text{c'est-à-dire } \sum c_i^2 = \frac{V}{2^n}$$

ou, encore, en désignant par S la somme $\sum' c_i^2$, (l'accent signifiant que c_o^2 est exclu de la somme)

$$\frac{V}{2^n} = \left(\frac{V}{2^n} \right)^2 + S$$

Comme $S \geq 0$, nous obtenons $V \leq 2^n$ et qui contredit $V > 2^n$.

Ainsi, si C est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ admettant l'origine des coordonnées comme centre de symétrie et tel que $V > 2^n$. Alors il existe dans C deux points distincts

$x_1 = x + z$ et $x_2 = x + z'$ tels que $x_1 - x_2 = z - z' \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$.

Revenons-en au théorème. Considérons l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |(Ax)_i| < \lambda_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Ce domaine est convexe et symétrique par rapport à l'origine. Son volume est donné par

$$V = \int_C dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

En posant $y = Ax$, on a

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_i^k x_k \text{ si } A = (a_{ij})_{(1 \leq i, j \leq n)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } V &= \int_{-\lambda_i \leq y_i \leq \lambda_i} \left| \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|^{-1} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \frac{2^n}{|D|} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Mais $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \geq |D|$ par hypothèse. Alors, $V \geq 2^n$ et il en résulte l'existence des $z_1, z_2, \dots, z_n$ entiers

non tous nuls vérifiant les inégalités $|(Ax)_i| \leq \lambda_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$.

Le théorème de Minkowski est ainsi démontré.

Pour x et y dans $\mathbb{I}^n$, nous poserons

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

La première conséquence simple du théorème de Minkowski est la suivante :

Théorème 1.15 Pour tout $y \in \mathbb{I}^n$, il existe une infinité de $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que

$$\|qy + p\|^n |q| < 1$$

pour un certain $p \in \mathbb{C}^n$.

Par conséquent, si y_i désigne la i -ème composante de y et p_i celle de p , on a :

$$\begin{aligned} |qy_i + p_i| &\leq \|qy + p\| \\ \text{donc } |qy_i + p_i|^n \cdot |q| &< 1 \\ \text{soit } \left| y_i + \frac{p_i}{q} \right| &< \frac{1}{|q|^{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

(C'est le résultat qui nous intéresse le plus).

Démonstration. Fixons $N \geq 2$, et considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & I_n \end{pmatrix}$, où I_n

désigne la matrice unité d'ordre n et $y \in \mathbb{I}^n$.

Le déterminant de A vaut 1. En posant $\lambda_1 = N^n$ et pour $2 \leq i \leq n+1$, $\lambda_i = \frac{1}{N}$.

Alors, par construction, $\prod_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1 \geq |\det A|$ et nous sommes donc dans les conditions

d'application du théorème de Minkowski, qui nous donne un vecteur x de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$|(Ax)_1| \leq N^n \text{ et pour tout } 2 \leq i \leq n+1, |(Ax)_i| \leq \frac{1}{N}.$$

Si l'on appelle $q^{(N)}$ la première composante de x et $p^{(N)}$ le vecteur colonne de longueur n composé des coordonnées restantes de x , on a :

$$(Ax)_1 = q^{(N)} \text{ et pour tout } i, (Ax)_{i+1} = q^{(N)} y_i + p_i^{(N)}.$$

On a donc construit $q^{(N)} \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $p^{(N)} \in \mathbb{C}^n$ tels que $\|q^{(N)} y + p^{(N)}\| < \frac{1}{N}$ et

- 10 -

$$|q^{(N)}| \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ et } p^{(N)} \in \mathbb{C}^n.$$

Le résultat suit en remarquant que, soit y est à coordonnées rationnelles et le résultat est trivial, soit nécessairement : $\left|q^{(N)}\right| \rightarrow \infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$ d'après le lemme 1.12

SECONDE CATEGORIE.

2.1 Les coefficients des séries trigonométriques divergentes.

Après la construction des premières séries trigonométriques ayant des coefficients tendant vers zéro mais qui sont presque partout divergentes ou partout divergentes, de nombreux auteurs ont étudié le problème du taux auquel les coefficients d'une telle série tendent vers zéro.

Le premier d'entre eux, Kuz'min a estimé les coefficients de la série entière de Lusin et a trouvé qu'ils sont d'ordre $O(n^{1/6})$.

Puis, des auteurs (voir par exemple, Kuz'min, Hardy et Littlewood), ont construit des séries entières tendant rapidement vers zéro et qui divergent en tout point du cercle unité.

Finalement, Neder a prouvé le théorème général suivant :

Théorème 2.1 (Neder). *Quelle que soit la suite de nombres positifs α_n , pourvu que α_n tende vers 0 de manière monotone et $\sum \alpha_n^2 = \infty$, il existe une série entière $\sum c_n z^n = \infty$ avec des coefficients $c_n = O(\alpha_n)$ et divergeant en tout point du cercle $|z| = 1$.*

Nous donnons ce théorème sans preuve, puisque nous allons prouver le théorème de Stechkin duquel le théorème de Neder dérive et qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.2 (Stechkin). *Quelle que soit la suite de nombres positifs α_n , pourvu que $\alpha_n \rightarrow 0$ de manière monotone et $\sum \alpha_n^2 = \infty$, il existe une paire de séries trigonométriques conjuguées avec des coefficients*

$$a_n = O(\alpha_n), \quad b_n = O(\alpha_n) \quad (2.1)$$

et qui divergent en tout point.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de 2 lemmes :

Lemme 2.3. *Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum \alpha_n^2 = \infty$.*

Alors, il existe une suite d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{aligned} (1) \quad & p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq p_{n+1} \leq \dots, \\ (2) \quad & \frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n}, \text{ où } N_n = \sum_{k=1}^n p_k, \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous procéderons par récurrence :

Supposons que $N_0 = 0$, et que $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$ sont déjà définis ; nous choisirons N_n tel que c'est le plus petit entier naturel vérifiant l'inégalité : $(N_n - N_{n-1})\alpha_{N_n} > 1$,

Un tel entier N_n devrait exister car si on avait pour tout $N > N_{n-1}$: $(N - N_{n-1})\alpha_N \leq 1$,

alors $\alpha_N = O(\frac{1}{N})$ et ensuite $\sum \alpha_n^2 < \infty$ qui contredit l'hypothèse du théorème.

Ainsi

$$(N - N_{n-1})\alpha_{N_n} \leq 1 \text{ si } N_{n-1} \leq N \leq N_n \quad (2.2)$$

$$(N_n - N_{n-1})\alpha_{N_n} > 1, \text{ pour } n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Posons $p_n = N_n - N_{n-1}$, on a donc :

$$N_n = \sum_{k=1}^n p_k,$$

et nous allons prouver que ces nombres p_n vérifient les conditions du lemme.

Puisque les N_n sont des entiers, les p_n le sont aussi ; Nous avons de (2.3)

$$p_n \alpha_{N_n} > 1$$

$$\frac{1}{p_n} < \alpha_{N_n}$$

et la deuxième condition du lemme est vérifiée

De (2.2), il s'en suit que

$$(N_n - 1 - N_{n-1})\alpha_{N_n} \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$(p_n - 1)\alpha_{N_n} \leq 1, \quad (2.4)$$

et de la décroissance monotone de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$(p_n - 1)\alpha_{N_{n+1}} \leq 1$$

et de plus

$$(p_{n+1})\alpha_{N_{n+1}} > 1,$$

ce qui veut dire que $p_{n+1} > p_n - 1$, c'est-à-dire $p_{n+1} \geq p_n$ et la première condition du lemme est vérifiée.

Il reste à montrer la divergence de la série $\sum \left(\frac{1}{p_n} \right)$

De (2.4), il s'en suit que

$$p_n \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_1 = C$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{N_n} \leq \frac{C}{p_n} \quad (2.5)$$

Ceci est dû à la décroissance de la suite (α_n) .

Nous allons déduire la divergence de la série $\sum \frac{1}{p_n}$ de celle de la série $\sum \alpha_n^2$.

Posons:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 \\ S_2 &= \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

De la décroissance monotone de la suite (α_k) et de l'inégalité (2.5), on a :

$$S_1 \leq p_n \alpha_{N_n}^2 \leq p_n \frac{C^2}{p_n^2} \leq \frac{C^2}{p_n} \quad (2.7)$$

Et de (2.2), on a :

$$S_2 = \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 \leq \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \frac{1}{(N - N_n)^2}$$

En posant $k = N - N_n$, on a :

$$N_n + p_n \leq N \leq N_{n+1} - 1 \Leftrightarrow p_n \leq k = N - N_n \leq N_{n+1} - N_n - 1 = p_{n+1} - 1$$

Donc :

$$\sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \frac{1}{(N - N_n)^2} = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^2}$$

Mais

$$\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=p_n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{p_n} \quad (2.8)$$

Ainsi, de (2.6), (2.8), (2.7), on a :

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 = S_1 + S_2 \leq \frac{K}{p_n}$$

Avec $K = C + 3$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{N=N_n+1}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 = +\infty$$

Ainsi le lemme 1 est prouvé.

Avant de prouver un deuxième lemme, introduisons de nouveau terme :

Nous appellerons tout polynôme de la forme

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k \cos(kx + \varphi) \text{ tels que } 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1$$

une "section" du polynôme trigonométrique $Q_p(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} \rho_k \cos(kx + \varphi)$

Lemme 2.4 Soit $p \geq 24$. Pour tout x satisfaisant

$$\frac{\pi}{p} \leq x \leq \frac{3\pi}{p}, \quad (2.9)$$

on peut trouver une section du polynôme

$$D_p(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos(kx + \varphi),$$

telle que :

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48} \quad (2.10)$$

(ici k_1 et k_2 dépendent de x et de φ)

Démonstration.

Posons $x = \frac{\alpha}{p}$, donc $\pi \leq \alpha \leq 3\pi$

Posons $\psi_k = kx + \varphi$. Lorsque k prend les valeurs $0, 1, \dots, p-1$; les $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ s'accroissent de φ à $\varphi + (p-1)\alpha/p$ et la longueur des intervalles $[k; k+1]$ est α/p .

Puisque $p \geq 24$ et $\pi \leq \alpha \leq 3\pi$ selon les hypothèses du lemme, alors

$$\frac{(p-1)}{p} \alpha \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \pi \geq \left(1 - \frac{1}{24}\right) \pi = \frac{23}{24} \pi$$

donc, le segment $[\psi_0, \psi_{p-1}] = [\varphi, \varphi + (p-1)\alpha/p]$ est de longueur supérieure ou égale à

$$\frac{23}{24} \pi \text{ (puisque'il a une longueur } \frac{(p-1)}{p} \alpha \text{).}$$

De ceci, il est clair que, quelle que soit la valeur de α , le segment $[\varphi, \varphi + (p-1)\alpha/p]$ contient des segments notés I_+ (resp. notés I_-) de longueur $\pi/4$ sur lesquels $\cos(\psi) \geq 1/2$ (resp. sur lesquels $\cos(\psi) \leq -1/2$) et même les deux segments I_+ et I_- . Supposons qu'il contient I_+ (on fera le même raisonnement dans le cas où il contient I_-).

Notons par k_1 (resp. par k_2) le plus petit (resp. le plus grand) des nombres k pour lesquels $\psi_k \in I_+$. Puisque la distance entre les points extrémités k est égale à $\alpha/p \leq 3\pi/p$ et $p \geq 24$, alors, le segment I_+ de longueur $\pi/4$ contient aux moins :

$$\left[\frac{\pi}{4} : \frac{\alpha}{p} \right] \geq \left[\frac{\pi}{4} : \frac{3\pi}{p} \right] \geq \left[\frac{p}{12} \right] \geq \frac{p}{24}$$

(où $[x]$ désigne la partie entière de x) de points ψ_k . Notons par k_1 le plus petit et par k_2 le plus grand des nombres k pour lesquels $\psi_k \in I_+$.

Dans ce cas, les $\psi_{k_1}, \psi_{k_1+1}, \dots, \psi_{k_2}$ appartiennent tous à I_+ et on a :

$$k_2 - k_1 + 1 \geq \frac{p}{24} \quad (2.11)$$

(et de plus, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1$).

On a :

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \psi_k$$

Puisque tous les $\cos(\psi_k) \geq 1/2$ pour tous k (car $k \in I_+$), donc :

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \geq \frac{1}{2}(k_2 - k_1 + 1) \geq \frac{p}{48}$$

en vertu de (2.11). Si nous avons I_- au lieu de I_+ , nous obtiendrons

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \leq -\frac{p}{48}$$

et dans tous les cas, on a :

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48}$$

et le deuxième lemme est démontré.

Considérons les polynômes trigonométriques conjugués

$$T_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos[(N+k)x - k\gamma]$$

$$Q_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin[(N+k)x - k\gamma]$$

Puisqu'il est possible de les mettre sous la forme

$$T_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos[k(x - \gamma) - Nx] = D_p(x - \gamma, Nx)$$

$$\begin{aligned} Q_{N,p}(x, \gamma) &= \sum_{k=0}^{p-1} \sin[k(x - \gamma) - Nx] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \cos\left[k(x - \gamma) - Nx - \frac{\pi}{2}\right] = D_p\left(x - \gamma, Nx - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous avons :

Corollaire 2.5 (Corollaire du lemme 2.4) Soit $p \geq 24$. Pour tout x satisfaisant l'inégalité

$$\frac{\pi}{p} \leq x - \gamma \leq \frac{3\pi}{p}, \text{ C'est-à-dire } \left| x - \gamma - \frac{2\pi}{p} \right| \leq \frac{\pi}{p}, \quad (2.12)$$

On peut trouver des "sections" des polynômes $T_{N,p}(x, \gamma)$ et $Q_{N,p}(x, \gamma)$ telles que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos[(N+k)x - k\gamma] \right| &\geq \frac{p}{48} \\ \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sin[(N+k)x - k\gamma] \right| &\geq \frac{p}{48} \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons prouver le théorème 2.2 :

Ainsi, étant donnée la suite de nombres $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers zéro en décroissant et telle que

$$\sum \alpha_n^2 = \infty.$$

En se basant sur le lemme 2.3, nous pouvons trouver une suite p_n d'entiers naturels telle que

$$p_n \leq p_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \sum \frac{1}{p_n} = +\infty \text{ et } \frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n}, \text{ avec } N_n = \sum_{k=1}^n p_k.$$

Puisque $\alpha_N \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$, alors $p_n \rightarrow \infty$ (de manière monotone). De la définition des nombres N_n , il s'en suit que

$$N_{n-1} + p_n - 1 = N_n - 1 < N_n \quad (2.13)$$

Posons

$$\gamma_n = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} - 3\pi \frac{1}{p_n} \quad (2.14)$$

Considérons les séries

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} T_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n),$$

$$\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} Q_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n),$$

Nous allons prouver que ces deux séries sont conjuguées et qu'elles satisfont la condition du théorème 2.1.

En premier lieu, notons que ce sont des séries trigonométriques "normales" puisque

l'ordre du polynôme T_{N_{n-1}, p_n} est $N_{n-1} + p_n - 1$ et dû à (2.13), cet ordre est inférieur à celui du polynôme $T_{N_n, p_{n+1}}$ (de même pour le polynôme Q_{N_{n-1}, p_n}).

Les séries $S(x)$ et $\bar{S}(x)$ sont conjuguées car $T_{N, p}$ et $Q_{N, p}$ le sont pour toutes valeurs de N et de p .

Majorons les coefficients des séries $S(x)$ et $\bar{S}(x)$. De $N_{n-1} \leq N < N_n$, nous avons:

$$|a_N| \leq \frac{1}{p_n} \text{ et } |b_N| \leq \frac{1}{p_n}$$

Mais à cause de la décroissance de la suite (α_k) , on a:

$$\frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n} \leq \alpha_N \text{ pour } n = 1, 2, \dots \text{ et } N_{n-1} \leq N < N_n$$

c'est-à-dire $a_n = O(\alpha_n)$ et $b_n = O(\alpha_n)$

Il reste à montrer la divergence de ces séries. Nous prouverons celle de la série $S(x)$, puisque celle de $\bar{S}(x)$ se montre de la même façon.

Soit x_0 un point de $[0, 2\pi]$. Puisque la série $\sum (1/p_n)$ diverge, donc pour tout entier naturel l , on peut trouver un entier naturel n_l tel que

$$x_0/2\pi + l < \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k}$$

et puisque $(1/p_n) > 0$ pour tout n , on peut choisir n_l de manière à ce qu'on aurait

$$\sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} \leq x_0/2\pi + l < \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k}$$

c'est-à-dire

$$2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} \leq x_0 + l < 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k} \quad (2.15)$$

Il est clair que $n_l \rightarrow \infty$ lorsque $l \rightarrow \infty$.

Etablissons l'inégalité suivante

$$\left| x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - \frac{2\pi}{p_{n_l}} \right| \leq \frac{\pi}{p_{n_l}} \quad (2.16)$$

(c'est une inégalité de type (2.12)).

En effet, de (2.14), il vient

$$\gamma_{n_l} + \frac{2\pi}{n_l} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k} - \frac{\pi}{p_{n_l}} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} + \frac{\pi}{p_{n_l}} \quad (2.17)$$

En soustrayant $\gamma_{n_l} + \frac{2\pi}{n_l}$ de (2.15), on a:

$$-\frac{\pi}{p_{n_l}} \leq x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - \frac{2\pi}{p_{n_l}} \leq \frac{\pi}{p_{n_l}}$$

c'est-à-dire qu'on a l'inégalité (2.16).

En se basant sur le lemme 2.4, pourvu que p_{n_l} soit ≥ 24 , il serait possible de trouver une

''section'' du polynôme $T_{N_{n_l}, p_{n_l}}(x_0, \gamma_{n_l})$ telle que

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \left[(N_{n_l} + k) x_0 - k \gamma_{n_l} \right] \right| \geq \frac{p_{n_l}}{48}$$

d'où

$$\left| \frac{1}{p_{n_l}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \left[(N_{n_l} + k) x_0 - k \gamma_{n_l} \right] \right| \geq \frac{1}{48} \quad (2.18)$$

L'expression sous le signe valeur absolue de cette inégalité est une section de la série $S(x)$ en $x = x_0$.

Puisque pour tout entier l pour lequel $p_{n_l} \geq 24$ l'inégalité (2.18) a lieu et $p_{n_l} \rightarrow \infty$, donc on peut trouver une infinité de sections de la série $S(x)$ dont le module est supérieur ou

égal à $1/48$ en $x = x_0$, c'est-à-dire, la série $S(x)$ diverge en x_0 .

Remarque 2.6 En rapport avec le problème du taux auquel les coefficients des séries trigonométriques divergentes tendent vers zéro, il est naturel de se demander sur la régularité de leur décroissance. Dans le paragraphe-4 du chapitre-XI du livre de Nina Bari " A treatise on trigonometric series", il est montré qu'une série lacunaire dont les coefficients tendent vers zéro ne peut pas être partout divergente, c'est-à-dire, ce cas est impossible lorsque $a_m = b_m = 0$ pour tout m sauf si $m = n_k$, où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite lacunaire¹. Dans une publication, Kennedy a montré que dans un sens, la lacunarité n'est pas une condition suffisante ici. Plus précisément, le théorème suivant vient d'être prouvé:

Si $\Phi(t) \downarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, alors il existe une série partout divergente de la forme

$$\sum (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x), \text{ avec } \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 + \Phi(n_k).$$

2.2 Divergence sur un ensemble de seconde catégorie

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro en décroissant et $\sum \rho_n^2 = +\infty$, alors on peut trouver une série trigonométrique dont les coefficients sont d'ordre $O(\rho_n)$ et qui diverge en tout point du cercle unité.

Salem a posé le problème suivant : Considérons la série

$$\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n), \quad (2.19)$$

où les α_n sont des nombres donnés. Sous quelles conditions sur les ρ_n pouvons-nous dire que la série (2.19) converge partout, sauf, peut-être sur un ensemble de première catégorie quelle que soit la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Il semble qu'à part l'hypothèse triviale $\sum \rho_n < \infty$ (où la série (2.19) converge et même absolument convergente pour toutes valeurs de x), il est impossible de trouver d'autres conditions. De plus, Salem a montré le théorème suivant :

Théorème 2.7 Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\sum \rho_n^2 = +\infty$; il est toujours possible de choisir les nombres α_n tels que la série

$$\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n) \text{ diverge sur un ensemble de seconde catégorie.}$$

Démonstration. Pour simplifier le raisonnement, nous choisissons s_n afin qu'on ait une série de la forme

$$\sum r_n e^{2\pi i (nx - s_n)} \quad (2.20)$$

$$\sum \cos (n x-s_n) \quad \text { ou } \quad \sum \sin \left(n x-s_n\right)$$

Arrangeons toutes fractions de la forme p/q , où $0 \leq p \leq q$, en une forme de la table suivante

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \frac{0}{1} & & \frac{1}{1} & \\
 & & & & & & \\
 & & \frac{0}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} \\
 & & & & & & \\
 \cdots & & & & & & \\
 \frac{0}{p} & \frac{1}{p} & \frac{2}{p} & & \cdots & & \frac{p}{p} \\
 \cdots & & & & & &
 \end{array}$$
 $\varphi(0)$, le nombre d'occurrences de 0 $\varphi(1)$, le nombre d'occurrences de $\frac{0}{1}$ $\varphi(2)$, le nombre d'occurrences de $\frac{1}{1}$ $\varphi(3)$, le nombre d'occurrences de $\frac{0}{2}$

En suivant cette règle, il est aisé de voir que le nombre d'occurrences de la fraction $\frac{p}{q}$ est

$$\varphi \left(q(q+1)/2 + p \right). \text{ Posons}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Nous allons prouver que la série (2.19) construite de cette façon satisfait les conditions du théorème. Le nombre de termes m que la série $\sum u_n$ contiendra, avant d'arriver à u_n qui coïncide avec la fraction p/q est

$$m = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p - 1\right] \quad (2.21)$$

Ainsi, il y a $\varphi(q(q+1)/2+p)$ termes de la forme p/q ; considérons la section de la

série (2.20) correspondant à ces termes, elle a la forme

$$\sigma = \sum_{n=m+1}^{m+\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p-1\right]} r_n e^{2\pi i(n x - s_n)}.$$

Mais $s_n = s_m + k p/q$ pour $n = m + k$ (car pour tout entier $i \in [m+1, n]$: $u_i = p/q$, par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p-1\right]} r_{m+k} e^{2\pi i\left[(m+k)x - s_m - k\frac{p}{q}\right]} \\ &= e^{2\pi i(m x - s_m)} \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p-1\right]} r_{m+k} e^{2\pi i k \left(x - \frac{p}{q}\right)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Soit $x = p_0/q_0$ une fraction irréductible. Pour tout entier non nul j , nous pouvons écrire $x = p_0 j/q_0$ $j = p_j/q_j$, de (2.22) et pour ce x , nous trouvons

$$|\sigma| = \sum_{k=1}^{\varphi\left[\frac{q_j(q_j+1)}{2}+p_j-1\right]} r_{m_j+k}, \quad (\text{car } \forall k \in \left[1, \varphi\left(\frac{q_j(q_j+1)}{2}+p_j-1\right)\right] : r_{m_j+k} \geq 0) \quad (2.23)$$

Ici, nous avons remplacé m dans (2.21) par m_j , si au lieu de p et de q nous avons p_j et q_j (de ce fait, on a : $2\pi i k \left(x - \frac{p_j}{q_j}\right) = 0$)

Il est clair que $m_j \rightarrow \infty$ lorsque $j \rightarrow \infty$.

Nous avons supposé que $\sum r_n = +\infty$; par conséquent, pour tout n , il est toujours possible trouver $\psi(n)$ tel que:

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \dots + r_{n+\psi(n)} > n \quad (2.24)$$

Par conséquent, si

$$\varphi\left[\frac{q_j(q_j+1)}{2}+p_j\right] \geq \psi(m_j) = \psi\left\{\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi\left[\frac{q_j(q_j+1)}{2}+p_j-1\right]\right\} \quad (2.25)$$

alors, on a :

$$|\sigma| > m_j \quad (2.26)$$

à chaque fois que x vérifie l'inégalité (2.23). Cela veut dire que si nous définissons $\psi(n)$ afin que l'inégalité (2.24) soit satisfaite et $\varphi(v)$ tel que

- 22 -

$$\varphi[v] \geq \psi\{\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(v-1)\} \quad (2.27)$$

alors l'inégalité (2.26) aura lieu.

Mais dans cet argument, j est un entier quelconque. Par conséquent, pour un nombre rationnel x donné dans la série (2.20), il y a une infinité de sections qui satisfassent (2.25), c'est-à-dire, la série (2.20) diverge sans limite pour ce x . Ainsi, elle diverge sans limite pour un rationnel x quelconque et aussi dans un ensemble de seconde catégorie.

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 2.8. Parce qu'on a pris des r_n tels que $\sum r_n = +\infty$ dans ce théorème, alors

il est toujours possible de supposer, en particulier, que $\sum r_n^2 < +\infty$ qui veut dire que nous avons une divergence d'une série de Fourier d'une fonction dont le carré est intégrable sur un ensemble de seconde catégorie. Mais Salem a noté qu'il est impossible de construire une série qui diverge sur un ensemble de mesure positive par cette méthode.

En effet, la méthode de Salem est comme suit : la série

$$\sum r_n \cos(nx - \alpha_n)$$

est tronquée (ou coupée) en un nombre dénombrable de portions $U_k(x)$ et pour chaque x d'un

ensemble E , on peut trouver une infinité d'ensembles de portions $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}, \dots$ (indépendant

de x) tels que $|U_{n_k}| > a > 0$.

Mais si

$$U_{n_k} = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} r_n \cos(nx - \alpha_n),$$

alors

$$U_{n_k}^2 = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} r_n^2 \cos^2(nx - \alpha_n) + 2 \sum_{n_k+1 \leq n < m \leq n_{k+1}} r_n r_m \cos(nx - \alpha_n) \cos(mx - \alpha_m)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} U_{n_k}^2 dx &= \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} r_n^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(nx - \alpha_n) dx + \\ &2 \sum_{n_k+1 \leq n < m \leq n_{k+1}} r_n r_m \int_0^{2\pi} \cos(nx - \alpha_n) \cos(mx - \alpha_m) dx \\ &= \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} r_n^2 \left[\frac{\sin 2(nx - \alpha_n)}{4n} \right]_0^{2\pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{n_k+1 \leq n < m \leq n_{k+1}} r_n r_m \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sin \left((m+n)x - (\alpha_m + \alpha_n) \right)}{m+n} \right]_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\left[\frac{\sin \left((m-n)x - (\alpha_m - \alpha_n) \right)}{m-n} \right]_0^{2\pi}}_{=0} \right\} \\
& = \pi \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} r_n^2
\end{aligned}$$

et par conséquent, la série $\sum \int_0^{2\pi} U_{n_k}^2 dx < +\infty$, ce qui signifie que $\sum U_{n_k}^2$ converge presque partout, ainsi $U_{n_k}(x) \rightarrow 0$ presque partout qui contredit $|U_{n_k}(x)| > a$ a pour $x \in E$, si $m(E) > 0$, ou $m(E)$ $m(E)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble E .

3. ENSEMBLES DE TYPE $\mathfrak{R}$ ET DE TYPE H

3.1 Ensemble de type $\mathfrak{R}$

Nous savons que si $mE > 0$, alors la convergence de la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ sur } E \text{ implique}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Toutefois, ce résultat pourrait être généralisé considérablement. A ce propos, nous introduisons

Définition 3.1. On dit qu'un ensemble E est un ensemble de type $\mathfrak{R}$ ou brièvement est un $\mathfrak{R}$ -ensemble s'il existe une série trigonométrique qui converge sur E sans que ses coefficients tendent vers 0.

De ce fait, nous rappelons que, il résulte que tous les $\mathfrak{R}$ -ensembles sont de mesure nulle (mesure de Lebesgue). Nous nous proposons de répondre à la question : quand est-ce que un ensemble de mesure nulle est un $\mathfrak{R}$ -ensemble et quand est-ce qu'il ne l'est pas ? Cette question est loin d'être résolue ; par conséquent, nous devons nous borner d'indiquer les conditions nécessaires et suffisantes séparément.

Avant tout, établissons un lemme.

Lemme 3.2. Si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble, alors, tout translaté E' de E le long de l'axe des abscisses, est encore un $\mathfrak{R}$ -ensemble. Autrement dit, la propriété d'être un $\mathfrak{R}$ -ensemble est invariante par translation.

Démonstration. En effet, soit un réel x_0 et notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de points de la forme

$$t = x - x_0 \text{ avec } x_0 \in E. \text{ Soit}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.1}$$

une série trigonométrique convergeant sur E et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) \neq 0$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0, \quad \alpha_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0, \\ \beta_n &= b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0, \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= a_n^2 \cos^2 nx_0 + b_n^2 \sin^2 nx_0 + 2a_n b_n \cos nx_0 \sin nx_0 \\ \beta_n^2 &= a_n^2 \sin^2 nx_0 + b_n^2 \cos^2 nx_0 - 2a_n b_n \cos nx_0 \sin nx_0 \end{aligned}$$

On a

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

et pour $x = t + x_0$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \cos(nx_0 + nt) + b_n \sin(nx_0 + nt)$$

$$\begin{aligned}
&= a_n \cos nx_0 \cos nt - a_n \sin nx_0 \sin nt + b_n \sin nx_0 \cos nt + b_n \cos nx_0 \sin nt \\
&= (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \cos nt + (b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0) \sin nt \\
&= \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt
\end{aligned}$$

donc la convergence de (3.1) sur E entraîne celle de la série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \text{ sur } \mathcal{E}$$

c'est-à-dire $\mathcal{E}$ est un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

Lemme 3.3. Si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble et s'il contient le point 0, alors on peut trouver une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k x = 0 \text{ pour } x \in E$$

Démonstration. En effet, considérons la série (3.1) qui converge sur E sans que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + b_n^2$ soit nulle. Si $x = 0$ appartient à E , alors la série (3.1) converge en $x = 0$ et cela veut dire que la série $\frac{a_0}{2} + \sum a_n$ converge, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

De la convergence de (3.1) sur E il s'ensuit que

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \text{ sur } E$$

Et puisque $a_n \cos nx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \sin nx = 0$ sur E .

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + b_n^2 \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Par conséquent, il existe

une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$|b_{n_k}| > a > 0 \text{ pour } (k = 1, 2, \dots)$$

en même temps que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} \sin n_k x = 0$$

d'où le résultat.

Plus tard, nous utiliserons la définition suivante, due à Arbault :

Définition 3.4. On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de points t de l'intervalle $[0; 1]$ admet une suite

nulle s'il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k t = 0, \text{ pour } t \in \mathcal{E}$$

- 30 -

Remarque 3.5. - Nous pouvons dire que si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble de $[0, 2\pi]$ et si E contient le point 0, alors, l'ensemble de points t de la forme $t = x/2\pi$, où $x \in E$ admet une suite nulle.

En effet, en vertu du lemme 3.3, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k x = 0, \quad x \in E$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin 2\pi n_k t = 0$$

et $(2n_k)_{k \in E}$ est la suite recherchée.

- Plus loin, nous considérons généralement des ensembles dans $[0; 1]$ et également des séries de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx) \quad (3.2)$$

- Afin de ne pas introduire de nouveaux termes, nous dirons qu'un ensemble E dans $[0; 1]$ est un $\mathfrak{R}$ -ensemble s'il existe une série de la forme (3.2) qui converge sur E et telle que $\lim a_n^2 + b_n^2 \neq 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

S'il en est ainsi, alors le résultat précédent pourra être reformulé comme suit :

Si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble et si E contient le point 0, alors E admet une suite nulle.

Malgré sa simplicité, ce résultat est fréquemment utilisé dans tout ce qui suit.

- Pour obtenir de nouveaux résultats sur les $\mathfrak{R}$ -ensembles, nous allons examiner une nouvelle classe d'ensembles qui, comme nous le verrons plus tard, est rencontrée dans de nombreux problèmes de la théorie des séries trigonométriques. Ce sont les ensembles de type H (*Rajchmann* les a appelés ainsi pour honorer *Hardy* et *Littlewood* qui sont les premiers à avoir étudié ces ensembles).

3.2 Ensemble de type H

Rajchmann a donné deux (2) définitions différentes de ces ensembles, une arithmétique et l'autre géométrique et a prouvé leur équivalence.

Nous examinerons ces deux définitions et nous utiliserons l'une ou l'autre selon le cas.

Soit un ensemble fermé E de $[0; 1]$. Nous définissons le point M_x avec ses coordonnées polaires $r = 1$ et $\theta = 2\pi x$ qui correspond au point $x \in E$.

Lorsque x varie dans E , le point M_x parcourt un ensemble fermé E du cercle unité. Notons par E_k

l'ensemble de points M_{kx} , lors que x varie dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_k = \{(\cos 2\pi kx, \sin 2\pi kx) : x \in E\}$$

Il est clair que le point M_{kx} coïncide avec le point $M_{(t)}$ où (t) est la partie

fractionnaire de t . Notons par $2\pi d_k$ la longueur du plus grand arc adjacent à l'ensemble $\mathcal{E}_k$.

Autrement dit, la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $2\pi d_n$ est la longueur du plus grand arc adjacent (contigu) à $\mathcal{E}_n$.

Définition 3.6. On dit que l'ensemble E est un H -ensemble si

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} d_n} > 0. \quad (3.3)$$

Par exemple, si E est l'ensemble parfait de Cantor, alors, en posant $n = 3^k$, nous

voyons que les ensembles $\mathcal{E}_{3^k}$ coïncident les uns des autres et

$$d_{3^k} = \frac{1}{3} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

et par conséquent, l'ensemble de Cantor est un H -ensemble.

Définition 3.7. On dit qu'un ensemble E est un H -ensemble s'il existe une suite d'entiers naturels $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ et deux nombres α et δ , $0 \leq \alpha < 1$ et $0 \leq \delta < 1$ tels que

$$0 \leq (n_k x - \alpha) \leq \delta, \quad x \in E, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

où (t) désigne la partie fractionnaire du nombre t .

Ici, la condition $\delta < 1$ est la plus importante.

Si rien n'est ajouté, alors ces deux définitions ne sont plus équivalentes, puisque dans la seconde, la fermeture de E n'est plus satisfaite.

Toutefois, si toute partie d'un H -ensemble est encore un H -ensemble, alors il est possible de prouver l'équivalence de ces deux définitions.

Nous montrons que tout ensemble A qui satisfait la seconde définition est contenue dans un ensemble fermée E satisfaisant la définition 3.6.

En effet, soit A un ensemble qui vérifie la définition 3.7. Prenons la suite $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$

de la définition et pour un n_k , considérons dans $[0; 1]$ un ensemble, noté F_k , des x auxquels on peut associer un entier N tel que

$$0 \leq n_k x - N \leq \delta + \alpha \quad (3.5)$$

Puisque $0 \leq N \leq n_k$ (sinon on aurait $n_k x - N < 0$), alors il n'y a qu'un nombre fini de tels

N ($N = 0, 1, \dots, n_k$) et cela veut dire que l'ensemble des points $x \in [0, 1]$ qui satisfont (3.5) pour au moins un entier N est un ensemble fermé (comme réunion finie de fermés).

Posons $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, E est aussi un ensemble fermé (comme intersection quelconque de fermés).

Si $x \in A$, alors, en posant $N_k = [n_k x - \alpha]$ ($[t]$ désignant la partie entière de t), nous avons en vertu de (3.4)

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_k x - \alpha - N_k \leq \delta \\ \alpha &\leq n_k x - N_k \leq \delta + \alpha, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x \in F_k$ pour tout k , donc $x \in E$. Maintenant, nous allons montrer que E est un H -ensemble au sens de la définition 3.6.

Si $x \in E$, alors l'ensemble $\mathcal{E}_{n_k}$ est entièrement inclus dans un arc du cercle de longueur

$2\pi\delta$ et par conséquent le plus grand arc adjacent à $\mathcal{E}_{n_k}$ est de longueur supérieure ou égale $2\pi(1-\delta)$ c'est-à-dire

$$d_{n_k} \geq 1 - \delta,$$

d'où

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} d_n > 0,$$

qui montre que E est un H -ensemble au sens de la définition 3.6. et A est une partie d'un H -ensemble.

Inversement, soit E un ensemble qui satisfait la définition 3.6.

Cela veut dire qu'on peut trouver une infinité d'ensembles $\mathcal{E}_n$ tels que, pour eux

$$d_n > d > 0, \quad (3.6)$$

où $2\pi d_n$ est la longueur du plus grand arc adjacent à $\mathcal{E}_n$. Prenons un entier N tel que

$$\frac{2}{N} < d,$$

et divisons le cercle de rayon unité en N arcs égaux $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ chacun de longueurs $2\pi/N$. Tout arc σ de longueur $< 2\pi d$ couvre complètement au moins un des arcs Δ_i , et il y a une infinité d'ensembles $\mathcal{E}_n$ dans lesquels les plus grands arcs adjacents satisfont la condition (3.6).

Cela veut dire qu'on peut trouver au moins un arc Δ_i tel que

$$\Delta_i \subset (\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

où $(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$ est un arc de longueur $2\pi d_{n_k}$. Si c'est comme cela, alors $\mathcal{E}_{n_k}$ est entièrement en dehors de l'arc $(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$, qui implique qu'il est plus à l'extérieur de Δ_i et si nous posons

$$\Delta_i = (2\pi\alpha, 2\pi\beta), \quad \text{où } 0 \leq \alpha < \beta \leq 1,$$

alors, en vertu de la définition des $\mathcal{E}_{n_k}$, ensembles des réels x tels que

$$\alpha \leq n_k x - N_k \leq \beta$$

ou

$$0 \leq n_k x - \alpha - N_k \leq \beta - \alpha \quad (k = 1, 2, \dots),$$

Mais Δ est de longueur $2/N$ qui signifie que $\delta = \beta - \alpha < 1/N$. De ceci, on a

$$0 \leq (n_k x - \alpha) \leq \delta, \text{ où } \delta < 1, \text{ c'est-à-dire la définition 3.6.}$$

Ainsi, les deux définitions sont équivalentes.

Nous allons montrer que tout H -ensemble est de mesure nulle.

Remarque 3.8. Dans cette section et celle qui s'en suit, sauf mention contraire, nous entendons par produit de deux ensembles A et B leur intersection et on note AB au lieu de $A \cap B$ et ceci s'étend aux intersections dénombrables.

Soit A un ensemble qui vérifie la définition 3.7. Alors, comme nous le voyons ci-dessus, pour un k quelconque, tout $x \in A$ vérifie la condition $x \in F_k$, c'est-à-dire que, chaque élément x de A se trouve dans une des n_k intervalles de longueur δ/n_k , à savoir

$$\frac{\alpha}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + \delta}{n_k}, \quad \frac{\alpha + 1}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + \delta + 1}{n_k}, \dots,$$

$$\frac{\alpha + n_k - 1}{n_k} \leq x \leq \frac{\alpha + n_k - 1 + \delta}{n_k}$$

(dans le cas où $\alpha + \delta > 1$, un au moins de ces intervalles est divisé en deux parties, une à gauche de 1 et l'autre à droite de 0). Notons par E_k cet intervalle.

En jetant un coup d'oeil sur l'image géométrique de l'arrangement des intervalles qui composent E_k , il est facile de voir que si Δ est un segment de $[0; 1]$, alors la partie de E_k qui tombe dans E_k est de mesure qui tend vers $\delta\Delta$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

$$m(E_k \Delta) \rightarrow \delta\Delta \text{ lorsque } k \rightarrow \infty$$

(où $m(E)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble E)

Cela signifie que si θ est choisi afin que $\delta < \theta < 1$ (et ceci est possible car $\delta < 1$), alors pour un k suffisamment grand, nous avons

$$m(E_k \Delta) \leq \delta\theta$$

Et ceci reste vrai si au lieu d'un seul segment Δ , nous considérons un système fini de segments S , c'est-à-dire

$$m(E_k S) \leq \delta\theta \text{ pour un } k \text{ suffisamment grand:}$$

Mais pour le H -ensemble A considéré, nous avons

$$A \subset \prod_{k=1}^{\infty} E_k,$$

d'où, en particulier,

$$A \subset \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k},$$

où les nombres p_k peuvent être choisis comme nous voulons. Mais E_{p_1} est un système fini de

segments et nous pouvons prendre p_2 assez grand pour que

$$m(E_{p_1} E_{p_2}) < \theta m E_{p_1} < \theta^2$$

Aussi, nous prenons p_3 suffisamment grand de telle sorte que

$$m(E_{p_1} E_{p_2} E_{p_3}) < \theta m(E_{p_1} E_{p_2}) < \theta^3$$

En continuant cette procédure, nous voyons que

$$mA < \theta^k$$

où k peut être aussi grand que nous voulons, et ceci aussi signifie que $mA = 0$.

Remarque 3.9. Quelques fois, au lieu de (t) , c'est-à-dire la partie fractionnaire de t , il est commode de considérer $\{t\} = t - N$, où N est l'entier le plus proche de t (N vérifie $-1/2 \leq t - N \leq 1/2$). Il n'est pas difficile de montrer que si dans la définition d'un H -ensemble nous nous rapportons à la grandeur $\{n_k - \alpha\}$ au lieu de $(n_k - \alpha)$, en supposant $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ au lieu de $0 \leq \alpha \leq 1$ et en exigeant que

$$|\{n_k - \alpha\}| < \delta, \text{ où } \delta < \frac{1}{2},$$

alors nous avons de nouveau un H -ensemble.

3.3 Ensembles de type H_σ . Théorème de Rajchman

Définition 3.10. Un ensemble E est du type H_σ s'il peut être couvert par une somme finie ou dénombrable de H -ensembles.

Puisque tout H -ensemble est contenu dans un H -ensemble fermé et ils sont tous de mesure nulle, alors tout H est nulle part dense (ou rare) et un H_σ est toujours de première catégorie.

Maintenant, nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 3.11. *Tout ensemble admettant une suite nulle est un ensemble de type H_σ .*

Démonstration. En effet, supposons que E admet une suite nulle ; par conséquent, pour tout $x \in E$, on peut trouver une suite d'entiers naturels n_k telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n_k x = 0$$

Mais

$$\sin \pi n_k x = \pm \{ \sin \pi n_k x \}$$

le nombre $\{t\}$ étant défini dans la remarque 3.9.

Si $0 \leq t \leq \pi/2$, alors $2/\pi \leq (\sin t)/t \leq 1$, il s'en suit donc

$$x \in E \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} |\{n_k x\}| = 0,$$

Notons par $E_m^{(p)}$ l'ensemble de x pour lequel

$$|\{n_k x\}| \leq \frac{1}{m}, \quad k \geq p.$$

Si nous prenons $m > 2$, alors $1/m < 1/2$, en vertu de la définition des H -ensembles et de la remarque de la fin de la section précédente, chaque $E_m^{(p)}$ est un H -ensemble.

Mais pour un m donné, en posant

$$\varepsilon_m = \sum_{p=1}^{\infty} E_m^{(p)},$$

nous voyons que ε_m est un H_σ . Il est clair que si $x \in E$, alors, pour tout m , on peut trouver un p tel que $x \in E_m^{(p)}$. Ainsi, $E \subset \varepsilon_m$, qui signifie que E n'est pas seulement un H_σ mais aussi un produit dénombrable d'ensembles ε_m de types H_σ qui peut seulement perdre de points avec la croissance de m .

Comme corollaire du théorème, on a :

Théorème 3.12 (Théorème de Rajchman). *Tout $\mathfrak{R}$ -ensemble est un ensemble de type H_σ , c'est-à-dire des séries trigonométriques dont les coefficients ne tendent pas vers zéro ne peuvent converger que sur un ensemble de type H_σ .*

Démonstration. Afin de prouver ceci, considérons un $\mathfrak{R}$ -ensemble E et effectuons une translation le long de l'axe des abscisses pour que l'ensemble $\mathcal{E}$ que nous obtiendrons contienne le point 0. Cet ensemble $\mathcal{E}$ est de nouveau un $\mathfrak{R}$ -ensemble et en vertu de (3.2) de la section 3, $\mathcal{E}$ admet une suite nulle. Dans ce cas, d'après ce qui a été prouvé, $\mathcal{E}$ est de type H_σ .

Ainsi, l'ensemble initial E est de type H_σ et le théorème est prouvé.

Corollaire 3.13. *Si une série trigonométrique converge sur un ensemble E qui n'est pas de première catégorie, alors ses coefficients tendent vers zéro.*

Démonstration. En effet, dans le cas contraire, E sera de type H_σ , c'est-à-dire qu'il est de première catégorie.

De plus, au chapitre I, nous avons fait connaissance d'une classe d'ensembles que nous appelons M -ensemble et il sera prouvé au [Bar64] qu'un M -ensemble n'est jamais de type H_σ . De

ceci, il s'en suit que si une série trigonométrique converge sur un M -ensemble, alors ses coefficients tendent vers zéro.

3.4 Conditions suffisantes pour être un $\mathfrak{N}$ -ensemble

La condition nécessaire pour être un $\mathfrak{N}$ -ensemble dans la section 3.3 est trop faible. En effet, non seulement un H_σ peut ne pas être un $\mathfrak{N}$ -ensemble mais un H -ensemble peut ne pas l'être aussi (nous prouverons ceci dans la section 3.5). Dans la recherche des conditions suffisantes, nous considérons les ensembles admettant une suite nulle. Mais nous avons vu, dans la section 3.3, que si E admet une suite nulle, alors on peut trouver des $\{n_k\}$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\{n_k x\}| = 0, \quad x \in E \quad (3.7)$$

Nous montrons que, par la condition renforcée (3.7), nous pouvons obtenir quelques $\mathfrak{N}$ -ensembles et même un $\mathfrak{N}$ -ensemble de nature spéciale. Selon Arbault (voir [J.A52]), nous introduisons cette définition

Définition 3.14. On dit qu'un ensemble E est un N_0 -ensemble s'il existe une suite d'entiers naturels n_k telle que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi n_k x \quad (3.8)$$

converge absolument sur E .
Puisque pour $x \in E$

$$|\sin 2\pi n_k x| \leq 2 |\sin \pi n_k x|$$

alors la convergence absolue de la série $\sum \sin 2\pi n_k x$ s'en suit sur E et de la définition d'un $\mathfrak{N}$ -ensemble, il est clair que tout N_0 -ensemble est un $\mathfrak{N}$ -ensemble. En acceptant cette définition, nous prouverons le lemme :

Lemme 3.15. Soient une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow 0$ tendant vers zéro et E un ensemble possédant cette propriété : il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in E$, on peut trouver k_x (dépendant de x) tel que

$$|\{n_k x\}| < \varepsilon_k \quad \text{pour } k > k_x$$

alors E est un N_0 -ensemble (qui signifie aussi que E est un $\mathfrak{N}$ -ensemble)

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\sum \varepsilon_k < \infty$, puisque, ayant choisi de la suite (ε_k) une sous suite $(\varepsilon_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$ formant une série convergente et en posant $(n_{k_s}) = m_s$, nous voyons qu'il est suffisant de prouver le théorème pour le cas des séries convergentes.
Soit

$$b_{n_k} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$b_m = 0, \quad m \neq n_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

La série

$$\sum b_n \sin \pi n x$$

converge et même absolument sur E , puisque pour $x \in E$

$$|\sin \pi n_k x| = |\sin \{n_k x\}| \leq \pi |\{n_k x\}| \leq \pi \varepsilon_k$$

pour $k \geq k_x$ et $\sum \varepsilon_k < \infty$

De plus,

$$\sum_{n \neq n_k}^{\infty} |b_n \sin nx| = 0$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx| \text{ converge sur } E.$$

De ceci, il s'en suit que E est un N_0 -ensemble et le lemme est prouvé.

De ce lemme, en particulier, nous pouvons obtenir un théorème.

Théorème 3.16. *Tout ensemble dénombrable est un $\mathfrak{N}$ -ensemble (et même un N_0 -ensemble)*

Démonstration. En effet, soit $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

un ensemble dénombrable donné (distribué sur $[0; 1]$).

Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Nous choisissons $n_1 \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{n_1} < \varepsilon_1$$

et en vertu du théorème de Minkowski, on peut trouver p'_1 tel que

$$\left| x_1 - \frac{p'_1}{n_1} \right| \leq \frac{1}{n_1^2}$$

On suppose que $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ sont déjà définis ; alors nous choisirons n_k tel

$$n_k > n_{k-1}, \frac{1}{n_k^{1/k}} < \varepsilon_k \text{ et } \left| x_i - \frac{p_i^{(k)}}{n_k} \right| \leq \frac{1}{n_k^{1+\frac{1}{k}}}$$

pour un entier $p_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) ;

Il est clair que nous avons

$$\left| \left\{ n_k x_i \right\} \right| < \frac{1}{n_k^{1/k}} < \varepsilon_k \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Maintenant, nous avons les conditions du précédent lemme ; En effet, pour chaque x_i , pourvu que $k \geq i$, nous avons

$$\left| \left\{ n_k x_i \right\} \right| < \varepsilon_k.$$

De ceci, il s'en suit qu'un ensemble dénombrable est un N_0 -ensemble, qui signifie qu'il est aussi un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

Cependant, il n'est pas difficile de montrer que les $\mathfrak{R}$ -ensembles puissent avoir la puissance de continue, par exemple, ils peuvent être parfaits. Pour prouver ceci, nous divisons l'intervalle $[0; 1]$ en 3 parties égales et on enlève la partie médiane de longueur $1/3$; nous divisons les deux intervalles restants $\rho_1^{(1)}$ et $\rho_2^{(1)}$ en 9 parties égales et on ôte à chacun un intervalle de longueur $7/9$, en maintenant un segment de longueur $1/9$ de $\rho_1^{(1)}$ ou de $\rho_2^{(1)}$ de la gauche et de la droite ; généralement, après les m premiers étapes du

processus sur les 2^m intervalles restants $\rho_1^{(m)}, \rho_2^{(m)}, \rho_3^{(m)}, \dots, \rho_{2^m}^{(m)}$, nous faisons une division en 3^{m+1}

parties égales et nous enlevons les intervalles centraux (de longueur $\rho_1^{(m)} \left(1 - \frac{2}{3^{m+1}} \right)$), nous

maintiendrons un segment de longueur $\left(\frac{1}{3^{m+1}} \right) \rho_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) sur la gauche et un même segment sur la droite, etc.

Il est clair que nous obtenons un ensemble parfait P . Il est aisé de voir de la construction que si nous posons

$$n_m = 3^{1+2+\dots+m} = 3^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

alors, pour tout $x \in P$, nous avons

$$\left| \left\{ n_m x \right\} \right| < \frac{1}{3^{m+1}} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

et par conséquent, en se basant sur le précédent lemme que nous avons prouvé au début de cette section, nous voyons que P est un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

3.5 Bases

Afin d'obtenir une nouvelle condition pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble, nous introduisons la notion de base que nous avons besoin ici.

Définition 3.17. Un ensemble de points E d'une ligne droite est appelé une base si pour tout point x de cette droite, on peut trouver des points $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E et des entiers $k_1, k_2, \dots, k_n$ tels que $x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n$.

Il est aussi possible d'écrire

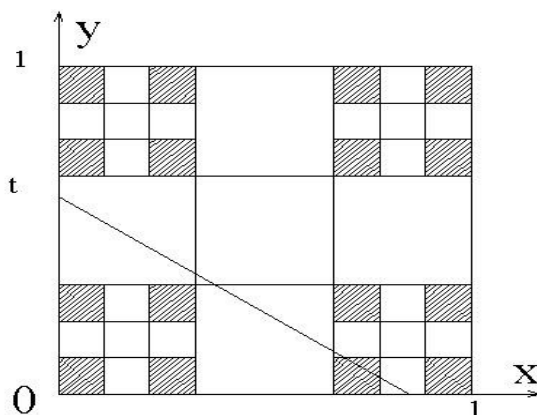
$$x = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ mais les points $x_i \in E$ ne sont pas forcément différents.

Comme un exemple intéressant de base, nous pouvons se référer à l'ensemble parfait P de Cantor.

Steinhaus a montré que tout $t \in [0, 1]$ peut s'écrire $t = x + y$, où $x \in P$ et $y \in P$.

De ceci, il est clair que tout t , $-\infty < t < +\infty$, peut être présenté sous la forme $t = nx + ny$ où n est un entier et $x, y \in P$.



Pour prouver le théorème de Steinhaus, nous divisons un carré de cotés $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ en 9 parties carrés et nous enlevons les points intérieurs des 5 carrés formant une croix ; avec chacun des 4 carrés, nous répétons la même opération, etc.

Comme résultat, nous obtiendrons sur le plan un ensemble π dont les projections sur l'axe Ox et sur l'axe Oy donnent un ensemble de Cantor P chacune.

Soit t un nombre compris entre 0 et 1 ($0 \leq t \leq 1$). Nous dessinons une droite d'équation $y = t - x$ et nous montrons qu'elle croise précisément l'ensemble π et ensuite $x \in P$ et $y \in P$. Pour prouver ceci, nous notons que notre ligne droite croise le carré de base, au moins un des 4 carrés qui restent après avoir enlevé la première croix, au moins un des 16 carrés qui restent après la deuxième opération d'enlèvement de croix, etc. Ainsi, elle croise chacun de ces ensembles, l'intersection duquel résulte en π ; ceci signifie qu'elle croise aussi π lui-même.

Ainsi, l'ensemble de Cantor est une base.

Remarque 3.18. Ce résultat peut être obtenu d'un résultat plus général qui se rapporte

aux ensembles parfaits avec rapport constant. Mais pour l'instant, nous nous bornons à cet exemple ; on peut se référer au chapitre-I pour la définition de ces ensembles.

Avant de revenir aux $\mathfrak{R}$ -ensembles, nous allons établir deux théorèmes concernant les bases.

Pour ceci, nous notons en premier lieu que si pour un ensemble E , on peut trouver $\delta > 0$ tel que tout point de l'intervalle $0 \leq t \leq \delta$ puisse être représenté sous la forme

$$t = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m, \quad (3.9)$$

où tous les x_i appartiennent à E et les k_i des entiers, alors E est une base.

En effet, soit x un nombre positif. Choisissons un entier n tel que

$$(n-1)\delta \leq x \leq n\delta. \quad (3.10)$$

Ensuite, en posant $t = x/n$, nous voyons que $0 \leq t \leq \delta$, qui signifie que t peut être représenté sous la forme (3.10). De ceci, il s'en suit que

$$t = k_1 n x_1 + k_2 n x_2 + \dots + k_m n x_m. \quad (3.11)$$

Si x est négatif, alors $-x$ est représenté sous la forme (3.11) et puisque tous les $k_i n$ sont tous des entiers, alors, dans ce cas, la partition nécessaire est obtenue.

Après cette remarque, nous prouverons le théorème suivant.

Théorème 3.19. *Tout ensemble de mesure positive est une base.*

Démonstration. Prenons un point de densité x_0 de l'ensemble considéré E . Nous l'entourons avec un petit intervalle Δ tel que pour un intervalle $\delta \subset \Delta$ et contenant x_0 nous avons

$$m(E\delta) > \frac{3}{4}\delta.$$

Soit δ_1 un intervalle concentrique avec Δ tel que

$$\delta_1 = \frac{3}{4}\delta.$$

Nous avons

$$m(E\delta_1) > \frac{3}{4}\delta_1 = \frac{9}{16}\Delta.$$

Si nous déplaçons δ_1 à gauche ou à droite d'une magnitude h , $0 < h < \Delta/8$, alors nous obtiendrons un intervalle δ_2 entièrement contenu dans Δ et contenant x_0 et l'ensemble E change en E_h tel que

$$m(E_h\delta_2) > \frac{3}{4}\delta_2 = \frac{9}{16}\Delta$$

Ainsi

$$m(E\Delta) > \frac{9}{16}\Delta \quad \text{et} \quad m(E_h\Delta) > \frac{9}{16}\Delta$$

puisque $9/16 > 1/2$, il s'en suit donc que les ensembles E et E_h devraient se rencontrer. Soit $x \in EE_h$, alors

$$\begin{aligned}x &= x_1, \text{ où } x_1 \in E, \\x &= x_2 + h, \text{ où } x_2 \in E, \\h &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

c'est-à-dire

Ainsi, tout h de $]0, \Delta/8[$ peut être représenté sous la forme $h = x_1 - x_2$. De la note précédente, ceci montre que E est une base. De plus, tout x peut être représenté sous la forme

$$x = nx_1 - nx_2,$$

où $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ et n est un entier.

De ce théorème, nous en déduisons :

Théorème 3.20. *Toute base reste une base après toute translation.*

Démonstration. En effet, soient E une base et x_0 un nombre. Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de points de la forme $t = x - x_0$, où $x \in E$. Nous devons montrer que $\mathcal{E}$ est de nouveau une base.

Etant donnée x , une valeur quelconque. Elle peut s'écrire en la forme

$$t = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m,$$

où $x_i \in E$ et les k_i des entiers. En posant

$$t_i = x_i - x_0$$

$$\text{Alors } x = k_1t_1 + k_2t_2 + \dots + k_mt_m + nx_0,$$

où $t_i \in E$ et les k_i des entiers.

S'il y a plusieurs représentations de x , alors nous choisissons l'une d'elles.

Notons par E_n , l'ensemble de x qui sont décrits sur cette forme pour un n donné ; nous avons

$$\left(-\infty < x < +\infty \right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n.$$

Ceci signifie qu'au moins un des E_n est de mesure supérieure à zéro ; notons ceci par E_{n_0} . D'après le théorème, E_{n_0} est une base ; de plus, comme il est évident de la preuve du théorème précédent, tout y peut être écrit sous la forme

$$y = py_1 - py_2,$$

où $y_1 \in E_{n_0}$, $y_2 \in E_{n_0}$ et p un entier. Mais alors, puisque

$$y_1 = k_1t_1 + k_2t_2 + \dots + k_mt_m + nx_0,$$

$$y_2 = l_1\tau_1 + l_2\tau_2 + \dots + l_\mu\tau_\mu + nx_0,$$

où tous les t_i et les τ_i appartiennent à E et les k_i et l_i des entiers, alors

$$y = k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_m t_m - l_1 \tau_1 - l_2 \tau_2 - \dots - l_\mu \tau_\mu$$

qui veut dire que tout y peut s'écrire comme une combinaison linéaire de points de $\mathcal{E}$ avec des coefficients entiers, et ceci montre aussi que $\mathcal{E}$ est une base.

Maintenant, retournons aux $\mathfrak{R}$ -ensembles. Nous allons prouver le théorème.

Théorème 3.21. *Une base ne peut pas être un $\mathfrak{R}$ -ensemble.*

En d'autre terme, si une série trigonométrique converge sur un ensemble E qui est une base, alors ses coefficients tendent vers zéro.

Démonstration. Avant tout, nous effectuons une translation sur E afin que l'ensemble $\mathcal{E}$ que nous obtiendrons contienne le point 0. Si E est une base, alors $\mathcal{E}$ l'est aussi d'après 3.20. Si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble, $\mathcal{E}$ devrait l'être aussi d'après (3.2) de la section 3.1. Mais d'après (3.3) de la section 3.1, $\mathcal{E}$ admet une suite nulle, c'est-à-dire, il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k \pi t = 0, \quad t \in \mathcal{E}$$

Mais $\mathcal{E}$ est une base. Par conséquent, pour un t quelconque, on a

$$t = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_m t_m,$$

où tous les t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) appartiennent à $\mathcal{E}$ et les a_i des entiers.

Nous notons que pour tous réels α et β

$$|\sin(\alpha + \beta)| \leq |\sin \alpha| + |\sin \beta|$$

et par induction

$$|\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)| \leq \sum_{i=1}^n |\sin x_i|$$

En particulier

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|$$

pour un entier n . Par conséquent

et puisque $\sin \pi n_k t_i \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$ (car les $t_i \in E$), nous voyons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k t \rightarrow 0$$

pour tout t . Si c'est ainsi, alors toute la droite $-\infty < x < +\infty$ est un ensemble qui admet une suite nulle. Mais ceci n'est pas vrai, car en vertu du théorème 3.12 de la section 3.3, un tel ensemble est un H_σ , c'est-à-dire qu'il est déjà sans aucun doute de première catégorie et de mesure nulle.

Corollaire 3.22. *L'ensemble de Cantor n'est pas un $\mathfrak{R}$ -ensemble.*

En effet, nous avons vu au début de cette section que l'ensemble de Cantor est une base. Ainsi, les H -ensembles peuvent ne pas être un $\mathfrak{R}$ -ensemble (ceci implique tous les H_σ ne le sont pas tous).

Nous allons montrer (nous avons déjà fait référence à ceci au début de cette section) que la propriété de l'ensemble de Cantor d'être une base est un corollaire d'un résultat plus général se rapportant aux ensembles parfaits symétriques avec rapport constant. Pour montrer que tous ces ensembles sont des bases, nous avons besoin de deux lemmes

Lemme 3.23. *Quels que soient les $2p$ points $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2p}$ de l'intervalle $[0, 1]$, il est toujours possible de le réarranger dans les intervalles $[0, 1/p]$ et $[(p-1)/p, 1]$ sans changer la somme de leurs abscisses.*

Démonstration. En effet, soit $x = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2p}$. Puisque $0 \leq \theta_i \leq 1$, donc

$0 \leq x \leq 2p$. Par conséquent, $x = k + \theta$, où k est un entier, $0 \leq k \leq 2p-1$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

Si $k < p$, alors, en posant $\theta'_1 = \theta'_2 = \dots = \theta'_k = 1$; $\theta'_{k+1} = \theta'_{k+2} = \dots = \theta'_{2p} = \frac{\theta}{2p-k}$,

nous voyons que

$$\sum_{i=1}^{2p} \theta'_i = k + \theta = x$$

Dans ce cas

$$\frac{\theta}{2p-k} < \frac{\theta}{p} \leq \frac{1}{p},$$

qui signifie que toutes les conditions sont satisfaites

Si $p \leq k \leq 2p-1$, alors nous posons $\theta'_1 = \theta'_2 = \dots = \theta'_{k+1} = 1 - \frac{1-\theta}{k+1}$ et $\theta'_i = 0$ pour $i > k+1$.

En suite

$$1 - \theta'_i \leq \frac{1}{k+1} < \frac{1}{p} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k+1$$

et de plus,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \theta'_i = (k+1) + (k+1) \frac{1-\theta}{k+1} = k + \theta = x.$$

le lemme est ainsi prouvé.

Lemme 3.24. *Soient $p \geq 2$ un entier naturel et S un système de nombre fini de segments disjoints de même longueur ρ . Soit S' est un système de segments obtenu à partir de S*

en enlevant l'intervalle central de chaque segment afin que la longueur des deux segments restant soit égale à ρ / p . Alors, quels que soient les $2p$ points en S , il est toujours possible de les réarranger en S' sans changer la somme de leurs abscisses.

Démonstration. En effet, tout point x_i de S a la forme $x_i = \alpha_i + \rho \theta_i$ où α_i est l'extrémité gauche du segment S contenant x_i et $0 \leq \theta_i \leq 1$.

Si nous avons $2p$ de tels points x_i , alors

$$\sum x_i = \sum \alpha_i + \rho \sum \theta_i.$$

En se basant sur le lemme 3.23, il est possible d'écrire

$$\sum \theta_i = \sum \theta'_i$$

où pour tout i , nous avons $0 \leq \theta'_i \leq 1/p$ ou $(p-1)/p \leq \theta'_i \leq 1$; par conséquent, en posant

$$x'_i = \alpha_i + \rho \theta'_i,$$

nous avons que $\sum x_i = \sum x'_i$ et chaque x'_i appartient à l'un des segments du système S' .

Nous déduisons de ce lemme le théorème suivant :

Théorème 3.25. Tout ensemble symétrique avec rapport constant est une base et, par conséquent, n'est pas un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

En effet, soit ξ un point qui figure dans la définition de l'ensemble P avec rapport constant. Choisissons un entier p tel que

$$\frac{1}{p} < \xi.$$

Soit x un point de $[0, 1]$. Posons en premier lieu

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{2p} = \frac{x}{2p}.$$

Alors

$$\sum \theta_i = x.$$

Notons par S_1 le système de deux segments restants après avoir enlevé le premier intervalle dans le processus de construction de P , par S_2 le système de 4 segments restants après la seconde étape du processus de la construction de P et, généralement, par S_m le système de $2m$ segments restants après les m premières étapes de la construction de P .

En vertu du lemme 3.24, il est possible de trouver θ'_i appartenant à S_1 tels que $\sum \theta'_i = \sum \theta_i = x$; d'après ce même lemme, il est possible de trouver θ''_i tels que $\sum \theta''_i = \sum \theta'_i = x$ et tous les θ''_i appartiennent à S_2 , etc. A la m -ième étape, nous avons $\theta^{(m)}_i$ appartenant à S_m et pour tout m .

Finalement, nous trouvons x_i dans P tels que $x \sum x_i$ et puisque ceci est vrai pour tout

x , alors P est une base.

3.6 Mesure de Hausdorff, dimension de Hausdorff et $\mathfrak{R}$ -ensembles

Hausdorff a introduit la définition suivante pour les espaces métriques :

Définition 3.26. Soient (X, d) un espace métrique et p un réel tel que $0 \leq p \leq +\infty$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, soit

$$m_p^\varepsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left[\delta(A_i) \right]^p,$$

où

- $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots$ est une partition arbitraire de X en un nombre dénombrable de sous-ensembles de diamètres inférieurs à ε et p l'exposant.
- $\delta(A_i)$ désigne le diamètre du sous-ensemble A_i et est égal à

$$\sup_{(x,y) \in A \times A} d(x, y)$$

Alors

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon$$

est appelé la p -ième mesure de l'espace X .

Il est facile de prouver que si $p < q$, alors $m_p(X) > m_q(X)$, donc, si $m_p(X) < +\infty$, alors $m_q(X) = 0$.

Définition 3.27. La limite supérieure de tous les nombres réels p pour lesquels $m_p(X) > 0$ est appelée la dimension de Hausdorff de l'espace X .

Ainsi, pour l'ensemble de Cantor, sa dimension de Hausdorff est égale à $\ln 2 / \ln 3$.

En effet, quel que soit l'entier naturel n , il est toujours possible de diviser l'ensemble P en 2^n parties de diamètres $1/3^n$, par conséquent, pour $\varepsilon = 1/3^n$

$$m_p^\varepsilon = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{1}{3} \right)^p = \frac{2^n}{3^{np}}$$

et si $p = \ln 2 / \ln 3$, on a

$$3^{np} = \exp(np \ln 3) = \exp(n \ln 2) = 2^n$$

Donc $m_p^\varepsilon = 1$ pour $p = \ln 2 / \ln 3$

Par contre, si $p > \ln 2 / \ln 3$; on peut prendre n aussi grand que l'on veut, alors $(2/3^p)^n$ est aussi petit que l'on souhaite et par conséquent, $m_p^\varepsilon = 0$ et $m_p = 0$.

C'est exactement avec le même raisonnement que l'on montre que si P est un ensemble parfait avec rapport constant ξ , alors sa dimension de Hausdorff est égale à $\ln 2 / |\ln \xi|$.

Puisque la dimension de Hausdorff est utilisée pour classer les ensembles de mesure nulle, la question suivante peut se poser; n'est il pas possible de juger ces ensembles par leur dimension qu'ils sont $\mathfrak{R}$ -ensembles ou non?

Cependant, une réponse négative devrait être donnée à cette question, puisque nous avons :

Théorème 3.28. *Aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un ensemble parfait dont la dimension de Hausdorff est plus petite que ε et qui, cependant, n'est pas un $\mathfrak{R}$ -ensemble. Par contre, pour tout $\theta < 1$, il est possible de trouver un ensemble de dimension θ qui est un $\mathfrak{R}$ -ensemble (et même un N_0 -ensemble).*

Démonstration. La première partie de ce théorème est déjà prouvée : en effet, il suffit de prendre ξ tel que

$$\frac{\ln 2}{|\ln \xi|} < \varepsilon$$

et construire un ensemble parfait avec un rapport constant ξ . Alors, sa dimension est inférieure à ε et qui, cependant, n'est pas un $\mathfrak{R}$ -ensemble en vertu du théorème 3.25.

Pour montrer la deuxième partie de ce théorème, selon Salem, nous considérons l'ensemble symétrique P dans $[0, 1]$ avec le rapport ξ_k , choisi comme suit : pour une suite de nombres naturels

$i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$, que nous définirons plus tard, nous prenons $\xi_{i_j-1} = 1/2^j$ ($j = 1, 2, \dots$); si $k \neq i_j - 1$,

nous posons $\xi_k = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire, dans ce cas, rien n'est enlevé $\rho^{(k)}$ mais il est divisé en deux en passant à l'étape $k + 1$).

Il est clair que pour $k = i_j$, nous avons

$$\rho^{(k)} = \frac{1}{2^k j!},$$

donc, il y a 2^k de tels segments $\rho^{(k)}$. Si nous posons

$$n_k = 2^k (j - 1)! \text{ pour } k = i_j,$$

alors

$$n_k \rho^{(k)} = \frac{1}{j}. \quad (3.12)$$

- 43 -

Par contre, en notant par $\alpha_s^{(k)}$ l'extrémité gauche des segments $\rho^{(k)}$, nous

voyons de la construction que pour $k = i_j$

$$\left| \left\{ n_k \alpha_s^{(k)} \right\} \right| = O\left(\frac{1}{j}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, 2^k). \quad (3.13)$$

Mais puisque pour tout x et tout y

$$|\{x + y\}| \leq |\{x\}| + |\{y\}|$$

et la distance entre tout point $x \in P$ et les $\alpha_s^{(k)}$ est inférieure à $\rho^{(k)} \quad (s = 1, 2, \dots, 2^k)$, nous voyons que

$$|\{n_k x\}| = O\left(\frac{1}{j}\right) \quad x \in P, \quad k = i_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Maintenant, nous avons les conditions du lemme du paragraphe 3.5 et de ceci, nous concluons que P est un $\mathfrak{R}$ -ensemble (et même un N_0 -ensemble).

Il reste à montrer que les nombres $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$ peuvent être choisis afin que la dimension de Hausdorff soit égale à θ , où θ est choisi d'avance, $0 < \theta < 1$.

Etant donné un θ tel que $0 < \theta < 1$. Nous allons montrer qu'il est possible de choisir les nombres A et B tels que

$$0 < A < 2^{i_j} \left(\frac{1}{2^{i_j} j!} \right)^\theta < B < +\infty. \quad (3.14)$$

Si ceci est possible, alors

$$B > m_\theta^\varepsilon(P) > 0$$

et par conséquent,

$$B \geq m_\theta(P) > 0$$

et, par contre, pour tout $\theta' > \theta$, nous avons $m_{\theta'}(P) = 0$ (car $m_{\theta'}(P) < +\infty$).

Ainsi, la dimension de Hausdorff de P sera égale à θ si nous trouvons des i_j tels que (3.14) aurait lieu.

Mais pour ceci, il suffit que

$$\ln A < i_j \ln 2 - \theta (i_j \ln 2 + \ln j!) < \ln B$$

ou

$$\theta \ln j! + \ln A < i_j (1 - \theta) \ln 2 < \theta \ln j! + \ln B$$

d'où

- 48 -

$$\frac{\theta \ln j! + \ln A}{(1 - \theta) \ln 2} < i_j < \frac{\theta \ln j! + \ln B}{(1 - \theta) \ln 2} \quad (3.15)$$

Si nous choisissons A et B tels que

$$\frac{\ln B - \ln A}{(1 - \theta) \ln 2} > 1,$$

alors il est toujours possible de trouver une suite croissante d'entiers i_j telle que les inégalités (3.15) auront lieu et ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque 3.29. Durant la construction de cet exemple, nous avons prouvé que par contraste avec les ensembles avec rapport constant qui ne sont pas parfois des $\mathfrak{R}$ -ensembles, des ensembles symétriques avec rapport variable peut être un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

3.7 Condition nécessaire pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble fermé.

Nous avons déjà vu que la condition nécessaire pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble (être un H_σ -ensemble) est un énoncé trop faible.

Ici, nous décrivons un résultat dû, à Salem et qui donne la condition nécessaire pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble dans le cas des ensembles fermés.

Nous savons (voir paragraphe 3.1) que si E est un $\mathfrak{R}$ -ensemble contenant le point 0, alors il admet une suite nulle, c'est-à-dire, qu'on peut trouver une suite d'entiers naturels n_k telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \pi n_k x = 0, \quad x \in E \quad (3.16)$$

Supposons maintenant que E est fermé. Nous allons construire une fonction monotone $F(x)$, constante sur les intervalles adjacents à E . De (3.16), il s'en suit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin^2 \pi n_k x = 0,$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^2 \pi n_k x dF = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \sin^2 \pi n_k x dF = 0 \quad (3.17)$$

(le passage à la limite sous signe intégrale de Steiltjes est justifiée, puisque $\sin^2 \pi n_k x$ ($k = 1, 2, \dots$) est une suite de fonctions toutes bornées).

De (3.17), il s'en suit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - \cos 2\pi n_k x) dF = 0,$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos 2\pi n_k x dF = F(1) - f(0)$$

De ceci, le théorème suivant, dû à Salem, en dérive :

- 495 -

Théorème 3.30. Pour qu'un ensemble fermé E contenant le point $x = 0$ soit un

$\mathfrak{N}$ -ensemble, il est nécessaire que pour toute fonction monotone $F(x)$ et constante sur les intervalles adjacents à E , on a

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos 2\pi n_k x dF = F(1) - f(0) \quad (3.19)$$

Est-ce que la condition donnée ci-dessus est-elle suffisante ? Cette question reste ouverte, mais néanmoins on a le résultat suivant :

Théorème 3.31. *Si E est un ensemble fermé, $F(x)$ une fonction monotone, constante sur les intervalles adjacents à E et qui satisfait la condition (3.19), alors, on peut trouver un $E_1 \subset E$ pour lequel*

$$\int_{E-E_1} dF = 0,$$

et qui est un $\mathfrak{N}$ -ensemble (même un N_0 -ensemble).

Démonstration. Pour montrer ceci, nous notons que (3.19) implique l'existence d'une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour laquelle (3.17) a lieu. Par conséquent, il est possible de trouver une suite $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\int_0^1 \sin^2 \pi m_k x dF < \frac{1}{k^4}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \int_E \sin^2 \pi m_k x dF < \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

ou

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \int_E \sin^2 \pi m_k x dF < +\infty$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \sin^2 \pi m_k x < +\infty \quad (3.20)$$

presque partout pour la mesure associée à F , c'est-à-dire, la série converge sur un certain sous-ensemble E_1 tel que

$$\int_{E-E_1} dF = 0 \quad (3.21)$$

Puisque pour tout N , on a

$$\sum_{k=1}^N |\sin \pi m_k x| \leq \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N \sin^2 \pi m_k x \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de Cauchy Schwartz})$$

alors, en vertu de (3.20)

$$\sum_{k=1}^N |\sin \pi m_k x| < +\infty \quad \text{sur } E_1$$

et, par conséquent, E_1 est un $\mathfrak{R}$ -ensemble (et même un N_0 -ensemble). Le théorème est ainsi prouvé.

3.8 La somme de deux $\mathfrak{R}$ -ensembles

Remarque 3.32. Dans cette section, $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

Nous nous posons la question suivante : Est-ce que la somme de deux $\mathfrak{R}$ -ensembles est-elle un $\mathfrak{R}$ -ensemble ?

La réponse à cette question est négative car nous avons le résultat suivant, dû à Marcinkiewicz :

Théorème 3.33. *Il existe un ensemble E qui est une base et tel que*

$E = A + B$, où chacun des termes est un $\mathfrak{R}$ -ensemble (et même un N_0 -ensemble).

Démonstration. Posons

$$\phi_v(t) = \text{sign} \sin 2^v \pi t$$

Où

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Et

$$S(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \phi_v(t)$$

Il est clair que $S(t)$ prend toutes les valeurs comprises entre -1 et +1. En effet, si α est une quantité comprise entre -1 et +1, alors, il est possible de l'écrire, par le système de comptage binaire, en la forme

$$\alpha = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_v \dots$$

et t peut être choisi afin que

$$a_v = \phi_v(t) \quad (v = 1, 2, \dots)$$

Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers naturels que nous choisirons plus tard.

Posons

$$\sigma_k(t) = \sum_{v=1}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{2^v} \phi_v(t)$$

$$S_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k+1}(t); \quad S_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k}(t)$$

Il est clair que $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. Notons par A et par B , respectivement, l'ensemble des valeurs de la fonction $S_1(t)$ et $S_2(t)$. Nous allons montrer que l'ensemble $E = A + B$ est une base.

En effet, soit z un point quelconque de l'intervalle $[0, 1]$. Il est possible d'exprimer z en système binaire et de choisir t tel que si $z = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_v \dots$, alors, $\phi_v(t) = a_v$.

On a donc $z = S(t) = S_1(t) + S_2(t) = x + y$, où $x \in A$ et $y \in A$, qui signifie que $x \in E$ et $y \in E$, et ceci montre que E est une base.

Il reste à montrer que, si nous choisissons la suite $\{n_k\}$ convenablement, chacun des ensembles A et B est un $\mathfrak{R}$ -ensemble (même un N_0 -ensemble).

Posons $m = 1$. Supposons que $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ sont déjà définis. Il existe en tout 3^{n_k-1} nombres de la forme

$$\sum_{v=1}^{n_k-1} \frac{1}{2^v} \phi_v(t)$$

(puisque 'sign' ne prenne seulement que 3 valeurs : -1, 0, +1). Notons les par $\theta_i^{(k-1)}$

($i = 1, 2, \dots, 3^{n_k-1}$). Alors, on peut trouver un entier $m_k > n_{k-1}$ tel que

$$\left| \left\{ m_k \theta_i^{(k-1)} \right\} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 3^{n_k-1}) \quad (\text{Théorème de Minkowski}) \quad (3.22)$$

Choisissons $n_k > m_k$ tel que

$$\frac{m_k}{2^{n_k}} \leq \frac{1}{2k^2} \quad (3.23)$$

En vertu de (3.22) et de (3.23), chaque valeur θ de la forme

$$\theta = \sum_{v=1}^{n_k-1} \frac{1}{2^v} \phi_v(t) + \sum_{v=n_k}^{\infty} \frac{1}{2^v} \phi_v(t)$$

satisfait l'inégalité

$$\left| \{ m_k \theta \} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

De ceci, il s'ensuit que si $x \in A$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sin m_{2k+1} \pi x \right| < +\infty$$

et si $x \in B$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sin m_{2k} \pi x \right| < +\infty$$

c'est-à-dire A et B sont des ensembles de type $\mathfrak{R}$ (ou même de type N_0).

4. MESURES ET DIMENSIONS D'HAUSDORFF.

4.1 Mesure de Hausdorff, dimension de Hausdorff et $\mathfrak{H}$ -ensembles

Hausdorff a introduit la définition suivante pour les espaces métriques :

Définition 4.1. Soient (X, d) un espace métrique et p un réel tel que $0 \leq p \leq +\infty$.
Pour un $\varepsilon > 0$ donné, soit

$$m_p^\varepsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left[\delta(A_i) \right]^p,$$

Où

- La suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de X telle que les A_i sont des sous-ensembles de X et dont les diamètres sont inférieurs à ε .
- $\delta(A_i)$ désigne le diamètre du sous-ensemble A_i et est égal à

$$\sup_{(x,y) \in A_i} d(x,y)$$

Alors

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon$$

est appelé la p -ième mesure de l'espace X .

Pour un réel $\varepsilon > 0$, notons par $\mathfrak{H}_\varepsilon(X)$ l'ensemble de toutes les partitions dénombrables $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de X telles que $\delta(A_i) < \varepsilon$ pour tout i .

Nous remarquons que si ε et ε' sont deux réels tels que $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$, alors

$$\mathfrak{H}_\varepsilon(X) \subseteq \mathfrak{H}_{\varepsilon'}(X), \text{ car}$$

$$(0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon') \text{ et } \delta(A_i) < \varepsilon \text{ implique } \delta(A_i) < \varepsilon'$$

Il en résulte que $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$ implique

$$\inf_{(A_i) \in \mathfrak{H}_\varepsilon} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\delta(A_i) \right]^p \right\} \leq \inf_{(A_i) \in \mathfrak{H}_{\varepsilon'}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\delta(A_i) \right]^p \right\}$$

c'est-à-dire

$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$ implique $m_p^{\varepsilon'} \leq m_p^\varepsilon$ pour $p \geq 0$

La fonction m_p , associée au réel $p \geq 0$, définie par :

$$m_p :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \varepsilon \mapsto m_p^\varepsilon$$

est donc décroissante sur $]0, 1[$. Par conséquent, elle admet une limite (éventuellement infinie) quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

En associant à chaque réel $p \geq 0$ la fonction h_p définie par

$$h_p :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto h_p(t) = t^p$$

On remarque alors que $0 \leq p < q$ entraîne

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_q(t)}{h_p(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^q}{t^p} = 0 \quad (\text{car } q - p > 0).$$

c'est-à-dire

$$h_q(t) = o h_p(t) \text{ au voisinage de } 0.$$

Ceci montre que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1$, on peut trouver un réel $\rho = \rho(\varepsilon)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho(\varepsilon) = 0 \text{ et} \\ h_q(t) \leq \rho(\varepsilon) h_p(t), \text{ pour } 0 < t \leq \varepsilon \quad (4.1)$$

Cherchons maintenant à comparer m_p^ε et m_q^ε pour un ε prenant une valeur voisine de 0.

Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de X telle que $\delta(A_i) < \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors (4.1)

montre l'existence d'un réel $\rho = \rho(\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} h_q(\delta(A_i)) \leq \rho(\varepsilon) \sum_{i \in \mathbb{N}} h_p(\delta(A_i)),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} [\delta(A_i)]^q \leq \rho(\varepsilon) \sum_{i \in \mathbb{N}} [\delta(A_i)]^p$$

En prenant les bornes inférieures, on a :

$$m_q^\varepsilon \leq \rho(\varepsilon) m_p^\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$m_q^\varepsilon = o\left(m_p^\varepsilon\right) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Comme conséquence de ceci, s'il existe un réel $p > 0$ tel que $m_p(X) < +\infty$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_p^\varepsilon(X) < +\infty$$

et pour tout $q > p$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m_q^\varepsilon(X)}{m_p^\varepsilon(X)} = 0$$

Ceci implique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_q^\varepsilon(X) = 0$$

Mais à cause de la décroissance de $m_q^\varepsilon(X)$ avec la croissance de ε , on a :

$$m_q^\varepsilon(X) \leq 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

D'où

$$m_q(X) = 0$$

On a prouvé donc que si $p < q$, alors $m_q(X) \leq m_p(X)$, et si $m_p(X) < +\infty$, alors

$$m_q(X) = 0 \text{ pour tout } q > p.$$

D'où la définition

Définition 4.2. La limite supérieure de tous les nombres réels p pour lesquels $m_p(X) < +\infty$ est appelée la dimension de Hausdorff de l'espace X .

Bibliographie

- [A.R21] A.Rajchman, Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fundamenta Mathematicae* 3 (1921), 287-302.
- [A.Z] A.Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, New York.
- [Bar64] Nina (Karl nova) Bary, *A treatise on trigonometric series*, Pergamon Press, New York, 1964.
- [Cas57] J.W.S Cassels, *An introduction to diophantine approximation.*, Cambridge University Press, 1957.
- [J.A52] J.Arabault, Sur la convergence absolue d'une série trigonométrique, *Bull.Soc.Math. de France* 80 (1952), 253-317.

Résumé

- $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro en décroissant et telle que $\sum \alpha_n^2 = +\infty$, alors, il est toujours possible de trouver une série entière $\sum c_n z^n$ qui diverge en tout point du cercle unité et telle que $c_n = O(\alpha_n)$.
- La série trigonométrique de la forme $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ ne peut pas converger sur un ensemble de seconde catégorie indépendamment de la suite (α_n) sauf dans le cas trivial $\sum \rho_n < \infty$.
- Un sous ensemble E de $[0, 1]$ est un $\mathfrak{R}$ -ensemble s'il existe une série trigonométrique ayant des coefficients ne tendant pas vers zéro qui convergent sur E . Une condition nécessaire pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble est d'être un H_δ -ensemble. Une condition suffisante pour être un $\mathfrak{R}$ -ensemble est d'être un N_0 -ensemble. Mais si (ε_n) est une suite de réels tendant vers zéro et $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle qu'à tout élément $x \in E$, on peut lui associer un entier k_x tel que $|\{n_k x\}| < \varepsilon_k$ pour tout $k > k_x$, alors, E est un N_0 -ensemble. Une base ne peut pas être un $\mathfrak{R}$ -ensemble.
- Même si la dimension de Hausdorff nous permet de classer les ensembles de mesure nulle, nous ne pourrions pas juger par sa dimension qu'un ensemble de mesure nulle est un $\mathfrak{R}$ -ensemble.

Title: Convergence and divergence of general trigonometric series

Abstract

- If $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of positive numbers which tends to zero monotonically and $\sum \alpha_n^2 = +\infty$, then, it is always possible to find a power series $\sum c_n z^n$ with coefficients $c_n = O(\alpha_n)$ and which diverges at every point of circle unit.
- The series $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ cannot converge on a set of second category whatever the sequence (α_n) safe in the trivial case $\sum \rho_n < \infty$.
- The set E in $[0, 1]$ is a $\mathfrak{R}$ -set if a trigonometric series exists which is convergent in E and such that its coefficients do not tend to zero. A necessary condition to be a $\mathfrak{R}$ -set is to be a H_δ -set that is content in a sum of a finite number or a denumerable of H -set that are all of measure zero. A sufficient condition to be a $\mathfrak{R}$ -set is to be a N_0 -set. But if (ε_n) is a sequence of real which tends to zero and E is a set that there exists a sequence of integers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that for any $x \in E$, we find k_x such that $|\{n_k x\}| < \varepsilon_k$ for $k > k_x$, then, E is a N_0 -set. A basis cannot be a $\mathfrak{R}$ -set.
- Even though the dimension of Hausdorff allows us to classify the sets of measure zero, we would not be able to judge by his dimension that a set of measure zero is a $\mathfrak{R}$ -set.

Diplôme d'Etudes Approfondies de Mathématiques Pures

Mot-clé:

Séries trigonométriques, $\mathfrak{R}$ -ensemble, H -ensemble, H_δ -ensemble.

Encadreur : Professeur Michel RAJOELINA

