



UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Filière : MATHEMATIQUES



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de
Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale



COMMUTATIVITE ET QUELQUES PRATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Présenté par
RASAMISON Herintsoa Pierre

MEMBRE DE JURY :

Président : Monsieur Madison RASOLOARIJAONA

Maître de Conférences, Enseignant-Chercheur à l'Ecole Nationale d'Informatique

Directeur de mémoire : Monsieur Solo R. RANDRIAMAHALEO

Maître de Conférences, Enseignant-Chercheur à la Faculté des Sciences

Examineur : Monsieur Rivo RAKOTOZAFY

Maître de Conférences, Enseignant-Chercheur à la Faculté des Sciences

-Promotion 2009-

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu tout puissant car il nous a donnée chaque jour des forces, santé et amour pour la réalisation de ce travail.

Ainsi nous aimerons adresser nos sincères et vifs remerciements à :

- Monsieur Solo R. RANDRIAMAHALEO, maître de conférences à la faculté de science, notre directeur de mémoire, de nous accueillir à tout moment, de nous a donné de précieux conseil pour la réalisation de cette mémoire malgré sa nombreuse occupation.
- Monsieur Madison RASOLOARIJAONA, Maître de conférences, Enseignant-Chercheur à l'Ecole Nationale d'Informatique, qui a bien voulu d'accepter d'être président de jury malgré ses différentes occupations et responsabilités.
- Monsieur Rivo RAKOTOZAFY, maître de conférences à la faculté de science qui a accepté d'être l'examineur pour cette soutenance.

Nous offrons également nos reconnaissances à tous les enseignants et à tous les personnels administratifs de l'Ecole Normale Supérieure.

Nous adressons personnellement mes vifs remerciements à mes parents, à mon frère, à mes sœurs et à tous les membres de ma famille qui nous ont soutenus moralement et financièrement tout au long de nos études.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	4
PREMIERE PARTIE : HISTOIRE DE LA COMMUTATIVITE.....	5
CHAP 1 : DEFINITION DE LA COMMUTATIVITE.....	6
1-1 les lois de compositions.....	6
1-1-1 Activité Préliminaire.....	6
1-1-2 définitions et notations.....	7
1- 2 définition de la commutativité.....	7
1- 2- 1 Activité préliminaire.....	8
1- 2- 2 définition	8
1- 2- 3Quelques exemples des lois commutatives classiques	9
1- 2- 4 définition de la non-commutivite	9
CHAP 2 : EVOLUTION DE LA COMMUTATIVITE.....	10
2-1 DEFINITION Etymologique.....	10
2- 2 Résolubilité du groupe de Galois.....	11
2 - 2 - 1biographie	11
2- 3 L'ensemble des quaternions.....	12
2- 3 -1 biographie.....	12
2- 4 Relation entre le caractère archimédien du corps et la commutativité....	13
2- 5 Commutativité de tous les corps fini.....	14
2- 5 -1 Biographie.....	14
2- 6 Commutativité dans la mécanique quantique.....	15
DEUXIEME PARTIE : GENERALITE DE LA COMMUTATIVITE.....	16
CHAP 3: COMMUTATIVITE ENTANT QUE THEORIE MATHEMATIQUES.....	17
3- 1 Commutativité dans l'algèbre de groupe.....	17
3- 1- 2 Exemples de groupe commutatif.....	17
3- 2 Commutativité dans la théorie des corps.....	19
3- 2- 2 Commutativité de tous les corps fini.....	19
3- 2- 3 Démonstration	20
3- 2- 4 Les quaternions	23
3- 3 Le diagramme commutatif.....	26

CHAP 4 : Commutativité dans le langage parlée.....	27
4- 1 Généralité.....	27
4- 2 Corrélation entre l'addition, la multiplication et le langage	
Parlé.....	28
4- 2- 1 Généralité	28
4- 2- 2 Analogie entre la conjonction "ET" et l'addition.....	28
4- 2- 3 Analogie entre les adjectifs possessifs et la multiplication.....	28
CHAP 5 : COMMUTATIVITE DANS LES ACTIONS.....	30
5- 1 Généralité	30
5- 2 Exemple	30
CHAP 6 : COMMUTATIVITE DANS LA MECANIQUE QUANTIQUE NON	
RELATIVISTE.....	31
6- 1 Préliminaire	31
6- 2 Les opérateurs linéaires en mécanique quantique.....	31
6- 2 -1 Les opérateurs linéaires.....	31
6- 2- 2 Le commutateur.....	33
6- 2- 3 Les opérateurs linéaires en mécanique quantique.....	33
6- 2- 4 Signification de la non commutativité en mécanique quantique.....	34
TROISIEME PARTIE : PRATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES	
MATHEMATIQUE.....	36
CHAP 7 : IMPORTANCE DE LA COMMUTATIVITE POUR LA RESOLUBILITE DU	
GROUPE DE GALOIS.....	37
7 – 1 Groupe de Galois.....	37
7 – 1 – 1 définition.....	37
7 – 1 – 2 Théorème (correspondance de Galois)	37
7 – 2 Groupes résolubles et résolubilité des équations par radicaux.....	38
7 – 2 – 1 Définitions.....	38
7 – 2 – 2 théorème 1	38
7 – 2 – 3 Preuve	38
7 – 2 – 4 Théorème 2 (Galois).....	38
7 – 2 – 5 Preuve.....	38
7 - 3 Remarque	38

CHAP 8 COMMUTATIVITE CHEZ LES NATURELS.....	41
8 – 1 Commutativité de l'addition.....	41
8 – 1 – 1 Intérêt de cette commutativité de l'addition.....	41
8 – 2 Commutativité de la multiplication.....	42
8 – 2 – 1 Intérêt dans l'enseignement.....	42
8 – 3 Limite de La commutativité chez les naturels	43
CHAP 9 COMMUTATIVITE DANS LE SECONDAIRE.....	44
9 – 1 Problème de la commutativité dans l'enseignement des mathématiques.....	44
9 – 2 Quelques activités de commutativité au lycée.....	45
9 – 2 – 1 Activité 1	45
9 – 2 – 2 Remarque.....	46
9 – 2 – 3 Activité 2	47
9 – 2 – 4 Activité 3	48
CONCLUSION.....	51

INTRODUCTION

Ce travail de recherche s'intègre dans le cadre de l'obtention de diplôme de C.A.P.E.N (Certificat d'Aptitude Pédagogique à l'Ecole Normale) filière Mathématiques.

La commutativité est une propriété mathématiques qui présente beaucoup d'intérêt dans le calcul et dans la résolution de plusieurs problème d'arithmétique. Malgré cette bonne propriété elle pose aussi des problèmes pour les élèves. C'est pourquoi nous avons choisis comme thème : « LA COMMUTATIVITE ET QUELQUES PRATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES » afin de donner ces intérêt et ces problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

En abordant ce sujet, nous avons divisé ce travail en trois grandes parties. En premier lieu, nous voyons l'histoire de la commutativité. Cette partie nous conduira à connaître la définition de la commutativité et la non-commutativité ainsi que son évolution suivant le temps. En second lieu nous essayons de donner la généralité de la commutativité. Et enfin, nous essayons d'aborder la partie didactique et pédagogique de notre travail en donnant quelques pratiques dans l'enseignement des mathématiques.

PREMIERE PARTIE
HISTOIRE DE LA COMMUTATIVITE

CHAP 1 : DEFINITION DE LA COMMUTATIVITE

1-1 LES LOIS DE COMPOSITIONS

1-1-1 Activité Préliminaire

Plusieurs exemples nous montrent qu'on peut composer un peut n'importe quoi : prenons par exemple les opérations sur les ensembles comme l'intersection. Soit un ensemble E et $P(E)$ l'ensemble de ses parties .Si A et B sont deux parties de E (c'est à dire en écriture mathématiques $A, B \in P(E)$), nous savons que l'intersection de A et B (notée $A \cap B$) est une partie de E , élément de $P(E)$.

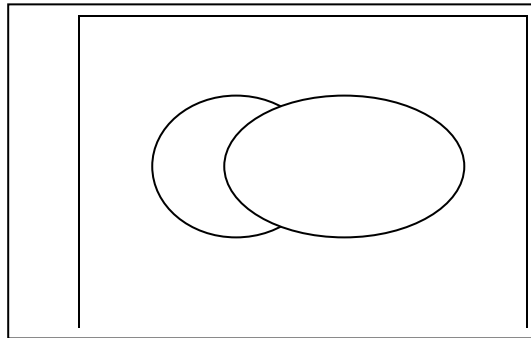


Figure 1: Intersection de A et B

Ainsi, à deux éléments quelconque A et B de $P(E)$, nous avons associée un élément $C = A \cap B$ de ce même ensemble $P(E)$. **C'est une loi de composition.**

Ici nous avons pris l'intersection de deux parties mais c'est aussi valable pour la réunion, la différence et la différence symétrique.

Mais, par contre la notion d'appartenance n'à rien à voir avec la notion de loi de composition.

Car une inclusion ou une appartenance est vraie ou fausse (c'est à dire si $A \in P(E)$, $B \in P(E)$, $A \subset B$ soit vraie soit fausse) alors qu'une loi de composition existe toujours pour une couple d'éléments .Et une loi de composition fournit une troisième élément, qui est en quelque sorte le « le résultat » tandis qu'une inclusion ou une appartenance ne peut fournir rien. Ce ne sont donc pas des outils de la même espèce

1-1-2 DEFINITIONS ET NOTATIONS

Voici alors la définition et les notations de la loi de composition sur un ensemble E.

Une loi de composition sur un ensemble E est une application f du produit cartésien $E \times E$ vers E.

En écriture mathématiques $f : E \times E \longrightarrow E$

$(x, y) \longrightarrow z$

L'image de (x, y) par f peut être notée en utilisant un signe opératoire quelconque.

Exemple : $d = c * f$; $C = A \cap B$ etc...

D'une manière générale, nous pouvons écrire :

$$z = x * y$$

Le signe étoile (*) est le signe opératoire de la loi *. L'élément z est le composée de x suivi de y ; c'est l'image de (x, y) par f.

Exemples :

L'addition sur $\mathbb{N}$ est une loi de composition sur $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a, b) & \longrightarrow & c = a + b \end{array}$$

La division sur $\mathbb{N}$ n'est pas une loi de composition sur $\mathbb{N}$.

Car il existe au moins un couple $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mais $a \setminus b$ n'est pas dans $\mathbb{N}$

Ex : $(2, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mais $2 \setminus 3 \notin \mathbb{N}$

1- 2 DEFINITION DE LA COMMUTATIVITE

Certaines lois présentent de l'intérêt du fait de leurs propriétés. Nous allons aborder maintenant l'une de ces propriétés qui est la commutativité.

1- 2- 1 Activité préliminaire

Sur un ensemble $E = \{a, b, c\}$ voici une loi de composition notée $(*)$ et définie par la table suivante.

	$*$	a	b	c
a		a	b	c
b		b	c	a
c		c	a	b

Figure 2 : Table de loi notée $(*)$

Pour la case rouge à gauche de la diagonale $b = b * a$.

Pour la case rouge à droite de la diagonale $b = a * b$.

Donc $b * a = a * b$. De la même manière on trouve que quel que soit le couple

$$(x, y) \in E \times E \quad x * y = y * x.$$

On dit que la loi $*$ définie ci-dessus est commutative dans $E = \{a, b, c\}$.

1- 2- 2 DEFINITION :

La loi de composition notée $*$ sur un ensemble E est commutative signifie :

Quel que soit le couple $(x, y) \in E \times E$,

$$x * y = y * x$$

1- 2- 3 : Quelques exemples des lois commutatives classiques :

Ensemble	Dénomination de la loi	Notation
N , Q ou R	Addition	+
	multiplication	X
P(E) : ensemble des parties de E	Réunion	U
	Intersection	$\cap$
	Différence symétrique	Δ
Z : {entiers relatifs}	Addition	+
	multiplication	X
Z/nZ	Addition	+
	multiplication	X

Tableau 1 : Exemples des lois commutatives classiques

1- 2- 4 DEFINITION DE LA NON-COMMUTATIVITE

D'après la définition de la commutativité que nous avons donner précédemment nous pouvons donner ainsi par la contraposée la définition de la non –commutativité.

La loi de composition notée $*$ sur un ensemble E est non-commutative signifie :

Il existe au moins un couple $(x, y) \in E \times E$, pour lequel

$$x * y \neq y * x$$

CHAP 2 : EVOLUTION DE LA COMMUTATIVITE

2-1 DEFINITION Etymologique

Vers le XIV^e siècle, la commutativité Dérive du radical de commutation.

Singulier	Pluriel
-----------	---------

commutativité	commutativités
----------------------	----------------

/kɔ.my.ta.ti.vi.te/	/kɔ.my.ta.ti.vi.te/
---------------------	---------------------

Commutativité /kɔ.my.ta.ti.vi.te/ *féminin*

1. (*Droit*) Juridiquement dont les prestations sont réputées équivalentes.
2. (*Mathématiques*) En algèbre opération dont le résultat n'est pas modifié quand on change (permute) l'ordre des facteurs ou des termes, comme l'addition et la multiplication.

2- 2 Résolubilité du groupe de Galois

1824 - Sur l'historique, l'affaire commence avec Niels Henrik Abel dans son Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré de 1824. C'est le premier à remarquer que le groupe de Galois doit avoir de bonnes propriétés de commutativité pour être résoluble. Il n'exprime pas la problématique en terme de groupe abstrait, c'est pour lui un sous-groupe d'un groupe de permutation des racines.



Figure 3 : Evariste Galois

2- 3 L'ensemble des quaternions

2- 3 -1 biographie



Figure 4 : William Rowan Hamilton

Durant les années 1832 à 1835, Hamilton se consacre à obtenir une présentation algébrique des nombres complexes. Il les introduit comme couple de réels, et définit sur eux addition et multiplication, tout en explicitant les liens avec les transformations du plan. Les années suivantes, il tente à tout prix de généraliser sa construction au triplet de nombres réels. Il n'y parvient pas, mais cela l'obsède, et il subit une nouvelle crise de dépression, devenant alors alcoolique.

16 oct. 1843. Le salut, selon ses propres dires, vient le 16 octobre 1843. Alors qu'il se promène avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin, il se rend subitement compte qu'on ne peut pas donner une structure multiplicative aux triplets de nombres réels, mais qu'on peut le faire pour les quadruplets. Tout excité par cette découverte, en traversant le Brougham Bridge, il aurait inscrit sur une des pierres du pont la formule de multiplication $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$. L'adoption des quaternions impose "d'oublier" la commutativité du produit. C'est alors une vraie révolution

2- 4 Relation entre le caractère archimédien du corps et la commutativité

1899. Hilbert montre par exemple que la preuve de l'égalité des aires entre deux parallélogrammes de même base et de même hauteur utilise nécessairement l'axiome d'Archimède. Hilbert montre également que, dans un corps, si on ne

suppose pas la multiplication commutative, alors nécessairement, cette commutativité du produit découle du caractère archimédien du corps ...

2- 4- 1 Preuve :

Pour montrer que $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$, l'idée est de prendre un élément $\mathbf{d}$ arbitrairement petit, et d'utiliser le caractère archimédien du corps pour encadrer $\mathbf{a}$ entre $\mathbf{nd}$ et $\mathbf{(n+1)d}$ et encadrer $\mathbf{b}$ entre $\mathbf{md}$ et $\mathbf{(m+1)d}$, pour deux entiers $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$. On utilise cet encadrement pour en déduire un encadrement arbitrairement petit de $\mathbf{ab-ba}$ et conclure que cette différence est nulle.

2- 5 Commutativité de tous les corps fini

2- 5 -1 Biographie



Figure 5 : Joseph Wedderburn

En 1905 - Membre de la Royal Society, il débuta ses études à l'université d'Édimbourg à 16 ans. Ses travaux portent sur les structures algébriques et tout particulièrement la théorie des corps, dans laquelle il exhibe des exemples de corps abstraits non commutatifs. En 1905 il publie le théorème portant maintenant son nom, et stipulant que tout corps fini est commutatif.

2- 6 Commutativité dans la mécanique quantique

1920 - Matrix est le mot anglais pour matrice, qui est un concept mathématique qui a émergé au XIX^{ème} siècle. Mais ce n'est qu'au XX^{ème} siècle qu'il est devenu un concept central du renouveau de plusieurs domaines des mathématiques et de la physique. En effet vers les années 1920 on parlera de mécanique des matrices! Et ce jusqu'à aujourd'hui où les matrices avec leur caractéristique essentielle, la "non commutativité", sont à la source des probabilités ou de la géométrie non commutatives.

En 1926, il constate que le principe d'incertitude de Heisenberg était une déclaration à la non commutativité de la mécanique quantique, il démontre

l'équivalence physique de la mécanique ondulatoire et de la mécanique des matrices.

1932 - Cette formule mathématique réconcilie Heisenberg et Schrödinger et von Neuman publie en 1932 son classique Les Fondements mathématiques de la mécanique quantique

1972 - Dans sa thèse en 1972, Alain Connes montre qu'une algèbre de von Neumann possède une évolution canonique. Une algèbre non commutative "tourne" avec le temps, elle a une période. La non-commutativité implique le sens et même l'évolution. De la non-commutativité surgit un paramètre qui ressemble au tempsMais comment en être sûr ?

3 juil 2003 - La nature est souvent non-commutative. Selon le lauréat, la non-commutativité est dans le coeur de la mécanique quantique et ceci mène à des phénomènes nouveaux et inattendus. La géométrie non-commutative est beaucoup utilisée par les physiciens, notamment dans la "théorie des cordes"

1 déc 2004 - La commutativité est cette propriété qui indique que le résultat de la multiplication de 2 par 3 est le même que celui de la multiplication de 3 par 2. L'apparition de la non-commutativité impose de repenser en profondeur l'idée que l'on se fait de la notion d'espace et de symétrie.

DEUXIEME PARTIE

GENERALITE DE LA COMMUTATIVITE

CHAP 3: COMMUTATIVITE ENTANT QUE THEORIE MATHEMATIQUES

3- 1 Commutativité dans l'algèbre de groupe

Définitions :

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne

$(g, h) \longrightarrow g * h$ telle que :

- (a) Quels que soient $g, h, k \in G$, on a $(g * h) * k = g * (h * k)$ (associativité) ;
- (b) Il existe un $e \in G$, dit élément neutre, tel que quel que soit $g \in G$, on a $e * g = g * e = g$;
- (c) Quel que soit $g \in G$, il existe un $g^{-1} \in G$, dit symétrique ou inverse de g , tel que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
- (d) En général $g * h \neq h * g$. Si l'on a $g * h = h * g$, on dit que g et h *commutent*.

Si tous les éléments de G commutent deux à deux, on dit que **G est commutatif (ou abélien)**.

Dans ce cas la loi $*$ sera souvent notée $+$, le neutre e noté 0 et le symétrique y noté $-x$.

3- 1- 2 Exemples de groupe commutatif

A- les groupes finis commutatifs

a) Théorème :

Soit G un groupe cyclique fini. G est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m élément de $\mathbb{N}^*$.

Tout groupe d'ordre un nombre premier est cyclique (**donc commutatif**).

Démonstration :

Comme G est cyclique, il est de la forme :

$G = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ où $a \in G$ (a s'appelle un générateur de G).

Montrons que si G est fini, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Pour cela, on considère l'application : $\varphi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow G$
 $n \longmapsto a^n$

· $\text{Im}(\varphi_a) = G$ donc φ_a est **surjectif**. (Car G est cyclique engendré par a)

·

$$\varphi_a(n + n') = a^{n+n'} = a^n a^{n'} = \varphi_a(n) \varphi_a(n')$$

donc φ_a est un **morphisme de groupes**.

On sait que le noyau d'un morphisme de groupe est un sous-groupe, donc :

$\text{Ker}(\varphi_a) = \{n \in \mathbb{Z} \mid a^n = 1\}$ est un **sous-groupe de $\mathbb{Z}$** .

Par conséquent, il existe m de $\mathbb{N}$ tel que : $\text{Ker}(\varphi_a) = m\mathbb{Z}$.

Deux cas se présentent alors :

· $m = 0$: et alors $\text{Ker}(\varphi_a) = \{0\}$, φ_a est injective et donc bijective. Donc G est infini et isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Ce qui n'est pas le cas, par hypothèse.

· $m \neq 0$: Définissons alors : $\psi_a : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow G$
 $n \longmapsto a^n$

Ce nouveau morphisme est bijective donc **G isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$** .

Soit G un groupe d'ordre un nombre premier p . Soit $a \neq 1$ dans G . Notons m son ordre ($m > 1$ car $a \neq 1$).

Comme m divise p , on a nécessairement $m = p$ donc $G = \langle a \rangle$ cyclique, or d'après ce qu'on a vu précédemment G isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ **donc commutatif**.

Autre exemples sans démonstration

- Tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est commutatif
- Le produit direct de groupe commutatif est commutatif
- Le produit semi - directe de groupe commutatif est commutatif

3- 2 Commutativité dans la théorie des corps

3- 2- 1 Définitions :

a) Un groupe commutatif $(A, +)$ est un anneau s'il est muni d'une seconde loi notée généralement multiplicativement vérifiant les propriétés suivantes :

• Associativité de la multiplication :

Pour tout x, y, z de A , $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$

• Distributivité par rapport à l'addition :

Pour tout x, y, z de A , $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ et

$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$$

• Existence d'un élément neutre noté 1 :

Pour tout x de A , $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Si de plus la seconde loi est commutative : Alors l'anneau $(A, +, \cdot)$ est dit commutatif.

b) Un anneau commutatif A dans lequel tout élément non nul est inversible pour la multiplication (pour tout x de A , il existe y appartient à A tel que $x \cdot y = 1$) est appelé **un corps**. (L'inverse y de x sera souvent noté x^{-1})

3- 2- 2 Commutativité de tous les corps fini

En mathématiques et plus précisément en algèbre, le théorème de Wedderburn est un théorème sur les corps. Il affirme que tout corps fini est commutatif.

Il a été nommé en l'honneur de Joseph Wedderburn (1882 - 1948) pour son article de **1905** proposant trois démonstrations de ce théorème. Si les deux dernières

découlent directement des travaux de Dickson, que Wedderburn connaissait, la première convainc la communauté de la paternité de Wedderburn sur le théorème. Ce n'est que plus tard que la première preuve apparut comme incomplète. Par la suite, cette démonstration fut complétée et de nombreuses autres proposées, progressivement moins techniques. Cependant, le théorème stipulant que tous les corps finis sont commutatifs porte le nom de théorème de Wedderburn.

Voici une démonstration proposée par Ernst Witt en **1931**:

3- 2- 3 Démonstration :

Dans ce paragraphe, K est un corps fini **non commutatif** et p sa caractéristique. La démonstration proposée est une démonstration par l'absurde.

Extension algébrique

Comme tout corps, K contient un corps premier, (c'est-à-dire le plus petit sous-corps contenant 0 et 1). Sa caractéristique est non nulle car le corps est fini, K contient donc F_p . Ce corps est commutatif car isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit Z le centre du corps K et q son cardinal. Z est un corps commutatif. Comme K est de cardinal fini, il est muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension finie d sur Z . Son cardinal est donc égal à q^d .

Tout sous-corps K' de K contenant Z est un espace vectoriel sur Z donc son cardinal est aussi une puissance de q et K est un espace vectoriel sur K' donc le cardinal de K est une puissance de K' . Ceci démontre que la dimension de K' est un diviseur de celle de K sur Z .

Soit x un élément de K et Z_x l'ensemble des éléments de K commutant avec x . Z_x est un sous-corps de K contenant Z . Si d_x est la dimension de Z_x sur K alors d_x est un diviseur de d .

Soit q le cardinal du centre de K et Z_x l'ensemble des éléments de K commutant avec x . Z_x est de cardinal une puissance d_x ième de q . De plus si d est l'entier tel que le cardinal de K est égal à q^d alors d_x divise d .

K^* , le groupe des éléments inversibles muni de la loi multiplicative, est partitionné par l'action de conjugaison. L'action de conjugaison est l'action de groupe qui fait opérer

K^* sur lui-même par la loi $*$:

$$\forall g, x \in K^* \quad g * x = g.x.g^{-1}$$

La Formule des classes indique que la classe de x est de cardinal celui du K^* divisé par celui de Z_x^* , car le centralisateur de x dans K^* est le sous-corps des éléments commutant avec x exceptée la valeur zéro. Les éléments de Z^* ont une classe réduite à un élément. Le Cardinal de K^* est égal à la somme des cardinaux des différentes classes de conjugaison. On obtient, si (x_i) est une suite de représentants des k classes de conjugaison différentes de celles ne contenant qu'un singleton élément de Z^* :

$$\text{Card}(K^*) = \text{Card}(Z^*) + \sum_{i=1}^k \frac{\text{Card}(K^*)}{\text{Card}(Z_{x_i}^*)}$$

Cette formule, d'après les valeurs calculées au premier paragraphe donne:

$$q^d - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^k \frac{q^d - 1}{q^{d_{x_i}} - 1}$$

Cela permet de définir la fraction rationnelle et l'égalité suivantes:

$$F(X) = X^d - 1 - \sum_{i=1}^k \frac{X^d - 1}{X^{d_{x_i}} - 1} \quad \text{et} \quad F(q) = q - 1$$

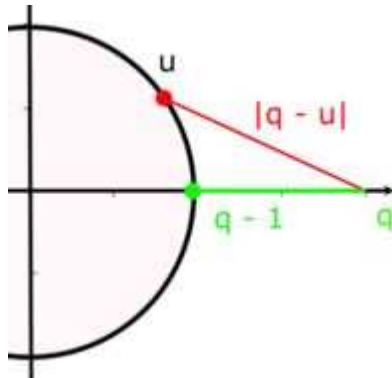
La théorie des polynômes cyclotomiques à coefficients dans les nombres rationnels démontre l'égalité suivante, si $\Phi_e[X]$ désigne le polynôme cyclotomique d'indice e .

$$X^n - 1 = \prod_{e|n} \phi_e[X]$$

Le polynôme cyclotomique admet pour racine toutes les racines primitives de l'unité. Le dénominateur de chaque fraction rationnelle ne possède aucune racine primitive d -ième de l'unité car tous les d_x divise strictement d (si ce n'était pas le cas, alors le cardinal du centralisateur de x serait égal à celui de K^* et x serait un élément de Z^*). Chacune des fractions est donc un polynôme multiple du polynôme cyclotomique d'indice d . C'est aussi le cas pour le premier terme. $F[X]$ est donc un polynôme multiple du polynôme cyclotomique d'ordre d . La division euclidienne de $F[X]$ par $\Phi_d[X]$ dans les rationnels n'a pas de reste, la division euclidienne de $F[X]$ par $\Phi_d[X]$ dans les entiers est possible car $\Phi_d[X]$ est unitaire et à pour reste le même que celui la division dans les rationnels (car le reste est unique). Le reste étant égal à zéro, on en déduit que $F[X]$ est le produit de $\Phi_d[X]$ par un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On a démontré que:

$$\exists Q[X] \in \mathbb{Z}[X] \quad F[X] = Q[X] \cdot \phi_d[X]$$

Conclusion



Le trait vert correspond à $q-1$ et le rouge $(q-u)$

Au point q , $F[X]$ prend la valeur $q - 1$. $Q[X]$ ne peut être nul et, comme il est à coefficients entiers sa valeur, en valeur absolue, est au moins égal à 1. Ce qui démontre que :

$$|\phi_d[q]| \leq q - 1$$

Or $\Phi_d[q]$ est le produit des termes $q - z$ quand z décrit l'ensemble des racines primitives d ième de l'unité (les racines primitives de l'unité sont celles de $\Phi_d[X]$ et le polynôme est unitaire). Cela démontre que au moins un des facteurs est plus petit, en valeur absolue à $q - 1$, il existe donc au moins une racine d -ième primitive de l'unité u et un entier strictement supérieur à un (car Z contient au moins deux éléments 0 et 1 tel que:

$$|q - u| \leq q - 1$$

Or cette majoration est impossible, ce qui termine le raisonnement par l'absurde. La figure de droite illustre cette impossibilité. La valeur de $q - 1$ est illustrée en vert, celle de $q - u$ en rouge. À la fois l'abscisse et l'ordonnée en valeur absolue du trait rouge sont supérieures à celle du trait vert, car on remarque que u ne peut être égal à 1 car c'est une racine primitive.

3- 2- 4 Les quaternions : un des premiers exemples de corps non commutatif.

Un **quaternion** est un type de nombre hypercomplexe. L'ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$, constitue une extension de l'ensemble des nombres complexes, extension

similaire à celle qui avait conduit de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ à celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

L'ensemble des quaternions peut être muni d'une addition et d'une multiplication qui font de lui un des premiers exemples de corps non commutatif.

Principe

Hamilton décrit un quaternion comme un quadruplet de nombres réels, le premier élément étant un « scalaire », et les trois éléments restants formant un « vecteur », ou « imaginaire pur ».

Il put ainsi définir une multiplication avec les bonnes propriétés. Celle-ci peut se résumer à cette table de multiplication :

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Tableau 2 : table de multiplication

Tout quaternion H peut être considéré comme une combinaison linéaire des quatre quaternions "unités" $1, i, j$, et k :

$$H = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (\text{où } a, b, c, d \text{ sont des nombres réels}).$$

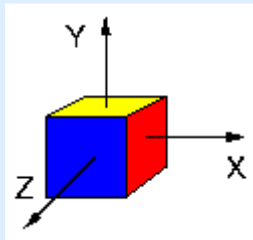
Non-commutativité

D'après la table de multiplication précédant :

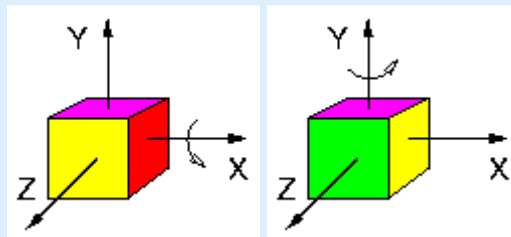
$i j = k$; $j i = -k$ donc $i j \neq j i$ etc...(ce qui montre la non commutativité de la multiplication)

Cette non commutativité est d'ailleurs tout à fait compatible avec une interprétation géométrique des quaternions, par exemple les rotations

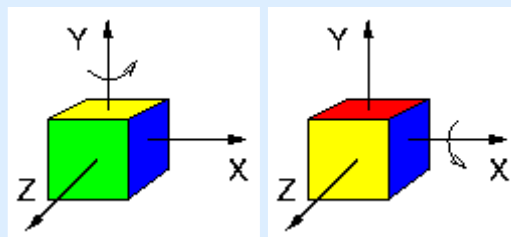
vectorielles du plan sont commutatives, mais celles de l'espace ne le sont pas :



- On effectue une rotation autour de l'axe X suivie d'une rotation autour de l'axe Y:



- On effectue une rotation autour de l'axe Y suivie d'une rotation autour de l'axe X:



- Les deux cubes ont subi les mêmes rotations, mais dans un ordre différent. Le résultat final est différent, ce qui exprime de façon graphique la non-commutativité des rotations.

Figure 6 : non-commutativité des quaternions

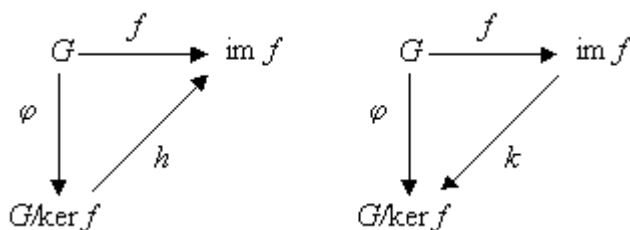
Application

Alors que cela est discutable en dimension 3, les quaternions ne peuvent pas être employés dans d'autres dimensions. De toute façon, la notion de vecteur avait presque universellement remplacé celle des quaternions en science et en technologie dans le milieu du XX^e siècle.

Aujourd'hui, les quaternions trouvent leur place en infographie, en théorie de la commande, dans le traitement du signal, dans la commande de mouvement et la mécanique orbitale, principalement pour représenter les rotations et les orientations en dimension 3. Par exemple, il est fréquent que les systèmes de commande de déplacement d'un vaisseau spatial soient régis en termes de quaternions. La raison est qu'effectuer beaucoup d'opérations sur les quaternions est numériquement plus stable que d'effectuer beaucoup d'opérations sur les matrices.

3- 3 Le diagramme commutatif

En mathématiques, et plus spécialement les applications de la théorie des catégories, un *diagramme commutatif* est un diagramme d'objets et de morphismes tels que, lorsque l'on choisit deux objets, on peut suivre un chemin quelconque à travers le diagramme et obtenir le même résultat par composition des morphismes. Par exemple, le premier théorème de l'isomorphisme est un triangle commutatif comme suit :



Puisque $f = h \circ \varphi$, le diagramme de gauche est commutatif; et puisque $\varphi = k \circ f$, il en est de même pour le diagramme de droite.

Sur le diagramme de gauche, il est possible d'aller de G à $\text{Im } f$ par deux chemins différents : soit directement grâce à l'application f , soit par composition des applications h et φ . De même, le diagramme de droite est commutatif, puisqu'on peut aller de G à $G/\ker f$ soit directement par l'application φ , soit par la composition de k par f en passant par l'ensemble intermédiaire $\text{Im } f$.

CHAP 4 : COMMUTATIVITE DANS LE LANGAGE PARLEE

4- 1 Généralité:

Nous supposons que vous acceptez l'idée qu'une lettre est une sorte de dessin, donc sans trop rentrer dans les détails une « forme géométrique ». Donc le langage écrit est une certaine forme géométrique présentant un autre sens précis indépendamment de sa forme.

La photo que nous présentons est une phrase qui vous explique la non commutativité de notre langage à partir d'un exemple célèbre tiré de la pièce de MOLIERE (monsieur JOURDAIN). Qu'on écrive cette phrase en commutant l'ordre des mots peut à la rigueur, ainsi que MOLIERE le montre en garder le sens, en en altérant la simplicité, mais si je me réfère à l'unité de signe qui est la lettre, je peux en classer les lettres soit par consonnes et voyelles soit autrement, et obtenir une commutativité algébrique impeccable (au sens de la géométrie analytique cartésienne)

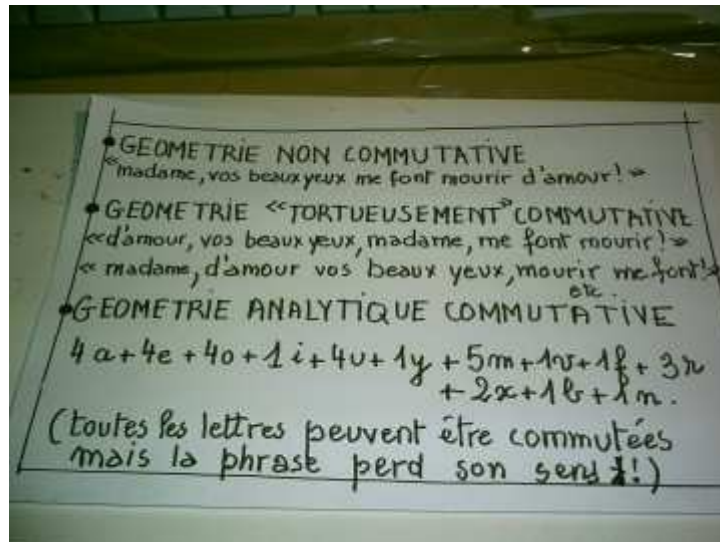


Photo 1 : commutativité du langage

4- 2 Corrélation entre l'addition, la multiplication et le langage parlé

4- 2- 1 Généralité :

Comme les mots sont les symboles de la langue parlée, les nombres sont les symboles de l'arithmétique. Les symboles doivent pouvoir être combinés selon certains règles dont l'ensemble constitue la syntaxe : par cet exemple, il est de règle en français que le sujet précède le verbe ; de même, on sait que la multiplication de deux nombre entiers est commutative : $a \times b = b \times a$.

Cependant l'existence de règles n'est pas suffisante ; il faut que celles-ci aient une signification. Si l'on combine certains mots dans un certain ordre, la phrase finale doit être comprise de chacun ; elle doit avoir un sens.

De même, le résultat d'une opération doit avoir un sens.

4- 2- 2 Analogie entre la conjonction "ET" et l'addition

Le signe (+) qui se lit plus, a un équivalent dans le langage parlé : la conjonction *ET*

Nous savons qu'il est équivalent de dire Pierre et Jean ou Jean et Pierre.

Nous écrirons Pierre et Jean = Jean et Pierre.

Si nous représentons Pierre par le symbole P et Jean par J nous obtenons :

$$P + J = J + P \quad (\text{c'est la commutativité de l'addition}).$$

4- 2- 3 Analogie entre les adjectifs possessifs et la multiplication

a) Non commutativité

Comme l'addition, la multiplication aussi a des équivalents dans le langage parlé :ce sont les adjectifs possessifs (de mon, de ma, de mes,etc...) .En générale ces adjectifs ne sont pas commutatifs, comme le montre les exemples suivants :

- Père de mon cousin $\neq$ cousin de mon père
- Mère de ma fille $\neq$ fille de ma mère
- Les chiens de nos voisins $\neq$ les voisins de nos chiens

b) commutativité :

On peut avoir la commutativité si on se limite dans un certain ensemble.

On dit souvent « les amis des amis sont des amis », « les ennemis des amis sont des ennemis ».

Ce vieil adage permet de fabriquer une loi de composition commutative sur l'ensemble $E = \{\text{amis, ennemis}\}$ et sa table est la suivante :

De mes	Amis	Ennemis
Amis	Amis	Ennemis
Ennemis	Ennemis	Amis

Tableau 2 : table de loi « de mes »

A partir de cette table on a :

Ennemis de mes amis = ennemis

Amis de mes ennemis = ennemis

C'est-à-dire : ennemis de mes amis = amis de mes ennemis. *D'où la commutativité*

c) Remarque :

Si on remplace amis par + et ennemis par - cette table est identique à la

Table de la loi de composition sur $E = \{+, -\}$ que l'on appelle « règle de signe » en arithmétique

X	+	-
+	+	-
-	-	+

CHAP 5 : Commutativité dans les actions

5- 1 Généralité :

Hors de la salle de classe, personne ne tient la commutativité pour acquise. Lorsque l'on s'habille le matin, peu importe si on met sa montre avant ou après ses chaussures : « mettre sa montre » commute avec « mettre ses chaussures ».

« Mettre ses chaussettes », en revanche, ne commute pas avec « mettre ses chaussures » et même les jeunes enfants savent dans quel ordre effectuer ces gestes pour obtenir un résultat satisfaisant.

En mathématiques, les nombres commutent mais pas les actions.

5- 2 Exemple :

Plusieurs exemples montrent cette non commutativité de l'action :

- Ce n'est pas la même chose d'ouvrir une canette de bière et de la Boire, et d'essayer de la boire puis de l'ouvrir.

CHAP 6 : COMMUTATIVITE DANS LA MECANIQUE QUANTIQUE NON RELATIVISTE

6- 1 Préliminaire :

En mécanique classique, un système physique est modélisé par son état à un instant donné et son équation d'évolution. L'évolution est modélisée par une équation différentielle du premier ordre. Une observable, par exemple l'énergie, est une fonction réelle.

D'après Tarassov dans son livre intitulée «*Physique quantique et opérateurs linéaires* » la mécanique quantique non relativiste ne change pas fondamentalement cette approche. On dispose toujours d'un espace des états et d'une équation d'évolution. Mais, comme *les observables sont des opérateurs* sur un espace de Hilbert, *la commutativité est perdue*. La signification physique de ce phénomène est qu'il est impossible d'assigner à deux observables (qui ne commutent pas) des valeurs parfaitement définies sur un état du système (problème de diagonalisation

simultanée d'opérateurs). Dans le langage du physicien, on retrouve cela sous la forme des inégalités de Heisenberg.

6- 2 Les opérateurs linéaires en mécanique quantique

6- 2 -1 Les opérateurs linéaires

a) Définition :

Un opérateur agit sur une fonction pour produire une autre fonction. Si on le symbolise par L , on peut alors écrire :

$$L\psi(x) = \varphi(x)$$

Cela signifie que l'opérateur L agissant sur la fonction $\psi(x)$, produit une nouvelle fonction $\varphi(x)$.

On dit que l'opérateur L est linéaire s'il satisfait à la condition

$$L(\psi_1 + \psi_2) = L\psi_1 + L\psi_2 \quad ; \quad L(a.\psi) = a.L\psi$$

L'action d'un opérateur sur une fonction peut être exprimée sous une forme faisant intervenir une intégrale définie ou une intégrale non propre.

$$L\psi(x) = \int L(x+y)\psi(y)dy.$$

La quantité $L(x+y)$ porte le nom *noyau de l'opérateur*. Si la variable varie discrètement, on aura :

$$L\psi_n = \sum L_{nm}\psi_m.$$

L'ensemble de tous les coefficients L_{nm} porte le nom de matrice de l'opérateur $\hat{L}$.

L'équation fondamentale de la théorie des opérateurs linéaires se présente sous la forme: $L\psi = \lambda\psi$ Les nombres λ forment un spectre de valeurs propres de l'opérateur L .

b) opérateur hermitien et opérateur unitaire

Désignons par L^+ l'opérateur conjugué de L . A l'aide de la notion d'opérateur conjugué on arrive à déterminer deux types importants d'opérateurs linéaires : les opérateurs hermitiens et les opérateurs unitaires. Dans le cas où

$$L = L^+,$$

L'opérateur L est dit opérateur hermitien. Toute fonction limitée peut être développée en série (intégrale) de fonctions propres de l'opérateur hermitien. Pour cela représentons une fonction $\Phi(x)$ sous forme d'une série de fonctions propres

$\psi_n(x) : \Phi = \sum c_n \psi_n$. Dans le cas où

$$L^+ \cdot L = 1,$$

L'opérateur L est dit opérateur unitaire.

6- 2- 2 Le commutateur

Le symbole $[M, L] = M L - L M$ est appelé le commutateurs des opérateur L et M . Si les opérateurs sont commutatifs, cette propriété s'exprime par $[M, L] = 0$.

a) Théorème :

Si les opérateurs L et M ont des fonctions propres communes et que celles-ci forment un système fermé, les opérateurs sont commutatifs.

b) Démonstration :

Désignons par $\psi_{\lambda\mu}(x)$ les fonctions propres communes aux opérateurs L et M (l'indice double $\lambda \mu$ consigne le fait que ces fonctions propres sont communes aux deux opérateurs). Il est évident que $ML\psi_{\lambda\mu}(x) = \lambda M\psi_{\lambda\mu}(x) = \lambda \mu \psi_{\lambda\mu}(x)$

$$LM\psi_{\lambda\mu}(x) = \mu L\psi_{\lambda\mu}(x) = \mu \lambda \psi_{\lambda\mu}(x)$$

Il en résulte que :

$$(ML-LM) \psi_{\lambda\mu}(x) = 0$$

Et puisque l'on sait que les fonctions $\psi_{\lambda\mu}(x)$ forment un système fermé, il s'ensuit que pour tout fonction $\Phi(x)$ on doit avoir,

$$(\mathbf{ML}-\mathbf{LM})\Phi(x) = \sum c_{\lambda\mu}(\mathbf{ML}-\mathbf{LM})\psi_{\lambda\mu}(x) = 0$$

Et c'est ce qu'il fallait démontrer.

6- 2- 3 Les opérateurs linéaires en mécanique quantique

Le théorème précédant nous dit qu'à une certaine condition un opérateur linéaire peut être commutative. Par contre, en mécanique quantique les opérateurs ne sont pas commutatifs. Dans le livre «*Physique quantique et opérateurs linéaires* » Tarassov a dit que ces opérateurs non commutatifs jouent deux rôles très importants dans la mécanique quantique.

a) Rôle que jouent les opérateurs en mécanique quantique

En ce qui concerne le rôle que jouent les opérateurs en mécanique quantique on doit tenir compte des circonstances suivantes :

Premièrement : en mécanique quantique on fait correspondre à toute variable dynamique (coordonnée spatiale, énergie, impulsion, moment, etc.) un certain opérateur hermitien. Cela revient à affirmer qu'à côté de l'opérateur de l'énergie $\mathbf{H}$ on doit introduire d'autres « opérateurs physiques », tels que l'opérateur de coordonnées $\mathbf{r}$ (vecteur), l'opérateur de l'impulsion $\mathbf{p}$ (vecteur), l'opérateur de moment $\mathbf{M}$ (vecteur), etc. Il est fort important qu'on arrive parfaitement à incorporer dans la mécanique quantique les corrélations dynamiques de la mécanique classique en maintenant leur forme, à condition d'y substituer à la place des grandeurs physiques qui y figurent les opérateurs hermitiens convenables. Par exemple :

Mécanique classique

$$(\text{Vect})\mathbf{M} = (\text{vect } \mathbf{r} \times \text{vect } \mathbf{p})$$

$\mathbf{M}$ = vecteur moment

$\mathbf{r}$ = vecteur de position

$\mathbf{p}$ = vecteur de l'impulsion

Mécanique quantique

$$\text{vect } \mathbf{M} = (\text{vect } \mathbf{r} \times \text{vect } \mathbf{p})$$

On doit se tenir compte de ce qu'il n'existe pas d'analogie formelle parfaite entre les appareils de la mécanique classique et de la mécanique quantique. D'autre part, on trouve en mécanique quantique des opérateurs n'ayant pas d'analogue classique.

Deuxièmement : pour passer d'une représentation à une autre, sans que la signification physique du problème en soit altérée, on utilise les opérateurs unitaires.

6- 2- 4 Signification de la non commutativité en mécanique quantique

Nous avons déjà dit dans la paragraphe préliminaire de ce chapitre qu'une caractéristique essentielle des systèmes de la mécanique quantique est l'impossibilité de donner des valeurs exactes simultanées a certains ensembles d'observables .C'est une très forte motivation pour introduire des observables qui ne commutent pas.

Exemple : (Principe d'incertitude de Heisenberg)

Prenons par exemple, le fameux principe d'incertitude de Heisenberg selon lequel on ne peut mesurer simultanément la coordonnée de position et l'impulsion d'une microparticule avec la même précision.

Voici la relation d'incertitude d'Heisenberg :

$\Delta p_x \Delta x \geq h$. avec Δx représente l'incertitude sur la valeur de la coordonnée x
 Δp_x l'incertitude sur la valeur de la projection sur l'axe x de son
impulsion

h la constante de Planck elle vaut $1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J}$

plus Δx est petit, plus Δp_x est grand et inversement. Si la particule est localisée en un point déterminé x , l'incertitude sur la valeur de la projection sur l'axe x de son impulsion sera indéfiniment grande. Si par contre, la valeur d'une microparticule est bien déterminée, la position de la microparticule sur l'axe x est parfaitement indéterminée.

On peut alors admettre que la microparticule possède bien une certaine coordonnée de position et une certaine impulsion, mais que la relation d'incertitude rend impossible leur mesure simultanée.

Cet principe d'incertitude est équivalent à la non-commutativité de deux opérateurs correspondants.

En utilisant les opérateurs

Soit (vect) $\mathbf{p}$ l'opérateur de l'impulsion, $\mathbf{p}_x$ sa projection sur l'axe x.

Soit $(\text{vect})\mathbf{r}$ l'opérateur de la coordonnée, $\mathbf{r}_y$ sa projection sur l'axe y.

Calculons le commutateur $[\mathbf{p}_x, \mathbf{r}_y]$.

$$[\mathbf{p}_x, \mathbf{r}_y] \psi = -i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial r_x} (r_y \psi) - r_y \frac{\partial}{\partial r_x} \psi \right\} = -i\hbar \frac{\partial r_y}{\partial r_x} \psi$$

$$[\mathbf{p}_x, \mathbf{r}_y] = -i\hbar \frac{\partial r_y}{\partial r_x} \neq 0 \text{ donc ce n'est pas commutatif. Cela signifie qu'on ne peut}$$

mesurer simultanément la coordonnée de position et l'impulsion d'une microparticule

TROISIEME PARTIE

PRATIQUES DE LA COMMUTATIVITE DANS

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

CHAP 7 : Importance de la commutativité pour la résolubilité du groupe de Galois

La condition de commutativité est très utilisée surtout dans les théories algébriques. Mais le temps ne nous a pas permis de citer et de montrer ces théorèmes et définitions nécessitant la condition de commutativité.

Dans notre travail nous n'avons pas donné que son importance dans **la théorie de groupe résoluble et surtout la résolubilité du groupe de Galois** que nous avons pris dans un article de wikipédia.

7 – 1 Groupe de Galois

7 – 1 – 1 Définitions : a) Le groupe de Galois d'une extension de corps $K \subset L$, noté $\text{Gal}(L|K)$, est le groupe des K -automorphismes de L , i.e. des automorphismes $\sigma : L \rightarrow L$ tels que pour tout x de K , $\sigma(x) = x$.

b) Le groupe de Galois d'un polynôme P de $K[X]$ est le groupe

$\text{Gal}(L|K)$ ou L est le corps de décomposition de P sur K .

7 – 1 – 2 Théorème : (correspondance de Galois) Soient $K \subset N$ et $K \subset L$ deux extensions normales avec $L \subset N$. Alors :

1. $\text{Card Gal}(N|K) = [N : K]$.
2. Il existe une bijection $H \rightarrow \text{inv}(H)$ de l'ensemble des sous-groupes de G sur l'ensemble des corps intermédiaires entre K et N .
3. $\text{Gal}(N|L)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}(N|K)$.
4. Le groupe quotient $\text{Gal}(N|K)/\text{Gal}(N|L)$ est isomorphe à $\text{Gal}(L|K)$.

7 – 2 Groupes résolubles et résolubilité des équations par radicaux.

7 – 2 – 1 Définitions : a) Un groupe fini G est dit résoluble s'il existe une suite finie $G_0, G_1, \dots, G_r$ de sous-groupes de G , appelée suite de résolubilité, telle que

1. $\{e\} = G_r \subset G_{r-1} \subset \dots \subset G_0 = G$.
2. G_{i+1} est distingué dans G_i pour tout $0 \leq i \leq r - 1$.
3. G_i/G_{i+1} est un *groupe commutatif* pour tout $0 \leq i \leq r - 1$.

De façon équivalente, un groupe G est résoluble s'il existe un entier s tel que

$D^s(G) = \{e\}$, ou l'ensemble $D(G)$ désigne le groupe engendré par les commutateurs de G , i.e. les éléments $[x, y] = x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x \cdot y$ pour tous x et y dans G .

b) Un polynôme P de $K[X]$ est dit résoluble par radicaux s'il existe une extension radicale $L \subset K$ contenant le corps de décomposition de P sur K .

7 – 2 – 2 théorème 1 :

Tout groupe commutatif est résoluble.

7 – 2 – 3 Preuve :

(on prend $G_0=G$ et $G_1=\{e\}$: G_1 est bien un sous-groupe distingué de G et G_0/G_1 est isomorphe à G et est donc commutatif)

7 – 2 – 4 théorème 2 : (Galois)

Si un polynôme P est résoluble par radicaux alors son groupe de Galois est résoluble.

7 – 2 – 5 Preuve :

Commençons par montrer que le quotient d'un groupe résoluble G par un sous-groupe distingué H est résoluble. Soient $\pi : G \rightarrow G/H$

L'homomorphisme canonique et $r \geq 1$ tel que $D^r(G) = \{e\}$.

$$\text{Comme } \pi(D(G)) = D(\pi(G)),$$

On obtient par récurrence

$$D^r(G/H) = \pi(D^r(G)) = \pi(e) = H$$

D'où la résolubilité du quotient de G par H . Soit $P \in K[X]$ un polynôme résoluble par radicaux dont on note N le corps de décomposition. Alors, il existe un corps L contenant N tel que l'extension $K \subset L$ soit normale et radical.

De plus, la tour radicale $K_0, K_1, \dots, K_r$ associée peut être choisie de telle sorte que chacune des extensions $K_i \subset K_{i+1}$ soit **commutative**, i.e. $\text{Gal}(K_{i+1} | K_i)$ est

commutatif. Pour tout $0 \leq i \leq r$, posons $G_i = \text{Gal}(L | K_i)$. Il est clair que $\{id\} = G_r \subset G_{r-1} \dots \subset G_0 = G$.

De plus, les extensions $K \subset K_i$ étant normales, le théorème (correspondance de Galois) permet d'affirmer que G_{i+1} est distingué dans G_i et que $G_i/G_{i+1} \sim \text{Gal}(K_{i+1} | K_i)$.

Les extensions $K_i \subset K_{i+1}$ étant par ailleurs abéliennes, $\text{Gal}(K_{i+1} | K_i)$ est **commutatif** d'où la **résolubilité de $\text{Gal}(L | K)$** . Or, d'après le théorème (correspondance de Galois),

$$\text{Gal}(N | K) \sim \text{Gal}(L | K) / \text{Gal}(L | N).$$

Il en résulte que le groupe $\text{Gal}(N|K)$ lui-même est résoluble.

7 -3 Remarque

D'après les paragraphes que nous avons suivis dans ce chapitre nous pouvons remarquer que le groupe de Galois doit avoir de bonnes propriétés de commutativité pour être résoluble.

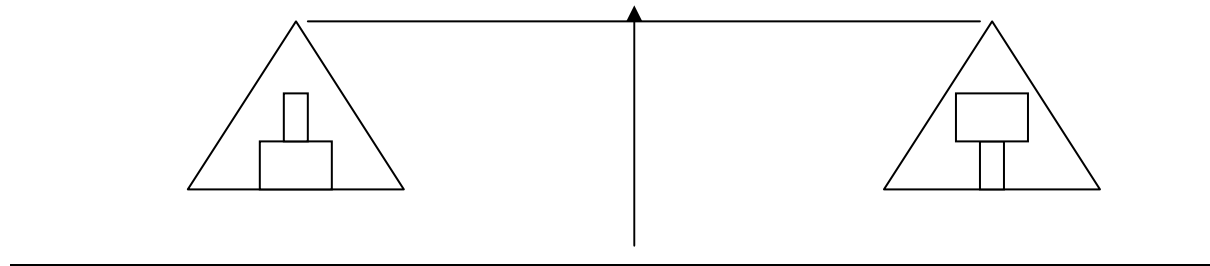
CHAP 8 : COMMUTATIVITE CHEZ LES NATURELS

Dans l'école primaire on apprend aux élèves l'arithmétique qui est une branche de mathématiques ou on travail dans l'ensemble $\mathbf{N} = \{\text{entiers naturels}\}$; dans cet ensemble l'addition et la multiplication sont commutative ; on apprend donc aux élèves qu'on peut additionner ou multiplier sans tenir compte de l'ordre ou on effectue l'opération. Par contre la soustraction et la division ne sont pas commutatives.

8 – 1 Commutativité de l'addition

Nous avons déjà dit qu'on apprend aux élèves à l'école que la somme que la somme de deux nombre ne change pas si l'on change l'ordre de ces facteurs. Voici un exemple très simple qui montre cette commutativité de l'addition.

Exemple montrant la commutativité de l'addition dans $\mathbf{N}$



Si nous plaçons successivement sur le plateau de gauche d'une balance une grande masse x et une petite y , nous pouvons rétablir l'équilibre en plaçant sur le plateau de droit d'abord une petite masse y et ensuite une grande masse x ; c'est -a- dire qu'on a bien :

$$x + y = y + x$$

8 – 1 – 1 Intérêt de cette commutativité de l'addition

La connaissance de la commutativité de l'addition permet de faire un calcul avec plus de rapidité et de facilité. Donc c'est une astuce très important dans le calcul mental, or nous savons très bien que le calcul mental est très utilisé même dans la vie quotidienne.

Exemple :

Calculer : $A = 10 + 2,2 + 15 + 20 + 12,8$

Il est bien plus facile et plus pratique de faire le calcul dans cet ordre :

$$A = 10 + 20 + 12,8 + 2,2 + 15$$

8 – 2 Commutativité de la multiplication

Comme l'addition nous avons déjà dit aussi que le produit de deux nombres ne change pas si l'on change l'ordre de ces facteurs : $a \times b = b \times a$

Explication de la commutativité de la multiplication

Comme la multiplication est commutative voici par exemple : $3 \times 4 = 4 \times 3$

Regardez bien : (ici le symbole «x» représente le mot «fois» et non «multiplié par»)

3 fois 4 signifie : $4 + 4 + 4 = 12$

Et

4 fois 3 signifie : $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Donc $12 = 3 \text{ fois } 4 = 4 \text{ fois } 3$

Les mathématiciens ont notée l'opération « fois » par « x » et le nomme « multiplication » d'où la notation

$3 \times 4 = 4 \times 3$ (on le lit ainsi 3 multiplier par 4 égale à 4 multiplier par 3).

8 – 2 – 1 Intérêt dans l'enseignement

La commutativité de l'addition aide les élèves à apprendre les tables de la multiplication. Car, par exemple s'ils apprennent la table 2, connaissant la commutativité de la multiplication ils devront savoir une partie des autres tables

C'est-à-dire 5×2 , 7×2 , 4×2 etc ...

Comme pour l'addition, elle est aussi très importante dans le calcul mental.

Par exemple, calculer : $2,5 \times 6,68 \times 4$

Il est bien plus facile de faire le calcul dans l'ordre $2,5 \times 4 \times 6,68$.

Car $2,5 \times 4 = 10$ et $10 \times 6,68 = 66,8$.

8 – 3 Limite de La commutativité chez les naturels :

Dans l'ensemble $\mathbf{N} = \{\text{entiers naturels}\}$ la soustraction et la division n'est pas commutative cette non commutativité pose une limite pour les élèves de l'école primaire, car par exemple les élèves ne peuvent pas calculer « $1 - 3$ » jusqu'à ce qu'ils arrivent dans le secondaire ou on leur apprend l'ensemble $\mathbf{Z} = \{\text{entiers relatifs}\}$. Dans cet ensemble le « $1 - 3$ » de notre exemple a un sens.

$$1 - 3 = -2 ; \text{ alors que } 3 - 1 = 2$$

$$1 - 3 \neq 3 - 1 \text{ (ceci montre la non commutativité de la soustraction dans } \mathbf{Z})$$

On remarque que cette non commutativité est dans $\mathbf{Z}$ car dans $\mathbf{N}$ la soustraction n'est même pas une loi de composition.

CHAP 9 : COMMUTATIVITE DANS LE SECONDAIRE

Nous pouvons dire que la commutativité est omni présent dans l'enseignement de mathématiques dans le secondaire, on la rencontre dans plusieurs formules et opérations comme par exemple (Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ Note $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$). C'est pourquoi nous pouvons donner des multiples d'exercices et activités de commutativité que nous essayons de donner dans le chapitre suivant. Cette commutativité présentes des avantages mais aussi quelques problèmes. Commençons d'abords à regarder le problème causé par la commutativité que nous avons appris à l'école primaire.

9 – 1 Problème de la commutativité dans l'enseignement de mathématiques

Selon un Professeur de mathématiques en premier cycle universitaire, il est toujours resté stupéfait du nombre d'erreurs que commettaient les étudiants à propos de la commutativité. Glissez l'expression $(x + y)^2$ dans un examen et, comme attiré par un miroir aux alouettes, même quelques-uns des meilleurs élèves la développeront en $x^2 + y^2$ (au lieu de $x^2 + 2xy + y^2$). Comme si les règles de l'arithmétique leur permettaient d'effectuer les opérations « additionner » et « élever au carré » dans n'importe quel ordre... pour lui cette fâcheuse habitude découle, en grande partie, d'une analogie incorrecte. A l'école primaire, en classe d'arithmétique, les enfants apprennent très tôt que l'ordre n'a aucune importance lorsqu'ils additionnent deux nombres.

Nous avons aussi remarqués ce problème durant les quelques années que nous avons enseignés les mathématiques dans les classes secondaire. Nous avons constaté par exemple que beaucoup d'élèves calculent :

$$\text{racine}(a + b) = \text{racine}(a) + \text{racine}(b).$$

Pour ces élèves il est équivalent de dire « racine de la somme et somme des racines » alors que c'est faux. Car racine de la somme ne commute pas avec somme des racines.

9 – 2 Quelques activités de commutativité au lycée

9 – 2 – 1 Activité 1 : (classe de seconde)

Angle orienté de deux vecteurs

Définition :

Par convention on oriente le cercle : le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Deux mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ ont une différence de la forme $2k\pi$, où k est un entier.

Parmi toutes ces mesures, une seule appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi [$. Cette mesure est appelée mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Si le réel α est une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$, on écrit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha [2\pi]$$

ou plus simplement : $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$

Exercice :

A, B et C sont des points tels que $\pi/6$ et $-\pi/4$ sont des mesures en radians respectives des angles (AB, AC) et (BA, BC) .

Déterminer une mesure en radians de chacun des angles suivants :

- a) (AC, AB)
- b) (BA, AC)

Solution :

Relation de Chasles:

$$(u, v) + (v, w) = (u, w)$$

- a) Nous savons que pour tout vecteur non nul $\vec{u}$ $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$(AC, AC) = (AC, AB) + (AB, AC) = 0$$

$$\text{d'où } (AC, AB) = - (AB, AC) = -\pi/6$$

b) D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}(CA, CB) &= (CA, AC) + (AC, AB) + (AB, BA) + (BA, BC) + (BC, CB) \\&= \pi + (-\pi/6) + \pi + (-\pi/4) + \pi \\&= (12\pi - 14\pi/6 + 12\pi - 15\pi/4 + 12\pi)/12 \\&= 7\pi/12\end{aligned}$$

9 – 2 – 2 Remarque:

D'après la question a) que nous avons utilisé pour répondre à la question b) nous pouvons généraliser : pour tout vecteur non nul u et v

$$(u, v) = -(v, u).$$

C'est-à-dire qu'en commutant l'ordre des vecteurs dans une mesure d'angle orienté on a $(u, v) \neq (v, u)$ ce qui montre la non commutativité des mesures d'angles orientés de deux vecteurs.

9 – 2 – 3 Activité 2 : (classe de première)

Composition de fonction :

Définition :

Soit g une fonction définie sur D et prenant ses valeurs dans D' .

Soit f une fonction définie sur D' .

La fonction qui à tout réel x de D fait correspondre $f(g(x))$ est appelée fonction composée de g suivie de f .

On a ainsi : $D \longrightarrow D' \longrightarrow R$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$$

Cette fonction est noté $f \circ g : D \longrightarrow R$

$$x \longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

L'ensemble de définition de $f \circ g = D$, l'ensemble de définition de $g \circ f = D'$

En générale $D_{f \circ g} \neq D_{g \circ f}$ et $f \circ g \neq g \circ f$ c'est-à-dire que la composée de la fonction g suivit de f est différent de la composée f suivit de g . la composition des fonctions est donc non-commutative.

Activité:

Soit g une fonction définie sur $]-\infty ; 5]$ par $g(x) = -x + 5$ et f définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$?

La fonction composée de g suivie de f est définie sur $]-\infty ; 5]$ et on a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^{1/2} = (-x + 5)^{1/2}$$

Alors que la compose de f suivit de g est définie sur $[0 ; +\infty [$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\sqrt{x} + 5.$$

Donc, nous voyons que $f \circ g \neq g \circ f$ ce qui montre la non-commutativité.

9 – 2 – 4 Activité 3 :(classe de terminale)

a) Transformations du plan

Définition

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une transformation si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout point N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(M)=N$.

Une translation, une homothétie, une rotation, une réflexion sont des exemples de transformation du plan.

Activité a) :

Soient deux transformation, bien connues, une homothétie et une rotation de même centre O . Montrons que la composée de ces deux transformation sont commutatives. (C'est-à-dire montrons que $r \circ h = h \circ r$).

Solution :

On prend un point M quelconque par une transformation h on l'augmente $h(M) = M'$, ensuite on fait tourner ce point d'un certain angle $r(M') = M''$.

On fait la même chose mais cette fois-ci on commence par faire tourner le point et ensuite on augmente, on a donc $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M_2$. On remarque sans aucune difficulté que $M_2 = M''$.

Prouvons que $r \circ h = h \circ r$

· On a dans le premier cas $r(h(M)) = r(M') = M''$;

d'où $OM' = k.OM$, puis $OM'' = OM'$ (rotation conserve les distances)

donc $OM'' = k.OM$ et $\theta = (OM', OM'') = (k.OM, OM'') = (OM, OM'')$

soit $(OM, OM'') = \theta$

· On a dans le second cas $h(r(M)) = h(M_1) = M_2$;

d'où $OM = OM_1$, puis $OM_2 = k.OM_1$ c'est à dire $OM_2 = k.OM$ et

$\theta = (OM, OM_1) = (OM, k.OM_2) = (OM, OM_2)$

soit $(OM, OM_2) = \theta$

d'où le résultat ($M'' = M_2$)

b) Similitude

Définition :

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel k et qui conserve les angles orientés. C'est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

Activité b) :

■ Montrer que la composée de deux similitudes directe f et g . est une similitude directe de rapport $k.k'$ et d'angle $\theta + \theta'$ et qu'en générale on a $f \circ g \neq g \circ f$ (non-commutative)

Solution :

Soient f et g sont des similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ' et ont pour écritures complexes respectives : $z' = a.z + b$ avec

$$a = k e^{i\theta} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}, \quad z' = a'.z + b' \quad \text{avec} \quad a' = k' e^{i\theta'} \quad \text{et} \quad b' \in \mathbb{C}$$

(en utilisant la définition)

$f \circ g$ est la composée de deux transformations du plan, donc $f \circ g$ est une transformation du plan.

Soient M et N deux points distincts du plan. Notons

$$M' = g(M) ; N' = g(N) ; M'' = f(M') ; N'' = f(N').$$

g étant une similitude de rapport k' , on a

$$M'N' = k' MN$$

f étant une similitude de rapport k , on a

$$M''N'' = k M'N'.$$

On en déduit

$$M''N'' = k M'N' = k k' MN.$$

Aux points M et N , la composée $f \circ g$ associe M'' et N'' .

Sachant que l'on a $M''N'' = k k' MN$, on en déduit que $f \circ g$ est une similitude de rapport $k k'$.

De la même manière on montre aussi que $g \circ f$ est une similitude de rapport $k k'$

(en utilisant l'écriture complexe)

$$f \circ g(z) = a.(a'.z + b') + b = a.a'.z + a.b' + b$$

$$g \circ f(z) = a'.(a.z + b) + b' = a.a'.z + a'.b + b'$$

$f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même rapport, le même angle mais n'ont pas le même centre ; on

peut donc écrire que $f \circ g \neq g \circ f$

CONCLUSION

Durant la période que nous avons fait notre recherche nous avons remarqué que la commutativité est un sujet de recherche très active aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques. Mais comme le temps nous manque, nous n'avons donné que quelques pratiques dans l'enseignement des mathématiques.

Par ce mémoire, nous avons donné la définition de la commutativité en utilisant des activités préliminaires. Nous avons donné aussi quelques résultats chronologiques sur l'évolution de la commutativité jusqu'à nos jours

De même, nous avons regarder la généralisation de la commutativité qui n'est pas forcément dans la théorie mathématiques mais aussi dans d'autre comme : le langage, les actions et dans la mécanique quantique.

A notre sujet, nous avons exposée quelques intérêts pédagogiques mais aussi les problèmes dans les pratiques de la commutativité dans l'enseignement des mathématiques. Dans la partie finale, nous avons donné quelques exercices concernant la commutativité au lycée.

D'après ce qu'on a vu dans ce travail, la commutativité présente d'intérêt dans l'enseignement des mathématiques. Mais on peut aussi aller un peu plus loin en faisant des recherches sur la propriété d'associativité et pratiques dans l'enseignement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

LES OUVRAGES

- Travaux pratiques de mathématique, Encyclopédie autodidactique Quillet
- Lev Tarassov, Physique quantique et opérateurs linéaires
- A la découverte de l'algèbre
- Hachette, Exos résolus 1^{ère} S

REFERENCES ELECTROIQUES

- Encarta 2005
- Wikipedia, l'encyclopédie libre
- [http:// cedric.bajard.free.fr](http://cedric.bajard.free.fr)
- [http:// xmaths.free.fr](http://xmaths.free.fr)