UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire pour l'obtention du **MASTERS II**

Option : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Calcul Numérique

MODÉLISATION DE GUERRE

Présenté par : **RASAMIMANANA Mindrafinaritra Landry Victorien**

Soutenu le jeudi 06 Juillet 2017

Devant la Commission d'examen formée de

Président de Jury - Monsieur RABEHERIMANANA Toussaint Joseph
Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Rapporteur - Madame Fanja RAKOTONDRAJAO
Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo

Examinateur - Monsieur ANDRIATAHINA Harinaivo
Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo

Remerciements

D'abord, nous remercions **Dieu** tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et ses bénedictions afin que je puisse effectuer ce mémoire.

Le présent mémoire n ' aurait pu être réalisé sans la participation de différentes personnes. Je tiens à exprimer particulièrement mes vifs remerciements et ma gratitude à :

- Monsieur **RABEHERIMANANA Toussaint Joseph**, Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo, qui a accepté de présider le jury de ce mémoire. Je lui témoigne mes vifs remerciements.
- Madame **RAKOTONDRAJAO Fanja**, Maître de conférences, qui m'a conseillé et m'a aidé à surmonter tous les problèmes rencontrés dans la réalisation de cet ouvrage. Je lui adresse mes sincères remerciements,
- Monsieur **ANDRIATAHINA Harinaivo**, Maître de conférences, qui a accepté d'être membre de Jury en tant qu'examinateur malgré ses diverses occupations.
- Tous mes professeurs qui m'ont formé tout au long de mes études.
- Tous les personnels administratifs du Département de Mathématiques et Informatique, et de la Bibliothèque Mathématiques.

Je voudrais également formuler mes remerciements dévoués à mes parents et à ma femme, qui m'ont soutenu moralement et financièrement.
Mes sincères remerciements s'adressent en dernier lieu à toute ma famille et mes proches pour leur soutien ; ainsi que tous ceux qui ont contribué de prés ou loin à l'accomplissement de ce mémoire.

Vous tous, veuillez recevoir ici, l'expression de mes sentiments et mes considérations distingués.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est basé sur le travail de Ian BELLANY 1999. "**Modelling war**". Journal of Peace Research 36 (7) : 729-739. Le principal objectif de ce mémoire est de présenter des modèles mathématiques simples de la guerre. Il est composé de trois chapitres dans ce travail.

Dans le premier chapitre, nous introduisons des rappels préliminaires qui contiennent quelques rappels pour l'équation différentielle du premier ordre, les trois lois classiques de Lanchester et la croissance de ressource et de dépense militaire d'un État.

Deuxièmement, nous étudions la modélisation mathématique des guerres. Dans ce chapitre on formule le taux de croissance des forces-armées dans le théâtre de guerre qui est donné par deux équations différentielles. On résout cette équation à l'état d'équilibre, puis on détermine la combinaison de forces déployées par les participants et les paramètre clés.

Et dans la troisième partie, nous étudions la terminaison de la guerre. Nous allons voir la terminaison de la guerre en raison de la tendance à l'état d'équilibre et la terminaison de guerre par les choix stratégiques.

Chapitre 1

Rappels préliminaires

1.1 Équation différentielle du premier ordre

1.1.1 Équation différentielle du premier ordre sans second membre

Définition 1.1 *Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est de la forme*

$$\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = 0 \tag{1.1}$$

ou

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Théorème 1.1 *La solution de l'équation différentielle du premier ordre sans second membre est donnée par*

$$y_h = Ce^{-A(t)}$$

où $A(t) = \int^t a(x)dx$ et C est une constante réelle.

Preuve.
Nous avons

$$\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = 0$$

En séparant les variables, nous avons

$$\frac{dy}{y} = -a(t)dt$$

En intégrant membre à membre

$$\int \frac{dy}{y} = \int^t -a(x)dx$$

$$\ln(y) = -A(t) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Soit

$$y(t) = Ce^{-A(t)} \quad C \in \mathbb{R}$$

■

1.1.2 Équation différentielle du premier ordre avec second membre

Définition 1.2 *Une équation différentielle du premier ordre avec second membre est de la forme*

$$\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = b(t) \tag{1.2}$$

ou

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Théorème 1.2 *La solution de l'équation différentielle du premier ordre avec second membre est donnée par*

$$y(t) = e^{-A(t)}(\int b(t)e^{A(t)}dt + K)$$

où $A(t) = \int^t a(x)dx$ *et* K *est une constante réelle.*

Preuve.
D'après la théorème 1.1, a solution de l'équation sans second membre ou homogène est donnée par

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)}.$$

Par la méthode de la variation de constante, on varie C c'est-à-dire que C devient une fonction à variable t ($C(t)$). On a alors

$$y(t) = C(t)e^{-A(t)} \tag{1.3}$$

$$y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} \tag{1.4}$$

En reportant l'équation 1.3 et 1.4 dans 1.2, on a

$$C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t)$$

$$C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

$$C(t) = \int b(t)e^{A(t)}dt + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

soit

$$y(t) = e^{-A(t)}(\int b(t)e^{A(t)}dt + K)$$

■

1.2 Loi de Lanchester

En 1916, durant la Première Guerre Mondiale, Frederick Lanchester a formulé deux équations différentielles, expliquant trois modèles de guerre. Le premier modèle est appelé *modèle de guérilla ou loi Linéaire de Lanchester*. Le second s'appelle *loi Carrée de Lanchester ou modèle Carré de Lanchester*. Et la troisième s'appelle *loi mixte de Lanchester*.

Définition 1.3 *Les équations généralisées de Lanchester sont des équations différentielles décrivant la dépendance temporelle des forces des deux armées X et Y comme une fonction du temps ne dépendant que de X et Y. Elles sont données par*

$$\frac{dx}{dt} = -C_y x^r y^s \ ; \ x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = -C_x y^u x^v \ ; \ y(0) = y_0$$

où x : nombre d'unités X opérationnelles à l'instant t
x_0 : nombre initial d'unités X
C_x : taux de destruction pour une unité X opérationnelle contre les unités Y opérationnelles
y : nombre d'unités Y opérationnelles à l'instant t
y_0 : nombre initial d'unités Y
C_y : taux de destruction pour une unité Y opérationnelle contre les unités X opérationnelles

1.2.1 Loi linéaire de Lanchester.

Définition 1.4 *Soient deux unités de force X et Y en guerre. La loi linéaire de Lanchester ou modèle guérilla est un cas particulier des équations généralisées de Lanchester en posant $r = u = s = v = 1$. Elle est donnée par*

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy \ ; \ x(0) = x_0 \tag{1.5}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy \ ; \ y(0) = y_0 \tag{1.6}$$

où α : taux de détection pour une unité X opérationnelle contre une unité arbitraire Y opérationnelle
β : taux de détection pour une unité Y opérationnelle contre une unité arbitraire X opérationnelle

Ce modèle décrit le combat entre deux forces homogènes utilisant les armes traditionnelles. Une interprétation possible du modèle est que chaque force est capable de tuer toutes les unités opérationnelles hostiles qui ont été détectées. En fait, ce modèle décrit une situation de combat dans laquelle le dicton "Si vous êtes vu, vous êtes mort" sera vrai. Cela pourrait être valable pour le combat entre deux forces de la guérilla qui se cherchent dans un désert. Le taux de détection est le seul facteur limitant. La puissance de feu et la capacité de coordination suffisent à tuer toutes les unités hostiles détectées. Cette hypothèse peut également être irréaliste, car il est difficile d'identifier de nombreuses situations de combat régulier, où la détection est le seul facteur crucial des deux côtés.

Définition 1.5 (Victoire) *L'armée X (resp. Y) porte la victoire si la taille y (resp. x) de l'armée Y (resp. X) est réduit à zéro et la taille x (resp. y) de l'armée X (resp. Y) est positive.*

Proposition 1.1 *Le modèle de guérilla est simple et peut être résolu par des moyens analytiques. De la solution analytique, il est possible de tirer les critères suivant pour la victoire*

- *Si $\alpha x_0 > \beta y_0$ alors X porte la victoire avec une taille finale $x_f = x_0 - \frac{\beta}{\alpha} y_0$*
- *Si $\alpha x_0 < \beta y_0$ alors Y porte la victoire avec une taille finale $y_f = y_0 - \frac{\alpha}{\beta} x_0$*
- *Si $\alpha x_0 = \beta y_0$ alors il n'y a ni vainqueur ni vaincu (même destruction)*

Preuve. En faisant le rapport entre l'équation 1.6 et l'équation 1.5, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta dy = \alpha dx$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\beta(y_f - y_0) = \alpha(x_f - x_0)$$

$$\beta y_f = \alpha x_f + \beta y_0 - \alpha x_0$$

- Si $\beta y_0 - \alpha x_0 = 0$, nous avons

$$\beta y_f = \alpha x_f$$

y_f tend vers 0 si et seulement si x_f tend vers 0 ;
D'où X et Y ont même destruction.

- Si $\beta y_0 - \alpha x_0 < 0$, nous avons

$$x_f = \frac{\beta}{\alpha}(y_f - y_0) + x_0$$

si y_f tend vers 0, $x_f = x_0 - \dfrac{\beta}{\alpha} y_0 > 0$.
D'où X porte la victoire avec une taille finale $x_f = x_0 - \dfrac{\beta}{\alpha} y_0 > 0$.

- Si $\beta y_0 - \alpha x_0 > 0$, nous avons

$$y_f = \frac{\alpha}{\beta}(x_f - x_0) + y_0$$

si x_f tend vers 0, $y_f = y_0 - \dfrac{\alpha}{\beta} x_0 > 0$.
D'où Y porte la victoire avec une taille finale $y_f = y_0 - \dfrac{\alpha}{\beta} x_0 > 0$.

$\blacksquare$

Avec l'hypothèse valable pour le modèle de guérilla, la qualité et la quantité sont évidemment d'égale importance. Ce type de modèle a été utilisé pour décrire les résultats résultant de la lutte contre le feu indirect, c'est-à-dire des résultats pertinents lorsque chacune des deux forces d'artillerie tire au hasard contre le territoire occupé par l'autre. Le modèle de guérilla est également un modèle continu de temps et d'état dans la pratique, souvent considéré comme une sorte de modèle de valeur moyenne. La logique derrière le modèle se détériore avec la diminution du nombre d'unités opérationnelles et s'effondre certainement lorsque le nombre d'unités opérationnelles est réduit à zéro. Avec ce modèle, le nombre d'unités opérationnelles ne peut pas devenir négatif. Ce modèle est une paire d'équations différentielles non linéaires ordinaires, mais il ne présente aucun comportement chaotique.

Théorème 1.3 *La solution de la loi linéaire de Lanchester (équations 1.5 et 1.6) est donnée par*

- *Si* $\alpha x_0 \neq \beta y_0$

$$x(t) = \frac{(\beta y_0 - \alpha x_0)x_0}{\beta y_0 e^{(\beta y_0 - \alpha x_0)t} - \alpha x_0}$$

et

$$y(t) = \frac{(\alpha x_0 - \beta y_0)y_0}{\alpha x_0 e^{(\alpha x_0 - \beta y_0)t} - \beta y_0}$$

- *Si* $\alpha x_0 = \beta y_0$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + \alpha x_0 t}$$

et

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + \beta y_0 t}$$

Preuve. En faisant le rapport entre l'équation 1.6 et l'équation 1.5, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta dy = \alpha dx$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\int_{y_0}^{y} \beta dv = \int_{x_0}^{x} \alpha du$$

$$\beta(y - y_0) = \alpha(x - x_0)$$

$$\beta y = \alpha x + \beta y_0 - \alpha x_0$$

Posons $c_1 = \beta y_0 - \alpha x_0$

- Si $c_1 \neq 0$

En remplaçant βy dans l'équation 1.5 par $\alpha x + c_1$, nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -x(\alpha x + c_1)$$

$$\frac{dx}{-x(\alpha x + c_1)} = dt$$

or

$$\frac{-1}{x(\alpha x + c_1)} = -\frac{1}{c_1 x} + \frac{\alpha}{c_1(\alpha x + c_1)}$$

alors

$$-\frac{dx}{c_1 x} + \frac{\alpha dx}{c_1(\alpha x + c_1)} = dt$$

Après intégration membre à membre, nous avons

$$-\frac{\ln(x)}{c_1} + \frac{\ln(\alpha x + c_1)}{c_1} = t + k_1$$

$$\frac{1}{c_1}\ln(\frac{\alpha x + c_1}{x}) = t + k_1$$

$$\ln(\alpha + \frac{c_1}{x}) = c_1 t + c_1 k_1$$

$$\alpha + \frac{c_1}{x} = K_1 e^{c_1 t}$$

Soit

$$x = \frac{c_1}{K_1 e^{c_1 t} - \alpha}$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$K_1 = \alpha + \frac{\beta y_0 - \alpha x_0}{x_0} = \frac{\beta y_0}{x_0}$$

Ainsi, on obtient

$$x = \frac{c_1}{\frac{\beta y_0}{x_0} e^{c_1 t} - \alpha}$$

Soit

$$x(t) = \frac{c_1 x_0}{\beta y_0 e^{c_1 t} - \alpha x_0}$$

En remplaçant αx dans l'équation 1.6 par $\beta y - c_1$, nous avons

$$\frac{dy}{dt} = -y(\beta y - c_1)$$

$$\frac{dy}{-y(\beta y - c_1)} = dt$$

or

$$\frac{-1}{y(\beta y - c_1)} = \frac{1}{c_1 y} - \frac{\beta}{c_1(\beta y - c_1)}$$

alors

$$\frac{dy}{c_1 y} - \frac{\beta dy}{c_1(\beta y - c_1)} = dt$$

En utilisant la même méthode qu'avant, nous obtenons

$$y = -\frac{c_1}{N_1 e^{-c_1 t} - \beta}$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$N_1 = \beta - \frac{\beta y_0 - \alpha x_0}{y_0} = \frac{\alpha x_0}{y_0}$$

Ainsi, on obtient

$$y = -\frac{c_1}{\frac{\alpha x_0}{y_0} e^{-c_1 t} - \beta}$$

Soit

$$y(t) = -\frac{c_1 y_0}{\alpha x_0 e^{-c_1 t} - \beta y_0}$$

• Si $c_1 = 0$, nous avons

$$\beta y = \alpha x$$

En remplaçant βy dans l'équation 1.5 par αx

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x^2$$

$$-\frac{dx}{x^2} = \alpha dt$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\frac{1}{x} = \alpha t + d$$

Soit

$$x = \frac{1}{\alpha t + d}$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$d = \frac{1}{x_0}$$

Ainsi, on obtient

$$x = \frac{1}{\alpha t + \dfrac{1}{x_0}}$$

Soit

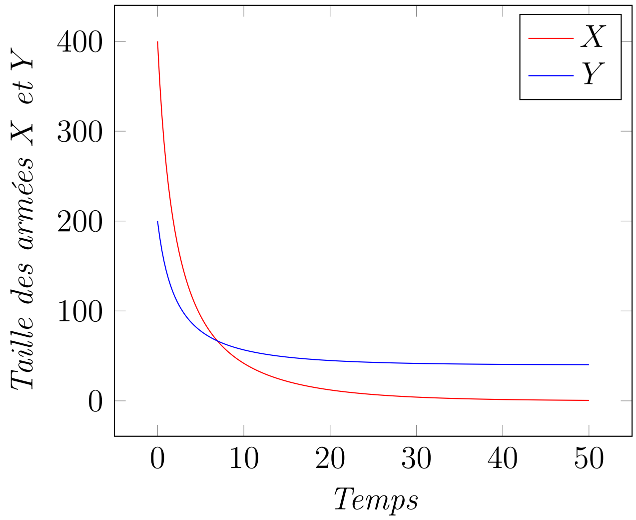
$$x(t) = \frac{x_0}{\alpha x_0 t + 1}$$

De même pour $y(t)$

$\blacksquare$

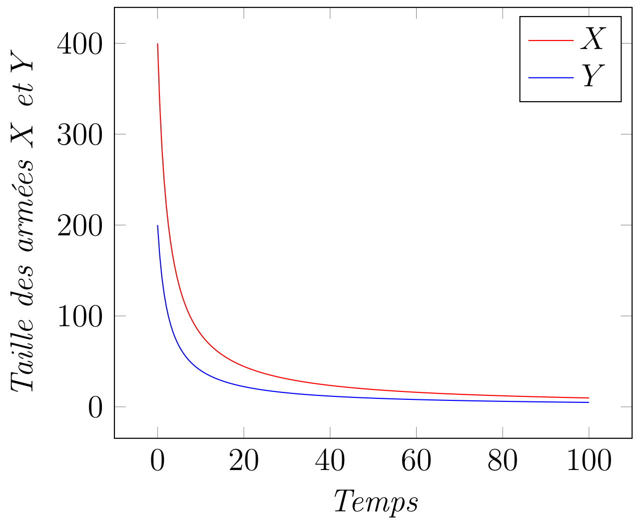
Exemple 1.1 *Soient X et Y deux armées en guerre. On suppose que cette guerre suit la loi linéaire de Lanchester. Voici des courbes montrant la déroulement de la guerre suivant différentes valeur de $\alpha,\ \beta,\ x_0,\ y_0$.*

Loi linéaire de Lanchester avec $x_0 = 400,\ \alpha = 0.001,\ y_0 = 200,\ \beta = 0.0025$



$c_1 = 0.1 > 0$, *Y porte la victoire avec taille finale* $y_f = 40$

Loi linéaire de Lanchester avec $x_0 = 400,\ \alpha = 0.001,\ y_0 = 200,\ \beta = 0.002$



$c_1 = 0$, *même destruction*

1.2.2 Loi carrée de Lanchester

Le modèle carré de Lanchester ou loi carrée de Lanchester est le plus connu des modèles classiques de Lanchester. Lanchester considérait ce modèle particulièrement important pour la guerre moderne (1917).

Définition 1.6 *Soient deux unités de force X et Y en guerre. Le modèle carré de Lanchester ou loi carrée de Lanchester est un cas particulier des équations généralisées de Lanchester en posant $r = u = 0$ et $s = v = 1$. Elle est donnée par*

$$\frac{dx}{dt} = -K_2 y \ ; \ x(0) = x_0 \tag{1.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = -K_1 x \ ; \ y(0) = y_0 \tag{1.8}$$

où K_1 : taux de destruction pour une unité X opérationnelle contre les unités Y opérationnelles
K_2 : taux de destruction pour une unité Y opérationnelle contre les unités X opérationnelles

Ce modèle décrit le combat entre deux forces homogènes utilisant des armes à longue portée telles des armes à feu comme tanks, revolver, fusil mitrailleur ... Tous les deux se battant sous l'hypothèse d'informations tactiques complètes. L'information tactique complète signifie qu'une unité opérationnelle arbitraire est à tout moment capable de détecter au moins des nombreuses unités opérationnelles hostiles car elle est capable de tuer. En outre, on suppose que toutes les unités opérationnelles de chaque côté sont en mesure de partager pleinement leurs informations et de coordonner leur puissance de feu parmi les unités hostiles opérationnelles. En fait, la puissance de feu est le seul facteur limitant. Les capacités de détection et de coordination sont supposées suffisantes pour le tir.

Cette hypothèse peut être tout à fait irréaliste, car il est difficile d'identifier de nombreuses situations de combat modernes, où l'hypothèse est respectée des deux côtés. Par exemple, très peu d'opérations de l'armée sont effectuées avec des informations tactiques complètes des deux côtés. Au sein de l'OTAN, le modèle carré est souvent utilisé sans tenir compte de cette hypothèse.

Proposition 1.2 *Le modèle carré est simple et peut être résolu par des moyens analytiques. De la solution analytique, il est possible de tirer les critères suivant pour la victoire*

- *Si $K_1 x_0^2 > K_2 y_0^2$ alors X porte la victoire avec une taille finale $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{K_2}{K_1} y_0^2}$*

– *Si* $K_1x_0^2 < K_2y_0^2$ *alors* Y *porte la victoire avec une taille finale* $y_f = \sqrt{y_0^2 - \frac{K_1}{K_2}x_0^2}$

– *Si* $K_1x_0^2 = K_2y_0^2$ *alors même destruction*

Preuve. En faisant le rapport entre l'équation 1.8 et l'équation 1.7, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K_1x}{K_2y}$$

$$K_2ydy = K_1xdx$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$K_2(y_f^2 - y_0^2) = K_1(x_f^2 - x_0^2)$$

$$K_2y_f^2 = K_1x_f^2 + K_2y_0^2 - K_1x_0^2$$

- Si $K_2y_0^2 - K_1x_0^2 = 0$, nous avons

$$K_2y_f^2 = K_1x_f^2$$

y_f tend vers 0 si et seulement si x_f tend vers 0.
D'où X et Y ont même destruction.

- Si $K_2y_0^2 - K_1x_0^2 < 0$, nous avons

$$x_f = \sqrt{x_0^2 + \frac{K_2}{K_1}(y_f^2 - y_0^2)}$$

Si y_f tend vers 0, $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{K_2}{K_1}y_0^2} > 0$.
D'où X porte la victoire avec une taille finale $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{K_2}{K_1}y_0^2} > 0$.

- Si $K_2y_0^2 - K_1x_0^2 > 0$, nous avons

$$y_f = \sqrt{y_0^2 + \frac{K_1}{K_2}(x_f^2 - x_0^2)}$$

Si x_f tend vers 0, $y_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{K_1}{K_2}x_0^2} > 0$.
D'où Y porte la victoire avec une taille finale $y_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{K_1}{K_2}x_0^2} > 0$.

$\blacksquare$

L'affirmation, selon laquelle la quantité est plus importante que la qualité, provient vraisemblablement de ce critère. Le modèle carré de Lanchester est un modèle continu de temps et d'état dans la pratique, souvent considéré comme une sorte de modèle de valeur moyenne. La logique derrière ce modèle se détériore avec la diminution du nombre d'unités opérationnelles et il s'effondre certainement lorsque le nombre d'unités opérationnelles est réduit à zéro. Le modèle est une paire d'équations différentielles non linéaires ordinaires et il présente un comportement chaotique dans des situations de combat proches de la ligne d'égalité (l'égalité conduit à la destruction mutuelle).

Théorème 1.4 *La solution de la loi carrée de Lanchester (équations 1.7 et 1.8) est donnée par*

$$x(t) = x_0 \cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - y_0\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sinh(\sqrt{K_1K_2}t)$$

et

$$y(t) = y_0 \cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - x_0\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \sinh(\sqrt{K_1K_2}t)$$

Preuve. Les équations 1.7 et 1.8 peuvent réécrire sous forme matriciel comme suit

$$X' = AX$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -K_2 \\ -K_1 & 0 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Le *polynôme caractéristique* $\chi_A(\lambda)$ de la matrice A est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - K_1K_2$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = -\sqrt{K_1K_2} \quad et \quad \lambda_2 = \sqrt{K_1K_2}$$

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ une matrice colonne d'ordre 2.

$$Au = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{cases} -K_2u_2 = -\sqrt{K_1K_2}u_1 \\ -K_1u_1 = -\sqrt{K_1K_2}u_2 \end{cases}$$

$$Au = \lambda_2 u \Leftrightarrow \begin{cases} -K_2u_2 = \sqrt{K_1K_2}u_1 \\ -K_1u_1 = \sqrt{K_1K_2}u_2 \end{cases}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \end{pmatrix}$ sont de vecteurs propres associés à $-\sqrt{K_1K_2}$ et $\sqrt{K_1K_2}$ respectivement. D'où

$$A = PMP^{-1}$$

avec $M = \begin{pmatrix} -\sqrt{K_1K_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{K_1K_2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}} & -\sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}} \end{pmatrix}$

$$X' = AX \Leftrightarrow P^{-1}X' = MP^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$, nous avons

$$Y' = MY$$

Par suite

$$Y = \begin{pmatrix} k_1 e^{-\sqrt{K_1K_2}t} \\ k_2 e^{\sqrt{K_1K_2}t} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} k_1\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - k_1\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \\ k_2\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) + k_2\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \end{pmatrix}$$

D'où

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}} & -\sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - k_1\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \\ k_2\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) + k_2\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} (k_1+k_2)\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) + (k_2-k_1)\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \\ \sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}}(k_1-k_2)\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - \sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}}(k_1+k_2)\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \end{pmatrix}$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$k_1 + k_2 = x_0 \ et \ k_1 - k_2 = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}y_0$$

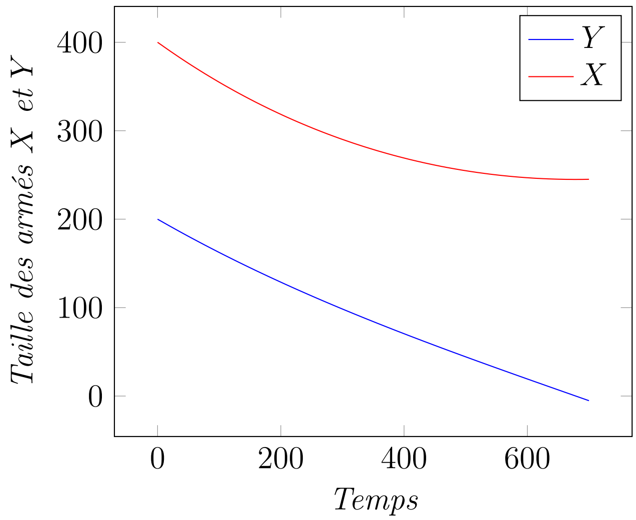
Ainsi, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} x_0\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}y_0\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \\ y_0\cosh(\sqrt{K_1K_2}t) - \sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}}x_0\sinh(\sqrt{K_1K_2}t) \end{pmatrix}$$

■

Exemple 1.2 *Soient X et Y deux armées en guerre. On suppose que cette guerre suit la loi carrée de Lanchester. Voici de courbe montrant la déroulement de la guerre suivant le valeur de K_1, K_2, x_0, y_0.*

Loi carrée de Lanchester avec $x_0 = 400,\ K_1 = 0.001,\ y_0 = 200,\ K_2 = 0.0025$



X *porte la victoire avec une taille finale* $x_f = 245$

1.2.3 Loi mixte de Lanchester ou modèle de combat mixte

Définition 1.7 *La loi mixte de Lanchester ou modèle de combat mixte est un mélange du modèle carré et du modèle de guérilla. Elle est encore un cas particulier des équations généralisées de Lanchester en posant* $r = 0$ *et* $s = u = v = 1$*. Elle est donnée par*

$$\frac{dx}{dt} = -K_2 y \ ;\ x(0) = x_0 \tag{1.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x y \ ;\ y(0) = y_0 \tag{1.10}$$

Ce modèle décrit le combat entre deux forces homogènes. L'interprétation pourrait être que X avance sur un terrain ouvert à la recherche et à la lutte contre Y. Y se bat en position cachée et camouflée. Le taux de détection est le seul facteur limitant pour X. La puissance de feu est le seul facteur limitant pour Y.

Proposition 1.3 *Ce modèle mixte peut être résolu par des moyens analytiques. De la solution analytique, il est possible de tirer les critères suivant pour la victoire*

- *Si* $\alpha x_0^2 > 2K_2 y_0$ *alors* X *porte la victoire avec une taille finale* $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{2K_2}{\alpha} y_0}$
- *Si* $\alpha x_0^2 < 2K_2 y_0$ *alors* Y *porte la victoire avec une taille finale* $y_f = y_0 - \frac{\alpha}{2K_2} x_0$
- *Si* $\alpha x_0^2 = 2K_2 y_0$ *alors même destruction*

Preuve. En faisant le rapport entre l'équation 1.10 et l'équation 1.9, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{K_2} x$$

$$K_2 dy = \alpha x dx$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$K_2(y_f - y_0) = \frac{\alpha}{2}(x_f^2 - x_0^2)$$

$$2K_2 y_f = \alpha x_f^2 + 2K_2 y_0 - \alpha x_0^2$$

- Si $2K_2y_0 - \alpha x_0^2 = 0$, nous avons

$$2K_2 y_f - \alpha x_f^2 = 0$$

si y_f tend vers 0, alors x_f le aussi ;
si x_f tend vers 0, alors y_f le aussi ;
D'où X et Y ont même destruction.

- Si $2K_2y_0 - \alpha x_0^2 < 0$, nous avons

$$x_f = \sqrt{x_0^2 + \frac{2K_2}{\alpha}(y_f - y_0)}$$

si y_f tend vers 0, $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{2K_2}{\alpha} y_0} > 0$. D'où X porte la victoire avec une taille finale $x_f = \sqrt{x_0^2 - \frac{2K_2}{\alpha} y_0} > 0$.

- Si $2K_2y_0 - \alpha x_0^2 > 0$, nous avons

$$y_f = y_0 + \frac{\alpha}{2K_2}(x_f - x_0)$$

si x_f tend vers 0, $y_f = y_0 - \frac{\alpha}{2K_2} x_0 > 0$. D'où Y porte la victoire une taille finales $y_f = y_0 - \frac{\alpha}{2K_2} x_0 > 0$.

■

Avec les hypothèses valables pour le modèle mixte, la qualité est plus importante que la quantité pour X, tandis que la qualité et la quantité sont toutes aussi importantes pour Y.

Théorème 1.5 *La solution de la loi mixte de Lanchester (équations 1.9 et 1.10) est donnée par trois cas*

- *Si* $c_2 = 2K_2y_0 - \alpha x_0^2 > 0$

$$x(t) = \sqrt{\frac{c_2}{\alpha}} \tan[-\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2} t + \arctan(x_0 \sqrt{\frac{\alpha}{c_2}})]$$

et

$$y(t) = \frac{c_2}{2K_2}\{1 + \tan^2[-\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(x_0\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}})]\}$$

- *Si* $c_2 = 2K_2y_0 - \alpha x_0^2 < 0$

$$x(t) = \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}} - \frac{2\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-t\sqrt{-c_2\alpha}}}{(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-t\sqrt{-c_2\alpha}} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})}$$

et

$$y = -\frac{4c_2y_0}{\alpha}\frac{e^{-t\sqrt{-c_2\alpha}}}{[(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-t\sqrt{-c_2\alpha}} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})]^2}$$

- *Si* $c_2 = 2K_2y_0 - \alpha x_0^2 = 0$

$$x(t) = \frac{2x_0}{\alpha x_0 t + 2}$$

et

$$y(t) = \frac{4y_0}{(\alpha x_0 t + 2)^2}$$

Preuve. En faisant le rapport entre l'équation 1.10 et l'équation 1.9, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{K_2}x$$

$$K_2dy = \alpha x dx$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$K_2y - K_2y_0 = \frac{\alpha}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$2K_2y = \alpha x^2 + c_2$$

- $c_2 \neq 0$

En remplaçant y dans l'équation 1.9 par $\frac{\alpha x^2 + c_2}{2K_2}$, nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -K_2\frac{\alpha x^2 + c_2}{2K_2}$$

En séparant les variables

$$\frac{2}{\alpha x^2 + c_2}dx = -dt$$

  – Si $c_2 > 0$

$$\frac{1}{1 + (\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x)^2}dx = -\frac{c_2}{2}dt$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x) = -\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}\frac{c_2}{2}t + d_2$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x = \tan[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + d_2]$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$d_2 = \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)$$

Ainsi, on obtient

$$x(t) = \sqrt{\frac{c_2}{\alpha}}\tan[-\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]$$

Portons la valeur de x dans l'équation 1.10, nous avons

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y\sqrt{\frac{c_2}{\alpha}}\tan[-\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]$$

$$\frac{dy}{y} = -\alpha\sqrt{\frac{c_2}{\alpha}}\tan[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]dt$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\alpha\sqrt{\frac{c_2}{\alpha}}\int\tan[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]dt$$

$$\ln(y) = -\sqrt{\alpha c_2}\frac{2}{\sqrt{\alpha c_2}}\ln|cos[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]| + D_2$$

$$y = D_2\frac{1}{cos^2[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)]}$$

$$y = D_2(1 + \tan^2[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)])$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$y_0 = D_2(1 + \frac{\alpha}{c_2}x_0^2)$$

$$c_2y_0 = D_2(c_2 + \alpha x_0^2)$$

$$c_2y_0 = D_2 2K_2y_0$$

Ainsi, on obtient

$$D_2 = \frac{c_2}{2K_2}$$

Soit

$$y(t) = \frac{c_2}{2K_2}(1 + \tan^2[\frac{\sqrt{\alpha c_2}}{2}t + \arctan(\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}x_0)])$$

– Si $c_2 < 0$

$$\frac{dx}{x^2 - \frac{-c_2}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}dt$$

Or

$$\frac{1}{x^2 - \frac{-c_2}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c_2}}(\frac{1}{x - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}} - \frac{1}{x + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}})$$

Alors
$$\frac{dx}{x-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}-\frac{dx}{x+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}=-\sqrt{-c_2\alpha}dt$$
En intégrant membre à membre, nous avons
$$\ln|x-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}|-\ln|x+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}|=-\sqrt{-c_2\alpha}t+c$$
$$\frac{x-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{x+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}=Ce^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}$$
$$1-2\frac{\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{x+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}=Ce^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}$$
$$x+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}=-2\frac{\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{Ce^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}-1}$$
$$x=-2\frac{\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{Ce^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}-1}-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}$$
Considérant les conditions initiales, nous avons
$$C=\frac{x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{x_0+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}$$
Ainsi, on obtient
$$x=-2\frac{\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{\frac{x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}{x_0+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}}e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}-1}-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}$$
$$x=\frac{-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}(x_0+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}(x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}}{(x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}-(x_0+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})}$$
Soit
$$x(t)=\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}-\frac{2\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}}(x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}}{(x_0-\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}-(x_0+\sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})}$$

En portant la valeur de x dans l'équation 1.10, nous avons

$$\frac{dy}{dt} = -[\sqrt{-c_2\alpha} - \frac{2\sqrt{-c_2\alpha}(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}}{(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})}]y$$

$$\frac{dy}{y} = -\sqrt{-c_2\alpha}dt + \frac{2\sqrt{-c_2\alpha}(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}}{(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})}dt$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\ln(y) = -\sqrt{-c_2\alpha}t - 2\ln|(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})| + a$$

$$\ln(y) = -\sqrt{-c_2\alpha}t + \ln|\frac{1}{[(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})]^2}| + a$$

$$y = Ae^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}\frac{1}{[(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})]^2}$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$A = -\frac{4c_2y_0}{\alpha}$$

Ainsi, on obtient

$$y = -\frac{4c_2y_0}{\alpha}\frac{e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t}}{[(x_0 - \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})e^{-\sqrt{-c_2\alpha}t} - (x_0 + \sqrt{\frac{-c_2}{\alpha}})]^2}$$

• Si $c_2 = 0$, nous avons

$$2K_2y = \alpha x^2$$

D'après l'équation 1.9

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{2}x^2$$
$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{\alpha}{2}dt$$

En intégrant membre à membre, nous avons

$$\frac{1}{x} = \frac{\alpha}{2}t + B$$

Considérant les conditions initiales, nous avons

$$B = \frac{1}{x_0}$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{\alpha x_0 t + 2}{2x_0}$$

Soit

$$x(t) = \frac{2x_0}{\alpha x_0 t + 2}$$

En portant $x(t)$ dans l'équation 1.10, nous avons

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha \frac{2x_0}{\alpha x_0 t + 2} y$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dv}{v} = \int_0^t -2\frac{\alpha x_0}{\alpha x_0 u + 2} du$$

$$\ln(y) - \ln(y_0) = -2\ln(\alpha x_0 t + 2) + 2\ln(2)$$

$$\ln(\frac{y}{y_0}) = \ln[\frac{4}{(\alpha x_0 t + 2)^2}]$$

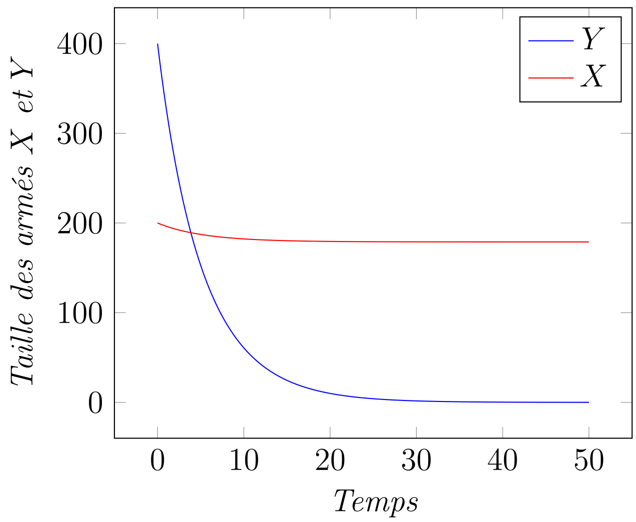
Soit

$$y(t) = \frac{4y_0}{(\alpha x_0 t + 2)^2}$$

■

Exemple 1.3 *Soient X et Y deux armées en guerre. On suppose que cette guerre suit la loi mixte de Lanchester. Voici de courbe montrant le déroulement de la guerre suivant le valeurs de α, K_2, x_0, y_0.*

Loi mixte de Lanchester avec $x_0 = 200,\ \alpha = 0.001,\ y_0 = 400,\ K_2 = 0.01$



X porte la victoire avec une taille finale $x_f = 179$

1.3 La croissance de ressource et de dépense militaire d'un État.

Notre modèle de base part de deux hypothèses sur la croissance des ressources. Tout d'abord, la croissance économique et militaire demandent des investissements. Le plus investi s'agrandit plus vite. Plus l'État investit dans l'armée, moins il peut investir dans l'économie. Les dépenses militaires comportent le coût d'opportunité de la réduction des dépenses économiques.

Remarque 1.1 *En partant de ces hypothèses, la croissance des ressources d'une nation est en fonction de la quantité de ses ressources investies dans la croissance économique et du montant qu'elle investit dans les préparatifs militaires pour les combats.*

Définition 1.8 *Les dépenses militaires d'une nation sont conditionnées au niveau des dépenses militaires de l'autre nation.*

1.3.1 La croissance de ressource et de dépense militaire d'un État dans la rivalité en temps de paix

Proposition 1.4 (Kadera[4]) *La croissance de ressource d'une nation i dans la rivalité en temps de paix est donnée par*

$$r_i' = \alpha_i(r_i - m_i)(1 - \frac{r_i}{K_i - m_i}) - \beta_i \frac{m_i}{r_i} \tag{1.11}$$

où
r_i la base de ressources agrégée de la nation i, $r_i \geq 0$;
m_i le niveau de dépenses militaires de la nation i, $0 \leq m_i \leq r_i$;
K_i le niveau maximal de développement économique de la nation i ;
α_i est le multiplicateur de la croissance économique de la nation i
β_i, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 1.5 (Kadera [4]) *La croissance de dépense militaires d'une nation i par rapport à l'autre nation j dans la rivalité en temps de paix est donnée par*

$$m_i' = \delta_i m_j (1 - \frac{m_i}{r_i}) \tag{1.12}$$

où
r_i la base de ressources agrégée de la nation i, $r_i \geq 0$;
m_i (resp. m_j) le niveau de dépenses militaires de la nation i (resp. la nation j),
$0 \leq m_i \leq r_i$; $\delta_i \in \mathbb{R}_+$.

1.3.2 La croissance de ressource et de dépense militaire d'un État dans la période de la guerre

Proposition 1.6 *La croissance de ressource d'une nation i dans la période de la guerre contre la nation j est donnée par*

$$r_i' = \alpha_i(r_i - m_i)(1 - \frac{r_i}{K_i - m_i}) - \beta_i \frac{m_i}{r_i} - \rho_j r_i m_j \tag{1.13}$$

où
r_i la base de ressources agrégée de la nation i, $r_i \geq 0$;
m_i le niveau de dépenses militaires de la nation i, $0 \leq m_i \leq r_i$;
K_i le niveau maximal de développement économique de la nation i ;
$\rho_j \in \mathbb{R}_+$ est l'efficacité de l'armée de la nation j.

Proposition 1.7 (Kadera [4]) *La croissance de dépense militaires d'une nation i contre l'autre nation j durant la guerre est donnée par*

$$m_i' = \delta_i m_j(1 - \frac{m_i}{r_i}) - \rho_j m_i m_j \tag{1.14}$$

où
r_i la base de ressources agrégée de la nation i, $r_i \geq 0$;
m_i (resp. m_j) le niveau de dépenses militaires de la nation i (resp. la nation j),
$0 \leq m_i \leq r_i$;

Chapitre 2

Modélisation Mathématique des guerres

Dans cet chapitre, nous donnons quelque définitions et termes utilisés dans la guerre.

2.1 Le taux de croissance des forces-armées dans le théâtre de guerre

Définition 2.1 *Une guerre est un affrontement impliquant des forces armées entre des unités organisées.*

Définition 2.2 *Nous allons noter ROUGE et BLEU les deux unités en guerre.*

Remarque 2.1

1) Une guerre peut être de longue ou de courte durée.

2) Une guerre implique des supports différents : support logistique, support humain, ...

Définition 2.3 *Une base militaire est un site, terrain, bâtiment et équipement voué aux besoins des armées et géré par les militaires qui généralement y logent et y travaillent en dehors des opérations extérieures.*

Définition 2.4 *Une base principale est une base militaire pour former, équiper, et transporter les militaires et les engins.*

Définition 2.5 *Les bases militaires non principales sont des bases vouées à l'intervention.*

Remarque 2.2 *Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la base principale.*

Définition 2.6 (Théâtre de guerre) *Le théâtre de guerre est le lieu d'intervention de la guerre c'est le champ de bataille.*

Définition 2.7 *Le plafond d'une unité est la limite supérieure de la taille de force de combat de cette unité peut supporter dans le théâtre de la guerre.*

Définition 2.8 *La disposition d'approvisionnement militaire d'une unité est sa capacité à la formation, à l'équipement et au transport pour le soutien des forces à la ligne de front.*

Définition 2.9 *Le coefficient de performance est la fraction du plafond qu'une unité peut envoyer sur le théâtre de guerre en unité de temps.*

Remarque 2.3 *Quand la guerre a commencé, la fraction envoyée au front est beaucoup moins que le plafond.*

Définition 2.10 *La capacité d'élimination d'une unité est le nombre d'unités des forces mises hors action par une seule unité de ses forces par unité de temps.*

Définition 2.11 *L'unité de mesure de la force est le nombre d'unités opérationnelles sur la ligne de front au théâtre.*

Proposition 2.1 *La vitesse à laquelle une base principale, disons celle de ROUGE (resp. BLEU), peut introduire de nouvelles forces N_r (resp. N_b) est proportionnelle à la différence entre le plafond ou la limite supérieure de la taille des forces de combat de ROUGE R_m (resp. B_m pour BLEU) et la taille des forces déjà envoyées.*

Proposition 2.2 *La vitesse à laquelle une base principale peut introduire de nouvelles forces est donnée par*

$$N_r = \ell(R_m - r) \text{ pour ROUGE}$$

et

$$N_b = p(B_m - b) \text{ pour BLEU}$$

Où
R_m la limite supérieure ou plafond de ROUGE.
B_m la limite supérieure ou plafond de BLEU.
r la taille des forces de ROUGE à l'instant t.
b la taille des forces de BLEU à l'instant t.
ℓ le coefficient de performance de dispositif d'approvisionnement militaire de ROUGE.
p le coefficient de performance de dispositif d'approvisionnement militaire de BLEU.

Proposition 2.3

(i) La vitesse à laquelle une unité peut envoyer de nouvelles forces tends vers zéro lorsque le plafond est atteint.

(ii) Cette limite supérieure est déterminée par la taille de leur économie, leur population, leur distribution des âges et leur capacité de sécuriser ses alliés.

Proposition 2.4 *La vitesse à laquelle les forces d'une unité mises hors action est en fonction de la taille de forces de l'autre côté et leur capacité d'élimination.*

Théorème 2.1 (Morse & Kimball 1962 [10]) *En adoptant à la loi carrée de Lanchester, qui considère que la vitesse P_r (resp. P_b) à laquelle les forces de ROUGE (resp.BLEU) mises hors action par BLEU (resp. ROUGE) est proportionnel à la taille des forces de BLEU (resp. ROUGE) pour la guerre moderne, nous avons donc*

$$P_r = kb$$

et

$$P_b = qr$$

où
k le capacité d'élimination de BLEU .
q le capacité d'élimination de ROUGE.

Définition 2.12 *Le taux de croissance Θ de l'unité contre les forces de l'autre côté est le taux auquel la base principale introduit des forces armées dans la ligne de front moins la vitesse à laquelle les forces d'une unité mises hors action par les forces l'autre côté.*

Le taux de croissance de ROUGE (resp BLEU) contre les forces de l'autre côté disons BLEU (resp ROUGE) s'obtient par le théorème suivant.

Théorème 2.2

$$\Theta(ROUGE) = \ell(R_m - r) - kb$$

et par symétrie, nous obtenons l'équation pour BLEU

$$\Theta(BLEU) = p(B_m - b) - qr.$$

Preuve.
Par définition,

$$\Theta(ROUGE) = N_r - P_r$$

d'où

$$\Theta(ROUGE) = \ell(R_m - r) - kb$$

De même pour $\Theta(BLEU)$.

■

Proposition 2.5 *Ces deux équations du théorème 2.2 peuvent être écrites sous forme d'équation différentielle comme suit*

$$\frac{dr}{dt} = \ell R_m - \ell r - kb \tag{2.1}$$

$$\frac{db}{dt} = \ell B_m - \ell b - qr \tag{2.2}$$

où t est le temps écoulé depuis la début de la guerre.

Remarque 2.4 *Le temps t est nul au début de la guerre.*

Remarque 2.5 *Les solutions de ces équations se divisent en deux classes.*

(i) Les solutions à l'état d'équilibre c'est-à-dire les solutions pour les équations

$$\frac{dr}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$$

Dans la solution à l'état d'équilibre, soit à l'état stationnaire r et b possèdent une paire d'équilibre de valeurs, soit à l'état non-stationnaire $r = 0$ ou $b = 0$.

(ii) Les solutions chaotiques, où r et b peuvent prendre de valeurs pseudo-aléatoires.

Nous allons nous intéresser aux solutions à l'état d'équilibre.

2.2 Solution de l'équation à l'état d'équilibre

Théorème 2.3 *Les solutions à l'état d'équilibre sont données par*

$$r_e = \frac{R_m \frac{\ell}{k} - B_m}{\frac{\ell}{k} - \frac{q}{p}} \tag{2.3}$$

et

$$b_e = \frac{B_m \frac{p}{q} - R_m}{\frac{p}{q} - \frac{k}{\ell}} \tag{2.4}$$

Preuve.
r_e et b_e sont les solutions de

$$\frac{dr}{dt} = 0 \; et \; \frac{db}{dt} = 0$$

Soit

$$\ell R_m - \ell r - kb = 0 \tag{2.5}$$

et

$$B_m p - pb - qr = 0 \tag{2.6}$$

En multipliant l'équation 2.5 par p et 2.6 par $-k$, puis on les somme et on a

$$p\ell R_m - p\ell r - pkb - kB_m p + kpb + kqr = 0$$

$$r(kq - p\ell) = B_m kp - R_m p\ell$$
$$\frac{r(kq - p\ell)}{kp} = \frac{B_m kp}{kp} - \frac{R_m \ell p}{kp}$$
$$r(\frac{q}{p} - \frac{\ell}{k}) = B_m - \frac{R_m \ell}{k}$$
$$r = \frac{\frac{R_m \ell}{k} - B_m}{\frac{\ell}{k} - \frac{q}{p}}$$

En multipliant l'équation 2.5 par $-q$ et 2.6 par ℓ, puis on les somme et on a

$$-R_m \ell q + \ell qr + kqb + B_m \ell p - b\ell p - r\ell q = 0$$

$$b(kq - \ell p) = R_m \ell q - B_m \ell p$$
$$\frac{b(kq - \ell p)}{\ell q} = \frac{R_m \ell q}{\ell q} - \frac{B_m \ell p}{\ell q}$$
$$b(\frac{k}{\ell} - \frac{p}{q}) = (R_m - \frac{B_m p}{q})$$

d'où

$$b = \frac{\frac{B_m p}{q} - R_m}{\frac{p}{q} - \frac{k}{\ell}}$$

■

Théorème 2.4 *Nous avons un état stationnaire avec une valeur non nulle d'équilibre* r_e *et* b_e *pour les tailles des forces ROUGE et BLEU, si* $kq < \ell p$, *avec* $\frac{k}{\ell}$ *et* $\frac{q}{p}$ *sont à la fois petits (c'est-à-dire* < 1*).*

Preuve.
Dans l'état stationnaire, $r_e > 0$ et $b_e > 0$, nous avons

$$\frac{(R_m \frac{\ell}{k} - B_m)}{\frac{\ell}{k} - \frac{q}{p}} > 0$$

et

$$\frac{(B_m \frac{p}{q} - R_m)}{\frac{p}{q} - \frac{k}{\ell}} > 0$$

Soit

$$\frac{\ell}{k} - \frac{q}{p} > 0, \ R_m \frac{\ell}{k} - B_m > 0 \ et \ B_m \frac{p}{q} - R_m > 0$$

$$\frac{\ell}{k} > \frac{q}{p} \ et \ B_m \frac{\ell p}{kq} - B_m > 0$$

Par suite

$$\ell p > kq$$

■

Ces solutions d'équilibre sont importantes, car elles sont censées refléter la nature des grandes guerres du XX^e siècle. Les paragraphes suivantes montrent cette affirmation.

2.3 Combinaison de forces déployées par les participants et détermination de paramètres clés ℓ et k.

Voevodsky montre que l'accumulation d'armée sur terrain (qui est mesurée par le nombre de militaires en service à la ligne de front dans le théâtre approprié) pour un certain nombre de grande guerres (Guerre civile américaine, Guerres mondiales I et II, Corée et Vietnam) suit une modèle à l'état d'équilibre stationnaire ci-dessus.

Posons $S(t)$=$r(t) + b(t)$ la combinaison de forces déployée durant la guerre. Si nous simplifions d'abord les deux équations 2.1 et 2.2 en supposant que $k = q$ et $\ell = p$; et d'additionner les équations, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} S(t) = \ell(R_m + B_m) - (k + \ell) S(t) \tag{2.7}$$

Proposition 2.6 *A l'état stationnaire, la taille combinée des forces dans le théâtre s'approche asymptotiquement de*

$$\ell \frac{R_m + B_m}{k + \ell} \tag{2.8}$$

Preuve.
A l'état stationnaire, nous avons

$$\frac{d}{dt}(r+b) = 0$$

$$\ell(R_m + B_m) - (k+\ell)(r+b) = 0$$

$$r + b = \ell\frac{R_m + B_m}{k+\ell}$$

$$S = \ell\frac{R_m + B_m}{k+\ell}$$

■

Théorème 2.5 *Si on pose* $S_{ss} = \ell\frac{R_m + B_m}{k+\ell}$*, alors la solution de l'équation 2.7 est*

$$S(t) = S_{ss} + (S(0) - S_{ss})e^{-(k+l)t}$$

Preuve.
L'équation 2.7 devient

$$\frac{d}{dt}S(t) = (l+k)S_{ss} - (l+k)S(t)$$

ou

$$\frac{d}{dt}S(t) + (l+k)S(t) = (l+k)S_{ss}$$

c'est une équation différentielle de premier ordre avec second membre.
La solution homogène

$$S_H = Ae^{-(l+k)t}$$

et l'équation particulière s'obtient à l'aide de la méthode de variation de constante. Et on a

$$S(t) = S_{ss} + Ce^{-(k+l)t}$$

Pour $t = 0$,

$$S(0) = S_{ss} + C$$

alors

$$C = S(0) - S_{ss}$$

D'où

$$S(t) = S_{ss} + (S(0) - S_{ss})e^{-(k+l)t}$$

■

Proposition 2.7

$$S(t) \approx S_{ss}(1 - e^{-(k+l)t}) \tag{2.9}$$

Preuve.
A l'instant initiale (au début de la guerre), la taille combinée des forces $S(0) \ll S_{ss}$.

■

Proposition 2.8 (Voevodsky [14]) *Les niveaux de forces déployés par les participants à la grande guerre noté $S(t)$ augmente typiquement au fil de temps ; et on a l'équation*

$$S(t) = S_{ss}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{2.10}$$

où
S_{ss} le grandeur ultime des forces engagées dans la théâtre de la guerre.
τ est la constante temps.

Remarque 2.6 *C'est évidemment la même dépendance temporelle pour la taille des forces belligérantes que Voevodsky identifie 2.10 à 2.9. Il voit que*

$$l + k = \frac{1}{\tau}.$$

Remarque 2.7 *Si $t = \tau$, l'équation 2.10 devient*

$$S \approx 0.63 S_{ss}$$

en effet

$$S = S(\tau) = S_{ss}(1 - e^{-1}) \approx 0.63 S_{ss}$$

On a toujours posé $k = q$ et $\ell = p$; Comment calcule la valeur de k et ℓ ?

Théorème 2.6 *Les pertes permanentes pour les deux camps jusqu'en un certain temps t_1 (Ceux-ci comprennent les morts, les combattants blessés trop sérieusement pour prendre plus part dans la guerre, plus ceux faits prisonniers de guerre plus ceux disparus) sont notés par $C(t_1)$. Et*

$$C(t_1) = \int_o^{t_1} kS(t)dt$$

Preuve.
$C(t_1)$ est le total des pertes pour les deux camps pendant le temps t_1. Alors

$$C(t_1) = \int_0^{t_1} P_r + P_b dt$$

$$C(t_1) = \int_0^{t_1} kb + kr dt$$

$$C(t_1) = k \int_0^{t_1} S(t)dt$$

∎

Théorème 2.7 *Si on connait les pertes permanentes pour les deux camps jusqu'en un certain temps* τ *noté* $C(\tau)$, S_{ss}, $S(0)$, *alors nous obtenons le valeur des paramétrés clés*

$$k = -\frac{C(\tau)}{\tau((0.63-1)S_{ss} - S(0))}$$

et

$$l = \frac{1}{\tau} - k$$

Preuve.
En intégrant membre à membre l'équation 2.7 du temps $t = 0$ à $t = \tau$

$$\frac{d}{dt}S(t) = (l+k)S_{ss} - (l+k)S(t)$$

$$\int_o^\tau S'(t)dt = \int_o^\tau (l+k)S_{ss}dt - \int_o^\tau (l+k)S(t)dt$$

$$S(\tau) - S(0) = (l+k)S_{ss}\tau - (k+l)\frac{C(\tau)}{k}$$

avec

$$C(\tau) = \int_o^\tau kS(t)dt$$

$$S(\tau) - S(0) = S_{ss} - (k+l)\frac{C(\tau)}{k}$$

$$S(\tau) - S(0) - S_{ss} = -(k+l)\frac{C(\tau)}{k}$$

$$\frac{1}{S(\tau) - S(0) - S_{ss}} = -\frac{k}{(k+l)C(\tau)}$$

$$k = -\frac{(k+l)C(\tau)}{S(\tau) - S(0) - S_{ss}}$$

$$k = -\frac{C(\tau)}{\tau(0.63S_{ss} - S(0) - S_{ss})}$$

car $S(\tau) = 0.63S_{ss}$ et $k + l = \dfrac{1}{\tau}$

∎

Exemple 2.1 (Dans la première guerre mondiale) *Il est possible de déterminer les clés pour l'étude de la Première Guerre mondiale. En effet ; il existe des chiffres raisonnablement fiables pour les forces armées et les victimes en uniforme subies par les deux parties ou du moins par des éléments importants des deux côtés de la guerre. Mais c'est aussi parce qu'il s'agit de la dernière guerre statistiquement bien documentée où les avions militaires n'ont joué qu'un rôle insignifiant (au gré des guerres ultérieures) au-delà du théâtre de guerre lui-même (la pertinence de ce point deviendra claire).*

Cela ne veut pas dire que même ici une procédure précise est possible. D'abord, il est nécessaire de supposer à nouveau que $k = q$ et $l = p$ (ce qui pose essentiellement une similitude qualitative entre les côtés belligérants de cette guerre).
La constante temps de Voevodsky est d'environ 1.3 ans soit $\tau = 1.3$. Dans cette guerre, la taille combinée des forces dans le champ s'approche de cinq millions, $S_{ss} = 5000000$.
La taille des forces dans le théâtre au début de la guerre totalise environ deux millions $S(0) = 2000000$.
Le totale des pertes définitives des pays participants pour les 16 premiers mois (1.3 ans) de la guerre est un million six-cent $C(1.3) = 1600000$
A.N :

$$k = \frac{1600000}{1.3[(0.63-1)5000000 - 2000000]}$$

et

$$\ell = 0.77 - k$$

D'où

$$k = 0.32 \ \textit{et} \ l = 0.45$$

Par suite

$$\frac{k}{l} = 0.71$$

et

$$\frac{k^2}{l^2} = 0.5$$

qui est inférieur à 1. Les conditions à l'état stationnaire sont vérifiées, donc la première guerre mondiale est une guerre en état d'équilibre.

Chapitre 3

Terminaison de guerre et choix stratégique

Dans la plupart des guerres majeures du siècle passé, on a constaté les tendances à l'état d'équilibre. Le modèle mathématique dans le chapitre précédent décrit le déroulement à l'état d'équilibre d'une guerre. Mais à chaque guerre, il y a toujours une fin. Dans ce chapitre, nous allons étudier le processus à la paix. On s'intéresse à l'étude de la fin d'une guerre. Elle peut se terminer en raison de la tendance à l'état d'équilibre ou en raison d'un choix stratégique, malgré leurs tendances à l'état d'équilibre.

3.1 Terminaison de la guerre en raison de leurs tendances à l'état d'équilibre

Définition 3.1 *L'état d'équilibre d'une guerre est la plein guerre. c'est-à-dire il n'y a ni de vaincu ni de vainqueur. Autrement dit, les deux forces sont équivalentes.*

Définition 3.2 (Coût) *Le coût est les dépenses pour la préparation de guerre (dépense militaire, matériel, arme,...) plus le perte humaine, matériel,... dans la guerre.*

Définition 3.3 (Bénéfice) *Le bénéfice est les avantages obtenus par la guerre. Il est l'un des causes de la guerre. L'objectif dans une guerre est d'avoir un maximum de bénéfice.*

Proposition 3.1 *Si une guerre est de longue durée, elle est en état d'équilibre.*

Exemple 3.1 *La guerre Iran-Irak, la première guerre mondiale, la deuxième guerre mondiale.*

Proposition 3.2 *Une guerre de longue durée ou une guerre longue peut correspondre à une impasse mutuelle. Cette durée devrait mener au consensus.*

Remarque 3.1 *Chaque parti peut décider de poursuivre ou d'arrêter la guerre selon le coût et le bénéfice.*

Proposition 3.3 *Le coût supplémentaire* $\mathfrak{C}$ *de prolongation* T *d'une guerre à l'état d'équilibre est constante.*

Preuve.
Si la guerre est à l'état d'équilibre, le perte humaine s'accumule linéairement avec le temps, de même que le coût matériel d'infliger de l'autre côté. Le niveau de force dans le théâtre a cessé d' augmenter. La vitesse à laquelle les victimes (tués ou gravement blessés) doit donc être égale à la vitesse d'introduction de nouvelle force. Du point de vue de ROUGE, cette dernière vitesse est égale à $N_r(T)$ avec

$$N_r(T) = \ell(R_m - r(T))$$

Cette expression est constante car $R_m \in \mathbb{R}$; $\ell \in \mathbb{R}$ et $r(T) \in \mathbb{R}$

■

Remarque 3.2 *Le bénéfice supplémentaire attendu pour une nouvelle période* T *dépend de la probabilité* $\mathfrak{p}$ *pour que la guerre se termine durant cette période et que la valeur accordée à un consensus soit atteinte.*

Dans ce qui suit, nous considérons une guerre permanente comme ayant une probabilité fixe $\mathfrak{p}$ de se terminer dans une période T donnée.

Proposition 3.4 $\mathfrak{p}$ *est petit.*

Preuve.
La guerre est en état d'équilibre.

■

Définition 3.4 *La durée moyenne prévue de la guerre* $\overline{T}$ *est définit par*

$$\overline{T} = \frac{T}{\mathfrak{p}}$$

Définition 3.5 *Le bénéfice supplémentaire attendu* $\mathfrak{B}$ *de la poursuite de la guerre pour un côté au cours de* $\overline{T}$ *dépend linéairement de la valeur d'un consensus* $\mathcal{V}$ *fois la probabilité* $\mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{B} = \gamma\mathcal{V}\mathfrak{p}$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

Définition 3.6 *Le coût supplémentaire attendu* $\mathfrak{C}$ *de la poursuite de la guerre pour un côté au cours de* $\overline{T}$ *dépend linéairement de la probabilité* $\mathfrak{1} - \mathfrak{p}$ *fois* $\mathfrak{E}$.

$$\mathfrak{C} = \sigma(1 - \mathfrak{p})\mathfrak{E}$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}_+$
$(1 - \mathfrak{p})$ *désigne la probabilité pour que la guerre ne se termine pas dans la période* T. .

Proposition 3.5 *Nous obtenons la différence entre le bénéfice supplémentaire attendu et le coût supplémentaire attendu par*

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{C} = (\sigma\mathfrak{E} + \gamma\mathcal{V})\mathfrak{p} - \sigma\mathfrak{E}$$

Preuve.
Nous avons

$$\mathfrak{B} = \gamma\mathcal{V}\mathfrak{p}$$

et

$$\mathfrak{C} = \sigma(1 - \mathfrak{p})\mathfrak{E}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} - \mathfrak{C} &= \gamma\mathcal{V}\mathfrak{p} - \sigma(1 - \mathfrak{p})\mathfrak{E} \\ &= \gamma\mathcal{V}\mathfrak{p} - \sigma\mathfrak{E} + \sigma\mathfrak{p}\mathfrak{E} \\ &= (\sigma\mathfrak{E} + \gamma\mathcal{V})\mathfrak{p} - \sigma\mathfrak{E} \end{aligned}$$

■

Remarque 3.3 *La calcul de rapport cout-bénéfice ci-dessus se présente à une partie.*

Théorème 3.1 (Au point de vue de ROUGE) *Si ROUGE a* $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ *négative, alors il demande de négociation pour terminer la guerre à BLEU.*

Preuve.
Si ROUGE a $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ négative, ROUGE a relativement faible. D'après **Mack[5] 1975**, Son objectif est limité et sa tolérance a faible coût. alors il demande une négociation pour terminer la guerre.

■

Proposition 3.6 *Si* $\mathfrak{p}$ *approche* 0, *alors tous les deux côtés ont* $\mathfrak{B} - \mathfrak{C} < 0$

3.2 Terminaison de guerre par les choix stratégiques

Dans cette section, on montre quelque stratégie militaire pour finir la guerre. C'est-à-dire pour changer une situation stable en situation instable.

Définition 3.7 *L'infrastructure d'approvisionnement de l'ennemi comprend les lignes d'approvisionnement, les sources d'approvisionnement de l'économie et de la société ennemies.*

Proposition 3.7 *L'affaiblissement de l'infrastructure d'approvisionnement de l'ennemi va changer la situation militaire, c'est-à-dire une situation stable ou potentiellement stable en situation instable.*

Avant la guerre les deux côtés éprouvent une rivalité pacifique. Durant la guerre, ils entreprennent une guerre utilisant des armes pour que chaque côté utilisé pour détruire l'autre. Et pour finir la guerre, les opposants combattent une guerre industrielle, ciblant les ressources économiques sous-jacentes de l'autre.

Proposition 3.8 (Au point de vue de BLEU) *Pour affaiblir l'adversaire, il suffit de réduire la coefficient de performance de dispositif d'approvisionnement militaire ℓ de ROUGE ou la limite supérieure R_m (plafond) de ROUGE ou les deux à la fois. De plus, on augmente le capacité d'élimination k de BLEU.*

Preuve.
D'après 2.1, on sait que la taux de croissance de ROUGE est donné par

$$\Theta(ROUGE) = \ell(R_m - r) - kb$$

Alors si on réduit R_m ou ℓ ou les deux à la fois, le taux de croissance se diminue. Et si on augment le capacité d'élimination de BLEU k, le taux de croissance de ROUGE devient très faible

■

3.3 Interprétation

Stabilité du système

$$\frac{dr}{dt} = \ell R_m - \ell r - kb \tag{3.1}$$

$$\frac{db}{dt} = \ell B_m - \ell b - kr \tag{3.2}$$

A partir des équations 3.1 et 3.2, un résultat en régime permanent nécessite non seulement que $\frac{dr}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, mais aussi que la relation de forces à cette conjoncture est stable. Le stabilité est un équilibre qui est robuste et qui n'est pas facilement perturbé par des augmentations ou des diminutions de la taille des forces opposées résultant dans ce dernier cas, par exemple du «frottement» de Clausewitz.

Les valeurs r_e et b_e dans 2.3 et 2.4 correspond à la situation d'équilibre dans la mesure où la taille des forces de ROUGE et de BLEU est maintenant constante. Mais l'équilibre pourrait être instable et nous nous intéresserons aux circonstances où l'homéostasie s'applique, c'est-à-dire où les fluctuations de la taille des armées d'un ou de l'autre côté autour du point d'équilibre devraient être amorties.

Nous pouvons réécrire les équations 3.1 et 3.2 comme suit :

$$r_e = R_m - \frac{k}{\ell} b_e \tag{3.3}$$

$$b_e = B_m - \frac{q}{p} r_e \tag{3.4}$$

Qu'est-ce qui se passe sur la valeur d'équilibre des forces de ROUGE r_e si la taille de force à l'équilibre de BLEU b_e augmente par Δb_1 ?

Proposition 3.9 *Si la taille de force à l'équilibre de BLEU b_e augmente par Δb_1 alors la valeur d'équilibre des forces de ROUGE r_e diminue de $\frac{k}{\ell}\Delta b_1$, et cette chute de r_e entraine une nouvelle augmentation Δb_2 de b_e.*

$$\Delta b_2 = \frac{q}{p} \frac{k}{\ell} \Delta b_1$$

Preuve.

Si on augment b_e par Δb_1, d'après 3.3, nous avons

$$r_e^1 = R_m - \frac{k}{\ell} b_e - \frac{k}{\ell} \Delta b_1$$

$$r_e^1 = r_e - \frac{k}{\ell} \Delta b_1$$

ce qui veut dire que r_e diminue de $\frac{k}{\ell}\Delta b_1$, et d'après 3.4 nous avons

$$b_e^1 = B_m - \frac{q}{p} r_e + \frac{qk}{p\ell} \Delta b_1$$

$$b_e^1 = b_e + \frac{qk}{p\ell} \Delta b_1$$

$\blacksquare$

Pour que l'homéostasie s'applique, c'est-à-dire que l'équilibre décrit est stable, Δb_2 doit être inférieur à Δb_1, par suite

$$kq < \ell p \tag{3.5}$$

Si cette condition est remplie, les perturbations au point d'équilibre s'abaissent, un nouvel équilibre s'établit non loin du point initial (une analyse commençant plutôt par un changement de la taille des forces d'équilibre de ROUGE conduirait à la même conclusion). Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, les perturbations deviennent rapidement amplifiées et l'équilibre est perdu.

Proposition 3.10 *En appliquant la condition 3.5 aux équations 2.3 et 2.4, on obtient deux autres conditions pour avoir un équilibre stable*

$$\frac{R_m}{B_m} < \frac{p}{q}$$

et

$$\frac{k}{\ell} < \frac{R_m}{B_m}$$

Preuve.
Puisque r_e et b_e sont positifs et que $\frac{\ell}{k} - \frac{q}{p}$ et $\frac{p}{q} - \frac{k}{\ell}$ positifs, donc on a forcement

$$R_m \frac{\ell}{k} - B_m > 0 \textit{ et } B_m \frac{p}{q} - R_m > 0$$

d'où

$$\frac{k}{\ell} < \frac{R_m}{B_m} \textit{ et } \frac{R_m}{B_m} < \frac{p}{q}$$

■

Toutes ces conditions doivent être satisfaites sans grande difficulté **(May [9], 1981 : 88)**, à condition que $\frac{k}{\ell}$ et $\frac{q}{p}$ soient petits (inférieur à 1). C'est la position adoptée dans le texte principal. Nos calculs pour la Première Guerre mondiale ont montré que $\frac{k}{\ell}$ (et $\frac{q}{p}$, qui a été pris pour être le même) était approximativement 0.71 dans cette guerre.

Bien sûr, il doit y avoir des limites au processus homéostatique. Une baisse soudaine de la taille de la force de BLEU qui a dépassé b_e ne pouvait pas être récupérée. Si une telle chute était infligée par une augmentation soudaine des forces de ROUGE, due par exemple, à l'acquisition d'une nouvelle alliée de ROUGE, cela signifierait qu'une addition à la force de ROUGE par $\frac{p}{q} b_e$ ou plus ne pouvait être récupérée par BLEU. Certes, cela correspond normalement à un très grand accroissement de la force de ROUGE.
Deuxièmement, plus les valeurs de $\frac{k}{\ell}$ et $\frac{q}{p}$ sont faibles, plus la tendance homéostatique est forte. D'autre part, plus ces deux paramètres de stabilité sont grands (plus ils se rapprochent de l'unité) plus le temps nécessaire pour rétablir une situation d'équilibre après

avoir été perturbé d'une certaine manière sera plus long. Et plus cette période de temps est longue, plus il y aura d'autres influences (éventuellement hasard) pour interférer et déterminer les résultats.

"Mille hommes tirent deux fois plus de balles que cinq cents, mais il aura plus de perte sur les mille que les cinq cents, car il faut supposer que les mille seront déployés plus étroitement"
Même une armée relativement petite peut générer un niveau élevé de destruction si elle a un grand nombre de cibles. Dans le même temps, l'efficacité d'une force plus importante peut être limitée par un nombre réduit d'objectifs.
L'illustration de Clausewitz est parallèle aux modèles écologiques, dans lesquels les changements dans une population de proies sont déterminés par une interaction entre le nombre de proies et le nombre de prédateurs. Ce n'est pas seulement le nombre de renards qui compte, ni le nombre de lapins, mais la fréquence avec laquelle un renard peut attraper un lapin.

Conclusion

En somme, l'étude de la modélisation mathématique de guerre nous permet de prédire le déroulement de la guerre. Nous faisons la modélisation pour prendre une bonne décision d'entrer à la guerre ou de l'éviter. Ce travail a montré différents aspects de la guerre en générale. Ces modèles étudiés peuvent s'appliquer aux différentes guerres modernes du siècle passé. Pour les recherches dans la future, il serait très intéressant d'étudier plus explicitement les paramètres clés selon les matériels utilisés. Les guerres aussi ne sont pas seulement limitées aux guerres entre deux nations mais il y a aussi des guerres sous forme de lutte à savoir lutte contre la pauvreté, lutte contre le "Dahalo", lutte contre la corruption, lutte contre différentes maladies et lutte contre l'inflation, ... toute ses luttes ainsi que d'autres problèmes méritent d'être étudiés profondément.

Bibliographie

[1] Brown David, Peter Rothery, *Models in Biology*, Chichester : Wiley, 1993.

[2] Churchill Winston S., *The World Crisis 1916–1918 : Part 1.* London : Thornton Butterworth, 1927.

[3] Brown C., *Differential equations : A modeling approach*, Los Angeles, CA : Sage Publications, Clausewitz C. von 1834/1984, On War, trans.and ed. by Michael Howard , Peter Paret,Princeton, NJ : Princeton University Press, 2007.

[4] Kadera K., *The Trade-Offs of Fighting and Investing : A Model of the Evolution of War and Peace*, Conflict Management and Peace Science **25**, 2008, pp 152–170.

[5] Mack Andrew, *Why Big Nations Lose Small Wars*, World Politics **27**(2), 1975, pp 175–200.

[6] Mason T. David, Patrick J. Flett, *How Civil Wars End : A Rational Choice Approach*, Journal of Conflict Resolution **40**(4), 1996, pp 546–568.

[7] Massoud Tansa George, *Review Essay : War Termination*, Journal of Peace Research Research **33**(4), 1996, pp 491–496.

[8] May Robert M. Simple *MathematicalModels with Very Complicated Dynamics*, Nature **261**, 1976, pp 459–467.

[9] May Robert M. *Models for Two Interacting Populations*, in Robert M. May ed., *Theoretical Ecology : Principles and Applications.* Oxford : Blackwell Scientific, 1981, pp 78–104.

[10] Morse Philip M., George E. Kimball, *Methods of Operations Research,* Cambridge, MA : MIT Press, 1962.

[11] Pillar Paul R., *Negotiating Peace : War Termination as a Bargaining Process*, Princeton, NJ : Princeton University Press, 1983.

[12] Richardson L., *Arms and insecurity.* Chicago : Homewood, 1960.

[13] Smith J. Maynard, *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press, 1968.

[14] Voevodsky John, *Modeling the Dynamics of Warfare*, in Douglas E. Knight, Huntington W. Curtis, Lawrence J. Fogel, eds Cybernetics, Simulation and Conflict Resolution, New York Washington, DC : Spartan, 1971, pp (145–170).

[15] Wagner R. Harrison, *Peace, War, and theBalance of Power*, American Political Science Review **88**(3), 1994, pp 593–607.

[16] Zartman I. William, *Ripe for Resolution.* Oxford , New York : Oxford University Press, 1985.

Titre : Modélisation de guerre
Auteur : RASAMIMANANA Mindrafinarittra Landry Victorien
Tel : 033 03 614 34
e-mail : rasamfina@gmail.com

RESUME

Un modèle mathématique simple et général pour la guerre moderne est présenté. La forme du modèle est Lanchester mais sa dérivation doit des quantités approximativement égales à la recherche opérationnelle classique et aux idées ultérieures associées à l'écologie théorique - en particulier au concept de «capacité de charge». Les solutions aux équations correspondant aux résultats stables dans le théâtre sont concentrées, avec une justification empirique tirée du travail de Voevodsky, qui a été délibérément négligé. La prolongation et l'impasse sont considérées comme l'état par défaut de la guerre moderne. La cessation de la guerre est discutée en conséquence de «l'impasse mutuelle (mais pas également)». Des exemples sont donnés de la façon dont, dans certaines circonstances, l'impasse peut être préemptée dans le théâtre en frappant à des cibles non-champ de bataille et la lumière est jetée sur la fin du 20e siècle tendance stratégique à la conduite de la guerre prépondérante de l'air.

Mots clé : modélisation, guerre, équation de Lanchester, équation différentielle, état d'équilibre.

ABSTRACT

A simple, general mathematical model for modern war is presented. The form of the model is Lanchester but its derivation owes approximately equal amounts to classical operational research and to later ideas associated with theoretical ecology – especially the concept of 'carrying capacity'. Solutions to the equations corresponding to stalemated, steady-state outcomes in theatre are concentrated on, with empirical justification derived from the unduly neglected databased work of Voevodsky. Prolongation and stalemate are seen as the default state of modern war. War termination is discussed as a consequence of 'mutually (but not equally) hurting stalemate'. Examples are given of how, in certain circumstances, stalemate may be pre-empted in theatre by striking at non-battlefield targets and light is cast on the late 20th-century strategic trend towards conducting war preponderantly from the air.

Keywords : modelling, war, Lanchester's equation, differential equation, steady-state.

Rapporteur : Madame Fanja RAKOTONDRAJAO
Maître de Conférences à l' Université d'Antananarivo