UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire pour l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies
(DEA)

Option : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Spécialité : ECONOMETRIE ET ECONOMIE MATHEMATIQUE

Présenté par :

RASAMIMANANA Tivo Hely

EQUILIBRE GENERAL AVEC MARCHES FINANCIERS INCOMPLETS

Soutenu publiquement le 14 avril 2008

Devant la commission d'examen composée de :

Président : Monsieur HARISON Victor,
Professeur Titulaire
Rapporteur : Monsieur RAVELOMANANA Mamy Raoul,
Professeur
Examinateurs : Monsieur RABIAZAMAHOLY Marc,
Maître de Conférences
Monsieur RASOAMIARAMANANA Daniel,
Maître de Conférences

REMERCIEMENTS

Mes premières pensées vont vers DIEU qui m'a donné le courage et la force tout au long de mon cursus, pour enfin aboutir à la confection de ce mémoire.

Je tiens particulièrement à exprimer toute ma gratitude à Monsieur RAVELOMANANA Mamy Raoul, Professeur, pour la grande patience dont il a fait preuve et pour la qualité de son encadrement. Les connaissances qu'il m'a transmises et les conseils qu'il m'a donnés ont été cruciaux pour mon évolution personnel et surtout pour la confection de ce document.

J'adresse aussi mes sincères remerciments à tous les professeurs ayant contribué à ma formation tout au long de mon

Je tiens également à remercier toute ma famille m'a toujours soutenu et qui n'a jamais perdu foi en moi pour parvenir à mes fins.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie économique, le modèle d'Arrow-Debreu et le modèle d'équilibre général de Walras constituent la base fondamentale des évolutions dans le domaine de la Théorie de l'équilibre général. Le modèle d'Arrow-Debreu avec marchés contingents est un modèle d'économie à deux périodes où la deuxième comporte une incertitude quant à la réalisation des états contingents. Dans ce modèle, à chaque bien contingent correspond un marché contingent et les marchés contingents sont complets : le nombre de marchés contingents est égal a celui des états contingents. Les biens contingents permettent aux agents économiques de se couvrir contre le risque de la seconde période qui n'est autre que l'incertitude dans la réalisation des états contingents. Tous les biens y sont échangés en même temps sans considérer quand et sous quel état de la nature ils seront consommés. L'équilibre obtenu dans ce modèle remplit les mêmes propriétés que celles obtenues dans le modèle d'équilibre général de Walras. Ces propriétés de l'équilibre sont l'unicité locale et l'optimalité de l'équilibre au sens de Pareto (ou la Pareto optimalité). Cela implique que, s'il n'y a aucune intervention autre que celle des agents économiques et si les agents économiques et leurs anticipations sont parfaitement rationnels, alors le mécanisme de marché aboutit à un équilibre et cet équilibre offre le meilleur niveau de satisfaction possible pour tous les agents économiques.

Dans le modèle d'Arrow-Debreu on peut introduire des marchés financiers sans changer les propriétés de l'équilibre. Dans ce cas, on parle de Modèle d'équilibre général avec marchés financiers complets, c'est à dire que le nombre d'actifs fianciers est égal à celui des états contingents. Dans ce mémoire, on se propose d'étudier le cas d'une économie avec marchés financiers incomplets (ou marchés incomplets). Dans la suite, on appelle une telle économie "‘économie **GEI**"’ (General Equilibrium with Incomplete markets). Cela signifie que le nombre d'actifs financiers est strictement inférieur à celui des états contingents. L'incomplétude des marchés implique que les agents ne sont pas parfaitement couverts contre le risque de la deuxième période. Il y a au moins quatre raisons pour lesquelles on peut envisager que les marchés fianciers soient incomplets : d'abord il y a l'asymétrie d'information. En effet si deux types d'agents concluent un contrat d'assurance sauf que les informations détenues par chacun d'eux ne sont pas les mêmes, alors dans ce cas l'une des parties sera inévitablement lésée et pour l'éviter le contrat ne doit pas être conclu. En d'autres termes, le marché relatif à cet actif financier ne doit pas exister. Ensuite, il se peut que les modalités d'accès à un marché ne soient pas identiques pour tous les agents. De plus, les coûts de transactions dans la constitution et la spécification d'un actif financier peuvent excéder les profits que fera un entrepreneur en ouvrant le marché de cet actif. Enfin, il est impossible de connaitre tous les états de la nature possibles dans le future pour pouvoir se couvrir totalement contre le risque que cela représente. Ces raisons font que, par rapport au modèle d'équilibre général de Walras et celui d'Arrow-Debreu, le modèle d'économie GEI est plus réaliste. La question à laquelle ce mémoire se propose de répondre est : "quelles sont les implications l'incomplétude des marchés ?".

Dans le premier chapitre, on procède à des rappels relatifs à la théorie de l'équilibre général. Le deuxième chapitre expose le modèle d'économie et traite de l'existence de l'équilibre. A part l'incomplétude des marchés, l'ouverture séquentielle des marchés est aussi introduite au modèle. Les actifs financiers réels et les actifs financiers nominaux y sont aussi traités séparément. Le troisième chapitre est relatifs aux propriétés de l'équilibre : l'unicité locale et l'optimalité. Enfin, le quatrième chapitre expose les différentes implications de l'incomplétude des marchés.

Chapitre 1

Rappels sur la théorie de l'équilibre général

1.1 Le modèle d'équilibre général de Walras

1.1.1 Le modèle d'économie

On considère une économie d'échange à une seule période. H agents économiques $(h = 1, \ldots, H)$ s'échangent L biens $(l = 1, \ldots, L)$ sur les marchés. Chaque agent h est caractérisé par son ensemble de consommation $X^h \subset R^L$ et une relation de préférence $\succ_h$ définie sur R^L représentée par sa fonction d'utilité $u^h : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$. Chaque agent h a une dotation initiale $w^h \subset R^L$. Une allocation réalisable pour cette économie est un vecteur $(x^1, \ldots, x^H)$ dans $X^1 \times \ldots \times X^H$ tel que :

$$\Sigma_{h=1}^{H} x^h = \Sigma_{h=1}^{H} w^h$$

1.1.2 La Pareto optimalité

Une allocation réalisable $(x^1, \ldots, x^H)$ est Pareto optimale s'il n'existe pas une allocation réalisable $(\hat{x}^1 \ldots, \hat{x}^H)$ telle que :

$$u^h(x^h) \leq u^h(\hat{x}^h),\ h = 1, \ldots, H \textit{ avec au moins une inegalite stricte.}$$

On note que la Pareto optimalité ou optimalité au sens de Pareto est la notion d'optimalité de référence dans la théorie économique, et notamment dans la théorie de l'équilibre général.

1.1.3 Le Prix d'équilibre

Une allocation réalisable $(\hat{x}^1 \ldots, \hat{x}^H)$ et un vecteur de prix $p \in \mathbb{R}^L$ constituent un prix d'équilibre si pour tout h et tout x^h :

$$si\ p.x^h \leq p.\hat{x}^h,\ alors\ u^h(x^h) \leq u^h(\hat{x}^h).$$

1.1.4 L'équilibre walrassien

Une allocation réalisable $(x^1, \ldots, x^H)$ et un vecteur de prix $p \in \mathbb{R}^L$ constituent un *équilibre walrassien* s'ils contituent un prix d'équilibre et $p.x^h \leq p.w^h$.

Un équilibre walrassien vérifie les propriétés d'existence, d'unicité locale et de la Pareto optimalité.

1.2 Le modèle d'Arrow-Debreu avec marchés contingents

1.2.1 Le modèle d'économie

On considère une économie d'échange à deux périodes $(t = 0, 1)$. En $t = 0$ l'état de la nature qui se réalise est connu. L'incertitude est introduite dans le modèle pour la deuxième période : en $t = 1$ seul parmi les S états de la nature (où états contingents) possibles se réalise, $s = 1, \ldots, S$. L'économie comprend H agents économiques $(h = 1, \ldots, H)$ et L biens $(l = 1, \ldots, L)$: le nombre total de biens est donc $L(S + 1)$. Chaque agent h a une dotation initiale $w^h = (w_0^h, w_1^h, \ldots, w_S^h) \in \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)}$ et choisit un vecteur de consommation $x^h = (x_0^h, x_1^h, \ldots, x_S^h) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)}$. Chaque agent h a une relation de préférence $\succ_h$ sur $\mathbb{R}^{L(S+1)}$ représentée par la fonction d'utilité $u^h : \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \to \mathbb{R}$, $h = 1, \ldots, H$. Tous les marchés s'ouvrent en même temps au début de la première période, et les échanges s'arrêtent à la fin de cette première période même. Le vecteur de prix est noté par $p = (p_0, p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)}$

1.2.2 L'équilibre d'Arrow-Debreu

L'*équilibre d'Arrow-Debreu* de cette économie est constitué par une allocation $(\bar{x}^h)$ et un système de prix p tels que :

(*i*) $(\bar{x}^h)_{h=1,\ldots,H} \in B^h(p, q) = \{x \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} / p_s.(x_0 - w_s^h) = 0\}$ maximise $u^h(x^h)$;

(*ii*) $\sum_{h=1}^H \bar{x}^h = w^h$.

L'*équilibre d'Arrow-Debreu* possède les propriétés que l'*équilibre walrassien* : l'existence, l'unicité locale et la Pareto optimalité.

Chapitre 2

Modèle d'équilibre avec marchés financiers incomplets

2.1 Présentation du modèle

On considère une économie à deux périodes ($t = 0, 1$). En deuxième période S états de la nature (où états contingents), $s = 1, \ldots, S$, peuvent se réaliser : en $t = 0$ l'état de la nature qui se réalise est connu, et en $t = 1$ seul état s parmi les S états possible se réalise. En considérant $t = 0$ comme étant l'état contingent $s = 0$, l'économie comporte donc $S + 1$ états contingents . L'économie comprend H agents économiques ($h = 1, \ldots, H$)et L biens ($l = 1, \ldots, L$) : le nombre total de biens est donc $L(S+1)$. Chaque agent h a une dotation initiale $w^h = (w_0^h, w_1^h, \ldots, w_S^h) \in \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)}$ et choisit un vecteur de consommation $x^h = (x_0^h, x_1^h, \ldots, x_S^h) \in \mathbb{R}_{+}^{L(S+1)}$. Chaque agent h a une relation de préférence $\succ_h$ sur $\mathbb{R}^{L(S+1)}$ représentée par la fonction d'utilité $u^h : \mathbb{R}_{+}^{L(S+1)} \rightarrow \mathbb{R}$, $h = 1, \ldots, H$.

La structure de marché est décrite comme suit : les marchés s'ouvrent au début de la date $t = 0$ pour les L biens de la première période et pour chaque actif financier et ferment à la fin de cette date. En seconde période, après que l'état de la nature soit connu et que les actifs financiers aient procédé aux paiements, les marchés des L biens de la deuxième période s'ouvrent. Le vecteur de prix est noté par $p = (p_0, p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)}$. Les marchés financiers sont constitués de J ($j = 1, \ldots, J$) actifs financiers avec un vecteur de prix d'actifs $q = (q_1, \ldots, q_J) \in \mathbb{R}^J$. Etant donné que les marchés financiers sont incomplets, on a donc $J < S$. Les agents économiques transfèrent leurs richesses entre les périodes et les états contingents par l'intermédiaire des actifs financiers. Chaque agent se constitue donc un portefeuille $\theta \in \mathbb{R}^J$ formé par les actifs financiers.

Les actifs financiers sont classés en deux catégories selon leur forme de constitution. Dans une économie de production les actifs financiers sont endogènes car ils représentent les choix de production des producteurs ou des firmes. Dans ce cas la dotation initiale en actifs financiers de l'agent h est représentée par $\tilde{\theta}_j^h$ et $\sum_{h=1}^{H} \tilde{\theta}_j^h = 1$, pour tout j. Dans une économie d'échange les actifs financiers sont exogènes car dans ce cas ce sont des contrats qui promettent une quantité de bien ou de monnaie dans la période suivante. Dans ce cas la dotation initiale en actifs financiers des agents est nulle, $\tilde{\theta}_j^h = 0$. Dans la suite on ne considère que le cas des actifs financiers exogènes, c'est à dire que l'on considère un modèle d'économie d'échange. Dans une économie d'échange on considère deux types d'actifs financiers : les actifs réels et les actifs nominaux.

Hypothèses

1. (i) $u^h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{L(S+1)})$;

   (ii) u^h est deux fois continûment différentiable, strictement croissante et strictement quasi concave. De plus les courbes d'indifférences sont strictement fermées dans $\mathbb{R}_+^{L(S+1)}$;

   (iii) $w^h \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)}$
2. lorsque la structure financière est constituée par des actifs nominaux, $rangR = J$.
3. R est en position générale, c'est à dire que chaque sous-matrice de R est de plein rang.

2.1.1 Economie GEI avec actifs réels

Un actif financier est réel lorsqu'il paie en terme de biens. Une unité de l'actif j est donc un contrat promettant de livrer $a_{s,l}^j$ unités du bien l dans l'état s, $l = 1, \ldots, L$ et $s = 1, \ldots, S$. On note par $A_s = (a_{s,l}^j,\ l = 1, \ldots, L,\ j = 1, \ldots, J)$ la matrice $L \times J$ pour chaque état s. $A = (A_1, \ldots, A_S) \in \mathbb{R}^{LJS}$ résume la strucuture financière de l'économie. Le rendement des actifs est représenté par la matrice $S \times J$, $V(p, A) = p.A = (p_s A_s)_{s=1}^S$.

$$V(p; A) = \begin{pmatrix} p_1.a_1^1 & \ldots & p_1.a_1^J \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & p_s.a_s^j & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_S.a_S^1 & \ldots & p_S.a_S^J \end{pmatrix}$$

L'ensemble de budget de l'agent se constituant le porte feuille θ est donc

$$B^h(p, q) = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J / p_0.(x_0 - w_0^h) + q.\theta = 0 \ \ et \ \ p_s.(x_s - w_s^h) = V(p_s, A)\theta,\ s \geq 1\}. \tag{2.1}$$

Une économie GEI avec des actifs réels est notée par $\mathcal{E}((u^h, w^h), A)$.

Définition 1. *Un équilibre pour l'économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h), A)$ est un système de prix (p, q) et une allocation $(\bar{x}^h, \bar{\theta}^h)_{h=1,\ldots,H}$ tels que*

(i) $(\bar{x}^h, \bar{\theta}^h)_{h=1,\ldots,H} \in B^h(p, q)$ *maximise* $u^h(x^h)$ *;*

(ii) $\sum_{h=1}^H (\bar{x}^h - w^h) = 0$ *;*

(iii) $\sum_{h=1}^H \bar{\theta}^h = 0$.

2.1.2 Economie GEI avec actifs nominaux

Les actifs financiers sont nominaux lorsque les paiements à la date 1 s'effectuent en terme monétaire. Pour décrire la structure financière composée d'actifs nominaux, on ajoute un $(L+1)$-ème bien qui est la monnaie. On suppose que la fonction d'utilité u^h de chaque agent h est indépendante de la monnaie et la dotation initiale en monnaie est nulle pour tout h et pour tout s, $w^h_{s,L+1} = 0$. La matrice $S \times J$, R, décrit le rendement de chacun des Jactifs financiers dans chacun des S états contingents, en terme du bien x_{L+1}, c'est à dire de la monnaie

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & \dots & r_1^J \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & r_s^j & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_S^1 & \dots & r_S^J \end{pmatrix}$$

On suppose que la monnaie a un prix positif et on fixe $p_{s,L+1} = 1$, $\forall s$. u^h étant indépendante de $x^h_{s,L+1}$ et $p_{s,L+1} > 0$, l'offre et la demande de ce bien sont donc nulles. L'équation relative à $x^h_{s,L+1}$ est alors redondante et peut être exclue de l'équilibre. L'ensemble de budget de l'agent h devient donc :

$$B^h(p,q) = \{(x,\theta) \in \mathbb{R}^{LS}_+ \times \mathbb{R}^J / p_0.(x_0 - w^h_0) + q.\theta = 0 \ \ et \ \ p_s.(x_s - w^h_s) = R_s\theta, \ s \geq 1\}. \quad (2.2)$$

On ne tient plus compte des prix p_s dans le deuxième membre de l'équation de la date 1 car les rendements des actifs financiers sont exprimés en fonction de la monnaie.

Une économie GEI avec actifs nominaux est notée par $\mathcal{E}((u^h, w^h), R)$.

Définition 2. *Un équilibre pour l'économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h), R)$ est un système de prix (p,q) et une allocation $(\bar{x}^h, \bar{\theta}^h)_{h=1,\dots,H}$ tels que*

(i) $(\bar{x}^h, \bar{\theta}^h)_{h=1,\dots,H} \in B^h(p,q)$ *maximise* $u^h(x^h)$ *;*

(ii) $\sum_{h=1}^H (\bar{x}^h - w^h) = 0$ *;*

(iii) $\sum_{h=1}^H \bar{\theta}^h = 0$.

La définition de l'équilibre est identique à celle avec des actifs réels.

2.2 Existence de l'équililibre dans une économie GEI avec actifs réels

2.2.1 Le problème d'inexistence de l'équilibre : le contre-exemple de Hart

Le contre-exemple de Hart[1] est basé sur un modèle d'économie à deux périodes avec deux biens et deux agents. Il y a deux états de la nature en seconde période. En première période, les agents ne consomment pas et ne font qu'échanger deux actifs. Le premier actif délivre une unité du premier bien dans les deux états , et le second actif délivre une unité du deuxième bien dans les deux états. La matrice de rendement s'écrit alors :

$$V(p;A) = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

Les dotations initiales sont données par :

$$w^1 = (w_1^1, w_2^1) = ((1-e, 1-e), (e, e))$$

$$w^2 = (w_1^2, w_2^2) = ((e, e), (1-e, 1-e))$$

où e est un paramètre avec $0 < e < 1$ et $e \neq \frac{1}{2}$. Les fonctions d'utilité sont de la forme

$$u^1(x^1) = \frac{1}{4}\log x_{1,1}^1 + \frac{1}{4}\log x_{1,2}^1 + \frac{1}{4}\log x_{2,1}^1 + \frac{1}{4}\log x_{2,2}^1$$

$$u^2(x^2) = \frac{1}{6}\log x_{1,1}^2 + \frac{1}{3}\log x_{1,2}^2 + \frac{1}{6}\log x_{2,1}^2 + \frac{1}{3}\log x_{2,2}^2$$

Remarques

1. S'il n'y a aucun échange d'actifs, les prix d'équilibre sur les marchés au comptant sont linéairement indépendants. Cela vient du fait que les fonctions d'utilités sont les mêmes pour chaque agent dans les deux états de la nature, mais que la distribution des dotations initiales est différente (alors que le total est le même dans les deux états).
2. Si à l'équilibre $rangA = 2$, alors l'équilibre financier est identique à celui dans le cas où les marchés sont complets (c'est à dire même allocation et même prix).
3. Si $rangA = 2$, le vecteur de prix d'équilibre dans l'état 1 est colinéaire à celui de l'état 2.
4. Si à l'équilibre financier $rangA = 1$, c'est à dire que les prix sont colinéaires, il n'y a aucun échange d'actifs.

[1]Version du contre-exemple de Hart selon J.M. Tallon dans *Tallon, J.M., 1995, Théorie de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets, Revue économique, Vol. 46, Numero 5, 1207 - 1239*

D'abord, supposons qu'à l'équilibre financier, $rangA = 1$. Il n'y a donc pas d'échange d'actifs et l'équilibre se réduit alors à la juxtaposition des prix d'équilibre au comptant dans chaque état. Cependant, la première remarque contredit l'hypothèse $rangA = 1$. Il n'y a donc pas d'équilibre financier quand $rangA = 1$.

Supposons maintenant qu'à l'équilibre financier $rangA = 2$. L'équilibre financier est un équilibre du modèle avec marchés complets. Les prix dans les deux états sont alors colinéaires, ce qui contredit l'hypothèse $rangA = 2$. Ce modèle n'admet donc pas d'équilibre.

La cause de la non existence d'équilibre dans ce modèle est la discontinuité des fonctions de demande pour le prix d'équilibre. Cette discontinuité est dûe à la discontinuité de la correspondance budgétaire.

Dans cet exemple, les marchés financiers sont complets. Cela n'est pas essentiel pour montrer qu'un équilibre n'existe pas nécessairement. En effet, la possibilité de changement de rang de la matrice A est une propriété dans les modèles où les actifs sont réels, et ne dépend pas de la complétude des marchés financiers.

2.2.2 Réduction au pseudo-équilibre

Pour montrer l'existence de l'équilibre dans le cas où les actifs sont réels, on introduit la notion de pseudo-équilibre[2]. Ce concept a été introduit par Par Magill et Shafer (1990). L'étape fondamentale pour arriver au pseudo-équilibre est un argument d'arbitrage qui consiste à éliminer les prix et les échanges d'actifs financiers pour redéfinir l'ensemble de budget de chaque agent. De cette manière, la cause de la discontinuité dans la correspondance de budget, qui entraîne la non existence de l'équilibre, est éliminée. Un pseudo-équilibre est une paire prix-sous-espace pour lequel le prix solutionne le marché, et où le sous-espace inclut le sous-espace réel de transferts de revenus faisable par les échanges financiers. Pour qu'un pseudo-équlibre soit propre, il est nécessaire que le sous-espace coïncide avec le sous-espace réel des trasferts de revenus. La réduction au pseudo-équilibre comporte deux étapes : l'élimination des échanges d'actifs financiers, qui introduit la notion d'équilibre sans arbitrage ; et le remplacement du sous espace réel des transferts de revenus $\langle V(p) \rangle$ quand les prix sont p, incluant les effets des échanges d'actifs, par un sous-espace L indépendant de p.

Les deuxièmes membres de l'ensemble de budget de l'équation (1.1) peuvent s'écrire sous forme de matrice :

$$W(p,q) = \begin{bmatrix} -q \\ V(p) \end{bmatrix}$$

.

[2]Husseini, S.Y., J.-M. Lasry et M. Magill, 1990, Existence of equilibrium with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics 19, 39-67

Définition 3. *q est un prix d'actifs sans arbitrage relatif à p s'il n'existe pas un portefeuille $\theta \in \mathbb{R}^J$ avec un rendement semipositif $W(p,q)\theta \geq 0$.*

Lemme 1. [3] *Si q est un prix d'actif sans arbitrage relatif à p, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ tel que*

$$q = \sum_{s=1}^{S} \hat{\beta}_s p_s A_s, \;\; \hat{\beta} = (1/\beta_0)\beta$$

Pour un équilibre $((\bar{x}^h, \bar{\theta}^h), (p, q))$ le prix d'actif q doit être un prix sans arbitrage relatif à p. La contrainte budgétaire de la période 0 devient alors

$$p_0(x_0 - w_0^h) = -q\theta^h = -\sum_{h=1}^{H} p_s(x_s A_s \theta^h) = -\sum_{s=1}^{S} p_s(x_s - w_s^h)$$

Ceci est équivalent à écrire $p(x - w^h) = 0$. La contrainte budgétaire de la période 1 peut alors s'écrire

$$p_s.(x_s - w_s^h) \in \langle V(p) \rangle \, , \; \forall s = 1, \ldots, S$$

où $\langle V(p) \rangle$ désigne le sous-espace de $\mathbb{R}^S$engendré par les J colonnes de $V(p)$. Le budget de chaque agent h est ainsi réduit à :

$$B^h(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} / p_0(x_0 - w_0^h) = 0, \; p_s.(x_s - w^h) \in \langle V(p) \rangle \, , \; \forall s = 1, \ldots, S\}, \; h = 1, \ldots, H \tag{2.3}$$

Ceci aboutit à un concept d'équilibre simplifié.

Définition 4. *Un équilbre sans arbitrage de l'économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h), A)$ est une paire $((\bar{x}^h), p)$ telle que*

(i) $\bar{x}^h \in B^h(p)$ maximise $u^h(x^h)$, $h = 1, \ldots, H$;

(ii) $\sum_{h=1}^{H} (\bar{x}^h - w^h) = 0$

Etant donné un équilibre $((\bar{x}^h, \bar{\theta}^h), (p, q))$, il existe $\hat{\beta}$ tel que si $p = \hat{\beta}.\bar{p}$, alors $((\bar{x}^h), p)$ est un équilibre sans arbitrage. Inversement, si $((\bar{x}^h), p)$ est un équilibre sans arbitrage et si on définit

$$V(p)\bar{\theta}^h = p_s(\bar{x}_s^h - w_s^h), \;\; \forall s = 1, \ldots, S, h = 1, \ldots, H$$

$$\bar{\theta}^1 = -\sum_{h=2}^{H} \bar{\theta}^h, \;\; q = \sum_{s=1}^{S} p_s A_s$$

alors $((\bar{x}^h, \bar{\theta}^h), (p, q))$ est un équilibre. Ainsi, pour montrer l'existence de l'équilibre il suffit de montrer l'existence d'un équilibre sans arbitrage

[3]Lemme de Gale

On doit choisir β de la manière suivante :
Soit $((\bar{x}^h, \bar{\theta}^h), (p, q))$ un équilibre et considérons le problème de maximisation de chaque agent h. Par la condition de premier ordre relative au lagrangien on a

$$L^h(x^h, \theta^h, \lambda^h) = u^h - \lambda_0^h[p_0(x_0^h - w_0^h) + q\theta^h] - \sum_{s=1}^{S} \lambda_s^h[p_s(x_s^h - w_s^h) - p_s A_s].$$

En choisissant $\hat{\beta} = \hat{\lambda}^h$ où $\hat{\lambda}^h = (1/\lambda_0^h)\lambda^h$, alors

$$\bar{x}^h \in B^h(p) \text{ } maximise \text{ } u^h(x^h),$$

où

$$B^h(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} / p(x - w^h) = 0\} \tag{2.4}$$

Si l'on choisit $\hat{\beta} = \hat{\lambda}^1$, alors on obtient le concept d'équilibre suivant

Définition 5. *Un équilibre sans arbitrage normalisé pour l'économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h), A)$ est une paire $((\bar{x}^h), p)$ telle que*

(i) $\bar{x}^1 \in B^h(p)$ *maximise* $u^1(x^1)$, $\bar{x}^h \in \mathcal{B}^h(p)$ *maximise* $u^h(x^h)$, $h = 2, \ldots, H$,

(ii) $\sum_{h=1}^{H} (\bar{x}^h - w^h) = 0$.

Ainsi on a éliminé les prix, donc les échanges d'actifs financiers dans le concept d'équilibre. L'étape suivante consiste à remplacer le sous espace réel de transferts de revenus $\langle V(p) \rangle$ réalisables par les échanges d'actifs, par un sous espace L. En présence de J actifs, le sous espace $\langle V(p) \rangle$ est un sous espace de dimension J de $\mathbb{R}^S$. Si l'on veut trouver un sous espace approprié, on doit pouvoir paramétrer un tel sous espace de façon à générer une famille suffisament riche de sous espaces à partir de laquelle on obtient l'équilibre. Considérons la variété $G^{S+1,J}$ formé par tous les sous espaces de dimension J de $\mathbb{R}^S$. Un point $L \in G^{S,J}$ est un sous espace de dimension J.

A partir de l'ensemble de budgets (2.3) et (2.4) des agents, on peut procéder à une normalisation de prix. On place donc p dans un simplex non négatif de la manière suivante :

$$\Delta_+^{L(S+1)-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} / \sum_{i=1}^{L(S+1)} p_i = 1\},$$

et

$$\Delta_{++}^{L(S+1)-1} = \{p \in \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)} / \sum_{i=1}^{S} p_i = 1\}.$$

En remplaçant le sous espace $\langle V(p) \rangle$ dans l'ensemble de budget dans (2.3) par le sous espace $L \in G^{S,J}$, on obtient une correspondance $B : \Delta_+^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \times \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)} \to \mathbb{R}_+^{L(S+1)}$,

$$B^h(p, L) = \{x \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} / p(x - w^h) = 0, p_s.(x_s - w_s^h \in L, \ \forall s = 1, \ldots, S\}, \ h = 1, \ldots, H \tag{2.5}$$

Définition 6. *un pseudo-équilibre pour l'économie GEI* $\mathcal{E}((u^h, w^h), A)$ *dans* $G^{S,J}$ *est une paire* $((\bar{x}^h), (p, \bar{L}) \in \mathbb{R}_+^{HL(S+1)} \times \Delta_{++}^{L(S+1)-1} \times G^{S,J}$ *telle que*

(i) $\bar{x}^1 \in B^1(p)$ *maximise* $u^1(x^1)$, $\bar{x}^h = \in B^h(p, \bar{L})$ *maximise* $u^h(x^h)$, $h = 2, \ldots, H$,

(ii) $\sum_{h=1}^{H}(\bar{x}^h - w^h) = 0$,

(iii) $\langle V(p) \rangle \subset \bar{L}$.

Un pseudo équilibre est propre si

(iii') $\langle V(p) \rangle = \bar{L}$.

Ainsi, pour montrer l'existence de l'équilibre il suffit de montrer l'existence d'un pseudo-équilibre propre.

2.2.3 Existence de l'équilibre

Considérons une économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h); A)$, dont les actifs financiers sont des actifs réels, pour laquelle les préférences des agents, représentées par la fonction d'utilité u^h, sont fixées, alors l'économie peut être paramétrée par la paire dotation-structure financière

$$(w, A) = (w^1, \ldots, w^H, A)) \in \mathbb{R}_{++}^{HL(S+1)} \times \mathbb{R}^{LJS}.$$

L'existence de l'équilibre dans une économie GEI avec actifs réels est donnée par le théorème suivant

Théorème 1. [4] *Soit les fonctions d'utilité* (u^h). *Si* (u^h) *satisfait l'hypotèse 1, alors il existe un ensemble ouvert* Ω *dans l'espace des paires de dotations-structure financière* $R_{++}^{HL(S+1)} \times \mathbb{R}^{LJS}$, *dont le complément est nul, tel que pour tout* $(w, A) \in \Omega$ *l'économie* $\mathcal{E}((u^i, w^h); A)$ *a un équilibre.*

2.3 Economie GEI avec actifs nominaux

On considère une économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h), R)$ où l_s, $l = 1, \ldots, L$ $s = 0, \ldots, S$, désigne le bien l dans l'état s et $w_{l_s}^h$, $s = 0, \ldots, S$, désigne la dotation initiale de l'agent h en bien l dans l'état s .L'existence de l'équilibre est déterminée par le théorème suivant

Théorème 2. [5] *Si les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites, alors l'économie GEI* $\mathcal{E}((u^h, w^h), R)$ *a un équilibre*

[4] Preuve : voir annexe

[5] Théorème de Werner dans Werner, J., 1985, Equilibrium in economies with incomplete financial markets, Journal of Economic Theory 36, 110-119.

Démonstration. [6] On note par K le sous espace de $\mathbb{R}^J$ engendré par les vecteurs r_s pour $s = 1, \dots, S$, et par K_+ le cône convexe engendré par ces vecteurs. L'intérieur de K_+ dans K ($intK_+$) est un ensemble de prix sans arbitrage sur les marchés financiers.

Si $q \notin intK_+$, alors il existe un porte feuille $\theta \in \mathbb{R}^J$ tel que $\theta q \leq 0$, $\theta r_s \leq 0$ pour $s = 1, \dots, S$ et pour au moins un s_0, $\theta r_{s_0} > 0$. Autrement dit, si (p, q) est un système de prix d'équilibre alors $q \in intK_+$. Dans la suite, on considère que les prix d'actifs sont sans arbitrage.

Si q est un vecteur de prix sans arbitrage, alors les consommateurs sont contraints de choisir un porte feuille appartenant à l'ensemble K. En effet, si (x^h, θ^h) est un plan optimal pour un consommateur, alors $(x^h, \tilde{\theta^h})$, où $\tilde{\theta^h}$ est une projection orthogonale de θ^h sur K, est aussi un plan optimal pour ce consommateur car la préférence ne dépend pas de θ , et $\tilde{\theta^h}$ donne le même revenu que θ^h au même coût.

De plus, si $\sum_{h=1}^H \theta^h = 0$ alors $\sum_{h=1}^H \tilde{\theta^h} = 0$. Par conséquent, comme ensemble de budget du h-ème consommateur, on considère

$$B^h(p, q) = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times K, p_0.x_0 + q.\theta \leq p_0.w_0^h \text{ et } p_s x_s \leq p_s w_s^h + \theta r_s, s = 1, \dots, S\} \tag{2.6}$$

Lemme 2. *(i) B^h est une correspondance fermée,*

(ii) $B^h(p, q)$ est un ensemble compact pour $p \gg 0$ et $q \in intK_+$

(iii) B^h est inférieurement semi-continu à chaque (p, q) satisfaisant l'une des conditions suivantes :

$$p_0.w_0^h > 0 \tag{2.7}$$

$$p_s w_s^h > 0, \ \forall s = 1, \dots, S \text{ et } q \neq 0 \tag{2.8}$$

Démonstration. (i) est obtenu par hypothèse

(ii) Par hypothèse, ils existent $\lambda_s > 0$ pour $s = 1, \dots, S$ tels que

$$\sum_{s=1}^S \lambda_s r_s = q$$

Soit $p' = (p_0, \lambda_1 p_1, \dots, \lambda_S p_S)$. On définit

$$B_g^h(p') = \{x \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} : p'x \leq p'w^h\}$$

et

$$F^h(p, q) = \{\theta \in H / q\theta \leq p_0.w_0^h \text{ et } -p_s w_s^h \leq \theta r_s, s = 1, \dots, S\}$$

Pour $p \gg 0$ et $q \in intK_+$, ces deux ensembles sont compacts. On a donc

$$B^h(p, q) \subset B_g^h(p\prime) \times F^h(p, q)$$

d'où $B^h(p, q)$ est compact car c'est un sous ensemble d'un ensemble compact.

[6] Werner, J., 1985, Equilibrium in economies with incomplete financial markets, Journal of Economic Theory 36, 110-119.

(iii) Considérons la correspondance B^h définie par :

$$B^h(p,q) = \{(x,\theta) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times K, p_0.x_0 + q\theta < p_0.w_0^h \; et \; p_s x_s < \theta r_s + p_s w_s^h, s = 1, \ldots, S\}$$

$B^h(p,q)$ est non vide pour tout (p,q) satisfaisant (2.7) ou (2.8).
En effet,
– Si

$$p_0.w_0^h > 0$$

alors $x = 0$ avec un θ tel que

$$q\theta < p_0.w_0^h$$

et

$$\theta r_s > 0, \;\; \theta r_s \in B^h(p,q), \;\; r_s > 0, \;\; s = 1, \ldots, S$$

– Si

$$p_s w_s^h > 0, \;\; s = 1, \ldots, S \; et \; q \neq 0$$

alors $x = 0$ avec un θ tel que

$$q\theta < 0$$

et

$$\theta r_s > -p_s w_s^h, \;\; \theta r_s \in B^h(p,q).$$

Soit $x^n \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)}$ et $\theta^n \in K$ avec $x^n \to x$ et $\theta^n \to \theta$ où $(x,\theta) \in B^h(p,q)$ pour (p,q) satisfaisant (2.7) ou (2.8).
Alors pour tout $\{p^n, q^n\}$ tel que $p^n \to p$, $q^n \to q$, et pour n assez grand,

$$p_0^n x_0^n + q^n \theta^n < p_0^n w_0^h$$

et

$$p_s^n x_s^n < \theta^n a_s + p_s^n w_s^h, \;\; s = 1, \ldots, S.$$

Ainsi, pour n assez grand, $(x^n, \theta^n) \in B^h(p^n, q^n)$. Ceci implique que B^h est inférieurement semi-continu sous (p,q). Puisque la fermeture d'une correspondance inférieurement semi-continue est inférieurement semi-continue, alors on obtient (iii)

□

On définit à présent la correspondance de demande individuelle de l'agent h par

$$\varphi^h(p,q) = \{(x,\theta) \in B^h(p,q) / \; il \; n'existe \; pas \; (x,\theta)' \in B^h(p,q) \; avec \; x' \succ_h x\}. \quad (2.9)$$

La correspondance de demande φ^h a les propriétés suivantes :

Lemme 3. *(i)* φ^h *est non vide, compact, convexe et supérieurement semi-continue pour tout* (p,q) *tel que* $p \gg 0$, $q \in intK_+$

(ii) φ^h *est une correspondance fermée pour tout* (p,q) *satisfaisant* (2.7) *ou* (2.8)

(iii) si la suite $\{p^n, q^n\}$ *des vecteurs de prix strictement positifs (c'est à dire,* $p^n \gg 0$, $q^n \in intK_+$*) converge vers* (p, q) *qui n'est pas strictement positif et satisfaisant* (2.7) *ou* (2.8)*, alors*

$$inf\{\|x\| : (x, \theta) \in \varphi^h(p^n, q^n),\ \forall\theta\} \xrightarrow{n} \infty$$

Démonstration. (i) et (ii) : considérons la relation de préférence $\succ'_h$ définie sur $\mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times R^J$ par $(x, \theta) \succ'_h (x', \theta')$ si $x \succ'_h x'$. $\succ'_h$ est une relation de préférence convexe et continue.

En utilisant le lemme 1, on obtient (i) et (ii). On note que par l'hypothèse 1(iii), pour chaque h, (2.7) ou (2.8) est satisfait pour tout $p \gg 0$ et $q \in intK_+$

(iii) Par l'absurde, supposons le contraire. Alors il existe une sous suite x^n telle que $x^n \to x$ et $(x^n, \theta^n) \in \varphi^h(p^n, q^n)$ pour tout θ^n.

Puisque $(x^n, \theta^n) \in \varphi^h(p^n, q^n)$ et la relation de préférence est monotone, il s'ensuit que

$$p_s^n x_s^n = \theta^n r_s + p_s^n w_s^h,\ s = 1, \dots, S.$$

Quand $n \to \infty$, pour tout s, on obtient

$$\theta^n a_s \to p_s^n x_s^n - p_s^n w_s^h.$$

Puisque $\theta^n \in K$ et K étant le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs r_s, il s'ensuit que

$$\theta^n \to \theta \in K.$$

Par (ii), φ^h est fermé sous (p, q). Par conséquent $(x, \theta) \in \varphi^h(p, q)$.

Or, puisque (p, q) n'est pas strictement positif (c'est à dire que certains prix sont égal à 0 ou qu'il y a opportunité d'arbitrage) et chaque bien est désiré, il s'ensuit que $\varphi^h(p, q) = \emptyset$. Ce qui est une contradiction.

□

On définit à présent la correspondance de l'excès de la demande :

$$Z(p, q) = \sum_{h=1}^{H} \varphi^h(p, q) - \sum_{h=1}^{H} (w^h, 0).$$

Si $0 \in Z(p, q)$ alors (p, q) est système de prix d'équilibre. Z satisfait la loi de Walras :

$$p_1 z_1 + q\theta = 0$$

et

$$p_s z_s = \theta r_s,\ pour\ s = 1, \dots, S$$

Considérons les ensembles de prix suivants :

$$P = \left\{ (p,q) \in R_+^L \times K_+ / q = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s r_s,\ \lambda_s \geq 0 \ tel\ que\ \sum_{s=1}^{S} \lambda_s + \sum_{l=1}^{L} p^l = 1 \right\}$$

$$Q = \left\{ p \in R_+^L / \sum_{l=1}^{L} p^l = 1 \right\}$$

$$P^n = \{p,q) \in P / p^l \geq 1/n \text{ et } \lambda_s \geq 1/n,\ l = 1,\ldots,L,\ s = 1,\ldots,S\}$$

$$Q^n = \{p \in Q / p^l \geq 1/n\}\ pour\ n > L+S$$

$P,\ Q,\ P^n$ et Q^n sont convexes et de plus $intP = \bigcup_n P^n$ et $Q = \bigcup_n Q^n$

Lemme 4. *Pour tout n, il existe $(p_0^n, q^n) \in P^n$, $p_s^n \in Q^n$ pour $s = 1,\ldots,S$ et $(z^n, \theta^n) \in Z(p^n, q^n)$ tels que pour tout $(p_0^n, q^n) \in P^n$ et $p_s^n \in Q^n$,*

$$p_0 z_0^n + q\theta^n \leq 0 \tag{2.10}$$

$$p_s z_s^n \leq \theta^n r_s, \quad s = 1,\ldots,S \tag{2.11}$$

Démonstration. Soit B^n un ensemble compact et convexe tel que l'image $Z(P^n \times (Q^n)^S) \subset B^n$. Pour tout $(z,\theta) \in B^n$ on considère l'ensemble

$$\mu^n(z,\theta) = \{(p,q) \in P^n \times (Q^n)^S : p_0 z_0 + q\theta = \max_{(t,\Psi)\in P^n} tz_0 + \Psi\theta\ et\ p_s z_s = \max_{t \in Q^n} tz_s,\ \ s = 1,\ldots,S\}$$

Théorème 3. [7] *Considérons un ensemble $B \subset \mathbb{R}^r$ et une correspondance $g = (g1, g2, ..., gr)$. Si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- *(i) l'ensemble B est non vide, compact et convexe,*
- *(ii) g est une correspondance hcs de B dans B,*
- *l'ensemble $g(x) \in B$ est non vide et convexe pour tout $x \in B$,*

alors $g(.)$ possède un point fixe $\bar{x} \in B$ tel que $\bar{x} \in g(\bar{x})$.

En appliquantant le **théorème 4** (théorème de Kakutani) à la correspondance $\mu^n \times Z$ de $B^n \times P^n \times (Q^n)^S$ en lui même, on obtient un point fixe $(p^n, q^n, z^n, \theta^n)$ satisfaisant (2.10) et (2.11). □

On considère à présent les suites $\{p^n, q^n\}$, $\{z^n\}$ et $\{\theta^n\}$ du lemme précédent. On suppose que $\{p^n, q^n\}$ est convergent :

$$(p^n, q^n) \to (\bar{p}, \bar{q})$$

[7]théorème de Kakutani dans CORE, L.N et Ginsburgh V., 1999, Théorèmes de Point Fixe et Applications, C. Jessua, C. Labrousse et D. Vitry, eds., Dictionnaire des Sciences Economiques, Paris : Presses Universitaires de France

Montrons que $\{z^n\}$ est borné. Soit

$$\Delta = \left\{ p = (p_0, p_1, \ldots, p_S)/p \geq 0,\ \sum_{l=1}^{L} p_0^l + \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{L} p_s^l = 1 \right\}.$$

Pour tout $p \in int\Delta$, on a $(p_1, \sum_{s=1}^{S} \lambda_s r_s) \in intP$ et $p_s/\lambda_s \in intQ$ pour $s = 1, \ldots, S$, où $\lambda_s = \sum_{l=1}^{L} p_s^l$. Ainsi pour n assez grand $(p_1, \sum_{s=1}^{S} \lambda_s r_s) \in P^n$ et $p_s)/\lambda_s \in Q^n$, et par conséquent, d'après (2.10) et (2.11),

$$p_0 z_0^n + \sum_{s=1}^{S} \lambda_s \theta^n r_s \leq 0 \tag{2.12}$$

$$p_s z_s^n \leq \lambda_s \theta^n r_s,\ j = s, \ldots, S \tag{2.13}$$

En additionnant (2.12) et (2.13) sur s, pour chaque $p \in int\Delta$ et n assez grand, on obtient

$$p_0 z_0^n + \sum_{s=1}^{S} p_s z_s^n \leq 0 \tag{2.14}$$

Puisque $\{z^n\}$ est minoré, (2.14) implique que $\{z^n\}$ est borné. On suppose par la suite que $\{z^n\} \to \bar{z}$.

Puisque $(z^n, \theta^n) \in Z(p^n, q^n)$, on obtient la loi de Walras :

$$p_s^n z_s^n = \theta^n r_s,\ s = 1, \ldots, S$$

Pour $n \to \infty$, $\forall s$ on obtient :

$$\theta^n r_s \to \bar{p}_s \bar{z}_s$$

Par conséquent, puisque $\theta^n \in K$, le sous espace de $\mathbb{R}$ engendré par par les vecteurs r_s, il s'ensuit que $\theta^n \to \bar{\theta}$, $\bar{\theta} \in K$.

On cherche à présent à prouver que $\bar{p} \gg 0$ et $\bar{q} \in intK_+$. Puisque $(\bar{p}_0, \bar{q}) \in P$ et $\bar{p}_s \in Q$ pour $s = 1, \ldots, S$, il existe au moins un consommateur h pour lequel (2.7) ou(2.8) est vérifié. En effet :

si $\bar{p}_0 \neq 0$ alors l'hypothèse $1(iii)$, $\bar{p}_0 w_0^h > 0$ pour tout h ;

autrement, si $\bar{p}_0 = 0$ alors $\bar{q} \neq 0$; de plus, puisque $\bar{p}_s \neq 0$ pour $s = 1, \ldots, S$, par l'hypothèse $1(iii)$, il existe un consommateur h avec $\bar{p}_s w_s^h > 0$ pour tout s.

Par conséquent, dans les deux cas, (2.7) ou (2.8) est satisfait pour tout consommateur h. Par le lemme 2 (iii), il s'ensuit que $(\bar{p}, \bar{q}) > 0$ sinon $\{z^n\}$ ne serait pas borné. Par le fait que Z est borné, on obtient

$$(\bar{z}, \bar{\theta}) \in Z(\bar{p}, \bar{q}).$$

On montre enfin que $(\bar{z}, \bar{\theta}) = 0$

A partir de (2.10) et (2.11), il s'ensuit que pour tout $(p_0, q) \in intP$ et $p_s \in intQ$, $s = 1, \ldots, S$

$$\bar{p}_0 \bar{z}_0 + \bar{q}\theta \leq 0 \tag{2.15}$$

$$\bar{p}_s\bar{z}_s \leq \bar{\theta}r_s \; s = 1, \ldots, S. \tag{2.16}$$

Par la loi de walras, on a

$$\bar{p}_0\bar{z}_0 + \bar{q}\bar{\theta} = 0 \tag{2.17}$$

$$\bar{p}_s\bar{z}_s = \bar{\theta}r_s) \; s = 1, \ldots, S. \tag{2.18}$$

Par (2.15) et (2.17) on obtient $\bar{z}(1) = 0$ et $\bar{\theta} = 0$.En effet, (2.15) implique $\bar{z}_0 \leq 0$ et $\bar{\theta} \in (K_+)^0$ le cône polaire de K_+ :

$$(K_+)^0 = \{\theta \in K : \theta y \leq 0 \; \forall y \in K_+\}.$$

Par conséquent, par (2.17), $\bar{p}_0\bar{z}_0 = 0$ et $\bar{q}\bar{\theta} = 0$. Puisque $\bar{p}_0 \gg 0$ et $\bar{q} \in intK_+$, il s'ensuit que

$$\bar{z}_0 = 0 \; et \; \bar{\theta} = 0$$

Par (2.16) et (2.18), en utilisant le fait que $\bar{\theta} = 0$ on obtient

$$\bar{z}_s = 0 \; pour \; s = 1, \ldots, S.$$

Ainsi $0 \in Z(\bar{p}, \bar{q})$.

Conclusion $(\bar{p}, \bar{q})$est un vecteur de prix d'équilibre strictement positif □

Le théorème montre l'existence d'un système de prix d'équilibre normalisé, c'est à dire que (p, q) est tel que $(p_0, q) \in P$ et $p_s \in Q$ pour $s = 1, \ldots, S$. La demande individuelle est homogène de degré 0 dans (p_0, q), par conséquent, il n'y pas de perte de généralité dans la normalisation des prix de la date 0. Il n'y a pas une telle homogénéité dans les prix de la date 1, mais on doit noter que la demande individuelle sous les prix $(p_0, q, p_1, \ldots, p_S)$ dans une économie avec les actifs r est égale à la demande sous les prix $(p_0, q, \lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_S p_S)$ dans une économie avec les actifs λr, où $\lambda r_s = \lambda_s r_s$ pour $\lambda_s > 0$.

Concernant l'hypothèse $1(iii)$, ce que l'on suppose sur les dotations de la date 1 est plus faible que $w_s^h \gg 0$ pour tout h. Cela est même plus faible que $w_s^h \gg 0$ pour seulement un consommateur h. Mais cette hypothèse ne peut pas être affaiblie jusqu'à avoir $\sum_{h=1}^{H} w_s^h \gg 0$. En effet, considérons le cas où il y a deux états de la nature, un seul bien, deux consommateur et un seul actif $r_1 = r_2 = 1$. Le consommateur h, $h = 1, 2$, maximise son utilité par $u^h(x_0) + u^h(x_s)$. On suppose que $lim_{y \to 0^+} u'^h(y) = +\infty$. La dotation du consommateur 1 est nulle dans l'état contingent 1 et positive dans l'état contingent 2 et dans la date 0 ; La dotation du consommateur 2 est nulle dans l'état contingent 2 et positive dans l'état contingent 1 et dans la date 0. A l'équilibre, le marché financier sera inactif. D'un autre côté, il n'y a pas de système de prix pour lequel $x^h = w^h$, $\theta^h = 0$ serait alors une décision optimale pour le consommateur h. Par conséquent, il n'y aurait pas d'équilibre.

Chapitre 3

Propriétés de l'équilibre

3.1 Unicité locale ou indétermination de l'équilibre

3.1.1 Economie GEI avec actifs réels

Le principe de base

Pour étudier l'unicité locale ou au contraire l'indétermination de l'équilibre, on compare le nombre de variables au nombre d'équations indépendantes qui les déterminent. Si le nombre de variables est égal au nombre d'équations indépendantes les déterminant, les équilibres du système sont localement uniques, c'est à dire que le système a un nombre fini de solutions. Mais si le nombre de variables est strictement supérieur au nombre d'équations indépendantes, il est possible de fixer arbitrairement un certain nombre de variables, considérées comme paramètres, pour résoudre le système. Il y a alors indétermination car il est possible de résoudre le système pour chaque vecteur de paramètres. Le degré d'indétermination est dans ce cas égal au nombre de variables qu'il est possible de fixer arbitrairement, c'est à dire la différence entre le nombre de variables et le nombre d'équations indépendantes.

Quand ce principe est appliqué au système déterminant les prix d'équilibre, il permet de calculer l'indétermination nominale du modèle. Le degré d'indétermination nominale détermine la liberté que l'on a dans le choix de certains prix lorsqu'on résout l'équilibre. Il faut donc compter combien de normalisations de prix sans conséquence sont admissibles pour pouvoir calculer le degré d'indétermination réelle de l'équilibre. Le degré d'indétermination réelle de l'équilibre s'obtient par la différence entre le degré d'indétermination nominale et le nombre de normalisations possibles.

Exemple

On considère le modèle d'équilibre général walrasien. L'économie s'étale sur deux périodes et en deuxième période S états de la nature peuvent se produire. Il y a H consommateurs, $h = 1, \ldots, H$. Les marchés s'ouvrent en même temps en première période et chaque état de chaque période comporte C biens. A l'ouverture des marchés, il y a donc $C(S + 1)$

biens négociables.

Un agent h est n'est donc soumis qu'à une seule contrainte budgétaire et le problème qu'il doit résoudre s'écrit :

$$\max_{x^h} u^h(x^h)$$

sous la contrainte

$$p(x^h - w^h) = 0$$

A l'équilibre on a :

$$\sum_{h=1}^{H}(x^h - w^h) = 0$$

Les variables, à déterminer à l'équilibre, sont les prix des $C(S+1)$ biens. Face à ces variables, il existe $C(S+1)$ équations d'équilibres, dont $C(S+1)-1$ seulement sont indépendantes du fait de la loi de Walras. Il y a donc un degré d'indétermination nominale dans ce modèle. Cependant, une normalisation peut être effectuée sans affecter l'allocation d'équilibre. Autrement dit, il n'y a que $C(S+1)-1$ variables qui importent réellement. Par exemple, on pose $p_{0,1} = 1$. Le degré d'indétermination moins le nombre de normalisations possibles donne le degré d'indétermination réelle. Dans le cas présent, on peut conclure que le degré d'indétermination réelle de l'équilibre walrasien est égal à zéro. Autrement dit, l'équilibre est localement unique dans le modèle d'équilibre général walrasien.

On considère à présent le cas d'une économie GEI avec actifs réels. D'après la définition 1, il y a $C(S+1)+I$ équations d'équilibre. Cependant, ces équations ne sont pas toutes indépendantes. En effet les $S+1$ contraintes budgétaires impliquent l'existence de $S+1$ lois de de Walras. Le nombre d'équations indépendantes est donc $(C-1)(S+1)+I$. Les variables à déterminer sont les prix des biens et des instruments financiers. Il y en a $C(S+1)+I$. Le degré d'indétermination nominale est donc égale à $(S+1)$.

Mais, en observant les contraintes budgétaires, il est possible de modifier un prix dans chaque équation sans modifier le programme du consommateur. Autrement dit, on peut fixer $p^{s,1}$, $s = 1, \ldots, S$. Il y a donc $(S+1)$ normalisations possibles. Le degré d'indétermination réelle est donc égale à zéro, Les équilibres sont localement uniques.

Ce résultat est appuyé par le théorème suivant :

Théorème 4. [1] *Soit une économie satisfaisant les hypothèses $(i)-(iii)$. Génériquement dans l'espace des dotations initiales et des structures financières, si les actifs sont réels les équilibres financiers sont localement uniques*

[1] Théorème de Geanakoplos et Polemarchakis dans Geanakoplos, J.D. et H. Polemarchakis,1986, Existence, regularity and constrained suboptimality of competitive allocations when the asset market is incomplete, dans W. Heller, R. Starr et D. Starett, eds., *Uncertainty Information and Communication : Essays in honor of Kenneth Arrow*, Vol.3, New York : Cambridge University Press. 110-119.

Comme dans le cas où les marchés sont complets, l'équilibre dans une économie avec marchés financiers incomplets, et dont les actifs sont réels, est localement unique. Dans la sous sections suivante, on étudiera l'unicité locale de l'équilibre dans le cas où les actifs financiers sont des actifs nominaux.

3.1.2 Economie GEI avec actifs nominaux

Pour une économie GEI avec actifs nominaux, la propriété d'unicité locale n'est le même que pour le cas des actifs réels. Le théorème suivant donne le résultat

Théorème 5. [2] *Si l'économie satisfait les hypothèses 1, 2 et 3, et si $H \geq J$, alos, génériquement, le degré d'indétermination réelle de l'équilibre est $S-1$.*

Démonstration. [3] On montre d'abord que l'ensemble de l'équilibre des actifs financiers peut être fixé comme étant un équilibre d'actifs financiers numérairs réels, le paramètre étant un vecteur de dimension S (prix de la monnaie dans les différents états contingents).

Etant donné $p_{s,0}$ le prix du bien 0 (le prix de la monnaie étant $\lambda_s = 1/p_{s,0}$ en terme du bien 0), le système d'actifs financiers est équivalent à un système d'actifs numéraire réel où chaque actif paie en bien 0. Autrement dit, étant donné $\bar{R} = (\bar{r}_s^j)$, représentant le rendement des actifs réels en numéraire(c'est à dire en bien 0) pour chaque état contingent s, on définit une allocation $(\bar{x}, \bar{\theta})$ de biens et d'actifs réels. $(\bar{x}, \bar{\theta})$ est une allocation d'équilibre d'actif numéraire réel si $(i)-(iii)$ de la définition 2 sont satisfaites et satisfaisant l'ensemble de budget :

$$\bar{B}^h(p,q) = \left\{ (x,\theta) : p_0.x_0 + q.\theta \leq p_0.w_0^h,\ et\ p_s.x_s \leq p_s.w_s^h + p_{s,0}.\sum_{j=1}^{J} \theta_j^h \bar{r}_s^j,\ \forall s \right\}$$

$(\bar{x}, \bar{\theta})$ est un équilibre d'actifs financiers, avec un rendement R, si et seulement si $(\bar{x}, \bar{\theta})$ est un équilibre d'actifs numéraires réels avec $p_{s,0} = 1$ pour tout $s \in S$ et une matrice de rendement $\bar{R} = \Lambda R$, où Λ est une matrice diagonale $S \times S$ avec $\lambda_s > 0$ pour tout s.

On donne ensuite les conditions suffisantes pour que des équilibres correspondant à des paramètres différents soient différents. Pour toute matrice A de dimension $S \times J$, notons par $sp[A]$ le sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^s$ engendré par les J colonnes de A.

Lemme 5. *Soit (x,θ) et $(\hat{x},\hat{\theta})$ des équilibres d'actifs numéraires réels pour, respectivement les économies $E = (u^h, w^h; \Lambda R)$ et $\hat{E} = (u^h, \omega^h; \hat{\Lambda} R)$. Si*

(i) $dim\ sp[\theta^1, \ldots, \theta^H] = dim\ sp[\hat{\theta}^1, \ldots, \hat{\theta}^H] = J$ et,

(ii) $sp[\Lambda R] \neq sp[\hat{\Lambda} R]$,

[2] Théorème de Geanakoplos et Mas-Colell dans Geanakoplos, J.D. et A. Mas-Colell, 1989, Real indeterminacy with financial assets, Journal of Economic Theory 47, 22-38.

[3] Geanakoplos, J.D. et A. Mas-Colell, 1989, Real indeterminacy with financial assets, Journal of Economic Theory 47, 22-38.

alors $x \neq \hat{x}$.

Démonstration. On considère les vecteurs $\{\Lambda R\theta^h : h \in H\}$ et $\{\hat{\Lambda} R\hat{\theta}^h : h \in H\}$; par hypothèse, il existe h tel que $\hat{\Lambda} R\hat{\theta}^h \neq \Lambda R\theta^h$.

On suppose que $x^h = \hat{x}^h$. u^h étant régulière et bornée, on a une égalité entre les prix des biens à l'équilibre : $p = \hat{p}$.

La loi de WAlras implique

$$\hat{\Lambda} R\hat{\theta}^h = \Lambda R\theta^h.$$

Ce qui est une contradiction. □

On montre à présent que les conditions dans (i) du Lemme 5 sont satisfaites si $H \geq J$.

Soit M l'ensemble des matrices diagonales positives. On montre que si $H \geq J$ alors les vecteurs de demandes individuelles d'actifs engendrent $\mathbb{R}^J$ à l'équilibre. Il suffit de montrer qu'il existe un sous ensemble ouvert et non vide $V \subset M$ et une paramétrisation C^1 d'allocations $x(\Lambda)$, $\theta(\Lambda)$, $\Lambda \in V$ tel que :

premièrement $(x(\Lambda), \theta(\Lambda))$ est un équilibre d'actifs numéraires réels avec la matrice de rendement ΛR et

deuxièmement, $\theta(\Lambda)$ satisfait la condition de pleine dimension du Lemme (et par conséquent, si Λ, $\Lambda' \in V$ et $sp[\Lambda R] \neq sp[\Lambda' R]$, alors $x(\Lambda) \neq x(\Lambda')$).

Soit $f(p, q, \Lambda, w)$ la fonction d'excès de la demande tirée de

$$P : \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}_{++}^S \times \mathbb{R}_{++}^{(L+1)(S+1)(H+1)} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J$$

Cette fonction n'est pas définie pour tout $g \in \mathbb{R}^J$ mais seulement pour les prix d'actifs satisfaisant la condition d'absence d'arbitrage.

Lemme 6. *f est une fonction C^1 sur l'intérieur non vide de son domaine de définition. De plus, $f(p, q, \Lambda, w) = 0$ si et seulement si p et q sont des prix d'équilibre d'actifs numéraires réels pour $E = (\Lambda R, u^h, w^h;\ h \in H)$. Aussi, $f(p, q, \Lambda, w) = 0$ implique que*

$$rang\ \delta_{w_0} f(p, q, \Lambda, w) = L(S + 1) + J.$$

On définit

$$g : P \times B \longrightarrow R^{L(S+1)} \times R^J \times R^J$$

où B est la boule de rayon $J - 1$, par :

$$g(p, q, \Lambda, w, z) = (f(p, q, \Lambda, w), \sum_{h=1}^{H} z_h y_1^h, \ldots, \sum_{h=1}^{H} z_h y_J^h),$$

où θ_j^h est la demande du h-ième consommateur pour l'actif j sous (p, q, Λ, w).

Lemme 7. *Si $g(p, q, \Lambda, w, z) = 0$ alors $rang\ \delta_{w_0} g(p, q, \Lambda, w, z) = L(S + 1) + 2J$.*

Enfin, par l'hypothèse de l'incomplétude des marchés ($J < S$) et par l'hypothèse selon laquelle R est en position générale, on montre que la condition (ii) du Lemme 5 est satisfaite pour une famille de paramètres de dimension $S - 1$

Une famille de sous espaces $L_1, \ldots, L_K \subset \mathbb{R}^J$ est linéairement indépendante si $\sum_k \theta_k = 0$, $\theta_k \in L_k$ implique $\theta_k = 0$ pour tout h.

Lemme 8. *Soit R une matrice $S \times J$ avec des lignes non nulles et soit Λ une matrice diagonale inversible. Si $sp[\Lambda R] \subset sp[R]$, alors il existe des sous espaces linéaires $L_1, \ldots, L_K \subset \mathbb{R}^J$ tels que*

(i) *chaque ligne de R est contenue dans un sous espace et*

(ii) *deux lignes de R appartiennent au même sous espace si et seulement si les entrées correspondantes de Λ sont égales.*

Démonstration. L'hypothèse $sp[\Lambda R] \subset sp[R]$ est équivalente à : il existe une matrice Y de dimension $J \times J$ telle que $\Lambda R = RY$. Ceci signifie que chaque ligne de R est un vecteur propre de Y ayant pour valeur propre chaque élément correspondant de Λ.

Etant donnée une transformation linéaire Y de chacune de ses propres valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$, on peut associer le sous espace linéaire $L_1, \ldots, L_K \subset \mathbb{R}^J$, où chaque L_K est engendré par les vecteurs propres correspondant à λ_k. La famille $\{L_K\}$ est linéairement indépendante[4]. □

Dans notre cas, on doit avoir $K = 1$. Autrement, puisque $J < S$ on aurait un sous espace $L \in \mathbb{R}^J$ avec $dimL < J$ mais contenant un nombre de lignes de R plus grand que $dimL$. Ceci contredit le fait que R est en position générale.

En somme, dans notre cas $sp[\Lambda R] \subset sp[R]$ implique $\Lambda = \alpha I$, $\alpha > 0$.
Soit $sp[\Lambda R] = sp[\Lambda' R]$. Alors $sp[\Lambda'^{-1} \Lambda R] = sp[R]$. D'où $\Lambda = \alpha \Lambda'$ pour tout $\alpha > 0$. Par conséquent, en combinant les Lemmes 5, 6 et 7, le sous ensemble de M où $\lambda_1 = 1$ donne les $S - 1$ paramétrisations.

Conclusion : le degré d'indétermination de l'équilbre est $S - 1$

□

3.2 Optimalité de l'équilibre

3.2.1 La Pareto optimalité

Dans le domaine de la *Theorie de l'Equilibre General*, pour l'étude de la propriété d'optimalité de l'équilibre, on fait référence à la notion d'optimum de Pareto ou la Pareto optimalité. Un Optimum de de Pareto est une situation telle qu'on ne peut pas améliorer

[4] voir Geanakoplos, J.D. et A. Mas-Colell, 1989, Real indeterminacy with financial assets, Journal of Economic Theory 47, 22-38.

le niveau de satisfaction d'un consommateur sans léser au moins un autre consommateur. Cette notion montre l'idée selon laquelle le mécanisme de marché, sans aucune intervention autre que ceux des agents économiques rationnels, aboutit à la meilleure des situations.

Pour l'étude de l'optimalité de l'équilibre avec marchés financiers incomplets, on peut restreindre l'économie à un seul bien de consommation[5]. On considère donc le même modèle d'économie d'échange mais avec un seul bien de consommation. La première et la seconde période sont respectivement notées par $t = 0$ et $t = 1$, avec S états de la nature possibles en deuxième période, $s = 1, \ldots, S$. en notant la date $t = 0$ par $s = 0$ on a un total de $S + 1$ états contingents. L'économie comprend I consommateurs, $i = 1, \ldots, I$. Les caractéristiques de chaque agent sont représentées par l'ensemble de consommations X^h, la fonction d'utilité u^h et la dotation initiale w^h.

Hypothèses

1. $X^h \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$;
2. u^h satisfait

    (i) $u^h \in C^r(R^{S+1}_{++}, R)$, $r; \geq 2$

    (ii) $Du^h_{x_0}(x) \in \mathbb{R}_{++}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$;
3. $w^h \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$.

On note $Du^h_{x_0}(x)$ par $Du^h_0(x)$, et soient $u = (u^1, \ldots, u^H)$ et $w = (w^1, \ldots, w^H)$.

Définition 7. *Une allocation $x = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^H)$ est pareto optimale si*

(i) $\sum_{h=1}^{H} \bar{x}^h = \sum_{h=1}^{H} w^h$,et

(ii) il n'existe pas une allocation $x = (x^1, \ldots, x^H) \in \mathbb{R}^{(S+1)H}_{++}$ telle que :

$$\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{h=1}^{H} w^h, \ et$$

$$u^h(x^h) \geq u^h(\bar{x}^h), \ h = 1, \ldots, H \ avec\ au\ moins\ une\ egalite\ stricte.$$

On suppose ensuite que l'économie comporte J actifs financiers, $j = 1, \ldots, J$, avec $J < S$. Le prix de chaque actif financier j est noté par q_j et celui du bien dans chaque état contingent est noté par $p^1 = (p_1, \ldots, p_S)$. On note par le vecteur colonne $v^j = (v^j_1, \ldots, v^j_S)$, $j = 1, \ldots, J$, le rendement des actifs dans chaque état contingent. Les actifs financiers peuvent être considérés comme étant des actifs réels ou des actifs nominaux. En effet si j est un actif réel alors $v^j_s = p_s.a^j_s$, et si j est un actif nominal alors $v^j_s = r^j_s$. La matrice de rendement de dimension $S \times J$ est noté par $V = (v^1, \ldots, v^j)$ et on suppose que $rangV = J$. Ainsi l'économie composée de u, w et V est notée par $\mathcal{E}((u^h, w^h); V)$. On

[5]Preuve, voir Magill, M. et Quinzii, 1996, Incoplete Markets

note par $\theta^h = (\theta_1^h, \dots, \theta_J^h \in \mathbb{R}^J$ le portefeuille de l'agent h. On note par $P \in \mathbb{R}^{(S+1)(S+1)}$ la matrice des prix du bien, $P_1 \in \mathbb{R}^S_{++}$ étant le prix à la date 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_S} \end{pmatrix}$$

Etant donné le prix des actifs q, le problème de maximisation de de l'agent h est

$$\max_{x^h, \theta^h} u^h(x^h)$$

sous contrainte

$$x^h - w^h = PW\theta^h, \ \theta^h \in \mathbb{R}^J$$

où

$$W = \begin{pmatrix} -q_1 & \dots & -q_J \\ v_1^1 & \dots & v_1^J \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_S^1 & \dots & v_S^J \end{pmatrix}$$

Définition 8. *Un équilibre finacier $((\theta^h)_h, p_1, q)$ de l'économie GEI $\mathcal{E}((u^h, w^h); V)$ avec $p_1 \in \mathbb{R}^S_{++}$ est tel que*

(i) θ^h est solution de $\max_\theta u^h(w^h + PW\theta)$, $h = 1, \dots, H$.

(ii) $\sum_{h=1}^H \theta^h = 0$

u et w étant les paramètres spécifiant l'économie, on considère un espace de u et w admissibles. Soit U l'ensemble des des fonctions satisfaisant l'hypothèse 2 et soit $\mathcal{U} = \prod^H$ le $H-produit$ des U. L'espace des u et w admissibles $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{(S+1)H}_{++}$ est appelé l'espace des économies.

Proposition 1. [6] *Etant donnés u et w satisfaisant les hypothèses 2 et 3 et soit une allocation pareto optimale $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^H)$. Alors on a l'équation*

$$Du_1^1(\bar{x}^1)/Du_0^1(\bar{x}^1) = \dots = Du_1^H(\bar{x}^H/Du_0^H(\bar{x}^H)$$

où

$$Du_1^h(\bar{x}^h) = (Du_1^h(\bar{x}^h), \dots, Du_S^h(\bar{x}^h)).$$

Démonstration. [7] D'après l'hypothèse 2 on a $Du_0^1(\bar{x}^h) > 0$. Dans la suite, on note $Du_s^h(\bar{x}^h)$ par λ_s^h pour simplifier la notation.

On suppose que dans un état s les agents i et k ont $\frac{\lambda_s^i}{\lambda_0^i} > \frac{\lambda_s^k}{\lambda_0^k}$. Sachant qu'aucune condition n'est posée pour λ_s^h mais seulement pour λ_0^h, on doit distinguer deux cas

[6]Nagata, R., 2005, Inefficiency of equilibria with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics, 41, 887-897.

[7]Nagata, R., 2005, Inefficiency of equilibria with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics, 41, 887-897.

- premier cas : $\lambda_s^i > 0$
  Soit $\Delta \in \mathbb{R}^{S+1}$ la direction
  $$(-\frac{\lambda_s^i}{\lambda_0^i}, 0, \ldots, 0, (1+e), 0, \ldots, 0)$$
  où $(1+e)$ est à la $(s+1)$-ème place et $e > 0$.
  Alors la dérivée directionnelle de de u^i en $\bar{x}^i$ dans la direction de Δ est
  $$-\lambda_s^i + (1+e)\lambda_s^i = e\lambda_s^i,\ pour\ e\lambda_s^i > 0.$$
  or la dérivée directionnelle de u^k dans la direction de $-\Delta$ est $\frac{\lambda_s^i}{\lambda_0^i}\lambda_0^k - (1+e)\lambda_s^k$ qui est strictement positive pour $e > 0$ assez petit.
  Ainsi une moindre variation positive de Δ accroît le bien des deux agents (i, k) sans que ceux des autres agents ne changent. Ce qui est une contradiction.
- deuxième cas : $\lambda_s^i \leq 0$
  Dans ce cas, on a $\lambda_s^k < 0$. Soit $\Delta \in \mathbb{R}^{S+1}$ la direction $(-\frac{\lambda_s^i}{\lambda_0^i}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où 1 est à la $(s+1)$-ème place.
  Alors la dérivée directionnelle de $\bar{x}^k$ dans la direction de Δ est
  $$\lambda_s^k - \lambda_s^k = 0.$$
  Cependant, la dérivée directionnelle de u^i en $\bar{x}^i$dans la direction de $-\Delta$ est
  $$-\frac{\lambda_s^k}{\lambda_0^k}\lambda_0^i + \lambda_s^i > -\frac{\lambda_s^i}{\lambda_0^i}\lambda_0^i + \lambda_s^i = 0.$$
  Ainsi une moindre variation de Δ accroît le bien être de l'agent i sans que ceux des autres agents ne changent. Ce qui est une contradiction.

Dans ce modèle aucune allocation, ni même l'allocation d'équilibre, ne peut donc être optimale au sens de Pareto. □

A présent, on étudie la Pareto optimalité du modèle à partir de l'ensemble de budget des agents.

Soit $u \in \mathcal{U}$, on considère la fonction paramétrée par $\mu^h \in \mathbb{R}^S$
$$u^h(x^h; \mu^h) = u^h(x^h) + \mu^h \cdot x_1^h$$
Puisque
$$u^h(x^h; 0) = u^h(x^h),$$
on considère la boule unité ouverte $B \in \mathbb{R}^S$ au voisinage de zéro. Conformément à l'hypothèse 2
$$u^h(x^h; \mu^h) \in U\ \forall \mu^h \in B.$$
sachant que
$$Du_0^h(x^h; \mu^h) = Du_0^h(x^h).$$

Ainsi

$$u(x;\mu) \in \mathcal{U} \ \forall \ (\mu^h)_h \in \prod^H B,$$

avec

$$(u^h(x^h;\mu^h))_{h=1}^H = u(x;\mu).$$

En notant $\prod^H B$ par $\mathcal{B}$, $u(x;\mu)$ est donc défini sur $\mathbb{R}_{++}^{(S+1)I} \times \mathcal{B}$ et si μ_n est une suite de vecteurs dans $\mathcal{B}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \bar{\mu},$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} u^h(\cdot;\mu_n^h) = u^h(\cdot;\bar{\mu}_n^h)$$

est dans la topologie ouverte et compacte. Ainsi, $\mathcal{B}$ peut être considérée comme une sous variété de dimension finie de $\mathcal{U}$.

Il s'ensuit donc que pour chaque h

$$\frac{Du_1^h(x^h;\mu^h)}{Du_0^h(x^h;\mu^h)} = \frac{Du_1^h(x^h)+\mu^h}{Du_0^h(x^h)}$$

On suppose à présent que les agents participent à l'échange sous la seule condition de satisfaction des contraintes budgétaires. On veut savoir s'il existe une allocation Pareto optimale sous cette condition. On appelle optimum du budget une allocation Pareto optimale sous cette condition.

Définition 9. *Un optimum de budget $((\theta^h)_h, p_1, q)$ pour l'économie $\mathcal{E}((u^h,w^h);V)$ avec $p_1 \in \mathbb{R}_{++}^S$ est tel que*

(i) $w^h + PW\theta^h \in \mathbb{R}_{++}^{S+1}$ *,* $h = 1,\ldots,H,$

(ii) $(w^h + PW\theta^h)_h$ *est un optimum de pareto,*

(iii) $\sum_{h=1}^H \theta^h = 0.$

On note que $w^h + PW\theta^h$ dans (i) est le vecteur de demande x^h réalisable pour chaque agent. Ce qui implique que chaque agent satisfait ses contraintes budgétaires. De plus (iii) la réalisabilité pour un optimum de Pareto.

Pour qu'un équilibre soit donc Pareto optimal, il doit être un optimum du budget. Or la compatibilité d'une allocation Pareto optimale et d'un optimum du budget dépend du fait que l'ensemble des optima du budget soit vide ou non.

Théorème 6. [8] *Sous les hypothèses 1 et 3, si $H(S-J) > S$, si les actifs financiers sont des actifs réels, et $H(S-J) > 2S$, si les actifs financiers sont des actifs nominaux, alors génériquement dans w et u, il n'y a pas d'optimum du budget, ainsi aucun équilibre des marchés financiers n'est optimal au sens de Pareto.*

[8]Théorème de Nagata dans Nagata, R., 2005, Inefficiency of equilibria with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics, 41, 887-897.

L'équilibre obtenu dans un modèle d'économie avec marchés financiers incomplets n'est donc pas optimal au sens de Pareto. Cette situation découle du fait qu'il n'existe pas d'optimum du budget pour chaque agent. Le seul mécanisme de marché n'arrive donc pas à faire en sorte que chaque agent, par l'intermédiaire des échanges, atteigne la meilleure situation possible. Pour étudier l'optimalité de l'équilibre en présence de marchés financiers incomplets on a donc recours à une autre notion d'optimalité qui autorise une intervention pour suppléer à ce mécanisme de marché défaillant.

3.2.2 L'optimalité contrainte

Le mécanisme de marché, basé sur le comportement rationnel des agents économiques est donc incapable d'aboutir au meilleur niveau de satisfaction possible en présence de marchés financiers incomplets. De là, on a donc recours a une notion plus faible d'optimalité : l'optimalité contrainte. Cette notion a été introduite dans la littérature économique par Grossman en 1977. La notion d'optimalité contrainte qui fût adoptée est celle proposée par Stiglitz en 1982. L'optimalité contrainte s'obtient par l'intervention d'un planificateur central, un rôle qui est en pratique joué par l'état, qui ne doit utiliser que les actifs et les instruments existants pour obtenir une réallocation dans le but d'améliorer l'allocation d'équilibre.

Considérons une économie avec un système de marchés financiers incomplets ; une allocation est réalisable par le planificateur central s'il existe un vecteur de porte feuilles et un vecteur de taxes en première période telle que les sommes respectives de leurs composantes sont égales à zéro, et que l'allocation en bien est un équilibre.

Définition 10. *Un plan* $((\gamma, \theta), (\bar{x}, p))$ *est réalisable sous contraintes si :*

(i) $\sum_{h=1}^{H} \gamma^h = 0$,

(ii) $\sum_{h=1}^{H} \theta^h = 0$,

(iii) $\bar{x}$ *maximise* $u^h(x^h)$ *sous contrainte*

$$\begin{cases} p_0(x_0^h - w_0^h) = \gamma^h p_0^1 \\ p_s(x_s^h) - w_s^h) = p_s^1 v_s \theta^h, \ s = 1, \ldots, S \end{cases}$$

Définition 11. *Un plan* $((\gamma, \theta), (\bar{x}, p))$ *est optimal sous contraintes si il n'existe pas d'autres plans réalisables sous contraintes qui procurent à au moins un agent économique une utilité supérieure sans léser au moins un agent économique.*

D'après ces définitions, le planificateur décide d'une allocation de porte feuille ainsi que d'un système de transfert en première période. Il ferme ensuite les marchés financiers et ne permet pas aux agents d'effectuer des transferts entre états de la nature. L'allocation que les agents atteignent à l'équilibre est alors réalisable sous contraintes.

Théorème 7. [9] *Soit une économie satisfaisant les hypothèses 1, 2 et 3 et dont les fonctions d'utilité sont séparables intertemporellement. Si :*

(*i*) $1 < J < S$

(*ii*) $2(C-1) < H < S(C-1)$

alors il existe un ensemble générique de fonction d'utilité et de dotations initiales tel que pour des caractéristiques choisis dans cet ensemble, tout équilibre financier $(\bar{p}, \bar{q})$ *est dominé au sens de Pareto par un plan réalisable sous contraintes* $((\gamma, \theta), (\bar{x}, p))$ *tel que* $\gamma^h = \bar{q}\theta^h$ *pour tout* h

Un équilibre dans un modèle avec marchés financiers incomplets n'est donc pas optimal même sous contraintes. Toutefois, l'hypothèse de l'existence d'une borne supérieure limitant le nombre d'agents affaiblit ce théorème. Mais il est possible de relâcher cette hypothèse pour aboutir au même résultat.

Théorème 8. *Soit une économie satisfaisant l'hypothèse 1 et dont les fonctions d'utilités sont séparables. Si*

(*i*) $H > (C-1)S$,

(*ii*) $C > 1$,

(*iii*) $0 < J < S$

alors il existe un ensemble générique de fonction d'utilités, de dotations initiales et de rendements des actifs tels que pour des caractéristiques choisies dans cet ensemble, tout équilibre financier $(\bar{p}, \bar{q})$ *est dominé au sens de Pareto par un plan réalisable sous contraintes* $((\gamma, \theta), (\bar{x}, p))$ *tel qu'il existe* $t = (t^1, \ldots, t^H)$ *tel que* $\gamma^h = \bar{q}\theta^h + t^h$ *pour tout* h *et* $\sum_{h=1}^{H} t^h = 0$

t^h est donc un transfert en première période qui n'était pas réalisable par la simple redistribution de porte feuilles, donnant plus de liberté au planificateur dans ses choix. Son action n'opère donc plus uniquement à travers le changement de $(S+1)(C-1)$ prix relatifs, ce qui était la source de la borne supérieure sur le nombre des agents dans le théorème précédent. On note que dans le précédent théorème les t^h étaient tous identiquement nuls.

Lorsque les marchés sont donc incomplets, Le planificateur peut intervenir de façon efficace. Cependant, l'intervention efficace du planificateur ne restaure pas l'optimalité de l'équilibre, que cette optimalité soit contrainte ou non.

[9] Théorème de Geanakoplos et Polemarchakis dans Geanakoplos, J.D. et H. Polemarchakis,1986, Existence, regularity and constrained suboptimality of competitive allocations when the asset market is incomplete, dans W. Heller, R. Starr et D. Starett, eds., *Uncertainty Information and Communication : Essays in honor of Kenneth Arrow*, Vol.3, New York : Cambridge University Press. 110-119.

Chapitre 4

Implications de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets

4.1 Implications du modèle

A l'équilibre, les agents font face au même système de prix, choisissent de manière optimale dans leurs ensembles de budget et la demande s'égalise à l'offre. On note que les contraintes budgétaires sont différentes à chaque date et les dépenses peuvent excéder la dotation initiale dans une période seulement si la différence peut être compensée par les échanges d'actifs financiers. Cela induit qu'il n'y a pas qu'un seul, mais $S + 1$ Lois de Walras[1]. On note aussi que les agents économiques de ce modèle ont accès aux mêmes marchés financiers.

On considère le cas où il n'y a qu'un seul actif et deux états contingents à la date 1. L'actif donne droit à un dollar dans les états contingents 1 et 2 de la date 1. Les agents peuvent épargner en achetant l'actif, renonçant à la consommation à la date 0 en échange de la monnaie en seconde période. De la même manière, ils peuvent emprunter en vendant l'actif à la date 0, recevant ainsi une quantité de monnaie $-q\theta$, et payant $-\theta$ dollars dans chaque état de la date 1. Quand $\theta^h + \tilde{\theta}^h < 0$, on dit que l'agent h prend une *position courte* sur l'actif, vendant quelque chose qu'il ne possède pas au début de la période 0. L'échange d'actifs dont l'offre est négative ou nulle ne peut avoir lieu sans que les agents puissent prendre une position courte. Le modèle permet aux agents de prendre une position courte en les laissant choisir $\theta \in \mathbb{R}^J$ au lieu de restreindre leurs choix à $\mathbb{R}^J_+$.

A l'équilibre tous les agents maximisent leurs fonctions d'utilité compte tenu de leurs ensembles de budgets définis par le même système de prix. Cela peut avoir plusieurs implications :

- D'abord cela implique que les anticipations rationnelles de tous les agents sont supposées parfaites. D'abord, la probabilité qu'ils attachent à chaque peut état

[1] Définition 1.(ii)

peut être la même ou non [La fonction d'utilité de l'agent h peut être de la forme $\sum_{s=0}^{S} \pi_s^h v_s^h(x_s)$ où π_s^h est la probabilité que l'agent h attache à l'état s. π_s^h peut être identique ou non pour tous les agents]. Or sous l'hypothèse de l'anticipation rationnelle cette probabilité doit être identique. Ensuite l'hypothèse selon laquelle les prévisions des agents sur les prix soient correctes est très commune dans la théorie économique : si S est le nombre d'états possibles de la nature à la date 1, alors l'incertitude liée aux prix est reflétée dans S par l'intermédiaire de la probabilité que les agents attachent à chacun des états .

- Ensuite tous les agents livrent effectivement la quantité de biens ou de monnaie à laquelle donne droit les actifs financiers qu'il ont vendus. Il n'y a donc ni défaut de paiement ni faillite.
- De plus il y a un implicitement un marché de crédit parfait du début jusqu'à la fin d'une période. Les agents peuvent promettre de livrer des biens même si leurs dotations initiales ne le leur permet pas. Ensuite ces agents se procurent ces biens sur les marchés.
- Enfin les agents connaissent à l'avance les prix et l'état contingent qui se réalise lorsqu'ils procèdent à l'échange sur les marchés, or l'une des raisons de l'incomplétude des marchés est l'impossibilité de connaître tous les états contingents possibles. Donc les agents sont supposés ne pas savoir lequel des états S se réalisera. Le problème réside dans le fait que l'équilibre ne donne pas d'explication quant au processus de formation des prix.

Pour l'économie GEI avec actifs financiers nominaux, on introduit la monnaie en tant que $(L+1)$-ème bien mais les fonctions d'utilité des agents sont indépendantes de ce bien. Etant donné que son prix est positif, aucun agent ne voudra ni détenir, ni consommer ce bien en deuxième période. De même, en première période aucun agent ne voudra en détenir puisqu'il n'y a aucun intérêt à le vendre en deuxième période. En somme, la demande globale de monnaie est nulle. Si les fonctions d'utilités sont indépendantes de la monnaie, si la demande globale de monnaie est nulle et si la dotation initiale en monnaie est aussi nulle, alors il semble que la monnaie n'a aucun rôle à jouer dans le modèle. Mais comme nous l'avons vu, les agents peuvent adopter une position courte, c'est à dire promettre de livrer une quantité de certains biens qui est supérieure à leurs dotations initiales en ces biens. Pour ce faire, il doivent vendre d'autres biens et se procurer le surplus sur le marché. Dans ce cas le rôle que la monnaie tient est celui d'être le bien que les actifs financiers promettent de livrer en deuxième période. On observe que dans la réalité c'est le cas pour la grande partie des actifs financiers.

4.2 Distinction entre actifs réels et actifs nominaux

L'équilibre général avec marchés financiers incomplets permet aussi de faire la distinction entre actifs réels et actifs nominaux. Si la propriété d'optimalité de l'équilibre ne montre pas cette différence, les deux autres propriétés que sont l'existence et l'unicité locale y mettent l'accent.

En présence d'actifs réels, l'éxistence de l'équilibre est confronté à une discontinuité de la demande qui entraîne une possibilité de non existence. Pour surmonter ce problème, on a recours au théorème du point fixe que l'on a mentionné dans la section précédente. Dans la cas où les actifs financiers sont des actifs nominaux, ce problème de discontinuité ne se pose pas. Mais il n'en demeure pas moins que la preuve de l'équilibre est établie dans les deux cas.

Concernant l'unicité de l'équilibre, les résultats sont totalement différents. Avec des actifs réels l'équilibre est localement unique, alors qu'avec des actifs nominaux l'indétermination est la règle. Ceci constitue un apport typique de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets car les recherches antérieures sur l'équilibre général n'ont pas mis ce fait en exergue. Cela ranime le débat théorique entre néo-classiques et kéynésiens relatif à la neutralité de la monnaie. Le rôle actif de la monnaie est dévoilé par l'inflation. En effet, la raison de l'indétermination de l'équilibre est qu'à l'équilibre n'importe quel taux d'inflation entre les états de la nature est possible. Autrement dit, n'importe quel niveau de pouvoir d'achat de la monnaie dans chaque état est possible. Lorsque les marchés financiers sont complets, cela n'importe pas car les agents peuvent se couvrir contre un tel tel risque d'inflation. Mais lorsque les marchés financiers sont incomplets, la variation du pouvoir d'achat de la monnaie a un effet réel, c'est à dire en terme de consommation.

4.3 L'optimalité de l'équilibre

La propriété de l'optimalité de l'équilibre constitue le plus important apport de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets : quels que soient les actifs en présence, l'équilibre est sous optimal au sens de Pareto. Le mécanisme de marché n'est pas suffisant pour atteindre la meilleure situation pour les agents.

Cette Pareto sous-optimalité de l'équilibre a contraint la théorie économique à faire appel à une notion d'optimalité plus faible : l'optimalité contrainte. Cette notion d'optimalité suggère l'intervention de l'Etat. En intervenant, l'Etat modifie la structure des porte-feuilles et change les demandes sur les marchés dans chaque état contingent. Les prix relatifs vont aussi changer. Ce changement des prix relatifs se traduit par une amélioration du bien être des agents : une meilleure redistribution de la richesse entre les états contingent s'opère. Cette amélioration du bien être des agents n'est pas réalisable par le simple mécanisme auto-entretenu du marché.

Cependant, même si cette intervention de l'Etat améliore la satisfaction des agents, elle ne conduit pas à la meilleure des situations possibles : même sous-contraintes, l'équilibre est sous-optimal. Une réallocation des actifs et la réallocation de revenu entre les agents et à travers les états de la nature qui en résulte ont deux effets sur le bien être des agents : un effet-revenu direct et un effet de prix relatifs indirect qui est dû au changement des prix relatifs nécessaire pour obtenir une meilleure réallocation des revenus dans chaque état contingent.

Conclusion

L'introduction de l'hypothèse de l'incomplétude des marchés conduit à plusieurs résultats contraires à ceux obtenus dans le modèle d'équilibre général walrassien et le modèle d'équilibre d'Arrow-Debreu. En effet chaque propriété de l'équilibre apporte une nouveauté par rapport à ces deux modèles fondamentaux. Quand les actifs financiers sont des actifs nominaux, alors l'équilibre est indéterminé. Quel que soit le type d'actif en présence, l'équilibre obtenu est Pareto sous optimal. Suite à la non optimalité de l'équilibre au sens de Pareto, l'équilibre général avec marchés financiers incomplets introduit une nouvelle notion d'optimalité : l'optimalité contrainte. L'optimalité contrainte suggère qu'une intervention purement économique de l'Etat est nécessaire pour une meilleure allocation des ressources de l'économie.

L'incomplétude des marchés remet à jour une vieille question qui semble avoir été répondue depuis longtemps : "Quel est le rôle économique de l'Etat ?". Actuellement, l'évolution de la science économique est dominée par le courant de pensée *Néoclassique* . Les néoclassiques postulent que l'Etat n'a aucun rôle économique à jouer : "laisser faire, laisser aller". Cet idée a été justifiée et renforcée surtout par les travaux de Walras et ceux d'Arrow et Debreu. En effet, d'après le modèle d'équilibre général de Walras et le modèle d'Arrow-Debreu, s'il n'y a aucune intervention, l'intéraction des agents économiques rationnels sur le marché aboutit à la meilleure des situations. On a vu dans ce mémoire que l'introduction de l'incomplétude des marchés au modèle contredit ce résultat : l'Etat peut agir de façon à ce que les agents aient un niveau de satisfaction plus élevé que dans le cas où aucune intervention n'est permise. Aussi selon la théorie néo classique, la monnaie est neutre dans la sphère économique. Or on a pu constater que les résultats diffèrent suivant le type d'actif financier. Le débat entre néo classiques et keynésiens est donc toujours d'actualité.

La *Théorie de l'équilibre générale avec marchés financiers incomplets* est une théorie très jeune car elle n'a vu le jour qu'en 1984 grâce aux travaux de David Cass. Malgré cela, comme on l'a observé dans ce mémoire, la portée de cette théorie est importante. Outre ce qui a été montré, la *Théorie de l'équilibre générale avec marchés financiers incomplets* trouve application dans plusieurs domaines de la science économique. Ses deux principaux domaines d'applications sont les finances et la macroénomie. En finance, le modèle CAPM (Capital and Assets Pricing Model) qui est un modèle d'évaluation des actifs financiers peut être approché par la méthode des marchés incomplets. En macroéconomie, cette théorie a permis d'intégrer le phénomène de défaut de paiement dans le modèle d'équilibre général. Mais malgré la grande potentialité de cette théorie, il faut rappeler qu'elle reste rattachée au modèle d'Arrow -Debreu. C'est en effet Kenneth Arrow qui a le premier émis l'hypothèse selon laquelle l'équilibre pourrait ne pas être optimal si les marchés ne sont pas complets, et le modèle considéré est une dérivée du modèle d'Arrow-Debreu. Mais si la *Théorie de l'équilibre générale avec marchés financiers incomplets* aboutit à des résultats contraires à ceux du modèle d'Arrow-Debreu, quelles orientations prendra la *Théorie de l'Equilibre Général* en tant que l'une des principales branches de la science économique ?

Annexe

Preuve du théorème 1

Sous l'hypothèse 1, la solution du problème de maximisation de la fonction d'utilité,définition 5(i), de chaque agent existe, est unique et conduit aux fonctions de demande individuelle sur les marchés (*spot markets*) : $F^1 : \Delta_{++}^{L(S+1)-1} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^{L(S+1)}$, et $F^h : \Delta_{++}^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \times \mathbb{R}_{++}^{L(S+1)} \to \mathbb{R}_+^{L(S+1)},\ h = 2, \ldots, H,$

$$F^1(p; pw^1) = \arg \max_{x^1 \in B^1(p,} u^1(x^1) \tag{4.1}$$

$$F^h(p, L; w^h) = \arg \max_{x^h \in B^h(p,L)} u^h(x^h),\ h = 2, \ldots, H \tag{4.2}$$

On note que les F^h, $h = 1, \ldots, H$ sont de classe $\mathcal{C}^1$

Les fonctions de demandes individuelles dans (2.4) et (2.5) conduisent à la fonction d'excès de la demande sur les marchés (*spot markets*), $Z : \Delta_{++}^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \times \mathbb{R}_{++}^{HL(S+1)} \to \mathbb{R}^{L(S+1)}$,

$$Z(p, L) = F^1(p; pw^1) - w^1 + \sum_{h=2}^{H} (F^h(p, L; w^h) - w^h) \tag{4.3}$$

Les marchés financiers sont caractérisés par la fonction de rendement des actifs

$$\Psi : \Delta_{+}^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \times \mathbb{R}^{LJS} \to \mathbb{R}^{SJ}$$

définie par

$$\Psi(p, L; A) = V(p, A). \tag{4.4}$$

Les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition 5 sont ainsi réduites à

$$Z(\bar{p}, \bar{L}; w) = 0,\ \left\langle \Psi(\bar{p}, \bar{L}; A) \right\rangle \subset \bar{L}. \tag{4.5}$$

A partir de (4.4) on déduit que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, sachant que les $F^h,\ h = 1, \ldots, H$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, Z est de classe $\mathcal{C}^1$.

On note $E^{L(S+1)-1} = \{z \in \mathbb{R}^{L(S+1)} : \sum_{h=1}^{L(S+1)} z_h = 0\}$ le sous espace affine contenant $\Delta_+^{L(S+1)-1}$. Pour montrer que (2.8) a une solution on considère la fonction d'ajustement de prix $M : \Delta_{++}^{r-1} \times G^{S,J} \to E^{L(S+1)-1}$ défini par

$$M(p, L) = p + p.Z(p, L),$$

dont les points fixes coïncident avec les zéros de Z. Du fait que Z est minorée et que $p^H \in \Delta_+^{r-1}$ tel que $p^H \to p \in \partial\Delta_+^{L(S+1)-1}$ implique $\left\| Z(p^H, L) \right\| \to \infty$, il s'ensuit que M est un point intérieur à $\partial\Delta_+^{r-1}$

Il existe une fonction $\delta : \Delta_+^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \to [0,1]$ telle que le plan d'ajustement de prix modifié $\Phi : \Delta_+^{L(S+1)-1} \times G^{S,J} \to E^{L(S+1)-1}$ défini par

$$\Phi(p,L) = \delta(p,L)M(p,L) + (1-\delta(p,L))u,$$

où u est un point intérieur à $\partial\Delta_+^{r-1}$

$$\Phi(p,L) \in \Delta_+^{L(S+1)-1} \ \forall p \in \partial\Delta_+^{L(S+1)-1}, \ \forall L \in G^{S,J},$$

et dont les points fixes coïncident avec les zéros de Z

$$\Phi(p,L) = p \Leftrightarrow Z(p,L) = 0.$$

Ainsi, en utilisant l'ajustement de prix et la fonction de rendement des actifs (Φ,Ψ), l'éxistence d'un pseudo-équilibre est réduite à trouver $(\bar{p},\bar{L}) \in \Delta_+^{r-1} \times G^{n,k}$ tel que

$$\Phi(\bar{p},\bar{L}) = \bar{p}, \ \left\langle \Psi(\bar{p},\bar{L}) \right\rangle \subset \bar{L}.$$

Posons $m = L(S+1)-1$,$C = \Delta_+^{L(S+1)-1}$, $H^m = E^{L(S+1)-1}$, on obtient la soution par le théorème suivant

Théorème 9. [2] *Soient H^m un sous-espace affine de dimension m, $C \subset H^m$ un sous ensemble compact et convexe dont l'intérieur est non vide. Soient (Φ,Ψ) des fonctions continues $\Phi : C \times G^{S,J} \to H^m$, $\Psi : C \times G^{S,J} \longrightarrow R^{SJ}$ telle que $\Psi(\partial C, L) \subset C$, $\forall L \in G^{S,J}$, alors il existe $(p,L) \in G^{S,J}$ tels que*

$$\Phi(\bar{p},\bar{L}) = \bar{p}, \ \left\langle \Psi(\bar{p},\bar{L}) \right\rangle \subset \bar{L}.$$

Ce qu'il fallait démontrer

[2] Théorème de Husseini , Lasry et Magill dans Husseini, S.Y., J.-M. Lasry et M. Magill, 1990, Existence of equilibrium with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics 19, 39-67

Biblographie

1. Arrow, K.J. et G. Debreu, 1954, Existence of equilibrium for a competitive economy, Econometrica 22, 265-290.
2. Core, L.N. et V. Ginsburgh, 2001, Théorèmes de Point Fixe et Applications, dans C. Jessua, C. Labrousse et D. Vitry, eds., Dictionnaire des Sciences Economiques, Paris : Presses Universitaires de France
3. Husseini, S.Y., J.-M. Lasry et M. Magill, 1990, Existence of equilibrium with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics 19, 39-67.
4. Geanakoplos, J.D., 1990, An introduction to general equilibrium with incomplete asset markets, Journal of Mathematical Economics 19, 1-38.
5. Geanakoplos, J.D. et A. Mas-Colell, 1989, Real indeterminacy with financial assets, Journal of Economic Theory 47, 22-38.
6. Geanakoplos, J.D. et H. Polemarchakis,1986, Existence, regularity and constrained suboptimality of competitive allocations when the asset market is incomplete, dans W. Heller, R. Starr et D. Starett, eds., *Uncertainty Information and Communication : Essays in honor of Kenneth Arrow*, Vol.3, New York : Cambridge University Press. 110-119.
7. Geanakoplos, J.D. et M. Shubik, 1990, The capital asset pricing model as a general equilibrium with incomplete markets, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, Vol. 15, No. 1, 55-71.
8. Hara, C., 2006, General equilibrium theory : Lecture note.
9. Martinez, A.J., 2003, Notes on a constrained suboptimality result by J.D. Geanakoplos and H.M. Polemarchakis, Instituto Valenciano de Investigaciones Economicas.
10. Nagata, R., 2005, Inefficiency of equilibria with incomplete markets, Journal of Mathematical Economics, 41, 887-897.
11. Polemarchakis, H., 1990, The economic implications of an incomplete asset market, The American Economic Review, Vol. 80, No. 2, 280-283.
12. Stiglitz, J.E, 1982, The inefficiency of the stock market equilibrium, The Review of Economic Studies, Vol. 49, Nř2, 241-261.
13. Tallon, J.M., 1995, Théorie de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets, Revue économique, Vol. 46, Nř5, 1207 - 1239

14. Werner, J., 1985, Equilibrium in economies with incomplete financial markets, Journal of Economic Theory 36, 110-119.

Nom et Prénoms : RASAMIMANANA Tivo Hely

Thème : Equilibre général avec marchés financiers incomplets

Pagination : 37 pages

Abstract :

The general equilibrium with incomplete asset markets model is a model which still belongs to the general equilibrium model. The model adds to Arrow-Debreu general equilibrium model the hypothesis of incompleteness of markets. The sequential trade of the commodities is also introduced to the model. The changes induce many differences between the two models according to the properties equilibrium.

First, it shows the difference between real and nominal assets. This difference is shown by the way, how equilibrium is established. Second, when financial assets are nominal, equilibrium has many degrees of indeterminacy. Finally, whatever the type of financial asset, equilibrium fails to be Pareto optimal.

These differences accross results between the Arrow-Debreu general equilibrium model and the general equilibrium with incomplete financial asset markets model induce confusions about two of the oldest debates in economic theory : "how about the economic intervention of the government ?" and "how about the non neutrality of money ?".

Keywords : Incomplete asset markets, indeterminacy of equilibrium, Pareto optimality, constrained sub-optimality, sequential trade, pseudo-equilibrium.

Résumé :

Le modèle d'équilibre général avec marchés financier incomplets est un modèle qui dérive du modèle d'équilibre général. L'introduction de l'hypothèse d'incomplétude des marchés financiers est la première différence avec le modèle d'équilibre général d'Arrow-Debreu. L'ouverture séquentielle des marchés est aussi introduite dans le modèle. Ces modifications entraînent des modifications relatives aux propriétés de l'équilibre.

D'abord, la différence entre actifs réels et actifs nominaux est mise en exergue par le modèle. Cette différence est montrée par la manière dont on établi l'équilibre. Ensuite, en présence d'actifs nominaux, l'équilibre obtenu a un certain degré d'indétermination. Enfin, quel que soit l'actif en présence, l'équilibre ne remplit aucun critère d'optimalité.

Ces différences entre le modèle d'Arrow-Debreu et le modèle d'équilibre général avec marchés financiers incomplets remet à jour deux des plus vieux débat au sein de la théorie économique : " quel est le rôle économique de l'Etat ? " et " La monnaie est elle neutre ? ".

Mots-clés : Marchés financiers incomplets, indétermination de l'équilibre, Pareto optimalité, sous optimalité contrainte, marché séquentielle, pseudo-équilbre.

Rapporteur : RAVELOMANANA Mamy Raoul, Professeur

Adresse de l'auteur : Lot III K 2 A ter Ankaditoho , Antananarivo 101