UNIVERSITE DE FIANARANTSOA

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

FILIERE : MATHEMATIQUES

MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU

CERTIFICAT D'**A**PTITUDE **P**EDAGOGIQUE DE L'**E**COLE **N**ORMALE

« **C.A.P.E.N** »

Thème :

LOGIQUE ET RAISONNEMENT EN MATHEMATIQUES

Présenté par : ANDRITSIKIVY Mamy Mandresy

Soutenu le 16 janvier 2012

Membres du Jury :

Président : Monsieur RAKOTOSON Jean Emile

Maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure

Examinateur : Monsieur RAFILIPOJAONA

Maître de conférences à la Faculté des Sciences

Directeur du mémoire: Monsieur RANDRIANIRINA Benjamin

Maître de conférences à la Faculté des Sciences

REMERCIEMENTS

« L'Eternel, le Seigneur, est ma force ;

Il rend mes pieds semblables à ceux des biches,

Et il me fait marcher sur mes lieux élevés »Habacuc 3 :19.

Nous tenons à remercier sincèrement notre Dieu, qui par sa grâce, nous a donné la force pour avoir résisté aux épreuves. Il a enlevé les obstacles, sur notre chemin durant nos parcours. Que la gloire soit à l'Eternel, maintenant et à jamais.

Ensuite, nous remercions également les membres du jury :

- Monsieur RANDRIANIRINA Benjamin, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Fianarantsoa, malgré vos nombreuses occupations, vous avez accepté de diriger nos recherches. Par vos conseils et suggestions, nous avons pu soutenir ce mémoire.
- Monsieur RAKOTOSON Jean Emile, maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure de Fianarantsoa, qui a accepté de présider la soutenance. Votre présence est un grand honneur pour nous.
- Monsieur RAFILIPOJAONA, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Fianarantsoa, qui a accepté d'examiner ce mémoire. Nous sommes très reconnaissants de vos remarques pour l'amélioration de ce mémoire.

INTRODUCTION GENERALE

La science n'a cessé de nous procurer des idées et des concepts novateurs qui ont révolutionné l'histoire de l'humanité aussi bien sur le plan technique qu'industriel. Sur ce, le sort de différents domaines tel que la technologie, la médecine et beaucoup d'autres n'est autre que le reflet d'un raisonnement scientifique bien précis et ordonné, de plus bien taillé suivant les modèles à concevoir. Notons à l'issu que si les sciences et technologies de l'électronique et de l'informatique sont actuellement à leur apogée, d'ailleurs nous nous en profitons actuellement de cela, c'est parce qu'il y a une bonne maîtrise du concept de base du raisonnement mathématique que la logique.

Mais à l'heure actuelle et ce depuis quelque temps, on a constaté que la société fait semblant d'ignorer que toutes ces réalisations qui nous émerveillent ne sont autre que le résultat d'une suite récurrente de raisonnement mathématique bien appliquée même à des choses que nous jugeons inutile. Ceci incite nos jeunes étudiants de Lycée à juger la mathématique comme discipline de la science trop abstraite. D'autres vont même à établir un souhait qui sa réalisation leur permet de passer leur Bac sans avoir à faire avec cette matière et toutes les idées qui y sont afférentes. A cet effet nos jeunes Lycéens laissent au dépend des séries littéraires, les séries scientifiques car ils pensent que la mathématique demeurera l'une des principales contraintes qui pourra à l'issu de leurs examens anéantir leurs efforts.

Ainsi, étant le plus concerné par ce problème en tant que futur professeur de mathématique des établissements aussi bien publique que privé, nous essayons d'apporter une contribution dans la facilitation de la compréhension du raisonnement pour que la Mathématique soit un vecteur de réussite des étudiants dans leurs examens et de développement aussi bien économique que sociale de notre pays.

C'est la raison de notre choix de thème : « Logique et raisonnement en Mathématiques ».

Ce mémoire est donc divisé en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons voir la construction d'une théorie mathématique et quelques définitions sur les connecteurs.

Ensuite, le second chapitre nous informera sur le langage de la logique propositionnelle diverses propositions logiquement équivalentes où nous allons déduire des tautologies remarquables.

Après cela, les formes propositionnelles et les quantificateurs seraient explicités dans le troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous allons analyser toutes les méthodes appliquées au raisonnement mathématique.

Enfin, le dernier chapitre donnera des suggestions pour l’amélioration de l’enseignement de la mathématique.

Chapitre I : LES CONCEPTS DE BASES

« Ce que j'ai appris de la logique, c'est cette dissociation entre vérité et prouvabilité ».

Alain Cones in triangle de pensée,

Ed. Odile Jacob, (2000).

I. LES PROPOSITIONS

1.1 . Introduction

Le mot logique vient du mot grec « Logike », dérivé du « Logos » ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$) , terme utilisé pour la première fois par Xénocrate. Le " logos " signifie " parole, discours" et par extension " rationalité" . La logique est donc une science de la raison. Plus précisément, c'est la science qui étudie les règles formelles que doit respecter toute argumentation correcte, toute liaison causale. En outre, elle sert à distinguer un raisonnement valide d'un raisonnement qui ne l'est pas.

Certains mathématiciens et philosophes ont contribué à l'étude de la logique. Citons par exemple : Xénocrate, Zénon d'Elée, Aristote, Emmanuel Kant, Georg Boole, Gottlob Frege ; Bertrand Russel, Gödel, Heyting, Lofti Zadeh, Saul Aaron Kripke….Parmi les listes précédentes, c'est à Zénon, auteur de la fecte de stoïciens, que l'on attribue communément, la dénomination de la logique.

Il existe quelques types de logiques : la logique trivalente qui se généralise en logiques polyvalentes ; la logique intuitionniste, la logique linéaire, la logique floue ; la logique modale et la logique classique. Parmi ces différents types, nous allons étudier la logique classique.

1.2 Les termes primitifs en mathématiques

En mathématique, les termes primitifs (ou notions premières) sont posées à priori. A partir de ces termes primitifs on considère des assemblages pour obtenir des expressions mathématiques. Les assemblages sont dits alors permis si la nouvelle expression mathématique obtenue a un sens. Dans le cas contraire, ils sont dits non permis.

Une remarque importante concernant les termes primitifs, est qu'ils ne sauraient pas rattachés à aucune notion antérieure, puisqu'ils sont les premières. Certains d'entre eux sont formés par abstraction à partir des notions intuitives.

Par exemple, en théorie axiomatique des ensembles, les objets de bases sont les ensembles. Donc la notion d'ensembles et d'appartenance sont des termes primitifs. En fait intuitivement, un ensemble est une collection d'objets. Donc on écrit $x \in y$ pour dire l'ensemble x est un élément de l'ensemble y. Pout tout ensemble x, x n'appartient pas à x.

Dans l'habitude les éléments sont représentés par des lettres : x, y,…et les ensembles par des majuscules : X, Y, … et la relation d'appartenance par le symbole$\in$.

Pour plus d'information sur la théorie des ensembles, le lecteur pourra consulter le livre de Jean Louis Krivine, Logique et théorie axiomatique des ensembles, Edition PUF, 1970.

1.3 Les propositions

1.3.1 Définition :

En logique classique, on appelle « proposition » ou « assertion » ou « expression logique » ou parfois « expression bien formée », une phrase qui a un sens pour laquelle, on peut affirmer qu'elle soit vraie ou qu'elle soit fausse.

1.3.2 Exemples

« Les coq et la poule sont des oiseaux » : c'est une proposition vraie.

« La rose est une fleur » : c'est une proposition vraie.

« L'eau est un liquide » : ce n'est pas toujours vrai.

« L'eau à 20° C est un liquide » : c'est vrai.

« S'il pleut alors le sol est mouillé » : c'est vrai

« Le nombre 8 est premier » : c'est faux

« Si un nombre est divisible par 2 et par 5 alors il est divisible par 10 » : c'est vrai

1.3.3 Remarques

(1) Une phrase optative (qui exprime un souhait, par exemple « ainsi-soit-il ! »), impérative (« Viens ! », « tais-toi !») ou interrogative n'est pas une proposition.

« Ainsi-soit-il ! » ne pouvant être ni vraie ni fausse, elle exprime uniquement un souhait de locuteur.

(2) « Je mens » n'est pas une proposition ;

En effet, si quelqu'un dit « je mens » alors si il dit la vérité alors il ment et si il ment il dit la vérité : c'est le paradoxe du menteur.

1.4 La théorie mathématique

1.4.1 Les axiomes

Les axiomes sont des propositions qui sont posées à priori, et qu'on accepte comme vrai (sans démonstration) : ils sont les points des départs d'une théorie mathématique. Les axiomes ne doivent pas se contredire, dans une théorie. Aucun axiome ne peut être remis en cause dans la théorie, sans quoi on dira que cette théorie est inconsistante ou contradictoire.

Exemples :

(1) Dans le monde du christianisme, l'existence d'un seul « Dieu » ou « Créateur » est considéré comme « axiome ».
(2) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels peut être construite à partir des axiomes suivants dits axiomes de Péano.

A_1 : Il existe un ensemble d'éléments appelés entiers naturels auquel zéro appartient.

A_2 : A tout entier naturel n correspond un autre entier naturel, unique, appelé suivant ou successeur de n.

A_3 : Deux entiers distincts ont deux suivants distincts.

A_4 : Zéro est le suivant d'aucun entier naturel.

A_5 : Axiome de récurrence : si A est une partie de $\mathbb{N}$ ayant pour éléments d'une part zéro, et d'autre part, le suivant de tout naturel lui appartenant alors la partie A est égale à$\mathbb{N}$.

Remarque : Dans la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, ces axiomes sont en fait des conséquences d'autres axiomes. Ces derniers ne sont donc plus des axiomes.

1.4.2 Les théorèmes

Contrairement aux axiomes, les théorèmes sont des propositions qu'on démontre qu'ils sont vrais. La véracité d'un théorème nécessite donc de démonstration. En outre, les théorèmes sont démontrés à partir des axiomes ou à partir d'autres théorèmes eux même démontré par des axiomes. En plus de la notion de théorème nous avons les notions suivantes : lemme et corollaire, qui en sont des variantes.

1.4.1.1 Le lemme

Comme un théorème, un lemme est une proposition qu'on démontre que c'est vrai. Un lemme sert en général à la démonstration d'un théorème plus important. Dans ce sens, les lemmes sont souvent des raccourcis à la démonstration d'un théorème principal.

1.4.1.2 Le corollaire

Un corollaire est par définition une conséquence immédiate d'un théorème démontré. Dans la pratique, le corollaire est souvent plus utile que le théorème principal.

1.4.1.3 Exemple : théorème-lemme-Corollaire

En analyse, on a le théorème suivant dite de Bolzano-Weierstrass « Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente ».

Pour démontrer ce théorème, on peut utiliser le lemme suivant « Toute suite de nombres réels contient une sous-suite croissante ou une sous-suite décroissante ».

Enfin, on a le corollaire suivant : « toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation ».

1.4.3 La théorie mathématique

Une théorie mathématique est un ensemble formé par les définitions, les axiomes, les théorèmes, les démonstrations,…qui traite d'un sujet particulier.

Remarques

(1) En logique théorique, il n'y pas de différence entre le théorème, le lemme et le corollaire. Dans la pratique, on utilise les nuances citées dans le paragraphe précédent.

(2) Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie mais sans avoir démontré. Elle n'est pas forcement vraie mais sa véracité est très probable. Quand on arrive à démontrer une conjecture, cette dernière devient un théorème.

Une conjecture n'est pas donc à priori un théorème.

Exemples de conjecture :

- Conjecture de Fermat : l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas des solutions entières non nuls dès que $n > 2$. Des mathématiciens s'intéressent à la démonstration de cette conjecture pendant plus de 360 ans. Citons par exemple Ernst Kummer, mathématicien allemand, qui en 1850 réussit à démontrer le théorème pour les entiers inferieures à 100 sauf 37 ,59 ,67 et 74.En 1908, un prix de 100 000 marks est même offert par l'université de Göttingen pour récompenser la personne qui trouvera la démonstration (et non un contre exemple) avant 2007 ; partiellement démontrer par ordinateur pour des exposants atteignant 125 000. Enfin, le 19 septembre 1994, grâce au mathématicien britannique Andrew Wiles, cette conjecture devient un théorème appelé le grand théorème de Fermat. La démonstration d'Andrew Wiles prend environ mille page et fait appelle à des concepts mathématiques que Fermat ne pouvait pas connaître à son époque.
- Conjecture de Goldbach : la conjecture de Goldbach n'est pas encore démontrer intégralement. En 1732 le mathématicien Russe, Christian Goldbach énonce sans démonstration que : tout entier pair est la somme de deux nombre premier. Ainsi, $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3 , 8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5, 20 = 3 + 17, 100 = 3 + 97.$ Pour le moment, cette hypothèse n'a pas été démontrée.

Goldbach affirme également que tout nombre est la somme des trois nombres premiers. Bien que cette conjecture n'ait pas été démontrée dans le cas général, le mathématicien Soviétique Ivan Vinogradov prouve en 1937 qu'elle est vraie dans le cas d'entier impairs autres que 3 et 5

II. LES CONNECTEURS

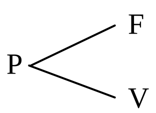
2.1 Définition

Un connecteur est un symbole ou un mot qui lie deux propositions, et qui permet d'obtenir une nouvelle proposition dont la valeur dépend des valeurs des deux anciennes propositions.

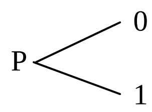
Nous avons vu qu'une proposition est soit vraie, soit fausse mais pas autre chose. Il existe donc une application de l'ensemble de toute les propositions dans l'ensemble {vrai ; faux} dont les éléments sont appelés valeurs de vérité.

A chaque proposition P on associe donc soit la valeur vraie noté 1, soit la valeur fausse noté 0.

On a l'arbre de choix :



ou



On a aussi la table de vérité (ou table de valeur)

P
F
V

P
0
1

Tableau n°01 : Table de vérité

Remarque :

(1) Pour deux proposition P et Q, on a : $2^2 = 4$ possibilités

- P faux et Q faux
- P faux et Q vrai
- P vrai et Q faux
- P vrai et Q vrai.

Illustrer par l'arbre de choix ci-dessous.

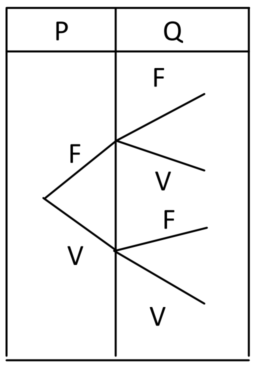


Tableau n°02 : Arbre de choix de valeur de vérité pour deux propositions quelconques

D’où la table de vérité :

P	Q
0	0
0	1
1	0
1	1

Tableau n°03 : Table de vérité pour deux propositions

(2) Les « connecteurs » ou « operateurs » sont des moyens pour déterminer une nouvelle proposition noté Pθ**Q** (θ étant un connecteur) à partir des proportions déjà connues P et Q. Les connecteurs servent donc à former une proposition plus complexe ou plus élaborée à partir des propositions simples.

(3) Puisque pour le couple (P ; Q), il existe quatre cas possibles, que nous écrivons dans l’ordre indiqué dans la remarque (1) ci-dessus, il suffit de fixer la suite des quatre valeurs correspondantes de PθQ (colonne 3), pour fixer exactement le sens logique du connecteur correspondant

Cette suite s’appelle l’évaluation de Pθ**Q**

Toute évaluation détermine donc un connecteur.

Or une évaluation étant une suite formée de quatre chiffres dont chaque terme peut prendre la valeur 0 et 1.

Le nombre d’évaluation possible est donc égal au nombre d’applications possibles d’un ensemble à quatre éléments vers un ensemble à deux éléments c’est-à-dire il y a $2^4 = 16$ applications possibles d’où l’existence de 16 connecteurs possibles apparents.

P	Q	P θ **Q**
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Evaluation exemple : 0001

Tableau n°04 : Evaluation

2.2 Les différents types des connecteurs.

2.2.1 Le connecteur monadique de la négation : « Non ».

Le connecteur de la négation se note par ⌝ et se définit comme suit : si P est une proposition alors la négation de P noté ⌝P (se lit : non P) est aussi une proposition tel que si P est vrai alors ⌝P est faux et si P est faux alors ⌝P est vrai.

P	⌝P
0	1
1	0

Tableau n°05 : Négation

La valeur de vérité de ⌝P se déduit facilement de P d'où la liaison entre les deux propositions.

Exemples :

(1) La négation de « il est malade », est « il n'est pas malade ».
(2) La négation de « le Toyota est une automobile », est « le Toyota n'est pas une automobile »
(3) La notion de la négation d'une proposition est importante en probabilité. En effet, le calcul direct de la probabilité d'un événement est parfois difficile. Par exemple la négation de « obtenir au moins une boule noire » est « obtenir aucune boule noire ».
(4) Il en est de même pour le raisonnement par l'absurde (cf. Chap. IV, §.2). Par exemple, pour montrer que « si tu obtiens la mention très bien, alors l'Etat te donnerait une bourse extérieure » est fausse, on peut montrer que sa négation « tu obtiens la mention très bien et l'Etat ne te donnera pas une bourse extérieure » est vraie.

Nous allons construire maintenant la table de vérité de P et ⌝P considérés comme deux propositions quelconques.

P	⌝P
~~0~~	~~0~~
0	1
1	0
~~1~~	~~1~~

Tableau n°06 : Tiers-exclu et non contradiction

Le rejet de la première ligne signifie qu'il n'existe pas de proposition dont elle et sa négation sont simultanément fausses : c'est le principe du tiers-exclu.

De même le rejet de la quatrième ligne, signifie qu'il n'existe pas de proposition dont elle et sa négation sont simultanément vraies : c'est principe de non-contradiction.

2.2.2 Le connecteur de la disjonction inclusive : « ou inclusif »

Considérons les deux phrases suivantes :

(1) Pendant la fête organisée par l'Ecole Normale Supérieure, les étudiants (de l'E.N.S) **ou** les anciens élèves de l'E.N.S peuvent entrer gratuitement.
(2) Auparavant, les étudiants qui ont perdu sa mère **ou** son père, bénéficient un tarif plein pour les bouses d'études.

Pour la première phrase, une personne ne peut pas être, en même temps ancien élève et étudiant actuel de l'E.N.S.

Pour cette raison le « ou » utilise dans la première phrase s'appelle « ou exclusif » que nous verrons plus tard.

Par contre, dans la deuxième phrase, il est possible que la personne considérée, ait perdu à la fois sa mère et son père. C'est pourquoi nous parlons de « ou inclusif ».

Définition *: La « disjonction » ou « somme logique » est le connecteur* **ou** *noté « ∨ » qui, à tout couple de propositions (P, Q) associe la proposition (P* ***ou*** *Q) noté (P ∨ Q), vraie si l'une au moins des propositions P et Q est vraie, fausse si P et Q le* sont.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

L'évaluation de la disjonction est 0111.

Tableau n°07 : Disjonction

2.2.3 Le connecteur de la conjonction

La phrase : « il pleut et le terrain est glissant » est vrai si « il pleut » est vrai en même temps que « le terrain est glissant ».

Définition *: La « conjonction » ou « produit logique » est le connecteur* **et** *noté ∧ , qui à tout couple de proposition (P, Q) associe la proposition (P* ***et*** *Q) noté (P ∧ Q) vrai si P et Q le sont.*

P	Q	P ∧ Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'évaluation de la conjonction est 0001

Tableau n°08 : Conjonction

2.2.4 Le connecteur de l'implication : « Si… alors » (conditionnel matériel)

Considérons la promesse du père à son fils suivante :

« Si tu obtiens ton diplôme, je t'achète une bicyclette ».

Si l'enfant n'a pas eu son diplôme et son père n'a pas acheté une bicyclette : la promesse de son père a été tenue.

Si par suite d'un événement (maladie ou autre) le père a quand même acheté la bicyclette même si l'enfant n'a pas son diplôme, il a quand tenu sa promesse car il n'a pas affirmé que sans diplôme il n'y aura pas de bicyclette.

Parmi tous le cas, un seul correspond à une promesse non tenue : celui où l'enfant a son diplôme et n'a toujours pas de bicyclette.

Nous écrivons la promesse sous la forme : « Tu as ton diplôme » $\Longrightarrow$ « Je t'achète une bicyclette ».

Définition *: L' « implication » est le connecteur logique, que nous notons par " ⇒ " , qui à tout couple de proposition (P ; Q) associe la proposition (P* ***implication*** *Q) ou (P* ***implique*** *Q), noté (P ⇒ Q), fausse dans le cas où P est vrai et Q fausse, vraie dans les autres cas.*

P	Q	P ⇒ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L'évaluation de la conjonction est donc 1101

Tableau n°09 : Implication

<u>Remarque 1</u> :

(1) En général le calcul des propositions ne se préoccupe pas du contenu des propositions, mais seulement de leurs relations.

(2) Dans la définition que nous donnons précédemment, il n'y a pas d'idée de cause à effet entre P et Q dans $P \Rightarrow Q$. Nous distinguons non plus le sens de « l'implication » et « implique ». Pourtant, certains livres ont mis la différence entre « implication » et « implique » en notant respectivement ″ $\Rightarrow$ ″ et ″ $\dot{\Longrightarrow}$ ″ (voir : Algèbre terminale C-E, collection DELAGRAVE Edition 1971). Dans ce cas l'implication indique que les deux propositions reliées sont quelconques tandis que l'implique indique qu'il existe une relation entre les deux propositions.

Exemple 1 :

« 5 est impair » $\Rightarrow$ « 7 est pair » est une proposition fausse

« $2 + 2 = 4$ » $\Rightarrow$ « $5 \times 5 = 25$ » est une proposition vraie

« Il pleut » $\dot{\Longrightarrow}$ « le sol est mouillé » est une proposition vraie.

« Ceci est un cobra » $\dot{\Longrightarrow}$ « ceci est un serpent » est une proposition vraie.

Les deux connecteurs $\Rightarrow$ et $\dot{\Longrightarrow}$ semblent différents au point de vue nature. Cependant ils sont identiques au point de vue valeur de vérité. Dans toute la suite, nous utiliserons le symbole « $\Rightarrow$ » pour indiquer ces deux connecteurs.

Remarque 2 :

(1) Dans la pratique pour montrer que l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est vraie il suffit de supposer que P est vrai et de montrer ensuite que Q est vraie. En effet, l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est toujours vraie si P est fausse.

(2) De l'implication « $P \Rightarrow Q$ », nous avons deux nouvelles implications :

   (i) L'implication réciproque : « $Q \Rightarrow P$ »

   (ii) L'implication contraposée : « $\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P$ »

Nous ne devons pas confondre ces deux implications.

Exemple 2 :

Considérons « $P \Rightarrow Q$ » dans le cas où :

P : « Rakoto habite à Andrainjato »

Q : « Rakoto habite à Fianarantsoa »

L'implication directe « $P \Rightarrow Q$ » s'énonce : « Si Rakoto habite à Andrainjato alors Rakoto habite à Fianarantsoa ».

L'implication réciproque : « $Q \Rightarrow P$ » s'énonce : « Si Rakoto habite à Fianarantsoa alors Rakoto habite à Andrainjato ».

L'implication contraposée : « $\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P$ » s'énonce : « Si Rakoto n'habite pas à Fianarantsoa alors Rakoto n'habite pas à Andrainjato »

Nous pouvons dire que l'implication directe et la contraposée sont vraies tandis que la réciproque est fausse (Rakoto peut habiter à Tsianolondroa).

<u>Remarque 3 :</u>

Les deux premières lignes de notre tableau sont parfois difficiles à comprendre. Il dit en effet qu'à partir d'une proposition fausse on peut déduire n'importe quelle proposition. Pour mieux comprendre cette définition, prenons l'exemple suivant.

Un étudiant de Russel lui posa la question suivante : « prétendez vous que si 2+2=5, il s'ensuit que vous êtes le pape ? ».

« Oui, dit Russel ».

« Et pourriez vous le prouver ? », demanda l'étudiant.

« Certainement », réplique Russel, qui proposa sur le champ la démonstration suivante :

Supposons que 2+2=5.

Soustrayons 2 de chaque membre de l'égalité, nous obtenons 2=3.Par symétrie 3=2.

Soustrayant 1 de chaque coté, il vient 2=1.Maintenant le pape et moi sommes deux. Puisque 2=1, le pape et moi sommes un. Par suite, je suis le pape.

Finalement l'implication est essentielle en mathématiques, car elle est l'un des fondements de toute démonstration, preuve ou déduction.

2.2.5 Le connecteur d'équivalence : " $\Leftrightarrow$ " (bi-conditionnel)

Définition *: La bi-implication est le connecteur noté : "… si et seulement si …" ou encore " $\Leftrightarrow$ ", qui à tout couple de proposition (P ; Q), associe la proposition (P **bi-implication** Q) ou (P **si et seulement si** Q) ou (P **est équivalent à** Q) ou (P $\Leftrightarrow$ Q), vrai si P et Q ont la même valeur de vérité*

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'évaluation de l'équivalence est 1001

Tableau n°10 : Equivalence

2.2.6 Quelques autres connecteurs

Avant de récapituler tous les 16 connecteurs binaires nous allons voir quelques connecteurs qui ne sont pas ou qui sont peu utilisés en Mathématiques, mais plutôt en informatique et en électronique.

- **La disjonction exclusive**

La « disjonction exclusive » est le connecteur noté w, qui à tout couple de propositions (P;Q) associe la proposition (P ***ou exclusif*** *Q), vrai si P et Q ont des valeurs de vérité distinct fausse dans les cas contraires.*

L'exemple 1 dans le paragraphe 2.2.2 illustre cette définition. On parle donc de « ou exclusive » lorsque l'un des énoncé soit P, soit Q est considéré. On voit aussi que P*w*Q est équivaut à la négation de P $\Leftrightarrow$ Q

P	Q	*P w* Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'évaluation de la disjonction exclusive est 0110.

Tableau n°11 : Disjonction exclusive

- **La barre de Scheffer**

La barre de Scheffer est le connecteur noté ↑, qui à tout couple de propositions (P;Q) associe la proposition P↑Q, fausse si P et Q sont vraies et vraie dans les autres cas.

P↑Q se lit « P ***flèche*** Q » et appelé incompatibilité.

P	Q	P↑Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'évaluation de la barre de Scheffer est 1110.

Tableau n°12 : Barre de Scheffer

- **Le connecteur de tautologie**

Le connecteur de tautologie noté τ a pour évaluation 1111.Cela signifie que le résultat est indépendant de P et Q.

P	Q	P τ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tableau n°13 : Connecteur de la tautologie

Quelque soit la valeur de vérité de P et Q la proposition composée PτQ est toujours vraie.

- **Le connecteur d'antilogie**

Le connecteur d'antilogie noté α a pour évaluation 0000.La valeur de vérité de la proposition composée est donc indépendante des propositions initiales P et Q.

P	Q	P α Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tableau n°14 : Connecteur de l'antilogie

P α Q est toujours fausse, quelque soit la valeur de P et Q.

2.3 Tableau récapitulatif des 16 connecteurs apparents

Nous allons récapituler les 16 connecteurs dans le tableau suivant en indiquant dans ce tableau les noms en Français et en Anglais, de chaque connecteur ou opérateur. Il y a aussi la table de vérité abrégé noté T de V (évaluation) et les commentaires.

L'indication donnée par la table de vérité abrégée suit l'ordre indiqué au paragraphe 2.1.

N°	Français	Anglais	T de V	Commentaires
0	Antilogie	Contradiction	0000	Fausse quelque soit la variable d'entrée
1	Et	Conjunction	0001	Vraie si les deux variables sont vraies à la fois
2	Non implication	Non implication	0010	
3	A	A	0011	
4	Non implication contraire	Converse non implication	0100	
5	B	B	0101	
6	Ou exclusif	Exclusive disjunction	0110	Vraie dès qu'une seule variable est vraie (une seule)
7	Ou inclusif	Disjunction	0111	Vraie dès qu'une des variables est vraie (même les deux)
8	Non ou	Joint denial	1000	Vraie si A et B sont fausses
9	Equivalence	Biconditionnal	1001	Vraie si les deux variables sont identiques
10	Non B	Negation of B	1010	
11	Implication contraire	Converse implication	1011	
12	Non A	Negation of A	1100	
13	Implication	Implication	1101	Fausse si A vraie et B fausse
14	Non Et	Alternative denial	1110	Vraie si A ou B est fausse
15	Identité Tautologie	Tautologie	1111	Toujours vraie

Tableau n°15 : Récapitulation des 16 connecteurs apparents

Chapitre II : LES PROPOSITIONS COMPLEXES

I. Langage de la logique propositionnelle

1.1 Langage formel et langage naturel

Le langage naturel est le langage que nous utilisons dans la vie de tous les jours. L'utilisation du langage naturel en Mathématiques peut entrainer deux grands problèmes : la première est celui de la complexité des phrases qui peut rendre à des choses plus compliquées. Il faut parfois plusieurs lignes et une phrase complètement incompréhensible pour dire quelque chose qui peut se résumer par une simple équation.

La deuxième est ce que : les ambigüités du langage courant peuvent conduire à des erreurs, et surtout une preuve se doit indiscutable par définition, ce qui est impossible lorsqu'il y a ambigüité.

Par suite nous avons intérêt à utiliser le langage formel.

1.2. Définition d'un langage formel

Pour définir un langage formel, on doit définir deux choses : l'alphabet et la syntaxe.

Un alphabet se définit comme dans le cas de langage naturel c'est-à-dire un ensemble des symboles à utiliser pour former des mots ou formules.

Une syntaxe est un ensemble de règles à suivre pour définir les mots du langage formel.

Un mot ou chaine de caractère est une suite ordonnée des symboles, ces symboles appartenant à un alphabet. Un langage formel est donc un ensemble de mots de longueur finie défini par un alphabet et une syntaxe.

Pour éclaircir ces définitions , nous allons prendre un exemple quelconque.

- l'alphabet du langage est l'ensemble contenant les éléments suivants : X, Y, Z,=, et +

-la syntaxe sera composée des règles suivantes :

1Aucun mot ne peut pas commencer ou terminer par =

2 Aucun mot ne peut pas commencer ou terminer par +

3 De chaque mot on a un et un seul symbole « = »

4 Si on choisit deux symboles consécutifs dans un mot, l'un des deux est une des lettres X, Y et Z et pas l'autre.

Par exemple X+Y+Z=X+Z est un mot possible, par contre =X+YZ ne l'est pas.

1.3. Les formules

Les propositions simples sont aussi appelées « variables propositionnelles » ou « formules atomiques » ou « propositions atomiques ». A partir des formules atomiques et à l'aide de connecteurs nous pouvons construire des propositions plus complexes que nous appelions : formule ou proposition. Ainsi « il pleut » et « le sol est mouillé » sont deux propositions atomiques. A l'aide de connecteur de l'implication « ⇒ », nous avons la formule ou proposition « il pleut ⇒le sol est mouillé ».

1.4. Langage de la logique propositionnelle

Nous pouvons définir maintenant le langage de la logique propositionnelle. L'alphabet de la logique propositionnelle est constitué :

1-d'un ensemble des formules atomiques

2-des connecteurs :˥,∨,∧, ⇒ , ⇔

3-des séparateurs (parenthèses) : « (» et «) »

Les parenthèses sont utiles dans les formules logiques car il faut se rendre compte par exemple que la formule ˥ P ∧ Q est différente de la formule ˥ (P ∧ Q).

Cependant certain livre utilise la notation polonaise, dans ce cas l'utilisation de la parenthèse est parfois inutile.

La syntaxe se définit comme suit :

Syntaxe : l'ensemble des formules logiques est le plus petit ensemble tel que :

Si P est une formule atomique alors P est une formule

Si P est une formule alors ˥P est une formule

Si P et Q sont des formules alors P∨Q est une formule

Si P et Q sont des formules alors P∧Q est une formule

Si P et Q sont des formules alors P⇒Q est une formule

Si P et Q sont des formules alors P⇔Q est une formule

II. Relation entre les connecteurs

Dans ce paragraphe nous allons étudier quelques propriétés des connecteurs c'est-à-dire les relations entres eux. Nous avons intérêt à faire cette étude parce que la connaissance des propriétés des connecteurs peut faciliter la démonstration.

2.1. Quelques définitions

(i) Rappelons que deux propositions atomiques P et Q sont dits logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité. Attention, on ne s'intéresse pas ici au contenu de la proposition mais de sa valeur de vérité. On définit de la même manière les propositions composées logiquement équivalentes: deux propositions complexes sont logiquement équivalentes, si elles ont la même évaluation quelles que soient les valeurs des propositions atomiques à partir desquelles elles sont construites.

(ii) On appelle « tautologie » ou « expression valide » ou « loi de la logique propositionnelle », toute formule composée qui est toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité des propositions atomiques qui la compose.

Exemple :

$P \Rightarrow P$ est une tautologie : que P soit vraie ou fausse cette formule est toujours vraie. On peut démontrer une tautologie à l'aide d'une table de vérité.

P	P	$P \Rightarrow P$
0	0	1
1	1	1

Tableau n°16 : Explication de $P \Rightarrow P$

Le principe du tiers-exclu, $P \vee \neg P$ est aussi une tautologie.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0	1	1
1	0	1

Tableau n°17 : Explication du tiers-exclu

<u>Remarque :</u>

Si P et Q sont deux propositions équivalentes alors $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie et réciproquement.

(iii) On appelle « antilogie » ou « contradiction » toute formule composée, qui est toujours fausse quelque soit la valeur de vérité des formules qui la compose. On dit également que cette formule est « insatisfaisable ».

$P \wedge \neg P$ est une contradiction.

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	0	0

Tableau n°18 : Explication d'une contradiction

<u>Remarque</u> : Dans une théorie mathématique on n'admet pas l'existence d'une contradiction.

(iv) On appelle « expression contingente », une expression qui est parfois vraie, parfois fausse. Si une expression contingente prend au moins une fois la valeur vraie, alors on dit qu'elle est « satisfaisable ».

(v) Deux propositions P et Q sont dits « synonymes » s'ils ont la même valeur de vérité au sens verbal. On écrit alors $P \equiv Q$.

Exemple :

P : « Toky n'est pas malade »

Q : « Toky est en bonne santé ».

Nous avons dans ce cas P≡Q.

2.2 Propriétés des connecteurs

Avant de voir quelques propriétés concernant les connecteurs, nous allons définir d'abord ce qu'on appelle « formules duales ».

Définition : *Soit P une proposition complexe, exprimée à l'aide de la conjonction ∧ et la disjonction* ∨ .

*On appelle « formule duale » de P, la proposition obtenue en remplaçant dans P,∧ par∨, ∨ par∧, vraie par fausse et fausse par vrai*e.

Dans toute la suite de ce paragraphe P, Q, R désignerons trois propositions quelconques.

a) Propriété de la négation

1-˥ (˥P) ≡ P

En effet, le 1er et la dernière colonne de la table de vérité ont la même évaluation.

P	˥P	˥ (˥P)
0	1	**0**
1	0	**1**

Tableau n°19 : Equivalence entre P et˥ (˥P)

2- P∧ ˥P ≡ F où F désigne une proposition fausse : c'est le principe de non contradiction.

3- P ∨ ˥P ≡ V où V désigne une proposition vraie : c'est le principe du tiers-exclu.

b) Propriété de la conjonction et de la disjonction inclusive.

Résumons ces propriétés dans un tableau.

Propriétés	Formules	Formules duales
Idempotent	P ∧ P ≡ P	P∨P ≡ P
Commutativité	P ∧ Q ≡ Q ∧ P	P∨Q ≡ Q∨P
Associativité	(P∧Q) ∧ R ≡ P∧ (Q ∧ R)	(P∨Q)∨R≡ P ∨(Q∨R)
Neutralité	P ∧ V ≡ P	P∨F ≡ P
Distributivité	P ∧(Q∨R) ≡ (P∧Q) ∨(P∧R)	P ∨(Q∧R) ≡ (P∨Q)∧(P∨R)

Tableau n°20 : Formules duales entre conjonction et disjonction

Autres propriétés :

P∧F ≡ F, F est absorbant pour ∧

P∨V ≡ V, V est absorbant pour ∨

Lois d'absorption :

P ∧(P∨Q) ≡ P

$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

En effet, la première, la quatrième et la sixième colonne de la table de vérité ont la même évaluation.

P	Q	P∨Q	P ∧(P∨Q)	P∧Q	P ∨(P∧Q)
0	0	0	**0**	0	**0**
0	1	1	**0**	0	**0**
1	0	1	**1**	0	**1**
1	1	1	**1**	1	**1**

Tableau n°21 : Lois d'absorption

c) Relations entre¬,∧, ∨

Lois de Morgan :

La négation de (P et Q) est [(non P) ou (non Q)].

$\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$.

La négation de (P ou Q) est [(non P) et (non Q)].

$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.

Ces deux lois expriment les lois de Morgan.

P	Q	P∧Q	¬ (P∧Q)	¬P	¬Q	¬P ∨ ¬Q	P∨Q	¬ (P∨Q)	¬P∧ ¬ Q
0	0	0	**1**	1	1	**1**	0	***1***	***1***
0	1	0	**1**	1	0	**1**	1	***0***	***0***
1	0	0	**1**	0	1	**1**	1	***0***	***0***
1	1	1	**0**	0	0	**0**	1	***0***	***0***

Tableau n°22 : Lois de Morgan

Propriété de l'implication :

1-Toute proposition implicative est équivalente à sa contraposée.

$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

P	Q	P ⇒ Q	¬Q	¬P	¬Q⇒ ¬P
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**1**	0	1	**1**
1	0	**0**	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**

Tableau n°23 : Equivalence entre implication et sa contraposée

2-$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

P	Q	¬P	¬P∨Q	P ⇒ Q
0	0	1	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
1	1	0	**1**	**1**

Tableau n°24 : Equivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$

Cette équivalence peut être utilisée dans le langage usuel.

Exemples :

- Pas de fumée sans feu, c'est-à-dire non fumée ou feu signifie bien fumée implique feu.
- Si je ne me trompe pas, je vous ai déjà rencontré, $(\neg P \Rightarrow Q)$, se traduit aussi par : ou je me trompe, ou je vous ai déjà vu, $(P \vee Q)$ c'est à dire $[\neg(\neg P) \vee Q]$.

3-$(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

En effet, $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q$ (dernière propriété

$\equiv \neg[\neg(\neg P \vee Q)]$ (Equivalence entre P et $\neg(\neg P)$)

$\equiv \neg[\neg(\neg P) \wedge (\neg Q)]$ (Lois de Morgan)

$\equiv \neg[P \wedge (\neg Q)]$ (Equivalence entre P et $\neg(\neg P)$)

Propriétés de l'équivalence :

1- $(P \Leftrightarrow Q) \equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	**1**	1	1	**1**

Tableau n°25 : Equivalence entre $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

2- $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$

En effet, $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ (dernière propriété)

$\equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ (Implications contraposées)

$\equiv (\neg P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (Commutativité de $\wedge$)

$\equiv (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$ (dernière propriété)

3-L'équivalence est réflexive, c'est à dire que : $(P \Leftrightarrow P)$ est une tautologie.

Elle est symétrique, c'est à dire que : $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Leftrightarrow P)$ est une tautologie.

Elle est également transitive, c'est à dire que : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ est une tautologie.

d) Propriétés de la disjonction exclusive

Commutativité : $P \, w \, Q \equiv Q \, w \, P$

Associativité : $P \, w \, (Q \, w \, R) \equiv (P \, w \, Q) \, w \, R$

$(P \; w \; P) \equiv F$

$(P \; w \; Q) \equiv \neg(P \Leftrightarrow Q)$

$\equiv (P \Leftrightarrow \neg Q)$

La disjonction exclusive est logiquement équivalente à la négation de l'équivalence matérielle.

III. Les tautologies

Une tautologie est une proposition toujours vraie quelque soit la valeur des formules atomiques qui la compose. Les tautologies peuvent parfois être utiles dans la simplification des certaines expressions. Si P et Q sont deux propositions logiquement équivalentes alors

$P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie et réciproquement.

Voici quelques tautologies remarquables déduites à partir des relations précédentes.

P, Q et R sont des propositions

PROPRIETES	FORMULES
Identité	$P \Leftrightarrow P$
Double négation	$P \Leftrightarrow \neg\neg P$
Idempotence	$P \Leftrightarrow (P \vee P)$ $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$
Commutativité	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
Associativité	$[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$ $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$
Distributivité	$[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$
Lois d'absorption	$[P \vee (P \wedge Q)] \Leftrightarrow P$ $[P \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$
Lois de Morgan	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
Conditionnel matériel	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [\neg(P \wedge \neg Q)]$
Contraposition	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
Equivalence matériel	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$ $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)]$
Exportation-Importation	$[(P \wedge Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)]$

Tableau n°26 : Quelques tautologies remarquables

Ces tautologies sont souvent utiles dans les démonstrations, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

Chapitre III : CALCUL DES PREDICATS

Nous avons intérêt à faire le calcul de prédicat. Suivons en effet le raisonnement suivant :

-Tous les malgaches mangent du riz

-Rabe est un malgache

-Donc Rabe mange du riz

Un tel raisonnement peut être difficile en utilisant seulement le simple calcul des propositions

I. Forme propositionnelle.

La notion de forme propositionnelle est très importante en théorie des ensembles. Comme on va voir plus bas, elle permet par exemple de définir les ensembles surtout si on ne peut pas énumérer ses éléments c'est-à-dire si l'ensemble possède une infinité d'élément.

Cette notion complète aussi la logique propositionnelle.

Considérons l'expression définie sur $\mathbb{Z}$ par :

p(x) : « x est divisible par 5 »

- Si on donne à x la valeur 7, on obtient la proposition fausse : « 7 est divisible par 5 ».
- Si on donne à x la valeur 80 on obtient la proposition vraie : « 80 est divisible par 5 » .

Par suite la véracité de p(x) dépend de la valeur de x. Donc cette expression n'est pas une proposition, car comme on a vu : une proposition est une phrase dont on peut affirmer sans ambigüité qu'elle soit vraie ou fausse.

On dit que c'est une forme propositionnelle

1.1 Définition de la forme propositionnelle

On appelle forme propositionnelle à une variable x, toute expression contenant la variable x et dévient une proposition pour toute valeur attribuée à x

Les formes propositionnelles à une variable x sont notées en général par : p(x), q(x), f(x),…

Autre exemple de forme propositionnelle :

T(x) : « x est un travail »

Si on remplace x par dormir, nous avons la proposition fausse T (dormir) : « dormir est un travail »

Si on remplace x par labourer le champ, nous avons la proposition vraie T (labourer le champ) : «labourer le champ est un travail »

Remarque :

Si p(x) est une forme propositionnelle définie sur un ensemble E, E est encore appelé référentielle et si on choisit un élément a de E, p(a) est une proposition.

1.2 Introduction à la théorie des ensembles

Un ensemble E peut être défini comme collection d'objet possédant la même propriété P. Ainsi, les objets d'un ensemble sont appelés éléments. Les éléments sont notés habituellement par des petites lettres x, y, z,…

On dit qu'un élément a appartient à un ensemble E, si a possède la propriété P et on écrit alors : a $\in$ E qui se lit « a appartient à E ou a est un élément de E ». Dans le cas contraire c'est-à-dire si a ne possède pas la propriété P .On dit que « a n'appartient pas à E ou a n'est pas un élément de E » et on écrit a $\notin$ E .

L'ensemble E que nous venons de définir est donc caractérisé par la propriété P. Ainsi :

- Si a $\in$ E , la propriété P est vraie pour a et on écrit P(a).
- Si a $\notin$ E , la propriété P est fausse pour a et on écrit $\neg$P(a).

$\neg$P(a) est la négation de P(a) qui se lit : « non P de a ».

P(x) est plus précisément la forme propositionnelle qui caractérise les éléments de E.

Un ensemble est dit défini en extension si on énumère tous les éléments de E. Par contre, il est dit défini en compréhension s'il est déterminé à l'aide d'une forme propositionnelle.

Exemple :

(1) Soit E l'ensemble des cinq premiers nombres entiers naturels.

E est défini en extension par $\mathrm{E} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

E peut être défini en compréhension par $E = \{x \in \mathbb{N} \ / \ \mathrm{x} < 5\}$

(2) Soit F l'ensemble des dix premiers nombres premiers

F est défini en extension par : $\mathrm{F} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$

F peut être définie en compréhension par $F = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \text{n premier et n} \leq 30\}$

Remarque 1 : La définition qu'on vient de donner est en fait la définition naïve dûe à Cantor.

Dans la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel (Cf. Jean Louis Krivine, Logique et théorie axiomatique des ensembles, Edition PUF, 1970) la notion d'ensemble est un terme primitif qu'on ne définit pas. En effet la définition naïve de Cantor amène à la contradiction suivante (paradoxe de Bertrand Russel) :

Soit $a = \{x; x \notin x\}$, alors $x \in a \Leftrightarrow x \notin x$, en particulier, $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$.

Remarque 2 :

(1) Dans certain manuel, une forme propositionnelle est encore appelée prédicat.
(2) Il existe des formes propositionnelles à deux ou à plusieurs variables. Dans ce cas la forme propositionnelle ne dépend pas seulement d'une variable.

Une forme propositionnelle à deux variables est aussi appelée relation binaire.

Le nombre de variable d'une forme propositionnelle s'appelle arité.

Exemple :

« x et y ont la même parité » est une forme propositionnelle à deux variables, qui dévient une proposition fausse si x = 2 et y = 5, est dévient une proposition vraie si x = 8 et y = 20.

II. Les quantificateurs

Les quantificateurs sont utilisés pour transformer une forme propositionnelle définie sur un ensemble E, en une proposition.

2.1 Le quantificateur universel

Soit la forme propositionnelle, définie sur le référentiel $\mathbb{N}$, par p(x) : « x est positif »

Pour chaque $a \in \mathbb{N}$, la proposition p(a) est vraie. On dit alors que : « Pour toute x élément de $\mathbb{N}$, p(x) » ou « Quelque soit x élément de $\mathbb{N}$, p(x) » et on écrit : $(\forall x \in \mathbb{N})$ (p(x)).

Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel. Il transforme la forme propositionnelle p(x) en une proposition.

Si on change le référentiel, par exemple $\mathbb{Z}$, on obtient la proposition : $(\forall x \in \mathbb{Z})$ (p(x)).Cette dernière proposition est fausse parce que si on prend par exemple x = -2, on obtient la proposition p (-2) qui est fausse (-2 n'est pas positif)

Remarque :

(1) Si p(x) est une forme propositionnelle définie sur un ensemble E, alors $(\forall x \in E)$ (p(x)) est une proposition.
(2) Soit maintenant $E = \{2; 4; 6; 8; 16\}$ et les formes propositionnelles

p(x) : « x est pair »,

q(x) : « x est une puissance de 2 ».

- $(\forall x \in E)$ (p(x)) est une proposition vraie (car tous les éléments de E sont pairs)

La proposition $(\forall x \in E)$ (p(x)) est donc équivalente à la conjonction

$p(2) \wedge p(4) \wedge p(6) \wedge p(8) \wedge p(16)$. Ainsi, si le référentiel possède une infinité d'éléments, on peut dire que le quantificateur $\forall$ apparaît comme généralisation de la conjonction sur ce référentiel.

- $(\forall x \in E)$ (q(x)) est une proposition fausse.

En effet, 6 n'est une puissance de 2. Pour les autres valeurs les propositions associées sont vraies: $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$.

2.2 Le quantificateur existentiel

Soit la forme propositionnelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

p(x) : « x est un nombre strictement négatif ».

Si pour au moins un a, élément de $\mathbb{R}$, la proposition p(a) est vraie, on dit alors que : « il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$ tel que p(x) ». Dans ce cas, on écrit alors $(\exists x \in \mathbb{R})$ $(p(x))$, qui est une proposition vraie dans notre cas, puisque p (-5) l'est.

Si on change le référentiel par $\mathbb{N}$ par exemple, on a : $(\exists x \in \mathbb{N})$ (x est strictement négatif)

$(\exists x \in \mathbb{N})$ (p(x)) est une proposition fausse, car tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont positifs.

Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel. Il transforme la forme propositionnelle p(x) à une proposition.

<u>Remarque</u> :

(1) Si p(x) est une forme propositionnelle définie sur un ensemble E, alors : $(\exists x \in E)$ (p(x)) est une proposition.
(2) Soit $E = \{1; 4; 8; 17; 25; 38\}$ et la forme propositionnelle q(x) : « x est un nombre premier »

La proposition $(\exists x \in E)$ (q(x)) est vraie si l'un au moins des éléments de E vérifie la propriété q c'est-à-dire s'il y a au moins un élément $a \in E$ tel que la proposition q(a) soit vraie. La proposition $(\exists x \in E)$ (q(x)) est donc équivalente à la disjonction $q(1) \vee q(4) \vee q(8) \vee q(17) \vee q(25) \vee q(38)$. Ici q(17) est vraie ;(les autres propositions sont fausses) donc notre proposition $(\exists x \in E)$ (q(x)) est vraie. Ainsi, si le référentiel E possède une infinité d'élément, on peut dire que le quantificateur existentiel apparaît comme une généralisation de la disjonction sur ce référentiel.

2.3 Propriétés des quantificateurs

a) <u>Négation d'une proposition contenant des quantificateurs</u>

Soit p(x) une forme propositionnelle définie sur un ensemble E.

- La négation de $(\forall x \in E)(p(x))$ est $(\exists x \in E)$ $(\neg p(x))$.

En effet, $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})(\mathrm{p(x)})$ est vraie dans le cas où tous les éléments de E vérifient la propriété p. Si nous trouvons donc un élément a de E tel que la proposition p(a) est fausse (C'est-à-dire ˥p(a) est vraie) alors la proposition précédente est fausse.

Donc la négation de $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})(\mathrm{p(x)})$ est $(\exists\, x \in E)$ (˥p(x))

- La négation de $(\exists\, x \in E)$ (q(x)) est $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ (˥q(x))

Exemples :

(1) La négation de$(\forall\, x\ \in\ \mathbb{R})$ $(|x| - x \geq 0)$ est (($\exists\, x \in \mathbb{R}$) $(|x| - x < 0)$
(2) Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs.

Donc un entier naturel n'est pas premier s'il est égal à1 ou s'il admet au moins trois diviseurs positifs.

Remarque :

La négation s'obtient en remplaçant ∀ par ∃ et ∃ par ∀ et les formes propositionnelles par leur négation tout en respectant l'ordre.

Exemples :

(1) La négation de $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\exists\, y \in\ F)$ $(x\mathcal{R}y)$ est $(\exists\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, y \in\ F)$ $(x\urcorner\mathcal{R}y)$. $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\exists\, y \in F)$ $(x\mathcal{R}y)$ signifie à chaque fois qu'on prend un élément a de E, on peut trouver un élément b de F tel que la proposition $(x\mathcal{R}y)$ est vraie.

Pour nier cette proposition, il suffit de trouver un élément a de E tel que pour tout élément b de F, la proposition $a\mathcal{R}b$ n'est pas vraie. Cela signifie qu'il existe un élément a tel que pour tout b on a $a\urcorner\mathcal{R}b$ c'est-à-dire $(\exists\, a\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, b \in F)$ a$\urcorner\mathcal{R}b$.

(2) La négation de $(\exists\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, y \in F)$ $(x\mathcal{R}y)$ est $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\exists\, y \in F)$ $(x\urcorner\mathcal{R}y)$.

$(\exists\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, y \in F)$ $(x\mathcal{R}y)$ Signifie qu'il existe au moins un a de E tel que pour tout b de F $a\mathcal{R}b$ est vraie.

Pour nier cette proposition, il faut que pour tout élément a de E, il existe un élément b de F tel que la proposition $a\mathcal{R}b$ n'est pas vraie c'est –à-dire $a\urcorner\mathcal{R}b$ est vraie. Ceci se traduit alors par :

$(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\exists\, y \in F)$ $(x\urcorner\mathcal{R}y)$.

Exemple :

Une application $f\colon E \longrightarrow F$ est injective si $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, x'\ \in \mathrm{E})$ $(x \neq\ x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$ c'est-à-dire que : $(\forall\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\forall\, x'\ \in \mathrm{E})$ $(x =\ x' ou\, f(x) \neq f(x'))$.

Elle donc non injective si : $(\exists\, x\ \in \mathrm{E})$ $(\exists\ x'\ \in \mathrm{E})$ $(x\ \neq x' et\, f(x) = f(x'))$.

Dans les deux derniers sous-titres suivants, p(x), q(x) et $x\mathcal{R}y$ sont des formes propositionnelles.

b) <u>Quelques équivalences</u>

(1) $(\forall x)[p(x) \wedge q(x)]$ *équivaut à* $[(\forall x)\ (p(x)) \wedge (\forall x)(q(x))]$
(2) $(\exists\, x)[p(x)\ \vee q(x)]$*équivaut à* $[\ (\exists\, x)\ \big(p(x)\big) \vee (\exists\, x)\ \big(q(x)\big)]$
(3) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x\mathcal{R}y)$ équivaut à $[(\forall y)\ (\forall x)\ (x\mathcal{R}y)]$
(4) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x\mathcal{R}y)$ équivaut à $[\ (\exists y)\ (\exists x)\ (x\mathcal{R}y)]$

Les deux dernières équivalences montrent que deux quantificateurs de même nature peuvent intervertir.

c) <u>Quelques implications</u>

i) $[(\forall x)\ (p(x)) \vee (\forall x)(q(x))] \Longrightarrow (\forall x)[p(x) \vee q(x)]$
ii) $(\exists\, x)[p(x) \wedge q(x)] \Longrightarrow (\exists\, x)\ \big(p(x)\big) \wedge (\exists\, x)\ \big(q(x)\big)$
iii) $(\exists x)\ (\forall y)\ (x\mathcal{R}y) \Longrightarrow\ (\forall y)\ (\exists x)\ (x\mathcal{R}y)$

Les réciproques de ces implications sont fausses en général

Exemples :

- Soit les formes promotionnelles définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

r(x) : « x est rationnel »

i(x) : « x est irrationnel »

Or un nombre réel est soit rationnel, soit irrationnel. Donc $(\forall\, x\ \in\ \mathbb{R})\ [\mathrm{r(x)} \vee i(x)]$ est une proposition vraie que nous notons A.

D'autre part la proposition $(\forall\, x\ \in\ \mathbb{R})\big(\mathrm{r(x)}\big) \vee (\forall\, x\ \in\ \mathbb{R})(i(x))$ que nous notons B est fausse car c'est une disjonction de deux propositions fausses. En effet le premier membre de cette disjonction indique que tout nombre réel est rationnel. Ceci est fausse car $\sqrt{2}$ est réel non rationnel. Le second membre indique que tout nombre réel est irrationnel. Ceci est fausse car 2 est un nombre réel non irrationnel.

Par suite l'implication $A \Longrightarrow B$est fausse car A vraie et B fausse. On a montré ainsi que la réciproque de (i) est fausse.

- Soit p(x) et q(x) les formes propositionnelles définies sur $\mathbb{N}$* par :

  p(x) : « x est premier »

  q(x) : « x est un multiple de 4»

$(\exists\, x)\ \big(p(x)\big)$*est une proposition vraie* (2 *est un nombre premier par exemple*)

$(\exists\, x)\ \big(q(x)\big)$ *est une proposition vraie* (8 *est un multiple de* 4 *par exemple*)

D'où la proposition $(\exists\, x)\ \big(p(x)\big) \wedge (\exists\, x)\ \big(q(x)\big)$ est vraie comme conjonction de 2 propositions vraies. Notons X cette conjonction.

Maintenant, notons-Y la proposition$(\exists\, x)[p(x) \wedge q(x)]$. Y indique qu'il existe un nombre entier naturel qui est à la fois premier et multiple de 4. Or un nombre multiple de 4 est de la forme 4k (k $\in$ $\mathbb{N}$*). En outre 2 est un diviseur de 4k (car 4k= 2.2k). Par suite 4k admettent au moins 3 diviseurs à savoir 1, 2 et 4. Donc un multiple de 4 ne peut pas être un nombre premier. Nous avons montré donc que Y est fausse.

Par conséquent, X $\Longrightarrow$ Y est fausse car X vraie et Y fausse. Nous avons prouvé ainsi que la réciproque de (ii) est fausse.

- Nous allons prouver maintenant que la réciproque de (iii) est fausse.

$\mathbb{N}$ est cofinale à $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) ($\exists\, n \in \mathbb{N}$) (x < n) (1). Cette proposition est vraie, prendre par exemple n= $[|x|] + 1$ où [x] la partie entière de x.

En outre ($\exists\, n \in \mathbb{N}$) ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) (x < n) (2) est fausse car il n'existe pas d'entier naturel qui est plus grand que tous les nombres réels.

Par suite « ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) ($\exists\, n \in \mathbb{N}$) (x < n) $\Longrightarrow$ ($\exists\, n \in \mathbb{N}$) ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) (x < n) » est fausse. Car (1) est vraie et (2) fausse.

Remarque :

$(\exists x)$ $(\forall y)$ $(x\mathcal{R}y)$ signifie qu'il existe au moins un x tel que pour tout y, x est en relation avec y. C'est-à-dire que x est unique pour toute valeur de y.

Par contre $(\forall y)$ $(\exists x)$ $(x\mathcal{R}y)$ signifie que : pour chaque valeur de y on peut trouver un x tel que x est en relation avec y. x dépend donc de y. C'est-à-dire : x varie en fonction de y. On peut avoir plusieurs valeurs de x.

2.4 Autres quantificateurs

Certains auteurs utilisent les quantificateurs suivants :

1° ($\exists$! x) qui se lit : « il existe un et un seul x ».

2° (!x) qui se lit « pour au plus un x ».

Exemples :

Soit E et F deux ensembles non vides.

- Une fonction f de E à valeur dans F est définie comme toute correspondance qui à tout élément x de E associe au plus un élément f(x) de F. C'est-à-dire que f est une fonction de E dans F si et seulement si ($\forall$ x $\in$ E) (!y $\in$ F) (y=f(x)).
- Une application g de E dans F est dite bijective si pour tout y élément de F, il existe un unique x élément de E tel que y=f(x). C'est-à-dire que ($\forall\, y \in$ F) ($\exists$! x $\in$ E) (y=f(x)).

Remarque :

- Certaines expressions dans le langage courant manifestent certain rapport avec les quantificateurs.
  Exemple pour le quantificateur existentiel :
  Certains élèves ont obtenu la moyenne (certains)
  Quelques malgaches habitent en France (quelques)…

  Exemple pour le quantificateur universel :
  Chaque élèves du lycée portent une blouse beige (chaque)
  Tous les malgaches mangent du riz (tous).
  N'importe quelle personne peut assister à la propagande (n'importe quelle)….
- Au lieu d'écrire :
  -($\forall$ x $\in$ E) ($\forall$ y $\in$ E) on écrit souvent ($\forall$ x, y $\in$ E).
  -($\exists\ x \in$ E) ($\exists\ y \in$ E) on écrit souvent ($\exists\ x$, y $\in$ E).

Chapitre IV : METHODES DE RAISONNEMENT

I. LE RAISONNEMENT DIRECT

1.1 Introduction

1.1.1 Bref historique

Le mot raisonnement est un nom dérivé du mot raison. La raison vient du latin ratio, qui désigne en premier lieu « mesure », « calcul », « faculté de compter ou de raisonner », « Explication », puis « catégorie, espère d'animaux ». Dans certain dictionnaire il désigne les relations commerciales.

En mathématiques, on utilise le terme « ratio» pour signifier le « rapport entre deux nombres » (nombre rationnel). Il s'agit donc d'un sens primordial de « mesure », de « comparaison ».

L'homme doté de la raison, de rationalité de l'époque classique est donc celui qui possède l'art de comparaison mesurée avec précision. Au moyen de l'intellect, mais davantage encore au moyen d'instruments de mesure. Le système métrique (du grec mesurer) est la production la plus significative de la rationalité.

Le « logos » signifie « parole », « discussion », « raison », et se rapporte plutôt à la partie effective de l'intellect, celle qui précède la volonté pour y aboutir (la raison du cœur qui produit l'intention) ; le mot latin ratio a plutôt à la partie stratégique de l'intellect, celle qui part d'une volonté pour tenter de l'accomplir.

En français, le mot raison finit pour regrouper plus ou moins les deux nuances logos/ ratio.

1.1.2 Principe du raisonnement

Il existe essentiellement quatre principes de raisonnement : le principe d'identité ; le principe de non-contradiction ; le principe de tiers-exclu et le principe de causalité.

- Le principe d'identité énonce que : ce qui est, est soi-même. Et selon Aristote, c'est l'exigence fondamentale du discours rationnel. Si on ne l'admet pas, le sens des concepts peut changer à tout instant, ce qui revient à dire qu'on ne peut rien qui ne soit pas contradictoire. Une chose ce qu'elle est (A=A).
- Le principe de non-contradiction dit que : on ne peut pas, attribuer à deux états à une affirmation, un état et son contraire (ou l'absence d'état). Il n'existe pas de troisième état intermédiaire. Exemple : soit il pleut, soit il ne pleut pas. Et s'il pleut un peu, alors il pleut.
- Le principe de causalité énonce que : tout effet a une cause et dans les même conditions la même cause produit les mêmes effets.

1.2. Quelques définitions préliminaires

On appelle inférence, une opération mentale ou jugement qui consiste à tirer une conclusion à partir de propositions reconnues pour vraies (les prémisses). Ces conclusions sont tirées à partir de règles de base. Il existe essentiellement deux types d'inférence: la déduction et l'induction.

La déduction est un raisonnement qui consiste à conclure d'une ou de plusieurs prémisses (ou propositions données) à une proposition spécifique qui est la conséquence nécessaire. La déduction logique se fonde donc sur des axiomes et des définitions, et ne produit que des résultats tautologique .C'est-à-dire déjà inscrit dans la prémisse, des conséquences de la loi. La valeur de ces résultats est bien entendu fonction de la rigueur avec laquelle ils ont été obtenus.

L'induction est un processus de pensée qui consiste à aller du particulier au général, à l'inverse de la déduction. L'induction présuppose que, si une affirmation est vraie dans certains nombre de cas observés, elle sera aussi vraie dans des cas similaires mais non observés. Elle génère donc du sens en passant des faits à la loi, du particulier au général.

En ce sens, la déduction logique ne produit aucune nouvelle connaissance, au sens où les propositions déduites sont virtuellement contenus dans leurs axiomes, elle est par conséquent analytique, au contraire, l'induction enrichit la conscience de nouveaux faits : elle est alors synthétique.

Une démonstration est en mathématiques, une argumentation prouvant qu'une assertion est vraie. Situé au cœur des travaux des scientifiques et objet de réflexion de l'épistémologique. Une démonstration est universelle. En ce sens elle doit être reproductible par quiconque maîtrise la langue scientifique appropriée. Les méthodes permettent de conduire correctement une démonstration est très variées, elles ont été parfois discutées et peuvent même évoluer.

Par exemple si on suppose que tout être humain a une tête et deux bras et que Tojo est un être humain. On peut déduire que Tojo a une tête et deux bras.

1.3. Quelques règles en logique classique

Les règles suivantes sont des tautologies utiles dans certaines démonstrations mathématiques.

1.3.1 La règle de « modus ponens » ou règle du détachement.

Dans une théorie τ si une proposition P est vraie en même temps que la proposition $P \Rightarrow Q$ alors la proposition Q est vraie dans τ. En effet l'implication $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$ est une tautologie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	**1**

Tableau n°27 : Modus ponens

Ce raisonnement peut s'expliquer aussi de la façon suivante :

$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\urcorner P \vee Q)$ (car $P \Rightarrow Q \equiv \urcorner P \vee Q$)

$\equiv (P \wedge \urcorner P) \vee (P \wedge Q)$ (Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$)

$\equiv F \vee (P \wedge Q)$ (Puisque $P \wedge \urcorner P$ est une contradiction donc elle est équivalente à une proposition fausse)

$\equiv P \wedge Q$ (Neutralité de F pour $\vee$)

Ainsi, $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ est supposée vraie et d'après ce que nous venons de démontrer, elle est logiquement équivalente à $P \wedge Q$. Par suite la conjonction $P \wedge Q$ est vraie. Or $P \wedge Q$ ne peut pas être vraie que P et Q le sont (Cf. Chap. I. §.2.2.3). D'ou Q est vrai.

Exemple d'application :

Soit P et Q les propositions définies par :

P : « il pleut », peut être vraie ou fausse.

Q : « le sol est mouillé »

$P \Rightarrow Q$: « s'il pleut alors le sol est mouillé », toujours vraie.

Dans ce cas « s'il pleut vraiment et puisque s'il pleut alors le sol est mouillé », nous pouvons déduire que : « le sol est mouillé » vraiment c'est-à-dire Q est vraie. Et nous disons en fait : « il pleut donc le sol est mouillé ».

<u>Remarque :</u>

Dans l'implication $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$, P s'appelle « la prémisse mineure » et $(P \Rightarrow Q)$ « la prémisse majeure ».

1.3.2. La règle du « modus tollens »

Dans une théorie τ si les deux propositions $\urcorner Q$ et $\urcorner P \Rightarrow Q$ sont vraies alors P est vraie dans cette théorie. En effet l'implication $[\urcorner Q \wedge (\urcorner P \Rightarrow Q)] \Rightarrow P$ est une tautologie.

P	Q	$\urcorner P$	$\urcorner Q$	$\urcorner P \Rightarrow Q$	$\urcorner Q \wedge (\urcorner P \Rightarrow Q)$	$[\urcorner Q \wedge (\urcorner P \Rightarrow Q)] \Rightarrow P$
0	0	1	1	0	0	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**
1	0	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	0	**1**

Tableau n°28 : Modus tollens

En fait si $\urcorner Q$ et $\urcorner P \Rightarrow Q$ sont vrais alors $\urcorner P$ ne peut pas être vrai car si $\urcorner P$ est vraie, pour que l'implication $\urcorner P \Rightarrow Q$ soit vraie, il faut que Q soit vrai. Dans ce cas Q et $\urcorner Q$ sont vraies. Or ceci est contradictoire. Par suite, $\urcorner P$ est fausse d'où P est vraie.

Exemple d'application :

Lors d'une interrogation écrite, le professeur de Mathématiques a promis de donner une somme de 5000 ariary, à l'élève qui obtiendrait la note maximale.

Rado et Hasina ont eu la même note maximale. Mais la promesse du professeur s'adresse à un seul élève. Pour cela, le professeur propose de faire le test suivant : il prend deux billes rouges et une bille blanche, en plaçant une bille sur chaque tête de ces deux élèves. Chaque élève ne sait pas la couleur de la bille posée sur sa tête mais il voit la bille placé sur la tête de son adversaire. Les élèves connaissent que les billes placées sur leurs têtes sont parmi les trois billes proposées au départ. Celui qui a trouvé, en premier lieu la couleur de la bille sur sa tête gagne la somme promise. Hasina qui voit une bille rouge sur la tête de Rado dit qu'il a une bille rouge. Hasina a gagné la somme.

On peut expliquer le raisonnement de Hasina par la règle du « modus tollens ».

Soient P et Q les propositions suivantes.

P : « Hasina a une bille rouge »

Q : «Rado affirme qu'il a une bille rouge »

On voit que : « si Hasina n'a pas de bille rouge, Rado peut affirmer qu'il a une bille rouge ». C'est à dire que « $\urcorner P \Rightarrow Q$ ». Or Rado ne dit rien c'est-à-dire $\urcorner Q$ .On a alors « $\urcorner Q$ et $\urcorner P \Rightarrow Q$ » d'où P est vraie c'est à dire que Hasina a une bille rouge.

1.3.3 La règle de la contraposition.

Dans une théorie τ les deux implications « $P \Rightarrow Q$ » et « $\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P$ » sont logiquement équivalentes. Ce résultat est une conséquence de la loi de tautologie de contraposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P)$. Dans la pratique, il y a des démonstrations difficiles si on les fait directement mais qui sont faciles si on passe à la contraposée.

Exemple d'application :

Dans $\mathbb{R}$, pour montrer que : « si $x \neq 1$ et $y \neq 1$ alors $x+y-xy \neq 1$ », il est plus facile de passer à la contraposée. En effet nous n'avons pas de règle concernant le signe « $\neq$ ». Dans ce cas la démonstration directe est difficile.

Nous avons ainsi : $x+y-xy=1 \Rightarrow x+y-xy-1=0$

$$\Rightarrow x-1+y\,(1-x)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(1-y)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ ou } y-1=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ ou } y=1$$

Nous pouvons affirmer maintenant que : « si $x \neq 1$ et $y \neq 1$ alors $x+y-x\,y \neq 1$ »

1.3.4 La règle de disjonction des cas

Dans une théorie τ si les propositions (P ⇒Q) et (˥P ⇒Q) sont vraies alors Q est vraie dans τ. En effet l'implication [(P ⇒Q)∧(˥P ⇒Q)] ⇒Q est une tautologie.

P	Q	˥P	P ⇒Q	˥P ⇒Q	(P ⇒Q)∧(˥P ⇒Q)	[(P ⇒Q)∧(˥P ⇒Q)] ⇒Q
0	0	1	1	0	0	**1**
0	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**

Tableau n°29 : Disjonction des cas

Cette règle peut être utile dans certaines démonstrations mathématiques qui ont des cas possibles finis. Elle peut s'expliquer aussi de la façon suivante :

[(P ⇒Q) ∧(˥P ⇒Q)] ≡(˥P∨ Q) ∧ [˥(˥P) ∨Q] car P ⇒Q≡ ˥P ∨Q

≡(˥P∨ Q) ∧ (P ∨Q) car˥(˥P) ≡P

≡(Q ∨ ˥P) ∧ (Q ∨P) car ∨ est commutative

≡ Q ∨ (˥P ∧P) car ∨ est distributive par rapport à ∧

≡ $Q \vee F$ car ˥P ∧P est une contradiction.

≡ Q car F est neutre pour ∨

Par suite, [(P ⇒Q)∧(˥P ⇒Q)] est supposée vraie et logiquement équivalente à Q. Donc Q est vrai.

Exemple d'application:

Montrons que pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier naturel

Un entier naturel est soit pair, soit impair.

Désignons alors par P et Q les propositions suivantes :

P : « n est pair »

Q : « $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel »

Nous allons montrer que : « P⟹ Q et ˥P ⟹ Q"

- Si n est pair alors il existe k entier naturel tel que $n = 2k$.

Dans ce cas $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2}$

$$= k(2k+1)$$

Or k est un entier naturel donc il en est de même pour $k\ (2k+1)$ (somme et produit des deux entiers naturels). On a ainsi Q.

- Si n est impair alors il existe k entier naturel tel que $n = 2k+1$

Dans $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)[(2k+1)+1]}{2}$

$= \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$

$= \frac{2(k+1)\ (2k+1)}{2}$

$= (k+1)(2k+1)$

Or $k\ est$ un entier naturel donc il en est de même pour $(k+1)(2k+1)$

D'où Q.□

Remarque : on peut généraliser le raisonnement par disjonction des cas de la façon suivante :

Soient P,$P_{1,}P_{2,}\ldots,P_n$ des propositions.

Si $\forall\ i \in \{1; 2; \ldots; n\}, P_i \Longrightarrow P$ et $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$ sont vrais alors P est vrai.

Exemple : Pour montrer que la proposition P : « $(n^3 - n)$ est divisible par 3, pour tout entier n », on peut considérer les propositions suivantes :

Q: « Un entier est de la forme $3n$ »

R : « Un entier est de la forme $3n+1$ »

S : « Un entier est de la forme $3n+2$ »

Or Q ∨ R ∨ S, $Q \Longrightarrow P$, $R \Longrightarrow P$ et $S \Longrightarrow P$ sont vraies donc P est vraie.

En effet, le premier point Q ∨ R ∨ S est clair.

Si un entier n est de la forme $3k$, alors $n^3 - n = 3(9k^3 - k)$ divisible par 3 d'où $Q \Longrightarrow P$.

Si un entier n est de la forme $3k+1$, alors $n^3 - n = 3[k(3k+1)(3k+2)]$ divisible par 3 d'où $R \Longrightarrow P$.

Si un entier n est de la forme $3k$, alors $n^3 - n = 3[(k+1)(3k+1)(3k+2)]$ divisible par 3 d'où $S \Longrightarrow P$.□

1.4. Raisonnement naturel.

Le but du calcul booléen ou logique booléenne ou encore logique classique est de modéliser le raisonnement naturel ou tout au moins l'un des aspects de celui-ci.

1.4.1. Condition nécessaire – condition suffisante

Considérons les deux propositions suivantes

(p) : ABC est un triangle.

(q) : les points A, B et C ne sont pas alignés.

Si (p) est vérifiée alors (q) est vérifié c'est-à-dire $(p) \Longrightarrow (q)$. Pour que (q) soit vérifié, il suffit que (p) soit vérifié. On dit que (p) est une condition suffisante pour que (q) soit vérifiée.

Si (q) n'est pas vérifié, alors (p) ne peut pas être vérifiée $[puisque\ (p) \Longrightarrow (q)]$, il faut donc que (q) le soit ; on dit que (q) est une condition nécessaire pour que (p) soit vérifié.

<u>Remarque :</u>

(1) si $(p) \Longrightarrow (q)$ et $(q) \Longrightarrow (p)$. on dit que (p) et (q) sont équivalentes ou que (p) est vérifié si et seulement si (q) est vérifié. On note alors $(p) \Longleftrightarrow (q)$.

Lorsque deux conditions sont équivalentes, chacune d'elle est une condition nécessaire et suffisante pour que l'autre soit vérifié.

(2) Pour montrer une équivalence $(p) \Longleftrightarrow (q)$, on peut montrer les deux implications (Cf. Chap. II. §.2.2.2c) : $(p) \Longrightarrow (q)$ et $(q) \Longrightarrow (p)$.

1.4.2 Inférence, coupure et déduction.

Dans une théorie τ si l'énoncé C (conclusion) se déduit à partir de l'énoncé H (l'hypothèse), on écrit $\mathrm{H} \vdash \mathrm{C}$ qui se lit : H infère à C (sous-entendu dans τ).

Le fait que H est vraie dans τ s'écrit $\tau \vdash \mathrm{H}$ ou $\vdash \mathrm{H}$ si aucune confusion n'est à craindre. On dit aussi que H est valide. Le fait que l'implication $H \Longrightarrow C$ est vraie se note $\tau \vdash \mathrm{H} \Longrightarrow \mathrm{C}$.

Définition *: Soient F, G et H des propositions*

On dit que la proposition H est déduite par coupure à partir de F et G si G est la formule $F \Longrightarrow H$

Par exemple, $F = A \vee B$ et $G = (A \vee B) \Longrightarrow \mathrm{A}$. Alors A se déduit par coupure à partir de F et G. cette définition coïncide alors à la règle de modus ponens (ou déduction) que nous avons vu au § 1.3.1. Dans une théorie τ si les deux propositions F et $\mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{H}$ sont vraies alors H est vraie dans τ. On dit aussi que H est déduite à partir de F et $\mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{H}$.

Remarque

Démontrer l'implication F $\Longrightarrow$ H est parfois difficile. Pour enlever cette difficulté, on peut utiliser la transitivité de l'implication et le lemme d'interpolation suivant que nous admettons :

F $\Longrightarrow$ H est équivaut à il existe K tel que : F $\Longrightarrow$ K et K$\Longrightarrow$ H.

En fait, dans le raisonnement direct, on utilise plusieurs interpolations.

Pour démontrer par exemple que : $\forall\, x, y \in\,]-1;1[$ alors $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$, on peut montrer d'abords que $|xy| < 1$ $et\ que$ $1 + xy > 0$.

Développer ensuite $(1-x)(1-y)$ et $(1+x)(1+y)$.

Démontrer finalement que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

1.4.3 .Le raisonnement formel

a) Définitions

Soient F et G deux formules propositionnelles.

On dit que G est une instance ou substitution de F s'il existe une formule G_i telle que G est obtenue en remplaçant X_i par G_i pour chaque i (F est une fonction de X_i)

Exemple :

F est la formule $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow A$ $(X_1 = A;\ X_2 = B)$

G est la formule $[(C \Longrightarrow D) \Longrightarrow E] \Longrightarrow (C \Longrightarrow D)$.

Alors G est une instance de F car X_1 est remplacé par $G_1 = C \Longrightarrow D$ et X_2 est remplacé par $G_2 = E$.

Nous admettons les règles suivantes qui sont des tautologies.

<u>Règle pour l'implication</u>

R_1: $X_1 \Longrightarrow (X_2 \Longrightarrow X_1)$; R_2: $[X_1 \Longrightarrow (X_2 \Longrightarrow X_3)] \Longrightarrow [\,(X_1 \Longrightarrow X_2) \Longrightarrow (X_1 \Longrightarrow X_3)]$

<u>Règle pour la négation</u>

R_3: $X_1 \Longrightarrow \neg\neg X_1$ R_4: $\neg\neg X_1 \Longrightarrow X_1$ R_5: $(X_1 \Longrightarrow X_2) \Longrightarrow (\neg X_2 \Longrightarrow \neg X_1)$

<u>Règle pour la conjonction</u>

R_6: $X_1 \Longrightarrow [X_2 \Longrightarrow (X_1 \wedge X_2)]$; R_7: $(X_1 \wedge X_2) \Longrightarrow X_1$, R_8: $(X_1 \wedge X_2) \Longrightarrow X_2$.

<u>Règle pour la disjonction</u>

$R_9 : X_1 \Longrightarrow (X_1 \vee X_2)$; $R_{10} : X_2 \Longrightarrow (X_1 \vee X_2)$ $R_{11} : \urcorner X_1 \Longrightarrow [(X_1 \vee X_2) \Longrightarrow X_2]$

b) Démonstration formelle

Soit τ un ensemble de formules propositionnelles et F une formule propositionnelle. On dit que F est une conséquence, syntaxique, ou conséquence formelle de τ, noté $\tau \vdash F$ s'il existe une démonstration formelle (ou preuve formelle) de F à partir de τ, c'est-à-dire s'il existe une suite finie$\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ de formules propositionnelles, telles que :

- $F_k = F$
- *Pour chaque $i \leq k$, l'une des trois conditions suivantes est remplie :*
    - *Soit F_i est une formule de τ*
    - *Soit F_i est un axiome.*
    - *Soit F_i a été déduit par coupure de deux formules F_l et $F_m = (F_l \Longrightarrow F_i)$ avec $m, l < i$.*

En fait F est vraie dans τ s'il existe une démonstration formelle de F à partir de τ .

Remarque :

- $\{F\} \vdash$ F
- $Si\ \tau_1 \subset \tau_2$ et $\tau_1 \vdash$ A alors $\tau_2 \vdash$ A

c) Exemples de démonstration formelle

Exemple 1 :

Pour toute formule F, on a : $\tau \vdash$ (F $\Longrightarrow F$)

En effet :

$F_1 : \left[F \Longrightarrow \left((F \Longrightarrow F) \Longrightarrow F\right)\right] \Longrightarrow \left[\left(F \Longrightarrow (F \Longrightarrow F)\right) \Longrightarrow (F \Longrightarrow F)\right]$

(instance de $R_2 : X_2 = F \Longrightarrow F\ \ X_1 = X_3 = F$)

$F_2 : [\left(F \Longrightarrow \left((F \Longrightarrow F) \Longrightarrow F\right)\right]\left[instance\ de\ R_1\ \left(X_1 = F;\ X_2 = (F \Longrightarrow F)\right)\right]$

$F_3 : [F \Longrightarrow (F \Longrightarrow F)] \Longrightarrow (F \Longrightarrow F)$ ($coupure$ à $partir\ de\ F_1\ etF_2$)

$F_4 : F \Longrightarrow (F \Longrightarrow F)(instance\ de\ R_1 :\ X_1 = X_2 = F)$

$F_5 : F \Longrightarrow F$ ($coupure$ à $partirde\ F_3\ et\ F_4$) .□

Exemple 2 :

Démontrons que l'implication est transitive. C'est-à-dire que si F ; G et H sont trois propositions tels que $F \Longrightarrow G\ et\ G \Longrightarrow H\ alors\ F \Longrightarrow H$.

On a:

$F_1 : G \Longrightarrow H (par\ hypothèse)$

$F_2 : (G \Longrightarrow H) \Longrightarrow [F \Longrightarrow (G \Longrightarrow H)] (instance\ de\ R_1 : X_1 = G \Longrightarrow H\ , X_2 = F)$

$F_3 : F \Longrightarrow (G \Longrightarrow H) (\ coupure$ à $partir\ de\ F_1\ et F_2)$

$F_4 : [F \Longrightarrow (G \Longrightarrow H)] \Longrightarrow [(F \Longrightarrow G) \Longrightarrow (F \Longrightarrow H)] (intance\ de\ R_2)$

$F_5 : (F \Longrightarrow G) \Longrightarrow (F \Longrightarrow H) (coupure$ à $partir\ de\ F_3\ et\ F_4)$

$F_6 : F \Longrightarrow G\ (par\ hypothèse)$

$F_7 : F \Longrightarrow H\ (coupure$ à $partir\ de\ F_5\ et\ F_6)$

1.4.4 Quelques théorèmes et lemmes importants

Nous admettons le théorème suivant :

a) Théorème de la déduction

Soit τ une théorie, F et G deux formules propositionnelles.

Alors : $\tau \vdash$ F $\Longrightarrow G$ équivaut à $\tau \cup \{F\} \vdash$ G. C'es-à-dire que F $\Longrightarrow G$ est vraie dans τ si est seulement si G est vraie dans $\tau \cup \{F\}$.

b) Lemmes

Soit τ une théorie, F et G deux propositions. Alors :

(i) Les relations $\tau \cup \{F\} \vdash$ G et $\tau \cup \{\neg G\} \vdash \neg$F sont équivalentes
(ii) Si on a à la fois $\tau \vdash$ F �t $\tau \vdash \neg$F alors $\tau \vdash$ G , pour toute formule G
(iii) Si on a à la fois $\tau \cup \{F\} \vdash$ G �t $\tau \cup \{\neg F\} \vdash$ G alors $\tau \vdash$ G.

Démonstrations

(i) Supposons $\tau \cup \{F\} \vdash$ G

Montrons $\tau \cup \{\neg$G$\} \vdash \neg$F

$\tau \cup \{F\} \vdash$ G donc $\tau \vdash$ F $\Longrightarrow G\ \ d'après le\ théorème\ de\ la\ déduction\ or$

(F $\Longrightarrow G) \Longrightarrow (\neg G \Longrightarrow \neg F)$ est une instance de la règle R_5

F $\Longrightarrow G$ étant vraie dans τ donc on a : $\neg G \Longrightarrow \neg F$ par coupure.

Par suite, $\tau \vdash \neg G \Longrightarrow \neg F$ et donc $\tau \cup \{\neg$G$\} \vdash \neg$F d'après le théorème de la déduction.

Réciproquement, supposons que $\tau \cup \{\neg$G$\} \vdash \neg$F et montrons que $\tau \cup \{F\} \vdash G$.

$\tau \cup \{\neg G\} \vdash \neg$F donc $\tau \cup \{\neg\neg F\} \vdash \neg\neg G$ d'après la démonstration précédente c'est-à-dire que $\neg\neg G$ est vraie dans $\tau \cup \{\neg\neg F\}$ or $\neg\neg G \Longrightarrow G$ est une instance de la règle R_4 . Ainsi, G est vrai par coupure dans $\tau \cup \{\neg\neg F\}$ i.e. $\tau \cup \{\neg\neg F\} \vdash G$.

En outre $F \Longrightarrow \urcorner\urcorner F$ est une instance de la règle R_3 et puisque $\tau \cup \{\urcorner\urcorner F\} \vdash G$, $\tau \vdash \urcorner\urcorner F \Longrightarrow G$. Par suite $F \Longrightarrow \urcorner\urcorner F\ et\ \urcorner\urcorner F \Longrightarrow G$ d'où F $\Longrightarrow G$ par transitivité. Ainsi $\tau \vdash F \Longrightarrow G$ d'où $\tau \cup \{F\} \vdash$ G.□

(ii) Supposons maintenant que : $\tau \vdash$ F et $\tau \vdash \urcorner$F

Montrons que $\tau \vdash$ G pour toute formule de G

$\urcorner$F et F sont tous vraies dans τ

Or $\urcorner$F $\Longrightarrow$ ($\urcorner$F $\vee$ G) est une substitution de la règle R_{10}

De $\urcorner$F et $\urcorner$F $\Longrightarrow$ ($\urcorner$F $\vee$ G) on obtient $\urcorner$F . Or $\urcorner$F $\vee$ G n'est autre que F $\Longrightarrow G$

De F et F $\Longrightarrow G$ on obtient G donc $\tau \vdash$ G.□

L'essentiel dans cette démonstration est de comprendre que : Dans une théorie τ s'il existe une proposition qui est à la fois vraie et fausse alors on peut montrer que toutes les formules de τ sont à la fois vraies et fausses.

(iii) Supposons que $\tau \cup \{F\} \vdash$ G et $\tau \cup \{\urcorner F\} \vdash$ G

Montrons que $\tau \vdash$ G

En appliquant (i) on a : $\tau \cup \{\urcorner G\} \vdash \urcorner$F et $\tau \cup \{\urcorner G\} \vdash \urcorner\urcorner$F.

Par suite $\urcorner$F et $\urcorner\urcorner$F sont vraies dans $\tau \cup \{\urcorner G\}$. $\tau \cup \{\urcorner G\}$ prouve alors toute formule d'après (ii). En particulier $\tau \cup \{\urcorner G\} \vdash \urcorner$G d'où par déduction $\tau \vdash \urcorner$G $\Longrightarrow$ G .D'autre part {$\urcorner$G; $\urcorner$G $\Longrightarrow$ G} $\vdash$ G (coupure). D'où en appliquant (i) {$\urcorner$G; $\urcorner$G} $\vdash \urcorner(\urcorner G \Longrightarrow G)$

i.e. {$\urcorner$G} $\vdash \urcorner(\urcorner G \Longrightarrow G)$.

En appliquant de nouveau (i), on a : $\{\urcorner G \Longrightarrow G\} \vdash \urcorner\urcorner$G .

On a alors $(\urcorner G \Longrightarrow G) \Longrightarrow \urcorner\urcorner$G et $\urcorner G \Longrightarrow G$ d'où $\tau \vdash \urcorner\urcorner$G. Or $\urcorner\urcorner$G $\Longrightarrow G$ est une substitution de la règleR_4.

Par suite, $\urcorner\urcorner$G $\Longrightarrow G$ et $\urcorner\urcorner$G donc G est vraie, $\tau \vdash$ G □

APPLICATIONS

Nous avons vu quelques règles de démonstration au § 1.3. Nous avons démontré formellement certain d'entre eux dans le paragraphe précédent. Nous allons utiliser ces règles pour faire des raisonnements

1ère application :

Le raisonnement par disjonction de cas est une application du lemme 1.4.4 b) iii). En effet s'il existe une proposition F tel que: F $\Longrightarrow$ G et $\urcorner$F $\Longrightarrow$ G sont vraies dans τ, alors G est vrai dans τ.Il correspond aussi à la règle de la disjonction des cas, vue au paragraphe 1.3.4.

Exemple :

Soit A, B, C des ensembles.

Montrer que : $\begin{cases} (A \cup B) \subset (A \cup C) \\ (A \cap B) \subset (A \cap B) \end{cases} \Rightarrow (B \subset C)$

Solution : $B \subset C \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in B \Rightarrow x \in C)$

Soit $x \in B$

- Si $x \notin A$, puisque $x \in B\ alors\ x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$ (car $A \cup B \subset A \cup C$)

D'où $x \in A\ ou\ x \in C$ or $x \notin A$ donc $x \in C$. Ainsi :

$x \notin A \Rightarrow x \in C$ (1)

- Si $x \in A$, alors $x \in A\ et\ x \in B$ donc $x \in A \cap B$ d'où $x \in A \cap C$ (car $A \cap B \subset A \cap C$)

D'où $x \in A\ et\ x \in C$. Par suite $x \in C$ c'est-à-dire :

$x \in A \Rightarrow x \in C$ (2)

(1) et (2) nous donne : $\begin{cases} x \notin A \Rightarrow x \in C \\ x \in A \Rightarrow x \in C \end{cases}$

Par conséquent "$x \in C$ " est vraie. Nous avons ainsi montré que $B \subset C$.□

Deuxième application :

Le raisonnement par contraposée est une application du lemme 1.4.4 b) i) précédent. En effet, $F \Rightarrow G$ et $\urcorner G \Rightarrow \urcorner F$ sont équivalente dans une théorie τ. C'est-à-dire montrer $F \Rightarrow G$revient à montrer $\urcorner G \Rightarrow \urcorner F$ .Il correspond à la règle de la contraposition cité au paragraphe 1.3.3.

Exemple :

Soient E, F, G trois ensembles non vides.

Soit $f: E \longrightarrow F\ et\ g: F \longrightarrow G$ des applications.

Montrons que : si gof est surjective alors g est surjective

Rappelons d'abord les définitions suivantes :

- f est surjective si pour tout $y \in F, il\ existe\ au\ moins\ un\ x \in E\ telle\ y = f(x)$
- L'image directe d'une partie A de E par f est définie par $f(A) = \{f(x), x \in A\}$
- La composée $gof\ est$ définie par $gof(x) = g[f(x)]$, pour tout $x \in E$.

Montrons ensuite que : $gof(E) = g[f(E)]$

Soit $z \in gof(E)$, il existe $x \in E /\ z = gof(x) = g[f(x)]$ par définition. Or $x \in E$ donc f$(x) \in f(E)$, il existe alors un $y = f(x) \in f(E)$ tel que $g(y) = z$ .z est donc l'image d'un certain élément de $f(E)$ par g d'où $z \in g[f(E)]$. Ainsi, $gof(E) \subset g[f(E)]$ (1)

Soit maintenant $z \in g(f(E))$.

Il existe alors $y \in f(E)$ tel $z = g(y)$. Or $y \in f(E)$ signifie qu'il existe $x \in E$ tel que

$y = f(x)$. Par suite, il existe $x \in E$ tel $z = g[f(x)] = gof(x)$ par définition.

D'où $z \in gof(E)$. Ainsi, $g[f(E)] \subset gof(E)$ (2)

Les inclusions (1) et (2) prouvent que $gof(E) = g[f(E)]$.□

Montrons finalement que : si $gof\ est$ surjective alors g est surjective.

Raisonnons par contraposé.

Supposons que $g\ est$ non surjective et montrons que gof non surjective.

g surjective si et seulement si $g(F) = G$ donc g est non surjective si est seulement si $g(F) \neq G$.

Il en est de même pour gof.

Nous allons montrer donc que si $g(F) \neq G$ alors $gof(E) \neq G$.

$g(F) \neq G$ signifie qu'il existe $z \in G$ tel que pour tout $y \in F$, $g(y) \neq z$.Or pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$ car f application de E dans F. C'est –à-dire $f(E) \subset F$.

D'où en particulier, il existe $z \in G$ tel que pour tout $x \in E$ $g(f(x)) \neq z$ c'est-à-dire $g(f(E)) \neq G$. Or $g[f(E)] = gof(E)$ d'où $gof(E)$≠G.□

II. LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Le raisonnement par l'absurde se fonde sur le fait qu'une proposition vraie ne peut pas entrainer une proposition fausse.

2.1 Théories du raisonnement par l'absurde

2.1.1 Introduction

Le mot « raisonnement par l'absurde » vient du mot latin « reductio ad absurbum ». Ce mot se traduit aussi par apagogie, qui vient du grec ancien apagogê. Ce dernier mot signifie, une forme de raisonnement scientifique qui consiste à démontrer soit la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire c'est-à-dire sa négation, soit fausseté d'une autre proposition en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

2.1.2 Quelques définitions

Soit τ une théorie et F une formule.

On dit que :

- *F est démontrable dans τ s'il existe une démonstration formelle de F à partir de τ.*
- *F est réfutable si $\neg F$ est démontrable.*
- *F est indécidable, si F se trouve au statut incertain c'est-à-dire ni démontrable ni réfutable.*

On dit que : τ est inconsistant ou contradictoire s'il existe une formule G de τ tel que nous avons à la fois $\tau \vdash G$ et $\tau \vdash \neg G$. Dans le cas contraire, on dit que τ consistant.

2.1.3 Lemme

(i) Si τ est un ensemble consistant des formules propositionnelles et si F est une formule alors l'un au moins des ensembles $\tau \cup \{F\}$ et $\tau \cup \{\neg F\}$ est consistant.

(ii) Un ensemble τ des formules propositionnelles est consistant si seulement si tous ses sous ensembles sont consistants.

Démonstrations

(i) Si τ est inconsistant alors τ prouve toute formule G.

Raisonnons par contraposée

Supposons que $\tau \cup \{F\}$ et $\tau \cup \{\neg F\}$ sont inconsistants

Montrons que : τ est contradictoire.

Soit H une formule.

Puisque $\tau \cup \{F\}$ et $\tau \cup \{\neg F\}$ sont inconsistants alors on a: $\tau \cup \{F\} \vdash$ H et $\tau \cup \{\neg F\} \vdash$ H. D'où $\tau \vdash$ H (d'après la règle de la disjonction des cas)

De même $\tau \cup \{F\} \vdash \neg$Het $\tau \cup \{\neg F\} \vdash \neg$H . On a alors $\tau \vdash$ H et $\tau \vdash \neg$H , donc τ est contradictoire □.

Ce lemme est une conséquence du lemme 1.4.4b (ii) .Le principe du raisonnement par l'absurde se fonde sur ce dernier.

(ii) Raisonnons par contraposée pour la condition suffisante

Supposons que : τ est inconsistant.

Il existe donc une formule H et une preuve F_1 , …, F_p de H à partir de τ et une preuve G_1,…, G_q de $\neg$H à partir de τ .

Soit τ_0 un sous-ensemble de τ constituant par les formules de τ apparaissant parmi F_1 , …, F_p , G_1,…, G_q. Alors τ_0 est fini et par construction les preuves F_1 , …, F_p et G_1,…, G_q sont des preuves respectifs de H et $\neg$H à partir de τ_0. Donc τ_0 $est\ inconsistant$.

Par suite, tout ensemble non consistant possède un sous-ensemble fini non consistant.

Réciproquement, il est clair que tout sous-ensemble (fini ou infini) d'un ensemble consistant est consistant.□

2.2 Applications

2.2.1 Principe de raisonnement par l'absurde

Soit τ *un théorie mathématique* et P une proposition.

Pour démontrer par l'absurde que $\urcorner P$ est vraie dans τ: On ajoute à τ la proposition P supposée vraie. On cherche alors une contradiction dans $\tau \cup \{P\}$. Arrivée à trouver une contradiction, on peut dire que la supposition est fausse. C'est-à-dire que P est faux d'où $\urcorner P$ est vraie.

En fait une théorie mathématique doit être consistante et d'après le lemme 2.1.3 (i), l'un au moins des ensembles $\tau \cup \{P\}$ et $\tau \cup \{\urcorner P\}$ est consistant. Donc si $\tau \cup \{P\}$ est contradictoire alors $\tau \cup \{\urcorner P\}$ est consistant. $\urcorner P$ est donc vraie dans τ d'après le théorème de la déduction.

Remarque :

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la règle du modus tollens (§.1.3.2). En effet $\{\urcorner Q, \urcorner P \Longrightarrow Q\} \vdash$ Q .Pour démontrer P on suppose par l'absurde que $\urcorner P$ est vraie. Or $\urcorner P \Longrightarrow Q$ donc Q est vraie (règle de modus ponens).

Par suite $\urcorner Q$ *et* Q sont vraies. Ceci est contradictoire d'où la supposition est fausse c'est-à-dire que P est vraie

2.2.2 Exemples des raisonnements par l'absurde

Exemple 1 : Un absurde simple

Montrons que : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que : $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il existe alors un couple (p, q) d'entiers naturels tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux c'est-à-dire la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Dans ce cas on a : $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$.

$p^2 = 2q^2$ signifie que, les chiffres des unités dans l'écriture de ces nombres sont égaux. Etudions alors les chiffres des unités de p^2 *et* $2q^2$.

	Chiffre des unités									
p	*0*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Tableau n°30 : Chiffres des unités de p *et* p^2

	Chiffre des unités									
q	*0*	1	2	3	4	*5*	6	7	8	9
q^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2$	**0**	2	8	8	2	**0**	2	8	8	2

Tableau n°31 : Chiffres des unités de q, q^2 et $2q^2$

Donc $p^2 = 2q^2 ne\ peut\ être\ vraie\ que\ dans\ les\ deux\ cas\ suivantes$:

- p se terminer par 0 et q se termine 0.
- p se termine par 0 et q se termine par 5.

Dans ces deux cas p et q sont divisibles par 5. Ceci contredit l'hypothèse car la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Par suite la supposition est fausse donc $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

Exemple 2 : Généralisation de l'exemple 1

Montrons que : si α est premier alors $\sqrt{\alpha}$ est irrationnel.

Supposons que : $\sqrt{\alpha}$ est rationnel.

Il existe alors deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{\alpha} = \frac{p}{q}$ c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ irréductible.

On a alors $p^2 = \alpha q^2$.

Il est clair que $q \neq 0$ et $p > 1$

Montrons d'abords que si a et c sont premiers entre eux alors :

$\forall\ b\ \in\ \mathbb{Z}, pgcd(a; bc) = pgcd(a; b)$.

Soit $\mathcal{D}(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et b.

Si $\mathcal{D}(a, bc) = \mathcal{D}(a, b)$ alors $pgcd(a; bc) = pgcd(a; b)$.

Soit $d \in\ \mathcal{D}(a, bc)$, on a $d\ /_a\ \ et\ \ d\ /_{bc}$

$d\ /_a \Leftrightarrow \exists\ k\ \ \in \mathbb{Z}\ /\ a = kd\ \ et\ d\ /_c\ \Leftrightarrow \exists\ k'\ \ \in \mathbb{Z}/c = dk'$

$pgcd(a; c) = 1$ donc il existe $u\ et\ v \in \mathbb{Z}\ \ /\ au + cv = 1$ (d'après Bézout)

Multipliant par b cette égalité, on a : $bau + bcv = b$

$$bkdu + bk'dv = b$$

$d(bku + bk'v) = b$ avec $(bku + bk'v) \in \mathbb{Z}$ alors $d\ /_b$

$d\ /_a\ \ et\ d\ /_b \Longrightarrow d \in\ \mathcal{D}(a, b)$

Par suite $\mathcal{D}(a, bc) \subset\ \mathcal{D}(a, b)$ (1)

Soit maintenant $d \in \mathcal{D}(a,b)$ alors $d\ /_{a}\ et\ d\ /_{b}$

$d\ /_{b} \Leftrightarrow \exists\ k_0\ \in \mathbb{Z}\ /\ b = k_0 d$. Dans ce cas $bc = k_0 cd\ avec\ k_0 c \in \mathbb{Z}$ donc $d\ /_{bc}$

Ainsi $d\ /_{a}\ et\ d\ /_{bc} \Rightarrow d \in \mathcal{D}(a,bc)$ (2)

(1) et(2) montrent que : $\mathcal{D}(a,b) = \mathcal{D}(a,bc)$ on a donc ce qu'on veut :

$pgcd(a;bc) = pgcd(a;b)$.

Revenons à notre problème.

(1) p et q premiers entre eux i.e. $pgcd(p;q) = 1$, donc en appliquant ce que nous venons de démontrer : $\forall c\ \in \mathbb{Z}\ \ pgcd(qc;p) = pgcd(p;c)$

Prenons $c = q, on\ a\ pgcd(q^2;p) = pgcd(p;q) = 1$

Appliquons de nouveau :

$\forall c\ \in \mathbb{Z}\ pgcd(q^2;pc) = pgcd(q^2;c)$

Prenons $c = p\ pgcd(q^2;p^2) = pgcd(q^2;p) = 1$, $q^2 et\ p^2$ sont donc premiers entre eux.

$p^2 = \alpha q^2$ donc $p^2\ /_{\alpha q^2}$. Or $pgcd(q^2;p^2) = 1$ donc d'après Gauss $p^2\ /_{\alpha}$. Il existe donc $k\ \in \mathbb{Z}\ /\ \alpha = kp^2$ α premier et $p > 1$, donc kp^2 admet au moins trois diviseurs positifs à savoir 1 ; p et p^2 . Ce qui est contradictoire. Donc l'hypothèse est fausse.

Par suite, si α est premier alors $\sqrt{\alpha}$ est irrationnel. □

Exemple 3 : Un absurde et disjonction de cas

Soit E un ensemble

Montrons qu'il n'existe pas de surjection de E sur ℘(E)

- Si $E = \emptyset$, le résultat est trivial.
- $E \neq \emptyset$.

Soit f une application de E vers ℘(E) , $f: E \longrightarrow$ ℘(E)

$x \longmapsto f(x) = X$

Considérons alors $Y = \{y/y \notin f(y)\}$

Montrons que : $\forall\ a \in E, f(a) \neq Y$ c'est-à-dire que Y n'a pas d'antécédent par f.

Raisonnons par l'absurde en faisant une disjonction de cas : Supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = Y$

<u>1^er^ cas</u> : si $a \in Y$ alors $a \in f(a)$ (car$f(a) = Y$) et par conséquent $a \notin Y$ (par définition deY). Ce qui contredit notre hypothèse

2^e cas : $a \notin Y$ alors $a \notin f(a)$ (car$f(a) = Y$) et par conséquent $a \in Y$ (par définition de Y). Ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi l'élément a n'appartient pas ni à Y, ni $\bar{Y}$ (complémentaire de Y). Ce qui impossible. Par suite notre supposition est fausse. D'où $\forall\, a \in E$, $f(a) \neq Y$ ce qui montre que Y n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.□

Exemple 4 : Un absurde superposé

Pour choisir un ministre parmi trois candidats A, B et C, un roi oriental les soumis à une épreuve : sur la tête de chacun d'eux, on place une boule qu'il ne voit pas, mais il voit la boule située sur la tête de chacun des deux autres. Les candidats savent que les boules sont choisies parmi les cinq boules, trois noires et deux blanches, le premier qui dira la couleur de la boule situé sur sa tête sera ministre ; s'il se trompe il aura la tête tranchée. L'un d'eux, A, qui voit une boule noire sur la tête de chacun des deux autres, affirme avec sûreté, voyant que les autres ne disent rien : « j'ai une boule noire » (d'après conte oriental).

Expliciter son raisonnement.

Solution

Voici le raisonnement de A :

« Supposons que j'ai une boule blanche .Le candidat B voit donc une boule blanche et une boule noire. Le candidat B suppose ensuite que j'ai une boule blanche. Le candidat C voit donc deux boules blanches et peut affirmer qu'il a une boule noire .Or le candidat C ne dit rien donc B peut affirmer qu'il a une boule noire .Or B ne dit rien, donc mon hypothèse est faux c'est-à-dire j'ai une boule noire »□

III .LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

3 .1 La récurrence simple

3 .1.1 Introduction

Prenons une chaine de dominos .Sous quelles conditions peut –on faire tomber la chaine de dominos ?
Pour faire tomber la chaine, même si celle –ci est de taille infinie, il faut deux conditions :

1. Faire tomber les premiers dominos de la chaine.
2. La chaine ne doit pas être brisée. Chaque domino en tombant doit pouvoir faire tomber le domino suivant.

La preuve par récurrence fonctionne sur ce principe.

3.1.2 Quelques définitions et rappels

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E .On dit que $\mathcal{R}$ est une relation de bon ordre sur E si toute partie non vide de E admet un plus petit élément. La relation $\leq$ est par exemple une relation de bon ordre sur $\mathbb{N}$. En effet, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Tout entier naturel correspond à un autre entier naturel, unique, appelé suivant ou successeur de n. Zéro n'est le successeur d'aucun entier naturel .On a aussi l'axiome dite de récurrence : Si A est une partie de ℕ tel que :

- Zéro est un élément de A
- Si *n* est un élément de A, alors le successeur de n est un élément de *A* alors la partie *A est* égale à ℕ. (Cf. axiomes de Péano Chap. I, §.1.4.1, exemple 2)

Grace à cet axiome de récurrence, on peut transformer certaine forme proportionnelle $p(n)$ où n est une variable astreinte à une partie I de ℕ, en une proposition vraie pour toute valeur m de Iattribué à n. Cette forme de raisonnement s'appelle alors « raisonnement par récurrence ». Le raisonnement par récurrence établit donc une propriété importante due à la structure de ℕ : celle d'être construit à partir de 0 en itérant le passage au successeur .Certaines formes de raisonnement se généralisent d'ailleurs naturellement à tous les bons ordres infinies (pas seulement celui sur les entiers naturels), on parle alors de récurrence transfinie, de récurrence ordinal.

3.1.3 Initialisation ; Propriété héréditaire

Soit $\wp$ une propriété définie sur ℕ.

S'il existe un entier n_o tel que : $\wp(n_o)$ est vraie, alors on dit que la propriété $\wp$ est initialisée au rang n_o.
On dit que la propriété $\wp$ est héréditaire à partir du rang n_o si pour tout $n \geq n_o$
$[\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)]$

3.1.4 Principe du raisonnement par récurrence

Soit $\wp$ une propriété définie sur ℕ et $n_o \in$ ℕ.
Pour montrer par récurrence que : $\wp(n)$ est vraie, pour tout $n \geq n_o$, il suffit,

- d'initialiser la propriété au rang n_o c'est-à-dire vérifié que : $\wp(n_o)$ est vraie.
- de montrer que la propriété $\wp$ est héréditaire à partir du rang n_o c'est-à-dire :
  $(\forall n \geq n_o)$ $[\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)]$, $\wp(n)$ est appelé hypothèse de récurrence.

3.1.5 Exemple 1 : première application

On considère la suite U_n définie par $U_o = 0$ et $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, $U_{n+1} = 3U_n + 2$

a) Calculer $U_1, U_2, U_3, et\ U_4$
b) Montrer que: $U_n = 3^n - 1$, pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$

Solution

a) Calculons $U_1, U_2, U_3 et\ U_4$

$U_1 = 3U_0 + 2 = 2$ $U_3 = 3U_2 + 2 = 26$

$U_2 = 3U_1 + 2 = 8$ $U_4 = 3U_3 + 2 = 80$

b) Montrons que : $U_n = 3^n - 1$, pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$.

Vérifions d'abord que la propriété est vraie pour quelques premiers termes :

$U_o = 0 = 3^0 - 1$, la propriété est vraie pour n=0

$U_1 = 2 = 3^1 - 1$, la propriété est vraie pour n=1

$U_2 = 8 = 3^2 - 1$, la propriété est vraie pour n=2

La propriété est initialisée aux rangs : 0, 1 et 2.

$U_{n+1} = 3U_n + 2$, par définition

$= 3(3^n - 1) + 2$, par hypothèse de récurrence

$= 3^{n+1} - 1$

Par suite: $(U_n = 3^n - 1) \Longrightarrow (U_{n+1} = 3^{n+1} - 1)$

Ainsi $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ on a : $U_n = 3^n - 1$

3.2. Le principe du raisonnement par récurrence

3.2.1. Démonstration du principe

Soit $\wp$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \wp(n)\}$. Si,

- $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $\wp(n_o)$ (initialisation)
- $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, $[\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)]$ (hérédité)

Alors :

$l'intervalle[n_0,+\infty[\ de\ \mathbb{N}\ est\ inclu\ dans\ I\ i.e. \wp\ est\ vraie\ \forall n \geq n_0)$

Démonstration :

I est évidement non vide.

Considérons maintenant l'ensemble $E = \{n \in I \cap [n_0; +\infty[\ tel\ que\ non\ \wp(n)\}$

Raisonnons par l'absurde :

Supposons que : E est non vide.

E est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Comme $\leq$ est une relation de bon ordre sur $\mathbb{N}$ alors E admet un plus petit élément. Notons m ce plus petit élément .Il est clair que $m \geq n_0$.

Ce plus élément m est un élément de E. On a donc non $\wp(m)$

- Si $m = n_0$, alors non $\wp(n_0)$, ce qui contredit l'hypothèse d'initialisation.

- Si $m > n_0$, alors on a $\wp(m-1)$. Par conséquent on a $\wp(m-1)$ et non $\wp(m)$ ce qui contredit l'hypothèse d'hérédité ($m-1 \geq n_0$).

Donc Eest vide, autrement dit pour tout $n \geq n_0$, $\wp(n)$.□

3.2.2 Quelques exemples pratiques

Exemples 1 :

Montrer que :$(\forall n \in N^*)$ $[\sum_{p=1}^{n} p.p! = (n+1)! - 1]$

Avec $\sum_{p=1}^{n} p.p! = 1.1! + 2.2! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n.n!$, et $p! = p.(p-1)\ldots 2\times 1$ le factoriel p.

$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \times 1, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \ldots$

- Pour $n = 1, \sum_1^1 p.p! = 1.1 = 1$ et $(1+1)! - 1$ =1, la propriété est vraie pour $n = 1$

  Pour $n = 2$ $\sum_1^2 p.p! = 1.1! + 2.2! = 5$ et $(2+1)! - 1 = 5$, la propriété est vraie pour $n = 2$.

- Supposons que la propriété est vraie au rang n :

$$\sum_{p=1}^{n} p.p! = (n+1)! - 1$$

  Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{n+1} p.p! = (n+2)! - 1$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\sum_{p=1}^{n} p.p! = (n+1)! - 1$$

Donc,

$$\sum_{p=1}^{n} p.p! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$\sum_{p=1}^{n+1} p.p! = (n+1)!\,[(n+1)+1] - 1$$

$$\sum_{p=1}^{n+1} p.p! = (n+1)!\,(n+2) - 1$$

$\sum_{p=1}^{n+1} p.p! = (n+2)! - 1$ (Car $(n+1)!\,(n+2) = (n+2)!$)

D’où la propriété est vraie au rang $(n+1)$.

Par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\left[\sum_{p=1}^{n} p.p! = (n+1)! - 1\right]$.□

Exemple 2

Montrons que la somme des premiers termes des entiers naturels impairs est un carré parfait. C'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

- Pour $n = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2.1 - 1 = 1 = 1^2$, d’où la propriété est vraie au rang 1

Pour $n = 2$, on a: $\sum_{k=1}^{2}(2k-1) = (2.1-1) + (2.2-1) = 4 = 2^2$, d’où la propriété est vraie au rang 2.

- Supposons que la propriété est vraie au rang n c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Montrons qu’elle est vraie au rang $(n+1)$. C'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$

Nous avons

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, par hypothèse de récurrence.

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

D’où la propriété est vraie au rang $(n+1)$

Par suite on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.□

3.3 Remarques importantes

Pour qu’un raisonnement par récurrence soit valide, il doit bien vérifier les deux conditions : l’initialisation et l’hérédité. En effet, prenons les deux exemples suivants :

Exemple 1

$\wp(n)$: "$3^{2n+4} - 2^n$ *est un multiple de* 7" ;

La propriété $\wp$ est héréditaire.

En effet : $\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$

$3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 signifie qu’il existe un entier *k* tel que $3^{2n+4} - 2^n = 7k$

Or

$$3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} = 3^{2n+2+4} - 2^n .2$$

$$= 3^2 . 3^{2n+4} - 3^2 . 2^n + 3^2 . 2^n - 2^n . 2$$

$$= 3^2 (3^{2n+4} - 2^n) + 9.2^n - 2.2^n$$

$$= 9(7k) + 7.2^n$$

$$= 7(9k + 2^n)$$

$$= 7.\ K \text{ , avec } K = 9k + 2^n$$

$\wp$ est par suite héréditaire, cependant $(\forall n \in N^*)(\wp(n))\ n'est\ pas\ vraie)$, car elle n'est jamais initialisable.

Par exemple si $n = 0, 3^4 - 2^0 = 80$ n'est pas un multiple de 7.

Finalement en utilisant la congruence modulo 7, on peut montrer que $3^{2n+4} - 2^n$ n'est pas un multiple de 7.

Exemple 2

Prenons par exemple la suite $x_n = \frac{n^2-n+1}{n^2}$, on peut observer que cette suite est croissante à partir du rang 2.

En effet, $U_{n+1} - U_n = \frac{n^2-n-1}{(n+1)^2 n^2} > 0$

Si on cherche à prouver que $U_n \geq 1$, pour tout $n \geq 1$, l'initialisation est facile car $U_1 = 1$. L'hérédité aussi car la suite est croissante si $U_n \geq 1$ alors $U_{n+1} \geq 1$ ($U_{n+1} \geq U_n$).

Pourtant, l'inégalité $U_n \geq 1$, est vraie seulement pour $n = 1$. L'hérédité n'a en réalité prouvé que pour n plus grand ou égal à 2 et non supérieur ou égal a 1.

Finalement, l'hérédité doit être démontrée pour tout entier n plus grand ou égal à au dernier n_0 pour lequel la propriété a été démontrée directement (initialisation)

3.4 Autres formes du raisonnement par récurrence

3 .4.1 Récurrence forte ou récurrence cumulative

Soit $\wp$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour montrer à l'aide d'une récurrence forte que : $(\forall n \geq n_0)(\wp(n_0))$ on procède comme suit :

- Vérifier que la proposition $\wp(n_0)$ est vraie (initialisation)
- Supposer $\wp(n)$: « pour tout entier m vérifiant $n_0 \leq m \leq n, \wp(m)$ »

- Montrer ensuite que ¨$\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$"
- Enfin conclure que$(\forall n \geq n_0)(\wp(n))$.

Cette procédure de démonstration s'appelle récurrence forte.

Remarque

1. La récurrence simple est un cas particulier de récurrence forte. En fait, la récurrence simple est une récurrence d'ordre 1.
2. Si on a (en ce sens)$[\wp(n) et\, \wp(n+1) \Longrightarrow \wp(n+2)]$, nous avons le même résultat et on parle alors de récurrence d'ordre 2.

En itérant, cette procédure$[\wp(n) et\, \wp(n+1)\ et\ \wp(n+3)] \Longrightarrow \wp(n+4)$..., on obtient le même résultat et on parle de récurrence d'ordre 3, d'ordre 4, …

Tous ça sont des cas particuliers du principe de récurrence forte.

Exemple1

Considérons la suite U_n définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \end{cases}$$

Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n$.
Considérons la propriété $\wp$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$\wp(n)$: "$\forall m \in \mathbb{N}, m \leq n, U_m = 2^m$"
Comme $U_0 = 1$ et $U_1 = 2$, on a $\wp(0) et\, \wp(1)$.
Montrons que : pour tout $n \geq 1, \wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$
Si $n \geq 1$, supposons $\wp(n)$: pour tout entier $m \leq n, U_m = 2^m$.
On a alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 5U_n - 6U_{n-1} \\ &= 5.2^n - 6.2^{n-1} \\ &= 10.2^{n-1} - 6.2^{n-1} \\ &= 4.2^{n-1} \\ &= 2^{n+1} \text{ D'où } \wp(n+1) \end{aligned}$$

En fait on a $\wp(1)\ et$ [pour tout $n \in \mathbb{N}, \wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$] donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $(\wp(n))$.

Ainsi $(\forall m \in \mathbb{N})$,$U_m = 2^m$.□

Exemple 2

Démontrons que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Soit $\wp(n)$: « n admet un diviseur de premier »

- $\wp(2)$ est vraie car 2 lui-même est premier.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Supposons que $\wp(n)$: $(\forall m \in \mathbb{N})(m \leq n)(\wp(m))$, montrons que $\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$.

Si $n+1$ est premier, il possède, un diviseur premier qui est lui-même. C'est à dire on a :

$$\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$$

Si $n+1$ n'est pas premier, $n+1$ possède un diviseur d vérifie $1 < d \leq n$. Or d admet un diviseur premier par hypothèse.

Par suite $n+1$ admet un diviseur premier (car tout diviseur de d est aussi un diviseur de $n+1$).On a alors $\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$. Ainsi dans tous les cas $\wp(n) \Longrightarrow \wp(n+1)$, donc nous pouvons conclure que :

$(\forall n \geq 2)(n\ admet\ un\ diviseur\ premier)$.□

3.4.2 Principe de récurrences alternatives

Le principe de récurrence alternative que nous allons voir n'est pas très classique, mais il est essentiel de le connaître.

Soit $\wp(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$

Si on a :

i. $\wp(2^m)\ vraie\ pour\ chaque\ valeur\ m \in \mathbb{N}$
ii. $pour\ n \in \mathbb{N}, \wp(n+1) \Longrightarrow \wp(n)$

Alors $\wp(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Remarques</u>

1. Dans i), on peut remplacer 2^m par s^m ou s est un entier naturel plus grand ou égal à 2. On peut remplacer de même 2^m par une suite strictement croissante d'entiers positifs.
2. Ce principe de récurrence s'adapte bien au cas où la propriété se démontre facilement pour les puissances de 2 ou d'un entier $s \geq 2$. L'originalité de ce principe repose sur un principe de récurrence à rebours.
   On ne prouve plus une propriété de n à $n+1$ mais de $n+1$ à n en y adjoignant que si une propriété est vraie d'un entier alors elle est vraie pour un entier strictement plus grand.

IV. INTUITION ET CONTRE-EXEMPLE EN MATHEMATIQUES

4.1. Introduction

L'intuition est une faculté d'exprimer une connaissance claire, directe et immédiate de la vérité sans l'aide du raisonnement. Elle peut être traduite aussi par pressentiment, faculté de prévoir, de deviner : avoir l'intuition de l'avenir. Une intuition n'est pas forcément vraie.

La recherche d'un contre-exemple est une méthode utilisée pour prouver que certaines affirmations, prétendant à un certain caractère de généralité sont fausses. Quand un énoncé commence par « pour tout », il suffit pour prouver qu'il est faux, de trouver un élément (« il existe… »), qui réalise les conditions imposées dans l'hypothèse sans que ne soit vérifiée la conclusion.

4.2. Rôle du contre-exemple

Le contre-exemple est utilisé très tôt dans la pratique mathématique soit pour dévaloriser une conjecture, soit pour prouver qu'une propriété n'est pas réalisée. La découverte d'un contre-exemple permet d'arrêter la recherche d'une démonstration ou d'affiner les hypothèses nécessaires à la réalisation de la conclusion.

Exemple : Fermat conjectura que tous les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier, où n entier naturel car il avait constaté que les nombres F_0,F_1,F_2 , F_3,F_4 l'étaient.

Euler prouva que cette conjecture était fausse en exhibant le contre-exemple suivant : il calcula tout simplement F_5 qui vaut 4294967297 et qui est divisible par 641.

4.3. Intuition et contre-exemple

Un contre-exemple est parfois utilisé pour nier une intuition. En effet l'exemple dans le paragraphe précédent montre que : le contre-exemple d'Euler nie la conjecture de Fermat. Or la conjecture vient de l'intuition. Donc on peut dire que le contre-exemple d'Euler contredit l'intuition de Fermat.

Une intuition entraine la recherche d'un contre-exemple : c'est l'intuition de dire qu'une conjecture n'est pas vraie.

4.4. Importance de l'intuition et du contre-exemple

La méthode d'enseigner en faisant intervenir des intuitions suscite les attentions des élèves à bien réfléchir et raisonner de manière à ce qu'ils comprennent à bon escient ladite méthode mise en question. En corollaire, ça contribue à la suppression, voire abolition de la méthode très anti-pédagogique qu'est-le « faire par cœur ». De plus certains exercices demandent quelques intuitions.

On se propose par exemple de factoriser l'expression suivante en classe de seconde :

$f(x) = x^4 + 1$

Si on pose $y = x^2$, le problème est ramené au nombre complexe. Or le nombre complexe n'est pas au programme pour la classe de seconde. Nous avons donc intérêt de faire l'intuition suivante : $f(x) = x^4 + 1$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 (ajouter\ puis\ retrancher\ 2x^2)$$

$$= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

Le problème est donc ramené à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Un autre exemple est de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=29 \\ x^2+y^2+z^2=289 \\ xy=72 \end{cases}$$

La résolution de ce système peut être difficile si on le traite par substitution uniquement. Nous avons donc intérêt à faire l'intuition suivante en posant $p = xy \; et \; s = x+y$ puis en remarquant que $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$. Dans ce cas la résolution de ce système est plus facile.

Le fait de donner des exercices faisant intervenir des contre-exemples, est un bon processus pour la bonne compréhension de ce que la leçon veut en venir.

Prenons comme exemple l'application $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \; si \; xest \; pair \\ \frac{x+1}{2} \; si \; x \; est \; impair \end{cases}$

En faisant quelques exemples, on constate que f est surjective. Nous avons intérêt à distinguer intuitivement deux cas. En effet,
$y = 2k \; est \; l'image \; de \; x = 4k \; et \; y = 4k+1 est \; l'image \; de \; x = 4k+2$. D'où f est surjective.

f n'est pas injectif. Il suffit de prendre le contre-exemple suivant :$1 \neq 2 \; et \; f(1) = f(2)$

Pour conclure l'intuition et le contre-exemple attirent beaucoup plus l'attention des élèves à avoir un esprit créatif. Donc l'intuition et le contre-exemple mettent déjà les élèves dans un cadre de recherche qui peut être poussé ultérieurement.

Chapitre V : SUGGESTIONS POUR L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DE MATHEMATIQUES AU LYCEE.

« Choisis le meilleure. Bientôt l'habitude le rendra agréable et facile »

Pythagore, philosophe et mathématicien grec,

VI^{e} siècle avant J.C

I. Problème fondamental

Le problème fondamental et principal qui abaisse le taux d'élève scientifique est la non acquisition des raisonnements mathématiques. Cette non acquisition est due à l'absence de l'étude de la logique dans le programme scolaire. Cette absence entraîne l'insuffisance de faculté de raisonner. De plus l'habitude de réciter les questions ou les positions des problèmes aux examens donne un aperçu profond de la question.

II. Origine de ce problème :

. L'incompétence de certains professeurs pose un grand problème. Une des explications de ce vice est occasionnée par l'insuffisance des professeurs spécialisés en mathématiques. Par conséquent, des enseignants ayant suivi d'autres filières comme la physique, les Sciences de la vie et de la terre prennent leurs places. Il y a aussi la carence dans la formation universitaire faute de bachotage ou pour une autre raison, c'est à dire que la logique de la démonstration n'est pas bien approfondie par les professeurs à l'université et que les étudiants sont accoutumés à rechercher des formules toutes faites à appliquer (recette de cuisine). En effet, il y a certains points qu'ils ne maitrisent pas et de ce fait, ils ne les font pas. Et, s'ils procèdent à les enseigner, le cours ne sera pas très clair. Ce n'est pas de la même façon que les professeurs qui sont compétents en la matière qu'ils les enseigneront.

La non acquisition de la démonstration du cours occasionne des impacts négatifs à savoir l'absence de la faculté de raisonner. En outre, le volume horaire d'enseignement n'est pas suffisant pour que les enseignants fassent de leurs mieux. Par conséquent, les exercices qu'on donne aux élèves ne suffisent pas à bien approfondir la matière. C'est le cas dans beaucoup des Lycée à Madagascar.

Les élèves réussissent à leurs examens grâce à des sujets typiques. En d'autre terme, ils s'entrainent, révisent et font même par cœur tout simplement leurs leçons suivies des exercices typiques. Et ce qui est très néfaste en ce qui concerne la compréhension des mathématiques. La paresse frappe la quasi-totalité des élèves. Les enseignants sur tout au sein d'un établissement confessionnel ne font que leurs moyens afin que leurs élèves réussissent sans penser à l'avenir futur de ces derniers au Lycée, d'où arrivées au Lycée, les élèves n'arrivent plus à suivre les logiques dans les mathématiques et ne parviennent pas à raisonner d'où la tendance de faire par cœur subsiste toujours. Les enseignants pensent seulement à l'effectif des élèves qui vont obtenir leurs brevets par exemples.

III. Quelques conseils pour les élèves.

Il faut que les élèves cherchent des moyens et s'efforcent à aimer leur propre professeur et trouver des méthodes pour mieux comprendre, avoir un aperçu sur la matière. En plus, dans la vie estudiantine des élèves, l'ambition figure parmi les facteurs de réussite. Cela signifie que l'élève doit avoir un certain objectif pour pouvoir mieux avancer, en sachant que sa vie même est mise en jeu. C'est l'étude qu'il fait qui prépare son propre avenir. De l'autre côté il faut savoir aussi côtoyer des bons amis et aussi faire tous les exercices que les professeurs donnent dés l'arrivée à la maison. L'étude requiert un effort de raisonner. En outre face aux examens, lire attentivement les questions avant de répondre.

IV. Suggestion pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire.

Trois grands cadres constituent le point d'amélioration d'acquisition des mathématiques : cadre sociale, cadre pédagogique et cadre politique. C'est en vue d'atténuer les vices dans ces cadres que nous comptons donner des suggestions.

4.1 Suggestion dans le cadre sociale

La société apporte une contribution énorme à la transmission de connaissance de mathématiques. Néanmoins la réalité à Madagascar n'est pas conforme à çà, en effet les parents ne peuvent pas discerner à bon escient l'importance de la mathématique. En outre, leurs utilités leur sont inconnues. Les conséquences les plus immédiates seraient que leurs progénitures ne seraient assidues dans cette aventure car leurs parents ne leur motiveront pas assez. La tendance c'est le « littéralisme » car cela est destiné à former les hommes d'Etat qui sont très respectés. Mais heureusement des remèdes existent. De plus, des mises en connaissances de ces matières scientifiques pallieraient simplement ce problème, les exposés, les émissions télévisées. Mais pour ceux qui sont déjà initiés mais manquent de motivation, les rallyes mathématiques, les olympiades leur seraient bienfaitrices.

4.2 Suggestion dans le cadre pédagogique

- Il ne doit pas y avoir un grand écart entre le professeur et l'élève. Pour que l'enseignement soit compris, il faut se comporter comme père ou mère à l'égard des enfants, entretenir des relations plus proches.
- Savoir créer l'ambiance aide également les élèves à aimer la matière et être assidu pour assister au cours. Ils ont plus de courage si les professeurs se collaborent avec leurs élèves et les incitent à travailler.
- Dans certains cas, la récompense est très pratique et commode pour encourager les élèves à bien se concentrer et se focaliser dans les mathématiques. A titre d'exemple, prenons par exemple la bonification pour ceux qui arrivent à répondre des questions difficiles.
- Vue l'intelligence de certains élèves, il y a ceux qui ne sont pas doués. Il faut que les professeurs les aident en insistant sur quelques points et en donnant des tas d'exercices.
- Les professeurs ne doivent pas se précipiter aux résultats finaux de l'examen. Les moyens mis en œuvres doivent être décortiqués de façon à ce que les élèves inculquent dans leurs têtes les explications acquises et les élargir.

– Les professeurs ont l’obligation de faire un test pré-requis pour savoir les connaissances antérieures des élèves et pour améliorer leurs niveaux.

– Les rappels sont nécessaires pour la mémorisation. De ce fait, avant d’entamer un programme, il faut que les professeurs font des rappels et donnent une vue d’ensemble sur les programmes de mathématiques qui suivent. De plus, les professeurs doivent être conscients que l’avenir de ses élèves est entre leurs mains et ce qui exige la sécurité de sa part et conscientiser aussi les élèves que leurs vies sont mises en jeux.

– Il est toujours recommandable que les professeurs expliquent de moins facile jusqu’’au plus difficile. Tout ça en vue d’assimiler les leçons et continuer une autre leçon.

– Un bon enseignement doit se faire du concret à l’abstrait. C’est-à-dire prendre des exemples concrets jusqu’à la déduction des principes et des théorèmes ; dégager la réalité car c’est plus compréhensible.

– A la fin de l’année, les professeurs doivent donner des exercices sur l’ensemble de chapitres enseignés et si possible en résumant toutes les notions essentielles à retenir, les corriger un par un mais en faisant participer les élèves.

Enfin, les professeurs doivent être fiers de leurs fonctions. Ils doivent se bien conduire devant ses élèves et être les modèles aussi bien au niveau de la manière de s’exprimer que sur le plan matériel (effets vestimentaires). Un modèle qui doit être imité par ses propres élèves.

4.3 Suggestion dans le cadre politique

Pour être efficace dans le but de transmettre les connaissances aux apprentis, ces transmetteurs devront avoir une certaine compétence : c’est la principale fonction de l’Etat. L’Etat institue des centres de formation en vue des objectifs précités. Des exemples sont nombreux Ecole Normale Supérieure, Ecole Normale Niveau II. Les gens qui ont achevés leur formation sont donc les mieux qualifiés et aptes à faire cette tâche. Mais encore un problème sérieux, les recrutements ne sont pas de masse pour ne pas dire que l’essentiel. Ces diplômés n’obtiennent pas de travail mais chôment pendant certains temps. De plus, pour ceux qui sont embauchés leurs qualifications ne sont pas suffisantes car ils sont choisis pour leur peu de rémunérations. Un autre pavé dans le marre, le rapport entre professeur élève est très disproportionnel. Pour en finir avec ce problème le concours de l’Etat est plus que nécessaire. Un effort à grande échelle doit être effectué en vue de recrutement des diplômés jugés aptes à transmettre les connaissances. En outre l’Etat doit favoriser les réunions inter-professeur en vue de partage d’expérience.

Un fait nous le fait bien comprendre : avant quand l’étude de la logique figure dans le programme de seconde le taux d’élèves scientifiques était bien supérieure à celui d’aujourd’hui. La raison en est que la logique, cette matière fondamentale n’est pas incluse dans le programme. Par conséquent les apprentis scientifiques ont une compréhension vague de cette discipline : ils tendent plutôt à mémoriser les façons de répondre plutôt que de bien saisir le fond du problème. Il n’est donc pas étrange que beaucoup d’apprentis se perdent. La solution qui s’offre à tout ceci ce que l’Etat par son omniprésence édicte à la lettre l’inclusion de l’étude de la logique et méthodes de raisonnements dans le programme scolaire.

CONCLUSION GENERALE

Ainsi, on a pu connaître le long de ce mémoire l'essence du « raisonnement mathématique ». Sur ce, on a parlé du raisonnement mathématique et ces concepts de base tout en déduisant des suggestions pour l'amélioration de l'enseignement de cette discipline au niveau Lycée. Par suite, l'exposé permet par le biais de son contenu d'élucider les pensées non seulement les étudiants mais aussi les personnes concernées. Ainsi nos études sont axées sur « les raisonnements classiques » que les apprenants auront besoin pour bien comprendre le fondement de mathématique. Car il est vrai que la non compréhension et le manque de maitrise de ces notions d'autre part font l'objet de la négligence et conduit à la fuite de la série scientifique qui est laissée au dépend de la série littéraire.

D'ailleurs, plusieurs raisons peuvent expliquer ce manque mais on a retenu celles qui sont liées au milieu où l'étudiant vit c'est-à-dire le cadre social, il y a celles qui sont d'ordre pédagogique et enfin d'ordre politique.

En conclusion, il est important de sensibiliser les parents sur l'importance de la mathématique même si cela n'est pas de leurs compétences afin qu'ils puissent inciter leurs enfants. Cela peut se faire en diffusant des émissions télévisées, en organisant des olympiades ou des rallyes mathématiques. Du point de vue pédagogique, le maître en tant que reflet des bonnes idées, devra être le meilleur modèle en tout point de vue. Concernant l'enseignement, il devra aussi être la source d'inspiration pour les élèves vu que la mathématique fait parti des disciplines difficiles à comprendre. Ainsi l'environnement doit être axé sur les élèves afin qu'ils aient de l'empressement dans l'apprentissage de la matière. Du point de vue politique, la revalorisation et la reconsidération des cadres de formations des maitres aussi bien des classes primaires que secondaire du premier et second cycles à l'image de l'ENS ainsi que la mise en place d'un bon concept et fondamental du système éducatif est vivement souhaité.

Dans cet ouvrage, on a parlé du raisonnement logique appliqué en mathématique .En effet, il y a encore des domaines où on peut appliquer le raisonnement logique, comme en électricité, en informatique (intelligence artificiel). Nous encourageons ceux qui désireront approfondir leurs recherches dans ces domaines.

Webographie :

1°http://wikimediafoundation.org/

2°http://www.mediawiki.org/

3°http://bacamaths.net/

4°http://www.addthis.com/pages/toolbar.landing ?

5°http://mathematique.cours gratuits.net/logique/crise des fondements.php.

Bibliographie

1° J.KOCH et H.BOURBON, Mathématiques classes de première, Tome I, LIGEL 1970.

2° JEAN LOUIS KRIVINE, Logique et théorie axiomatique des ensembles, Edition PUF, 1970.

3°M. CONDAMINE, Mathématiques Terminale C-E-ALGEBRE-DELAGRAVE, 1971

4°RABARINJAKA ANDRIANASOLO A.H, RAKOTOSOA Cyrille Marie Albert, RANDRIANATOANDRO Julien, Etude du raisonnement Mathématique Logique et son enseignement en classe de seconde, Mémoire de C .A.P.E.N, 1987.

5°Collection-Inter-Africaine de Mathématique, Classe de Seconde S, EDICEF.

6°E.Bouscaren, Note de cours de Logique, publié sur internet, MAGISTERE-MATH-INFO, 2003-2004.

7°J.T.RABEHERIMANANA, Cours polycopié d'Analyse I Tome I, 2002/2003, Université d' Antananarivo

8°Witold A.J.Kosmala, A Friendly Introduction to analysis, edition2004-1999 Pearson Education, Inc.

9°Alain Ralambo, Cours polycopié de Topologie Générale, 2004-2005, Université d'Antananarivo.

10°Patrick Dehornoy, Note de cours de Logique, [version 2006-07], publié sur internet.

11°Rolland Christophe, Note de cours de logique, publié sur internet, septembre 2008.

12°Microsoft Encarta Junior 2009, dictionnaire encarta et Larousse

A nos lecteurs :

Il est difficile d’achever un œuvre parfait. Toute critique, toute suggestion en vue de l’amélioration de cet ouvrage est le bienvenu.

SOMMAIRE