



Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint

Franz-Josef Ulm

► To cite this version:

Franz-Josef Ulm. Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT : . tel-00529366

HAL Id: tel-00529366

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529366>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODELISATION ELASTOPLASTIQUE AVEC
ENDOMMAGEMENT DU BETON DE STRUCTURES.

APPLICATION AUX CALCULS STATIQUES ET DYNAMIQUES
DE STRUCTURES EN BETON ARME ET BETON
PRECONTRAINTE

Thèse présentée par

Franz-Josef ULM

pour l'obtention du titre de docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Soutenue le 11 janvier 1994, devant la commission d'examen composée de Messieurs :

Bernard HALPHEN	Président
Harry GRUNDMANN	Rapporteur
Jacky MAZARS	Rapporteur
Pierre ARISTAGHES	Examineur
René de BORST	Examineur
Olivier COUSSY	Examineur
Pierre HUMBERT	Examineur
Jean-Luc CLEMENT	Examineur

X

MODELISATION ELASTOPLASTIQUE AVEC ENDOMMAGEMENT DU BETON DE STRUCTURES.

APPLICATION AUX CALCULS STATIQUES ET DYNAMIQUES DE STRUCTURES EN BETON ARME ET BETON PRECONTRAINTE

Thèse présentée par

Franz-Josef ULM

pour l'obtention du titre de docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Soutenue le 11 janvier 1994, devant la commission d'examen composée de Messieurs :

Bernard HALPHEN	Président
Harry GRUNDMANN	Rapporteur
Jacky MAZARS	Rapporteur
Pierre ARISTAGHES	Examineur
René de BORST	Examineur
Olivier COUSSY	Examineur
Pierre HUMBERT	Examineur
Jean-Luc CLEMENT	Examineur

09



La première page..., blanche; pleine de ma gratitude...

Je tiens tout d'abord à remercier Bernard HALPHEN de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et qui m'a accueilli au sein du Service de Mécanique du LCPC, à mon arrivée à Paris en 1990 dans le cadre de la coopération Franco-Allemande entre l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) et le Technische Universität München (TUM).

Je souhaite y associer Harry GRUNDMANN, professeur universitaire de mécanique à Munich, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse. Il ne m'a pas seulement appris l'équilibre tant mécanique (sa compétence) qu'humain (son charisme) pendant mes années munichoises. Mais c'est lui, qui m'a enflammé pour l'idée et la réalisation d'un séjour à Paris de "quelques mois" en 1990 : ...il y a maintenant plus de quatre ans. Je ne peux parler de mon installation à Paris sans remercier Hannes GOEBBEL, maître de conférence à l'ENPC, pour toute son amitié.

Je remercie Jacky Mazars d'avoir assumé la tâche d'être rapporteur de cette thèse, ainsi que les membres de son équipe de l'Ecole Nationale Supérieure de Cachan pour les échanges d'idées que nous avons eus, dans le cadre de projets de recherche commun au sein du GRECO Géomatériaux. Je ne saurais parler du GRECO Géomatériaux sans remercier Alain MILLARD. J'ai beaucoup apprécié la rigueur et le perfectionnisme sous-entendus mais omniprésents, dont ce dernier a fait preuve lors du travail commun dans le groupe "Béton armé".

Ces travaux sont résolument tournés vers les applications. Ils doivent donc beaucoup aux ingénieurs prêts à tester les lois de comportement pour la conception des ouvrages d'art. J'ai le plaisir de remercier Pierre ARISTAGHES de Bouygues, d'avoir été examinateur dans mon jury de thèse, et pour l'intérêt continu et les conseils qu'il m'a apporté durant ces travaux. Je suis très honoré que René de BORST, professeur de l'université technique de DELFT, ait bien voulu participer à ce jury, lui dont les travaux font date notamment dans le domaine de la modélisation numérique du comportement du béton.

Mais cette thèse a avant tout été possible grâce à trois personnes, qui en ont assuré l'orientation.

Il s'agit tout d'abord de Pierre HUMBERT, qui m'a accueilli au sein de son équipe de la section Modèles Numériques du LCPC pendant les trois ans de ma thèse. Je le remercie pour son soutien et ses conseils numériques malgré son emploi du temps surchargé, ainsi qu'a l'ensemble de son équipe, et en particulier à Jaques OCZKOWSKI pour son amitié renforcée d'une solide compétence informatique.

Je voudrais témoigner ici toute ma reconnaissance envers Olivier COUSSY qui m'a enseigné l'essence des lois de comportement. A travers le projet de la traduction de son livre "mechanics of porous continua" qui s'est déroulé en parallèle avec cette thèse, j'ai été marqué par sa vision de la mécanique, tant sur le plan scientifique, qu'humain, par sa rigueur, son enthousiasme - voire sa passion.

Enfin, toute ma reconnaissance va à Jean-Luc CLEMENT, mon directeur de thèse (effectif), pour sa confiance, ses conseils, sa disponibilité..., qui par ses grandes qualités pédagogiques et diplomatiques, a assuré ma formation complémentaire d'ingénieur par la recherche à travers un langage universel, celui de l'amitié.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans exprimer une gratitude particulière à tout ma famille, à ma mère, ingénieur elle-même, et à mon oncle, Chlodwig SELMER, qui m'ont encouragé - pas toujours sans douleur et inquiétudes - à rester en France pour cette formation par la recherche après la mort accidentelle de mon père aimé. Enfin - last but not least -, c'est à LAILA, ma femme : ce travail lui doit beaucoup, ...beaucoup plus !

Franz-Josef ULM

Juillet 1994

TABLE

Résumé - Abstract - Zusammenfassung	11
Avant-Propos.....	15
 1-MODELISATION ELASTOPLASTIQUE AVEC ENDOMMAGEMENT DU BETON DE STRUCTURES.....	 19
 1-0. Introduction	 21
 1-1. Modélisation du comportement non-linéaire du béton	 22
1-1-1. Description des non linéarités matérielles.....	22
1-1-2. Loi élastoplastique	23
1-1-2-1. Critère de plasticité.....	24
1-1-2-2. Règle d'écoulement	25
1-1-2-3. Dissipation intrinsèque	26
1-1-2-4. Loi d'écrouissage.....	27
1-1-2-5. Restrictions thermodynamiques, énergie bloquée par écrouissage.....	31
1-1-2-6. Formulation élastoplastique dans l'espace des déformations	32
1-1-2-7. Limites de la modélisation élastoplastique du béton	34
1-1-3. Modèles de détérioration.....	35
1-1-3-1. Formalisme général	35
1-1-3-2. Modèles orthotropes de fissuration.....	37
1-1-3-3. Un potentiel de détérioration.....	39
1-1-4. Théorie de l'endommagement	40
1-1-4-1. Contraintes effectives en endommagement.....	40
1-1-4-2. Modèles d'endommagement	42
1-1-4-3. Plasticité et endommagement.....	43
1-1-4-4. L'évolution de l'endommagement.....	45
1-1-4-5. Cadre thermodynamique d'un modèle élastoplastique avec endommagement.....	47
1-1-5. Vers un modèle élastoplastique avec endommagement	48
 1-2. Modélisation élastoplastique du béton	 49
1-2-1. Quelques notations et définitions.....	50
1-2-2. Faits expérimentaux	51
1-2-2-1. Limites de rupture.....	51
1-2-2-2. Comportement uniaxial du béton	54
1-2-2-3. Variation de volume anélastique	54
1-2-3. Porosité plastique et... microfissuration	57
1-2-4. Critère de Willam-Warnke à trois paramètres	60
1-2-4-1. Critère de plasticité parfaite	60
1-2-4-2. Critère de plasticité avec écrouissage isotrope	62
1-2-4-3. Règle d'écoulement	63
1-2-4-4. Loi d'écrouissage.....	65
1-2-4-5. Domaine d'application	68
1-2-5. Critère de Willam-Warnke modifié	69

1-2-5-1. Critère de plasticité modifié	69
1-2-5-2. Règle d'écoulement	70
1-2-5-3. Extension au cas d'écrouissage	71
1-2-5-4. Domaine d'application	76
1-2-6. Récapitulatif de la modélisation élastoplastique	78
1-3. Extension : couplage plasticité - endommagement	80
1-3-1. Effet du dommage à la décharge-recharge et endommagement	81
1-3-2. Variation des caractéristiques élastiques	83
1-3-2-1. Porosité plastique et endommagement	84
1-3-2-2. Fonctions $K(\phi^p)$ et $G(\phi^p)$	85
1-3-3. Couplage de la plasticité et de l'endommagement	87
1-3-3-1. Les composantes	87
1-3-3-3. Cas d'étude : le cisaillement pur	89
1-3-4. Récapitulatif du modèle élastoplastique avec endommagement	90
1-4. Conclusion	92
 2-APPLICATION AUX CALCULS STATIQUES ET DYNAMIQUES DE STRUCTURES EN BETON ARME ET BETON PRECONTRAIN	
MODELISATION POUTRE MULTIFIBRE	95
2-0. Introduction	97
2-1. Niveau de Discrétisation des structures poutres par éléments finis	99
2-1-1. Discrétisation globale	100
2-1-2. Discrétisation locale	101
2-1-3. Discrétisation semi-globale	102
2-2. Élément poutre multifibre	104
2-2-1. Quelques notations et définitions	105
2-2-1-1. Hypothèse des petites perturbations	105
2-2-1-2. Efforts intérieurs de poutres tridimensionnelles	105
2-2-2. Présentation de l'élément poutre multifibre	107
2-2-2-1. Approche semi-globale appliquée aux poutres tridimensionnelles	107
2-2-2-2. Rappel des hypothèses de déformation des poutres	109
2-2-2-3. Vecteur de déplacement de la fibre k	109
2-2-2-4. Tenseur de déformations linéarisé	111
2-2-2-5. Rigidité à la torsion	113
2-2-3. Mise en équation du problème	117
2-2-3-1. Formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique	117
2-2-3-2. Vecteurs d'efforts intérieurs	119
2-2-3-3. Matrice de rigidité tangente	121
2-2-3-4. Equations d'équilibre incrémentales	122
2-2-4. Récapitulatif	124

2-3. Extensions de la formulation poutre multifibre	125
2-3-1. Modélisation poutre multifibre en grands déplacements	126
2-3-1-1. Transformation finie et déformation infinitésimale des poutres	126
2-3-1-2. Description du mouvement des poutres tridimensionnelles	127
2-3-1-3. Vecteur de déplacement de la fibre k	133
2-3-1-4. Mise en équation	134
2-3-1-5. Récapitulatif	137
2-3-2. Modélisation multifibre du déplacement relatif entre fibres	139
2-3-2-1. Déplacement relatif : le glissement	140
2-3-2-2. Position du problème dans le cas des poutres	141
2-3-2-3. Modélisation géométrique d'une fibre curviligne k	145
2-3-2-4. Vecteur de déplacement de la fibre k	146
2-3-2-5. Facteur de glissement	149
2-3-2-6. Loi de comportement d'une fibre inclinée	150
2-3-2-7. Prise en compte du frottement	152
2-3-2-8. Vecteur des efforts intérieurs et matrice de rigidité tangente	154
2-3-2-9. Récapitulatif	158
2-3-3. Commentaires	159
2-4. Conclusion	161
 3-MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DANS CESAR-LCPC	163
 3-0. Introduction	165
3-1. Code de calcul par éléments finis : CESAR-LCPC	166
3-2. Méthode de résolution numérique	168
3-2-1. Discrétisation temporelle du problème	168
3-2-2. Méthode d'intégration locale de la loi de comportement	170
3-2-3. Algorithme de Newmark	171
3-3. Mise en oeuvre dans CESAR :	173
3-3-1. De "MCNL" à "DYNL"	173
3-3-2. Critères de convergence	173
3-3-3. Calcul du vecteur des efforts intérieurs	176
3-3-4. Bibliothèque des lois de comportement	176
3-4. Test numérique	179
3-5. Conclusion	183

4-EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMERIQUES.....	185
4-0. Introduction	187
4-1. Exemple : Portique plan	189
4-1-1. Géométrie, modélisation, chargements	189
4-1-1-1. Géométrie et modélisation par éléments poutre multicouche	189
4-1-1-2. Chargement statique, cyclique.....	189
4-1-2. Lois du comportement uniaxiales, caractéristiques matérielles	191
4-1-2-1. Béton : loi uniaxiale élastoplastique avec endommagement.....	191
4-1-2-2. Acier.....	192
4-1-3. Quelques résultats.....	193
4-1-3-1. Cas de chargement statique.....	193
4-1-3-2. Cas de chargement cyclique	194
4-1-4. Commentaires	195
4-2. Exemple : Flambement d'un poteau.....	196
4-2-1. Données et modélisation	196
4-2-1-1. Géométrie et modélisation.....	196
4-2-1-2. Matériaux	197
4-2-1-3. Chargement.....	197
4-2-2. Résultats	198
4-3. Exemple : Portique plan multi-étagé - structure ISPRA	199
4-3-1. Données et modélisation	200
4-3-1-1. Choix d'un modèle plan "équivalent"	201
4-3-1-2. Modélisation de la structure "ISPRA plane"	202
4-3-1-3. Matériaux	202
4-3-2. Etude du comportement dynamique non-linéaire de la structure.....	203
4-3-2-1. Chargement.....	203
4-3-2-2. Résultats	204
4-3-2-3. Effets du dommage : variation de la fréquence, évolution de l'amplitude	206
4-3-3. Réponse sous chargement sismique	208
4-3-3-1. Chargement	208
4-3-3-2. Résultats	208
4-3-3-3. Effets du dommage sous chargement sismique	210
4-4. Exemple : Déversement des poutres	211
4-4-1. Données et modélisation	212
4-4-1-1. Système de chargement.....	212
4-4-1-2. Défauts géométriques.....	212
4-4-1-3. Matériaux	212
4-4-1-4. Modélisation.....	214
4-4-2. Comparaisons essais-calculs	215
4-4-2-1. Exploitation des calculs	215
4-4-2-2. Résultats	216
4-4-3. Commentaires	218
4-5. Exemple : Poutres précontraintes.....	219
4-5-1. Données et modélisation	220

4-5-1-1. Géométrie	220
4-5-1-2. Matériaux	220
4-5-1-3. Maillage	222
4-5-1-4. Chargement	222
4-5-2. Mise en précontrainte	223
4-5-2-1. Application de la force de précontrainte (condition aux limites en force)	223
4-5-2-2. Résultats	223
4-5-3. Capacité portante en précontrainte extérieure et intérieure	226
4-5-3-1. Précontrainte extérieure et intérieure (condition aux limites en glissement)	226
4-5-3-2. Résultats	226
4-5-4. Commentaires	228
4-6. Exemple : Structure 3D à portiques multi-étagés sous chargement	
sismique	229
4-6-1. Structure "ISPRA 3D portiques", modélisation	230
4-6-2. Résultats	230
4-6-3. Commentaires	232
4-7. Conclusion	233
CONCLUSIONS	235
BIBLIOGRAPHIE	239
RB1. Références Chapitre 1	241
RB2. Références Chapitre 2	245
RB3. Références Chapitre 3	250
RB4. Références Chapitre 4	251
ANNEXE	253
Annexe 1 : Critères de Willam-Warnke	255
A1-1. Expression explicite du critère	255
A1-2. Expression de la dérivée du critère par rapport à σ	256
A1-3. Paramètres du modèle de Willam-Warnke modifié	257
Annexe 2 : Élément poutre multifibre	259
A2-1. Champ de déplacement discrétisé	259
A2-2. Matrice des dérivées des fonctions d'interpolation	261
A2-2-1. Matrice [B] standard	262
A2-2-1. Matrice [B] pour le cas du glissement	263
A2-3. Matrice de rigidité de l'élément multifibre à 14 DDL	264
Annexe 3 : Rotations semi-tangentielles	267
A3-1. Rotations infinitésimales et rotations finies	267
A3-2. Rotations semi-tangentielles	268

RESUME

Le but de cette thèse est l'étude prédictive par calcul aux éléments finis des effets de la fissuration à l'échelle de structures en béton armé et précontraint soumises à des chargements statiques, cycliques et dynamiques. Il s'agit d'une part de préciser les lois de comportement des matériaux constitutifs de ces structures, et d'autre part de développer des outils numériques adaptés.

Pour la modélisation du comportement du béton, un modèle du comportement macroscopique est présenté, couplant la plasticité à l'endommagement. Pour la partie plastique, il s'agit d'adapter la loi élastoplastique au comportement spécifique du béton. La (micro)fissuration du matériau est représentée à l'échelle macroscopique en termes de déformations plastiques, et l'apparition et l'évolution du dommage par l'évolution de variables plastiques. En particulier, la porosité plastique modélise la variation irréversible de l'espace poreux connecté créé par (micro)fissuration. Cette signification physique est à la base du couplage phénoménologique de la plasticité et de l'endommagement : les effets du dommage sont modélisés par une variation des caractéristiques élastiques fonction de la variable d'endommagement choisie : la porosité plastique.

Cette loi de comportement est utilisée au sein d'un élément fini particulier : l'élément poutre multifibre, issu de l'extension des approches multicouches au cas tridimensionnel. L'outil numérique développé permet de prendre en compte des phénomènes non-linéaires tant matériels que géométriques dans l'analyse de structures à poutres sous des chargement divers avec un temps de calcul raisonnable. Pour l'application au cas des structures en béton précontraint, la formulation prend en compte des déplacements relatifs (glissement) entre câble précontraint et béton : la précontrainte est traitée comme un problème de condition aux limites à l'interface acier-béton.

Ces développements sont mis en oeuvre dans un code de calcul par éléments finis. Au travers d'exemples d'applications numériques, le domaine d'application et les limites des outils proposés sont précisés. Ces outils se veulent une aide à la conception pour les ingénieurs, dans les études prédictives des effets du dommage à l'échelle des structures.

Mots clés : Béton armé - Béton précontraint - Plasticité - Endommagement - Porosité plastique - Élément fini poutre multifibre - Analyse non-linéaire matériel et géométrique - Glissement à l'interface acier, béton - cyclique et dynamique.

ABSTRACT

This thesis seeks to study the effects of cracking at a structural level of reinforced and prestressed concrete structures when subjects to static, cyclic and dynamic loading. This is done by exploring the constitutive equations of materials at a structural level and by developing appropriate numerical tools.

A macroscopic model coupling plasticity with damage is used for modelling the non-linear behaviour of concrete. For the plastic part, the elastoplastic law is adapted to the specific behaviour of concrete. The (micro)cracking of the material is presented at the macroscopic level in terms of plastic strains, and the occurrence and development of damage by the evolution of plastic variables. In particular, the plastic porosity models the irreversible variation of connected porous space created by micro-cracking. This physical significance is at the basis of a phenomenological coupling of the plasticity model with the damage model. Damage effects are then accounted for by a degradation of elastic moduli as a function of the chosen damage variable: the plastic porosity.

This material law is used within a multi-fiber finite beam element which is the extension of the well established planar multi-layer beam element to the three dimensional case. This numerical tool allows to account for material and geometrical non linear effects in the structural analysis of beam type structures subject to various loadings at low computation costs. For prestressing, the formulation takes into account the relative displacement between prestressing tendon and surrounding concrete. It is thus treated as a boundary problem at steel-concrete interface.

These developments are implemented in a finite element program. Through a set of numerical applications, we show the field of application of these developments, as well as their limits, as design tools for structural engineers.

Keywords : Reinforced concrete - Prestressed concrete - Plasticity - Damage - Plastic porosity - Multifibre finite beam element - Material and geometrical non linear analysis - Slip at interface steel, concrete - cyclic and dynamic loading.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit hat die Untersuchung des Tragverhaltens von Stahlbeton- und Spannbetonbauwerken unter statischen, zyklischen und dynamischen Lasten unter Berücksichtigung des Rissverhaltens von Beton zum Ziel. Es werden zum einen die Materialgleichungen für Beton untersucht, zum anderen angemessene numerische Hilfsmittel entwickelt.

Zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens von Beton, wird ein Modell entwickelt, das die Plastizität mit Damage (Steifigkeitsverlust des Materials) koppelt. Für den plastischen Teil wird die klassische Elastoplastizitätstheorie (Fließflächen) im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse an das spezifische nichtlineare Verhalten von Beton angepasst. Micro-risse des Materials werden auf dem Macro-level der Materialbeschreibung durch plastische Variablen beschrieben. Eine neue plastische Variable, die plastische Porosität, wird vorgeschlagen, die die irreversible Entwicklung des verbundenen porösen Hohlraumes infolge Microrissbildung beschreibt. Diese physikalische Bedeutung der plastischen Porosität bildet die Grundlage zur phänomenologischen Erweiterung des Modells zu einem gekoppelten Plastizitäts-Damage Materialmodell für Beton.

Diese Materialgleichung wird infolge innerhalb eines finiten Multifiber-Balkenelements benutzt. Dieses Finite Element, welches die ebenen finiten Multischichten-balkenlemente in den 3D-Bereich erweitert, kann zur Untersuchung von Raumstabtraktwerken unter Berücksichtigung von geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten mit geringen Rechenzeiten benutzt werden. Zur Modellierung der Vorspannung wird eine neue Finite-Element-Formulierung vorgeschlagen, wobei Relativverschiebungen zwischen Beton und Spannkabel als zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden.

Diese Entwicklungen, Materialgleichung und Finites Element, sind in ein Finites-Element-Programm integriert. Eine Reihe von Beispielen umreißt den Anwendungsbereich als auch die Grenzen dieser Entwicklungen als Hilfsmittel für entwerfende Ingenieure.

Schlüssel : Stahlbeton - Spannbeton - Plastizitätstheorie - Damage - Plastische Porosität - Finites Balken-Fiber-Element - Physikalisch und geometrisch nichtlineare Berechnungen - Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton - Zyklische und dynamische Lasten.

AVANT-PROPOS

La fissuration des structures en béton armé fait partie intégrale de leur fonctionnement, volontairement ou non : elle est à la base de l'activation des armatures sous sollicitations mécaniques, et elle résulte, même en l'absence de sollicitations mécaniques, du développement d'un champ d'auto-contraintes à l'échelle de la structure durant la phase de refroidissement qui suit la prise du béton. De plus, elle intervient à une large gamme d'échelles, de l'échelle microscopique à l'échelle de la structure. Alors, quelle est la relation entre la pathologie des ouvrages et leur fissuration ? -

On ne peut répondre à cette question sans considérer la fonction de l'ouvrage construit : c'est l'effet de la fissuration à une échelle et sous un type donné de sollicitation qui est à maîtriser par le concepteur d'un ouvrage en béton armé ou précontraint. L'échelle en considération est alors - avant tout - l'échelle de la structure.

L'effet de la fissuration à cette échelle (ou plutôt : l'effet du dommage) se quantifie de façons diverses liées au type de sollicitation. Par exemple, sous chargement dynamique, l'effet du dommage à l'échelle de la structure en béton armé correspond à une perte de rigidité globale, qui peut être caractérisée et quantifiée par la variation de fréquences propres (*Iemura et Jennings*, 1974). Sous chargements cycliques, l'effet du dommage sur la structure peut être observé sous forme d'une dégradation progressive des boucles d'hystérésis charge appliquée - flèche (*cf. Del Toro*, 1988).

La prise en compte de ces phénomènes pendant la phase de conception d'un ouvrage présente un intérêt certain pour la sécurité des constructions, et un intérêt économique.

Les travaux présentés ici ont pour but l'étude numérique et prédictive de ces effets du dommage à l'échelle d'une structure soumise à des chargements statiques, cycliques et dynamiques. Pour cela, on utilise la méthode des éléments finis. Ce travail se compose de 4 parties :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des non-linéarités du matériau. Ceci nécessite d'abord de modéliser le dommage qui se produit à l'échelle de la structure. Ici, après un bref rappel des principes généraux utilisés dans les modèles existants, on a choisi d'adapter une loi élastoplastique au comportement spécifique du béton. Le dommage est ainsi représenté en termes de déformations plastiques (ou plutôt : permanentes), modélisant la fissuration du matériau. Une variable plastique particulière est utilisée : la porosité plastique, quantifiant la variation irréversible de l'espace poreux connecté. Dans un modèle élastoplastique adapté aux bétons de structures, elle peut s'interpréter comme la porosité créée par fissuration. Par la suite, cette signification physique est à la base de l'extension phénoménologique de la loi de comportement élastoplastique à un modèle élastoplastique avec endommagement. Les effets du dommage sont modélisés par une variation des caractéristiques élastiques, fonction de la variable d'endommagement choisie : la porosité plastique.

Cette loi de comportement est utilisée au sein d'un élément fini particulier, l'élément poutre multifibre, présenté au second chapitre. L'outil numérique développé, issu de l'extension des approches multicouches au cas tridimensionnel, permet de rendre compte des phénomènes non-linéaires tant matériels que géométriques pour l'analyse de structures constituées de poutres, sous des chargements divers, avec un temps de calcul raisonnable. L'élément est tout d'abord développé dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Des extensions de la formulation sont ensuite présentées, en intégrant d'une part les effets non-linéaires géométriques des poutres (grands déplacements, déformation infinitésimale), et d'autre part l'effet de la précontrainte. La prise en compte des non-linéarités géométriques s'effectue en utilisant des techniques bien établies : une description lagrangienne actualisée avec traitement semi-tangentiel des paramètres de rotation. La précontrainte est traitée dans un cadre nouveau, en tant que problème de conditions aux limites à l'interface acier-béton, avec la prise en compte de manière explicite des déplacements relatifs (glissements) entre les câbles de précontrainte et le béton.

La mise en oeuvre numérique des développements est présentée au troisième chapitre, où la méthode itérative et l'algorithme d'intégration du temps pas à pas pour des problèmes dynamiques sont précisés.

Enfin, le quatrième chapitre est consacré aux applications numériques. Les exemples précisent le domaine d'application et les limites des développements effectués. Ces outils se veulent une aide

à la conception pour l'ingénieur, dans les études prédictives des effets du dommage à l'échelle des structures.

Les travaux présentés ici sont le fruit d'une contribution du LCPC aux projets de recherche commun 3.3. et 3.4. du GRECO Géomatériaux (sols, bétons, roches). Ce cadre a joué un rôle important pour la direction choisie de ces travaux de formation complémentaire d'ingénieur par la recherche.

I - MODELISATION ELASTOPLASTIQUE
AVEC ENDOMMAGEMENT
DU BETON DE STRUCTURES

1-0. INTRODUCTION

Toute loi de comportement est construite à une échelle de description donnée. Le modèle choisi doit être d'une part assez complet pour rendre compte des phénomènes physiques observables, et d'autre part assez simple pour identifier les variables introduites et quantifier les grandeurs physiques correspondantes accessibles par l'expérience.

Le travail présenté a pour but le calcul non linéaire des structures en béton armé. La description choisie est macroscopique et s'inscrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

La difficulté de la modélisation du comportement du béton vient de la nécessité de prendre en compte des phénomènes qui sont discontinus, intervenant à une large gamme d'échelles (ordre de grandeur micrométrique pour les microfissures et ordre de grandeur centimétrique pour les macrofissures). L'objectif de ce premier chapitre est de développer un modèle de comportement élastoplastique avec endommagement pour le béton.

Ce chapitre est divisé en 4 parties.

Une première partie présente les principes généraux utilisés par les modèles existants basés sur la mécanique des milieux continus. Parmi ceux-ci figurent les modèles élastoplastiques, les modèles type "détérioration" et les modèles d'endommagement continu.

Une deuxième partie est consacrée à la modélisation élastoplastique du béton. Une loi élastoplastique est développée dans le cas de chargements monotones croissants.

Dans une troisième partie, le domaine d'application de ce modèle est étendu aux cas des chargements cycliques, avec un couplage entre plasticité et endommagement.

Enfin, la quatrième partie est consacrée aux limites du modèle proposé.

1-1. MODELISATION DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE DU BETON

Dans ce qui suit, on se limite aux cas des évolutions isothermes et nous restons dans le cadre des petites déformations. De plus, tout phénomène d'origine visqueuse ou de vieillissement est négligé.

1-1-1. Description des non linéarités matérielles

Le matériau béton peut être observé à différentes échelles, de l'échelle microscopique à l'échelle de la structure. L'échelle microscopique du béton non fissuré est donnée par la dimension de ses plus grandes hétérogénéités, les agrégats. En revanche, la fissuration du matériau peut intervenir à toutes les échelles, de celle des agrégats à celle de la structure, qui peut présenter des fissures franches nettement localisées. Cet aspect multi-échelle de la fissuration rend pratiquement impossible la construction complète d'un modèle partant du microscopique pour arriver à un comportement macroscopique, à l'aide de techniques d'homogénéisation. A cet aspect multi-échelle s'ajoute un aspect multi-composants du béton (pâte de ciment durcie, granulats et liaisons pâte de ciment-granulats).

Pour modéliser cette fissuration, il faut d'abord supposer qu'une description continue des phénomènes discontinus d'une matière hétérogène est possible à l'échelle macroscopique de la structure, en postulant :

- l'hypothèse de continuité,
- l'hypothèse d'homogénéité de la matière (dans un sens "statistique").

L'hypothèse de continuité signifie que les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre, tout en faisant abstraction de la constitution intime de la matière. On suppose ainsi que le comportement non-linéaire du matériau est principalement imputable au développement d'une microfissuration à une échelle inférieure : les variables utilisées pour modéliser ce comportement non-linéaire rendront alors compte à l'échelle macroscopique des effets de cette microfissuration.

Les lois de comportement appliquées à l'échelle macroscopique pour le béton diffèrent en terme de variables d'état. Les premiers modèles proposés ont été des relations élastiques non linéaires, reliant contraintes et déformations (*cf. Chen, 1982*). Ces modèles ne seront pas développés ici.

Le but de cette partie n'est pas de détailler les divers modèles pour le béton. Il s'agit plutôt de tracer les grandes lignes utilisées pour modéliser, à l'échelle macroscopique,

- l'apparition et l'évolution des déformations permanentes,
- le phénomène d'adoucissement et
- le phénomène d'assouplissement du béton.

illustrés sur la *figure 1-1*.

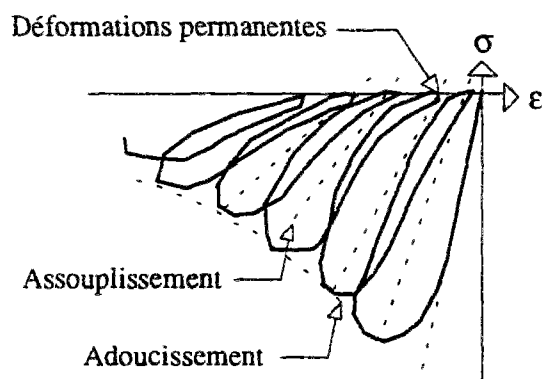


Figure 1-1 :

Courbe uni-axiale de compression simple sous chargement cyclique (d'après *Sinha et al. 1964*) :

Illustration des effets macroscopiques à modéliser.

1-1-2. Loi élastoplastique

Dans la théorie de l'élastoplasticité appliquée à la description du comportement du béton, les déformations permanentes observées lors de déchargements sont attribuées à un (ou plusieurs) mécanisme(s) plastique(s). L'incrément de déformations totales est décomposé en une partie élastique et une partie plastique (ou plutôt permanente) :

$$(1) \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

et l'incrément de contraintes est calculé par :

$$(2) \quad d\sigma = C_e : (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

avec C_e le tenseur de comportement élastique.

Les modèles existants pour le béton diffèrent en termes :

- de la définition des domaines d'élasticité $\mathcal{C}_E$ initial et actuel,
- de la loi d'évolution des déformations permanentes,
- du comportement écrouissable.

Dans la théorie élastoplastique, c'est

- la notion de la surface de charge, qui répond à la question "quand" y a-t-il évolution des déformations plastiques ?
- la règle d'écoulement répondant à la question "comment" s'effectuent ces évolutions ?
- la notion d'écrouissage, liant le "quand" et le "comment".

Dans les ouvrages de *Germain* (1973), de *Lemaitre et Chaboche* (1988) ou bien de *Coussy* (1991), la notion de loi de comportement est développée dans un cadre thermodynamique global. Ici, nous n'évoquerons l'approche thermodynamique que lorsqu'elle apportera une information utile au problème que nous désirons traiter.

Pour les modèles élastoplastiques existants pour le béton, nous invitons le lecteur intéressé à se reporter aux travaux de synthèse plus complets, notamment ceux de *Chen* (1982), repris et complétés dans *Chen et Han* (1988), d'*Eberhardsteiner et al.* (1987) ou de *Labbane et al.* (1993), où se trouve l'application de tous les éléments de la théorie rappelée brièvement ci-dessous.

1-1-2-1. Critère de plasticité

Le domaine d'élasticité $\mathcal{C}_E$ du matériau peut être défini comme un sous-ensemble de l'espace R^6 des contraintes, sous la forme d'une fonction de charge $f(\sigma)$. Pour un matériau plastique parfait ou pour un matériau vierge, nous notons :

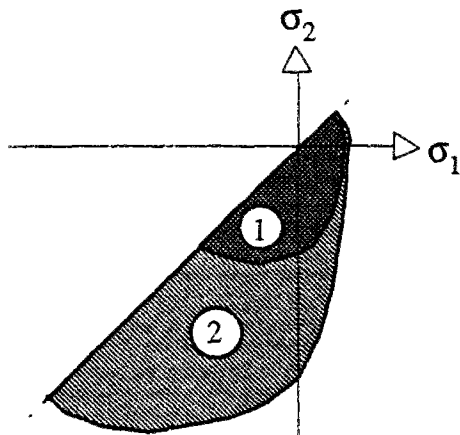


Figure 1-2 :
Domaines d'élasticité du béton
initial (1) et actuel (2).

$$(3) \quad \sigma \in \mathcal{C}_E \Leftrightarrow f(\sigma) \leq 0$$

Dans le cas d'un matériau écrouissable, le domaine d'élasticité $\mathcal{C}_E$ n'est plus fixe (*figure 1-2*). Il dépend également de paramètres d'écrouissage $\mathbf{z}$, scalaires et/ou tensoriels :

$$(4) \quad \sigma \in \mathcal{C}_E \Leftrightarrow f(\sigma, \mathbf{z}) \leq 0$$

Il n'y a évolution des variables plastiques que lorsque le point de charge est situé sur la frontière du domaine d'élasticité.

1-1-2-2. Règle d'écoulement

Le critère de plasticité défini par la fonction de charge $f(\sigma, \mathbf{z})$ répond à la question, "quand" y a-t-il apparition et évolution des déformations plastiques. "Comment" s'effectue cette évolution, est l'objectif de la règle d'écoulement.

Si l'on introduit une fonction convexe $g(\sigma, \mathbf{z})$, appelée *potentiel plastique*, l'évolution des déformations plastiques est supposée vérifier les relations suivantes :

$$(5) \quad d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad \text{avec : } \begin{cases} d\lambda \geq 0 & \text{si } f = 0 \text{ et } df = 0 \\ d\lambda = 0 & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } df < 0 \end{cases}$$

où $d\lambda$ est le multiplicateur plastique, et :

$$(6) \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot d\zeta$$

Si $f(\sigma, \mathbf{z}) = g(\sigma, \mathbf{z})$, la règle d'écoulement est associée, et la direction des incréments de déformations plastiques est normale à la frontière du domaine d'élasticité actuelle $\mathcal{C}_E$ (figure 1-3a). Lorsque $f(\sigma, \mathbf{z}) \neq g(\sigma, \mathbf{z})$, la règle d'écoulement est non associée (figure 1-2b). Le matériau est dit non standard (Halphen et Nguyen, 1975). Dans un cadre thermodynamique, ε^p est une variable d'état interne, et $\partial g / \partial \sigma$ représente la direction suivie par $d\varepsilon^p$, parmi les directions possibles.

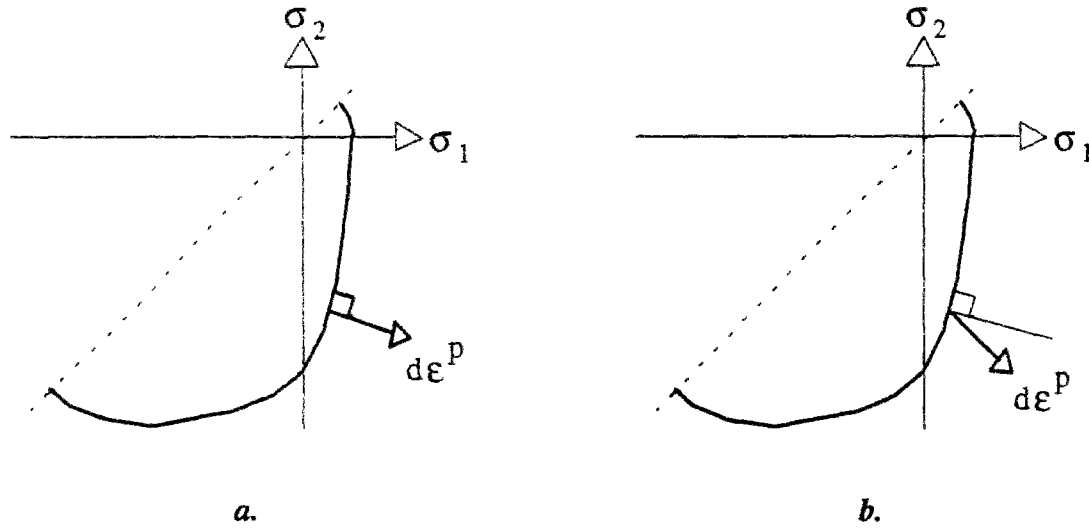


Figure 1-3 :
Illustration de la règle d'écoulement : *a.* associée / *b.* non associée

1-1-2-3. Dissipation intrinsèque

L'inégalité fondamentale locale de Clausius-Duhem pour des évolutions isothermes s'écrit :

$$(7) \quad \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} \geq 0$$

L'équation précédente exprime la non-négativité de la dissipation intrinsèque avec Ψ , l'énergie libre volumique, fonction des variables d'état thermodynamique. Dans le cas d'un matériau élastoplastique écrouissable, on a :

$$(8) \quad \Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \chi) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + U(\chi)$$

d'où :

$$(9) \quad \dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial U}{\partial \chi} \cdot \dot{\chi}$$

où χ sont les variables d'écrouissage et $U(\chi)$ l'énergie bloquée par écrouissage. Utilisant (9) dans (7), la non-négativité de la puissance intrinsèque dissipée (en chaleur) s'écrit (Coussy, 1991) :

$$(10) \quad \Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial U}{\partial \chi} \cdot \dot{\chi} \geq 0$$

où le premier terme de cette équation est la puissance plastique Φ^p et le second est dû aux phénomènes d'écrouissage. On déduit de l'expression (10) de la dissipation intrinsèque, que les forces thermodynamiques associées dans la dissipation aux vitesses du tenseur des déformations plastiques et des variables d'écrouissage, sont respectivement le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le terme $-\partial U / \partial \chi$, appelé force d'écrouissage ζ :

$$(11) \quad \mathbf{z} = \zeta \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{\partial U}{\partial \chi}$$

Dans (8) l'énergie bloquée $U(\chi)$ est supposée indépendante de l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Enfin, l'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est donnée par la règle d'écoulement (5). L'évolution de χ est donnée par la loi d'écrouissage.

1-1-2-4. Loi d'écrouissage

Le domaine d'élasticité initiale est donné par l'expérience. Son évolution dans l'espace des contraintes est décrite par les modèles d'écrouissage. La dépendance du domaine d'élasticité

actuel dans l'espace $\mathbb{R}^6$ de contraintes permet l'identification expérimentale des paramètres d'écrouissage $\mathbf{Z}$.

En vue de leur identification expérimentale, les modèles font intervenir un nombre limité de paramètres d'écrouissage. On peut citer :

- le modèle d'écrouissage *isotrope*, où un seul paramètre scalaire Z définit une transformation homothétique du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes;
- le modèle d'écrouissage *cinématique*, où un seul paramètre tensoriel $\mathbf{Z}$ définit la translation des frontières du domaine d'élasticité.

Les différents modèles et leur combinaison possible sont schématisés sur la *figure 1-4*.

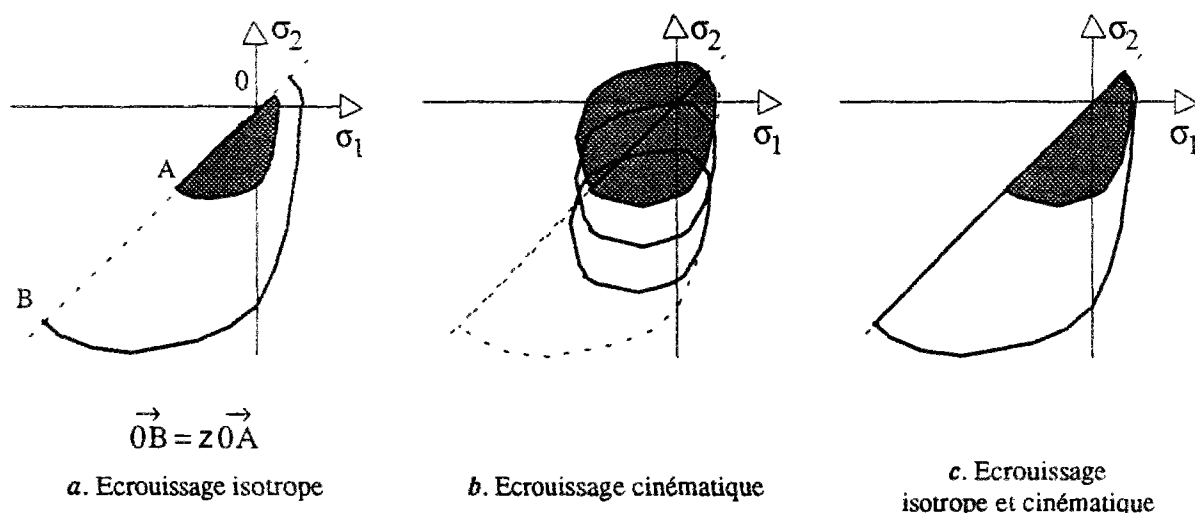


Figure 1-4 : Modèles d'écrouissage

Supposons déterminée une fonction $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{q})$ représentative de l'évolution du domaine d'élasticité $\mathcal{C}_E$ (équation (4)). $\mathbf{q}$ regroupe les variables mesurables contrôlant l'évolution des paramètres d'écrouissage $\mathbf{Z}$. Il n'y aura possibilité d'évolution élastoplastique, avec modification de l'état d'écrouissage, que si un point de charge actuel est situé sur la frontière du domaine d'élasticité ($f = 0$), qu'il entraîne avec lui ($df = 0$), tout en le modifiant. On pourrait déterminer la relation supplémentaire pour l'écrouissage uniquement à partir de la relation de consistance (6) sous la forme :

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \cdot d\mathbf{z} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = -d\lambda H$$

où H est le *module d'écrouissage* actuel. Une relation $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\epsilon^p)$, avec la règle d'écoulement (5) conduit à :

$$(13) \quad H = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \epsilon^p} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

Dans le cadre de la thermodynamique, où les paramètres d'écrouissage $\mathbf{z}$ sont les forces d'écrouissage ζ associées aux variables d'état internes χ (équation (11)), l'évolution des variables d'écrouissage est décrite par une règle d'écrouissage, en supposant que l'on peut définir un potentiel h tel que :

$$(14) \quad d\chi = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

où $\partial h / \partial \zeta$ représente la direction prise par $d\chi$, parmi les directions possibles. Compte tenu des relations (8) et (14), la relation de consistance $df = 0$, s'écrit :

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot d\zeta = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} \right) \cdot d\chi = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = -d\lambda H$$

d'où l'expression de H :

$$(16) \quad H = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

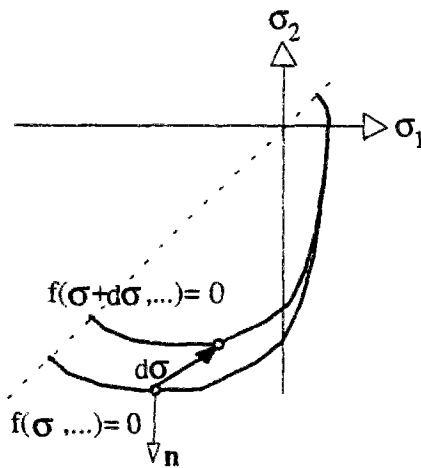
que nous utiliserons par la suite.

Pour un point de charge situé sur la frontière d'élasticité actuelle ($f=0$), on peut distinguer le cas de l'écrouissage positif, défini par $H>0$, de l'écrouissage négatif, défini par $H<0$, avec quelques implications sur la règle d'écoulement concernant le critère de charge / décharge :

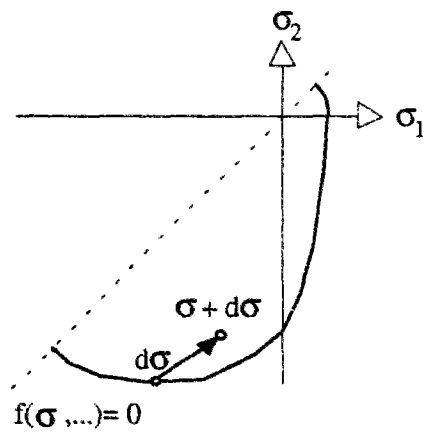
$$(17a) \text{ Pour } H > 0 \quad \begin{cases} d\lambda > 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma > 0 \\ d\lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \leq 0 \end{cases}$$

$$(17b) \text{ Pour } H < 0 \quad \begin{cases} \left. \begin{array}{l} d\lambda > 0 \\ \text{ou} \\ d\lambda = 0 \end{array} \right\} \text{ si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0 \\ d\lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = 0 \end{cases}$$

On note que l'érouissage négatif (équation (17b)) pose une difficulté *inhérente* de modélisation: si le pilotage s'effectue en incrément de contraintes $d\sigma$, et que cet incrément est tel que le nouveau point de charge $\sigma + d\sigma$ rentre à l'intérieur du domaine d'élasticité actuel $\mathcal{C}_E$, il est impossible de distinguer une charge plastique ($d\lambda > 0$) d'une décharge élastique ($d\lambda = 0$), *figures 1-5*. Par conséquent, un pilotage en incréments de déformations $d\varepsilon$ est nécessaire pour déterminer le domaine d'élasticité actuel d'un matériau adoucissant.



a. Charge plastique ($d\lambda > 0$)
en érouissage négatif ($H < 0$)



b. Décharge élastique ($d\lambda = 0$)

Figure 1-5 : Illustration de la difficulté de déterminer de façon univoque la condition charge/décharge dans le cas d'un matériau adoucissant

1-1-2-5. Restrictions thermodynamiques, énergie bloquée par écouissage

L'approche thermodynamique évoquée ci-dessus pour décrire l'évolution de la variable d'écrouissage permet de déterminer les directions possibles, suivies par $d\epsilon^p$ et $d\chi$, imposées par la non-négativité de la dissipation intrinsèque (10). Le potentiel non associé h , précisant la règle d'écrouissage (14), peut être différent du potentiel non associé g , précisant la règle d'écoulement (5). En revanche, les fonctions g et h ne peuvent être choisies de façon quelconque. Utilisant (5), (11) et (14) dans l'inégalité (10), les potentiels g et h doivent satisfaire la condition suffisante :

$$(18) \quad \sigma : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \zeta : \frac{\partial h}{\partial \zeta} \geq 0 \quad \text{si } f=0$$

La condition (18) définit ainsi les directions thermodynamiquement admissibles suivies par $d\epsilon^p$ (éq. (5)) et $d\chi$ (éq. (14)).

D'autre part, l'inégalité de Clausius-Duhem (10) montre que l'énergie dissipée en chaleur pendant le temps dt est égal à $\Phi dt = \Phi^p dt - dU$. Le terme $-dU$ apparaît comme une énergie infinitésimale non convertie en chaleur pendant le temps dt , mais qui ne peut être immédiatement restituée sous forme d'un travail lors d'une rechargement (Coussy, 1991). C'est pourquoi on l'appelle énergie bloquée par écouissage. Les composantes de la puissance intrinsèque sont illustrées sur la *figure 1-6*, où les aires représentent l'intégrale des puissances des composantes de l'équation (10) pendant un cycle de charge à partir de l'origine.

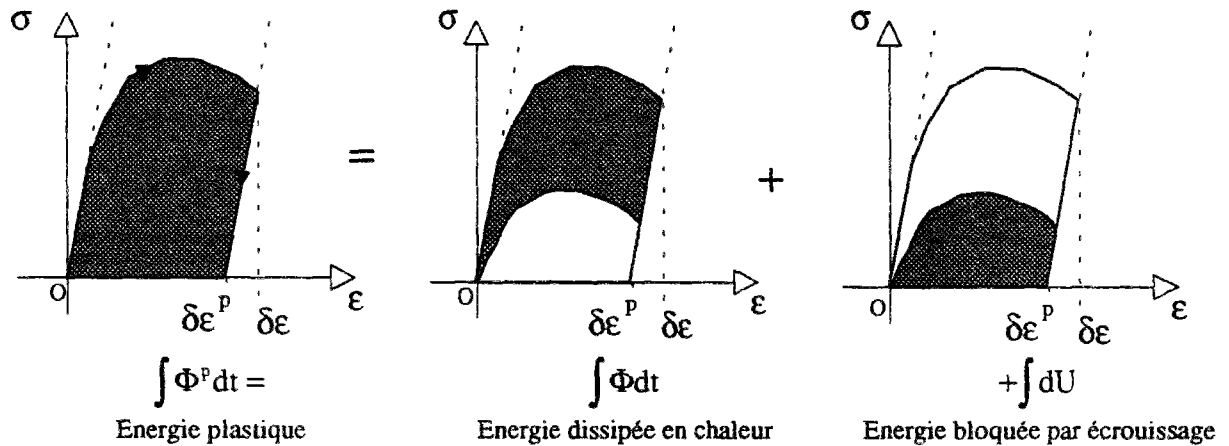


Figure 1-6 : Illustration de la dissipation intrinsèque

Indiquons ici aussi l'origine de l'énergie bloquée par écrouissage. Pour cela, il faut descendre à l'échelle microscopique, échelle en deçà de l'échelle adoptée pour la description continue des évolutions élastoplastiques. Les phases de l'évolution élastoplastique provoquent à l'échelle microscopique une modification de la structure de la matrice hétérogène. Une partie de ces modifications est irréversible. Après une décharge complète du système, en raison de la structure hétérogène de la matrice, l'état de déformation à l'échelle microscopique ne peut pas correspondre à un état de plastification homogène. Par exemple, il pourrait exister des forces résiduelles de contact élastique entre les composants de la matrice. En effet, comme un champ de déformation purement plastique n'est pas compatible à lui seul, c'est à dire qu'il ne dérive pas d'un champ de déplacement, la déformation élastique induite par ces contributions élastiques à l'échelle microscopique assure la compatibilité cinématique des modifications irréversibles de la structure de la matrice. Une certaine énergie n'est pas récupérée à la décharge sous forme de travail, ni convertie sous forme de chaleur, mais bloquée - par écrouissage.

1-1-2-6. Formulation élastoplastique dans l'espace des déformations

Le comportement adoucissant (écrouissage négatif) pose une difficulté inhérente à la modélisation (*cf.* 1-1-2-4) : on ne peut pas *a priori* distinguer une décharge élastique d'une charge plastique, lorsque le pilotage s'effectue en contraintes. Cette difficulté a amené plusieurs auteurs à proposer une formulation élastoplastique dans l'espace des déformations analogue à la formulation plus classique dans l'espace des contraintes.

L'idée de base consiste à définir un état de contraintes de référence du matériau *vierge* élastique. Sous forme incrémentale, on a :

$$(19) \quad d\sigma = d\tilde{\sigma} - d\sigma^p \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} d\tilde{\sigma} = C_o : d\varepsilon \\ d\sigma^p = C_o : d\varepsilon^p \end{cases}$$

où σ est le tenseur de contraintes totales associé par l'équilibre mécanique à un effort extérieur défini à l'échelle du système élémentaire. $\tilde{\sigma}$ est le tenseur de contraintes dites *effectives*, et σ^p est le tenseur dit de *relaxation* dû à la plastification. La règle d'écoulement s'écrit :

$$(20) \quad d\sigma^p = d\Lambda \frac{\partial G(\epsilon, \mathbf{q})}{\partial \epsilon} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} d\Lambda > 0 \text{ si } F = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \epsilon} : d\epsilon > 0 \\ d\Lambda = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial \epsilon} : d\epsilon \leq 0 \end{cases}$$

où la fonction $G(\epsilon, \mathbf{q})$ est le potentiel plastique et la fonction $F(\epsilon, \mathbf{q})$ la surface de charge ou surface de *relaxation* (Yoder et Iwan, 1981). F définit le domaine d'élasticité $\mathcal{C}_E$ dans l'espace des déformations :

$$(21) \quad \epsilon \in \mathcal{C}_E \Leftrightarrow F(\epsilon, \mathbf{q}) \leq 0$$

L'équation (20) montre l'avantage de la formulation élastoplastique dans l'espace des déformations par rapport à celle dans l'espace des contraintes : la définition de la condition charge/décharge est univoque. A l'aide d'un état de contraintes *effectives* de référence attribué à un état vierge de la matière, on ne fait pas la distinction entre l'écrouissage (positif) ($|d\tilde{\sigma}| > |d\sigma^p|$), l'adoucissement ($|d\tilde{\sigma}| < |d\sigma^p|$), ou le comportement plastique parfait ($d\tilde{\sigma} = d\sigma^p$) du matériau, (figure 1-7). C'est pourquoi cette formulation est fréquemment utilisée pour modéliser le comportement du béton (Han et Chen, 1986; Chen et Han, 1988; Chen, Yamaguchi et Zhang, 1991; Pekau, Zhang et Liu, 1992; Mizuno et Hatanaka, 1992). Par ailleurs, comme tout critère, qu'il soit de plasticité, d'endommagement ou de rupture fragile, ne peut se mettre *a priori* que sous la forme $f(\sigma, \dots)$, (Coussy, 1991), le critère de relaxation $F(\epsilon, \mathbf{q})$ peut seulement être *déduit* d'un critère de plasticité $f(\sigma, \mathbf{z})$ établi dans l'espace des contraintes (e.g. Mizuno et Hatanaka, 1992).

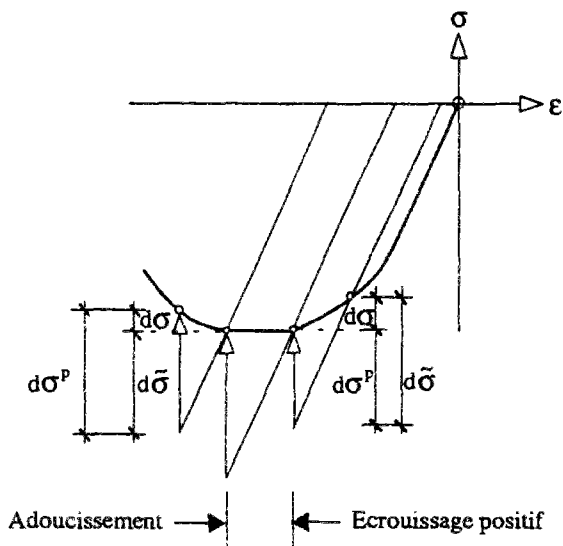


Figure 1-7 :

Illustration de la modélisation du comportement écouissage (positif), plastique parfait et adoucissement dans la formulation élastoplastique dans l'espace de déformations.

1-1-2-7. Limites de la modélisation élastoplastique du béton

Une modélisation élastoplastique permet de modéliser les déformations permanentes, et le comportement écrouissable et adoucissant du béton. Mais elle ne rend donc pas compte du phénomène d'assouplissement (variation des caractéristiques élastiques), et surestime la valeur des déformations permanentes dans le domaine d'adoucissement, (*figures 1-8*). D'un point de vue pratique, cela signifie en particulier que ce type de modèle n'est pas adapté à l'étude des structures en béton soumises à des chargements cycliques.

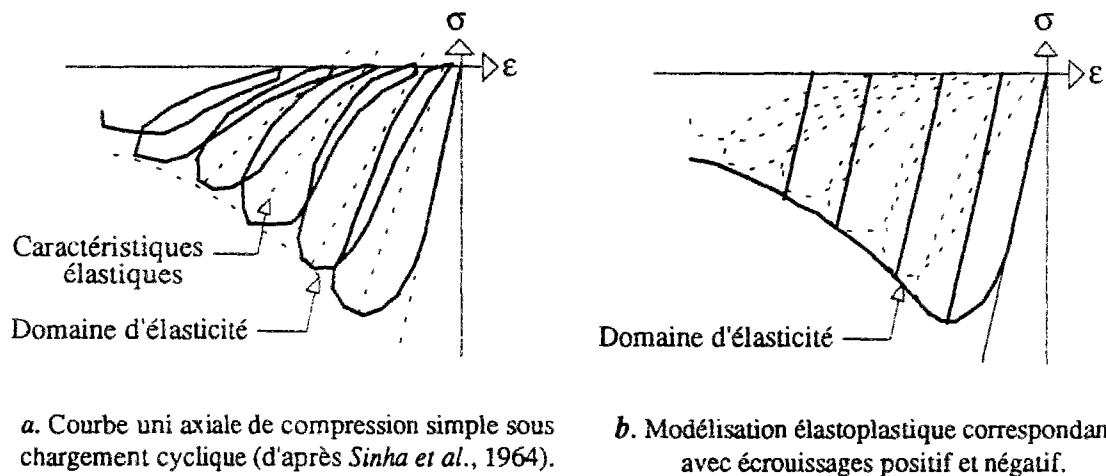


Figure 1-8 : Illustration des limites de la modélisation élastoplastique concernant l'application au cas d'un chargement cyclique

Supposant qu'une description continue du phénomène d'assouplissement est possible à l'échelle macroscopique de la structure, on est amené à définir une variable macroscopique, prenant en compte d'une façon explicite ou implicite la variation des caractéristiques élastiques. La définition même d'une telle variable mécanique pose un problème complexe, car les phénomènes discontinus de microfissuration auxquels cette détérioration est attribuée sont difficilement quantifiables à l'échelle de description macroscopique. Les paragraphes suivants sont consacrés à quelques modèles existants qui prennent en compte ce phénomène.

Parmi les modèles décrivant le comportement d'assouplissement à l'échelle macroscopique, on peut distinguer, selon les variables utilisées :

- les modèles de détérioration due à la fissuration, caractérisés par l'utilisation explicite d'une variable de déformation associée à la fissuration,
- les modèles d'endommagement avec des variables (scalaires ou tensorielles) décrivant d'une façon explicite la dégradation progressive des caractéristiques élastiques.

La principale différence entre ces deux ensembles de modèles réside dans l'existence ou non d'une *élasticité infinitésimale*.

1-1-3. Modèles de détérioration

1-1-3-1. Formalisme général

D'une façon générale, les modèles de détérioration due à la fissuration attribuent les déformations anélastiques à deux mécanismes, l'un d'origine plastique et l'autre associé à des fissures réparties d'une façon régulière dans un volume élémentaire $d\Omega$:

$$(22) \quad d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p + d\epsilon^f$$

La décomposition (22) conduit à exprimer l'incrément de contrainte de manière analogue à celle de l'équation (2) :

$$(23) \quad d\sigma = C_0 : (d\epsilon - d\epsilon^p - d\epsilon^f)$$

avec C_0 le tenseur de comportement élastique, indépendant de l'état physique (plastification, détérioration) du matériau. Ainsi, on constate l'existence d'une élasticité infinitésimale. L'effet d'assouplissement est pris en compte d'une façon implicite par l'intermédiaire de $d\epsilon^f$. On écrit également :

$$(24) \quad d\sigma = d\tilde{\sigma} - d\sigma^p - d\sigma^f$$

où $d\sigma^f$ est l'incrément du tenseur de relaxation due à la fissuration.

Les relations précédentes sont illustrées sur la *figure 1-9*.

La déformation permanente due à la refermeture incomplète des fissures dans le cas d'un déchargement total est seulement attribuée à des déformations d'origine plastique, tandis que les déformations de fissuration ϵ^f s'annulent après une décharge totale, *figure 1-9* (Han et Chen, 1986; Klisinski et Mroz, 1988), ce qui revient à supposer pour un cycle complet de charge-décharge en contraintes :

$$(25) \quad \epsilon^f = \oint d\epsilon^f \equiv 0$$

La condition (25) peut être considérée comme une relation supplémentaire pour le déchargement. Il en existe de variées.

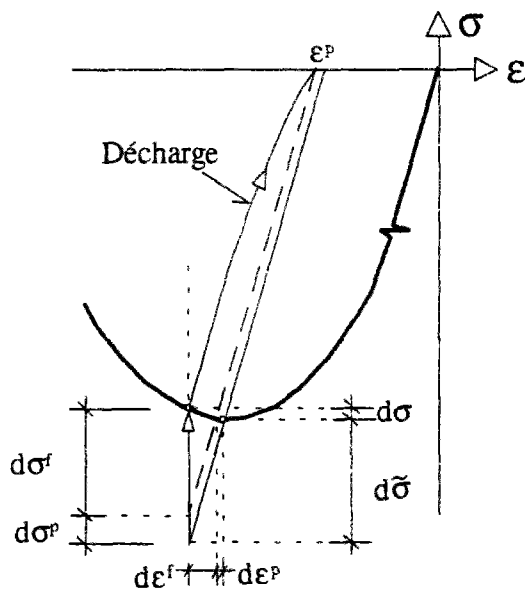


Figure 1-9 :
Illustration de la décomposition incrémentale du tenseur des déformations et des contraintes (d'après Han et Chen, 1986).

Les modèles existant diffèrent en termes de détermination de $d\epsilon^f$ ou $d\sigma^f$. On peut distinguer deux approches différentes, qui peuvent être toutefois complémentaires :

- d'une part, il s'agit des modèles issus des modèles orthotropes de fissuration répartie ("smeared cracking approaches") (de Borst et Nauta, 1985; Gajer et Dux, 1990)
- à distinguer de ceux postulant un potentiel de dissipation pour décrire leur évolution (Bazant et Kim, 1979; Han et Chen, 1986; Klisinski et Mroz, 1988; Gajer et Dux, 1991).

1-1-3-2. Modèles orthotropes de fissuration

Les premiers modèles orthotropes de fissuration répartie ("smeared cracking approaches") datent de la fin des années 60 (*Rashid, 1968*). Après fissuration, le comportement initialement isotrope est remplacé par une relation orthotrope reliant les contraintes et les déformations dans le repère principal des déformations, considéré comme repère de fissuration. On peut distinguer les modèles où les axes d'orthotropie sont fixés avec le début de la fissuration ("fixed smeared crack models"), de ceux où les axes d'orthotropie sont en rotation, attachés aux vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres du tenseur de déformations ("rotating smeared crack concept"), (*cf. de Borst, 1991*). Cette approche, souvent retenue pour l'analyse non linéaire de structures planes en béton armé, peut être considérée comme une extension des modèles élastiques non linéaires liés à un repère particulier de fissuration, et où la décomposition des déformations (22) n'apparaît qu'implicitement.

Dans les modèles où cette décomposition intervient de manière explicite (*de Borst et Nauta, 1985; Gajer et Dux, 1990*), on suppose que les ouvertures de fissures ont lieu dans un plan repéré par une normale $\mathbf{n}$ donnée par le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre du tenseur des déformations d'extension. Les fissures sont considérées comme étant planes et parallèles, uniformément réparties sur une longueur caractéristique b (*figure 1-10a*). Elle permet de lier l'ouverture de fissure w à une grandeur de déformation de fissuration dans le volume élémentaire sous la forme :

$$(26) \quad dw = b \cdot d\varepsilon_{nn}^f$$

On utilise ici un critère énergétique de la mécanique non linéaire de la rupture :

$$(27) \quad G_f = \int_0^w \sigma_{nn}^f dw = b \cdot \int_0^{\varepsilon_w^f} \sigma_{nn}^f d\varepsilon_{nn}^f = \frac{1}{2} \frac{f_t'^2}{E_f} b$$

où G_f est "l'énergie de rupture", f_t' la résistance en traction simple et E_f le module liant σ_{nn}^f et ε_{nn}^f d'une façon linéaire, (*figure 1-10b*). "L'énergie de rupture" est l'énergie nécessaire pour qu'une fissure s'ouvre de $w=0$ ($\Leftrightarrow \sigma_{nn}^f = f_t'$) à $w=W$ ($\Leftrightarrow \sigma_{nn}^f = 0$). "L'énergie de rupture" et la courbe (σ_{nn}^f - w) sont considérées comme étant des propriétés intrinsèques du matériau.

Avec quelques hypothèses supplémentaires concernant l'activation du frottement dans le plan de fissuration, on établit des relations reliant contraintes et déformations de type :

$$(28) \quad d\sigma_{nn}^f = C_{f0}(G_f, b, f_t', E_f, \dots) : d\epsilon_{nn}^f$$

où C_{f0} est le tenseur de comportement dans le repère de fissuration, et ne dépend que des propriétés intrinsèques ($G_f, b, f_t', E_f, \dots$) du matériau. Cette formulation peut être étendue aux cas de plusieurs fissures de directions différentes (*de Borst et Nauta, 1985*), avec prise en compte de la densité de la fissuration dans le volume élémentaire considéré (*Gajer et Dux, 1990*).

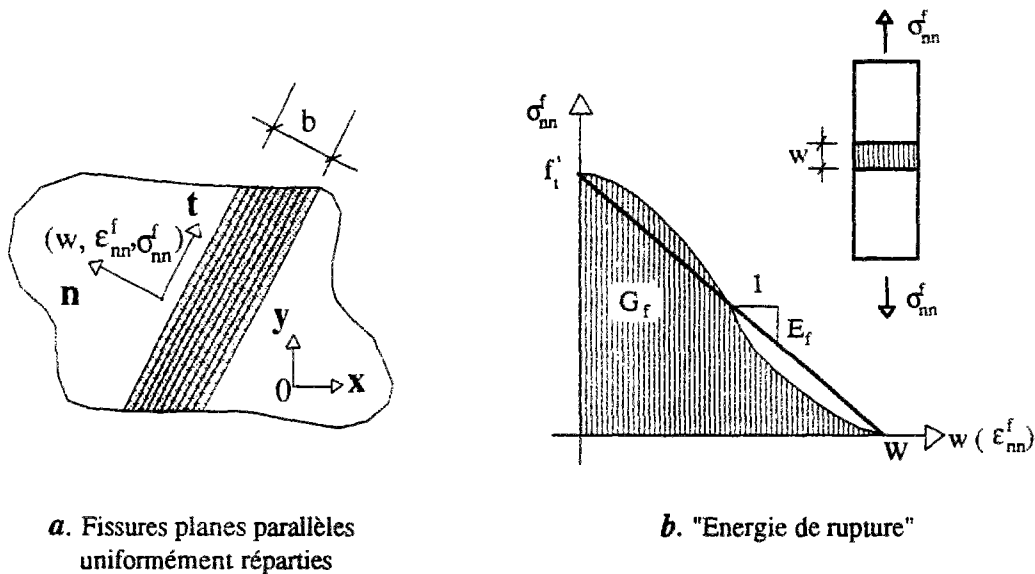


Figure 1-9 :

Illustration des déformations de fissuration et liaison avec la mécanique de la rupture (d'après *Gajer et Dux, 1990*)

La description macroscopique est effectuée par l'intermédiaire d'une longueur caractéristique b . Cette longueur b constitue un outil numérique nécessaire imposé par la description continue choisie. Mais des propriétés intrinsèques comme l'énergie de rupture G_f sont difficiles à déterminer (*Petersson, 1980; Hillerborg, 1985*). De plus, le modèle stipule l'observabilité de directions privilégiées non associées à la matière, mais aux valeurs propres d'une grandeur d'ordre cinématique, le tenseur de déformations totales ϵ . On peut se poser la question de l'objectivité spatiale des relations liants les contraintes et les déformations. Enfin, cette approche s'étend difficilement au cas tridimensionnel.

1-1-3-3. Un potentiel de détérioration

La décomposition (22), respectivement (24), a amené plusieurs auteurs à traiter l'évolution des déformations, liée au processus de détérioration interne, à l'aide d'un potentiel $h(\sigma)$ (respectivement, $H(\epsilon)$) tel que l'évolution des déformations de détérioration (respectivement, l'évolution des contraintes de relaxation associées à la détérioration) vérifie (Dougill, 1976; Bazant et Kim, 1979; Klisinski et Mroz, 1988; Gajer et Dux, 1991) :

$$(29) \quad d\epsilon^f = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \sigma} \quad (\text{respectivement, } d\sigma^f = d\lambda \frac{\partial H}{\partial \epsilon})$$

Les relations précédentes répondent à la question "comment" ? Qu'en est-il de la question "quand" ? En particulier, compte tenu de la condition de décharge totale (25), que se passerait-il dans le cas d'un déchargement ? En effet, en l'absence d'autres variables (comme l'endommagement) qui traduisent l'effet du tenseur de déformation de détérioration sur les caractéristiques élastiques, ces modèles ne peuvent être utilisés que pour décrire l'évolution de ϵ^f sous un chargement croissant.

Pour ce qui concerne les déchargements, une relation supplémentaire est nécessaire. Par exemple, on peut supposer $d\sigma^f$ fonction d'une variation des caractéristiques élastiques dC et du tenseur des déformations recouvrables totales $\epsilon - \epsilon^p$ (Han et Chen, 1986) :

$$(30) \quad d\sigma^f = dC : (\epsilon - \epsilon^p)$$

qui conduit à réécrire l'équation (23) sous la forme :

$$(31) \quad d\sigma = C_o : (d\epsilon - d\epsilon^p) - dC : (\epsilon - \epsilon^p)$$

Sous la forme (31), le tenseur $d\epsilon^f$ n'apparaît qu'implicitement, et on peut constater la perte d'élasticité infinitésimale. Le tenseur dC peut par exemple être exprimé en fonction du tenseur de déformations plastiques ϵ^p (Dafalias, 1977, Han et Chen, 1986). Dans ce cas, on suppose que les déformations plastiques rendront compte à l'échelle macroscopique des effets de la microfissuration : la variation de caractéristiques élastiques est ainsi liée à une variable macroscopique *mesurable*.

Ce type de modèles est à distinguer des modèles d'endommagement.

1-1-4. Théorie de l'endommagement

Dans l'application de la théorie de l'endommagement au comportement spécifique du béton on imagine une variable interne $\mathbf{D}$ (scalaire ou tensorielle), définie à travers la variation de modules apparents. Par exemple, dans le cas scalaire, on a :

$$(32) \quad D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$$

où E et $\tilde{E}$ s'interprètent respectivement comme les modules d'Young du matériau vierge et du matériau endommagé. Utiliser ainsi la théorie d'endommagement pour modéliser l'effet d'assouplissement conduit à supposer l'existence d'une variable D qui, quant à elle, est définie à travers la variation des caractéristiques élastiques. L'évolution de D est déterminée de manière déductive à partir de mesures de la variation de modules apparents, rapportée à un état *vierge* du matériau considéré comme "sain". Ceci conduit à la notion de *contraintes effectives* en endommagement, initialement proposée par *Lemaitre et Chaboche* (1988).

1-1-4-1. Contraintes effectives en endommagement

Le concept de *contraintes effectives* en endommagement peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$(33) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

où $\mathbf{M}(\mathbf{D}) = \mathbf{I} - \mathbf{D}$ est l'opérateur d'endommagement liant les *contraintes effectives* $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ aux contraintes totales $\boldsymbol{\sigma}$. $\mathbf{I}$ et $\mathbf{D}$ sont respectivement le tenseur unité et le tenseur d'endommagement.

Le tenseur $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est considéré comme le tenseur de contraintes qu'il faudrait appliquer au matériau vierge pour obtenir le même tenseur de déformations élastiques que celui produit par le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sur le matériau endommagé, (*figure 1-11*).

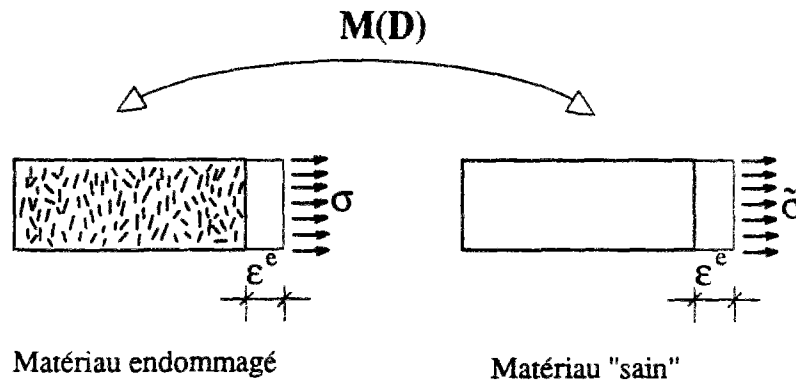


Figure 1-11 : Principe d'équivalence en déformation (élastique) (d'après Ju, 1989)

Les contraintes effectives sont supposées être les contraintes agissant sur l'aire résistante (ou *effective*) d'une section de l'élément de volume, telles que :

$$(34) \quad \forall da \quad \begin{cases} dF = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\tilde{a} = \sigma \cdot \mathbf{n} da \\ d\tilde{a} = (1 - D) da \end{cases}$$

où $d\tilde{a}$ est la facette *effective* et da l'aire de la facette totale. La première relation constitue la définition des contraintes effectives en endommagement, établissant le caractère tensoriel de $\tilde{\sigma}$. La deuxième relation est une définition de la variable d'endommagement D comme quantité surfacique, considérée comme "mesure mécanique" de l'endommagement relatif à la direction $\mathbf{n}$, (Lemaitre et Chaboche, 1988). Cependant, on peut se poser la question du rôle joué par une variable d'état définie comme une quantité surfacique dans la dissipation volumique où elle apparaîtra.

Une définition volumique de l'endommagement est proposée par Franziskonis et Desai (1987^{a-c}). Le comportement macroscopique du béton est considéré comme étant la combinaison des deux parties : une partie représente le comportement du matériau sain du volume $d\tilde{\Omega}$, l'autre représente le comportement du matériau autour de microfissures, sans contraintes, occupant le volume $d\Omega_d$, et $d\Omega = d\tilde{\Omega} + d\Omega_d$, (figure 1-12).

On introduit une variable d'endommagement scalaire, décrivant l'effet de la partie endommagée sur le comportement global dans le volume élémentaire, sous la forme :

$$(35) \quad \forall d\Omega \quad d\tilde{\Omega} = (1 - D)d\Omega$$

où D est le scalaire d'endommagement, tel que $D = 0$ pour le matériau vierge, et $D = 1$ à la ruine.

La définition (35) d'un volume effectif $d\tilde{\Omega}$ ne peut être ni justifiée ni vérifiée. $d\tilde{\Omega}$ n'est pas le volume solide, c'est à dire le volume apparent diminué des vides, et $d\Omega_d$ ne correspond pas au volume créé par microfissuration, mais à l'espace affecté par la fissuration. De plus, en raison de la géométrie hétérogène du matériau à l'échelle microscopique, l'hypothèse d'un état des contraintes relâché semble peu probable.

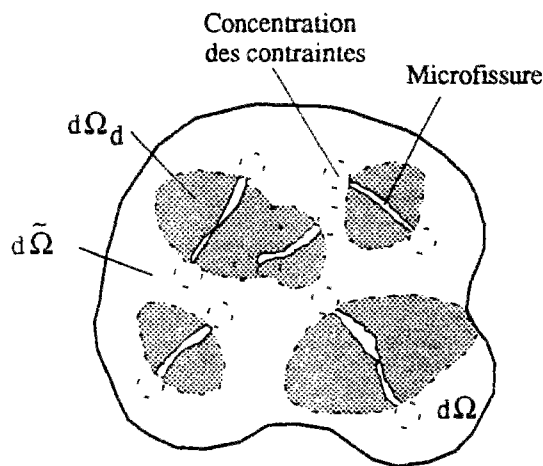


Figure 1-12 :

Schéma à deux composantes du comportement. $d\Omega_d$ correspond à l'espace affecté par la microfissuration, on le considère comme étant sans contraintes. (d'après Frantziskonis et Desai. 1987)

On constate ici, que la définition même de la variable d'endommagement pose un problème, et les définitions (34) ou (35) n'apportent aucune indication supplémentaire pour la détermination expérimentale de l'endommagement. Il apparaît ainsi, que la "mesure" de l'endommagement correspond à la "mesure" d'un modèle posé *a priori* : cette variable n'est pas accessible d'une façon directe par l'expérience, mais à travers une interprétation.

1-1-4-2. Modèles d'endommagement

Les modèles existant pour le béton peuvent être distingués en fonction de l'ordre tensoriel des variables d'endommagement utilisées, notamment

- le modèle d'endommagement scalaire (tenseur d'ordre 0), issu du concept d'endommagement scalaire de *Kachanov* (1958) et *Rabotnov* (1963) appliqué au béton par exemple par *Mazars* (1984), *Resende* (1987), *Frantziskonis et Desai* (1987^{a-c}).
- les modèles d'endommagement tensoriel d'ordre 1, 2 et 4 avec ou sans déformations anélastiques (*Cordebois*, 1983; *Ramtani*, 1990; *Jubran et Cofer*, 1991).

Sous forme incrémentale, on a :

$$(36) \quad d\sigma = (I - D).d\tilde{\sigma} - dD.\tilde{\sigma}$$

Cet incrément de contraintes dépend de $d\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma}$: on constate la perte d'élasticité infinitésimale. De plus, si le tenseur $d\sigma$ n'est pas constitué d'une façon isotrope des deux composantes $(I - D).d\tilde{\sigma}$ et $dD.\tilde{\sigma}$, on parle d'une anisotropie induite. Cette anisotropie est à distinguer de l'anisotropie du modèle d'endommagement, si l'opérateur d'endommagement $M(D)$ a une forme anisotrope.

En outre, on peut distinguer les modèles d'endommagement couplés à l'élasticité (par exemple *Mazars*, 1984) de ceux couplés à la plasticité (*Frantziskonis et Desai*, 1987^{a-c}; *Ju*, 1989). Dans tout ce qui suit, on ne considère que le cas de l'endommagement scalaire.

1-1-4-3. Plasticité et endommagement

Plusieurs auteurs ont supposé que les contraintes locales dues à la microfissuration, sont redistribuées dans un domaine "effectif" $d\tilde{\Omega}$. Ces redistributions provoquent un état de contraintes dans $d\tilde{\Omega}$ plus important que celui qui est lié par l'équilibre mécanique à un effort extérieur. En conséquence, l'écoulement plastique est supposé dû aux "quantités effectives", comme le tenseur de contraintes effectives. Le critère de plasticité peut se mettre sous la forme d'une surface de charge en fonction des contraintes effectives, définissant avec des paramètres d'écrouissage $\mathbf{Z}$ le domaine "élasto-endommagé" $\mathcal{C}_{E-D}$, et on a :

$$(37) \quad \tilde{\sigma} \in \mathcal{C}_{E-D} \Leftrightarrow f = f(\tilde{\sigma}, \mathbf{Z}) \leq 0$$

et, comme règle d'écoulement :

$$(38) \quad d\mathbf{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} d\lambda > 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } df = 0 \\ d\lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } df < 0 \end{cases}$$

avec $g = g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{Z})$ le potentiel plastique. La règle d'écoulement en contraintes effectives assure que la direction $\partial g / \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ prise par $d\mathbf{\varepsilon}^p$ parmi les directions possibles est indépendante de l'état d'endommagement.

Pour démontrer l'effet de l'endommagement sur le domaine d'élasticité, prenons un matériau élastoplastique parfait avec endommagement scalaire, avec un critère de plasticité *effectif* qui se met sous la forme du critère de plasticité classique de Drucker-Prager :

$$(39) \quad f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\tau} + f(\tilde{\sigma} - \rho) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \tilde{\sigma} = \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} / 3 & \tilde{\sigma} = K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \tilde{\tau} = \sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{s}} : \tilde{\mathbf{s}}} & \tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\sigma} \mathbf{1} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \end{cases}$$

où les invariants $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\sigma}$ sont définis en fonction des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, K et G sont les modules élastiques de compression et de cisaillement, et $(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$ le déviateur des déformations élastiques. f , coefficient de frottement, et ρ , pression de cohésion, sont des constantes.

Considérons un modèle où la variable d'endommagement D agit d'une façon identique sur les deux caractéristiques élastiques K et G . Pour un point de charge effective sur la surface, on a alors :

$$(40) \quad f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\tau}{1-D} + f\left(\frac{\sigma}{1-D} - \rho\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \tau + f(\sigma - (1-D)\rho) = 0$$

Considérons maintenant le cas où la variable d'endommagement n'agit que sur le module de cisaillement. Pour un point de charge effective sur la surface, on a ainsi :

$$(41) \quad f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\tau}{1-D} + f(\sigma - \rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \tau + f(1-D)(\sigma - \rho) = 0$$

La *figure 1-13* montre l'effet de l'endommagement sur le domaine d'élasticité dans le demi-plan (σ, τ) . L'endommagement a un effet similaire à un écrouissage isotrope négatif.

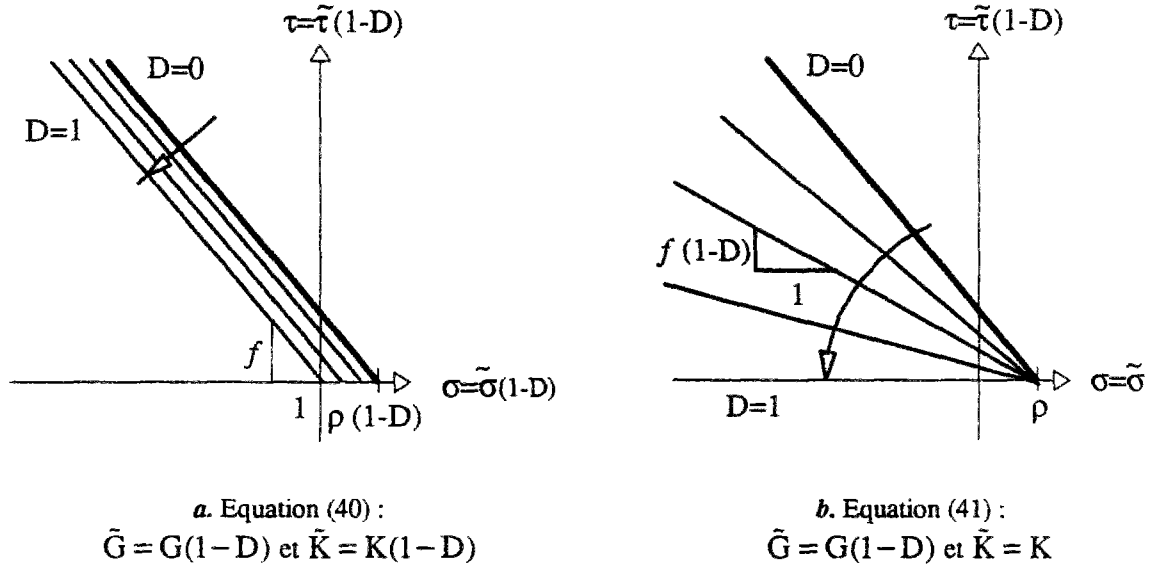


Figure 1-12 :

Influence de la variable d'endommagement scalaire sur le domaine d'élasticité du critère de Drucker-Prager, illustrée dans le demi-plan (σ, τ)

1-1-4-4. L'évolution de l'endommagement

Comme on l'a vu, la mesure directe de l'endommagement pose problème, dans le sens où ce n'est pas la variable qu'on peut mesurer dans l'expérience, mais la variation de modules apparents, *i.e.* une fonction de type $E=E(t)$, $G=G(t)$ ou $K=K(t)$. Ceci conduit à travers l'interprétation (par exemple équation (32)) à la détermination d'une fonction $D=D(t)$. Supposons de plus, qu'on a également déterminé dans l'expérience une fonction $q=q(t)$ d'une variable q , considérée comme variable d'évolution d'endommagement. On peut ainsi établir une fonction $D = D(q)$.

Mazars (1984) propose de piloter l'évolution de l'endommagement scalaire en fonction d'une déformation équivalente, définie par :

$$(42) \quad D = D(\bar{\epsilon}) \quad \text{et} \quad q = \bar{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1,3} \langle \epsilon_i \rangle^2} \quad \text{avec : } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

où ϵ_i sont les valeurs propres du tenseur des déformations totales. Le paramètre $q = \bar{\epsilon}$ est considéré comme étant représentatif de l'état local d'extension (volumique), et prend en compte la dissymétrie du comportement du béton en traction et en compression dans un modèle

d'endommagement couplé à l'élasticité. Dans ce modèle, il n'y a évolution de D que s'il y a augmentation de $\tilde{\epsilon}$.

Dans leur modèle d'endommagement couplé à la plasticité, *Frantziskonis et Desai* (1987) proposent une évolution de l'endommagement fonction de la distorsion plastique équivalente :

$$(43) \quad D = D(\gamma_{\epsilon q}^p)$$

avec :

$$(44) \quad \gamma_{\epsilon q}^p = \int d\gamma_{\epsilon q}^p \quad \text{avec} \quad d\gamma_{\epsilon q}^p = \sqrt{\frac{1}{2} d\gamma^p : d\gamma^p} \geq 0$$

$$\text{où : } d\gamma^p / 2 = d\epsilon^p = d\epsilon^p - \text{tr}(d\epsilon^p / 3) \mathbf{1}$$

Dans ce modèle, il n'y a évolution de D que s'il y a évolution plastique ($f = 0$ et $df = 0$).

Par ailleurs, la variable $q = \gamma_{\epsilon q}^p$ a un sens physique indépendant de la loi d'évolution $D = D(\gamma_{\epsilon q}^p)$. En effet, pour un comportement isotrope, l'incrément $d\gamma_{\epsilon q}^p$ est, à un facteur multiplicateur (de dilataance δ) près, égal à l'incrément de déformation volumique irréversible $\text{tr}(d\epsilon^p)$:

$$(45) \quad \text{tr}(d\epsilon^p) = \delta d\gamma_{\epsilon q}^p \quad \begin{cases} \delta > 0 & \text{plastiquement dilatant} \\ \delta < 0 & \text{plastiquement contractant} \end{cases}$$

On pourrait ainsi faire dépendre directement les caractéristiques élastiques (K, G) de q :

$$(46) \quad \begin{cases} K = K(q) \\ G = G(q) \end{cases} \quad \text{au lieu de :} \quad \begin{cases} K = K(D) \\ G = G(D) \end{cases}$$

de manière habituellement utilisée (par exemple par *Frantziskonis et Desai* (1987)).

Un tel modèle aurait surtout l'avantage sur les modèles classiques d'endommagement que la variable d'endommagement q est cette fois mesurable.

Cette démarche a été proposée par *Fauchet* (1991), en conclusion de ses travaux, pour construire un modèle "poroplastique endommageable".

1-1-4-5. Cadre thermodynamique d'un modèle élastoplastique avec endommagement

Supposons alors que la variable q est une variable plastique :

$$(47) \quad q = \chi$$

et l'existence d'une énergie libre de la forme :

$$(48) \quad 2\Psi = 2G(\chi)(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + K(\chi) \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + 2U(\chi)$$

L'hypothèse (47) est cohérente avec celle relative à la modélisation continue de la fissuration du béton, dont on suppose que le comportement non-linéaire du matériau est principalement imputable au développement d'une microfissuration à une échelle inférieure : en rendant compte à l'échelle macroscopique des effets de cette microfissuration la variable plastique χ modélise le phénomène d'adoucissement et le phénomène d'assouplissement du béton.

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$(49) \quad \Phi = \Phi^p - \left(\frac{\partial \Psi^o}{\partial \chi} + \frac{\partial U}{\partial \chi} \right) \cdot \dot{\chi} \geq 0$$

où $\Psi^o = \Psi - U$, et Φ^p est toujours égal à $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Dans cette expression, l'incrément $d\chi = \dot{\chi} dt$ est l'incrément d'une variable observable, mesurable expérimentalement indépendamment de la variation des caractéristiques élastiques. Mais on note que la force associée à la variable plastique χ n'est plus la force d'écrouissage définie par l'expression (11) mais

$$(50) \quad \zeta = \mathbf{Y} - \frac{\partial U}{\partial \chi} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial \Psi^o}{\partial \chi} = -\frac{\partial G(\chi)}{\partial \chi} (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) - \frac{\partial K(\chi)}{\partial \chi} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

La force associée à l'écrouissage dépend *a priori* non seulement de la variable d'écrouissage mais également de la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Par ailleurs, dans le cadre de l'hypothèse de déformations infinitésimales (*i.e.* $\boldsymbol{\varepsilon} \ll 1$), on peut négliger les termes quadratiques en $\mathbf{e}$ et $\text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}$ dans l'équation (50). Grâce à la décomposition (1), on peut également appliquer cette hypothèse aux déformations plastiques, ce qui vient à supposer que :

$$(51) \quad |Y| < \left| -\frac{\partial U(\chi)}{\partial \chi} \right| \quad \Rightarrow \quad \zeta \equiv -\frac{\partial U(\chi)}{\partial \chi}$$

L'hypothèse (51) assure l'indépendance de la force d'écrouissage vis à vis la variable d'état externe, le tenseur de déformation ϵ . En plus, les restrictions thermodynamiques qui concernent les potentiels g et h sont celles du modèle plastique standard :

$$(52) \quad \sigma : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \zeta \cdot \frac{\partial h}{\partial \zeta} \geq 0 \quad \text{si } f=0$$

1-1-5. Vers un modèle élastoplastique avec endommagement

Il est donc possible d'améliorer un modèle élastoplastique en le couplant avec un endommagement où la variable q est une variable d'écrouissage, donc mesurable.

Pour développer un tel modèle, il faut d'abord préciser la loi de comportement élastoplastique de base : c'est ce que nous présentons dans le paragraphe qui suit. Ce modèle sera applicable dans les cas de chargements monotones croissants.

L'amélioration apportée par l'endommagement permettra d'étendre le domaine d'application de ce modèle élastoplastique aux cas de chargements cycliques, voir dynamiques.

1-2. MODELISATION ELASTOPLASTIQUE DU BETON

Nous examinons dans ce paragraphe comment une loi élastoplastique peut être adaptée au matériau constitutif des structures en béton, béton armé, béton précontraint, à une échelle qui leur est propre, c'est à dire de l'ordre du *mètre*.

Les évolutions irréversibles du béton seront modélisées par les variables d'état plastiques du matériau : les déformations plastiques (ou plutôt permanentes) rendront compte à l'échelle macroscopique des effets de la microfissuration. Les développements présentés ici n'ont donc pas pour objectif l'étude d'une fissure franche en tant que discontinuité dans l'ouvrage, mais la prédiction de l'apparition de dommages (concentrés), représentés en termes de déformations permanentes.

Le modèle développé se veut avant tout une aide au concepteur des ouvrages d'art en béton. Ainsi, pour être pratiquement utilisable, les paramètres intervenant dans le modèle doivent être en nombre limité et avant tout avoir une signification physique claire.

Dans ce paragraphe, après un bref rappel des quelques phénomènes expérimentaux, nous détaillons les composantes du modèle élastoplastique *adapté* au béton : le critère de plasticité, la règle d'écoulement, la règle d'écrouissage, les restrictions thermodynamiques...

En ce qui concerne le critère de plasticité, notre choix s'est porté sur le critère de *Willam-Warnke* (1975) à trois paramètres, présenté par exemple pour le cas plastique parfait par *Fauchet* (1991). Il s'agit d'une modification du critère de Drucker-Prager adapté au béton. Ici, ce critère est brièvement présenté, en intégrant un écrouissage isotrope. L'étude des limites de ce modèle justifie dans la suite la proposition d'un critère modifié. Il s'agit d'un critère à quatre paramètres. Il est bien différent du critère de ruine de Willam-Warnke à 5 paramètres, présenté dans de multiples travaux de synthèse (*Chen*, 1985, repris et complétés dans *Chen et Han*, 1988; *Eberhardsteiner et al.*, 1987; *Labbane et al.*, 1993). Par rapport au critère à trois paramètres, les modifications portent en particulier sur la forme des méridiens, et sur la distinction entre comportements plastiquement contractant et dilatant. Cette distinction permet l'élaboration d'un modèle d'écrouissage avec une variable d'écrouissage nouvelle : la porosité plastique.

Un rapide récapitulatif du modèle élastoplastique proposé terminera ce paragraphe.

1-2-1. Quelques notations et définitions

Afin d'alléger la présentation, notons quelques définitions auxquelles nous nous référons dans la suite :

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les valeurs principales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, ordonnées suivant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Définissons ensuite le triplet (σ, τ, θ) , fonction univoque des trois invariants du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, par :

$$(53) \quad \begin{cases} \sigma = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3 \\ \tau = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \\ \cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{12} \tau} \end{cases}$$

où $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{1}$ est le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$. Notons de plus, que l'angle de Lode θ ne peut varier qu'entre :

$$(54) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$

Aux deux bornes des inégalités (54), on peut associer des points de charge, tels que :

$$(55) \quad \begin{cases} \forall \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \quad \theta = 0^\circ \\ \forall \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \quad \theta = 60^\circ \end{cases}$$

L'essai de compression simple correspond ainsi à $\theta = 60^\circ$, tandis que $\theta = 0^\circ$ correspond aux essais de traction simple et de compression biaxiale.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des contraintes principales, on appelle axe hydrostatique (ou trisectrice) l'axe passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, correspondant aux états de contraintes isotropes pour lesquels $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{1}$ et $\tau = 0$.

Enfin, un plan déviatorique est défini comme un plan orthogonal à l'axe hydrostatique. Les projections orthogonales des axes de coordonnées sur ce plan font un angle de 60° les uns par

rapport aux autres. Dans le cas d'un matériau isotrope, les indices des axes (1,2,3) sont arbitraires. Par conséquent, la coupe déviatorique d'une surface représentant un critère isotrope doit avoir une triple symétrie.

1-2-2. Faits expérimentaux

Un état *vierge* ou "sain" du matériau béton n'existe jamais. Même en absence de sollicitation mécanique, le matériau présente une fissuration plus ou moins intense (Wittmann, 1982) due au développement de champs d'auto-contraintes à l'échelle de la structure durant la phase de refroidissement qui suit la prise du béton. Ici, ces phénomènes sont négligés et on considère que la cause majeure de la fissuration est la forte sollicitation mécanique du matériau.

1-2-2-1. Limites de rupture

La *figure 1-14* présente une courbe enveloppe typique de rupture du béton pour des états de contraintes biaxiales (contraintes planes) dans l'espace des contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2$ (Kupfer *et al.*, 1969), avec les directions des plans de fissurations correspondants (Nelissen, 1972). Dans ce plan, trois caractéristiques mécaniques sont précisées : la résistance en compression simple σ_c , la résistance en traction σ_t et la résistance en compression biaxiale σ_{bc} . L'ordre de grandeur du rapport entre ces différentes caractéristiques est le suivant :

$$\sigma_t / \sigma_c \approx 0,1 \quad \text{et} \quad \sigma_{bc} / \sigma_c \approx 1,15$$

Pour ce qui concerne la limite de rupture sous état de contraintes triaxiales, les formes des méridiens de compression ($\theta = 60^\circ$) et de traction ($\theta = 0^\circ$) sont illustrées sur la *figure 1-15* dans le demi-plan (τ, σ) . On notera une relation quasi linéaire entre τ et σ dans le domaine des faibles confinements et une forme plus courbée pour des pressions hydrostatiques importantes. Le domaine d'élasticité initiale, de surface fermée sur l'axe hydrostatique, est également présenté *figure 1-15*.

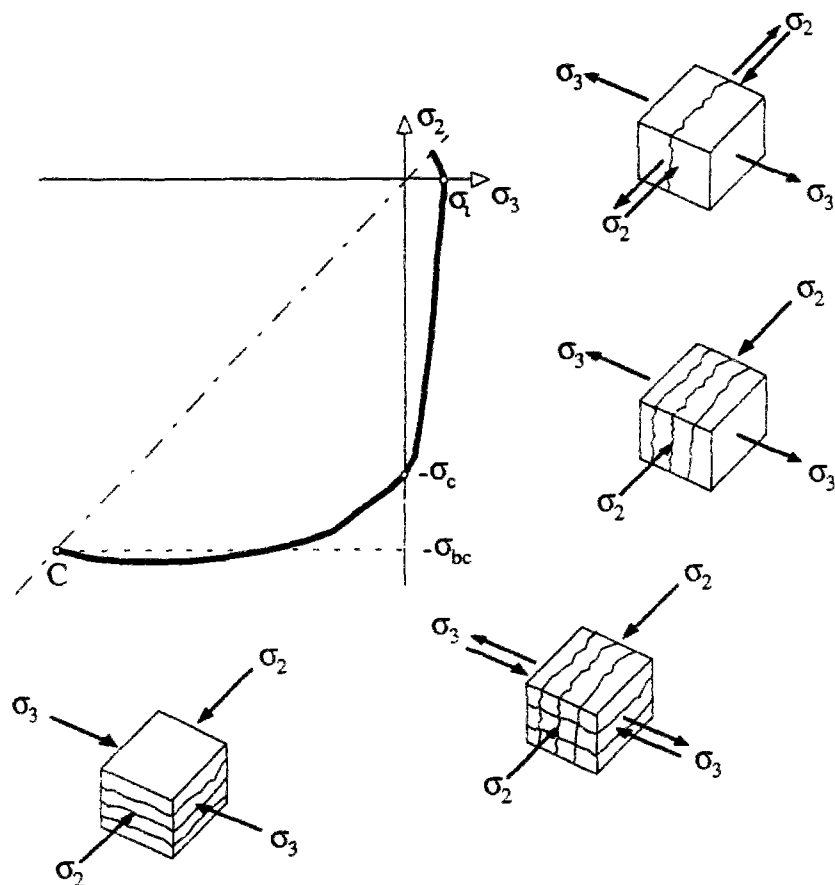


Figure 1-14 : Limite de rupture du béton en sollicitations biaxiales avec directions des plans de fissuration correspondants (d'après Nelissen, 1972)

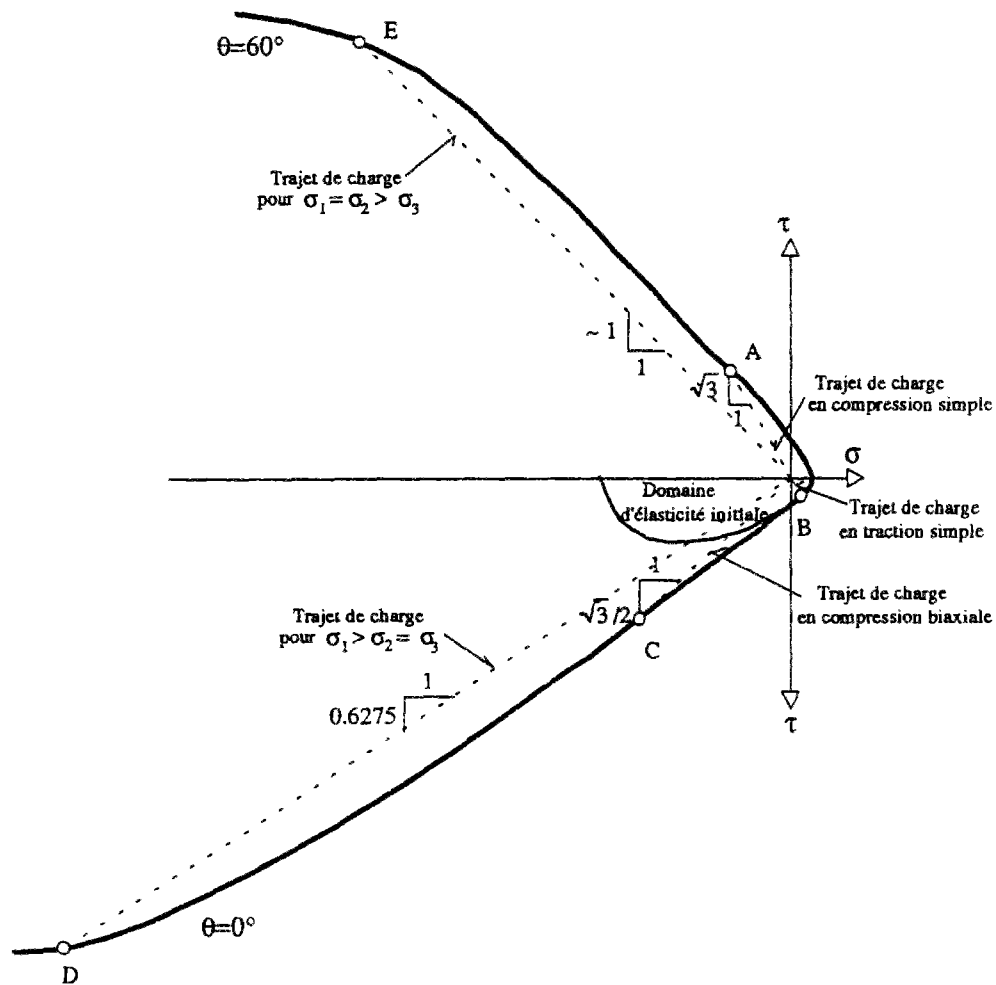


Figure 1-15 : Limite de ruine pour le béton dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction avec quelques chemins de chargement (d'après *Chen et Han, 1988*). Les points A,B,C correspondent aux résistances en compression simple, traction simple et compression biaxiale. Les points D et E correspondent aux limites de ruine dans deux essais triaxiaux.

1-2-2-2. Comportement uniaxial du béton

La *figure 1-16* présente une courbe typique $\sigma - \varepsilon$ du béton en compression simple et en traction simple. En compression, on peut distinguer les phases suivantes (*Chen, 1982*) :

- $0-0,3\sigma_c$: domaine élastique;
- $0,3-0,75...0,8\sigma_c$: fissuration *stable* dans le sens où les longueurs de fissures sous chargement constant atteignent rapidement leur valeur finale;
- $0,75...0,8-1,0\sigma_c$: fissuration *instable* conduisant à un comportement adoucissant si l'essai est piloté en déplacement.

On note également le comportement disymétrique du béton en compression et en traction.

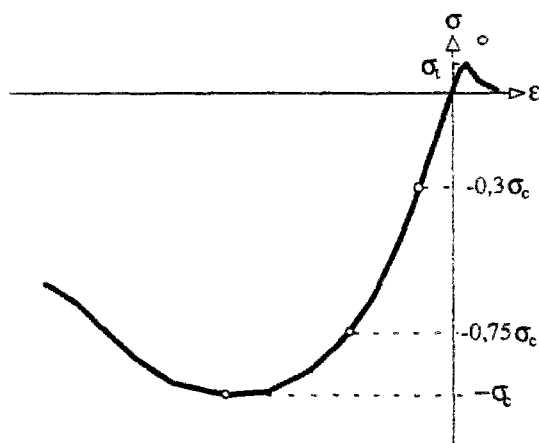


Figure 1-16 :
Courbe $\sigma - \varepsilon$ uniaxiale du béton
(compression simple et traction simple)

1-2-2-3. Variation de volume anélastique

Le béton a un comportement particulier en ce qui concerne sa variation de volume sous sollicitations mécaniques. Afin d'apprécier ce comportement à l'échelle macroscopique, il est nécessaire de rappeler la formule de transport de volume matériel d'un milieu continu déformable.

On note $d\Omega$ le volume matériel élémentaire initial. A l'instant t , après déformation, le volume initial devient $d\Omega_t$, et la transformation est décrite par la formule de transport :

$$(56) \quad d\Omega_t = J d\Omega$$

où J est le jacobien de la transformation. Avec l'hypothèse de petites déformations, J s'écrit :

$$(57) \quad J \approx 1 + \text{tr}\mathbf{\epsilon}$$

où la trace du tenseur de déformations représente la dilatation volumique observable, définie comme la différence entre le volume actuel et le volume initial rapportée au volume initial :

$$(58) \quad \text{tr}\mathbf{\epsilon} = \frac{d\Omega_t - d\Omega}{d\Omega}$$

Les courbes expérimentales de la variation de volume du béton $\text{tr}\mathbf{\epsilon}$ dans des essais de compression simple ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$), de compression biaxiale ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) et de traction simple ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) sont illustrées en *figure 1-17a*.

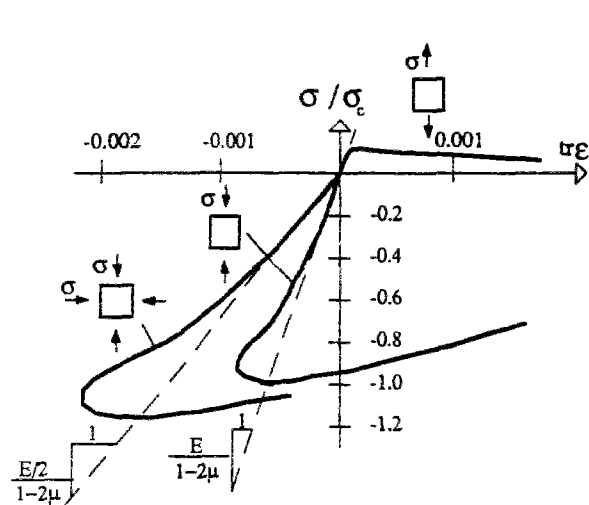
Utilisant la décomposition (1) du tenseur de déformation en une partie élastique et une partie permanente, on peut écrire :

$$(59) \quad \text{tr}\mathbf{\epsilon} = \text{tr}\mathbf{\epsilon}^e + \text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$$

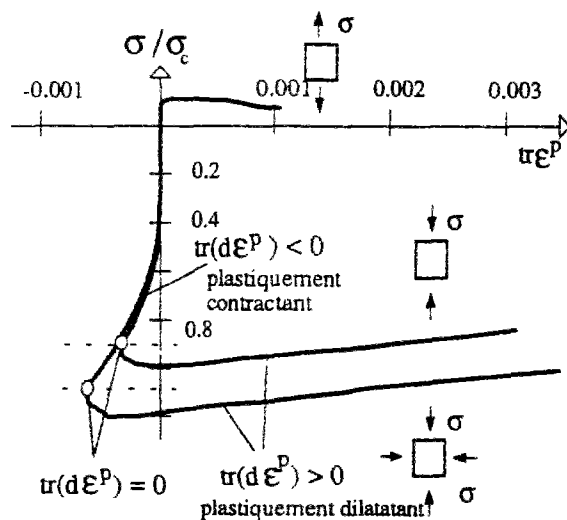
où $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$ est la déformation volumique irréversible du matériau après décharge complète du système. On appellera $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p > 0$ (respectivement $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p < 0$) la dilatance plastique (respectivement la contraction plastique). Ainsi, le comportement pour lequel $\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) > 0$ (respectivement $\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) < 0$) est dit plastiquement dilatant (respectivement plastiquement contractant).

Les évolutions expérimentales de $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$ en fonction des contraintes sont tracées sur la *figure 1-17b*.

Pour des essais en compression simple et compression biaxiale, on retrouve au niveau de la variation de volume plastique les phases mises en évidence précédemment (Chen, 1982) :



a. Courbe expérimentale de la variation de volume total : $\sigma / \sigma_c - \text{tr}\epsilon$



b. Courbe expérimentale de la variation de volume anélastique : $\sigma / \sigma_{\max} - \text{tr}\epsilon^p$

Figure 1-17 : Variations de volume (a) total et (b) plastique du béton en compression simple et compression biaxiale (d'après Chen, 1982)

- une relation élastique linéaire pour une contrainte appliquée inférieure à 30% de la résistance,
- un comportement plastiquement contractant ($\text{tr}(d\epsilon^p) < 0$) pour une contrainte appliquée égale à 30% - 75...90 % de la résistance,
- suivie par un comportement plastiquement dilatatant ($\text{tr}(d\epsilon^p) > 0$), conduisant au pic et à la ruine.

On note également que le béton en traction ne suit qu'un comportement plastiquement dilatatant.

1-2-3. Porosité plastique et... microfissuration

Comme on vient de le voir, la variation de volume anélastique $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$ joue un rôle important en ce qui concerne la description macroscopique du comportement non-linéaire du béton.

Considérons maintenant le béton comme un milieu poreux, constitué d'une matrice et d'un espace poreux connecté (*figure 1-18*). La matrice est composée de solides et éventuellement de pores. Cette porosité *occluse* est essentiellement composée des pores de contraction qui résultent de la phase de cristallisation du ciment durant l'hydratation, et influent peu sur les propriétés mécaniques du matériau (*Fauchet, 1991*). En revanche, la porosité *connectée* ϕ (porosité des granulats, porosité capillaire de la pâte de ciment), a un effet néfaste sur les propriétés du matériau. On la définit par :

$$(60) \quad \phi = \frac{\text{volume de l' espace poreux connecté}}{\text{volume total}}$$

Par exemple, la porosité ϕ_0 dans la configuration initiale et la porosité ϕ dans la configuration actuelle s'écrivent :

$$(61) \quad \phi_0 = \frac{d\Omega - d\Omega^m}{d\Omega} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{d\Omega_t - d\Omega_t^m}{d\Omega_t}$$

où $d\Omega^m$ et $d\Omega_t^m$ sont les volumes occupés par la matrice respectivement dans l'état initial et actuel.

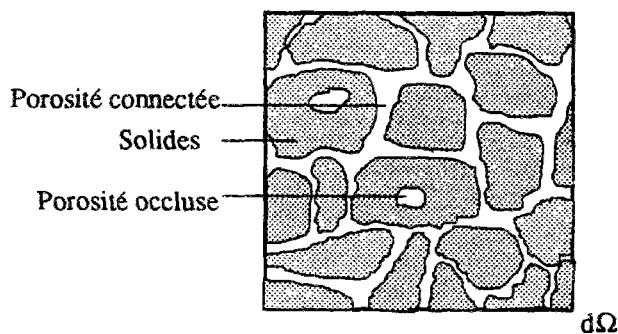


Figure 1-18 :
Le béton - un milieu poreux
(Schéma d'après Coussy, 1991)

La variation de volume observable du squelette, $\text{tr}\mathbf{\epsilon}$, est due d'une part à la variation du volume de l'espace poreux connecté, et d'autre part à la dilatation moyenne de la matrice, noté ϵ_m , et définie par :

$$(62) \quad \epsilon_m = \frac{d\Omega^m - d\Omega^m}{d\Omega^m}$$

Utilisant (61) avec la formule de transport (57) et la linéarisation (58) dans l'équation (62), on obtient une relation liant ϵ_m et $\text{tr}\mathbf{\epsilon}$ (Coussy, 1991) :

$$(63) \quad (1 - \phi_o)\epsilon_m = (1 - \phi)\text{tr}\mathbf{\epsilon} - (\phi - \phi_o)$$

Considérons maintenant le cas d'une décharge totale élastique ($\text{tr}(\mathbf{\epsilon} - \mathbf{\epsilon}^p) = 0$) à partir de l'état actuel. De (63) on déduit la relation :

$$(64) \quad (1 - \phi_o)\epsilon_m^p = (1 - \phi^d)\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p - (\phi^d - \phi_o)$$

où ϵ_m^p est la déformation volumique permanente moyenne de la matrice et ϕ^d la porosité dans le volume $d\Omega^d = (1 + \text{tr}\mathbf{\epsilon}^p)d\Omega$ obtenu après décharge totale. En notant $\phi_o d\Omega$ l'espace poreux initial, et $\phi^d d\Omega^d$ l'espace poreux connecté après décharge totale, la variation irréversible de l'espace poreux est obtenue par :

$$(65) \quad \phi^p d\Omega = \phi^d d\Omega^d - \phi_o d\Omega$$

où ϕ^p est la porosité plastique, la variation irréversible de l'espace poreux connecté par unité de volume $d\Omega$:

$$(66) \quad \phi^p = \phi^d (1 + \text{tr}\mathbf{\epsilon}^p) - \phi_o$$

La substitution de (66) dans (64) conduit à :

$$(67) \quad \text{tr}\mathbf{\epsilon}^p = (1 - \phi_o)\epsilon_m^p + \phi^p$$

Cette relation met en évidence que la variation de volume anélastique mesurable, $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$, est due d'une part à la variation irréversible du volume de la matrice, quantifiée par $(1-\phi_0)\epsilon_m^p$, et d'autre part à la variation irréversible du volume de l'espace poreux connecté, quantifiée par ϕ^p .

Si la matrice est anélastiquement incompressible ($\epsilon_m^p=0$), la variation de volume anélastique $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$, due uniquement à la variation irréversible de la porosité, est égale à la porosité plastique :

$$(68) \quad \epsilon_m^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi^p = \text{tr}\mathbf{\epsilon}^p$$

Dans le cas d'une matrice anélastiquement compressible et d'un comportement isotrope, *Coussy* (1991) propose une relation incrémentale liant $\text{tr} d\mathbf{\epsilon}^p$ et $d\phi^p$ d'une façon linéaire :

$$(69) \quad \epsilon_m^p \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\phi^p = \beta \text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) \quad \text{avec : } \phi_0 < \beta < 1$$

Le coefficient β peut éventuellement dépendre des forces d'écrouissage, i.e. $\beta = \beta(\zeta)$. La relation (69) sera utilisée par la suite.

La porosité plastique ϕ^p quantifie alors l'augmentation ou la réduction irréversible de l'espace poreux connecté $\phi^p d\Omega$. Appliquée au béton à l'échelle macroscopique, on peut la considérer comme la porosité créée par la fissuration (*Fauchet*, 1991).

La porosité plastique ϕ^p est ainsi considérée comme étant la variable macroscopique représentative de l'état de microfissuration et de l'état de compactage au sein du matériau.

En vertu des observations expérimentales sur la variation de volume anélastique, nous tirons les conclusions suivantes :

- $\forall \phi^p < 0$ (respectivement $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p < 0$) : le béton suit un comportement écrouissable proprement dit (écrouissage positif). Deux phases sont à distinguer : d'une part, le comportement plastiquement contractant ($d\phi^p < 0$), et, d'autre part, le comportement plastiquement dilatatant ($d\phi^p > 0$).
- $\forall \phi^p > 0$ (respectivement $\text{tr}\mathbf{\epsilon}^p > 0$) : le béton suit un comportement adoucissant.

Son évolution est entièrement définie par le critère de plasticité ("quand ?") et par la règle d'écoulement ("comment ?").

1-2-4. Critère de Willam-Warnke à trois paramètres

On rappelle brièvement ici le critère de Willam-Warnke à trois paramètres, en utilisant la présentation du cas parfaitement plastique proposée par *Fauchet* (1991), en particulier en ce qui concerne la signification physique des paramètres.

1-2-4-1. Critère de plasticité parfaite

Le critère de Willam-Warnke peut être considéré comme un critère de type Drucker-Prager adapté au béton dans le domaine des faibles confinements : la forme des méridiens dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques (*cf. figure 1-15*), est approximée par une droite. Par rapport au critère de Drucker-Prager (équation (39)), le critère dépend de plus de l'angle de Lode θ . Il s'écrit sous la forme :

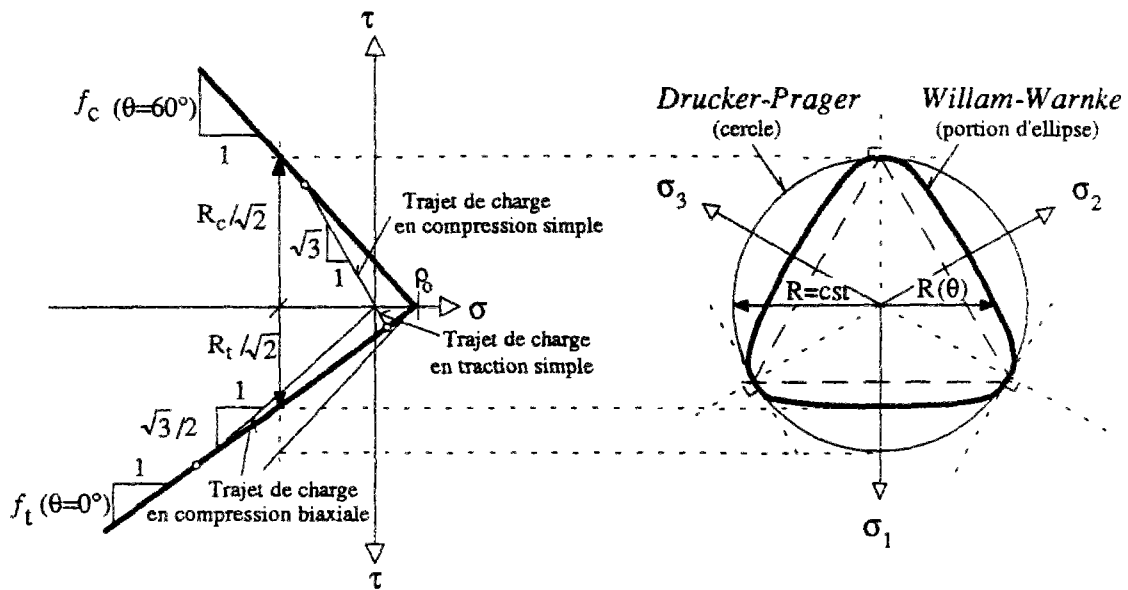
$$(70) \quad f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_o)$$

où le coefficient de frottement $f(\theta)$ varie en fonction de l'angle θ entre deux extrêmes :

$$\begin{aligned} f_c = f(60^\circ) & \quad - \quad \text{coefficient de frottement sur le méridien de compression,} \\ f_t = f(0^\circ) & \quad - \quad \text{coefficient de frottement sur le méridien de traction.} \end{aligned}$$

Les différences entre le critère de Drucker-Prager (correspondant à $f = f_c$) et celui de Willam-Warnke à trois paramètres sont illustrées sur la *figure 1-19* dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction et dans un plan déviatorique. Le domaine d'élasticité est un cône (*figure 1-19a*) dont la section n'est plus circulaire (*figure 1-19b*). En effet, l'expression de $f(\theta)$ est telle que, dans un plan déviatorique, la section circulaire du critère de Drucker-Prager se met sous la forme d'une portion d'ellipse entre deux méridiens successifs, l'un de compression et l'autre de traction.

Les trois paramètres du modèle (f_c, f_t, ρ_o) se déduisent de trois caractéristiques mécaniques introduites précédemment : les résistances en compression simple σ_c , en traction simple σ_t et en compression biaxiale σ_{bc} , grâce aux relations (*Fauchet*, 1991) :



a. Demi-plans (τ, σ) avec d'une part le méridien de compression ($\theta = 60^\circ$) et d'autre part le méridien de traction ($\theta = 0^\circ$). Les points correspondants aux limites de résistances en traction simple, en compression simple et en compression biaxiale sont indiqués sur la figure (intersection entre les différents trajets de chargement et le domaine d'élasticité).

b. Plan déviatorique : Dans une coupe déviatorique, le domaine d'élasticité de Drucker-Prager est un cercle avec un rayon constant ($R = \sqrt{2}f(\sigma - \rho_0)$; $f = f_c$). Dans le critère de Willam-Warnke, avec un coefficient de frottement dépendant de l'angle θ , le domaine d'élasticité est constitué de portions d'ellipses entre deux méridiens successifs.

Figure 1-19 :

Comparaison des critères de plasticité de Drucker-Prager et de Willam-Warnke

(a) dans les demi-plans (τ, σ) du méridien de compression et de traction, (b) dans une coupe déviatorique (d'après Fauchet, 1991)

$$(71) \quad \begin{cases} \sigma_c = \frac{3f_c}{\sqrt{3}-f_c} \rho_0 & \text{si } f_c < \sqrt{3}, \text{ sinon } \sigma_c = \infty \\ \sigma_t = \frac{3f_t}{\sqrt{3}+f_t} \rho_0 \\ \sigma_{bc} = \frac{3f_t}{\sqrt{3}-2f_t} \rho_0 & \text{si } f_t < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sinon } \sigma_c = \infty \end{cases}$$

Comme le trajet de charge de compression simple en fonction des invariants (53) est décrit par $\tau = \sqrt{3}\sigma$ et le trajet de charge en compression biaxiale par $\tau = \sqrt{3}/2\sigma$, l'existence même de résistances σ_c et σ_{bc} (intersections trajets de chargements - méridiens de compression et de traction, *figure 1-19a*) conduit aux inégalités suivantes :

$$(72) \quad 0 \leq f_c \leq \sqrt{3} \quad \text{et} \quad 0 \leq f_t \leq \sqrt{3}/2$$

Par exemple, pour des valeurs de résistances tirées des essais de référence de *Kupfer et al.* (1969) (cf. 1-2-2-1), on a : $f_c = 1,3037$; $f_t = 0,7578$; $\rho_o = 0,1095\sigma_c = 1,0952\sigma_t$.

L'expression analytique de $f(\theta)$ est donnée en **annexe 1**. En vertu de la condition de convexité du critère, les coefficients de frottement f_c et f_t doivent vérifier les inégalités suivantes:

$$(73) \quad \frac{1}{2}f_t \leq f_c \leq 2f_t$$

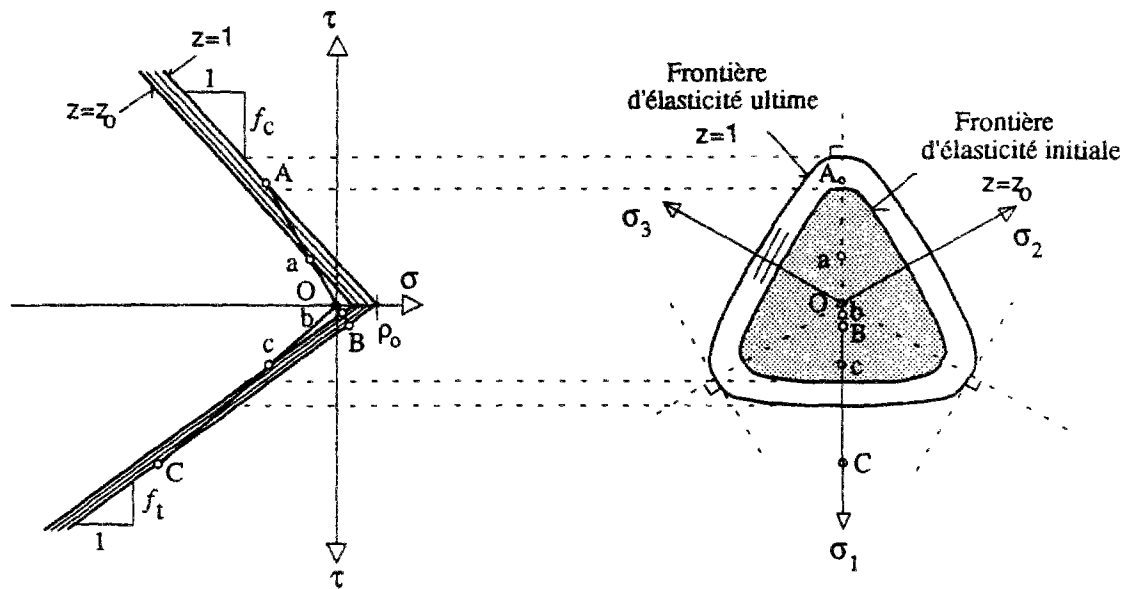
Dans le cas limite où $f_c = 2f_t$, dans une coupe déviatorique, le domaine d'élasticité dégénère en un triangle inscrit dans le cercle du critère de Drucker-Prager (*figure 1-19b*). Dans le cas particulier où $f_c = f_t$, le critère de Willam-Warnke coïncide avec le critère de Drucker-Prager.

1-2-4-2. Critère de plasticité avec écrouissage isotrope

Une première approximation pour rendre compte d'un comportement écrouissable consiste à considérer la pression de cohésion p comme paramètre d'écrouissage isotrope, $p = z\rho_o$, où ρ_o est la pression de cohésion maximale déduite des résistances en traction simple et compression biaxiale (équations (71)). Dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :

$$(74) \quad f(\sigma, z) = \tau + f(\theta)(\sigma - z\rho_o)$$

Les *figures 1-20* présentent l'évolution du domaine d'élasticité d'une part dans les demi-plans des méridiens de compression et de traction (*figure 1-20a*), d'autre part dans une coupe déviatorique (*figure 1-20b*). La surface de charge correspondant à la fonction de charge (74) est encore un cône à section triple elliptique entre les trois demi-axes inclinés à 120° les uns par rapport aux autres. Dans l'espace des contraintes, la surface de charge actuelle se déduit par homothétie de centre l'origine et de rapport z de la surface de charge définie par $z=1$, qui correspond au cas du matériau plastique parfait. Les inégalités (73), qui assurent la convexité du critère, s'appliquent également.



a. Demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction.

b. Coupe déviatorique.

Figure 1-20 :

Domaines d'élasticité initial et actuel du modèle de Willam-Warnke avec écrouissage isotrope.

Sur les *figures 1-20*, les trajets de charge $O-a-A$, $O-b-B$ et $O-c-C$ correspondent aux trajets de compression simple, traction simple et compression biaxiale. Les points de charge (a,b,c) et (A,B,C) sont ainsi situés sur la frontière du domaine d'élasticité initiale ($z = z_0$) et sur la frontière définie par les résistances du béton en compression simple, traction simple et compression biaxiale ($z = 1$). Le chemin parcouru entre ces deux limites entraîne l'évolution de l'écrouissage.

1-2-4-3. Règle d'écoulement

Dans le cas écrouissable, considérons un potentiel plastique g de la forme :

$$(75) \quad g(\sigma, z) = \tau + \delta(\sigma - zp_0)$$

où δ est le coefficient de dilatance du matériau. Supposons d'abord que ce coefficient est constant ou ne dépend que des variables d'écrouissage. La règle d'écoulement s'écrit sous la forme :

$$(76) \quad d\mathbf{\epsilon}^p = d\lambda \left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau} + \frac{\delta}{3} \mathbf{1} \right)$$

En raison de l'équation (12) et de la fonction de charge (74), et en notant que $\partial\theta/\partial\sigma$ est un tenseur de trace nulle et que $\sigma: \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = 0$ (cf. **Annexe 1**), le multiplicateur plastique s'écrit :

$$(77) \quad d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = \frac{1}{H} \left(\left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau} + \frac{\partial f}{\partial \theta} (\sigma - z\rho) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) : d\mathbf{s} + f(\theta) d\sigma \right)$$

où H est le module d'écrouissage.

On remarque qu'avec un potentiel de la forme (75), qui conduit à la règle d'écoulement (76), définition (45) du coefficient de dilataance est vérifiée. On aurait donc pu écrire également :

$$(78) \quad \begin{cases} \text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \\ d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \tau} \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} \text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) = d\lambda \delta \\ d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda \end{cases}$$

ce qui est illustré sur la *figure 1-21b*. Par ailleurs, la règle d'écoulement est non-associée ($\delta \neq f(\theta)$).

Dans le cas plastique parfait ($z=1$), une règle d'écoulement associée est utilisée ($\delta(\theta) = f(\theta)$). On a alors :

$$(79) \quad d\mathbf{\epsilon}^p = d\lambda \left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} (\sigma - \rho_o) \right)$$

d'où :

$$(80) \quad \begin{cases} \text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = d\lambda f(\theta) \\ d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda \sqrt{1 + 2 \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} (\sigma - \rho_o)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} : \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}} \end{cases}$$

La définition (45) du coefficient de dilataance est seulement vérifiée si l'expression $\partial f / \partial \theta$ s'annule. Ce n'est le cas que lorsque $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 60^\circ$, ce qui est illustré sur la *figures 1-21a*.

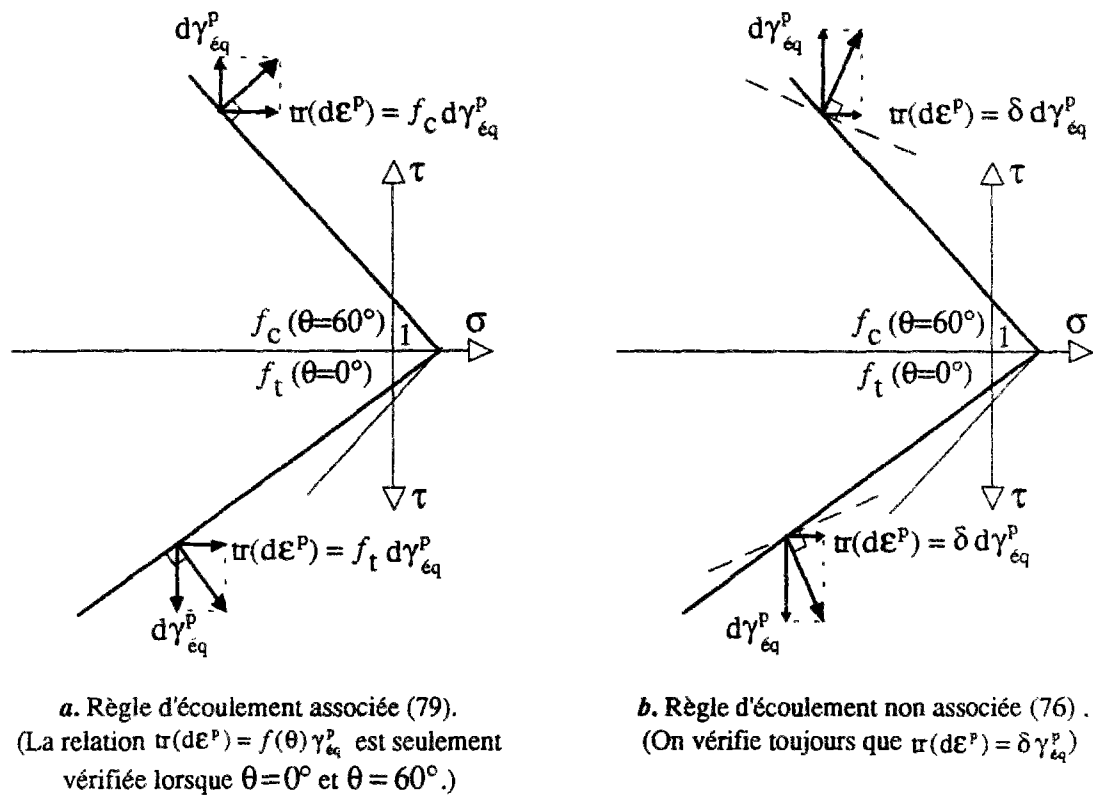


Figure 1-21 :
Règles d'écoulement dans les demi-plans des méridiens de compression et de traction

1-2-4-4. Loi d'écroutissage

La variation de volume anélastique $\text{tr}\mathbf{E}^p$ joue un rôle important dans la description macroscopique du comportement écroutissable du béton (*cf.* 1-2-2-3). On peut ainsi à partir des essais déterminer une relation $z = z(\text{tr}\mathbf{E}^p)$, ou bien, comme la règle d'écoulement (76) (respectivement (78)) vérifie la définition (45) du facteur de dilataance, une relation $z = z(\gamma_{\text{eq}}^p)$, représentative de l'évolution du domaine d'élasticité. Utilisant (78), on écrit :

$$(81) \quad d\mathbf{q} = d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda$$

où d'une façon alternative :

$$(82) \quad d\chi = d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \zeta} = d\lambda$$

où $h = h(\sigma, \zeta)$ et le potentiel non associé défini par (Coussy, 1991) :

$$(83) \quad h(\sigma, \zeta) = \tau + \delta \sigma + \zeta - \delta p_o$$

On suppose ici que la distorsion plastique est la variable d'état thermodynamique à associer à la force d'écrouissage ζ .

Supposons de plus, que le potentiel non associé $h(\sigma, \zeta)$ précisant la règle d'écrouissage (82), a les mêmes valeurs numériques que le potentiel non associé g (75), précisant la règle d'écoulement (76), respectivement (78). On peut alors effectuer le changement de variables $z \rightarrow \zeta$:

$$(84) \quad z \delta p_o = -\zeta + \delta p_o \quad \zeta = \delta p_o (1 - z) \quad z = 1 - \zeta / \delta p_o$$

qui ne modifie pas l'expression de la règle d'écoulement (76), respectivement (78). Utilisant (84) dans l'expression (74) de la surface de charge, il vient :

$$(85) \quad f(\sigma, \zeta) = \tau + f(\theta)(\sigma - p_o) + \zeta f(\theta) / \delta$$

Comme on a ainsi $\partial f / \partial \zeta = f(\theta) / \delta$, $\partial h / \partial \zeta = 1$ et $\zeta = -\partial U / \partial \gamma_{\text{eq}}^p$, on déduit par (16) l'expression du module d'écrouissage H :

$$(86) \quad H = \frac{f(\theta)}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_{\text{eq}}^p{}^2} = -\frac{f(\theta)}{\delta} \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma_{\text{eq}}^p}$$

Etudions maintenant le signe de l'écrouissage :

Pour cela, réécrivons la puissance intrinsèque (10) ($\Phi = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \zeta \dot{\chi} \geq 0$) à l'aide des règles d'écoulement (76) et d'écrouissage (82), on a :

$$(87a) \quad d\lambda(\tau + \delta \sigma + \zeta) \geq 0 \quad \text{lorsque :} \quad f(\sigma, \zeta) = 0$$

En remplaçant dans l'inégalité τ par sa valeur donnée dans la relation (85), la non-négativité de la dissipation intrinsèque impose la condition :

$$(87b) \quad (\sigma + \zeta / \delta)(\delta - f(\theta)) + f(\theta)\rho_o \geq 0 \quad \text{lorsque : } f(\sigma, \zeta) = 0$$

Cette condition est satisfaite si :

$$(88) \quad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \delta \leq \inf f(\theta) = f_t \end{cases}$$

Le modèle de Willam-Warnke à trois paramètres implique donc la *non-négativité de la dilataance* :

$$(89) \quad \forall f(\sigma, \zeta) = f(\sigma, z) = 0 \quad \text{tr}(d\mathcal{E}^p) = \delta d\gamma_{\text{eq}}^p \geq 0$$

Avec les inégalités (72), le facteur de dilataance doit alors satisfaire :

$$(90) \quad 0 \leq \delta \leq f_t \leq \sqrt{3} / 2$$

Par conséquent, de l'expression (86), on déduit que le signe de l'écrouissage dépend uniquement de l'évolution de la force d'écrouissage :

$$(91) \quad \text{sgn}(H) = -\text{sgn}(d\zeta) = -\text{sgn}(\partial\zeta / \partial\gamma_{\text{eq}}^p)$$

Rappelons que dans des essais de compression simple, de compression biaxiale et de traction simple, le béton suit un comportement dilatant et un écrouissage positif pour des charges appliquées comprises entre 75% et 100% de résistances: on fixera le domaine d'écrouissage positif par

$$(92) \quad H > 0 : z \in [z_o, z_{\text{max}}] = [0, 75 ; 1, 0]$$

La forme qualitative des courbes $\zeta = \zeta(\gamma_{\text{eq}}^p)$ qu'on pourrait extraire des essais pour ce domaine d'écrouissage positif est illustrée sur la *figure 1-22*. Cette figure présente également la forme des courbes $\zeta = \zeta(\gamma_{\text{eq}}^p)$ dans le domaine d'écrouissage négatif. Pour ce domaine, il faut ainsi définir deux fonctions pour rendre compte du comportement adoucissant disymétrique en traction et en compression.

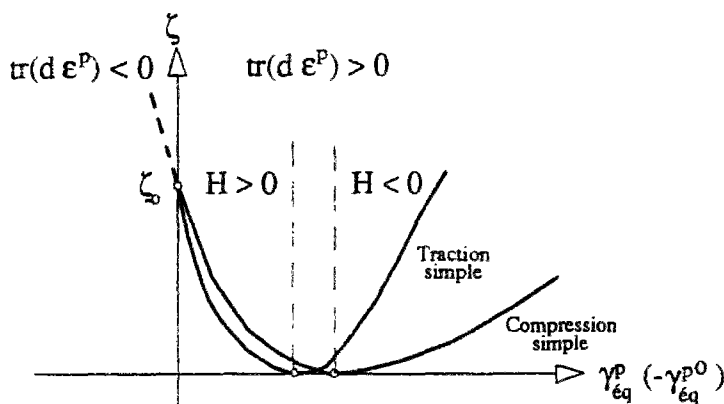


Figure 1-22 : Courbes $\zeta = \zeta(\gamma^p_{\epsilon q})$ (qualitatives) en compression simple et traction simple tirées de résultats d'essais, utilisées sous forme $Z = Z(\gamma^p_{\epsilon q})$ par *Chen et Chen* (1975). $\gamma^p_{\epsilon q}{}^0$ correspond pour l'essai en compression simple à la distorsion plastique pour la phase du comportement plastiquement contractant $z \in [0,3 ; 0,75]$, qui n'est pas modélisé avec le critère présenté ici. La distorsion plastique équivalente utilisée dans le modèle devrait ainsi être lue comme $\gamma^p_{\epsilon q}$ à partir du début du comportement plastiquement dilatant.

C'est pourquoi nous nous limitons ici au cas d'un écrouissage positif. Dans ce domaine précisé par la relation (92), utilisons les relations :

$$(93) \quad \begin{cases} \zeta = \zeta_0 \exp[-\kappa \gamma^p_{\epsilon q}] & \text{donc: } d\zeta = -\kappa \zeta \leq 0 \\ z = 1 - (1 - z_0) \exp[-\kappa \gamma^p_{\epsilon q}] & \text{donc: } dz \geq 0 \end{cases}$$

où κ est une constante positive, et $\zeta_0 = \delta \rho_0 (1 - z_0)$ la valeur de référence de ζ correspondant à $z = z_0$. Enfin, reportant (93) dans (86), le module d'écrouissage H s'écrit :

$$(94) \quad H = \kappa f(\theta) \zeta_0 \exp[-\kappa \gamma^p_{\epsilon q}] = \kappa f(\theta) \rho (1 - z_0) \exp[-\kappa \gamma^p_{\epsilon q}] \geq 0$$

1-2-4-5. Domaine d'application

Rappelons ici le domaine d'application de ce modèle :

1. En raison de l'approximation de la forme des méridiens par une droite, les critères de plasticité (70) et (74) ne sont adaptés que dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques.
2. La non-négativité de la dissipation intrinsèque impose la non-négativité de la dilatance : on ne peut modéliser que le comportement plastiquement dilatant du béton.
3. On se limite au cas de l'écrouissage positif, en traction et en compression, dans un domaine défini par des charges comprises entre 75 et 100% de la résistance.

Ce modèle ne nécessite que la connaissance de trois caractéristiques mécaniques pour déterminer les 3 paramètres (f_c, f_t, ρ_o) .

Par ailleurs, on note qu'il ne permet pas de modéliser :

- le comportement plastiquement contractant ($\text{tr}(d\mathbf{E}^p) < 0$),
- le comportement dans les domaines des pressions hydrostatiques importantes.

Nous proposons alors, dans le paragraphe qui suit, un critère de Willam-Warnke *modifié*.

1-2-5. Critère de Willam-Warnke modifié

La modification envisagée consiste d'abord à rendre compte de manière plus réaliste de la forme courbée des méridiens (*cf. figure 1-15*).

1-2-5-1. Critère de plasticité modifié

Un critère qui prend en compte une forme parabolique des méridiens est celui de Willam-Warnke à 5 paramètres avec une fonction du type $\sigma = \sigma(\tau, \tau^2, \dots)$ (Willam et Warnke, 1975). Cinq résultats d'essais sont nécessaires pour déterminer les paramètres du modèle. Le critère est ouvert sur l'axe hydrostatique négatif, et un modèle d'écrouissage est difficile à mettre en place (*cf. Chen et Han, 1988*). C'est pourquoi ce critère est plutôt utilisé comme critère de ruine (*e.g. Glemberg et al., 1986*).

En gardant également la forme parabolique des méridiens, nous proposons ici un critère modifié à 4 paramètres avec une fonction du type $\tau = \tau(\sigma, \sigma^2, \dots)$.

Le critère de Willam-Warnke *modifié* s'écrit :

$$(95) \quad f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}}(\sigma - \rho_o)^2)$$

avec p_{cr} (>0) une constante dans le cas de la plasticité parfaite.

Dans l'espace des contraintes $\{\sigma_1 \times \sigma_2 \times \sigma_3\}$, la surface de charge correspondant à la fonction de charge (95) est un paraboloïde dont la section n'est pas circulaire. En effet, tout plan déviatorique normal à la trisectrice coupe la surface suivant des portions d'ellipse entre deux méridiens successifs (l'un en compression, l'autre en traction) : l'expression analytique de $f(\theta)$ est conservée (cf. **annexe 1**). Ainsi, la condition de convexité du critère impose toujours les inégalités (73). Le centre du paraboloïde, situé sur la trisectrice, a ses trois coordonnées égales à $\rho_o - p_{cr}$. Le plan orthogonal à la trisectrice passant par ce centre est un plan de symétrie du paraboloïde, qu'il sépare en deux demi-paraboloïdes égaux. Le critère est alors fermé sur l'axe hydrostatique. Dans l'espace des contraintes, les points singuliers sont ainsi les points aux trois coordonnées égales et valant respectivement ρ_o et $\rho_o - 2p_{cr}$ (cf. *figure 1-23*).

Dans le cas plastique parfait, la constante p_{cr} se détermine à partir d'un seul résultat supplémentaire (par exemple point D ou E sur la *figure 1-15*). En utilisant quatre résultats d'essais, on peut alors déterminer les quatre constantes (f_c, f_t, ρ_o, p_{cr}) à partir d'un système de quatre équations non linéaires (cf. **annexe 1**). Par ailleurs, en raison de la dispersion des résultats d'essais aux forts confinements, on peut choisir de déterminer les trois paramètres (f_c, f_t, ρ_o) avec les formules explicites (71). D'après les essais retenus, la constante p_{cr} est d'environ 5 à 10 σ_c .

Pour le cas limite où p_{cr} tend vers l'infini, on retrouve le critère de plasticité (70) à trois paramètres.

1-2-5-2. Règle d'écoulement

Considérons une règle d'écoulement associée, telle que $g(\sigma) = f(\sigma)$:

$$(96) \quad \begin{cases} d\epsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \frac{1}{p_{cr}} (\sigma + p_{cr} - \rho_o) \mathbf{1} + \frac{1}{2p_{cr}} (\sigma - \rho_o)(\sigma + 2p_{cr} - \rho_o) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) \\ \pi(d\epsilon^p) = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = d\lambda f(\theta) \frac{1}{p_{cr}} (\sigma + p_{cr} - \rho_o) \\ d\gamma_{eq}^p = d\lambda \sqrt{1 + 2 \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2p_{cr}} (\sigma - \rho_o)(\sigma + 2p_{cr} - \rho_o) \right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} : \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}} \end{cases}$$

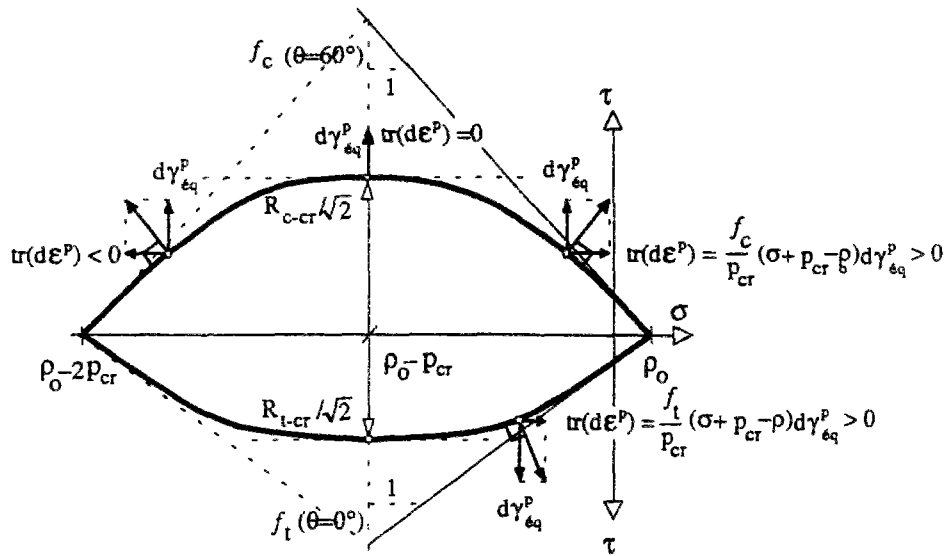


Figure 1-23 : Règle d'écoulement associée du modèle Willam-Warnke modifié dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction.

Compte tenu des inégalités (73) et de la positivité de $d\lambda$, le plan de symétrie passant par le centre du paraboloïde sépare le comportement plastiquement dilatant du comportement plastiquement contractant :

$$(97) \quad \text{sgn}(\text{tr}(d\mathbf{E}^p)) = \text{sgn}(\sigma + p_{cr} - \rho_0)$$

Ces relations sont illustrées sur la figure 1-23.

1-2-5-3. Extension au cas d'écrouissage

Une amélioration de ce modèle consiste à l'étendre au cas de l'écrouissage. Pour cela, on considère p_{cr} comme étant un paramètre d'écrouissage $z = p_{cr}$, entraînant une évolution du domaine d'élasticité (figure 1-24).

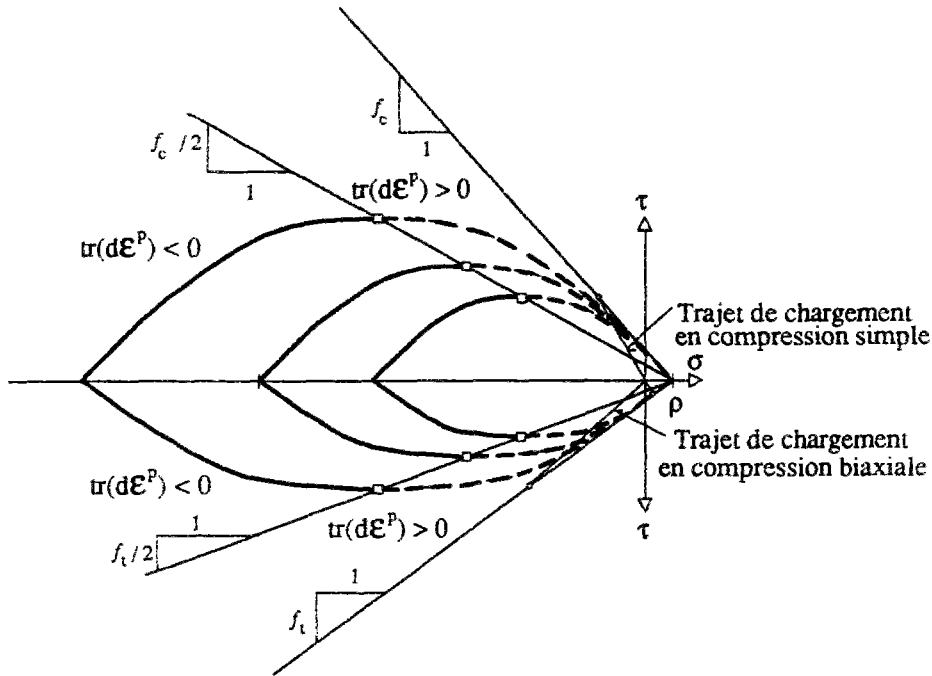


Figure 1-24 :

Evolution de la surface de charge du critère de Willam-Warnke modifié dans les demi-plans (τ, σ) . Les surfaces successives situées entre les droites des méridiens $f(\theta)$ et $f(\theta)/2$ correspondent à un comportement plastiquement dilatatant. Les surfaces situées entre la trisectrice et la droite du méridien $f(\theta)/2$ entraînent un comportement plastiquement contractant.

Pour ce modèle de Willam-Warnke modifié avec un écrouissage et une règle d'écoulement associée (96), dans l'espace des contraintes, tout point de charge qui se trouve sur la surface du parabololoïde située entre la surface d'un cône défini par les méridiens $f(\theta)$ (*i.e.* fonction de charge (70)) et un cône défini par les méridiens $f(\theta)/2$ suit un comportement plastiquement dilatatant ($\text{tr}(d\mathbf{E}^p) > 0$). Les points de charge sur la surface ($f(\sigma, p_{cr}) = 0$), où $\text{tr}(d\mathbf{E}^p) = 0$, sont situés sur la surface du cône des méridiens $f(\theta)/2$. On a ainsi :

$$(98) \quad \forall f(\sigma, p_{cr}) = 0: \quad \text{sgn}(\text{tr}(d\mathbf{E}^p)) = \text{sgn}\left(\tau + \frac{f(\theta)}{2}(\sigma - \rho_o)\right)$$

En remplaçant dans l'équation précédente τ par sa valeur donnée par le critère de plasticité $f(\sigma, p_{cr}) = 0$, on retrouve les conditions (97) déduites à partir de la règle d'écoulement (96).

Fixons les objectifs du développement de ce modèle d'écrouissage isotrope. Ce critère de Willam-Warnke modifié avec un écrouissage isotrope et une règle d'écoulement associée (96) est destiné à modéliser :

- le comportement d'écrouissage proprement dit (écrouissage positif) dans le domaine des pressions hydrostatiques importantes, correspondant à une augmentation du domaine d'élasticité (*i.e.* p_{cr} augmente),
- le comportement adoucissant (écrouissage négatif) dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques correspondant à une diminution du domaine d'élasticité (*i.e.* p_{cr} diminue).

Nous considérons ainsi que le domaine *d'élasticité initiale* comprend les points de charge correspondants aux résistances en compression simple, traction simple et compression biaxiale. Le domaine *d'élasticité actuelle* dépend de plus du paramètre d'écrouissage $z = p_{cr}(Q)$: c'est encore à la variation de volume anélastique $Q = \tau \epsilon^p$ qu'on peut associer l'évolution du domaine d'élasticité.

Par ailleurs, la variation de volume anélastique ($\tau \epsilon^p$) est due d'une part à la variation irréversible du volume de la matrice, et d'autre part à la variation irréversible du volume de l'espace poreux connecté (*cf.* équation (67)). Cette dernière est quantifiée par la porosité plastique ϕ^p , qui s'interprète dans le cas du béton, comme la porosité créée par fissuration. Nous utiliserons donc ϕ^p comme variable contrôlant l'évolution du domaine d'élasticité, liant ainsi le comportement écrouissable et adoucissant à l'échelle macroscopique, au développement de la fissuration à une échelle inférieure. Utilisant l'hypothèse (69) avec la règle d'écoulement (96), on a :

$$(99) \quad dQ = d\phi^p = d\lambda \beta f(\theta) \frac{1}{p_{cr}} (\sigma + p_{cr} - p_o)$$

où d'une façon alternative :

$$(100) \quad d\chi = d\phi^p = d\lambda \frac{\partial h}{\partial p_{cr}}$$

où $h = h(\sigma, p_{cr})$ est le potentiel non associé défini par :

$$(101) \quad h(\sigma, p_{cr}) = \beta f(\theta) [(\sigma - p_o) \ln p_{cr} + p_{cr}]$$

L'augmentation de ϕ^p , "porosité créée par fissuration", est associée à une échelle inférieure à un processus d'ouverture de (micro-) fissures, conduisant à l'échelle macroscopique au

comportement adoucissant. La valeur du paramètre d'écrouissage p_{cr} diminue ainsi avec l'augmentation de ϕ^p et *vice versa*. Comme relation liant p_{cr} et ϕ^p , nous utilisons :

$$(102) \quad p_{cr} = p_{cr}^o \exp[-\kappa(\phi^p - \phi_o^p)] \quad \text{donc : } dp_{cr} = -\kappa p_{cr} d\phi^p$$

où κ et p_{cr}^o sont des constantes positives.

Supposant que la porosité plastique est la variable d'état thermodynamique à associer avec la force d'écrouissage $\zeta = p_{cr}$, la relation $p_{cr} = -\partial U / \partial \phi^p$ permet de déduire l'énergie bloquée $U(\phi^p)$:

$$(103) \quad U(\phi^p) = \frac{1}{\kappa} p_{cr}^o \exp[-\kappa(\phi^p - \phi_o^p)] + U_o.$$

L'équation précédente montre que l'énergie bloquée diminue (augmente) avec l'augmentation (diminution) de la "porosité créée par fissuration". Rappelons que l'origine et l'évolution de l'énergie bloquée sont liées à la structure hétérogène de la matière à une échelle microscopique (*cf.* 1-1-2-5).

Les phases de prise et de durcissement du ciment induisent un état d'auto-contraintes non uniforme dans le béton : la pâte de ciment durcie est en traction (retrait), et les granulats en compression. A l'interface granulat-matrice, des contraintes de traction équilibrent les contraintes de compression des granulats, (Acker, 1988) (*figure 1-25*).

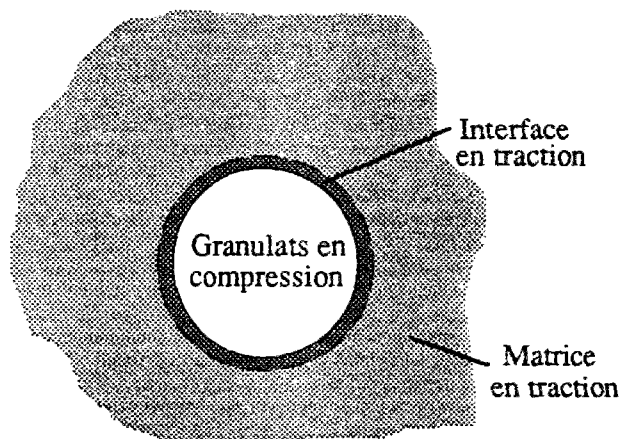


Figure 1-25 :

Etat d'auto-contraintes dû à la structure hétérogène du matériau composite béton

Sous sollicitation macroscopique, il y a apparition de microfissures dans les endroits les plus sollicités où les contraintes initiales sont les plus élevées. Dès qu'une microfissure se crée ou se propage, elle libère localement des contraintes initiales et les deux lèvres de la microfissure se déforment de manière non-symétrique. La redistribution des contraintes initiales provoque à l'échelle des constituants du matériau une variation de la déformation dans les granulates, dans la matrice et à l'interface granulat-matrice. On peut considérer que les granulates sont indéformables plastiquement, tandis que la matrice se déforme de façon irréversible. Ces déformations irréversibles ne sont en général pas compatibles à elles seules. Les déformations élastiques dans les granulates induites par des forces de contact (élastique) à l'interface granulat-matrice assurent la compatibilité cinématique du champ de déplacement correspondant aux déformations irréversibles dans la matrice (cf. 1-1-2-5). L'évolution de l'énergie bloquée peut être associée en partie aux déformations élastiques *résiduelles* des granulates (c'est à dire celles qui subsistent même après décharge complète du système à l'échelle microscopique), induites par la redistribution des auto-contraintes pendant les phases d'évolution élastoplastique. En outre, près des lèvres des microfissures, des déformations élastiques assurent la compatibilité du champ de déplacement correspondant aux déformations irréversibles dues aux frottements. A l'échelle macroscopique c'est la porosité plastique qui rend compte de ces phénomènes : l'augmentation de ϕ^p correspond à une échelle microscopique à une réduction des auto-contraintes et ainsi à une réduction de l'énergie (élastique) bloquée (par écrouissage). Inversement, la décroissance de ϕ^p entraîne à l'échelle microscopique une augmentation des auto-contraintes (et donc des déformations élastiques *résiduelles*) et ainsi une augmentation de l'énergie bloquée.

Lors du déchargement, lors que les fissures se referment, le contact des deux lèvres d'une fissure se produit avant la fin du déchargement, avec apparition de frottements, de micro-ruptures, de coincement de particules etc., (Acker, 1988). Les phases de déchargement entraînent ainsi une dissipation d'énergie en chaleur (frottement), donc également une variation de l'énergie bloquée. Cette évolution n'est pas prise en compte par notre modèle d'érouissage.

Avec (100) dans (16), l'expression du module d'érouissage s'écrit ici :

$$(104) \quad H = \frac{\partial f}{\partial p_{cr}} \frac{\partial p_{cr}}{\partial \phi^p} \frac{d\phi^p}{d\lambda}$$

à l'aide de l'équation (102), on obtient

$$(105) \quad H = -\kappa \frac{f(\theta)^2}{2p_{cr}^2} \beta (\sigma - p_o)^2 (\sigma + p_{cr} - p_o)$$

Le signe de l'écrouissage est ainsi donné par le signe inverse des relations (97), respectivement (98) :

$$(106) \quad \text{sgn}(H) = -\text{sgn}(\text{tr}(d\mathcal{E}^p)) = -\text{sgn}(\sigma + p_{cr} - p_o)$$

Les relations (106) montrent que l'écrouissage est positif en comportement plastiquement contractant, qui correspond à une réduction de l'espace poreux connecté. Inversement, il est négatif quand le matériau suit un comportement plastiquement dilatatant, avec alors une augmentation de la porosité créée par fissuration. Quand il n'y a pas d'évolution de l'espace poreux connecté, il n'y a pas d'évolution de l'écrouissage. C'est le cas pour tous les points de charge qui se trouvent sur l'intersection du cône du méridien $f(\theta)/2$ et du paraboloïde en évolution. H tend vers zéro quand la porosité plastique ϕ^p prend des valeurs négatives importantes.

1-2-5-4. Domaine d'application

Le modèle de Willam-Warnke modifié avec écrouissage isotrope est introduit comme critère de plasticité pour modéliser le comportement écrouissable ($H > 0$) et adoucissant ($H < 0$) du béton à partir d'un domaine d'élasticité initiale qui comprend les points de charge correspondants aux résistances en compression simple, compression biaxiale et traction simple. Sous cette forme, il apparaît bien adapté pour rendre compte du comportement plastiquement contractant dans les domaines des pressions hydrostatiques importantes, et du comportement plastiquement dilatatant dans les domaines des faibles pressions hydrostatiques.

Par ailleurs, avec une règle d'écoulement associée, il est difficile de modéliser le comportement plastiquement contractant dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques : étudions les cas de la compression simple et de la compression biaxiale. Comme on a les invariants :

$$\text{en compression simple : } \begin{cases} \sigma = -2\sigma_c / 3 \\ \tau = \sigma_c / \sqrt{3} \\ f(60^\circ) = f_c \end{cases} \quad \text{en compression biaxiale : } \begin{cases} \sigma = -22\sigma_{bc} / 3 \\ \tau = \sigma_{bc} / \sqrt{3} \\ f(0^\circ) = f_t \end{cases}$$

avec z le rapport entre charge appliquée (en valeur absolue) et les résistances σ_c et σ_{bc} , on déduit de l'équation (98)

- dans le cas de la compression simple : $\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) < 0$ si $z < \frac{3f_c}{2\sqrt{3}-f_c} \rho_o / \sigma_c$
- dans le cas de la compression biaxiale : $\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) < 0$ si $z < \frac{3f_t}{2(\sqrt{3}-f_t)} \rho_o / \sigma_{bc}$

Utilisant les résultats d'essais de référence de *Kupfer et al.* (1969), (cf. 1-2-2-1 et 1-2-4-1), on obtient un comportement plastiquement contractant ($\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) < 0$) en compression simple pour $z \leq 20\%$, et en compression biaxiale pour $z \leq 10\%$, (par rapport à $z \leq 80\%$ relevé dans les essais, cf. figure 1-16).

Ainsi, le critère de Willam-Warnke modifié avec une règle d'écoulement associée n'est pas adapté pour rendre compte de façon réaliste du comportement plastiquement contractant dans les domaines des faibles pressions hydrostatiques. Une règle d'écoulement non-associée devrait être employée pour rendre compte de ce phénomène (*Chen et Han*, 1988).

En résumé, notre modèle est utilisable pour modéliser :

- le comportement écrouissable dans le domaine des fortes pressions hydrostatiques, où la surface est fermée, entraînant une évolution de l'écrouissage positif. C'est l'avantage du critère de Willam-Warnke modifié sur les critères de ruine à 3 et à 5 paramètres;
- le comportement adoucissant dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques.

Enfin, dans ce domaine d'application, on satisfait toujours la non-négativité de la dissipation intrinsèque, $\Phi = \sigma : \dot{\mathbf{\epsilon}}^p + p_{cr} \dot{\phi}^p \geq 0$. Cette dissipation s'écrit, avec les règles d'écoulement (96) et d'écrouissage (100), sous la forme suivante :

$$(107) \quad \tau + f(\phi)(\sigma + p_{cr} - \rho_o)(\sigma / p_{cr} + \beta) \geq 0 \quad \text{lorsque : } f(\sigma, p_{cr}) = 0$$

En remplaçant dans l'inégalité τ par sa valeur donnée par la fonction de charge (95), on a, pour $f(\phi) > 0$ et $p_{cr} > 0$:

$$(108) \quad \sigma^2 - \rho_o^2 + 2p_{cr}(\rho_o + \beta(\sigma + p_{cr} - \rho_o)) \geq 0 \quad \text{lorsque : } f(\sigma, p_{cr}) = 0$$

Dans l'intervalle de variation $[\rho_o - 2p_{cr}, \rho_o]$, la condition (108) est satisfaite si $p_{cr} \geq \rho_o$ (pour $\beta = 1, \sigma = \rho_o - 2p_{cr}$).

1-2-6. Récapitulatif de la modélisation élastoplastique

Nous présentons ici un rapide récapitulatif de la modélisation élastoplastique proposée ci-dessus. Le *tableau 1-1* présente les critères, les règles d'écoulements et les règles d'écrouissage utilisés.

La comparaison du domaine d'application de ces deux modèles élastoplastiques adaptés au béton, montre qu'ils sont complémentaires pour ce qui concerne la modélisation du comportement écrouissable et adoucissant dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques.

On dispose ainsi de trois modèles (3 paramètres, 4 paramètres, couplé). La *figure 1-26* présente schématiquement leurs différences vis-à-vis des comportements en compression simple et traction simple.

Le choix du modèle à utiliser devra être approprié au problème que l'on veut traiter.

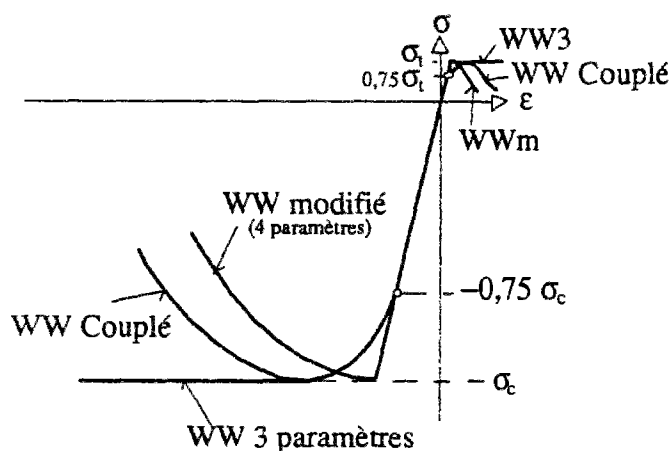


Figure 1-26 :

Illustration (qualitative) des différents modèles proposés en compression simple et en traction simple.

(WW3= Critère de Willam-Warnke à 3 paramètres avec écrouissage (positif) isotrope, WWm= Critère de Willam-Warnke modifié à 4 paramètres avec écrouissage isotrope et règle d'écoulement associée, WW Couplé= Couplage de deux critères)

	Willam-Warnke à 3 paramètres (Paramètres f_c, f_t, ρ_o)	Willam-Warnke modifié (4 paramètres) (Paramètres f_c, f_t, ρ_o, p_{cr})
Critère de plasticité	$f(\sigma, z) = \tau + f(\theta)(\sigma - z\rho_o)$	$f(\sigma, p_{cr}) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}}(\sigma - \rho_o)^2)$
Restrictions	$0 \leq f_c \leq \sqrt{3}, 0 \leq f_t \leq \sqrt{3}/2, \rho_o \geq 0$ $0,5f_t \leq f_c \leq 2f_t$	$0 \leq \rho_o \leq p_{cr}$ $0,5f_t \leq f_c \leq 2f_t$
Règle d'écoulement	- avec écrouissage : $f(\sigma, z) \neq g(\sigma)$ $d\epsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{\delta}{3} \mathbf{1} \right)$ - cas plastique parfait : $f(\sigma) = g(\sigma)$ $d\epsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} (\sigma - \rho_o) \right)$	toujours : $f(\sigma, p_{cr}) = g(\sigma, p_{cr})$ $d\epsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \frac{1}{p_{cr}} (\sigma + p_{cr} - \rho_o) \mathbf{1} + \frac{1}{2p_{cr}} (\sigma - \rho_o)(\sigma + 2p_{cr} - \rho_o) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right)$
Comportement plastiquement dilatatant et contractant	toujours : $\text{tr}(d\epsilon^p) \geq 0$ (en raison de $0 \leq \delta \leq f_t$)	$\text{tr}(d\epsilon^p) < 0$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o < 0$ $\text{tr}(d\epsilon^p) > 0$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o > 0$ $\text{tr}(d\epsilon^p) = 0$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o = 0$
Règle d'écrouissage	- variable d'écrouissage : $\chi = \gamma_{eq}^p$ $d\chi = d\gamma_{eq}^p = \delta \text{tr}(d\epsilon^p) = d\lambda$ - force d'écrouissage : $\zeta = \delta\rho_o(1 - z)$	- variable d'écrouissage : $\chi = \phi^p$ $d\chi = d\phi^p = \beta \text{tr}(d\epsilon^p)$ (avec : $\phi_o < \beta < 1$) - force d'écrouissage : $\zeta = p_{cr}$
Evolution du domaine d'élasticité	$\zeta = \zeta_o \exp[-\kappa\gamma_{eq}^p]$ d'où $z = 1 - (1 - z_o) \exp[-\kappa\gamma_{eq}^p]$	$p_{cr} = p_{cr}^o \exp[-\kappa(\phi^p - \phi_o^p)]$
Module d'écrouissage	$H = \kappa f'(\theta) \rho_o (1 - z_o) \exp[-\kappa\gamma_{eq}^p]$	$H = -\kappa \left(\frac{f(\theta)}{p_{cr}} \right)^2 \beta (\sigma - \rho_o)^2 (\sigma + p_{cr} - \rho_o)$
Signe de l'écrouissage	toujours : $H \geq 0, d\zeta \leq 0, dz \geq 0$	$H > 0, p_{cr} \uparrow$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o < 0$ $H < 0, p_{cr} \downarrow$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o > 0$ $H = 0, dp_{cr} = 0$ si : $\sigma + p_{cr} - \rho_o = 0$
Domaine d'application	- faibles pressions hydrostatiques : $z \uparrow$ $z \in [0,75 ; 1,0]$	- faibles pressions hydrostatiques : $p_{cr} \downarrow$ - fortes pressions hydrostatiques : $p_{cr} \uparrow$
Résultats d'essais nécessaires (par exemple)	- compression simple - traction simple - compression biaxiale	- compression simple - traction simple - compression biaxiale - essai triaxial

Tableau 1-1 : Récapitulatif de la modélisation élastoplastique

1-3. EXTENSION : COUPLAGE PLASTICITE - ENDOMMAGEMENT

Dans les modèles présentés au paragraphe précédent, le béton est considéré comme matériau élastoplastique; les variables plastiques (déformations permanentes, écrouissage) modélisent sa fissuration : il n'y a évolution des variables plastiques que lorsque le point de charge est situé sur la frontière du domaine d'élasticité; à la décharge élastique, un point de charge rentre dans le domaine d'élasticité, et les variables plastiques n'évoluent plus. C'est pourquoi un modèle élastoplastique est en général difficile à adapter pour modéliser à l'échelle de la structure des phénomènes qui se produisent à la décharge-recharge à l'échelle microscopique (frottement, micro-ruptures, coincement de particules, fermeture incomplète des fissures etc.). D'un point de vue pratique, cela signifie en particulier que ce type de modèle est mal adapté à l'étude des structures soumises à des chargements cycliques (*cf.* 1-1-2-7).

Ce paragraphe est consacré à l'extension du modèle élastoplastique à un modèle élastoplastique avec endommagement. L'objectif de ce modèle est la prédiction des effets du dommage (représenté en terme de déformations permanentes) à l'échelle macroscopique des structures, sous chargements cycliques ou dynamiques.

La complexité des phénomènes physiques mis en jeu lors de décharge-recharge, nous amène à poser des hypothèses conduisant à construire un modèle élastoplastique avec endommagement : l'effet du dommage sera représenté par la variation des caractéristiques élastiques, fonction d'une variable d'endommagement macroscopique observable : la "porosité créée par fissuration".

1-3-1. Effet de dommage à la décharge-recharge et endommagement

Sur une courbe expérimentale du comportement en compression simple d'un béton soumis à des cycles de charge, on remarque (*figure 1-27*) :

- au début du déchargement, des valeurs de modules plus élevées que le module initial. Au cours de la décharge, la valeur du module diminue progressivement;
- un boucle d'hystérésis;
- on ne revient jamais après un cycle décharge-recharge au point de départ de la décharge.

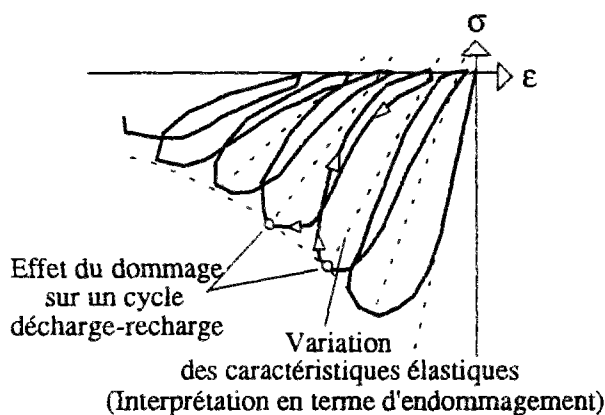


Figure 1-27 :
Courbe uni-axiale de compression simple sous chargement cyclique (d'après Sinha et al. 1964).

L'explication physique de ces non-linéarités du comportement mécanique du béton ne cesse d'avancer (*cf. Acker, 1988*). Il n'est pas possible d'expliquer l'origine de ces phénomènes sans descendre à l'échelle du matériau composite, échelle en deçà de l'échelle macroscopique de la structure, adoptée pour la description continue des évolutions irréversibles. Sans prétendre être complet, rappelons quelques explications possibles de ces phénomènes.

A la décharge, lorsque les fissures se referment, on a apparition de frottements, de micro-ruptures, de coincement de particules etc. En particulier, dans le cas d'une fissure créée, le frottement existe dès le début de la refermeture, ce qui peut expliquer la valeur élevée des modules apparents au début de la décharge; ces frottements peuvent aussi entraîner l'arrachement de particules qui empêchent ensuite la refermeture totale de la fissure. Cette non-réversibilité des déplacements (ainsi que le coincement de particules) dans le voisinage immédiat du front de la fissure engendre un effet de coin (ou de "casse-noix"). Ceci produit un dommage, qui peut

expliquer qu'après un cycle décharge-recharge, on ne revient jamais au point de départ (Acker, 1988). De plus, une part du phénomène peut être liée à des mouvements d'eau au voisinage du front de fissure, ce qui peut expliquer la dépendance du comportement non-linéaire du béton vis-à-vis de la vitesse de chargement (Rossi, 1986).

Par rapport à ces phénomènes physiques complexes, notre but est le suivant : modéliser l'effet du dommage sur le comportement non-linéaire, à l'échelle macroscopique de la structure, soumise à des chargement cycliques et dynamiques à de très faibles vitesses : tout effet de vitesse sur les lois de comportement sera négligé.

Comme un modèle élastoplastique est difficilement adaptable à un phénomène qui se produit à la décharge-recharge, nous avons choisi un modèle élastoplastique avec endommagement. On suppose alors que le dommage créé par la refermeture incomplète des fissures peut s'interpréter, dans une description continue, en terme d'une variation des caractéristiques élastiques du matériau élastoplastique béton (*figure 1-27*) : la décharge-recharge est modélisée avec un module plus faible que le module du matériau vierge.

On considère ainsi

- la variation des caractéristiques élastiques (endommagement) comme moyen de représentation des **effets du dommage** observés à l'échelle des structures.

Ces effets de dommage sont à distinguer

- de **l'apparition et l'évolution de dommages** (*i.e.* fissuration) : les dommages sont toujours représentés en terme de déformations permanentes, qui rendront compte à l'échelle macroscopique des effets de la microfissuration.

L'extension *phénoménologique* du modèle élastoplastique à un modèle élastoplastique avec endommagement est effectué en vue d'une application précise : l'étude de structures en béton soumises à des chargements cycliques.

1-3-2. Variation des caractéristiques élastiques

Supposons ainsi qu'une variation des caractéristiques élastiques rend compte à l'échelle macroscopique de l'effet du dommage créé par la refermeture incomplète des fissures. L'amélioration du modèle élastoplastique présenté au paragraphe 1-2 consiste alors à faire dépendre les caractéristiques élastiques du matériau de l'évolution des variables plastiques (déformations permanentes, variables d'écrouissage), celles-ci modélisant sa fissuration (*cf.* 1-1-4-4). On ne considère que le cas d'élasticité isotrope du matériau, y compris lorsque les déformations plastiques sont non nulles.

Comme on l'a noté au paragraphe 1-2-3, la porosité connectée ϕ a un effet néfaste sur les propriétés du béton *vierge*. Les évolutions élastoplastiques entraînent une variation de l'espace poreux connecté dont une partie, quantifiée par ϕ^p (porosité créée par fissuration) est irréversible. Nous choisissons de modéliser l'effet du dommage en termes de variation des caractéristiques élastiques avec ϕ^p comme variable d'endommagement :

$$(109) \quad \begin{cases} K = K(\phi^p) \\ G = G(\phi^p) \end{cases}$$

où K et G sont respectivement les modules élastiques de compression et de cisaillement. La variable d'endommagement ϕ^p a ici une signification physique : elle quantifie le volume de vides connectés créés par fissuration. L'augmentation de ϕ^p correspond à une ouverture de microfissures, donc à l'apparition et l'évolution du dommage à l'échelle macroscopique. Du fait de cette signification physique, ϕ^p a déjà été utilisée au paragraphe précédent comme variable d'écrouissage, et ici - dans l'extension phénoménologique du modèle élastoplastique - ϕ^p est également employée comme variable d'endommagement.

Cette variable d'endommagement est mesurable, indépendamment de la variation des caractéristiques élastiques où elle intervient : c'est l'avantage sur les modèles d'endommagement habituels.

1-3-2-1. Porosité plastique et endommagement

Rappelons l'hypothèse (69),

$$(69) \quad d\phi^p = \beta \operatorname{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) \quad \text{avec : } \phi_0 < \beta < 1$$

qui lie la variation de volume anélastique total ($\operatorname{tr}\mathbf{\epsilon}^p$) à la variation irréversible du volume de l'espace poreux connecté. Si l'on suppose que les déformations irréversibles du matériau sont essentiellement dues à l'augmentation de la porosité connectée (par fissuration), la porosité plastique doit être proche de la déformation volumique plastique $\operatorname{tr}\mathbf{\epsilon}^p$, donc le coefficient β est proche de 1.

De plus, sur des cycles de charge dans un essai de compression simple, au-dessus de 75% de la résistance on n'observe que de faibles boucles d'hystérésis, et les modules apparents à la décharge-recharge sont égaux aux modules initiaux (*Chen, 1982*). L'effet du dommage à la décharge-recharge apparaît d'une façon significative pour des niveaux de charge plus importants (*figure 1-28*). Cette limite (ou seuil) coïncide avec le début du comportement plastiquement dilatatant ($\operatorname{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) > 0$, cf. *figure 1-17b*). Cette correspondance est également mise en évidence pour d'autres conditions de chargement (compression biaxiale, traction), (*Chen, 1982*).

On peut ainsi déterminer des fonctions $K(\phi^p)$ et $G(\phi^p)$. Mais on notera, que la mesure de la variable d'endommagement est la mesure d'une variable macroscopique observable, tandis que la "mesure" de l'endommagement est déjà la mesure d'une grandeur issue de l'interprétation de l'effet du dommage.

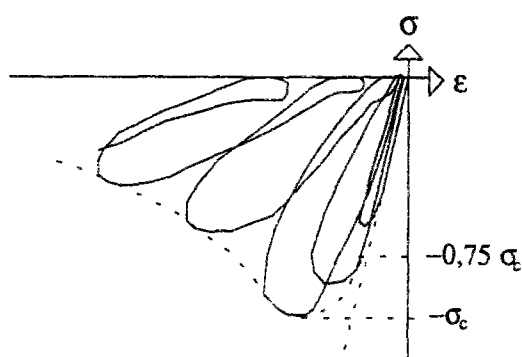


Figure 1-28 : Comportement uniaxial du béton sous chargement cyclique (d'après *Karsan et Jirsa, 1969*) : Effet du dommage à partir d'un niveau de chargement à 75% de la résistance.

1-3-2-2. Fonctions $K(\phi^p)$ et $G(\phi^p)$

Les expériences montrent que par rapport aux valeurs initiales la variation maximale des modules de compression K apparents a un ordre de grandeur de 30% (dans les essais biaxiaux). Le début de cette variation coïncide avec le début du comportement plastiquement dilatatant ($\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) > 0$). Par ailleurs, dans des essais de compression triaxiale, où $\text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) < 0$, la variation des caractéristiques élastiques (module de décharge-recharge) n'est pas très significative (cf. Chen, 1982). On peut ainsi supposer que la variation de K en fonction de ϕ^p s'effectue entre deux asymptotes de valeurs K_o et K_{ult} , qui sont respectivement le module de compression initial et le module de compression ultime (figure 1-29). Nous utilisons :

$$(110) \quad K(\phi^p) = K_o + \Delta K(\phi^p) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \Delta K = (K_{ult} - K_o)(1 - \exp[-\kappa(\phi^p)^{1+n}]) & \text{si : } \phi^p \geq 0 \\ \Delta K = 0 & \text{si : } \phi^p < 0 \end{cases}$$

où κ et n sont des constantes positives.

Sous une forme incrémentale, on a :

$$(111) \quad dK = \begin{cases} \kappa(1+n)(\phi^p)^n \Delta K d\phi^p & \text{si } \phi^p \geq 0 \\ 0 & \text{si } \phi^p < 0 \end{cases}$$

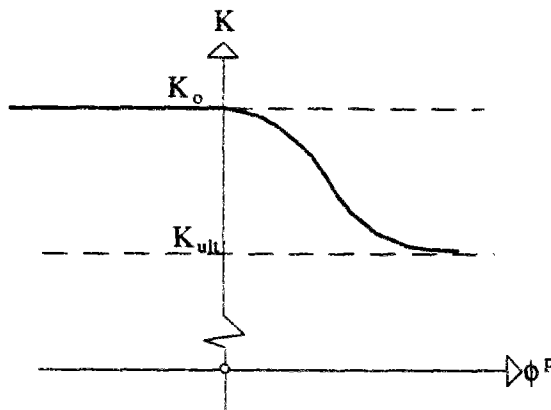


Figure 1-29 :
Module de compression versus variable
d'endommagement, la porosité plastique.

Le module de cisaillement G peut varier de l'ordre de 80% à 90% par rapport sa valeur initiale. Nous utilisons :

$$(112) \quad G(\phi^p) = G_o + \Delta G(\phi^p) \quad \text{avec : } \Delta G = (G_{ult} - G_o)(1 - \exp[-\kappa(\phi^p)^{1+m}])$$

où m est un paramètre positif qui permet de prendre en compte la dissymétrie du comportement en traction et en compression mise en évidence par exemple par Mazars (1984). Nous utilisons :

$$\begin{cases} m = 1 & \text{si } \phi^p \leq 0 \\ m = 0 & \text{si } \phi^p > 0 \end{cases}$$

La *figure 1-30* présente l'évolution du module de cisaillement (équation (112)) en fonction de ϕ^p pour des essais en compression simple et traction simple (avec $\phi^p = \tau \epsilon^p$, et $\tau \epsilon^p$ issue des résultats expérimentaux de la *figure 1-17b*).

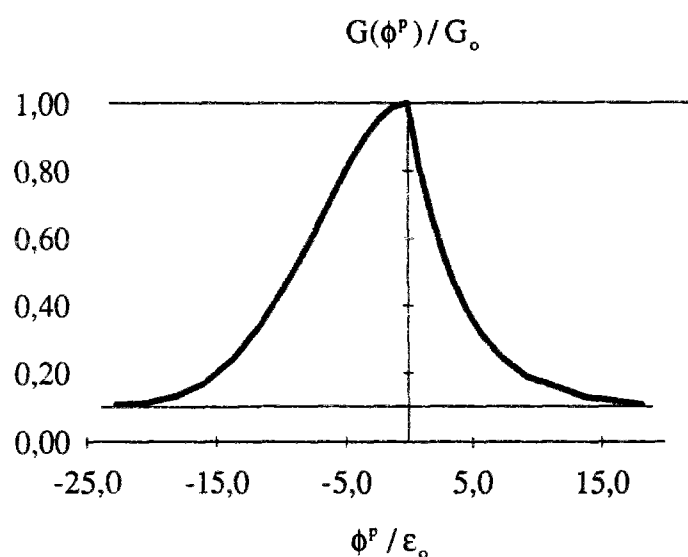
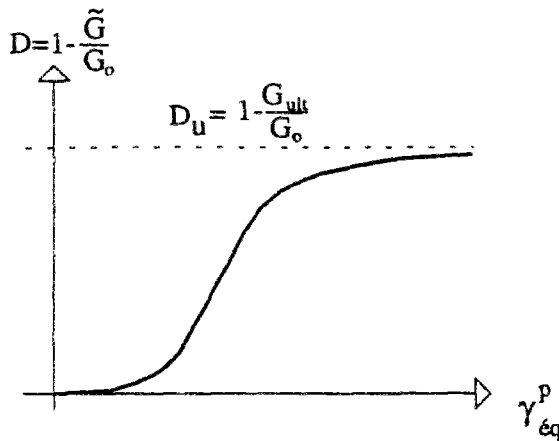


Figure 1-30 :

Variation du module de cisaillement en compression simple et traction simple (avec : $G_{ult}/G_o = 0,1$, $\kappa = 2500$). ϵ_o est la déformation axiale où apparaît l'effet d'endommagement ($\epsilon_o \approx -0,15\%$ en compression simple, et $\epsilon_o = 0,01\%$ en traction simple).

**Figure 1-31 :**

Loi d'évolution de l'endommagement D en fonction de la distorsion plastique équivalente proposée par *Frantziskonis et Desai* (1987) :

$$D = 1 - \tilde{G} / G = D(\gamma_{eq}^p)$$

$$D = D_u (1 - \exp(-\kappa \xi_D^R)) = D_u (1 - \exp(-\bar{\kappa} \gamma_{eq}^p{}^R))$$

$$\text{avec : } d\xi_D = d\gamma_{eq}^p / \sqrt{2}$$

$$D_u = 0.875, R = 1.502$$

$$\kappa = 668.0, \bar{\kappa} = 397$$

On peut comparer cette variation du module de cisaillement en fonction de la variable d'endommagement ϕ^p avec celle proposée par *Frantziskonis et Desai* (1987), où la variable d'endommagement est définie par la variation du module de cisaillement $D(\gamma_{eq}^p) = 1 - \tilde{G} / G_o$, avec la distorsion plastique γ_{eq}^p comme variable contrôlant son évolution (*figure 1-31*). Pour des trajets de charge en compression simple, compression biaxiale, on peut établir, par l'intermédiaire de la définition de la dilatace (45), la liaison entre ce modèle et celui proposé ici, permettant de déterminer les paramètres de la fonction (112).

1-3-3. Couplage de la plasticité et de l'endommagement

1-3-3-1. Les composantes

Ayant ainsi défini la variation des caractéristiques élastiques à la décharge-recharge, le modèle couplant la plasticité et l'endommagement est construit :

- Les variables plastiques du matériau (déformations plastiques, variables d'écrouissage), sont calculées respectivement avec les règles d'écoulements (76), (78), (79), (80), (96), et les règles d'écrouissage (82) et (99). Elles modélisent la fissuration (c'est à dire, *le dommage*) à l'échelle macroscopique de la structure. Avec les critères de plasticité (70), (74) et (95), la partie plastique décrit le comportement écrouissable et adoucissant du matériau (évolution du domaine d'élasticité).

- La connaissance de l'évolution des variables plastiques permet de calculer la variation des caractéristiques élastiques, qui rend compte de *l'effet du dommage* d'une façon phénoménologique. Ici, on n'utilise qu'une seule variable d'endommagement, la porosité créée par fissuration, et l'élasticité est supposée demeurer isotrope.

Pour ce modèle, le tenseur de contraintes s'écrit :

$$(113) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2(G_o + \Delta G)(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + (K_o + \Delta K) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1}$$

et sous une forme incrémentale :

$$(114) \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} = & 2(G_o + \Delta G(\phi^p))(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) + (K + \Delta K(\phi^p)) \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1} \\ & + 2dG(\phi^p, d\phi^p)(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + dK(\phi^p, d\phi^p) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1} \end{aligned}$$

ou, à l'aide des relations (111), (112) et l'hypothèse (69) :

$$(115) \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} = & 2G_o(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) + K_o \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1} \\ & + 2\Delta G[(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) + \kappa(1+m)(\phi^p)^m(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)\beta \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)] \\ & + \Delta K[\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) + \kappa(1+n)(\phi^p)^n \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)\beta \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)] \mathbf{1} \end{aligned}$$

En ne retenant que les termes du même ordre dans l'équation précédente, on obtient :

$$(116) \quad d\boldsymbol{\sigma} = 2(G_o + \Delta G)(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) + (K_o + \Delta K) \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1}$$

que nous utiliserons par la suite.

Enfin, grâce à l'hypothèse (51), dans le cas du couplage endommagement - critère de plasticité de Willam-Warnke à 3 et 4 les restrictions thermodynamiques sont données par les inégalités (87b) et (107).

1-3-3-3. Cas d'étude : le cisaillement pur

Dans le modèle proposé, on n'a défini qu'une seule variable d'endommagement : la porosité plastique. Une telle simplification conduit à certaines limites, en particulier en ce qui concerne la prise en compte des effets du dommage lors de chargements provoquant des cisaillements.

Pour cela, étudions le cas d'un état de contraintes de cisaillement pur, en regardant d'une part la valeur de la limite d'élasticité obtenue, et d'autre part l'évolution des variables plastiques. Le tenseur des contraintes dans le repère principal s'écrit :

$$(117) \quad \sigma = \tau(u_1 \otimes u_1) - \tau(u_3 \otimes u_3)$$

ayant comme valeurs propres $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\tau, 0, -\tau)$, et le triplet (53) des invariants :

$$(118) \quad (\sigma, \tau, \theta) = (0, \tau, 30^\circ)$$

Utilisant (118) dans les critères de plasticité de Willam-Warnke à respectivement 3 et 4 paramètres (équations (70) et (95)), on a :

$$(119) \quad \begin{cases} f(\sigma) = \tau - f(30^\circ)\rho_o \\ f(\sigma, p_{cr}) = \tau - f(30^\circ)\rho_o(1 - \rho_o / 2p_{cr}) \end{cases} = 0$$

où $f(30^\circ)$ est le méridien de cisaillement pour l'angle de Lode $\theta = 30^\circ$, qui se détermine avec la formule explicite donnée en **Annexe 1**. Avec les valeurs de référence issues des essais de *Kupfer et al.* (1969), (cf. 1-2-2-1 et 1-2-4-1), on a, avec $f(30^\circ) = 0,8652$, une limite d'élasticité égale dans les deux cas à :

$$\tau \approx 0,95\sigma_t \quad (\sigma_t = \text{résistance en traction simple})$$

Cette valeur est de l'ordre de grandeur de celle de la résistance en cisaillement déterminée expérimentalement (cf. *Chen*, 1982).

Par ailleurs, à l'aide de la règle d'écoulement (96), dans le cas du cisaillement pur avec $\sigma = 0$ et $p_{cr} \gg \rho$, on a $\text{tr}(d\epsilon^p) \approx 0$, ou encore $d\phi^p \approx 0$. Ainsi, le comportement plastique tend vers un comportement élastoplastique parfait ($H=0$) : il n'y a ni évolution du domaine d'élasticité, ni

évolution de l'endommagement. En cisaillement pur le modèle proposé ne rend alors compte ni du comportement adoucissant, ni de l'effet du dommage.

Ceci est une limite du modèle, en particulier lors d'études de structures de poutres en béton soumises à un chargement de torsion. Cette limite concerne le comportement adoucissant et l'endommagement, tandis que la détermination de la limite d'élasticité reste correcte.

1-3-4. Récapitulatif du modèle élastoplastique avec endommagement

Rappelons ici les hypothèses de base de l'extension phénoménologique du modèle élastoplastique à un modèle élastoplastique avec endommagement.

- H1 : le dommage du béton est représenté en terme de déformations permanentes, modélisant la fissuration du matériau (hypothèse de base de la modélisation élastoplastique). Le comportement écrouissable et adoucissant du béton est modélisé par l'évolution du domaine d'élasticité.
- H2 : l'effet du dommage qui apparaît à la décharge-recharge peut être représenté par une variation des caractéristiques élastiques (endommagement).
- H3 : l'élasticité du matériau demeure isotrope, y compris lorsque les déformations plastiques sont non nulles.
- H4 : La variation des caractéristiques élastiques peut être prise en compte par une seule variable d'endommagement : la porosité plastique. Etant un variable plastique du matériau, il n'y a évolution de l'endommagement que si un point de charge se trouve à la frontière du domaine d'élasticité.

Avec ces hypothèses nous avons construit un modèle simple couplant la plasticité avec l'endommagement pour une application précise : l'étude de structures en béton soumises à des chargements cycliques, voir dynamiques à très faibles vitesses.

1-4. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre des modèles élastoplastiques et leur extension à un modèle élastoplastique avec endommagement "adaptés" au béton à l'échelle de description des structures. A cette échelle, on considère que les variables plastiques du matériau modélisent sa fissuration et la variation des caractéristiques élastiques l'effet du dommage dû à la refermeture incomplète des fissures. Compte tenu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu dans ce matériau, nous avons été amené à poser des approximations parfois assez grossières. Dans tous les cas, nous avons essayé de faire une économie maximum de paramètres, en vue de l'applicabilité des modèles comme aides au concepteur des ouvrages d'art en béton.

Le modèle de plasticité considère le comportement écrouissable et adoucissant en terme d'une augmentation (respectivement d'une diminution) du domaine d'élasticité lié au comportement plastiquement contractant, (respectivement au comportement plastiquement dilatant). Le comportement assouplissant est pris en compte d'une manière purement phénoménologique par la variation des caractéristiques élastiques (endommagement). Nous avons utilisé la porosité plastique ϕ^p d'une part comme variable d'écrouissage, d'autre part comme variable d'endommagement, en raison de sa signification physique à l'échelle macroscopique des structures en béton : c'est la porosité créée par fissuration. Cette variable plastique (variable d'endommagement) a l'avantage d'être mesurable, indépendamment de la variation des caractéristiques élastiques. Par ailleurs, comme il n'y a évolution plastique que si un point de charge se trouve à la frontière du domaine d'élasticité, on ne rend pas compte de toute modification du comportement du béton pendant les décharges-recharges, mise en évidence et traitée par exemple par *La Borderie* (1991). Nous n'avons pas cherché à construire de façon extrêmement précise un modèle s'appuyant sur une description fine de la structure microscopique de la matière.

Autrement dit, le propos des modèles présentés ici n'est pas de *localiser* une fissure individuelle ou de suivre son ouverture, sa propagation et sa refermeture en tant que discontinuité géométrique, mais de "*zoomer*" par l'intermédiaire de la modélisation macroscopique du comportement irréversible du matériau, sur les zones où apparaît à l'échelle de la structure le dommage imputable au développement d'une microfissuration existant à une échelle inférieure. Ce dommage est représenté en terme de déformations permanentes, et le volume de vides créé par fissuration est quantifiable dans le volume élémentaire par $\phi^p d\Omega$.

Par ailleurs, on rappelle que le comportement adoucissant présente une difficulté inhérente à la modélisation, ce qui limite leur utilisation à des conditions de charge précises. De plus, d'un point de vue numérique, les résultats obtenus peuvent fortement dépendre de la taille du maillage éléments finis utilisé. Mais cet effet d'échelle est lié à tout modèle "radoucissant", qu'il soit de plasticité, de fissuration ou bien d'endommagement. Une travail de recherche considérable est consacré à ce sujet (une synthèse des modèles numériques en développement se trouve par exemple dans *de Borst et al.*, 1993). De plus, cet effet d'échelle ne concerne pas seulement les résultats, mais également les données en terme de caractéristiques mécaniques (résistance en traction, modules d'élasticité) (*cf. Rossi et Richer*, 1987). Ces effets n'ont pas été traités ici.

Nous disposons de modèles de comportement pour le béton, élastoplastique pour le cas de chargements monotones, et élastoplastique couplé à de l'endommagement pour le cas de chargements cycliques. Ces modèles sont écrits sous une forme générale en 3 dimensions. Ils sont relativement simples, c'est à dire qu'on sait identifier les divers paramètres à partir d'essais standards, et relativement complets car les principaux phénomènes observés lors de chargements appliqués au béton de structures sont représentés. Leur mise en oeuvre numérique est présentée au **chapitre 3**. Ces modèles vont maintenant être utilisés dans des éléments finis particuliers développés pour l'analyse de structures en béton armé soumises à des chargements statiques ou dynamiques.

2- APPLICATION AUX CALCULS
STATIQUES ET DYNAMIQUES
DE STRUCTURES EN BETON ARMÉ
ET BETON PRECONTRAINT

MODELISATION POUTRE MULTIFIBRE

2-0. INTRODUCTION

L'utilisation de matériaux de hautes résistances et la tendance vers une construction optimisée conduit à des structures de plus en plus sensibles vis-à-vis des phénomènes non-linéaires tant matériels que géométriques. La prise en compte de ces phénomènes dans l'analyse des structures présente d'une part un intérêt certain pour la sécurité des constructions, et d'autre part un intérêt économique.

Pour ce qui concerne la non-linéarité en matériau, nous avons développé au chapitre précédent des modèles macroscopiques du comportement pour le béton, qui permettent pour un état triaxial de contraintes donné de déterminer l'évolution de variables d'état internes : le tenseur des déformations plastiques, les variables d'écrouissage et d'endommagement. Dans un logiciel par éléments finis on peut utiliser ces lois de comportement avec des éléments massifs pour l'analyse bi- et tridimensionnelle des structures en béton (*cf.* chapitre 3).

Une telle modélisation par éléments finis nécessite des stockages et des temps de calcul importants.

C'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre un outil numérique adapté en général à l'analyse tridimensionnelle non-linéaire (matériel, géométrique) des structures constituées de poutres, et en particulier à l'étude 3D des structures à poutres en béton armé : *l'élément finis poutre multifibre*.

Ce chapitre est divisé en 4 parties.

Une première partie fait rappel aux différentes approches possibles de discrétisation par éléments finis pour analyser des problèmes non-linéaires de poutres en béton armé, ce qui permet de situer notre approche par rapport à celles existantes.

Une deuxième partie est consacrée à la formulation de l'élément fini poutre multifibre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations : les non-linéarités en matériau seront prise en compte par des lois de comportement **triaxiales**, comme celles présentées au chapitre précédent, au sein d'un élément fini poutre tridimensionnel classique.

La troisième partie est consacrée aux extensions de la formulation, en intégrant d'une part les effets non-linéaires géométriques des poutres (grands déplacements, déformation infinitésimale), et d'autre part l'effet d'une précontrainte. Pour ce qui concerne la prise en compte des non-linéarités géométriques, on utilise des techniques bien établies : la formulation incrémentale lagrangienne actualisée avec traitement semi-tangentiel des paramètres de rotation. Pour la prise en compte de l'effet de précontrainte, nous proposons une approche nouvelle qui consiste à déterminer de manière explicite le déplacement relatif (glissement) entre un câble de précontrainte et le béton qui l'entoure.

Comme résumé et conclusion, nous présentons le domaine d'application de l'outil numérique proposé.

2-1. NIVEAU DE DISCRETISATION DES STRUCTURES POUTRES PAR ELEMENTS FINIS

L'analyse non-linéaire des structures en béton armé a fortement progressé ces dernières décennies grâce aux modèles numériques mis à la disposition des ingénieurs, parmi lesquels, au premier rang, on trouve les éléments finis. La puissance des ordinateurs actuels permet la résolution de problèmes non-linéaires en matériau et/ou en géométrie de plus en plus complexes.

On peut imaginer trois niveaux de discrétisation par éléments finis de structures en poutres, (cf. Millard *et al.*, 1991) : un niveau global, un niveau local ou un niveau semi-global de discrétisation, illustrés *figure 2-1*.

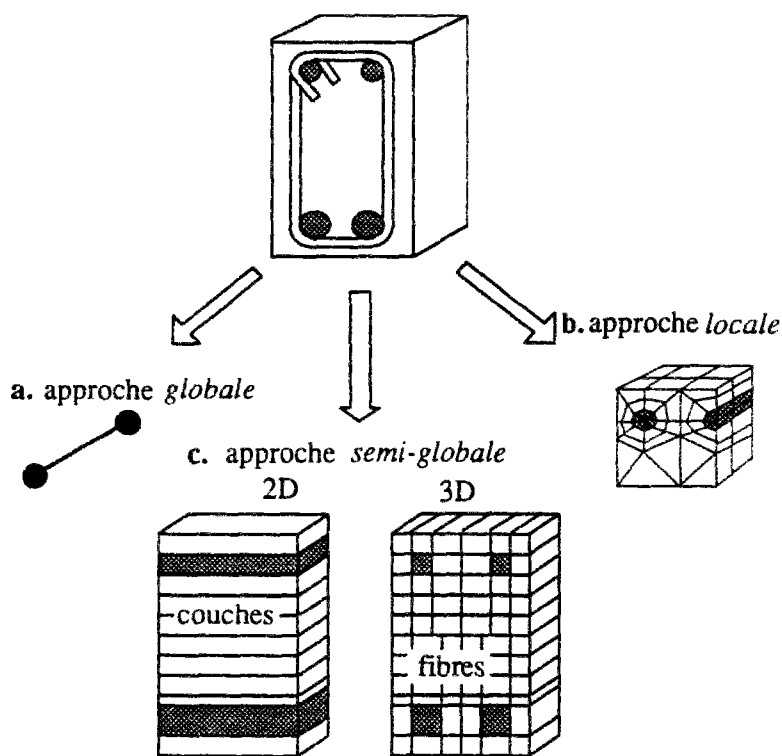


Figure 2-1 : Echelles de discrétisation par éléments finis

2-1-1. Discrétisation globale

L'approche en discrétisation globale (*figure 2-1.a*) d'une poutre consiste à modéliser sur une représentation unidimensionnelle un solide, la poutre, qui, quoiqu'élancé, est par nature tridimensionnel. Ceci signifie que l'on ramène à l'axe de référence de la poutre toute information tant géométrique que matérielle. Ainsi, dans l'approche globale, on définit le comportement inélastique d'une section courante prise dans son ensemble. D'une manière générale, la non-linéarité en matériau est prise en compte par des relations forces-déplacements, qui relient les actions (moments, effort normal, effort tranchant) aux quantités de déplacement (courbures, elongations). En particulier, on peut distinguer :

- les approches élastoplastiques explicites en forces généralisées (2D, 3D) : le critère de plasticité d'une section prise dans son ensemble est donné sous la forme d'une surface de charge fonction des forces généralisées de la section (efforts normal, effort tranchant, moments de flexion et de torsion). La règle d'écoulement décrit de manière explicite l'évolution des variables plastiques de la section : courbures plastiques et/ou elongation plastique de la fibre moyenne (*cf. Argyris et al., 1982; Chen, 1981; Cariou, 1988; Shi et Alturi, 1988; Conci et Gattas, 1990*).
- les approches élastoplastiques implicites (2D,3D) : à partir de la donnée d'un critère de plasticité fonction des contraintes et une hypothèse sur la forme du champ de contraintes, on établit *a priori* par intégration sur la section l'évolution des forces généralisées en fonction de paramètres cinématiques et géométriques de la section (*cf. Wunderlich et al., 1986*). Les évolutions des variables plastiques et d'écrouissage ne sont pas données par une règle d'écoulement et une règle d'écrouissage, mais remplacées par des relations incrémentales liants forces généralisées et paramètres cinématiques (courbures, elongations).
- les approches élastiques non-linéaires globales (2D) : le comportement inélastique de la section prise dans son ensemble est décrit par des relations forces-déplacements, qui relient de manière explicite les actions (moments, efforts) aux quantités de déplacement (courbures, elongation, distorsion). Les multiples modèles moments-courbures font partie de cette famille de modélisation (*cf. Saidi, 1982*).

- le concept de macro-éléments (2D) : le comportement non-linéaire global d'un élément est exprimé en termes de variables globales identifiées à partir d'analyses locales (*cf. Elachachi et al., 1991; Elachachi, 1992*).

Ces approches par discrétisations *globales* conduisent à des temps de calcul restreints. En revanche, leur utilisation en 3D se heurte à certains obstacles :

- L'état de contraintes en un point d'une section droite d'une poutre 3D est tridimensionnel : c'est le cas par exemple sous sollicitation de flexion couplée à de la torsion. Une action (force ou moment) n'est plus seulement liée à un seul déplacement : les relations sont fortement couplées, ce qui rend très difficile leur détermination expérimentale.
- De plus, les approches élastoplastiques en forces généralisées (utilisée pour l'analyse des structures en acier), s'étendent difficilement au cas des structures en béton armé. Une poutre en béton armé est constituée de plusieurs matériaux aux lois de comportement différentes (béton + acier), qui occupent une ou plusieurs positions géométriques au sein d'une section de forme quelconque. Tout élément en béton armé est un prototype. Le comportement d'une section dépend de nombreux paramètres, et est donc difficile à modéliser par l'utilisation d'une approche globale.

Cependant, en ce qui concerne le traitement numérique des non-linéarités en géométrie (grands déplacements, rotations finies), la représentation géométrique simple des poutres (axe de référence, section) permet d'établir des procédures numériques très efficaces (*cf. Bathe et Bolourchi, 1979; Argyris, 1982; Yang et McGuire, 1986^{a,b}; Wunderlich et al., 1986; Cardona et Geradin, 1988; Cariou, 1988; Conci, 1992^{a,b}*).

2-1-2. Discrétisation *locale*

Ici, on entend par discrétisation *locale* par éléments finis, la modélisation d'un solide discrétisée dans l'espace (*figure 2-1.b*). Ainsi, à cette échelle locale, le béton est modélisé par des éléments massifs 2D ou 3D et l'acier par des éléments de barres ou des éléments massifs. Les lois de comportement utilisées à cette échelle de modélisation par éléments finis pour le béton ont été présentées au chapitre 1.

Cette modélisation permet d'obtenir des informations locales concernant l'état de plastification, de détérioration et d'endommagement de la structure. Cependant, cette modélisation nécessite des stockages et des temps de calcul importants. De plus, le couplage avec les non-linéarités en géométrie (grands déplacement, grandes déformations) rend l'application numérique très difficile.

2-1-3. Discrétisation *semi-globale*

A une échelle de discrétisation intermédiaire (*figure 2-1.c*), se trouvent les éléments type multicouches pour modéliser des problèmes non-linéaires de poutres planes. Les premiers éléments datent de la fin des années 60, (cf. *Armen et al.*, 1968; *Sena*, 1969; *Rajasekaran et Murray*, 1973; *Aktan et al.*, 1974; *Epstein et al.*, 1978; *Bergan et Holand*, 1979). Ils ont connu une nouvelle renaissance ces dernières années, en particulier en ce qui concerne leur utilisation pour l'analyse non-linéaire des structures en béton armé sous chargement cyclique (cf. *Lamirault et Al Sulayfani*, 1987; *La Borderie et al.*, 1990;...) et dynamique (en particulier : sismique) (cf. *Zeris et Mahin*, 1991^{a,b}; *Ulm et Clément*, 1991, *Mazars et al.*, 1992; *Ulm et al.*, 1993; ...). La section droite d'un élément de poutre est découpée en zones. La translation de ces zones parallèlement à l'axe de l'élément forme des couches (*figure 2-2*).

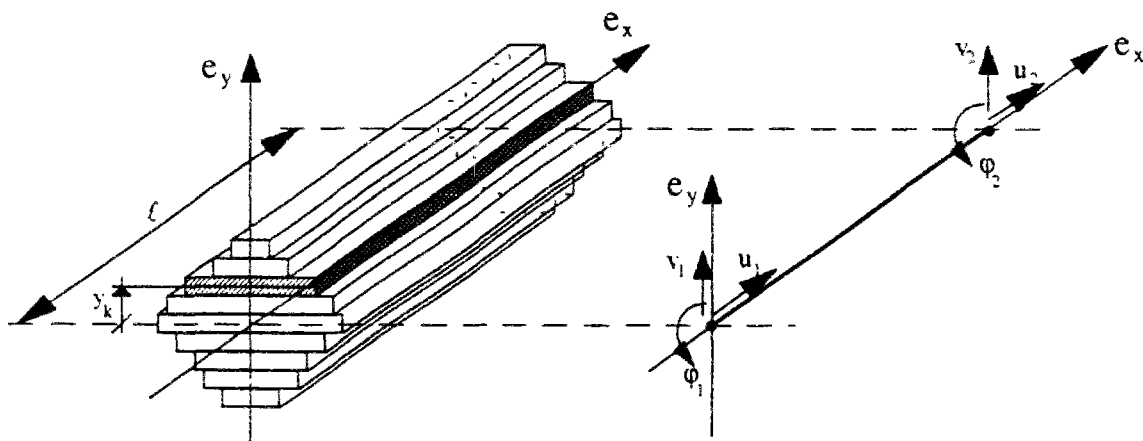


Figure 2-2 : Modélisation semi-globale des poutres planes par élément poutre multi-couche
(de la familles des éléments CESAR-LCPC)

Ce niveau de discrétisation intermédiaire situé entre l'approche globale et locale permet encore de modéliser le solide tridimensionnel original en élément de poutre. Le champ de déplacements est décrit par les quantités en déplacements et rotations d'un élément de poutre classique, tandis que toute information concernant le comportement matériel est traitée à un niveau local : les couches (*figure 2-2*). L'état des contraintes est déterminé en utilisant des variables d'état locales (déformations permanentes, endommagement,...). Les lois de comportement utilisées au niveau de couches, ne diffèrent pas *a priori* des lois de comportement utilisées dans les approches locales. Dans le cas d'un problème non-linéaire en géométrie, toutes les procédures numériques établies pour des éléments de poutres classiques peuvent être utilisées.

On constate ainsi deux échelles de discrétisation : une échelle locale, où - sous l'hypothèse des petites déformations- on ne traite que les non-linéarités en matériau; et une échelle globale, où on peut traiter les non-linéarités en géométrie. C'est pourquoi cette approche est qualifiée de *semi-globale*. Ces deux échelles nécessitent deux hypothèses, à la base de la formulation :

- à l'échelle locale : une hypothèse concernant le champ des contraintes. Dans les approches 2D multicouches, on suppose un champ de contraintes uniaxial ($\sigma = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x$).
- à l'échelle globale : une hypothèse cinématiques des poutres. Une section initialement plane et orthogonale à la fibre moyenne le reste après déformation (*Navier-Bernoulli*).

Cette approche intègre les avantages de deux approches de modélisation globale et locale : temps de calcul restreint et lois de comportement locales appropriées.

Dans ce chapitre, elle est entendue au cas tridimensionnel.

2-2. ELEMENT POUTRE MULTIFIBRE

Nous proposons ici une modélisation des poutres tridimensionnelles par élément fini poutre *multifibre*, issu de l'extension de la modélisation *multicouche* des poutres bidimensionnelles (*figure 2-2*) au cas tridimensionnel. Au sens de la terminologie du paragraphe 2-1, l'approche de discrétisation est semi-globale. La motivation est la suivante : développer un outil numérique efficace, qui permet d'effectuer des calculs non-linéaires tridimensionnels de structures complètes en béton armé, sous chargements statiques et dynamiques, avec des temps de calcul raisonnables.

Comme on l'a noté, le chargement peut provoquer un état des contraintes qui n'est plus uniaxial (par exemple cas de la torsion). Ceci nécessite un traitement des non-linéarités en matériau par des lois de comportement triaxiales. La formulation proposée permet d'utiliser ces lois des comportement au sein d'un élément poutre tridimensionnelle classique.

Le but de ce paragraphe est la mise en équation de la modélisation poutre multifibre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Nous présentons la formulation variationnelle, qui conduit à la détermination du vecteur des efforts intérieurs et celle de la matrice de rigidité. Un rapide récapitulatif de la formulation proposée terminera ce paragraphe.

2-2-1. Quelques notations et définitions

Afin d'alléger la formulation, nous présentons tout d'abord l'élément dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Comme cet élément est un élément de poutre il est également utile de rappeler quelques notations spécifiques de la théorie des poutres.

2-2-1-1. Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations correspond ici aux hypothèses suivantes :

- H1 : hypothèse des transformations infinitésimales. Notons $\mathbf{X}$ le vecteur de position d'un point matériel dans le solide, et ξ le vecteur de déplacement, on suppose donc :

$$(1) \quad \forall \mathbf{X} \quad \|\text{Grad} \xi\| \ll 1$$

Cette hypothèse implique celle des déformations infinitésimales.

- H2 : hypothèse des petits déplacements ξ du solide par rapport à une longueur caractéristique ℓ_0 du problème (dimension de la structure, longueur d'onde du chargement etc.).

2-2-1-2. Efforts intérieurs de poutres tridimensionnelles

Une poutre a une géométrie simple : elle est constituée d'un axe de référence et d'une section droite. Soit Q un point matériel dans la section et P sa projection orthogonale sur l'axe de référence, la géométrie du solide tridimensionnel est entièrement décrite par la position de P sur l'axe de référence et par des vecteurs des positions $\mathbf{PQ}$ de composantes $(0, x_2, x_3)$ et vecteurs de bases $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 3$) en P .

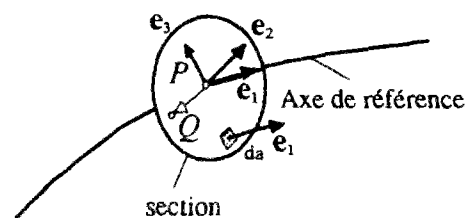


Figure 2-3 : Géométrie d'une poutre

Notons $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(Q)$ le tenseur de contraintes en Q . Les forces généralisées en P sont les efforts $\mathcal{N}$ et moments $\mathcal{M}$, définis par (Salençon, 1988) :

$$(2) \quad \mathcal{N}(P) = \int_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 da \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(P) = \int_a P Q \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1) da$$

où da est la facette infinitésimale orientée par $\mathbf{e}_1$. Chacune des composantes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ peut se décomposer en efforts généralisés hors et dans le plan de section droite normale à $\mathbf{e}_1$:

$$(3) \quad \mathcal{N}(P) = N\mathbf{e}_1 + \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(P) = M_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{M}$$

où N est l'effort normal, $\mathbf{V}$ l'effort tranchant, M_1 le moment de torsion et $\mathbf{M}$ le moment fléchissant en P . Dans le repère orthonormé $(P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, ils sont définis par :

$$(4) \quad \begin{cases} N = \int_a \sigma_{11} da \\ \mathbf{V} = \int_a (\mathbf{e}_2 \sigma_{12} + \mathbf{e}_3 \sigma_{13}) da = V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3 \\ M_1 = \int_a (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) da \\ \mathbf{M} = \int_a (x_3 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_3) \sigma_{11} da = M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Ces composantes sont définies sur la configuration actuelle déformée (*figure 2-4*). Avec l'hypothèse des petits déplacements (H2), on confond coordonnées actuelles et initiales, et les efforts généralisés sont, par l'équation (4), définis sur la configuration initiale connue.

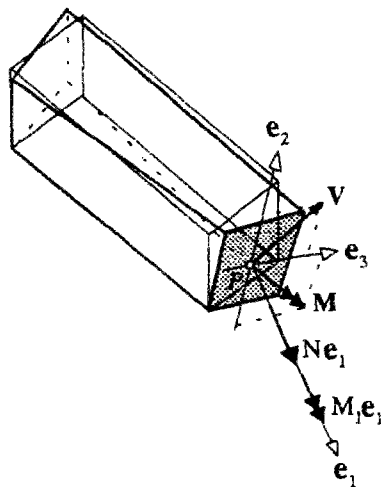


Figure 2-4 :
Représentation des efforts intérieurs généralisés d'une poutre.

2-2-2. Présentation de l'élément poutre multifibre

Dans une modélisation par éléments finis d'un poutre homogène élastique, en raison de la simplicité de sa géométrie, la discrétisation est constituée de la discrétisation de l'axe de référence et de quelques paramètres de la section. Une section de poutre en béton armé est composée de plusieurs matériaux, aux lois de comportement différentes, qui occupent une ou plusieurs positions géométriques au sein d'une section de forme quelconque. Une "adaptation" de la discrétisation consiste alors découper la section en zones, qui, quant à elles, restent définies par rapport à l'axe de référence. Leurs translations sur la longueur de l'élément forme des fibres. C'est l'élément poutre multifibre que nous présentons par la suite.

2-2-2-1. Approche semi-globale appliquée aux poutres tridimensionnelles

L'élément développé, représenté *figure 2-5*, est constitué de n fibres, de dimensions quelconques, repérées par leur vecteur de position PQ de composantes $(0, x_{2k}, x_{3k})$ dans le repère local de l'élément de vecteur de base e_i ($i=1,3$). Q est ici le centre de gravité de la fibre k ($k=1,n$) et P sa projection sur l'axe de référence de l'élément.

La comparaison des *figures 2-2* et *2-5* met en évidence que l'élément proposé est issu de l'extension de l'approche multi-couche au cas tridimensionnel. Cette fois, en un point de la section, l'état des contraintes n'est plus uniaxial.

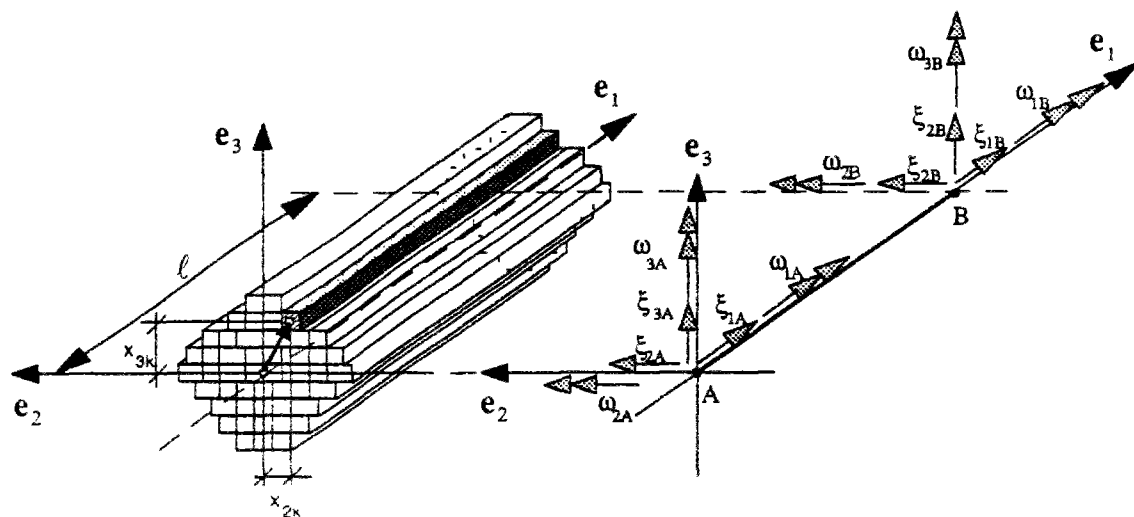


Figure 2-5 : Elément fini poutre multifibre

L'application de l'approche semi-globale consiste à définir :

- à l'échelle **globale**, un élément de poutre tridimensionnelle classique. L'élément le plus simple, à deux noeuds, et 6 degrés de liberté par noeud (3 paramètres de translation, 3 paramètre de rotation) a été choisi.
- à l'échelle **locale**, des fibres, où sont traitées les non-linéarités matérielles, avec des lois de comportement triaxiales. En particulier, nous utiliserons pour le béton les lois élastoplastiques avec écrouissage et endommagement présentées au chapitre 1. Pour l'acier, une loi de comportement élastoplastique avec écrouissage et une surface de charge de Von-Mises sont utilisées.

Les hypothèses cinématiques de la théorie des poutres permettent le passage des fibres à l'élément.

2-2-2-2. Rappel des hypothèses de déformation des poutres

Nous appliquons donc :

- H3 : l'hypothèse de Navier-Bernoulli. La planéité des sections droites et leur normalité aux fibres sont conservées dans la déformation de la poutre considérée.
- H4 : torsion de Saint-Venant.

Ces deux hypothèses sont posées quel que soit le comportement des matériaux constituant la section.

2-2-2-3. Vecteur de déplacement de la fibre k

L'hypothèse H3 porte sur le champ de déplacement d'un point quelconque de la section. Avec l'hypothèse H2 (petites déplacements), pour la fibre k , on écrit :

$$(5) \quad \xi_k = \xi(Q) = \xi_o + \omega_o \wedge PQ$$

où ξ_o et ω_o sont respectivement les vecteurs de déplacement et de rotation en P autour de l'axe de l'élément. La normalité des fibres à la section permet de lier ces deux vecteurs par (Salençon, 1988) :

$$(6) \quad \omega_o \wedge e_1 = \frac{d\xi_o}{dx_1} - e_1 \left(\frac{d\xi_o}{dx_1} \cdot e_1 \right) \quad \text{ou :} \quad e_1 \wedge \frac{d\xi_o}{dx_1} = \omega_{\perp} = \omega_o - \omega_1 e_1$$

avec $\omega_1 e_1$ et $\omega_{\perp}$ les vecteurs de la rotation d'orientation hors et dans le plan de la section. L'utilisation de (6) dans (5) conduit à :

$$(7) \quad \xi_k = \xi(Q) = \xi_o - \left(\frac{\partial \xi_o}{\partial x_1} \cdot PQ \right) e_1 + \omega_1 e_1 \wedge PQ$$

Dans l'équation précédente, l'axe de torsion est supposé coïncider avec l'axe de référence. Pour des applications aux sections ouvertes, ces deux axes ne sont pas confondus, (figure 2-6). Notons

T le centre de torsion dans la section, défini par le vecteur de position PT de composantes $(0, x_{2t}, x_{3t})$. On suppose que :

- H5 : les deux axes de référence ont les mêmes vecteurs de base $e_i, i=1,3$ le long de l'élément, et leur position l'un par rapport à l'autre reste fixe quel que soit l'état physique (plastification, endommagement,...) de la section.

Il convient de signaler, que l'hypothèse H5, qui conduit à séparer l'aspect géométrique de l'aspect rhéologique pour le traitement de la torsion, n'est pas toujours adaptée. Cette limite est mise en évidence et le problème de la torsion est traité par exemple par *Leung et Schnobrich* (1987), *Fouré et Hannachi* (1992) ou *Cocchi et Cappello* (1993).

En outre, dans l'équation (7) une rotation ω_1 autour de l'axe de référence n'entraîne que des déplacements dans le plan de la section normale à e_1 . L'effet d'une rotation infinitésimale sur le déplacement dans la direction e_1 , est pris en compte dans la réécriture de l'équation (7) sous la forme (cf. *Vlassov*, 1962) :

$$(8) \quad \xi_k = \xi(Q) = \xi_o - \left(\frac{d\xi_o}{dx_1} \cdot PQ + \frac{d\omega_1}{dx_1} \varphi(x_2, x_3) \right) e_1 + \omega_1 e_1 \wedge (PQ - PT)$$

avec ξ_o de composantes $(\xi_1^p, \xi_2^t, \xi_3^t)$ où les indices p et t indiquent si la quantité en déplacement ou en rotation se réfère au point P de l'axe de référence ou au point T sur l'axe de torsion (*figure 2-6*).

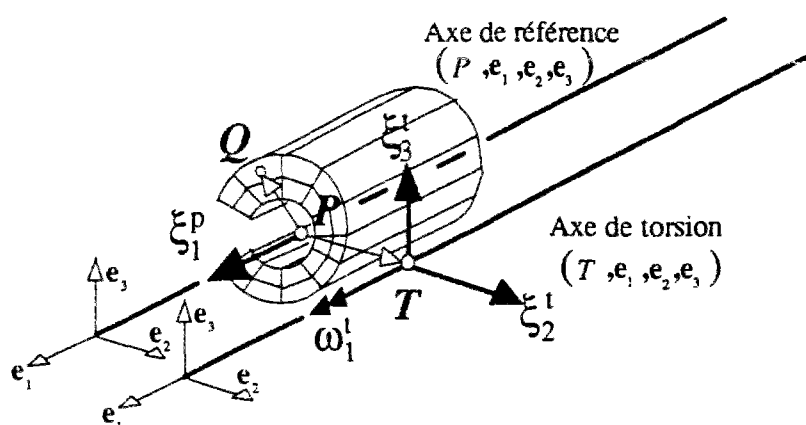


Figure 2-6 : Composantes du vecteur de déplacement dans le cas où l'axe de torsion ne coïncide pas avec l'axe de référence de la poutre

Pour la discrétisation spatiale, on utilise les fonctions d'interpolations linéaires pour les composantes hors du plan de la section (ξ_1^p, ω_1^i) , et cubiques pour les composantes dans le plan de la section (ξ_2^i, ξ_3^i) . Elles sont présentées en **annexe 2**. Ceci conduit au niveau global à un élément classique à deux noeuds, qui comporte 6 degrés de liberté par noeud, avec le vecteur de paramètres de déplacement et de rotation (*figure 2-5*) :

$$(9) \quad \{\xi\}_i = {}^t \left\{ \xi_{1i}^p, \xi_{2i}^i, \xi_{3i}^i, \omega_{1i}^i, \omega_{2i}^p, \omega_{3i}^p \right\} \quad i = A, B$$

2-2-2-4. Tenseur de déformations linéarisé

Le tenseur de déformations linéarisé

$$(10) \quad 2\mathbf{\varepsilon} = (\text{grad}\xi + {}^t\text{grad}\xi)$$

qui se dérive à partir du vecteur de déplacement (8), n'a que trois composantes :

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{d\xi_1^p}{dx_1} - \left(\frac{d^2\xi_2^i}{dx_1^2} \cdot PQ + \frac{d^2\omega_1^i}{dx_1^2} \varphi(x_2, x_3) \right) \\ 2\varepsilon_{12} = \frac{d\omega_1^i}{dx_1} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - x_3 + x_{3i} \right) \\ 2\varepsilon_{13} = \frac{d\omega_1^i}{dx_1} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_2 - x_{2i} \right) \end{cases}$$

On notera que sans hypothèse supplémentaire, même dans le cas d'un comportement isotrope, les composantes σ_{22} et σ_{33} du tenseur des contraintes peuvent être non nulles.

Pour le cas d'un matériau élastique isotrope, on a :

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11}$$

et pour le cas d'un matériau élastoplastique isotrope :

$$\begin{cases} \sigma_{22} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11} - \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{22}^p + \nu \epsilon_{33}^p) \\ \sigma_{33} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11} - \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{22}^p + \epsilon_{33}^p) \end{cases}$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Ces composantes transversales peuvent prendre des valeurs importantes.

Posons ainsi une hypothèse supplémentaire sur le champ de contraintes :

- H6 : le tenseur des contraintes n'a que des trois composantes $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$, donc :

$$(12) \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \sigma_{13} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)$$

L'hypothèse (12) conduit à un tenseur de déformations comportant des composantes transversales ϵ_{22} et ϵ_{33} (effets de Poisson). Ces deux composantes ne dérivent pas du champ de déplacement classique de poutre (8). Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, on a :

$$d\epsilon_{22} = d\epsilon_{33} = -\nu d\epsilon_{11}$$

et dans le cas d'un matériau élastoplastique isotrope :

$$d\epsilon_{22} - d\epsilon_{22}^p = d\epsilon_{33} - d\epsilon_{33}^p = -\nu (d\epsilon_{11} - d\epsilon_{11}^p)$$

Les composantes $(d\epsilon_{11}^p, d\epsilon_{22}^p, d\epsilon_{33}^p)$ se calculent à partir d'une règle d'écoulement.

L'hypothèse H6 est ici nécessaire, en vue de l'utilisation de lois de comportement triaxiales. Poser cette hypothèse n'est pas toujours justifié, en particulier dans le cas de poteaux en béton armé soumis à des chargements cycliques ou dynamiques (*cf. Madas et Elnashai, 1992*). Ce sont les armatures transversales (cadres) qui - si elles sont activées - entraînent un confinement de la section (c'est à dire des composantes σ_{22} et σ_{33} non nulles), (*figure 2-7*). Cet effet de confinement au sein de la formulation poutre multifibre a été étudié par *Flidner (1993)*.

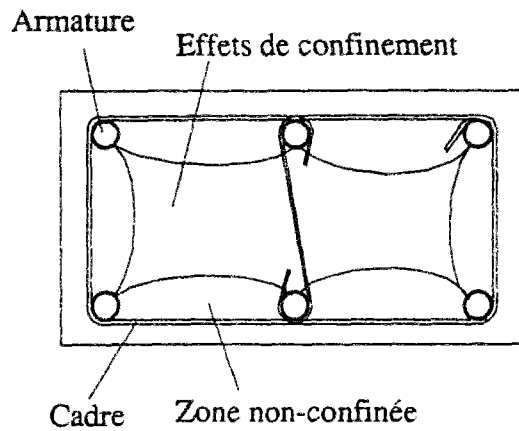
**Figure 2-7 :**

Illustration de l'effet de confinement dans une section rectangulaire en béton armé.
(d'après Madas et Elnashai, 1992)

Enfin, du fait de son interpolation linéaire, la rotation ω_1 ne provoque pas des déformations ϵ_{11} , et donc pas de contraintes axiales. Avec une interpolation de ω_1 d'ordre supérieur, on pourrait étendre la formulation pour traiter le problème de la torsion génée (cf. Wunderlich et al., 1986; Yang et McGuire, 1986^{a,b}; Conci, 1992^{a,b}; Pasquino et Marotti, 1992; Dutta et White, 1992).

2-2-2-5. Rigidité à la torsion

La fonction $\varphi(x_2, x_3)$ dans (8) rend compte de l'effet d'une rotation infinitésimale autour de l'axe de torsion sur le déplacement longitudinal. Pour préciser cet effet, étudions le cas de la torsion pure, où l'état de contraintes correspond à celui du cisaillement pur étudié au paragraphe 1-3-3-3. Au point Q de la section le tenseur des contraintes dans la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de la poutre s'écrit :

$$(14) \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \sigma_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)$$

et le vecteur-contrainte en Q :

$$(15) \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 = \sigma_{12} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \mathbf{e}_3$$

L'équation précédente et le vecteur de cisssion (Salençon, 1988) suivant

$$(16) \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$$

définissent un champ de vecteurs sur la section droite. Les lignes enveloppes de ce champ de vecteurs sont appelées *lignes de cisaillement*. Ce sont des lignes de niveau de valeurs :

$$(17) \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$$

En chaque point Q , définissons une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_{\perp\tau})$ où le vecteur $\mathbf{e}_\tau$ est colinéaire au vecteur de cisssion $\boldsymbol{\tau}$ et de même sens que lui, et $\mathbf{e}_{\perp\tau}$ est normal à $\mathbf{e}_\tau$, dans le plan de la section de normale $\mathbf{e}_1$ (*figure 2-8*).

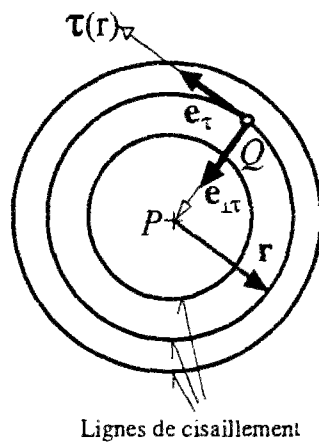
Dans le cas d'un comportement élastique et en supposant que l'axe de torsion coïncide avec l'axe de référence (*i.e.* $x_{2i} = x_{3i} = 0$), on a en utilisant (11) :

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \end{cases} \quad \text{donc : } \tau = G \frac{d\omega_1}{dx_1} \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - x_3\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_2\right)^2}$$

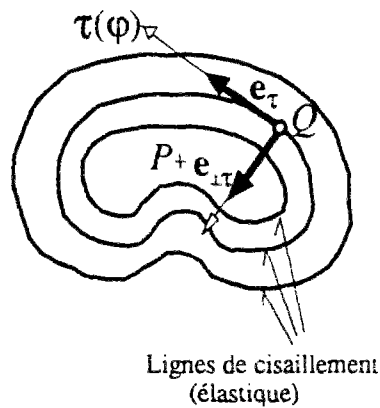
Dans le cas d'une section circulaire, $\partial\varphi/\partial x_2 = \partial\varphi/\partial x_3 = 0$, et les lignes de cisaillement ($\tau = \text{const}$) sont des cercles concentriques. Le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ est normal au rayon vecteur $\mathbf{r}$ de norme $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ (*figure 2-8a*). La fonction $\varphi(x_2, x_3)$ de (18) rend compte de la forme des lignes de cisaillement dans le cas d'une section quelconque (*figure 2-8b*), constituée d'un matériau élastique isotrope. Dans le domaine élastique, la fonction $\varphi(x_2, x_3)$ pour une section quelconque est difficile à déterminer (*cf. Malkwitz, 1970; Ditthardt, 1972*). Dans le cas où la section est composée de plusieurs matériaux aux lois de comportement différentes, la fonction φ ne peut pas *a priori* être déterminée, car les directions des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ sont inconnues et dépendent de l'état physique de la section (plastification, endommagement). La fonction φ doit alors dépendre de paramètre rhéologique χ , c'est à dire $\varphi = \varphi(\chi, x_2, x_3)$ (*cf. Hsu et Mo, 1985; May et Al-Shaarbaf, 1989; Billinghamurst et al., 1992;*).

Cette dépendance de la fonction φ vis-à-vis l'état physique de la section est difficile à intégrer dans la formulation proposée ici, où les aspects géométriques et rhéologiques sont supposés découplés.

- a. Lignes de cisaillement d'une section circulaire (cercles concentriques).



- b. Lignes de cisaillement élastique d'une section quelconque.



- c. Illustration du paramètre A de correction de la torsion élastique dans le cas d'une section quelconque.

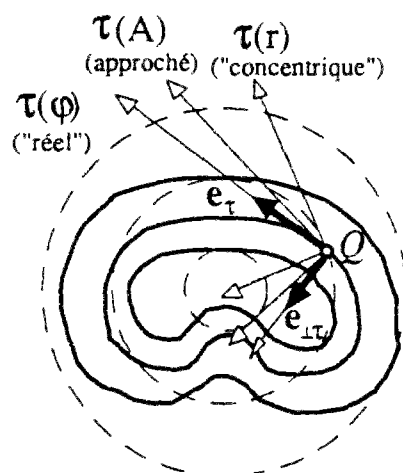


Figure 2-8 : Lignes de cisaillement dans la section (torsion pure élastique)
(d'après Salençon, 1988)

Pour $\varphi = \varphi(x_2, x_3)$ nous utilisons l'approximation suivante (Salençon, 1988) :

$$(19) \quad \varphi = Ax_2x_3 \quad (A : \text{paramètre})$$

Utilisant (19) dans (18), on a :

$$(20) \quad \tau = G \frac{d\omega_1}{dx_1} \sqrt{(A+1)^2 x_2^2 + (A-1)^2 x_3^2}$$

Le paramètre A peut être considéré comme un paramètre de correction de la direction du vecteur τ par rapport au paramétrage concentrique ($A=0$, $\tau = \tau(r)$), *figure 2-8c*.

On déduit l'expression du moment de torsion élastique des relations (4), (11), (18), (19) :

$$(21) \quad M_1 = \frac{d\omega_1}{dx_1} \left[(A-1)^2 \int_A Gx_3^2 da + (A+1)^2 \int_A Gx_2^2 da \right]$$

La recherche du minimum de l'énergie élastique du moment de torsion M_1 , conduit à :

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial A} \left[(A-1)^2 \int_A Gx_3^2 da + (A+1)^2 \int_A Gx_2^2 da \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\int_A G(x_3^2 - x_2^2) da}{\int_A Gr^2 da}$$

Sous cette forme (22), dérivée à partir de considérations énergétiques élastiques, le paramètre A n'est valable - au stricto sensu - que dans le domaine élastique, pour lequel il n'est qu'une approximation de la direction exacte du vecteur τ d'une section quelconque. On considère ici que A est une caractéristique géométrique de la section, même hors des hypothèses de l'élasticité.

En utilisant (22) dans (21) pour une section élastique isotrope, on obtient la formule approchée (majoration) de la rigidité à la torsion pure des tiges à section pleine comme celle proposée et discutée dans plusieurs ouvrages traitant le problème de la torsion élastique (*cf. Vlassov, 1962*) :

$$M_1 = GJ \frac{d\omega_1}{dx_1} \quad \text{avec} \quad J \leq \frac{4I_2 I_3}{I_2 + I_3}$$

où I_2 et I_3 désignent les moments d'inertie principaux de la section, définis par $I_2 = \int x_3^2 da$ et $I_3 = \int x_2^2 da$.

Il convient d'insister sur le fait, que supposer A indépendant de l'état physique de la section conduit, lorsqu'une partie de la section n'est plus élastique, à surestimer la rigidité de la section à la torsion. C'est donc une limite de l'approche multifibre proposée.

2-2-3. Mise en équation du problème

2-2-3-1. Formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique

Dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, l'équilibre mécanique du système de volume Ω s'écrit :

$$(23) \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_o (\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

avec $\rho_o \mathbf{F}$ et $\rho_o \boldsymbol{\gamma}$ les densités de forces volumique et d'inertie. Les conditions aux limites en forces et en déplacements s'écrivent :

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} n_j = T_i^d & \text{sur } \partial\Omega_{T_i^d} \\ \xi_i = \xi_i^d & \text{sur } \partial\Omega_{\xi_i^d} \end{cases}$$

avec $\partial\Omega_{T_i^d}$ et $\partial\Omega_{\xi_i^d}$ les parties de la surface $\partial\Omega$ relatives aux quantités en force et en déplacement.

Soit $\hat{\mathbf{U}}$ un champ de vecteur quelconque. En multipliant (23) par $\hat{\mathbf{U}}$ puis en intégrant par parties le résultat sur Ω , et en tenant compte de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, on obtient la formulation faible de l'équation de champ (23) :

$$(25) \quad \forall \Omega, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho_o \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_o \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}} \, da = 0$$

où $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\text{grad}\hat{\mathbf{U}} + {}^t\text{grad}\hat{\mathbf{U}})$. Sous une forme condensée, on écrit :

$$(26) \quad \forall \Omega, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad \wp_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) + \wp_i(\hat{\mathbf{U}}) + \wp_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) = 0$$

où les indices *int*=intérieure, *i*=inertie et *ext*=extérieure (volumique et surfacique).

L'équation (25) n'est qu'une dualisation de l'équation (23), mais elle affaiblit les propriétés de régularité du champ de contrainte σ . En satisfaisant l'équation (25), on vérifie simultanément

- l'équation d'équilibre,
- les conditions aux limites,
- les lois de comportement.

Le choix de l'inconnue principale se porte ici naturellement sur le champ de déplacement ξ . On pose ainsi comme problème de trouver un champ de déplacement ξ tel que pour tout champ $\hat{\mathbf{U}}$, l'équation (25) soit satisfaite, avec ξ et $\hat{\mathbf{U}}$ appartenant à un espace vectoriel de dimension infinie. L'utilisation pour l'application numérique de la méthode des éléments finis revient à ramener ce problème à un problème discret où les champs ξ et $\hat{\mathbf{U}}$ sont éléments d'un espace vectoriel de dimension finie. Notant $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ l'ensemble de paramètres nodaux discrétisant le champ $\hat{\mathbf{U}}$, l'équation (26) s'écrit :

$$(27) \quad \forall \{\hat{\mathbf{U}}\} \quad \wp_{\text{int}}(\{\hat{\mathbf{U}}\}) + \wp_i(\{\hat{\mathbf{U}}\}) + \wp_{\text{ext}}(\{\hat{\mathbf{U}}\}) = 0$$

En général, la nature non-linéaire des lois de comportement empêche une résolution directe de l'équation (26). Le problème est discrétisé en temps (processus incrémental), et sa résolution devra s'effectuer par itérations successives à l'intérieur du même pas de temps (ou incrément) suivant une méthode itérative. Il en existe de variées.

Pour l'application avec l'élément multifibre nous utilisons une méthode tangente. Considérons une estimation $\xi_{n,m}$ de la solution de l'équation (26) à l'itération *m* au pas de temps *n*, telle que :

$$(28) \quad \Re_{n,m} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \wp_{\text{ext}, n,m} + \wp_{i, n,m} + \wp_{\text{int}, n,m}$$

où $\mathcal{R}$ est appelée application résidu. La nullité de $\mathcal{R}$ représente le critère de vérification de l'équation (26), c'est à dire le respect de l'équilibre global entre efforts intérieurs, d'inertie et extérieurs appliqués au système étudié, et sa compatibilité avec la loi de comportement. Si, pour un incrément n de charge appliquée, $\mathcal{R} \neq 0$ après une évaluation $\xi_{n,m}$ de la solution, il convient d'effectuer une seconde évaluation $\xi_{n,m+1} = \xi_{n,m} + \Delta\xi_{m+1}$ en tenant compte du nouvel état de contraintes et de déformations. Utiliser une méthode tangente consiste à considérer :

$$(29) \quad \mathcal{R}_{n,m+1} = \mathcal{R}_{n,m} + \frac{\partial \mathcal{R}(\xi)}{\partial \xi} \cdot \Delta\xi_{m+1} + \dots$$

où $\Delta\mathcal{R}_{m+1} = \frac{\partial \mathcal{R}(\xi)}{\partial \xi}$ est l'opérateur de passage entre deux itérations m et $m+1$: c'est la matrice de rigidité tangente. On note que dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, ce ne sont que les efforts intérieurs qui varient en fonction de ξ .

Les aspects algorithmiques concernant la discrétisation en temps et les processus itératifs seront traités au chapitre 3. Ici, on montre la mise en équation matricielle du problème pour l'élément multifibre.

2-2-3-2. Vecteurs d'efforts intérieurs

Pour la poutre, soit $\hat{\mathbf{U}}$ un champ vectoriel composé de deux champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_o$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_o$, définissant les mouvements réels du système élémentaire : $\hat{\mathbf{U}}_o$ de composantes $(\hat{U}_1^p, \hat{U}_2^i, \hat{U}_3^i)$ caractérise l'évolution de la position du point P sur l'axe de référence, et $\hat{\mathbf{\Omega}}_o$ de composantes $(\hat{\Omega}_1^i, \hat{\Omega}_2^i, \hat{\Omega}_3^i)$ l'évolution de l'orientation de la section (Salençon, 1988). Supposons de plus que le système élémentaire suit un mouvement de *Navier-Bernoulli* : les deux champs vectoriels sont liés de manière analogue aux équations (5)-(8). L'utilisation de ce champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ dans (25) et l'application de la définition (4) des efforts généralisés conduisent à réécrire la première intégrale volumique de (25) sous une forme linéique des efforts intérieurs :

$$(30) \quad \wp_{int}(\hat{\mathbf{U}}_o, \hat{\mathbf{\Omega}}_o) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega = - \int_{\ell} \left(N \frac{d\hat{U}_1^p}{dx_1} + M_1 \frac{d\hat{\Omega}_1^i}{dx_1} + \mathbf{M} \cdot \left(\mathbf{e}_1 \wedge \frac{d^2 \hat{\mathbf{U}}_o}{dx_1^2} \right) \right) dx_1$$

avec ℓ la longueur du système élémentaire. On remarque dans cette formule que l'effort tranchant V n'intervient pas (mouvement de *Navier-Bernoulli*).

Utilisant la discrétisation spatiale de la paragraphe 2-2-2-3, on écrit sous une forme discrétisée :

$$(31) \quad \delta p_{int} = - \{ \hat{U} \} \{ F_{int} \}$$

où $\{ \hat{U} \}$ sont des paramètres nodaux de $\hat{U}$ discrétisé et $\{ F_{int} \}$ le vecteur des forces nodales de l'élément :

$$(32) \quad \{ F_{int} \}_i = \{ N_{1i}^p, V_{2i}^t, V_{3i}^t, M_{1i}^t, M_{2i}^p, M_{3i}^p \} \quad i = A, B$$

qui se déduit de l'équation (30) :

$$(33) \quad \{ F_{int} \} = \sum_{k=1,n} \{ F_{int}(\sigma) \}_k = \sum_{k=1,n} \int_{\ell_k} [B]_k \{ \sigma \}_k a_k dx,$$

Le vecteur $\{ \sigma \}_k$ regroupe les trois composantes $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ du tenseur de contraintes (hypothèse H6) au points d'intégration de la fibre k de section a_k (de normale e_1) et longueur ℓ_k . Dans (33), $[B]_k$ est la matrice [3,12] des dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément, liant le vecteur des déplacements nodaux (9) de l'élément aux composantes (11) du tenseur des déformations locales au niveau de fibres :

$$(34) \quad \{ \epsilon \}_k = [B]_k \{ \xi \} \quad \text{où :} \quad \{ d\epsilon \}_k = \{ d\epsilon_{11}, 2d\epsilon_{12}, 2d\epsilon_{13} \}_k$$

$[B]_k$ est donnée en **annexe 2**.

2-2-3-3. Matrice de rigidité tangente

Utilisant (28) dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (H1) pour un élément poutre tridimensionnelle, on obtient, à partir de l'équation (30) :

$$(35) \quad \Delta \mathcal{R} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \int_e \left(-\Delta N \frac{d\hat{\mathbf{U}}_1^p}{dx_1} - \Delta M_1 \frac{d\hat{\Omega}_1^i}{dx_1} - \Delta \mathbf{M} \cdot \left(\mathbf{e}_1 \wedge \frac{d^2 \hat{\mathbf{U}}_0}{dx_1^2} \right) \right) dx_1$$

où l'opérateur Δ note une variation par rapport à ξ . On a :

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta N = \int_a \Delta \sigma_{11} da \\ \Delta M_1 = \int_a (\Delta \sigma_{12} ((A-1)x_3 + x_{3t}) + \Delta \sigma_{13} ((A+1)x_2 - x_{2t})) da \\ \Delta \mathbf{M} = \int_a \Delta \sigma_{11} (x_3 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_3) da \end{cases}$$

Les incréments de contraintes $(\Delta \sigma_{11}, \Delta \sigma_{12}, \Delta \sigma_{13})$ sont liés aux incréments de déformations $(\Delta \varepsilon_{11}, 2\Delta \varepsilon_{12}, 2\Delta \varepsilon_{13})$ par l'intermédiaire des lois de comportement.

Dans le cas d'un matériau élastoplastique on utilise :

$$(37) \quad \{\Delta \sigma\} = [C^{\mathfrak{p}}] \{\Delta \varepsilon\} \quad \text{avec : } C^{\mathfrak{p}} = C_o - \frac{\left(C_o : \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C_o \right)}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C_o : \frac{\partial g}{\partial \sigma}}$$

$C^{\mathfrak{p}}$ est le tenseur de comportement élastoplastique, et $[C^{\mathfrak{p}}]$ sa représentation matricielle, avec la prise en compte de l'hypothèse H6. f est la fonction de charge, g le potentiel plastique, et H le module d'écrouissage. $[C^{\mathfrak{p}}]$ peut être également obtenue (pour $H \neq 0$) à partir de (cf. *Mestat*, 1993) :

$$(38) \quad d\varepsilon = \left[C_o^{-1} + \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] : d\sigma = C^{\mathfrak{p}-1} : d\sigma$$

Cette relation conduit à :

$$(39) \quad [C^{\text{ep}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & & \\ & 1/G & \\ & & 1/G \end{bmatrix} + \frac{1}{H} \begin{bmatrix} g_{,11}f_{,11} & g_{,11}f_{,12} & g_{,11}f_{,13} \\ g_{,12}f_{,11}/2 & g_{,12}f_{,12}/2 & g_{,12}f_{,13}/2 \\ g_{,13}f_{,11}/2 & g_{,13}f_{,12}/2 & g_{,13}f_{,13}/2 \end{bmatrix}$$

avec $2G = \frac{E}{(1+\nu)}$ et $(\cdot)_{,ij} = \partial(\cdot)/\partial\sigma_{ij}$.

Dans le cas d'un matériau qui suit une loi de comportement élastoplastique avec endommagement, comme celle présentée au chapitre 1, les caractéristiques élastiques dépendent de plus de la variable d'endommagement.

Enfin, dans le cas élastique, la matrice de comportement est :

$$(40) \quad [C_o] = \text{diag}[E, G, G]$$

liant ainsi chacune des composantes de $\Delta\sigma$ d'une façon unidimensionnelle aux composantes de $\Delta\epsilon$. C'est ne pas le cas quand il s'agit d'un matériau élastoplastique (sans ou avec endommagement).

A partir des relations (35)-(36), on obtient la matrice de rigidité tangente pour l'élément poutre multifibre sous la forme :

$$(41) \quad [K]^{\text{mat}} = \sum_{k=1,n} [K(C^{\text{ep}})]_k^{\text{mat}} = \sum_{k=1,n} \int_{\ell_k} [B]_k [C^{\text{ep}}]_k [B]_k^T a_k dx_1$$

où $[K(C^{\text{ep}})]_k^{\text{mat}}$ est la matrice de rigidité tangente de la fibre k .

2-2-3-4. Equations d'équilibre incrémentales

Utilisant (33) et (41) dans (29), l'équation d'équilibre incrémentale matricielle pour un élément poutre multifibre s'écrit dans le cas statique :

$$(42) \quad \sum_{k=1,n} [K(C^{\text{ep}})]_k^{\text{mat}} \{\Delta\xi\} = \{F_{\text{ext}}\} - \sum_{k=1,n} \{F_{\text{int}}(\sigma)\}_k$$

où $\{\Delta\xi\}$ est le vecteur d'accroissement des paramètres nodaux à l'itération m .

Dans le cas dynamique, en utilisant pour le vecteur d'accélération :

$$(43) \quad \gamma = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \gamma_o = \ddot{\xi} + \gamma_o$$

avec γ_o le vecteur d'accélération due à un mouvement de corps rigide de la structure (cas d'un séisme), l'équation d'équilibre incrémentale matricielle pour l'élément poutre multifibre s'écrit, en négligeant l'effet d'amortissement visqueux :

$$(44) \quad [M]\{\ddot{\xi}\} + \sum_{k=1,n} [K(C^{\sigma})]_k^{\text{mat}} \{\Delta\xi\} = \{F_{\text{ext}}\} - [M]\{\gamma_o\} - \sum_{k=1,n} \{F_{\text{int}}(\sigma)\}_k$$

$[M]$ est la matrice de masse d'un élément de poutre tridimensionnelle classique constitué de fibres superposées. $\{\ddot{\xi}\}$ et $\{\gamma_o\}$ sont les vecteurs des paramètres nodaux d'accélération. Pour résoudre l'équation (44) on utilisera l'algorithme de Newmark (cf. 3-2-1).

La formulation de la matrice de rigidité tangente correspond au choix d'un outil de résolution du problème non-linéaire considéré. Elle n'affecte pas la solution en déplacement, mais le chemin suivi pour aboutir à la convergence. En revanche, l'évaluation du vecteur d'efforts intérieurs décide de l'acceptation ou du refus de la solution obtenue et constitue ainsi le centre de préoccupation principal du traitement effectué.

Enfin, il convient d'insister sur le fait que les lois de comportement triaxiales qu'on utilisera sont celles présentées au chapitre 1, c'est à dire des lois de comportement *quasistatiques*. Ceci conduit à une limite de notre approche dans le cas de chargements dynamiques : comme tout effet de vitesse (de déformation) au niveau de lois de comportement est négligé, l'approche est limitée à des niveaux de vitesses très faibles.

2-2-4. Récapitulatif

Rappelons ici brièvement les hypothèses introduites au cours de ce paragraphe consacré à la formulation de l'élément multifibre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations :

- Hypothèse des petites perturbations (*cf.* 2-2-1-1) :

H1 : hypothèse des transformations infinitésimales (par conséquent : hypothèse des déformations infinitésimales).

H2 : hypothèse des petits déplacements.

- Hypothèses sur la déformations des poutres, quel que soit le comportement des matériaux constituant la section (découplage des aspects géométriques et rhéologiques) (*cf.* 2-2-2-2, 2-2-2-3) :

H3 : hypothèse de Navier-Bernoulli.

H4 : torsion de Saint Venant,

H5 : hypothèses sur l'axe de centre de torsion et sur la rigidité à la torsion (quantité purement géométrique).

- Hypothèse sur l'état de contraintes (*cf.* 2-2-2-4) :

H6 : Les contraintes transversales à l'axe d'une fibre (contraintes de confinement) sont nulles.

Dans les limites imposées par ces hypothèses, l'outil numérique développé, l'élément multifibre, issu de l'extension de l'approche multicouche en 3D, permettra le calcul des structures à poutres en béton armé sous chargements statiques, cycliques et dynamiques (à faibles vitesses). L'élément est un élément poutre (constitué des fibres superposées) avec des degrés de liberté en nombre limité. Ceci permet le calcul des structures tridimensionnelles complètes avec des temps de calcul raisonnables avec une résolution tangente (taille de matrice par élément petite [12,12] par rapport à une discrétisation locale). La formulation peut s'appliquer à tout autre élément de poutre tridimensionnelle classique avec plus de noeuds et plus de degrés de liberté pour prendre en compte des effets divers (torsion génée, cisaillement dans la section, confinement etc.).

2-3. EXTENSIONS DE LA FORMULATION POUTRE MULTIFIBRE

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté l'élément poutre multifibre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Les non-linéarités en matériau sont prises en compte par des lois de comportement triaxiales au sein d'un élément poutre classique. Pour cela des hypothèses cinématiques fortes, comme celle de Navier-Bernoulli, ont été posées. Ces hypothèses limitent le domaine d'application de l'outil numérique présenté.

D'une part, l'hypothèse des transformations infinitésimales permet de négliger toute non-linéarité en géométrie. Cependant, la tendance vers une construction optimisée conduit de plus en plus à des structures sensibles vis-à-vis de phénomènes non-linéaires matériels et géométriques. Ceci est en particulier le cas pour des structures à poutres qui se déplacent beaucoup plus qu'elles ne se déforment. Les déformations restent toutefois infinitésimales, tandis que la transformation ne l'est plus. Les non-linéarités géométriques peuvent conduire à la ruine des structures : flambement de poteaux, déversement de poutres préfabriquées etc.

D'autre part, l'hypothèse de Navier-Bernoulli, bien qu'elle soit une approximation bien adaptée aux problèmes des structures à poutres, revient à supposer que deux fibres initialement juxtaposées, le restent toujours : avec la formulation proposée, on ne peut pas rendre compte d'un déplacement relatif (glissement) entre matériaux au sein d'une section, l'adhérence est supposée parfaite. Cependant, dans les structures en béton armé ou précontraint, l'adhérence entre acier et béton affecte de manière importante leur capacité portante et leur comportement global. On pense à la détérioration de l'adhérence acier-béton liée à la fissuration, ou à l'adhérence entre un câble précontraint et le béton qui l'entoure : la mise en tension réelle d'un câble de précontrainte dans une gaine consiste à imposer un déplacement relatif câble/béton.

Ce paragraphe est consacré à ces deux extensions de la formulation poutre multifibre proposée, en intégrant d'une part les effets non-linéaires géométriques des poutres (grands déplacements, déformations infinitésimales), et d'autre part l'effet d'un déplacement relatif entre fibres pour modéliser l'effet de précontrainte conformément à l'objectif fixé : développer un outil numérique adapté à l'analyse non-linéaire des poutres en béton armé et béton précontraint.

Pour ce qui concerne la prise en compte des non-linéarités géométriques, on utilise des techniques bien établies : la formulation lagrangienne actualisée avec un traitement semi-tangentiel des paramètres de rotation.

La prise en compte de l'effet de précontrainte s'effectue encore dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Nous proposons une approche nouvelle qui consiste à déterminer de manière explicite le déplacement relatif (glissement) entre l'acier (câble de précontrainte) et le béton qui l'entoure.

Un rapide récapitulatif des extensions de la formulation poutre multifibre terminera ce paragraphe.

2-3-1. Modélisation poutre multifibre en grands déplacements

2-3-1-1. Transformation finie et déformation infinitésimale des poutres

En général, une poutre en transformation finie se déplace beaucoup plus qu'elle ne se déforme entre sa configuration initiale et actuelle. Les déformations dans le solide sont donc petites sans que la transformation le soit. Le mouvement rigidifiant représente la composante principale de la transformation (*figure 2-9*). L'hypothèse H1 (équation (1)) n'est alors plus vérifiée et l'ordre de grandeur de $\|\text{Grad}\xi\|$ peut être quelconque.

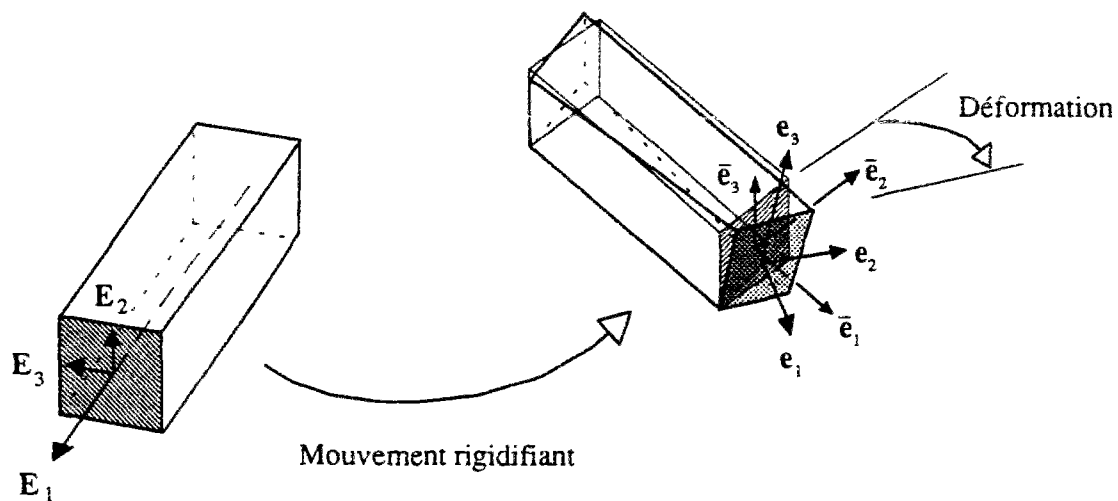


Figure 2-9 : Transformation finie des poutres

Ces considérations sont à la base de l'analyse non-linéaire géométrique des poutres tridimensionnelles. Elles forment l'hypothèse qui remplace celle de la transformation infinitésimale:

- **H1*** : hypothèse de petites déformations en grands déplacements. Cette hypothèse est relative aux matériaux constituant la poutre : dans le cas du béton, l'hypothèse apparaît pertinente en raison des petites déformations que le matériau peut supporter ($|\epsilon_{\max}| \approx 0,5\%$).

Les premières procédures numériques pour l'analyse non-linéaire des poutres tridimensionnelles proviennent de la théorie des poteaux, intégrant l'effet des efforts normaux sur le comportement géométrique non-linéaire (e.g. *Renton*, 1962; *Connor et al.*, 1968; *Chu et Rampetsreiter*, 1972; *Papadrakis*, 1981; *Virtanen et Mikkola*, 1985). La matrice de rigidité tangente est formulée à partir d'une solution exacte de l'équation différentielle pour un poteau soumis à un effort normal combiné avec une charge latérale. Cette approche se limite aux cas où les moments d'inertie principaux sont du même ordre de grandeur, et se heurte à certains obstacles concernant l'application aux cas de faibles efforts normaux ou d'existence d'une grande différence entre les moments d'inertie principaux, ce qui est le cas dans le problème du déversement (*Kouhia et Tuomala*, 1993).

L'application des outils de la mécanique des milieux continus à la description du mouvement des poutres tridimensionnelles date de la fin des années 70 (e.g. *Belytschko et al.*, 1977; *Bathe et Bolourchi*, 1979,...). La littérature est abondante. Deux points essentiels sont à traiter :

- la description du mouvement,
- le traitement particulier des paramètres de rotation.

2-3-1-2. Description du mouvement des poutres tridimensionnelles

La description du mouvement des poutres tridimensionnelles consiste à décrire l'évolution de la position de l'axe de référence et l'évolution de l'orientation de la section. A quelques exceptions près, les approches existantes utilisent une description lagrangienne de la poutre, dans le sens où les déformations sont rattachées à cette configuration, et les points matériels y sont repérés par leur vecteur de position $\mathbf{X}$. On rappelle que dans le cas des poutres, le vecteur de position est constitué d'une part du vecteur de position $\mathbf{OP}$ du point P sur l'axe de référence, et d'autre part du vecteur de position $\mathbf{PQ}$ du point Q dans la section droite en P (cf. *figure 2-3*).

Le choix particulier de la configuration de référence, notée C_r , est arbitraire dans le sens où il n'affecte pas les résultats. Il s'agit ainsi de choisir comme configuration de référence une configuration adaptée au problème à traiter, et y exprimer la conservation de la quantité de mouvement.

Elle s'exprime dans la configuration actuelle déformée, où un point matériel est repéré par le vecteur de position $\mathbf{x}$:

$$(45) \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_t (\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t$$

où par rapport à l'équation (23) l'indice t indique que la quantité est définie dans la configuration actuelle. Notons $\hat{\mathbf{U}}$ un champ de vecteur quelconque, la dualisation de (45), analogue à (25) conduit à :

$$(46) \quad \forall \Omega_t, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} \rho_t \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \rho_t \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, da = 0$$

où $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\text{grad} \hat{\mathbf{U}} + {}^t\text{grad} \hat{\mathbf{U}})$. Dans l'équation précédente, toutes les quantités sont exprimées dans la configuration actuelle déformée (description eulérienne). La notation en minuscule de l'opérateur "grad" indique qu'il est relatif à cette configuration actuelle déformée, (*i.e.* $\text{grad}() = \partial()/\partial \mathbf{x}$). Cette convention est sous entendue par la suite pour tous les opérateurs introduits. Par conséquent, on notera en majuscule un opérateur relatif à la configuration de référence (*i.e.* $\text{Grad}() = \partial()/\partial \mathbf{X}$). Et on rappelle que $\text{Grad}() = \text{grad}().\mathbf{P}$, où $\mathbf{P}$ désigne le gradient de la transformation.

Pour exprimer l'équation (46) en quantités lagrangiennes, c'est à dire dans la configuration de référence connue, rappelons les formules de transport de la mécanique des milieux continus :

$$(47) \quad \begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{X} \\ \mathbf{P} = \text{Grad} \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad} \boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad \begin{cases} d\Omega_t = J \, d\Omega_r \\ J = \det \mathbf{P} > 0 \end{cases} \quad \mathbf{n} \, da = J \, {}^t\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{N} \, dA$$

avec $d\mathbf{X}$, $d\Omega_r$ et $\mathbf{N} dA$ les grandeurs infinitésimales vectorielle, volumique et surfacique (orientée par une normale unitaire surfacique $\mathbf{N}$) dans la configuration de référence, qui deviennent après déformations dans la configuration actuelle $d\mathbf{x}$, $d\Omega_t$ et $\mathbf{n} da$. Ces relations sont illustrées

figure 2-10.

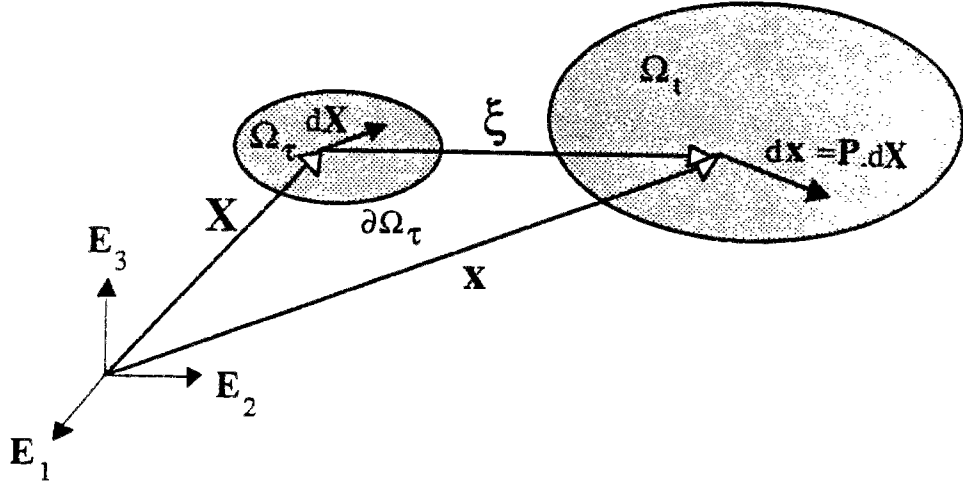


Figure 2-10 : Illustration du transport (+ transformation) d'un vecteur infinitésimal matériel

Utilisant les formules de transport (47) dans (46), on obtient :

$$(48) \quad \forall \Omega_\tau, \forall \hat{U} \quad - \int_{\Omega_\tau} \pi : \hat{\Delta} d\Omega_\tau - \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau \gamma \cdot \hat{U} d\Omega_\tau + \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau F \cdot \hat{U} d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{T} \cdot \hat{U} dA = 0$$

avec $\pi = J(\mathbf{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^{-1})$ le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff, et $\hat{\Delta} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{P}$, donc :

$$(49) \quad 2\hat{\Delta} = \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \hat{U} + {}^t\text{Grad } \hat{U} \cdot \mathbf{P}$$

ou encore :

$$(50) \quad \hat{\Delta} = \hat{\mathbf{e}} + \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} 2\hat{\mathbf{e}} = \text{Grad } \hat{U} + {}^t\text{Grad } \hat{U} \\ 2\hat{\boldsymbol{\eta}} = {}^t\text{Grad } \xi \cdot \text{Grad } \hat{U} + \text{Grad } \xi \cdot {}^t\text{Grad } \hat{U} \end{cases}$$

Dans (48), $\rho_\tau F d\Omega_\tau$, $\rho_\tau \gamma d\Omega_\tau$ et $\mathbf{T} dA$ sont les forces élémentaires volumique, d'inertie et surfacique dans la configuration de référence de volume Ω_τ borné par $\partial\Omega_\tau$. Les forces surfaciques se déterminent à l'aide de la formule de transport d'une surface orientée :

$$(51) \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) da = \boldsymbol{\sigma} \cdot J^t \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{N} dA = \mathbf{P} \cdot \pi \cdot \mathbf{N} dA = \mathbf{T} dA$$

Cette équation met en évidence la difficulté de l'interprétation physique du tenseur de Piola-Kirchhoff π : ce n'est pas la quantité $\pi \cdot \mathbf{n}$ qui peut être déterminée expérimentalement, mais $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \pi \cdot \mathbf{N} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}$, ainsi un tenseur hybride $\mathbf{B}$ relatif à la fois à la configuration de référence et à la configuration actuelle. $\mathbf{B}$ est appelée la matrice contraintes de Piola-Kirchhoff ou encore de Boussinesq.

Ceci a une conséquence très concrète en ce qui concerne l'application des outils de la mécanique de milieux continus à la représentation des efforts généralisés des poutres dans une description lagrangienne : les efforts $\mathcal{N}$ et les moments $\mathcal{M}$, introduits au paragraphe 2-2-2-1 par l'équation (2), sont définis à partir de la signification physique du tenseur des contraintes de Cauchy σ : $(\sigma \cdot \mathbf{e}_1)$ est le vecteur de contrainte attaché à la facette infinitésimale da appartenant à la section droite d'orientation $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, qui contribue d'une part aux efforts $\mathcal{N}(\sigma)$, et d'autre part aux moments $\mathcal{M}(\sigma)$. Ces deux grandeurs sont une représentation de l'état de contraintes σ en terme d'efforts généralisés de la poutre dans la configuration actuelle (cf. figures 2-4). Dans la configuration de référence, on ne peut pas établir une représentation similaire de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ en fonction des contraintes propres à cette configuration, c'est à dire en fonction du tenseur de Piola-Kirchhoff π , mais en fonction du tenseur hybride $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \pi$. Les efforts généralisés de la poutre ne représentent pas seulement un état des contraintes propre à cette configuration, mais sont également fonction d'une grandeur décrivant la déformation : le gradient de la transformation (i.e. $\mathcal{N}(\pi, \mathbf{P})$ et $\mathcal{M}(\pi, \mathbf{P})$).

Cependant, le choix d'une configuration de référence permet quelques simplifications. Parmi les approches lagrangiennes on peut distinguer (cf. Bathe et al., 1975; Gaddala et al., 1984) :

- la **formulation lagrangienne totale**, où on adopte comme configuration de référence la configuration initiale (i.e. $\mathbf{C}_\tau = \mathbf{C}_0$). L'avantage de cette description réside dans la constance du domaine d'intégration ($\Omega_\tau = \Omega_0$, $\partial\Omega_\tau = \partial\Omega_0$ dans (49)), et dans la facilité de changement de conditions aux limites. L'inconvénient de ce choix est discuté ci-dessus, pour ce qui concerne l'interprétation physique des contraintes calculées : le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\pi = \pi_0$.
- la **formulation lagrangienne actualisée**, où la configuration de référence est représentée par la dernière position d'équilibre connue du corps à l'instant $0 \leq \tau < t$. La configuration connue est proche de la configuration actuelle. Les contraintes σ sont calculées dans la configuration actuelle, ayant ainsi une signification physique claire. Elles sont confondues avec les

contraintes de Piola-Kirchhoff dans la configuration de référence ($\pi \approx \sigma$). Cette approche nécessite d'actualiser à chaque instant le domaine d'intégration et de préciser la configuration à laquelle se réfèrent les opérateurs différentiels ("Grad"). Un processus incrémental peut conduire à sommer des contributions de contraintes calculées sur des configurations de référence différentes (Cariou, 1988).

- la **description corotationnelle**, qui est un cas particulier de la formulation lagrangienne actualisée. On adopte comme configuration de référence la configuration du solide en mouvement de corps rigide (*i.e.* $C_\tau = C_{ng(t)}$). Cette description est basée sur la décomposition polaire, qui consiste à décomposer le tenseur de la transformation $\mathbf{P}$ entre la configuration initiale C_o et la configuration actuelle C_t en un tenseur de rotation pure $\mathbf{R}$ et un tenseur de déformation pure $\mathbf{D}$:

$$(52) \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} = {}^t\mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{R} \quad \text{où :} \quad \begin{cases} {}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot {}^t\mathbf{R} = \mathbf{1} \\ \det \mathbf{R} = 1 \end{cases}$$

$\mathbf{R}$ vérifie la propriété d'orthogonalité. L'utilisation de (52) avec les formules de transport et notant $d\Omega_\tau = d\Omega_{ng} = d\Omega_o$, conduit à l'expression suivante du tenseur de contraintes dans la configuration de référence π_{ng} :

$$(53) \quad \begin{cases} \sigma d\Omega_t = ({}^t\mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{R} \cdot \pi_o \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}) d\Omega_o \\ \pi_{ng} = {}^t\mathbf{R} \cdot \pi_o \cdot \mathbf{R} \end{cases}$$

Considérons tout d'abords le cas extrême où $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ et $J=1$, on a :

$$(54) \quad \begin{cases} \sigma = \pi_{ng} = {}^t\mathbf{R} \cdot \pi_o \cdot \mathbf{R} \\ (\sigma \cdot \mathbf{n}) da = \sigma \cdot \mathbf{N}_{ng} dA_{ng} = \sigma \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_o dA_o \end{cases}$$

Considérons ensuite la décomposition polaire (52) avec hypothèse H1*, le tenseur $\mathbf{R}$ représente la composante principale du gradient de la transformation totale $\mathbf{P}$. Au vu des relations (54), on peut confondre dans la configuration de référence de corps rigide le tenseur de Piola-Kirchhoff avec le tenseur de contraintes de Cauchy ($\pi_{ng} \approx \sigma$). En grands déplacements et déformations infinitésimales, l'équation (46) s'écrit dans une description lagrangienne corotationnelle :

$$(55) \quad \forall \Omega_{rig}, \forall \hat{U} \quad - \int_{\Omega_{rig}} \sigma : \hat{\Delta}_{rig} d\Omega_{rig} - \int_{\Omega_{rig}} \rho_{rig} \gamma \cdot \hat{U} d\Omega_{rig} + \int_{\Omega_{rig}} \rho_{rig} F \cdot \hat{U} d\Omega_{rig} + \int_{\partial\Omega_{rig}} T \cdot \hat{U} dA_{rig} = 0$$

avec $2\hat{\Delta}_{rig} = {}^tD \cdot \text{Grad } \hat{U} + {}^t\text{Grad } \hat{U} \cdot D$, où l'opérateur "Grad" est défini sur la configuration de référence du corps rigide. Le domaine d'intégration est constant.

Cette approche sera utilisée par la suite. Pour les poutres, l'avantage de ce paramétrage lagrangien actualisé de la déformation est évident : les mouvements rigidifiants sont à décrire sur un corps solide de géométrie simple, constitué d'un axe de référence et d'une section droite.

Avec l'hypothèse H1*, l'analyse s'effectue en deux étapes (cf. *figure 2-9*) :

1. Le mouvement de corps rigide correspond à une rotation propre entre la configuration initiale de vecteurs de base E_i ($i=1,3$) et la configuration de référence du corps rigide de vecteur de base $\bar{e}_i$ ($i=1,3$). Pour ce passage nous utilisons une procédure particulière dérivée à partir d'un traitement semi-tangentiel de paramètres de rotations. Cette procédure, initialement proposée par *Argyris et al.* (1978^{a,b}, 1982), et amplement détaillée dans la littérature (*Kondoh et al.*, 1986; *Cardona et Geradin*, 1988, *Shi et Alturi*, 1988, *Cariou*, 1988) n'est pas développée ici. En **annexe 3**, on trouvera un résumé du problème : la non-commutativité des rotations finies qui ne constituent pas une quantité vectorielle. Ceci nécessite un traitement particulier des paramètres de rotations. L'approche utilisée par la suite est celle proposée par *Cariou* (1988).
2. La déformation de la poutre correspond au passage entre la configuration de référence de base $\bar{e}_i$ ($i=1,3$) et la configuration actuelle déformée de base e_i ($i=1,3$). Le problème à résoudre est écrit équation (55).

Dans ce qui suit, les hypothèses H3 à H6 sont conservées. On ne considère que le cas où les axes de référence et de torsion coïncident.

De plus, dans (55), les effets des efforts d'inertie et de volume sont négligés.

2-3-1-3. Vecteur de déplacement de la fibre k

Le champ de déplacement définit ici la position d'un point matériel de la poutre dans la configuration actuelle (vecteur de position $\mathbf{x}$) par rapport sa position dans la configuration de référence de corps rigide actualisée (vecteur de position $\bar{\mathbf{X}}$), *i.e.* $\xi = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{X}}$. On suppose :

- H2* : les rotations autour des axes d'orientation $\bar{\mathbf{e}}_i$ ($i=1,3$) dans la configuration de référence sont petites. Bien entendu, les rotations totales peuvent prendre des valeurs quelconques.

Cette hypothèse, qui porte sur le champ de déplacement dans la configuration de référence du corps rigide, permet de conserver le champ de déplacement utilisé en analyse linéaire. On rappelle l'équation (8) :

$$(56) \quad \xi_k = \xi(Q) = \xi_o - \left(\frac{d\xi_o}{dx_1} \cdot PQ + \frac{d\omega_1}{dx_1} \varphi(x_2, x_3) \right) \bar{\mathbf{e}}_1 + \omega_1 \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge PQ$$

On conserve également la discrétisation spatiale (*cf.* 2-2-2-3). Dans la configuration de référence (corps rigide) de base $\bar{\mathbf{e}}_i$, $i=1,3$, le vecteur $\{\xi\}$ des paramètres nodaux de déplacements et de rotations s'écrit :

$$(57) \quad \{\xi\}_i = {}^t \left\{ \xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}, \omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i} \right\} \quad i = A, B$$

et dans la configuration initiale (base $\mathbf{E}_i$, $i=1,3$) :

$$(58) \quad \{\Xi\}_i = {}^t \left\{ \Xi_{1i}, \Xi_{2i}, \Xi_{3i}, \Omega_{1i}, \Omega_{2i}, \Omega_{3i} \right\} \quad i = A, B$$

Le procédure, exposée en **annexe 3** et dérivée à partir du traitement semi-tangentiel des paramètres de rotations permet d'effectuer le passage entre ces deux repères.

2-3-1-4. Mise en équation

En négligeant les efforts d'inertie et volumique, l'équation (55) est réécrite sous la forme :

$$(59) \quad \forall \Omega_{ng}, \forall \hat{U} \quad - \int_{\Omega_{ng}} \sigma : \hat{\varepsilon} d\Omega_{ng} - \int_{\Omega_{ng}} \sigma : \hat{\eta} d\Omega_{ng} + \int_{\partial\Omega_{ng}} \hat{U} \cdot T dA_{ng} = 0$$

où la puissance des efforts intérieurs est décomposée en partie non-linéaire en matériau et partie non-linéaire en matériau et en géométrie, et :

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{Grad} \hat{U} + {}^t \text{Grad} \hat{U}) \\ \hat{\eta} = \frac{1}{2} ({}^t \text{Grad} \xi \cdot \text{Grad} \hat{U} + \text{Grad} \xi \cdot {}^t \text{Grad} \hat{U}) \end{cases}$$

Utilisant dans la configuration de référence du corps rigide la définition (2) des efforts généralisés, il vient :

$$(60) \quad \begin{cases} \mathcal{N} = \mathcal{N}(\bar{x}_1) = \int_{A_{ng}} \sigma \cdot \bar{e}_1 dA_{ng} = N \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2 + V_3 \bar{e}_3 \\ \mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{x}_1) = \int_{A_{ng}} \overrightarrow{PQ} \wedge (\sigma \cdot \bar{e}_1) dA_{ng} = M_1 \bar{e}_1 + M(\bar{e}_2, \bar{e}_3) \end{cases}$$

Le premier terme de l'équation (59) (non-linéaire en matériau) peut être écrit de manière analogue à l'équation (30) :

$$(61) \quad \mathcal{P}_{int(k)}(\hat{\varepsilon}) = - \int_{\Gamma_0} \left(N \frac{d\hat{U}_1}{d\bar{x}_1} + M_{1k} \left(\frac{d\hat{\Omega}_1}{d\bar{x}_1} \right) - M \cdot \left(\bar{e}_1 \wedge \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\bar{x}_1^2} \right) \right) d\bar{x}_1$$

Pour la partie non-linéaire en matériau et en géométrie, réécrivons $\hat{\eta}$ avec

$$(62) \quad \begin{cases} \text{Grad} \hat{U} = \hat{\varepsilon} + \hat{\omega} \\ \text{Grad} \xi = \varepsilon + \omega \end{cases} \quad \text{donc : } \hat{\eta} = \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot \hat{\varepsilon} + \varepsilon \cdot \hat{\omega} + \varepsilon \cdot {}^t \hat{\omega} + \omega \cdot \hat{\varepsilon} + {}^t \omega \cdot \hat{\varepsilon} + \omega \cdot \hat{\omega} + \omega \cdot {}^t \hat{\omega})$$

Avec les hypothèses H1* et H2* , $\hat{\eta}$ s'écrit $\hat{\eta} = \frac{1}{2} ({}^t \omega \cdot \hat{\omega} + \omega \cdot {}^t \hat{\omega})$, d'où :

$$(63) \quad \rho_{\text{int}}(\hat{\eta}) = \int \sigma : (\omega \cdot \hat{\omega} + \omega \cdot \hat{\omega}) d\Omega_{\text{ng}}$$

Le calcul de ce terme est détaillé dans la littérature (cf. *Yang et McGuire*, 1986^{*}; *Cariou*, 1988; *Conci*, 1992^{*}). Le vecteur des efforts intérieurs obtenu n'est pas différent de celui habituellement utilisé en analyse non-linéaire géométrique des poutres. Il s'écrit en fonction des efforts généralisés, liés par (60) aux contraintes locales actualisées au niveau des fibres. En ce qui concerne l'application aux poutres en béton armé, en raison des petites déformations que les matériaux peuvent supporter (Béton : $|\epsilon_{\text{max}}| \approx 0,5\%$), nous utilisons encore le tenseur de déformation linéarisé pour actualiser les contraintes. D'un point de vue pratique, l'actualisation de contraintes s'effectue en chaque point intégration de la fibre de manière itérative à partir du tenseur de déformations linéarisé, qui, quant à lui, se calcule à l'aide de (34) à partir des degrés de liberté (57) dans la configuration de référence. Au niveau des fibres, on actualise les contraintes en utilisant les variables d'état comme le tenseur des déformations plastiques, les variables d'écrouissage et d'endommagement. Une fois les contraintes actualisées, le vecteur des efforts intérieurs est calculé par intégration.

L'équation (59) ne peut pas être résolue d'une manière directe, de part les non-linéarités en matériau prises en compte par des lois de comportement triaxiales et la non-linéarité en géométrie. Une variation en ξ conduit à :

$$(64) \quad \Delta \mathfrak{R} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \int_{\Omega_{\text{ng}}} \Delta \sigma : \hat{\mathbf{E}} d\Omega_{\text{ng}} + \int_{\Omega_{\text{ng}}} \sigma : \Delta \hat{\eta} d\Omega_{\text{ng}} + \int_{\Omega_{\text{ng}}} \Delta \sigma : \hat{\eta} d\Omega_{\text{ng}} - \int_{\partial \Omega_{\text{ng}}} \hat{\mathbf{U}} \cdot \Delta \mathbf{T} dA_{\text{ng}}$$

L'opérateur de passage (*i.e.* la matrice de rigidité tangente) entre deux itérations est ainsi constitué de quatre composantes :

- Le premier terme constitue la partie non-linéaire en matériau de l'opérateur de passage. Il est identique à l'opérateur de passage (41) établi en hypothèse de petites perturbations. En raison des différents matériaux constituant la section, ce terme est calculé pour chacune des fibres, aux lois de comportement triaxiales quelconques :

$$(65a) \quad \int_{\Omega_{\text{ng}}} \Delta \sigma : \hat{\mathbf{E}} d\Omega_{\text{ng}} = \{\hat{\mathbf{U}}\} \sum_{k=1,n} [\mathbf{K}(\mathbf{C}^{\text{ep}})]_k^{\text{mat}} \{\Delta \xi\}$$

- Le deuxième terme constitue la partie non-linéaire en géométrie de l'opérateur de passage. A l'aide de la définition (62) des contraintes généralisées dans la configuration de référence, ce terme s'exprime uniquement en fonction des efforts intérieurs des poutres : effort normal, moments de flexion. Il ne dépend pas de la modélisation multifibre. On peut ainsi utiliser toutes les matrices de rigidité géométrique des éléments poutre tridimensionnelle de la littérature (cf. *Yang et McGuire*, 1986^{a,b}, *Cariou*, 1988, *Conci*, 1992^{a,b}) :

$$(65b) \quad \int_{\Omega_{n_0}} \sigma : \Delta \hat{\eta} d\Omega_{n_0} = \{ \hat{U} \} [K(\eta, \mathcal{M})]^{geom} \{ \Delta \xi \}$$

- Le troisième terme peut être considéré comme une partie "hybride", dans le sens où il rend compte de la non-linéarité matérielle sur une géométrie déformée. Il est également hybride dans le sens de la modélisation multifibre : la non-linéarité matérielle au niveau local est couplée à la non-linéarité géométrique du niveau global, ainsi :

$$(65c) \quad \int_{\Omega_{n_0}} \Delta \sigma : \hat{\eta} d\Omega_{n_0} = \{ \hat{U} \} \sum_{k=I,n} [K(\xi)]_k^{hyb} \{ \Delta \xi \}$$

Cependant, par rapport à la contribution (65a), ce terme est du second ordre, et peut être négligé si la taille des incréments de charge n'est pas trop grande (*Cariou*, 1988).

- Enfin, le quatrième terme est dû aux forces extérieures et prend en compte l'influence d'efforts non conservatifs, c'est à dire les efforts fonctions des variations de géométrie subies par le système étudié. Le calcul de ce terme est amplement détaillé dans de nombreuses références (cf. *Argyris et Symeonidis*, 1981; *Yang et McGuire*, 1986^b; *Conci*, 1992^b). Sous une forme symbolique, ce terme s'écrit :

$$(65d) \quad - \int_{\partial \Omega_{n_0}} \hat{U} \cdot \Delta T dA_{n_0} = \{ \hat{U} \} [K(T)]^{ext} \{ \Delta \xi \}$$

Ainsi, négligeant le terme hybride (65c), l'équation d'équilibre incrémentale matricielle dans la configuration de référence (corps rigide) s'écrit :

$$(66) \quad \left[\sum_{k=I,n} [K(C^p)]_k^{mat} + [K(\eta, \mathcal{M})]^{geom} + [K(T)]^{ext} \right] \{ \Delta \xi \} = \{ F_{ext} \} - \sum_{k=I,n} \{ F_{int} \}_k^{(mat)} - \{ F_{int} \}^{(geom)}$$

Cette équation est à comparer avec l'équation (42). Les composantes supplémentaires sont les matrices habituelles de l'analyse non-linéaire géométrique des poutres. Ces termes ne sont pas propres à la formulation multifibre.

2-3-1-5. Récapitulatif

Rappelons brièvement les hypothèses posées pour la formulation multifibre en grands déplacements et petites déformations avec une description lagrangienne corotationnelle.

- Hypothèses en grands déplacements et petites déformations (en formulation lagrangienne corotationnelle) :

H1* : hypothèse des déformations infinitésimales en grands déplacements (*cf.* 2-3-1-1). Le mouvement rigidifiant représente la composante principale de la transformation (par conséquent $\pi_{rig} \approx \mathbf{O}$, *cf.* 2-3-1-2)

H2* : hypothèse sur le champ de déplacement dans la configuration de référence de corps rigide (petits rotations de distorsion, *cf.* 2-3-1-3).

- Hypothèses sur la déformation des poutres, quel que soit le comportement des matériaux constituant la section. Elles sont identiques à celles posées au paragraphe 2-2 (*cf.* 2-2-4) :

H3 : hypothèse de Navier-Bernoulli,

H4 : torsion de Saint Venant,

H5 : hypothèses sur l'axe de centre de torsion (les axes de référence et de torsion coïncident) et sur la rigidité à la torsion.

- Hypothèse sur l'état de contraintes (*cf.* 2-2-2-4) :

H6 : Les contraintes transversales (de Cauchy) à l'axe d'une fibre (contraintes de confinement) sont nulles.

De plus, les efforts d'inertie et de volume sont négligés. Nous appliquerons cet outil à l'analyse non-linéaire géométrique et matériel des structures en béton armé (flambement de poteau, déversement de poutre préfabriquée etc.).

Le schéma suivant met en évidence l'idée de base de la formulation multifibre pour l'analyse non-linéaire en matériau et en géométrie : les deux échelles de modélisation au sein d'un élément poutre classique,

- l'échelle globale, où on traite les non-linéarités en géométrie;
- l'échelle locale, où on traite les non-linéarités en matériau.

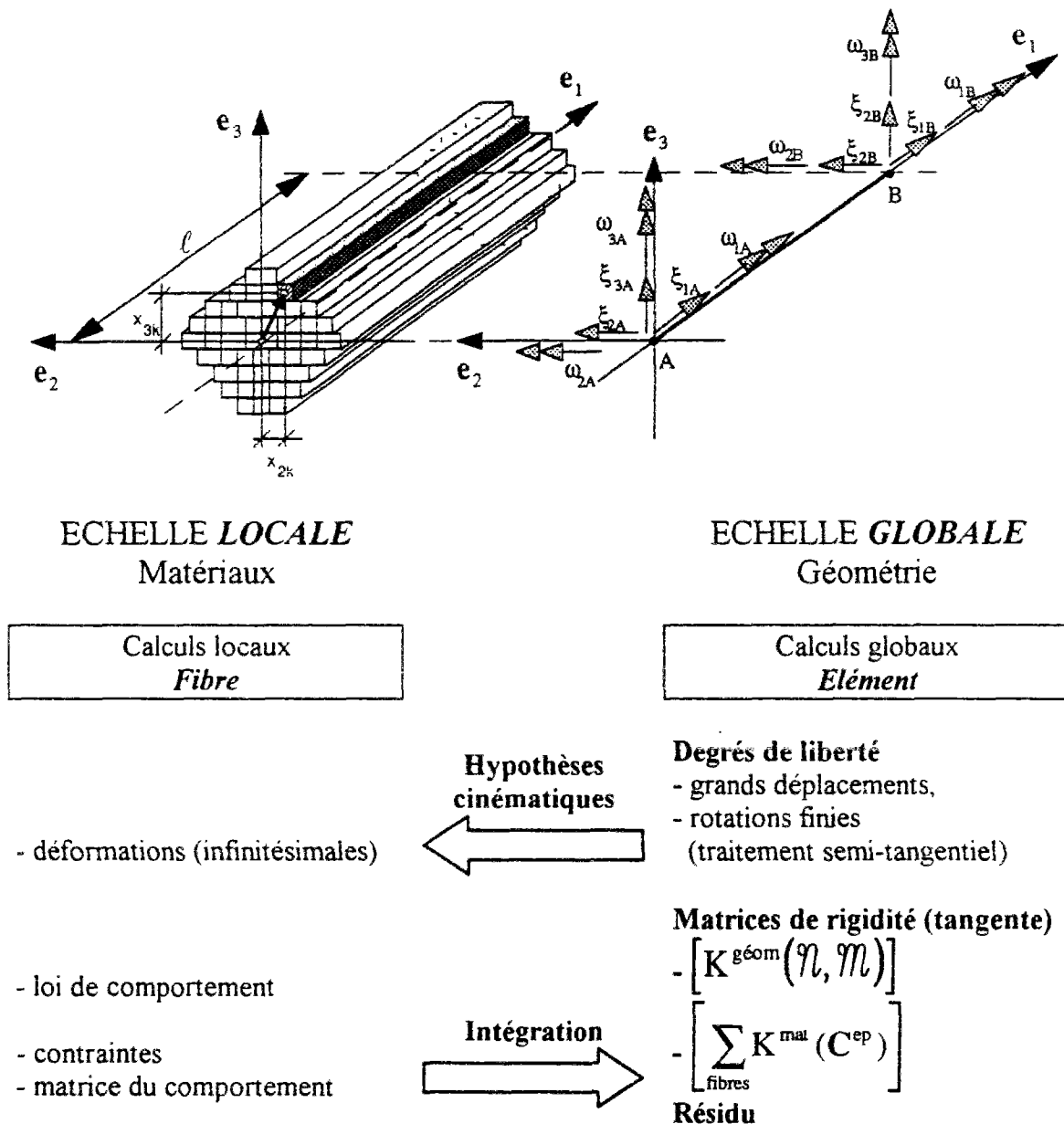


Figure 2-11 : Schéma récapitulatif de l'approche semi-globale pour l'analyse non-linéaire géométrique et matériel

2-3-2. Modélisation multifibre du déplacement relatif entre fibres

Jusqu'ici, le déplacement des fibres au sein de la section est guidé par la planéité des sections droites normales aux fibres, dans la déformation de la poutre considérée (H3 : Navier-Bernoulli). Le champ de déplacement est continu et décrit par le champ de déplacement ξ_0 de l'axe de référence en P , le champ scalaire ω_1 , et le vecteur de position PQ . La différence en déplacement de deux points dans la section est ainsi uniquement due aux positions différentes qu'ils occupent dans la section. L'adhérence entre fibres est supposée parfaite, et il ne peut y avoir aucun glissement entre fibres.

Mais, dans les structures en béton armé, la détérioration progressive de l'adhérence entre acier et béton affecte de manière importante leur capacité portante et leur comportement global. Un effort important de travaux de recherche expérimentale et analytique est consacré à ce phénomène. Une synthèse bibliographique sur ce sujet se trouve dans *Clément* (1987).

De plus, l'adhérence entre acier et béton est mise en jeu de façon explicite dans le cas de poutres précontraintes :

- la mise en tension d'un câble dans une gaine consiste à imposer un déplacement relatif entre câble et béton (post-tension);
- l'effet du frottement entre câble et gaine conduit à une perte de précontrainte;
- par injection de mortier, l'adhérence est activée (cas de la précontrainte interne).

On propose ici d'étudier ce problème d'adhérence acier-béton d'un point de vue *multifibre*. Nous montrons comment la modélisation multifibre proposée peut s'étendre naturellement à ce type de problème. L'étude du problème d'adhérence entre acier et béton nous conduit à une formulation simple pour traiter ce problème au sein d'un élément de poutre multifibre, conformément à l'objectif fixé : développer un outil numérique adapté à l'analyse non-linéaire des poutres en béton armé et précontraint.

Cette prise en compte du glissement s'effectue encore dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations : les hypothèses H1 et H2 sont donc conservées (cf. 2-2-1-1). De plus, comme pour les lois de comportement, l'évolution de l'adhérence est traitée dans un cadre *quasistatique*.

2-3-2-1. Déplacement relatif : le glissement

Considérons deux points matériels à l'interface acier-béton, un appartenant au béton, l'autre à l'acier, initialement juxtaposées et repérées par le même vecteur de position $\mathbf{X}$. Après déformations, ils ne sont plus juxtaposés, et les points matériels sont repérés respectivement par les vecteurs de position $\mathbf{x}_a$ et $\mathbf{x}_b$. Les vecteurs de déplacements s'écrivent (*figure 2-12*) :

$$(67) \quad \begin{cases} \xi_a = \mathbf{x}_a - \mathbf{X} \\ \xi_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{X} \end{cases}$$

On peut également écrire :

$$(68) \quad \xi_a = \xi_b + \xi_r$$

où $\xi_r = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ est le vecteur des déplacements relatifs entre acier et béton.

Le tenseur de déformation linéarisé (10) dans l'acier s'écrit :

$$(69) \quad \epsilon_a = \epsilon_b + \epsilon_r \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \epsilon_b = \frac{1}{2}(\text{grad}\xi_b + {}^t\text{grad}\xi_b) \\ \epsilon_r = \frac{1}{2}(\text{grad}\xi_r + {}^t\text{grad}\xi_r) \end{cases}$$

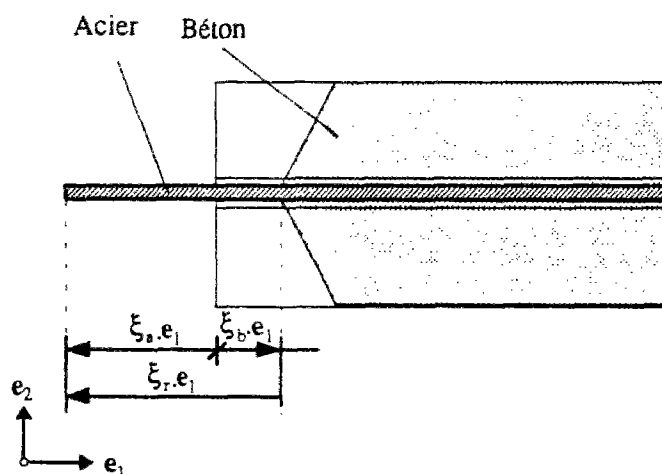


Figure 2-12 :
Déplacement relatif entre acier et béton.

Avec l'hypothèse de la transformation infinitésimale, les déformations dans l'acier à l'interface peuvent être représentées par la somme :

- des déformations du béton,
- des déformations dues aux déplacements relatifs entre acier et béton.

Dans le cas de l'adhérence parfaite, $\xi_r = 0$ et $\varepsilon_r = 0$: l'acier suit le mouvement du béton qui l'entoure.

2-3-2-2. Position du problème dans le cas des poutres

L'étude d'un exemple simple permet de mettre en évidence l'influence de l'adhérence acier-béton sur le comportement global d'une poutre.

Considérons une poutre de section quelconque reposant sur deux appuis articulés, et chargée avec une force appliquée sur la fibre supérieure à la demi-travée (*figure 2-13a*). Considérons une fibre k d'acier repérée par son vecteur de position PQ de coordonnées $(0, 0, x_{3k})$. Supposons l'adhérence parfaite entre acier et béton. L'état de déformations dans l'acier est uniquement lié à la rotation de la section. Négligeant le poids propre, suivant l'hypothèse de Navier-Bernoulli la déformation axiale dans cette fibre k est de la forme illustrée *figure 2-13b*. Supposons maintenant que la fibre d'acier est uniquement fixée aux extrémités de la poutre, sans aucun contact avec le béton (*figure 2-13c*). Dans ce cas, la déformation dans la fibre est constante (*figure 2-13d*). Elle est due aux déplacements et rotations des sections d'appuis, et des effets de suspension du second ordre issus du fléchissement de la poutre.

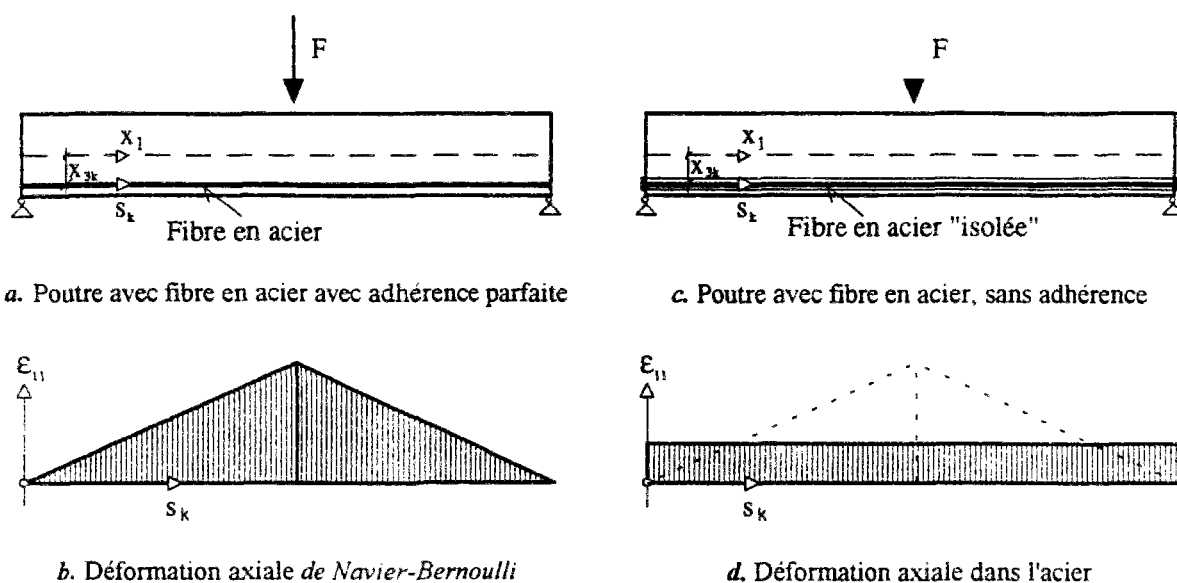


Figure 2-13 : Étude de la déformation axiale dans une fibre en acier avec adhérence parfaite (a, b) et sans adhérence (c, d)

Les deux états de déformations correspondent aux deux cas extrêmes d'adhérence entre la fibre en acier et la section. Dans le premier cas, $\varepsilon_s = \varepsilon_b$ et $\xi_r = 0$. Dans le second cas ξ_r est non nul : ce glissement résulte de l'intégrale sur une longueur donnée de la différence des déformations de l'acier et du béton, dans la zone d'interface (périmètre de l'acier).

En supposant

- H7 : la zone d'interface est petite,

la déformation moyenne dans le béton dans le voisinage immédiat de l'acier est proche de celle qu'on pourrait mesurer dans la fibre en acier k dans le cas de l'adhérence parfaite : deux points matériels (un dans l'acier, l'autre dans le béton), infiniment voisins à un instant donné, le restent après transformation (hypothèse de continuité). Dans le cas particulier des poutres, cette déformation est décrite par l'hypothèse de Navier-Bernoulli (H3).

En outre, ξ_r peut ne pas être constant autour du périmètre de l'acier. L'hypothèse H7 permet de considérer le glissement ξ_r *en moyenne*, attaché au centre de gravité de la fibre k .

Avec l'hypothèse H7, l'état de déformation dans la fibre en acier sans adhérence peut être représenté comme la superposition (*figure 2-14*) :

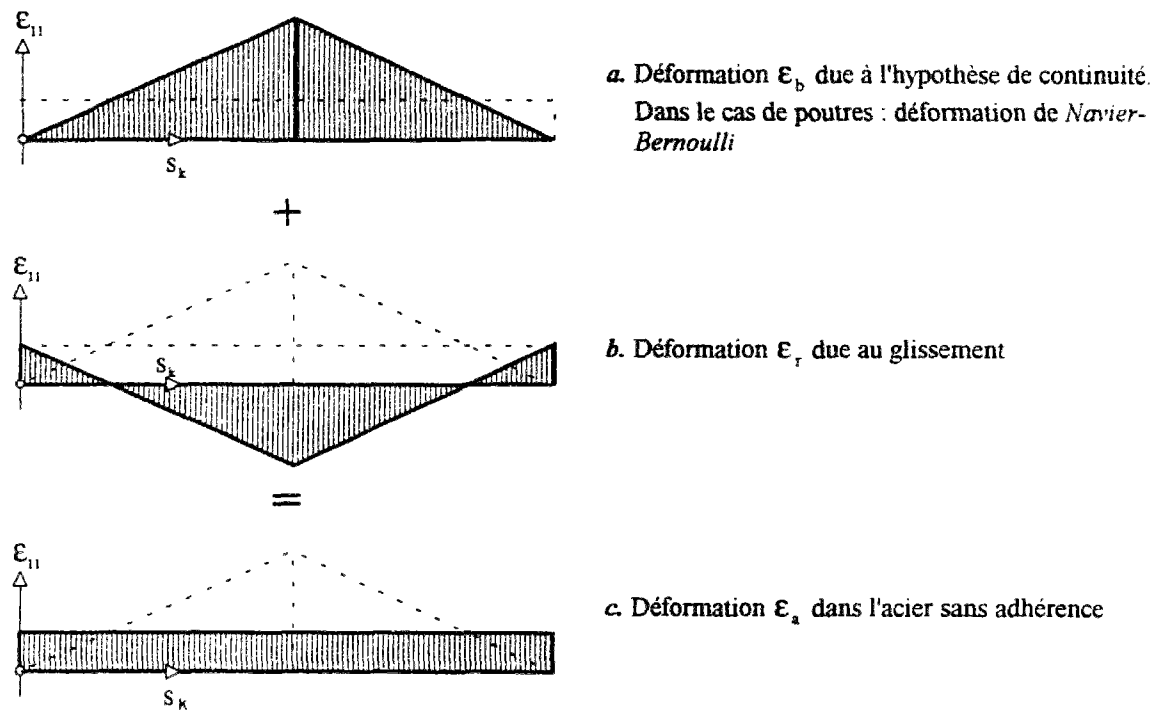


Figure 2-14 : Illustration de l'application de la superpositions (69) au cas des poutres.
(d'après Guggenberger, 1992).

- de la déformation due à l'hypothèse de continuité de la transformation (*i.e.* déformation de Navier-Bernoulli dans le cas des poutres, *figure 2-14a*),
- et de la déformation moyenne due au glissement à l'interface, (*figure 2-14b*).

Cette exemple simple présente l'idée de base de la modélisation de la discontinuité à l'interface acier-béton proposée ici. Le problème à traiter est un problème de conditions aux limites à l'interface acier-béton.

Dans le cas des structures en béton précontraint, ces conditions aux limites correspondent à des phases de construction distinctes :

- La mise en tension correspond à une condition d'adhérence nulle : elle consiste à imposer un déplacement relatif entre câble et béton. Dans le cas d'un câble précontraint courbe, l'adhérence entre câble et gaine n'est pas complètement nulle : le frottement provoqué par le glissement conduit à une perte de précontrainte.

- Lors de l'injection de la gaine en post-tension ou du coulage du béton en pré-tension, l'adhérence entre câble et béton devient parfaite (ou presque).

La modélisation de l'effet de précontrainte par variations de conditions aux limites à l'interface est à comparer avec les approches classiques, où l'effet de la précontrainte est pris en compte par un état de contraintes initiales dans l'acier. La connaissance de la trace d'un câble dans une structure permet de calculer des efforts équivalents exercés par la précontrainte sur le béton. Des méthodes pour calculer ces efforts sont développées par exemple pour les poutres dans *Blessenohl* (1992), pour les coques dans *Jirousek et al.* (1979), et pour le cas général des éléments massifs tridimensionnels dans *Coulhon et al.* (1983). Ces approches sont basées sur la connaissance *a priori* de l'état de contraintes dans les câbles. La détermination de ces efforts équivalents permet de prendre en compte des phénomènes divers (frottement, glissement aux l'ancrages etc.). Ces phénomènes sont par nature non-linéaires et peuvent dépendre du niveau de charge appliquée, du glissement etc. Ils peuvent affecter l'état de contraintes dans les câbles. Cette nature non-conservative des efforts exercés par la précontrainte sur le béton est difficile à intégrer dans l'approche par efforts équivalents et nécessite une méthode itérative (*cf.* équation (65d)).

Dans l'approche proposée ici, l'effet de la précontrainte n'est pas prise en compte sous la forme d'un état des contraintes initiales. L'état des contraintes est à déterminer avec une loi de comportement à partir du tenseur de déformations (69), fonction du glissement entre acier et béton.

Par la suite, nous présentons la modélisation de ce problème d'un point de vue *multifibre*. Deux points essentiels sont à traiter :

- l'intégration d'une trace d'une fibre conçue courbée dans l'élément,
- la définition de la loi de comportement de cette fibre, avec la prise en compte du frottement.

2-3-2-3. Modélisation géométrique d'une fibre curviligne k

Considérons une fibre k de position dans le repère local de la poutre de vecteurs de base $\mathbf{e}_i, i = 1, 3$ donnée par :

$$(70) \quad \mathbf{r}(x_1) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2(x_1) \mathbf{e}_2 + x_3(x_1) \mathbf{e}_3$$

Le vecteur tangent unitaire $\mathbf{t}$ à l'abscisse curviligne $s(x_1)$ de la fibre k est (*figure 2-15a*) :

$$(71) \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'\|} \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{e}_1 + x_2' \mathbf{e}_2 + x_3' \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2}} = t_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec : } (') = d() / dx_1$$

avec :

$$(72) \quad s(x_1) = \int_{x_1} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} dx_1 = \int_{x_1} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2} dx_1$$

La dérivation par rapport x_1 correspond à une dérivation par rapport l'axe de référence de la poutre dans la configuration actuelle déformée. L'utilisation de l'hypothèse de la transformation infinitésimale (H1), permet de confondre les dérivations en x_1 dans la configuration de référence et actuelle. Par conséquent, cette hypothèse conduit à négliger tout effet de suspension de deuxième ordre dû au fléchissement de la poutre.

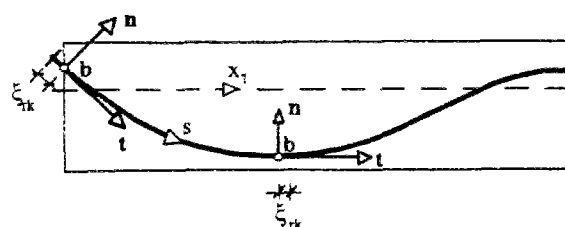
De plus, en raison de son intégration dans un élément poutre à deux noeuds, la fibre est modélisée au sein d'un élément comme une ligne droite inclinée par rapport au repère local de l'élément poutre multifibre. La ligne directrice courbée $s(x_1)$ passant par plusieurs éléments est approchée par un polygone de normales $\mathbf{n}$ (*figure 2-15b*) :

$$(73) \quad \mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$$

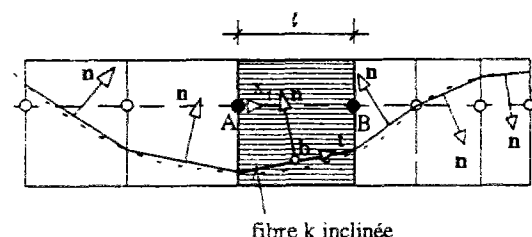
$\mathbf{n}$ est constante dans un élément.

Avec $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ donnés, la binormale s'écrit $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$.

La connaissance du trièdre $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, permet de passer du repère local de la poutre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ au repère orthonormé de la fibre inclinée.



a. Trace d'un câble de précontrainte. (t, n, b) est le trièdre orthonormé fonction de s . La figure présente également la définition du glissement ξ_α attaché à la ligne directrice d'une fibre k .



b. Modélisation multifibre de la trace d'une fibre courbée entre deux noeuds A et B. Le trièdre (t, n, b) est constant sur toute la longueur de l'élément.

Figure 2-15 : Modélisation multifibre du glissement d'une fibre courbe

2-3-2-4. Vecteur de déplacement de la fibre k

Appliquant (68), le vecteur déplacements de la fibre k s'écrit :

$$(74) \quad \xi_k = \xi_{bk} + \xi_\alpha$$

où ξ_{bk} est le vecteur de déplacements de la fibre k sous la condition de continuité (adhérence parfaite, cf. 2-3-2-2). Naturellement, cette condition consiste ici à utiliser le vecteur de déplacements donné par les relations (5)-(8), et à appliquer les hypothèse H3-H5 relatives à la déformation des poutres (cf. 2-2-4).

Pour ce qui concerne le vecteur de glissement ξ_α on fait l'hypothèse suivante :

- H8 : le vecteur de déplacement relatif ξ_α est toujours dirigé selon la direction de la tangente t de l'abscisse curviligne $s(x_1)$ de la fibre. Les composantes normales (direction n) et binormales (direction b) sont toujours nulles, ainsi :

$$(75) \quad \xi_\alpha = \xi_\alpha(s)t$$

On attache donc le glissement à la ligne directrice de la fibre k . D'un point de vue physique, l'hypothèse H8 implique qu'il n'y a pas de décollement entre acier et béton.

Utilisant (8) et (75), le vecteur de déplacement de la fibre k avec glissement s'écrit dans le repère local de la poutre de base ($\mathbf{e}_i, i = 1, 3$) :

$$(76) \quad \xi_k = \xi(Q) = \xi_o - \left(\frac{d\xi_o}{dx_1} \cdot PQ + \frac{d\omega_1^t}{dx_1} \varphi(x_2, x_3) \right) \mathbf{e}_1 + \omega_1^t \mathbf{e}_1 \wedge (PQ - PT) + \xi_{rk}(s) \mathbf{t}$$

avec des composantes :

$$(77) \quad \begin{cases} \xi_{1k} = \xi_k \cdot \mathbf{e}_1 = \xi_1^p - x_{2k} \frac{d\xi_2^t}{dx_1} - x_{3k} \frac{d\xi_3^t}{dx_1} + \frac{d\omega_1^t}{dx_1} A x_{2k} x_{3k} + \xi_{rk} t_1 \\ \xi_{2k} = \xi_k \cdot \mathbf{e}_2 = \xi_2^t - (x_{3k} - x_{3t}) \omega_1^t & + \xi_{rk} t_2 \\ \xi_{3k} = \xi_k \cdot \mathbf{e}_3 = \xi_3^t + (x_{2k} - x_{2t}) \omega_1^t & + \xi_{rk} t_3 \end{cases}$$

En ce qui concerne la discrétisation spatiale, les déplacements relatifs de la fibre k au sein de l'élément multifibre sont modélisés par des degrés de liberté supplémentaires aux deux extrémités de l'élément de poutre. Ils représentent les déplacement relatif à $s=0$ et à $s=\bar{\ell}_k$, avec une interpolation linéaire en s . $\bar{\ell}_k$ est la longueur de la fibre k inclinée et est définie par l'équation (72).

Pour rendre compte de n déplacements relatifs d'un élément poutre à m noeuds, il faut $(m \times n)$ degrés de liberté supplémentaires. Ici, on ne considère que le cas d'un seul déplacement relatif ($n=1$) au sein d'un élément à deux noeuds ($m=2$). Ceci conduit à l'échelle globale à un élément fini de poutre tridimensionnelle à $12+2=14$ degrés de liberté (DDL). Le vecteur des paramètres de déplacements et de rotations s'écrit :

$$(78) \quad \{\xi\} = \{\xi^b\} + \{\xi^r\} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \{\xi^b\}_i = \{\xi_{1i}^p, \xi_{2i}^t, \xi_{3i}^t, \omega_{1i}^t, \omega_{2i}, \omega_{3i}, 0\} \\ \{\xi^r\}_i = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \xi_{rk i}\} \end{cases} \quad i = A, B$$

Les 2 DDL supplémentaires ont comme direction le vecteur unitaire $\mathbf{t}$: ils ne sont pas attachés au repère local de la poutre (base $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 3$), mais à la direction de la ligne directrice s de la fibre.

Utilisant (69), le tenseur de déformations linéarisé s'écrit :

$$(79) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^b + \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^r$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^b$ est le tenseur des déformations dans la fibre k , qui se dérive à partir du champ de déplacement sous l'hypothèse de continuité (*i.e.* pour la poutre, l'équation (8)). $\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^r$ est le tenseur de déformations qui se dérive à partir du champ de déplacement de glissement (75) en s dirigé selon $\mathbf{t}$. Dans le repère de base $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 3$ de la poutre, les six composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^r$ sont :

$$(80) \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^r\}_k = \{t_i t_j\} \frac{\partial \xi_{rk}}{\partial s} \quad \text{avec : } \{t_i t_j\} = \{t_1 t_1, t_2 t_2, t_3 t_3, t_1 t_2, t_1 t_3, t_2 t_3\}$$

Sous une forme vectorielle condensée regroupant les six composantes du tenseur de déformations linéarisé ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}$), on écrit dans la base ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) :

$$(81) \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_k = \{\boldsymbol{\varepsilon}^b\}_k + \{\boldsymbol{\varepsilon}^r\}_k \quad \text{avec : } \begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_k^b = [\mathbf{B}^b] \{\boldsymbol{\xi}^b\} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_k^r = \{t_i t_j\} \frac{\partial \xi_{rk}}{\partial s} = [\mathbf{B}^r] \{\boldsymbol{\xi}^r\} \end{cases}$$

ou encore :

$$(82) \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_k = \left[[\mathbf{B}^b]_k + [\mathbf{B}^r]_k \right] \{\boldsymbol{\xi}\}$$

La matrice $[\mathbf{B}^b]_k$ est la matrice [6,14] des dérivées des fonctions d'interpolation du champ de déplacement de la poutre avec l'hypothèse de Navier-Bernoulli. La matrice $[\mathbf{B}^r]_k$ est la matrice [6,14] des dérivées des fonctions d'interpolation $\{N(s)\}$ liées au degrés de liberté supplémentaires :

$$(83) \quad [\mathbf{B}^r]_k = \{t_i t_j\} \frac{d}{ds} \{N(s)\}$$

$\{N(s)\}$ est le vecteur {14,1} regroupant les fonctions d'interpolations du champ de déplacement de glissement. Les deux matrices $[\mathbf{B}^b]_k$ et $[\mathbf{B}^r]_k$ sont détaillées en **annexe 2**.

2-3-2-5. Facteur de glissement

Pour décrire l'évolution de l'adhérence à l'interface acier-béton, il est nécessaire de décrire une loi d'interface. Il en existe de variées (*cf. Clément, 1987*).

Ici, pour la modélisation de la précontrainte, deux conditions aux limites à l'interface sont à considérer :

- le glissement libre
- l'adhérence parfaite

Pour prendre en compte ces deux conditions, nous écrivons l'état d'adhérence par rapport à la condition de glissement libre sous la forme :

$$(84) \quad d\mathbf{\epsilon}_{(k)} = d\mathbf{\epsilon}_{(k)}^b + \alpha d\mathbf{\epsilon}_{(k)}^m$$

où $d\mathbf{\epsilon}_{(k)}^m$ est le tenseur incrément de la déformation due à un glissement libre de l'acier. Le facteur α peut s'interpréter comme un facteur de glissement, prenant les valeurs suivantes :

$$(85) \quad \begin{cases} \alpha = 0 & \text{adhérence parfaite} \\ \alpha = 1 & \text{glissement libre} \end{cases}$$

Ce facteur est introduit pour prendre en compte la condition aux limites de la fibre k . Pour l'application à la précontrainte, il varie en fonction du temps : $\alpha = \alpha(t)$ correspondant à des phases de constructions distinctes :

- mise en tension ou, dans le cas de la précontrainte externe : $\alpha = 1$;
- dans le cas de la précontrainte interne, l'injection du mortier correspond à un changement de conditions aux limites à l'interface acier-béton, α varie de $\alpha = 1$ à $\alpha = 0$.

Le facteur de glissement α peut être utilisé pour décrire la détérioration progressive de l'adhérence acier-béton (*i.e.* $\alpha = \alpha(\chi)$, *Magnat, 1993*). Ce cas n'est pas considéré ici.

2-3-2-6. Loi de comportement d'une fibre inclinée

Avec la modélisation géométrique précisée ci-dessus, on suppose, pour la fibre k inclinée :

- H6* : un champ de contrainte uniaxial en s dans la base $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ de la fibre inclinée, et indépendant de la condition de l'adhérence (85) :

$$(86) \quad \forall \alpha \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_u \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$$

Dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ du repère local de la poutre, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ a six composantes, qui s'écrivent sous forme vectorielle :

$$(87) \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \sigma_u \{t_i t_j\}$$

L'hypothèse H6* sur le champ de contraintes remplace dans le cas d'une fibre avec déplacements de glissement l'hypothèse H6 (équation (12)). Dans le cas où la fibre a comme direction $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1$ (donc $t_2 = t_3 = 0$) l'hypothèse (86), conduit à négliger les contraintes de cisaillement dues à la torsion. Comme H6, l'hypothèse H6* conduit à négliger tout effet de confinement sur la fibre inclinée.

Pour déterminer σ_u on utilise une loi de comportement élastoplastique avec un critère de plasticité de Von Mises et un écrouissage isotrope. Utilisant les invariants du tenseur des contraintes, on a, pour la fibre inclinée :

$$(88) \quad \begin{cases} \sigma = \pi(\boldsymbol{\sigma} / 3) = \sigma_u / 3 \\ \tau = \sqrt{\frac{1}{3}} |\sigma_u| \end{cases}$$

Le critère de plasticité de Von Mises avec écrouissage isotrope se met sous la forme :

$$(89) \quad f(\boldsymbol{\sigma}, Z) = \tau - Zk = \sqrt{\frac{1}{3}} |\sigma_u| - Zk \quad \text{avec : } k = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_y$$

σ_y est la limite d'élasticité de l'acier en traction simple et Z le paramètre d'écrouissage.

La relation incrémentale entre $\Delta \varepsilon_u$ et $\Delta \sigma_u$ est obtenue à l'aide de l'équation (38) pour une règle d'écoulement associée :

$$(90) \quad \Delta \varepsilon_u = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} f_{,u}^2 \right) \Delta \sigma_u \quad \text{alors :} \quad \Delta \sigma_u = \frac{EH}{H + E f_{,u}^2} \Delta \varepsilon_u$$

où $f_{,u} = \partial f / \partial \sigma_u$, et

$$(91) \quad \Delta \varepsilon_u = {}^t \{ t_{,i} t_{,j} \} \{ \Delta \varepsilon \}_\kappa = {}^t \{ t_{,i} t_{,j} \} \{ \Delta \varepsilon^b \}_\kappa + \alpha \frac{\partial \Delta \xi_{\gamma_\kappa}}{\partial s}$$

H est le module d'écrouissage. Supposant une relation uniaxiale $\sigma - \varepsilon$ bilinéaire (*figure 2-16*), on a, avec $f_{,u}^2 = 1/3$:

$$(92) \quad H = \frac{E E_t}{3(E - E_t)}$$

où E_t est le module tangent de la courbe $\sigma - \varepsilon$ uniaxiale dans le domaine d'écrouissage. On utilise la distorsion plastique équivalente comme variable d'écrouissage :

$$(93) \quad d\gamma_{\text{eq}}^p = d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_u} d\sigma_u = \sqrt{3} \frac{E - E_t}{E E_t} |d\sigma_u| \quad \text{si : } f = 0 \text{ et } df = 0$$

et l'évolution du paramètre d'écrouissage est donnée par :

$$(94) \quad z = 1 + \frac{E E_t}{\sqrt{3} \sigma_y (E - E_t)} \gamma_{\text{eq}}^p$$

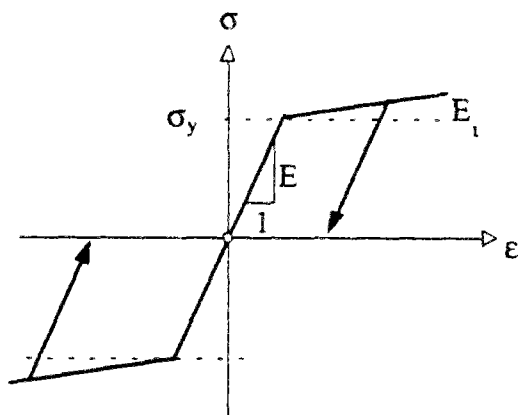


Figure 2-16 :
Courbe uniaxiale bi-linéaire de l'acier

2-3-2-7. Prise en compte du frottement

Dû à la trace courbe d'un câble de précontrainte, un effet de frottement sec "de Coulomb" entre câble et gaine conduit à une perte non-négligeable de précontrainte pendant la phase de mise en tension. Le report de l'effort à l'ancrage induit également une perte de précontrainte (*cf. Chaussin et al., 1992*). Nous montrons ici comment ces phénomènes sont pris en compte dans la formulation proposée.

Le glissement est attaché à la ligne directrice s de la fibre k (équation (75)). Le câble est assimilé à un fil tendu sur un tambour continu convexe de rayon $R(s)$, dans la direction opposée à la normale $\mathbf{n}$ (*figure 2-17*). Le rayon $R(s)$ est supposé connu, et constant le long de l'élément multifibre (*cf. 2-3-2-3*). La force de traction $F(s) = \sigma_u a_k$ est d'une intensité suffisante pour que tout le frottement le long de l'élément soit mobilisé.

Utilisant le frottement sec de Coulomb, on a les relations :

$$(95) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_n(s) = f_n(s) \mathbf{n} = F(s) / R(s) \mathbf{n} \\ \mathbf{f}_t(s) = \pm \tan \varphi f_n(s) \mathbf{t} \end{cases}$$

où $\tan \varphi$ est le coefficient de frottement. La direction de $\mathbf{f}_t(s)$ est toujours opposée à celle du glissement $\Delta \xi_{\alpha}$ dans l'incrément :

$$(96) \quad \mathbf{f}_t(s) = -\text{sgn}(\Delta \xi_{\alpha}) \tan \varphi \frac{\sigma_u a_k}{R(s)} \mathbf{t} = -\text{sgn}(\Delta \xi_{\alpha}) f_{t0}(s) \mathbf{t}$$

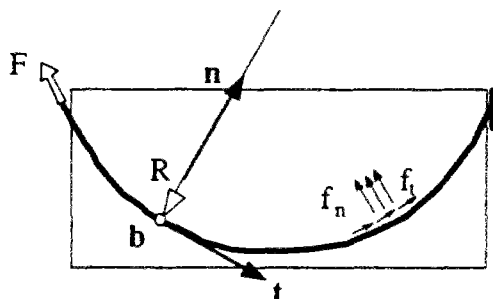


Figure 2-17 :
Analogie fibre k (câble) - fil tendu.

La relation précédente peut être approchée par une relation élastoplastique parfaite uniaxiale, liant f_t et ξ_{α} (Guggenberger, 1992). En respectant les signes opposés de f_t et $\Delta\xi_{\alpha}$, on écrira pour un incrément n :

$$(97) \quad f_t^{(n)} = \text{proj}_{[-f_{t0}, +f_{t0}]}(f_t^{(n-1)} - A \Delta\xi_{\alpha}^{(n)})$$

où $f_t^{(n-1)}$ est la densité linéique de frottement dans l'intervalle $n-1$, $\Delta\xi_{\alpha}^{(n)}$ est l'incrément de glissement dans l'intervalle n , et A un module permettant de passer entre les seuils de frottement de signes différents $(-f_{t0}, +f_{t0})$, illustrés *figure 2-18*. Comme valeur numérique de A , on choisit la valeur du module de cisaillement de la fibre k (i.e.; $A \approx G$).

D'un point de vue pratique, la formulation proposée permet de rendre compte du changement de signe du frottement, dans le cas des poutres précontraintes, lors du report de l'effort du vérin à l'ancrage. Par ailleurs, dans les plupart des applications la direction de ξ_{α} ne change pas, et la densité des forces de frottement est donnée par (96) avec $\text{sgn}(\Delta\xi_{\alpha}) = \alpha \text{sgn}(\xi_{\alpha}) = \text{const}$. Pour ce cas, écrivons (96) sous forme incrémentale :

$$(98) \quad \Delta f_t = -\alpha \text{sgn}(\xi_{\alpha}) \tan \varphi \frac{a_k}{R} \Delta\sigma_u$$

avec a_k la section droite de la fibre inclinée (normale en t). Par l'intermédiaire de la loi de comportement (90), l'incrément Δf_t est lié à l'incrément de déformations par :

$$(99) \quad \Delta f_t = -\alpha \text{sgn}(\xi_{\alpha}) \tan \varphi \frac{a_k}{R} E_{(t)} \Delta\epsilon_u$$

avec $\Delta\epsilon_u$ donné par la relation (91).

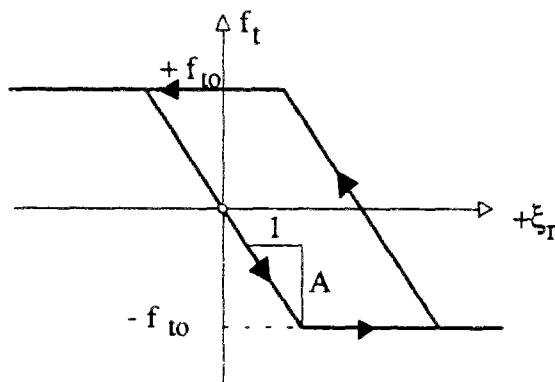


Figure 2-18 :

Modélisation de la direction de frottement par une relation élastoplastique uniaxiale liant à signes opposés le glissement $\Delta\xi_r$ et la force de frottement f_t . (d'après Guggenberger, 1992)

2-3-2-8. Vecteur des efforts intérieurs et matrice de rigidité tangente

On se limite ici à la détermination de la contribution de la fibre k inclinée aux efforts intérieurs et extérieurs de la poutre. On rappelle la formulation faible de l'équation d'équilibre (25) pour le cas statique :

$$(100) \quad \forall \Omega, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_o \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, da = 0$$

Avec cette fois un champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ de la forme :

$$(101) \quad \hat{\mathbf{U}}_k = \hat{\mathbf{U}}_{bk} + \hat{\mathbf{U}}_{\alpha k} \quad \text{avec : } \hat{\mathbf{U}}_{\alpha k} = U_{\alpha k} \mathbf{t}$$

on a, par analogie avec les relations (69), (79) et (84) :

$$(102) \quad \hat{\mathbf{d}}_{(k)} = \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^b + \alpha \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^r$$

Le premier terme de l'équation (100) peut se alors décomposer en deux parties :

$$(103) \quad \mathcal{P}_{int(k)} = - \int_{\Omega_k} \boldsymbol{\sigma}_{(k)} : \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^b \, d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \boldsymbol{\sigma}_{(k)} : \alpha \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^r \, d\Omega_k$$

- La première intégrale représente la contribution de la fibre inclinée à la puissance des efforts généralisés de la poutre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$. En notant $a_k t_1$ la section oblique de la fibre inclinée, perpendiculaire à l'axe de référence de l'élément, à l'aide des relations (81) et (87), on obtient :

$$(104) \quad \{F_{int}^b\}_{(k)} = \int_{\ell_{(x_1)}} \sigma_{\alpha} [B^b]_k \{t_1 t_1\} a_k t_1 \, dx_1$$

- La seconde intégrale représente la contribution "brute" des contraintes dans la fibre k à la puissance de la force généralisée de précontrainte. A l'aide des relations (81) et (87), on obtient :

$$(105a) \quad \{F_{int}^r\}_{(k)} = \int_{\ell_{(x_1)}} \alpha \sigma_u [B^r]_k \{t_1 t_1\} a_k t_1 \, dx_1$$

ou encore, en utilisant la relation (83) :

$$(105b) \{F_{int}^r\}_{(k)} = \int_{\ell_{(x_1)}} \alpha \sigma_u \frac{d}{ds} \{N(s)\}^t \{t_i t_j\} \{t_i t_j\} a_k t_i dx_i = \int_{\ell} \alpha \sigma_u \frac{d}{ds} \{N\} a_k ds$$

On remarque sous cette forme que les composantes du vecteur $\{F_{int}^r\}_{(k)}$ sont définies sur l'abscisse curviligne s . Elles ne sont pas attachées au repère local de la poutre.

En ce qui concerne la contribution des efforts de frottement, on a, en raison de la condition aux limites en forces en $\partial\Omega = \bar{\ell}$ de la fibre k :

$$(106) \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} da = \int_{\ell} f_t \cdot \hat{\mathbf{U}}_k ds = - \int_{\ell} \alpha \operatorname{sgn}(\xi_k) \tan \varphi \frac{\sigma_u a_k}{R(s)} \hat{\mathbf{U}}_k ds$$

qui conduit à :

$$(107) \{F_{frot}^r\}_{(k)} = - \int_{\ell} \alpha \operatorname{sgn}(\xi_k) \tan \varphi \frac{\sigma_u a_k}{R} \{N(s)\} ds$$

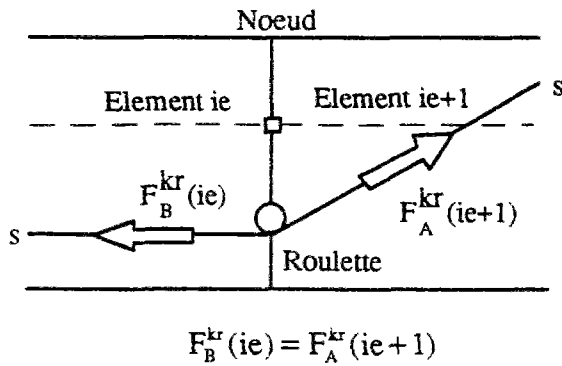
Ces forces sont également définies sur l'abscisse curviligne s de la fibre k .

Pour l'élément poutre multifibre à 14 degrés de liberté, le vecteur des forces nodales $\{F_{nod}\}$ s'écrit :

$$(108) \{F_{nod}\} = \{F_{int}^b\} + \{F_{i+f}^r\} \quad \text{avec :} \begin{cases} \{F_{int}^b\}_i = \{N_{1i}^p, V_{2i}^t, V_{3i}^t, M_{1i}^t, M_{2i}^p, M_{3i}^p, 0\} \\ \{F_{i+f}^r\} = \{F_{int}^r\} + \{F_{frot}^r\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, F_i^{kr}\} \end{cases} \quad i = A, B$$

Les composantes F_i^{kr} sont les forces nodales "nettes" dues à la précontrainte et l'effet du frottement. Elles correspondent aux forces de la précontrainte utilisées dans les approches classiques (*cf.* 2-3-2-2) sous forme d'état de contraintes initiales *connu* pour calculer les efforts équivalents, qui en fait sont les composantes du vecteur $\{F_{int}^b\}$. Ici, les forces de la précontrainte $\{F_{i+f}^r\}$ et les efforts *dit* équivalents $\{F_{int}^b\}$ font partie intégrante de la formulation.

D'un point de vue pratique, la mise en précontrainte d'un câble consiste à imposer un déplacement relatif entre l'acier et le béton, dans la zone d'ancrage. Cette condition aux limites peut être imposée dans les calculs par éléments finis avec les éléments multifibres et la formulation proposée.

**Figure 2-19 :**

Assemblage des forces dans la fibre k au noeud. La fibre inclinée est considérée déviée à chaque noeud par une roulette de dimension infiniment petite. Ceci conduit à la continuité en amplitude des efforts, indépendamment de leur direction.

Les composantes F_i^{kr} sont définies sur l'abscisse curviligne s . Ainsi lors de l'assemblage des vecteur forces entre éléments, ces composantes ne sont pas à transférer dans un repère global. A un noeud de deux éléments, ces forces sont continues en amplitude indépendamment de leur direction (*figure 2-19*).

La matrice de rigidité tangente se dérive à partir de l'équation (28). On note deux sources de non-linéarité dans l'équation (100), d'une part la non-linéarité en matériau constituant la fibre k , d'autre part la nature non-conservative des forces de frottement. Une variation en ξ conduit donc à :

$$(109) \quad \Delta \mathcal{R}_{(k)} \cdot \hat{\mathbf{U}} = - \int_{\Omega_k} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{(k)} : \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^b d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{(k)} : \alpha \hat{\mathbf{d}}_{(k)}^i d\Omega_k + \int_{\partial\Omega} \Delta \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} da$$

où :

$$(110) \quad \int_{\partial\Omega} \Delta \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} da = \int_{\Gamma} \alpha \Delta \mathbf{f}_i \cdot \hat{\mathbf{U}}_{ik} ds$$

et :

$$(111) \quad \begin{cases} \Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \sigma_u \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \\ \Delta \mathbf{f}_i = -\text{sgn}(\xi_{ik}) \tan \varphi \frac{a_k}{R} \Delta \sigma_u \mathbf{t} \end{cases}$$

L'exploitation des deux premiers termes en $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ de l'équation (109) conduit à :

$$(112) \quad [\mathbf{K}] = [\mathbf{K}^{bb}] + \alpha([\mathbf{K}^{br}] + [\mathbf{K}^{rb}]) + \alpha^2[\mathbf{K}^{rr}] \quad \text{avec : } [\mathbf{K}^{mn}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^m][\mathbf{C}][\mathbf{B}^n] d\Omega$$

où $[C]$ est la matrice $[6,6]$ du comportement élastoplastique. En raison de la définition du glissement selon la direction de la tangente t de l'abscisse curviligne s d'une fibre, la matrice $[K^n]$ n'est pas à transférer dans le repère global lors de l'assemblage de la matrice de rigidité totale. Les matrices $[K^{br}]$ et $[K^{rb}]$ sont transférées une seule fois, tandis que $[K^{bb}]$ l'est de manière habituelle (2 rotations), (cf. **annexe 2**).

Prenant en compte également le terme de frottement (110) de l'équation (109), la matrice de rigidité tangente devient :

$$(113) \quad [K] = [K^{bb}] + \alpha([K^{br}] + [K^{rb}]) + \alpha^2[K^n] + \alpha[K^{bf}] + \alpha^2[K^r]$$

Ces composantes sont détaillées en **annexe 2**.

2-3-2-9. Récapitulatif

Rappelons les hypothèses posées pour l'intégration des déplacements relatifs au sein d'un élément poutre classique constitué des fibres superposées :

- Hypothèse des petites perturbations (*cf.* 2-2-1-1) :

H1 : hypothèse des transformations infinitésimales. Cette hypothèse conduit ici à négliger les effets de suspension du deuxième ordre dus au fléchissement de la poutre.

H2 : hypothèse des petits déplacements.

- Hypothèses sur la déformation des poutres (ϵ_b , $b=bernoulli$). Ces hypothèses jouent ici le rôle de l'hypothèse de continuité (cas de l'adhérence parfaite, *cf.* 2-3-2-2) :

H3 : hypothèse de Navier-Bernoulli,

H4 : torsion de Saint Venant,

H5 : hypothèses sur l'axe de centre de torsion et sur la rigidité à la torsion.

- Hypothèse sur l'état de contraintes dans la fibre inclinée (*cf.* 2-3-2-6) :

H6* : champ de contraintes uniaxial dirigé selon t de l'abscisse curviligne s de la fibre k .

- Hypothèses concernant l'interface et le glissement :

H7 : zone d'interface petite (*cf.* 2-3-2-2),

H8 : le vecteur de déplacement relatif est dirigé selon la direction t de l'abscisse curviligne s de la fibre k (*cf.* 2-3-2-4).

La formulation proposée permet d'intégrer de manière explicite un glissement au sein de tout élément fini classique. En effet, il suffit de remplacer dans les équations précédentes la matrice des dérivées de fonctions interpolations $[B^b]$ de l'élément poutre ($b=Bernoulli$) par celles propres à l'élément choisi et dérivées à partir de l'hypothèse de continuité. Nous avons également utilisé la formulation présentée pour des éléments barres en 2D et en 3D. Ces développements, effectués par analogie à partir de la définition (68) du champ de déplacement prenant en compte des déplacements relatifs (glissement), ne sont pas précisés ici.

2-3-3. Commentaires

Les extensions de la formulation multifibre permettent ainsi de prendre en compte

- les effets non-linéaire en géométrie (grands déplacements, déformations infinitésimales),
- des glissements entre fibres.

au sein d'un élément poutre classique constitué des fibres superposées.

En particulier, avec l'extension de la formulation prenant en compte de manière explicite le glissement entre fibres, nous disposons d'une base pour étendre la formulation au cas de la détérioration progressive de l'adhérence acier-béton. Pour cela, une loi d'interface propre à l'échelle du problème concerné doit être définie. Une première proposition à développer est proposée par *Magnat* (1993).

Outre les deux extensions présentées, la formulation multifibre a été étendue pour prendre en compte l'effet du confinement (*Flidner*, 1993), avec un formalisme identique à celui développé pour le glissement (déplacements relatifs normal à l'axe de référence). L'enrichissement de la cinématique de l'élément apparaît ainsi à la base des extensions possibles de la formulation multifibre, pour prendre en compte en particulier :

- le cisaillement dû aux efforts tranchants,
- la reprise des efforts tranchants par les armatures transversales,

Ces extensions devront être guidées par le même objectif : développer un outil numérique efficace pour l'analyse non-linéaire en matériau et en géométrie des poutres tridimensionnelles. L'application possible pourra alors être plus large que celle envisagée initialement.

2-4. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre un outil numérique, l'élément multifibre, "adapté" à l'analyse numérique des structures à poutre en béton armé et précontraint. Compte tenu de la complexité tant géométrique que matérielle des problèmes à traiter, nous avons été amené à poser des hypothèses parfois assez grossières.

En ce qui concerne la prise en compte des non-linéarités en matériau, la modélisation multifibre proposée permet l'utilisation de lois de comportement triaxiales quelconques. En particulier, avec les lois de comportement développées au chapitre 1, des calcul des structures en béton armé et béton précontraint sous chargements

- monotone croissante,
- cyclique,
- dynamique (sismique).

sont possibles. L'outil numérique présenté, l'élément multifibre, comporte un nombre de degrés de liberté minimum : il permet l'analyse par éléments finis de structures complètes, avec un temps de calcul raisonnable.

La formulation proposée en grands déplacements permet d'envisager l'application de la modélisation multifibre aux problèmes non-linéaires géométriques et matériels des poutres :

- flambement de poteaux en béton armé
- déversement de poutres en béton armé
- etc.

L' "adéquation" de la modélisation multifibre proposée à ces problèmes ne pourra s'effectuer qu'au vu de résultats obtenus lors d'études de structures réelles, et en comparant ces résultats avec l'expérience. Ceci fait l'objet du chapitre 4.

Avant de passer à ces applications, nous présentons dans le chapitre qui suit quelques aspects algorithmiques et l'intégration des lois de comportement du chapitre 1 et de l'élément multifibre dans un code de calcul par éléments finis industriel : CESAR-LCPC.

3 - MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DANS CESAR-LCPC

3-0. INTRODUCTION

Les modèles de comportement élastoplastique avec et sans endommagement développés au chapitre 1 et l'élément multifibre développé au chapitre 2 ont été mis en oeuvre dans le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. Dans ce chapitre, nous indiquons les méthodes de résolution numérique employées pour des problèmes divers (statique, dynamique), et les éléments nécessaires à la mise en oeuvre numérique de nos développements au sein d'un code de calcul de taille industrielle : CESAR-LCPC (*Humbert, 1989*).

Une fois ces développements intégrés dans un tel code de calcul, il convient de vérifier que les équations posées sont résolues numériquement sans erreur. Pour les lois de comportement, on peut comparer, pour des états de contraintes donnés (compression simple et biaxiale, traction simple, cisaillement pur, etc. cf. 1-3-3-3) les résultats calculés manuellement aux résultats numériques obtenus à partir d'une résolution par le programme. En ce qui concerne la validation des éléments finis (poutre multifibre, barres avec glissement), la vérification s'effectue par comparaison avec des solutions analytiques ou semi-analytiques (poutres élastiques, réversibilité des mouvements de corps rigide des poutres élastiques en grands déplacements (cf. *Yang, 1993*), effet hyperstatique dans le cas des poutres précontraintes sans et avec frottement, etc.). Ces tests de vérification ne sont pas présentés ici. La vérification est à distinguer de la justification : validation de la modélisation ("adéquation"). Celle-ci s'effectue par comparaison entre les résultats obtenus par le calcul et les valeurs mesurées sur des ouvrages réels. Cette validation fait l'objet du chapitre 4.

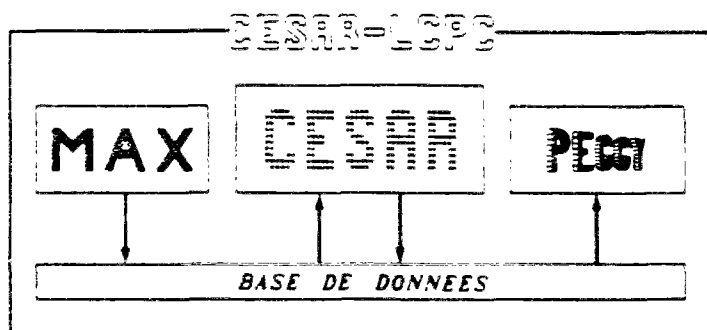
Après avoir brièvement présenté la structure du code CESAR-LCPC, nous précisons les interventions particulières effectuées pour intégrer les lois de comportement et l'élément multifibre développés. Ensuite, pour familiariser le lecteur avec l'utilisation pratique de nos lois de comportement (données, résultats, etc.), nous présentons un premier exemple simple, un tube épais sous pression interne calculé avec nos différentes lois de comportement.

3-1. CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS FINIS : CESAR-LCPC

Le code de calcul CESAR-LCPC est un programme général de calcul utilisant la méthode des éléments finis, particulièrement adapté à la résolution des problèmes de génie civil et de génie industriel : calcul de structures, mécanique des sols et des roches, thermique, hydrogéologie (Humbert, 1989).

CESAR-LCPC désigne l'ensemble formé par le pré-processeur MAX, par le programme de calcul par éléments finis CESAR et par le post-processeur PEGGY, qui communiquent entre eux par l'intermédiaire d'une base de données caractéristique de l'étude effectuée (figure 3-1). Notre développement se situe uniquement au niveau du programme de calcul par éléments finis CESAR.

Figure 3-1 :
Organisation de CESAR-LCPC :
(d'après : Humbert, 1989)



MAX : pré-processeur, outil graphique interactif qui permet la discrétisation de l'ouvrage étudié en éléments finis.

CESAR : programme de calcul par éléments finis qui effectue la résolution numérique du problème posé.

PEGGY : post-processeur, outil graphique interactif qui permet de visualiser les résultats du calcul effectué par CESAR.

Le programme de calcul CESAR effectue la résolution numérique du problème posé en offrant à l'utilisateur un éventail de modules d'exécution spécialisés pour un type de problème donné (élasticité linéaire, élastoplasticité, lois d'interface, dynamique, thermique transitoire, diffusion, consolidation,...). Ces modules comprennent des algorithmes adaptés au problème à résoudre.

En particulier, nous avons travaillé sur le module MCNL (Mécanique de Comportement Non-Linéaire) et l'avons étendu au cas d'un chargement dynamique: le module DYNL (DYnamique Non-Linéaire).

Les modules font appel à la bibliothèque des familles d'éléments finis du programme.

En particulier, nous y avons intégré les éléments finis de type "déplacements" suivants :

- l'élément poutre multicouche 2D à 2 noeuds (6 DDL);
- l'élément poutre multifibre 3D à 2 noeuds (12 DDL);
- l'élément poutre multifibre 3D à 2 noeuds avec glissement d'interface (14 DDL);
- l'élément barre 2D avec glissement à 2 noeuds (6 DDL);
- l'élément barre 3D avec glissement à 2 noeuds (8 DDL).

Les familles des éléments finis font appel à la bibliothèque des lois de comportement, où le schéma d'intégration locale de la loi de comportement est précisé (actualisation des contraintes, des variables d'état, etc.). C'est à ce niveau que les lois de comportement développées au chapitre I sont à intégrer :

- le critère de Willam-Warnke à 3 paramètres sans et avec écrouissage;
- le critère de Willam-Warnke modifié à 4 paramètres;
- le modèle élastoplastique avec endommagement.

Les interventions aux différents niveaux de CESAR seront précisées dans la suite (3.3) après une brève présentation des méthodes de résolution numérique utilisées.

3-2. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

Vu la nature non-linéaire des problèmes posés, la résolution ne peut s'effectuer qu'en utilisant des méthodes numériques, qui, par nature, sont approchées. Les méthodes numériques à employer concernent d'une part, la discrétisation en temps pour des problèmes dynamiques, et d'autre part les méthodes itératives de résolution dans un incrément donné (pas de temps).

Pour les problèmes dynamiques, nous avons choisi l'algorithme de Newmark. Dans le cas de chargements statiques, cette discrétisation en temps correspond à un processus incrémental de chargement. De plus, une méthode d'intégration locale des lois de comportement non-linéaires est à préciser.

3-2-1. Discrétisation temporelle du problème

Rappelons les inconnues, les données et les équations d'un problème dynamique à traiter dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, avec prise en compte de la non-linéarité du matériau par des lois de comportement élastoplastiques avec endommagement. Ces lois sont supposées quasi-statiques.

- **inconnues :**

$$\xi(\mathbf{x}, t), \dot{\xi}(\mathbf{x}, t), \ddot{\xi}(\mathbf{x}, t), \varepsilon^p(\mathbf{x}, t), \chi(\mathbf{x}, t), \zeta(\mathbf{x}, t), \phi^p(\mathbf{x}, t), \sigma(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega$$

- **données :**

- conditions initiales à l'instant t_0 dans Ω :

$$\xi(\mathbf{x}, t_0), \dot{\xi}(\mathbf{x}, t_0), \ddot{\xi}(\mathbf{x}, t_0), \varepsilon^p(\mathbf{x}, t_0), \chi(\mathbf{x}, t_0), \zeta(\mathbf{x}, t_0), \phi^p(\mathbf{x}, t_0), \sigma(\mathbf{x}, t_0)$$

- forces massiques dans Ω :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 (\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) - \gamma_0(\mathbf{x}, t))$$

- conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^d, \quad \xi(\mathbf{x}, t) = \xi^d$$

- **équations :**

- compatibilité géométrique :

$$(1) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \text{grad} \boldsymbol{\xi})$$

- équation d'équilibre :

$$(2) \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_o (\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}_o) + \rho_o \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$$

- équation d'état (quasi statique) :

$$(3) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{C}(\phi^p) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

- règles d'écoulement et d'écrouissage :

$$(4) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\chi} = \dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } f = df = 0 \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour résoudre numériquement l'équation d'équilibre, le temps est discrétisé par une suite (t_n) :

$$t_n = t_o + \sum_{i=1}^n \Delta_i t$$

avec $\Delta_n t$ l'incrément de temps entre les instants t_{n-1} et t_n . Le problème à l'instant t_{n-1} , supposé résolu, fixe les conditions initiales pour le problème à résoudre dans l'intervalle $\Delta_n t$. Nous avons alors :

- **inconnues :**

$$\Delta_n \boldsymbol{\xi}, \Delta_n \dot{\boldsymbol{\xi}}, \Delta_n \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \Delta_n \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta_n \chi_n, \Delta_n \zeta, \Delta_n \phi^p, \Delta_n \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega$$

- **données :**

- conditions initiales à l'instant t_{n-1} dans Ω :

$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_{n-1}, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{n-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^p, \chi_{n-1}, \zeta_{n-1}, \phi_{n-1}^p, \boldsymbol{\sigma}_{n-1}$$

- variation des forces massiques pendant $\Delta_n t$ dans Ω :

$$\Delta_n \mathbf{F} = \rho_o (\Delta_n \mathbf{F}_o - \Delta_n \boldsymbol{\gamma}_o)$$

- conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\Delta_n \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \Delta_n \mathbf{T}^d, \quad \Delta_n \boldsymbol{\xi} = \Delta_n \boldsymbol{\xi}^d$$

- **équations :**

- compatibilité géométrique :

$$(5) \quad \Delta_n \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad} \Delta_n \boldsymbol{\xi} + {}^t \text{grad} \Delta_n \boldsymbol{\xi})$$

- équation d'équilibre :

$$(6) \quad \text{div} \Delta_n \boldsymbol{\sigma} + \rho_o (\Delta_n \mathbf{F} - \Delta_n \boldsymbol{\gamma}_o) + \rho_o \Delta_n \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$$

- équation d'état :

$$(7) \quad \Delta_n \sigma = C(\phi_{n-1}^p + \Delta_n \phi^p) : (\Delta_n \varepsilon - \Delta_n \varepsilon^p)$$

- règles d'écoulement et d'écrouissage :

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta_n \varepsilon^p = \Delta_n \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma_{n-1} + \Delta_n \sigma, \zeta_{n-1} + \Delta_n \zeta) \\ \Delta \chi = \Delta_n \lambda \frac{\partial h}{\partial \sigma}(\sigma_{n-1} + \Delta_n \sigma, \zeta_{n-1} + \Delta_n \zeta) \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \Delta_n \lambda \geq 0 & \text{si } f(\sigma_{n-1} + \Delta_n \sigma, \zeta_n + \Delta_n \zeta) = 0 \\ \Delta_n \lambda = 0 & \text{si } f(\sigma_{n-1} + \Delta_n \sigma, \zeta_n + \Delta_n \zeta) < 0 \end{cases}$$

On remarque, avec l'expression (7) de l'équation d'état, que dans le cas d'un matériau élastoplastique avec endommagement, le tenseur de comportement élastique dépend explicitement de la valeur de la variable d'endommagement $\phi_n^p = \phi_{n-1}^p + \Delta_n \phi^p$, donc de la solution du problème. Ceci pose d'importants problèmes numériques, quand un point de charge se trouve à la frontière d'élasticité, entraînant des évolutions élastoplastiques et donc une variation des caractéristiques élastiques. En raison de ces difficultés numériques, nous utilisons :

$$(9) \quad \Delta_n \sigma = C(\phi_{n-1}^p) : (\Delta_n \varepsilon - \Delta_n \varepsilon^p)$$

La variable d'endommagement, la porosité plastique, est uniquement actualisée à la fin du processus itératif d'un pas de temps à partir des valeurs de ε^p obtenues après convergence :

$$(10) \quad "D_n" = \phi_{n-1}^p = \beta \operatorname{tr} \varepsilon_{n-1}^p$$

En raison des non-linéarités en matériau (déformations plastiques, variables d'écrouissage, endommagement) à l'intérieur de l'intervalle $\Delta_n t$, une méthode itérative devra être employée pour résoudre le problème.

3-2-2. Méthode d'intégration locale de la loi de comportement

Ici, on utilise un schéma explicite d'intégration de la loi de comportement, mise en oeuvre dans le module MCNL (*Mestat*, 1993). La solution obtenue à l'itération $k-1$ est considérée comme condition initiale de l'itération k . Compte tenu de l'approximation (9), l'actualisation des contraintes s'effectue à partir de :

$$(11) \quad \delta^k \varepsilon = \frac{1}{2} (\text{grad} \delta^k \xi + {}^t \text{grad} \delta^k \xi) \quad \text{tel que :} \quad \Delta_n^k \xi = \sum_{iter=1}^{iter=k} \delta^{iter} \xi$$

où $\delta^k \xi$ est l'accroissement en déplacement dans l'itération k du pas de temps $\Delta_n t$. L'équation d'état à l'itération s'écrit :

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta^k \sigma &= C(\phi^p_{n-1}) : (\delta^k \varepsilon - \delta^k \varepsilon^p) \\ &= \delta^k \sigma^{EL} - C(\phi^p_{n-1}) : \delta^k \varepsilon^p \end{aligned} \quad \text{tel que :} \quad \Delta_n^k \sigma = \sum_{iter=1}^{iter=k} \delta^{iter} \sigma$$

et les règles d'écoulement et d'écrouissage :

$$(13) \quad \begin{cases} \delta^k \varepsilon^p = \delta^k \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma_n^{k-1} + \delta^k \sigma^{EL}, \zeta_n^{k-1}) \\ \delta^k \chi = \delta^k \lambda \frac{\partial h}{\partial \sigma}(\sigma_n^{k-1} + \delta^k \sigma^{EL}, \zeta_n^{k-1}) \end{cases} \quad \text{tel que :} \quad (\Delta_n^k \varepsilon^p, \Delta_n^k \chi = \sum_{iter=1}^{iter=k} (\delta^{iter} \varepsilon^p, \delta^{iter} \chi))$$

avec :

$$(14) \quad \begin{cases} \delta^k \lambda \geq 0 & \text{si } f(\sigma_n^{k-1} + \delta^k \sigma^{EL}, \zeta_n^{k-1}) = 0 \\ \delta^k \lambda = 0 & \text{si } f(\sigma_n^{k-1} + \delta^k \sigma^{EL}, \zeta_n^{k-1}) < 0 \end{cases}$$

3-2-3. Algorithme de Newmark

Pour l'intégration dans le temps, on utilise un schéma pas à pas de type Newmark sous la forme (cf. Bathe, 1982) :

$$(15) \quad \begin{cases} \Delta_n^k \xi = \Delta_n t \dot{\xi}_{n-1} + (\Delta_n t)^2 \left(\frac{1}{2} \ddot{\xi}_{n-1} + a \Delta_n^k \ddot{\xi} \right) \\ \Delta_n^k \dot{\xi} = \Delta_n t \left(\ddot{\xi}_{n-1} + b \Delta_n^k \ddot{\xi} \right) \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \Delta_n^k \ddot{\xi} = \ddot{\xi}_n^k - \ddot{\xi}_{n-1} \\ \Delta_n^k \dot{\xi} = \dot{\xi}_n^k - \dot{\xi}_{n-1} \\ \Delta_n^k \xi = \Delta_n^{k-1} \xi + \delta^k \xi \end{cases}$$

ou encore :

$$(16) \quad \begin{cases} \ddot{\xi}_n^k = a_0(\Delta_n^{k-1}\xi + \delta^k\xi) - a_2\dot{\xi}_{n-1} - a_3\ddot{\xi}_{n-1} \\ \dot{\xi}_n^k = a_1(\Delta_n^{k-1}\xi + \delta^k\xi) - a_4\dot{\xi}_{n-1} - a_5\ddot{\xi}_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} a_0 = 1/(a(\Delta_n t)^2) & a_3 = 1/2a - 1 \\ a_1 = b/(a\Delta_n t) & a_4 = b/a - 1 \\ a_2 = 1/(a\Delta_n t) & a_5 = \Delta_n t(1 - b/2a) \end{cases}$$

a et b sont des constantes. Pour $a=0,25$ et $b=0,5$, la stabilité numérique inconditionnelle du schéma d'intégration en temps est assurée (Bathe, 1982).

L'équation incrémentale d'équilibre matricielle obtenue en utilisant (16) avec un processus itératif de type Newton-Raphson (cf. 2-2-3-4) est de la forme :

$$(17) \quad [\hat{K}]_n^k \{\delta^k \xi\} = \{R\}_n^{k-1}$$

$[\hat{K}]_n^k$ est la matrice de rigidité globale effective, et $\{R\}_n^{k-1}$ le vecteur résidu effectif, calculés par :

$$(18) \quad \begin{cases} [\hat{K}]_n^k = a_0[M] + [K]_n^k \\ \{R\}_n^{k-1} = \{F_{ext}\}_n - \{F_{int}\}_n^{k-1} - [M] \left\{ a_0(\{\Delta\xi\}_n^{k-1}) - a_1\{\dot{\xi}\}_{n-1} - a_2\{\ddot{\xi}\}_{n-1} \right\} \end{cases}$$

$[M]$ est la matrice de masse et $[K]_n^k$ la matrice de rigidité (tangente) du système étudié. $\{F_{int}\}_n^{k-1}$ est le vecteur des efforts intérieurs nodaux, calculés à partir des contraintes locales actualisées avec le schéma précisé au paragraphe 3-2-2. Les effets d'amortissement visqueux ont été négligés.

Ces méthodes seront utilisées en particulier pour les calculs dynamiques non-linéaires de structures discrétisées par éléments poutres multifibres.

3-3. MISE EN OEUVRE DANS CESAR :

3-3-1. De "MCNL" à "DYNL"

Rappelons d'abord la structure du module MCNL (Mécanique de Comportement Non-Linéaire), qui constitue le point de départ de notre intervention au niveau algorithmique, pour ensuite intégrer l'algorithme de Newmark.

Le *tableau 3-1* présente la structure algorithmique du module MCNL de la version standard de CESAR.

Le *tableau 3-2* présente l'introduction du schéma d'intégration de type Newmark dans CESAR, issu de l'extension du module MCNL (*tableau 3-1*) au cas du comportement non-linéaire dynamique : module DYNL (Dynamique Non-Linéaire).

3-3-2. Critères de convergence

Les critères de convergence utilisés sont les critères habituels portant sur les rapports de normes de déplacements, de normes de second membre (résidu) et les rapports de travail au cours d'une itération (*cf. Mestat, 1993*):

$$(19) \quad \begin{cases} \|\{\delta^k \xi\}\| < \epsilon_d \|\{\xi_n^k\}\| \\ \|\{\text{Résidu}\}^k\| < \epsilon_r \|\{\text{Résidu}\}_n^{k=0}\| \\ \|\{\text{Résidu}\}^k \{\delta^k \xi\}\| < \epsilon_t \|\{\text{Résidu}\}_n^{k=0} \{\xi_n^k\}\| \end{cases}$$

Les tolérances $\epsilon_d, \epsilon_r, \epsilon_t$ sont des données du calcul en général prises égales à 0,1%.

Quelques schémas d'accélération de la convergence existent dans CESAR (méthode sécante, "line search", D-F-P, *e.g. Mestat, 1993*). Nous les utiliserons pour des calculs avec des éléments massifs.

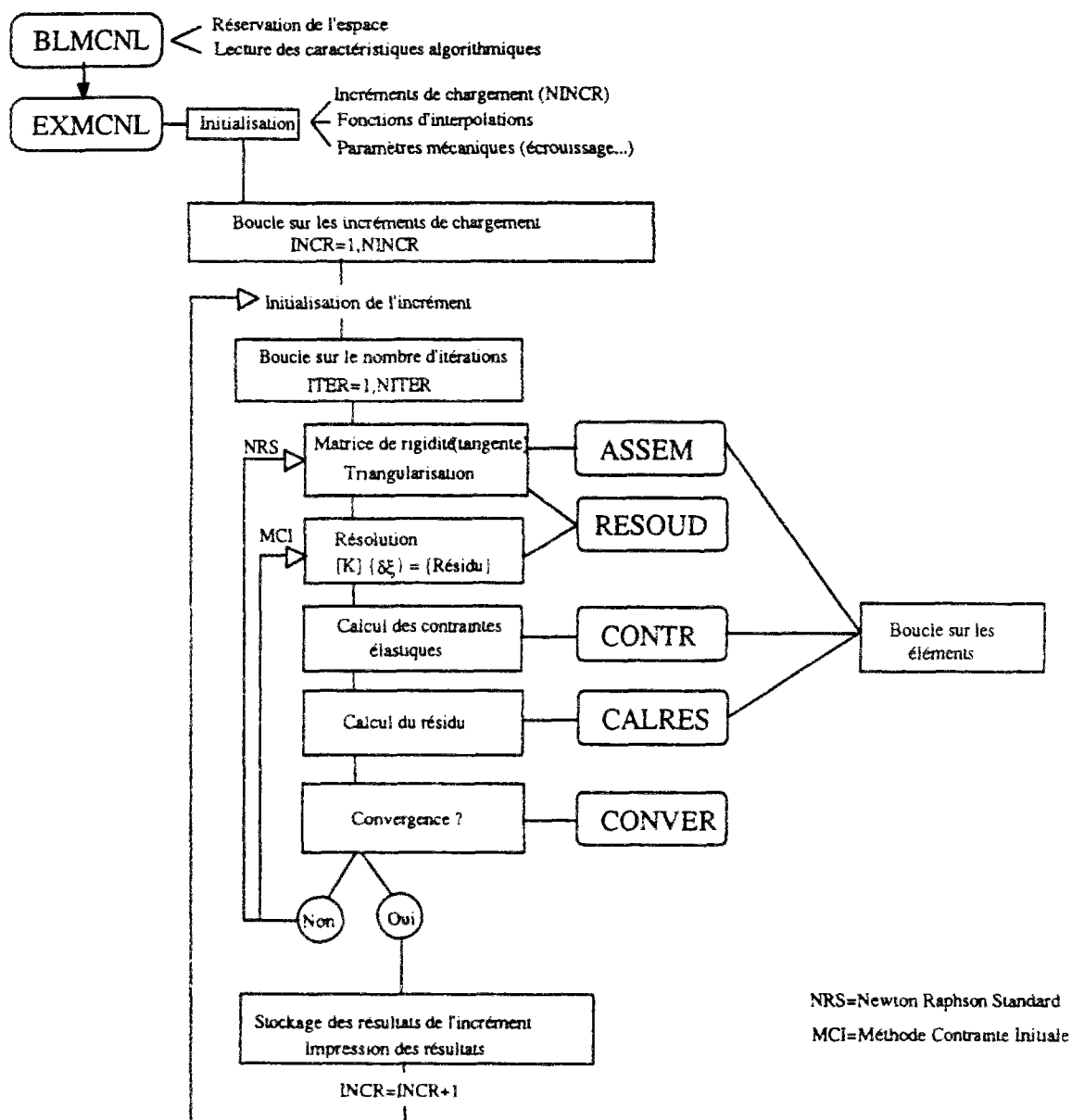


Tableau 3-1 : Structure de MCNL (d'après Mestai, 1992)

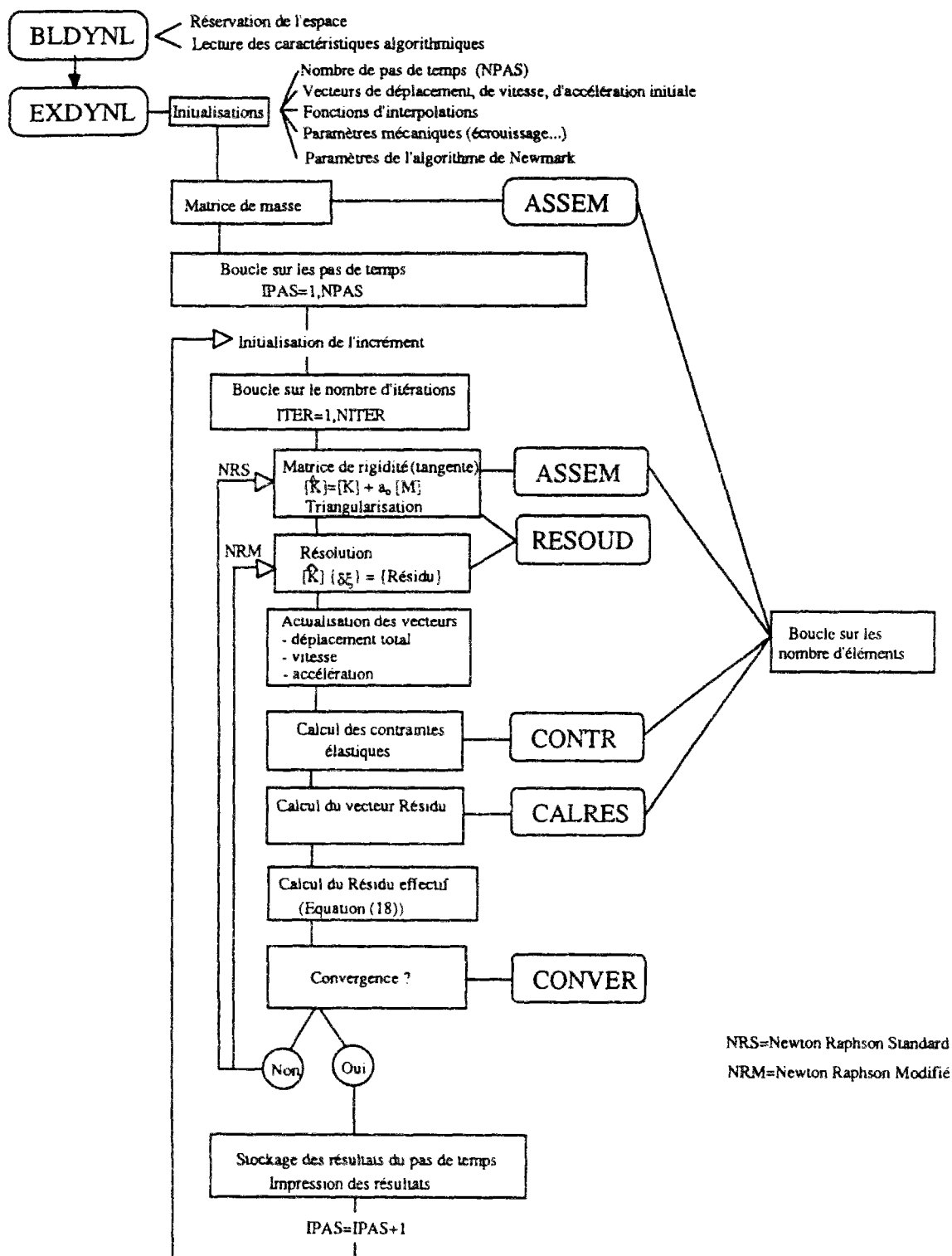


Tableau 3-2 : Structure de DYNL : Extension du module MCNL au cas dynamique.
Schéma itératif de résolution au sein d'un schéma d'intégration de type Newmark.

Notre expérience avec les éléments multifibres a montré qu'une méthode tangente avec actualisation de la matrice de rigidité à chaque itération est adaptée pour le calcul non-linéaire en statique ou en dynamique. Lorsque le nombre de degrés de liberté est petit, le temps de calcul pour l'actualisation de la matrice tangente reste raisonnable. Cependant, les performances de l'algorithme pourraient être améliorées en utilisant des schémas d'accélération comme ceux habituellement utilisés pour les éléments massifs.

Enfin, plus la discrétisation multifibre (-couche) est régulière (surface a_k des fibres ou couches équivalentes), plus la convergence est rapide.

3-3-3. Calcul du vecteur des efforts intérieurs

Rappelons la procédure de calcul du vecteur des efforts intérieurs implantée dans CESAR pour les éléments massifs (*Mestat*, 1992). Le *Tableau 3-3* présente les zones d'intervention pour l'intégration des éléments multifibres (sous-programmes RSPTNL, CTPTNL, POUDEF, LAGAC4).

3-3-4. Bibliothèque des lois de comportement

Les lois de comportement développées au chapitre 1 sont intégrées dans la bibliothèque des lois de comportement de CESAR. Elles sont accessibles par les modules MCNL et DYNL. Les interventions effectuées ont consisté (*Tableau 3-4*) à mettre en oeuvre le schéma d'intégration locale de la loi de comportement élastoplastique avec endommagement (*cf.* 3-2-2, sous-programme CENPL1). Les modèles élastoplastiques de Willam-Warnke à 3 et 4 paramètres (CRIT46, CRIT48) font appel à un schéma d'intégration déjà existant dans CESAR (CPLAS1). La structure présentée permet le couplage de tout modèle de plasticité (CRIT...) avec tout modèle d'endommagement (CRID...).

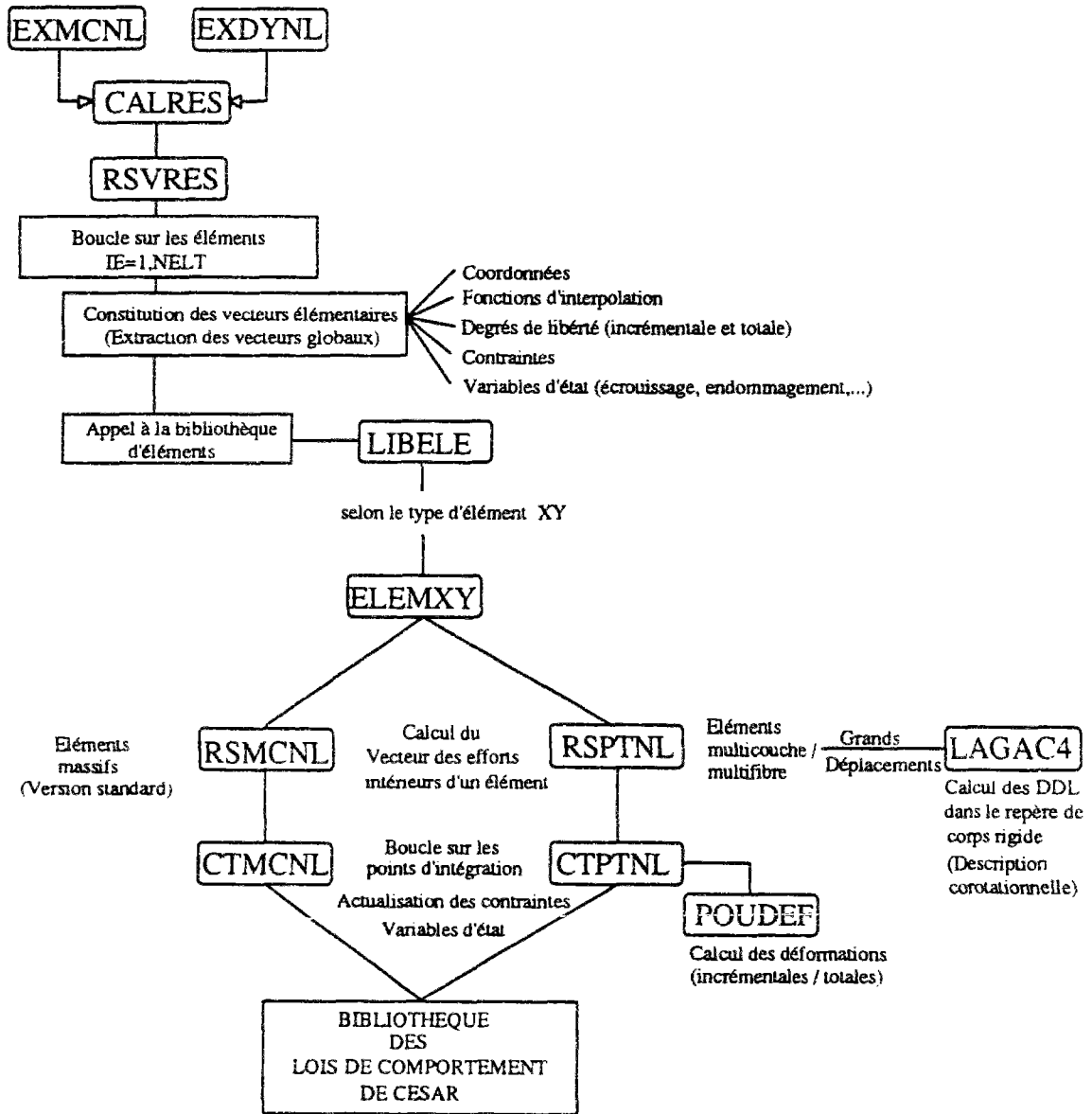


Tableau 3-3 : Calcul du vecteur des efforts intérieurs dans CESAR.

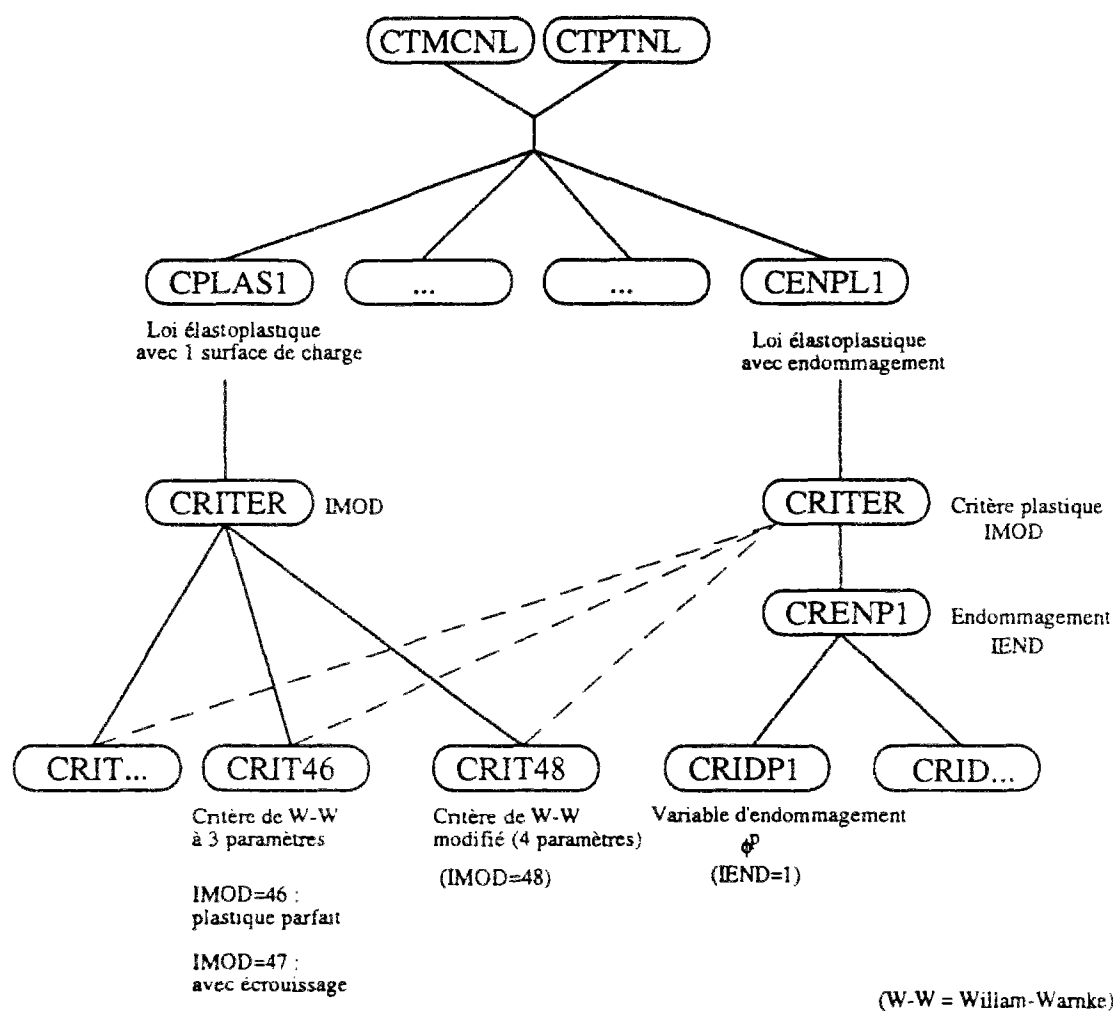


Tableau 3-4 : Intégration de la loi élastoplastique et de la loi élastoplastique avec endommagement dans la bibliothèque des lois de comportement de CESAR.

3-4. TEST NUMERIQUE

Pour familiariser le lecteur avec les lois de comportement élastoplastiques, mises en oeuvre dans CESAR, nous présentons ci-dessus les résultats obtenus avec les différents modèles sur un exemple simple : le tube épais. Cet exemple a été calculé en déformation plane et en géométrie tridimensionnelle (*figure 3-2*). Il fait partie des tests utilisés pour la vérification de la programmation dans le code CESAR. Les résultats obtenus avec une discrétisation similaire et avec des méthodes d'accélération différentes étaient identiques (au sens numérique).

L'exemple est présenté *figure 3-2*. Seuls les résultats en déformation planes (*figure 3-2b*) seront détaillés.

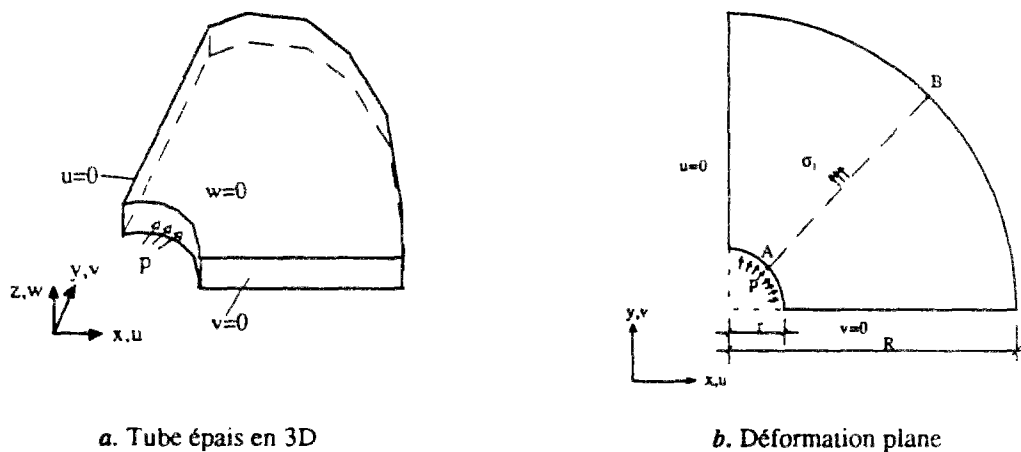


Figure 3-2 : Exemple du tube épais

- **Géométrie et modélisation par éléments finis :**

Un quart du "cercle" de rayon $r/R = 0,1$ (*figure 3-2b*) est modélisé avec 400 éléments massifs à 8 noeuds (MBQ8). Le maillage est concentrique avec un taux de propagation de 1,1 vers l'extérieur.

- **Caractéristiques du matériau**

- Caractéristiques élastiques : Module d'Young $E = 30000 \text{ MPa}$, Coefficient de Poisson $\nu = 0,2$.

- Le *tableau 3-5* précise les caractéristiques du matériau et les paramètres des différents modèles de comportement utilisés. Ces valeurs sont des valeurs typiques qu'on utilisera dans le chapitre qui suit. Un calcul avec un modèle de Drucker-Prager sans écrouissage et une règle d'écoulement associée a également été effectué.

Modèles	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Drucker-Prager (DP)	Angle de frottement : $\varphi = 30^\circ$ Cohésion : $c = 3 \text{ MPa}$	
WW 3 - élastoplastique parfait (WW3)	Résistances : $\sigma_t = 3 \text{ MPa} *$ $\sigma_c = 30 \text{ MPa} *$ $\sigma_{bc} = 34,5 \text{ MPa} *$	$f_c = 1,3037$ $f_t = 0,7578$ $\rho_o = 3,2857 \text{ MPa}$
WW3 - avec écrouissage (WW3-ECR)	Résistances : (idem)*	(idem) $\delta = 0,5236 (30^\circ) *$ $z_o = 0,75 *$ $\kappa = 1000 *$
WW modifié (WW-mod)	Résistances : (idem)* Triaxiale : $\tau_{\text{max-u}} = 2,4473 \sigma_c *$ $\sigma_{\text{max-u}} = -3,9 \sigma_c *$ $\theta = 0^\circ *$	$f_c = 1,3509$ $f_t = 0,8036$ $\rho_o = 3,1162 \text{ MPa}$ $p_{cr} = 251,2 \text{ MPa}$ $\phi_o^p = -0,01\% *$ $\beta = 1,0 *$ $\kappa = 1000 *$

Tableau 3-5 : Caractéristiques matérielles et paramètres des modèles.

(* indique que les valeurs sont à choisir par l'utilisateur. Les autres paramètres sont calculés à partir de caractéristiques matérielles)

- **Conditions aux limites (figure 3-2b) :**

- en forces : pression uniformément répartie à l'intérieur du tube
(incrémentation : $\Delta p = 3 \text{ MPa}$)
- en déplacements : condition de symétrie.

- **Méthode itérative**

L'exemple est calculé avec une méthode itérative de contraintes initiales (*Mestat*, 1992). Des calculs comparatifs avec des méthodes d'accélération de la convergence (D-F-P) ont également été effectués. Les résultats obtenus sont identiques à ceux présentés ci-dessous.

- **Quelques résultats pour $p = 15 \text{ MPa}$**

La *figure 3-3* présente, sur une coupe radiale, la variation de la contrainte principale σ_1 (contrainte tangentielle) pour les différents modèles avec la solution élastique du problème. Les pics des courbes correspondent aux limites de la zone plastique, définie à partir de l'intérieur du tube. La différence entre les modèles WW3 et WW-mod d'une part, et les modèles WW3+ECR et DP d'autre part, est uniquement due à l'angle de dilatance utilisé (*cf. Tableau 3-5*). Il convient donc de prendre garde à ce paramètre du modèle. La *figure 3-4* présente les isovaleurs des déformations plastiques (normes du tenseur des déformations plastiques) pour les cas de WW3+ECR et de WW-mod.

Le but de ce exemple est de familiariser le lecteur avec l'utilisation pratique des lois de comportement développées et mises en oeuvre dans CESAR. On n'a pas cherché ici à valider la modélisation choisie du béton choisie en tant qu'un matériau élastoplastique (sans ou avec endommagement) à l'échelle de la structure. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

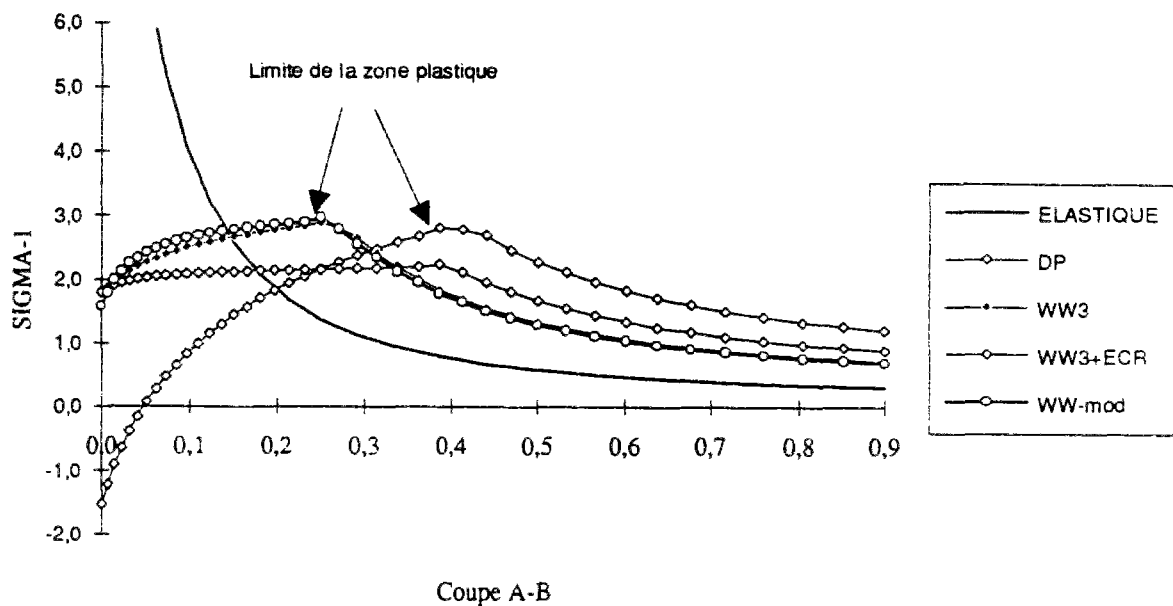


Figure 3-3 : Variation de la contrainte principale σ_1 à un niveau de charge de $p = 15$ MPa

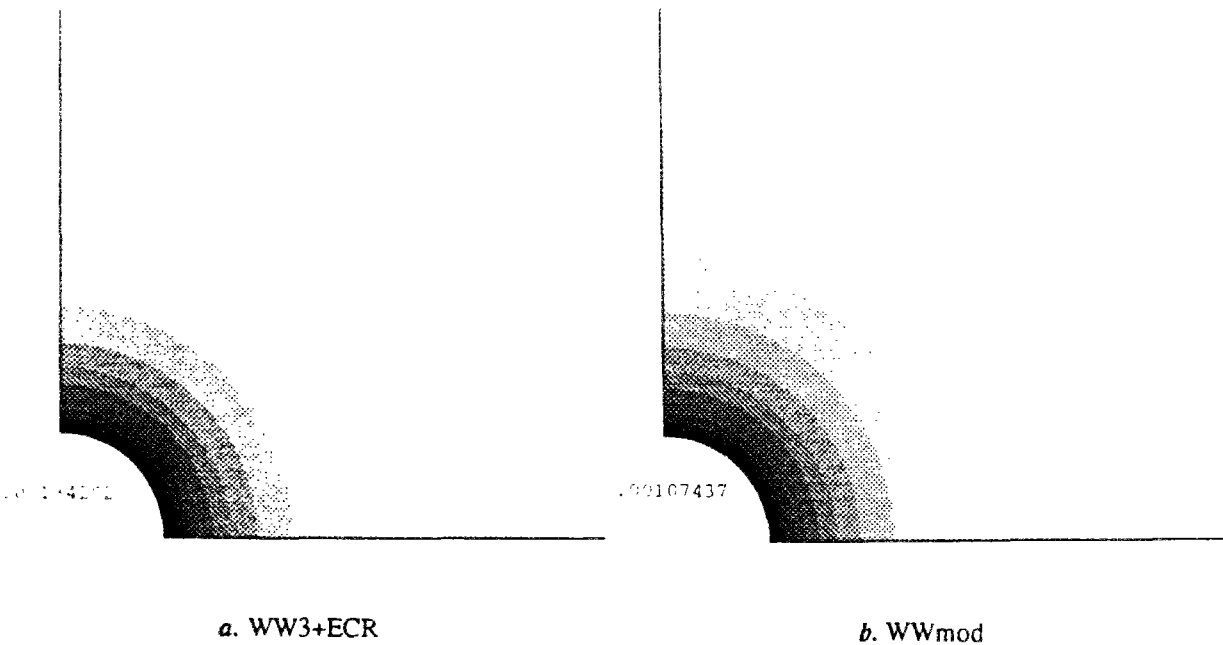


Figure 3-4 : Exemple de sortie graphique de CESAR : isovaleurs de normes du tenseur de déformations plastiques.

3-5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré comment les lois de comportement élastoplastique (avec endommagement) développées au chapitre 1 et l'élément multifibre du chapitre 2 ont été mis en oeuvre dans le code de calcul CESAR-LCPC. Le schéma d'intégration en temps et la méthode de résolution itérative choisie ont été précisés. A l'aide d'un exemple simple, nous avons montré l'utilisation pratique de ces lois de comportement élastoplastiques, avec les valeurs caractéristiques des paramètres des différents modèles.

Toutefois, il convient de souligner, que dans notre approche nous sommes restés dans le cadre de la mécanique des milieux continus "classiques". Les problèmes liés à la localisation de la fissuration ne sont pas traités (*de Borst et al.*, 1993).

Dans le chapitre qui suit, des applications sont présentées, ce qui permet d'illustrer le caractère opérationnel de la mise en oeuvre numérique des développements effectués.

4- EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMERIQUES

4-0. INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre quelques exemples d'applications. Ces exemples vont des structures à poutres simples type portique plan sous chargement statique jusqu'au portique 3D multi-étagé sous chargement sismique. Le choix des exemples est guidé par deux objectifs complémentaires : (1) valider notre approche à l'échelle des structures en béton armé et précontraint, afin de (2) situer les outils élaborés dans la pratique courante des ingénieurs.

Nous commençons avec des exemples bidimensionnels :

- portiques plans sous chargements statiques et cycliques
- flambement d'un poteau,
- portiques multi-étagés sous chargements dynamiques.

avant de passer aux applications tridimensionnelles :

- déversement des poutres de grande hauteur,
- poutres isostatique et hyperstatique précontraintes (précontrainte externe et interne),
- structure tridimensionnelle à portiques multi-étagés sous chargement sismique.

Le *tableau 4-1* donne un résumé de ces exemples d'application.

La comparaison des résultats numériques avec les résultats d'essais permet de déterminer les limites des outils proposés (aide au concepteurs de structures en béton armé et précontraint) et de fixer le domaine d'application vis-à-vis de l' "adéquation" des modèles pour les problèmes à traiter.

EXEMPLE	NON-LINEAIRE		CHARGEMENT			REFERENCE
	MAT.	GEOM.	STAT.	CYCL.	DYN.	
4.1. Portique plan	x		x	x		•
4.2. Flambement poteau	x	x	x			•
4.3. Portique plan multi-étagé	x				x	(•)
4.4. Déversement	x	x	x			•
4.5. Poutres précontraintes (iso- et hyperstatique)	x		x			(•)
4.6. Structures tridim. à portiques multi-étagés					x	

Tableau 4-1 : Résumé des exemples
 ("x" indique quel problème est numériquement traité)

• Résultats d'essais
 (•) Calculs de référence

4-1. EXEMPLE : PORTIQUE PLAN

L'exemple qui suit présente des résultats de calculs d'un portique en béton armé sous chargement statique et cyclique. Le portique, présenté *figure 4-1*, a été testé par *Bertero et McClure* (1964) sous chargement statique. Cet exemple, très souvent analysé dans la littérature (par exemple *Holzer et al.*, 1979), permet de se familiariser avec la modélisation semi-globale : la discrétisation du système en poutres et la discrétisation de la section en couches (2D) ou en fibres (3D). L'avantage d'une telle modélisation a été discuté au paragraphe 2-1-3.

4-1-1. Géométrie, modélisation, chargements

4-1-1-1. Géométrie et modélisation par éléments poutre multicouche

Le portique, illustré *figure 4-1* est modélisée en 30 éléments poutre multicouche. La section est discrétisée en 22 couches, dont 20 en béton et 2 en acier. On rappelle que le champ des contraintes dans les couches est supposé uniaxial.

4-1-1-2. Chargement statique, cyclique

- chargement statique : le portique est chargé avec des forces ponctuelles : une force horizontale à la travée, une force verticale en demi-travée (*figure 4-1a*). Le chargement augmente d'une façon monotone croissante jusqu'à la ruine (*figure 4-2a*). Le charge ultime obtenue lors de l'expérience est $F = 7,6 \text{ kN}$.
- chargement cyclique : le portique est chargé avec une seule force horizontale, dont les cycles de charges sont illustrés *figure 4-2b*. Pour ce cas de charge, il n'existe pas de résultats d'essais. Le charge horizontale maximale appliquée au portique a été choisie très proche de la charge ultime *numérique* de ruine ($F_{\text{ultime(horz)}} \approx \pm 6,5 \text{ kN}$). L'exemple est utilisé ici pour mettre en évidence "effet du dommage" sur le comportement cyclique de la structure.

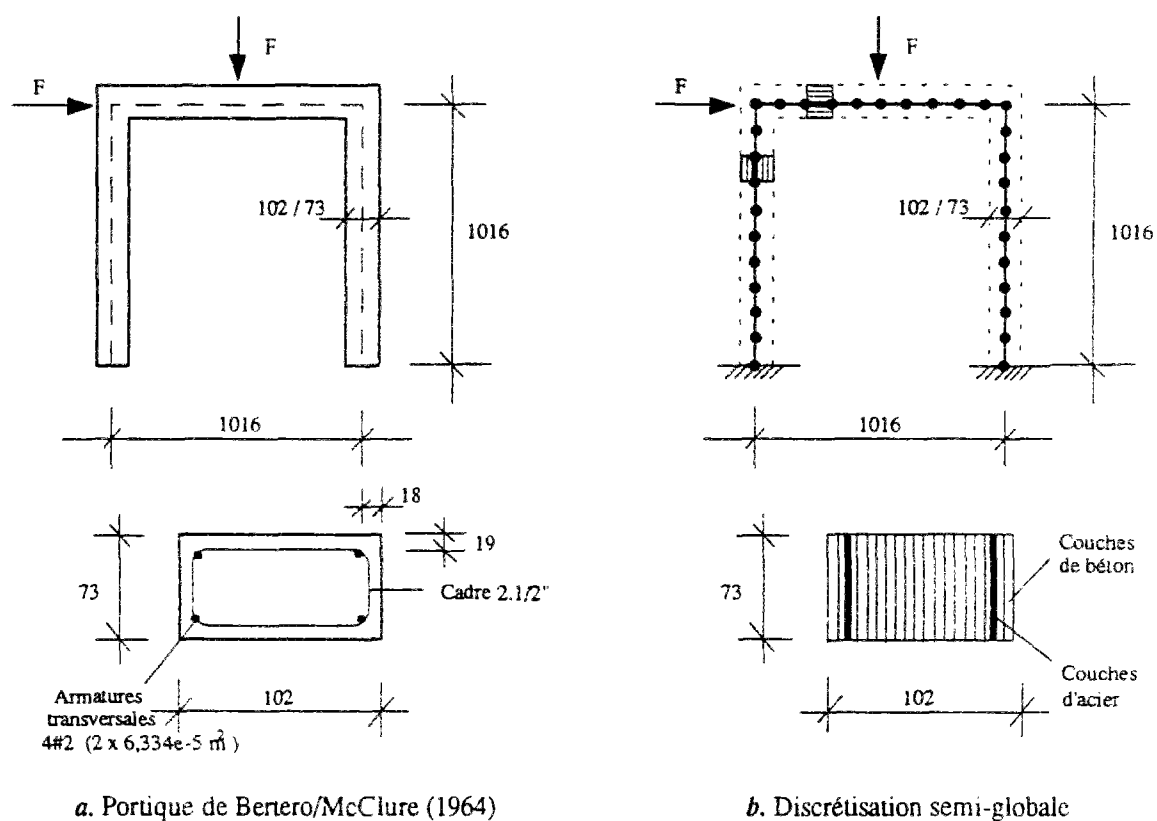


Figure 4-1 : Portique BA. Géométrie -Modèle

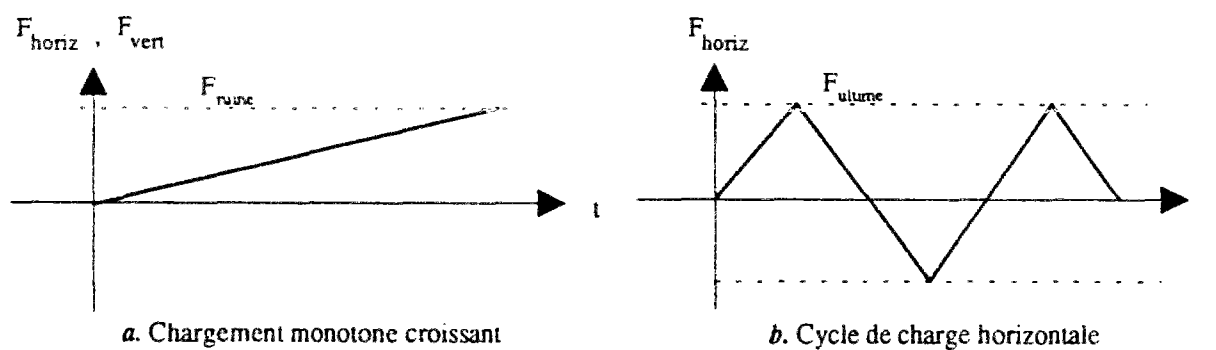


Figure 4-2 : Cas de chargement étudiés

4-1-2. Lois du comportement uniaxiales, caractéristiques matérielles

4-1-2-1. Béton : loi uniaxiale élastoplastique avec endommagement

Comme loi de comportement, on utilise la loi de comportement élastoplastique avec endommagement (ENDO). En ce qui concerne la partie plastique, le modèle Willam-Warnke couplé (*i.e.* WW3+ECR pour la partie d'écrouissage, WW modifié pour la partie adoucissante) est appliqué.

Compte tenu de l'état uniaxial des contraintes dans les couches, on utilise l'équation d'état (116)₁ sous forme uniaxiale :

$$(1) \quad d\sigma = d\sigma_{11} e_1 \otimes e_1 = E(\phi^p)(d\epsilon_{11} - d\epsilon_{11}^p) e_1 \otimes e_1$$

avec :

$$(2) \quad E(\phi^p) = \frac{4}{3}(1-\nu)(G_o - \Delta G(\phi^p)) + (K_o + \Delta K(\phi^p))(1-2\nu) \quad \text{et} : \begin{cases} G_o = E_o / 2(1+\nu) \\ K_o = E_o / 3(1-2\nu) \end{cases}$$

Pour le champ des contraintes uniaxiales (1), les règles d'écoulement et d'écrouissage s'écrivent de manière explicite :

$$(3) \quad \text{WW3 + ECR + ENDO} : \begin{cases} d\epsilon_{11}^p = d\lambda (\frac{1}{\sqrt{3}} \text{sgn}(\sigma_{11}) + \delta) / 3 \\ d\gamma_{eq}^p = d\lambda \\ d\phi^p = d\lambda \beta \delta \end{cases}$$

$$\text{avec} : \begin{cases} d\lambda = (\frac{4}{3\sqrt{3}} \text{sgn}(\sigma_{11}) + f_{c,t}) d\sigma_{11} / 3H & : \text{si } f(\sigma_{11}, z) = 0, df = 0 \\ d\lambda = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(4) \quad \text{WW-modifié + ENDO} : \begin{cases} d\epsilon_{11}^p = d\lambda (\frac{1}{\sqrt{3}} \text{sgn}(\sigma_{11}) + \frac{f_{c,t}}{p_{cr}} (\frac{1}{3} \sigma_{11} + p_{cr} - p_o)) / 3 \\ d\phi^p = d\lambda \beta f_{c,t} (\sigma_{11} + p_{cr} - p_o) / p_{cr} \end{cases}$$

$$\text{avec} : \begin{cases} d\lambda = (\frac{4}{3\sqrt{3}} \text{sgn}(\sigma_{11}) + \frac{f_{c,t}}{p_{cr}} (\frac{1}{3} \sigma_{11} + p_{cr} - p_o)) d\sigma_{11} / 9H & : \text{si } f(\sigma_{11}, p_{cr}) = 0, df = 0 \\ d\lambda = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les caractéristiques et paramètres pour le béton sont précisés *Tableau 4-2*.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E_o = 23000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2^*$	
WW 3 - avec écrouissage (WW3-ECR)	Résistances : $\sigma_c = 23 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 1 \text{ MPa}^*$ $\sigma_{bc} = 1,15 \sigma_c^*$	$\delta = 0,1745 (10^\circ)^*$ $z_o = 0,75^*$ $\kappa = 1000^*$
WW modifié (WW-mod)	Résistances : (idem) Triaxiale : $\tau_{\max-u} = 2,4473 \sigma_c^*$ $\sigma_{\max-u} = -3,9 \sigma_c^*$ $\theta = 0^\circ$	$\phi_o^p = -0,01\%^*$ $\beta = 1,0^*$ $\kappa = 1000^*$
Endommagement	Modules à la ruine : $K_{ult} / K_o = 0,5^*$ $G_{ult} / G_o = 0^*$	$\kappa = 1000^*$

Tableau 4-2 : Caractéristiques matérielles du béton et paramètres du modèle
(* indique que la valeur est prise par défaut)

4-1-2-2. Acier

Comme loi de comportement de l'acier d'armature, on utilise une loi élastoplastique parfaite de Von Mises sous forme uniaxiale (précisée au paragraphe 2-3-2-6) avec une résistance en traction simple $\sigma_y = 332 \text{ MPa}$. Le module d'Young est $E = 206843 \text{ MPa}$.

4-1-3. Quelques résultats

4-1-3-1. Cas de chargement statique

Dans le calcul le chargement est incrémenté en incréments de forces $\Delta F = \Delta F_{\text{horiz}} = \Delta F_{\text{vert}} = 0,375 \text{ kN}$.

La *figure 4-3* présente la courbe force F - déplacement horizontal du point d'application de la charge horizontale, à comparer avec les résultats d'essais. Les résultats montrent une bonne concordance dans le domaine initial, suivie par une phase où le modèle surestime la rigidité du système. Le charge ultime numérique $F_{\text{calcul}} = 7,5 \text{ kN}$ est très proche de celle obtenue lors de l'expérience $F_{\text{calcul}} = 7,6 \text{ kN}$.

Le calcul a été également effectué avec une discrétisation en poutres plus grossière (18 éléments au lieu de 30). Les résultats, non présentés ici, sont très proches de ceux obtenus avec 30 éléments (écarts inférieures à 1%).

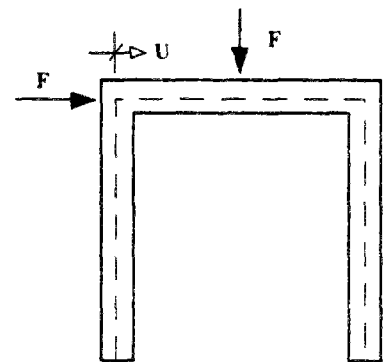
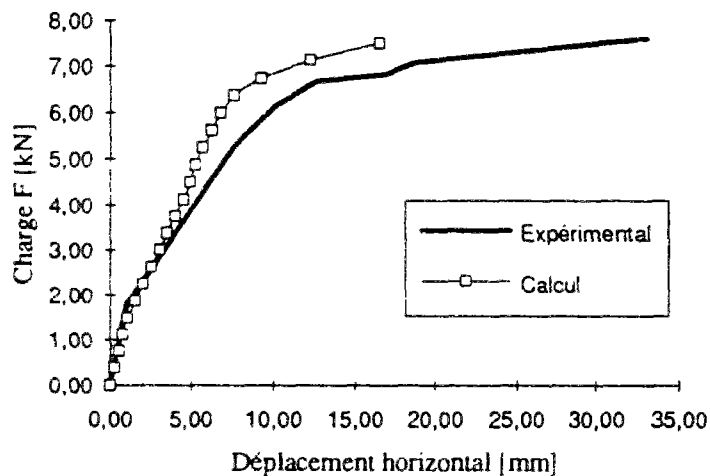


Figure 4-3 : Courbe Charge horizontale - Déplacement horizontale

4-1-3-2. Cas de chargement cyclique

Dans ce calcul le chargement est incrémenté en incréments de forces $\Delta F = \Delta F_{\text{honz}} = \pm 0.5 \text{ kN}$.

La *figure 4-4* présente un des résultats obtenus sous la forme de courbes moment fléchissant M - déplacement horizontal du point d'application de la charge F appliqué. On note :

- des boucles hystérésis dues d'une part aux évolutions élastoplastiques dans le béton, et d'autre part à la plastification locale des aciers (chargement proche de la ruine),
- l'effet du dommage (dégradation) représenté par une réduction de l'aire des boucles hystérésis, entre le premier cycle et le second,
- une stabilisation des boucles d'hystérésis à partir du deuxième cycle.

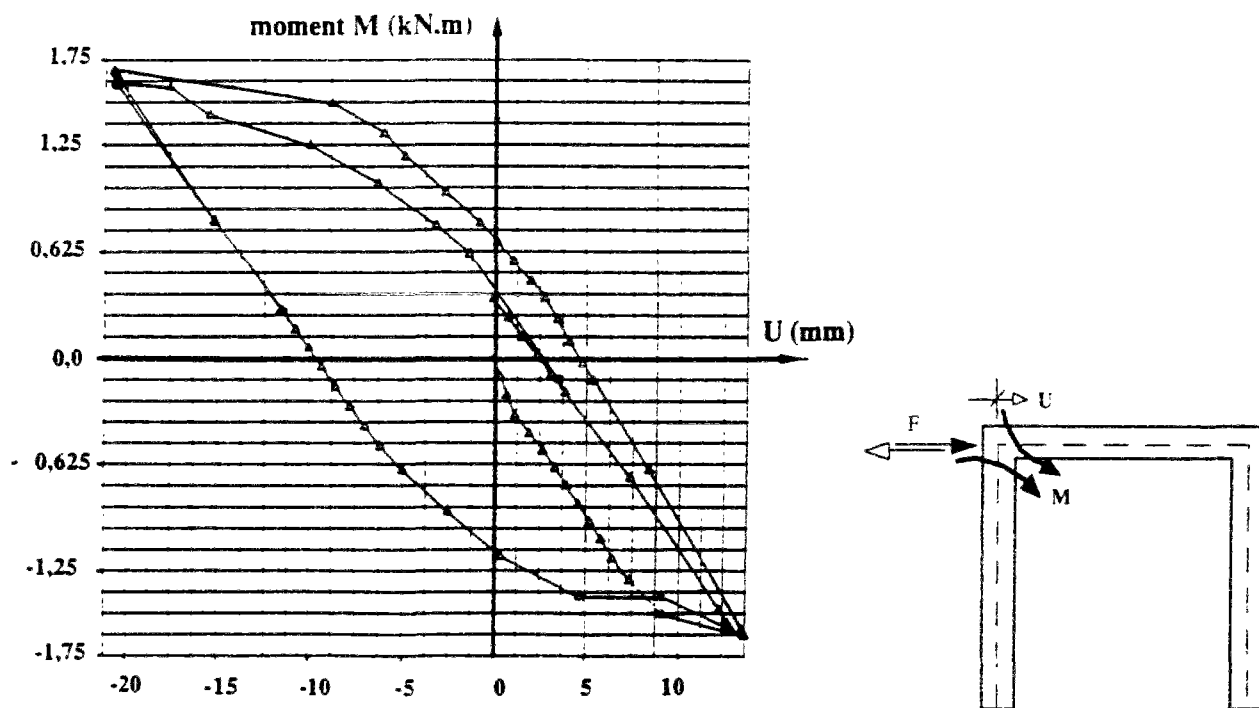


Figure 4-4 : Courbe moment fléchissant - déplacement horizontal u

4-1-4. Commentaires

L'utilisation des éléments multicouches avec l'hypothèse d'un champ des contraintes uniaxiales permet de tester l' "adéquation" des lois de comportement triaxiales à l'échelle de la structure, en termes de courbes forces - flèches, ou en termes de dégradation des boucles d'hystérésis. Avec les hypothèses posées sur la déformation des poutres, les résultats obtenus pour le cas de chargement statique apparaissent satisfaisants.

L'effet du dommage, sous forme d'une réduction de l'aire des boucles d'hystérésis à l'échelle globale des structures en béton armé, est un phénomène bien connu (*cf. Del Toro, 1988*). Dans les essais, cette dégradation se stabilise après un nombre important de cycles de charge. Cette stabilisation correspond à une échelle microscopique à un phénomène de type fatigue aux lèvres de fissures lors de cycles d'ouverture et refermeture des fissures. Notre modèle d'endommagement ne modélise pas de manière explicite, à l'échelle macroscopique, cette refermeture des fissures (évolution élastoplastique lors du déchargement, *cf. 1-2-5-3*). Ceci peut être à l'origine de la stabilisation prématurée des boucles d'hystérésis, obtenue par le calcul.

4-2. EXEMPLE : FLAMBEMENT D'UN POTEAU

L'exemple qui suit, le flambement d'un poteau, est issu d'une grande série d'expériences effectuée par *Fouré* (1978) pour étudier le flambement des poteaux en béton armé sous des effets divers (fluage, retrait, etc.) Ici, on ne traite que le cas du flambement "instantané", c'est à dire le flambement dû uniquement à une charge (excentrée) appliquée. Le poteau traité est le poteau II-1 de *Fouré*.

4-2-1. Données et modélisation

4-2-1-1. Géométrie et modélisation

Considérons un poteau en béton armé avec une section rectangulaire ($b/h = 200\text{mm}/150\text{mm}$), encastré à une extrémité et libre à l'autre, et une longueur $L=2,25\text{m}$. La section est armée par 4 armatures longitudinales de diamètre 12mm (*figure 4-5*).

Le poteau est discrétisé en 10 éléments multifibres et la section en 34 fibres, dont 30 en béton et 4 en acier.

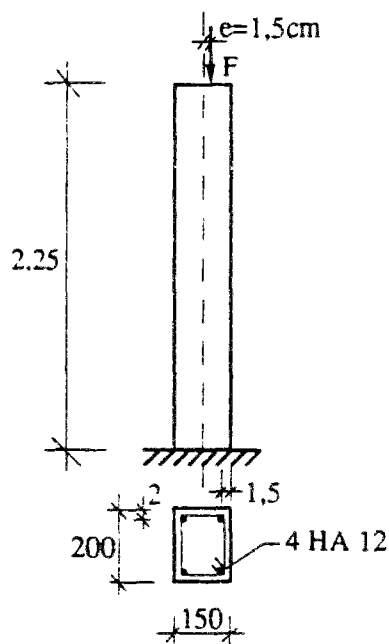


Figure 4-5 :

Poteau de *Fouré*, géométrie et système de chargement.

4-2-1-2. Matériaux

- Béton : Loi de comportement élastoplastique WW-couplé. Les caractéristiques et paramètres pour le béton de cet exemple sont précisés *Tableau 4-3*.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 34000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2^*$	
WW 3 - avec écrouissage (WW3-ECR)	Résistances : $\sigma_c = 39 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 2,4 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1,15\sigma_c^*$	$\delta = 0,1745 (10^\circ)^*$ $z_o = 0,75^*$ $\kappa = 1000^*$
WW modifié (WW-mod)	Résistances : (idem) Triaxiale : $\tau_{\max-u} = 2,4473\sigma_c^*$ $\sigma_{\max-u} = -3,9\sigma_c^*$ $\theta = 0^\circ$	$\phi_o^p = -0,01\%^*$ $\beta = 1,0^*$ $\kappa = 1000^*$

Tableau 4-3 : Caractéristiques matérielles du béton et paramètres du modèle

- Acier : loi élastoplastique parfait de Von-Mises : $E = 200000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3^*$, $\sigma_y = 486 \text{ MPa}$,
déformation de rupture des armatures : $\varepsilon_{\text{rupture}} = 10\%$ (!)*

(* indique que la valeur est prise par défaut)

4-2-1-3. Chargement

Le poteau est chargé avec une force axiale d'excentricité e telle que $e/h = 1,5 \text{ mm}/150 \text{ mm}$ (*figure 4-5*). La charge mesurée de flambement est $F_{\text{ultime}} = 453 \text{ kN}$. Dans le calcul, on modélise la force axiale excentrée par une force axiale F et un moment fléchissant $M = Fe$. Le poids propre du poteau est négligé. 20 incréments de chargement sont utilisés dans le calcul.

4-2-2. Résultats

La *figure 4-5* présente un résultat de l'analyse numérique sous forme d'une courbe charge appliquée - déplacement horizontal en tête du poteau. On note que la ruine se produit dès que les armatures commencent à se plastifier. La ruine est fragile. D'un point de vue algorithmique, le calcul diverge.

La *figure 4-5* présente également les résultats d'un calcul non-linéaire en géométrie (matériaux élastiques). La forme courbée est uniquement due aux effets du deuxième ordre. La comparaison avec le calcul non-linéaire en matériau et en géométrie permet de déterminer le seuil à partir duquel le dommage (c'est à dire des déformations permanentes) apparaît à l'échelle de la structure. Ce seuil de dommage (limite d'élasticité globale) déterminé numériquement ($F / F_{\text{ruine}} \approx 0,4 \dots 0,5$) est comparable à celui de l'essai (début de la fissuration).

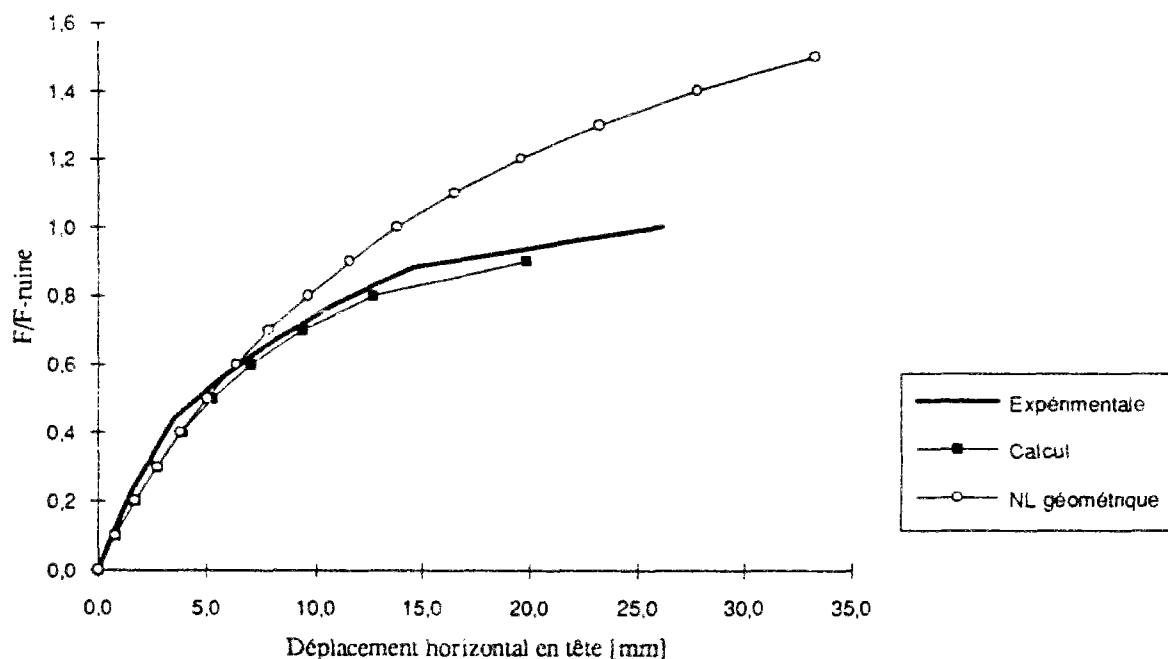


Figure 4-5 : Courbe Charge - Flèche

4.3. EXEMPLE : PORTIQUE PLANE MULTI-ETAGE - STRUCTURE ISPRA

Nous présentons dans ce paragraphe les premiers éléments d'une justification des développements présentés. Il s'agit de l'étude d'un bâtiment, avec système porteur en portiques multi-étagés, sous chargement sismique : la structure ISPRA. L'exemple est tiré de la contribution du LCPC au sein d'un groupe de recherche de GRECO Géomatériaux¹ (Mazars, 1992) au programme européen de recherche : *Cooperative Research on the seismic response of reinforced concrete structures* (Carvalho et al., 1992). La structure étudiée a été mise en place pour un essai à l'échelle 1:1 au mur de réaction du centre commun européen à ISPRA (Italie).

Le but de ce programme de recherches coordonnées est de développer des méthodes de dimensionnement sismiques en Europe. Les résultats présentés, qui font partie de la contribution française du GRECO Géomatériaux (Mazars et al., 1992), sont des études dynamiques non-linéaires avant essais.

L'étude effectuée est décomposée en 2 parties :

- Etude du comportement dynamique de la structure plane (portique 4 étages).
- Etude de la réponse de la structure plane sous chargement sismique.

La géométrie et la modélisation de la structure sont d'abords présentées. Nous montrons par la suite quelques résultats des calculs.

¹ GRECO Géomatériaux (sols, bétons, roches) = Groupement de REcherches COordonnées

4-3-1. Données et modélisation

La structure "ISPRA" est une structure à quatre étages (*figure 4-6*). A chacun des niveaux une dalle repose sur un réseau de poutres croisées, qui transmettent les charges à 9 poteaux. Le contreventement de la structure est assuré par portiques. Les poteau central a une section plus importante ($b/h = 45\text{cm}/45\text{cm}$) que les poteaux périphériques ($b/h = 40\text{cm}/40\text{cm}$). La structure sera testée au centre commun de recherches de la communauté européenne à Ispra (Italie) sous chargement sismique (mur de réaction) dans le plan de symétrie de la structure, comme indiqué *figure 4-6*.

La structure béton armé d'Ispra a été dimensionnée suivant la réglementation européenne EC8 ².

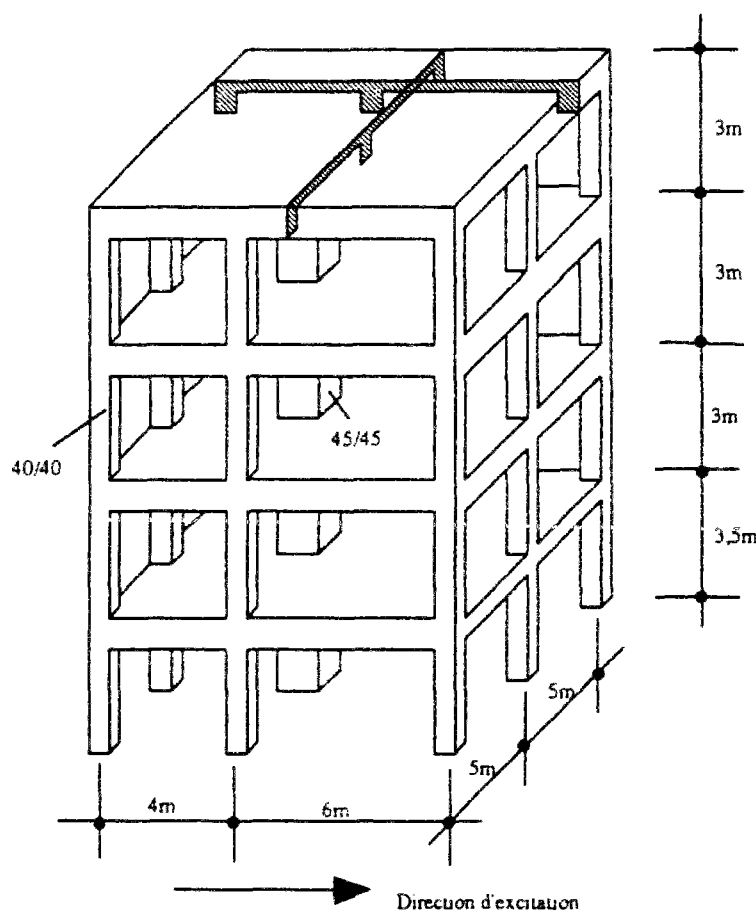


Figure 4-6 :
Structure en béton armé "ISPRA"

² EC8 = Eurocode No. 8 : Règles unifiées communes pour les constructions en zones sismiques (CCE, 1988)

4-3-1-1. Choix d'un modèle plan "équivalent"

Comme la structure sera excitée dans une direction, une première approche pour modéliser son comportement dynamique non-linéaire, consiste à effectuer des calculs sur un modèle bidimensionnel équivalent.

Une étude comparative a été effectuée au LCPC afin de déterminer, à partir des caractéristiques dynamiques de la structure tridimensionnelle élastique (fréquences, amplitudes, participation modale), un modèle plan équivalent (*Latreche, 1992*). En raison de la non-symétrie dans la direction d'excitation (les trois portiques parallèles de la structure n'ont pas la même rigidité), le choix du modèle 2D est délicat.

Le modèle plan équivalent choisi est illustré *figure 4-7a*. Il est constitué du portique central avec une tranche de dalle de largeur 5m : structure "ISPRA plane".

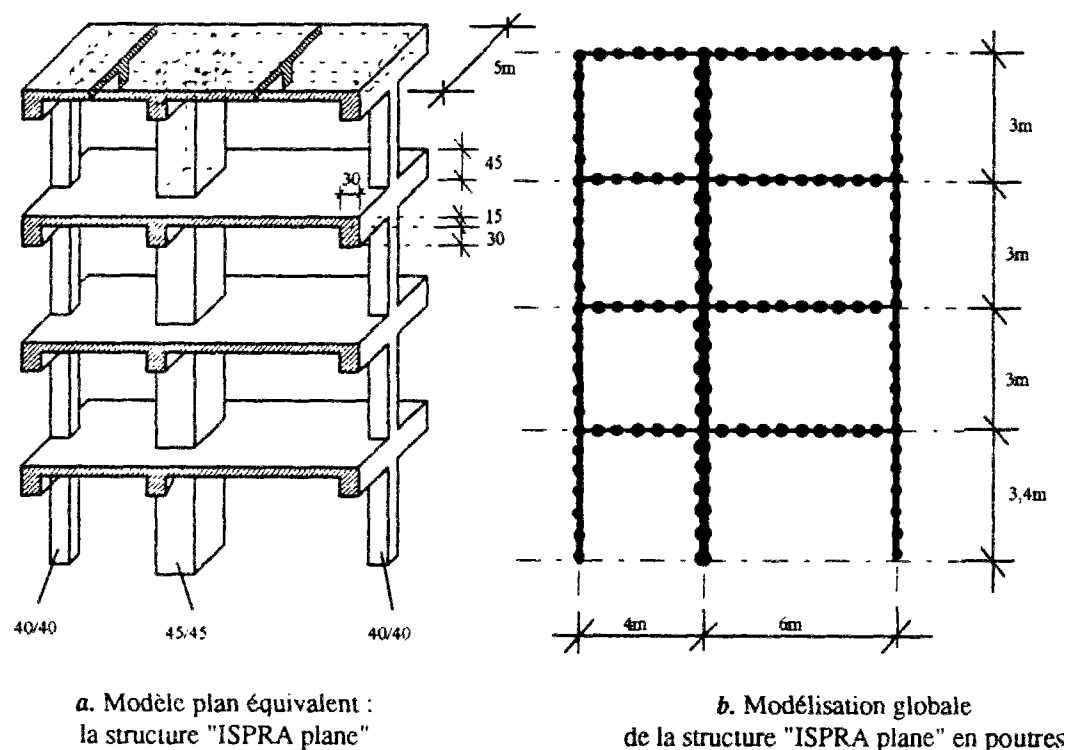
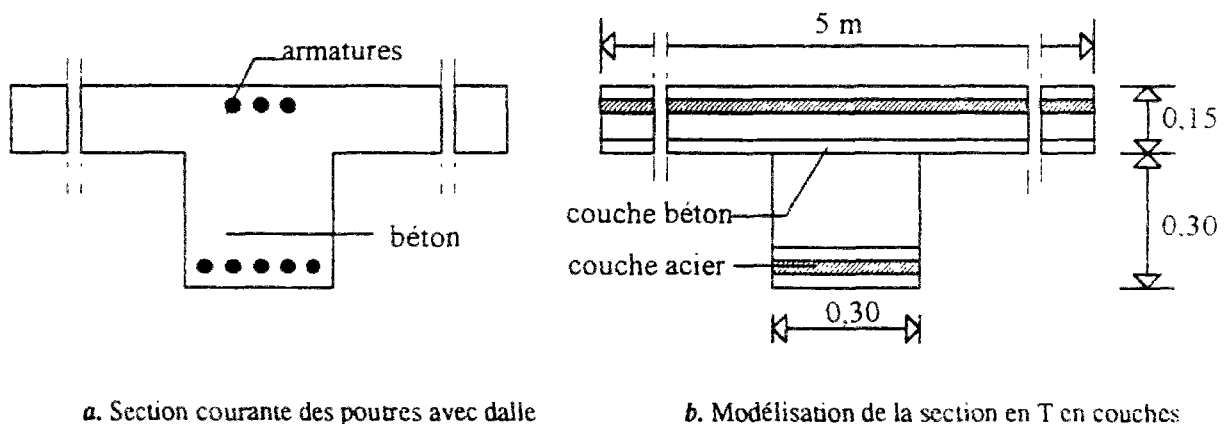


Figure 4-7 : Modèle plan équivalent et sa modélisation en poutres

4-3-1-2. Modélisation de la structure "ISPRA plane"

La structure "ISPRA plane" est modélisée en éléments *multicouches*. Le maillage (*figure 4-7b*) de la structure est constitué de 134 noeuds, de 139 éléments multicouches qui appartiennent à 20 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes, selon le plan de ferrailage réel, détails de la modélisation sont donnés en référence (*Ulm et Clément dans Carvalho et al., 1992*).

La *figure 4-8* donne un exemple de la modélisation des poutres avec dalles en couches.



a. Section courante des poutres avec dalle

b. Modélisation de la section en T en couches

Figure 4-8 : Principe de la modélisation d'une section en couches

4-3-1-3. Matériaux

- Béton : loi de comportement uniaxiale élastoplastique avec endommagement (*cf. 4-1-2-1*). Les caractéristiques et paramètres du modèle sont précisés *tableau 4-5*.
- Acier : loi uniaxiale élastoplastique parfait de Von-Mises (*cf. 2-3-2-6*) :

$$E = 200000 \text{ MPa}, \nu = 0,3, \sigma_y = 585 \text{ MPa}, \varepsilon_{\text{rupture}} = 1\%$$

$$\text{Masse volumique : } \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E_o = 30500 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$ *	$\rho = 2500 \text{ kg / m}^3$
WW 3 - avec écrouissage (WW3-ECR)	Résistances : $\sigma_c = 33 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 3,1 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1,15 \sigma_c$ *	$\delta = 0,1745 (10^\circ)$ * $z_o = 0,75$ * $\kappa = 1000$ *
WW modifié (WW-mod)	Résistances : (idem) Triaxiale : $\tau_{\text{max-u}} = 2,4473 \sigma_c$ * $\sigma_{\text{max-u}} = -3,9 \sigma_c$ * $\theta = 0^\circ$	$\phi_o^p = -0,01\%$ * $\beta = 1,0$ * $\kappa = 1000$ *
Endommagement	Modules à la ruine : $K_{\text{ult}} / K_o = 0,5$ * $G_{\text{ult}} / G_o = 0$ *	$\kappa = 1000$ *

Tableau 4-4 : Caractéristiques matérielles du béton et paramètres du modèle
(* indique que la valeur est prise par défaut)

4-3-2. Etude du comportement dynamique non-linéaire de la structure

Nous proposons d'abords d'étudier l'effet du dommage à l'échelle de la structure soumise à un chargement dynamique. La structure a été dimensionnée pour une accélération horizontale maximale du sol de valeur $\gamma_{\text{dm}} = 0,35g$. Pour étudier l'effet du dommage à l'échelle de la structure, les réponses de la structure soumise à différents niveaux d'accélération sont comparées.

4-3-2-1. Chargement

La structure plane (avec poids propre) est soumise à des niveaux d'accélération du sol constants. Chacun des calculs effectués correspond à un niveau d'accélération appliqué, avec des valeurs variant entre $\gamma_s = 0,1\gamma_{\text{dm}}$ et $\gamma_s = \gamma_{\text{dm}}$ (figure 4-9).

Ce chargement dynamique est sévère. Il est appliqué dès le début et n'est pas constitué d'accroissements successifs d'accélération comme dans le cas d'un séisme.

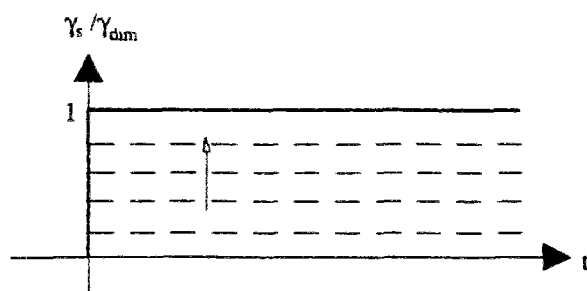
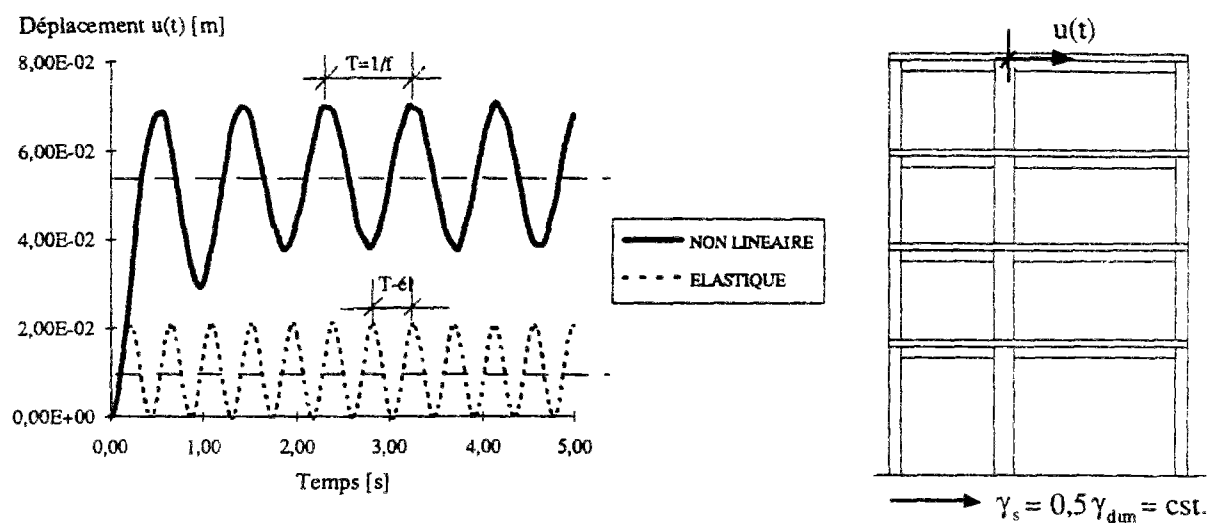


Figure 4-9 :
Niveaux d'accélération constante du sol appliqués dans les calculs.

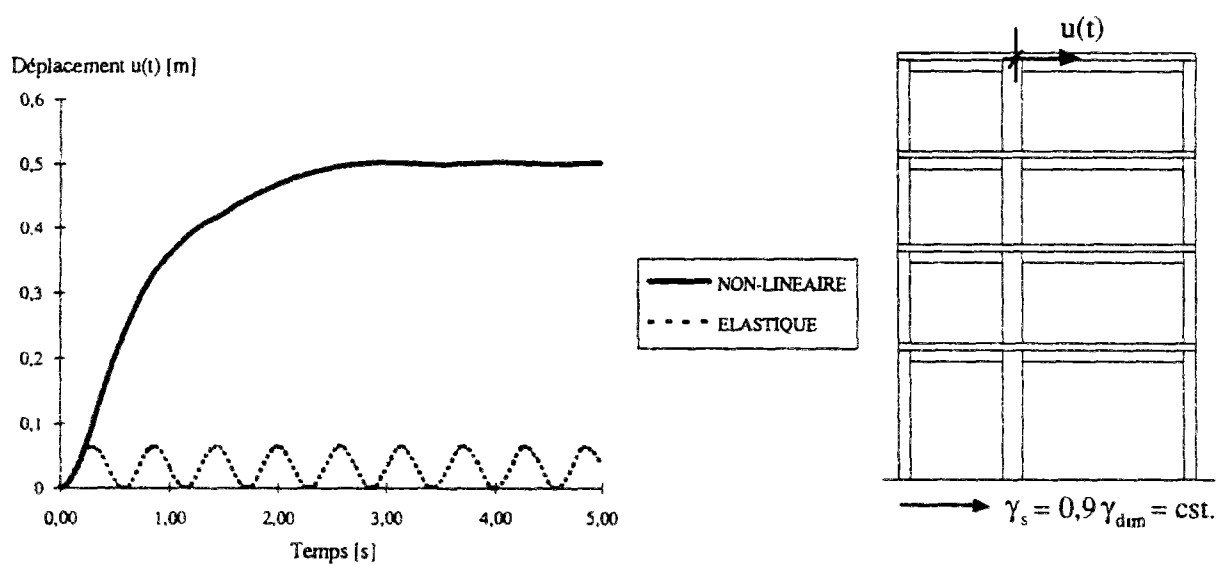
4-3-2-2. Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus sur une durée de 5 s avec un pas de temps de 10 ms. Les courbes de la *figure 4-10* représentent le déplacement horizontal d'un point haut de la structure en fonction du temps, pour deux niveaux d'accélération donnés : $\gamma_s = 0,5\gamma_{dim}$ et $\gamma_s = 0,9\gamma_{dim}$. La comparaison entre la réponse élastique et la réponse non-linéaire dynamique de la structure met en évidence les phénomènes suivants :

- L'apparition de déplacements irréversibles. Ces déplacements permanents sont représentatifs de la dégradation progressive de certaines couches des sections, issue du comportement non linéaire des matériaux. Plus la structure est sollicitée, plus elle se dégrade : les déplacements irréversibles augmentent avec le niveau d'accélération.
- La fréquence de la réponse de la structure diminue avec l'augmentation de l'accélération (augmentation de la période).
- L'amplitude de la réponse augmente pour les faibles charges (*figure 4-10a*) et diminue pour des charges plus élevées (*figure 4-10b*).
- Enfin, un *état ultime dynamique* de la structure est obtenu lorsque la structure n'oscille plus. Il se produit au niveau d'accélération pour lequel la structure a été dimensionnée ($\gamma_s = 0,35g$).



a. Courbe $u(t)$ pour $\gamma_s = 0,5 \gamma_{dim}$



b. Courbe $u(t)$ pot $\gamma_s = 0,9 \gamma_{dim}$

Figure 4-10 : Courbes déplacement horizontal d'un point haut de la structure en fonction du temps

4-3-2-3. Effets du dommage : variation de la fréquence, évolution de l'amplitude

L'exploitation des résultats de calculs menés avec des valeurs d'accélération croissantes jusqu'à la ruine dynamique permet d'évaluer la variation de la première fréquence (*figure 4-11a*) et l'évolution non-linéaire de l'amplitude d'oscillation (*figure 4-11b*) en fonction de l'accélération γ_s appliquée.

La courbe de la variation de fréquence est composée de trois parties (*figure 4-11a*) :

- une partie fortement descendante de la fréquence pour des faibles valeurs d'accélération, due au dommage du béton dans les sections des éléments.
- un plateau de fréquence, atteint quand les armatures commencent à se plastifier,
- une chute de la fréquence jusqu'à zéro, pour une valeur d'accélération correspondant à la ruine dynamique de la structure.

L'évolution d'amplitude suit des phases similaires (*figure 4-11a*) :

- Dans la plage d'accélération correspondant à la chute brutale de fréquence, l'amplitude du calcul non-linéaire reste du même ordre de grandeur que l'amplitude élastique;
- L'amplitude s'accroît ensuite fortement, pour atteindre une valeur sensiblement constante;
- Elle décroît rapidement pour des accélérations proches de celle qui conduit à la ruine dynamique de la structure.

Cet exemple a été choisi pour montrer comment les outils développés peuvent être utilisés pour caractériser et quantifier le comportement dynamique non-linéaire de structures en béton armé contreventées par des portiques : effets du dommage à l'échelle de la structure - la variation de la fréquence et l'évolution d'amplitude. Ces évolutions décrites par une approche numérique sont conformes avec les observations sur des structures réelles soumises à des chargements sismiques (*cf. Iemura et Jennings, 1974; Bard et al., 1992*).

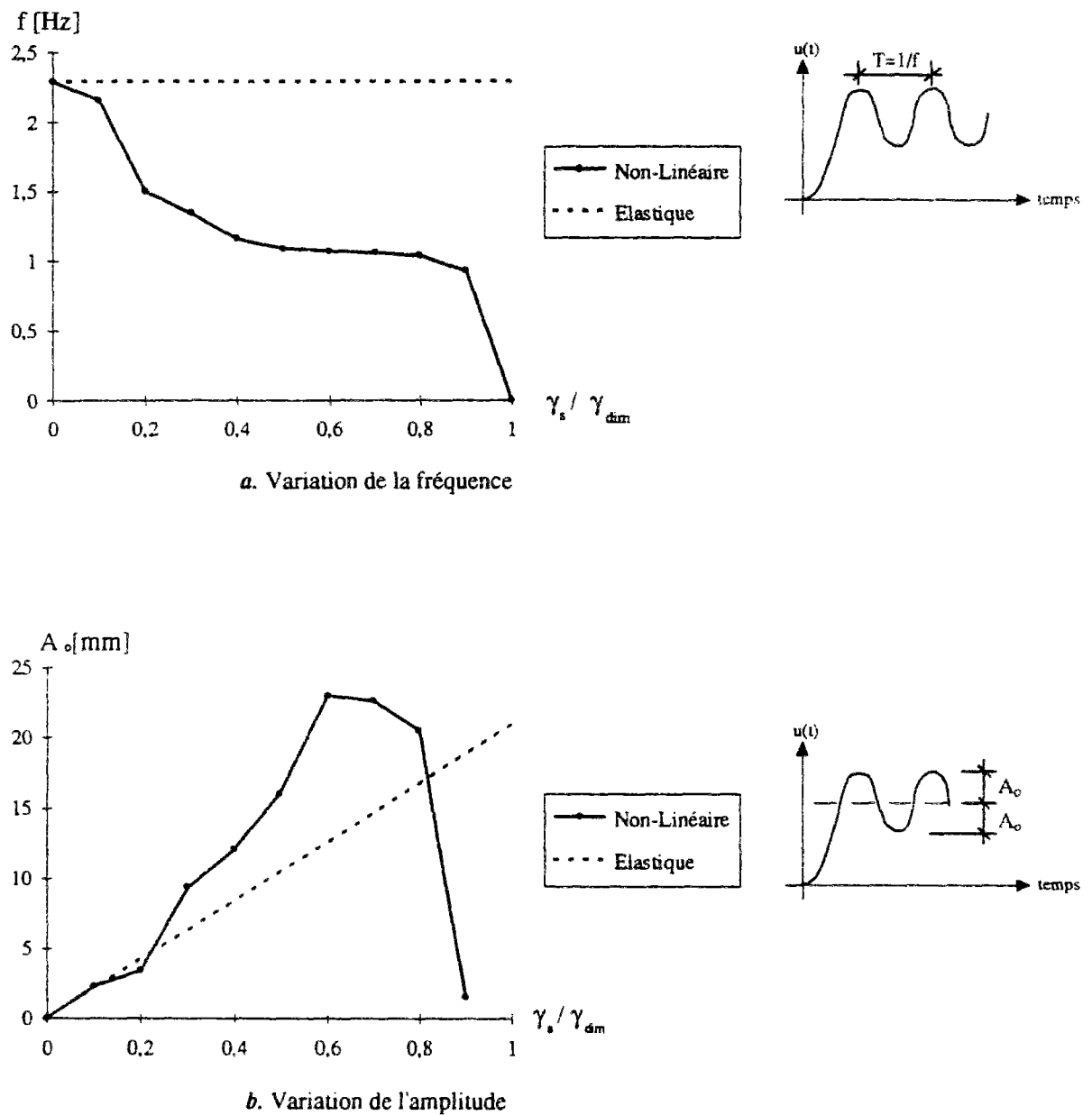


Figure 4-11 : Courbes variation de la fréquence, variation de l'amplitude en fonction du niveau d'accélération

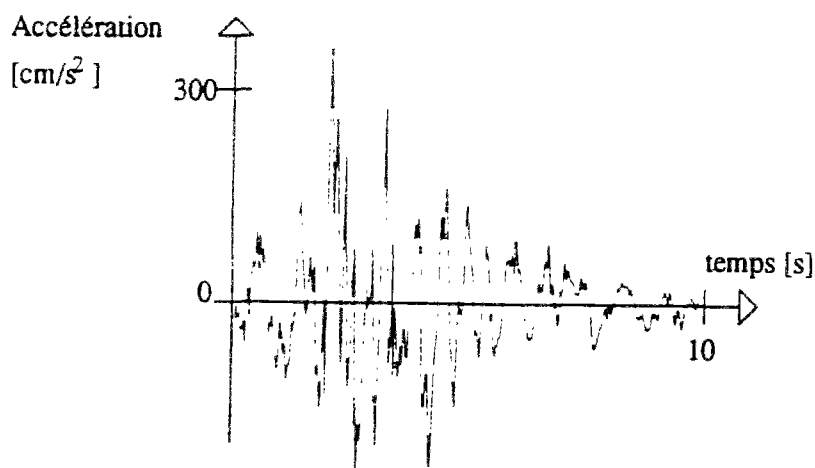
4-3-3. Réponse sous chargement sismique

Après avoir étudié les effets du dommage à l'échelle de la structure soumise au chargement sismique, nous présentons ici des résultats sous chargement sismique.

4-3-3-1. Chargement

La structure est cette fois soumise à une accélération du sol basée sur le tremblement de terre de Friuli (Italie) en 1976. L'accélérogramme de 10s imposé à la structure est présenté *figure 4-12*.

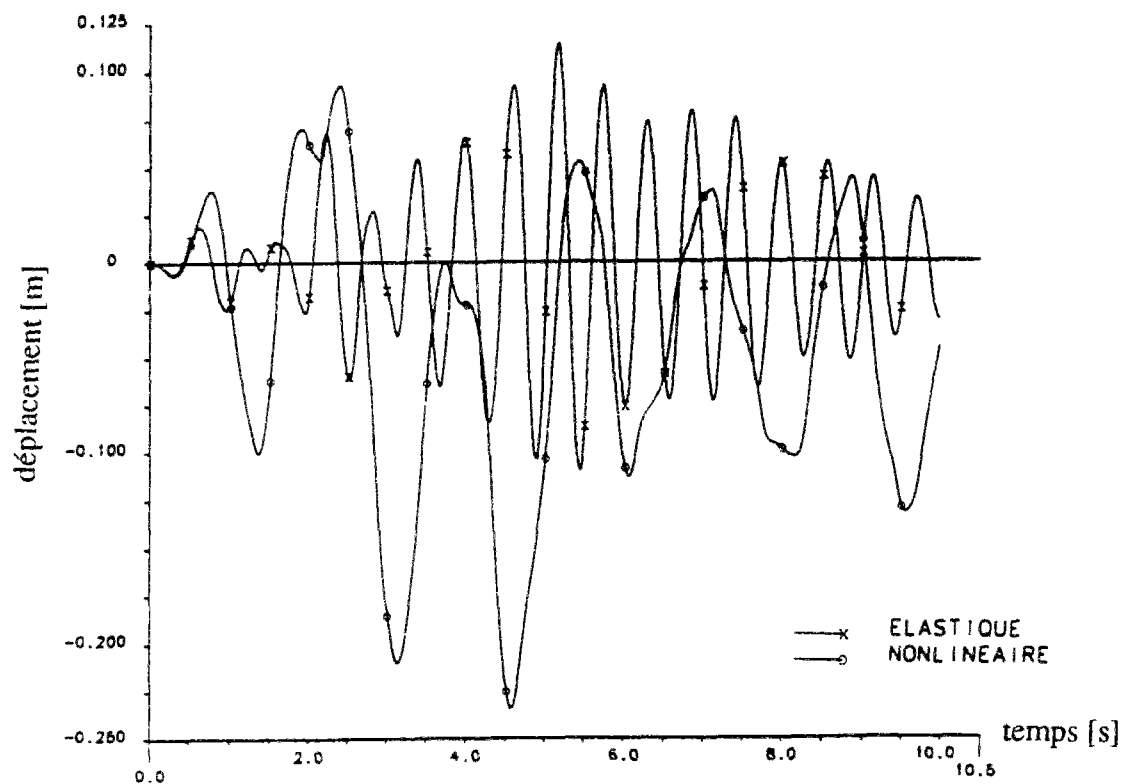
Figure 4-12 : Accélérogramme S7 (100%)



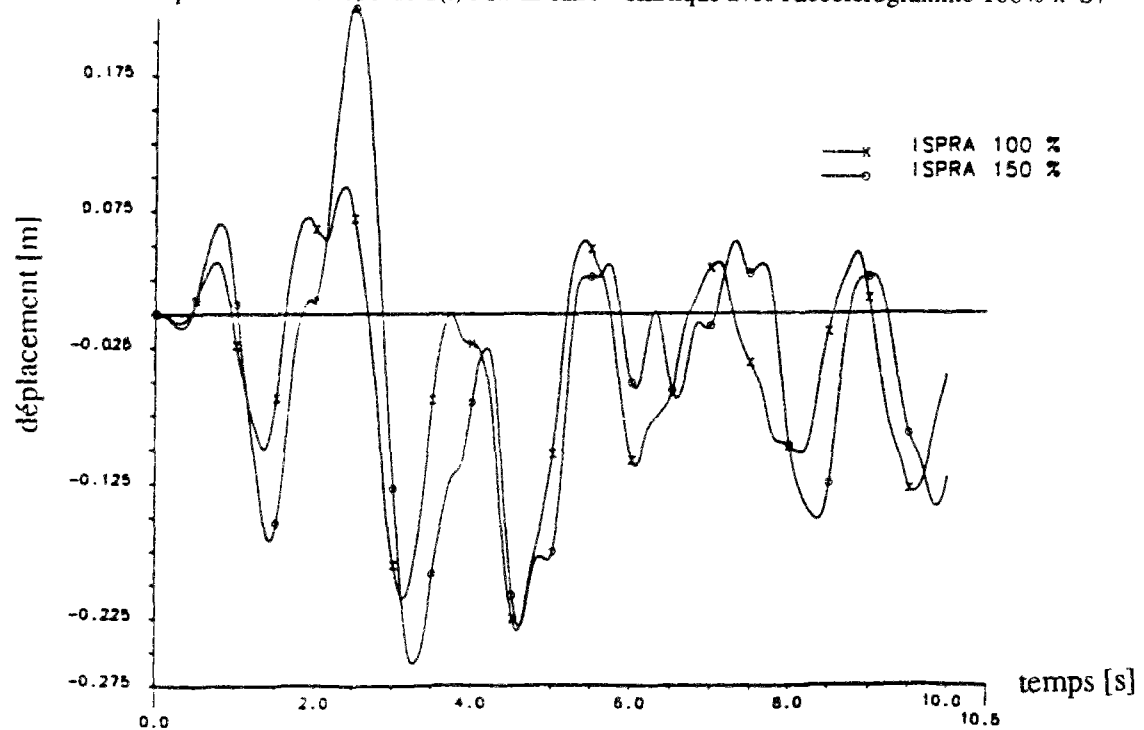
4-3-3-2. Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus sur une durée de 10s avec un pas de temps de 10 ms. Les courbes de la *figure 4-13* représentent le déplacement horizontal d'un point haut de la structure en fonction du temps. En particulier,

- *figure 4-13a* : la réponse dynamique non-linéaire comparée avec la réponse élastique obtenue par superposition modale.
- *figure 4-13b* : les réponses dynamiques non-linéaires obtenues pour l'accélérogramme 100% x S7 et l'accélérogramme 150% x S7.



a. Comparaison de la réponse $u(t)$ non-linéaire - élastique avec l'accélérogramme 100% x S7



b. Comparaison des réponses non-linéaires avec les accélérogrammes 100% x S7 et 150% x S7

Figure 4-13 : Courbes déplacement d'un point en haut de la structure en fonction du temps

4-3-3-3. Effets du dommage sous chargement sismique

Les résultats obtenus ont été comparés avec les résultats numériques d'autres participants du projet d'ISPRA. La tendance est toutefois la même (*Mazars dans Carvalho et al., 1992*).

La comparaison des réponses numériques obtenues ici met encore en évidence les effets du dommage à l'échelle de la structure, après dépassement d'une limite d'élasticité globale : augmentation de la période et de l'amplitude de la réponse non-linéaire par rapport à la réponse élastique.

La ductilité de la structure, qui provient de la ductilité des armatures longitudinales, assure sa capacité portante. Une fois la limite d'élasticité globale dépassée (apparition de dommages dans le béton), la fréquence dominante de la réponse, après une chute rapide, tend à se stabiliser. L'étendue de la zone où cette fréquence est plus ou moins constante (plateau de fréquence) est liée à la ductilité de la structure : plus la structure est ductile, plus ce plateau de fréquence est prononcé. Ceci est en général le cas pour des structures contreventées par des portiques. Cependant, pour des niveaux d'accélération plus importants, les structure peuvent atteindre la ruine dynamique (chute brutale de la fréquence à zéro et arrêt des oscillations) : ceci n'est pas le cas pour la structure plane d'Ispira étudiée.

Enfin, il convient de signaler, que ce type de calcul est très sensible aux paramètres matériels utilisés pour modéliser le comportement adoucissant du béton. Ils affectent le début de la "chute de fréquence" et par conséquent l'ordre de grandeur des déplacements maximaux obtenus. Par ailleurs, une fois l'apparition du dommage, cette sensibilité apparaît moins prononcée vis-à-vis de l'évolution de la fréquence, c'est à dire vis-à-vis des effets du dommage (*Ulm et Clément dans Carvalho et al., 1992*).

4-4. EXEMPLE : DEVERSEMENT DES POUTRES

Cet exemple concerne le calcul au déversement de poutres en béton armé de grande hauteur. Le problème à résoudre est un problème d'instabilité latérale sous chargement vertical. D'un point de vue mathématique, en supposant un comportement élastique des matériaux, le déversement est un problème de bifurcation, étudié à l'origine par *Prandtl* en 1899. Compte tenu des non-linéarités matérielles, le problème du déversement est un problème couplé de bifurcations matérielles et géométriques : le béton se fissure, les armatures se plastifient, le tout en interaction avec l'augmentation des déplacements latéraux conduisant à la ruine de la structure. En termes des forces généralisées des poutres, il s'agit d'un problème non-linéaire de flexion déviée couplée avec de la torsion.

Le problème du déversement peut jouer un rôle important dans la pratique des ingénieurs en particulier pour les poutres en béton armé ou précontraint préfabriquées qui ont en général une grande hauteur : par fabrication, elles ont des défauts géométriques initiaux. Les chargements pendant le transport et la mise en place dans la structure, peuvent entraîner des sollicitations susceptibles de conduire au déversement. Ce phénomène est alors à prendre en compte pendant la phase de conception de ces éléments de structure.

Nous proposons ici d'étudier comment les outils développés peuvent être une aide au concepteur d'ouvrage voulant s'assurer par avance de la stabilité des éléments de sa construction vis-à-vis du déversement .

Les exemples qui suivent sont tirés d'une grande série des essais de *König et Pauli* (1990) de l'université de Darmstadt (RFA) pour étudier le comportement au déversement des poutres en béton armé et précontraint. Ici, deux essais (les essais 1 et 2) poutres en béton armé sont calculés numériquement.

4-4-1. Données et modélisation

4-4-1-1. Système de chargement

Les deux poutres expérimentales, testées par *König et Pauli* (1990), sont chargées en flexion quatre points (*figure 4-14a*). Les essais sont pilotés en force jusqu'à la ruine. Les charges sont appliquées sur la fibre supérieure (*figure 4-14b*). Les appuis sont tels qu'il est possible d'imposer une rotation initiale des sections par rapport au plan moyen de la poutre (*figure 4-14c*). C'est le cas de l'essai No 1.

4-4-1-2. Défauts géométriques

Les poutres, d'une portée de 18m, présentent des défauts géométriques initiaux mesurés expérimentalement (*figure 4-15a*) : les poutres ne sont pas rigoureusement à plan moyen, comme le montre la *figure 4-15b*. Dans les essais, on a mesuré le déplacement initial de la fibre supérieure et celui de la fibre inférieure. Ces défauts peuvent être représentés par un déplacement initial moyen du centre de gravité de la section, noté $v_o(x)$, et une rotation initiale de la section autour de l'axe longitudinal de la poutre, noté $\theta_o(x)$, différents pour les deux essais traités. Les pré-déplacements $v_o(x)$ sont représentés par une demi-onde sinusoïdale. Dans l'essai No 1, $\theta_o(x) = \text{const}$, tandis que dans l'essai No 2 la rotation initiale $\theta_o(x)$ mesurée est représentée par une demi-onde sinusoïdale. Les défauts mesurés sont précisés dans le *tableau 4-5*.

4-4-1-3. Matériaux

Pour les deux essais, les caractéristiques des matériaux sont également données dans le *tableau 4-5*. Pour le béton, on utilise la loi de comportement élastoplastique avec endommagement. Les paramètres du modèle sont identiques à ceux utilisés dans l'exemple précédent (cf. *tableau 4-4*). Pour l'acier, une loi élastoplastique parfaite de Von-Mises est utilisée.

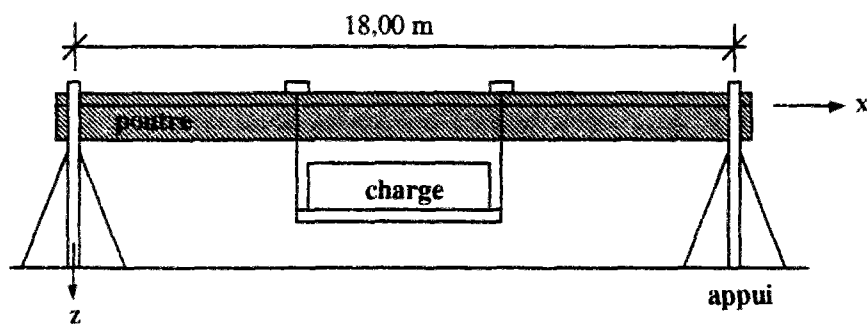


Figure 4-14a. : Essais de König et Pauli, 1990

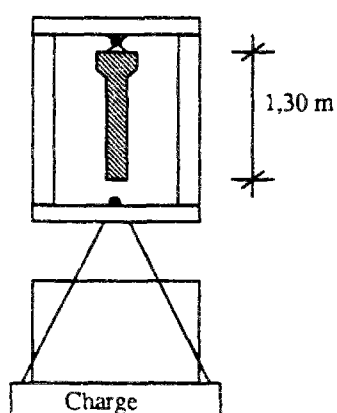


Figure 4-14b. : Système de chargement

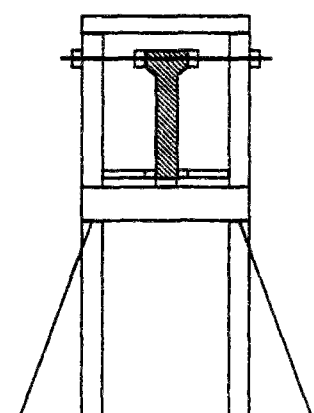


Figure 4-14c. : Détail d'un appui

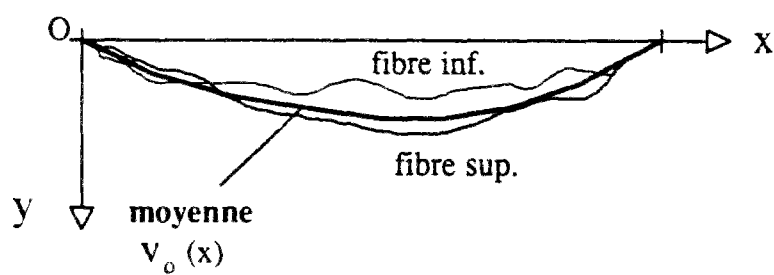


Figure 4-15a. : Défauts géométriques initiaux mesurés

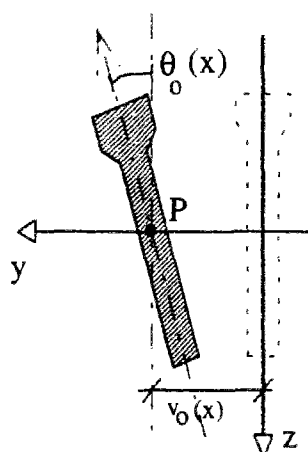


Figure 4-15b. : Déplacements et rotations initiaux

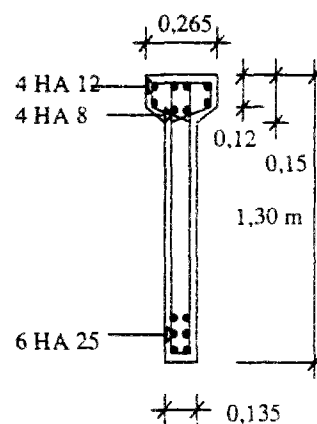


Figure 4-16. : Section courante

Essai No.	Béton [MPa]	Acier [MPa]	Défauts géométriques	
			v_0 section centrale	θ_0 rotations
1	$E_c = 36000$ $\sigma_c = 55,1$ $\sigma_t = 3,8$ $\sigma_{bc} = 1,15\sigma_c^*$	$E = 200000$ $\sigma_y = 575$	+20 mm	aux appuis 0,5%
2	$E_c = 36000$ $\sigma_c = 58,7$ $\sigma_t = 3,6$ $\sigma_{bc} = 1,15\sigma_c^*$	$E = 200000$ $\sigma_y = 575$	-3 mm	section centrale 0,3%

Tableau 4-5 : Caractéristiques des matériaux, défauts mesurés

(les résistances triaxiales et les paramètres du modèle élastoplastique avec endommagement sont ceux précisés dans le tableau 4-4).

4-4-1-4. Modélisation

La moitié de la poutre est discrétisée en 9 éléments poutre multifibre et la section courante, représentée sur la *figure 4-16*, en 212 fibres dont 198 en béton et 14 en acier. Les déplacements initiaux sont modélisés par les données des coordonnées de la poutre pré-déplacée. Les rotations initiales infinitésimales autour de l'axe de référence de direction e_1^0 sont prises en compte dans le calcul des vecteurs de base du repère local de l'élément sous la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^\circ \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^\circ + \theta_o(x) \mathbf{e}_1^\circ \wedge \mathbf{e}_2^\circ \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Cette base est supposée constante pour l'élément. Dans la description lagrangienne corotationnelle choisie, le repère local de la poutre est le repère de la poutre en rotation propre (cf. *figure 2-9*). Dans (5), on prend pour $\mathbf{e}_1^\circ, \mathbf{e}_2^\circ, \mathbf{e}_3^\circ$ les vecteurs de base dans la configuration de référence de corps rigide (*i.e.*, $\mathbf{e}_i^\circ = \bar{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 3$). Les vecteurs de bases $\bar{\mathbf{e}}_i$ sont déterminés à partir de la procédure semi-tangentielle exposée en **annexe 3**. La rotation infinitésimale initiale est ainsi considérée attachée à la configuration de référence de la poutre en mouvement de corps rigide.

Le chargement est constitué d'une part du poids propre et d'autre part des charges verticales (en z) appliquées à la fibre supérieure. Du fait de la pré-rotation des sections autour de l'axe de la poutre, les charges ponctuelles sont modélisées par une force et un moment de torsion appliqués au centre de gravité de la poutre. Le caractère non-conservatif de ce moment extérieur est négligé.

Dans les calculs, la poutre est d'abord chargée par le poids propre, puis les forces ponctuelles et les moments de torsion sont appliqués. Les charges sont incrémentées en 30 incréments.

4-4-2. Comparaisons essais-calculs

4-4-2-1. Exploitation des calculs

Les résultats d'essais donnés sont des courbes charge F appliquée - déplacement transversal (en y) de la fibre supérieure (*König et Pauli*, 1990). Les calculs numériques donnent des résultats sous forme de déplacements et rotations au centre de gravité de la poutre par rapport à sa position initiale. Pour comparer les résultats calculs - essais, l'exploitation des résultats de calculs est effectué par :

$$(6) \quad v(x, z_{\text{sup}}, t - t_o) = v(x, t) + \sin \omega_1(x, t) z_{\text{sup}} - v(x, z_{\text{sup}}, t_o)$$

avec $v(x, t)$ et $\omega_1(x, t)$ le déplacement transversal total et la rotation totale autour de l'axe de référence au centre de gravité de la poutre. $v(x, z_{\text{sup}}, t_0)$ est le déplacement transversal de la fibre supérieure dû au chargement de poids propre. z_{sup} est la distance entre le centre de gravité et la fibre supérieure en z .

4-4-2-2. Résultats

Les courbes obtenues sont comparées aux résultats expérimentaux sur les *figures 4-17a* et *figures 4-17b*. Pour chacun des essais, deux calculs numériques ont été effectués :

- $\mu = 1,0$: l'un en donnant aux poutres une rigidité de torsion égale à la rigidité élastique de torsion (précisé au paragraphe 2-2-2-5).
- $\mu = 0,2$: l'autre en imposant une rigidité de torsion égale à 20% de la rigidité de torsion élastique. Cette réduction affecte les déformations de cisaillement et revient à introduire un facteur de réduction dans le calcul des contraintes de cisaillement dues à la torsion.

La comparaison des valeurs de ruine est donnée dans le *tableau 4-6*.

Les calculs avec la rigidité de torsion élastique donnent une valeur de charge de ruine numérique supérieure de 21% et 26% à la charge de ruine expérimentale. Si on modifie la rigidité de torsion en la diminuant à 20% de la rigidité initiale ($\mu = 0,2$), ce qui est toujours effectué dans les calculs courants de dimensionnement béton armé, les résultats numériques se rapprochent des résultats expérimentaux, avec des écarts de quelques % sur les charges de ruine et sur les déplacements transversaux de la fibre supérieure de la poutre. Dans les calculs numériques, alors que le béton s'endommage rapidement, c'est seulement au dernier incrément que certaines armatures commencent à se plastifier. Le comportement dissymétrique de la section, accéléré brutalement par cette plastification, conduit au déversement.

Ce mode de ruine fragile a déjà été rencontré dans l'exemple 4-2 de flambement d'un poteau.

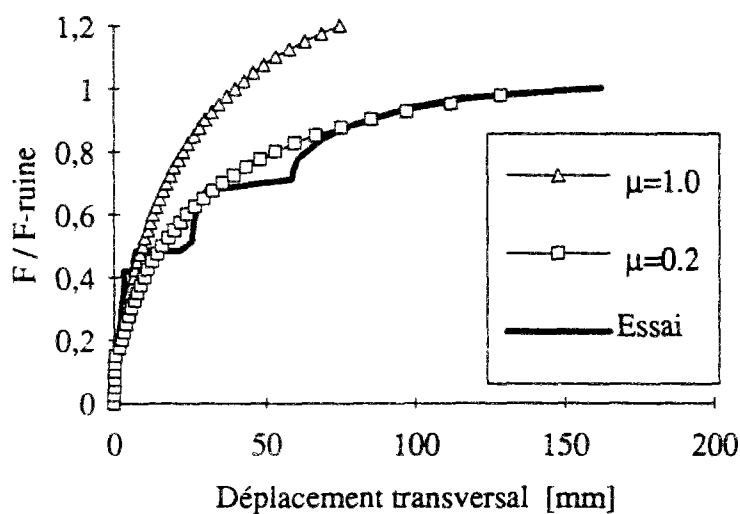


Figure 4-17a : Essais No 1.

Courbe déplacement transversal de la fibre supérieure au milieu de la poutre - F/F_{ruine} .

$$(F_{\text{ruine}}^{(\text{exp})} = 190 \text{ kN})$$

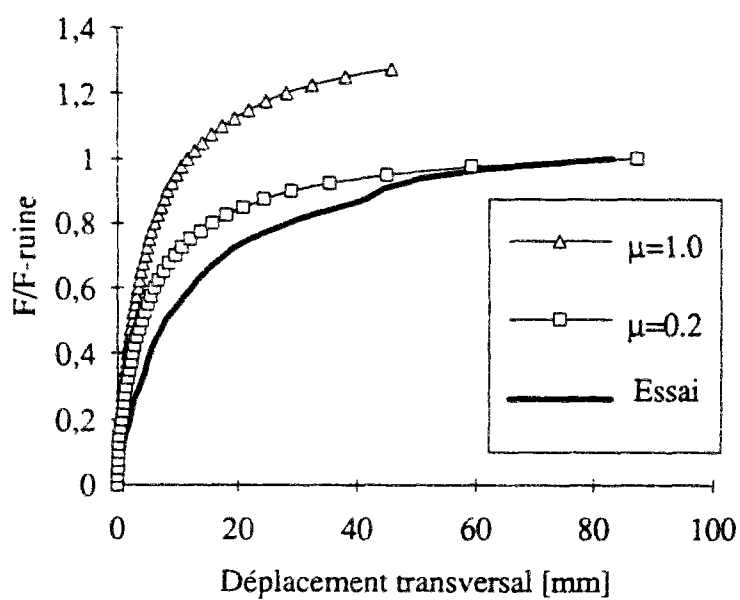


Figure 4-17b : Essais No 2.

Courbe déplacement transversal de la fibre supérieure au milieu de la poutre - F/F_{ruine} .

$$(F_{\text{ruine}}^{(\text{exp})} = 198 \text{ kN}).$$

	Essai No 1	Essai No 2
F expérimentale [kN]	190	198
F numérique [kN] : $\mu = 1,0$	230	250
F numérique [kN] : $\mu = 0,2$	185	195

Tableau 4-6 : Comparaisons essais/calculs

4-4-3. Commentaires

Ces applications au déversement mettent en évidence les limites de la modélisation proposée, (écarts essais/calculs de 25%), notamment pour ce qui concerne la modélisation de la torsion des poutres en béton armé. Les écarts peuvent avoir deux sources :

- la modélisation du comportement adoucissant et assouplissant par des variables d'écrouissage et d'endommagement isotrope fonctions seulement de la variation de volume anélastique. La torsion pure, correspondant à un état de contraintes de cisaillement pur, n'entraîne pas d'évolutions de l'écrouissage ni de l'endommagement, avec les règles d'écoulement et d'écrouissage choisies (cf. 1-3-3-3). Mais, l'état de contraintes qui accompagne le déversement n'est pas un état de contraintes de cisaillement pur, la torsion devient uniquement prédominante près de la ruine.
- la modélisation de la rigidité de torsion de la section par une approximation, qui n'est valable que dans le domaine élastique (cf. 2-2-2-5). Cette simplification, issue de l'application de la théorie des poutres au phénomène complexe de la torsion de poutres en béton armé, nous apparaît comme la raison principale des difficultés rencontrées dans la modélisation. Mais ce constat devrait être vérifié par des calculs comparatifs pour d'autres cas de charge de flexion déviée couplée à la torsion.

L'exemple a été choisi pour mettre en évidence une limite de la modélisation proposée. Par ailleurs, compte tenu de la complexité du problème traité (non-linéaire en matériau et en géométrie), les résultats numériques obtenus peut être considérés comme satisfaisants, vu l'objectif d'un tel calcul pendant la phase de conception d'un ouvrage.

4-5. EXEMPLE : POUTRES PRECONTRAINTES

Les deux exemples présentés dans ce paragraphe montrent une application de la formulation proposée au cas des poutres précontraintes. Ces exemples font partie d'une contribution du LCPC à un séminaire international sur la modélisation de la précontrainte externe organisé par l'Association Française pour la construction (AFPC), (*Conti et Tardy*, 1993). Deux exemples ont été traités :

- une poutre isostatique sur deux appuis, de section en plancher à nervures, et d'une portée de 30 m,
- une poutre hyperstatique sur quatre appuis, de section en caisson, des travées de 20 m - 30 m - 20 m.

Chacun des exemples a été traité dans les cas de précontrainte externe et de précontrainte interne. Ces exemples nous ont permis de tester la modélisation de la précontrainte par utilisation de degrés de liberté de déplacements relatifs (glissement) sur des exemples industriels (*Ulm et Magnat*, dans *Conti et Tardy*, 1993). Les résultats obtenus ont été comparés avec des résultats d'autres participants du séminaire. Il n'existe pas de résultats d'essais.

Ici, quelques résultats de nos calculs sont présentés. On s'intéresse en particulier à l'effet de l'adhérence à l'échelle de la structure, en comparant les résultats obtenus pour les deux cas extrêmes : glissement libre (cas de la précontrainte externe) et adhérence parfaite (cas de la précontrainte interne). De plus, dans le cas de la poutre précontrainte sur deux appuis, nous comparons les résultats obtenus avec les éléments multifibres pendant la phase de mise en précontraint à ceux obtenus par une modélisation avec des éléments massifs (en contraintes planes), où la précontrainte est modélisée par des barres avec des déplacements relatifs. Les lois de comportement appliquées dans le deux cas sont les mêmes. La différence est ainsi uniquement due à la modélisation géométrique du béton (fibres ou massifs).

4-5-1. Données et modélisation

4-5-1-1. Géométrie

La géométrie des deux exemples traités est illustrée *figure 4-18* et *figure 4-19*. Il s'agit

- d'une part d'une poutre sur deux appuis d'une portée de 30 m avec un tracé tri-linéaire de la précontrainte (*figure 4-18a*). La section est une section en plancher à nervures avec un tablier (largeur/épaisseur = 10 m/0,2 m) et deux retombées ($b/h = 0,6\text{m}/1,8\text{m}$). La *figure 4-18b* présente la section courante du milieu de la poutre, la position des aciers actifs (câbles précontraints) et celle des aciers passifs (armatures longitudinales constantes sur toute la longueur de la poutre).
- d'autre part d'une poutre sur quatre appuis de travées de 20 m - 30 m - 20 m, où le tracé du câble est illustré *figure 4-19a*. La section est un caisson avec les dimensions et les positions d'aciers actifs et passifs données en *figure 4-19b*.

4-5-1-2. Matériaux

Les caractéristiques des matériaux sont issues de courbes $\sigma - \varepsilon$ uniaxiales pour les différentes matériaux (béton, acier passif, acier actif), identiques pour les deux cas étudiés. Ces caractéristiques matérielles sont données dans le *tableau 4-7*.

Pour le béton, on applique la loi élastoplastique avec endommagement avec les paramètres du modèle précisés *tableau 4-4*.

Pour les armatures passives (armatures longitudinales), la loi élastoplastique parfait de type Von-Mises est utilisée. Pour les armatures actives (câbles de précontrainte), la loi uniaxiale élastoplastique avec écrouissage précisée au paragraphe 2-3-2-6 est employée.

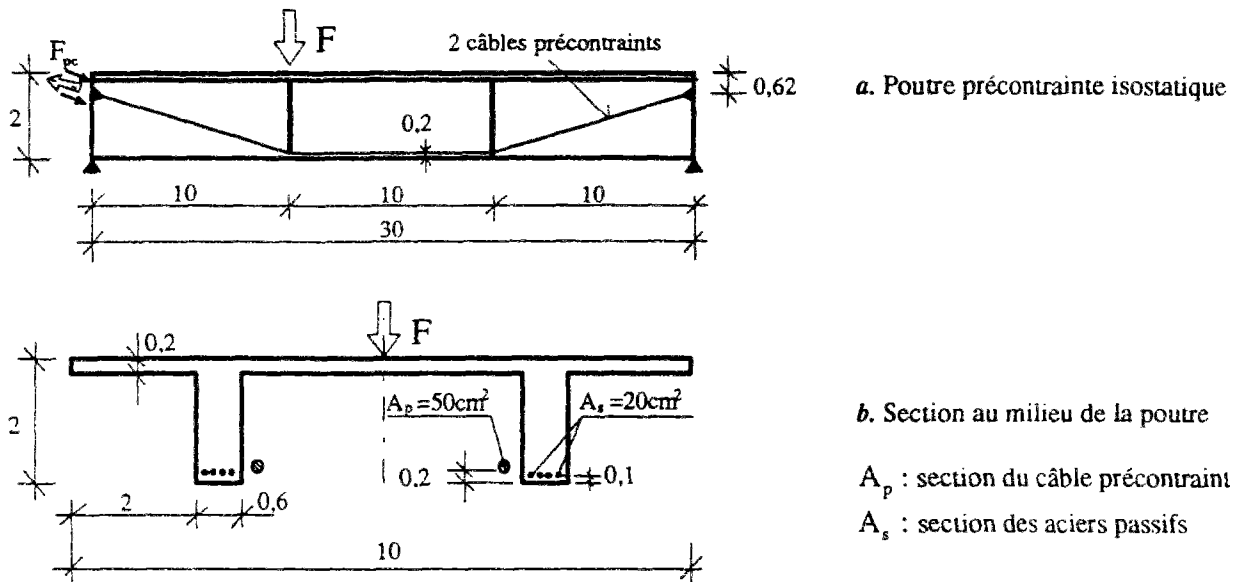


Figure 4-18 : Poutre isostatique AFPC

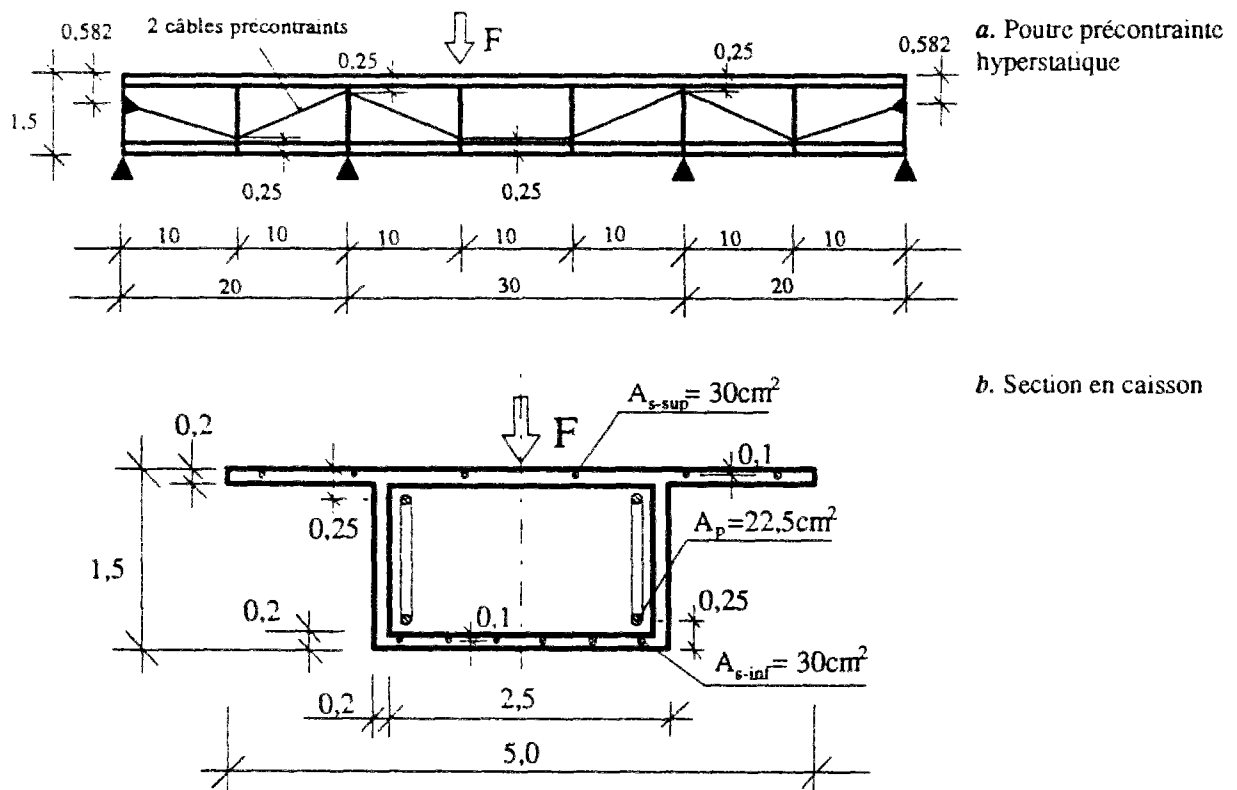


Figure 4-19 : Poutre hyperstatique AFPC

Matériaux	Béton	Acier passif	Acier actif
Caractéristiques (données)	$E_o = 20000 \text{ MPa}$ $\sigma_c = 20 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 2,4 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1,15\sigma_c^*$ (essai triaxial)*	$E = 200000 \text{ MPa}$ $E_t = 0$ $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$ $\epsilon_{rupture} = 1\%$	$E = 190000 \text{ MPa}$ $E_t = 9450 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 1575 \text{ MPa}$ $\epsilon_{rupture} = 1,93\%$

Tableau 4-7 : Caractéristiques des matériaux des poutres AFPC
 (* indique que le valeur est prise par défaut)

4-5-1-3. Maillage

- La poutre isostatique est modélisée en 16 éléments poutre multifibre avec DDL de glissement. Ces éléments appartiennent à 11 groupes de caractéristiques géométriques différentes, suivant le tracé du câble. Chaque élément est constitué de 79 fibres dont une en acier précontraint et deux en acier passif. Le tablier est modélisé par 40 fibres de béton et les retombées par 18 fibres de béton. Pour étudier la modélisation de la mise en tension du câble, cette poutre a été également modélisée en éléments massifs (contraintes planes) et en éléments en barres avec DDL glissement. Dans ce cas, le maillage comporte 300 éléments massifs à 4 noeuds (300 MBQ4) et 33 éléments barres dont 3 avec des DDL de glissement modélisant le câble précontraint.
- La poutre hyperstatique est modélisée en 36 éléments poutre multifibre avec DDL de glissement et 21 groupes de caractéristiques géométriques différentes suivant le tracé du câble. Chaque élément est formé de 85 fibres dont une en acier précontraint et deux en acier passif. Les tabliers supérieur et inférieur sont modélisés chacun par 30 fibres de béton et les voiles par 11 fibres.

4-5-1-4. Chargement

Le chargement comporte deux phases :

- la mise en précontrainte avec activation du poids propre ($\rho = 2500 \text{ kg / m}^3$).
- l'application d'une charge ponctuelle F non-symétrique (*figure 4-18a, 4-19a*), incrémenté jusqu'à la ruine.

4-5-2. Mise en précontrainte

4-5-2-1. Application de la force de précontrainte (condition aux limites en force)

Les poutres sont mise en précontrainte avec la condition de glissement libre ($\alpha = 1$). Avec la formulation proposée, la force de précontrainte est appliquée dans les zones d'ancrages. Comme la direction de glissement est définie suivant l'axe du câble (cf. 2-3-2-4), la direction de la force appliquée n'est pas à préciser. **Aucun** effort équivalent n'est calculé (cf. 2-3-2-8). Ici, nous considérons que la précontrainte est appliquée de manière non-symétrique à une seule extrémité du câble ³ (cf. figure 4-18a).

En utilisant la notation du paragraphe 2-3-2-8, les forces de précontrainte appliquées sont des conditions aux limites en force à l'ancrage (à $x=0$) telles que :

- pour le cas de la poutre isostatique : $F^{kr}(x=0) = F_{pc} = 6000 \text{ kN}$ par câble
- pour le cas de la poutre hyperstatique: $F^{kr}(x=0) = F_{pc} = 3000 \text{ kN}$ par câble

Ces valeurs étaient données dans les exemples à traiter. On aurait pu également définir la mise en tension comme une condition aux limites en déplacement. Dans ce cas, ce déplacement est le déplacement relatif entre le câble et le béton à l'ancrage, et est en fait mesuré sur le chantier avec les vérins hydrauliques.

4-5-2-2. Résultats

La phase de la mise en tension de la poutre isostatique a été modélisée d'une part avec des éléments massifs en contrainte plane (300 MBQ4) et des éléments de barre (30 BB2 +3 BR2), d'autre part avec les éléments multifibre (16 PMF2). Dans les deux cas la même loi de comportement triaxiale pour le béton a été utilisée, couplant la plasticité et l'endommagement.

³ Une étude comparative a été effectuée pour évaluer l'influence de lieu d'application de la précontrainte (symétrique à deux extrémités, non-symétrique) sur la capacité portante de ces poutres (Ulm et Magnai, 1993). Les résultats montrent que le lieu d'application de la force de précontrainte n'influence peu le comportement à la ruine.

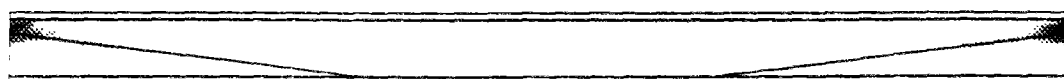
Dans la première modélisation, les dommages locaux (déformations plastiques) sont concentrés dans les zones d'ancrage aux deux extrémités (*figure 4-20*). Ici, les armatures d'ancrage n'ont pas été modélisées. Ces effets locaux n'apparaissent pas dans la modélisation par poutres multifibres : les sections planes sont supposées le rester, ce qui n'est pas le cas dans les zones d'ancrages, comme le montrent *figure 4-21a*. Pour ces deux cas, les maillages déformés sont présentés *figure 4-21a* et *figure 4-21b*.

	Modélisation <i>locale</i>	Modélisation <i>semi-globale</i>
Maillage	- 300 éléments massifs plans à 4 noeuds (MBQ4) - 33 éléments barres à 2 noeuds, dont 3 avec DDL de glissement	- 16 éléments poutre 3D multifibre à 2 noeuds et 14 DDL dont 2 DDL de glissement
Taille du problème ⁴ :		
- NEQ = NDLT - NCLT	682	64
- Largeur de bande maximum	283	7
Résultats à l'ancrage (pt.1) à la fin de la phase de mise en précontrainte :		
- déplacement horizontal	6,8 (5,2) mm	4,3 mm
- déplacement vertical	0,3 (0,3) mm	0 mm
- déplacement relatif	-200,3 (-197,0) mm	-196,1 mm
Résultats au milieu de la poutre (pt. 2), fin de la phase de mise en précontraint :		
- déplacement horizontal	2,8 (2,8) mm	2,8 mm
- déplacement vertical	8,6 (8,9) mm	7,3 mm
- déplacement relatif	/	-98,1 mm

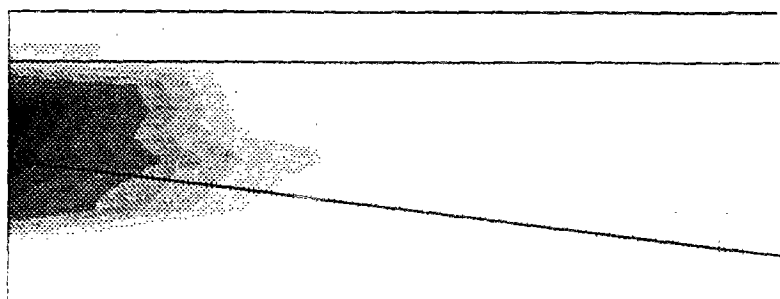
Tableau 4-8 : Comparaison des résultats obtenus pour les deux types de modélisation
(les valeurs en parenthèse sont les résultats obtenus dans le cas d'un comportement élastique du béton)

Pour les maillages utilisés on note un rapport d'environ 10 en ce qui concerne le nombre d'équations (NEQ), et un facteur 40 pour la largeur de bande maximum de la matrice de rigidité.

⁴ NEQ = nombre d'équations =
nombre total de degrés de liberté (NDLT) - nombre de conditions aux limites en déplacement (NCLT).



a. zones plastiques concentrées aux ancrages (mise en précontrainte)



b. isovaleurs de déformations plastiques à l'ancrage (détail)

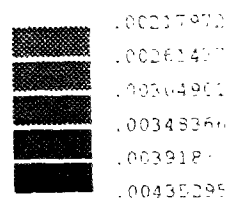
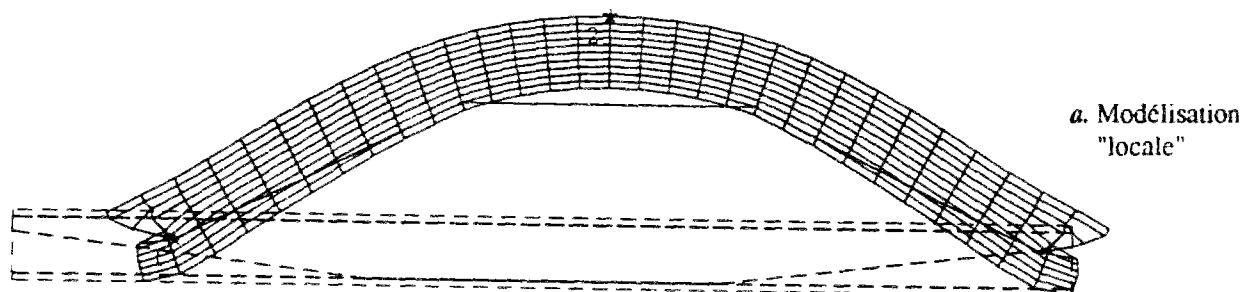
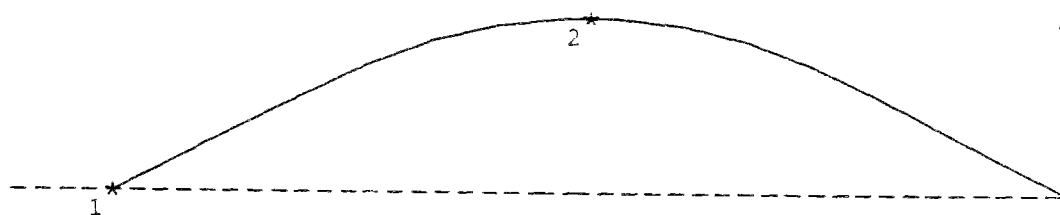


Figure 4-20 : Résultats de calcul : apparition du dommage dans les zones d'ancrage (fin de la phase de la mise en précontrainte)



a. Modélisation "locale"



b. Modélisation "semi-globale"

Figure 4-21 : Maillages déformés à la fin de la mise en précontrainte

4-5-3. Capacité portante en précontrainte extérieure et intérieure

4-5-3-1. Précontrainte extérieure et intérieure (condition aux limites en glissement)

La mise en tension correspond à la condition de glissement libre ($\alpha = 1$). La capacité portante des poutres est ensuite étudiée sous le chargement F ponctuelle appliqué à $x=10$ m (poutre isostatique, *figure 4-18a*) et $x=30$ m (poutre hyperstatique, *figure 4-19a*). Ces charges non-symétriques sont incrémentées jusqu'à la ruine des structures. La capacité portante des poutres est étudiée pour les cas de la :

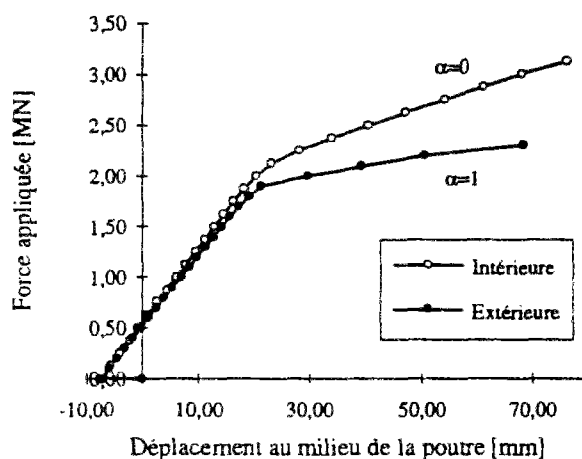
- précontrainte extérieure,
- précontrainte intérieure.

Dans la modélisation proposée, ces deux cas correspondent aux deux cas extrêmes de la condition aux limites à l'interface câble précontraint - béton (*cf. 2-3-2-5*) :

- la précontrainte extérieure à la condition du glissement libre ($\alpha = 1$). Dans l'exemple, tout frottement au niveau des déviateurs est négligé.
- la précontrainte intérieure à la condition d'adhérence parfaite. Après la mise en tension (en imposant un glissement et $\alpha = 1$), lors de l'injection de la gaine, l'adhérence entre câble et béton devient parfaite (ou presque). Ici, on suppose l'adhérence parfaite, même près de la ruine de la structure. Dans les calculs, le facteur de glissement α est mis à zéro, et les degrés de liberté de glissement sont bloqués (méthode de pénalisation).

4-5-3-2. Résultats

Pour chacune des poutres deux calculs ont été effectués. Les résultats obtenus sont données sous la forme de courbes charge appliquée - flèche au milieu de la poutre *figure 4-22* et *4-23*. Les résultats présentés sont ceux obtenus avec les éléments multifibres. La condition aux limites à l'interface acier - béton a un effet très important sur le comportement global de la structure.

**Figure 4-22 :**

Courbe charge - flèche au milieu de la poutre précontrainte isostatique AFPC

- Début de la plastification des aciers passifs :

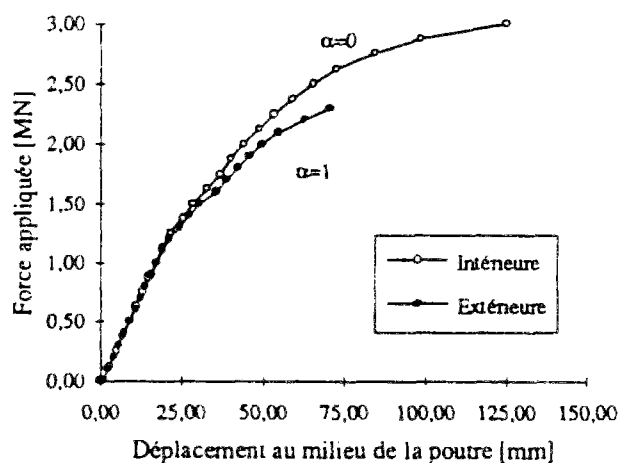
$$F_{0\text{-extérieure}} = 1,9 \text{ MN}$$

$$F_{0\text{-intérieure}} = 2,125 \text{ MN}$$

- Charge ultime :

$$F_{u\text{-extérieure}} = 2,3 \text{ MN (non-convergence)}$$

$$F_{u\text{-intérieure}} = 3,125 \text{ MN (divergence en raison de la rupture du câble précontraint)}$$

**Figure 4-23 :**

Courbe charge - flèche au milieu de la poutre précontrainte hyperstatique AFPC

- Début de la plastification des aciers passifs :

$$F_{0\text{-extérieure}} = 1,2 \text{ MN}$$

$$F_{0\text{-intérieure}} = 1,25 \text{ MN}$$

- Charge ultime :

$$F_{u\text{-extérieure}} = 2,3 \text{ MN (non-convergence)}$$

$$F_{u\text{-intérieure}} \geq 3,0 \text{ MN (arrêt du calcul)}$$

4-5-4. Commentaires

Les résultats obtenus mettent en évidence le rôle joué par l'adhérence acier-béton à l'échelle de la structure, en particulier en ce qui concerne son comportement près de la ruine : l'adhérence a un effet important sur la ductilité de la structure, liée à l'augmentation des forces dans les câbles précontraints. Dans le cas des poutres en flexion, plus l'adhérence est assurée, plus le comportement globale est ductile. Ce constat ne s'applique pas d'une façon générale à toute structure en béton armé ou précontraint (par exemple dans les cas de coques de symétrie de rotation avec précontrainte circulaire, où un déplacement radial vers l'axe de symétrie peut conduire à une relaxation des forces dans la précontrainte).

Dans la pratique, le choix du type de précontrainte doit être effectué lors de la conception de l'ouvrage. L'outil développé peut être une aide à cette conception. Dans l'approche proposée, la précontrainte est traitée en tant que problème de conditions aux limites à l'interface acier-béton. Dans le cas de l'étude de l'ancrage d'un tunnel, le problème à traiter sera un problème d'interface acier-roche.

Enfin, il convient de signaler, que l'hypothèse d'une adhérence parfaite dans les cas de précontrainte interne même près de la ruine, peut être contestable. A ce niveau de charge, le dommage conduit à une dégradation *progressive* de l'adhérence entre acier et béton. Ceci n'est pas prise en compte dans la modélisation.

4-6. EXEMPLE : STRUCTURE 3D A PORTIQUES MULTI-ETAGES SOUS CHARGEMENT SISMIQUE

L'exemple qui suit montre les premiers résultats d'une application des outils développés au cas d'une structure 3D multi-étages en béton armé soumise à un chargement sismique. Ce exemple a été choisi pour faire le point sur l'état de développement actuel de nos outils, ce qui donne quelques idées qui concernent les développements futurs. En effet, c'est dans le domaine de la prévention sismique, que les éléments multifibre ont un intérêt majeur.

La structure étudiée ici est dérivée de la structure ISPRA (*figure 4-6*). Au paragraphe 4-3, on a présenté quelques résultats de l'analyse dynamique non-linéaire avec un modèle plan "équivalent" (structure "ISPRA plane", cf. 4-3-3-1). Le choix de ce modèle équivalent a posé problème.

En effet, l'analyse modale de la structure élastique **tridimensionnelle** a donné une première fréquence propre de 1,7 Hz, tandis que pour tous les modèles **plans** cette fréquence variait entre 2,3 à 2,5 Hz (*Latreche, 1992*). Cette différence dans le domaine élastique peut s'expliquer par

- la non régularité de la répartition de la rigidité de la structure, due à la non-symétrie de la structure dans la direction d'excitation,
- qui est en plus prononcée par le fait que le poteau central n'a pas la même section que les poteaux de rives (cf. *figure 4-6*).

Dans l'essai à Ispra, le séisme sera simulé sur un mûr de réaction. Les déplacements imposés à un étage seront constants, ce qui s'approche du cas plan étudié. Cependant, il reste une incertitude sur le caractère tridimensionnel de la réponse sous chargement sismique.

Pour étudier l'effet tridimensionnel dû à la non régularité de la répartition de la rigidité de la structure et - avant tout - pour tester notre outil sur un exemple type industriel, nous présentons par la suite quelques résultats de l'analyse tridimensionnelle. Pour cette première étude, nous n'avons modélisé que le système porteur (poutres - poteaux), tout en négligeant les dalles : structure "ISPRA 3D portiques".

4-6-1. Structure "ISPRA 3D portiques", modélisation

La structure "ISPRA 3D portiques" étudiée est illustrée *figure 4-24*. Elle est modélisée en éléments poutre multifibre.

Le maillage est constitué de 213 noeuds et 252 éléments, qui appartiennent à 33 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes. Les sections des poteaux sont constituées de 76 à 93 fibres de béton ou d'armature, et les sections des poutres de 58 à 64 fibres, selon les plans de ferrailage. La masse de dalles est répartie sur chacune des poutres suivant une descente de charge isostatique.

Les caractéristiques matérielles sont celles précisées au paragraphe 4-3-1-3, les lois de comportement appliquées pour les différents matériaux sont les mêmes, mais cette fois-ci sous forme triaxiale.

L'accélérogramme imposé est celui présenté *figure 4-12*. Sa direction est précisé sur la *figure 4-24*.

4-6-2. Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus sur une durée de 2,9 s avec un pas de temps de 10 ms. Les courbes de la *figure 4-25* représentent le déplacement dans la direction d'excitation en fonction du temps pour le portique de rive et le portique central. La différence obtenue met en évidence le caractère tridimensionnel de la réponse de la structure. Ce phénomène est visualisé sur les *figures 4-26a* et *4-26b*, qui présentent les déformées de la structure aux instants $t=2,5s$ et $t=2,88s$.

Cet effet tridimensionnel, dû à la non régularité de la rigidité des portiques, aura comme conséquence un cisaillement important dans les dalles de planchers, non modélisées dans le calcul présenté.

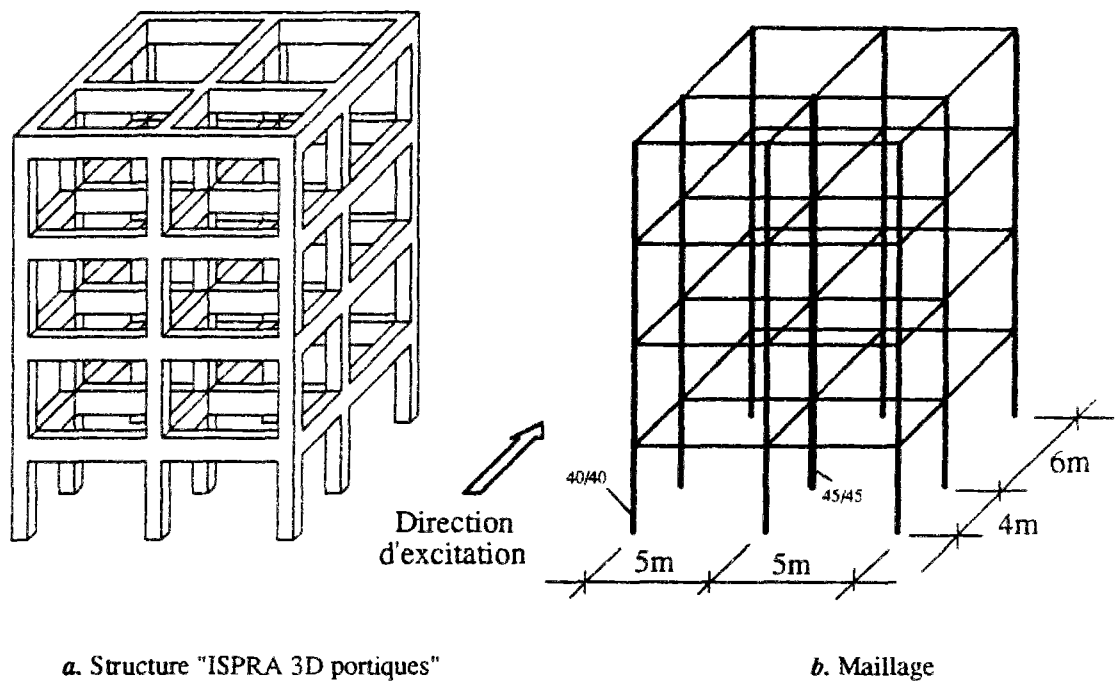


Figure 4-24 : Structure tridimensionnelle à portiques multi-étagés

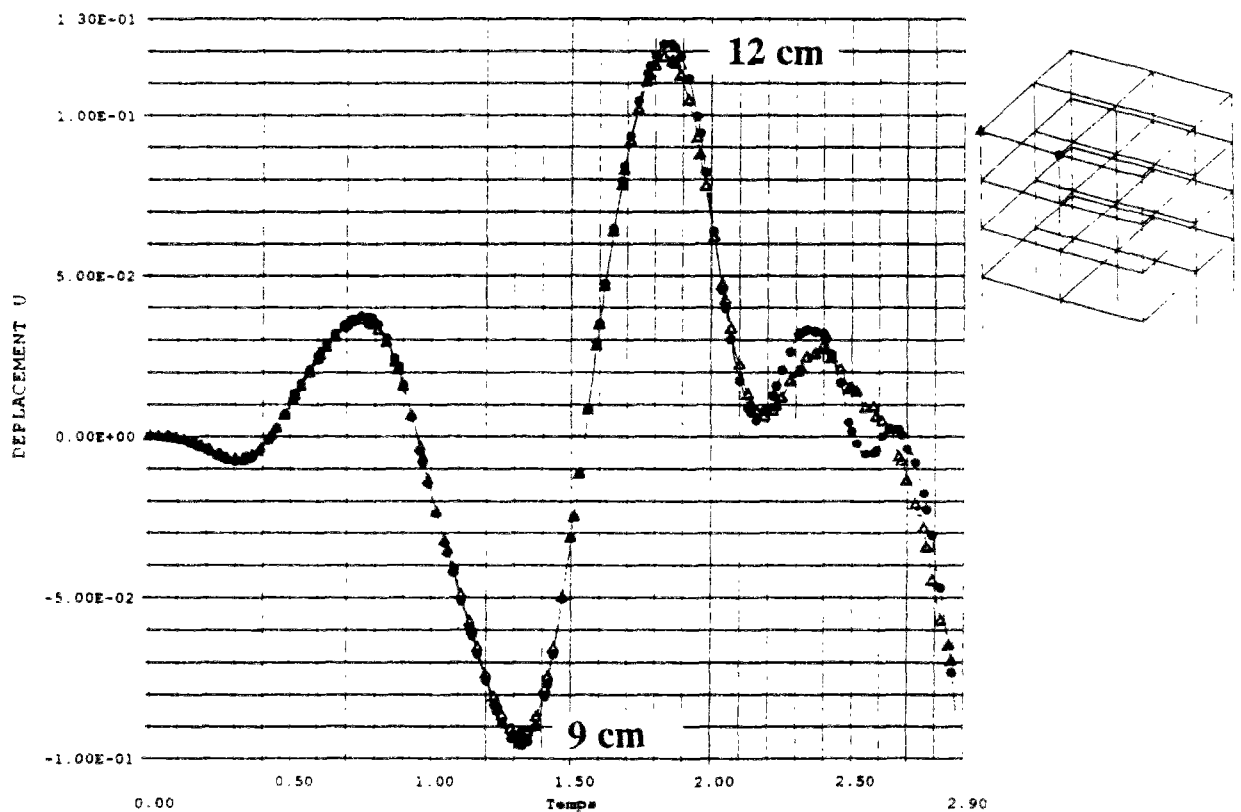
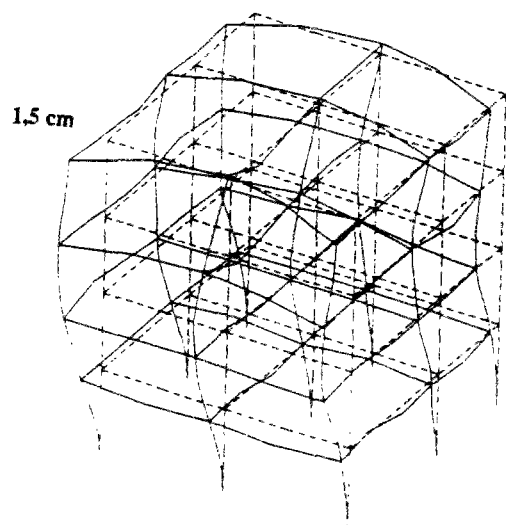
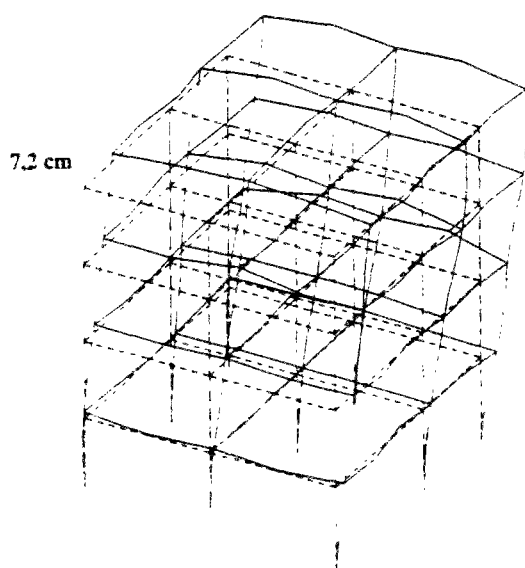


Figure 4-25 : Courbes déplacement en fonction du temps



a. Déformée de la structure à $t = 2.5$ s



b. Déformée de la structure à $t = 2.88$ s

Figure 4-26 : Visualisation de l'effet tridimensionnel sur les déformées de la structure étudiée

4-6-3. Commentaire

Les résultats présentés ici ne constituent qu'une première tentative de modélisation du comportement dynamique non-linéaire de structures en béton armé complètes, qui par nature sont tridimensionnelles. Ce caractère tridimensionnel concerne d'une part la distribution de la masse, d'autre part celle de la rigidité, qui, quant à elle, varie en fonction des dommages. Une modélisation avec les outils numériques proposés ici, ne peut être considéré que comme un premier pas dans cette direction : rendre compte des effets 3D (masse, rigidité globale, état de contraintes triaxiales) à l'échelle de la structure soumise à un séisme.

4-7. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques exemples d'application des outils développés. Leur performance nécessite toujours des améliorations. Dans tout les cas, nous avons tenté de situer nos développements dans la pratique courante des ingénieurs, c'est à dire de déterminer leurs domaines d'application et leurs limites (torsion). En particulier, les dommages et les effets du dommage à l'échelle de la structure ont été précisés. Les outils développés se veulent - avant tout - une aide au concepteur des ouvrages d'art en béton armé et précontraint.

La gamme d'applications possibles est relativement étendue, bien qu'on se soit limité ici aux structures constituées de poutres. En particulier, la modélisation de l'adhérence par des degrés de liberté de type glissement est une voie à poursuivre. L'application de la formulation n'est pas limitée au problème de l'adhérence acier-béton. On voit par exemple dans le domaine de la géotechnique du renforcement un domaine d'application intéressant.

Le domaine sismique est le domaine d'application principal de l'outil numérique développé, l'élément multifibre. Mais, afin d'aboutir à des analyses dynamiques complètes de structures en béton armé, une extension de la modélisation type semi-globale aux problèmes de dalles, voiles et coques est nécessaire. Cela existe dans la littérature, où se trouve un nombre important de contributions (*Hand et al.*, 1972; *Lin et Scordelis*, 1975;...). Les lois de comportement appliquées pour le béton peuvent rester les mêmes.

CONCLUSION

CONCLUSION

Ces travaux sont consacrés à l'étude du dommage et de l'effet du dommage (endommagement) à l'échelle des structures en béton armé et précontraint sous des chargements statiques, cycliques et dynamiques. Ces travaux peuvent être classés en deux grandes parties : une première partie consacrée à la modélisation des non-linéarités en matériau, une seconde portant sur la modélisation numérique par éléments finis poutre multifibre. Les exemples présentés permettent de préciser le domaine d'application des développements effectués.

Pour les non-linéarités en matériau, nous avons adapté un modèle élastoplastique au comportement spécifique du béton, et l'avons étendu d'une manière phénoménologique à un modèle élastoplastique avec endommagement. A l'échelle de la structure, le dommage est modélisé par des déformations plastiques (ou permanentes). L'effet du dommage est pris en compte par une variation des caractéristiques élastiques fonction d'une variable d'endommagement observable à signification physique claire : la porosité plastique, la variation volumique irréversible de l'espace poreux connecté. Le couplage plasticité - endommagement a été effectué en vue de l'application du modèle à l'étude des structures en béton armé sous chargements cycliques et dynamiques. Ce modèle élastoplastique avec endommagement est simple, et rend compte de l'essentiel du comportement expérimental du béton à l'aide d'un nombre réduit de paramètres. Ces paramètres sont accessibles par des expériences habituelles, ou peuvent être choisis par défaut à partir d'essais de référence.

Mais, utiliser ce modèle continu pour représenter la fissuration des matériaux, qui est un phénomène discontinu par nature, peut être contestable. Sous la forme présenté, les limites d'application du modèle sont les limites imposées par l'hypothèse de continuité posée dès le début : le modèle est applicable tant que la fissuration n'est pas fortement localisée sous la forme d'une discontinuité macroscopique à l'échelle de la structure. Ces limites mériteraient d'être étudiées plus en détails pour l'application à l'étude des bandes de localisation. Vues les applications pratiques envisagées, il nous semble toutefois que cet extension n'est pas la plus urgente. Il conviendra tout d'abord de concentrer les efforts de recherche sur la prise en compte des effets d'origine visqueuse comme le fluage, le retrait, mais également les effets visqueux liés

au mouvement d'eau au front de fissures, pour rendre compte de l'influence de la vitesse de chargement sur le comportement non-linéaire du béton.

Pour les applications numériques, nous avons utilisé les lois de comportement développées au sein d'un élément fini particulier, l'élément poutre multifibre, issu de l'extension des approches multicouches au cas tridimensionnel. Ce développement a été guidé par l'objectif de disposer d'un outil numérique efficace, qui permet de prendre en compte des phénomènes non-linéaires tant matériels que géométriques pour l'analyse de structures constituées de poutres sous des chargement divers avec un temps de calcul raisonnable. Pour cela, l'outil permet d'utiliser les lois de comportement triaxiales quelconques au sein d'un élément poutre classique. En revanche, utiliser cet outil consiste à accepter les limites imposées par les hypothèses de la théorie des poutres. Alors, traiter des problèmes aussi complexe que celui de la torsion de poutres en béton armé, peut être contestable. Ce point mériterait d'être étudié plus en détails, en particulier en vue des applications numériques dans le domaine parasismique pour l'étude de structures complètes. En outre, on a pu montrer quelques extensions de la formulation de l'élément pour prendre en compte les effets non-linéaires en géométrie, et le cas de la précontrainte en tant que problème de condition aux limites à l'interface acier-béton.

Il nous semble que ce type de modèle pour traiter les problèmes d'interface peut être une voie fructueuse de développements futurs. Ici, on n'a montré que l'application au cas de la précontrainte (interne et externe) avec les éléments multifibres et éléments de barres avec DDL de glissement. Cette approche nécessite maintenant d'être étendue au cas du dommage à l'interface, c'est à dire au problème de la dégradation de l'adhérence entre matériaux différents. Ce problème d'interface se ne pose pas uniquement entre matériaux différents (béton-acier, roches-acier) : on peut se demander si la modélisation s'applique également à l'interface constituée par une fissure, en tant que discontinuité macroscopique à l'échelle de la structure.

Les outils développés sont intégrés dans un code de calcul industriel, CESAR-LCPC. Leur performances vont s'améliorer, en particulier au travers des exigences de la pratique courante des ingénieurs.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RB1. Références Chapitre 1

Acker P. (1988), *Comportement mécanique du béton : apports de l'approche physico-chimique*, Rapport de recherche LPC no. 152.

Bazant Z.P. et **Kim S.S.** (1979), 'Plastic-fracturing theory for concrete', *J. of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 105, No. EM3, pp. 407-428 (Errata 1980, EM2, pp. 421)

de Borst R. et **Nauta P.** (1985), 'Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model', *Engng. Computations*, 2, pp. 155-177.

de Borst R. (1991), 'Computational aspects of failure of reinforced concrete', *Colloque Lausanne*.

de Borst R., **Sluys L.J.**, **Mühlhaus H.-B.** et **Pamin J.** (1993), 'Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation', *Engineering Computing*, vol. 10, pp. 99-121.

Chen A.C.T. et **Chen W.F.** (1975), 'Constitutive relations for concrete', *J. of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 101, No. EM4, pp. 465-481.

Chen W.F. (1982), *Plasticity in reinforced concrete*, McGraw-Hill Inc.

Chen W.F. et **Han D.J.** (1988), *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag.

Chen W.F., **Yamaguchi E.** et **Zhang H.** (1991), 'On the loading criteria in the theory of plasticity', *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 679-683.

Cordebois J.P. (1983), *Critères d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations*, Thèse de doctorat d'Etat, Université Paris 6

Coussy O. (1991), *Mécanique des milieux poreux*, éd. Technip, Paris.

Dafalias Y.F. (1977), 'Il'yushin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elastoplastic coupling', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, pp. 239-251.

Dougill J.W. (1976), 'On stable progressively fracturing solids', *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 27, pp.423-437.

Eberhardsteiner J., Meschke G. et Mang H. (1987), *Triaxiales konstitutives Modellieren von Beton*, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien, Vienna, Autriche.

Fauchet B. (1991), *Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle*, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Frantziskonis G. et Desai C.S. (1987a), 'Constitutive model with strain softening', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23, No. 6, pp. 733-750.

Frantziskonis G. et Desai C.S. (1987b), 'Analysis of a strain softening constitutive model', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23, No. 6, pp. 751-767.

Frantziskonis G. et Desai C.S. (1987c), 'Elastoplastic model with damage for strain softening geomaterials', *Acta Mechanica* 68 (Springer-Verlag), pp. 151-170.

Gajer G. et Dux P.F. (1990), 'Crack band based model for FEM analysis of concrete structures', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 6, pp. 1696-1714.

Gajer G. et Dux P.F. (1991), 'Simplified nonorthogonal crack model for concrete', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 1, pp. 149-164.

Germain P. (1973), *Mécanique des milieux continus. tome 1, théorie générale*, ed. Masson, Paris.

Glemberg R., Oldenburg M., Nilsson L. et Samuelsson A. (1986), 'A general constitutive model for concrete structures', dans : *Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures - Chapter 3*, (ed E. Hinton et R.Owen), Pineridge Press, Swansea, pp. 84-100.

Halphen B. et Nguyen Q.S (1975), 'Sur les matériaux standards généralisés', *Journal de Mécanique*, 14, 1, pp. 39-63.

Han D.J. et Chen W.F. (1986), 'Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, No. 8, pp. 935-950.

Hillerborg A. (1985), 'Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_f of concrete', *Materials and structures*, RILEM, Vol. 18, No. 107, pp. 407-413.

Ju J.W. (1989), 'On energy based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, No. 7, pp. 803-833.

Jubran J.S. et Cofer W.F. (1991), 'Ultimate strength analysis of structural components using the continuum damage mechanics approach', *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 741-752.

- Karsan P. et Jirsa J.O.** (1969), 'Behaviour of concrete under compressive loading', *J. of Struct. Division*, ASCE, Vol. 95, No. ST12, pp. 2543-2563.
- Klisinski M. et Mroz Z.** (1988), 'Description of inelastic deformation and degradation of concrete', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 24, No. 4, pp. 391-416.
- Kupfer H., Hilsdorf H.K. et Rüsch H.** (1969), 'Behavior of concrete under biaxial stresses', *ACI Journal*, 66(8), pp. 656-666.
- Labbane M., Saha N.K. et Ting E.C.** (1993), 'Yield criterion and loading function for concrete plasticity', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 9, pp. 1269-1288.
- La Borderie C.** (1991), *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*, Thèse de Doctorat, Université Paris 6.
- Lemaitre J. et Chaboche J.L.** (1985, 1988), *Mécanique des matériaux solides*, ed. Dunod, Paris, 2^e édition 1988.
- Mazars J.** (1984), *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structures*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6.
- Mizuno E. et Hatanaka S.** (1992), 'Compressive Softening model for concrete', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 8, pp. 1546-1562.
- Nelissen L.J.M.** (1972), 'Biaxial testing of normal concrete', *Heron* (Delft), vol.18, no.1.
- Pekau O.A., Zhang Z.X. et Liu G.T.** (1992), 'Constitutive model for concrete in strain space', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 9, pp. 1907-1927.
- Petersson P.E.** (1980), 'Fracture energy of concrete : method of determination', *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, No.1, pp. 78-89
- Ramtani S.** (1990), *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*, Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Rashid Y.R.** (1968), 'Analysis of prestressed concrete pressure vessels', *Nuclear Engng. and Design*, 7(4), pp. 334-344.
- Resende L.** (1987), 'A damage mechanics constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete', *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 60, pp. 57-93.
- Rossi P.** (1986), *Fissuration du béton : du matériau à la structure. Application de la mécanique linéaire de la rupture*, Thèse de Doctorat de l'ENPC, Paris, décembre 1986.

Rossi P. et Richer S. (1988), 'Stochastic modelling of concrete cracking', dans : Desai C.S (ed.) *Constitutive Laws for Engineering Materials*,

Sinha B.P., Gerstle K.H. et Tulin L.G. (1964), 'Stress-strain-relations for concrete under cyclic loading', *ACI Journal*, 61(2), pp. 195-211.

Yoder P.J. et Iwan W.D. (1981), 'On the formulation of strain space plasticity with multiple loading surfaces', *Journal of Applied Mechanics*, ASME 48, pp.773-778.

Willam K.J. et Warnke E.P. (1975), 'Constitutive model for the triaxial behavior of concrete', International Association of Bridge and Structural Engineers, Seminar on Concrete Structures subjected to triaxial stresses, paper III-1, Bergamo, Italy, *IABSE Proc.* 19.

Wittmann F.H. (1982), 'Structure and fracture mechanics of concrete', *ITBTP - Séminaire "Mécanique de la rupture"*, Saint Rémy les Chevreuses, juin 1982.

REFERENCES COMPLEMENTAIRES :

Bazant Z.P. (1983), 'Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 109, No. 3, pp. 849-865.

Bazant Z.P. et Lin F.-B. (1988), 'Non-local yield limit degradation', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 26, pp. 1805-1823.

de Borst R. et Mühlhaus H.-B. (1992), 'Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 35, pp. 521-539.

Halphen B. et Salençon J. (1987), *Elasto-plasticité*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Ju J.W. (1991), 'Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 116, No. 12, pp. 2764-2770.

Pijaudier-Cabot G. et Bazant Z.P. (1987), 'Nonlocal damage theory', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 10, pp. 1512-1533.

RB2. Références Chapitre 2

Aktan A.E., Pecknold D.A. et Sozen M.A. (1974), 'R/C column earthquake response in two dimensions', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 100, pp. 1999-1041.

Argyris J.H., Dunne P.C. et Scharpf D.W. (1978a), 'On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol.15, pp. 99-135.

Argyris J.H., Dunne P.C. et Scharpf D.W. (1978b), 'On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol.14, pp. 401-451.

Argyris J.H. et Symeonidis S. (1981), 'Non linear finite element analysis of elastic systems under non conservative loading. Natural formulation. Part I. Quasistatic problems', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol.26, pp. 75-123.

Argyris J.H. (1982), 'An excursion into large rotations', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol.32, pp. 85-155.

Argyris J.H., Boni, B., Hindenlang, U. et Kleiber M. (1982), 'Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames - The natural approach', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol.35, pp. 221-248.

Armen H., Pifko A. et Levine H.S. (1968), *A finite element method for the plastic bending analysis of structures*, Grumman Research Report RE-437J.

Bathe K.J., Ramm E. et Wilson E.D. (1975), 'Finite element formulations for large deformation dynamic analysis', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 9, pp. 353-386.

Bathe K.J. et Bolourchi S. (1979), 'Large displacement analysis of three-dimensional beam structures', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 14, pp. 961-986.

Belytschko T., Schwer L. et Klein J. (1977), 'Large displacement, transient analysis of space frames', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 11, pp. 65-84.

Bergan P.G. et Holand I. (1979), 'Nonlinear finite element analysis of concrete structures', *Comp. meth. appl. mech. and engng.*, Vol. 17/18, pp. 443-467.

Billinghamurst A., Williams J.R.L., Chen G. et Trahair N.S. (1992), 'Inelastic uniform torsion of steel members', *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 6, pp. 887-894.

Blessenohl B. (1992), 'Beitrag zur Berechnung der Schnittgrößen aus Vorspannung auf elektronischen Rechenanlagen', *Bauingenieur* (RFA), Vol. 67, Springer-Verlag, pp. 167-174.

Cardona A. et Geradin M. (1988), 'A beam finite element non-linear theory with finite rotations', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 26, pp. 2403-2438.

Cariou D. (1988), *Calculs par éléments finis de structures poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles en grands déplacements élastoplastiques sous sollicitations dynamiques*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Chen P.F.-S. (1981), *Generalized plastic hinge concept for 3D beam-column elements*, Ph.D. dissert., University of California, Berkeley.

Chu K.-H. et Rampetsreiter R.H. (1972), 'Large deflection buckling of space frames', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 98, pp. 2701-2711.

Clément J.L. (1987), *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé - caractérisation - modélisation*, Thèse de Doctorat, Université Paris 6.

Cocchi G.M. et Cappello F. (1993), 'Inelastic analysis of reinforced concrete space frames influenced by axial, torsional and bending interaction', *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 1, pp. 83-97.

Conci A. et Gattass M. (1990), 'Natural approach for thin-walled beam-columns with elastic-plasticity', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 29, pp. 1653-1679.

Conci A. (1992a), 'Large displacement analysis of thin walled beams with generic open section', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 33, pp. 2109-2127.

Conci A. (1992b), 'Stiffness matrix for nonlinear analysis of thin-walled frames', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 9, pp. 1859-1875.

Connor J.Jr., Logcher R.D. et Chan S.C. (1968), 'Nonlinear analysis of elastic framed structures', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 94, pp. 1525-1547.

Coulhon B., Humbert P. et Fezans G. (1983), 'Calcul par éléments finis des ouvrages en béton précontraint', *Bull. de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Vol.127, pp. 15-24.

Ditthardt K. (1972), 'Zur Berechnung des ST.Venantschen Drillwiderstandes eines einfach zusammenhängenden geschlossenen Querschnittes', *Der Stahlbau* 11 (RFA), pp. 345-347.

Dutta A. et White D.W. (1992), 'Large displacement formulation of a three-dimensional beam element with cross-sectional warping', *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 1, pp. 9-24.

- Elachachi S.M.** (1992), *Une méthode d'analyse simplifiée des structures de Génie Civil par macro-éléments adaptés aux constructions composites et endommageables*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI.
- Elachachi S.M., Breysse D. et Colson A.** (1991), 'Calcul par macro-éléments des structures en béton armé sous sollicitations cycliques', *Proc. 2nd Int. Conf. on buildings with load bearing concrete walls in seismic zones*, Paris.
- Epstein M., Nixon D. et Murray D.W.** (1978), 'Large displacement inelastic analysis of beam-columns', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 104, pp. 841-853.
- Fliedner M.** (1993), *Confinement et reprise de l'effort tranchant dans les éléments multifibres*, Mémoire du projet de fin d'études effectué au L.C.P.C, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, Technische Universität München (RFA).
- Fouré B. et Hannachi N.** (1992), 'Comportement en "torsion mixte" et flexion des poutres en béton armé à profil ouvert', *Annales de l'ITBTP*, Série : Béton 294, No. 506, pp. 114-156.
- Gadala M.S., Dokainish M.A. et Oravas G.AE.** (1984), 'Formulation methods of geometrical and material nonlinearity problems', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 20, pp. 887-914.
- Guggenberger J.M.** (1992), *Analyse non-linéaire de poutres précontraintes*, Mémoire du projet de fin d'études effectué au L.C.P.C, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, Technische Universität München (RFA).
- Hsu T.T.C. et Lo Y.L.** (1985), 'Softening of concrete in torsional members - theory and tests', *ACI Journal*, 82(25), pp. 290-303.
- Izzuddin B.A. et Elnashai A.S.** (1993), 'Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames', *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 119, No. 3, pp. 549-569.
- Jirousek J., Bouberguig A. et Saygun A.** (1979), 'A macro-élément analysis of prestressed curved box-girder bridges', *Computers & Structures*, Vol. 10, No. 3, pp. 467-482.
- Kondoh K., Tanaka K. et Alturi S.N.** (1986), 'An explicit expression for the tangent-stiffness of a finitely deformed 3-D beam and its use in the analysis of space frames', *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 253-271.
- Kouhia R.** (1991), 'On kinematical relations of spatial framed structures', *Computers & Structures*, Vol. 40, No. 5, pp. 1185-1191.
- Kouhia R. et Tuomala M.** (1993), 'Static and dynamic analysis of space frames using simple timoshenko type elements', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 36, pp. 1189-1221.

La Borderie C., Berthaud Y. et Pijaudier-Cabot G. (1990), 'Crack closure effects in continuum damage mechanics numerical implementation', *Proc. Conference SCI-90*, N.Damjanic (ed.), Zell am See, Autriche.

Lamirault J. et Al Sulayfani B. (1987), 'Comportement cyclique des poutres en béton armé. Analyse non-linéaire et expérimentation', *Annales de l'ITBTP*, Essais et Mesures, Vol. 210, pp. 107-129.

Leung M.B. et Schnobrich W.C. (1987), 'Reinforced concrete beams subjected to bending and torsion', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 2, pp. 307-321.

Madas P. et Elnashai A.S. (1992), 'A new passive confinement model for the analysis of concrete structures subjected to cyclic and transient dynamic loading', *Earthquake engng. and structural dynamics*, Vol. 21, pp. 409-431.

Magnat V. (1993), *Modélisation de l'adhérence acier-béton dans les éléments multifibre*, Mémoire du projet de fin d'études effectué au L.C.P.C, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Malkwitz H. (1970), 'Die Errichtung einer innerstädtischen Hochbahnbrücke in Nürnberg', *Bauingenieur* 45, H.5 (RFA), pp. 172-179.

May I.M. et Al-Shaarbaf I.A.S. (1989), 'Elasto-plastic analysis of torsion using a three-dimensional finite element model', *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 3, pp. 667-678.

Mazars J. (ed) et al. (1992), *Cooperative Research Program on the seismic response of reinforced concrete structures*, 2nd phase - Interim report, GRECO Géomatériaux (France) - Ispra (Italy).

Mestat P. (1993), *Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis*, Collection : Etudes et recherches des Laboratoires Des Ponts et Chaussées, série Géotechnique GT 52, Paris.

Millard A. et al. (1991), 'Comportement cyclique et dynamique des structures en béton armé', *GRECO Géomatériaux, Rapport Scientifique 1991*, Reynouard J.M. (ed.), pp. 413-452.

Oran C. (1973), 'Tangent stiffness in space frames', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, No.6, pp. 987-1001.

Papadrakakis M. (1981), 'Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration method', *Computers & Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 393-402.

Pasquino M. et Marotti de Sciarra F. (1992), 'Buckling of thin-walled beams with open and generically variable section', *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 4, pp. 843-849.

- Rajasekran S. et Murray D.W.** (1973), 'Finite element solutions of inelastic beam equations', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, pp. 1025-1041.
- Renton J.D.** (1962), 'Stability of space frames by computer analysis', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 88, pp. 81-103.
- Salençon J.** (1988), *Mécanique des milieux continus - Tome II : Elasticité - Milieux curvolignes*, Ed. Ellipses, Paris.
- Saidi M.** (1982), 'Hysteresis models for reinforced concrete', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 108, No.5, pp.
- Sandhu J.S., Stevens K.A. et Davies G.A.O.** (1990), 'A 3D, Co-rotational, curved and twisted beam element', *Computers & Structures*, Vol. 35, No. 1, pp. 69-79.
- Sena L.G.** (1969), 'Creep, cracking and shrinkage in concrete frame structures', *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 95, pp. 2743-2761.
- Shi G. et Alturi N.** (1988), 'Elasto-plastic large deformation analysis of space frames : a plastic hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffness', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 26, pp. 589-615.
- Ulm F.J. et Clément J.L.** (1991), 'Calculs non linéaires géométriques et matériels des structures planes BA par éléments finis poutres multicouches. - Applications', *GRECO Géomatériaux, Rapport Scientifique 1991*, Reynouard J.M. (ed.), pp. 423-430.
- Ulm F.J., Clément J.L., Afra H. et Argoul P.** (1993), 'Frequenzverlust und kritische Dämpfung im Bruchzustand : Stahlbetonkonstruktionen unter dynamischen Lasten', *Bauingenieur* (RFA), Vol. 68, Springer-Verlag, pp. 183-190.
- Ulm F.J. et Magnat V.** (1993), 'Behaviour of external prestressing in structures using multifiber beam elements', *Workshop : Behaviour of external prestressing in structures - Calculation Tests*, Conti E. et Tardy R. (éd.), AFPC, Saint-Rémy-Lès-Chevreuse.
- Ulm F.J. et Guggenberger J.M.** (1993), '3D Nonlinear time-dependent analysis of RC and PC beams', *Proc. 5th RILEM Int. Symposium on creep and shrinkage of concrete*, Bazant Z.P et Carol I. (éd.), Chapman & Hall, London, pp. 573-578.
- Virtanen H. et Mikkola M.** (1985), 'Geometrically nonlinear analysis of space frames', *Rakenteiden Mekaniikka* (Finland), Vol.18, No.3, pp. 82-97.
- Vlassov B.Z.** (1962), *Pièces longues en voiles minces*, 2ième édition Moscou 1959, traduite par Smirnoff G., Ed. Eyrolles, Paris.

Wunderlich W., Obrecht H. et Schrödter V. (1986), 'Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints', *Int. j. numer. meth. eng.*, vol. 22, pp. 671-695.

Yang Y-B. et McGuire W. (1986a), 'Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 4, pp. 853-877.

Yang Y-B. et McGuire W. (1986b), 'Joint rotation and geometric nonlinear analysis', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 4, pp. 879-905.

Zeris C.A. et Mahin S.A. (1991a), 'Behaviour of reinforced concrete structures subjected to uniaxial excitation', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 9, pp. 2640-2656.

Zeris C.A. et Mahin S.A. (1991b), 'Behaviour of reinforced concrete structures subjected to biaxial excitation', *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 9, pp. 2657-2673.

RB3. Références Chapitre 3

Bathe K.J. (1982), *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

de Borst R., Sluys L.J., Mühlhaus H.-B. et Pamin J. (1993), 'Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation', *Engineering Computing*, vol. 10, pp. 99-121.

Humbert P. (1989), 'Un code général de calculs par éléments finis', *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, **160**, pp. 112-116.

Mestat P. (1992), *Programmation des lois de comportement mécanique dans le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC*, Rapport interne de LCPC, 44 pages.

Mestat P. (1993), *Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis*, Collection : Etudes et recherches des Laboratoires Des Ponts et Chaussées, série Géotechnique GT 52, Paris.

Yang Y.B. (1993), 'Major considerations on postbuckling analysis of space structures', dans : Topping B.H.V (ed.) *Developments in structural engineering*, Civil-Comp Press, 1993, pp. 307-312.

RB4. Références Chapitre 4

Bard P.Y, Afra H. et Argoul P. (1992), 'Dynamic behaviour of buildings : experimental results from strong motion data', dans : *Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, ed. Ouest, Presses Académiques, Paris.

Bertero V.V. et McClure G. (1964), 'Behaviour of reinforced concrete frames subjected to repeated reversible loads', *Journal of the American Concrete Institute*, Vol.61, No.10, pp. 1305-1330.

Carvalho et al. (1992), *Cooperative Research on the seismic response of reinforced concrete structures*, Commission contractual research activities in the area of the response of civil engineering structures to severe earthquake loading - Interim report, Lisbon (Portugal).

Conti E. et Tardy R. (Ed.) (1993), *Behaviour of external prestressing in structures. Calculation tests*. International Workshop d'AFPC, juin 9-12, 1993, St. Remy-lès-Chevreuse.

Del Toro Rivera R. (1988), *Comportement des noeuds d'ossature en béton armé sous sollicitations alternées*, Thèse de Doctorat d'ENPC, Paris.

EUROCODE 8 (1988), *Structures in seismic regions - design*. Commission of the European Communities, May 1988.

Fouré B. et Virlogeux M. (1978), 'Le flambement des poteaux compte tenu du fluage du béton', *Annls. de l'I.T.B.T.P.*, no. 359, Mars 1978.

Hand F.R., Pecknold D.A. et Schnobrich W.C. (1973), 'Nonlinear layered analysis of RC plates and shells', *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.99, No.ST7, pp. 1491-1505.

Holzer S., Somers A., Bradshaw J. (1979), 'Finite response of inelastic RC structures', *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.105, No.ST1, pp. 17-33.

Iemura H. et Jennings P.C. (1974), 'Hysteretic response of a nine floor reinforced concrete building', *Earthquake engineering and structural design*, Vol.3, pp. 183-201.

König G. et Pauli W. (1990), 'Ergebnisse von sechs Kippversuchen an schlanken Fertigteilträgern aus Stahlbeton und Spannbeton', *Beton und Stahlbetonbau*, 85, H.10, pp.253-258.

Latreche A. (1992), *Analyse dynamique et statique équivalente des structures de génie civil*, Mémoire du stage de D.E.A. effectué au L.C.P.C, ENS Cachan - Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.

Lin C.S. et Scordelis A.C. (1975), 'Nonlinear analysis of RC shells of general form', *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.101, No.ST3, pp. 523-538.

Mazars J. (ed) et al. (1992), *Cooperative Research Program on the seismic response of reinforced concrete structures*, 2nd phase - Interim report, GRECO Géomatériaux (France) - Ispra (Italy).

Ulm F.J. et Magnat V. (1993), 'Behaviour of external prestressing in structures using multifiber beam elements', *Workshop : Behaviour of external prestressing in structures - Calculation Tests*, Conti E. et Tardy R. (éd.), AFPC, Saint-Rémy-Lès-Chevreuse.

ANNEXE

ANNEXE 1 : CRITERES DE WILLAM-WARNKE

Les expressions nécessaires à l'intégration dans un code de calcul du modèle élastoplastique de Willam-Warnke présenté au chapitre 1 sont précisés ici. Il s'agit

- de l'expression analytique du coefficient de frottement $f(\theta)$ fonction de l'angle de Lode θ ,
- des dérivées des invariants du tenseur de contraintes,
- du système de quatre équations non-linéaires à résoudre pour déterminer les paramètres du modèle de Willam-Warnke modifié.

A1-1. Expression explicite du critère

On rappelle les expressions des critères de Willam-Warnke à 3 paramètres,

$$(1) \quad f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_o) \quad \text{ou} \quad f(\sigma, z) = \tau + f(\theta)(\sigma - z\rho_o)$$

et à 4 paramètres,

$$(2) \quad f(\sigma, p_{cr}) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}}(\sigma - \rho_o)^2)$$

où (σ, τ, θ) sont des invariants du tenseur de contraintes σ , définis par :

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma = \text{tr} \sigma / 3 \\ \tau = \sqrt{J_2(\sigma)} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \\ \cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{12} \tau} \end{cases}$$

avec $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ses valeurs principales, ordonnées suivant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Le coefficient de frottement f varie en fonction de l'angle de Lode θ entre deux extrêmes :

$$\begin{array}{ll} f_c = f(60^\circ) & \text{coefficient de frottement sur le méridien de compression} \\ f_t = f(0^\circ) & \text{coefficient de frottement sur le méridien de traction} \end{array}$$

L'expression analytique de $f(\theta)$ est (cf. Chen, 1988, Fauchet, 1991) :

$$(4) \quad f(\theta) = \frac{u+v}{w} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} u = 2f_c(f_c^2 - f_t^2) \cos \theta \\ v = f_c(2f_t - f_c) \sqrt{4(f_c^2 - f_t^2) \cos^2 \theta + 5f_t^2 - 4f_c f_t} \\ w = 4(f_c^2 - f_t^2) \cos^2 \theta + (f_c - 2f_t)^2 \end{cases}$$

A1-2. Expression de la dérivée du critère par rapport à σ

Pour calculer la projection d'un état de contraintes sur la surface de charge, il est nécessaire de déterminer les expressions $\partial f / \partial \sigma$ et $\partial g / \partial \sigma$. Dans le cas du critère de Willam-Warnke à 3 paramètres, on a :

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} + f(\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} + (\sigma - z\rho_o) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

où $z = 1$ dans le cas élastoplastique parfait. Pour le critère de Willam-Warnke modifié, on a :

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} + \frac{f(\theta)}{p_{cr}} (\sigma + p_{cr} - \rho_o) \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} + (\sigma - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}} (\sigma - \rho_o)^2) \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

Les dérivées des invariants (σ, τ, θ) du tenseur de contraintes s'écrivent :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \frac{\mathbf{s}}{2\tau} \quad \text{avec : } \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{1} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{12} \tau^3 \sin \theta} \mathbf{A} \end{cases}$$

avec $\mathbf{A}$ le tenseur de trace nul donné par :

$$(8) \quad \mathbf{A} = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \mathbf{s} - 2\tau^2 (2\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3)$$

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont les trois vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 .

La dérivation de l'expression (4) de $f(\theta)$ par rapport à l'angle de Lode θ donne :

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial (\cos \theta)} \sin \theta$$

où :

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial (\cos \theta)} = \frac{(u' + v') - (u + v)w'}{w^2} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} u' = 2f_c(f_c^2 - f_t^2) \\ v' = \frac{4}{v^2} w' \\ w' = 8(f_c^2 - f_t^2) \cos \theta \end{cases}$$

On a alors :

$$(11) \quad \frac{\partial f(\theta)}{\partial \sigma} = -\frac{\partial f}{\partial (\cos \theta)} \frac{1}{2\sqrt{12} \tau^3} A$$

A1-3. Paramètres du modèle de Willam-Warnke modifié

Pour le critère de Willam-Warnke modifié, 4 résultats d'essais sont nécessaires pour déterminer les quatre paramètres f_c, f_t, ρ_o et p_{α}^o . p_{α}^o est la valeur de référence de p_{α} définissant la limite d'élasticité initiale du matériau. Ces résultats d'essais correspondent à des états de contraintes situés sur les méridiens de compression ($\theta = 60^\circ$) et de traction ($\theta = 0^\circ$) :

$$(12) \quad \begin{cases} \forall \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, & \theta = 0^\circ \\ \forall \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, & \theta = 60^\circ \end{cases}$$

Parmi les résultats d'essais disponibles, il est possible d'utiliser les résistances en compression simple σ_c ($\theta = 60^\circ$), en traction simple σ_t ($\theta = 0^\circ$), en compression biaxiale σ_{bc} ($\theta = 0^\circ$), et un résultat d'essai triaxial sous forme des contraintes principales $\sigma_1^u, \sigma_2^u, \sigma_3^u$ à la ruine ($\theta = 60^\circ$ ou $\theta = 0^\circ$).

L'utilisation de ces résultats dans (2) conduit au système d'équations non-linéaires suivant :

- en compression simple : (13a) $\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} + f_c(-\frac{1}{3}\sigma_c - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}^o}(-\frac{1}{3}\sigma_c - \rho_o)^2) = 0$
- en traction simple : (13b) $\frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} + f_t(\frac{1}{3}\sigma_t - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}^o}(\frac{1}{3}\sigma_t - \rho_o)^2) = 0$
- en compression biaxiale : (13c) $\frac{\sigma_{bc}}{\sqrt{3}} + f_t(-\frac{2}{3}\sigma_{bc} - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}^o}(-\frac{2}{3}\sigma_{bc} - \rho_o)^2) = 0$
- essai triaxial : (13d) $\tau_{\text{triax-u}} + f_{c,t}(\sigma_{\text{triax-u}} - \rho_o + \frac{1}{2p_{cr}^o}(\sigma_{\text{triax-u}} - \rho_o)^2) = 0$

En l'absence de résultats d'essais triaxiaux particuliers, on utilisera par défaut les valeurs suivantes (d'après *Chen et Han*, 1988) :

$$\begin{cases} \tau_{\text{triax-u}} = 2,4473\sigma_c \\ \sigma_{\text{triax-u}} = -3,9\sigma_c \\ \theta = 0^\circ, \quad f = f_t \end{cases}$$

Un schéma itératif de type Newton permet la détermination des inconnues f_c, f_t, ρ_o et p_{cr}^o à partir des équations (13). Pour valeurs initiales, on prendra les valeurs du critère de Willam-Warnke à 3 paramètres, qui peut se mettre sous la forme explicite suivante:

$$(14) \quad \begin{cases} f_t = \frac{\sqrt{3}(\sigma_{bc} - \sigma_t)}{(\sigma_t + 2\sigma_{bc})} \\ \rho_o = \sigma_t(\sqrt{3} + f_t)/3f_t \\ f_c = \frac{\sqrt{3}\sigma_c}{\sigma_c + 3\rho_o} \end{cases}$$

et comme valeur initiale de p_{cr}^o la valeur $p_{cr}^o = 2\sigma_c$. Cette procédure itérative converge assez rapidement, car les valeurs données par les relations (14) sont toujours très proches de celles obtenues à la fin des itérations. Ce schéma itératif est intégré dans le programme (lecture des données), afin de ne pas obliger l'utilisateur à déterminer ces paramètres manuellement.

ANNEXE 2 : ELEMENT POUTRE MULTIFIBRE

Les expressions nécessaires pour l'intégration dans un code de calcul de l'élément poutre multifibre présenté au chapitre 2 sont précisées ici. Il s'agit

- de l'expression des fonctions d'interpolation du champ de déplacement discrétisé sans et avec déplacements relatifs,
- de l'expression des matrices $[B^b]$ et $[B^r]$ des dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément à $12+2=14$ degrés de liberté avec déplacements relatifs (cf. 2-2-3-2 et 2-3-2-4),
- des expressions de la matrice de rigidité pour l'élément à 14 DDL (cf. 2-3-2-8).

A2-1. Champ de déplacement discrétisé

L'expression du vecteur de déplacement de la fibre k est :

$$(1) \quad \xi_k = \xi_{bk} + \xi_{rk}$$

où ξ_{bk} est le vecteur de déplacement de la fibre k repérée par le vecteur de position PQ de composantes $(0, x_{2k}, x_{3k})$ dans le repère local de l'élément de vecteur de base e_i ($i = 1, 3$). Q est le centre de gravité de la fibre k , et P sa projection sur l'axe de référence de l'élément. D'après les hypothèses posées, issues de la théorie des poutres (*Navier-Bernoulli*, etc.), on a :

$$(2) \quad \xi_{bk} = \xi_o - \left(\frac{d\xi_o}{dx_1} \cdot PQ + \frac{d\omega_1^i}{dx_1} \varphi(x_2, x_3) \right) e_1 + \omega_1^i e_1 \wedge (PQ - PT)$$

avec les composantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_{1bk} = \xi_{bk} \cdot e_1 = \xi_1^i - x_{2k} \frac{d\xi_2^i}{dx_1} - x_{3k} \frac{d\xi_3^i}{dx_1} + \frac{d\omega_1^i}{dx_1} A x_{2k} x_{3k} \\ \xi_{2bk} = \xi_{bk} \cdot e_2 = \xi_2^i - (x_{3k} - x_{3l}) \omega_1^i \\ \xi_{3bk} = \xi_{bk} \cdot e_3 = \xi_3^i + (x_{2k} - x_{2l}) \omega_1^i \end{cases}$$

Dans (1), ξ_{α} est le vecteur des déplacements relatifs de la fibre k (relatif par rapport aux déplacements de la poutre, donnés par (2)). On suppose que ξ_{α} est toujours dirigé suivant la tangente $\mathbf{t}$ de l'abscisse curviligne $s(x_1)$ de la fibre :

$$(4) \quad \xi_{\alpha k} = \xi_{\alpha}(s)\mathbf{t}$$

où :

$$(5) \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{e}_1 + x_{2k}' \mathbf{e}_2 + x_{3k}' \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + x_{2k}'^2 + x_{3k}'^2}} = t_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec : } (') = d() / dx_1$$

Le vecteur des déplacements ξ_{bk} est le vecteur des déplacements classiques d'une poutre tridimensionnelle. Utiliser un élément fini poutre 3D à 2 noeud (A,B) conduit à discrétiser ce vecteur en 12 degrés de liberté (6 à chaque noeud) :

$$(6) \quad \{\xi^b\}_i = \{\xi_{1i}^p, \xi_{2i}^i, \xi_{3i}^i, \omega_{1i}^i, \omega_{2i}^i, \omega_{3i}^i, 0\} \quad i=A,B$$

par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation pour un schéma d'intégration de type Gauss à deux points :

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_1^p = (\frac{1-r}{2})\xi_{1A}^p + (\frac{1+r}{2})\xi_{1B}^p \\ \xi_2^i = N_1(r)\xi_{2A}^i + N_2(r)\xi_{2B}^i + N_3(r)\omega_{3A} + N_4(r)\omega_{3B} \\ \xi_3^i = N_1(r)\xi_{3A}^i + N_2(r)\xi_{3B}^i + N_3(r)\omega_{2A} + N_4(r)\omega_{2B} \\ \omega_1^i = (\frac{1-r}{2})\omega_{1A}^i + (\frac{1+r}{2})\omega_{1B}^i \end{cases}$$

avec $r = 2x_1 / \ell - 1$, $r \in [-1, 1]$ et :

$$(8) \quad \begin{cases} N_1(r) = 0,5 - 0,75r + 0,25r^3 \\ N_2(r) = 0,5 + 0,75r - 0,25r^3 \\ N_3(r) = 0,125\ell(1 - r - r^2 + r^3) \\ N_4(r) = 0,125\ell(-1 - r + r^2 + r^3) \end{cases}$$

Le vecteur ξ_{α} est défini selon l'abscisse curviligne $s(x_1)$. Dans l'élément à deux noeuds, on utilise des degrés de liberté supplémentaires :

$$(9) \quad \{\xi^r\}_i = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \xi_{\alpha i}\} \quad i=A,B$$

avec une interpolation linéaire en s telle que :

$$(10) \quad \xi_{\alpha} = \left(\frac{1-\bar{r}}{2}\right)\xi_{\alpha A} + \left(\frac{1+\bar{r}}{2}\right)\xi_{\alpha B} \quad \text{avec : } \bar{r} \in [-1, 1]$$

où $\bar{r} = 2s/\bar{\ell} - 1$, et $\bar{\ell}$ la longueur de la fibre inclinée.

L'élément multifibre avec degrés de liberté de glissement comporte ainsi $12+2=14$ DDL, et le vecteur des paramètres de déplacements et rotations nodaux s'écrit :

$$(11) \quad \{\xi\} = \{\xi^b\} + \{\xi^r\}$$

avec $\{\xi^b\}$ le vecteur des paramètres nodaux de déplacements et rotations "classiques" d'un élément de poutre (donné par (6)), et $\{\xi^r\}$ le vecteur des paramètres nodaux de déplacements relatifs (donné par (9)). Les composantes de ces deux vecteurs ne sont pas définies dans la même base vectorielle : les composantes de $\{\xi^b\}$ sont définies dans la base de la poutre ($e_i, i=1,3$), tandis que les composantes de $\{\xi^r\}$ sont définies dans la base de la fibre inclinée (t, n, b).

A2-2. Matrice des dérivées des fonctions d'interpolation

On donne ici les expressions des matrices des dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément multifibre.

L'expression du tenseur de déformations linéarisé est :

$$(12) \quad \epsilon_{(k)} = \epsilon_{(k)}^b + \epsilon_{(k)}^r$$

où $\epsilon_{(k)}^b$ est le tenseur des déformations dans la fibre k , qui se dérive à partir du champ de déplacement (2) issu de la théorie des poutres. $\epsilon_{(k)}^r$ est le tenseur de déformations qui se dérive à partir du champ de déplacement de glissement (4).

On rappelle que le tenseur $\epsilon_{(k)}^b$ dérivé à partir de (2), n'a que des trois composantes $\epsilon_{11}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}$:

$$(13) \quad \begin{cases} \epsilon_{11}^b = \frac{d\xi_1^p}{dx_1} - \left(\frac{d^2\xi_0}{dx_1^2} \cdot PQ \right) \\ 2\epsilon_{12}^b = \frac{d\omega_1^t}{dx_1} ((A-1)x_3 + x_{3t}) \\ 2\epsilon_{13}^b = \frac{d\omega_1^t}{dx_1} ((A+1)x_2 - x_{2t}) \end{cases}$$

A2-2-1. Matrice [B] standard

Pour l'élément à 12 DDL (formulation standard, cf. 2-2-3-2), ou pour des fibres avec adhérence parfaite, où $\epsilon_{(k)}^r = 0$ et $\epsilon_{(k)} = \epsilon_{(k)}^b$, on écrit sous forme vectorielle :

$$(14) \quad \{\epsilon\}_k = [B]_k \{\xi\} \quad \text{où :} \quad \{d\epsilon\}_k = \{d\epsilon_{11}, 2d\epsilon_{12}, 2d\epsilon_{13}\}_k$$

où $\{\xi\}$ est les vecteurs des 12 paramètres nodaux de l'élément poutre choisi. L'utilisation de la discrétisation (7) avec les fonctions d'interpolation (8) dans (13), conduit à la matrice [3,12] des dérivées de fonctions d'interpolation $[B]_k$ suivante :

$$(15) \quad [B]_k = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6\frac{x_{2k}}{\ell}r & 0 & 0 \\ -6\frac{x_{3k}}{\ell}r & 0 & 0 \\ 0 & -(A-1)x_{3k} - x_{3i} & -(A+1)x_{2k} + x_{2i} \\ x_{3k}(3r-1) & 0 & 0 \\ -x_{2k}(3r-1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6\frac{x_{2k}}{\ell}r & 0 & 0 \\ 6\frac{x_{3k}}{\ell}r & 0 & 0 \\ 0 & (A-1)x_{3k} + x_{3i} & (A+1)x_{2k} - x_{2i} \\ x_{3k}(3r+1) & 0 & 0 \\ -x_{2k}(3r+1) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul du vecteur des efforts intérieurs et le calcul de la matrice de rigidité, l'intégration s'effectuera aux deux points de Gauss définis par $r = \pm 1/\sqrt{3}$.

A2-2-1. Matrice [B] pour le cas du glissement

Pour une fibre avec glissement, on écrit les six composantes $(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23})$ du tenseur de déformations linéarisé sous forme vectorielle dans la base de la poutre $(e_i, i = 1, 3)$:

$$(16) \quad \{\epsilon\}_k = \left[[B^b]_k + [B^r]_k \right] \{\xi\}$$

avec $\{\xi\}$ le vecteur de 14 DDL donné par (14).

La matrice $[B^b]_k$ est la matrice $[B]_k$ des dérivées des fonctions d'interpolation (15) de l'élément poutre, écrit sous forme d'une matrice [6,14]. La matrice $[B^r]_k$ est définie par :

$$(17) \quad [B^r]_k = \{t_i t_j\} \frac{d}{ds} \{N(s)\} \quad \text{avec : } \{t_i t_j\} = \{t_1 t_1, t_2 t_2, t_3 t_3, t_1 t_2, t_1 t_3, t_2 t_3\}$$

Les composantes du vecteur $\{t_i t_j\}$ sont à calculer à partir de (5). Dans (17), $\{N(s)\}$ est le vecteur des fonctions d'interpolation en s , écrit à partir de (10) sous la forme :

$$(18) \quad \{N(s)\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1-\bar{r}}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1+\bar{r}}{2}\}$$

avec $\bar{r} = 2s / \ell - 1$.

A2-3. Matrice de rigidité de l'élément multifibre à 14 DDL

La contribution de la fibre k inclinée à la matrice de rigidité tangente de l'élément multifibre a été écrite en prenant en compte des glissements et des frottements sous la forme (cf. 2-3-2-8) :

$$(19) \quad [K] = [K^{bb}] + \alpha([K^{br}] + [K^{rb}]) + \alpha^2([K^{rr}] + [K^{rr}]) + \alpha[K^{bf}]$$

- La matrice $[K^{bb}]$ est la contribution de la fibre inclinée à la matrice de l'élément poutre à 12 DDL, c'est à dire celle de l'élément "standard". Elle se détermine à partir de :

$$(20) \quad [K^{bb}] = \int_0^\ell [B^b]_k [C^p] [B^b]_k a_k t_1 dx_1$$

avec $a_k t_1$ la section de la fibre inclinée orientée par e_1 , et a_k la section orientée par t . En notant $E_{(t)}$ le module tangent de la courbe $\sigma - \varepsilon$ uniaxiale, précisé au paragraphe 2-3-2-6, la matrice $[C^p]$ s'écrit:

$$(21) \quad [C^p] = E_{(t)} \{t_i t_j\} \{t_i t_j\}$$

Lors de l'assemblage de la matrice globale (maillage, changement de repère), la matrice $[K^{bb}]$ est transférée de manière habituelle (2 rotations).

- $[K^{br}]$ et $[K^{rb}]$ représentent les termes matriciels de couplage entre le champ de déplacement de glissement (indice r=relatif) et celui de la poutre (indice b=bernoulli). Ils se déterminent à partir de :

$$(22) \quad [K^{br}] = \int_0^\ell [B^b]_k [C^p] [B^r]_k a_k t_1 dx_1 \quad \text{et} \quad [K^{rb}] = \int_0^\ell [B^r]_k [C^p] [B^b]_k a_k t_1 dx_1$$

Lors de l'assemblage de la matrice globale (changement de repère), en raison de la définition des DDL de déplacements relatifs, une seule rotation est à effectuer. Notant $[R]$ la matrice de rotation de changement de repère (repère local - repère global), on a :

$$(23) \quad [K^{br}]^{globale} = [R][K^{br}] \quad \text{et :} \quad [K^{rb}]^{globale} = [K^{rb}][R]$$

- $[K^r]$ est la matrice de rigidité "du glissement libre". Elle s'écrit :

$$(24) \quad [K^r] = \int_l [B^r]_k [C^r] [B^r]_k^T a_k dx_1 = \int_l \frac{d}{ds} \{N(s)\} E_{(v)} \frac{d}{ds} \{N(s)\} a_k dx_1$$

On remarque sous cette forme que les composantes de la matrice $[K^r]$ sont définies en fonction de l'abscisse curviligne s . Par conséquent, elles ne sont pas à transférer dans le repère global lors de l'assemblage de la matrice de rigidité totale.

- $[K^f]$ est la matrice de rigidité due au couplage glissement - frottement. Comme la matrice $[K^r]$, ces composantes sont définies en fonction de l'abscisse curviligne s :

$$(25) \quad [K^f] = \int_l f_l \left(\frac{d}{ds} \{N(s)\} \right) E_{(v)} \{N(s)\} ds$$

où $f_l = -\text{sgn}(\xi_{\alpha}) \tan \varphi a_k / R$.

- $[K^{bf}]$ est la matrice de rigidité due au couplage entre déplacements de la poutre et effets du frottement. Cette matrice est non-symétrique. Ici, nous la négligeons.

Le schéma de la *figure A2-1* donne une illustration de ces composantes de la matrice de rigidité (19).

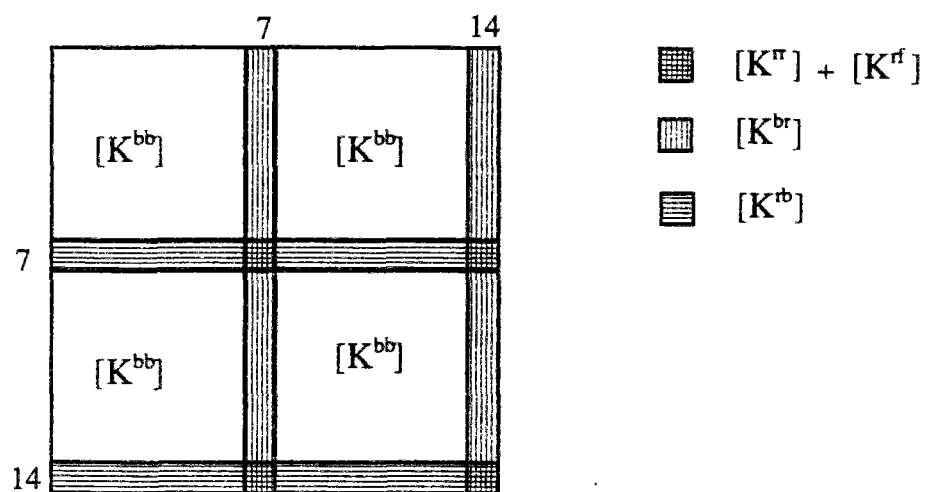


Figure A2-1 : Schéma de la structure de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément à 14 DDL.

ANNEXE 3 : ROTATIONS SEMI-TANGENTIELLES

On expose ici le traitement semi-tangentiel des paramètres de rotations des poutres en grands déplacements. Dans la description lagrangienne corotationnelle choisie, cette procédure permet le passage du repère fixe de vecteurs de base $\mathbf{E}_i, i=1,3$ au repère de référence de la poutre en mouvement de corps rigide, de vecteurs de base $\bar{\mathbf{e}}_i, i=1,3$ (cf. *figure A3-1*). La procédure utilisée est celle proposée par *Cariou* (1988).

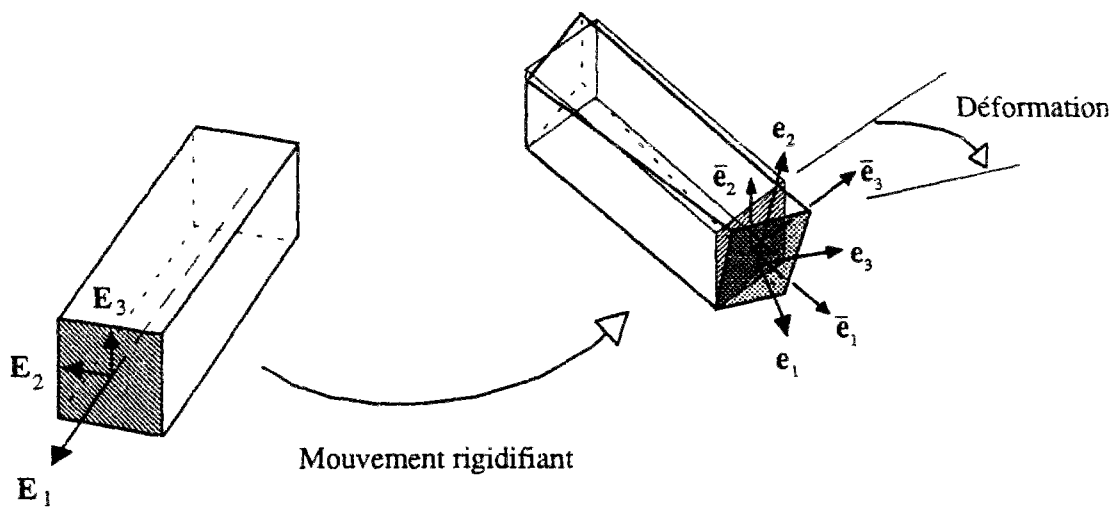


Figure A3-1 : Rappel de la description lagrangienne corotationnelle.

A3-1. Rotations infinitésimales et rotations finies

Le traitement des paramètres de rotations joue un rôle important dans l'analyse non-linéaire géométrique de poutres tridimensionnelles. La difficulté majeure du problème à traiter réside dans le fait que les rotations tridimensionnelles finies autour d'axes fixes ou mobiles ne constituent pas une quantité vectorielle. La composition de rotations successives ne peut plus être appliquée sans que le résultat ne dépende de l'ordre dans lequel les opérations ont été effectuées. Ce problème est amplement traité en références (*Argyris et al.*, 1978; *Argyris*, 1982; *Kondoh et al.*, 1986, *Cardona et Geradin*, 1988; *Shi et Alturi*, 1988; *Cariou*, 1988,...).

Rappelons d'abord l'approximation effectuée en analyse linéaire des poutres. $\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 3$) sont les directions des axes de la poutre dans la configuration initiale (de référence). Après déformations, ces axes sont orientés par les vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 3$). Avec $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur de rotations des composantes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ autour des axes de la poutre, en rotation infinitésimales, on a :

$$(1) \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{E}_i + \dots$$

Cette linéarisation est à la base du champ de déplacement de Bernoulli, précisé au paragraphe 2-2-2-3.

En analyse non-linéaire (grands déplacements), la non-commutativité des rotations finies ne permet pas une décomposition linéaire de la forme (1). Les relations (1) deviennent :

$$(2) \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i$$

où $\mathbf{R}$ est l'opérateur linéaire de rotation entre les configurations initiale et actuelle déformée, vérifiant la propriété d'orthogonalité. $\mathbf{R}$ est fonction de trois paramètres de rotations décrivant la rotation. Il en existe de variés : angles d'Euler, vecteur de rotation, pseudo-vecteur de rotation, ... (cf. Cardona et Geradin, 1988).

A3-2. Rotations semi-tangentielles

Ici, un paramétrage en pseudo-vecteurs de rotations (ou paramètres de Rodrigues) a été choisi : les rotations semi-tangentielles, définies initialement par Argyris (1978, 1982). En particulier, on utilise la procédure proposée par Cariou (1988), rappelée brièvement dans la suite.

L'équation (2) décrit le passage entre la configuration initiale et la configuration actuelle (figure A3-1). L'opérateur $\mathbf{R}$ est fonction des rotations totales (mouvement rigidifiant + déformation). Notons $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur des rotations totales de composantes $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ autour des axes fixes de base $\mathbf{E}_i$, $i = 1, 3$. Avec un paramétrage semi-tangentiel des rotations, on a :

$$(3) \quad \mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{2}{1 + \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}'} \left(\overline{\boldsymbol{\Omega}'} + \overline{\boldsymbol{\Omega}'}^2 \right)$$

où Ω' est le "pseudo-vecteur de rotation", défini par :

$$(4) \quad \Omega' = \tan(\|\Omega\|/2) \frac{\Omega}{\|\Omega\|} \quad \text{avec : } \|\Omega\| = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}$$

On note $\mathbf{n} = \Omega/\|\Omega\|$ le vecteur unitaire de la rotation $\Omega' = \tan(\|\Omega\|/2)$. Le pseudo-vecteur de rotation Ω' s'interprète comme le vecteur des rotations autour d'un axe mobile $\mathbf{n}$. L'équation (4) peut également s'écrire sous la forme :

$$(5) \quad \Omega' = \tan \frac{\Omega_1}{2} \mathbf{E}_1 + \tan \frac{\Omega_2}{2} \mathbf{E}_2 + \tan \frac{\Omega_3}{2} \mathbf{E}_3 = \Omega'_i \mathbf{E}_i$$

Dans (3), $\overline{\overline{\Omega'}}$ est le tenseur antisymétrique fonction des composantes cartésiennes $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ du pseudo-vecteur de rotation Ω' . Sous une forme matricielle il s'écrit :

$$(6) \quad \overline{\overline{\Omega'}} = \begin{bmatrix} 0 & -\tan(\Omega_3/2) & \tan(\Omega_2/2) \\ \tan(\Omega_3/2) & 0 & -\tan(\Omega_1/2) \\ -\tan(\Omega_2/2) & \tan(\Omega_1/2) & 0 \end{bmatrix}$$

Le pseudo-vecteur de rotation Ω' a une propriété importante : la commutativité.

Considérons l'application successive des deux pseudo-vecteurs de rotations Ω'_0 et ω' . En particulier, on note Ω'_0 le pseudo-vecteur de rotation de corps rigide et ω' le pseudo-vecteur de rotation qui entraîne des déformations ("rotation de distorsion", description lagrangienne corotationnelle). Le vecteur pseudo-vecteur de la rotation totale (corps rigide + déformation) s'écrit (cf. Cariou, 1988) :

$$(7) \quad \Omega' = \frac{1}{1 - \Omega'_0 \cdot \omega'} [\Omega'_0 + \omega']$$

Avec l'hypothèse de petites déformations, le vecteur ω' est un vecteur dont la norme est faible devant l'unité. L'expression (7) se simplifie sous la forme :

$$(8) \quad \Omega' \approx [\Omega'_0 + \omega']$$

Utilisant la définition (5), on a :

$$(9) \quad \omega' = \tan \frac{\omega_1}{2} \bar{e}_1 + \tan \frac{\omega_2}{2} \bar{e}_2 + \tan \frac{\omega_3}{2} \bar{e}_3$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des rotations autours des axes de direction $\bar{e}_i, i = 1, 3$ dans la configuration de référence du mouvement de corps rigide, qui provoquent des déformations (rotations de distorsion). Elles se déterminent à partir de :

$$(10) \quad \tan \frac{\omega_i}{2} = \omega' \cdot \bar{e}_i$$

Notant $\bar{e}_1$ l'orientation de la section dans la configuration de référence et e_1 l'orientation de la section dans la configuration actuelle (cf. *figure A3-1*) le pseudo-vecteur de rotation ω' est perpendiculaire en e_1 et en $\bar{e}_1$ (Carriou, 1988), donc perpendiculaire au plan défini par la normale:

$$(11) \quad n = \frac{e_1 \wedge \bar{e}_1}{\|e_1 \wedge \bar{e}_1\|}$$

Utilisant (11) dans (4), on a :

$$(12) \quad \omega' = -\tan(\|\omega\|/2) \frac{\bar{e}_1 \wedge e_1}{\|\bar{e}_1 \wedge e_1\|}$$

avec la relation trigonométrique suivante :

$$(13) \quad \tan \frac{\|\omega\|}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\|\omega\|}{1 + \cos\|\omega\|}} = \sqrt{\frac{1 - e_1 \cdot \bar{e}_1}{1 + e_1 \cdot \bar{e}_1}}$$

on obtient l'expression (12) de ω' uniquement en fonction des directions $\bar{e}_1$ et e_1 des axes de référence de la poutre de la configuration de référence et de la configuration actuelle :

$$(14) \quad \omega' = -\sqrt{\frac{1 - e_1 \cdot \bar{e}_1}{1 + e_1 \cdot \bar{e}_1}} \frac{\bar{e}_1 \wedge e_1}{\|\bar{e}_1 \wedge e_1\|}$$

Le vecteur de base $\mathbf{e}_i$ est donné par l'expression (2) avec (3), où l'opérateur $\mathbf{R}$ est fonction des rotations totales connues (corps rigide + déformation), calculées à l'instant t dans le repère global. Pour un élément de poutre rectiligne, le vecteur $\bar{\mathbf{e}}_i$ représente la direction de l'axe de référence après mouvement de corps rigide. $\bar{\mathbf{e}}_i$ s'exprime dans la base vectorielle $\mathbf{E}_i, i=1,3$ à partir de la donnée de la translation de deux points de l'axe de référence. D'un point de vue pratique, $\bar{\mathbf{e}}_i$ se détermine à partir des données dans le repère global des degrés de liberté de translation de deux noeuds successifs.

Avec les composantes connues de $\boldsymbol{\omega}'$, le pseudo-vecteur des rotations du mouvement de corps rigide se détermine à partir de (8) :

$$(15) \quad \boldsymbol{\Omega}'_0 = \boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega}' + \sqrt{\frac{1 - \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i}{1 + \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i}} \frac{\bar{\mathbf{e}}_i \wedge \mathbf{e}_i}{\|\bar{\mathbf{e}}_i \wedge \mathbf{e}_i\|}$$

Enfin, utilisant (15) dans (3), les vecteur de base $\bar{\mathbf{e}}_i, i=1,3$ appartenant à la configuration de référence du corps rigide sont déterminées par :

$$(16) \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_i \quad \text{avec : } \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Omega}'_0)$$

ce qui conduit à :

$$(17) \quad \tan \frac{\omega_i}{2} = - \sqrt{\frac{1 - \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i}{1 + \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i}} \frac{\bar{\mathbf{e}}_i \wedge \mathbf{e}_i}{\|\bar{\mathbf{e}}_i \wedge \mathbf{e}_i\|} \cdot \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Omega}'_0) \cdot \mathbf{E}_i$$

$\omega_i (i=1,3)$ sont les rotations autour des axes de directions $\bar{\mathbf{e}}_i, i=1,3$ de la configuration de référence. Ces rotations provoquent des déformations (rotations de distorsion).

