

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MEMOIRE DE DEA DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sujet du Mémoire

**ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES :
théorie et pratique**

Présenté et soutenu publiquement le 29 Novembre 2004 à 10 H – A7

par

Monsieur Cheikhna Hamallah NDIAYE

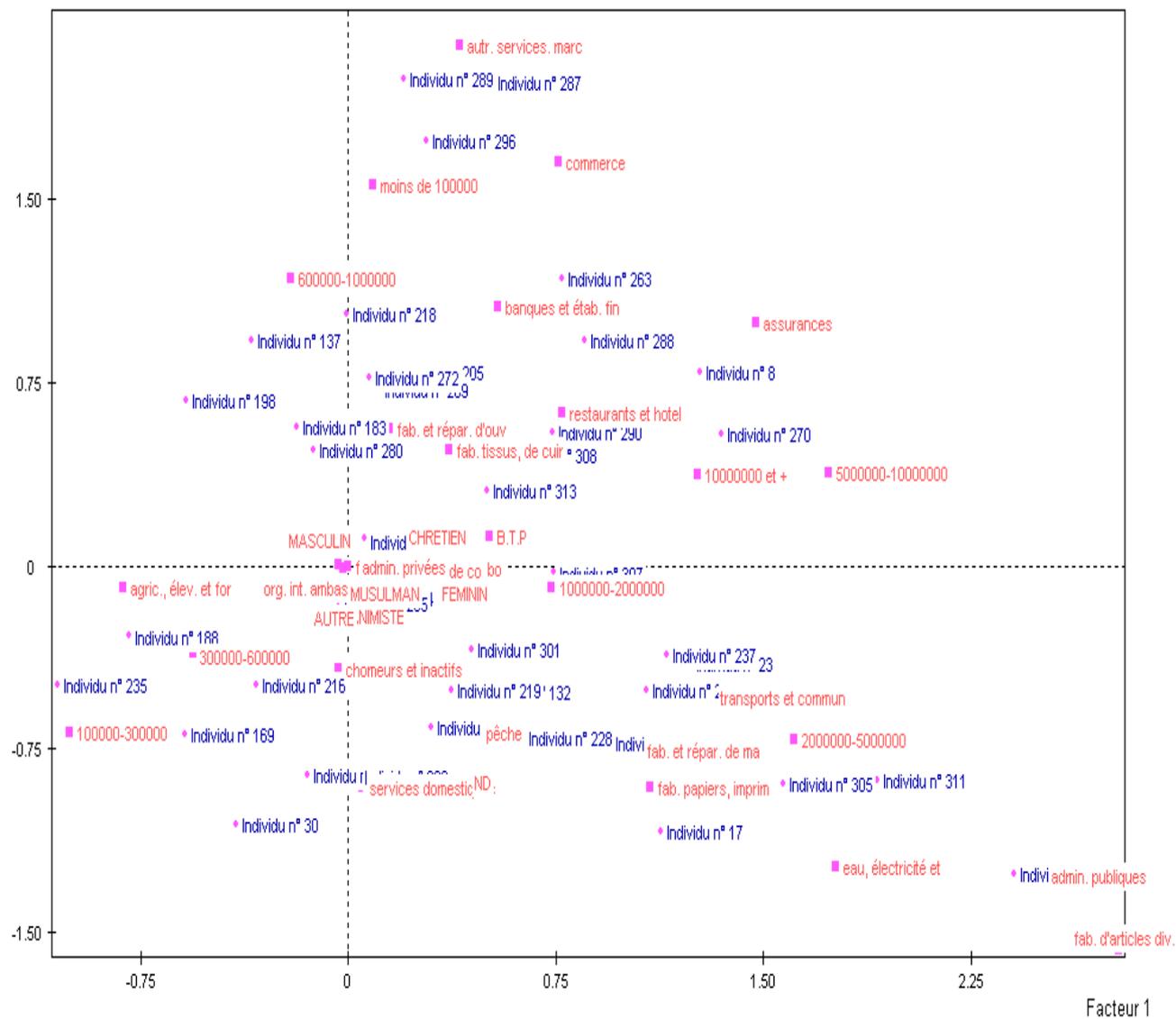
Sous la direction de PAPA NGOM

Devant le Jury composé de :

<u>Président</u> :	Mamadou SANGHARE	Professeur	UCAD
<u>Membres</u> :	Alassane DIEDHIOU	Maître - Assistant	UCAD
	Serigne Aliou LO	Maître - Assistant	UCAD
	Papa NGOM	Maître - Assistant	UCAD
	Sada Sory THIAM	Maître - Assistant	UCAD

Année Universitaire 2003 - 2004

Facteur 2



PLAN

	Pages
INTRODUCTION	2
PREMIERE PARTIE : L'ERE DE LA MECANISATION	
I-La doctrine mécaniste : une réaction contre le finalisme.....	7
I-1- Le finalisme d'Aristote.....	8
I-2- Naissance et expansion du mécanisme.....	13
II- L'obstacle de la vie.....	21
II-1- Le dualisme cartésien.....	22
II-2- Le monisme radical.....	26
DEUXIEME PARTIE : LE BERGSONISME OU LE DEVELOPPEMENT DES IDEES «DERNIERES» DU MECANISME	
I-Les limites de l'approche mécaniste du vivant.....	32
II- L'intuition-mère du bergsonisme : la durée.....	35
TROISIEME PARTIE : LE NOUVEL ECLAIRAGE DE LA DUREE	
I-La théorie bergsonienne de la vie.....	49
I-1- Qu'est-ce que la vie.....	51
I-2- L'évolution de la vie.....	59
II-Le problème de la connaissance.....	70
II-1- De la connaissance scientifique : L'intelligence.....	70
II-2- De la connaissance métaphysique : L'intuition.....	74
CONCLUSION	80
BIBLIOGRAPHIE	82

INTRODUCTION

«Le scientisme tel qu'on le vit naître et se désigner au début de ce siècle consiste en l'idée que la science seule constitue une connaissance authentique et vérifiable et qu'en conséquence elle seule, selon son esprit et avec ses méthodes peut résoudre tous les problèmes, tant intellectuels que moraux»¹.

Cette foi en la toute puissance de la science qui s'accompagne d'un mépris pour toute autre forme de connaissance est-elle juste ou aveugle ? Tenter de répondre tant bien que mal à cette question, telle est notre ambition dans le sujet que nous nous sommes proposés.

La philosophie – comme tout le monde s'accorde à le dire – est fille de l'étonnement. Elle est née le jour où, les Milésiens ont changé en curiosité leur admiration pour la nature. Elle est donc essentiellement une interrogation sur le monde et les phénomènes dont il est le théâtre.

Qu'est-ce que le monde ? Comment s'expliquent les phénomènes qui nous entourent ? Quelle place occupons-nous dans l'univers ? Que pouvons-nous connaître ?

Voilà des questions dont les réponses constituent le préalable à toute recherche. Aucune connaissance, aucune science n'est possible sans un cadre théorique ou, ce que Kuhn appelle un paradigme qui lui fournit la nature de son objet ainsi que les procédés méthodologiques requis pour son étude. Aussi, toute connaissance tire-t-elle sa valeur de la légitimité de ses présupposés théoriques.

Au XVII^e siècle apparaît une nouvelle philosophie, c'est-à-dire une nouvelle manière de voir et d'étudier les phénomènes. Il s'agit du *mécanisme* qui a permis la naissance et le développement de la science positive qui n'en est que l'application. Comme toute doctrine, le mécanisme cherche à produire la formule englobant systématiquement tous les objets de l'expérience et de la réflexion ; son but est de circonscrire le réel.

Pour ce faire, la doctrine mécaniste considère l'univers tout entier comme un ensemble de corps matériels agissant et réagissant entre eux selon des lois déterministes. La science mécaniste consistera donc à n'expliquer les phénomènes de la nature que par les lois des mouvements de la matière. Ce faisant, l'homme parviendra à l'intelligence de l'univers et s'en rendra « *maître et possesseur* ».

L'univers tel que conçu par les mécanistes est matériel et homogène, régis partout par les mêmes lois. Cette conception se heurte cependant à une difficulté.

1- Emile Callot, Les limites de la philosophie naturelle de la biologie moderne, Presses de l'Imprimerie Labadie S. A., 1972, p.7 Coll. La Pensée Universelle

En effet, si le monde tout entier est composé de matière, l'expérience nous montre que la nature n'est point faite que de la matière inerte ; elle est tout aussi le théâtre du phénomène de la vie. Celle-ci peut-elle être appréhendée comme la matière inorganique ? Le phénomène vital obéit-il aux mêmes lois que les autres faits naturels qui se singularisent par leur inertie ?

Descartes, un des fondateurs de la nouvelle science, est bien conscient de cette difficulté lui qui reconnaît au corps humain toute sa spécificité, non seulement par rapport aux corps inertes, mais aussi par rapport aux autres corps vivants. Pour lui, si le corps d'un animal est identique à une machine dont l'interaction des différentes parties assure son fonctionnement, on ne peut pas en dire autant du corps humain, car celui-ci est indissociablement uni à une âme. Le cartésianisme est un dualisme en ce sens qu'il admet l'existence de deux substances irréductibles l'une à l'autre que sont le corps et l'âme. Comment dès lors envisager leur union dans la perspective mécaniste ?

La science mécaniste butera pendant longtemps sur ce qu'on peut appeler l'exception du corps humain ou tout simplement du corps vivant.

Partout ailleurs, elle remporte incontestablement cependant, des succès de plus en plus probants. Les sciences physiques connurent un si grand essor au XVIII^e siècle que l'idée naquit selon laquelle la méthode expérimentale (celle de la physique) doit être utilisée pour la connaissance du vivant. Pour cela, il faut dépasser le dualisme cartésien et lui substituer un matérialisme radical qui fait de l'âme une fonction du corps. C'est dire que l'âme n'est pas une substance distincte, mais un produit du corps, donc d'une certaine organisation de la matière. Telle fut la condition de l'émergence d'une *science biologique* qui étudiera expérimentalement son objet (l'être vivant) à l'instar des sciences de la matière inerte.

Ce parti pris d'une étude expérimentale du phénomène vital, dicté par une croyance en la capacité de la science positive à tout expliquer, n'est pas sans susciter de sérieuses interrogations.

On ne peut, en effet, s'empêcher de se demander comment la matière inerte parvient-elle, par une certaine disposition de ses parties, à produire de la sensibilité. Par ailleurs, ramenant le corps vivant au statut de corps inanimé, la biologie mécaniste ne laisse-t-elle pas de côté, volontairement ou non, ce par quoi s'identifie son objet ?

Quoi qu'il en soit, il faut bien admettre que la vie, c'est-à-dire l'essence des corps vivants est par nature différente de la matière. Dès lors, n'échappera-t-elle pas à la science mécaniste dont les cadres semblent plutôt faits pour la matière ?

Au cas échéant, le mécanisme faillirait inévitablement à sa mission qui est de circonscrire le réel ; une partie de celui-ci se déroband à son analyse.

Toujours est-il que la philosophie mécaniste connaît des fortunes diverses selon qu'elle s'applique à la matière inerte ou aux organismes. Vu le retard accusé de plus en plus par la biologie sur les sciences de la matière, ne faut-il pas limiter l'objet du mécanisme à la matière inerte ?

Tel est en tout cas l'avis de certains penseurs avertis épris de rigueur, qui demandent et cherchent une nouvelle intelligibilité pour la vie.

Parmi ceux-ci, nous nous intéresserons dans la présente recherche à Henri Bergson [1859-1941] dont la philosophie est une critique légitime, nous semble-t-il, du mécanisme, justement parce qu'elle met en lumière ce que celui-ci occulte à savoir la vie. En effet, le matérialisme radical ne trouve pas grâce aux yeux de Bergson à qui le spectacle de la vie souffle l'idée d'une réalité autre que la matière. De cet « *autre chose* » participerait la vie qui donne aux êtres vivants leur particularité. Le réel n'est donc pas tout à fait matériel. Q'est-il alors ? Quelle est la nature de la vie ?

C'est en réfléchissant sur la science que Bergson eut une intuition géniale qui donnera naissance au bergsonisme. « *Je m'aperçus à mon grand étonnement*, dit-il, *que le temps scientifique ne dure pas* ». La durée, le temps, voilà quelque chose sur lequel la science n'a pas prise. Toute la pensée de Bergson consistera à développer l'intuition de la durée.

Qu'est-ce que la durée ? Pourquoi échappe-t-elle à la science ? Serait-elle par nature identique à la vie et par conséquent, ce qui, ajouté à la matière donnera au réel sa plénitude ? Comment appréhende-t-on la durée ? Ce sont là autant de questions qui interpellent le bergsonisme qui fait une large part à la durée. S'il ne tentait pas d'y répondre, « *il ne vaudrait pas une heure de peine* ».

Le plan de notre travail est suggéré par le sujet lui-même.

Dans un premier temps, nous tenterons de nous imprégner de la philosophie mécaniste à travers la science classique qui en est l'application. Pour cela, un bref exposé du finalisme s'impose au préalable, étant entendu qu'elle est une réaction contre celui-ci.

Un examen du mécanisme nous révélera bientôt que ses cadres, calqués sur la matière, ne peuvent guère « *loger* » la vie. Aussi, verrons-nous que la science, loin de cerner le réel comme le prétendent les scientifiques, l'escamote. Tel est le constat de Bergson qui fera de la durée l'étoffe même du réel. Nous entrons ainsi de plein pied dans la seconde partie de notre travail où nous situerons la critique bergsonienne du mécanisme qui apparaît en fait comme un refus du scientisme.

Au demeurant, entre bergsonisme et mécanisme, il y a une opposition de principe : le second est matérialiste tandis que le premier fait de l'immatérialité le caractère essentiel de l'être. De la fécondité du concept de *durée* dépend le sort de la philosophie bergsonienne. Et

nous ne saurons terminer sans en mesurer la portée c'est-à-dire son impact sur l'esprit dans sa trop longue marche vers la vérité.

PREMIERE PARTIE : L'ERE DE LA MECANISATION

I- LA DOCTRINE MECANISTE : UNE REACTION CONTRE LE FINALISME

« Pour l'essentiel, le mécanisme consiste dans l'explication des propriétés ou caractéristiques de tout objet, par référence non à une fin ou à une fonction (comme chez Aristote), mais à la seule disposition ou configuration de ses parties. L'opposition mécaniste à la philosophie d'Aristote s'exprime, par ailleurs, dans la tentative d'expliquer les phénomènes d'un point de vue quantitatif, et non plus qualitatif »¹.

Entre le mécanisme et le finalisme d'Aristote se joue le drame de la philosophie dont l'histoire est caractérisée par un foisonnement de doctrines qui ne cessent de s'affronter et de se nier. Ainsi, le mécanisme, renonçant à l'explication qualitative pour prendre le parti d'une explication quantitative des phénomènes, se pose en s'opposant au finalisme en œuvre dans le système aristotélicien. Aussi, une analyse de celui-ci nous permettra-t-elle de saisir à contrario la démarche mécaniste ; une chose étant définie en même temps que son contraire.

1-Charles Ramond, dans Le Corps, Vrin-Intégrale,1992 p108 ; sous la direction de Jean Christophe Goddard et Monique Labrune.

I-1-LE FINALISME D'ARISTOTE

On appelle finalisme toute doctrine philosophique qui accorde une importance centrale à la *finalité* dans l'explication de l'univers et de ses phénomènes. L'explication finaliste consiste à établir que tout mouvement, tout phénomène dans le monde vise à une fin, un but qui en est la cause. Le finalisme a donc en vue non pas le «comment» des choses (c'est-à-dire les mécanismes qu'elles mettent en jeu), mais leur «pourquoi». On parle alors de la «*cause finale*» comme de l'explication ultime de toute chose.

De l'avis de Raymond Ruyer, la finalité était, à ses origines, magique. Elle consistait «à voir en toutes choses des vertus actives, s'exprimant par des signes, en des correspondances formant des systèmes»¹. En effet, l'homme a toujours été confronté aux mystères de sa propre nature et de son environnement. Il se trouve plongé dans une angoisse qui le contraint à chercher le sens de son existence. C'est cette angoisse existentielle qui va engendrer tous les mythes, toutes les religions, toutes les philosophies et même la science.

Pour le professeur Monod, depuis «*l'enfance de l'humanité*»², l'homme a toujours projeté sur le monde qui l'entoure le sentiment qu'il a de sa propre nature ; s'expliquant ainsi les phénomènes et tentant de dissiper tant bien que mal son mal existentiel.

En fait, nos lointains ancêtres voyaient dans la nature non seulement des êtres semblables à eux (les plantes et les animaux se nourrissant, se défendant et se reproduisant), mais aussi et surtout des objets «*bien plus mystérieux* » («*des rochers, des fleuves, des montagnes, l'orage, la pluie, les corps célestes*»³), toutes choses que nous décrétons aujourd'hui inanimées. Pour en rendre compte, ils procédaient à une « projection animiste » qui consiste à partir d'eux-mêmes, de leur propre fonctionnement à la nature. Or l'activité humaine vise toujours la réalisation d'un projet. La nature tout entière est donc «*consciente et projective* » : elle a une âme. «*L'animisme primitif formulait cette hypothèse en toute naïveté, franchise et précision, peuplant ainsi la nature de mythes gracieux ou redoutables qui ont pendant longtemps nourri l'art et la poésie* »⁴. Telle est l'origine du finalisme.

1- Encyclopaedia Universalis 9,473

2- Jacques Monod : Le hasard et la nécessité, Paris , Seuil 1970 p. 48

3- Ibidem.

4- Idem, p49

Aristote régularisera cette finalité primitivement magique en fondant une science finaliste de la nature. Il va rationaliser la nature magique, définir des substances et des accidents classables, des changements réguliers et bien ordonnés. Chez Aristote, bref, la finalité devient une notion scientifique qui fait comprendre toutes choses sur le modèle d'une fabrication artisanale.

La science consiste à saisir la relation de cause à effet qui existe dans le réel. Aussi, comprendre ou connaître un phénomène est-ce en saisir la cause.

Le modèle de la causalité physique est fourni à Aristote par l'analogie d'avec l'art. Sur la question du rapport entre l'art et la nature, il est formel, l'art n'est rien d'autre qu'une imitation de la nature. Il s'agira donc d'étudier la nature à la lumière de l'analyse de l'activité artistique. En quoi consiste alors l'art ?

Il consiste à concevoir le résultat à « *produire* »¹ avant sa réalisation dans la matière. En effet, l'artiste a d'abord une certaine image de l'œuvre future à l'esprit avant de choisir le matériel adapté à sa structure. Toute fabrication présuppose donc l'idée ou le concept de l'objet à fabriquer. Cette manière d'agir qui consiste à prévenir, à calculer avant d'exécuter est la caractéristique de l'homme qui est illustrée ici au plus haut point (par l'activité artistique). Il y a donc toujours une « *raison* » à ce que fait l'homme ; sans cette raison qui est cause, rien n'arrive. La causalité est, nous dit Gilson, le terme de l'opération ; elle est « *sa fin* ».

Si l'homme procède ainsi, à plus forte raison la nature dont il participe. Il y a par conséquent dans la nature une finalité à l'œuvre sinon, comment expliquer l'ordre et le plan qui, manifestement, président à la constitution des êtres et les caractères constants des espèces ?

Il existe chez Aristote quatre causes : la *cause matérielle* (ce en quoi une chose est faite), la *cause formelle* (c'est le type, l'essence, ce qui donne à chaque chose sa forme déterminée), la *cause efficiente* (c'est l'antécédent direct qui provoque un changement) et la *cause finale* (le but en vue duquel tout le reste s'organise). C'est l'ensemble de ces causes qu'il faut connaître pour accéder à la science de l'objet ou de l'être en question.

1-Les lignes qui suivent, nous les devons à Etienne Gilson dans D'Aristote à Darwin et retour où il soutient admirablement la thèse finaliste contre ses adversaires

Ainsi, l'on dira que le marbre est la cause matérielle de la statue, la cause formelle en est l'idée voulue par le sculpteur (le visage de Socrate par exemple). Les coups de ciseau en sont la cause efficiente. Et la cause finale de la statue c'est l'argent, ou la gloire ou encore la réalisation de la beauté.

A ce niveau, il faut remarquer que dans l'enchaînement des causes, la nécessité physique ne correspond pas à la nécessité logique. Si la logique veut que des prémisses soit inférée la conclusion, dans la nature par contre, ce qui est premier, c'est le but, la fin, de laquelle découleront, pour ainsi dire, les conditions nécessaires à son être. « **Manifestement dit Aristote, la première des causes est ce que nous nommons la fin** ». « **Car elle est la raison d'être et la raison d'être constitue le point de départ dans les œuvres de la nature comme dans celles de l'art** »¹. La cause finale se rencontre donc aussi bien dans les productions artificielles de l'art humain que dans la nature où elle guide tout changement. Seulement, dans l'art humain, la fin est extérieure à l'objet qu'on façonne, dans la nature, elle lui est immanente.

Toute science a ses principes, les premiers, dont Aristote dit qu'ils sont indémonstrables mais vrais parce qu'ils rendent intelligible un ordre entier de la nature par la lumière qu'ils jettent sur lui. C'est un ensemble de postulats qui fournissent à la science un cadre théorique nécessaire à son épanouissement. C'est ce que Thomas S. Kuhn appelle un **paradigme** c'est-à-dire, un ensemble de réalisations scientifiques qui définit les problèmes pertinents ainsi que les protocoles méthodologiques à mettre en œuvre pour arriver à leurs solutions. A quoi il faut ajouter des impératifs moraux et des postulats métaphysiques qui, loin de se limiter aux seuls cadres de la science, produisent au contraire, une vision globale du monde. C'est là un ensemble d'idées reçues sans lequel aucune communauté scientifique ne peut fonctionner. En effet, « **la recherche réelle ne commence guère avant qu'un groupe scientifique estime qu'il est en possession de réponses solides à des questions telles que : quelles sont les entités fondamentales dont l'univers est composé ? Comment régissent-elles entre elles et agissent-elles sur les sens ? Quelles questions peut-on légitimement se poser sur de telles entités et quelles techniques employer pour chercher des solutions ?** »².

1-Aristote cité par Etienne Gilson op.CIT P19

2- Thomas S. Kuhn, la Structure des révolutions scientifiques chez Flammarion 1983, p21-22

Pour Aristote, l'univers tout entier est contenu dans la sphère des étoiles fixes, et à l'intérieur de cette sphère, il n'y a que de la matière et point de vide. Il se divise en deux régions (la terre et les cieux) séparées par l'orbe de la lune d'où leurs noms respectifs de *sublunaire* et de *supra-lunaire*.

La région sublunaire est faite de quatre éléments (la terre, l'eau, l'air et le feu). Dans ce monde-ci, entièrement contingent, règnent toutes les variétés du changement. Quant au monde supra-lunaire, auquel nous n'avons pas accès, il suffisait à Aristote d'observer le ciel pour se convaincre de l'immuable régularité de ses mouvements. Les cieux et les astres sont inaltérables, faits de cette cinquième essence qu'il appelle l'*éther*. Il va de soi qu'en raison du caractère incorruptible des corps célestes, les concepts physiques qui régissent le monde sublunaire ne valent pas pour le monde supra-lunaire justiciable d'autres normes.

Dans ce monde clos et hiérarchisé, il existe des natures bien déterminées, les choses ne sont pas distribuées d'une manière quelconque : **«chaque chose possède dans l'Univers, un lieu propre, conforme à sa nature»**. Il y a donc un **« lieu naturel »** pour chaque élément et **«c'est seulement dans « son lieu » que se parachève et s'accomplit un être, et c'est pour cela qu'il tend à y parvenir»¹**, sauf par contrainte. Ainsi, les éléments du monde sublunaire ont tendance à s'ordonner naturellement en une série de quatre enveloppes concentriques. La terre, élément absolument lourd, est portée par son mouvement vers la sphère située au centre géométrique de l'univers. L'eau, élément lourd, constitue une enveloppe sphérique autour de la région centrale de la terre. Le feu, qui est absolument léger, s'élève spontanément pour constituer sa propre enveloppe juste sous la sphère de la lune. Et l'air, moins léger que le feu, remplit la dernière enveloppe entre l'eau et le feu.²

Comment s'explique en définitive l'ensemble des mouvements (changement qualitatif ou quantitatif, déplacements dans l'espace...) dont l'univers est le théâtre ?

Rappelons-nous que, contrairement aux Eléates qui, niant tout changement, ne pouvaient rien comprendre de la réalité visible, Aristote part de la réalité du changement et s'efforce de l'expliquer. Aussi, dans son analyse du sensible le Stagirite dépassera-t-il Platon, puisqu'il n'opposera plus les deux absolus que sont l'*être* et le *non-être*, mais les réconciliera en plaçant entre eux un moyen terme qu'il dénomme l'*être en puissance*. Envisagée dans son sens fondamental, la puissance se réfère au mouvement lequel est nécessaire quant au passage de la puissance à l'acte. Le mouvement est donc un état passager ; il cessera lorsque

1- Alexandre Koyré, Etudes Galiléennes, Hermann, Paris 1966, p19

2- Voir Thomas S. Kuhn la Révolution copernicienne Fayard, 1973 p.94

la puissance s'actualisera. Le monde sublunaire serait en repos s'il n'était pas en contact avec l'orbe de la lune en mouvement perpétuel.

Mais, Aristote explique l'ensemble des mouvements en posant un premier moteur qui meut tout et que rien ne meut. C'est le Dieu d'Aristote qui est Acte pur, éternel, suprême intelligible et suprême désirable. Dans sa perfection, il ignore le monde auquel il demeure transcendant : il le meut sans contact, par amour. Ce Dieu est donc la *cause finale* de tous les mouvements de l'univers. La nature est un ensemble de puissances aspirant à la réalisation de cet acte, de cette beauté éternelle. Au demeurant, Aristote est un finaliste convaincu, et son univers tendancieux et désireux est régi par un principe d'ordre qui en fait un tout.

I-2-NAISSANCE ET EXPANSION DU MECANISME

Selon Thomas S. Kuhn, la science ne commence véritablement qu'avec Aristote qui, le premier, réussit à implanter de façon durable une manière d'étudier les phénomènes à la lumière d'une conception globale de la réalité. Il a établi et fait accepter un «*paradigme*», c'est-à-dire, un ensemble de «*découvertes scientifiques universellement reconnues qui, pour un temps, fournissent à une communauté de chercheurs des problèmes types et des solutions*»¹.

Pour Aristote, comme nous le disions tantôt, l'univers est fini et hiérarchisé, c'est un ensemble ordonné et finalisé, avec d'une part le monde terrestre (monde du changement, de la génération, de la corruption et des mouvements rectilignes vers le haut et le bas), et d'autre part, le cosmos qui est au delà de l'orbe de la lune (monde, de la non-physique et de l'éther), où les éléments (corps célestes) ne sont doués que d'un mouvement circulaire uniforme. Ce monde limité et clos a un centre et c'est la terre, rigoureusement immobile, qui y siège comme unique centre des mouvements célestes². Ainsi, c'est l'homme qui habite au centre de l'univers, dans un lieu où les choses sont de soi ce qu'elles sont avec des «*vertus*» bien définies : il est de l'essence du léger (l'air et le feu) de s'élever et de celle du lourd (la terre et l'eau) de descendre.

La physique d'Aristote apparaît donc comme une physique des sympathies et des qualités métaphysiques et son astronomie inclut en elle toute la chaleur d'une conviction religieuse. En effet, l'anthropocentrisme (qui fait de l'homme le centre du monde ; il est le corollaire du géocentrisme), sous sa forme théologique pure, est lié au théocentrisme : Dieu a créé l'univers pour l'homme et l'homme pour lui ; pour l'adorer et le vénérer dira-t-on de nos jours.

Voilà fixée l'image du monde pour un bon bout de temps. Elle répond à un besoin psychologique profond de l'homme qui, en s'expliquant la relation de son habitat et le reste de la nature, cherche à intégrer l'univers et à s'y sentir à l'aise. C'est ce que le professeur Monod appelle «*l'ancienne alliance animiste*»³. Aussi longtemps qu'on gardera cette cosmologie, le système aristotélicien sera tout à fait satisfaisant. Ce qui arriva et l'aristotélisme fut plusieurs fois séculaire.

1- La structure des révolutions scientifiques op. cit. p.11

2-C'est le géocentrisme qu'Aristote expose dans le De Caelo 296b8-298a₁₃ et 312a₅

3- Le hasard et la nécessité op.cit. p.213

En effet, Aristote, qui a vécu en Grèce au IV^e siècle avant Jésus-Christ eut une influence sans précédent sur l'histoire des idées. Ses écrits couvrent tout le savoir de l'époque comme en témoignent les principaux titres de ses œuvres : l'*Organon* (la logique), la *Physique*, la *Métaphysique*, l'*Ethique à Nicomaque*, la *Politique*, la *Rhétorique*...

Pendant deux millénaires son autorité plana sur le savoir : son propre enseignement [384 - 322] et la façon dont celui-ci a été décliné jusqu'au XVII^e siècle avec notamment la scolastique qui a fini d'en faire un dogme car, l'argument «*Aristoteles dixit*» (Aristote l'a dit) est sans réplique.

Jusqu'au XVII^e siècle, notons-le bien car ce siècle fut marqué par l'avènement de la pensée moderne à la suite de ce que l'histoire a appelé la «*révolution copernicienne*». Ce «*fut une révolution d'idées, une transformation de la conception que se faisait l'homme de l'univers et de sa propre relation à l'univers*»¹. Il s'agit en somme de ce que Kuhn nomme un changement de paradigme. Pour mieux comprendre ce qui est ici en jeu, tournons-nous vers la lecture qu'il fait de l'histoire des sciences à travers sa grille paradigmatique.

Jusqu'alors, la science se réduisait à une activité routinière de résolution de petits problèmes à l'intérieur du champ théorique défini par le paradigme aristotélicien ; ce faisant, on prouve la fécondité du dit paradigme. Mais il peut arriver, nous dit Kuhn, que cette activité routinière soit perturbée par l'apparition de phénomènes inédits que le paradigme ne peut résoudre à l'intérieur de son cadre théorique. Ce qui arrivera au péripatétisme du fait d'un astronome polonais.

En fait, avant Nicolas Copernic [1473-1543] (c'est bien de lui qu'il s'agit), l'astronomie était dominée par le système de Ptolémée [90-168], mathématicien, astronome et géographe grec. Ce système exposé dans l'*Almageste* (son œuvre fondamentale), qui a pour socle la physique d'Aristote, va élaborer la formule la plus parfaite de la théorie géocentrique. Avec Copernic naquit une nouvelle cosmologie qui va permuter la place et la fonction de deux pièces essentielles du système précédent : la Terre et le Soleil, faisant de celui-ci le centre des mouvements des astres et des planètes dont la Terre qui, perdant son privilège de centre du monde, devient du coup une planète comme les autres. Ainsi, de Ptolémée à Copernic, ce qui change c'est la carte du ciel : la terre n'est plus, mais le soleil, le centre fixe à partir duquel les astronomes vont calculer les mouvements des astres et des planètes.

1-T.S.Kuhn, la Révolution copernicienne, op. cit. p1

L'innovation copernicienne va créer ce que Kuhn appelle une «*tension essentielle*»¹ entre les conservateurs qui cherchent à sauver le paradigme d'Aristote et les iconoclastes qui veulent aggraver les difficultés en les exacerbant.

C'est ainsi que Tycho Brahé et Kepler réfutèrent l'incorruptibilité des objets célestes après l'observation qu'ils firent des *novae* : étoiles qui brillent soudain avec éclat et s'éteignent. A leur suite, Galilée (mathématicien et astronome italien), muni de sa lunette astronomique, observa la lune dont il découvrit le relief accidenté qui s'apparente à celui de la terre, et les tâches du soleil. Il découvrit ensuite des nébuleuses de la voie lactée comme satellites, mais aussi et surtout les quatre satellites de Jupiter (alors que la terre n'en a qu'un à savoir la lune). Le savant florentin sonne ainsi le glas de la physique aristotélicienne et, partant, du géocentrisme, et consacre l'*héliocentrisme* en lui construisant une nouvelle physique avec le succès et les conséquences que l'on sait.

A partir de ce moment, le paradigme est en crise car toutes ces découvertes scientifiques sont des anomalies qui minent le système de l'intérieur en s'accumulant. Finalement, la tension devint intenable et il se produisit une sorte de «*basculement gestaltien*», c'est-à-dire, une rupture radicale avec la vision du monde jusque là en vigueur.

Le passage du géocentrisme à l'héliocentrisme fait voler en éclats l'image que l'on se faisait de l'homme et de l'univers. A la notion de cosmos (ensemble clos, hiérarchisé, finalisé, ordonné et incorruptible) se substitue celle d'univers (ensemble ouvert, homogène, indéfini et surtout sans finalité). Sur le plan scientifique, toutes les découvertes en astronomie partiront de ce changement conceptuel qui du reste, aura des conséquences bien au-delà de l'astronomie. «*Bien que le mot de révolution soit au singulier, écrit Kuhn, l'événement fut multiple. Son noyau fut une transformation de l'astronomie mathématique mais qui embrassait des changements d'ordre conceptuel en cosmologie en physique et en philosophie aussi bien qu'en matière de religion*»²

1- C'est d'ailleurs le titre d'un ouvrage de Kuhn qui ne figure pas dans la bibliographie. Nous évoquons simplement ici les souvenirs d'un cours de DUEL1 (Introduction à l'épistémologie) dispensé par M. Bado Ndoye en 1999.

2- - La révolution copernicienne op. cit. PV

Le *copernicanisme* qui déchoit la terre de sa position de centre du monde est dira Freud, la première blessure majeure que la science inflige à l'orgueil et à la fierté humaine. Les deux autres seront l'*évolutionnisme* darwinien qui nous enseigne nos origines simiesques et la théorie de l'*inconscient* qui démontre que les mobiles profonds de la quasi totalité de nos pensées et de nos actions nous sont inconnus.

En effet, avec la nouvelle vision du monde, va naître une nouvelle philosophie, un nouveau «*paradigme*» qui définira une nouvelle manière d’appréhender les phénomènes. Il s’agit du *mécanisme* dont les héros sont Galilée et surtout Descartes. Le moment est venu pour nous de nous familiariser avec le nouveau paradigme en exposant la structure et les principes de bases ou, si l’on préfère mieux, les postulats théorico-métaphysiques.

Le *mécanisme* est une philosophie de la nature selon laquelle l’univers et tout phénomène qui s’y produit peuvent et doivent s’expliquer par les lois des mouvements de la matière. André Lalande le définit comme une «*théorie philosophique admettant qu’une classe de faits, ou même tout l’ensemble des phénomènes, est susceptible d’être ramené à un système de déterminations «mécaniques»*»¹. Les faits se donnent dans une combinaison d’organes ou parties disposées pour la production d’un fonctionnement d’ensemble. La doctrine mécaniste s’est constituée dans son opposition au finalisme et tient dans le *corpuscularisme* cartésien qui postulait que «*l’univers était composé de corpuscules microscopiques et que tous les phénomènes naturels pouvaient s’expliquer par la forme, la taille, le mouvement et l’interaction de ces corpuscules*»². Si l’univers est exclusivement constitué de corps, il faut se demander ce qu’est un corps.

Descartes le définit non pas par la dureté, la couleur, la pesanteur etc., qui sont des qualités sensibles, mais comme «*une substance étendue en longueur, largeur et profondeur*»³. C’est le passage de la physique des qualités (Aristote) à celle des quantités.

Le corpuscularisme revêt une double implication méthodologico-métaphysique que Kuhn tire au clair. «*Sur le plan métaphysique il enseignait aux scientifiques quelles entités existaient ou n’existaient pas dans l’univers : il n’y avait que la matière pourvue de forme et de mouvement. Sur le plan méthodologique, il leur enseignait ce que devaient être des lois définitives et des explications fondamentales : les lois devaient préciser le mouvement et l’interaction des corpuscules, et l’explication devait réduire tout phénomène naturel donné à une interaction des corpuscules régis par ces lois*»⁴.

1- Vocabulaire technique et critique de la philosophie

2-T.S. Kuhn, Structure des révolutions scientifiques, op. cit.. P68

3-Principes de la philosophie II, § 11. voir aussi §4

4- T.S.Kuhn, ibidem,

L'univers mécaniste se caractérise donc par :

- l'homogénéité de sa matière
- l'existence en son sein de relations nécessaires entre les phénomènes c'est-à-dire des lois qui président aux mouvements de la matière.

Comment dès lors rendre compte efficacement de ce monde régi partout, au ciel comme sur la terre, par les mêmes lois, et où la finalité n'a vraisemblablement pas cours ?

Pour ce faire, le mécanisme va opérer une révolution épistémologique qui donnera naissance à la science telle que nous la concevons aujourd'hui. En effet, au cours de cette période, les idées-forces de la pensée moderne prennent pied et se développent. Ce sont essentiellement :

- l'idée que les mathématiques sont par excellence l'école de la raison rigoureuse,
- l'idée que la méthode expérimentale permet la connaissance objective des faits de la nature.

Expérimentation et *mathématisation* sont donc les aspects de la science. Tous les grands auteurs de l'époque ont fait leur l'idée pythagoricienne selon laquelle les nombres [et les figures] sont le principe, la source, les racines de toutes choses et que tout peut être ramené à des relations mathématiques. Le titre du grand ouvrage de Newton : *Principes mathématiques de la Philosophie Naturelle* (ou de la Physique) en est fort illustratif. Les mathématiques sont indispensables à la connaissance de l'univers matériel qui serait une sorte d'ouvrage mathématique selon Galilée.

Cependant, pour la science, le nombre n'est pas une réalité substantielle (comme le pensaient les pythagoriciens qui avaient une conception réaliste et mystique du nombre), il est plutôt un pur symbole opératoire permettant d'exprimer en un langage extrêmement précis les relations qui existent entre les phénomènes c'est-à-dire les lois de la nature. Les faits seront enchaînés dans un réseau d'équations mathématiques. Bref, la mathématisation de la physique permet d'embrasser un grand nombre de phénomènes dans une formule simple ; ce faisant, le savant réalise une importante économie de pensée. **«Que je ne reçois point de principes en Physique, écrit Descartes, qui ne soient aussi reçus en Mathématiques, afin de pouvoir prouver par démonstration tout ce que j'en déduirai ; et que ces principes suffisent, d'autant que tous les phénomènes de la nature peuvent être expliqués par leur moyen»¹.**

Toutefois, étant entendu que les mathématiques sont une science hypothético-déductive - le mathématicien n'a affaire qu'à ses propres conventions - pour ne pas se perdre dans des raisonnements abstraits et ainsi s'éloigner de la réalité concrète, le savant doit se

1- Principes de la philosophie II, §₆₄

soumettre au verdict de l'expérience. L'expérimentation comprend trois étapes : l'**observation** des faits, l'émission d'une **hypothèse** comme explication anticipée du fait et enfin, le recours à l'expérience pour **vérifier** l'hypothèse. Cette dernière étape montre que le raisonnement mathématique est intégré à la conduite expérimentale.

La physique moderne est née au XVIIe siècle le jour où Galilée, Kepler et Newton ont eu l'idée d'utiliser les mathématiques mais aussi l'expérimentation pour la connaissance de l'univers. La biologie devient une science expérimentale avec Lamarck et Claude Bernard au XIXe siècle. Quant à la chimie, elle le fut au XVIIIe siècle lorsque Lavoisier y introduisit la mesure.

La science selon Auguste Comte représente la maturité de l'esprit humain ; la théologie et la métaphysique témoignant de sa jeunesse. Dans sa jeunesse, il est mu par la recherche du **pourquoi** de toutes choses. Aussi, les premières explications que l'homme donna de la nature furent-elles anthropomorphiques, c'est-à-dire, consistèrent à prêter des sentiments humains aux phénomènes : Eole, dieu du vent, est capable comme nous, de se mettre en **colère** (c'est ce qui explique la tempête), la nature a **horreur** du vide, chaque élément a un «*lieu naturel*» qu'il **désire** etc. Arrivé à la maturité scientifique, il renonce au pourquoi ultime des choses pour chercher leur «*comment*». Il s'agit ici de rattacher objectivement les phénomènes les uns aux autres, de découvrir les lois qui régissent leurs relations : le vent est de l'air qui se déplace d'une zone de hautes pressions vers une zone de basses pressions atmosphériques.

En fait, le postulat de base de la science est que la nature n'est pas projective mais objective¹. Elle est régie par des lois ou rapports nécessaires que le savant doit découvrir. Mais, si la science c'est-à-dire la saisie des relations de cause à effet des phénomènes, est possible, c'est parce qu'elle suppose le **déterminisme** que Lalande définit comme «*le caractère d'un ordre de faits dans lequel chaque élément dépend de certains autres de façon telle qu'il peut être prévu, produit ou empêché*». La découverte ou la saisie du déterminisme nous permettra donc de pouvoir prévoir, produire et empêcher les phénomènes. Ceci nous emmène à nous demander si la science n'est dictée que par une soif d'objectivité c'est-à-dire, la seule volonté de mieux expliquer les phénomènes.

On ne saurait être affirmatif si l'on sait qu'au fondement du mécanisme se trouve l'idée selon laquelle l'homme peut devenir «*maître et possesseur*» de la nature. Ce qui est une

1-Voir J. Monod, Le hasard et la nécessité op. cit. P37-38

Paul-Laurent Assoum dit à ce propos que « le moment où le schème mécaniste s'impose comme déchiffrement du monde (...) suppose l'obsolescence de la représentation «*astrobiologique*» du cosmos » voir «*lire La Mettrie*» in L'Homme -Machine de J.O. La Mettrie ODile Jacob.1983 p.48

volonté manifeste de domination de l'univers grâce à la saisie du déterminisme auquel il est soumis ; la science doit accroître notre pouvoir sur la nature.

L'une des principales reproches faites au finalisme par les tenants du mécanisme (notamment Descartes et Bacon) est son *inutilité pratique*¹. Dire comme Aristote que les oiseaux volent parce qu'ils sont faits pour voler, cela est superflu et stérile. Mais savoir comment ils volent, c'est-à-dire découvrir les mécanismes du vol, nous permet de fabriquer des machines volantes et augmenter ainsi notre puissance. Or pour cela, on n'a pas besoin de siéger «*au conseil de la Création*»². C'est pourquoi dit Descartes, «*nous ne nous arrêterons pas aussi à examiner les fins que Dieu (...) s'est proposé en créant le monde, et nous rejetterons entièrement de notre philosophie la recherche des causes finales*»³. Dans l'*Ethique*, le finalisme fait l'objet d'une critique très acerbe. Selon Spinoza, les hommes n'en appellent à la volonté de Dieu que parce que la connexion réelle des choses leur échappe. «*La volonté de Dieu, cet asile de l'ignorance*»⁴.

Nous voilà, dans le pragmatisme et le scientisme moderne, loin de la *théoria* de la tradition greco-latine. Tandis que ceux-là identifient le savoir vrai au savoir utile, pour les anciens grecs, ce dernier n'est pas philosophique.

Pour ceux-ci, il n'y a de connaissance vraie que celle qui est source de contemplation et d'admiration comme en témoignent ces propos d'Aristote. «*Après avoir traité du monde céleste, autant que nos conjectures peuvent l'atteindre, dit-il, nous traiterons des animaux, sans omettre autant que nous en serons capables aucun membre de ce règne, si humble soit-il. Car même si tels d'entre eux n'ont rien pour charmer la vue et les autres sens, la perception intellectuelle de l'art avec lequel ils ont été conçus réserve d'immenses plaisirs à tous ceux qui savent suivre l'enchaînement des causes et sont doués pour la philosophie*»⁵. Comme une œuvre d'art, l'harmonie qui existe entre les parties des êtres vivants est belle. Bref, le spectacle des causes finales procure au philosophe une jouissance à caractère contemplatif. Et c'est justement «*l'heureuse insouciance philosophique des esprits*

1- Voir Etienne Gilson op.cit. chap. II, p₃₃ et suivantes.

2- L'expression est de Gilson op. cit. p₁₉₇

3- *Principes de la philosophie* I, § 28

4- cf. *Ethique* I, «Appendice», Librairie Garnier Frères, 1927 p. 107

5 -Rapportés par E. Gilson op. cit. p₃₈

authentiquement scientifiques »¹ qui serait à l'origine de la séparation de la physique et de la métaphysique. La cause mécaniste seule mérite d'être connue puisqu'elle donne prise sur la nature.

Ceci scelle à jamais le mariage entre la connaissance et l'action ou, si l'on préfère mieux, entre la science et la technique. Car, si celle-ci cherche à transformer la nature pour la soumettre à nos désirs et aspirations, il est communément admis que ce vouloir ne saurait s'incarner en pouvoir que par l'intermédiaire d'un savoir. On peut donc dire que la science se constitue pour répondre aux appels de la technique qui, à son tour, lui fournit l'outillage indispensable à l'expérimentation qui seule décide en dernière instance de la validité ou de l'infirmité d'une théorie scientifique.

Ensemble, science et technique gagneront en efficacité et engrangeront de plus en plus de succès qui sont autant de preuves de la fécondité du paradigme mécaniste.

Galilée découvre la loi de la chute des corps (ce qui permet de calculer la vitesse d'un corps lâché à tout instant à partir d'un instant t_0). Grâce à la théorie newtonienne de l'attraction universelle - qui explique les mouvements dans l'univers - on parvient à calculer la masse du soleil et des planètes, et à expliquer les marées, la variation de la pesanteur en fonction de la latitude etc. Les lois planétaires de Kepler ont permis la découverte de nouvelles planètes comme Neptune...

Le rêve cartésien d'une «*science admirable*» qui rendra l'homme «*maître et possesseur*» de la nature est en marche.

1-Idem. P.78

II/ L'OBSTACLE DE LA VIE

« Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux »¹.

Le mécanisme et la science expérimentale qu'il a engendrée sont matérialistes en ce sens qu'ils rendent compte des phénomènes par les lois de la matière inerte. L'univers est un système de corps dont l'interaction des différentes parties assurent leurs fonctionnements. La physique - ou la philosophie naturelle - se résume donc à une étude des corps. Ceux-ci sont soumis à un déterminisme absolu qui permet de prédire rigoureusement leur état futur à partir de leur état présent. Si la prédiction est possible, c'est parce que la matière n'est pas un chaos ; elle est ordonnée et surtout régulière.

Toutefois, si la nature n'est faite que de la matière, force est de reconnaître qu'à côté de la matière inerte qui se prête si bien à l'expérimentation scientifique, il y a la matière vivante. Comment appréhender alors les corps vivants qui gardent une certaine spécificité par rapport à la matière sans vie ? Se plient-ils au jeu du déterminisme absolu, vu l'irrégularité de leurs comportements ?

Le « *fait biologique* » nous semble bien être l'obstacle à franchir pour la doctrine mécaniste qui, en tant que telle, vise l'intelligence totale de l'univers. Réussira-t-elle ?

La réponse à cette question est à chercher dans l'explication que le mécanisme fournit du vivant ; explication qui trouve ses fondements chez Descartes sans qui, à en croire La Mettrie, « *le champ de la philosophie [...] serait encore en friche* »².

1- Pierres Simon Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, 1814

2- Voir L'Homme-Machine, Odile Jacob, 1983,p206

II-1- LE DUALISME CARTESIEN

Fidèle aux principes du mécanisme dont il est, avec Galilée, le fondateur¹, Descartes ne voit dans les corps vivants que des machines faites des mains de la nature ou de Dieu. Ces machines sont donc semblables aux automates ou autres «*machines mouvantes*» faites par l'homme. Entre elles, il n'y a qu'une différence de degré de perfection ; celles-ci étant de fabrication humaine, alors que celles-là sont de création divine. Ainsi, comme toute machine, les comportements des êtres vivants seront expliqués par la seule disposition de leurs organes. Mais alors, toute distinction entre l'homme et l'animal s'estomperait.

Seulement, pour Descartes, contrairement à l'animal, l'homme n'est pas son corps. En effet, la première chose «*claire et distincte*», autrement dit, la première vérité à laquelle il parviendra et sur laquelle reposera tout son système, est le «*cogito ergo sum*», entendez «*Je pense donc je suis* » ; ce qui revient à dire que je suis une pensée. «*Et quoique peut-être, écrit-il, (ou plutôt certainement, comme je le dirai tantôt) j'aie un corps auquel je suis très étroitement conjoint ; néanmoins, parce que d'un côté j'ai une claire et distincte idée de moi-même en tant que je suis seulement une chose qui pense et non étendue, et que d'un autre côté j'ai une idée distincte du corps, en tant qu'il est seulement une chose étendue et qui ne pense point, il est certain que ce moi, c'est-à-dire mon âme, par laquelle je suis ce que je suis, est entièrement et véritablement distincte de mon corps* »².

Il appert de ceci que le corps humain n'est identique à aucun autre corps ; il ne se réduit pas strictement à un mécanisme matériel. Il est charrié, pour ainsi dire, à une âme de manière indissociable.

L'être vivant qu'est l'homme, est donc composé de deux substances clairement et distinctement concevables l'une sans l'autre, savoir l'*âme* (dont l'attribut principal est la pensée et qui n'est pas étendue) et le *corps* (qui est essentiellement étendu et sans pensée). Il y a entre elles une différence ontologique qui fait que l'une est irréductible à l'autre.

1- Le mécanisme a certes des origines antiques (Démocrite et Epicure considéraient déjà les atomes comme les éléments premiers des choses ; ils n'ont aucune qualité intrinsèque et c'est leurs combinaisons qui ont donné tous les êtres), mais, ce n'est qu'au XVIIe siècle qu'il s'est imposé comme déchiffrement du monde.

2- *Méditations métaphysiques*, 6^e, Texte, traduction, objections et réponses présentés par Florence Khodoss, Quadrige/Puf1992 p 118-119

Platon définissait l'homme uniquement par son âme voir *Alcibiade premier* 130c₁₋₃

Le cartésianisme est, en ce sens, un *dualisme* et il s'agira pour Descartes de se donner une conception objective de l'âme et du corps qui les différencie radicalement ; ce qui va engendrer la théorie des « *animaux-machines* ».

En effet, si l'animal n'a pas d'âme¹, mais seulement un corps auquel il s'identifie alors, tous ses comportements, toutes ses actions sont fonction de la disposition et de l'interaction de ses organes. Il fonctionne de façon mécanique et ne se distingue pas d'un automate. J. Vaucanson n'avait-il pas fabriqué un canard artificiel qui remplissait presque toutes les fonctions vitales des canards naturels ?

Mais, conçu séparément de l'âme, le corps de l'homme est également une machine. C'est ce corps qui nous est décrit dans le « *Traité de l'homme* », il s'identifie à tout point de vue à une machine. « *Je suppose, écrit Descartes, que le corps n'est autre chose qu'une statue ou machine de terre, que Dieu forme tout exprès, pour la rendre la plus semblable à nous qu'il est possible : en sorte que, non seulement il lui donne au dehors la couleur et la figure de tous nos membres, mais aussi qu'il met au dedans toutes les pièces qui sont requises pour faire qu'elle marche, qu'elle mange, qu'elle respire, et enfin qu'elle imite toutes celles de nos fonctions qui peuvent être imaginées procéder de la matière, et ne dépendre que de la disposition des organes* »².

Descartes montrera ensuite comment cette machine respire, avale les viandes qui sont au fond de sa bouche, comment elle peut éternuer, bâiller, tousser ou rejeter les divers excréments, la façon dont elle peut subir l'influence du milieu extérieur etc. ; bref, comment elle fonctionne physiologiquement. Malgré ces ressemblances aussi frappantes qu'indéniables, on ne peut dire d'un tel corps qu'il est un corps humain. Ceci pour deux raisons principales, nous dit Descartes³.

La première est que, en tant que machine, il ne pourrait jamais user de paroles ou de signes comme nous pour déclarer nos pensées à nos semblables (on aura remarqué que la pensée ne fait pas partie des fonctions de ce corps). Même si certaines machines peuvent

1- Cette théorie de l' « animal-machine » autorisa toute sorte d'expérience sur les animaux qui, selon Descartes, ne sentent pas de douleur parce que dépourvus d'âme.

2- Œuvres de Descartes XI publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Librairie philosophique Jean Vrin, 1996 p120. Nous-nous sommes autorisés à modifier quelque peu la façon dont le texte original est écrit pour en faciliter la lecture et surtout la saisie.

3- Voir Discours de la méthode (Ve partie) Livre de Poche p 155 et suiv.

proférer des paroles et exprimer la douleur qu'elles ressentiraient éventuellement, elles ne peuvent les arranger de façon à pouvoir répondre à tout ce qui se dira en leur présence.

La seconde est que cette machine, comme toute autre, n'agit qu'en fonction de la seule disposition de ses organes, et chaque action particulière exige une nouvelle disposition non moins particulière de ses parties. Tandis que la raison est «*un instrument universel*», capable de servir en toute occurrence. Cette machine sera un corps humain lorsque l'*âme raisonnable* y sera.

Par contre, «*s'il y avait de telles machines qui eussent les organes et la figure d'un singe, ou de quelque animal sans raison, nous n'aurions aucun moyen pour reconnaître qu'elle ne seraient en tout de même nature que ces animaux*»¹. En somme, les animaux sont des automates² de la nature qui agit en eux selon la disposition de leurs organes.

Ainsi, la seule différence entre l'homme et les bêtes est l'usage de la parole qui est le signe de la pensée. Par le discours (composition de paroles diverses), l'homme peut exprimer ses pensées. Or, les animaux, y compris ceux qui sont capables de proférer des paroles (perroquets et pies), ne peuvent faire de discours c'est-à-dire témoigner qu'ils pensent. Au lieu que les sourds-muets (privés d'organes servant à la parole), inventent un langage, fait de signes, qui leur est propre et leur permet de communiquer leurs pensées à ceux avec qui ils ont à vivre, et que ceux-ci peuvent apprendre à loisir.

L'animal étant une machine, toutes ses fonctions dépendent de la matière. Quant à l'homme, il est corps et esprit, de telle sorte que ses fonctions et son comportement dépendent en partie de l'un, en partie de l'autre. Et c'est de l'union de ces deux substances que résulte l'homme. Il est donc une dualité symbiotique : dualité de l'âme et du corps qui, cependant, sont unis de manière indissociable et s'influencent indéfiniment.

Dès lors, on est emmené à se demander comment rendre compte de cette union dans un cadre purement mécaniste. Comment peut-on admettre que deux substances radicalement différentes puissent être unies et collaborer aussi étroitement ? Bref, comment la vie est-elle possible ?

Il semble difficile voire impossible de rendre compte de l'union du corps et de l'âme dans une perspective mécaniste où tout est expliqué par l'étendue qui est l'attribut principal

1-Ibidem.

2-« La thèse de l'automatisme animal est, dira Etienne Gilson, la garantie la plus assurée que l'on puisse avoir de l'immortalité de l'âme humaine » voir René Descartes, Discours de la Méthode : texte et commentaires Vrin 1947 p426.

des corps, éléments *constitutifs* de l'univers. Descartes en est bien conscient lui qui en appelle à Dieu pour expliquer, si l'on peut dire, l'homme : *«toutes les choses que je conçois clairement et distinctement peuvent être produites par Dieu telles que je les conçois»*. Or je conçois évidemment que moi qui suis une chose pensante, j'ai *«un corps auquel je suis très étroitement conjoint»*. Alors, cette union est certainement due à *«la toute puissance de Dieu»*¹. Disons tout simplement avec Descartes que la vie est un don précieux – si ce n'est le plus précieux- dont on doit, par conséquent, prendre grand soin.

La science cartésienne se trouve ainsi mêlée de préoccupations théologico-métaphysiques. C'est ce qui fait dire à Paul-Laurent Assoun que *«pour Descartes, la réduction de l'animal à une «machinerie» a pour effet - dont certains théologiens feront même une finalité - de garantir à l'homme son privilège métaphysique, qui consiste en la pensée, ce qui engage aussi bien l'immortalité de son âme... L'homme n'est déchiffré à travers la figure mécanique qu'en tant qu'animal justiciable d'une investigation anatomique ; en tant qu'homme, il participe de la res cogitans qui l'assure de l'éminence et de la différence ontologique »*².

La connaissance de l'homme requiert donc l'exploration de deux voies : celle du corps et celle de l'âme. Tandis que l'âme s'explorera elle-même, le corps semblable à une machine- on parle alors du corps comme d'une horloge- , sera expliqué en termes mécaniques c'est-à-dire par figures, grandeurs et mouvements. Le cartésianisme se trouve ainsi divisé en deux branches : *«celle qui, la plus éclatante, consista dans la métaphysique (Spinoza, Malebranche) et celle qui, la plus fructueuse, ne retint que la révolution scientifique. Cette dernière consiste essentiellement dans le mécanisme physique. De là à généraliser et à conclure à l'unité mécanistique du monde il n'y a qu'un pas que franchiront les esprits plus enclins à connaître la nature qu'à spéculer sur l'essence et les fins»*³.

1- Voir Méditations métaphysiques, 6^e méditation, op. cit. pp.118-119

2- L'Homme - Machine précédé de « lire La Mettrie », Ed Denoël / Gonthier. Coll. Folio/Essais 1981 pp.54-55.

3- Emile Callot, La philosophie de la vie au XVIII^e siècle. Marcel Rivière et compagnie, 1965, p 206

II-2- LE MONISME RADICAL

Dans le *Nouveau vocabulaire des études philosophiques*¹, le monisme désigne « **toute doctrine philosophique qui n'admet qu'une seule réalité fondamentale (la matière, l'esprit)** ». Il s'oppose par conséquent au dualisme, non donné à « **tout système (...) reposant sur deux principes explicatifs (ex. l'âme et le corps, le bien et le mal...) irréductibles mais opposés dès l'origine** ».

Le XVIII^e siècle fut marqué par le triomphe du naturalisme avec la physique galiléo-newtonienne qui rend compte du réel par la mécanique c'est-à-dire les lois déterministes en œuvre dans la nature. Les succès de plus en plus probants de cette physique servie par la rigueur des mathématiques, vont aboutir à un certain *scientisme* ou foi aveugle en la toute puissance de la science, autrement dit, en sa capacité à tout expliquer. Toutefois, étant admis que la méthode expérimentale qu'utilise la science ne remporte tous ses succès que dans le domaine des corps, pour que celle-ci se déploie véritablement sans obstacle sur toute la nature et arriver ainsi à sa totale intelligibilité, tout *dualisme* ou tout *pluralisme* est à soigneusement éviter. Aussi, le dualisme cartésien fut-il remplacé chez presque tous les auteurs de ce siècle par un *monisme* c'est-à-dire, la croyance qu'une seule réalité se trouve à la base de tous les phénomènes. « **Il n'y a dans tout l'univers qu'une seule substance diversement modifiée** »² nous dit La Mettrie. Cette substance unique et fondamentale dont tous les phénomènes ne sont que la manifestation n'est autre chose que *la matière*. Ce monisme matérialiste servira de postulat de base aux systèmes d'auteurs comme Bonnet, Cabanis, Diderot mais aussi et surtout La Mettrie qui est, nous semble-t-il, le symbole de la nouvelle doctrine dont il tire les conséquences dans son ouvrage majeur au titre fort révélateur à savoir *L'homme - machine*. qui peut être considéré comme un manifeste.

Dans un univers strictement matérialiste, l'âme, telle que la conçoit Descartes, n'a pas droit de cité. S'il n'y a point d'âme, alors l'homme perdant du coup son privilège métaphysique, devient l'égal de l'animal.

1- Par Sylvain Auroux et Yvonne Weil, Hachette, 1984.

2- *L'Homme-Machine*, op. cit. p 214.

Cet ouvrage nous servira ici de référence. Nous utiliserons exclusivement celui des éditions Denoël / Goutier 1981, dans la collection Folio/Essais.

Par voie de conséquence, si l'animal, «*pétri*» du même «*limon*» que l'homme, est une machine, pour les mêmes raisons, l'homme en est une autre. C'est la conclusion à laquelle aboutit l'ouvrage de La Mettrie en question. Pour mieux comprendre ce qui est ici en jeu, nous devons avoir à l'esprit ceci que la thèse de l'«*homme-machine*», «*qui, d'un même mouvement, «machinise» l'homme et «anthropologise» la machine*», pour reprendre Paul-Laurent Assoun¹, est essentiellement dirigée contre la métaphysique et la théologie chrétienne.

A la spéculation des métaphysiciens, le positiviste et naturaliste La Mettrie substitue «*le bâton de l'expérience*»² bannissant ainsi de sa philosophie tout ce dont on ne peut faire l'expérience. En effet dit-il, «*tout ce qui n'est pas puisé dans le sein même de la nature, tout ce qui n'est pas phénomènes, causes, effets, science de choses en un mot, ne regarde en rien le philosophe, et vient d'une source qui lui est étrangère*»³. Ainsi, des questions métaphysiques (Dieu, l'âme, le bien, le mal, la liberté...), nous ne pouvons rien savoir «*car l'expérience ne nous en dit rien*».

Par ailleurs, dire qu'il n'y a que des corps et point d'âme, c'est rendre absurde l'idée d'une vie future, dans l'au-delà. Ce faisant, notre auteur s'attaque à un pilier essentiel du christianisme et ce, au prix du bannissement.

Mais alors, qu'est-ce qui meut ces machines que constituent les êtres vivants ? A quoi doivent-elles leur spécificité par rapport à la matière inerte ? En un mot, comment apparaît la vie ?

La réponse à cette question est à chercher selon La Mettrie, empiriste de première heure, dans l'être vivant même. Il s'agira donc de partir des manifestations de la vie à la source de la vie ou, si l'on préfère, de l'effet à la cause. C'est ainsi que ce médecin déduira des conditions de l'excitabilité des organes le rôle prépondérant du cerveau qui commande à l'ensemble des autres organes. Le principe qui nous fait agir est étroitement solidaire de cet organe privilégié. On dira donc que le *cerveau* est le siège de l'«*âme*». Une anatomie fine de celui-là, révèle une structure d'une complexe organisation qui conditionne son activité de

1- op.cit. p12

2-Idem. P148.

Contrairement à Descartes, il estime la raison «*un guide si peu sûr*» sans le secours des sens dans le processus de la connaissance.

3- Ces propos sont rapportés par Emile Callot dans son ouvrage cité ci-dessus, page 207

laquelle procède la sensibilité consciente. L'âme, dit La Mettrie, «*n'est qu'un principe de mouvement ou une partie matérielle sensible du cerveau, qu'on peut, sans craindre d'erreur, regarder comme un ressort principal de toute la machine, qui a une influence visible sur tous les autres, et même paraît avoir été fait le premier ; en sorte que tous les autres n'en seraient qu'une émanation* »¹. A la vérité, ce ressort central n'est autre chose que « *l'organisation même* » de la machine. L'âme se ramène à une disposition mécanique des éléments matériels qui composent la matière grise logée dans la boîte crânienne. Ainsi, toutes les fonctions jadis attribuées à l'esprit – des sentiments les plus anodins à la pensée la plus élaborée – reviennent au corps, à la matière : « *l'âme n'est donc qu'un vain terme dont un bon esprit ne doit se servir que pour nommer la partie qui pense en nous* »².

La vie n'est rien d'autre que le résultat de l'organisation de la matière brute. Celle-ci est primitivement animée de forces physiques telles que l'électricité, l'attraction etc. Il lui suffit de donner à ses parties une nouvelle organisation pour que les forces primitives qu'elles renferment revêtent une autre modalité qu'est la vie³.

L'«*organisation*», voilà le maître mot de la conception lamettrienne de la vie ; elle suffit à tout expliquer. Si l'homme seul possède jusqu'à nos jours la faculté de penser et l'usage de la parole, il les doit à la plus grande complexité de l'organisation de sa structure (celle de son cerveau plus précisément). Mais, le principe de « *la continuité matérielle de la nature* » laisse ouverte, en droit, la possibilité de parler pour des animaux dont la structure anatomique est très proche de la nôtre. Le singe qui a longtemps été considéré comme notre ancêtre, grâce à «*une heureuse envie d'imiter la prononciation du maître*» et à l'exercice, peut acquérir l'usage de la parole selon La Mettrie, et ainsi penser, tout comme on a pu ouvrir «*le canal d'Eustache dans les sourds*»⁴.

Toutefois, dire que la pensée est une fonction de la matière ou que la vie est une modalité de ses forces primitives, n'est-ce pas tomber dans une conception animiste que le mécanisme voulait justement éviter ?

1- Op. Cit. ; p198

2-Ibidem. Pp 189-190

3- Voir Emile Callot op. Cit. p 232 et suiv.

4- L'Homme-Machine p 162.

Quoi qu'il en soit, cette approche a permis à la science de faire d'énormes progrès dans la connaissance du corps humain. Jean Pierre Changeux, neurobiologiste français la soutient encore aujourd'hui.

Il adhère d'emblée à la thèse «*céphalocentriste*» qui fait du cerveau l'organe de l'âme, et estime qu'une science de son organe doit nous renseigner sur les mécanismes du fonctionnement de la pensée.

L'encéphale humain, nous dit-il, est composé de plusieurs dizaines de milliards de cellules nerveuses appelées neurones, qui forment comme des «*toiles d'araignée*» enchevêtrées entre elles. Ces assemblées de neurones sont le siège d'intenses activités électriques et chimiques qui font du cerveau un vaste réseau cybernétique qui assure le fonctionnement global de l'organisme. La conclusion que notre auteur tire de tout ceci quant aux relations du cerveau et de la pensée, il l'exprime en des termes lamettriens à nouveaux frais (qui tiennent compte du niveau de développement des sciences). «*Ces enchaînements et emboîtements, écrit J. P. Changeux, fonctionnent comme un tout. Doit-on dire que la conscience «émerge» de tout cela ? Oui si l'on prend le mot émerger au pied de la lettre, comme lorsqu'on dit que l'iceberg émerge de l'eau. Mais il nous suffit de dire que la conscience est ce système de régulations en fonctionnement. L'homme n'a dès lors plus rien à faire de l'«Esprit», il lui suffit d'être un homme Neuronal* »¹. Toutes sensations, toutes pensées, toutes actions correspondent à l'entrée en activité de cellules nerveuses c'est-à-dire s'expliquent «*par la mobilisation interne d'un ensemble topologiquement défini*»² de neurones. Il y a donc un dictionnaire, une table de correspondance entre le cérébral et le psychique qui en dépend que les neurosciences cherchent à établir pour disposer des clefs du fonctionnement de la pensée.

Pour nous résumer, disons que le dualisme cartésien est pour la science mécaniste une voie sans issue que le monisme évite à tort ou à raison.

En faisant de l'âme une phosphorescence du corps, donc sans autonomie propre, le monisme réduit tout être vivant à une simple machine - semblable à une horloge ou à un

1- *L'homme neuronal*, Librairie Arthème Fayard, 1983, p 211

2- Idem. p.157. Ainsi, on comprend mieux la division du cerveau en zones faite par Broca.

ordinateur - sur laquelle la science, avec ses lois déterministes, peut absolument avoir prise¹. Mais, réduire l'homme à une machinerie, n'est-ce pas lui ôter toute liberté, toute spontanéité, si l'on sait que toute machine fonctionne strictement selon un mode et un programme préétablis ? Par ailleurs, chaque machine présente une rigidité fonctionnelle telle que l'absence ou le dérangement du plus petit écrou peut bloquer le fonctionnement d'ensemble. Et les machines de même espèce sont parfaitement interchangeables. Peut-on en dire autant de la «*machine humaine*» dont les diverses constituantes semblent si solidaires les unes des autres qu'elles paraissent capables de se suppléer éventuellement entre elles ?

Toujours est-il que le matérialisme radical a fini de jeter les bases de la biologie moderne ; de la fécondité de celle-ci dépendra la légitimité de celui-là et vice versa.

Or, nous verrons bientôt que dans l'étude des êtres vivants, la science rencontrera de si grandes difficultés qui ne tarderont pas à susciter de sérieuses interrogations quant à la validité de ses principes fondateurs.

1- Sur l'opposition entre le métaphysicien Descartes et l'empiriste La Mettrie voir l'article de R. D. Mbengue «*Descartes et La Mettrie : de la vie au vivant* » dans la revue Ethiopiques N° 63, 1999. Notamment p.93 : «*Descartes a poussé fort loin l'explication mécaniste, mais il a retenu le mécanisme à la frontière de nos pensées* ». Tandis que le monisme radical est un mécanisme radical.

**DEUXIEME PARTIE : LE BERGSONISME OU LE
DEVELOPPEMENT DES IDEES «DERNIERES» DU
MECANISME**

I- LES LIMITES DE L'APPROCHE MECANISTE DU VIVANT*

La biologie comme science de l'être vivant est née avec Lamarck [1744-1829] et Claude Bernard [1813-1878], lorsque ceux-ci ont introduit dans l'étude des phénomènes vitaux la méthode expérimentale. Il s'agira pour le biologiste de s'approprier les principes et méthodes qui ont fait le succès des sciences physiques c'est-à-dire la mathématisation et le déterminisme physico-chimique.

C'est grâce à la statistique que Mendel parvient à établir les lois de l'hérédité. Et la biométrie permet de nos jours de mesurer certains caractères biologiques...

Mais, pour que la science biologique soit possible, il faut que, comme les corps bruts, les êtres vivants soient déterminés de manière absolue. Par conséquent, tout phénomène suppose des conditions bien déterminées ; conditions de nature physico-chimique que le biologiste ou plus exactement le physiologiste doit établir – car Claude Bernard est, non pas un médecin comme on pourrait le croire, mais un physiologiste. Pour ce faire, il doit mettre en œuvre la méthode expérimentale qui consiste à observer les faits, puis à leur imaginer des hypothèses explicatives et enfin, à vérifier la validité de celles-ci.

Le biologiste considère le corps vivant comme un édifice moléculaire composé d'oxygène, de carbone, d'hydrogène, d'azote, de calcium, de phosphore, de potassium etc., toutes choses que l'on retrouve dans la matière inerte. Et, la vie serait apparue sur notre planète progressivement à partir de matériaux inanimés. On attribue à Claude Bernard la formule suivante : *«la vie c'est la mort»*, par voie de conséquence, les lois de la physique peuvent valablement servir à expliquer la vie.

Cependant, cette approche ne va pas sans poser de grands problèmes d'ordre théorique et pratique.

En effet, comment peut-on étendre, logiquement, à la vie les procédés utilisés sur la matière inerte ? L'être vivant, présente-t-il les mêmes caractéristiques et se comporte-t-il de la même manière que la matière inorganisée ? Sinon – ce qui semble évident a priori - ne faut-il pas appréhender différemment l'un et l'autre ?

Les lois de la physique s'appliquent à des systèmes naturels dont tous les éléments sont exactement semblables et équivalents. Sans cette homogénéité, cette identité quantitative, l'existence de rapports nécessaires entre eux serait impossible. Par contre, les êtres vivants se

* Nous-nous sommes beaucoup inspirés des manuels de vulgarisation de la science pour la rédaction de cette partie. On y trouve des exposés très clairs et surtout accessibles aux amateurs de sciences que nous sommes.

caractérisent avant tout par leur individualité et leur hétérogénéité. Chaque corps vivant se présente comme un ensemble d'organes fonctionnels (ou de cellules) disposés de façon à assurer le fonctionnement global de l'organisme. Les diverses activités des organes - eux-mêmes dissemblables – semblent être guidées par une fin à savoir le maintien de l'équilibre harmonieux de l'organisme. L'être vivant n'est donc pas strictement mu par des raisons physico-chimiques.

Le succès de la science se mesure à l'aune de sa capacité à prévoir les phénomènes. Mais, la prévision ou, si l'on aime mieux, la prédiction n'est possible que là où il y a régularité et homogénéité. Or, *«il est universellement admis que l'inhomogénéité radicale est une propriété frappante et tout à fait fondamentale de tous les phénomènes vitaux »*¹. Dès lors, il semble non seulement illégitime mais surtout impossible de déduire les lois biologiques de la physique de façon rigoureuse². En fait, si la loi physique est l'expression d'une relation nécessaire et constante, elle ne peut guère s'appliquer au fait biologique. Car, une science vraiment biologique ne saurait ignorer ou passer sous silence ce par quoi son objet s'identifie et se spécifie : à savoir, l'irrégularité et, partant, l'imprévisibilité ; en somme la liberté. On pourrait même se demander avec M. Gilson si de tels objets c'est-à-dire des corps qui se dérobent au déterminisme absolu, peuvent exister dans un univers purement mécaniste. Aussi paradoxal que cela puisse paraître, leur existence est pourtant indéniable. Lever ce paradoxe se révèle pour la science une aventure très périlleuse.

En effet, dire avec W. M. Elsäßer que *« les organismes représentent une forme de matière à part »*³, n'est-ce pas se réapproprier à nouveaux frais la dichotomie aristotélicienne entre le monde terrestre (changeant et corruptible) et le monde céleste (immuable et éternel) dont l'abandon constitue un des postulats fondateurs du mécanisme ?

Par ailleurs, expliquer l'existence des êtres vivants, comme le fait J. Monod, par le *«hasard»* s'insérant dans la *«nécessité»*, c'est remettre en cause le déterminisme absolu qui est le *«ce sans quoi»*, la condition sine qua non de la science.

1- voir Etienne Gilson op. cit. p186. Il rapporte ici les propos de W.M. Elsäßer un biologiste et géologue américain.

2- C'est ce que J. Monod cherche à démontrer dans le Hasard et la Nécessité.

« La thèse que je présenterai ici, c'est que la biosphère ne contient pas une classe prévisible d'objets ou de phénomènes, mais constitue un événement particulier, compatible certes avec les premiers principes, mais non déductibles de ces principes. Donc essentiellement imprévisible ». p62

3- Voir Etienne Gilson op. cit. p. 187

S'agit-il de l'expérimentation en biologie ? Elle rencontre plusieurs difficultés d'ordre interne et externe. D'une part, l'étude des êtres vivants a pendant longtemps consisté à disséquer des cadavres, laissant ainsi échapper l'essentiel de son objet ; ce qui explique ses grossières erreurs historiques comme celle qui a consisté à dire que les artères avaient pour fonction de conduire l'air parce que la dissection les trouvait vides.

Quant à la vivisection qui opère sur les vivants, elle détruit l'unité fondamentale de l'organisme. L'être vivant est un individu, un organisme dont les éléments constitutifs forment un tout harmonieux. La partie est subordonnée au tout qui, à son tour, est solidaire des parties en ce sens qu'il pâtirait de tout dysfonctionnement de quelque organe que ce soit. Aussi, après l'ablation d'un organe, nous n'avons plus affaire à un même organisme.

D'autre part, l'expérimentation se heurte à la bioéthique qui lui fixe des limites. On rapporte que Gandhi trouvait les expériences sur les animaux abominables, et que des âmes charitables étaient indignées par la présence d'une chienne expérimentale à bord du deuxième satellite russe. On ne peut songer à faire une expérience sur l'homme sauf en cas de maladie, et là encore, l'«*expérimentation*» a pour unique but le bien être du malade.

Cela va sans dire que l'expérimentation biologique, limitée par des exigences morales et les difficultés inhérentes à la nature même de son objet, ne saurait aboutir à des résultats aussi sûrs que ceux de la recherche physique.

Pour toutes ces raisons et d'autres encore, de plus en plus de voix s'élèveront contre l'explication mécaniste du vivant. Arguant du retard accusé par la biologie sur les sciences physiques qui volent quant à elles, de succès à succès, les adversaires du mécanisme réclameront une nouvelle intelligibilité pour la vie.

Dans cette nouvelle dynamique, la philosophie bergsonienne constitue un modèle du genre en ce sens qu'elle s'est essentiellement constituée en réaction contre le scientisme c'est-à-dire la prétention à tout expliquer mécaniquement (par figures et mouvements) donc, à tout ramener à la matière.

II-L'INTUITION-MERE DU BERGSONISME : LA DUREE

«Il est deux manières complémentaires d'être adversaire de quelqu'un : l'une consiste à le réfuter de manière purement formelle, en dépistant les contradictions internes d'une philosophie ; l'autre, qui est seule légitime, fait apercevoir des difficultés à la lumière d'une position nouvelle»¹

La pensée bergsonienne s'est constituée dans son opposition au mécanisme radical et au scientisme qu'il a engendré. Mais, pour éviter de tomber dans la facilité d'une critique systématique et stérile, Bergson va tenter de franchir les barrières qui se sont dressées devant le mécanisme, à la lumière d'une nouvelle position qui résultera des considérations qu'il a faites sur le temps tel que l'analyse scientifique nous le présente ; position qui déterminera l'orientation de sa pensée. Qu'est-ce donc le temps pour la science ?

«l'un des aspects les plus importants de la géométrisation de la physique, de la promotion de la géométrie au rang de science fondamentale dans la connaissance de la nature, écrit J. M. Ponty, est que la physique devient elle même une science métrique ; connaître l'univers, c'est d'abord mesurer des grandeurs et mettre ces mesures en rapport les unes avec les autres par des relations mathématiques propres à les recevoir»².

Ainsi, pour la science, le temps se donne en unités ou grandeurs (... , secondes, minutes, heures, jours, etc.) qu'il s'agit de mettre en rapport pour le saisir. Le savant, dans son étude de la nature, cherche à découvrir le rapport de cause à effet qu'il suppose entre les phénomènes de façon à pouvoir les produire, les empêcher ou tout simplement les prédire. Mais, étant donné que tout phénomène requiert un certain temps, sa prédiction est subordonnée à la connaissance plus ou moins exacte du laps de temps que nécessitera son déroulement. Aussi, dans les équations mécaniques, le temps est-il un paramètre fondamental représenté par la lettre t.

Comment la science s'y prend-elle pour mesurer la durée d'un phénomène ?

En athlétisme, dans les disciplines où il est question pour les athlètes de parcourir une distance quelconque, le vainqueur est celui qui aura mis le plus court laps de temps à parcourir la distance préalablement définie. Le temps mis par chaque coureur est rapporté au nombre d'unités décomptées parallèlement (du départ à l'arrivée) par un chronomètre ; un pendule ou une horloge. Pour mieux comprendre ce à quoi consiste la mesure du temps, même indépendamment de quelque événement particulier, examinons son instrument de

1- Madeleine Barthélemy-Madaule, Bergson adversaire de Kant, Puf, 1966 p. 10

2 In Les trois étapes de la cosmologie, édition Robert Laffont, Paris 1971. p. 94

mesure à savoir l'horloge.

Celle-ci est constitué d'un cadran, sur lequel il y a des divisions qui figurent les unités de temps, et des aiguilles dont les mouvements mettent en rapport entre elles ces unités. Ces aiguilles sont disposées de bas en haut et leurs mouvements réguliers et coordonnés décomptent respectivement les heures, les minutes et les secondes. Mesurer la durée d'un événement c'est donc compter le nombre de mouvements qu'effectueraient les aiguilles d'une horloge pendant son déroulement. Ce qui revient à dire qu'il y a simultanée entre l'événement qui se déroule et les mouvements des aiguilles qui mesurent sa durée. Mesurer le temps c'est alors compter des simultanités. Dans ce cas, les mouvements des aiguilles peuvent tout aussi être considérés comme un événement dont le temps de déroulement se rapporte aux foulées du coureur si tant est qu'on considère celles-ci comme régulières et divisant la distance à parcourir en unités de temps. Dans un cas comme dans l'autre, on aura noté que le temps est toujours solidaire d'un espace dont les divisions sont également les siennes. A y voir de près, on se rend compte que sans les divisions de l'espace, qui en sont la matérialisation, les unités de temps ne sauraient se mesurer étant comme toute création de l'esprit de nature abstraite. C'est dire donc que la chronométrie consiste à dénombrer des portions d'espace bien définies auxquelles on a fait correspondre au préalable des portions de temps aussi abstraites et conventionnelles qu'arbitraires.

Mais alors, on ne mesurerait pas le temps, mais plutôt un substitut, un symbole. Ce substitut, ce symbole n'est autre chose que l'espace ; ici, celui du cadran de la montre que les aiguilles parcourent selon les divisions qu'on y a faites et ce, de façon uniforme, l'espace étant lui-même homogène. Appelons ce temps sur lequel la science opère, *temps-espace* ou *temps-symbole*, dans la mesure où il est ce qu'on substitue au temps réel pour le connaître scientifiquement c'est-à-dire le mesurer.

Quelle différence y a-t-il dès lors entre ce temps mesurable et le temps vrai ?

Qu'est-ce que le temps en lui-même ? Comment s'appréhende-t-il ?

Tantôt, nous remarquons une simultanée entre les mouvements des aiguilles de l'horloge et ceux du coureur. Maintenant, « *supposons [avec Bergson] un instant qu'un malin génie plus puissant encore que le malin génie de Descartes, ordonnât à tous les mouvements de l'univers d'aller deux fois plus vite* »¹, que le coureur et les aiguilles allassent donc deux fois plus vite. Que se passerait-il ?

1-Essai sur les données immédiates de la conscience in *Henri Bergson Œuvres*, Puf 1959 p. 127

L'œuvre de Bergson a été publiée par PUF en deux volumes : le second a été publié en 1972 sous le titre *Henri Bergson Mélanges*. Les citations que nous ferons de Bergson seront tirées de ces deux volumes.

On devinera aisément que le temps de la course ne changerait nullement pour peu que l'on ait appris des mathématiciens que lorsqu'on augmente ou retranche une même partie de deux grandeurs, elles demeurent dans le même rapport qu'avant. Il en irait de même si les mouvements venaient à s'arrêter un moment plus ou moins long et continuer ensuite.

Les techniques cinématographiques permettent aujourd'hui d'accélérer ou de ralentir considérablement le rythme auquel les images sont défilées sur l'écran. Dans les deux cas, on verrait respectivement les mêmes images, les mêmes actions, le même film se déroulant mais, de manière très rapide (voire instantanée) et très lente. La rapidité et la lenteur dont il est ici question ne valent que pour un spectateur. En effet, si le mathématicien, le physicien ou l'astronome compterait un nombre toujours égal de simultanéité, **«profonde serait pourtant la différence au regard de la conscience : ce ne serait plus pour elle (...), d'une heure à l'autre la même fatigue d'attente»¹**.

Je serai déçu par la rapidité du premier film duquel je ne comprendrai certainement rien, du second, je m'ennuierai vite. L'ennui résulte ici d'une attente très longue, trop longue. Ainsi, tandis que pour le physicien ou l'astronome les chiffres qui expriment le temps du film restent identiques, les sentiments qui naissent en moi à l'occasion de ces **«deux films»** (la déception et l'ennui) sont le signe évident que pour moi spectateur, ils n'ont pas du tout la même durée. **La durée !**

Voilà ce qui échappe à la science ou que celle-ci élimine délibérément. Ceci, Bergson le découvrira avec une telle surprise qu'il s'en inquiétera au sens étymologique du mot : **«Je m'aperçus, écrit-il, à mon grand étonnement, que le temps scientifique ne dure pas, qu'il n'y aurait rien à changer à notre connaissance scientifique des choses si la totalité du réel était déployée tout d'un coup dans l'instantané, et que la science positive consiste essentiellement dans l'élimination de la durée»²**.

En fait, lorsque la science prétend mesurer le temps, elle se borne à compter des simultanéités dans l'espace. Or, ces simultanéités ne sont pas la durée telle que je la sens. Le temps scientifique se caractérise donc par son *parallélisme avec l'espace*, mieux, il s'y identifie à tel point que, selon Bergson, lorsque nous appelons le temps, c'est l'espace qui répond à l'appel. C'est ce qui fait dire à André Robinet que **«la pensée scientifique aplatit le temps au long d'une ligne, dans l'espace»³** avec lequel il forme un mixte si habituel qu'il

1- La pensée et le Mouvant in Œuvres, p. 1255 ;

2-Lettre à W. James (9 mai 1908) in Bergson mélanges PUF 1972 p.766

3- Bergson et les métamorphoses de la durée éd Seghers, Paris 1965, p. 16

nous paraît naturel. Ainsi, la durée s'oppose au temps scientifique et s'obtient justement par la rupture du parallélisme ou du lien de celui-ci avec l'espace. Il s'agit donc de débarrasser le temps de l'élément étranger qui l'altère pour qu'il redevienne lui-même c'est-à-dire durée.

C'est dire que la direction dans laquelle nous a conduit, jusque là la science n'est pas la bonne. Il faut dès lors, tel un Descartes se proposant de reconstruire l'édifice du savoir depuis les fondements - ce qui passe par sa démolition préalable - retourner sur nos pas, comme si nous étions convaincus que c'est la direction contraire qui est la bonne. Ce retour au point de départ, ce retour à la source qui a pour condition la dissociation du mixte espace-temps, ne se fera toutefois pas aisément et sans inquiétude. Car, dissocier le mixte presque naturel que forment si bien l'espace et le temps, séparer, pour ainsi dire, le temps de son symbole ou, si l'on aime mieux, de son cadre spatial où nous pouvons l'appréhender, en évanouissant l'espace, n'est-ce pas défaire tous nos repères et faire de nous des égarés face au temps qui devient du coup un abîme ? Sinon, comment comprendre l'attitude de Dantès¹- personnage d'Alexandre Dumas - qui, à son évvasion du Château d'If après un baigne de quatorze ans, ne savait ni en quelle année il était, ni quel jour il était, encore moins l'heure qu'il était ?

Mais, il est temps, pour nous déségarer, de rechercher d'autres repères, de nous construire une nouvelle demeure avant l'hiver.

Qu'est-ce donc le temps réel, la durée ? Par quelle voie peut-on l'atteindre ?

Aristote, à la fin de son analyse du temps dans le livre IV de la *Physique*, reconnaissait déjà que les moments du temps ne peuvent être maintenus que par l'activité d'une conscience. «*sans l'âme*, dit-il, *il est impossible que le temps existe*»². Ceci laisse entrevoir la voie à suivre par celui qui cherche à connaître la nature du temps. Si nous ajoutons à cela les enseignements que l'on peut tirer de l'hypothèse du malin génie bergsonien évoquée plus haut - il peut abuser des lois de l'univers, mais «*il ne saurait tromper une conscience lourde*

1- Voir Alexandre Dumas, Le comte de Monté-Cristo, Pocket 1995 Tome I. Notamment la discussion entre Dantès et Jacopo aux pages 292 et 293

Descartes, à travers l'exemple du voyageur égaré identifiait l'égarément à l'absence de repères. Tandis que pour Pascal, c'est l'absence d'espace.

2- cf. 223 a 26

de son rythme »¹, nous pouvons dire sans grand risque de nous tromper que c'est du côté du sujet ou du spectateur conscient, que la durée est à chercher. « *Si je veux me préparer un verre d'eau sucrée, nous dit Bergson, j'ai beau faire, je dois attendre que le sucre fonde. Ce petit fait est gros d'enseignements* »². En effet, nous expérimentons ici le phénomène psychologique de l'attente. Cette durée d'attente qui rebute ma patience, n'est pas le temps mathématisé dont nous disions tantôt qu'il pourrait s'accélérer infiniment. Je ne peux ni allonger ni écourter celle-là, je suis plutôt obligé de l'épouser ou si l'on préfère mieux, de la vivre.

Que faut-il retenir de cette expérience sinon que la durée, le temps vrai n'est pas quelque chose qu'on peut penser mais quelque chose qu'on vit intérieurement ? Mieux, ce n'est pas seulement du vécu, c'est mon vécu c'est-à-dire ma vie intérieure, ma conscience. « *Qu'est-ce que la durée ?* » S'interrogeait M. B. Madaule. « *C'est le «moi profond» ; si nous avons l'expérience directe de l'un, nous avons, du même coup, l'expérience directe de l'autre* »³.

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à chercher «*au plus profond de nous-mêmes* »⁴ les caractéristiques de la durée.

Que constatons-nous lorsque nous nous concentrons sur nous-mêmes, lorsque nous entrons en notre fort intérieur ? Qu'est-ce que notre vie intérieure, c'est-à-dire notre conscience ?

Le Grand Usuel Larousse définit l'inconscience comme «*une perte de connaissance momentanée ou permanente*». Est inconscient celui «*qui n'a plus conscience de son existence et de la réalité qui l'entoure*». A contrario, on peut dire que la conscience est le sentiment que l'on a de soi et du monde extérieur avec lequel on est en rapport perpétuel. La conscience est donc un ensemble de sentiments ou d'états psychologiques qui se succèdent et qui sont fonction de nos conditions d'existence. Ainsi, j'ai chaud ou j'ai froid, un ciel gris me

1- André Robinet op. cit. p.17

2- *Evolution Créatrice* in *Œuvres* p. 502 s_q

3- Voir *Bergson adversaire de Kant*, Puf. Paris 1966 p. 30

4- *Evolution Créatrice* in *Œuvres* p. 664.

Ceci n'est pas sans nous rappeler la démarche de Descartes qui, après avoir cherché quelque savoir digne de ce nom, dans «le monde des livres» puis dans «le grand livre du monde», où il n'a trouvé que du divers, décida de chercher aussi en lui-même.

chagrine tandis qu'une belle après-midi ensoleillée me rend joyeux. La perspective d'une main chanceuse au poker m'excite de joie, alors que celle d'une comparution en justice me trouble. Je passe donc d'un état de conscience à un autre ; je change.

Par ailleurs, un être inconscient c'est quel qu'un qui agit sans mesurer les conséquences de ses actes. Par contre, agir consciemment c'est agir en tenant compte de ce qui adviendra de ses actes, en calculer et en prévoir les conséquences. Mais, calcul et prévision ne se font-ils pas en fonction de ce que l'on sait déjà ? En effet, sachant que par le passé telle de mes actions a eu tel effet, une telle autre, tel autre effet, ainsi de suite, avant d'entreprendre quelque action, je me souviendrai de ses éventuels effets, et si je veux obtenir tel effet, je dois me rappeler les conditions requises pour cet effet. Agir consciemment c'est essentiellement se souvenir. Il faut donc dire avec Bergson que « *conscience signifie d'abord mémoire* »¹, c'est-à-dire conservation et accumulation du passé. L'une des fonctions premières de la conscience est de conserver les divers états qu'elle aura traversés. De ces états, nous disons qu'ils se succèdent. Comment se fait cette succession ?

Une psychologie de type mécaniste présente les états psychologiques comme des atomes séparés, des blocs définis et il n'y a mouvement qu'entre deux états. Mais, dans la mesure où ces états sont des présents fixes, qu'est-ce qui produit le mouvement entre eux ; mouvement qui semble bien n'être qu'un saut brusque ? Pour Bergson, il suffit d'expérimenter sur soi-même pour se rendre compte qu'on est plutôt en présence d'une fluidité continue.

Le mouvement ne réside pas exclusivement dans le passage d'un état à un autre ; mais l'état lui-même est mouvement. Chaque état évolue et s'altère sans cesse pour donner l'état suivant : sans cette mobilité interne, on voit mal ce qui entraînerait un changement d'état. On pourrait à la rigueur dire qu'il n'y a pas plus dans un changement d'état que dans la persistance dans un même état. Telle une mélodie musicale où les notes, bien que se succédant les unes les autres, se fondent entre elles en une continuité harmonieuse, notre vie intérieure est un même état se prolongeant et se modifiant continuellement avec plus ou moins d'intensités semblables aux « *coups de timbale qui éclatent de loin en loin dans la symphonie* »², trahissant ainsi un fond continu dont ils se détachent. Bref, « *notre vie intérieure tout entière est*, dira Bergson, *quelque chose comme une phrase unique entamée*

1 Energie Spirituelle in *Œuvres* p. 818.

2-Evolution Créatrice in *Œuvres* p.496

dès le premier éveil de notre conscience, phrase semée de virgules, mais nulle part coupée par des points»¹.

Mais dans une mélodie - comme dans une phrase d'ailleurs - chaque note n'a de sens que par rapport à celle qui la précède et celle qui suit. Si la conscience est mélodie, alors, elle n'est pas seulement mémoire c'est-à-dire conservation du passé ; elle est tout aussi tournée vers ce qui sera. L'esprit nous dit Bergson, s'occupe du présent mais en vue de ce qui sera car, il a pour préoccupation principale de vivre. Il y a donc une « *traction ininterrompue* » de l'avenir qui nous fait agir continuellement ; cependant, nous agissons avec tout notre passé, « *y compris notre courbure d'âme originelle* »². De ce point de vue, on dira que la conscience est un trait d'union entre le passé et l'avenir ; elle est, dira Husserl « *réention* » (souvenir du passé) et « *protention* » (signe vers l'avenir). Sur le passé nous sommes appuyés vers l'avenir nous sommes penchés : tel est, notre être.

Ainsi, tandis que pour Descartes je suis essentiellement *une chose qui pense*, pour Bergson, je suis *une chose qui dure*. Ma vie intérieure est une *durée*, c'est-à-dire « *le progrès continu du passé qui ronge l'avenir et qui gonfle en avançant* »³. Lorsque notre conscience se retire du monde, pour se prendre pour son propre objet, lorsqu'elle se retourne, se dépouille et se concentre sur elle-même, en un mot lorsque nous pratiquons l'*époché* husserlien (la mise entre parenthèses du monde), « *c'est dans la pure durée que nous nous replongeons alors, une durée ou le passé, toujours en marche, se grossit sans cesse d'un présent absolument nouveau* »⁴. La durée est une « *donnée immédiate de la conscience* » pour reprendre un titre de Bergson.

Au demeurant, la durée jouera dans la pensée de Bergson le rôle qui fut celui du cogito dans le cartésianisme. Elle servira de fondement à tout le système comme l'affirma Bergson lui-même dans l'une de ses nombreuses correspondances. « *A mon avis, écrivait-il à Höffding, tout résumé de mes vues les déformera dans leur ensemble et les exposera, par là même, à une foule d'objections, s'il ne se place pas de prime abord et s'il ne revient pas sans cesse à ce que je considère comme le centre même de la doctrine : l'intuition de la durée* »⁵. Cette durée se distingue de la pseudo-durée qu'est le temps mesurable que la mécanique,

1- *Energie Spirituelle* in *Œuvres* p. 858

2- *Evolution Créatrice* op. cit. P. 498

3- *Ibidem*.

4- *Idem*. p. 664

5- Lettre à H. Höffding du 15 mars 1915 in *Mélanges* p. 1147

la physique et l'astronomie objectivent en l'aplatissant le long d'une ligne dans l'espace. La durée n'est pas objective mais subjective. Camille Pernot dira avec justesse estimons-nous, que « *la durée est d'essence psychique, car elle suppose la conservation et la continuation du passé dans le présent c'est-à-dire une mémoire. Elle est donc en premier lieu la forme sous laquelle l'intuition perçoit la vie intérieure : l'esprit est durée et même il n'est que durée* »¹.

L'espace n'est pas le temps ; il en est plutôt le signe, le symbole. C'est leur confusion qui fut à la base des sophismes de Zénon qui cherchait à démontrer l'impossibilité du mouvement. Les très célèbres arguments qu'il développa dans ce sens, se ramènent à celui dit de la dichotomie que Zénon expose comme suit. Pour aller d'un point quelconque de l'espace à un autre (A et B par exemple), il me faut parcourir la moitié de la distance [AB], puis la moitié de ce qui reste, puis la moitié du nouveau reste, et ainsi de suite. Je n'atteindrai donc jamais, en droit, le point B car, l'espace étant divisible à l'infini, il me faudrait un temps infini pour le parcourir. Ainsi, Achille poursuivant la tortue ne la rattrapera jamais puisque celle-ci conservera toujours une avance aussi minime soit-elle sur lui. De même, la flèche décochée n'atteindra jamais la colombe, à supposer même que celle-ci soit perchée, donc immobile, la ligne qui indique la distance qui les sépare étant divisible à l'infini, il faut un temps infini pour que la flèche passe par les différentes stations qui résulteront de la division.

L'argumentation zénonienne débouche sur une aporie (difficulté sans issue) : théoriquement, le mouvement semble impossible alors que nous l'expérimentons directement ou indirectement à chaque instant. Aussi, Diogène Le Cynique ne se priva-t-il point de quelques pas de marche pour prouver, à l'évidence, au disciple de Parménide que le mouvement existe bel et bien. (N'est-ce pas lui qui présenta un coq plumé comme étant l'homme de Platon, obligeant ainsi celui-ci à compléter sa définition en y ajoutant : «avec des ongles plates»). Mais, Bergson n'opposera pas le fait au raisonnement ; il montrera tout simplement les failles du raisonnement.

Le mouvement, une fois effectué, laisse derrière lui une trajectoire immobile qu'on peut diviser en autant d'immobilités qu'on voudra, c'est-à-dire en autant d'arrêts qui n'étaient que virtuels. Cette trajectoire est certes décomposable en positions successives, mais, ce faisant, ce n'est point le mouvement qu'on décompose car celui-ci n'est plus. Ainsi, bien que le mobile occupe des positions successives de l'espace, il n'en demeure pas moins que le

1-Voir Encyclopaedia Universalis £4, p.7

passage d'une position à l'autre n'est saisi que par la conscience. Car, cette opération s'inscrit dans la durée et échappe par là même à l'espace. Cette opération constitue l'essence du mouvement qui n'est pas une «*chose*» mais un «*progrès*». *«Le mouvement en tant que passage d'un point à un autre, écrit Bergson, est une synthèse mentale, un processus psychique et par suite inétendu»*¹. Si l'espace est divisible à l'infini, le mouvement lui, par contre, reste un acte simple. Les pas d'Achille et ceux de la tortue sont donc des indivisibles en tant que mouvement, mais rapportés à l'espace, il deviennent des grandeurs différentes de sorte qu'Achille ne tardera pas à rattraper la tortue. Tout porte à croire par conséquent, qu'«*à Achille poursuivant la tortue, [Zénon substitue] en réalité deux tortues réglées l'une sur l'autre, deux tortues qui se condamnent à faire le même genre de pas ou d'actes simultanés, de manière à ne s'atteindre jamais*»². Il faut donc rigoureusement faire le distinguo entre la mobilité et l'espace parcouru, comme dans le cas d'une étoile filante. Ici, l'espace parcouru nous apparaît sous forme d'une ligne de feu alors que nous avons la sensation absolument indivisible, purement qualitative du mouvement. L'espace parcouru est quantité homogène et divisible tandis que l'acte par lequel on le parcourt est qualité ou encore intensité. Qualité et quantité sont donc deux réalités strictement distinctes ; il ne faut pas attribuer à l'une les propriétés de l'autre. Dans la durée, il n'y a d'homogène que ce qui lui appartient le moins : l'espace parcouru. D'où vient alors cette confusion de la durée et de l'espace ? Pourquoi éprouvons-nous tant de difficultés à nous représenter la durée ?

Le monde qui nous entoure, nous dit Bergson, est un ensemble d'images qui se présentent à moi. Parmi elles, mon corps est une image privilégiée en ce sens qu'il participe du monde mais est en même temps ce par quoi je me représente toutes les autres images³.

Dans la mesure où «*chaque moment de notre vie intérieure correspond*» à «*un moment de notre corps*»⁴, que celui-ci est une partie quoi qu'infime de la matière, nous sommes emmenés à admettre que la correspondance s'étend à tout l'univers que nous estimons former un tout. En effet, nous voyons tout autour de nous des phénomènes qui apparaissent et disparaissent avec nos états de conscience : l'univers tout entier semble bien durer à notre manière - l'expérience de la préparation du verre d'eau sucrée en était déjà

1- Essai sur les données immédiates de la conscience op. cit. p.74

2- Ibidem P. 75

3- C'est la conclusion à laquelle a abouti le premier chapitre de Matière et mémoire notamment p.173 où la matière est définie comme image.

4- Voir Durée et simultanéité in Mélanges p.99

annonciateur. Il y a donc simultanéité entre nos états psychiques et les états de la matière, et chaque moment de notre durée, bien que solidaire des autres, *«peut être rapproché d'un état du monde extérieur qui en est contemporain et se séparer des autres moments par l'effet de ce rapprochement même»*. De là à représenter la durée par l'espace ou à identifier celui-ci à celle-là, il y a un pas que la science et le sens commun franchissent aisément, peut-être même inconsciemment. Ainsi, le mixage du temps et de l'espace se fait par le biais de la simultanéité que Bergson définit *«l'intersection du temps avec l'espace»*¹.

L'esprit, la conscience, disions-nous, est constamment tournée vers l'action. ? Elle s'occupe de ce qui est en vue de ce qui sera ; elle prépare notre action. c'est pourquoi la perception que nous avons de la réalité extérieure est un découpage de celle-ci en fonction des contours possibles de nos éventuelles actions. Ce commerce avec l'espace encrera en nous des habitudes de distinction, de séparation et de division. C'est ce qui justifie la psychologie associationniste qui voit dans le *moi* l'assemblage de la multiplicité numérique des états de conscience.

Un tel moi existe bel et bien : il est ce par quoi nous communiquons avec le monde, ce qui nous permet de vivre en société. Qui dit société, dit langage c'est-à-dire moyen de communication et c'est par la parole que nous communiquons en général avec autrui. Or, parler c'est associer verbalement des idées les unes aux autres qui, ainsi, se juxtaposent au lieu de se pénétrer. Il convient donc d'appeler ce moi *«moi superficiel»* ou *«moi externe»*. Mais parler de *«moi superficiel»* c'est supposer un *«moi profond»*. On peut d'ores et déjà conjecturer que ce dernier ne connaît ni séparation ni juxtaposition. Cependant, la conscience, tourmentée d'un insatiable désir de distinguer (pour agir) substitue le symbole à la réalité ou n'aperçoit la réalité qu'à travers le symbole. Elle préfère ainsi le moi superficiel au moi profond et fondamental car, celui-là se prête mieux aux exigences de la vie sociale en général et du langage en particulier. Voilà pourquoi nous éprouvons tant de difficultés à nous représenter adéquatement le temps c'est-à-dire dans sa pureté originelle, et lui substituons spontanément un milieu homogène (une ligne) qui n'en est que le symbole, ni plus ni moins. Nous avons, pour ainsi dire, une *«tendance – fertile en illusions – qui nous porte à appliquer le mouvement contre l'espace parcouru, à faire coïncider la trajectoire avec le trajet, et à décomposer alors le mouvement parcourant la ligne comme nous décomposons*

1-On retrouvera ces remarques sur la simultanéité dans l'Essai sur les données immédiates de la conscience (p.74 et suiv.) et Durée et simultanéité p. 98 et suiv.

la ligne elle-même»¹. D'un seul coup, nous attribuons au mouvement la divisibilité de l'espace qu'il parcourt et projetons dans l'espace l'acte, en l'appliquant le long de l'espace parcouru, autrement dit en le solidifiant.

Pour saisir le temps réel, il faut donc se tourner vers le moi profond en faisant éclater la croûte des habitudes et en creusant au-dessous de la surface. Bref, *«nous allons donc demander à la conscience de s'isoler du monde extérieur, et, par un vigoureux effort d'abstraction, de redevenir elle-même*»².

Lorsque la conscience parvient à se détourner de l'action, lorsqu'elle *«rêve au lieu de vouloir*»³, alors c'est dans la pure durée que nous replongeons. Ici, comme nous le disions tantôt, les faits de conscience se succèdent certes, mais cette succession implique fusion, pénétration mutuelle ou *«compénétration*», et organisation. Hors du moi profond, il y a entre les choses extériorité réciproque sans succession. Dans le moi, il y a succession sans extériorité réciproque. *«Là est notre véritable vie*, nous dit François Meyer, *notre moi véritable, une continuité dynamique de changement*»⁴. Là est également la durée vraie : celle-ci est essentiellement mouvement c'est-à-dire *«continuation de ce qui n'est plus dans ce qui est* »⁵.

Le cours du temps réel n'est ni arrêtable ni réversible. De même, les moments de notre existence qui se déroule dans le temps sont irréversibles et chacun dure et ne dure que le temps nécessaire : on ne peut ni en rétrécir ni en allonger la durée encore moins en arrêter l'écoulement. Nous sommes dans le temps, mieux, nous sommes *de* la durée car nous naissons, grandissons, vieillissons etc. Face au temps nous sommes impuissants et nos moments de bonheur semble passer si vite tandis que nos ennuis paraissent durer une éternité. Le poète en était tellement conscient qu'il accablât le temps de tous nos malheurs.

1- Durée et simultanéité in *Mélanges* p.102

2- Essai sur les données immédiates de la conscience op. cit. p.67

Il s'agit de la réduction phénoménologique dont parle Husserl.

3-François Meyer Pour connaître la pensée de Bergson op. cit. P. 30

4-Idem. p. 28

5- Durée et simultanéité in *Mélanges* p. 102

*«Ô temps ! suspends ton vol, et vous, heures propices !
 Suspendez votre cours :
 Laissez-nous savourer les rapides délices
 Des plus beaux de nos jours !
 «Assez de malheureux ici-bas vous implorent,
 Coulez, coulez pour eux ;
 Prenez avec leurs jours les soins qui les dévorent,
 Oubliez les heureux.»¹*

Que peut-on conclure de tout ce qui précède sinon que le bergsonisme est une philosophie de la mobilité ?

Les êtres vivants naissent, grandissent et périssent, et la matière inorganique est le siège de phénomènes de natures électrique, oscillatoire et ondulatoire. L'univers, nous dit Bergson, dure dans son ensemble : il y a une *«durée immanente au tout de l'univers»²* qui en fait le lieu d'une création ininterrompue de formes.

Bergson est en cela continuateur d'Héraclite d'Ephèse dont la doctrine du *«Panta rei»* s'oppose à celle parménidienne de l'*Etre-Un*. Pour Héraclite, tout change sans fin, *«tout coule»*: la nuit succède au jour, la mort à la vie. A cette philosophie de la mobilité universelle s'oppose Parménide (et toute la tradition éléatique), pour qui la mobilité n'est qu'une illusion qui trompe nos sens ; ce qui est réel, c'est l'être unique, immuable, immobile, éternel : *«L'Etre est, le non-être n'est pas»*, (non-être est ici synonyme de changement).

Héraclitéisme et *éléatisme* sont jusque là les seules directions possibles offertes à la pensée philosophique, à en croire Jacques Monod. *«Depuis sa naissance, dans les îles ioniennes, écrit-il, il y a près de trois mille ans, la pensée occidentale a été partagée entre deux attitudes en apparence opposées. Selon l'une de ces philosophies la réalité authentique et ultime de l'univers ne peut résider qu'en des formes parfaitement immuables, invariantes par essence. Selon l'autre, au contraire, c'est dans le mouvement et l'évolution que réside la seule réalité de l'univers»³*. Bergson s'oppose donc à Platon qui, avec sa théorie des Idées immuables et éternelles, demeure le symbole de l'éléatisme.

1-cf. «Le Lac» in *Lamartine Œuvres poétiques complètes* Ed. Gallimard 1963, p. 39

2- Voir Evolution créatrice in *Œuvres* p. 503

3-Le hasard et la nécessité op.cit.. p.133

Toutefois, malgré leur ressemblance principielle – toutes deux se fondent sur la mobilité - la philosophie bergsonienne diverge en aval de celle d'Héraclite, comme l'a si bien souligné Camille Pernot. Si pour Héraclite dit-il, l'univers est un fleuve constamment produit et détruit par le Feu cosmique, *«pour Bergson, le changement perpétuel ne signifie pas anéantissement constant mais continuation et création, c'est-à-dire enrichissement ininterrompu»*¹.

En somme, dans la perspective bergsonienne, la durée (le mouvement) semble bien être ce par quoi tout s'expliquera ; si nous en approfondissons la nature, elle dissipera toute obscurité. Aussi, André Robinet avait-il raison de dire que la condition première pour comprendre l'œuvre de Bergson est de ne pas la *«prendre à rebrousse- durée»*². Marchons donc à la lumière de ses puissants projecteurs que nous braquerons jusqu'au fond de ces *«grottes»* qui jalonnent notre *«route»*.

1-Voir Encyclopaedia universalis t4 p.7. Bergson parle d' «enrichissement ordinaire de l'être» dans les *Donnés immédiates...* p.127

2- Bergson et les métamorphoses de la durée. Op. cit. p.10.

**TROISIEME PARTIE : LE NOUVEL ECLAIRAGE DE
LA DUREE**

I- LA THORIE BERGSONIENNE DE LA VIE

«L'univers n'était pas gros de la vie, ni la biosphère de l'homme. Notre numéro est sortie au jeu de Monte-Carlo. Quoi d'étonnant à ce que, tel celui qui vient d'y gagner un milliard, nous éprouvions l'étrangeté de notre condition ?»¹

Le bergsonisme est né d'un constat : celui de la difficulté voire l'incapacité des sciences biologiques à cerner convenablement leur objet à savoir le vivant, et au-delà, la vie elle-même. Ses difficultés semblent inhérentes aux fondements mêmes de la biologie c'est-à-dire à la conception qu'elle se donne d'emblée de la vie et de son origine.

Les scientifiques estiment aujourd'hui que la terre est vieille de quatre milliards, cinq cents millions d'années, alors que la vie y serait apparue un milliard d'années plus tard, à partir de la matière minérale qui est devenue de la matière organique sous l'effet de processus chimiques.

Qu'est-ce qui a donc permis, et qu'est-ce qui aurait nécessité, à un moment donné le passage du minéral à l'organique ? D'où vient la vie ?

Certains chercheurs américains penchent pour une origine météoritique de la vie. Pour eux, ce sont les météorites circulant dans l'espace interplanétaire et tombant souvent à la surface des planètes qui auraient apporté la vie sur notre planète. Dans certains spécimens, on retrouve des éléments chimiques qui présentent des différences de composition isotopique par rapport à celle observée sur la terre. C'est de leur rencontre qu'aurait résulté la vie.

A côté de cette thèse, la quasi totalité des biologistes moléculaires modernes estiment que le secret de la vie est à chercher dans l'ADN (acide désoxyribonucléique) qui renferme toutes les potentialités du vivant.

Mais, encapsulé dans une cellule c'est-à-dire un milieu restreint, comment peut-il donner la vie ?

Toujours est-il que dans un cas comme dans l'autre, la vie est une propriété de la matière et les phénomènes vitaux (les êtres vivants) se réduisent à des processus physico-chimiques. Il n'y a donc pas de différence entre l'organique et l'inorganique, et la science appliquera à l'un et à l'autre la même méthode d'investigation.

Cependant, cette méthode qui se révèle si féconde dans son application sur la matière inerte, montre ses limites dès qu'elle est appliquée aux phénomènes vitaux qui lui semblent réfractaires. Elle nous livre certes quelque chose du vivant à savoir ce qu'il a de physico-chimique.

1- Le hasard et la nécessité op.cit. p185

Le physico-chimique étant du matériel, c'est l'essence même des êtres vivants, ce qu'ils ont de proprement vital qui se dérobe à l'analyse scientifique. C'est à croire que le vital ou tout simplement la vie échappe au joug de la causalité stricte, ou bien alors, il faut dire que la science est incapable de saisir le déterminisme qu'elle s'est proposé de découvrir dans les phénomènes.

Quoi qu'il en soit, la vie demeure un mystère non encore sondé pour la science malgré l'impressionnant développement de ses techniques d'investigation. Dès lors, ne faudrait-il pas admettre qu'il y a une différence fondamentale entre l'organique et l'inorganique et, parant, qu'ils ne sont pas justiciables des mêmes méthodes ?

Bergson pour sa part reconnaît la spécificité (qui s'impose à nous d'ailleurs) du vital par rapport au matériel et opère un changement de perspective pour rendre celui-là intelligible. Il propose une conception de la vie différente de celle qui a servi de base à la biologie. En quoi consiste donc la conception bergsonienne de la vie ?

I-1 – QU'EST-CE QUE LA VIE ?

L' idée que Bergson se fait de la vie est – comme on peut le deviner à la lumière de son rejet de la biologie mécaniste -, fondamentalement immatérialiste. Pour lui, la vie vient à la matière de l'extérieur par une *énergie vitale* qui la fait passer à l'organisation. Loin d'être une propriété de la matière, comme le prétendent la plupart des biologistes, la vie semble plutôt être une force qui transcende celle-là. **«Bref, les choses se passent comme si un immense courant de conscience, où s'entre- pénétraient des virtualités de tout genre, avait traversé la matière pour l'entraîner à l'organisation et pour faire d'elle, quoiqu'elle soit la nécessité même, un instrument de liberté»¹.**

Le bergsonisme est en ce sens un *vitalisme* c'est-à-dire **«une doctrine admettant que les phénomènes de la vie possèdent des caractères sui generis, par lesquels ils diffèrent radicalement des phénomènes physiques et chimiques et manifestent ainsi l'existence d'une «force vitale» irréductibles aux forces de la matière inerte»².** Quelle est donc la nature de cette force vitale ?

Pour s'en faire une idée, il faut se tourner vers les êtres vivants qui en sont dépositaires. Il s'agit ici de passer des manifestations de la vie à la vie elle-même. Or, **«l'existence dont nous sommes le plus assurés et que nous connaissons le mieux est incontestablement la nôtre, car de tous les autres objets, nous avons des notions qu'on pourra juger extérieures et superficielles, tandis que nous nous percevons nous-mêmes intérieurement, profondément»³.** C'est dire que pour comprendre la vie, et bien la comprendre, nous devons partir de nous-mêmes. **«Saisissons donc le fil qui part de nous-mêmes et opérons cette conversion du dehors au dedans qui nous faisant comprendre l'homme nous fera comprendre aussi la vie»⁴.** Que sommes-nous alors ?

Nous expérimentons d'abord que nous sommes un corps soumis aux lois de la matière : on peut le pousser vers l'avant, le tirer vers l'arrière, le soulever. Cependant, ce corps est doué d'autres mouvements qui ne sont pas explicables par les lois de la mécanique. Il peut se déplacer à une vitesse tantôt grande tantôt faible, puis s'arrêter brusquement et repartir aussitôt

1- Energie spirituelle in *Œuvres* p.829

2- André Lalande, Vocabulaire technique et critique de la philosophie.

3- Evolution créatrice in *Œuvres* p494

4-Jeanne Delhomme, «Durée et vie dans la philosophie de Bergson» in *Les études bergsoniennes* Tome II, Albin Michel 1949, p.132.

sans recevoir d'impulsion de quelque corps extérieur que ce soit. Ce qui contredit flagramment la *loi d'inertie* selon laquelle la somme d'énergie d'un corps en mouvement se conserve naturellement : aucun mouvement ne saurait cesser ni s'accélérer de lui-même.

Ces mouvements imprévisibles, donc inexplicables mécaniquement, on les appelle «volontaires» car ils n'ont d'autres causes que «*moi*» c'est-à-dire l'«*âme*» ou encore «*l'esprit*»¹. Ce qu'il y a de vital en nous, ce n'est donc pas le corps qui, abandonné à lui-même n'échappe point aux lois de la matière (il tombe dans la pure matérialité), mais l'âme ou l'esprit. Il faut dès lors bien admettre avec Bergson que «*la vie est en réalité d'ordre psychologique* »² c'est-à-dire spirituel. Par conséquent, c'est vers l'esprit qu'il faut se tourner pour induire la nature de la vie.

Mais, qui dit esprit dit conscience avons-nous appris de Bergson. Or conscience signifie mémoire c'est-à-dire «*conservation et continuation du passé dans le présent* » : celle-ci dure essentiellement. Si conscience, esprit et durée signifient la même chose («*la durée est le progrès continu du passé qui ronge l'avenir et qui gonfle en avançant*»³), alors vie et durée sont de même nature.

La conclusion à laquelle nous avons abouti lorsque nous cherchions à connaître notre «*moi profond*», notre conscience, est que notre vie intérieure n'est que durée⁴. Notre caractère, notre personnalité n'est rien d'autre que la totalité de notre expérience. Tout ce que nous avons vécu depuis notre naissance (et même avant puisque nous naissons avec un héritage génétique), est conservé par la mémoire car tout ce qui du présent tombe dans le passé, tombe également dans la mémoire qu'il enrichit. Ce qui signifie que notre personnalité grandit et se mûrit sans cesse ; elle change. C'est pourquoi, même si notre histoire était monotone et linéaire, chacun de ses moments est pour la mémoire du nouveau qui la façonnera à son tour, ainsi indéfiniment. Ma vie intérieure est donc création ininterrompue de nouveautés. «*Ce n'est pas seulement du nouveau, renchérit Bergson, c'est de l'imprévisible*»⁵.

Si la vie se comporte ainsi sur le plan individuel, c'est que, dans son ensemble, elle est fondamentalement durée, c'est-à-dire création continue, jaillissement ininterrompu de nouveautés donc liberté.

1- cf. Energie spirituelle in *Œuvres* p.836 et suiv.

2- Voir Evolution créatrice in *Œuvres* p.713

3- Ibid. p.498

4-cf. supra, 2^e partie, II

5- Evolution créatrice in *Œuvres* p. 499.

Mais, la vie se définit comme la propriété d'un certain corps matériel qui est nécessité. Elle est dira Bergson «*précisément de la liberté s'insérant dans la nécessité et la tournant à son profit*»¹. Pourquoi s'aventure-t-elle donc dans la matière ?

Dans la mesure où, la vie se manifeste à nous à travers des corps vivants, il faut bien admettre que la matière n'est pas purement et simplement l'envers négatif de la vie, elle est ce dont celle-ci se sert pour avoir une existence physique. La matière est donc à la fois obstacle et auxiliaire à la vie. Ainsi, dans la terminologie bergsonienne, la vie est employée dans une double acception qu'il convient de démêler. Elle désigne tantôt ce qu'on peut appeler «*Vie*» c'est-à-dire la poussée, le courant, la force vitale ou encore «*l'énergie spirituelle*» telle quelle à son entrée dans la matière, tantôt la coexistence, le compromis entre la conscience et la matière. C'est ce compromis que manifeste tout être vivant.

La philosophie de Bergson est un spiritualisme en ce sens qu'elle pose l'esprit comme une réalité distincte du corps. L'homme est enraciné dans la nature par le fait de son corps mais y échappe par certain côté du fait qu'il est une conscience. Nous sommes corps et esprit. Mais le corps s'oppose à l'esprit comme la nécessité à la liberté. Nous voilà de plein pied dans le dualisme cartésien² : l'homme est une dualité entre le corps et l'esprit qui, cependant, sont unis. Comment dès lors rendre compte de cette union ?

Pour ce faire, Bergson partira du cerveau qui est le point d'insertion de l'esprit dans la matière. Il s'agira d'induire la nature de la relation du corps et de l'esprit à partir de celle du cerveau et de la pensée.

Rappelons tout d'abord que jusque là, la science propose généralement deux thèses pour rendre compte de la relation qui lie le cerveau à la pensée et, l'une et l'autre ne sont que des manières différentes d'exprimer la dépendance de l'âme à l'égard du corps.

Selon l'une de ces thèses, l'âme et le corps sont certes distincts mais inséparables, et tout état mental s'explique par un état cérébral concomitant dont il dépend : c'est la thèse dite du «*parallélisme*»³. Tandis que l'«*épiphiénoménisme*» ne voit dans l'âme qu'une simple efflorescence du cerveau. Il tient tout entier dans la formulation qu'en fait Cabanis : «*le*

1- Energie Spirituelle in *Œuvres* p. 824

2- Le dualisme semble être le maillon faible du cartésianisme car Descartes n'a pas pu expliquer rationnellement l'étroite collaboration entre deux substances aussi radicalement distinctes que l'âme et le corps dont l'union est un fait.

3- Cf. François Meyer, Pour connaître la pensée de Bergson op. cit. p.45, note (1)

cerveau secrète la pensée comme le foie la bile»¹. On parle alors de diététique du cerveau : bien manger pour bien penser, en somme pour être intelligent.

Dans les deux cas, les mouvements cérébraux sont la cause ou l'occasion de la représentation des objets. Et, depuis Broca, on a procédé à la localisation de toutes les fonctions de l'esprit dans des zones plus ou moins déterminées du cerveau : l'aphasie est due à une altération ou une destruction de la zone dite de Broca à savoir la troisième circonvolution gauche du cortex, les souvenirs sont rangés, quant à eux, dans le cortex, et les troubles de la mémoire sont occasionnés par certaines maladies du cerveau...

A ce niveau, la thèse du parallélisme se heurte à des contradictions que Bergson ne manque pas de souligner. En effet, *«si les souvenirs étaient réellement déposés dans le cerveau, aux oublis nets, correspondraient les lésions du cerveau caractérisées. Or, dans les amnésies où toute une période de notre existence passée, par exemple, est brusquement et radicalement arrachée de la mémoire, on n'observe pas de lésion cérébrale précise»*². Par ailleurs, dans des cas de troubles graves de la mémoire dus effectivement à une lésion cérébrale grave, il arrive quelques fois, suite à une excitation très grande ou à une forte émotion, que le patient retrouve un *«souvenir qui paraissait à jamais perdu»*³, alors que la région du cortex où il est censé être déposé est détruite ou altérée. Qu'est-ce à dire sinon que les souvenirs ne sont nullement conservés par le cerveau et que, par conséquent, il est illusoire de localiser la mémoire dans le cortex ? Mais alors, *«où»* se conservent-ils ? Autrement dit, comment la mémoire est-elle possible ?

Si le souvenir n'est pas confiné dans le corps (dans le cerveau plus précisément), il reste qu'il est conservé par l'esprit qui n'est autre chose que la conscience dont Bergson dit qu'elle est ce qu'il y a *«de plus immédiatement donné»*, *«de plus évidemment réel»*⁴. Or, nous disions tantôt que la conscience est avant tout mémoire c'est-à-dire accumulation et conservation de souvenirs. La mémoire c'est l'esprit.

Quel serait alors le rôle du cerveau ?

Vivre pour l'esprit c'est agir, agir à s'adapter aux conditions du milieu extérieur. Nous

1- cf. Matière à pensée, J.P. Changeux et Alain Connes, Odile Jacob, Paris avril 2000, p. 206.

2- Matière et mémoire in *Œuvres* p.367

3- Energie Spirituelle in *Œuvres* p. 854

4- Idem p. 857

recevons diverses excitations du monde environnant par l'intermédiaire de notre corps, auxquelles nous devons répondre par des actions plus ou moins appropriées de ce même corps. Tous les mouvements du corps sont régis par le système nerveux qui comprend : le cerveau, la moelle épinière et les nerfs. Au niveau de la moelle sont montés les mécanismes de toutes les actions que le corps pourra accomplir ces mécanismes sont soit déclenchés directement par une excitation à laquelle le corps répondra plus ou moins adéquatement par un acte réflexe, soit après l'intervention du cerveau qui choisit et actionne le mécanisme qui entraînera l'action la plus appropriée, la réponse la plus adéquate à l'excitation reçue¹. C'est bien le cerveau qui, grâce à ses choix de plus en plus adéquats, assure une meilleure adaptation de l'esprit aux circonstances existentielles.

Agir de plus en plus efficacement telle est la principale préoccupation de la conscience, c'est même la condition de son existence qui s'inscrit dans la durée où l'avenir est toujours imminent. Toute action est donc préparation, et même anticipation de l'avenir. Avec quoi prépare-t-on l'avenir si ce n'est avec notre passé ?

En effet, notre action est fonction de notre expérience : la conscience est certes penchée vers l'avenir mais elle est avant tout mémoire c'est-à-dire appuyée sur le passé qui se conserve tout entier. Chaque situation nouvelle est analysée à la lumière d'une situation antérieure qui lui ressemble afin d'y apporter une réaction plus efficace. C'est dire que si nous agissons avec notre passé, ce n'est pas avec tout notre passé mais avec une partie de celui-ci ; nous y choisissons ce qui peut servir à notre action présente. Ainsi, si **l'amnésie** (diminution ou perte de la mémoire) nous expose aux dangers des actions mal adaptées et, par conséquent, inefficaces, **l'hypermnésie** c'est-à-dire un rappel simultané et non contrôlé par le sujet de plusieurs faits de la vie passée, n'est pas moins périlleuse. Il faut juste évoquer ce qui du passé peut éclairer nos actions immédiates : c'est la **mémoire utile** qui s'obtient par la contraction progressive de notre expérience totale jusqu'à la faire coïncider avec la situation présente. **Choisir** et exclure pour mieux agir tel est le propre de la conscience : *«tendue dans un suprême effort, éclairée par son passé, orientée par ses besoins, la conscience choisit le plus utile des schèmes corporels ; traversant alors en sens inverse les divers plans parcourus, elle se détend et s'extériorise en mouvements»*²

Si l'état de conscience s'extériorise par des mouvements du corps, alors il s'accompagne d'un certain état cérébral car c'est bien par le cerveau que s'effectue le choix et

1- Idem p.820-821

2-Voir J. Delhomme, op. cit. p 142

le déclenchement du mécanisme de l'action adéquate. C'est ce qui fait dire à Bergson que « *le cerveau est l'organe de l'attention à la vie* »¹.

Toutefois, l'activité consciente ne se limite pas exclusivement à « *l'attention à la vie* » comme l'a si bien noté J. Delhomme. L'esprit est capable de se détourner de l'action utile et se payer le luxe d'une activité désintéressée tel le *rêve* ou encore la *spéculation* c'est-à-dire la réflexion. Dans un cas comme dans l'autre, il y a « *attention à soi de l'esprit* » qui se prend pour son propre objet en opérant un retournement réflexif (du moins pendant la réflexion). Pendant le *rêve*, l'activité de l'esprit n'est pas nulle ; il perçoit, se souvient et raisonne. Seulement, au lieu qu'à l'état de veille la conscience choisit et exclut à tout moment, elle est donc **attentive** en permanence (pour que je perçoive un aboiement de chien, dit Bergson, il faut que ma mémoire se contracte assez pour présenter à la sensation auditive son souvenir), pendant le *rêve*, elle est **distracte** et n'opère aucun ajustement du souvenir à la sensation. Chaque sensation peut évoquer n'importe quel souvenir comme l'aboiement d'un chien a pu décrocher « *le souvenir d'un grondement d'assemblée* »². Il n'y a aucune discrimination des souvenirs : ni choix, ni exclusion, c'est toute notre expérience qui est présent à nous. Et, à ce moment précis, l'électroencéphalogramme qui traduit l'activité électrique du cerveau, tracera une courbe presque sans relief ; ce qui signifie que le cerveau n'est guère en activité. Aussi, Bergson définit-il le *rêve* « *la vie mentale tout entière, moins l'effort de concentration* ».

Quant à la *spéculation*, elle est précisément l'attention que l'esprit se porte à lui-même, à ses propres opérations par lesquelles il élabore des pensées complexes qui se déroulent en une suite de raisonnements purement abstraits. Ces pensées s'accompagnent plus ou moins de mouvements moléculaires cérébraux selon qu'elles tendent à s'extérioriser en actions ou à s'intérioriser en connaissances.

De ces considérations, il ressort que l'activité mentale s'accompagne toujours d'une certaine activité cérébrale (comme les mouvements de bras du chef d'orchestre accompagnent la symphonie), sans que celle-ci soit l'équivalent de celle-là. « *Posez un fait psychologique, vous déterminez sans doute l'état cérébral concomitant. Mais la réciprocité n'est pas vraie,*

1- cf. *Energie spirituelle* in *Œuvres* , p.851.

2- Voir l'article sur le *rêve* in *Œuvres*, p. 878. Notamment le dialogue entre « *le moi des rêves* » et « *le moi de la veille* » pp.891-893.

*et au même état cérébral correspondraient aussi bien des états psychologiques très divers*¹.

Le cerveau étant l'organe de l'attention à la vie, il extrait de la mémoire tout ce qui peut éclairer l'action et obscurcit les souvenirs inutiles du moment pour une meilleure insertion de l'esprit dans la matière. Il est, dira Jean Wahl «*organe d'expression et de répression*»² : expression de la mémoire utile et répression des souvenirs inutiles (pour la circonstance), qui seront refoulés pour ainsi dire dans l'inconscient³. Bref, le cerveau canalise la mémoire «*dans ses rapports avec le réel*». Il ne sert donc pas à conserver les souvenirs mais à en rappeler ceux qui sont utiles en chaque occurrence. En réalité, dans les aphasies diverses, les souvenirs ne sont pas arrachés de leurs lieux (car il n'y a pas ici de lieu à proprement parler), c'est plutôt le mécanisme de leur rappel qui semble être dérangé ou altéré.

Au demeurant, l'état mental déborde de toutes parts l'état cérébral qui en dessine tout au plus les articulations motrices c'est-à-dire ce qui en est susceptible d'être traduit en actions. En dehors de ces tendances motrices, le cerveau ne peut que mimer l'activité de la conscience. La relation du cérébral au mental est comparable à celle des «*allées et venues des acteurs sur scène*»⁴ à la signification de la pièce de théâtre qu'ils jouent. Les mouvements des acteurs nous livrent tout le sens de la pièce s'il s'agit d'une «*pantomime*» c'est-à-dire un spectacle où les acteurs s'expriment exclusivement par des gestes, des mimiques et des attitudes. Alors qu'ils ne renseignent guère sur la signification d'une *fine comédie* shakespearienne. De même, l'état cérébral ne traduirait la totalité de l'état mental que si l'esprit était strictement tendu vers l'action. Or nous avons remarqué qu'il a également tendance à se distraire. Son concomitant cérébral n'en traduit donc qu'une infime partie. Par conséquent, l'esprit déborde le corps. Et, dans la mesure où la pensée est incommensurable au cerveau, l'esprit ne saurait être un produit du corps : l'état cérébral n'est «*ni la cause*» (comme le prétendent les épiphénoménistes), «*ni le duplicat*»⁵ (comme le pensent les tenants du parallélisme), de l'état mental. Il est dès lors utopique de croire qu'une connaissance des processus physico-chimiques que le cerveau met en branle permet d'induire la nature de la pensée au même

1- Voir Energie spirituelle in *Œuvres* p.961

2- Voir Tableau de la philosophie française, Ed. Gallimard, 1962, p 122

3- L'inconscient dont il est ici question n'a rien à voir avec l'inconscient freudien. Si pour le médecin viennois le fond de l'homme est «*un nœud de vipères*», lieu des pulsions refoulées, pour Bergson, il est création continue de nouveauté, lieu de purs souvenirs.

4- cf. Matière et mémoire in *Œuvres*, p.165

5- Idem p. 366

moment, quand bien même on serait «*doué d'une intelligence surhumaine*» ou détenteur de «*la clef de la psychophysiologie*».

En fait, la relation qui lie la pensée au cerveau est analogue à celle qui existe entre le vêtement et le clou¹. Le vêtement est certes solidaire du clou auquel il est accroché mais, l'un n'est pas pour autant l'équivalent de l'autre. C'est dire que corps et âme ne sont pas indissociablement liés (c'est là-dessus que Descartes pêche). Etant donné que celle-ci déborde celui-là, il est fort probable voire certain qu'elle lui survivra. L'esprit menant une double vie (l'attention à la vie et l'attention à soi), si le cerveau, par lequel il tend vers le réel, venait à s'éteindre, il ne vivrait plus qu'une vie distraite et détendue. Mais à quoi ressemblerait une telle vie ?

En définitive, pour Bergson, la vie est précisément la conciliation de la liberté de la conscience et la nécessité de la matière. En pénétrant la matière inerte, la vie fait advenir des êtres qui ne subissent pas passivement le déterminisme naturel mais le tournent à leur profit.

Cependant, les êtres vivants ne sont pas tous semblables. Bien au contraire, dans leur innombrable diversité, ils se répartissent entre des espèces non moins innombrables et variées. Comment donc expliquer cette dissemblance entre les classes d'individus ? Autrement dit, comment la vie a-t-elle évolué pour donner les divers types d'espèces qui peuplent la terre ?

1- cf. Energie spirituelle in *Œuvres* , p842.

I-2-L'EVOLUTION DE LA VIE

Il n'est peut-être pas superflu de rappeler ici dans leurs grandes lignes les deux principales théories scientifiques qui rendent compte de l'évolution de la vie que sont le *darwinisme* et le *lamarckisme*.

Pour Charles Darwin [1809-1882], il existe une filiation entre les espèces vivantes qui naissent les unes des autres. A l'intérieur de chaque espèce, il y a des variations insensibles qui s'opèrent sur les individus par hasard. Ces variations accidentelles en s'accumulant, créent des différences entre les individus. Et dans la mesure où le nombre des individus n'est pas proportionnel aux ressources alimentaires mises à leur disposition, une compétition fatale pour la vie s'instaure, et seuls ceux que les variations auront rendus plus aptes survivront. C'est ce que Darwin appelle la *sélection naturelle*. Les individus ainsi sélectionnés vont se reproduire et, de leur descendance, ceux qui seront sélectionnés, se reproduiront à leur tour. Ainsi évolue l'espèce.

Avant Darwin, Lamarck expliquait l'évolution des espèces par les changements des conditions du milieu extérieur qui exigent des individus certaines mutations sous peine de disparaître. Avec les nouvelles conditions extérieures, de nouveaux besoins naissent dont la satisfaction est la condition de l'adaptation. Ainsi, les individus se serviront plus souvent de certains organes que d'autres. Ceux-là se développeront alors que ceux-ci vont s'atrophier : la cécité de la taupe est la conséquence de l'habitude qu'elle a contractée de vivre sous terre (donc dans l'obscurité), les oiseaux aquatiques ont des pattes palmées qui leur facilitent la nage, les girafes ont le cou allongé à force de devoir chercher souvent leur nourriture jusqu'aux cimes des arbres. L'ensemble des mutations acquises sera transmis à leurs descendance appelées à se transformer également au gré des conditions extérieures.

On peut donc dire que pour Darwin comme pour Lamarck, c'est l'*adaptation* aux conditions extérieures qui explique l'évolution des espèces. Cependant, si pour le premier l'adaptation est passive (c'est la nature qui sélectionne automatiquement et mécaniquement les individus qu'elle aura déjà favorisés par hasard), pour le second, elle nécessite des efforts individuels.

Retenons tout simplement que lamarckisme et darwinisme assignent à l'évolution une direction unique qui va de la plante à l'homme en passant par les animaux : nous sommes tous dérivés de la même espèce à la faveur de transformations. Le transformisme - nom commun aux deux théories en question - tend à être prouvé par l'anatomie comparée et l'embryologie (qui révèlent une frappante analogie de structure entre individus de différentes espèces) mais aussi par la paléontologie qui découvre progressivement des restes fossilisés

d'individus appartenant à des espèces transitives. L'homme aurait comme ancêtre immédiat le singe. Peut-être n'est-il que «*l'arrière-petit-neveu de limace*» ?

Malgré tout, le transformisme reste une théorie qui sert à interpréter et à expliquer les faits que révèle l'étude des êtres vivants ou simplement leur observation attentive. C'est donc une théorie scientifique que les faits corroborent.

Cependant, cette théorie ne rend compte, nous semble-t-il, que de l'évolution des espèces prises isolément. S'agit-il de l'Evolution c'est-à-dire la transition de la plante à l'animal ? Elle ne nous en dit guère grand chose. Comment se sont formés au cours des âges, les êtres vivants dans leurs immenses variété et diversité ? Quel sens peut-on et/ou doit-on donner à l'évolution ? Voilà les questions qui attendent des réponses sinon satisfaisantes, du moins acceptables. Sont-ce là des questions que soulèvent les biosciences mais qui les dépassent ? Au cas échéant, n'est-ce pas à la «*biophilosophie*»¹ de tenter d'y répondre ?

Bergson pour sa part nous propose une genèse de la vie telle qu'on peut la lire à travers le spectacle qu'offrent les êtres vivants. «*L'évolution de la vie, écrit-il, depuis ses origines jusqu'à l'homme, évoque à nos yeux l'image d'un courant de conscience qui s'engagerait dans la matière comme pour s'y frayer un passage souterrain, ferait des tentatives à droite et à gauche, pousserait plus ou moins avant, viendrait la plupart du temps se briser contre le roc et repaître à la lumière*»².

La vie rappelons-le, c'est la conscience, la liberté s'insérant dans la matière qui est nécessité pour la tourner à son profit c'est-à-dire l'emmenar à la liberté ; elle cherche donc à s'y déployer. Mais, la matière, non seulement lui opposa une grande résistance mais également chercha à la plier à son propre automatisme. La vie est compétition, antagonisme : d'une part la poussée de la vie et d'autre part, la retombée ou la résistance de la matière. Pour tourner cet obstacle, la conscience fut emmenée à renoncer à une partie de sa liberté. En fait, elle semble y avoir réussi par une ruse qui consista à sympathiser d'abord avec la matière avant de l'instrumentaliser, d'où l'énorme gouffre séparant les formes rudimentaires de la vie (qui sont au confluent de la physico-chimie et de la vitalité), de ses formes les plus hautes où l'organisme vivant manifeste une indépendance quasi totale vis-à-vis de la nature.

1- Nous empruntons ce terme à Etienne Gilson qui l'employa dans le sous-titre de son ouvrage plusieurs fois cité dans le présent travail : D'Aristote à Darwin et retour, Essai sur quelques constantes de la biophilosophie.

2- Voir Energie spirituelle in *Œuvres* p. 831

Toujours est-il que sans la matière, la vie ne saurait prendre corps. Celle-là est donc à la fois obstacle et moyen. C'est pourquoi, on peut dire que, d'une certaine manière, la vie court le risque de s'y aliéner. C'est d'ailleurs ce qui arrive avec la vie végétale où la conscience se heurte comme à une espèce de mûr infranchissable : la matière a réussi à **«la plier à son propre automatisme»** et à l'endormir **«dans sa propre inconscience»**¹. Les êtres vivants qu'elle fait advenir sont déterminés par leur inertie et leur inconscience (il y a certes une certaine forme de conscience, car celle-ci est coextensive à la vie, mais elle n'est pas consciente d'elle-même). Cependant, cette domination de la matière, aussi grande qu'elle puisse paraître, n'est pas totale (peut-être n'est-elle que provisoire ?), car la vie **«travaille devant nous »** et **« cherche à se libérer de ses entraves et aussi à se dépasser elle-même »**. La liberté immanente à la force vitale se manifeste- que cela soit dit en passant – dans la diversité innombrable d'espèces végétales aux formes imprévues et imprévisibles qu'elle crée même si celles-ci tendent à se répéter machinalement.

Avec le règne animal, on a une forme de vie supérieure car ici, l'individu arrive, d'une certaine façon, à se libérer de l'inertie qui caractérise le règne végétal. A l'immobilisme de la plante se substitue la mobilité de l'animal. Or, le mouvement implique nécessairement choix (libre cependant) entre plusieurs orientations possibles. Ainsi, l'animal choisit ou tend à choisir. Mais, les possibilités de choix qui apparaissent sont mises au service des nécessités de la vie au sens biologique du terme. Cela veut dire que c'est la vie du corps qui prend le dessus sur la percée de l'énergie spirituelle. En d'autres termes, la force vitale n'a pas pu se libérer véritablement de son enracinement dans la nature. Sa liberté demeure encore riviée à la chaîne que constitue la matière qu'elle n'a fait qu'allonger. Avec l'homme, comme nous le verrons ci-dessous, la chaîne se brisera et l'énergie spirituelle se manifesterá pleinement en se posant comme conscience de soi.

Toutefois, nous retiendrons ceci que la vie qui évolue sur notre planète est liée à la matière sans laquelle, son activité créatrice n'aurait sans doute pas atteint une telle proportion, une telle envergure. Si la vie en elle-même est évolution c'est-à-dire activité créatrice, sa liberté créatrice se manifesta davantage lorsqu'elle rencontra sur sa route l'obstacle de la matière qu'elle dut tourner en prenant différentes formes physiques qui sont fonction de la nature de la résistance qui lui est opposée ça et là.

Dans la mesure où la Terre n'est qu'une planète parmi tant d'autres du système solaire qui, lui-même, s'épanouit dans l'univers à côté de plusieurs autres systèmes, **«il est**

1- cf. Energie Spirituelle in **Œuvres** p. 829 suiv.

vraisemblable que la vie anime toutes les planètes suspendues à toutes les étoiles. Elle y prend sans doute, en raison de la diversité des conditions qui lui sont faites, les formes les plus variées et les plus éloignées de ce que nous imaginons»¹. De nos jours, l'exobiologie, une branche récente de l'astronomie, étudie justement la possibilité d'une vie en dehors de notre planète. Sur ce terrain, comme sur beaucoup d'autres d'ailleurs, la science est fortement devancée par le cinéma qui fait une large part aux films de science-fiction dans lesquels on a «conçu» les extra-terrestres (entendez les formes qu'aurait prises la vie sur d'autres planètes) : de leur physionomie (et même leur physiologie) à leur mode de pensée, sans oublier leurs cadre et mode de vie. En général, on les présente comme étant dotés d'une technologie à côté de laquelle, la nôtre passe pour archaïque, et leur intention serait d'anéantir la Terre. Cependant, chose curieuse, c'est l'homme, avec ses moyens dérisoires, qui vainc toujours ses extraordinaires ennemis.

Laissons donc fleurir la fertile imagination des cinéastes et suivons la raison dans sa longue marche lente mais fiable qui nous introduit dans une probabilité de plus en plus croissante qui équivaudra peut-être un jour à la certitude.

Si les êtres vivants que la vie fait advenir sont fonction de la nature de l'obstacle qu'elle rencontre, il est probable qu'elle revêtira sur d'autres planètes où elle rencontrera une matière plus ou moins réfractaire, des formes plus ou moins parfaites que celles connues de nous.

En somme, la fragmentation de la vie en individus et espèces paraît avoir comme cause l'obstacle que constitua la matière. Pour le franchir, la vie adopta la stratégie qui consista à se diviser et à se dédoubler, donc à se faire plus petite pour passer. Madeleine Barthélemy-Madaule donne dans son *Bergson*² un schéma de la vie et de son évolution ; schémas que nous adoptons sans réserve. Nous y distinguons d'une part le courant de la vie à son entrée dans la matière et, d'autre part, son histoire dans la matière où elle a essentiellement évolué dans deux voire trois directions divergentes, à savoir celle qui mène au monde végétal et celle qui mène au monde animal qui comprend deux grandes familles: les arthropodes et les vertébrés. C'est dire que la poussée vitale est une force limitée. Autrement, on ne comprendrait guère que la vie se soit divisée entre des directions divergentes, au lieu d'emprunter une voie unique eût-elle été maladroitement. D'ailleurs, pourquoi a-t-elle plus poussé dans certaines directions que d'autres ? Pourquoi, à côté des grandes divisions de la vie

1- cf. Les deux sources de la morale et de la religion in *Œuvres* p.1192

2- Aux pages 110 et 111 de l'édition du Seuil.

subsiste-t-il des subdivisions ? Bref, pourquoi l'évolution est-elle divergente et inégale ?

C'est que, nous dit Bergson, *«les causes vraies et profondes de division étaient celles que la vie portait en elle. Car la vie est tendance, et l'essence d'une tendance est de se développer en forme de gerbe, créant, par le seul fait de sa croissance, des directions divergentes entre lesquelles se partagera son élan »*¹. En effet la vie ou la conscience est un élan où se compénétrant des tendances et des virtualités diverses et même divergentes quoique fondues ensemble en un tout organique. Tant que la vie n'est pas contrariée, elle conservera son unité, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas distinguer ses éléments hétérogènes. En ce sens, l'«*élan vital*» est semblable à un bloc de minéral sous forme cristallisée. Lorsque nous le laissons tomber à terre, il se brisera mais pas d'une façon quelconque: les cassures s'effectueront selon des lignes de clivage dont les limites et les directions, bien qu'extérieurement invisibles jusque là, se trouvaient déjà déterminées de façon originale par le mode de structure du dit cristal.

Bergson compare l'évolution de la vie à celle de la personnalité de l'enfant. Enfants, notre personnalité, dont la structure de base se mettra en place vers l'âge de six ans, regroupait plusieurs personnes entre lesquelles nous choisirons une et abandonnerons les autres puisqu'elles deviennent incompatibles en grandissant. Tel musicien aurait bien pu devenir footballeur, tel autre professeur de philosophie aurait très bien pu devenir un grand professeur de physique et de chimie. Il en serait de même pour la vie à la seule différence que celle-ci n'abandonne aucune tendance ; au contraire, elle les conserve et crée avec chacune une espèce divergente qui évoluera à côté des autres sans qu'elles aient toutes le même niveau de développement. *«Il s'en faut d'ailleurs que les éléments en lesquels une tendance se dissocie aient tous la même importance, et surtout la même puissance d'évoluer... Parmi les développements auxquels elle donne naissance, les uns continuent indéfiniment, les autres arrivent plus ou moins vite au bout de leur rouleau»*².

Ainsi, à côté des grandes lignes de l'évolution de la vie, on retrouve de nombreuses bifurcations sur lesquelles l'évolution a tourné court. Sur la route des vertèbres par exemple, on dira que les agnathes, les poissons, les amphibiens, les reptiles et les oiseaux sont autant de déviations qui se sont révélées être des impasses par rapport à celle qui aboutit à l'homme. De même, comparées à la classe des insectes, au sommet de laquelle on trouve les individus vivant en société, celles des crustacés, des myriapodes et des arachnides sont comme ces

1 –cf. Evolution créatrice in *Œuvres* p.579

2- Idem p. 595

sentiers qu'il nous arrive d'emprunter quelquefois dans la brousse avant de rebrousser chemin parce qu'ils se perdent dans la forêt. Seulement, le cours de la vie est irréversible. La vie est mouvement ; elle est d'ailleurs condamnée au progrès sous peine d'être emprisonnée par la matière et, au cas échéant, *«au lieu de poursuivre son effort créateur»*, elle piétinera surplace ou tournera en rond comme dans un cercle vicieux en engendrant des individus toujours semblables. En ce sens, chaque espèce traduit un arrêt de l' *«élan vital»*.

On ne peut donc pas assigner à l'évolution de la vie une direction unique comme le font les mécanistes ; ce fut une *«erreur capitale»*¹ qu'ils ont héritée d'Aristote. Car la vie telle qu'elle se manifeste à travers les êtres vivants évoque à nos yeux, non pas l'image *«d'un boulet plein lancé par un canon»*, mais celle d' *«un obus qui a tout de suite éclaté en fragments, lesquels, étant eux-mêmes des espèces d'obus, ont éclaté à leur tour en fragments...»*².

Si l'évolution n'est pas unidirectionnelle, les espèces ne sauraient dériver les unes des autres. Certes elles procèdent toutes d'un même élan, mais, chacune évolue dans une direction divergente, exactement comme les branches qui sortent d'un même tronc. Par conséquent, l'homme n'est ni le descendant d'un singe ni n'a pour arrière-grand-oncle une limace. Il n'y a pas non plus de finalité dans l'évolution ou bien s'il y en a, il s'agit d'une finalité sans fin. L'unité de la vie est plutôt en arrière qu'en avant. Aussi, l'écart qui existe entre les différentes espèces ira-t-il toujours crescendo.

Par ailleurs, si la vie est un élan, une poussée ou encore une énergie spirituelle qui transcende la matière alors, les conditions extérieures (donc matérielles) qui lui sont faites ne sauraient présider à son évolution. Autrement dit, l'évolution n'est pas le résultat d'un simple jeu d'adaptation mécanique.

*«La route qui mène à la ville, nous dit Bergson, est bien obligée de monter les côtes et de descendre les pentes, elle s'adapte aux accidents du terrain ; mais les accidents du terrain ne sont pas cause de la route et ne lui ont pas non plus imprimé sa direction»*³. De même, les conditions de la matière ont contraint la vie à se scinder entre plusieurs directions mais, les grandes lignes de son évolution ne sont autre chose que le développement des tendances dont elle était déjà porteuse. Le renoncement à l'absolue liberté et la division sont le prix payé par la vie pour s'insérer dans la matière et s'y frayer un passage. Idem, les espèce

1- Evolution créatrice in *Œuvres* p. 609

2- Idem. p 578

3- Idem. p. 582

vivantes sont obligées de s'adapter à leurs conditions d'existence sous peine de disparaître. C'est dire que l'adaptation ne crée pas l'espèce ; elle est plutôt la condition nécessaire à son maintien.

Au cas contraire, il n'y aurait jamais qu'une seule espèce vivante (c'est là une conséquence qui découle de la théorie transformiste poussée jusqu'à ses derniers retranchements). En effet, si les espèces naissent les unes des autres au terme d'un certain nombre de sélection, étant entendu que les individus non sélectionnés d'une espèce sont appelés à disparaître justement parce qu'il n'ont pas varié et perpétuent les caractères de l'espèce alors que les conditions extérieures ont changé, toute espèce donnant naissance à une autre signe, logiquement, en même temps sa propre mort (comme la mante religieuse dont la femelle dévore le mâle qui l'a fécondée).

En plus, certaines espèces que Bergson considère comme les «*impassibles témoins des révolutions sans nombre qui ont bouleversé notre planète*»¹, conservent les mêmes caractères depuis des centaines de millions d'années. Les Lingules dit-il, n'ont pas varié depuis de primaire. La seule évolution des Equidés fossiles (augmentation de la taille des doigts et réduction de leur nombre), a occupé plus de cinquante millions d'années.

Au demeurant, tout organisme (des formes rudimentaires aux formes les plus hautes et complexes de la vie), est également bien adapté à son milieu. Partout où la vie est stoppée dans sa progression et enfermée, pour ainsi dire, dans et par la matière, elle invente des solutions adaptatives pour se perpétuer. L'adaptation paraît donc expliquer l'arrêt plutôt que le progrès de l'élan vital. Et chaque espèce propose une solution originale pour satisfaire ce besoin qu'est l'adaptation.

Si la vie végétale et la vie animale ont l'une et l'autre pour caractéristiques fondamentales et discriminatoires la fixité et la mobilité, c'est que la plante est capable de fixer directement les éléments indispensables à l'entretien de la vie à savoir l'azote et le carbone qu'elle trouve surplace, tandis que l'animal, dépourvu d'une telle faculté, est condamné à se mouvoir pour trouver ces éléments déjà fixés. Il se nourrira donc soit de plantes, soit d'animaux se nourrissant de plantes ou encore d'animaux se nourrissant d'animaux qui se nourrissent de végétaux. Dans la mesure où la vie est mouvement, il faut bien admettre que c'est sur la ligne d'évolution que représente le règne animal que s'est engagé l'essentiel de l'activité vitale et c'est sur cette ligne qu'elle ira plus loin.

La vie, disions-nous, est une immense onde qui traverse la matière, agit sur elle pour

1- Ibidem.

la tourner à son profit. Or, si nous jetons un coup d'œil sur le monde animal, nous remarquons deux types d'activité : celui dit *instinctif* de l'animal et celui *intelligent* de l'homme.

De toute antiquité, l'homme n'agit véritablement sur la nature qu'avec des instruments qu'il fabrique. Lors des fouilles archéologiques, on ne découvre jamais de restes fossilisés d'humain sans trouver dans les environs les outils dont il se servait et qui renseignent sur l'activité principale à laquelle il s'adonnait (pêche, chasse, cueillette, agriculture...). Aussi, dit-on que l'homme a l'âge de ses outils. Autrement dit, son niveau d'évolution se mesure par la qualité, la variété et l'efficacité de son outillage.

Quant à l'animal, il ne fabrique et ne dispose pas d'instruments pour agir sur son environnement sinon, son instrument est son corps même (que l'on songe à l'oiseau faisant son nid, à l'écureuil ou à la souris creusant leur trou, aux animaux prédateurs capturant leurs proies et les dévorant etc.).

C'est dire que la force vitale que manifestent l'animal et l'homme avait **«le choix entre deux manières d'agir sur la matière brute. Elle [pouvait] fournir cette action immédiatement en se créant un instrument organisé avec lequel elle travaillera ; ou bien elle [pouvait] la donner médiatement dans un organisme qui, au lieu de posséder naturellement l'instrument requis, le fabriquera lui-même en façonnant la matière inorganique»**¹. L'évolution de la vie dans le monde animal s'est donc faite dans deux directions divergentes qui ont abouti l'une à l'instinct, l'autre à l'intelligence. Etant donné que l'instinct n'est nulle part ailleurs aussi développé que chez les hyménoptères (abeille, guêpe, fourmis) et que l'intelligence (fabrication d'instruments inorganisés) est l'apanage de l'homme, on peut affirmer que les sociétés d'insectes et l'humanité constituent jusque là les deux stades ultimes de l'évolution de la vie de part et d'autre des deux voies qu'elle a empruntées simultanément. De ces voies, il nous reste maintenant à déterminer celle qui réserve un meilleur sort à l'aventurière qu'est la vie. Qui de l'instinct («*faculté d'utiliser et même de construire des instruments organisés*») et de l'intelligence («*faculté de fabriquer et d'employer des instruments inorganisés*»²), assurera à la vie un plus grand succès sur la matière brute ? En d'autres termes, entre l'homme et l'animal qui agit plus efficacement sur son environnement ?

1- cf. Evolution créatrice in *Œuvres* p.615

2- Idem. p. 614

A considérer l'évolution de l'animal et celle de l'homme depuis leur naissance, on sera frappé par le grand écart qui existe entre leurs durées respectives. L'animal, au bout de quelques mois a tout ce qu'il lui faut pour survivre ; il agit déjà sur son environnement de façon assez efficace. Le jeune guépard, animal carnivore, possède la férocité et la rapidité nécessaires à la chasse mais aussi une dentition lui permettant de dévorer ses proies. Au même âge, l'homme n'est capable d'aucune action réelle sur la nature parce qu'incapable de se fabriquer des instruments. Il ne peut vivre que dans le giron maternel.

C'est dire que si l'animal dispose naturellement d'un instrument dont il sait se servir à savoir son corps, l'homme par contre a besoin d'un temps relativement long pour se fabriquer des instruments toujours provisoires, à partir de la matière inorganique pour agir sur cette même matière. On peut d'ores et déjà conjecturer que l'action animale est plus efficace que l'action humaine, vu la grande différence entre la perfection d'un instrument naturel (il est d'une structure très complexe mais son maniement est simple et décisif), et l'imperfection d'un instrument artificiel, inorganisé, fait avec tâtonnements et hésitations et d'un maniement souvent pénible.

Cependant, il est remarquable que tous les individus d'une même espèce sont, et ne sont capables que de certains types d'action. Un lion ne chasse pas de la même manière qu'un renard ou qu'un chat. Et les mammifères sont incapables de se construire un logis comme les oiseaux et les insectes (abeilles, guêpes). L'animal agit donc de façon stéréotypée. Cela signifie que l'instrument naturel n'est efficace que quand il s'applique à un objet bien déterminé auquel il est adapté ; il est invariable. A l'opposé, grâce à la perfectibilité et à la variabilité de ses instruments, l'homme accomplit des actions de plus en plus efficaces mais surtout de plus en plus variées.

Tandis que l'instinct enferme l'animal et l'espèce dans la routine et l'automatisme, l'intelligence offre à l'homme la possibilité de toujours élargir ses horizons. L'animal est au départ ce qu'il sera à l'arrivée, alors qu'à la naissance, l'homme n'est qu'aptitudes virtuelles qui ont besoin des sollicitations du milieu extérieur pour s'actualiser avec le temps. Ce qui est inné chez l'animal est acquis chez l'homme : celui-ci a un programme génétique ouvert et celui-là un programme génétique fermé, comme l'enseignent aujourd'hui les généticiens. Aussi, les sociétés d'insectes sont savamment organisées mais chaque individu manifeste un automatisme complet dans ses actions exclusivement mises au service du groupe. L'action instinctive est efficace mais a une portée limitée. L'action intelligente quant à elle, est d'une efficacité croissante et d'une portée presque illimitée.

Il faut donc déduire de ce qui précède que c'est sur la ligne d'évolution qui aboutit à l'homme que la vie a eu un meilleur destin alors que sur celle qui mène à l'instinct des

hyménoptères, elle a fini par tomber dans le piège de la matière et faire surgir des êtres s'adonnant à des activités somme toute routinières, destinées à la satisfaction des besoins vitaux.

La fonction première de l'intelligence est, selon Bergson, de fabriquer des outils inorganisés dont elle variera sans cesse la forme ; elle informe la matière. **«L'homme continue donc indéfiniment le mouvement vital»**¹. Avec l'homme, la matière devient un moyen, un auxiliaire. En inventant sans cesse de nouveaux instruments, l'humanité a vu sa vie s'améliorer considérablement. Notre civilisation s'est faite au rythme de nos inventions : des galets aménagés à l'ordinateur, en passant par la machine à vapeur, la moissonneuse batteuse, les industries de tout genre, l'avion, pour ne citer que ceux-là, chaque invention fit faire à l'humanité un grand pas.

Dans la mesure où la vie est une activité créatrice de nouveautés, François Meyer est bien en droit d'affirmer que **«l'homme n'est pas seulement un animal perfectionné, il est la vie même, prenant conscience d'elle-même»**². Et c'est aussi dans ce sens très particulier qu'on peut dire, dans la perspective bergsonienne, que l'homme est le **«terme»**, le **«but»** de l'évolution, en précisant toutefois que celle-ci transcende toute finalité. Nous n'employons pas par conséquent ces termes au sens où les entendait Aristote, car la vie s'est divisée entre plusieurs voies et celle qui aboutit à l'homme pouvait bel et bien se révéler être un impasse. Nous voulons tout simplement dire qu'avec l'homme, la vie semble avoir définitivement pris le dessus sur la matière qu'elle peut dès lors façonner et utiliser à sa guise. D'ailleurs, l'évolution de la vie est sans fin en ce sens que l'humanité n'a pas de frontières mais des horizons. *L'humanité c'est la vie et l'homme est liberté.*

«Toute l'histoire de la vie, jusque là, avait été celle d'un effort de la conscience pour soulever la matière et d'un écrasement plus ou moins complet de la conscience par la matière qui retombait sur elle»³. Avec l'homme, la conscience réussit sa percée.

Quelle est donc la nature de cette matière que la vie trouve sur sa route et qui lui fait obstacle ? Faut-il dire comme les anciens grec qu'elle est créée et sans forme et que la création du monde par Dieu (ou le démiurge) a consisté à son information ?

Pour Bergson, la matière n'est autre chose que le courant de la conscience qui se défait. L'énergie spirituelle est selon lui comparable à **«la vapeur lancée en l'air [qui] se**

1- Idem. p. 720-721

2- cf. Pour connaître la pensée de Bergson op.cit p.55.

3- Voir Evolution créatrice in **Œuvres** p. 719

condense presque tout entière en gouttelettes qui retombent, et cette condensation et cette chute représentent simplement la perte de quelque chose, une interruption, un déficit. Mais, une faible partie du jet de vapeur subsiste, non condensée, pendant quelques instants ; celle-là fait effort pour relever les gouttes qui tombent»¹. La matière, c'est un courant de conscience dont l'élan est épuisé. On peut donc dire que l'univers n'est constitué que de deux substances : l'esprit et la matière ou si l'on préfère, ce qui se fait et ce qui se défait. Tel est le réel selon Bergson. Il est mouvement : «*montée*» de l'esprit et «*descente*» de la matière.

La conception bergsonienne de l'être est une conception radicalement neuve. Mais, elle resterait suspendue pour ainsi dire, si elle ne s'accompagnait pas d'une théorie de la connaissance c'est-à-dire si ne sont pas définies en même temps les voies d'approche requises pour son intelligence.

1-Idem. p. 705

II-LE PROBLEME DE LA CONNAISSANCE

*«Si l'on compare entre elles les définitions de la métaphysique et les conceptions de l'absolu, on s'aperçoit que les philosophes s'accordent, en dépit de leurs divergences apparentes, à distinguer deux manières profondément différentes de connaître une chose. La première implique qu'on tourne autour de cette chose ; la seconde, qu'on entre en elle. La première dépend du point de vue où l'on se place et des symboles par lesquels on s'exprime. La seconde ne se prend d'aucun point de vue et ne s'appuie sur aucun symbole ».*¹

II-1-DE LA CONNAISSANCE SCIENTIFIQUE: L'INTELLIGENCE

La science positive est la recherche des relations qui existent dans le réel. Elle suppose le déterminisme c'est-à-dire l'existence d'un rapport nécessaire entre les phénomènes, et s'efforce de déterminer la nature de ce rapport et de le traduire par une loi qui indique la façon dont un phénomène se produit.

Mais, la science expérimentale ne s'est réellement constituée que lorsqu'elle s'est servie de la rigueur et du langage des mathématiques. Aussi, une loi est-elle la traduction en langage mathématique de la relation de deux phénomènes. Elle est une fonction mathématique et permet, grâce au calcul, de prévoir ou de produire un événement en fonction de sa cause. C'est dire que la science substitue à la réalité des symboles sur lesquels elle opère.

La mathématisation de la science en fait une connaissance *conceptuelle* et *symbolique* car le langage mathématique est fait de signes conventionnels et abstraits (nombres et figures), purs produits de l'esprit. En fait, la science exige que les apparences soient dépassées : la donnée immédiatement perçue est, selon le mot de Bachelard, un «*obstacle épistémologique*» ; elle a longtemps fait échec au progrès de la science. Le fait scientifique est un fait construit par détours et artifices, il n'est pas de l'ordre du «*perçu*» ou du «*senti*» mais de celui du «*conçu*».

Ce parti pris purement intellectuel est un héritage des Eléates transmis par Platon. En choisissant délibérément de ne s'occuper que de l'idée ou des idées qui sont derrière les réalités, ceux-là consacrèrent la solidité et la validité des concepts à la différence d'une connaissance fondée sur la réalité sensible. Cette attitude ne traduit pas seulement l'exigence

1- Henri Bergson la Pensée et le Mouvant, in *Œuvres* pp. 1392-1393

d'une distinction entre concept et percept, elle implique surtout la croyance en la supériorité de celui-là sur celui-ci : seul ce que l'esprit construit et contrôle rigoureusement est apte à recevoir une sanction de validité sans conteste.

Toutefois, à la différence des sciences hypothético-déductives, en science expérimentale, le raisonnement logique est intégré à l'expérimentation : une hypothèse explicative n'est valide que si elle est vérifiée expérimentalement. C'est cette exigence d'expérimenter qui maintient la science dans la positivité autrement dit, en contact avec la réalité.

Pour connaître son objet, la science l'analyse c'est-à-dire le décompose pour en saisir les éléments constitutifs. La méthode analytique en œuvre dans la science n'est autre chose que la deuxième règle de la méthode cartésienne : «diviser les difficultés en autant de parcelles qu'il se pourrait». Bref, la connaissance scientifique est une connaissance symbolique et analytique en ce sens qu'elle réduit son objet en ses éléments auxquels elle substitue des symboles à travers lesquels ils seront étudiés, et les règles à suivre pour manipuler ces symboles lui sont fournies par la logique.

Eu égard à cela, il faut dire que l'instrument de la science est l'intelligence dont Bergson dit qu'elle est «*caractérisée par la puissance indéfinie de décomposer selon n'importe quelle loi et de recomposer en n'importe quel système*»¹. Selon lui l'intelligence a été créée par la vie pour agir sur la matière inerte. Celle-ci se présente à nous comme une étendue d'objets extérieurs les uns aux autres, lesquels sont composés de différentes parties. L'intelligence se représente donc la matière non seulement comme discontinue mais aussi et surtout comme divisible à volonté. Sa première fonction étant de fabriquer des instruments inorganisés, elle divisera cette matière brute et la recomposera selon sa fantaisie et surtout en vue de l'action qu'elle veut accomplir. C'est ce qui fait dire à Bergson que les catégories de notre intelligence sont calquées sur la matière inerte ; d'où son succès sur celle-ci.

Si l'intelligence est l'instrument de la science, alors cette dernière a pour objet la matière brute. Aussi, est-elle inséparable de la technique qui nous assure une domination de plus en plus croissante sur la nature grâce à des instruments de plus en plus performants. Et on dit de nos jours que la loi scientifique est une formule d'action : étant donné que tel phénomène est la cause de tel autre phénomène, il me suffit d'agir sur la cause pour transformer l'effet à mon profit.

La loi scientifique a pour fonction principale de rendre possible la prévision : les mêmes

1- Evolution créatrice in *Œuvres* p.628

causes produisent les mêmes effets. Par conséquent la prévision n'est possible que là où il y a régularité, répétition et homogénéité des éléments sans laquelle la relation causale n'est pas nécessaire.

Mais alors la science et ses procédés d'analyse sont incapables de rendre compte de la vie où la répétition n'est qu'accidentelle et, partant, la prévision impossible. La vie est jaillissement ininterrompu, création continue de formes toujours nouvelles ; elle est durée, mouvement, liberté. C'est pourquoi Bergson tempère l'optimisme juvénile des scientifiques. Car, dit-il, *«le monde laissé à lui-même, obéit à lois fatales. Dans des conditions déterminées, la matière se comporte de façon déterminée, rien de ce qu'elle fait n'est imprévisible : si notre science était complète et notre puissance de calculer infinie, nous saurions par avance tout ce qui se passera dans l'univers matériel inorganisé, dans sa masse et dans ses événements, comme nous prévoyons une éclipse de soleil ou de lune»*¹. A ce déterminisme rigoureux de la matière s'oppose le mouvement imprévisible de la vie ; mouvement fluide et surtout indivisible. La vie est progrès. Par là même, on comprend qu'elle se dérobe à l'analyse car on n'analyse pas le progrès, la mobilité, mais plutôt une chose. Disons donc avec Bergson que notre intelligence, à la structure fort analogue voire identique à celle de la matière inerte pour l'utilisation de laquelle elle est faite, se caractérise par *«une incompréhension naturelle de la vie»*. Et lorsqu'elle se tourne vers le vivant, elle ne peut s'empêcher de le traiter mécaniquement comme elle traite le solide inorganisé laissant ainsi échappé ce qu'il a de proprement vital.

Sur ce nouveau terrain fort glissant du reste, où tout est fluidité, sa raideur c'est-à-dire son manque de souplesse et de flexibilité prête à rire. *«Du mécanique plaqué sur du vivant»*², cela est comique. Mais ce comique ne fait pas réellement rire le philosophe, ou tout simplement il n'en rit que du bout des lèvres, car c'est là un *«comique inquiétant»* s'il en est. En effet, que l'intelligence, qui appartient en propre à l'homme et qui le distingue de tous les êtres vivants sur lesquels il brille d'un incontestable ascendant, soit incapable de comprendre la vie, ceci est troublant pour l'esprit humain.

Qu'est-ce qui nous livrera donc le secret de la vie ? Nous restera-t-elle inconnue à jamais ? Dans la mesure où nous sommes *du vivant*, ne nous connaissons-nous donc jamais ? Au demeurant, fouler le sentier du *«connais-toi toi-même»* revient à penser la vie c'est-à-dire la durée qui est mouvement continu de création incessante de nouveauté, en somme le devenir créateur.

1- Energie spirituelle in *Œuvres* p. 824

2- Le Rire in *Œuvres* p. 405

Mais c'est là une entreprise qui n'a encore guère réussi à l'intelligence humaine selon Jean Pucelle. «*Les Grecs qui ont inventé les mathématiques et la pensée scientifique*, dit-il, *avaient bien senti que dans le déroulement du temps, il y a un élément irrationnel puisque ce déroulement à un sens, et qu'il ne revient jamais en arrière, alors que les opérations logiques semblent réversibles. Au pessimisme profond que leur inspirait la perspective inéluctable de l'anéantissement, se joignait le désespoir de l'impuissance intellectuelle à réduire cette irrationnelle en expliquant le devenir*»¹.

C'est peut être pour cette raison qu'ils firent de l'immutabilité et de l'éternité les caractères de l'être. Pour Platon, tout ce qui bouge, tout ce qui n'est pas stable, n'est pas pensable et est donc dépourvu de tout intérêt, tandis que pour les Eléates, le changement est synonyme de *non-être*. Bref, «*le mouvement était par excellence le flux, l'indéfini, l'illimité, cet élément rebelle à la pensée conceptuelle que les platoniciens appelaient l'autre ou l'inégal*»².

Comment, dès lors, expliquer le mouvement ? Faut-il faire comme les Anciens et dire que puisque cela bouge cela est impensable ?

Au cas échéant le bergsonisme aboutirait au pyrrhonisme le plus complet étant entendu que celui-là est un mobilisme intégral. Mais la philosophie bergsonienne n'est pas un pessimisme ; bien au contraire. Aussi, Bergson proposera-t-il la méthode à suivre pour rendre le devenir intelligible. Pour lui, la vie en elle même est quelque chose qui tranche d'avec la matière inerte. C'est en vain que nous lui étendons donc les procédés d'explication de la matière. Elle est quelque chose d'immatériel, de non-physique. N'est-ce pas là l'objet même de la métaphysique ?

1-cf. Le temps op. cit. p. 57

2- Emile Bréhier in Histoire de la philosophie Tom I, Quadriga / PUF 1989 p. 183

II-2-DE LA CONNAISSANCE METAPHYSIQUE : L'INTUITION

La pensée discursive en œuvre dans les sciences qui, par conséquent, n'étudient leurs objets qu'à travers les symboles qui traduisent autant de points de vue pris sur eux, s'est révélée impropre à rendre compte du mouvement de la vie. Aucun symbole ne peut traduire fidèlement la vie car celle-ci est mouvement incessant tandis que tout symbole est immobile et la connaissance conceptuelle statique.

A contrario, la métaphysique doit se passer de toute médiation pour saisir son objet directement en entrant en lui au lieu de s'en donner des points de vue jamais complets, toujours réducteurs et relatifs. C'est pourquoi Bergson la définit comme «*la science qui prétend se passer de symboles*»¹. Si la pensée métaphysique n'est pas discursive, il reste qu'elle est intuitive c'est-à-dire qu'elle récuse le raisonnement logico-formel. A l'analyse scientifique qui a montré toutes ses limites lorsqu'il s'est agi de comprendre la fluidité du mouvement de toute vie pour laquelle les mailles de ses filets sont, pour ainsi dire, trop grandes ou, si l'on préfère mieux, pour laquelle ses cadres sont trop rigides, le métaphysicien substituera l'*intuition*.

L'intuition comme mode de connaissance est, dira Bergson «*la sympathie par laquelle on se transporte à l'intérieur d'un objet pour coïncider avec ce qu'il a d'unique et par conséquent d'inexprimable*»². Ainsi, connaître un être vivant c'est être lui, tout en restant soi. C'est à cette condition seulement qu'on saisira le devenir immanent à toute vie. A proprement parler on ne le saisit pas, on s'y introduit, on y adhère, on le vit, on contemple son flux indivisible comme un sublime tableau d'art.

Mais une connaissance qui ne se réfère à aucun point de vue extérieur pris sur son objet est une connaissance non pas *relative* mais *absolue*. Bergson nous donne l'exemple du personnage d'un roman que le lecteur ne cerne en général que par ses traits de caractère plus ou moins marqués : son comportement, sa morphologie, sa beauté ou sa laideur etc. Ce sont là autant de médiations qui ne me donnent que des vues relatives sur le héros. Par contre, si je parviens à me transporter à l'intérieur du personnage et à coïncider avec lui, je le connaîtrai absolument. L'absolu est ici synonyme d'*immédiat* en ce sens que je me confonds avec le personnage dont je peux à la rigueur mimer le comportement. Dès lors, je le connais *parfaitement* en ce qu'il est c'est-à-dire dans son intériorité, son intimité que l'auteur

1- La Pensée et le Mouvant in *Œuvres* p.13/96

2- Idem p. 1395

n'arrivera jamais à exprimer quel que soit son génie, justement parce que c'est de l'inexprimable. En somme la métaphysique qui a comme méthode l'intuition, partout où elle est possible, nous donne une connaissance *immédiate*, *absolue* et donc *parfaite* de son objet. Encore faut-il qu'elle soit possible.

En effet la métaphysique qui se passe de tout signe, de tout symbole, de tout raisonnement, en un mot du langage, est-elle possible ? Si oui, par quelle faculté s'exercera-t-elle ? Etant entendu qu'elle ne saurait être le fait de l'intelligence dont la vie a doté l'homme pour qu'il s'adapte et qui lui assure sa supériorité, comment pouvons-nous accéder à la connaissance métaphysique ?

Il faut pourtant admettre qu'une telle connaissance existe car *«il y a une réalité au moins que nous saisissons tout du dedans, par intuition et non par simple analyse. C'est notre propre conscience dans son écoulement à travers le temps»*¹. En effet, l'expérience psychologique de la durée nous introduit au plus profond de nous-mêmes où nous-nous percevons directement, immédiatement. Nous constatons alors que notre vie intérieure est durée pure c'est-à-dire écoulement d'un flux temporel où le passé, toujours conservé, grossit en avançant ; il fait boule de neige. Ainsi, même s'il nous était impossible de sympathiser avec quelque autre objet extérieur, nous pouvons au moins sympathiser avec nous-mêmes dans la mesure où nous-nous percevons intérieurement. Ici la conscience se prend pour son propre objet ; elle se contemple. Disons tout simplement qu'il s'agit d'une *vision directe de l'esprit par l'esprit*. C'est là le modèle même de la connaissance métaphysique. Ce qui fait dire à Bergson que *l'intuition porte avant tout sur la durée intérieure. «Intuition signifie donc d'abord conscience mais conscience immédiate, vision qui se distingue à peine de l'objet vu, connaissance qui est contact et même coïncidence»*².

A la vérité, nous ne sommes isolés les uns des autres que par notre corps. En tant que durée nous nous pénétrons. En saisissant ma durée intérieure j'expérimente en même temps ce qu'autrui est pour soi. Chacun participe donc à la durée d'autrui et ensemble, nous participons de la durée immanente au tout de l'univers. Il nous suffit dès lors de dilater notre conscience pour communier avec les autres hommes, avec la nature, en un mot pour nous introduire dans la vie, la Conscience c'est-à-dire la source de tout ce qui est. Ceci est d'autant plus possible que notre durée intérieure ne connaît aucune limitation.

1- Idem p.1396

1- Idem P.1273

La connaissance idéale selon Bergson, c'est la *fusion*, l'*identification* du sujet à son objet auquel il adhère. Par là, il s'oppose à Husserl pour qui toute connaissance doit être objective. Autrement dit, le sujet doit se poser comme *ego pur*, transcendant à l'objet vers lequel il est orienté.

D'où viendrait alors la faculté à sympathiser, sachant maintenant que notre intelligence est essentiellement analytique ?

A côté de l'intelligence, sur une ligne dévolution divergente, la vie créa l'instinct dont elle dota les animaux. De celui-ci, nous remarquons avec Bergson, la parfaite adaptation à son objet. Tandis que l'intelligence ne connaît que des rapports entre les objets (elle est formelle), l'instinct porte quant à lui sur des objets ou des êtres concrets.

Dans l'*Evolution créatrice*¹, Bergson décrit l'instinct dans son application chez certains insectes. Les hyménoptères paralyseurs par exemple, ne cherchent pas à tuer leurs victimes mais plutôt à les immobiliser. Pour ce faire, ils les piquent précisément au niveau des centres nerveux, «*comme ferait un savant entomologiste, doublé d'un chirurgien habile*». La scolie qui a pour victime la larve de Cétoine ne la pique qu'une fois en un seul point. Le sphex administre trois piqûres au grillon aux points où se situent les différents centres nerveux qui commandent le fonctionnement de ces trois paires de pattes. Et l'ammophile hérissée pique successivement les neuf centres nerveux de sa victime (la chenille), avant de s'occuper spécialement du cerveau pour paralyser sa proie sans la tuer.

Ces diverses espèces d'hyménoptère paralyseur semblent bien *connaître* leurs victimes. La connaissance qu'elles en ont est par nature différente de celle que peut en avoir un entomologiste. Celui-ci ne parviendra à identifier leurs centres nerveux qu'au bout d'une série plus ou moins longue d'expériences, alors que ces insectes les localisent naturellement avec une parfaite précision. Dans la mesure où il n'y a aucune médiation entre ces bestioles et leur objet, il est vraisemblable qu'il existe entre eux une *sympathie* dont la perfection n'a d'égale que la précision des démarches de celles-ci (les bestioles prédatrices). «*L'instinct est sympathie*» conclut Bergson. C'est sur la vie elle-même que ses cadres sont calqués. Lui seul peut, par conséquent, nous livrer les secrets de la vie.

Malheureusement, là où l'instinct se manifeste réellement, la conscience s'endort. C'est pourquoi, on ne peut guère parler de connaissance instinctive ; l'instinct se jouant en démarches explicites au lieu de s'intérioriser en connaissance. Sa perfection est limitée à un objet précis auquel il est rivé, aussi ne peut-il nullement se dilater et étendre son objet.

1-Voir p. 618-619 et pp. 641-642

Mais, instinct et intelligence sont des développements divergents d'une même tendance que la vie portait en elle. Ils peuvent donc être tenus pour complémentaires et c'est sans doute l'opposition de la matière qui leur a empêché d'évoluer ensemble dans un même être vivant. Qu'ils soient complémentaires ou incompatibles, ils existera toujours entre eux une certaine parenté : l'intelligence est toujours auréolée d'une frange d'instinct et l'instinct n'est jamais pur de toute lueur d'intelligence. Ne parle-t-on pas de sixième sens ou d'instinct maternel chez les femmes ?

Dès lors, tout espoir de se connaître soi-même n'est pas perdu pour l'homme, étant donné qu'à côté de son intelligence subsiste une nébulosité d'instinct. Si nous parvenons à ramener cette nébulosité à la lumière, si nous pouvons tirer l'instinct des profondeurs vers les hauteurs de l'intelligence où il prendra conscience de lui-même devenant ainsi capable de réfléchir sur son objet et de l'élargir donc indéfiniment, nous nous donnerons, pour ainsi dire, la *faculté intuitive* par laquelle nous pourrions nous introduire dans la fluidité continue de la vie. L'intuition comme faculté c'est, selon Bergson, l'instinct devenu désintéressé, conscient de lui-même et s'intériorisant en connaissance.

Cependant, cet élargissement et cette épuration se feront par le biais de l'intelligence. C'est au prix de pénibles efforts intellectuels, au terme d'une longue ascèse intellectuelle qu'on parviendra à l'intuition . Il s'agira pour l'intelligence de se tordre sur elle-même, changer ainsi sa direction naturelle et se tourner vers l'instinct encore rivé à son objet, pour le secouer. C'est cette secousse qui l'amènera au soleil c'est-à-dire qui fera de lui intuition.

Au demeurant, la théorie bergsonienne de la connaissance appelle quelques remarques. D'abord, elle révèle la possibilité d'une connaissance plus parfaite que la connaissance scientifique qui procède de l'analyse et s'exprime par des symboles. L'intuition qui nous introduit au cœur du réel est d'une perfection et d'une simplicité qu'aucun signe ne saurait traduire. Le réel lui-même, en tant que durée ne peut se dire ; il se perçoit , se sent, se vit. André Robinet remarque fort justement à ce propos que *«la durée avec laquelle Bergson veut nous faire coïncider est annoncée plus qu'énoncée. Elle est le simple, l'inexprimable, la ne-science, la nuit obscure. Langage et concept n'accompagnent pas l'être : ils le traduisent du dehors, dans le mouvement rétrograde du vrai, non dans l'intimité de la participation»*¹. Le bergsonisme est fondamentalement un *anti-intellectualisme*. Ce qui est dit de l'être ne lui appartient pas en propre.

Il convient de noter ensuite que Bergson ne dénie pas toute valeur à la connaissance

1- op. cit. p. 11

scientifique qui est le fait de l'intelligence. Il est d'ailleurs impossible de nier les succès de plus en plus croissants que l'intelligence remporte sur la nature inorganique, vu l'amélioration progressive de nos conditions d'existence. Son rôle est de nous rendre maître de la matière.

Mais, si l'univers dure dans sont ensemble, si «*la durée est la trame de l'être*» pour reprendre le mot de François Meyer, comment expliquer le succès des sciences physiques qui font fi de cet «*enrichissement ordinaire de l'être*» ? Car celles-ci se singularisent par leur pouvoir de prévision des phénomènes, or prévoir c'est voir l'avenir, c'est-à-dire «*réduire de plus en plus un intervalle de temps futur*»¹.

C'est parce que, nous répond Bergson, il y a dans l'univers deux genres de mouvement opposés à savoir la «*descente*» et la «*montée*». «*Le premier ne fait que dérouler un rouleau tout préparé. Il pourrait, en principe, s'accomplir d'une manière presque instantanée, comme il arrive à un ressort qui se détend. Mais le second qui correspond à un travail intérieur de maturation ou de création, dure essentiellement et impose son rythme au premier qui en est inséparable*»².

Ainsi, l'objet de la science se trouve défini en même temps que celui de la philosophie. L'une s'occupera exclusivement de la matière et nous livrera le secret des opérations physiques, l'autre nous dévoilera la nature des opérations vitales. En d'autres termes, la science étudiera le corps tandis que la métaphysique aura pour objet l'esprit. Chacune, maintenue dans le domaine qui est sien, donnera de son objet une connaissance absolue. Science et philosophie ne s'opposent donc pas. Notre connaissance ne devient relative que lorsque nous prétendons pousser la vie dans les cadres rigides et étroits de l'intelligence ou rendre compte de la matière par des spéculations vides de contenu. Par leurs développements combinés science et philosophie nous permettront de cerner l'être dans sa totalité.

Il faut, dès lors, soutenir contre Kant que l'absolu est bien de ce monde et à notre portée. Les questions métaphysiques ne resteront pas nécessairement sans réponse, la connaissance métaphysique est bel et bien possible. Pour Jean Wahl, c'est là l'un des points de désaccord entre le natif de Königsberg et le spiritualiste français. «*En opposition avec Kant (...), écrit-il, Bergson, s'il admet de l'ineffable, n'admet cependant pas de l'inconnaissable. Tout peut être connu. La matière est complètement connue par les mathématiques et la physique, comme l'âme est saisie et complètement saisie par l'intuition*»³.

1- Essai sur les données immédiates de la conscience op. cit.p.129

2- Evolution créatrice op. cit. P.503

3- op. cit. p.135

Enfin, la métaphysique au sens où l'entend Bergson, marque une rupture avec la tradition éléatique qui prétend saisir la réalité à travers les concepts. Bergson renverse ce schéma et consacre la supériorité du *percept* sur le *concept*. La nouvelle métaphysique ainsi proposée est une *métaphysique positive* en ce sens qu'elle se réfère sans cesse à l'expérience. *«Il n'y aurait pas place, écrit Bergson, pour deux manières de connaître, philosophie et science, si l'expérience ne se présentait pas à nous sous deux aspects différents, d'un côté sous forme de faits qui se juxtaposent à des faits qui se répètent à peu près, qui se mesurent à peu près, qui se déploient enfin dans le sens de la multiplicité distincte et de la spatialité, de l'autre sous forme d'une pénétration réciproque qui est pure durée, réfractaire à la loi et à la mesure»*¹.

Réserver exclusivement la positivité à la science, comme le suggère Auguste Comte, c'est restreindre arbitrairement le sens du terme «*expérience*» car nous faisons aussi bien l'expérience du monde environnant que de notre intériorité qui est durée.

1-La Pensée et le Mouvant in *Œuvres* p. 1361

CONCLUSION

En définitive, la critique bergsonienne du mécanisme est un refus du scientisme et la résurrection de la philosophie dont la mort a été décrétée trop tôt sans nul doute par un siècle de plus en plus scientifique et techniciste. C'est ce que reconnaît d'ailleurs Jacques Monod malgré son secret espoir de constater bientôt la mort, certaine cette fois-ci, de toute spéculation philosophique. *«Le vitalisme, dit-il, a besoin pour survivre, que subsiste en biologie, sinon de véritables paradoxes, au moins des «mystères». Les développements des vingt dernières années en biologie moléculaire ont singulièrement rétréci le domaine des mystères, ne laissant plus guère, grand ouvert aux spéculations vitalistes, que le champ de la subjectivité : celui de la conscience elle-même. On ne court pas grand risque à prévoir que, dans ce domaine pour l'instant «réservé», ces spéculations s'avèreront aussi stériles que dans tous ceux où elles se sont exercées jusqu'à présent»¹. Soit !*

Toujours est-il que la science biologique n'a pas encore découvert les secrets de la vie. Sinon, on aurait fabriqué la vie en laboratoire ; ce qu'aucun biologiste n'a réussi jusque là. Cette impuissance humaine à dompter la vie a été mise en relief par le cinéaste américain Steven Spielberg dans son film intitulé *«Artificial intelligency»*. Dans ce film il est question de créer un robot humain capable d'aimer ses «parents». L'échec total de ce projet est la preuve s'il en faut que l'amour est un sentiment vraiment *vivant*.

Notre incompréhension de la vie tient sans doute au fait que nous la soumettons aux procédés d'analyse de l'intelligence qui semblent plutôt adaptés à l'inorganique. En effet, la méthode scientifique n'est féconde que lorsqu'elle s'applique à la matière inerte. Pour peu qu'on l'applique au vivant, elle devient maladroite ; maladresse qui traduit justement son inadéquation à ce nouvel objet. Le mérite de Bergson et des vitalistes est d'avoir établi que *«la vie propose un surplus inexpliqué. Epistémologiquement parlant, elle a un niveau spécifique. C'est là l'essence d'un vitalisme correct. Non point croire à je ne sais quelle mystérieuse nature de la vie, mais poser que la vie exige d'autres approches que la matière inanimée»².*

Bergson pour sa part propose l'intuition comme méthode d'approche de la vie. Il ne s'agit plus d'analyser la vie c'est-à-dire la réduire en éléments supposés simples et la traduire

1- cf. Le hasard et la nécessité op. cit. p47

2- Madeleine Barthélemy-Madaule, Bergson op. cit. .p.103

par des symboles, mais de coïncider avec son mouvement fluide et, ainsi, contempler son indivisible flux. Réfractaire à toute analyse, la vie sympathise avec tout esprit qui ne cherche plus qu'à prendre contact avec elle. A cet esprit elle se présente, comme le Dieu au mystique ; présence qui se consomme «*dans une immédiateté silencieuse*».

Toutefois, malgré la grande séduction que la philosophie de Bergson continue encore à exercer et la clarté de son style louée par plus d'un, elle recèle des zones d'ombre pour ne pas dire certaines contradictions, et ne va pas sans poser quelques difficultés.

D'une part, Bergson dit que la vie est un immense courant de conscience qui s'engage dans la matière pour s'y frayer un passage. Celle-ci lui opposa une grande résistance qui la contraignit de renoncer à sa prétention à l'absolue liberté. D'autre part, dans sa genèse la matière se présente comme de l'esprit éteint c'est-à-dire le courant de conscience dont l'élan s'est épuisé. Ce qui signifie que la matière a été créée par la vie et que, par conséquent, celle-ci n'a pas toujours rencontré l'obstacle que constitue celle-là. Qu'est-ce qui a donc emmené la Conscience à créer ce qui s'opposera à sa liberté créatrice ?

Cette contradiction traduit sans doute la difficulté inhérente à l'expression de toute pensée intuitive. En effet, la philosophie bergsonienne débouche sur un mysticisme en ce sens que le langage ne saurait dire l'être.

Il est opportun de se demander ici la place qu'on peut accorder à l'intuitionnisme dans l'univers philosophique où le concept jouit d'une prépondérance. L'expérience métaphysique, n'est-elle pas obligée de se loger, serait-ce maladroitement, dans des concepts ?

Il le faut bien si le philosophe veut jouer le rôle d'éclaireur qui lui est dévolu dans la société, ce qu'il ne peut faire que par la communication, à l'instar de Socrate qui, après avoir «*goutté*» à la sagesse, cherchait à instruire les citoyens d'Athènes dans ses dialogues quotidiens avec ceux-ci.

Au demeurant, le bergsonisme est une philosophie optimiste que nous autres jeunes africains pouvons étudier avec profit. Avec Bergson, nous apprenons que l'esprit (*la chose du monde la mieux répartie*) est une force qui a «*la faculté de tirer d'elle-même plus qu'elle ne contient*». Il nous appartient dès lors de saisir cette force en nous, de l'additionner avec elle-même, si nous voulons changer la situation peu enviable de notre continent. L'Afrique n'est pas condamnée à la pauvreté et à la misère qui sont la source de tous les vices. Bien au contraire, elle peut rêver «*des lendemains qui chantent*». A nous de réaliser ce rêve pour elle ; ce qui ne saurait se faire qu'au prix d'un sacrifice individuel et collectif. N'est-ce pas le sacrifice de la génération post Nagasaki et Hiroshima qui fut la condition de l'émergence d'un Japon anéanti qui n'avait comme seule ressource que la force spirituelle de ses fils et filles ?

BIBLIOGRAPHIE

I-OUVRAGES DE BERGSON

Essai sur les données immédiates de la conscience

Evolution créatrice

Matière et mémoire

La Pensée et le Mouvant

Le Rire

Energie Spirituelle

Les deux sources de la morale et de la religion

Les ouvrages cités ci-dessus se trouvent dans le premier volume des œuvres de Bergson publiées par les Presses Universitaires de France sous le titre Henri Bergson Œuvres en 1959.

Durée et simultanéité

Lettres

Pour ces derniers, Voir le deuxième volume : Henri Bergson Mélanges Puf, 1972

II- OUVRAGES SUR BERGSON

DELEUZE Giles: Le bergsonisme, Puf, 1968

BARTHELEMY-MADAULE Madeleine : Bergson, aux éditions du Seuil, 1967

Bergson adversaire de Kant, Puf, 1966

MEYER François, Pour connaître la pensée de Bergson, Bordas, 1964

ROBINET (André) : Bergson et les métamorphoses de la durée, éd. Seghers, Paris 1965

III- AUTRES OUVRAGES

ARISTOTE : La Physique

: De Caelo

DESCARTES René: : Discours de la méthode, Livre de Poche, 1973

: Méditations métaphysiques, Quadrige/ Puf 1992

Principes de la philosophie I & II

Traité de l'homme

(Les deux derniers ouvrages se trouvent dans *Œuvres de Descartes* publiées par Charles Adam et Paul Tannery Librairie philosophique Jean Vrin, 1996)

SPINOZA : Ethique, Librairie Garnier Frères, 1927

- GILSON Etienne : D’Aristote à Darwin et retour ; Essai sur quelques constantes de la biophilosophie, Librairie Philosophique J. Vrin. 1971
- : René Descartes, Discours de la méthode, texte et commentaire, Vrin. 1947
- KOYRE Alexandre : Etudes galiléennes, Hermann, Paris 1966 Tome I
- KUHN Thomas : La Révolution copernicienne, Fayard 1973
- : La Structure des révolutions scientifiques, Flammarion 1983
- CALLOT Emile : La Philosophie de la vie au XVIIIe siècle, Marcel Rivière et compagnie 1965
- : Les limites de la philosophie naturelle de la biologie moderne presses de l’Imprimerie Labadie S.A. 1972
- LA METTRIE Julien Offroy de : L’Homme-Machine Ed. Denöel/Gonthier, 1981
- CHANGEUX Jean Pierre : L’homme neuronal, Librairie Arthème Fayard 1983
- BREHIER Emile : Histoire de la philosophie Tome I. Quadrige Puf. 1989
- : Histoire de la philosophie Tome II puf 1968
- MONOD Jacques : Le hasard et la nécessité Ed. Seuil, 1970
- WAHL Jean : Tableau de la philosophie française, Gallimard, 1962
- PUCELLE Jean : Le Temps, Puf 1959
- Matière à pensée, CHANGEUX J.P. & CONNES Alain, Odile Jacob, Paris avril 2000
- Le corps, Vrin-Intégrale, 1992 sous la direction de Jean Christophe Goddard et Monique Labrune
- LALANDE André : Vocabulaire technique et critique de la Philosophie

IV ARTICLES

Mme **Ramatoulaye Diagne Mbengue**

«Descartes et La Mettrie : de la vie au vivant» in Ethiopiques 1999, n°63

Delhomme JEANNE : «Durée et vie dans la philosophie de Bergson» in les études bergsoniennes Tome II, Albin Michel 1949, pp.129-191

PERNOT Camille : «Bergson» in Encyclopaedia Universalis t4 p.5-8

RUYER Raymond : «le finalisme» in Encyclopaedia Universalis t9 pp.472-476

RESUME

La philosophie bergsonienne est essentiellement dirigée contre le *scientisme* ou foi en la toute puissance de la science c'est -à -dire, l'idée que la science seule, à l'exclusion de toute autre forme de savoir, avec ses méthodes, est capable de rendre compte de façon apodictique de la totalité du réel. En fait, c'est en réfléchissant sur la science que Bergson fit une découverte capitale qui donnera naissance au bergsonisme. Ce que la science appelle *le temps*, n'est pas réellement le temps, *la durée concrète et vivante*.

Quand le savant prétend mesurer le temps, c'est l'espace qu'il mesure en réalité, celui parcouru par un mobile en mouvement supposé uni forme. Dire qu'il y a six fois dix minutes dans une heure, c'est parler des divisions de l'espace, des portions de cercle parcourues par les aiguilles de la montre. Ce temps homogène du physicien, calqué sur l'espace, est différent de la durée psychologique telle que ma conscience l'éprouve. Une heure d'horloge me paraît durer une éternité si j'écoute une conférence ennuyeuse alors qu'elle me semble passer comme un éclair si je lis un roman passionnant.

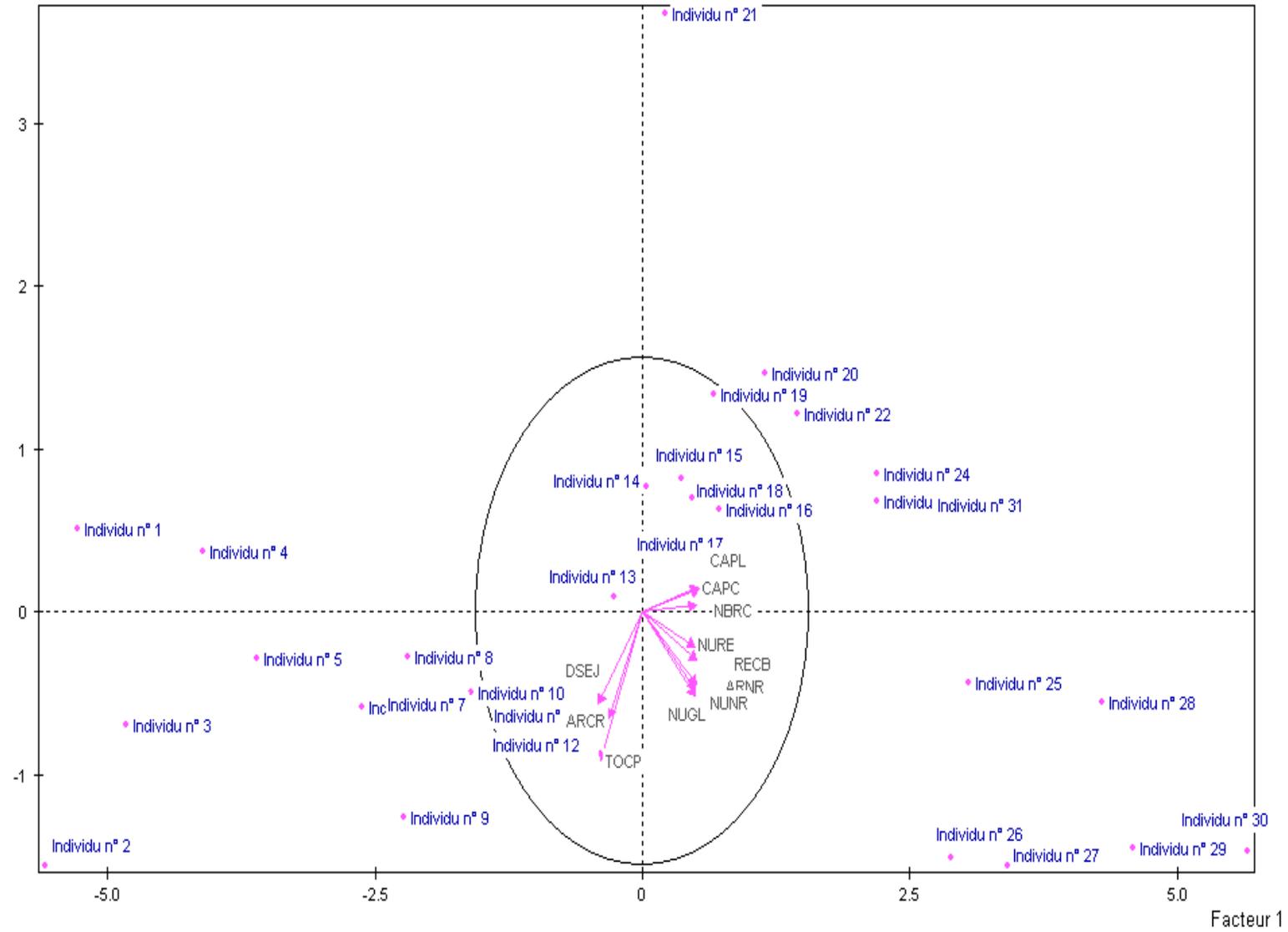
L'intuition fondamentale de Bergson est la distinction radical de l'espace et de la durée. Cette durée que la science nie sans s'en apercevoir est, selon Bergson, la caractéristique de l'Être. Et son modèle nous est fourni par notre vie intérieure qui participe de la durée. Aussi la science se révèle-t-elle incapable de comprendre *la vie*, celle-ci étant essentiellement durée c'est -à -dire, mouvement fluide et continu donc réfractaire à toute mesure.

Pour connaître *le mouvant, la vie, la durée*, Bergson propose de substituer à *l'intelligence* qui procède par analyse et mesure *l'intuition* qui nous transporte au cœur même du mouvement. Ainsi, tandis que **la science intelligente** étudiera l'espace, la matière, **la philosophie, intuition de la durée**, nous révélera l'être dans sa vérité en nous faisant coïncider avec la fluidité, la continuité indivisible de tout ce qui *dure et vit*.

Analyse en Composantes Principales :
théorie et pratique

Cheikhna Hamallah N'DIAYE

Facteur 2



Résumé

Ce mémoire présente la théorie et la pratique de l'analyse en composantes principales. Disposant d'un nuage de points, dans un espace de dimension élevée, dans le quel on ne voit pas grand-chose. l'analyse en composantes principales va nous donner un sous-espace de dimension raisonnable, tel que la projection sur ce sous-espace retienne le plus d'information possible, i.e., tel que le nuage de points projeté soit le plus dispersé possible. Cela permet de réduire la dimension du nuage de points.

L'algorithme est le suivant. On commence par translater les données pour que le point moyen du nuage de points soit l'origine (afin de pouvoir utiliser de l'algèbre linéaire). Ensuite, on essaye d'effectuer une rotation pour que l'écart-type des premières coordonnées soit le plus grand possible : cela revient à diagonaliser la matrice des covariances (c'est une matrice symétrique réelle (elle est même positive), elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale), en commençant par les vecteurs propres de plus grandes valeurs propres. Le premier axe des nouvelles coordonnées correspond à une approximation du nuage de points par un sous-espace de dimension un ; si on veut une approximation par un sous-espace de dimension k , on prend les k premiers vecteurs propres. Nous présentons également les méthodes qui gravitent autour de l'analyse en composantes principales savoir les analyses en composantes binaires et multiples. L'étude théorique est illustrée par deux cas pratiques empruntés du secteur touristique et de la situation socio-économique des ménages sénégalais.

Mots clés : Régression Linéaire , Analyse factorielle

Remerciements

Ce travail n 'a pu voir le jour que grâce á mon directeur de Mémoire Monsieur Pape N'gom à qui je remercie sincérement .
Je remercie Monsieur Mamadou Sanghare d 'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur Serigne Aliou Lo , Monsieur Sada Sory Thiam et Monsieur Alassane Diedhiou d 'avoir voulu participer dans ce jury .

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Amadou Lamine Fall pour son encouragement fraternel .

Je remercie également les professeurs , le personnel administratif , les autorités et les personnes qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail .

Je remercie Monsieur Bakary Fodiyé Doucouré de la faculté des sciences-économiques pour m ' avoir mis en contact avec des personnes ressources à la Direction de la Statistique et de la Prévision pour l ' obtention de certaines bases de données.

Je remercie Monsieur Mamadou Ndione Ingénieur Statisticien pour m'avoir transmis la base de données ESAM1 .

Je remercie le Directeur des Statistiques du Ministère du Tourisme pour m'avoir remis les données du tourisme sénégalais 2003.

Dédicace

Qu'ALLAH le tout puissant soit sanctifié.
Que Mohamed le prophète de tout les temps soit glorifié.
Ce mémoire est entièrement dédié à celui-là qui respire la noblesse, le vrai guide ainsi qu'à sa famille .
A mes parents Amadou Moctar et Adja Oumou Samanké qui ne se lassent de me soutenir .
A mes frères et soeurs Saliou ,Amadou , Lala Aichétou , Moustapha ,Souadou ,Ibrahima ,Téné qui m 'ont toujours encouragé.
A ma femme Sophie Diop voilà un excellent modèle d 'assistance et de conseil

Table des matières

1	Théorie de l'analyse en composantes principales	6
1.1	De la Régression Linéaire à l'analyse en composantes principales	6
1.1.1	La régression linéaire au sens des moindres carrés . . .	6
1.1.2	Quelques propriétés des droites et des coefficients de régression	9
1.1.3	La régression linéaire au sens des moindres rectangles	10
1.2	Analyse générale	14
1.3	Analyse en composantes principales	35
1.4	Analyse en composantes principales normes	40
2	Analyse des correspondances	43
2.1	Analyse des correspondances binaires	43
2.2	Analyse des correspondances multiples	61
3	Pratique de l'A C P	69
3.1	Problématique 1 Comparaison des trente et une dernières années touristiques du Sénégal	69
3.1.1	Valeurs propres de la matrice des corrélations	69
3.1.2	Matrice des corrélations des variables	70
3.1.3	Calcul des coordonnées factorielles des points variables	70
3.1.4	Règles d'interprétation des axes factorielles par les points variables	71
3.1.5	Calcul des coordonnées factorielles des points individus	72
3.1.6	Règles d'interprétation des axes factoriels pour les points individus	72
3.1.7	Règles d'interprétation conjointe des axes factoriels par les points individus	73
3.1.8	Qualité d'explication	74
3.1.9	Représentations graphiques	76
3.2	Etude socio-économique des ménages sénégalais	79

Introduction

Il y a deux types de méthodes en statistique multidimensionnelle : les méthodes factorielles qui consistent à projeter le nuage de points sur un sous-espace, en perdant le moins d'information possible ; les méthodes de classification, qui tentent de regrouper les points. Les méthodes factorielles regroupent trois techniques fondamentales : l'analyse en composantes principales, l'analyse des correspondances (variables qualitatives, représentées par un tableau de contingences) et l'analyse des correspondances multiples. Dans cet exercice d'initiation à la recherche, nous traiterons la théorie et la pratique de l'analyse en composantes principales appelée souvent ACP. L'objet de

l'ACP est d'élaborer et de figurer géométriquement dans un espace euclidien de faible dimension, les informations les plus diverses consignées dans des tableaux numériques à double entrée, qui, compte-tenu de la taille ou de la complexité des tableaux, ne peuvent être synthétisés. Le but fondamental de la représentation géométrique est de fournir de l'ensemble des données numériques une image qui permette d'un seul coup d'oeil, de saisir rapidement l'ensemble des éléments présentés, de mettre en évidence certains faits essentiels. Nous allons dans la première partie montrer que l'ACP est analogue à la régression linéaire au sens des moindres carrés. Mais alors que la méthode des moindres carrés est asymétrique (les deux dimensions jouent des rôles complètement différents, et elles ne sont donc pas interchangeables), l'ACP est symétrique et généralise la régression linéaire au sens des moindres rectangles en décrivant l'information globale dont on dispose. Ensuite, nous présentons l'analyse générale commune à toutes les méthodes de l'analyse factorielle. Puis, nous limiterons notre étude à l'ACP normée ou non.

Dans la deuxième partie nous montrons que les autres méthodes factorielles (AFC, ACM) se déduisent de l'ACP par un changement de métriques et de matrices d'inertie du nuage de points.

Dans la troisième et dernière partie, nous illustrerons l'ACP par un cas pratique : étude de l'évolution du tourisme sénégalais entre 1973 et 2003 à l'aide de treize paramètres et l'ACM pour une étude socio-économique des ménages sénégalais.

Chapitre 1

Théorie de l'analyse en composantes principales

1.1 De la Régression Linéaire à l'analyse en composantes principales

1.1.1 La régression linéaire au sens des moindres carrés

Le diagramme de régression de y en x

Le diagramme de régression de y en fonction de x (ou de y en x) est formé des points moyens conditionnels (x_i, \bar{y}_i) . Il donne une première idée de la façon dont varie en moyenne la variable y , dite variable dépendante en fonction de la variable x , dite variable indépendante ou explicative. Les diagrammes de régression peuvent avoir une allure générale linéaire ou non linéaire. .

La droite de régression de y en x

Quand le diagramme de dispersion (nuage des points observés), et éventuellement le diagramme de régression (représentation des points moyens conditionnels) ont une forme générale linéaire ou approximativement linéaire, on peut tenter de préciser la relation qui lie la variable y , toujours considérée comme variable dépendante, à la variable x , considérée comme variable explicative, par la recherche de l'équation d'une droite qui s'ajuste au mieux aux valeurs observées. Cette droite, dite droite de régression de y en x , est généralement déterminée par la méthode des moindres carrés, c'est à dire de manière à rendre minimum la somme des écarts entre les points observés et les points correspondants de la droite. Si l'équation de la

droite est :

$$y = a + bx \quad (1.1)$$

Les paramètres a et b peuvent être déterminés en résolvant :

Le programme mathématique suivant :

$$\min_{a, b \in R} \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2 = \min_{a, b \in R} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (1.2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Soit

$$an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.3)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.4)$$

Ce qui donne

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad (1.5)$$

La droite de régression passe donc par le point moyen (\bar{x}, \bar{y}) . D'autre part, en prémultipliant (1.3) par \bar{x} et en la soustrayant de (1.4), on obtient :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = cov(x, y) / s_x^2$$

avec s_x^2 représentant la variance de x .

La droite de régression de y en x a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= [cov(x, y) / s_x^2] (x - \bar{x}) + \bar{y} \\ \text{ou } y &= b_{yx} (x - \bar{x}) + \bar{y}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec $b_{yx} = cov(x, y)/s_x^2$ qui appelé le coefficient de régression de y en x .

La variance résiduelle de y , variance des résidus de la régression de y en x est pour cette série statistique double :

$$\begin{aligned}
 s_{yx}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y} - b_{yx}(x_i - \bar{x})]^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \frac{2b_{yx}}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] + \frac{b_{yx}^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= s_y^2 - 2cov^2(x, y)/s_x^2 + cov^2(x, y)/s_x^2 \\
 &= s_y^2 - cov^2(x, y)/s_x^2 \\
 s_{yx}^2 &= s_y^2(1 - r^2) \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

avec $r = cov(x, y)/s_x s_y$ le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .
Donc :

$$s_{yx}^2 \leq s_y^2 \tag{1.8}$$

Si $cov(x, y) = 0$ ou $r = 0$ alors $s_{yx}^2 = s_y^2$

Et $s_{yx}^2 = 0$ lorsque $cov^2(x, y) = s_x^2 s_y^2$ ou $r = \pm 1$ c'est à dire quand tous les points observés sont colinéaires.

Remarque La variance résiduelle de y apparaît ainsi comme un indice global de dispersion des points observés autour de la droite de régression de y en x . La quantité $cov^2(x, y)/s_x^2$ correspond à la réduction de la variance de la variable dépendante y , qui est liée à la prise en considération de la variable explicative x . Elle peut être considérée comme la partie de la variance de y qui est " expliquée " ou " justifiée " par la régression de y en x , tandis que la variance résiduelle s_{yx}^2 est la partie de la variance qui ne peut être expliquée de la sorte. Le coefficient de détermination de r^2 n'est autre que la partie de la variance de y qui est " expliquée " par la régression de y en x , cette partie étant exprimée en valeur relative, par rapport à la variance totale s_y^2 :

$$r^2 = [cov^2(x, y)/s_x^2] / s_y^2. \tag{1.9}$$

1.1.2 Quelques propriétés des droites et des coefficients de régression

La notion de droite de régression a été introduite ci-dessus en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i , et les ordonnées $y(x_i)$ des points de même abscisse de la droite de régression, c'est à dire en minimisant la somme des carrés des écarts parallèlement à l'axe des ordonnées y . La droite ainsi définie n'est pas unique, en ce sens qu'on obtient un résultat généralement différent en calculant le minimum dans toute autre direction. En particulier et par symétrie, on peut définir la droite de régression de x en y en calculant le minimum de la somme des carrés des écarts parallèlement à l'axe des abscisses x . Par analogie au paragraphe précédent, cette droite est telle que :

$$x = b_{xy}(y - \bar{y}) + \bar{x} \quad (1.10)$$

où b_{xy} est le coefficient de régression de x en y

$$b_{xy} = \text{cov}(x, y) / s_y^2.$$

Dans le plan (x, y) , le coefficient angulaire de la droite de régression de y en x , c'est à dire la tangente de l'angle formé par cette droite et l'axe des x , est égal au coefficient de régression de y en x : $w_{yx} = b_{yx}$. Par contre, le coefficient angulaire de la droite de régression de x en y est égal à l'inverse du coefficient de régression correspondant : $w_{xy} = \frac{1}{b_{xy}}$. Les deux coefficients de régression et les deux coefficients angulaires ont donc toujours le même signe, celui de la covariance. Lorsque celle-ci est différente de zéro, les droites de régression sont toutes deux inclinées dans le même sens. Par contre, quand la covariance est nulle, les deux droites de régression sont parallèles aux axes de coordonnées, et donc perpendiculaires entre elles puisque

$$b_{yx} = b_{xy} = w_{yx} = 0 \quad \text{et} \quad w_{xy} = \infty.$$

D'autre part, comme le carré de la covariance est toujours inférieur ou égal au produit des variances, on peut écrire :

$$\frac{w_{yx}}{w_{xy}} = b_{yx}b_{xy} = \text{cov}(x, y)^2 / s_x^2 s_y^2 \leq 1$$

On déduit :

$$|w_{yx}| \leq |w_{xy}| \quad (1.11)$$

C'est à dire que la droite de régression de y en x est moins inclinée par rapport à l'axe des x que celle de x en y , sauf lorsqu'elles sont confondues. L'angle des droites de régression est d'ailleurs fonction de l'intensité de la relation qui existe entre les deux variables. Nul lorsque les points observés sont colinéaires, cet angle est d'autant plus grand que les points sont plus dispersés autour des droites de régression, et il est égal à 90° quand la covariance est nulle.

1.1.3 La régression linéaire au sens des moindres rectangles

Definition et Propriétés

L'utilisation de la droite de régression de y en x (ou de la droite de régression de x en y) ne se justifie en pratique que quand une des deux variables , la variable dépendante, doit être exprimée en fonction de l'autre variable indépendante ou explicative, le plus souvent dans un but de prévision ou d'estimation de l'une en fonction de l'autre. Par contre, quand les deux variables sont considérées sur le même pied, comme des variables interdépendantes, il n'y a pas de raison de minimiser la somme des carrés des écarts parallèlement à l'un ou l'autre axe de coordonnées, ni surtout parallèlement à l'un et à l'autre axe de coordonnées. Il faut alors trouver une solution intermédiaire au problème de régression. Une telle solution intermédiaire peut être obtenue en assurant le minimum de la somme des produits des écarts $x_i - x(y_i)$ et $y_i - y(x_i)$, mesurés en valeur absolue, les uns parallèlement à l'axe des abscisses, et les autres parallèlement à l'axe des ordonnées. Si l'équation de la droite est de :

$$y = a + cx \tag{1.12}$$

Problème

$$\begin{aligned} & \min_{a, c \in R} \sum_{i=1}^n |x_i - x(y_i)| |y_i - y(x_i)| \\ \text{soit} & \min_{a, c \in R} \frac{1}{|c|} \sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i)^2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{|c|} \sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{|c|} \sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i)^2 = 0$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i) = 0 \quad (1.14)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i)(y_i - a + cx_i) = 0 \quad (1.15)$$

Comme dans le cas des droites des moindres carrés, l'équation (13) montre que :

$$\bar{y} = a + c\bar{x}$$

La droite recherchée passe également par le point (\bar{x}, \bar{y}) . En remplaçant a par sa valeur dans l'équation (14), on obtient en outre :

$$c = \pm \frac{s_y}{s_x}$$

le signe à adopter étant celui de la covariance, supposée différente de zéro. L'équation recherchée est donc :

$$y = \pm \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}$$

ou $\frac{y - \bar{y}}{s_y} = \pm \frac{x - \bar{x}}{s_x}$ (1.16)

On notera que, sauf en ce qui concerne le signe de son coefficient angulaire, cette droite dépend seulement des paramètres des distributions marginales. De plus, cette droite est bien intermédiaire entre les droites de régression de y en x et de x en y car son coefficient angulaire est, au signe près, la moyenne géométrique des coefficients angulaires des deux droites des moindres carrés :

$$c = \pm \sqrt{s_y^2/s_x^2} = \pm \sqrt{w_{yx}w_{xy}}$$

La droite ainsi obtenue est connue sous plusieurs dénominations différentes. Nous l'appelons droite des moindres rectangles mais elle est aussi appelée parfois axe principal réduit. La somme des produits des écarts qu'on minimise au cours de la détermination de la droite des moindres

rectangles est aussi liée au coefficient de corrélation linéaire. En effet ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|c|} \sum_{i=1}^n (y_i - a - cx_i)^2 &= \frac{s_x}{s_y} \sum_{i=1}^n \left[y_i - \bar{y} \pm \frac{s_y}{s_x} (x_i - \bar{x}) \right]^2 \\ &= s_x s_y \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \pm \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^2 \\ &= 2n s_x s_y (1 - |r|) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Pour des écarts types s_x et s_y donnés, la somme des aires des rectangles, qui mesure la dispersion des points par rapport à la droite de régression, est donc d'autant plus réduite que le coefficient de corrélation linéaire est plus différent de zéro. Cette propriété justifie le fait que ce coefficient soit normalement associé à toute équation d'une droite des moindres rectangles comme mesure de la précision de la relation, alors que, pour la régression au sens des moindres carrés on pourra utiliser dans ce but soit le coefficient de corrélation linéaire soit la variance ou l'écart type résiduel. Pour passer à l'objet de l'analyse en composantes principales, il faut modifier sur plusieurs points le modèle de la régression linéaire tout en imaginant qu'au lieu d'étudier la relation entre deux variables, on décide d'étudier la relation entre plusieurs variables. Supposons donc qu'au lieu de mesurer deux grandeurs, on en mesure un grand nombre. Soit, par exemple, l'étude de l'évolution du tourisme sénégalais entre 1973 et 2003 à l'aide de treize paramètres. A chaque année, on associe ses différentes variables touristiques

$X_j(.) \in R^3 \forall j \in 1, 2, \dots, 13$, Analyser toutes les variables prises deux à deux ne permet pas la synthèse. Les interrelations entre les variables et leurs effets sur la structure risquent d'échapper au chercheur. Ainsi, au lieu de savoir si une variable $X_i(.)$ est liée à une autre variable $X_j(.)$ pour chacun des couples de variables (X_i, X_j) , on veut savoir comment varient simultanément toutes les variables $(X_1, X_2, \dots, X_{13})$. Et par exemple, on veut savoir si ces variables sont liés à un facteur commun F et que l'on peut écrire :

$$X_1 = a_1 F ; X_2 = a_2 F ; \dots, X_{13} = a_{13} F. \quad (1.18)$$

Ou bien, on veut savoir si ces variables touristiques sont liées à deux facteurs notés F et F' tels que :

$$(X_j = a_j F + b_j F') , \forall j \in 1, 2, \dots, 13 \quad ((18))$$

Si tel est le cas ,on peut résumer l'ensemble des années touristiques en considérant uniquement le ou les facteurs communs qui se subdiviseront aux variables touristiques. Les années seront identifiées par leurs coordonnées dans chaque facteur :

$$Point - année i = \alpha_i F + \beta_i F'$$

Dans le cas ci-dessus , on dit qu'on a trouvé un plan factoriel (c'est-à-dire engendré par deux facteurs) qui représente au mieux le nuage des points-années originellement représenté dans un espace à 13 dimensions. Nous montrerons plus loin ce que sont les facteurs.

Remarque On peut obtenir des situations particulières intéressantes :

◦ Autour du centre de gravité, le nuage peut apparaître sphérique ; dans ce cas, il n'y a pas de facteur privilégié.

◦ Cas où le nuage fait apparaître une situation à deux facteurs F et F' seulement ; le nuage est aplati ; il est allongé dans le sens de F sans être cependant réduit à un segment ; F est la direction principale d'allongement ; F est le premier axe factoriel ; F' est le deuxième axe factoriel.

◦ Cas où le nuage fait apparaître une situation à un facteur F ; on retrouve le cas de la régression linéaire.

Problématique Le problème de l'analyse en composantes principales est donc le suivant : considérons p variables statistiques quantitatives , homogènes ou non $X_1(.) , \dots , X_p(.)$ corrélées entre elles. Exprimer chaque variable $X_i(.)$ par un petit nombre de grandeurs statistiques, indépendantes deux à deux, appelées facteurs , notés F_1, \dots, F_q de telle sorte que les restes $R_i(.)$ soient petits et peu corrélés entre eux :

$$X_i(\cdot) = \left(\sum_{j=1}^q a_{ij} \cdot F_j(\cdot) \right) + R_i(\cdot) \quad \text{avec } q \leq p \quad (1.19)$$

Le problème se pose donc ainsi. A chaque variable statistique $X_i(\cdot)$, on associe un vecteur \overrightarrow{OM}_i de l'espace euclidien à n dimensions; ces vecteurs ont entre eux des angles ayant pour cosinus les coefficients de corrélation linéaire deux à deux des variables statistiques. Le premier axe factoriel est la droite \overrightarrow{OF}_1 telle que la somme des carrés des distances des points M_i à cette droite soit minimale. Le deuxième axe factoriel est la droite \overrightarrow{OF}_2 perpendiculaire à \overrightarrow{OF}_1 telle que la somme des distances au plan $(\overrightarrow{OF}_1, \overrightarrow{OF}_2)$ soit minimale,.....Les coordonnées X_i s'expriment comme une combinaison linéaire de coordonnées factorielles F_1, F_2, \dots, F_q . On arrête l'extraction des facteurs à q axes factoriels ($q \leq p$). L'extraction des facteurs ne nécessite que la diagonalisation de matrices symétriques dont la solution est unique. Il ne reste alors qu'à représenter les variables statistiques $X_i(\cdot)$ dans le système orthonormé des facteurs F_1, F_2, \dots, F_q . Il reste naturellement l'essentiel : comment passer d'un tableau de données à des variables $X_1(\cdot), X_2(\cdot), \dots, X_p(\cdot)$ et quelle matrice faudra-t-il diagonaliser? L'ACP est un cas particulier de l'analyse factorielle et se différencie des autres analyses par la définition du nuage de points initial auquel on associe la métrique euclidienne et la matrice d'inertie du nuage de points.

Position du problème

Le principe général est de résumer au mieux un tableau de données représenté par une matrice X à n lignes et p colonnes de terme général x_{ij} ; résumer au mieux signifie ici la possibilité de reconstituer les (np) valeurs numériques initiales de X par un nombre de valeurs numériques nettement inférieur à np et tel que la reconstitution soit bonne en un sens qui sera précisé par la suite. Pour résoudre ce problème, il faut associer à X des représentations géométriques; les n lignes de X sont considérés comme les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{OM}_i dans un espace euclidien R^p ; et les p colonnes de X ; sont considérées comme les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{OP}_j dans l'espace de R^n .

1.2 Analyse générale

Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes : Ω désigne la population étudiée : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$; ω_i est le i -ème individu

de cette population . ξ_1, \dots, ξ_p représentent p caractères dont les ensembles de modalité sont notés E_1, \dots, E_p . On suppose que quelque soit le caractère ξ_j , E_j est égal à l 'ensemble R des nombres réels , donc que les modalités sont quantitatives ; les diverses structures mathématiques dont R est pourvu pourrons ainsi être utilisées : structure d 'ordre , grâce à la relation inférieur ou égal ; structure d 'espace vectoriel euclidien : l 'addition de deux modalités possède un sens , ainsi que le produit par un scalaire et ces lois de composition vérifient les axiomes définissant un espace vectoriel . Une norme (intuitivement le procédé permettant de calculer la longueur d 'un vecteur) est définie sur E_j . Elle permet de construire une distance entre deux modalités . $X_1(.)$, \dots , $X_p(.)$ désignent les p variables statistiques associées respectivement aux caractères ξ_1, \dots, ξ_p , Quel que soit j , $1 \leq j \leq p$, $X_j(.)$ est une application de Ω dans E_j qui à tout individu ω_i associe la modalité $X_j(\omega_i)$ du caractère ξ_j possédée par ω_i .

$$X_j(.) : \Omega \rightarrow E_j$$

$$\omega_i \rightarrow X_j(\omega_i)$$

$$X_j = \{x_{ij} / \exists \omega_i , X_j(\omega_i) = x_{ij}\}$$

est l'ensemble des modalités observées du caractère ξ_j , ou encore l'ensemble des observations .

On pose : $X = (X_{o1}, \dots, X_{op})$ ou ${}^tX = (X_{1v}, \dots, X_{nv})$. Le tableau de

valeurs numériques X peut donner lieu à deux représentations géométriques : dans R^n , un nuage de p points dont les coordonnées sont les n composantes des vecteurs X_{o1}, \dots, X_{op} ou bien dans R^p , un nuage de n points dont les p coordonnées sont les composantes des vecteurs X_{1v}, \dots, X_{nv} . Le tableau des données brutes est constitué par l'ensemble des mesures effectuées sur une population Ω ; il sera construit comme ci-dessous :

$X_1(\omega_1)$	$X_p(\omega_1)$
..
.
$X_1(\omega_n)$	$X_p(\omega_n)$

Statistique et Géométrie

Une variable statistique quantitative $Y(.)$ est une application de Ω dans R , ensemble des modalités d'un caractère ξ . Or toute application peut être

caractérisée par son graphe , c 'est à dire l' ensemble des couples $(\omega, Y(\omega))$ de $\Omega \times R$. Ω étant fini , cet ensemble l 'est aussi . Une seconde caractérisation de l 'application $Y(.)$ peut être effectuée dans ce cas .Il suffit de doter l 'ensemble des individus d 'un ordre , c 'est à dire convenir par exemple d 'une numérotation des individus , $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ et d 'associer à l 'application $Y(.)$, le $n - uple$

$$Y = (Y(\omega_1), Y(\omega_2), \dots, Y(\omega_n))$$

de R^n .

L 'application $Y(.)$ est alors caractérisée par le vecteur \vec{Y} de R^n .On définit de cette manière un isomorphisme entre l 'espace vectoriel des applications de Ω dans R et l 'espace vectoriel R^n , (compatibilité des lois de compositions interne et externe) .Les notions de variance , covariance , coefficient de corrélation linéaire sont d' usage fréquent en statistique , existe-t-il des notions qui leur correspondent dans R^n ? On sait que :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y(\theta_i) - \bar{Y})^2 \\ COV(Y, Z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y(\theta_i) - \bar{Y}] [Z(\theta_i) - \bar{Z}] \\ \rho(Y, Z) &= \frac{COV(Y, Z)}{V(Y)^{1/2} V(Z)^{1/2}} \end{aligned}$$

où \bar{Y} , $V(Y)$, $COV(Y, Z)$ et $\rho(Y, Z)$ désignent respectivement la moyenne et la variance de Y , la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de Y et de Z , et que si nous travaillons dans l 'espace des variables statistiques centrées , on a :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y(\theta_i)^2 \\ COV(Y, Z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y(\theta_i) Z(\theta_i) \end{aligned}$$

Par suite dans le cas particulier des variables centrées , on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
nV(Y) &= \|\vec{Y}\|^2 \\
nCOV(Y, Z) &= \vec{Y} \cdot \vec{Z} \\
\rho(Y, Z) &= \frac{\vec{Y} \cdot \vec{Z}}{\|\vec{Y}\| \|\vec{Z}\|} = \cos(\vec{Y}, \vec{Z})
\end{aligned}$$

Deux variables statistiques de covariance nulle correspondent à deux vecteurs orthogonaux (produit scalaire nul) et que réciproquement , deux vecteurs orthogonaux correspondent a deux variables statistiques de covariance nulle .Trois notions méritent une attention tout à fait spéciale , elles sont souvent source de confusion . Ce sont les notions de corrélation , de liaison linéaire et d 'indépendance de deux variables statistiques . La recherche de leur équivalent géométrique conduit fréquemment à des erreurs .Considérons deux variables statistiques $Y(.)$ et $Z(.)$, définies sur une population Ω , à valeur dans R .

Définition On dira que $Y(.)$ est non corrélée à $Z(.)$ si pour toute observation z de $Z(.)$ c' est à dire pour tout élément de $Z(\Omega)$ on a :

$$\frac{1}{\text{Card}\{\omega \in \Omega / Z(\omega) = z\}} \sum_{\omega \in \{\Omega / Z(\omega)=z\}} Y(\omega) = \frac{1}{\text{Card}\Omega} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)$$

Le premier membre de cette relation est appelé moyenne conditionnée de $Y(.)$ par $Z = z$, on la note habituellement $\bar{Y}_{Z=z}$, le second membre est la moyenne \bar{Y} de $Y(.)$.On dira que $Y(.)$ est non corrélée à $Z(.)$, si pour toute observation z de $Z(.)$, la moyenne conditionnée de $Y(.)$ par $Z = z$ est égale à la moyenne de $Y(.)$.On dira que $Y(.)$ et $Z(.)$ sont non corrélées , si $Y(.)$ est non corrélée à $Z(.)$ et $Z(.)$ non corrélée à $Y(.)$.

Définition 1 On dit que deux variables statistiques $Y(.)$ et $Z(.)$ sont liées linéairement , s 'il existe deux scalaires a et b tels que :

$$Y(.) = a Z(.) + b \Leftrightarrow |\rho_{yz}| = 1$$

Définition 2 On dit que deux variables statistiques $Y(.)$ et $Z(.)$ sont indépendantes si pour toute observation y de $Y(.)$ et toute observation de z de $Z(.)$ on a la relation :

$$\frac{\text{Card}\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = y \text{ et } Z(\omega) = z\}}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Card}\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = y\}}{\text{Card}\Omega} \times \frac{\text{Card}\{\omega \in \Omega / Z(\omega) = z\}}{\text{Card}\Omega}$$

Remarque Les deux premières définitions nécessitent que l'ensemble des modalités de $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ soit doté d'une structure d'espace vectoriel alors que la troisième définition peut être utilisée quelque soit la structure dont est doté l'ensemble des modalités et même en l'absence de structure mathématique.

Proposition L'indépendance statistique de $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ implique la non corrélation de $Y(\cdot)$ à $Z(\cdot)$ et la non corrélation de $Z(\cdot)$ à $Y(\cdot)$.

La non corrélation de $Y(\cdot)$ à $Z(\cdot)$ ou la non corrélation de $Z(\cdot)$ à $Y(\cdot)$ implique la non liaison linéaire de $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$.

Remarque Les réciproques sont en général fausses.

Exemple Deux variables statistiques qui ne sont pas liées linéairement peuvent être corrélées, il suffit qu'il existe entre $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ une liaison fonctionnelle autre qu'une liaison linéaire. De même deux variables non corrélées peuvent être non indépendantes. Quels sont les équivalents géométriques des trois concepts que nous venons de définir? En fait, ces concepts ne possèdent pas d'équivalent géométrique, mais ils sont liés, par des relations logiques, aux propriétés d'orthogonalité et d'indépendance linéaire des vecteurs associés aux variables statistiques.

Proposition Si $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$, sont deux variables statistiques centrées :

$Y(\cdot)$ non corrélée à $Z(\cdot)$ ou $Z(\cdot)$ non corrélée à $Y(\cdot)$ implique $\vec{Y} \cdot \vec{Z} = 0$

Preuve

$$\rho(Y(\cdot), Z(\cdot)) = 0 = \cos(\vec{Y}, \vec{Z})$$

donc $\vec{Y} \cdot \vec{Z} = 0$

Proposition Si $\vec{Y} \cdot \vec{Z} = 0$ alors les variables statistiques $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ ne sont pas liées linéairement.

Preuve $\vec{Y} \cdot \vec{Z} = 0$ or

$$\rho(Y, Z) = \frac{\vec{Y} \cdot \vec{Z}}{\|\vec{Y}\| \|\vec{Z}\|} = 0 \text{Longrightarrow} \rho(Y, Z) \neq 1$$

donc $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ ne sont pas liées linéairement .

Proposition La liaison linéaire des variables statistiques $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ implique la liaison des vecteurs \vec{Y} et \vec{Z} .

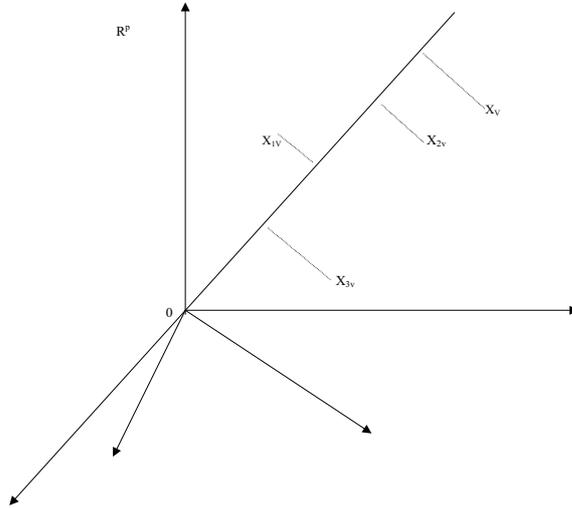
Preuve $|\rho(Y, Z)| = 1$ implique $|\cos(\vec{Y}, \vec{Z})| = 1$ donc \vec{Y} et \vec{Z} sont colinéaires d'où la liaison entre ces vecteurs.

Proposition L'indépendance linéaire des vecteurs \vec{Y} et \vec{Z} (à ne pas confondre avec l'indépendance des variables statistiques $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$) implique la non liaison linéaire des variables statistiques $Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$. La réciproque est vraie.

Preuve $|\rho(Y(\cdot); Z(\cdot))| = |\cos(\vec{Y}, \vec{Z})| \neq 1 \Rightarrow Y(\cdot)$ et $Z(\cdot)$ ne sont pas liées linéairement.

Ajustement par un sous-espace vectoriel dans R^p

$X_1(\cdot), \dots, X_p(\cdot)$, les p variables statistiques définies sur Ω sont centrées, réduites. $\text{Card}(\Omega) = n$, a valeur dans R . Chaque individu est considéré comme un point de l'espace affine R^p ou un vecteur de l'espace vectoriel R^p



Ajustement par un sous-espace dans \mathbb{R}^p

Les composantes X_{iv} du vecteur \vec{X}_{iv} associé au i -ème individu constituent la ligne i de la matrice X . Cherchons à décrire la position par rapport à l'origine et la forme du nuage. Commençons donc par chercher la droite F_1 passant par l'origine, qui ajuste au sens des moindres carrés le nuage. Soit \vec{W} un vecteur unitaire porté par cette droite. Alors

$$proj_{F_1} \vec{X}_{iv} = \sum_{j=1}^p X_{ij} W_j \quad (1.1)$$

Le théorème de Pythagore peut s'écrire :

$$\|\vec{X}_{iv}\|^2 = \|proj_{F_1} \vec{X}_{iv}\|^2 + \|\vec{d}_{iv}\|^2$$

Par suite, minimiser $\|\vec{d}_{iv}\|^2 \iff$ maximiser $\|proj_{F_1} \vec{X}_{iv}\|^2$

d'où **Problème** Déterminer \vec{W} tel que :

$$\max_{\|\vec{W}\|=1} \sum_{i=1}^n \left\| \text{proj}_{F_1} \vec{X}_{iv} \right\|^2$$

or

$$\sum_{i=1}^n \left\| \text{proj}_{F_1} \vec{X}_{iv} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\vec{X}_{iv} \cdot \vec{W} \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\vec{X}_{iv} \cdot \vec{W} \right)^2 = {}^t W {}^t X_{iv} X_{iv} W$$

Il s'écrit sous la forme matricielle suivante

Problème Déterminer la matrice colonne W de dimension $(p \times 1)$ tel

que :

$$\max_{{}^t W W = 1} {}^t W {}^t X X W$$

Proposition La matrice colonne, solution du problème précédent est un vecteur unitaire, associé à la plus grande valeur propre de la matrice ${}^t X X$.

Preuve La dérivation matricielle de la quantité

$${}^t W {}^t X X W - \lambda ({}^t W W - 1)$$

:par rapport aux différentes composantes W_j , puis l'annulation des dérivées nous donnent la relation matricielle :

$$2 {}^t X X W - 2\lambda W = 0$$

soit

$${}^t X X W = \lambda W$$

Ce qui prouve que W est vecteur propre de la matrice ${}^t X X$. appelle matrice d'inertie du nuage des variables

Remarque

$${}^t W {}^t X X W = \lambda {}^t W W = \lambda$$

. Le maximum cherché est donc une valeur propre de ${}^t X X$. (la plus grande par conséquent) .

Problème On cherche à déterminer q variables statistiques $W_1(\cdot), \dots, W_q(\cdot)$ centrées, réduites, vérifiant pour tout couple (j, k) de $\{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q\}$ $j \neq k$, $\rho(W_j, W_k) = 0$, telles que : pour tout i , $i = 1, \dots, n$.

$$X_{iv}(\cdot) = \sum_{j=1}^q a_{ij} W_j(\cdot) + d_{iv}(\cdot) \text{ et } \sum_{i=1}^n V(d_{iv}) \text{ minimum.} \quad ((21))$$

$d_{iv}(\cdot)$ tant une variable résiduelle.

Pour tout k , $1 \leq k \leq q$, on note \vec{W}_k le vecteur de R^p associé à la variable statistique $W_k(\cdot)$ et on pose

$$\vec{W}'_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{W}_k$$

Il s'agit de déterminer les vecteurs $\vec{W}'_1, \dots, \vec{W}'_q$ de R^p tels que :

$$\begin{aligned} \forall k, k &= 1, \dots, q \quad \left\| \vec{W}'_k \right\| = 1 \\ \forall (k, j), k &\neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad \vec{W}'_k \cdot \vec{W}'_j = 0 \\ \vec{X}_{iv} &= \sum_{j=1}^q a_{ij} \vec{W}'_j + \vec{d}_{iv} \quad i = 1, \dots, n \\ &\sum_{i=1}^n \left\| \vec{d}_{iv} \right\|^2 \text{ minimum} \end{aligned}$$

Si F désigne le sous-espace vectoriel de dimension q , admettant $\vec{W}'_1, \dots, \vec{W}'_q$ pour base orthonormée, nécessairement, $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\sum_{j=1}^q a_{ij} \vec{W}'_j = \text{proj}_F \vec{X}_{iv}$$

D'après le théorème de Pythagore

$$\left\| \vec{X}_{iv} \right\|^2 = \left\| \text{proj}_F \vec{X}_{iv} \right\|^2 + \left\| \vec{d}_{iv} \right\|^2$$

par suite ,

$$\min imiser \sum_{i=1}^n \left\| \vec{d}_{iv} \right\|^2 \Leftrightarrow \max imiser \sum_{i=1}^n \left\| proj_F \vec{X}_{iv} \right\|^2$$

Mais ,

$$\left\| proj_F \vec{X}_{iv} \right\|^2 = \sum_{j=1}^q \left(\vec{X}_{iv} \cdot \vec{W}'_j \right)^2$$

car $\vec{W}'_1, \dots, \vec{W}'_q$ est une base orthonormée de F .D ' où la nouvelle écriture vectorielle :

Déterminer les vecteurs $\vec{W}'_1, \dots, \vec{W}'_q$ de R^p tels que :

$$\begin{aligned} \forall k, k = 1, \dots, q \quad \left\| \vec{W}'_k \right\| &= 1 \\ \forall (k, j), k \neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad \vec{W}'_k \cdot \vec{W}'_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \left(\vec{X}_{iv} \cdot \vec{W}'_j \right)^2 &\max imun \end{aligned}$$

dont l ' écriture matricielle est : déterminer les matrices colonnes (ou vecteurs colonnes) W'_1, \dots, W'_q du type $(p \times 1)$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall k, k = 1, \dots, q \quad {}^t W'_k W'_k &= 1 \\ \forall (k, j), k \neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad {}^t W'_k W'_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^q {}^t W'_j {}^t X X W'_j &\max imun \end{aligned} \quad (1.2)$$

Proposition Une base orthonormée du sous-espace vectoriel à q dimensions ajustant au sens des moindres carrés le nuage est constituée par q vecteurs propres correspondants aux q plus grandes valeurs propres de la matrice symétrique ${}^t X X$ avec $q = rang({}^t X X)$.

Preuve Nous donnerons deux démonstrations faisant appel à des notions mathématiques différentes : la première utilise des règles simples de dérivation matricielles et des multiplicateurs de *LAGRANGE* .La seconde se fonde sur les propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices symétriques . Un vecteur propre W correspondant à la plus grande

valeur propre étant trouvé dans la preuve précédente notons le désormais W'_1 . Si maintenant nous cherchons l'espace à deux dimensions qui ajuste au sens des moindres carrés le nuage.

Il suffira de résoudre

$$\max_{W_2'^t W_2' = 1, {}^t W_1' W_2' = 0} {}^t W_2' {}^t X X W_2'$$

On obtient alors la relation matricielle :

$$2 {}^t X X W_2' - 2\lambda W_2' - \mu W_1' = 0 \quad (1.3)$$

(λ et μ étant des multiplicateurs de LAGRANGE). Prémultipliant (23) par ${}^t W_1'$, puis notant que

$$\begin{aligned} {}^t W_1' {}^t X X W_2' &= \lambda {}^t W_1' W_2' \\ \text{et que } {}^t W_1' W_2' &= 0 \end{aligned}$$

il vient $\mu = 0$, d'où :

$${}^t X X W_2' = \lambda W_2'$$

W_2' sera donc le second vecteur propre, associé à la seconde valeur propre de ${}^t X X$. D'où le résultat est valable pour $k = 1, \dots, q$ avec $q = \text{rang}({}^t X X)$.

Preuve La matrice ${}^t X X$ est symétrique et définie positive. Nous savons qu'une telle matrice admet des valeurs propres λ_i positives correspondant à des vecteurs propres b_i orthogonaux. Soit B la matrice ayant les vecteurs propres b_i en colonne; on a donc ici :

$${}^t X X B = B \Lambda \quad (1.4)$$

Λ étant une matrice diagonale ayant les valeurs propres λ_i sur sa diagonale, avec la relation

$${}^t B B = I \quad (1.5)$$

Si nous posons

$$y = {}^t B W_1'$$

, la forme quadratique

$${}^t W_1' {}^t X X W_1'$$

devient

$${}^t y D y \text{ avec } D = {}^t (X B) (X B) \quad (1.6)$$

et la condition

$${}^tW'_1W'_1 = 1$$

devient

$${}^tyy = 1 \quad (1.7)$$

On est donc ramené grâce à (24) et (25)

$$\max_{\sum_{i=1}^q y_i^2 = 1} \sum_{i=1}^q \lambda_i y_i^2 \quad (1.8)$$

Posons $z_i = y_i^2$

La solution se trouve nécessairement en un sommet du domaine défini

par la relation

$$\sum_{i=1}^q z_i = 1, \quad z_i \geq 0$$

donc pour une valeur $z_{i_0} = 1$, avec pour tout $j \neq i_0$ $z_j = 0$, l'indice i_0 choisi sera celui correspondant à la plus grande valeur propre λ_{i_0} qui sera la valeur effective du *maximum*. Comme $W'_1 = By$, le vecteur W'_1 cherché sera

le vecteur correspondant à cette plus grande valeur propre. Si nous cherchons également un vecteur W'_2 tel que

$$\max_{W_2 {}^tW_2 = 1, {}^tW_1W_2 = 0} {}^tW'_2 {}^tX X W'_2$$

Le même changement de variable nous montre que $s = {}^tBW'_2$ est orthogonal au vecteur y précédent donc que la composante de s correspondant à l'indice i_0 est nulle. D'où

$$\max_{\sum_{i=1, i \neq i_0}^q s_i^2 = 1} \sum_{i=1}^q \lambda_i s_i^2 = \lambda_{i_1} \quad (1.9)$$

est la deuxième plus grande valeur propre d'où la proposition énoncée ci-dessus ..

La qualité de la représentation

La qualité de la représentation du nuage de point-individus dans le sous-espace affine associé au sous espace vectoriel F est mesurée par l'indicateur $IQG(F)$ défini par :

$$: IQG(F) = \frac{\sum_{i=1}^n \|\text{proj}_F \vec{\omega}_i\|^2}{\sum_{i=1}^n \|\vec{\omega}_i\|^2} = \frac{\text{Inertie Expliquée}}{\text{Inertie Totale}}$$

$$\sum_{i=1}^n \|\vec{\omega}_i\|^2 = \text{Trace } {}^tXX = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

où λ_i désigne la i -ème valeur propre de tXX , et

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$$

De plus on a :

$$\sum_{i=1}^n \|\text{proj}_F \vec{\omega}_i\|^2 = \sum_{i=1}^q \lambda_i$$

où $q = \dim(F)$

Par suite :

$$IQG(F) = \frac{\sum_{i=1}^q \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

On a évidemment :

$$0 \leq IQG(.) \leq 1$$

Aide à l'interprétation :

Trois indicateurs sont en général utilisés :

a) Contribution de ω_i à l'inertie totale : $CIT(\omega_i)$, défini par :

$$CIT(\omega_i) = \frac{\|\vec{\omega}_i\|^2}{\sum_{i=1}^n \|\vec{\omega}_i\|^2}$$

b) Contribution de l'individu ω_i à l'inertie expliquée par le sous-espace vectoriel F :

$$CIE(\omega_i, F) = \frac{\|proj_F \vec{\omega}_i\|^2}{\sum_{i=1}^n \|proj_F \vec{\omega}_i\|^2}$$

L'intérêt d'un facteur dépend en grande partie du nombre d'individus qu'il concerne. On réalise une première approche de ce nombre en consultant la liste des contributions des individus aux

facteurs pour repérer si un seul individu ou un très petit nombre d'individus ont une contribution

très supérieure à la moyenne. On peut calculer aussi le nombre minimum d'individus totalisant, à

eux tous, un pourcentage d'inertie projetée fixé à l'avance. Cet indicateur évalue le degré de

généralité d'un facteur au sens du nombre d'individus participant à ce facteur. Le premier stade de l'interprétation d'un facteur qui apparemment ne concerne que très peu d'individus est en général simple : on identifie rapidement ces individus et leur particularisme. La signification de ce particularisme est plus ou moins immédiate ; elle peut remettre en cause le champ de l'analyse, à savoir l'ensemble des individus étudiés. Envisageons le cas extrême d'un facteur induit par un seul individu. Deux cas peuvent être distingués. · Si ce facteur est l'un des premiers, l'individu concerné est nécessairement très différent des autres. Un tel cas particulier est d'une part facilement mis en évidence sans l'analyse et d'autre part, gêne l'étude du reste de la population. Il faut alors envisager de refaire une analyse en supprimant cet individu des éléments actifs. Ce qui modifie le champ de l'étude. Cette nouvelle analyse peut différer que de très peu de la première. En effet, on peut montrer que si l'inertie sur l'axe s de l'individu supprimé est inférieure à la différence entre λ_s et λ_{s+1} , les facteurs de la nouvelle analyse sont très corrélés à ceux de l'ancienne ; l'individu est certes très différent des autres, mais comme cette différence s'inscrit dans une tendance générale, il ne perturbe pas les résultats. · Si l'on observe un tel facteur après quelques facteurs généraux prenant en compte beaucoup d'individus, l'analyse n'est pas nécessairement remise en cause : il est naturel, après avoir extrait des tendances générales, que des phénomènes ponctuels apparaissent. Attention : Il ne peut être question d'exclure des individus d'une analyse en se fondant uniquement sur des critères d'inertie car cette exclusion peut impliquer une modification des objectifs. Remarquons enfin qu'en ACP normée, ce

problème d'éléments exceptionnels ne concerne que les individus. En effet, les variables possèdent chacune la même inertie. c) L'indicateur d'erreur de perspective $COS(\omega_i, F)$ défini par :

$$COS(\omega_i, F) = \frac{\|proj_F \vec{\omega}_i\|^2}{\|\vec{\omega}_i\|^2}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} 0 &\leq COS(\omega_i, F) \leq 1 \\ COS(\omega_i, F) &= 1 \Leftrightarrow \vec{\omega}_i \in F \\ COS(\omega_i, F) &= 0 \Leftrightarrow \vec{\omega}_i \perp F \end{aligned}$$

Si $COS(\omega_i, F)$ est voisin de 1, cela signifie que la distance séparant le point ω_i de l'origine des axes est peu différent de la projection de ω_i sur le sous-espace affine associé au sous espace vectoriel F . Par conséquent, si deux point-individus ω_i, ω_j sont tels que

$$\begin{aligned} COS(\omega_i, F) &= 1 \\ COS(\omega_j, F) &= 1 \end{aligned}$$

alors, la distance séparant les points $proj_F \vec{\omega}_i$ et $proj_F \vec{\omega}_j$ est peu différente de celle séparant ω_i et ω_j . On peut résumer cette propriété en disant que les distances séparant les point-individus ayant un $COS(., F)$ élevé sont "bien" représentées dans F . En revanche la distance séparant un individu ω_i dont le $COS(\omega_i, F)$ est proche de 1 d'un individu dont le $COS(\omega_j, F)$ est voisin de zéro, est mal représentée dans F . Pour plus de détails sur l'interprétation d'une A.C.P., consultez " **Escofier Brigitte - Pagés Jérôme (1998)** " .

Ajustement par un sous – espace vectoriel dans R^n :

Dans l'espace R^n , nous avons maintenant p points X_{oj} $j = 1, \dots, p$. **Problème** On cherche à déterminer q variables statistiques $V_1(.), \dots, V_q(.)$ centrées, réduites, vérifiant pour tout couple (j, k) de $\{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q\}$ $j \neq k$, $\rho(V_j, V_k) = 0$, telles que : pour tout j , $j = 1, \dots, p$.

$$X_{oj}(.) = \sum_{i=1}^q b_{ij} V_i(.) + d_{oj}(.) \text{ et } \sum_{j=1}^p V(d_{oj}) \text{ minimum.} \quad (1.10)$$

Pour tout k , $1 \leq k \leq q$, on note \vec{V}_k le vecteur de R^n associé à la variable statistique $V_k(.)$ et on pose

$$\vec{V}'_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{V}_k$$

Il s'agit de déterminer les vecteurs $\vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_q$ de R^n tels que :

$$\begin{aligned} \forall k, k &= 1, \dots, q \quad \left\| \vec{V}'_k \right\| = 1 \\ \forall (k, j), k &\neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad \vec{V}'_k \cdot \vec{V}'_j = 0 \\ \vec{X}_{oj} &= \sum_{i=1}^q b_{ij} \vec{V}'_i + \vec{d}_{oj} \quad j = 1, \dots, p \\ &\sum_{j=1}^p \left\| \vec{d}_{oj} \right\|^2 \text{ minimum} \end{aligned}$$

Si G désigne le sous-espace vectoriel de dimension q , admettant $\vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_q$ pour base orthonormée, nécessairement, $\forall 1 \leq j \leq p$

$$\sum_{i=1}^q b_{ij} \vec{V}'_i = \text{proj}_G \vec{X}_{oj}$$

D'après le théorème de Pythagore

$$\left\| \vec{X}_{oj} \right\|^2 = \left\| \text{proj}_G \vec{X}_{oj} \right\|^2 + \left\| \vec{d}_{oj} \right\|^2$$

par suite,

$$\text{minimiser} \sum_{j=1}^p \left\| \vec{d}_{oj} \right\|^2 \Leftrightarrow \text{maximiser} \sum_{j=1}^p \left\| \text{proj}_G \vec{X}_{oj} \right\|^2$$

Mais,

$$\left\| \text{proj}_G \vec{X}_{oj} \right\|^2 = \sum_{i=1}^q \left(\vec{X}_{oj} \cdot \vec{V}'_i \right)^2$$

car $\vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_q$ est une base orthonormée de G .

D'où la nouvelle écriture vectorielle :

Déterminer les vecteurs $\vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_q$ de R^n tels que :

$$\begin{aligned} \forall k, k = 1, \dots, q \quad \left\| \vec{V}'_k \right\| &= 1 \\ \forall (k, j), k \neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad \vec{V}'_k \cdot \vec{V}'_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q \left(\vec{X}_{oj} \cdot \vec{V}'_i \right)^2 &\text{ maximum} \end{aligned}$$

dont l'écriture matricielle est : déterminer les matrices colonnes (ou vecteurs colonnes) V'_1, \dots, V'_q du type $(n \times 1)$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall k, k = 1, \dots, q \quad {}^t V'_k V'_k &= 1 \\ \forall (k, j), k \neq j \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q \quad {}^t V'_k V'_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^q {}^t V'_i X {}^t X V'_i &\text{ maximum} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Proposition Une base orthonormée du sous-espace vectoriel à q dimensions ajustant au sens des moindres carrés le nuage est constituée par q vecteurs propres correspondants aux q plus grandes valeurs propres de la matrice symétrique $X {}^t X$ avec $q = \text{rang}(X {}^t X)$.

Preuve :

cf paragraphe précédent

La qualité de la représentation

La qualité de l'explication des variables statistiques $X_i(\cdot)$ par les variables statistiques $V_1(\cdot), \dots, V_q(\cdot)$ est mesurée par l'indicateur de qualité globale IQG défini par :

$$: IQG(F) = \frac{\sum_{i=1}^p \left\| \text{proj} \vec{X}_i \right\|^2}{\sum_{i=1}^p \left\| \vec{X}_i \right\|^2}$$

$$\sum_{i=1}^p \left\| \vec{X}_i \right\|^2 = \text{Trace } {}^t X X = \sum_{i=1}^p \lambda_i = np$$

où λ_i désigne la i -ème valeur propre de ${}^t X X$, et

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$$

$$\sum_{i=1}^p \left\| \text{proj}_F \vec{X}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^q \lambda_i$$

Par suite :

$$IQG(F) = \frac{\sum_{i=1}^q \lambda_i}{n.p}$$

et l'on aura :

$$IQG(F) = 1 \Leftrightarrow \forall i, i = 1, \dots, p \quad X_i(\cdot) = \sum_{j=1}^q \frac{a_{ij}}{\sqrt{n}} W_j(\cdot)$$

$$\sum_{j=1}^p V(d_i) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{n} \left\| \vec{d}_i \right\|^2 = p(1 - IQG(F))$$

$\sum_{j=1}^p V(d_i)$ est appelé "variance résiduelle"

$$\sum_{j=1}^p V(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \left\| \vec{X}_i \right\|^2 \text{ est la "variance totale"}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \left\| \text{proj}_F \vec{X}_i \right\|^2 \text{ est la "variance expliquée par } F"$$

. Les coefficients de corrélation linéaire entre variable expliquée $X_i(\cdot)$ et variable explicative $V_j(\cdot)$, sont égaux à

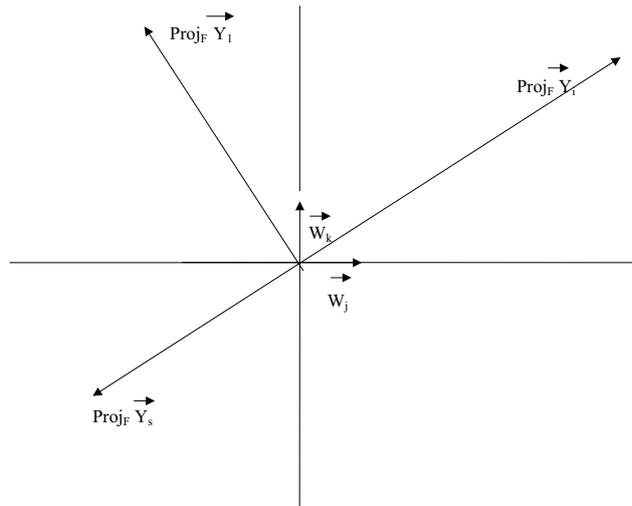
$$\varrho(X_i, V_j) = \frac{\vec{X}_i \cdot \vec{V}_j}{\left\| \vec{X}_i \right\| \cdot \left\| \vec{V}_j \right\|} = \frac{\vec{X}_i \cdot \vec{V}_j}{\sqrt{n}} = \frac{j - \text{ème coordonnée de } \text{proj}_F \vec{X}_i}{\sqrt{n}}$$

. Les coefficients de corrélation linéaire multiple entre une variable expliquée $X_i(\cdot)$ et q variables explicatives $V_j(\cdot)$ sont égaux à :

$$\varrho^2(X_i, V_1, \dots, V_q) = \frac{\left\| \text{proj}_F \vec{X}_i \right\|^2}{\left\| \vec{X}_i \right\|^2} = \sum_{j=1}^q \rho^2(X_i, V_j)$$

. La représentation des variables statistiques $X_i(\cdot)$ dans le sous-espace affine de dimension 2 dont le sous-espace vectoriel associé est engendré par

les vecteurs unitaires \vec{V}'_j , \vec{V}'_k , telle que représentée figure suivante permet une analyse rapide de l'explication des variables $X_i(\cdot)$, $X_l(\cdot)$ et $X_s(\cdot)$ par les variables statistiques $V_j(\cdot)$ et $V_k(\cdot)$



Representation des variables statistiques dans un sous-espace de dimension 2

La qualité globale de l'explication est donnée par la valeur de l'indicateur $IQG(F)$, pour le sous-espace vectoriel F , engendré par \vec{V}'_j et \vec{V}'_k .

$$IQG(F) = \frac{\lambda_j + \lambda_k}{np}$$

. L'explication de $X_i(\cdot)$ par $V_j(\cdot)$ et $V_k(\cdot)$ n'est pas mauvaise, et est supérieure à celle de $X_s(\cdot)$; les "longueurs" des $proj_F \vec{X}_i$, $proj_F \vec{X}_s$ sont proportionnelles au carré du coefficient de corrélation multiple entre $X_i(\cdot)$ et $V_j(\cdot)$, $V_k(\cdot)$ et entre $X_s(\cdot)$ et $V_j(\cdot)$, $V_k(\cdot)$. Donc plus cette longueur est grande, meilleure est l'explication. La contribution \vec{V}'_j est plus grande dans l'explication de \vec{X}_i que la contribution de \vec{V}'_k . En revanche, c'est le cas contraire pour \vec{X}_l ; en effet, les coordonnées de $proj_F \vec{X}_i$ et $proj_F \vec{X}_l$ sur les axes de vecteurs directeurs \vec{V}'_j et \vec{V}'_k sont proportionnelles aux coefficients de corrélation linéaire entre $X_i(\cdot)$ et $V_j(\cdot)$, $X_i(\cdot)$ et $V_k(\cdot)$,

$X_s(\cdot)$ et $V_j(\cdot)$, $X_s(\cdot)$ et $V_k(\cdot)$ respectivement. Plus une coordonnée sur l'axe porté par \vec{V}'_k est grande plus la corrélation linéaire entre la variable et $V_k(\cdot)$ est proche de 1. La représentation précédente permet donc une étude rapide des relations entre les variables statistiques expliquées et les variables statistiques explicatives calculées. Elle ne dispense cependant pas de consulter soigneusement les valeurs des divers coefficients de corrélations linéaires simples ou multiples.

Dualité entre ces sous-espaces propres de R^p ; et R^n

Cherchons quelles relations peuvent exister entre ce vecteur V'_k et le vecteur W'_k précédent.

On a la relation :

$$X \ ^tX V'_k = \lambda_k V'_k \quad (1.12)$$

V'_k et λ_k désignant respectivement le k -ième vecteur propre et la k -ième valeur propre de $X \ ^tX$. Il y a q valeurs propres non nulles, q étant le rang de $X \ ^tX$, donc le rang de X . En prémultipliant les deux membres de cette relation (32) par la matrice tX , on obtient :

$$^tX X (^tX V'_k) = \lambda_k (^tX V'_k) \quad (1.13)$$

A chaque vecteur propre V'_k ($k \leq q$) de $X \ ^tX$ correspond donc un vecteur propre

$W'_k = ^tX V'_k$ de $^tX X$ relatif à la même valeur propre. Toute valeur propre non nulle de la matrice $X \ ^tX$ est donc valeur propre de $^tX X$ (et réciproquement), et les vecteurs propres correspondants sont liés par les relations :

$$W'_k = ^tX V'_k \quad (1.14)$$

Les vecteurs propres sont cependant définis à un coefficient près. Si

$$^tV'_k V'_k = 1$$

alors

$$W'_k = ^tX V'_k \quad (1.15)$$

n'est pas unitaire. En effet :

$$^tW'_k W'_k = ^tV'_k X \ ^tX V'_k = \lambda_k$$

Exprimons V'_k en fonction de W'_k , en prémultipliant les deux membres de (35) par X :

$$X W'_k = X \ ^tX V'_k = \lambda_k V'_k$$

Nous pouvons donner à ces relations une forme symétrique, en posant à la place de la relation (34) :

$$W'_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} {}^t X V'_k \quad k = 1, \dots, q \quad (1.16)$$

$$V'_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X W'_k \quad k = 1, \dots, q \quad (1.17)$$

W'_k et V'_k sont alors tous deux unitaires.

Remarque Les coordonnées des n points du nuage de R^p sur l'axe factoriel F_k de cosinus directeurs W'_k sont donc : ${}^t X W'_k$. Ce sont donc les composantes du vecteur $X W'_k$, c'est à dire, au coefficient $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ près, les composantes de V'_k d'après (37). De même les coordonnées des p points de R^n sur l'axe factoriel G_k de cosinus directeurs V'_k sont ${}^t X V'_k$. Ce sont les composantes du vecteur $X V'_k$, et, au même coefficient $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ près, celles du vecteur W'_k d'après (36). Ainsi, les cosinus directeurs du $k^{i-ème}$ axe factoriel dans un espace sont les coordonnées des points sur le $k^{i-ème}$ axe factoriel de l'autre espace, divisées par $\sqrt{\lambda_k}$.

Reconstitution du tableau X de départ

Nous avons montré que l'on pouvait tenter de reconstituer les positions des points d'un nuage de R^p (ou de R^n) à partir d'un nombre restreint de facteurs, qui sont des coordonnées sur la base d'un sous-espace qui ajuste au mieux ce nuage. Un repère formé par les s premiers axes factoriels permettra de reconstituer les positions des points avec une bonne précision si la quantité

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$$

représente une proportion notable de la trace de ${}^t X X$.

Si nous voulons reconstituer les valeurs numériques de départ, c'est-à-dire les coordonnées des points dans R^p , à partir de s facteurs, il faut donc utiliser simultanément les coordonnées des points sur les axes factoriels et les cosinus directeurs des axes factoriels. La relation (37) s'écrit :

$$X W'_k = \sqrt{\lambda_k} V'_k$$

Postmultiplions les deux membres par ${}^t W'_k$ et en sommant par rapport à k on a :

$$XW'_k {}^tW'_k = \sqrt{\lambda_k} V'_k {}^tW'_k$$

$$X \left\{ \sum_{k=1}^p W'_k {}^tW'_k \right\} = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} V'_k {}^tW'_k$$

La quantité entre accolades n'est autre que la matrice unité ($p \times p$) : c'est en effet, le produit de la matrice orthogonale : $(W'_1, W'_2, \dots, W'_p)$ par sa transposée, qui est aussi son inverse. On a donc la reconstitution :

$$X = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} V'_k W'_k$$

On a une reconstitution approchée du tableau des données numériques X , en se limitant aux s premiers facteurs, si $\sqrt{\lambda_{s+1}}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$ peuvent être considérés comme petits :

$$X \approx \sum_{k=1}^s \sqrt{\lambda_k} V'_k W'_k$$

On remplace ainsi les $n \times p$ nombres du tableau X par $s \times (n + p + 1)$ nombres (les s vecteurs V'_k et W'_k et les s valeurs propres) .

En pratique, on ne cherchera pas à reconstituer intégralement les données initiales ; nous tenterons parfois d'éliminer ce que l'on peut appeler " un bruit de fond " attribuable aux fluctuations d'échantillonnage, à l'imprécision des mesures, à notre ignorance des phénomènes Ceci pourra restreindre encore le nombre des facteurs jugés significatifs.

1.3 Analyse en composantes principales

La nature de données à analyser imposera des transformations préliminaires sur les variables . Lorsque les variables sont très hétérogènes quant à leurs moyennes, le tableau soumis à l'analyse générale sera donc le tableau de terme général

$$X_{ij} - \bar{X}_j$$

on l'appelle l'analyse en composante principale non normée.

Quand les variables sont très hétérogènes en moyenne , mais également en dispersion , nous analysons le tableau

$$(X_{ij} - \bar{X}_j) / \sqrt{V_j}$$

$\sqrt{V_j}$ désignant l'écart-type empirique de la $j^{i-ème}$ variable , on parle d'analyse en composante principale normée .

Le statisticien a la choix entre plusieurs espaces de départ, pour raisonner : l'espace des observations et l'espace des variables.

Représentation des observations

Les distances dans R^p : On considère une enquête effectuée sur une population de n individus , dans laquelle p caractères sont étudiés. Le tableau de données brutes centrées donne naissance à une matrice de dimension $(n \times p)$. Soit X_{kv} et X_{lv} deux observations .Alors :

$$\left\| \vec{X}_{kv} - \vec{X}_{lv} \right\|^2 = {}^t (X_{lv} - X_{kv}) (X_{lv} - X_{kv})$$

Ce nombre est d'autant plus faible que les composantes X_{ki} et X_{li} sont proches pour toutes les valeurs de i .Néanmoins ,

$$\left\| \vec{X}_{kv} - \vec{X}_{lv} \right\|^2 = \left\| \vec{X}_{kv} - \vec{X}_{mv} \right\|^2$$

pose en général beaucoup de problèmes d'interprétation car cette égalité ne renseigne pas beaucoup sur les composantes qui sont responsables. Nous verrons que la représentation simultanée des variables et des observations permet de nuancer les interprétations de ces proximités. Notons qu'intervient ici un important problème d'unité et de pondération entre les différentes variables : en effet, si la $j^{i-ème}$ composante a des valeurs relativement élevées, le terme $(X_{lj} - X_{kj})^2$ jouera un rôle prépondérant dans

$${}^t (X_{lv} - X_{kv}) (X_{lv} - X_{kv})$$

par suite, la $j^{i-ème}$ variable aura un poids supérieur aux autres dans la définition des proximités entre observations. Il faudra donc, dans la plupart des applications, " normer " les variables.

Recherche des axes factoriels dans R^p :

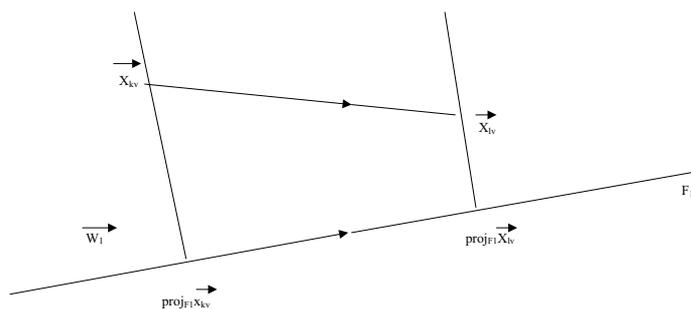
Problème On cherche une base orthonormée du sous-espace vectoriel F , de dimension $q \leq p$, tel que :

$$\sum_{\substack{(i,j) \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left\| \overrightarrow{proj_F \omega_i} - \overrightarrow{proj_F \omega_j} \right\|^2 \text{ soit maximum}$$

Nous allons d'abord chercher le sous-espace à une dimension F_1 (qui sera une droite) tel que les distances entre les projections des points-observations mesurées sur cette droite soient le plus proche possible des distances définies plus haut, dans l'espace à p dimensions. Nous ne nous intéressons plus à la position du nuage, comme lors de l'analyse générale, mais aux proximités entre les divers points-observations X_{iv} . Soient X_{kv}, X_{lv} deux points-observations du nuage. Soient U_1, U_2, \dots, U_p les composantes d'un vecteur unitaire U porté par la droite cherchée F_1

$$proj_{F_1}(\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}}) = \overrightarrow{proj_{F_1}(\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}})} = \overrightarrow{proj_{F_1}(\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}})} = \overrightarrow{proj_{F_1}(\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}})}$$

$proj_{F_1}(\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}}) = (\overrightarrow{X_{lv}} - \overrightarrow{X_{kv}}) \cdot \vec{U} = {}^t U (X_{lv} - X_{kv})$ car proj est un opérateur linéaire



Axe factoriel

Si l'on veut que, en moyenne, les longueurs des projections soient maximum, de façon à ce que la déformation du nuage soit minimum, il faut donc qu'on ait :

$$\max_{\substack{k, l \\ {}^tUU=1}} \sum [{}^tU(X_{lv} - X_{kv})]^2$$

Or

$$[{}^tU(X_{lv} - X_{kv})]^2 = {}^tU(X_{kv} - X_{lv}) \quad {}^t(X_{kv} - X_{lv})U$$

Le problème se pose ainsi

$$\max_{{}^tUU=1} {}^tU \left[\sum_{k, l} (X_{kv} - X_{lv}) \quad {}^t(X_{kv} - X_{lv}) \right] U$$

La matrice $(p \times p)$ entre crochets est la matrice $2n^2\Sigma$, où Σ est la matrice des variances-covariances expérimentales des p variables. Soit :

$$\max_{{}^tUU=1} {}^tU\Sigma U$$

Ainsi, les composantes d'un vecteur U unitaire porté par la droite F_1 sur laquelle se projette le nuage en se déformant le moins possible maximisent ${}^tU\Sigma U$ (où Σ est la matrice des variances-covariances des variables 2 à 2) avec la contrainte ${}^tUU = 1$. Nous avons résolu ce problème à propos de l'analyse générale. Nous savons que U , qui s'appelle alors la première composante principale du nuage, est vecteur propre de Σ , et que la valeur propre correspondante λ est précisément le maximum de ${}^tU\Sigma U$, donc caractérise la dispersion des projections sur F_1 . Le k -ième vecteur propre sera la k -ième composante principale du nuage et correspondra à la k -ième valeur propre λ_k , celles-ci étant classées par ordre décroissante. Nous avons ainsi trouvé des axes factoriels qui ont la propriété d'extraire progressivement le plus d'informations possible concernant les proximités entre les points-observations de R^p . La qualité de cette information peut être mesurée par l'importance de la, ou des plus grandes valeurs propres, selon que l'on utilise un ou plusieurs facteurs pour la représentation.

Représentation des variables :

Dans R^n , nous avons p points-variables X_{01}, \dots, X_{0p} . Les variables peuvent être hétérogènes, et la plupart du temps, la première bissectrice sera un axe d'allongement évident du nuage des p points. On élimine cet axe de dispersion

peu intéressant en ce qui concerne les associations entre variables en projetant le nuage parallèlement à cette première bissectrice. C'est l'opération de centrage des variables. Cela revient à prémultiplier chaque vecteur par la matrice $(n \times n)$ K , de terme général $K_{ij} = \delta_{ij} - 1/n$.

Le nuage analysé est donc celui des vecteurs

$$R_{oi} = KX_{oi}.$$

Les coordonnées du i -ème point-variable R_{oi} sont :

$$\begin{aligned} R_{ji} &= X_{ji} - \bar{X}_i \\ \text{avec} \quad \bar{X}_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ji} \end{aligned}$$

Une fois effectuée la transformation : (dissymétrique par rapport aux indices i et j). L'analyse en composantes principales n'est donc plus d'un cas particulier de l'analyse générale. Si l'on appelle X la matrice à n lignes et p colonnes des données, K la matrice idempotente $(n \times n)$ de terme général $K_{ij} = \delta_{ij} - 1/n$, l'analyse en composantes principales du tableau $(n \times p)$ X (dont les p colonnes sont des vecteurs-observations de p variables) n'est autre que l'analyse générale du tableau

$$R = KX$$

Nous avons défini la composante principale U_k dans R^p comme le vecteur propre de

$$\Sigma = \frac{1}{n} {}^t R R \left(= \frac{1}{n} {}^t X K X \right)$$

correspondant à la k -ième valeur propre λ_k .

U_k est donc vecteur propre de ${}^t R R$ relatif à la valeur propre $n\lambda_k$.

La formule (37) devient :

$$V'_k = \frac{1}{\sqrt{n\lambda_k}} R U_k$$

k -ième composante principale dans R^n .

La i -ème composante de V'_k vaut :

$$V'_{ik} = \frac{1}{\sqrt{n\lambda_k}} {}^t R_{iv} U_k = \frac{1}{\sqrt{n\lambda_k}} \sum_l R_{il} U_{lk} = \frac{1}{\sqrt{n\lambda_k}} \sum_l (X_{il} - \bar{X}_l) U_{lk}$$

Remarque Cherchons le coefficient de corrélation ρ_{ik} pouvant exister entre la i -ème variable, dont les observations constituent le vecteur R_{oi} , et

la k -ième composante principale (c'est-à-dire les coordonnées des différents points du nuage des observations sur le k -ième axe F_k , qui sont les composantes du vecteur RU_k).

$$\varrho_{ik} = \frac{\text{cov}(R_{oi}, RU_k)}{\sqrt{\text{var}(R_{oi}) \text{var}(RU_k)}}$$

notons $V(R_{oi})$ par S_i^2

$$\text{var}(RU_k) = \frac{1}{n} {}^t U {}^t R R U_k = \lambda_k$$

$\text{cov}(R_{oi}, RU_k) = \frac{1}{n} {}^t R_{oi} R U_k$, qui est la i -ième composante de $\frac{1}{n} {}^t R R U_k = \lambda_k U_k$

Donc $\text{cov}(R_{oi}, RU_k) = \lambda_k U_{ik}$. Par suite :

$$\varrho_{ik} = \left(U_{ik} \sqrt{\lambda_k} \right) / S_i.$$

Lorsque les écarts-types S_1, \dots, S_p des différentes variables sont différents. Il est difficile

d'apprécier les contributions de ces variables à chacun des facteurs. Nous verrons au chapitre suivant comment l'analyse en composante normée élimine cet inconvénient.

1.4 Analyse en composantes principales normées

Nous avons rencontré deux difficultés, lors de la construction des nuages dans R^p et dans R^n . Dans R^p , nous avons vu que la distance entre deux observations R_{iv} et R_{jv} dépendait beaucoup du poids des composantes de ces vecteurs, c'est-à-dire des unités de mesure des variables. Dans R^n , même après la projection sur la première bissectrice, il subsiste des " anomalies inintéressantes " : la distance d'un point R_{ok} à l'origine est proportionnelle à l'écart-type de la k -ième variable. Si elle est très grande, le point correspondant ne marquera pas d'attirer à lui seul le premier axe factoriel. L'association entre le couple de variables $R_{oj}(\cdot)$ et $R_{ok}(\cdot)$ est caractérisé par le *cosinus* de l'angle des droites joignant l'origine aux points R_{oj} , R_{ok} , qui n'est autre que le coefficient de corrélation linéaire des deux variables

$R_{oj}(\cdot)$ et $R_{ok}(\cdot)$ correspondantes. Si nous voulons que le nuage des R_{oi} soit situé sur une sphère centrée à l'origine, afin que la distance entre deux points représente bien une corrélation, il faut diviser les composantes de chaque vecteur \vec{R}_{oi} par sa norme, ou, ce qui revient au même, prendre l'intersection du faisceau de vecteurs par la sphère de rayon unité. Le carré de la distance entre deux variables $R_{oj}(\cdot)$ et $R_{ok}(\cdot)$ vaut alors :

$$\left\| \vec{R}_{oj} - \vec{R}_{ok} \right\|^2 = 2(1 - \cos \alpha)$$

α étant l'angle des vecteurs \vec{R}_{oj} et \vec{R}_{ok} et $\cos \alpha$ étant le coefficient de corrélation linéaire des variables $X_{oj}(\cdot)$ et $X_{ok}(\cdot)$. Dans R^p comme dans R^n , la transformation à faire est donc maintenant :

$$R_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{\sqrt{V(X_j)}}$$

Si S désigne la matrice ($p \times p$) diagonale, dont le $j^{\text{ième}}$ élément diagonal vaut $S_j = \sqrt{V(X_j)}$ on peut énoncer :

Proposition L'analyse en composantes principales normée du tableau ($n \times p$) X est l'analyse générale du tableau

$$R = KXS^{-1} \text{ où } K_{ij} = \delta_{ij} - 1/n \text{ et } S_{ij} = \delta_{ij}S_j$$

.Dans ces conditions, la matrice

$$V = \frac{1}{n} {}^tRR$$

est la matrice des corrélations des p variables. Les coefficients de corrélation linéaire entre une variable et une composante sont proportionnels aux coordonnées du point-variable sur cette composante.

Preuve cf paragraphe précédent. La représentation la plus courante consistera à faire figurer les proximités entre points-observations sur un graphique-plan dont les axes sont les deux premiers axes factoriels. Si ceux-ci s'avèrent insuffisants pour résumer ces proximités, on adjoindra, sur un deuxième graphique les positions de ces points dans le système des troisième et quatrième axe factoriels etc... Notons que si l'on porte les p points-variables sur le même graphique que les n points-observations, on enrichit

considérablement sa lecture. En effet, au vu des coordonnées des points-variables, on a aussitôt une idée de la signification des facteurs, et l'on sait

quelles variables sont responsables de la proximité entre telle ou telle observation. On multiplie généralement les diverses coordonnées sur le k -ième axe factoriel par $\sqrt{\lambda_k}$, afin que les coordonnées des points -variables, qui deviennent

$q_{ik} = U_{ik}\sqrt{\lambda_k}$, s'interprètent aisément en termes de corrélations. Dans les cas où les observations sont trop nombreuses (cas de la plupart des enquêtes) pour donner lieu à des graphiques clairs, on ne représente que les centres de gravité de certains groupes d'observations, agrégés de différentes façons selon la nature du problème traité.

Chapitre 2

Analyse des correspondances

2.1 Analyse des correspondances binaires

L'analyse factorielle des correspondances est une généralisation de l'analyse en composantes principales adaptée au traitement de données qualitatives, se présentant sous la forme d'un tableau de contingence ou d'un tableau d'individus décrits par des caractères qualitatifs. Ce chapitre est consacré à l'analyse factorielle des correspondances d'un tableau de contingence ou analyse des correspondances binaires. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser l'analyse des correspondances binaires pour étudier un tableau individus \times variables lorsque les variables sont qualitatives. Cette méthode prend alors le nom d'analyse des correspondances multiples. L'analyse des correspondances binaires est destinée à extraire de l'information de certains tableaux de données particulières, appelés "tableaux de contingences".

Le tableau de contingence On appelle tableau de contingence tout tableau de nombres décimaux positifs ayant n lignes et p colonnes tel que pour chaque ligne la somme des nombres figurant dans cette ligne ait une signification concrète, et tel que, de même, pour chaque colonne la somme des nombres figurant dans cette colonne ait aussi une signification concrète. Un tableau de contingence est défini par la donnée de deux variables $X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ définies sur un ensemble Ω fini appelé "population"; si on note : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ les ensembles de modalités des variables $X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ respectivement, le tableau de contingence associé à (

$X(\cdot); Y(\cdot)$ est le tableau donnant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ le cardinal de l'ensemble suivant $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$ que l'on notera k_{ij} . On adoptera la présentation suivante :

TABLEAU DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		<i>J</i>					
		y_1	y_j	y_p	
<i>I</i>
	x_i	k_{ij}	.	..	$k_{i.}$

	$x_{n..}$
		$k_{.j}$					

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad k_{i.} = \sum_{j=1}^p k_{ij}$$

est l'effectif marginal de la ligne i et

$$\forall j \in \{1, \dots, p\} \quad k_{.j} = \sum_{i=1}^n k_{ij}$$

est l'effectif marginal de la colonne j .

$$k = \sum_{i=1}^n k_{i.} = \sum_{j=1}^p k_{.j} = \text{Card}(\Omega)$$

On peut traiter un tableau de contingence par la méthode de l'A.C.P. : pour cela on sera amené à considérer chacune des modalités d'une variable (par exemple $X(\cdot)$) comme des individus statistiques et chacune des modalités de l'autre variable (par exemple $Y(\cdot)$) comme une nouvelle variable quantitative : ainsi par exemple , l'individu x_i possédera alors , pour chacune des p nouvelles variables , une modalité qui est k_{ij} , pour $j = 1, \dots, p$. On se reportera aux chapitres précédents consacrés à l'A.C.P. pour savoir comment interpréter les résultats que l'on obtiendrait .Toutefois un tel traitement peut sembler un peu artificiel puisqu'il consiste à faire jouer un rôle de variable

statistique à des modalités qui, à priori, n'ont pas cette vocation. De plus le caractère particulier du tableau de contingence, à savoir le fait que les sommes en lignes et en colonnes ont une signification, n'est pas exploité. D'où l'idée de faire appel à une analyse spécifique pour ce type de tableau : ce sera l'analyse factorielle des correspondances, désignée désormais par les lettres A.F.C.

Analyse exploratoire du tableau de contingence L'analyse des correspondances est un outil graphique et algébrique permettant de mettre en évidence les écarts à l'indépendance dans le tableau étudié.

Le tableau des fréquences : Une première transformation des données consiste à passer du tableau des effectifs k_{ij} au tableau des fréquences $f_{ij} = \frac{k_{ij}}{k}$, dont les marges sont notées $f_{i.} = \frac{k_{i.}}{k}$ et $f_{.j} = \frac{k_{.j}}{k}$. Ces proportions sont des estimations, notées aussi $\widehat{\text{Pr ob}}(X = i)$ et $\widehat{\text{Pr ob}}(Y = j)$, des probabilités $\text{Pr ob}(X = i)$ et $\text{Pr ob}(Y = j)$.

TABLEAU DES FREQUENCES f_{ij} J

	.1.....	...	j	p	
...	
i	$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{k}$	
...	$\cdot f_{i.}$
I	
			$f_{.j}$	1

Le tableau des profils-lignes Pour comparer les lignes entre elles, nous construisons le tableau des profils-lignes :

$$f_j^i = \frac{k_{ij}}{k_{i.}} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}}$$

La quantité f_j^i représente une estimation, notée aussi $\widehat{\text{Pr ob}}(Y = j \mid X = i)$ de la probabilité conditionnelle $\text{Pr ob}(Y = j \mid X = i)$.

TABLEAU DES PROFILS-LIGNES

	J
.1.....	.	j	p

....
....
....	<i>i</i>	$f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_i}$ <i>f_i</i>
<i>I</i>
	.. <i>n</i>
		<i>f_{.j}</i> 1

Le tableau des profils-colonnes De même , pour comparer les colonnes , nous construisons le tableau des profils-colonnes

$f_i^j = \frac{k_{ij}}{k_{.j}} = \frac{f_{ij}}{f_j}$. La quantité f_i^j représente une estimation , notée $\widehat{Pr ob}(X = i | Y = j)$ de la probabilité conditionnelle $\widehat{Pr ob}(X = i | Y = j)$.

TABLEAU DES PROFILS-COLONNES

		<i>J</i>						
		.1..... .. <i>j</i> <i>p</i>						
....	
....	
..	<i>i</i>	$f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_j}$	
<i>I</i> <i>f_i</i>
	.. <i>n</i>	
		<i>f_{.j}</i> 1

Le tableau des attractions / répulsions . L' indice d 'attraction /répulsion défini par

$$d_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_i \cdot f_j}$$

joue un rôle central en analyse des correspondances . Si $d_{ij} > 1$, on dit que les modalités i et j s'attirent .Si au contraire , $d_{ij} < 1$, alors les modalités i et j se repoussent . Il y a enfin une parfaite indépendance entre les lignes et les colonnes si $d_{ij} = 1$.

Présentation de l'analyse des correspondances L'analyse des correspondances du tableau de contingence $[k_{ij}]$ comprend plusieurs étapes :

1/ Réaliser une analyse en composantes principales du tableau des profils-lignes, les modalités x_i formant les individus, et les modalités y_j formant les variables. Il s'agit d'une généralisation de l'analyse en composantes principales présentée aux chapitres précédents , car tous les individus n'ont plus le

même poids (le poids de l'individu x_i vaut sa fréquence marginale f_i .) et la distance utilisée pour mesurer la proximité entre deux individus n'est plus la distance usuelle, mais la distance du *Khi - deux* que nous présenterons.

2/ Réaliser une analyse en composantes principales du tableau des profils-colonnes, en prenant cette fois les modalités y_i comme individus et les modalités x_i comme variables . Les individus y_j ont des poids égaux aux fréquences marginales $f_{.j}$. La distance du *Khi - deux* mesure la distance entre les profils-colonnes.

3/ Etudier les liens entre les deux analyses en composantes principales. La symétrie entre l'analyse des profils-lignes et celle des profils-colonnes entraîne un grand nombre de relations entre les résultats des analyses essentielles à l'interprétation.

4/ Construire des graphiques mettant en évidence les proximités entre les profils-colonnes, et la nature de la liaison entre les lignes et les colonnes.

Nous allons développer ces différents points dans les paragraphes suivants.

a) Le nuage $N(I)$ des profils-lignes A chaque ligne du tableau des

profils-lignes, on associe le point $f_j^i = (f_1^i, \dots, f_j^i, \dots, f_p^i)$ d'un espace à p dimensions. La j -ième coordonnée $f_j^i = f_{ij}/f_i$ du profil-ligne f_j^i s'interprète comme une estimation de la probabilité qu'un individu possède la modalité y_j sachant qu'il possède la modalité x_i . Autrement dit f_j^i représente la loi de probabilité de Y sachant que $X = x_i$, estimée sur les données disponibles. Chaque profil-ligne f_j^i est formé de nombres positifs ou nuls sommant à un . Par conséquent, les profils-lignes f_j^i sont dans l'hyperplan de R^p d'équation

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 1.$$

Ils sont plus précisément dans le simplexe des lois de probabilité sur J :

$$\Pi(J) = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \sum_{j=1}^p x_j = 1, x_j \geq 0 \text{ pour tout } j \right\}$$

A chaque profil-ligne f_j^i on associe un poids égal à sa fréquence marginale f_i . On note $N(I)$ le nuage de points de R^p formé des profils-lignes pondérés (f_j^i, f_i) .

Le centre de gravité g_J du nuage $N(I)$ se calcule comme une moyenne

et la distance du *Khi - deux* $d(x, y)$ par :

$$d^2(x, y) = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{f_{.j}} \right) (x_j - y_j)^2.$$

L'expression "métrique du *Khi - deux*" recouvre ces deux définitions. On peut ainsi vérifier que la norme du profil -ligne marginal f_J vaut 1 :

$$\|f_J\|^2 = \langle f_J, f_J \rangle = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{f_{.j}} \right) f_{.j}^2 = 1$$

Le vecteur f_J est normé.

De plus les vecteurs $f_J^i - f_J$ et f_J sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \langle f_J^i - f_J, f_J \rangle &= \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{f_{.j}} \right) \left(\frac{f_{ij}}{f_{.i}} - f_{.j} \right) f_{.j} \\ &= \sum_{j=1}^p (f_{ij}/f_{.i}) - \sum_{j=1}^p f_{.j} \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Calculons l'inertie totale du nuage $N(I)$ en tenant compte du poids de chaque profil-ligne et de la distance du *Khi - deux* :

$$\begin{aligned} I(N(I), f_J) &= \sum_{i=1}^n f_{.i} d^2(f_J^i, f_J) = \sum_{i=1}^n f_{.i} \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{f_{.j}} \right) \left(\frac{f_{ij}}{f_{.i}} - f_{.j} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{(f_{ij} - f_{.i} \cdot f_{.j})^2}{f_{.i} \cdot f_{.j}} = \frac{\chi^2}{k} \end{aligned}$$

Ainsi, l'inertie totale $I(N(I), f_J)$ est une mesure de la liaison entre les variables qualitatives X et Y , indépendante de l'effectif total k du tableau de contingence étudié. Si l'inertie totale est nulle, cela signifie que les profils-lignes f_J^i sont confondus au point f_J : $f_{ij}/f_{.i} = f_{.j}$, soit $f_{ij} = f_{.i} \cdot f_{.j}$ pour tous couples (i, j) . Il y a indépendance parfaite entre les lignes et les colonnes.

L'analyse en composantes principales du nuage des profils-lignes

Etude de la première composante principale Le premier axe principal Δ_1 du nuage $N(I)$ des profils-lignes est la droite passant le mieux possible au milieu du nuage $N(I)$. Il est obtenu en résolvant :

$$\min_{\Delta_1} I(N(I), \Delta_1) = \min_{\Delta_1} \sum_{i=1}^n f_i \cdot d^2(f_J^i, P_{\Delta_1}(f_J^i))$$

où $P_{\Delta_1}(f_J^i)$ est la projection du profil-ligne f_J^i sur l'axe Δ_1 .

Proposition

Le premier axe principal Δ_1 passe par le centre de gravité f_J^i du nuage $N(I)$, et est parallèle à une direction u_1 . Le vecteur u_1 est vecteur propre normé (au sens de la métrique du *Khi-deux*) de la matrice A de terme général :

$$a_{jj'} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_i \sqrt{f_{.j} f_{.j'}}} - \sqrt{f_{.j} f_{.j'}}$$

associé à la valeur λ_1 .

Preuve cf annexe 1

Les facteurs cherchés vérifient l'équation :

$$Au = \lambda u$$

La géométrie du problème est visualisée dans la figure suivante. Le centre de gravité f_J est orthogonal au vecteur propre u_1 : hors du cas trivial $\lambda_1 = 0$ (qui correspond au cas où χ^2/k est nul), le vecteur u_1 peut s'écrire :

$$u_1 = \frac{1}{\lambda_1} Au_1 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j'=1}^p u_{1j'} A_{j'}$$

où

$$A_{j'} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij'}}{f_{.j'}} \right) (f_J^i - f_J)$$

est la j' -ième colonne de la matrice A . Nous en déduisons que le vecteur u_1 est combinaison linéaire des vecteurs $f_J^i - f_J$. Or nous

avons vu que f_J est orthogonal à tous les vecteurs $f_j^i - f_J$. D'où le résultat : .

La première composante principale F_1 est une nouvelle variable définie pour chaque i par :

$$\begin{aligned} F_1(i) &= \text{longueur algébrique du segment } [f_J, P_{\Delta_1}(f_j^i)] \\ &= \text{coordonnée de la projection } P_{\Delta_1}(f_j^i) \text{ sur l'axe } \Delta_1 \\ &= \langle f_j^i - f_J, u_1 \rangle \\ &= \langle f_j^i, u_1 \rangle \quad \text{puisque } \langle f_J, u_1 \rangle = 0 \\ &= \sum_{j=1}^p u_{1j} \frac{f_{ij}}{f_i \cdot f \cdot j} \end{aligned}$$

en prenant pour origine le centre de gravité f_J du nuage $N(I)$
La composante principale F_1 est centrée :

$$\sum_{i=1}^n f_i F_1(i) = 0$$

Sa variance est égale à la valeur propre λ_1 . Elle est aussi égale à l'inertie du nuage projeté :

$M_1(I) = \{P_{\Delta_1}(f_j^1), \dots, P_{\Delta_1}(f_j^n)\}$ par rapport à f_J :

$$\text{Var}(F_1) = \lambda_1 = \sum_{i=1}^n f_i F_1(i)^2 = \sum_{i=1}^n f_i d^2(f_J, P_{\Delta_1}(f_j^i)) = I(M_1(I), f_J)$$

La qualité de F_1 comme résumé des données est mesurée comme en analyse en composantes principales. On a toujours :

$$d^2(f_j^i, f_J) = d^2(f_j^i, P_{\Delta_1}(f_j^i)) + d^2(P_{\Delta_1}(f_j^i), f_J)$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^n d^2(f_j^i, f_J) = \sum_{i=1}^n d^2(f_j^i, P_{\Delta_1}(f_j^i)) + \sum_{i=1}^n d^2(P_{\Delta_1}(f_j^i), f_J)$$

soit : $I(N(I), f_J) = I(N(I), \Delta_1) + I(M_1(I), f_J)$.

L'inertie totale $I(N(I), f_J)$ du nuage $N(I)$ est égale à l'inertie ex-

pliquée $I(M_1(I), f_J)$ par Δ_1 plus l'inertie résiduelle $I(N(I), \Delta_1)$. La part d'inertie expliquée par Δ_1 vaut donc :

$$\text{Inertie expliquée par } \Delta_1 / \text{Inertie totale} = \frac{\lambda_1}{\chi^2/k}$$

Les contributions de chaque modalité x_i à la variance de F_1 sont calculées à partir de la formule de la variance :

$$\text{Var}(F_1) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot F_1(i)^2 = \lambda_1$$

On en déduit la contribution $CTR_1(i)$ de la modalité x_i à la variance de F_1 par la formule

$$CTR_1(i) = \frac{f_i \cdot F_1(i)^2}{\lambda_1}.$$

La somme de toutes les contributions $CTR_1(i)$ vaut 1. Un profil-ligne est d'autant plus important dans la construction de l'axe principal Δ_1 que sa contribution $CTR_1(i)$ est élevée.

L'interprétation de l'axe Δ_1 s'appuie en priorité sur les modalités x_i à fortes contributions.

On mesure la qualité de représentation du profil-ligne f_j^i sur l'axe Δ_1 par le *cosinus carré* de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{f_j f_j^i}$ et l'axe Δ_1 :

$$\begin{aligned} \cos_1^2(i) &= \cos^2(\overrightarrow{f_j f_j^i}, \Delta_1) \\ &= \frac{d^2(P_{\Delta_1}(f_j^i), f_j)}{d^2(f_j^i, f_j)} \\ &= \frac{F_1(i)^2}{d^2(f_j^i, f_j)} \end{aligned}$$

Comme les poids f_i n'interviennent pas dans la formule du *cosinus carré*, un point peut être très proche de l'axe Δ_1 sans contribuer forcément à sa construction. Il est néanmoins utile de prendre en compte tous les points bien représentés sur l'axe Δ_1 pour interpréter la première composante principale.

Etude des autres dimensions La procédure de construction de la première composante principale peut être reprise pratiquement à l'identique pour rechercher les autres dimensions du nuage $N(I)$ étudié. On recherche le deuxième axe principal Δ_2 orthogonal à Δ_1 passant le mieux possible au milieu du nuage $N(I)$, puis Δ_3 orthogonal à Δ_1 et Δ_2 vérifiant le

même critère, etc... Combien d'axes principaux orthogonaux est-il possible de construire avec cette méthode ? Le nombre r d'axes construits est au plus égal à $p - 1$ puisque le nuage $N(I)$ est contenu dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_p = 1$. Mais il est aussi au plus égal à $n - 1$, puisque n points engendrent un hyperplan de dimension au plus égale à $n - 1$. Nous en concluons que :

$$r \leq \text{Min}(n - 1, p - 1).$$

Plus précisément, r est égal au rang de la matrice A . cf chapitres précédents .

Proposition Les axes principaux $\Delta_1, \dots, \Delta_h, \dots, \Delta_r$ passent par le centre de gravité f_J du nuage $N(I)$, et sont parallèles aux vecteurs propres orthonormés $u_1, \dots, u_h, \dots, u_r$ de la matrice A associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \dots, \lambda_r$ rangées par ordre décroissant.

Proposition Les composantes principales $F_1, \dots, F_h, \dots, F_r$ sont les coordonnées des projections des profils-lignes f_J^i sur les axes principaux $\Delta_1, \dots, \Delta_h, \dots, \Delta_r$. Les valeurs $F_h(i)$ de la composante principale F_h sont données par la formule :

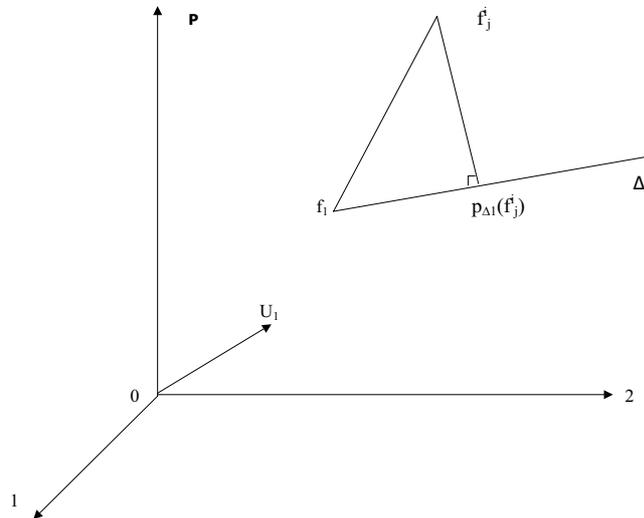
$$F_h(i) = \sum_{j=1}^p u_{hj} \frac{f_{ij}}{f_i \cdot f \cdot j} \quad (2.1)$$

Les composantes principales F_h représentent les coordonnées des profils-lignes f_J^i dans le nouveau repère $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ centré sur f_J .

D'où la formule :

$$f_J^i = f_J + \sum_{h=1}^r F_h(i) u_h \quad (2.2)$$

Ces résultats sont visualisés dans la figure suivante :



Première axe principal Δ_1 du nuage $N(I)$ des profils-lignes

Décomposition de l'inertie totale L'inertie expliquée par Δ_h , inertie du nuage projeté $M_h(I) = (\dots P\Delta_h(f_j^i) \dots)$ par rapport à f_j est égale à λ_h . Ces inerties sont cumulatives : l'inertie expliquée par $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$, inertie du nuage $N(I)$ projeté sur $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ par rapport à f_j est égale à $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$. L'inertie totale du nuage $N(I)$ se décompose en une inertie expliquée par $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ plus une inertie résiduelle, inertie du nuage par rapport à $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$. La part d'inertie expliquée par $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ vaut donc :

$$\text{Inertie expliquée par } (\Delta_1, \dots, \Delta_m) / \text{Inertie totale} = \lambda_1 + \dots + \lambda_m / \chi^2 / k.$$

Pour $m = r$, l'inertie expliquée est égale à l'inertie totale et on obtient par conséquent :

$$\chi^2 = k(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$$

, décomposition globale du χ^2 de contingence.

Contribution des modalités aux composantes principales Les contributions des modalités x_i à la composante principale F_h sont définies par :

$$Ctr_h(i) = \frac{f_i \cdot F_h^2(i)}{\lambda_h}$$

et vérifient

$$\sum_{i=1}^n CTR_h(i) = 1$$

Chaque axe Δ_h est expliqué en priorité par les modalités x_i à fortes contributions.

Qualité de représentation des profils-lignes sur les axes principaux Les qualités de représentation des profils f_j^i sur l'axe Δ_h sont mesurées par les *cosinus carrés* des angles entre les vecteurs $\overrightarrow{f_j f_j^i}$ et Δ_h :

$$\cos_h^2(i) = \cos^2(\overrightarrow{f_j f_j^i}, \Delta_h) = \frac{F_h(i)^2}{d^2(f_j^i, f_j)}$$

et vérifient

$$\sum_{h=1}^r \cos_h^2(i) = 1$$

Les modalités x_i bien représentées sur l'axe Δ_h sont également utilisées pour interpréter cet axe. La distance entre deux profils-lignes peut s'écrire en fonction des composantes principales F_h :

$$\begin{aligned} d^2(f_j^i, f_j^{i'}) &= \left\| \sum_{h=1}^r (F_h(i) - F_h(i')) u_h \right\|^2 \\ &= \sum_{h=1}^r (F_h(i) - F_h(i'))^2 \end{aligned}$$

On en déduit que deux modalités bien représentées et proches dans le plan (F_1, F_2) ont des profils voisins.

L'analyse en composantes principales du nuage $N(J)$ des profils-

colonnes Les définitions et les résultats de l'analyse du nuage $N(I)$ des profils-lignes se transposent immédiatement à l'analyse du nuage $N(J)$ des profils-colonnes.

Définition

A chaque colonne du tableau des profils-colonnes, on associe le point : $f_I^j = (f_1^j, \dots, f_i^j, \dots, f_n^j)$ d'un espace à n dimensions. La coordonnée $f_i^j = f_{ij}/f_{.j}$ représente une estimation de la probabilité qu'un individu possédant

la modalité y_j de la variable Y possède la modalité x_i de la variable X . Le vecteur f_I^j représente une estimation de la loi de probabilité de X sachant que $Y = y_j$. le poids du profil-colonne f_I^j est égal à la fréquence marginale $f_{.j}$. le nuage $N(J)$ des profils-colonnes est donc formé de l'ensemble des points pondérés $(f_I^j \cdot f_{.j})$ de R^n le centre de gravité de $N(J)$ est égal au profil -marginal f_I :

$$f_I = \sum_{j=1}^p f_{.j} f_I^j = (f_{1.}, \dots, f_{i.}, \dots, f_{n.})$$

la distance du *Khi - deux* est maintenant définie dans R^n en partant du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{f_{i.}} \right) x_i y_i$$

par

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{f_{i.}} \right) (x_i - y_i)^2$$

L'inertie totale du nuage $N(J)$ par rapport à son centre de gravité f_I reste égale à χ^2/k :

$$I(N(J), f_I) = \sum_{j=1}^p f_{.j} d^2(f_I^j \cdot f_{.j}) = \frac{\chi^2}{k}.$$

Proposition Les axes principaux $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ du nuage $N(J)$ passent par le centre de gravité f_I et sont parallèles aux vecteurs propres normés (au sens de la métrique du *khi - deux*) v_1, \dots, v_r de la matrice B de terme général :

$$b_{ii'} = \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij} \cdot f_{i'j}}{f_{.j} \sqrt{f_{i.} \cdot f_{i'.}}} - \sqrt{f_{i.} \cdot f_{i'.}}$$

associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ rangées par ordre décroissant. les matrices A et B ont en effet les mêmes valeurs propres nulles.

Proposition Les composantes principales G_1, \dots, G_r sont les coordonnées des profils-colonnes f_I^j dans le nouveau repère $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ d'origine f_I . la géométrie du problème est visualisée dans la figure suivante . Les composantes principales G_h sont définies par :

$$G_h(j) = \sum_{i=1}^n v_{hi} \frac{f_{ij}}{f_{i.} \cdot f_{.j}}$$

le profil-colonne peut s'exprimer dans le nouveau repère

$$f_I^j = f_I + \sum_{h=1}^r G_h(j)v_h$$

La distance entre deux profils-colonnes s'écrit :

$$d^2(f_I^j, f_I^{j'}) = \sum_{h=1}^r (G_h(j) - G_h(j'))^2$$

L'inertie expliquée par l'axe principal ε_h est égale à λ_h . La contribution de la modalité y_j à l'axe ε_h est définie par :

$$Ctr_h(j) = \frac{f_{.j} \cdot G_h^2(j)}{\lambda_h}$$

et la qualité de représentation de la modalité y_j sur l'axe ε_h par :

$$cos_h^2(j) = \frac{G_h(j)^2}{d^2(f_I^j, f_I)}$$

Dualité entre les facteurs sur I et les facteurs sur J

L'analyse d'un des nuages se déduit facilement de l'analyse de l'autre nuage. Il se trouve en effet que les composantes principales d'un nuage sont reliées aux directions des axes principaux de l'autre nuage :

$$F_h(i) = \sqrt{\lambda_h} \frac{v_{hi}}{f_{.i}} \quad (2.3)$$

$$G_h(j) = \sqrt{\lambda_h} \frac{u_{hj}}{f_{.j}} \quad (2.4)$$

Toute la richesse de l'analyse des correspondances provient des nombreux résultats découlant de la relation entre les analyses des nuages $N(I)$ et $N(J)$. Nous allons les présenter dans la suite de cette section.

Les relations de transition Des formules (2.1) et (2.4) nous déduisons :

$$F_h(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} \right) G_h(j) \quad (2.5)$$

$$G_h(j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{.j}} \right) F_h(i) \quad (2.6)$$

Ainsi , à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$ près , $F_h(i)$ est au barycentre des $G_h(j)$, le poids de $G_h(j)$ étant la j - ième coordonnée $f_{ij}/f_{i.}$ du profil-ligne f_j^i .De même , à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$ près , $G_h(j)$ est au barycentre des $F_h(i)$.

Proposition Les valeurs propres λ_h sont inférieures ou égales à 1.

Preuve Notons i_0 et j_0 les modalités maximisant $F_h(i)$ et $G_h(j)$.

Les équations (2.5) et (2.6) impliquent

$$\begin{aligned} F_h(i_0) &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} G_h(j_0) \\ G_h(j_0) &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} F_h(i_0) \end{aligned}$$

d'où

$$F_h(i_0) \leq \frac{1}{\lambda_h} F_h(i_0)$$

et par conséquent

$$\lambda_h \leq 1$$

Proposition La corrélation entre les composantes principales F_h et G_h est égale à $\sqrt{\lambda_h}$.

Preuve Les variables F_h et G_h étant centrées et de variance λ_h , la corrélation entre F_h et G_h s'écrit :

$$\text{cor}(F_h, G_h) = \frac{1}{\lambda_h} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_{ij} F_h(i) G_h(j)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p F_h(i) G_h(j) &= \sum_{i=1}^n f_{i.} F_h(i) \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} \right) G_h(j) \\ &= \sqrt{\lambda_h} \sum_{i=1}^n f_{i.} F_h(i)^2 = \lambda_h^{3/2} \end{aligned}$$

d'où la proposition énoncée ci-dessus.

Proposition La qualité de la représentation d'une modalité i sur l'axe Δ_h peut s'interpréter comme la corrélation carrée entre l'indice d'attraction / répulsion de la modalité i avec les modalités j de J et la composante principale G_h .

Preuve cf annexe 4

En transposant les notations, on obtiendra de même

$$\overline{\cos}_h^2(j) = \text{cor}^2(d_{Ij}, F_h)$$

La formule de reconstitution des données Utilisant (2.1), la j -ième coordonnée de f_j^i s'écrit :

$$\frac{f_{ij}}{f_i} = f_{.j} + \sum_{h=1}^r F_h(i) u_{hj}$$

Utilisant (2.4), il vient :

$$f_{ij} = f_i \cdot f_{.j} \left(1 + \sum_{h=1}^r \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \right) F_h(i) G_h(j) \right) \quad (2.7)$$

appelée formule de reconstitution des données.

De cette relation, nous déduisons la formule :

$$d_{ij} = 1 + \sum_{h=1}^r \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \right) F_h(i) G_h(j) \quad (2.8)$$

qui montre comment les valeurs $F_h(i)$ et $G_h(j)$ des composantes F_h et G_h traduisent l'écart à l'indépendance de la case (i, j) du tableau de contingence.

Représentations graphiques Les représentations graphiques standards

de l'analyse des correspondances consistent à superposer les cartes (F_1, F_2) et (G_1, G_2) , ou d'autres dimensions jugées intéressantes. Cette représentation est appelée "pseudo-barycentre" à cause des relations de dualité.

Etude de d ' un cas particulier Nous allons étudier dans cette section un cas limite qu ' il est important de pouvoir détecter dans la pratique : le tableau de contingence diagonal par blocs .Dans l 'annexe 1 , nous présenterons un autre cas particulier très intéressant : l 'effet de Guttman .

Le tableau de contingence diagonal par blocs

Considérons le cas limite d 'un tableau de contingence diagonal par blocs :

	J_1	J_2	\dots	J_q	
I_1		0	0	\dots	0
I_2	0	0			0
\dots	\dots	\dots			\dots
I_q	0	0	0	0	0

Il existe une partition de I en I_1, \dots, I_q et une partition de J en J_1, \dots, J_q telles que $k_{ij} = 0$ pour les couples (i, j) hors les blocs $I_l \times J_l$, $l = 1, \dots, q$. Nous notons $k_{I \times J}$ le tableau complet et $k_{I_l \times J_l}$ le sous-tableau correspondant au bloc $I_l \times J_l$. La somme de tous les k_{ij} du tableau $k_{I_l \times J_l}$ est notée k_l .

Proposition Le χ^2 du tableau $k_{I \times J}$ peut se décomposer en fonction des χ^2 (notés χ_l^2) des sous-tableaux $k_{I_l \times J_l}$.

$$\frac{\chi^2}{k} = q - 1 + \sum_{l=1}^q \left(\frac{\chi_l^2}{k_l} \right)$$

Preuve :cf annexe 3

Nous montrerons dans la proposition suivante comment l 'analyse des correspondances du tableau $k_{I \times J}$ détecte cette structure particulière .

Proposition L ' analyse des correspondances d 'un tableau de contingence $k_{I \times J}$ diagonal par blocs formés des q sous-tableaux $k_{I_l \times J_l}$ possède les propriétés suivantes :

α) Les $q - 1$ premières valeurs propres de l 'analyse des correspondances du tableau $k_{I \times J}$ sont toutes égales à 1 , et les $q - 1$ composantes principales associées F_{1m} et G_{1m} ont des valeurs constantes sur chaque bloc .

β) Les composantes principales F_{1m} et G_{1m} ont des valeurs égales sur les blocs correspondantes I_l et J_l .

γ) Les autres valeurs propres et composantes principales se déduisent des analyses des correspondances séparées de chacun des tableaux $k_{I_l \times J_l}$.

Preuve cf annexe 5

2.2 Analyse des correspondances multiples

L'analyse en composantes principales permet d'analyser un tableau individus \times variables lorsque les variables sont numériques . De la même manière , l'analyse des correspondances multiples permet l'analyse d'un tableau individus \times variables lorsque les variables sont nominales .Il consiste à effectuer une analyse des correspondances du tableau disjonctif complet , tableau obtenu en remplaçant dans le tableau d'origine chaque variable qualitative par l'ensemble des variables indicatrices des différentes modalités de cette variable .Nous montrerons que l'analyse en composantes principales et l'analyse des correspondances multiples se rejoignent au niveau de la recherche des composantes principales définies sur les individus .

Données et notations

Nous disposons de m variables qualitatives X_1, \dots, X_m observées sur n individus .La variable X_j

possède p_j modalités et $p = \sum_{j=1}^m p_j$ est le nombre total de modalités .La fréquence absolue observée de la modalité l de la variable X_j est notée n_{jl} .

Nous notons ensuite :

$x_{ijl} : x_{ijl} = 1$ si l'individu i prend la modalité l de la variable X_j , 0 sinon.

X_{jl} : variable indicatrice de la modalité l de la variable X_j .

$X_j : X_j = [X_{j1}, \dots, X_{jp_j}]$ tableau binaire associé à la variable x_j ,

$X : X = [X_1, \dots, X_m]$ tableau disjonctif complet associé aux variables du problème.

Ainsi le tableau s'écrit , avec ses marges :

$$X_j = (X_{j1}, \dots, X_{jl}, \dots, X_{jp_j})$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ n. \end{pmatrix}.$$

.....	
....	x_{ij1}	x_{ijl}	x_{ijp_j}	m l
....	
.....	
.....	n_{j1}	n_{jl}	n_{jp_l} $n \times m$

L'analyse des correspondances multiples des variables X_1, \dots, X_m est une analyse des correspondances du tableau disjointif complet X . En utilisant les mêmes notations que pour l'analyse factorielle des correspondances, il vient :

$$\begin{aligned} k &= m \times n \\ f_{ij\ell} &= x_{ij\ell} / mn \\ f_{i.} &= m / mn = 1/n \\ f_{.j\ell} &= n_{j\ell} / mn \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

Profil - ligne associé à l'individu i :

$$f_J^i = (\dots f_{ij\ell} / f_{i.}, \dots) = (\dots x_{ij\ell} / m \dots)$$

Profil - colonne associé à la modalité ℓ de la variable j :

$$f_I^{j\ell} = (\dots f_{ij\ell} / f_{.j\ell} \dots) = (\dots x_{ij\ell} / n_{j\ell} \dots)$$

Profil - ligne marginal :

$$f_J = (\dots f_{.j\ell} \dots) = (\dots n_{j\ell} / mn \dots)$$

Profil - colonne marginal :

$$f_I = (\dots f_{i.} \dots) = (\dots 1/n \dots)$$

Nuage des profils - lignes :

$N(I) =$ nuage des profils - lignes $(\dots f_J^i \dots)$ munis des poids $(\dots, f_{i.} = 1/n, \dots)$ et de la métrique du Khi-deux $(\dots 1/f_{.j\ell} = mn/n_{j\ell} \dots)$.

Nuage des profils - colonnes :

$N(J)$ = nuage des profils - colonnes $(\dots, f_I^{j\ell}, \dots)$ munis des poids $(\dots, f_{j\ell} = n_{j\ell}/nm, \dots)$ et de la métrique du Khi-Deux $(\dots, 1/f_{j\ell} = n, \dots)$. Nous allons étudier dans cette partie les simplifications des formules de l'analyse des correspondances d'un tableau de contingence lorsque cette méthode est appliquée à un tableau disjonctif complet.

Propriété du nuage $N(I)$ des profils - lignes Il est intéressant de calculer la distance d'un profil - ligne f_J^i au centre de gravité f_I :

$$\begin{aligned} d^2(f_J^i, f_I) &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} \frac{1}{(n_{j\ell}/nm)} \left(\frac{x_{ij\ell}}{m} - \frac{n_{j\ell}}{nm} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} \frac{x_{ij\ell}}{n_{j\ell}} \right) - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, plus un individu possède des modalités rares, plus il est loin du centre de gravité du nuage $N(I)$ des profils-lignes. L'inertie totale du nuage $N(I)$ vaut $(p/m) - 1$:

$$I(N(I), f_I) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d^2(f_J^i, f_I) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} \frac{x_{ij\ell}}{n_{j\ell}} - 1 = \frac{p}{m} - 1.$$

puisque $\sum_{i=1}^n x_{ij\ell} = n_{j\ell}$.

Les colonnes de chaque tableau X_j sommées à un vecteur formé de n un, les profils - lignes vérifient les m contraintes linéaires :

$$\sum_{i=1}^{p_j} x_{ij\ell}/m = 1/m, \quad j = 1, \dots, m.$$

Le nuage des profils - lignes se trouve donc dans un espace de dimension au plus égale à $p - m$. La dimension exacte r de ce nuage $N(I)$ est égale au rang de la matrice X moins un.

Propriétés du nuage $N(J)$ des profils - colonnes Le carré de la distance entre le profil - colonne $f_I^{j\ell}$ et le centre de gravité f_I du nuage $N(J)$ vaut $(n/n_{j\ell}) - 1$. On a en effet :

$$\begin{aligned} d^2(f_I^{j\ell}, f_I) &= \sum_{i=1}^n (1/f_i) ((f_{ij\ell} / f_{.j\ell}) - f_i)^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n ((x_{ij\ell} / n_{j\ell}) - (1/n))^2 \\ &= (n/n_{j\ell}) - 1 \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{i=1}^n x_{ij\ell} = \sum_{i=1}^n x_{ij\ell}^2 = n_{j\ell}$$

Ainsi, un profil - colonne $f_I^{j\ell}$ est d'autant plus éloigné du centre de gravité f_I que la fréquence $n_{j\ell}$ est faible. La contribution de la modalité $j\ell$ à l'inertie totale vaut $f_{.j\ell} \cdot d^2(f_I^{j\ell}, f_I) = \frac{1}{m} (1 - \frac{n_{j\ell}}{n})$. Une modalité a donc une contribution à l'inertie totale d'autant plus forte que sa fréquence est faible.

La contribution de la variable x_j , somme des contributions de chacune de ses modalités, vaut

$$\sum_{\ell=1}^{p_j} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{n_{j\ell}}{n}\right) = \frac{1}{m} (p_j - 1).$$

Une variable a une contribution d'autant plus forte que son nombre de modalités est élevé.

Nous déduisons de ces remarques que, dans la pratique, il est préférable d'utiliser des variables ayant approximativement le même nombre de modalités à fréquences plutôt équilibrées.

Enfin, on retrouve que l'inertie totale du nuage $N(J)$ vaut $(p/m) - 1$:

$$\begin{aligned} N(J(J), f_I) &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} f_{j\ell} d^2(f_I^{j\ell}, f_I) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} (1/m) \left(1 - \frac{n_{j\ell}}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m (1/m)(p_j - 1) \\
&= (p/m) - 1.
\end{aligned}$$

Les relations de transition

$$F_n(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} \left(\frac{f_{ij\ell}}{f_{i.}} \right) G_h(j\ell).$$

et

$$G_h(j\ell) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij\ell}}{f_{.j\ell}} \right) F_h(i)$$

deviennent ici :

$$F_h(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} x_{ij\ell} G_h(j\ell). \quad (2.1)$$

et

$$G_h(j\ell) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \cdot \frac{1}{n_{j\ell}} \sum_{i=1}^n x_{ij\ell} F_h(i). \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) signifie, qu'à $1/\sqrt{\lambda_h}$ près, $F_h(i)$ se trouve au barycentre des $G_h(j\ell)$ pour l'ensemble des modalités $j\ell$ caractérisant l'individu i .

De même l'équation (2.2) signifie, qu'à $1/\sqrt{\lambda_n}$ près, $G_h(j\ell)$ se trouve au barycentre des $F_h(i)$ pour l'ensemble des individus i possédant la modalité ℓ de la variable j .

Cosinus carrés des modalités La qualité de la représentation de la mo-

dalité $j\ell$ sur l'axe principal ε_h est mesuré par le cosinus carré de l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{f_I f_I^{j\ell}}$ et l'axe ε_h . Ce cosinus carré vaut :

$$\cos_h^2(j\ell) = \cos^2(\overrightarrow{f_I f_I^{j\ell}}, \varepsilon_h) = \frac{d^2(P\varepsilon_h(f_I^{j\ell}), f_I)}{d^2(f_I^{j\ell}, f_I)} = \frac{G_h^2(j\ell)}{\sum_{h=1}^r G_h^2(j\ell)} = \frac{G_h^2(j\ell)}{(n/n_{j\ell}) - 1}$$

L'indice d'attraction/répulsion $d_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{i.f.j}}$ devient ici $d_{ij\ell} = \frac{x_{ij\ell}/nm}{(l/n)(nj\ell/nm)} = \frac{x_{ij\ell}}{nj\ell/n}$. Il est d'autant plus élevé que l'individu i possède une modalité $j\ell$ rare. Pour une modalité $j\ell$ donnée, on a $d_{ij\ell} = \frac{n}{n_{j\ell}} X_{j\ell}$. De $\cos_h(j\ell) = \text{cor}(d_{I_{j\ell}}, F_h)$, on déduit donc que :

$$\cos_h(j\ell) = \frac{G_h(j\ell)}{\sqrt{(n/n_{j\ell}) - 1}} = \text{cor}(X_{j\ell}, F_h)$$

De la même manière qu'on construit le cercle des corrélations des variables en analyse en composantes principales, on peut représenter un cercle des corrélations des modalités en analyse des correspondances multiples.

Contributions des modalités La contribution $CTR_h(j\ell)$ de la modalité $j\ell$ à la composante principale G_h vaut :

$$CTR_h(j\ell) = \frac{f_{j\ell} G_h^2(j\ell)}{\lambda_h} = \frac{n_{j\ell} G_h^2(j\ell)}{nm \lambda_h}.$$

Il est intéressant de cumuler ces contributions au niveau des modalités de chaque variable x_j pour faire apparaître la contribution de la variable x_j à la composante principale G_h :

$$CTR_h(j) = \sum_{\ell=1}^{p_j} CTR_h(j\ell)$$

Pour mesurer la liaison entre chaque variable qualitative x_j et la composante principale F_h , on peut utiliser le rapport de corrélation $\eta^2(x_j, F_h)$ égal au coefficient de détermination

$R^2(F_h; X_{j1}, \dots, X_{jp_j})$ entre F_h et les variables indicatrices X_{j1}, \dots, X_{jp_j} des modalités de la variable x_j . Ce rapport de corrélation est aussi défini comme le rapport de la somme des carrés interclasses $\sum_{\ell=1}^{p_j} n_{j\ell} (\bar{F}_{hj\ell} - \bar{F}_h)^2$ à

la somme des carrés totale $\sum_{i=1}^n (F_h(i) - \bar{F}_h)^2$.

Mais ici $\bar{F}_{hj\ell} = \frac{1}{n_{j\ell}} \sum_{i=1}^n x_{ij\ell} F_h(i) = \sqrt{\lambda_h} G_h(j\ell)$ et $\bar{F}_h = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \eta^2(x_j, F_h) &= \frac{\sum_{\ell=1}^{p_j} n_{j\ell} \lambda_h G_h^2(j\ell)}{n \lambda_h} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p_j} \left(\frac{n_{j\ell}}{n} \right) G_h^2(j\ell) \end{aligned}$$

$$= m\lambda_h CTR_h(j).$$

Ainsi, pour j fixé, les coordonnées $G_h(j\ell)$ des modalités $j\ell$ sur l'axe ε_h sont de moyenne nulle et de variance $\eta^2(x_j, F_h)$. On peut aussi relier $\eta^2(x_j, F_h)$ aux corrélations de chaque variable indicatrice $X_{j\ell}$ avec F_h :

$$\begin{aligned} \eta^2(x_j, F_h) &= \sum_{\ell=1}^{p_j} \left(\frac{n_{j\ell}}{n} \right) \left(\frac{n}{n_{j\ell}} - 1 \right) \text{cor}^2(X_{j\ell}, F_h) \\ &= \sum_{\ell=1}^{p_j} \left(1 - \frac{n_{j\ell}}{n} \right) \text{cor}^2(X_{j\ell}, F_h). \end{aligned}$$

On retrouve enfin la valeur globale de la composante principale F_h comme résumé des variables x_1, \dots, x_m exprimée sous une autre forme :

$$\lambda_h = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta^2(x_j, F_h)$$

L'inertie expliquée par la composante principale F_h est égale à la moyenne de ses rapports de corrélation avec les différentes variables x_1, \dots, x_m .

Formules de reconstitution La formule de reconstitution des données de l'analyse des correspondances :

$$f_{ij} = f_i, f_j \left(1 + \sum_{h=1}^r \left(1/\sqrt{\lambda_h} \right) F_h(i)G_h(j) \right)$$

devient :

$$x_{ij\ell} = (n_{j\ell}/n) \left(1 + \sum_{h=1}^r \left(1/\sqrt{\lambda_h} \right) F_h(i)G_h(j\ell) \right). \quad (2.3)$$

L'écart entre la "probabilité" $x_{ij\ell}$ que l'individu i possède la modalité $j\ell$ et la probabilité $(n_{j\ell}/n)$ de posséder la modalité $j\ell$ s'exprime ainsi en fonction des composantes principales.

En utilisant le fait que les composantes principales sont centrées, de variance λ_h et non corrélées entre elle, on peut déduire de (50) deux autres formules de décomposition :

· La fréquence d'association $n_{j\ell j'\ell'} = \sum_{i=1}^n x_{ij\ell} x_{ij'\ell'}$ entre les modalités $j\ell$ et $j'\ell'$ se décompose en fonction des composantes principales G_h :

$$n_{j\ell j'\ell'} = \frac{n_{j\ell} \times n_{j'\ell'}}{n} \left(1 + \sum_{h=1}^r G_h(j\ell)G_h(j'\ell') \right).$$

L'indice d'attraction/répulsion $d_{j\ell j'\ell'} = \frac{n_{j\ell j'\ell'}}{(n_{j\ell} \times n_{j'\ell'} / n)}$ entre les modalités $j\ell$ et $j'\ell'$ s'exprime ainsi en fonction des composantes principales G_h .

· On peut définir la proximité entre deux individus i et i' par la formule :

$$p_{ii'} = \frac{n}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_j} \left(\frac{1}{n_{j\ell}} \right) x_{ij\ell} x_{i'j\ell}.$$

La possession commune d'une modalité rare compte plus que celle d'une modalité fréquente dans le calcul de $p_{ii'}$.

Cette proximité peut se décomposer en fonction des composantes principales F_h :

$$p_{ii'} = 1 + \sum_{h=1}^r F_h(i) F_h(i'). \quad ((51))$$

La moyenne de toutes les proximités $p_{ii'}$ vaut donc 1.

Représentations graphiques On construit la carte des individus et des modalités à l'aide des points-individus $A_i = (F_1(i), F_2(i))$ et des points-modalités $B_{j\ell} = (G_1(j\ell), G_2(j\ell))$ dans le premier plan principal, mais on peut évidemment s'intéresser à d'autres dimensions.

Chapitre 3

Pratique de l'ACP

3.1 Problématique 1 Comparaison des trente et une dernières années touristiques du Sénégal

Nous étudions l'évolution du tourisme au Sénégal entre 1973 et 2003 à l'aide des données de l'enquête sur le tourisme au Sénégal réalisée par le ministère du tourisme .

Tableau des données de base (voir annexe 6)

3.1.1 Valeurs propres de la matrice des corrélations

	Variance totale expliquée			Valeurs propres initiales	Extraction	Sommes des carrés des facteurs retenus		
Composante	Total	% de la variance	==	% cumulés	Total	% de la variance	==	% cumulés
1	10,047	77,285	77,285	10,047	77,285	77,285		
2	1,346	10,355	87,640	1,346	10,355	87,640		
3	,699	5,380	93,021					
4	,506	3,892	96,913					
5	,156	1,201	98,114					
6	,109	,837	98,951					
7	8,818E-02	,678	99,629					
8	2,656E-02	,204	99,833					
9	1,136E-02	8,735E-02	99,921					
10	5,229E-03	4,022E-02	99,961					

11 2,837E-03 2,183E-02 99,983
 12 1,236E-03 9,504E-03 99,992
 13 1,027E-03 7,904E-03 100,000

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

On sait que la somme des valeurs propres est égale à $p = \text{nombre de variables}$. Dans le cas d'un nuage sans direction principale d'allongement (sphère), toutes les valeurs propres seraient égales à l'unité. Ce cas limite permet de considérer comme axe -à-priori à étudier ceux dont les valeurs propres sont supérieures à 1 puisque la somme des valeurs propres est égale à p . Dans le cas présent, on considérera donc deux axes à étudier.

3.1.2 Matrice des corrélations des variables

Matrice de corrélation

NBRC CAPC CAPL ARNR ARRE ARGL ARCR NUNR NURE NUGL
 TOCP DSEJ RECB

Corrélation NBRC 1,000 ,983 ,981 ,826 ,741 ,790 -,481 ,787 ,790 ,790 -,687
 -,676 ,937

CAPC ,983 1,000 ,998 ,847 ,764 ,802 -,544 ,804 ,819 ,812 -,769 -,751 ,924

CAPL ,981 ,998 1,000 ,849 ,766 ,801 -,561 ,813 ,823 ,822 -,768 -,746 ,928

ARNR ,826 ,847 ,849 1,000 ,868 ,949 -,399 ,980 ,917 ,979 -,467 -,641 ,916

ARRE ,741 ,764 ,766 ,868 1,000 ,934 -,469 ,841 ,891 ,854 -,550 -,692 ,778

ARGL ,790 ,802 ,801 ,949 ,934 1,000 -,308 ,908 ,846 ,906 -,461 -,679 ,883

ARCR -,481 -,544 -,561 -,399 -,469 -,308 1,000 -,448 -,573 -,475 ,637 ,464
 -,343

NUNR ,787 ,804 ,813 ,980 ,841 ,908 -,448 1,000 ,915 ,997 -,409 -,539 ,883

NURE ,790 ,819 ,823 ,917 ,891 ,846 -,573 ,915 1,000 ,926 -,543 -,635 ,814

NUGL ,790 ,812 ,822 ,979 ,854 ,906 -,475 ,997 ,926 1,000 -,434 -,553 ,883

TOCP -,687 -,769 -,768 -,467 -,550 -,461 ,637 -,409 -,543 -,434 1,000 ,813
 -,536

DSEJ -,676 -,751 -,746 -,641 -,692 -,679 ,464 -,539 -,635 -,553 ,813 1,000
 -,634

RECB ,937 ,924 ,928 ,916 ,778 ,883 -,343 ,883 ,814 ,883 -,536 -,634 1,000

a Déterminant = 4,072E-17

3.1.3 Calcul des coordonnées factorielles des points variables

j de $N(J)$

On pose $G_{\alpha j} = \rho_{\alpha j}$ = coefficient de corrélation entre l'axe et la variable j . Les résultats sont donnés à l'annexe 3.

3.1.4 Règles d'interprétation des axes factorielles par les points variables

j de $N(J)$

La composante principale u_α est sous la dépendance des variables j de $N(J)$ qui sont le plus corrélées avec lui. (par définition, puisque les coordonnées se présentent comme des coefficients de corrélation).

Matrice des composantes Composante

12345 CAPL ,956 -,166 ,135 ,196 1,339E-02

CAPC ,953 -,167 ,157 ,187 2,074E-02

ARNR ,949 ,280 -2,421E-02 -3,209E-02 -,116

RECB ,934 ,159 ,211 ,185 -1,258E-02

NUGL ,930 ,293 -,173 3,358E-02 -9,952E-02

NURE ,927 ,116 -,234 -6,454E-02 2,090E-02

NBRC ,926 -9,550E-02 ,199 ,267 ,101

NUNR ,921 ,321 -,156 4,398E-02 -,112

ARGL ,917 ,284 8,288E-02 -,209 7,244E-02

ARRE ,898 ,125 -,103 -,312 ,261

DSEJ -,765 ,392 -,223 ,399 ,186

TOCP -,688 ,675 -,112 7,664E-02 -2,611E-02

ARCR -,562 ,520 ,619 -,111 7,431E-03

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

a 5 composantes extraites.

o Interprétation du premier axe factoriel ($\tau_1 = 77,289$; $\lambda_1 = 10,047$).

Le premier axe caractérise une opposition entre les paramètres : CAPL, CAPC, ARNN, RECB d'une part et DSEJ, TOCP, ARCR d'autre part; c'est une opposition de codage des données dans la mesure où quand la durée de séjour et le taux d'occupation (DSEJ et TOCP) diminuent les variables capacité en lits et capacité en chambres augmentent (CAPL, CAPC). Le premier facteur est donc un facteur de paramètre touristique général caractérisé par la position de CAPL (capacité en lits).

o Interprétation du deuxième axe factoriel ($\tau_2 = 10,355$; $\lambda_2 = 1,346$)

D'importance sept fois moindre que le premier, il nuance le paramètre global touristique en introduisant une dimension qui ne suit pas le même sens de variation des variables. Ainsi, voit-on une opposition entre les variables DSEJ (durée de séjour) (0,675) et ARCR (arrivées croisières) (0,520) d'une part et les variables CAPL (capacité en lits) (-0,166) et CAPC

(capacité en chambres)(-0,167) , d'autre part .Par cet axe , on introduit ce qu'on peut appeler un facteur de paramètre touristique de deuxième espèce (non corrélé avec le premier).Ceci montre que les paramètres touristiques ne sont pas réductibles au paramètre global touristique de CAPL (capacité en lits) qui , synthétique , ne prend pas en compte toutes les dimensions du problème .

○ Interprétation du plan factoriel composé des deux premiers axes ($\tau_1 + \tau_2 = 87,640$)

Ce plan représente 87,640% de la variance expliquée .Le paramètre touristique semble bien représenté par ces deux premiers axes factoriels .Il aurait été imprudent de ne considérer qu 'un axe factoriel (77,289%) pour caractériser les paramètres touristiques .

3.1.5 Calcul des coordonnées factorielles des points individus

i de $N(I)$

Les points individus ont pour coordonnée $F_\alpha(i) = \lambda^{1/2}v_{\alpha i}$.Les résultats sont donnés à l ' annexe 4.

Qualité de représentation

Initial Extraction

NBRC 1,000 ,866

CAPC 1,000 ,935

CAPL 1,000 ,941

ARNR 1,000 ,980

ARRE 1,000 ,821

ARGL 1,000 ,922

ARCR 1,000 ,586

NUNR 1,000 ,952

NURE 1,000 ,874

NUGL 1,000 ,950

TOCP 1,000 ,930

DSEJ 1,000 ,739

RECB 1,000 ,898

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

3.1.6 Règles d 'interprétation des axes factoriels pour les points individus

i de $N(I)$

Comme on doit expliquer la variance de l'axe λ_α , on est conduit à chercher les points de $N(I)$

qui sont responsables de cette variance. Les points i de $N(I)$ explicatifs de la variance sont ceux qui sont les plus extrêmes et dont la contribution relative $ctr_\alpha(i)$ est supérieure à la moyenne des contributions au moins.

On rangera donc les points explicatifs en 2 catégories; les uns de

contribution forte avec une coordonnée négative, les autres de contribution forte avec une coordonnée positive.

· Interprétation du premier axe factoriel ($\tau_1 = 77,289$; $\lambda_1 = 10,047$)

Points i explicatifs à coordonnées négatives

Points i explicatifs à coordonnées positives

Ces années (ou points individus i de $N(I)$) sont des dates remarquables dans l'évolution du paramètre global du tourisme sénégalais.

· Interprétation du deuxième axe factoriel ($\tau_2 = 10,355$; $\lambda_2 = 1,346$)

Points i explicatifs à coordonnées négatives

Points i explicatifs à coordonnées positives

Ces années sont celles concernées par le deuxième facteur qui définit le paramètre touristique de deuxième espèce, celui lié à TOCP et ARCR.

3.1.7 Règles d'interprétation conjointe des axes factoriels par les points individus

i de $N(I)$ et j de $N(J)$.

On réunit naturellement les informations recueillies sur l'analyse des

facteurs pour l'ensemble I et l'ensemble J ; ce qui fournit la synthèse suivante :

· Premier axe factoriel ($\tau_1 = 77,289$; $\lambda_1 = 10,047$)

Coordonnée négative Coordonnée positive

Points j de $N(J)$ Points j de $N(J)$

Points i de $N(I)$ Points i de $N(I)$

· Deuxième axe factoriel ($\tau_2 = 10,355$; $\lambda_2 = 1,346$)

Coordonnée négative	Coordonnée positive
Points j de $N(J)$	Points j de $N(J)$

Points i de $N(I)$	Points i de $N(I)$
----------------------	----------------------

C'est ce tableau synthétique qui permet d'extraire les éléments les plus significatifs de l'analyse .

3.1.8 Qualité d'explication

Pour achever l'analyse, sur le plan numérique, il reste à étudier la qualité globale d'explication des axes factoriels , et la qualité d'explication des axes factoriels par les points individus et les points variables . La qualité globale d'explication est donnée par la somme des pourcentages de variance des s axes considérés comme interprétables :

$$IQG(F_s) = \frac{\sum_{i=1}^s \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} = \sum_{i=1}^s \tau_i$$

s est le nombre d'axes factoriels retenus.

Dans l'exemple sur l'évolution des paramètres touristiques au Sénégal on a :

$$IQG(F_1) = 77,289 \% ; IQG(F_2) = 87,640\%$$

Pour chaque élément i de $N(I)$ et j de $N(J)$, on peut mesurer sa qualité de représentation dans l'espace factoriel considéré comme significatif .On aura alors

$$q_{lt_s}(i) = \sum_{\alpha=1}^s cor_{\alpha}^2(i)$$

$$q_{lt_s}(j) = \sum_{\alpha=1}^s cor_{\alpha}^2(j)$$

Dans l'étude de l'évolution des paramètres touristiques , on aura deux factoriels :

Qualités d'explication des points j de $N(J)$ par ordre décroissant	
ARNR (0,980)	RECB (0,898)
NUNR (0,952)	NURE (0,874)
NUGL (0,950)	NBRC (0,866)
CAPL (0,941)	ARRE (0,821)
CAPC (0,935)	DESJ (0,739)
TOCP (0,930)	ARCR (0,586)
ARGL (0,922)	

Qualité d'explication des points i de $N(I)$ par ordre décroissant
annee 2002 (0,989)
annee 1994 (0,969)
annee 2000 (0,978)
annee 2001(0,964)
annee 1975 (0,956)
annee 1974 (0,939)
annee 1977(0,934)

On notera que certains points i de $N(I)$ ou j de $N(J)$ ont une faiblesse de qualité d'explication par rapport au plan factoriel

constitué des deux premiers axes (ARCR pour les variables , année 1983 , année 1990 pour

les individus). Dans ce cas , cela suggère d'aller plus avant dans l'interprétation des axes factoriels et d'étudier s'il existe des explications au-delà des deux premiers facteurs estimés a priori explicatifs .

Interprétation possible du 3^{ème} axe factoriel $\lambda_3 = 0,699$; $\tau_3 = 5,380$ %

Points variables à coordonnées négatives	Points variables à coordonnées positives
.....
.....
.....

Points individus à coordonnées négatives	Points individus à coordonnées positives
.....
.....
.....
.....

Donc , l'étude de la qualité d'explication permet d'affiner l'analyse en cherchant plus avant des effets " locaux " .

3.1.9 Représentations graphiques

Représentation graphique associée aux points j de $N(J)$

Comme les coordonnées factorielles sont assimilables à un coefficient de corrélation, on peut les représenter dans le système d'axes factoriels par rapport à une sphère de rayon unité (un cercle s'il s'agit d'un plan factoriel). On représentera donc successivement les plans factoriels significatifs ; dans l'exemple donné à la figure suivante, on a considéré le plan factoriel constitué des deux axes jugés explicatifs.

Représentation des points variables j de $N(J)$ dans l'espace factoriel
(1,2)

Représentation graphique associée aux points i de $N(I)$

Les points individus sont représentés dans l'espace factoriel jugé explicatif. Comme pour les points variables, on procède par projection sur des plans factoriels. Les coordonnées ont pour valeur $F_\alpha(i) = \sqrt{\lambda_\alpha} \cdot v_{\alpha i}$. Dans l'exemple donné à la figure, on a considéré le plan factoriel constitué des 2 axes jugés explicatifs.

Représentation des points individus i de $N(I)$ dans factoriel (1,2)

Représentation simultanée des individus i de $N(I)$ et des variables j de $N(J)$

Par un certain artifice, on peut projeter les ensembles $N(I)$ et $N(J)$ selon le même système d'axes factoriels associés aux deux nuages. Il faut cependant prendre certaines précautions. Les proximités apparentes sur les

graphiques n'ont pas de définition mathématique précise . Les deux ensembles de points ne sont reliés que par l'intermédiaire des axes factoriels .Malgré cela , la représentation simultanée des deux ensembles sur un même graphique a une utilité essentielle : résumer l'ensemble des informations dans un cadre unique .On donne à la figure une telle représentation issue des deux figures précédentes .

Représentation simultanée des individus i de $N(I)$ (en bleu) et des variables j de $N(J)$ (en rouge) dans l'espace factoriel (1,2)

3.2 Etude socio-économique des ménages sénégalais

Nous comparons les branches d'activités et tranches de revenus des chefs de ménages sénégalais et essayons de dégager des typologies (regroupements, oppositions, tendances,).

Cette étude est faite à partir de l'enquête sénégalaise auprès des ménages réalisée par la direction de la statistique et de la prévision (Ministère de l'économie et des finances) en 1994. (voir annexe 7)

Conclusion

L'analyse en composantes principales est une puissante technique d'analyse de données multidimensionnelles. Cette méthode ainsi que celles apparentées sont fondées sur une justification de type linéaire. Dans le cas où les données ne sont pas linéaires, il est nécessaire de recourir à des méthodes plus élaborées, basées sur une approche non linéaire. Leurs applications donnent d'excellents résultats ouvrant ainsi un vaste champ de recherche sur une analyse s'appuyant sur des données fonctionnelles.

Annexe 1

Preuve

On se ramène au cadre de l'analyse en composantes principales en modifiant l'échelle des axes : la distance du χ^2 est ramenée à la distance euclidienne de cette façon.

$$d^2(x_i, x_{i'}) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_{..j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.}} \right)^2 = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.} \sqrt{f_{..j}}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.} \sqrt{f_{..j}}} \right)^2$$

On est donc ramené à une analyse simple en prenant comme coordonnées des points du nuage les quantités :

$$\frac{f_{ij}}{f_{i.} \sqrt{f_{..j}}}$$

Puisque nous nous intéressons à la forme ce nuage , et non à sa position par rapport à l'origine .Sans nuire à la généralité , nous translatons son centre de gravité à l'origine. Le terme a_{ij} , de la matrice des covariances A s'écrit en faisant intervenir les poids $f_{i.}$, qui sont fréquences marginales de chaque point ligne i .

$$a_{jj'} = \sum_{i=1}^n f_{i.} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.} \sqrt{f_{..j}}} - \sqrt{f_{..j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i.} \sqrt{f_{..j'}}} - \sqrt{f_{..j'}} \right)$$

En effet , la j -ième composante du point moyen (centre de gravité) s'écrit :

$$m_j = \sum_{i=1}^n f_{i.} \frac{f_{ij}}{f_{i.} \sqrt{f_{..j}}} = \frac{f_{.j}}{\sqrt{f_{..j}}} = \sqrt{f_{..j}}$$

En posant :

$$r_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i.} f_{.j}}{\sqrt{f_{i.} f_{.j}}}$$

terme général d'une matrice R ($n \times p$) , et l'on a la relation

$$A = {}^t R R$$

La permutation des indices i et j ne fait que transposer la matrice R , par conséquent l'analyse dans R^n du nuage des p points nous conduira à diagonaliser la matrice $R^t R$, qui on le sait, a les mêmes valeurs propres que A , et dont les vecteurs propres sont liés par une relation simple à ceux de A . En utilisant la relation de décomposition classique de la covariance :

$$a_{jj'} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} \cdot f_{ij'}}{f_{i.} \sqrt{f_{.j} \cdot f_{.j'}}} - \sqrt{f_{.j} \cdot f_{.j'}}$$

Annexe 2

L 'effet Guttman

On suppose que les deux variables qualitatives à l 'origine du tableau de contingence étudié proviennent d 'un découpage en classes de deux variables X et Y , suivent une loi normale à deux dimensions .

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$, et si la corrélation entre X et Y est égale à ρ , alors la densité de probabilité d 'une loi normale à deux dimensions s 'écrit :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}$$

Cette densité de probabilité peut aussi s ' écrire (identité de Mehler) :

$$f(x, y) = f(x)f(y) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} H_n(x) H_n(y) \right] \quad (3.1)$$

où $f(x)$ et $f(y)$ sont les densités de probabilité marginales de X et Y , $H_n(x)$ et $H_n(y)$ les polynômes de Hermite.

Les polynômes de Hermite sont définis par :

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j n! x^{n-2j}}{(n-2j)! 2^j} \text{ avec } [n/2] \text{ partie entière de } n/2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ &\text{ect...} \end{aligned}$$

Propriétés

$$\begin{aligned}\frac{d[H_n(x)]}{dx} &= nH_{n-1}(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx &= 0 \quad m \neq n \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx &= 1\end{aligned}$$

Ainsi les variables aleatoires $H_n(U)$, où U suivant une loi normale réduite, sont centrées-réduites et non corrélées. Si l'on considère maintenant des découpages en classes de X et Y , observées sur k individus, conduisant à un tableau de contingence, et si l'on écrit la formule de reconstitution des données sous la forme :

$$f_{ij} = f_{i.} \cdot f_{.j} \left(1 + \sum_{h=1}^r \sqrt{\lambda_h} F_h^*(i) G_h^*(j) \right) \quad (3.2)$$

où $F_h^* = F_h / \sqrt{\lambda_h}$ et $G_h^* = G_h / \sqrt{\lambda_h}$ représentent les composantes principales réduites, .

Lancaster (1957) a montré la convergence des termes de la décomposition (2.2) vers ceux de (2.1) lorsque le nombre d'individus et de classes s'accroît :

$$\begin{aligned}\lambda_h &\longrightarrow \rho^{2h} \\ F_h^* &\longrightarrow \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}} \\ G_h^* &\longrightarrow \frac{H_n(y)}{\sqrt{n!}} \\ \text{Trace}(A) &= \frac{\chi^2}{k} = \sum_{h=1}^r \lambda_h \longrightarrow \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}\end{aligned}$$

Ainsi, pour k et r suffisamment grands :

$$\frac{\chi^2}{k} \approx \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \approx \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

et

$$\rho^2 \approx \frac{\chi^2}{k + \chi^2}$$

Les résultats de l'analyse des correspondances d'un tableau de contingence issu d'un découpage en classes de deux variables aléatoires X et Y suivant une loi normale à deux dimensions, ont donc une structure tout à fait particulière.

Valeurs propres et composantes principales réduites :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \rho^2, & F_1^* &\approx H_1(x) = x \\ \lambda_2 &= \rho^2, & F_2^* &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1^{*2} - 1) \\ \lambda_3 &= \rho^6, & F_3^* &\approx \frac{1}{\sqrt{6}}H_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x^3 - 3x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_1^{*3} - 3F_1^*) \\ && &etc.....\end{aligned}$$

Composantes principales :

$$\begin{aligned}F_1 &= \rho F_1^* \\ F_2 &= \rho^2 F_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1^2 - \rho^2) \\ F_3 &= \rho^3 F_3^* = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_1^3 - 3\rho^2 F_1) \\ &etc.....\end{aligned}$$

Les résultats sont analogues pour les composantes principales G_1, \dots, G_r .

Annexe 3

Preuve

On a :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{\left(k_{ij} - \frac{k_i \cdot k_j}{k}\right)^2}{\frac{k_i \cdot k_j}{k}} = k \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{k_{ij}^2}{k_i \cdot k_j} - 1 \right]$$

D ' où :

$$\frac{\chi^2}{k} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{k_{ij}^2}{k_i \cdot k_j} - 1$$

De même :

$$\frac{\chi_l^2}{k_l} = \sum_{i \in I_l} \sum_{j \in J_l} \frac{k_{ij}^2}{k_i \cdot k_j} - 1 \quad , \quad l = 1, \dots, q$$

Comme $k_{ij} = 0$ pour (i, j) n'appartenant pas à $I_l \times J_l$, $l = 1, \dots, q$, on a bien :

$$\frac{\chi^2}{k} = \sum_{l=1}^q \left(\frac{\chi_l^2}{k_l} + 1 \right) - 1 = \sum_{l=1}^q \left(\frac{\chi_l^2}{k_l} \right) + q - 1$$

Annexe 4

Preuve

Notons d_{iJ} la variable prenant, pour i fixé, les valeurs d_{ij} sur l'ensemble J . Montrons que :

$$\cos_h^2(i) = \text{cor}^2(d_{iJ}, G_h)$$

$$\overline{d_{iJ}} = \sum_{j=1}^p f_{.j} d_{ij} = \sum_{j=1}^p f_{.j} \frac{f_{ij}}{f_{i.} f_{.j}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(d_{iJ}) &= \sum_{j=1}^p f_{.j} (d_{ij} - 1)^2 = \sum_{j=1}^p f_{.j} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.} f_{.j}} - 1 \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_{.j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - f_{.j} \right)^2 = d^2(f_J^i, f_J) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(d_{iJ}, G_h) &= \sum_{j=1}^p f_{.j} (d_{ij} - 1) G_h(j) \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i.}} G_h(j) = \sqrt{\lambda_h} F_h(i) \end{aligned}$$

$$\text{cor}(d_{iJ}, G_h) = \frac{\sqrt{\lambda_h} F_h(i)}{d(f_J^i, f_J) \sqrt{\lambda_h}} = \frac{F_h(i)}{d(f_J^i, f_J)}$$

d'où

$$\text{cor}^2(d_{iJ}, G_h) = \frac{F_h(i)}{d^2(f_J^i, f_J)} = \cos_h^2(i)$$

Annexe 5

Preuve

Les relations de transition (42) et (43) permettent un calcul direct des composantes principales . Intégrant (43) dans (42) , il vient :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i'=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \cdot \frac{f_{i'j}}{f_{.j}} F_h(i') = \lambda_h F_h(i)$$

Ainsi , F_h est vecteur propre de la matrice C de terme général :

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij} \cdot f_{i'j}}{f_{i.} \cdot f_{.j}}$$

associé à la valeur propre λ_h .Le vecteur F_0 formé de n un est un vecteur propre de C associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$:

$$\sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij} \cdot f_{i'j}}{f_{i.} \cdot f_{.j}} = 1, \text{ pour chaque } i$$

La trace de C étant égale à :

$$\sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}^2}{f_{i.} \cdot f_{.j}} = \frac{\chi^2}{k} + 1$$

On obtient bien toutes les composantes principales F_h en prenant tous les vecteurs propres de C différents du vecteur propre "trivial" F_0 associé à la valeur propre "triviale" $\lambda_0 = 1$.

Ici la matrice C est diagonale par blocs , puisque $f_{ij} \cdot f_{i'j} = 0$ pour i et i' n ' appartenant pas au même bloc implique $c_{ii'} = 0$ pour i et i' n ' appartenant pas au même bloc :

$$C = \begin{array}{c} J_1 \quad J_2 \quad . \quad . \quad . \quad J_q \\ I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ I_q \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & . & 0 \\ \hline . & 0 & & & & . & 0 \\ \hline . & . & . & . & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline \end{array}$$

Chaque bloc C_l correspondant au croisement $I_l \times J_l$ a la même structure que C et possède donc un vecteur propre formé de un associé à la valeur propre 1. Notons δ_l le vecteur propre de R^n égal à 1 sur δ_l et 0 ailleurs. Ces vecteurs $\delta_1, \dots, \delta_q$ sont vecteurs propres de C associés à la valeur propre 1. Toute combinaison linéaire des δ_l est aussi vecteur propre de C associé à la valeur propre 1. En particulier, le vecteur propre trivial F_0 s'écrit

$$\sum_{l=1}^q \delta_l$$

On peut construire $q-1$ autres vecteurs $F_{11}, \dots, F_{1(q-1)}$ combinaisons linéaires des $\delta_1, \dots, \delta_q$ et vérifiant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_{i.} F_{1m}(i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n f_i F_{1m}^2(i) &= 1 \\ \sum_{i=1}^n f_{i.} F_{1m}(i) F_{1m'}(i) &= 0, \quad m \neq m' \end{aligned}$$

Autrement dit, les variables $F_{11}, \dots, F_{1(q-1)}$ sont centrées - réduites et non corrélées. Les variables F_{1m} étant combinaisons linéaires des δ_l , elles sont bien constantes sur chaque bloc I_l , d'où la propriété α) pour les composantes F_{1m} . Les autres vecteurs propres de C sont obtenus en complétant par des zéros les vecteurs propres de chaque sous-tableau C_l différents du vecteur propre trivial. D'où le résultat δ) Toutes les propriétés ont été présentées sur les composantes principales F_h . Elles se transposent immédiatement aux composantes principales G_h en utilisant la relation de transition (43). Mais de plus, les composantes principales F_{1m} et G_{1m} ont des valeurs propres égales sur les blocs correspondants I_l et J_l ; pour tout $j \in J_l$ on a :

$$G_{1m}(j) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{.j}} F_{1m}(i) = \sum_{i \in I_l} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} F_{1m}(i) = F_{1m}(i), \quad i \in I_l$$

D'où le résultat β)

Annexe 6

Annexe 7

Bibliographie

- [1] **Abraham B. et Ledolter J.** "Statistical Methode for Forecasting", John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [2] **Anderson T.W** "*An introduction to multivariate analysis*" Wiley , New-York , 1958.
- [3] **Aural J.P. , Duru G. , Zighed A.** " Analyse des données multidimensionnelles : 1 Les méthodes de description , Centre français du copyright , 6 bis , rue Gabriel - Laumain , 75010 Paris Tel :48 24 98 30
- [4] **Bastin C. , Benzecri J.- P., Bourgarit C., Cazes P.** - "Pratique de l 'analyse des données : abrégés théoriques , étude de cas , modèles" , Dunod Paris , 1980.
- [5] **Belsley D.A., Kuh E. et Welsh R. E.** "Regression Diagnostics : Identifying Influential Data and Source of Collinearity ", John Wiley and Sons, New York , 1980.
- [6] **Benzecri J. - P. et al.** "L'analyse des données . Tome 1 : La taxicomanie , Tome 2 : L 'analyse des correspondances" , Dunod , Paris , 1973.
- [7] **Benzecri J. - P. et F.** -" Analyse des correspondances :exposé élémentaire ", Dunod,1980
- [8] **Benzecri J. - P** "Histoire et préhistoire de l'analyse des données , Cahiers de l 'analyse des données" , Dunod, 1976.
- [9] **Bertier P., Bouroche J.-M.**-"Analyse des données multidimensionnelles" , PUF,1975.
- [10] **Bouroche J. - M. et Saporta G.** "L'analyse des données ", PUF ,coll . Que sais-je ? Paris 1980.
- [11] **Caillez F., Pages J.-P.**-Introduction à l 'analyse des données, SMASH ,1976.
- [12] **Cooley W.W., Lohnes P. R.**-Multivariate data analysis, Wiley, New-York, 1971.
- [13] **Dagnelie Pierre** "Statistique théorique et appliquée : tome 1 statistique descriptive et bases de l 'inférence statistique " De Boeck & Larcier s.a , 1998 Département De Boeck Université , Paris , Bruxelles
- [14] **Escofier Brigitte** -"Analyse factorielle en référence à un modèle Application à l 'analyse de tableaux d 'échanges" INRIA Centre de Rennes Irisa Rapport de Recherche n°337 Juillet 1984.
- [15] **Escofier Brigitte , Pagès Jérôme** -"Analyse factorielles simples et multiples : objectifs , méthodes et interprétation " 3^e édition Dunod , Paris ,1998

- [16] **Grais Bernard** "Méthodes statistiques " 3^e édition , Dunod , Paris , 2000
- [17] **Guttman L.**- " A general non metric technique for finding the smallest coordinate of points " ,Psychometrika , 33 ,pp.469 – 506 ,1968
- [18] **Jambu Michel** -"Exploration Informatique et Statistique des données " , Dunod , Paris , 1989
- [19] **Junca Susan Holmes** -"Outils Informatiques pour l 'évaluation de la pertinence d 'un résultat en Analyse des données " , Thèse de 3^{ème} cycle ,USTL, Montpellier 1985
- [20] **Lebart Ludovic , Fénelon J.-P.** " Statistique et Informatique Appliquées " 2^e édition , Dunod , Paris , 1973
- [21] **Saporta G.**"Liaisons entre plusieurs ensembles de variables et codages de données qualitatives " , Thèse de 3^{ème} cycle , Université de Paris 6 ,1975
- [22] **Saporta G.** "Théories et méthodes de la statistique , Technip , Paris , 1980
- [23] **Tenenhaus Michel** " Méthodes statistiques en Gestion " , Dunod , Paris , 1994
- [24] **Vasserot G.**-" L 'analyse des correspondances appliquée au Marketing , Thèse de 3^{ème} cycle , Paris , 1976
- [25] **Volle M.**-" Analyse des données " , Economica , Paris , 1985