



HAL
open science

Méthodes de Séparation Aveugle de Sources pour l'imagerie hyperspectrale. Application à la télédétection urbaine et à l'astrophysique

Inès Meganem

► **To cite this version:**

Inès Meganem. Méthodes de Séparation Aveugle de Sources pour l'imagerie hyperspectrale. Application à la télédétection urbaine et à l'astrophysique. Instrumentation et méthodes pour l'astrophysique [astro-ph.IM]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012. Français. NNT : . tel-00845899

HAL Id: tel-00845899

<https://theses.hal.science/tel-00845899>

Submitted on 18 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline ou spécialité : *Traitement du signal et des images*

Présentée et soutenue par

Inès MEGANEM

Le 05 décembre 2012

Titre :

*Méthodes de Séparation Aveugle de Sources pour l'imagerie hyperspectrale.
Application à la télédétection urbaine et à l'astrophysique*

JURY

<i>Christian Jutten</i>	<i>Professeur, GIPSA-Lab, Grenoble</i>	<i>(Rapporteur)</i>
<i>Véronique Carrère</i>	<i>MCF, Laboratoire Planétologie et Géodynamique, Nantes</i>	<i>(Rapporteur)</i>
<i>Jocelyn Chanussot</i>	<i>Professeur, GIPSA-Lab, Grenoble</i>	<i>(Président)</i>
<i>Yannick Deville</i>	<i>Professeur, IRAP-Université Paul Sabatier, Toulouse</i>	<i>(Dir. De thèse)</i>
<i>Xavier Briottet</i>	<i>Directeur de recherche, ONERA, Toulouse</i>	<i>(Dir. De thèse)</i>
<i>Shahram Hosseini</i>	<i>MCF, IRAP-Université Paul Sabatier, Toulouse</i>	<i>(Invité)</i>
<i>Philippe Déliot</i>	<i>Ingénieur de recherche, ONERA, Toulouse</i>	<i>(Invité)</i>

Ecole doctorale : *Génie Electrique, Electronique, Télécommunications*

Unités de recherche :
ONERA

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP)

Directeurs de Thèse : *Yannick Deville (IRAP) et Xavier Briottet (ONERA)*

Co-encadrants : *Shahram Hosseini (IRAP) et Philippe Déliot (ONERA)*

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier vivement mes encadrants de thèse, avec lesquels cela a été un grand plaisir de travailler pendant ces trois ans. Alors un grand Merci Yannick, Shahram, Xavier et Philippe! Malgré les visions quelquefois différentes entre physiciens et traiteurs de signaux, j'ai trouvé cette collaboration très intéressante et ces divergences mêmes enrichissantes. J'en garderai un très bon souvenir! Chacun de vous a su faire en sorte que cela fonctionne et ces trois ans, de mon point de vue, se sont très bien passés. Et puis, sans vos contributions, vos conseils, votre aide, je ne serais pas arrivée là. Merci aussi d'avoir été disponibles pour moi, même quand vos emplois de temps le permettaient difficilement.

J'aimerais aussi remercier les membres de mon jury, qui ont permis l'aboutissement de ce travail, en acceptant de faire partie de mon jury de soutenance. Merci Christian Jutten et Véronique Carrère d'avoir pris de votre temps pour évaluer mon manuscrit. Merci Jocelyn Chanussot d'avoir présidé ce jury et d'avoir examiné mon travail.

Mes pensées se tournent ensuite vers ceux que j'ai côtoyés tous les jours pendant ces 3 années de thèse au LATT (mais aussi les 5 mois de stage qui ont précédé), devenu ensuite IRAP. En particulier merci Emma, avant tout pour ta compagnie que j'ai beaucoup appréciée, pour ton soutien et pour ton aide. J'ai eu de la chance de t'avoir toi comme collègue de bureau! Merci ensuite Hervé Carfantan pour ta grande disponibilité, ta générosité et tes nombreux conseils utiles. Ton aide à maintes occasions a été précieuse et je t'en suis reconnaissante.

Merci aux membres (actuels ou anciens) de l'équipe S2I, devenue SISU, pour les bons moments partagés : Matthieu et Guilhem (mon intégration au LATT a commencé avec vous!), Ahmed, Djaouad, Laurent, Camille, Eric. Merci aussi à Sylvie, José, Karine, Jean-François, Jean-Louis. Merci aux membres du service informatique, Nicolas, Loïc... Et en particulier Loïc pour m'avoir permis de manipuler mes images hyperspectrales à la fin de la thèse... Un merci aussi à quelques anciens du LATT pour leur sympathie et leurs aides occasionnelles : Dominique, Eric et Alexandre. Et il y a aussi l'OMP, là je pense en particulier à Christine. Et bien sûr, je ne pourrais pas oublier les autres doctorants avec qui j'ai pu partager quelques bons moments : Chahinez, Rim, Nicolas, Audrey, Aurélie, Simon, Michael, Joseph, Aurélia, Agnès, Tristan, Claire...

Je remercie aussi les membres du DOTA à l'ONERA de Toulouse, même si je n'ai pas pu les voir souvent. Merci pour votre accueil et merci de m'avoir permis de me sentir à l'aise à chacune de mes venues. Merci notamment à Stéphanie (notamment pour son aide précieuse avec AMARTIS!), Geneviève, Pierre-Yves, Karine, Véronique, Dominique.

J'ai aussi été ravie de travailler, sur une partie de ma thèse, dans le cadre d'un projet tel que MUSE, et aussi dans le cadre de l'ANR DAHLIA. J'ai particulièrement apprécié de travailler avec Thierry Contini et Jihane Moultaoui; nos échanges sur les connaissances astrophysiques qui me faisaient défaut ont été utiles. Les réunions DAHLIA ont aussi été l'occasion de partager de bons moments avec les différents membres du projet; je les remercie pour cette expérience.

Une grande pensée, à présent, pour ma famille. Tout d'abord ma mère. Sans toi, maman, je ne serais certainement pas arrivée là où je suis aujourd'hui. Merci pour tout ce que tu m'as apporté, merci pour ce que je suis aujourd'hui et pour ce que j'arrive à accomplir. Une pensée affectueuse et toute particulière pour ma petite sœur Leila et ma tante Chichi. Je remercie ensuite Jamal, pour son coup de pouce il y a sept ans, sans lequel je n'aurais peut-être pas été là aujourd'hui... Une pensée aussi pour mes oncles et tantes Mohamed, Kaddour, Michelle et Annie. Et puis je remercie, bien sûr, tous ceux de ma famille qui ont pensé à moi et qui ont tout simplement été là toutes ces années.

Une pensée aussi pour les amis, copains qui m'ont permis d'avoir une échappatoire ou rien que pour le fait de savoir qu'ils sont là quelque part : les copains du primaire et du lycée, anciens de l'IPEST, anciens de l'N7, copains de la danse... Je citerai, sans être exhaustive, Aurélie (Merci pour le jour J!), Sophie, Nayaz, Thomas, Monia, Inès, Arussia, Rym, Mokhtar, Denis, Laeticia...

Je ne pourrais finir ces quelques lignes sans penser à la personne qui a été à mes côtés tous les jours durant ces trois ans, qui m'a soutenue tout le long, a supporté mes humeurs et m'a encouragée... et qui m'a aussi aidée sur différents soucis techniques! Yvonnice merci.

A ma mère
A mon père
A Leila, ma sœur

Table des matières

Notations	xi
INTRODUCTION GENERALE	1
1 Présentation du travail et contexte	1
2 Plan du manuscrit	2
Etat de l'art en SAS	3
1 La Séparation Aveugle de Sources (SAS)	3
1.1 Présentation	3
1.2 Types de mélanges usuels	4
1.2.1 Mélanges linéaires	4
1.2.2 Mélanges non linéaires	5
1.3 La SAS en pratique...	6
2 Méthodes pour les mélanges linéaires instantanés	7
2.1 Méthodes basées sur l'ICA	7
2.2 Méthodes basées sur la parcimonie (SCA)	9
2.3 Méthodes bayésiennes	10
2.4 Méthodes basées sur la NMF	11
2.4.1 Convergence et unicité de la solution	12
2.4.2 Quelques algorithmes de type NMF	14
3 Méthodes pour les mélanges linéaires quadratiques	15
4 Conclusion et Positionnement de la thèse	17
Partie 1 : Télédétection	21
Glossaire	21
Introduction	23
1 Le démixage spectral	25
1.1 Méthodes linéaires	25
1.1.1 Méthodes supervisées	26

1.1.2	Méthodes non supervisées	27
1.2	Méthodes non linéaires	29
1.2.1	Sans modèle de mélange défini	29
1.2.2	Avec modèle spécifique : linéaire-quadratique ou bilinéaire	31
1.3	Conclusion	34
2	Modèle de mélange physique	35
	Introduction	35
2.1	Le modèle de mélange physique	36
2.1.1	Présentation de la méthode aboutissant au modèle	36
2.1.2	Luminance au niveau du sol à fine résolution	37
2.1.3	Luminance au niveau de la surface équivalente	38
2.1.4	Identification donnant le modèle de mélange	39
2.2	Validation du modèle de mélange	41
2.2.1	Description d'AMARTIS	41
2.2.2	Méthodologie	43
2.2.3	Description des données	44
2.2.3.1	Scènes simples géométriques	45
2.2.3.2	Scène urbaine	46
2.2.4	Résultats et discussions	46
2.2.4.1	Analyse globale	46
2.2.4.2	Analyse des différents termes	53
2.2.4.3	Vérification de la propriété de conservation du flux	55
2.3	Simplification du modèle de mélange	56
2.3.1	Résultats	56
2.3.1.1	Termes $\frac{E_{D,k}}{E_D}$	56
2.3.1.2	Termes $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$	57
2.3.2	Simplifications et modèle obtenu	58
2.3.3	Obtention du modèle linéaire quadratique invariant	59
2.4	Vers le démélange spectral	59
2.4.1	Modèle de mélange final adapté au démélange spectral	59
2.4.2	Hypothèse possibles sur les coefficients de mélange?	60
	Conclusion	63
3	Méthodes de démélange spectral	65
	Introduction	65
3.1	Problématique	65
3.2	Vers l'exploitation de la positivité	67
3.2.1	Pourquoi la positivité?	67
3.2.2	Première méthode : NMF linéaire multiplicative étendue	68

3.3	Première méthode proposée : NMF LQ Gradient	69
3.3.1	Cas de 2 sources ($M = 2$)	70
3.3.1.1	Ecriture du critère	70
3.3.1.2	Calcul des gradients	71
3.3.1.3	Les mises à jour	72
3.3.1.4	Algorithme final	73
3.3.2	Cas général de M sources	73
3.4	Deuxième méthode : NMF LQ Gradient-Newton	76
3.5	Troisième méthode proposée : NMF LQ Multiplicative	78
	Conclusion	80
4	Tests et performances	81
	Introduction	81
4.1	Critères de performances	81
4.2	Conditions de test	82
4.2.1	Méthodes testées	82
4.2.2	Initialisation des algorithmes	83
4.2.2.1	Initialisations sans information a priori : <i>init 1</i> et <i>init 2</i>	83
4.2.2.2	Initialisation avec information a priori sur les coefficients : <i>init 3</i>	83
4.2.3	Présentation des données synthétiques	84
4.2.3.1	Génération des images	84
4.2.3.2	Matériaux utilisés	84
4.2.3.3	Cas étudiés	85
4.3	Performances globales des 5 algorithmes	88
4.3.1	Cas 1 : Mélanges de 2 matériaux	88
4.3.1.1	Comparaison des 5 algorithmes	88
4.3.1.2	Analyse des résultats à travers l'algorithme <i>LQ mult</i>	90
4.3.2	Cas 2 : Mélanges de 3 matériaux	94
4.3.2.1	Comparaison des 5 algorithmes	94
4.3.2.2	Analyse des résultats à travers l'algorithme <i>LQ mult</i>	96
4.3.2.3	Synthèse préliminaire	99
4.3.3	Cas 3 : Mélanges de 3 matériaux, sans contribution $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$	100
4.3.4	Cas 4 : Mélanges de 3 matériaux, sans $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$ et sans \mathbf{s}_3	100
4.3.4.1	Résultats des différents algorithmes	100
4.3.4.2	Analyse des résultats avec l'algorithme <i>LQ Grd-Newt</i>	102
4.3.4.3	Tests avec <i>init 3</i>	104
4.4	Performances en fonction du nombre de pixels	105
4.5	Première tentative avec des images réelles	106
4.5.1	Description des données	107
4.5.2	Comment interpréter les résultats ?	107

4.5.3	Présentation des résultats	108
4.5.3.1	Imagette 1	109
4.5.3.2	Imagette 2	112
4.5.3.3	Imagette 3	113
4.5.3.4	Imagette 4	116
4.5.4	Conclusion sur les résultats avec données réelles	117
	Conclusion	118
	Conclusion et perspectives	119
	Partie 2 : Astrophysique	125
	Introduction	125
1	Méthodes de SAS en astrophysique	127
1.1	Méthodes ICA	127
1.2	Méthodes bayésiennes	128
1.3	Autres types de méthodes	129
2	Présentation des données et modèle de mélange	131
	Introduction	131
2.1	Mécanisme de formation des données	131
2.2	Hypothèses sur la PSF et les données	132
2.3	Modèle de mélange	133
2.4	Présentation des données	135
2.5	Etude des données MUSE et choix méthodologique	136
	Conclusion	138
3	Première approche de séparation de sources	139
	Introduction	139
3.1	Présentation de la méthode : LSQ-NMF	139
3.1.1	Application de la NMF à notre problématique	139
3.1.2	Initialisation : moindres carrés (LSQ) avec FSF partiellement connue	140
3.2	Critères de performances utilisés	141
3.3	Tests préliminaires pour étudier les données	142
3.3.1	Rôle des étoiles dans le voisinage du champ étudié	142
3.3.2	Etude en fonction de la longueur d'onde	143
3.4	Cas de test 1 : erreur sur FSF simulée par du bruit	144
3.5	Cas de test 2 : erreur sur FSF plus réaliste	147
3.5.1	Modèle de la FSF	147

3.5.2	Tests et résultats	147
	Conclusion	148
4	Deuxième approche de séparation de sources	149
	Introduction	149
4.1	Présentation de la méthode : LSQ-Grd	149
4.1.1	Principe de la méthode	149
4.1.1.1	Idée	149
4.1.1.2	Critère minimisé	150
4.1.1.3	Hypothèses	150
4.1.1.4	Algorithme proposé	151
4.1.1.5	Initialisation	152
4.1.2	Calcul du gradient pour l'estimation de (α, β)	152
4.1.3	Cas bruité	154
4.2	Critères de performances utilisés	155
4.3	Premiers tests et résultats	155
4.3.1	Cas sans bruit	155
4.3.2	Cas avec bruit	158
4.3.2.1	(α, β) connus	158
4.3.2.2	(α, β) inconnus	160
4.4	Version accélérée de la méthode	164
4.5	Résultats de tests de la version accélérée	165
4.5.1	Cas sans bruit	165
4.5.2	Cas avec bruit	165
	Conclusion	169
	Conclusion et perspectives	171
	CONCLUSION GENERALE	173
	Bibliographie	176
	Publications scientifiques de l'auteur	189

Notations

Symboles mathématiques

x ou X	scalaire
\mathbf{x}	vecteur
\mathbf{X}	matrice
\cdot^T ou \cdot^t	transposé (peut être appliqué à un vecteur ou une matrice)
\mathbf{X}^{-1}	inverse de la matrice \mathbf{X}
X_{ij} , $[\mathbf{X}]_{ij}$ ou x_{ij}	élément (i, j) de la matrice \mathbf{X}
$\ \cdot\ _2$ ou $\ \cdot\ _F$	norme l_2 ou norme de Frobenius (les deux désignent la même norme)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire
$\ \cdot\ _1$	norme l_1
$\cdot \leftarrow \cdot$	affectation de la valeur du terme à droite de la flèche à la variable à gauche de la flèche
\odot	multiplication élément par élément (utilisée pour des vecteurs ou des matrices)
\oslash	division élément par élément

INTRODUCTION GENERALE

1 Présentation du travail et contexte

Il s'agit dans le cadre de cette thèse de développer des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) applicables à des images hyperspectrales.

La Séparation Aveugle de Sources (SAS) consiste, à partir de signaux donnés qui sont des mélanges, à estimer les signaux sources qui sont à l'origine de ces mélanges. Cette estimation se fait sans beaucoup d'informations a priori sur les sources et les paramètres de mélange, d'où le terme "aveugle".

Le but de notre travail est de déterminer la composition (le contenu) de nos images hyperspectrales, et c'est là qu'interviendra la SAS.

Les images hyperspectrales sont des images prises à plusieurs dizaines de longueurs d'onde, voire plusieurs centaines. On a donc un cube d'images où un spectre est associé à chaque pixel. L'utilisation de ces images est en pleine expansion dans différents domaines car elles fournissent à la fois une information spatiale et spectrale. Nous nous intéresserons ici à deux champs d'application : la télédétection, en observation de la terre, et l'astrophysique.

En ce qui concerne l'application à la télédétection, nous nous intéresserons plus particulièrement à des images du milieu urbain. Il s'agira là de développer des méthodes de SAS qui permettront de retrouver la composition des images en matériaux, et ce en extrayant les spectres de ces derniers et les coefficients correspondant à leurs proportions.

Pour ce qui est de l'astrophysique, nous travaillerons dans le cadre du projet européen MUSE (Multi Unit Spectroscopic Explorer), et nous nous intéresserons plus particulièrement aux images de champs denses d'étoiles. Dans ce cas-là, la SAS a pour but de permettre l'identification des différentes étoiles présentes sur les images, par l'extraction de leurs spectres.

Nous expliquerons plus en détail, dans la suite, comment dans chacune de ces applications on se retrouve avec des mélanges dans les pixels des images. On verra que nos deux applications, de par la différence des mélanges qu'on y retrouve, mènent à des méthodes de SAS différentes. En télédétection le modèle auquel on s'intéresse est linéaire quadratique invariant spectralement alors que celui en astrophysique est plutôt linéaire mais variant spectralement. Dans le chapitre

suivant, on va donc tenter de faire un panorama des différentes méthodes de SAS existantes, en commençant par le cas linéaire et en finissant par le cas linéaire quadratique.

2 Plan du manuscrit

On commencera dans ce manuscrit par définir plus en détail ce qu'est la SAS et par présenter un état de l'art des méthodes les plus répandues, en nous focalisant plus sur le type de méthodes nous intéressant dans notre travail. Le travail de thèse sera ensuite présenté en deux parties, concernant chacune des deux applications, et sera organisé comme suit.

La première partie sera consacrée à l'application à la télédétection. Nous verrons d'abord dans l'introduction une petite présentation du contexte. Ensuite, le premier chapitre y sera consacré à un état de l'art qui balaie rapidement les méthodes de séparation de sources utilisées en télédétection. On parle souvent dans ce domaine de méthodes de démixage spectral. Le deuxième chapitre contient l'étude du modèle de mélange physique, qui représente une partie importante du travail dans cette partie de la thèse. Nous présenterons ensuite les méthodes proposées et testées pour résoudre notre problématique, ainsi que les résultats correspondants.

Dans la deuxième partie de ce document nous trouverons l'application astrophysique. Une présentation du projet MUSE et du contexte de travail sera faite dans l'introduction. Un rapide état de l'art sur l'utilisation de méthodes de SAS dans le domaine astrophysique sera présenté dans le chapitre 1. Le deuxième chapitre sera ensuite consacré au modèle de mélange, à la description des données et des hypothèses de travail. Dans les troisième et quatrième chapitres nous nous intéresserons aux deux méthodes de séparation de sources proposées et testées et présenterons les résultats obtenus.

Etat de l'art en SAS

1 La Séparation Aveugle de Sources (SAS)

1.1 Présentation

On se retrouve dans certains cas avec des mélanges de signaux, mélanges se produisant souvent lors de leur propagation jusqu'aux capteurs, un capteur pouvant être une antenne, un microphone ou un imageur par exemple (un signal peut donc être un signal audio, une image, une onde...). Le signal fourni par le capteur est alors formé par les signaux d'origine, dits signaux "sources", qui sont les signaux d'intérêt. Ce signal observé, que l'on notera \mathbf{x}_i , est alors lié aux signaux sources, notés \mathbf{s}_j , par une certaine fonction f multidimensionnelle, qui dépend de l'application traitée :

$$\mathbf{x}_i = f(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N) \quad (1)$$

avec N le nombre de sources concernées. Dans le cas le plus simple, par exemple, cette fonction se réduit à une combinaison linéaire des sources \mathbf{s}_j . Il est à noter que les \mathbf{x}_i et \mathbf{s}_j sont des vecteurs (signaux à plusieurs échantillons).

Le but des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) est de retrouver les signaux sources \mathbf{s}_j sans, ou avec très peu, d'informations a priori sur les sources ou la fonction de mélange f , d'où le terme "aveugle" :

- on dispose des observations et on connaît souvent le modèle de mélange, défini par le type de la fonction f ,
- les signaux sources sont complètement inconnus, et les retrouver est souvent le premier objectif des méthodes,
- les paramètres du modèle de mélange, c.à.d. les paramètres définissant la fonction f , sont souvent eux aussi inconnus et sont donc eux aussi estimés, leur utilité dépend de l'application.

1.2 Types de mélanges usuels

1.2.1 Mélanges linéaires

Mélange linéaire instantané C'est le mélange le plus simple et le plus répandu dans la littérature. Les observations s'écrivent comme une combinaison linéaire des sources :

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{s}_j \quad (2)$$

avec \mathbf{x}_i la i -ème observation. Les a_{ij} sont les coefficients de mélange. La SAS consiste alors ici à estimer les sources et les coefficients de mélange à partir des observations.

On parle ici de mélange "instantané" car un échantillon n de l'observation \mathbf{x}_i dépend uniquement des sources à ce même échantillon :

$$x_i(n) = \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j(n) \quad (3)$$

l'échantillon n peut tout aussi bien représenter un instant (pour un signal temporel) ou une longueur d'onde (pour un signal spectral), etc.

Si on note M le nombre d'observations (ou mélanges) et P le nombre d'échantillons par signal source, le modèle linéaire instantané (2) peut s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} \quad (4)$$

avec $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M,P}$ matrice des observations, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{M,N}$ la matrice de mélange (contient tous les coefficients de mélange) et $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N,P}$ la matrice des sources.

Mélange à retard Les mélanges linéaires à retard, dits aussi "anéchoïques", sont quant à eux une généralisation du cas précédent. Cela correspond au cas où les observations s'écrivent comme une combinaison des sources à des échantillons décalés (en temporel on peut donc parler de retard) :

$$x_i(n) = \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j(n - n_{ij}) \quad (5)$$

Cela peut être le cas par exemple pour des signaux acoustiques lorsque le temps de propagation jusqu'au capteur n'est pas négligeable.

Mélange convolutif Pour ce type de mélanges, comme l'indique leur nom, une observation s'écrit comme une somme des sources convoluées chacune par un filtre qui lui est propre :

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{ij} * \mathbf{s}_j \quad (6)$$

où $*$ représente l'opérateur de convolution et \mathbf{a}_{ij} la réponse impulsionnelle du filtre propre à l'observation i et à la source j .

Il est possible de se référer à [1] et [2] pour plus de détails sur ces mélanges et des exemples de méthodes dédiées.

Parmi ces mélanges linéaires seul le mélange linéaire instantané nous intéressera dans la suite de ce manuscrit, et ce en rapport avec l'application à l'astrophysique.

1.2.2 Mélanges non linéaires

Le modèle linéaire, qui a l'avantage de la simplicité, a été beaucoup étudié dans la littérature, néanmoins ce modèle ne suffit pas à décrire les données dans certaines applications réelles. Des modèles non linéaires ont alors été proposés pour résoudre certaines problématiques. Dans (1), f peut alors être une fonction non linéaire quelconque. On ne présentera ici que deux cas particuliers.

Mélange post-linéaire Le mélange post-linéaire est un cas particulier des mélanges non linéaires. Les sources subissent d'abord un mélange linéaire avant de subir la non linéarité d'une fonction g_i , et ce pour chaque observation \mathbf{x}_i .

$$\mathbf{x}_i = g_i \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{s}_j \right) \quad (7)$$

Ce modèle a l'avantage de pouvoir correspondre à des cas réels et a donc été étudié par plusieurs auteurs dans la littérature. Nous ne nous intéresserons pas plus à ce modèle ici mais il est possible de consulter les références suivantes pour plus de détails et des exemples de travaux [3], [4].

Mélange linéaire quadratique Le modèle linéaire quadratique a lui aussi suscité de l'intérêt car il peut aussi correspondre à des cas réels de mélanges. C'est d'ailleurs le cas dans notre application de télédétection en milieu urbain comme on le verra dans les prochains chapitres.

Le cas le plus étudié en littérature est celui de deux sources s'écrivant comme suit, pour une observation i :

$$\mathbf{x}_i = a_{i1} \mathbf{s}_1 + a_{i2} \mathbf{s}_2 + b_i \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 \quad (8)$$

où \odot correspond à la multiplication élément par élément entre les deux vecteurs.

Ce modèle est souvent appelé aussi modèle bilinéaire dans la littérature, le modèle linéaire quadratique dans le cas général devant inclure des termes au carré.

Nous nous intéresserons dans la section 3 aux méthodes existant pour traiter ce modèle.

1.3 La SAS en pratique...

Idéalement, le but de la SAS est de retrouver avec exactitude les signaux sources à l'origine des observations que l'on a à disposition. En réalité, le problème posé induit l'estimation des sources avec quelques degrés d'incertitude, qui dépendent du modèle de mélange et des hypothèses possibles sur les sources (propriétés des sources), ainsi que de la méthode utilisée. On appelle ces incertitudes des "indéterminations".

Très souvent, les sources sont estimées avec les indéterminations suivantes :

- une possible permutation dans l'ordre des signaux sources retrouvés,
- un facteur d'échelle sur les signaux sources.

Ces indéterminations peuvent être mises en évidence facilement dans le cas du mélange linéaire instantané. On voit bien, en effet, sur le modèle défini par l'équation (2), que si l'ordre des sources (et des coefficients associés) est inversé cela donne le même résultat pour les observations. Il en est de même si on multiplie une source \mathbf{s}_j par un facteur d'échelle et qu'on divise son coefficient a_{ij} par ce même facteur.

Néanmoins, ces indéterminations peuvent être dans certains cas réduites (essentiellement celle liée au facteur d'échelle) en ajoutant à la méthode de SAS des contraintes supplémentaires [5].

Le nombre N de sources présentes dans les mélanges joue aussi un rôle important. Il est souvent supposé connu, mais peut aussi, suivant les applications, être estimé en amont (par exemple par Analyse en Composantes Principales, ACP) ou en parallèle avec l'extraction des sources (c'est par exemple le cas de certaines méthodes en télédétection comme on le verra au chapitre suivant). Suivant la valeur de N , par rapport au nombre d'observations M , on a trois configurations différentes du problème de SAS, qui peuvent nécessiter des méthodes différentes :

- Lorsque N est égal à M , on parle de mélanges "déterminés".
- Si N est inférieur à M , on a plus d'observations que de sources pour résoudre le problème, on est donc au moins dans un cas équivalent au précédent, si ce n'est plus avantageux. On parle dans ce cas de mélanges "sur-déterminés".
- Si N est supérieur à M , on se retrouve avec plus de signaux inconnus que de données, on est alors dans le cas "sous-déterminé". La résolution du problème est dans ce cas-là plus difficile et nécessite des contraintes supplémentaires.

Dans tous les cas, le nombre d'inconnues est souvent supérieur aux données, car en plus des sources il y a aussi les paramètres de mélange à estimer. Les méthodes de SAS nécessitent donc des contraintes supplémentaires sur les sources et/ou paramètres de mélange pour diminuer le champ des solutions possibles au problème. Ce sont les différentes natures de contraintes imposées qui ont donné lieu aux différentes familles de méthodes de SAS existantes. Ces contraintes ou hypothèses dépendent bien sûr du type de données que l'on désire traiter et donc de l'application.

Il est possible de trouver plus d'informations sur les méthodes de SAS en général ainsi qu'un panorama des méthodes dans [3, 4, 5, 6, 7, 8].

On s'intéresse dans la suite aux méthodes de SAS les plus répandues dans la littérature, mais uniquement en rapport avec les modèles de mélange qui nous intéressent : le cas des mélanges linéaires instantanés et le cas des mélanges linéaires quadratiques. On présentera les classes de méthodes de SAS les plus connues dans le cadre général. Le cas particulier de la télédétection où des hypothèses supplémentaires sur les données peuvent intervenir, sera présenté dans la partie télédétection. Notons ici, que le terme "démélange" est aussi parfois utilisé en télédétection pour désigner la séparation de sources.

2 Méthodes pour les mélanges linéaires instantanés

2.1 Méthodes basées sur l'ICA

Les premières méthodes de SAS ont été des méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Indépendantes ou l'ICA (pour Independent Component Analysis, en anglais). Cette famille de méthodes englobe les méthodes exploitant l'indépendance statistique des signaux sources entre eux. Ces méthodes ne pourront pas être utilisées dans les deux problématiques qui nous intéressent, car comme on le verra nos sources dans les deux cas sont corrélées. Néanmoins, il nous paraît important de présenter cette classe de méthodes avec laquelle est née la SAS et qui est très utilisée.

En ICA, les signaux sources sont supposés aléatoires, mais les signaux vérifiant à la fois les trois propriétés suivantes ne peuvent être séparés :

- pour chaque signal source, les variables aléatoires associées aux échantillons du signal sont statistiquement indépendantes,
- le signal est "identiquement distribué" et donc stationnaire,
- la loi de probabilité associée au signal est gaussienne.

Il a, en effet, été démontré, que séparer des signaux i.i.d. (indépendants et identiquement distribués) gaussiens est impossible [9]. Les méthodes ICA sont donc généralement basées sur la non vérification de l'une de ces propriétés, ce qui donne principalement deux classes [10]. La première correspond aux méthodes exploitant la non gaussianité et la deuxième aux méthodes exploitant la structure des signaux (sources non i.i.d.) :

Méthodes basées sur la non gaussianité Cette classe de méthodes suppose donc les signaux non gaussiens et peut alors être appliquée à des sources i.i.d., c.à.d. les signaux réunissant les deux premières caractéristiques citées plus haut. Ces méthodes sont les plus utilisées dans la littérature. Elles exploitent les statistiques d'ordre supérieur à deux, et sont donc dites méthodes statistiques d'ordre supérieur. Sans l'hypothèse de non gaussianité des signaux, les statistiques d'ordre supérieur à deux n'apporteraient aucune information supplémentaire.

Il existe parmi cette classe de méthodes des approches variées suivant les statistiques utilisées, les plus simples sont fondées sur les moments ou cumulants d'ordre supérieur.

L'une des premières méthodes d'ICA proposée par C. Jutten et J. Héroult dans les années 80 (méthode détaillée dans [11]) est d'ailleurs basée sur des statistiques d'ordre supérieur. La méthode utilise un algorithme adaptatif de type réseau de neurones et est basée sur l'annulation des moments croisés généralisés des sorties du réseau.

Depuis, différentes approches ont été proposées, les plus répandues peuvent être classées comme suit :

- *Maximisation de la non-gaussianité* : Cette approche est l'une des plus utilisées en ICA. Le principe est de forcer les signaux en sortie de la méthode (les sources estimées) à être les plus non-gaussiens possible. Le principe découle du théorème de la limite centrale, selon lequel les combinaisons des sources (donc les observations) tendent vers des gaussiennes. L'un des critères les plus utilisés pour mesurer la gaussianité est le kurtosis ou auto-cumulant d'ordre 4 [12]. On trouve aussi des mesures de non gaussianité basées sur l'entropie : l'entropie différentielle ou la néguentropie. Parmi les méthodes les plus connues basées sur la maximisation de la non-gaussianité, on trouve FastICA [13].
- *Estimation du maximum de vraisemblance* : Maximiser la vraisemblance permet de trouver les sources et paramètres du mélange qui maximisent la densité de probabilité des observations. Les premières méthodes ont été proposées dans [14]. On peut aussi citer comme exemples de travaux [15] et [16].
- *Minimisation de l'information mutuelle* : Cette approche, dérivée de la théorie de l'information, est basée sur la minimisation de l'Information Mutuelle (IM) entre les sorties (sources recherchées), ce qui consiste à maximiser l'indépendance entre elles. En effet l'IM est nulle si et seulement si les sources estimées sont statistiquement indépendantes. Cette approche a été utilisée pour la première fois dans [9]. On peut aussi citer [17] et [18] comme exemples de travaux utilisant ce critère.
- *Approches tensorielles* : Ces approches sont basées sur l'utilisation de cumulants d'ordre supérieur, généralement d'ordre 4. Un tenseur de cumulants d'ordre 4 est un opérateur linéaire défini par les cumulants croisés d'ordre 4 des données. Comme exemple de ce type d'approche on peut citer la méthode JADE (Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices) [19].

Méthodes exploitant la structure des signaux Ce sont des méthodes supposant les sources non i.i.d. (et pouvant être gaussiennes). On retrouve au sein de cette classe deux sortes de méthodes :

- On trouve les méthodes exploitant la non indépendance des échantillons au sein d'un même signal source. Les valeurs de chaque signal à différents échantillons ne sont pas supposées statistiquement indépendantes. Différents algorithmes ont été proposés dans ce cadre comme la méthode SOBI (Second-Order Blind Identification) pour signaux stationnaires présentée dans [20], qui est une méthode beaucoup utilisée.

- La deuxième catégorie concerne les méthodes exploitant l'hypothèse de non stationnarité des sources. Voir par exemple [21].

Ces deux approches sont généralement basées sur l'utilisation des matrices de covariance. Elles ont donc l'avantage d'utiliser uniquement les statistiques d'ordre 2 et permettent de relâcher l'hypothèse d'indépendance et de la remplacer par une hypothèse de non corrélation. Elles permettent de séparer aussi bien des sources gaussiennes que non gaussiennes.

Pour plus de détails sur toutes ces méthodes ICA il est possible de se référer à [4, 5, 7, 8] et aux références qui y sont citées.

2.2 Méthodes basées sur la parcimonie (SCA)

L'Analyse en Composantes Parcimonieuses ou SCA (pour Sparse Component Analysis, en anglais) est une classe de méthodes de SAS apparue il y a tout juste une dizaine d'années [22], [23]. Elle s'appuie sur l'hypothèse que les sources sont parcimonieuses soit dans leur représentation originale soit après décomposition sur un dictionnaire. Un signal est dit parcimonieux si la plupart de ses coefficients dans un domaine de représentation donné sont nuls.

Dans le cas de la séparation de sources, on a besoin plus particulièrement de représentations parcimonieuses "conjointes" des sources [24], c.à.d que le fait que les sources aient des représentations où la plupart des coefficients sont nuls ne suffit pas. Pour pouvoir exploiter la parcimonie dans la séparation de sources, l'approche la plus simple est d'isoler chacune de ces sources individuellement dans des zones des signaux observés. L'idéal est alors d'avoir un dictionnaire de représentation pour lequel les sources ont des supports disjoints. Mais dans certaines méthodes il suffit d'avoir, pour chaque source du mélange, une zone dans les signaux observés sur laquelle elle est seule à être non nulle (dans le cas de signaux spectraux par exemple, il s'agirait d'avoir une zone spectrale sur laquelle une seule des sources est non nulle; dans le cas d'images, cela correspondrait à avoir une zone de pixels où une seule source est présente). Selon les hypothèses qu'on fait au départ sur les sources, il y a donc, dans le cadre de la SCA, trois catégories de méthodes :

- Méthodes basées sur l'hypothèse de fortes conditions de parcimonie, appelées WDO (pour W-Disjoint-Orthogonality en anglais). Des sources sont dites WDO si, dans chaque point du domaine d'analyse, une seule de ces sources est active. Cette hypothèse suppose donc que les sources sont de supports complètement disjoints. L'avantage de la WDO est qu'elle permet de séparer les sources dans les cas dits "sous-déterminés" (cas où le nombre de sources est supérieur au nombre d'observations) par simple "masquage" du domaine d'analyse [25], [26].
- Méthodes "quasi-non-parcimonieuses" pour lesquelles il suffit que chaque source soit isolée dans certaines petites zones du domaine d'analyse, et peu importe s'il y a recouvrement des sources ailleurs. Ces méthodes commencent généralement par détecter les zones mono-sources (où une seule source est présente) dans les observations, afin de les utiliser

pour estimer la matrice de mélange. Les sources peuvent ensuite être déduites facilement (par simple inversion de la matrice de mélange dans le cas de mélanges déterminés). On peut citer dans ce cadre les méthodes LI-TEMPROM et LI-TIFROM [27] qui utilisent les variances des rapports d'observations pour détecter les zones mono-sources. D'autres méthodes comme LI-TEMPCORR et LI-TIFCORR [28] utilisent plutôt la corrélation pour la détection des zones. Dans [29] c'est une ACP qui est utilisée pour détecter les zones mono-sources.

- Approches "hybrides" se situant entre les deux catégories de méthodes précédentes. Certaines relâchent l'hypothèse de WDO dans des cas particuliers, d'autres utilisent une mesure de confiance sur la "qualité mono-source" des points du domaine d'analyse mais nécessitent quand même une forte parcimonie pour pouvoir estimer le mélange ou reconstruire les sources [29] [30].

Cette classe de méthodes sera difficilement applicable à nos problématiques car cette hypothèse de parcimonie "conjointe" n'est a priori pas vérifiée par nos données.

2.3 Méthodes bayésiennes

Des approches bayésiennes ont aussi été proposées dans le cadre de la séparation de sources. Ce genre d'approches est basé sur l'utilisation de la règle de Bayes. Le principe de ces méthodes, qui repose sur l'attribution de lois de probabilités aux données recherchées, est le suivant (en considérant la définition matricielle (4) du modèle de mélange auquel on rajoute une matrice pour modéliser un bruit additif) :

- Ecrire la vraisemblance des inconnues $p(\mathbf{X} | \mathbf{A}, \mathbf{S})$
- Attribuer des lois *a priori* aux inconnues du problème : $p(\mathbf{S})$ et $p(\mathbf{A})$. Cela permet de décrire la connaissance a priori que l'on a du problème, mais aussi de restreindre l'espace des solutions possibles.
- La loi de Bayes permet alors de déduire la loi a posteriori $p(\mathbf{A}, \mathbf{S} | \mathbf{X})$, qui est utilisée pour estimer les inconnues. Des estimateurs sont alors utilisés tels que le maximum a posteriori (MAP) ou la moyenne a posteriori (MP).

Ces méthodes font ensuite appel à un algorithme d'optimisation et intégration itératif tel que l'algorithme EM (Expectation Maximization) ou des modélisations par chaînes de Markov cachées. On peut citer comme exemples de travaux [31], [32]. D'autres exemples de travaux seront cités dans les problématiques de télédétection et d'astrophysique (chapitre 1 de la partie 1 et chapitre 1 de la partie 2). L'approche bayésienne peut donner des résultats intéressants mais a l'inconvénient de souvent demander un grand coût calculatoire. Pour plus de références et de détails sur ces approches il est possible de se référer à [3] et [4].

2.4 Méthodes basées sur la NMF

Les méthodes de Factorisation en Matrices Non-négatives ou NMF (pour Non-negative Matrix Factorization, en anglais) sont des méthodes basées sur la positivité ou non négativité (les deux sont équivalents et veulent dire positif ou nul) des données. Par données on entend les observations, les sources et les coefficients de mélange. Un intérêt particulier est accordé à ces méthodes qu'on détaille ici un peu plus que les autres, car étant donné la positivité de nos données, elles vont être celles qui seront les plus exploitées dans notre travail.

Initialement proposée par Paatero et Tapper [33][34], la NMF a surtout été beaucoup étudiée dans la littérature depuis les travaux de Lee et Seung [35][36].

Le principe de base est le suivant : Etant donné une matrice non négative $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^{P \times L}$, et une dimension réduite K (avec souvent $K \leq \min(P, L)$), la NMF consiste à trouver deux matrices non négatives $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}_+^{P \times K}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}_+^{K \times L}$, qui factorisent le mieux \mathbf{W} , c-à-d telles que

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}\mathbf{V} \quad (9)$$

à une erreur d'approximation près.

Souvent la dimension réduite K dépend de l'application et est imposée par le problème que l'on cherche à résoudre. Il en est de même pour le contenu des matrices produit qui varient aussi suivant l'application et les données traitées et peuvent avoir des significations physiques différentes.

La NMF a été utilisée pour trouver une représentation qui met en évidence de l'information cachée (dans le cas de la séparation de sources cette information est constituée des sources). Appliquée initialement pour décrire une image représentant un visage comme une combinaison linéaire d'images représentant ses différentes composantes (nez, bouche..), elle a depuis été exploitée pour différentes applications : classification d'images, débruitage, extraction de texte (text mining en anglais), séparation de sources...[37][38].

En termes de séparation de sources, \mathbf{Z} est alors ici la matrice de mélange et \mathbf{V} contient les sources, dans ce cas-là K correspond au nombre de sources que l'on cherche à séparer. Néanmoins, l'hypothèse de positivité étant appliquée aux deux matrices produit, le problème est ici symétrique (contrairement aux méthodes ICA par exemple) et on peut facilement écrire $\mathbf{W}^t = \mathbf{V}^t \mathbf{Z}^t$, ce qui mène à inverser les rôles de matrice "source" et "mélange", sans rien changer au problème ni à sa résolution.

Les algorithmes de NMF sont des algorithmes itératifs qui consistent généralement à minimiser un critère, ou fonction coût choisie. Il s'agit de trouver les matrices produit qui permettent de minimiser la "distance" entre la matrice des observations et le produit des facteurs estimés, sous les contraintes de positivité :

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{V}} D(\mathbf{W} || \mathbf{Z}\mathbf{V}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z} \geq 0, \mathbf{V} \geq 0 \quad (10)$$

où la notation $D(\cdot || \cdot)$ désigne la mesure de distance (ou de divergence, de similarité...) entre deux matrices ou vecteurs.

Le choix de cette mesure de distance D dépend souvent de la structure des données ou encore de la distribution des signaux à estimer ou du bruit [38]. La mesure la plus simple et la plus utilisée est la norme de Frobenius (dite aussi norme l_2 ou distance euclidienne) :

$$D(\mathbf{W}||\mathbf{ZV}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{W} - \mathbf{ZV}\|_F^2 \quad (11)$$

Cette mesure est bien adaptée lorsque les données contiennent un bruit additif gaussien [39]. Pour des bruits non gaussiens, une mesure beaucoup utilisée est la divergence de Kullback-Leibler (ou I-divergence) [36], définie comme suit

$$D(\mathbf{W}||\mathbf{ZV}) = \sum_{k,m} \left(w_{km} \ln \left(\frac{w_{km}}{[\mathbf{ZV}]_{km}} \right) - w_{km} + [\mathbf{ZV}]_{km} \right) \quad (12)$$

D'autres mesures de divergence peuvent aussi être utilisées telles que les divergences de Bregman [40], les beta divergences et les alpha divergences [41]. Cette dernière famille permet de retrouver par exemple la divergence de Kullback-Leibler pour $\alpha = 1$. Une liste très détaillée des différentes mesures peut être trouvée dans [38].

2.4.1 Convergence et unicité de la solution

La NMF présente deux principaux inconvénients. D'une part, on a une indétermination supplémentaire qui se rajoute au problème (en plus de celles citées dans la section 1.3). Sans contrainte supplémentaire, la solution ne peut être trouvée qu'à une matrice \mathbf{D} (inversible) près. On peut en effet avoir : $\mathbf{W} = \mathbf{ZDD}^{-1}\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{V}}$. Il n'est pas nécessaire que \mathbf{D} soit positive pour que les nouvelles matrices produit $\tilde{\mathbf{Z}}$ et $\tilde{\mathbf{V}}$ soient positives [38]. La solution n'est donc pas unique.

D'autre part, en NMF, les critères ne peuvent être convexes que suivant une des deux matrices produit mais pas pour les deux. Les algorithmes permettent donc uniquement de converger vers un minimum local. Par conséquent, le résultat de convergence dépend fortement de l'initialisation de l'algorithme. Dans [42] et [43] des études de l'unicité de la solution sont présentées. Ces études donnent des conditions sur les données pour avoir une solution unique. Ces conditions sont toutefois très difficiles à satisfaire dans le cas de données réelles et on peut voir dans [43], à travers un exemple, la diversité dans l'ensemble des solutions possibles données par la méthode.

Suivant l'application et les propriétés des données, il existe néanmoins des méthodes pour éviter les minima locaux et restreindre le champ des solutions possibles. On peut citer les solutions suivantes proposées dans la littérature :

- **Normalisation des matrices produit** : Il est possible de normaliser les colonnes de la matrice \mathbf{Z} et/ou les lignes de la matrice \mathbf{V} , afin de contraindre le champ des solutions possibles. La normalisation se fait généralement par une division des colonnes ou lignes concernées par la somme de leurs coefficients (donc par leur norme l_1). Il est néanmoins possible d'utiliser une norme l_p avec $p > 1$, mais c'est moins efficace d'après [38]. Cette solution jouera surtout sur l'indétermination du facteur d'échelle, mais ne résout pas entièrement le problème d'unicité de la solution.

- **Initialisation** : Comme dit précédemment, la NMF est très sensible à l'initialisation, le choix de celle-ci est donc un point important lorsqu'on veut éviter la convergence vers une mauvaise solution avec un algorithme NMF. On peut citer comme exemples de méthodes d'initialisation proposées dans la littérature [44, 45, 46] et les références qui y sont citées. L'initialisation peut dépendre de l'application ou des possibles informations a priori que l'on peut avoir sur les données.

Dans [38], il est proposé de faire une initialisation multiple qui consiste à :

- se fixer un certain nombre d'initialisations possibles (aléatoires, issues d'un autre algorithme...),
- faire tourner l'algorithme NMF pour ces différentes initialisations, sur un petit nombre d'itérations,
- sélectionner l'initialisation qui donne la fonction de coût la plus faible (ou qui la fait décroître le plus vite) et faire tourner l'algorithme avec cette initialisation jusqu'à convergence (critère d'arrêt).

Cette méthode peut s'avérer utile et peut augmenter les chances de converger vers la bonne solution.

- **Schéma multi-couches** : Une autre solution proposée pour éviter les minima locaux, est d'utiliser une structure multi-couches avec initialisation aléatoire et multiple à chaque couche [41], [47]. Cette structure, qui semble améliorer les résultats de convergence, peut s'appliquer à n'importe quel algorithme.
- **Ajout de contraintes supplémentaires au critère** : Il est aussi possible de rajouter des contraintes supplémentaires au critère minimisé (la divergence ou distance choisie). Ceci peut permettre de réduire le champ des solutions possibles mais encore une fois cela dépend des possibles hypothèses que l'on peut faire sur les données en fonction des informations a priori que l'on a sur celles-ci. Ces contraintes peuvent concerner une seule des deux matrices produit ou les deux. Le critère complet J s'écrit alors dans le cas le plus général sous la forme suivante :

$$J = D(\mathbf{W}||\mathbf{ZV}) + \alpha_Z J_Z(\mathbf{Z}) + \alpha_V J_V(\mathbf{V}) \quad (13)$$

où α_Z et α_V sont des paramètres de régularisation positifs (leur valeur peut jouer sur l'impact de la contrainte qui leur est associée) et les termes $J_Z(\mathbf{Z})$ et $J_V(\mathbf{V})$ sont des fonctions ajoutées pour contraindre la solution à respecter certaines hypothèses sur les matrices produit.

Différentes contraintes peuvent être imposées et cela dépend des données traitées, on peut néanmoins citer les contraintes suivantes qui sont les plus utilisées dans la littérature :

- *Contrainte de parcimonie* : Si l'on sait que l'une des matrices recherchée est parcimonieuse on peut forcer l'algorithme à converger vers une solution parcimonieuse en ajoutant comme contrainte une fonction qui mesure la parcimonie d'une matrice. Minimiser cette fonction avec le critère global J forcera la matrice concernée à être parcimonieuse [48], [49]. La mesure de la parcimonie la plus utilisée est la norme l_1 .

Cela donne donc pour la matrice Z par exemple : $J_Z(\mathbf{Z}) = \|\mathbf{Z}\|_1$.

- *Contrainte de lissage ("smoothness" en anglais)* : Si cette contrainte est imposée pour une des matrices produit, cela force les signaux contenus dans cette matrice à avoir une allure plutôt lisse et continue (sans grandes cassures ni changements brusques) [50], [51]. La mesure utilisée généralement pour cela est la norme l_2 au carré (plus facile à dériver au carré), on a alors : $J_Z(\mathbf{Z}) = \|\mathbf{Z}\|_2^2$. Tout comme pour la parcimonie, il existe d'autres mesures [50] et cela peut dépendre de l'application.

2.4.2 Quelques algorithmes de type NMF

Différents algorithmes de NMF ont été proposés ces dernières années, dans différentes applications (débruitage, classification,...) incluant la séparation de sources. Les principes généraux des méthodes sont cependant les mêmes quelle que soit l'application et certaines des références citées ici (tout comme précédemment) peuvent donc ne pas relever de la séparation de sources.

On présente ici principalement les grandes familles de méthodes NMF, en se limitant uniquement au cas de la norme de Frobenius (11), mais il existe différentes variantes des méthodes qui ne seront pas abordées ici. Il est donc possible de se référer à [38] pour une vision plus large.

- **Algorithmes de type gradient projeté** : Ces méthodes utilisent un algorithme de type gradient avec projection des mises à jour, à chaque itération, sur l'espace des solutions admissible, qui est ici \mathbb{R}^+ (sauf contraintes supplémentaires sur les données). Dans sa version de base la plus simple, la NMF par algorithme de gradient projeté donne les mises à jour suivantes, pour une fonction de coût minimisée J quelconque (telle que définie dans (13)) :

$$\mathbf{Z} \leftarrow \left[\mathbf{Z} - \beta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{Z}} \right]_+ \quad (14)$$

$$\mathbf{V} \leftarrow \left[\mathbf{V} - \beta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{V}} \right]_+ \quad (15)$$

avec β un pas positif, dont la valeur peut être fixée à la main par l'utilisateur ou calculée par une méthode automatique pour l'adapter aux différentes itérations. $[\cdot]_+$ correspond à la projection sur \mathbb{R}^+ de la solution trouvée, cela revient à affecter une valeur nulle aux éléments négatifs des matrices. Dans le cas général où l'espace des solutions est borné, la borne la plus proche est affectée à chaque élément dont la valeur est en dehors de l'espace.

Différents algorithmes de type gradient projeté ont été proposés pour la NMF, avec des mises à jour qui peuvent, suivant la méthode, différer de l'écriture (14-15). On peut par exemple citer [47, 52, 53].

- **Algorithmes multiplicatifs** : Le premier algorithme multiplicatif a été proposé par Lee et Seung [36]. Cet algorithme est d'ailleurs un cas particulier de l'algorithme du gradient, où le β est exprimé en fonction des matrices utilisées de façon à obtenir une

forme multiplicative. Les mises à jour des deux matrices s'écrivent, dans le cas le plus simple où la fonction de coût est égale à la distance de Frobenius (11) :

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} \odot ((\mathbf{W}\mathbf{V}^t) \oslash (\mathbf{Z}\mathbf{V}\mathbf{V}^t)) \quad (16)$$

$$\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{V} \odot ((\mathbf{Z}^t\mathbf{W}) \oslash (\mathbf{Z}^t\mathbf{Z}\mathbf{V})) \quad (17)$$

où \odot et \oslash sont respectivement la multiplication et la division élément par élément.

Il est difficile pour les algorithmes multiplicatifs de donner les règles de mise à jour pour une fonction de coût quelconque J car il n'existe pas vraiment de règle pour obtenir les formules correspondantes. D'ailleurs, depuis cette première version multiplicative, différentes variantes ont été proposées pour diverses fonctions de coût et pouvant intégrer des contraintes supplémentaires [48, 54, 55, 56] (la dernière référence présente un algorithme hybride utilisant aussi une approche bayésienne). Ces algorithmes ont l'avantage de ne pas nécessiter une projection à chaque itération pour imposer la positivité car celle-ci est garantie par la forme même des règles de mise à jour, dès le moment que l'initialisation est positive. De plus, il n'y a pas de pas à fixer ou à calculer contrairement aux algorithmes de gradient projeté (le paramètre β).

- **Algorithmes ALS** : Les algorithmes ALS (pour Alternating Least Squares, en anglais) procèdent en général comme suit : la matrice \mathbf{Z} est d'abord fixée et \mathbf{V} est calculée par moindres carrés, ensuite \mathbf{V} est fixée et \mathbf{Z} est alors calculée par moindres carrés. Ce processus est répété d'une manière itérative jusqu'à convergence. Les moindres carrés utilisent bien sûr ici des contraintes de positivité. Le premier algorithme ALS a été proposé par Paatero et Tapper [33]. Par la suite des variantes ont été proposées, incluant par exemple d'autres contraintes telles que la parcimonie [57, 58, 59] .

3 Méthodes pour les mélanges linéaires quadratiques

Le modèle linéaire quadratique n'a pas été beaucoup traité dans la littérature de SAS contrairement au modèle linéaire. Il existe néanmoins quelques travaux, essentiellement ces dernières années. Ce modèle s'avère en effet utile dans certaines applications où le modèle linéaire ne suffit pas à décrire les phénomènes existants. Nous allons essayer dans cette section de passer en revue l'essentiel des travaux existants. Les cas particuliers de méthodes concernant le démélange en télédétection seront présentés dans le chapitre 1 de la partie 1 de ce manuscrit.

On peut commencer par citer le travail dans [60] qui semble être l'un des premiers à proposer une méthode de séparation aveugle de sources pour un mélange linéaire quadratique. La méthode est basée sur l'ICA et concerne le cas particulier de sources indépendantes et circulaires. La méthode utilise des statistiques d'ordre 2 et 3. Le modèle traité est le modèle linéaire quadratique dans sa forme la plus générale et s'écrit pour une observation \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \leq j \leq N} l_j \mathbf{s}_j + \sum_{1 \leq j \leq k \leq N} q_{jk} \mathbf{s}_j \odot \mathbf{s}_k + \mathbf{b} \quad (18)$$

où les l_j et q_{jk} sont les coefficients de mélange et \mathbf{b} un bruit additif gaussien.

[61] propose aussi une méthode de SAS pour des sources indépendantes et circulaires, et ce dans le cadre du même modèle (18). La méthode est basée sur une diagonalisation conjointe de matrices de corrélation ainsi que sur le calcul de moments d'ordre 3.

Il est à noter que [60] et [61] sont seulement applicables à des mélanges sur-déterminés.

On peut citer ensuite [62] et [63] où les auteurs proposent une méthode pour séparer des sources réelles et statistiquement indépendantes (c'est donc aussi une méthode de type ICA), dans le cas de mélanges déterminés. Le modèle de mélange traité, comparé à celui des deux travaux cités plus haut, ne comprend pas de termes au carré, il peut donc aussi être appelé modèle bilinéaire. Le modèle est considéré dans le cas de deux observations \mathbf{x}_i et de deux sources \mathbf{s}_j et est exprimé comme suit après normalisation :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{s}_1 - l_1 \mathbf{s}_2 - q_1 \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{s}_2 - l_2 \mathbf{s}_1 - q_2 \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 \quad (20)$$

les l_i et q_i étant ici les coefficients de mélange.

Cette écriture a été choisie de manière à simplifier les notations pour la structure de séparation proposée dans ces travaux. La structure proposée est un réseau récurrent du type [11] (présentée plus haut parmi les méthodes ICA), étendu au cas de mélange linéaire quadratique. La méthode finale proposée est basée sur le maximum de vraisemblance [63]. Une extension de ces réseaux récurrents est ensuite proposée dans [64] et [65], présentant des degrés de liberté supplémentaires, par rapport aux premières versions, afin de pallier les problèmes de stabilité qui y étaient rencontrés. La possibilités d'extension à des cas de mélanges plus complexes est aussi présentée [64].

[66] propose une autre approche pour traiter le modèle présenté dans [62] et [63]. La méthode utilise la même structure récurrente pour l'estimation des sources mais l'estimation des coefficients de mélange est basée sur la minimisation de l'information mutuelle, là où [63] proposait une approche basée sur le maximum de vraisemblance.

Le modèle de mélange et la méthode proposés dans [62] et [63] ont été exploités dans [67] où les auteurs en proposent une extension pour traiter le démixage des faces recto et verso d'images scannées.

Pour finir avec les méthodes basées sur l'ICA on peut citer [68] où une méthode est présentée pour des mélanges sur-déterminés. La méthode en question est basée sur la minimisation de l'information mutuelle et l'article s'intéresse uniquement au cas de mélanges de deux sources (même modèle que (8)).

Des méthodes basées sur la parcimonie ont aussi été proposées pour les mélanges linéaires quadratiques. On peut citer dans ce cadre [69] où la méthode proposée est une extension de la méthode LI-TEMPCORR [28] (présentée dans le cadre des méthodes SCA pour mélanges linéaires). L'hypothèse de parcimonie utilisée nécessite uniquement qu'il existe une petite zone où chaque source est isolée dans les observations, les sources n'ont pas besoin d'être complètement parcimonieuses. Mais la méthode nécessite d'autres hypothèses comme le fait que les

sources soient linéairement indépendantes et centrées. Le mélange traité ici est le cas bilinéaire dans un cadre général (le modèle (18) sans les termes au carré des sources et sans bruit).

Plus récemment une autre méthode basée sur la parcimonie a été développée [70]. Celle-ci traite le cas de mélanges sur-déterminés de sources ayant une représentation parcimonieuse dans une base donnée. La méthode permet d'éliminer la partie quadratique des mélanges, la partie linéaire restante pouvant ensuite être séparée par une méthode linéaire de SAS. Seul le cas de deux sources est considéré ici (modèle (8)).

La dernière classe de méthodes explorée, à notre connaissance, pour ces mélange linéaires quadratiques, est celle des approches bayésiennes, à travers les travaux [71], [72]. Le modèle traité est celui de (18) sans les termes au carré. Le bruit y est considéré gaussien et i.i.d. de variance connue. L'approche proposée utilise des MCMC comme échantillonneur de Gibbs et repose sur les a priori suivants : les sources sont supposées statistiquement indépendantes et présentant une structure temporelle. Dans [72] une application au démélange d'images scannées (séparation du recto et verso) est présentée.

Précisons que les méthodes développées spécialement pour du démélange en télédétection ou pour l'astrophysique seront présentées dans les parties concernées de la thèse.

4 Conclusion et Positionnement de la thèse

Dans ce chapitre on a défini ce qu'est la séparation aveugle de sources (SAS) et ses principes généraux. On a ensuite présenté un panorama des classes principales des méthodes existantes, d'abord dans le cas des mélanges linéaires instantanés, puis dans le cas des mélanges linéaires quadratiques, ces deux cas étant ceux qui nous intéressent dans la suite de ce manuscrit.

Dans le cas linéaire (qui est celui qui nous intéresse dans l'application astrophysique, c.à.d. la partie 2 de ce manuscrit) un vaste choix de méthodes existe, suivant les caractéristiques des données traitées. On verra, dans la partie 2, comment se positionne notre problème par rapport à ces approches, et pourquoi, comme on l'a déjà fait remarquer, les méthodes basées sur l'ICA ou la parcimonie ne sont pas exploitables.

Le cas linéaire quadratique ayant été moins étudié dans la littérature, peu de solutions existent et les approches proposées reposent essentiellement sur la parcimonie ou l'indépendance des sources (méthodes ICA ainsi que les quelques méthodes bayésiennes présentées). On verra dans la partie 1 que ces solutions ne sont pas suffisantes pour le problème traité dans notre application télédétection. D'autres approches, spécifiques à la télédétection, seront aussi présentées au premier chapitre de la partie 1. D'ailleurs ce chapitre inclura un panorama des méthodes dédiées au démélange en télédétection, aussi bien dans le cadre linéaire que non linéaire.

Partie 1 : Télédétection



Glossaire

Définitions utiles

- **Eclairement** : Puissance reçue par unité de surface, exprimée en $W.m^{-2}$.

$$E = \frac{\partial P}{\partial S}$$

L'éclairement dépend de la longueur d'onde. Il ne dépend pas de la nature de la surface mais de son orientation (direction d'incidence).

- **Luminance** : Puissance émise par unité de surface et par unité d'angle solide, exprimée en $W.m^{-2}.sr^{-1}$.

$$L = \frac{\partial^2 P}{\partial \omega \partial S \cos \theta}$$

avec

$\partial \omega$: angle solide élémentaire (sr)¹

θ : angle zénithal correspondant à la direction d'observation.

La luminance dépend de la longueur d'onde et de la nature de la surface (matériau). Elle dépend aussi de la direction d'incidence et de la direction de réflexion.

- **Réflectance** : Mesure de la capacité d'une surface à réfléchir l'énergie incidente. Elle se définit comme étant le rapport entre la luminance renvoyée et l'éclairement reçu et n'a pas d'unité. La réflectance dépend de la longueur d'onde. Il existe différentes définitions :

– Réflectance bidirectionnelle :

$$\rho^{dd}(\theta_i, \varphi_i, \theta_r, \varphi_r) = \frac{\pi L(\theta_i, \varphi_i, \theta_r, \varphi_r)}{E(\theta_i, \varphi_i) \cos(\theta_i)}$$

avec

(θ, φ) = angles (zénith, azimut).

(θ_i, φ_i) : direction d'incidence de l'éclairement

1. sr : symbole pour le "stéradian" qui est l'unité dérivée du système international pour la mesure d'angles solides.

(θ_r, φ_r) : direction de réflexion ou direction d'observation.

– Réflectance hémisphérique-directionnelle :

$$\rho^{hd}(\theta_r, \varphi_r) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho^{dd}(\theta, \varphi, \theta_r, \varphi_r) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

– Réflectance lambertienne (hémisphérique-hémisphérique) :

$$\rho^{hh} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho^{hd}(\theta, \varphi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Dans la suite de la thèse, pour définir les directions (incidentes ou de réflexion), la notation (θ, φ) sera remplacée par \vec{U} . On aura donc par exemple $\rho^{dd}(\vec{U}_i, \vec{U}_r)$ au lieu de $\rho^{dd}(\theta_i, \varphi_i, \theta_r, \varphi_r)$. La réflectance lambertienne sera notée simplement ρ au lieu de ρ^{hh} .

Introduction

En télédétection, l'imagerie hyperspectrale, qui était au départ essentiellement destinée à des applications géologiques, a vu augmenter son champ d'application aussi bien civil que militaire. Cet intérêt croissant dans ces domaines a été encouragé par l'évolution rapide des instruments de mesure hyperspectraux et par le développement de méthodes de traitement permettant d'exploiter les informations dans les images.

La résolution spatiale des imageurs hyperspectraux est plus faible que celle d'un instrument multispectral ou panchromatique. La zone élémentaire délimitée par son IFOV² (Instantaneous Field Of View) et imagée par l'instrument (un pixel) n'est donc que rarement homogène (du point de vue matériaux, type de surface et éclairage). Aussi, le signal mesuré résulte de la combinaison de plusieurs matériaux présents dans le pixel. L'utilisation de l'information spectrale issue de cette technique d'imagerie permet dans certaines conditions de retrouver les principaux matériaux présents, chaque matériau étant caractérisé par un spectre de réflectance³ qui lui est propre. On parle alors de démélange ("unmixing" en anglais).

Les méthodes utilisées pour le démélange, lorsqu'elles font appel à peu d'informations a priori, c.à.d. quand elles sont non supervisées, peuvent être aussi appelées méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) [4] (se référer au chapitre "Etat de l'art en SAS" pour plus de détails), les sources qu'on veut séparer ici étant le plus souvent les spectres de réflectance. Certaines méthodes de démélange sont néanmoins supervisées et on ne peut donc pas les qualifier de méthodes de SAS.

Le modèle de mélange le plus répandu pour modéliser les mélanges dans les pixels est le modèle linéaire, le spectre du pixel étant alors considéré comme une combinaison linéaire des spectres de réflectance des matériaux qui le composent [73]. Un tel modèle de mélange est surtout valide lorsque le paysage est plat et que les pixels reçoivent le même ensoleillement.

Dans le cadre de cette thèse nous nous intéresserons au démélange hyperspectral pour des scènes de milieu urbain. Il y a en effet, avec l'accroissement récent des populations en milieu urbain, un intérêt croissant pour la surveillance des villes, et un besoin de développer des méthodes automatiques pour cela. Le démélange hyperspectral ici pourra permettre notamment d'améliorer la classification sur des images de milieu urbain.

2. L'IFOV est la mesure la plus commune de la résolution spatiale d'un système d'imagerie en télédétection. C'est une mesure angulaire qui permet de définir la surface au sol que peut voir l'instrument à une altitude et un instant donnés.

3. Voir définition dans le Glossaire.

L'étude du milieu urbain introduit une difficulté dans notre problème. Du fait de la présence de relief (bâtiments,...), la structure des milieux urbains contient une forte variabilité spatiale qui induit non seulement une forte variation d'éclairement (présence de zones d'ombre) mais aussi des réflexions entre les différentes surfaces. Le modèle de mélange linéaire n'est donc plus approprié.

Une première étape a donc été de développer un modèle de mélange adapté aux milieux urbains, en partant d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif. Cette première partie du travail a conduit à un modèle linéaire quadratique qui a ensuite été validé et étudié pour mieux comprendre les phénomènes en jeu. Ce modèle a déjà été utilisé dans quelques travaux pour le démélange mais sans justification basée sur des équations physiques, d'où l'intérêt de cette partie du travail.

Une fois le modèle de mélange validé, nous nous sommes intéressés à l'étape de séparation de sources qui est le but final de ce travail. Le modèle de mélange linéaire quadratique a en effet été peu étudié dans la littérature et peu de méthodes existent pour le démélange, surtout dans le cas urbain où les spectres de réflectance s'avèrent être souvent corrélés.

Il est donc intéressant de commencer par voir les méthodes de démélange ayant été proposées dans ce domaine en commençant naturellement par le cas linéaire et en nous intéressant ensuite plus particulièrement au cas non linéaire, ceci fait l'objet du premier chapitre de cette partie dédiée à la télédétection. Le deuxième chapitre sera dédié à l'établissement et étude du modèle de mélange. Les méthodes de démélange proposées pour ce modèle seront ensuite détaillées dans le chapitre 3. Nous étudierons finalement, dans le chapitre 4, les performances de ces méthodes sur des images synthétiques et réelles.

Chapitre 1

Le démixage spectral

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes de démixage spectral en télédétection. Nous commencerons d'abord par le cas linéaire puis nous nous intéresserons plus particulièrement au cas non linéaire. Il est à noter que le cas non linéaire, étant donné sa complexité, et le fait qu'il puisse aussi dépendre de l'application, a été beaucoup moins étudié dans la littérature.

1.1 Méthodes linéaires

Les méthodes de démixage linéaire reposent sur l'hypothèse que chaque pixel hétérogène est considéré comme étant la combinaison linéaire de M *endmembers* représentant les spectres de réflectance des composants purs présents dans ce pixel. La représentation mathématique du spectre associé à un pixel est donc la suivante :

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M a_m \boldsymbol{\rho}_m, \quad (1.1)$$

où

- $\boldsymbol{\rho}_m = [\rho_{m,1}, \dots, \rho_{m,L}]^T$: spectre de réflectance du m -ième matériau (m -ième endmember),
- a_m : m -ième abondance, c'est la proportion du m -ième matériau dans le pixel,
- M est le nombre de matériaux purs présents dans la scène,
- L est le nombre de bandes spectrales sous lesquelles l'image est acquise,

Les abondances étant les proportions du mélange, elles doivent vérifier les conditions d'additivité et de positivité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_m \geq 0, \forall m \in \{1, \dots, M\} \\ \sum_{m=1}^M a_m = 1 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature pour résoudre le problème défini par (1.1-1.2), soit en estimant les abondances en supposant connaître les spectres (méthodes supervisées) soit en estimant les deux en aveugle (méthodes non supervisées).

1.1.1 Méthodes supervisées

Les méthodes supervisées considèrent que les spectres de réflectance des matériaux présents dans la scène sont connus. Cela implique souvent l'utilisation d'une bibliothèque de réflectances qui fournit les endmembers.

Dans certains cas, le démélange peut aussi se faire en deux étapes indépendantes, la première consistant à déterminer les endmembers (voir ci-dessous pour les méthodes utilisées). La seconde est alors une méthode de démélange supervisée.

Dans le cas de méthodes supervisées, on ne parlera donc pas de séparation "aveugle" de sources, étant donné qu'une partie des éléments du mélange est connue : les réflectances. Ce qui est recherché ici c'est uniquement les abondances.

Parmi les méthodes les plus utilisées on trouve les méthodes des moindres carrés avec contraintes de non négativité, comme par exemple la méthode FCLS (Fully constrained Least squares) [74]. Dans [75] et [76], une contrainte de parcimonie est ajoutée aux moindres carrés, justifiée par le petit nombre des endmembers présents dans chaque pixel par rapport au nombre total de endmembers présents dans l'image.

[77] présente une méthode hybride regroupant deux méthodes : une première étape de clustering qui permet de classer les pixels de l'image pour réduire la dimensionalité et une deuxième étape de démélange par moindres carrés avec contraintes de positivité et de parcimonie, qui est appliquée aux centroïdes des classes trouvées et est basée sur une bibliothèque de spectres. La méthode est testée sur une image Aviris avec 3 spectres de minéraux.

Nous trouvons aussi des méthodes de classification qui fonctionnent par projection sur des sous-espaces et qui sont utilisées pour faire du démélange hyperspectral. [78] présente une telle méthode, qui est elle-même une extension d'autres méthodes existantes. La méthode proposée permet d'estimer les abondances en connaissant les endmembers. Dans les tests présentés, l'article propose d'utiliser un algorithme d'extraction de endmembers existant (VCA [79]) pour avoir au final une méthode globale pouvant être qualifiée de "non-supervisée".

On peut aussi citer les approches bayésiennes, par exemple celles utilisant le modèle NCM (Normal Compositional Model) [80], [81], dans lequel les endmembers sont considérés comme des variables aléatoires dont les vecteurs moyenne sont de vrais spectres de réflectance qui sont donc supposés connus, et ce afin de tenir compte de la variabilité statistique des endmembers d'un pixel à l'autre (cette variabilité peut être due à la différence d'éclairement, à la variabilité des matériaux de même nature...).

Méthodes de détermination des endmembers

L'utilisation de méthodes supervisées suppose que l'on connaît les endmembers présents dans nos mélanges. Ceci n'est pas illogique, même si l'on n'a pas à disposition une bibliothèque. En effet, comme nous l'avons dit ci-dessus, il existe des algorithmes qui permettent de déterminer les endmembers présents dans une image (indépendamment de la détermination des abondances). Ces algorithmes sont essentiellement basés sur des approches géométriques,

exploitant les caractéristiques géométriques des observations. Ils utilisent le fait que les observations forment un simplexe¹ dont les sommets sont des éléments purs, les endmembers. On peut néanmoins les répartir en deux classes.

La première concerne les méthodes basées sur la présence de pixels purs. Parmi les plus connues on trouve : N-FINDR [82], PPI (Pixel Purity Index) [83], VCA (Vertex Component Analysis) [79], SGA (Simplex Growing Algorithm) [84]. Ces méthodes cherchent les pixels purs dans l'image et extraient les endmembers à partir de ces pixels. Cela suppose donc qu'il y ait dans l'image au moins un pixel pur pour chaque matériau présent, ce qui n'est pas forcément le cas. Néanmoins quelques-unes de ces méthodes sont fortement utilisées car semblent permettre d'obtenir les pixels les plus "purs" dans l'image.

La deuxième classe de méthodes concerne celles qui cherchent plutôt à minimiser le simplexe formé par les données, mais leurs performances restent généralement dépendantes de la présence de pixels purs. On peut par exemple citer dans ce cadre MVT (Minimum Volume Transform) [85], CCA (Convex Cone Analysis) [86] et ORASIS (Optical Real-time Adaptive Spectral Identification System) [87].

Différentes méthodes sont citées aussi dans [73] ou plus récemment dans [88], [89] et [90]. Dans [91], quelques méthodes sont présentées brièvement puis comparées sur des données simulées et réelles (images AVIRIS). Il est donc possible de se référer à ces derniers articles pour plus de détails sur les méthodes existantes.

1.1.2 Méthodes non supervisées

Ces méthodes peuvent être considérées comme des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) car il s'agit de déterminer, à partir des spectres des pixels, les spectres des matériaux qui les composent, ainsi que les abondances, sans connaissance a priori sur les coefficients de mélange ou sur les spectres de ces matériaux.

Certaines méthodes se font en deux étapes, la première étant la détermination des endmembers et la deuxième, celle des abondances par une méthode supervisée. Mais ces méthodes ont été parcourues dans la section précédente car elles utilisent généralement une méthode de la littérature pour l'extraction (la méthode décrite et proposée dans les articles concernés est en fait la méthode d'estimation des abondances, qui est supervisée). Les méthodes proposées dans ces travaux ne peuvent donc pas vraiment être qualifiées de "non-supervisées".

Nous essaierons donc ici de donner un panorama des classes des autres méthodes non supervisées existantes, c.à.d. celles qui permettent d'estimer à la fois les endmembers et les abondances.

1. En géométrie, un simplexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $(n+1)$ points utilisé pour former un repère affine dans un espace affine de dimension n . Dans un espace de dimension 2 par exemple le simplexe est le triangle, dans un espace à dimension 3, c'est le tétraèdre.

Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes basées sur la NMF (Non-negative Matrix Factorization), qui sont basées sur la non négativité des données [92] [93]. Dans [92], par exemple, la NMF est utilisée avec une contrainte de 'lissage' (smoothness) (voir chapitre "Etat de l'art en SAS" pour plus de détails). Ensuite les endmembers estimés sont comparés avec une base de données pour en sélectionner les plus pertinents. La méthode est donc considérée semi-supervisée car elle fait appel à une base de données mais reste automatisée. Pour cette comparaison les auteurs utilisent la mesure de divergence de Kullback-Leibler, qui est une mesure d'entropie relative. Par la suite les abondances sont recalculées par une méthode de moindres carrés avec contrainte de positivité. On peut aussi citer [94] pour la méthode MVC-NMF qui ajoute à la NMF une contrainte sur le volume du simplexe formé par les données, s'inspirant ainsi des méthodes géométriques.

Il y a aussi les méthodes basées sur l'ICA (Independent Component Analysis), qui supposent l'indépendance des sources : [95] (sources=spectres) et [96] (sources = abondances). Dans [97] (sources = abondances) l'efficacité des méthodes ICA pour le démélange spectral en télédétection est étudiée. Il y est montré que la dépendance des sources altère les performances de ces méthodes mais que les performances s'améliorent avec l'augmentation de la variabilité des endmembers, de leur nombre et du SNR. L'application de ce genre de méthodes dans notre cas est exclue car, comme on le verra dans la suite de ce rapport, les endmembers auxquels nous sommes confrontés en milieu urbain sont assez corrélés et présentent peu de variabilité (les sources pour nous seront les spectres). [98] propose de se baser sur la complexité des sources (sources=abondances) plutôt que sur leur indépendance car dans le cas du démélange hyperspectral, les hypothèses d'indépendance ne sont souvent pas vérifiées. Les signaux extraits doivent être d'une complexité minimale ce qui correspond à une prédictibilité maximale pour ces signaux. L'algorithme de calcul utilisé est la descente de gradient.

Il existe aussi des méthodes statistiques de type paramétrique (par opposition aux méthodes ICA), utilisant des approches bayésiennes. Certaines sont basées sur le modèle NCM cité plus haut [99], dit aussi SMM (Stochastic Mixing Model) [100]. [99] par exemple est une méthode bayésienne semi-supervisée qui permet, en utilisant une bibliothèque de endmembers, d'estimer le nombre des endmembers qui interviennent dans le mélange et de les sélectionner. L'algorithme permet aussi l'estimation des abondances d'une manière simultanée. [100] propose une méthode non supervisée estimant à la fois les endmembers et les abondances.

Dans [101] et [102], une loi de Dirichlet a été choisie pour modéliser les abondances dans les mélanges. L'estimation est faite par maximum de vraisemblance avec l'algorithme itératif EM (Expectation Maximisation). Les abondances et les spectres sont estimés en parallèle puis les spectres des réflectances sont remis à l'échelle par minimisation d'une erreur quadratique avec les spectres d'une bibliothèque (base de données de spectres).

Et pour finir, on peut aussi trouver des méthodes de classification, pouvant être aussi utilisées pour du démélange, comme par exemple [103], basée sur la projection sur des sous-espaces.

Il est possible de se référer à [73, 88, 89, 90] pour plus de références et de détails sur les méthodes linéaires, ainsi qu'aux références dans les exemples cités.

1.2 Méthodes non linéaires

Dans certains cas, le modèle linéaire ne suffit pas à rendre compte de tous les phénomènes radiatifs qui induisent le contenu de chaque pixel. Cela est le cas quand la lumière se réfléchit sur au moins deux matériaux différents avant de remonter vers le capteur, c'est à dire quand il y a plusieurs réflexions. Ce phénomène se produit lorsque l'on a des structures 3D sur la scène (végétation, scènes urbaines...) [104] ou en présence de mélanges complexes ou fins ("intimate mixtures", en anglais), c-à-d au niveau particulaire (cas par exemple des grains de sable...) [105]. Dans certaines conditions d'observation et pour certaines scènes, ce phénomène ne peut plus être négligeable [73][104]. Ces réflexions multiples jouent notamment un rôle important dans les scènes très rugueuses (non planes), ce qui est le cas pour les milieux qui nous intéressent, c-à-d les milieux urbains.

Pour tenir compte de cette non-linéarité dépendant des données traitées il faut donc des méthodes de traitement non linéaires. Il existe néanmoins moins de méthodes non linéaires que linéaires dans la littérature et cela est essentiellement dû à la complexité des méthodes non linéaires, mais aussi à la difficulté d'appréhender le modèle de mélange auquel on est confronté, suivant l'application.

1.2.1 Sans modèle de mélange défini

La plupart des méthodes non linéaires existantes ne partent pas d'un modèle de mélange défini, et encore moins d'équations physiques. Plusieurs de ces méthodes sont d'ailleurs basées sur l'utilisation de réseaux de neurones, qui sont des méthodes ne nécessitant pas la connaissance du modèle. Nous citons ici quelques exemples de travaux qui traitent de ce type de méthodes non linéaires.

Dans [106] et [107] une méthode hybride (combinant une méthode linéaire, pour l'initialisation, et une non linéaire) de démélange non linéaire est proposée pour mieux tenir compte des non linéarités qui peuvent exister dans les mélanges à cause des réflexions multiples, et donc dans le but d'avoir de meilleurs résultats qu'avec une méthode linéaire. Le démélange se fait en deux étapes :

- La première étape est une méthode linéaire qui sert à trouver des valeurs d'initialisations, représentatives, pour l'étape suivante. Pour [106] les endmembers sont estimés par

l'algorithme AMEE (Automated Morphological Endmember Extraction) proposé par les mêmes auteurs [108]. Finalement, les abondances sont trouvées avec la méthode FCLSU (Fully Constrained Linear Spectral Unmixing) [74]. [107] utilise plutôt N-FINDR pour l'extraction des endmembers puis l'algorithme OSP (Orthogonal Subspace Projection) [109].

- La 2ème étape est une méthode non linéaire pour déterminer les abondances, elle utilise un Perceptron Multi-Couche (MLP : Multi-Layer Perceptron).

Dans [106], la méthode est testée sur une image de scène avec végétation (présence de sol, végétation au sol et arbres) tandis que [107] s'intéresse à des mélanges de minéraux. Dans les deux cas la méthode non linéaire semble donner de meilleures performances qu'une méthode linéaire.

On retrouve encore une utilisation des réseaux de neurones dans [110] pour cette fois-ci des scènes urbaines multispectrales (9 bandes). Les endmembers sont extraits à partir de pixels purs d'images à forte résolution. Ensuite deux méthodes sont proposées pour estimer les abondances, une linéaire, des moindres carrés sans contrainte, et une non linéaire, basée sur des réseaux de neurones. Des tests sont faits sur des images réelles dans le but de séparer 3 endmembers : vegetation, sol et surfaces imperméables. Les réseaux de neurones s'avèrent plus efficaces d'après ce papier, car ils permettent de tenir compte de la non linéarité éventuelle des mélanges.

Dans [111] on trouve une comparaison des performances de différentes méthodes non linéaires de démélange spectral (ou classification sub-pixellaire) : arbres de régression, modèles adaptatifs ART (Adaptive Resonance Theory), Perceptron Multi-Couche (MLP). Les tests sont faits sur des données synthétiques et montrent que le MLP, qui est d'ailleurs le plus utilisé (voir [111] pour plus de détails sur les méthodes et pour les références), donne les meilleures performances. Par contre il est plus difficile et plus long à implémenter (plus de paramètres à fixer, apprentissage long...).

Un autre type de méthode est présenté dans [112], qui diffère complètement des réseaux de neurones : Simplex Volume Maximization. C'est une extension de la méthode N-FINDR au cas non linéaire, en considérant que ce n'est plus un simplexe mais une variété² ("manifold" en anglais), un calcul de distances géodésiques adapté est donc utilisé, pour tenir compte de la non linéarité des données. Le type de non-linéarité n'est pas précisé, l'article ne se base donc pas sur un modèle bien défini mais considère juste que les pixels s'écrivent : $\mathbf{x}_i = F\left(\sum_{m=1}^M a_{im}\boldsymbol{\rho}_m\right)$, où F est une fonction non linéaire continue bijective. C'est donc un mélange post-nonlinéaire au sens de la SAS (voir chapitre "Etat de l'art en SAS"). L'algorithme, qui est testé sur des données simulées et des données réelles avec des minéraux, semble donner de meilleurs résultats qu'une méthode linéaire (N-FINDR suivi de FCLS).

2. En géométrie, une variété est un espace topologique abstrait, qui peut être "localement" vu comme (approximativement) euclidien de dimension n , n étant la dimension de la variété. Parmi les variétés les plus simples figurent les courbes et surfaces du plan et de l'espace euclidien.

Dans [105] on trouve encore un autre type de méthode : une approche basée sur un noyau adaptatif. La méthode est une généralisation de l'algorithme FCLS [74] cité plus haut et est appelée KFCLS (Kernel fully Constrained Least Squares). Un noyau est introduit dans le critère à minimiser, avec un paramètre réglable qui dépend de la linéarité du mélange, le but étant de tenir compte de la non linéarité des mélanges. La méthode est supervisée (elle nécessite l'extraction préalable des endmembers) et permet donc d'estimer les abondances pour des mélanges linéaires ou non linéaires à la fois. Elle permet notamment de détecter les pixels où il y a non linéarité du mélange. L'image utilisée représente une scène côtière avec du sable, de l'eau et de la végétation et, d'après les résultats de l'article, la non linéarité se situe au niveau de la plage, et est donc introduite par le sable. Il est à noter que l'article ici s'intéresse essentiellement à des mélange fins ("intimate") (voir aussi [113] des mêmes auteurs pour plus de détails).

Toutes ces méthodes (voir aussi références citées dans les exemples de travaux cités), même si elles ne sont pas basées sur un modèle de mélange précis, montrent néanmoins l'intérêt de tenir compte de la non linéarité lors du démélange spectral. Dans des cas d'application où le modèle est complexe et la non linéarité non définie clairement, ces méthodes peuvent avoir leur intérêt. Dans certains cas on peut néanmoins modéliser le mélange, comme on va le voir dans la suite.

1.2.2 Avec modèle spécifique : linéaire-quadratique ou bilinéaire

Certaines méthodes récentes proposent un modèle bilinéaire ou linéaire quadratique par rapport aux spectres. Le modèle bilinéaire est un cas particulier du modèle linéaire quadratique, lorsqu'il n'y a pas de termes au carré. Les méthodes basées sur ces modèles ont pour but de tenir compte des possibles interactions entre les différents matériaux en présence de relief. Le cas le plus traité dans la littérature est celui de scènes avec végétation [114][115]. On s'intéressera ici, en plus des méthodes, aux modèles de mélange proposés, afin de voir par la suite l'intérêt de notre approche basée sur des équations physiques ainsi que la différence avec le modèle physique que nous proposerons. Cette différence réside surtout dans la manière de définir les coefficients de mélange et les hypothèses les concernant.

Dans [116], par exemple, un modèle bilinéaire est proposé. Le cas étudié concerne un mélange d'uniquement 2 endmembers et tient compte des réflexions de premier ordre entre deux matériaux (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$\mathbf{x} = a_1 \boldsymbol{\rho}_1 + a_2 \boldsymbol{\rho}_2 + a_3 \boldsymbol{\rho}_1 \odot \boldsymbol{\rho}_2, \quad \text{avec } \sum_m a_m = 1, a_m \geq 0 \quad (1.3)$$

où \odot correspond à la multiplication terme à terme entre les 2 vecteurs.

Cependant, dans l'article, il est considéré que le terme quadratique n'intervient que lorsque l'on

a de l'ombre, et est donc supposé nul ailleurs, ce qui peut être faux³. Une classe ombre est donc détectée, représentée par le produit des spectres des deux matériaux.

La méthode de démélange utilisée est supervisée et se déroule en deux étapes :

- Déterminer les pixels purs de chaque classe de matériaux d'une manière supervisée (manuelle).
- Estimation des abondances par une méthode de moindres carrés avec contraintes.

L'article montre que le fait de tenir compte de l'existence de zones d'ombre dans lesquelles on a des termes quadratiques, semble améliorer les résultats pour les zones sans ombre par rapport aux méthodes linéaires. L'utilité des termes quadratiques est donc prouvée mais le choix du modèle, notamment l'hypothèse de somme à 1 des abondances, n'est pas vraiment validée car les données utilisées pour les tests sont générées suivant le modèle proposé.

On retrouve aussi la proposition d'un mélange bilinéaire dans [115]. Dans cet article le cas particulier traité est celui des vergers. Contrairement au cas précédent, ici les abondances (appelées aussi dans l'article fractions) des termes quadratiques sont considérées 'virtuelles', c.à.d. n'ayant pas d'existence physique dans la surface représentée par le pixel. Les auteurs partent d'un modèle déjà proposé pour des scènes avec végétation [117][118], pour l'étendre en se basant sur des simulations. Le premier modèle est donc le suivant :

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\rho}_1 + c_2 \boldsymbol{\rho}_2 + c_3 \boldsymbol{\rho}_1 \odot \boldsymbol{\rho}_2, \quad \text{avec } \sum_j c_j = K, c_j \geq 0 \text{ et } a_j = \frac{c_j}{K} \quad (1.4)$$

Les abondances sont ensuite définies par les a_j , ce qui donne la somme à 1. Dans ce modèle, l'abondance a_3 est considérée virtuelle. D'après [115] cette considération induit une sous-estimation des valeurs de a_1 et a_2 . Une autre définition des abondances (ou fractions) est alors proposée dans l'article :

$$f_j = a_j + \tau_j \sum_k a_{j,k} \quad (1.5)$$

où $a_{j,k}$ correspondent aux fractions des termes d'ordre supérieur à 1 faisant intervenir le matériau j . Trois définitions différentes sont proposées pour τ_j (voir l'article pour plus de détails). Ce qui est certain, c'est qu'aucune de ces définitions ne part d'une justification basée sur des équations physiques et elles restent donc contestables. Néanmoins, l'article montre que les interactions de premier ordre entre matériaux, en présence de structures 3D (plus spécifiquement ici dans les vergers), ne sont pas négligeables. Il est aussi démontré que l'on peut négliger les interactions d'ordre supérieur. La méthode proposée est une méthode supervisée, seules les fractions sont donc inconnues et elles sont calculées par minimisation d'une erreur quadratique (LSE).

[114] propose aussi un modèle bilinéaire mais en le considérant comme une approximation au premier ordre, par séries de Taylor, d'un modèle non linéaire inconnu. Le modèle présenté

3. En réalité les réflexions jouent un rôle aussi bien au soleil qu'à l'ombre, elles peuvent être négligeables au soleil mais cela dépend de la distance par rapport au matériau réfléchissant, de la nature de celui-ci, de l'éclairement qu'il reçoit... Une étude du phénomène est présentée dans le chapitre 2 de cette partie Télédétection.

est le suivant

$$\mathbf{x} = \sum_m a_m \boldsymbol{\rho}_m + \sum_{\substack{m,s \\ s < m}} a_m a_s \boldsymbol{\rho}_m \odot \boldsymbol{\rho}_s, \quad \text{avec } \sum_m a_m = 1, a_m \geq 0 \quad (1.6)$$

Les a_m et a_s de la partie quadratique sont les abondances de la partie linéaire, correspondant aux matériaux m et s . Comme on peut le voir, ce modèle adopte donc une définition différente des précédentes des coefficients de la partie quadratique, et encore une fois cela n'est pas justifié physiquement dans l'article. Les tests montrés correspondent à des scènes artificielles de forêts avec 3 classes de matériaux : le dessus des arbres modélisés, le sol au soleil et l'ombre. La méthode utilisée pour le démélange non linéaire est supervisée. Les spectres sont détectés à partir de pixels purs puis utilisés pour estimer les abondances. Les auteurs montrent que ce modèle donne de meilleures performances en démélange que le modèle linéaire et qu'il est donc important de tenir compte des termes quadratiques pour les réflexions entre matériaux.

Les travaux dans [119] sont aussi intéressants car, en plus de présenter une nouvelle proposition pour le modèle bilinéaire, ils présentent une approche différente pour résoudre le problème de démélange non linéaire, qui est une approche bayésienne. Les auteurs utilisent un algorithme bayésien hiérarchique, basé sur des MCMC (Monte Carlo Markov Chain), et ayant déjà été utilisé dans le cadre de démélange linéaire [80]. Le modèle proposé dans [119] est le suivant :

$$\mathbf{x} = \sum_m a_m \boldsymbol{\rho}_m + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{s=m+1}^M \gamma_{m,s} a_m a_s \boldsymbol{\rho}_m \odot \boldsymbol{\rho}_s, \quad \text{avec } \sum_m a_m = 1, a_m \geq 0, 0 \leq \gamma_{m,s} \leq 1 \quad (1.7)$$

La méthode proposée permet d'estimer les coefficients de mélange en connaissant les endmembers. Ceux-ci sont donc préalablement estimés par l'algorithme VCA [79] pour les tests sur de vraies images. Cette méthode (VCA) étant dépendante de la présence de pixels purs, l'article montre (à travers une image simulée) que l'absence de pixels purs dégrade le résultat de l'estimation des abondances par la méthode proposée (car les endmembers utilisés ne sont pas exacts).

Si on s'intéresse aux milieux urbains, les modèles proposés dans [114] et [119] ont un point négatif commun concernant leur définition des coefficients de mélange des termes quadratiques. En effet, ces modèles ne permettent pas qu'un matériau qui n'est pas présent dans le pixel puisse réfléchir sur les matériaux du pixel. Or ceci est possible en milieu urbain. C'est par exemple le cas si on est en visée nadir (lorsque l'axe du capteur est perpendiculaire à la scène) et qu'un pixel représentant le sol reçoit des réflexions d'un bâtiment dont les murs ne sont pas visibles sur l'image.

Pour finir, il est intéressant de citer ici les récents travaux présentés dans [104]. En effet les auteurs montrent par un procédé expérimental que le modèle linéaire n'est pas valable en présence de structures 3D sur la scène. Des tests sont présentés avec des images obtenues en laboratoire à partir d'une scène artificielle modélisant du relief (éléments 3D) de type urbain. Des tentatives de démélange avec un modèle linéaire, puis le modèle bilinéaire adapté de celui des équations (1.4-1.5) [115] montrent que le modèle linéaire quadratique (ou bilinéaire dans le cas de l'exemple de scène choisie) décrit mieux les phénomènes de réflexions.

1.3 Conclusion

Ce chapitre a dressé un panorama des méthodes de démixtion spectrale en télédétection. On a d'abord présenté un état de l'art des méthodes existantes dans le cas linéaire, même si ce n'est pas celui qui nous concernera dans notre travail, car c'est le cas qui a été le plus largement étudié.

On s'est ensuite intéressé aux méthodes non linéaires et plus particulièrement à celles dédiées au mélange linéaire quadratique, car c'est celui qui nous concerne. Comme on a pu le voir, les modèles présentés n'ont pas été justifiés physiquement, surtout concernant les coefficients de la partie quadratique et les hypothèses sur les abondances, d'où l'intérêt du travail présenté dans le prochain chapitre.

Quant aux méthodes proposées pour le cas linéaire quadratique, la plupart sont supervisées, alors que l'objectif de notre travail est de trouver une méthode non supervisée (méthode de SAS) adaptée à notre modèle, et sont spécifiques à une définition du modèle. Il a donc fallu trouver une méthode adaptée à notre modèle et au cas urbain (notamment aux caractéristiques des spectres urbains).

Chapitre 2

Modèle de mélange physique

Introduction

Le but de notre travail est de faire du démélange spectral sur des scènes de milieu urbain, dans le domaine réflectif, c.à.d. visible et proche infra-rouge (longueurs d'ondes couvrant le domaine de 0.4 à $2.5 \mu\text{m}$). La plupart des méthodes de démélange dans ce domaine spectral sont basées sur un modèle linéaire de réflectances, comme déjà expliqué dans le chapitre d'état de l'art précédent (voir par exemple [73], [88] et [91]). Une telle hypothèse n'est cependant valide que pour un sol plat avec un éclairage homogène.

Dans le cas de scènes urbaines, le modèle de mélange est plus compliqué, du fait de la présence de structures 3D. Ceci implique d'une part une variabilité dans l'éclairage des surfaces présentes : l'éclairage dépend en effet de l'orientation de la surface, ainsi que de son environnement, qui peut impliquer la présence d'ombre par exemple. D'autre part, la structure 3D des bâtiments induit des réflexions multiples de la lumière entre les différentes surfaces avant d'atteindre le capteur (voir Figure 2.1). La réflectance d'un pixel peut alors contenir la contribution d'un matériau de son voisinage, même si ce pixel ne contient pas ce matériau. Nous allons donc démontrer que le modèle linéaire n'est plus valide en milieu urbain.

En partant d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif, nous démon-

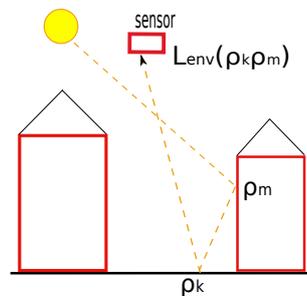


FIGURE 2.1 – Contribution des réflexions dues au voisinage, avec ρ_i la réflectance de la surface i (où i peut être k ou m) et L_{env} la luminance due à ces réflexions.

trons que le modèle représentant les phénomènes rencontrés en milieu urbain est un modèle linéaire quadratique. Ce modèle tient uniquement compte des réflexions de second ordre, les réflexions d'ordre supérieur étant considérées négligeables, ce qui est justifié étant donné l'ordre de grandeur des réflectances (les réflectances ont des valeurs entre 0 et 1, le produit de 2 réflectances est donc déjà faible, le produit de 3 réflectances devient alors vraiment négligeable.).

Un tel modèle a déjà été utilisé dans la littérature pour du démélange sur des scènes avec végétation, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, mais sans justification physique [114], [115],[116], [119]. Les hypothèses considérées concernant les coefficients de mélange varient cependant d'une approche à l'autre. On démontrera ici les hypothèses justifiables physiquement concernant les coefficients de mélange. Le travail présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis [120].

Dans la section 2.1, on présentera la méthode suivie pour aboutir à notre modèle de mélange pour les scènes urbaines. Ce modèle est ensuite validé sur des données synthétiques dans la section 2.2 où l'importance relative des différents termes radiatif en jeu sera aussi évaluée. Dans la section 2.3, des simplifications du modèle, basées sur des hypothèse justifiées, seront présentées, pour arriver à un modèle linéaire quadratique invariant spectralement. Finalement, dans la section 2.4, nous finalisons le modèle pour le rendre plus adapté au démélange spectral. Nous discutons aussi, dans cette dernière section, les possibles hypothèses sur les coefficients de mélange, en comparaison de ce qui existe dans la littérature.

2.1 Le modèle de mélange physique

Dans cette section, nous montrons comment notre modèle de mélange physique est obtenu, à partir d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif. Le développement de ce modèle suit la même procédure que celle dans [121], développée pour le domaine thermique. Cette approche, initialement proposée par [122], consiste à comparer la luminance basse résolution reçue au niveau du capteur à la luminance totale provenant de toutes les surfaces élémentaires contenues dans le pixel basse résolution correspondant.

2.1.1 Présentation de la méthode aboutissant au modèle

Un pixel à basse résolution correspond souvent à une surface hétérogène composée de différentes surfaces élémentaires homogènes. Pour chaque pixel, le capteur reçoit donc des contributions résultant des réflectances de toutes ces surfaces élémentaires. Ceci est illustré par la figure 2.2(a). Néanmoins, le signal reçu par le capteur de cette surface hétérogène peut aussi être considéré comme provenant d'une surface équivalente horizontale plane et homogène. On suppose donc, qu'à basse résolution, chaque pixel de l'image peut être associé à une telle surface équivalente plane située au niveau de la canopée urbaine. On attribue alors une réflectance équivalente $\langle \rho \rangle$ (correspondant à la surface équivalente plane) à chaque pixel (voir figure 2.2(b)).

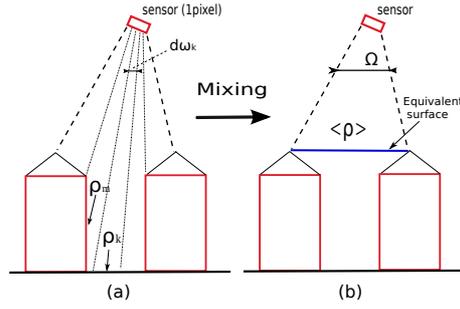


FIGURE 2.2 – Principe du mélange (mixing) - les lignes hachurées définissent l'IFOV (Instantaneous Field of View) Ω à basse résolution, et les lignes continues l'IFOV $d\omega_k$ à fine résolution.

Pour aboutir à l'équation exprimant la réflectance équivalente d'un pixel en fonction des contributions des réflectances des surfaces élémentaires, nous procédons comme suit :

- Exprimer la luminance totale d'un pixel donné comme le résultat des contributions des différents matériaux qui le composent au niveau du sol (section 2.1.2).
- Exprimer la luminance du pixel en considérant la surface plane équivalente qui lui est associée (section 2.1.3).
- Faire une identification terme à terme des contributions radiatives entre les deux équations précédentes afin d'obtenir l'expression de la réflectance équivalente du pixel (section 2.1.4).

2.1.2 Luminance au niveau du sol à fine résolution

En supposant que chaque pixel est composé de N surfaces élémentaires homogènes indexées par k , la luminance totale L_{mix} reçue par le capteur, dans le champ de vue délimité par l'angle solide Ω correspondant à un pixel donné, peut s'exprimer comme suit

$$\begin{aligned} \Omega L_{mix} &= \sum_k L_{D,k} d\omega_k + \sum_k L_{atm,k}^\downarrow d\omega_k + \sum_k L_{env,k} d\omega_k \\ &+ \sum_k L_{coupling,k} d\omega_k + \sum_k L_{atm,k}^\uparrow d\omega_k + \sum_k L_{diff,k}^\uparrow d\omega_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec

- $d\omega_k$: angle solide correspondant à la surface élémentaire k .
- $L_{D,k}$: luminance directe due à l'éclairement solaire reçu par la surface k et directement réfléchi vers le capteur.
- $L_{atm,k}^\downarrow$: luminance atmosphérique descendante incidente sur la surface k et directement réfléchie vers le capteur.
- $L_{env,k}$: luminance due au voisinage de la surface considérée k (réflexions provenant des surfaces voisines).
- $L_{coupling,k}$: luminance résultant du couplage terre-atmosphère (réflexions multiples entre l'atmosphère et le sol).

- $L_{diff,k}^\uparrow$: luminance due à l'éclairement descendant, incident sur le voisinage de la surface k , puis réfléchi vers le capteur.
- $L_{atm,k}^\uparrow$: luminance atmosphérique montante, incidente au capteur dans l'angle solide $d\omega_k$.

En remplaçant les luminances d'intérêt par leurs expressions données dans [123], on obtient

$$\begin{aligned}
L_{mix} &= \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{c,k})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L_{atm,k}^\downarrow \\
&+ \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \iint_{m \in V_k} \frac{\rho_k^{dd}(\vec{U}_{km}, \vec{U}_{c,k})}{\pi} g_{m,k} \left[\frac{\rho_m^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{mk})}{\pi} E_{D,m} + \frac{\rho_m^{hd}(\vec{U}_{mk})}{\pi} E_{diff,m} \right] dS_m \\
&+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L_{atm,k}^\uparrow + \sum_k S_k L_{diff,k}^\uparrow \tag{2.2}
\end{aligned}$$

avec

- $S_k = \frac{d\omega_k}{\Omega}$: angle solide élémentaire, normalisé, sous lequel le capteur voit la surface élémentaire k (avec $\sum_k S_k = 1$).
- $t^{\uparrow k-c}$: transmission atmosphérique montante entre la surface k et le capteur.
- \vec{U}_s : vecteur normalisé de la direction du soleil à la surface k .
- $\vec{U}_{c,k}$: vecteur normalisé de la direction du capteur par rapport à la surface k .
- \vec{U}_{km} : vecteur normalisé définissant la direction entre la surface k et la surface m (direction entre les centres de ces surfaces).
- ρ_k^{dd} : réflectance bidirectionnelle de la surface élémentaire k , les directions étant définies par \vec{U}_s et $\vec{U}_{c,k}$.
- ρ_k^{hd} : réflectance hémisphérique directionnelle de la surface élémentaire k , elle dépend uniquement de la direction d'observation.
- $E_{D,k}$: éclairement direct (solaire) reçu par la surface k .
- $E_{diff,m}$: éclairement atmosphérique de surface m dû au voisinage .
- V_k : voisinage de la surface k .
- $g_{m,k} = \langle \vec{n}_k, \vec{U}_{km} \rangle \cdot \frac{\langle \vec{n}_m, \vec{U}_{mk} \rangle}{r^2}$: facteur de forme ou facteur géométrique (dépend uniquement de la géométrie de la scène), avec r la distance entre les surfaces m et k , et \vec{n}_k la normale à la surface k .

2.1.3 Luminance au niveau de la surface équivalente

Soit $\langle L \rangle$ la luminance équivalente correspondant à la surface équivalente, définie au niveau de la canopée urbaine, et associée au pixel. Cette luminance équivalente $\langle L \rangle$ est la luminance mesurée par un capteur observant une surface plane :

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= \langle L_{es} \rangle + L_{atm}^\downarrow + L_{coupling} + L_{atm}^{\uparrow es-c} + L_{diff}^\uparrow \\
&= \frac{\langle \rho \rangle}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} + L_{atm}^\downarrow + L_{coupling} + L_{atm}^{\uparrow es-c} + L_{diff}^\uparrow \tag{2.3}
\end{aligned}$$

où $\langle L_{es} \rangle$ est la luminance au niveau de la surface équivalente, résultant des réflexions de l'éclairage solaire sur la surface équivalente. $L_{atm}^{\uparrow es-c}$ et $t^{\uparrow es-c}$ sont respectivement la luminance et transmission atmosphériques montantes de la surface équivalente vers le capteur. Tous les autres termes sont les mêmes que dans l'équation (2.2), sauf qu'ils sont ici définis au niveau de la surface équivalente (et non pour une surface élémentaire au sol).

Comme on peut le voir, les termes dûs à l'environnement ne sont pas présents ici (en comparaison à l'équation (2.2)) car la surface considérée est plane (la surface équivalente).

La transmission atmosphérique montante et la luminance atmosphérique montante de l'équation (2.2) peuvent s'exprimer à partir de celles de l'équation (2.3) :

$$t^{\uparrow k-c} = t^{\uparrow k-es} \times t^{\uparrow es-c} \quad (2.4)$$

$$\sum_k S_k L_{atm,k}^{\uparrow} = \sum_k S_k L_{atm,k}^{\uparrow k-c} = \sum_k S_k L_{atm,k}^{\uparrow k-es} \times t^{\uparrow es-c} + L_{atm}^{\uparrow es-c} \quad (2.5)$$

avec

- $t^{\uparrow k-es}$: transmission atmosphérique montante de la surface k à la surface équivalente.
- $L_{atm}^{\uparrow k-es}$: luminance atmosphérique montante de la surface k vers la surface équivalente.

2.1.4 Identification donnant le modèle de mélange

Les expressions de la luminance totale d'un pixel données par les équations (2.2) et (2.3) sont égales, c.à.d. $L_{mix} = \langle L \rangle$. On peut procéder à une identification terme à terme, en tenant compte du principe de conservation du flux radiatif à chaque niveau.

En identifiant les termes radiatifs de même nature dans ces deux expressions, on peut facilement simplifier par les termes suivants : L_{atm}^{\downarrow} , $L_{coupling}$, L_{diff}^{\uparrow} . L'équation (2.5) nous permet aussi d'éliminer le terme $L_{atm}^{\uparrow es-c}$. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\langle \rho \rangle}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} &= \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{c,k})}{\pi} E_{D,k} \\ &+ \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \iint_{m \in V_k} \frac{\rho_k^{dd}(\vec{U}_{km}, \vec{U}_{c,k})}{\pi} g_{m,k} \left[\frac{\rho_m^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{mk})}{\pi} E_{D,m} + \frac{\rho_m^{hd}(\vec{U}_{mk})}{\pi} E_{diff,m} \right] dS_m \\ &+ \sum_k S_k L_{atm,k}^{\uparrow k-es} \times t^{\uparrow es-c} \end{aligned} \quad (2.6)$$

On simplifie ensuite par $t^{\uparrow es-c}$, dans tous les termes, en utilisant l'expression (2.4). Les derniers termes $L_{atm,k}^{\uparrow k-es}$ peuvent être éliminés, en considérant que l'atmosphère entre le sol et le niveau de la canopée urbaine peut être négligé. Pour la même raison, la transmission atmosphérique en dessous du niveau de la canopée est de $t^{\uparrow k-es} \simeq 1$ (en supposant que l'on est en dehors d'une forte bande d'absorption). La réflectance équivalente d'un pixel en fonction des réflectances élémentaires peut être finalement exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \sum_{k=1}^N S_k \left[\rho_k^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{c,k}) \frac{E_{D,k}}{E_D} \right. \\ &\quad \left. + \iint_{m \in V_k} \rho_k^{dd}(\vec{U}_{km}, \vec{U}_{c,k}) g_{m,k} \left(\frac{\rho_m^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{mk}) E_{D,m}}{\pi E_D} + \frac{\rho_m^{hd}(\vec{U}_{mk}) E_{diff,m}}{\pi E_D} \right) dS_m \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notons que cette équation est uniquement valide pour un pixel totalement ou partiellement au soleil ($E_D \neq 0$).

Nous supposons à présent, sans perte de généralité, que les réflectances dans le second terme additif (deuxième ligne) ont un comportement lambertien (ρ_k et ρ_m ne dépendent pas des directions du soleil et du capteur : $\rho^{hd} = \rho^{dd} = \rho$). Cette hypothèse est généralement faite car, d'une part les réflexions multiples tendent à rendre le comportement du matériel lambertien, et d'autre part ce terme est faible comparé au premier. Les réflectances dans ce terme seront donc notées ρ_k et ρ_m . On approxime aussi les intégrales par des sommes, en supposant que le voisinage de chaque surface élémentaire k est composé de surfaces élémentaires m de surface ΔS telle que chacune est composée d'un seul matériau. Cela donne

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho \rangle_D + \langle \rho \rangle_{env} \quad (2.8)$$

avec

$$\langle \rho \rangle_D = \sum_{k=1}^N S_k \frac{E_{D,k}}{E_D} \rho_k^{dd}(\vec{U}_s, \vec{U}_{c,k}) \quad (2.9)$$

$$\langle \rho \rangle_{env} = \langle \rho \rangle_{env,D} + \langle \rho \rangle_{env,diff} \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle_{env,D} = \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} S_k \frac{g_{m,k}}{\pi} \Delta S \frac{E_{D,m}}{E_D} \rho_k \rho_m \\ \langle \rho \rangle_{env,diff} = \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} S_k \frac{g_{m,k}}{\pi} \Delta S \frac{E_{diff,m}}{E_D} \rho_k \rho_m \end{cases} \quad (2.11)$$

Ceci est notre modèle de mélange physique dans un cas général. Le premier terme de la partie droite de l'équation (2.8) correspond au mélange linéaire des propres composantes du pixel, les ρ_k (équation (2.9)). Le second terme, qui est quadratique en fonction des réflectances (équations (2.10)-(2.11)), est dû aux réflexions provenant des surfaces situées dans l'environnement de chaque surface élémentaire. Si la scène est plane et que l'éclairement incident est homogène, le second terme disparaît et on retrouve le modèle linéaire classique.

L'équation (2.8) est valide pour une longueur d'onde et un pixel. Les termes d'éclairement dépendent aussi bien de la longueur d'onde que de la position du pixel. Les réflectances dépendent uniquement de la longueur d'onde si elles sont considérées lambertiennes. Les autres termes correspondent à la géométrie de la scène et ne dépendent donc que de la position du pixel.

Notons que $\sum_{k=1}^N S_k = 1$, mais nous avons aussi une autre propriété importante. La conservation du flux au niveau d'un pixel nous permet d'écrire : $\Omega E_D = \sum_{k=1}^N d\omega_k E_{D,k}$.

Ceci nous donne alors la propriété suivante :

$$\sum_{k=1}^N S_k \frac{E_{D,k}}{E_D} = 1 \quad (2.12)$$

Cette propriété de conservation du flux sera vérifiée à travers des simulations dans la section suivante.

Pour des raisons de simplicité, les réflectances dans le terme (2.9) seront aussi supposées lambertiennes dans la suite. L'équation (2.9) devient alors

$$\langle \rho \rangle_D = \sum_{k=1}^N S_k \frac{E_{D,k}}{E_D} \rho_k \quad (2.13)$$

2.2 Validation du modèle de mélange

Dans cette section, une « validation » du modèle précédent est présentée, utilisant différentes images synthétiques à plusieurs longueurs d'onde. Ces images ont été simulées avec le code de transfert radiatif 3D, AMARTIS V2 [123], qui est décrit ci-dessous.

2.2.1 Description d'AMARTIS

AMARTIS est un code de transfert radiatif spécifiquement dédié aux scènes urbaines. Il permet de simuler des images aéroportées ou satellites multi-angulaires, dans le domaine $[0.4; 2.5\mu\text{m}]$, à partir de scènes définies par leur géométrie 3D, les propriétés optiques des matériaux présents, les conditions atmosphériques et l'orientation géométrique du capteur.

La scène synthétique 3D est composée de facettes triangulaires uniformes et homogènes en terme de réflectance (triangularisation de la scène). Les réflectances peuvent être lambertiennes ou bi-directionnelles. Les propriétés radiatives atmosphériques sont modélisées par l'intermédiaire du code de transfert radiatif 6S [124]. Les aérosols sont modélisés en utilisant les modèles standards de 6S, par leurs propriétés physiques ou directement par leurs propriétés optiques (épaisseur spectrale optique, l'albedo de simple diffusion et fonction de phase). Les modèles atmosphériques standards de 6S sont aussi utilisés pour l'atmosphère gazeux. AMARTIS permet de simuler un capteur aéroporté ou satellite. Le capteur est défini par les paramètres suivants : ses angles de vue zénithal et azimutal définis par l'orientation de l'axe optique dirigé vers le centre de la scène, la matrice de ses pixels (nombre de pixels par ligne et colonne et la taille des pixels), sa résolution spatiale, les longueurs d'onde d'observation, la distance focale de l'instrument. L'altitude du capteur est déduite des propriétés géométriques citées.

En télédétection, une hypothèse de sol plat est généralement utilisée pour modéliser le signal au niveau du sol et du capteur. Cependant, en milieu urbain, cette hypothèse n'est plus

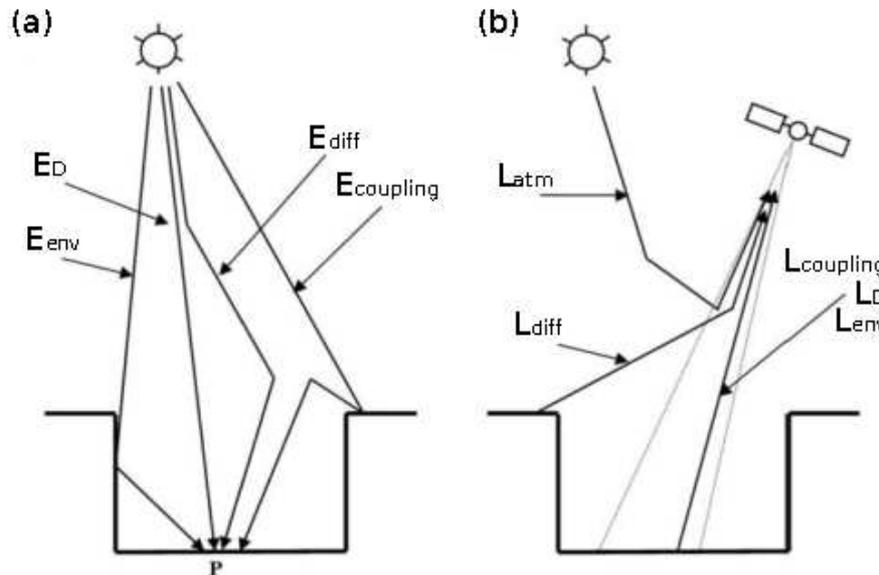


FIGURE 2.3 – Description des différentes composantes radiatives considérées par AMARTIS : (a) les éclairements au niveau du sol (b) les luminances au niveau du capteur

valable à cause de la complexité induite par le relief. AMARTIS a été développé pour dépasser ces limitations. Il est capable de modéliser toutes les composantes radiatives au niveau du sol (éclairements) et au niveau du capteur (luminances). Ceci est illustré par la figure 2.3. L'éclairement au niveau du sol (E_{tot}) est la somme de quatre composantes (figure 2.3(a)) : l'éclairement direct (E_D), l'éclairement diffus (E_{diff}), l'éclairement dû au couplage sol-atmosphère ($E_{coupling}$) et l'éclairement dû à l'environnement (E_{env}). La luminance au niveau du capteur (L_{tot}) est la somme des différents termes définis dans la section 2.1 par les équations (2.1)-(2.2) (voir figure 2.3(b)). L'expression analytique de chaque composante radiative est détaillée dans [123]. A cause de la forte hétérogénéité de la scène, les termes $E_{coupling}$, E_{env} et L_{env} sont calculés en utilisant du lancer de rayons et une méthode de Monte Carlo.

Les sorties d'AMARTIS sont des images de luminance au niveau du capteur (totale, directe et due au voisinage, ainsi que les autres termes présents dans les équations) et des images d'éclairement au niveau du sol (total, direct et diffus).

Les résultats d'AMARTIS ont déjà été validés, néanmoins le code peut donner certains artefacts dans les résultats dus aux raisons suivantes :

- AMARTIS utilise un processus de Monte Carlo pour estimer certains termes radiatifs comme expliqué ci-dessus. Ceci peut induire certaines fluctuations statistiques, surtout en présence d'ombre. Comme cette méthode nécessite un grand nombre de photons pour bien converger, sa convergence est un peu moins fiable dans les zones où l'amplitude des termes radiatifs est très faible, comme certaines composantes à l'ombre.
- Avant le calcul d'AMARTIS, la scène 3D est triangulée (comme expliqué plus haut). Cette triangularisation doit être assez fine pour donner une bonne précision de calcul.

Malheureusement, à cause de limitations en mémoire et temps de calcul, la triangulation utilisée peut ne pas être suffisamment fine et donc engendrer certaines erreurs.

2.2.2 Méthodologie

Pour chaque image étudiée, à basse résolution X , la même image à forte résolution x est utilisée. Les pixels de cette dernière représenteront les surfaces élémentaires k et m dans notre modèle de mélange.

Pour valider notre modèle nous procédons d'abord comme suit (section 2.2.4.1) :

1. Calculer une image en réflectances $\langle \rho \rangle$ pour des pixels à basse résolution X (en appliquant notre modèle de mélange défini par les équations ((2.8), (2.13), (2.10) et (2.11)), utilisant les valeurs fournies à forte résolution x pour les surfaces élémentaires.
2. Calculer l'image de luminance totale $\langle L \rangle$ (équation (2.3)) à la résolution X , utilisant l'image de réflectances $\langle \rho \rangle$.
3. Comparer notre image calculée $\langle L \rangle$ avec l'image de luminance totale L fournie par AMARTIS pour la résolution X .

On s'intéresse ensuite à $\langle L_{es} \rangle$ (dans l'équation (2.3)). En utilisant (2.8), il peut être défini comme : $\langle L_{es} \rangle = \langle L \rangle_D + \langle L \rangle_{env}$, avec :

$$\begin{aligned}
 - \langle L \rangle_D &= \frac{\langle \rho \rangle_D}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} \text{ (avec } \langle \rho \rangle_D \text{ défini dans (2.13))} \\
 - \langle L \rangle_{env} &= \frac{\langle \rho \rangle_{env}}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} \text{ (avec } \langle \rho \rangle_{env} \text{ défini dans (2.10)). (cela correspond à l'équation (2.2)).}
 \end{aligned}$$

4. Comparer notre image calculée $\langle L \rangle_D$ avec l'image de luminance L_D donnée par AMARTIS à la résolution X . Les deux correspondent à la luminance due à l'éclairement solaire incident sur la surface et directement réfléchi vers le capteur.
5. Comparer L_{env} fourni par AMARTIS à la résolution X , avec notre luminance calculée $\langle L \rangle_{env}$. Ces termes correspondent à la luminance due au voisinage de la surface considérée (due aux réflexions).

Pour évaluer la différence entre nos résultats et ceux d'AMARTIS, nous définissons ce que nous appellerons dans la suite « erreurs » :

- Une erreur globale absolue en unité de luminance :

$$Err_L(Z) = \sqrt{\text{mean}_i(\langle Z \rangle_i - Z_i)^2} \quad (2.14)$$

- Une erreur globale relative en pourcentage :

$$Err_{\%}(Z) = \sqrt{\frac{\text{mean}_i(\langle Z \rangle_i - Z_i)^2}{\text{mean}_i(Z_i^2)}} \times 100 \quad (2.15)$$

- Un erreur en unité de luminance calculée pour un pixel i (différence entre deux images) :

$$err_{L_i}(Z) = |\langle Z \rangle_i - Z_i| \quad (2.16)$$

Dans toutes ces définitions Z peut correspondre à L , L_{env} ou L_D , et i correspond à un pixel dans la zone d'intérêt de l'image.

En deuxième étape, une analyse supplémentaire est proposée afin de montrer l'importance de tenir compte des termes dus à l'environnement (section 2.2.4.2) :

- Etude de la proportion des termes dus à l'environnement dans les luminances mais aussi les réflectances (la partie non linéaire dans les réflectances).
- Comparer l'importance du terme dû à l'éclairement direct, $\langle \rho \rangle_{env,D}$, à celle du terme dû à l'éclairement diffus, $\langle \rho \rangle_{env,diff}$, dans les réflectances (voir définitions dans (2.11)).

Pour finir, nous validerons, dans la section 2.2.4.3, la propriété de conservation de flux initialement présentée à la fin de la section 2.1.4.

2.2.3 Description des données

Nous commencerons notre analyse par des scènes géométriques simples, et utiliserons ensuite une scène synthétique urbaine. Pour chaque image à basse résolution X (typiquement 4 ou 5 m), la même image à forte résolution $x = 0.2m$ est utilisée, dont les pixels seront utilisés pour représenter les surfaces élémentaires k et m de notre modèle de mélange.

Toutes les images utilisées ont été générées avec les conditions atmosphériques suivantes : modèle d'aérosols urbains avec une visibilité de 23 km, un atmosphère standard "mid-latitude summer" (latitude moyenné été).

Cette étude concerne le domaine réflectif $[0.4 - 2.5 \mu m]$. Les longueurs d'onde sélectionnées pour cette étude sont : 480, 550, 670, 740, 870, 1600 et 2200 nm.

La figure 2.4 montre les spectres de réflectance des matériaux¹ présents dans nos images. Les lignes hachurées correspondent aux 7 longueurs d'onde étudiées.

1. spectres de la base de données Memoires (<http://www.onera.fr/dota/memoires/index.php>).

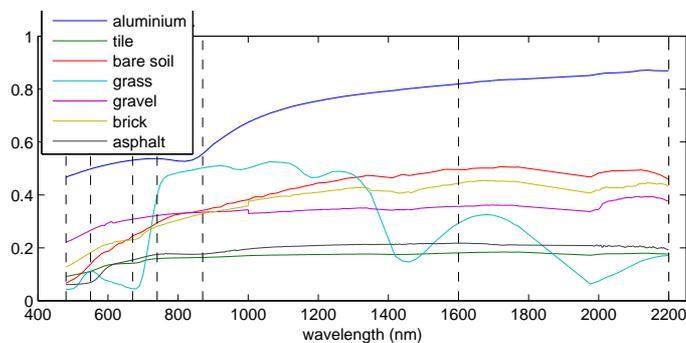


FIGURE 2.4 – Spectres de réflectance des matériaux présents dans les scènes étudiées

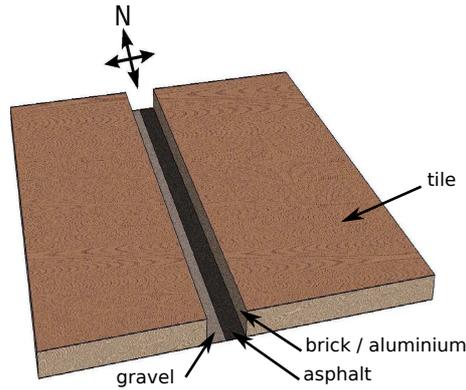


FIGURE 2.5 – Scène géométrique simple (canyon)

2.2.3.1 Scènes simples géométriques

La figure 2.5 représente une scène avec un canyon (entre deux bâtiments), ce qui correspond à la forme géométrique la plus répandue dans un environnement urbain. Quatre images sont générées à partir de cette scène. Dans ces images, les toits sont recouverts de tuiles et le fond du canyon est constitué, pour sa moitié gauche de gravier, et pour sa moitié droite d’asphalte. Les murs sont faits en brique, excepté pour une image où de l’aluminium est utilisé.

Dans le but de faire une étude générale, et de voir aussi comment varie la proportion du terme non linéaire (la contribution des réflexions sur l’environnement du pixel) en fonction de la direction du soleil, différents cas d’éclairement ont été étudiés. Notre but est aussi de voir l’effet de remplacer la brique par de l’aluminium sur les murs (les bâtiments modernes sont souvent couverts par des surfaces très réfléchissantes : verre, aluminium, etc.), avec des conditions d’éclairement inchangées. Les principales caractéristiques de nos quatre images sont présentées dans le tableau 2.1 où sont donnés, pour chaque image, les angles solaires, le pourcentage d’ombre induit dans le canyon et le matériau couvrant les murs.

Dans tous ces cas, les images étudiées auront une basse résolution de $X = 5$ m. Dans les images à basse résolution, la largeur du canyon correspond à 2 pixels de 5 m.

	soleil (zénith,azimut)	ombre dans le canyon	murs
C1	(16°,180°)	0%	brique
C2	(27°,239°)	20%	brique
C3	(45°,264°)	40%	brique
C4	(45°,264°)	40%	aluminium

TABLEAU 2.1 – Description des 4 images de scènes géométriques (générées à partir de la scène simple) : angles solaires, pourcentage d’ombre dans le canyon et les matériaux couvrant les murs.

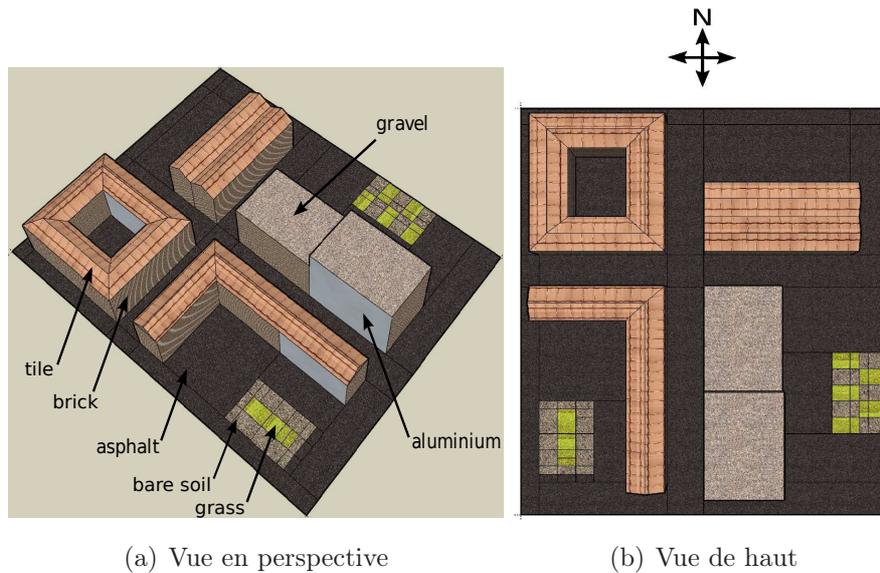


FIGURE 2.6 – Scène urbaine

2.2.3.2 Scène urbaine

Une seconde scène urbaine, plus complexe et plus réaliste, est simulée (figure 2.6). Celle-ci contient différentes configurations de bâtiments que l'on peut retrouver dans les villes européennes. Le sol est couvert d'asphalte, deux petits jardins contiennent de la végétation rase et du sol nu (terre), les murs sont essentiellement en brique, mais quelques-uns sont couverts d'aluminium (murs gris dans la figure 2.6). Les toits en pente sont couverts de tuiles et les toits plats de gravier. Comme l'effet des angles solaires sera étudié avec les images de scènes géométriques simples, on considère pour cette scène une seule configuration : (angle solaire zénithal = 26° , angle solaire azimutal = 227°). Ces angles ont été choisis pour éviter d'avoir des pixels entièrement à l'ombre, étant donné que notre modèle n'est pas valide pour des pixels entièrement à l'ombre.

A partir de cette scène, de taille $100 \times 80 \text{ m}^2$, deux images à basse résolution (avec des résolutions différentes) ont été générées pour être étudiées séparément : une à une résolution de $X = 4 \text{ m}$ (de taille 25×20 pixels) et une à une résolution de $X = 5 \text{ m}$ (de taille 20×16 pixels).

La figure 2.7 montre les images d'éclaircement total à la résolution de 0.2 et 5 m , à une longueur d'onde (670 nm), pour cette scène urbaine.

2.2.4 Résultats et discussions

2.2.4.1 Analyse globale

2.2.4.1.1 Scènes simples géométriques Les résultats pour ces scènes correspondent uniquement aux valeurs de luminance des pixels à l'intérieur du canyon (2 colonnes de pixels de

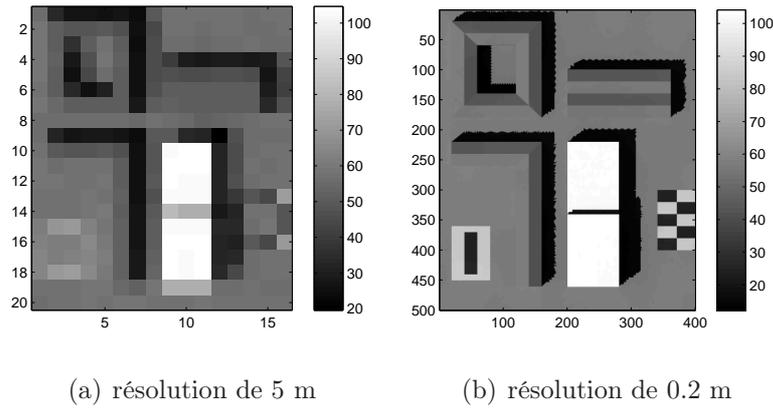


FIGURE 2.7 – Scène urbaine - Images d'éclairage total aux résolutions 5 m (gauche) et 0.2 m (droite) - longueur d'onde de 670 nm

5 m), étant donné que les réflexions dues au voisinage, qui contribuent au terme non linéaire de la réflectance équivalente, ne sont présentes qu'au fond du canyon. Dans les tableaux 2.2 et 2.3, les résultats sont présentés pour les 7 longueurs d'onde étudiées. La scène C1 n'est pas présente dans ces tableaux car, pour cette scène, la direction du soleil est quasiment parallèle aux murs, aussi ces derniers n'induisent pas de réflexions dans la scène. Le terme dû à l'environnement est donc négligeable, et le modèle linéaire classique reste valide ici. Les résultats obtenus ont montré une bonne correspondance entre L et $\langle L \rangle$.

Dans ces tableaux, la valeur moyenne des luminances d'intérêt est donnée, pour donner une idée du niveau global des valeurs. Nous montrons aussi l'erreur obtenue en comparant nos résultats à ceux d'AMARTIS.

Le tableau 2.2 montre que, globalement, les erreurs sont très faibles comparées aux valeurs moyennes de $\langle L \rangle$ (l'erreur $Err_{\%}(L)$ correspondante, dans le tableau 2.2, varie globalement entre

longueur d'onde (nm)		480	550	670	740	870	1600	2200
$\langle L \rangle$	C2	64.1	59.5	65.6	56.2	48.5	15.1	3.8
	C3	40.5	33.5	36.2	30.8	26.2	8.3	1.9
	C4	42.6	35.7	39.4	33.2	28.2	9.5	2.3
$Err_L(L)$	C2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.1	0.0
	C3	0.1	0.2	0.4	0.4	0.4	0.2	0.0
	C4	0.5	0.6	0.8	0.7	0.7	0.3	0.1
$Err_{\%}(L)$	C2	0.3	0.4	0.8	0.5	0.6	0.9	0.6
	C3	0.3	0.7	1.0	1.3	1.6	2.1	2.1
	C4	1.0	1.6	2.0	2.0	2.3	3.2	3.5

TABLEAU 2.2 – Scènes simples - Luminances totales $\langle L \rangle$ (en $W/m^2/sr/\mu m$) et erreurs

wavelength (nm)		480	550	670	740	870	1600	2200
$\langle L \rangle_{env}$	C2	0.4	0.7	1.2	1.3	1.3	0.6	0.1
	C3	0.6	1.0	1.9	2.1	2.2	1.0	0.2
	C4	2.0	2.6	4.3	3.9	3.7	1.9	0.5
Err_L (L_{env})	C2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.0
	C3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.2	0.0
	C4	0.4	0.5	0.7	0.7	0.6	0.3	0.1
$Err\%$ (L_{env})	C2	28	27	20	19	19	17	18
	C3	27	27	20	19	19	18	19
	C4	26	26	19	19	19	18	19

TABLEAU 2.3 – Scènes simples - Luminances $\langle L \rangle_{env}$ (en $W/m^2/sr/\mu m$) et erreurs

0 et 3 %).

Pour comprendre la source des erreurs, il est intéressant de comparer les valeurs Err_L des deux tableaux (tableau 2.2 pour $\langle L \rangle$ et 2.3 pour $\langle L \rangle_{env}$) : les valeurs sont quasiment les mêmes. Cela signifie que les erreurs obtenues pour $\langle L \rangle$ sont essentiellement dues aux erreurs obtenues pour $\langle L \rangle_{env}$. De plus, les erreurs pour $\langle L \rangle_D$ sont assez négligeables. Notons ici que seuls les termes $\langle L \rangle_{env}$ et $\langle L \rangle_D$ sont calculés avec nos équations (les autres termes de luminance sont fournis par AMARTIS et ne jouent aucun rôle dans cette étude).

Intéressons nous à présent au tableau 2.3. En comparant les trois scènes, on remarque que les valeurs de Err_L pour C4 sont plus élevées que pour les deux autres scènes. La scène C3 présente des erreurs un peu plus élevées que C2 (surtout en comparant aux valeurs de luminance) mais ces valeurs restent proches. Ces différences dans les erreurs pour les trois scènes sont liées aux différences dans les valeurs du terme $\langle L \rangle_{env}$: Err_L est plus élevé pour des valeurs élevées de $\langle L \rangle_{env}$, tandis que les erreurs en pourcentage ($Err\%$) sont globalement stables d'une scène à l'autre.

Malgré ces erreurs qu'on expliquera dans la suite, les résultats montrent que notre modèle décrit correctement le phénomène de réflexions dans le cas de simples canyons. En effet, l'erreur est dans le pire cas égale à 0.7 et dans la plupart des cas inférieure à $0.3 W/m^2/sr/\mu m$. Cela veut dire que nos erreurs sont dans l'ordre de grandeur du bruit instrumental, qui est de l'ordre de $0.2 W/m^2/sr/\mu m$ pour les capteurs aéroportés (voir par exemple [125]). Les erreurs sont donc raisonnablement faibles même si elles peuvent paraître élevées en pourcentage. De plus, beaucoup de ces erreurs sont dues à des artefacts induits par le processus de simulation, comme expliqué ci-dessous.

La figure 2.8 montre un exemple d'une image de L_{env} de la scène C3, à 670 nm, zoomée sur la zone du canyon. L'image de L_{env} (a) peut être comparée à l'image de $\langle L \rangle_{env}$ (b). On peut constater qu'il y a plus de disparité pour la colonne 9 que pour la colonne 10. Les résultats obtenus, pour les trois scènes, nous ont montré que les erreurs étaient surtout localisées dans la

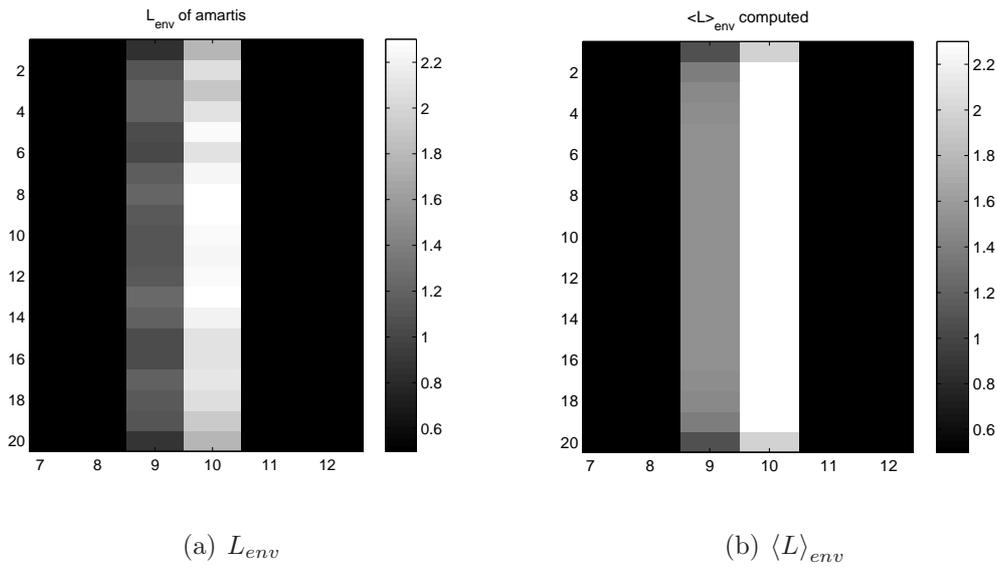


FIGURE 2.8 – Scène C3 (zoom sur le canyon) - Comparaison de L_{env} et $\langle L \rangle_{env}$ (en $W/m^2/sr/\mu m$) à 670 nm

colonne 9 (environ 33% d’erreur), tandis que l’erreur est beaucoup plus faible pour la colonne 10 (maximum 13%). Notons ici que la colonne 9 contient un certain pourcentage d’ombre (80% de la surface de la colonne pour la scène C3), tandis que, pour la colonne 10, les pixels sont totalement au soleil. Ces erreurs sont des artefacts dus à AMARTIS et leur origine a déjà été présentée dans la section 2.2.1 :

- Erreurs dues au code de Monte Carlo pour les zones avec ombres. L’effet induit peut être vu sur l’image de AMARTIS (figure 2.8(a)) : les valeurs le long de la colonne 9 ne sont pas homogènes comme elles devraient l’être, on a des fluctuations qui représentent environ 16% des valeurs de luminance.
- Erreurs dues à la triangulation pas assez fine de la scène. On se retrouve avec des triangles souvent plus grands que nos pixels de 0.2 m servant de surfaces élémentaires. Ceci induit des artefacts dans le calcul des luminances, surtout dans les transitions ombre/soleil. Ces erreurs peuvent difficilement être quantifiées. Néanmoins, une simulation faite sur une scène plus petite a montré qu’en augmentant le nombre de triangles l’erreur globale Err_L décroît de 28%.

Pour ces raisons, on considère que les erreurs résultent essentiellement du processus de simulation et non de notre modélisation. De plus, les erreurs sont globalement faibles et, si on considère que la majeure partie est due aux simulations, l’erreur résiduelle devient très proche du bruit instrumental. Les résultats obtenus sont donc considérés satisfaisants.

2.2.4.1.2 Scène urbaine à la résolution 4 m Pour cette résolution, les pixels au sol² sont tous purs excepté pour les deux jardins. En effet, les dimensions des bâtiments ont été

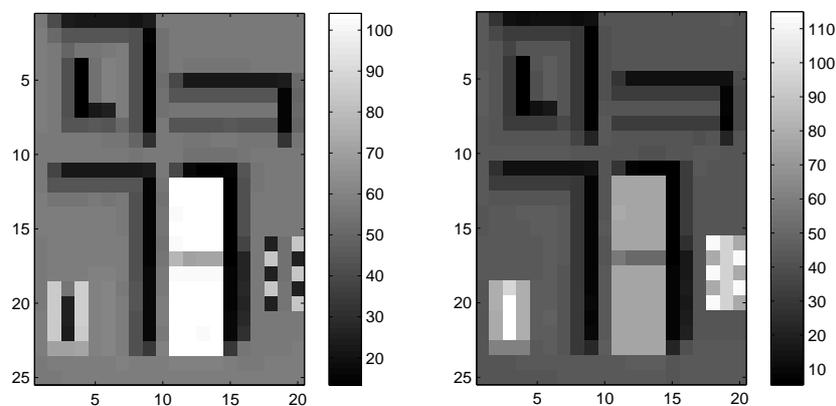
2. surface au sol correspondant à la projection du pixel.

choisies multiples de 4 m. Ceci va nous permettre d'isoler l'effet des réflexions pour mieux étudier leur comportement et plus facilement localiser les sources d'erreurs. Les résultats présentés, pour les images urbaines, correspondent uniquement aux pixels pour lesquels $\langle L \rangle_{env}$ est supérieur à $0.2 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$ (niveau du bruit instrumental), c.à.d. uniquement pour les pixels où l'environnement joue un rôle.

En utilisant les erreurs définies dans (2.14) et (2.16), les résultats obtenus pixel par pixel (pour toutes les longueurs d'onde étudiées) peuvent être synthétisées comme suit, pour les pixels d'intérêt (47% de l'image ici). Pour L_D l'erreur moyenne, $Err_L(L_D)$, est égale à $0.2 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$ et pour la luminance totale nous avons $0.3 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$. Concernant L_{env} , $Err_L(L_{env}) = 0.2 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$. En ce qui concerne ce dernier terme, la figure 2.11(a) montre l'histogramme des erreurs obtenues $err_{L_i}(L_{env})$ (pour toutes les longueurs d'onde). La valeur maximale est de 1.3 mais 95% des valeurs sont inférieures à $0.4 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$. Les erreurs sont donc globalement faibles en comparaison au niveau du bruit instrumental ($\sim 0.2 \text{ W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$).

La figure 2.9 montre deux images de la luminance totale $\langle L \rangle$ à 670 nm et 870 nm. En comparant les valeurs des erreurs obtenues ($Err_L \simeq 0.2$ pour tous les termes) aux valeurs de luminance sur les images de la figure, on peut voir que les erreurs sont très faibles.

Cependant, certains pixels donnent des erreurs élevées pour $\langle L \rangle_{env}$. Sur la figure 2.10, sont présentées les images de $\langle L \rangle_{env}$ (figure 2.10(a)) et l'image de différence entre L_{env} et $\langle L \rangle_{env}$ (figure 2.10(b)), pour 670 nm. La plupart des erreurs sont faibles mais pour certains pixels les valeurs sont élevées (pixels les plus clairs). L'essentiel de ces erreurs est dû aux mêmes raisons expliquées auparavant (section 2.2.4.1.1). Néanmoins, un autre type d'erreur est présent sur cette scène, cela concerne certains pixels au niveau des croisements des canyons. Cela est dû à notre propre algorithme de calcul de l'équation (2.8). En effet, pour simplifier les calculs, nous avons supposé qu'une surface au sol peut uniquement recevoir des réflexions de murs situés dans



(a) longueur d'onde 670 nm

(b) longueur d'onde 870 nm

FIGURE 2.9 – Scène urbaine à la résolution 4 m - Luminance totale $\langle L \rangle$ (en $\text{W/m}^2/\text{sr}/\mu\text{m}$)

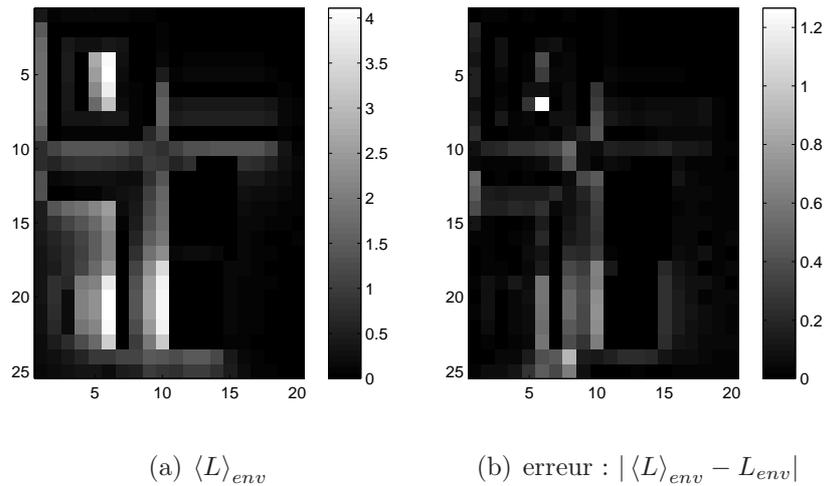


FIGURE 2.10 – Scène urbaine à la résolution 4 m - Luminance $\langle L \rangle_{env}$ et erreurs (en $W/m^2/sr/\mu m$) à 670 nm

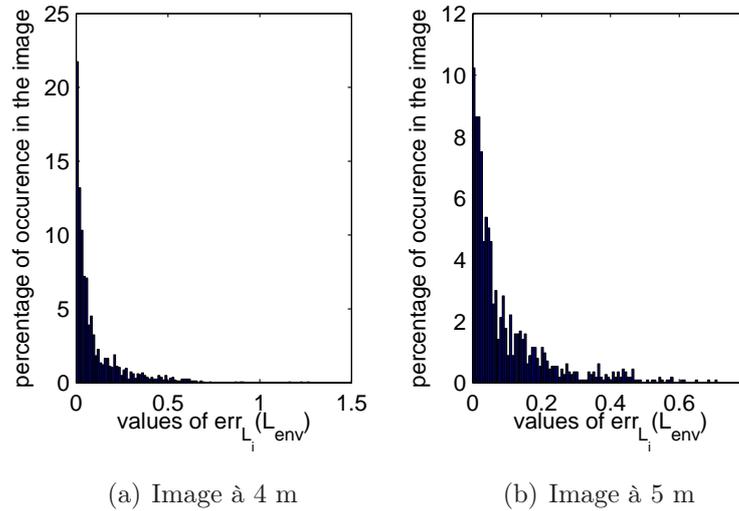


FIGURE 2.11 – Scènes urbaines - Histogrammes des erreurs $err_{L_i}(L_{env})$ (en $W/m^2/sr/\mu m$) pour toutes les longueurs d'onde

le même canyon. Ceci induit une sous-estimation de $\langle L \rangle_{env}$ pour certains pixels situés proches des coins des bâtiments. L'erreur maximale obtenue pour ces pixels est de $0.9 W/m^2/sr/\mu m$, pour le pixel (ligne=24,colonne=8), car nous avons ignoré ici la contribution de réflexions dues à l'aluminium (qui ne sont donc pas négligeables). Pour les pixels au croisement des deux canyons au centre, l'erreur maximale est de $0.6 W/m^2/sr/\mu m$ pour le pixel (ligne=10,colonne=8). Ces erreurs sont donc bien identifiées et nous devons juste garder à l'esprit qu'elles ne sont pas dues à notre modèle.

2.2.4.1.3 Scène urbaine à la résolution 5 m Le cas traité ici est plus réaliste : un pixel au sol peut contenir deux ou trois matériaux.

Les résultats globaux pour toutes les longueurs d'onde étudiées, pour les pixels d'intérêt

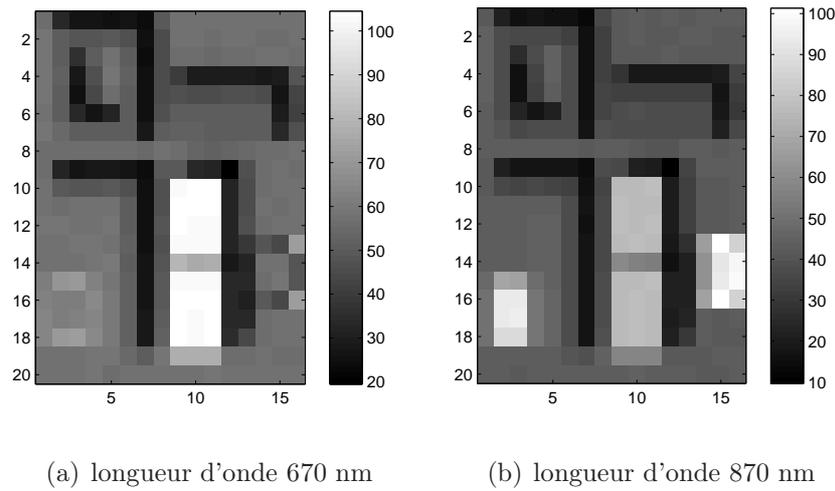


FIGURE 2.12 – Scène urbaine à la résolution 5 m - Luminance totale $\langle L \rangle$ (in $W/m^2/sr/\mu m$)

(ici 51% de l'image) donnent : pour L , une erreur moyenne $Err_L(L)$ de $0.2 W/m^2/sr/\mu m$, pour L_D on a $Err_L(L_D) = 0.1 W/m^2/sr/\mu m$ et $Err_L(L_{env}) = 0.1 W/m^2/sr/\mu m$.

La figure 2.11(b) montre l'histogramme de toutes les erreurs $Err_{L_i}(L_{env})$. La valeur maximale ici est de $0.7 W/m^2/sr/\mu m$ et pour 95% des pixels l'erreur est inférieure à $0.4 W/m^2/sr/\mu m$. La plupart des valeurs sont faibles comparées au niveau du bruit de capteur. De plus, si on compare ces erreurs aux valeurs de luminance totale dans les images (voir les deux bandes représentées sur la figure 2.12), on constate qu'elles sont globalement faibles.

La figure 2.13 montre notre image calculée de $\langle L \rangle_{env}$ (figure 2.13(a)) et la différence entre L_{env} et $\langle L \rangle_{env}$ (figure 2.13(b)), c.à.d. l'erreur, pour 670 nm. Les pixels avec des erreurs élevées sont dus aux mêmes raisons que précédemment (dans les sections 2.2.4.1.1 et 2.2.4.1.2).

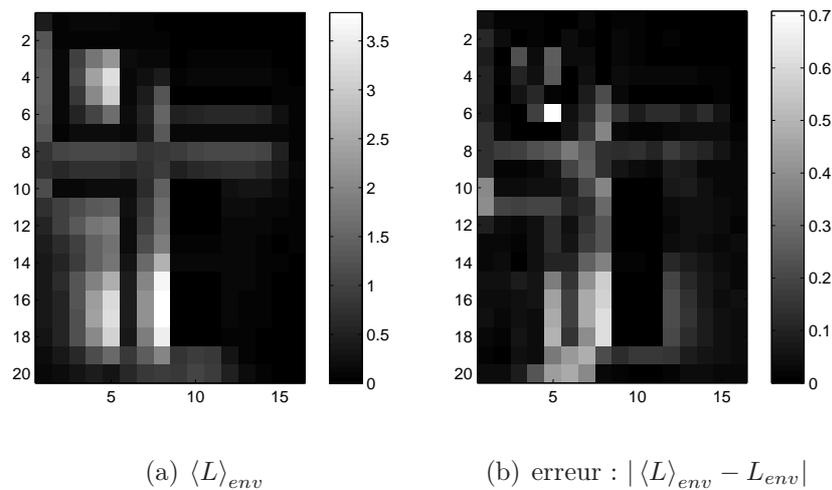


FIGURE 2.13 – Scène urbaine à la résolution 5 m - Luminance $\langle L \rangle_{env}$ et erreur (en $W/m^2/sr/\mu m$) à 670 nm

A travers toutes ces simulations, on peut conclure que les erreurs les plus importantes sont dues à l'étape de génération des scènes synthétiques (par AMARTIS) ou à notre code de calcul de l'équation de mélange. De plus, ces erreurs sont comparables au niveau de la sensibilité radiométrique des capteurs aéroportés (bruit des capteur). On peut donc considérer que notre modèle de mélange physique défini par les équations (2.8), (2.13), (2.10) et (2.11) est validé.

2.2.4.2 Analyse des différents termes

Le but de cette section est d'évaluer l'importance relative des termes dus aux réflexions, en utilisant les mêmes images simulées. Concernant la scène urbaine, seule l'image à la résolution 5 m est utilisée ici, puisque c'est la plus réaliste.

2.2.4.2.1 Scènes simples géométriques La figure 2.14 montre que la proportion de $\langle L \rangle_{env}$ dépend de la direction du soleil (voir les différences entre les scènes C3 et C2), qui induit différents niveaux d'éclairement sur les murs (les valeurs d'éclairement sont plus élevées lorsque la direction du soleil est perpendiculaire à la surface par exemple). De plus, quand la proportion d'ombre augmente, le niveau de luminance directe est plus faible, la luminances due à l'environnement occupe alors une proportion plus importante. Le pourcentage de L_{env} dépend aussi de la longueur d'onde (L_{env} est moins important vers le bleu). Finalement, il est évident que les matériaux présents dans la scène jouent aussi un rôle important (plus de réflexions en présence d'aluminium sur les murs, pour la scène C4, comparée à la scène C3, pour une direction solaire identique).

Des commentaires similaires peuvent être faits concernant la proportion de $\langle \rho \rangle_{env}$ dans la

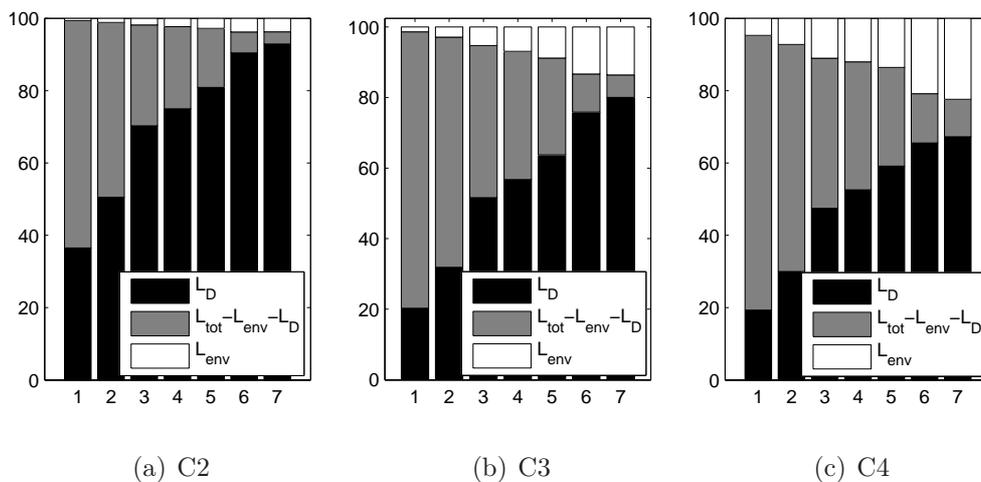


FIGURE 2.14 – Scènes simples - Pourcentages de $\langle L \rangle_D$ et $\langle L \rangle_{env}$ comparés à la luminance totale, pour les 7 longueurs d'onde étudiées (nm) : 1- 480, 2- 550, 3- 670, 4- 740, 5- 870, 6- 1600, 7- 2200

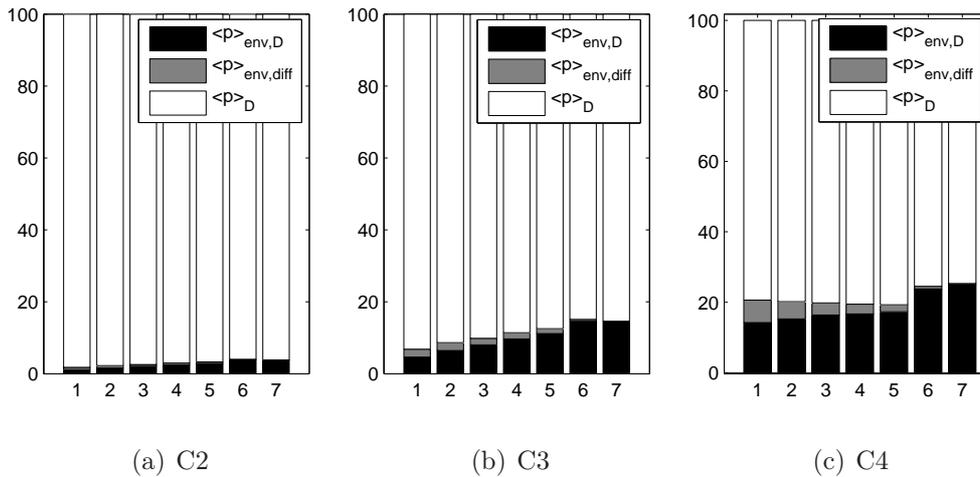


FIGURE 2.15 – Scènes simples - Pourcentages de $\langle \rho \rangle_D$, $\langle \rho \rangle_{env,D}$ et $\langle \rho \rangle_{env,diff}$ dans la réflectance totale $\langle \rho \rangle$, pour les 7 longueurs d’onde étudiées (nm) : 1- 480, 2- 550, 3- 670, 4- 740, 5- 870, 6- 1600, 7- 2200

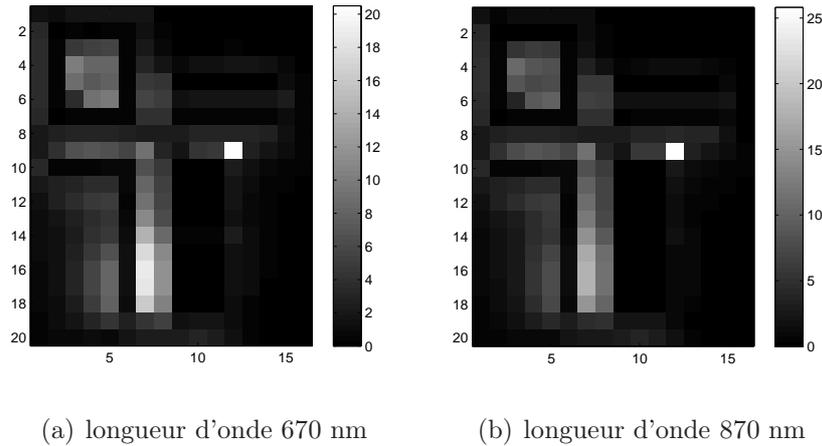
réflectance totale (voir figure 2.15). Les pourcentages sont supérieurs à 5 % dans la plupart des cas (et supérieurs à 10% si on regarde uniquement les scènes C3 et C4). De tels pourcentages ne peuvent être raisonnablement négligés dans un modèle de mélange pour les réflectances. On remarque aussi que la réflectance d’environnement induite par l’éclairement direct $\langle \rho \rangle_{env,D}$ est plus importante que celle induite par l’éclairement diffus $\langle \rho \rangle_{env,diff}$ et que ce dernier terme est quasiment nul pour les longueurs d’onde supérieures à 1600 nm.

2.2.4.2.2 Scène urbaine à la résolution 5 m Dans cette section nous nous intéressons uniquement aux termes de réflectance, qui sont les termes qui nous intéressent, les valeurs de luminances ayant essentiellement servi à la validation du modèle par AMARTIS.

La figure 2.16 contient deux images représentant les pourcentages de $\langle \rho \rangle_{env}$ dans $\langle \rho \rangle$ pour les longueurs d’onde 670 nm et 870 nm. Comme précédemment, l’importance du terme dû aux réflexions dépend des matériaux présents dans la scène, de la présence d’ombre et de l’emplacement dans la scène (la géométrie et l’orientation des immeubles par rapport au soleil, etc.). Il paraît par exemple évident que $\langle \rho \rangle_{env}$ est plus élevé pour les pixels situés près de murs éclairés par le soleil et les pourcentages de $\langle \rho \rangle_{env}$ sont plus importants lorsque les murs sont couverts d’aluminium (voir figure 2.6 pour localiser les zones concernées).

Notons que le pixel blanc dans ces images correspond à une surface avec une grande proportion d’ombre, ce qui explique ce pourcentage très élevé de $\langle \rho \rangle_{env}$.

Le tableau 2.4 montre les valeurs moyennes de pourcentage de $\langle \rho \rangle_{env}$ en fonction de la longueur d’onde pour une zone dans l’image : le canyon situé en bas de l’image (lignes 10 à 18 - colonnes 7 et 8). Comme remarqué précédemment (pour les scènes simples, dans 2.2.4.2.1), l’importance du terme dû à l’environnement ne peut être négligée (toutes les valeurs supérieures à 5 %). On peut noter encore une fois que $\langle \rho \rangle_{env}$ est moins important dans le bleu. Il apparaît

FIGURE 2.16 – Scène urbaine à la résolution 5 m - Images des pourcentages de $\langle \rho \rangle_{env}$ dans $\langle \rho \rangle$

longueur d'onde (nm)	480	550	670	740	870	1600	2200
$\langle \rho \rangle_{env}$ (%)	8	8	10	11	11	15	14
$\langle \rho \rangle_{env,D}$ (%)	6	6	9	9	10	14	14

TABLEAU 2.4 – Scène urbaine à la résolution 5 m - Pourcentage de $\langle \rho \rangle_{env,D}$ et $\langle \rho \rangle_{env}$ dans $\langle \rho \rangle$, pour une zone dans l'image (précisée dans le texte)

aussi clairement, comme pour les scènes simples, que la réflectance due à l'éclairage direct, $\langle \rho \rangle_{env,D}$, a le pourcentage le plus important, et ceci sera utile pour la section suivante.

2.2.4.3 Vérification de la propriété de conservation du flux

Afin de finir de valider notre modèle, il est nécessaire de vérifier la propriété de conservation du flux incident au niveau du pixel, citée à la section 2.1, en validant l'équation (2.12). Une nouvelle image de résolution 5 m est simulée, à partir d'une partie de notre scène urbaine (correspondant aux lignes de 1 à 10 et colonnes de 1 à 7, dans l'image urbaine entière à 5 m). Prendre une petite scène permet d'avoir une triangularisation plus fine, et donc des résultats plus précis. Notons que tous les pixels de l'image ne correspondent pas à des surfaces planes homogènes, donc les hypothèses valables pour un modèle linéaire ne sont pas vraies ici. La propriété de somme à 1 est néanmoins validée pour la partie linéaire : la partie gauche de l'équation (2.12) a une valeur moyenne de 0.999 sur toute l'image avec un écart-type de 0.01. La propriété (2.12) est donc vraie. Ce résultat est très important pour les méthodes de démixage comme on l'a vu au chapitre précédent. On y reviendra à la section 2.4.

2.3 Simplification du modèle de mélange

Comme expliqué précédemment, le but de ce travail est d'obtenir un modèle de mélange pour les réflectances, valide pour les environnements urbains, et qui peut être utilisé pour faire du démélange spectral. Cependant, le modèle de mélange défini par les équations (2.8), (2.13), (2.10) et (2.11) ne convient pas encore pour les méthodes de démélange. Il est un peu compliqué à cause de la dépendance des termes d'éclairement vis à vis de la longueur d'onde.

Réécrivons le modèle en mettant en évidence les dépendances des différents termes par rapport à la position 2D des pixels, y , et à la longueur d'onde λ :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(y, \lambda) &= \sum_{k=1}^N S_k(y) \frac{E_{D,k}}{E_D}(y, \lambda) \rho_k(\lambda) \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} S_k(y) \frac{g_{m,k}(y)}{\pi} \Delta S \left(\frac{E_{D,m}}{E_D}(y, \lambda) + \frac{E_{diff,m}}{E_D}(y, \lambda) \right) \rho_k(\lambda) \rho_m(\lambda) \end{aligned} \quad (2.17)$$

En utilisant la terminologie de séparation de sources [4, 8] et considérant les sources dépendantes de la longueur d'onde, ce modèle est instantané (ou sans mémoire), car chaque mélange, à une longueur d'onde donnée dépend uniquement des sources (ici les réflectances) et des coefficients de mélange à cette longueur d'onde. C'est un modèle linéaire quadratique en fonction des réflectances (nos sources) mais les coefficients de mélange incluent des termes avec une double dépendance (la position et la longueur d'onde) : les rapports d'éclairement (c.à.d. $\frac{E_{D,k}}{E_D}$, ...). Ceci rend le modèle difficile à utiliser pour du démélange. Une étude du comportement spectral de ces termes est alors nécessaire pour voir si des simplifications sont possibles. Pour ce faire, nous utilisons la scène urbaine à la résolution 5 m utilisée précédemment.

2.3.1 Résultats

2.3.1.1 Termes $\frac{E_{D,k}}{E_D}$

Même si E_D et $E_{D,k}$ dépendent de la longueur d'onde, les rapports $\frac{E_{D,k}}{E_D}$ ne dépendent que de la géométrie de la scène. Comme démontré dans [123], en supposant la transmission entre la surface équivalente et le point k égale à 1, ces termes se réduisent à des rapports de cosinus et ne dépendent donc pas de la longueur d'onde.

Ces rapports sont égaux à 1 lorsque la surface est plane, c.à.d. lorsque le modèle de mélange linéaire est valide. Ce n'est pas le cas ici, à cause de la présence de structures 3D, il est donc intéressant de voir quelles valeurs ces termes peuvent prendre. La figure 2.17 montre l'histogramme des valeurs de ces rapports dans notre image urbaine. On note :

- $\frac{E_{D,k}}{E_D}$ dans la partie linéaire du modèle : presque toutes les valeurs sont entre 0 et 5, 54% des valeurs sont presque égales à 1 (avec une précision de 0.01). Ces termes sont donc souvent différents de 1, ce qui n'est pas le cas quand la surface est plane.
- $\frac{E_{D,m}}{E_D}$ dans la partie quadratique du modèle (où m correspond à une surface élémentaire au soleil) : la plupart des valeurs sont entre 0.3 et 5, 94% des valeurs sont en dessous

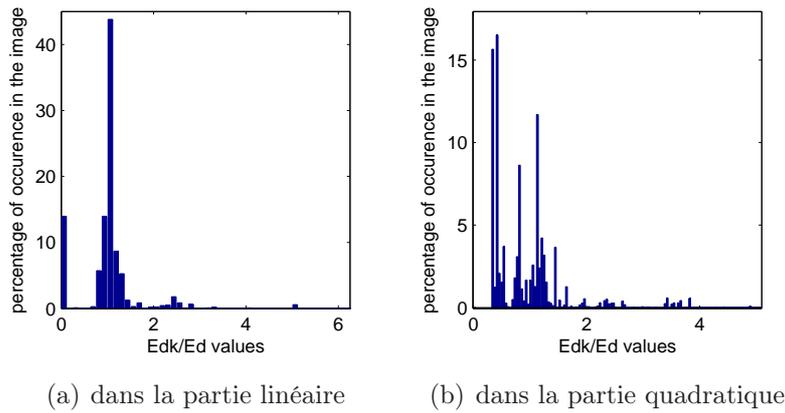


FIGURE 2.17 – Histogrammes des valeurs de $\frac{E_{D,k}}{E_D}$ dans la partie linéaire et quadratique du modèle

de 2. Notons que les valeurs sont élevées lorsque E_D est faible c.à.d. pour les pixels partiellement à l'ombre.

2.3.1.2 Termes $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$

Sur la figure 2.18 sont tracés les rapports $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$ en fonction de la longueur d'onde, pour différentes surfaces élémentaires m et différentes positions de pixels. Sur la figure 2.18(a) on peut voir que ces termes varient très lentement dans le domaine proche infra-rouge mais ils dépendent sensiblement de la longueur d'onde dans le visible. En regardant le tracé de ces courbes en échelle semi-log (figure 2.18(b)), on constate que toutes les courbes semblent être une version translatée d'une seule courbe. Ceci veut dire qu'en échelle linéaire ces courbes sont proportionnelles.

Cette propriété peut être vérifiée en calculant les coefficients de corrélation entre toutes les courbes deux à deux, ceux-ci sont tous supérieurs à 0.98. On peut donc approximer toutes nos courbes par une courbe multipliée par un scalaire : $u_k(\lambda) \simeq a_k v(\lambda)$, avec :

- $v(\lambda)$ la courbe choisie comme référence.

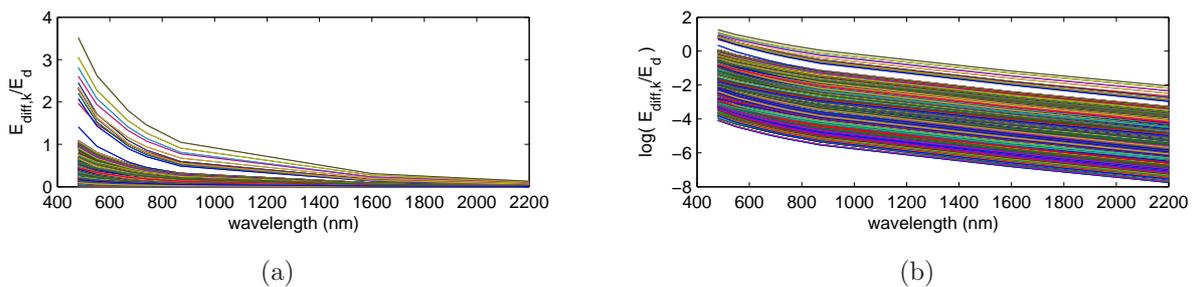


FIGURE 2.18 – (a) $E_{diff,m}/E_D$ en fonction de la longueur d'onde (nm), (b) $\log(E_{diff,m}/E_D)$ en fonction de la longueur d'onde (nm)

$$- a_k = \frac{\text{mean}_\lambda(u_k(\lambda)v(\lambda))}{\text{mean}_\lambda(v(\lambda)^2)}.$$

Pour vérifier la proportionnalité de nos courbes on calcule aussi l'erreur quadratique normalisée suivante : $\text{erreur} = \sqrt{\frac{\text{mean}_\lambda((u_k(\lambda) - a_k v(\lambda))^2)}{\text{mean}_\lambda(u_k^2(\lambda))}$.

On obtient les résultats suivants. L'erreur maximale est de 8 % et l'erreur moyenne est de 4%, pour toutes les courbes. Les erreurs sont inférieures à 6% pour plus de 90% des courbes et inférieures à 7% pour 98% des courbes. Les erreurs obtenues avec cette approximation sont faibles, on peut donc considérer que ces courbes sont proportionnelles. Ce résultat est très intéressant, considérant le fait que quels que soient les matériaux ou les conditions géométriques, les termes $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$ ont le même comportement spectral.

2.3.2 Simplifications et modèle obtenu

L'étude précédente a donné des résultats très intéressants : on a séparabilité entre la dépendance des rapports d'éclairement par rapport à la longueur d'onde et à la position spatiale, de plus $E_{d,k}/E_D$ ne dépend pas de λ . On peut donc écrire

$$\frac{E_{D,k}}{E_D}(y, \lambda) = \alpha_k(y) \quad (2.18)$$

$$\frac{E_{diff,m}}{E_D}(y, \lambda) = \beta_m(y)f(\lambda) \quad (2.19)$$

Ceci nous permet d'écrire, à partir de l'équation (2.17)

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(y, \lambda) &= \sum_{k=1}^N S_k(y) \alpha_k(y) \times \rho_k(\lambda) \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} S_k(y) \frac{g_{m,k}(y)}{\pi} \Delta S \\ &\quad \times (\alpha_m(y) + \beta_m(y)f(\lambda)) \times \rho_k(\lambda) \rho_m(\lambda) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En groupant ensemble tous les coefficients qui dépendent uniquement de la position spatiale, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(y, \lambda) &= \sum_{k=1}^N b_k(y) \times \rho_k(\lambda) \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} (c_{k,m}(y) + d_{k,m}(y)f(\lambda)) \times \rho_m(\lambda) \rho_k(\lambda) \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec $b_k(y) = S_k(y) \alpha_k(y)$,

$c_{k,m}(y) = S_k(y) \frac{g_{m,k}(y)}{\pi} \Delta S \alpha_m(y)$

et $d_{k,m}(y) = S_k(y) \frac{g_{m,k}(y)}{\pi} \Delta S \beta_m(y)$.

Ceci est notre modèle général pour les environnements urbains, sans approximation notable. C'est un modèle linéaire quadratique *spectralement variant*, à cause du terme $f(\lambda)$, dans le coefficient du dernier terme, qui dépend encore de la longueur d'onde. Quantifier l'erreur sur $\langle \rho \rangle$ induite par l'approximation qui a été faite, n'est pas facile. Néanmoins, on peut être sûr qu'elle est globalement inférieure à 3%, qui correspond à la proportion maximale attendue pour $\langle \rho \rangle_{env,diff}$ dans $\langle \rho \rangle$ (voir résultats de la figure 2.15 et du tableau 2.4).

2.3.3 Obtention du modèle linéaire quadratique invariant

A présent si on veut un modèle linéaire quadratique *invariant* dans lequel les sources sont les réflectances, nous devons négliger les variations spectrales de $f(\lambda)$. Comme il a été remarqué dans la section 2.2, la contribution du terme $\langle \rho \rangle_{env,diff}$ (et donc les termes $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$) dans $\langle \rho \rangle_{env}$ est faible comparée à celle de $\langle \rho \rangle_{env,D}$ (termes $\frac{E_{D,m}}{E_D}$). Approximer $f(\lambda)$ à une constante est donc acceptable et peut être fait sans conséquences importantes. On inclut donc $f(\lambda)$ dans la définition du terme $\beta_m(y)$.

En groupant ensemble tous les coefficients dépendant de la position spatiale, l'équation (2.21) devient

$$\langle \rho \rangle(y, \lambda) = \sum_{k=1}^N b_k(y) \times \rho_k(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{m \in V_k} c_{k,m}(y) \times \rho_k(\lambda) \rho_m(\lambda) \quad (2.22)$$

avec ici $b_k(y) = S_k(y) \alpha_k(y)$

et $c_{k,m}(y) = S_k(y) \frac{g_{m,k}(y)}{\pi} \Delta S(\alpha_m(y) + \beta_m(y))$.

Notons que cette simplification peut être faite sans la démonstration de séparabilité des termes $\frac{E_{diff,m}}{E_D}$ par rapport à la longueur d'onde et à la position (section 2.3.1). L'erreur induite par cette simplification sera évaluée dans la section suivante, au niveau des pixels.

2.4 Vers le démélange spectral

2.4.1 Modèle de mélange final adapté au démélange spectral

Pour faire du démélange ou de la séparation de sources, on doit avoir les mêmes sources dans toute l'image, les sources doivent donc être indépendantes des pixels. Dans notre cas, les sources sont les réflectances, donc le modèle suppose que chaque matériau correspond à un seul spectre de réflectance. Dans l'équation (2.22), une réflectance est associée à chaque surface élémentaire k ou m , on regroupe donc les surfaces élémentaires correspondant aux mêmes matériaux ensemble en associant une réflectance ρ_j à chaque matériau. Notre équation, pour un pixel i , devient donc une somme sur les M matériaux présents dans la scène étudiée :

$$\langle \rho \rangle_i(\lambda) = \sum_{j=1}^M a_j(i) \times \rho_j(\lambda) + \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) \times \rho_j(\lambda) \rho_\ell(\lambda) \quad (2.23)$$

avec, par exemple, $a_j(i) = \sum_{k \in D_j} b_k(y)$, où $D_j =$ surfaces élémentaires composées du matériau j .

On obtient donc un modèle linéaire quadratique instantané invariant, avec M sources qui sont les réflectances des matériaux présents dans l'image. Ce modèle, qui a déjà été utilisé dans quelques travaux pour du démélange spectral (voir par exemple [102], [114],[115] et [119], et le chapitre précédent), est à présent justifié par nos équations physiques.

2.4.2 Hypothèse possibles sur les coefficients de mélange ?

Le modèle linéaire quadratique ci-dessus a été utilisé dans la littérature, pour du démélange, avec différentes hypothèses concernant les coefficients de mélange $a_j(i)$ et $a_{j,\ell}(i)$.

Dans [102] par exemple, il est considéré que la somme de tous les coefficients ($a_j(i)$ et $a_{j,\ell}(i)$) est égale à 1, ce qui n'a pas vraiment de signification physique. Dans [115] différentes possibilités sont proposés pour les $a_{j,\ell}(i)$, sans non plus de justification. [114] suppose que $a_{j,\ell}(i) = a_j(i)a_\ell(i)$, ce qui suppose qu'une surface non vue par le capteur pour le pixel considéré, ne peut contribuer sur sa réflectance à travers des réflexions, et ceci n'est souvent pas vrai (voir figure 2.20 et les exemples ci-dessus).

Concernant les coefficients linéaires $a_j(i)$, la plupart des travaux gardent l'hypothèse utilisée pour le modèle linéaire [114] [119], considérant que les $a_j(i)$ sont les abondances (proportion de chaque matériau dans le pixel) et donc : $\sum_{j=1}^M a_j(i) = 1$ et $0 \leq a_j(i) \leq 1$. Dans la section 2.1, nous avons démontré que cette hypothèse (équation (2.12)) est vraie pour notre modèle général, c.à.d. même si les surfaces ne sont pas planes et homogènes. Ceci a été confirmé par des résultats de simulations dans la section 2.2.4.3. On peut en effet écrire pour un pixel i :

$$\sum_{j=1}^M a_j(i) = \sum_{k=1}^N S_k \frac{E_{D,k}}{E_D} = 1 \quad (2.24)$$

Pour le modèle linéaire classique, qui est valide quand la surface est plane et homogène, les termes $\frac{E_{D,k}}{E_D}$ sont égaux à 1, et on obtient la condition de somme à 1 des abondances.

Concernant les coefficients $a_{j,\ell}(i)$, liés à la partie quadratique du modèle de mélange, la figure 2.19 montre un histogramme des valeurs non nulles des coefficients obtenus avec notre

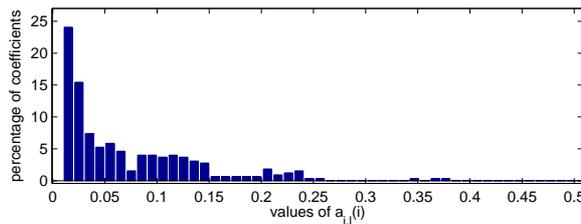


FIGURE 2.19 – Histogramme des valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ - Image urbaine à la résolution 5 m

image urbaine de résolution 5 m. Il peut sembler que la majorité des valeurs sont faibles (72% inférieures à 0.1), mais ceci est normal car, du fait de la taille limitée de notre scène, il n'y a pas de bâtiments sur les bords de l'image, donc pas de réflexions multiples possibles dans ces zones. Si on se focalise sur le canyon précédemment sélectionné (lignes de 10 à 18 - colonnes 7 et 8), les valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ ont une distribution différente, plus représentative des milieux urbains :

- $a_{j,\ell}(i) \in [0, 0.1]$ pour 49% des valeurs,
- $0.1 < a_{j,\ell}(i) < 0.2$ pour 16% ,
- $0.2 < a_{j,\ell}(i) < 0.25$ pour 35% des valeurs.

Analysons à présent les valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ pour quelques pixels choisis de l'image urbaine. Pour cela, on utilise ici le même morceau d'image urbaine que la section 2.2.4.3 (image à 5 m obtenue en simulant une zone de la scène urbaine avec une triangularisation plus fine que celle de la scène urbaine entière).

La figure 2.20(a) montre une image de résolution 0.2 m de la scène utilisée (image d'éclairage direct E_D), avec une grille montrant les pixels à la résolution 5 m. Cette figure montre l'orientation des surfaces par rapport au soleil et les zones à l'ombre (en noir). Les 5 pixels choisis sont aussi indiqués. Sur la figure 2.20(b) on a les valeurs non nulles des $a_{j,\ell}(i)$ pour ces pixels.

Ces pixels ont été choisis car ils correspondent à des configurations différentes incluant : proportion d'ombre, distance par rapport aux murs, orientation des surfaces (toit ou sol). On peut aussi voir à quel matériau correspond chaque coefficient (pour savoir par quelles réflectances il est multiplié dans le modèle). Le but encore une fois est de voir quelles valeurs peuvent être rencontrées dans une image urbaine. Il est aussi intéressant de voir comment la position dans la scène et la proportion d'ombre peuvent jouer sur les valeurs des $a_{j,\ell}(i)$:

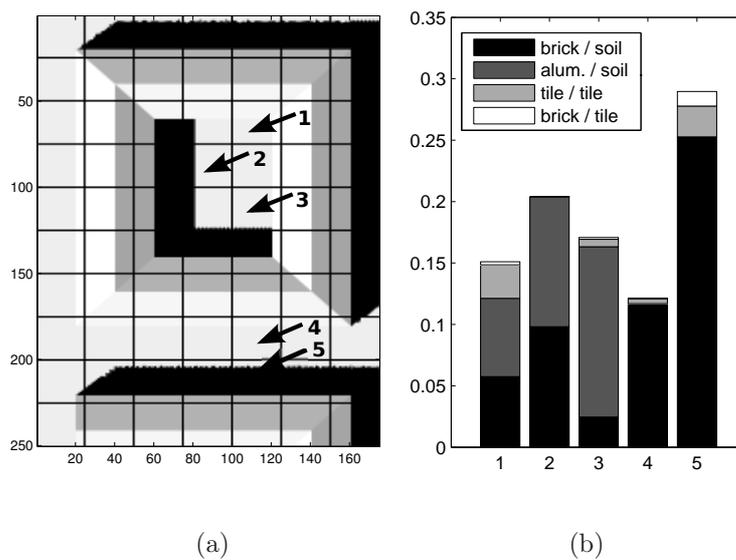


FIGURE 2.20 – Valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ pour 5 pixels choisis dans l'image urbaine utilisée : (a) l'image de E_D , avec les emplacements des pixels, (b) valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ pour ces 5 pixels

- Pixel 1 : il y a des contributions dues à des réflexions entre les toits (tuiles), à des réflexions provenant de murs en brique et de mur en aluminium. Néanmoins la somme totale n'est pas très élevée car les réflexions entre toits sont moins importantes que les réflexions dues aux murs (à cause de l'orientation des surfaces).
- Pixel 2 : il correspond à une surface plus éloignée des murs (par rapport au pixel 1), et la somme de ses coefficients est pourtant plus élevée. Ceci montre encore que les réflexions dues aux murs donnent des contributions plus fortes que celles entre toits (pixel 1). Ceci est dû essentiellement à l'orientation des surfaces entre elles et face au soleil .
- Pixel 3 et 4 : le pixel 3 a un total de coefficients plus élevé que celui du pixel 4. Ceci est dû au fait que le pixel 3 reçoit des réflexions de deux murs alors que le pixel 4 peut recevoir des réflexions d'un seul mur, qui de plus n'a pas la même orientation que celui proche du pixel 3.
- Pixel 5 : le coefficient correspondant à la brique est élevé comparé aux autres pixels, ceci est dû à la présence de l'ombre comme expliqué dans la section 2.2.

Les valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ sont certainement plus faibles que celles des $a_j(i)$, mais beaucoup ne sont pas négligeables (surtout si elles sont multipliées par des réflectances fortes) si on veut faire du démélange avec une bonne précision sur des images urbaines.

Il reste à présent un dernier point à traiter : les possibles erreurs sur le modèle induites par l'approximation de la section 2.3.3. On a supposé que les coefficients $a_{j,\ell}(i)$ ne dépendent pas de la longueur d'onde. Notons que les résultats précédents pour ces coefficients ont été obtenus à la longueur d'onde 670 nm. La figure 2.21 montre les véritables variations des $a_{j,\ell}(i)$ en fonction de la longueur d'onde. Les coefficients varient un peu au début de l'intervalle spectral mais sont quasi stables au-delà de 800 nm. Pour voir l'effet de cette approximation, nous devons nous rappeler que supposer les $a_{j,\ell}(i)$ constants (par rapport à la longueur d'onde) correspond à une approximation sur uniquement les termes $\langle \rho \rangle_{env,diff}$, qui représentent globalement 3% de la réflectance totale (voir figure 2.15 et tableau 2.4), et correspondent à 6% dans le pire des cas (image C4, pour 480 nm). Ce terme est donc très faible comparé à la réflectance totale, l'approximation considérée est donc suffisante et raisonnable.

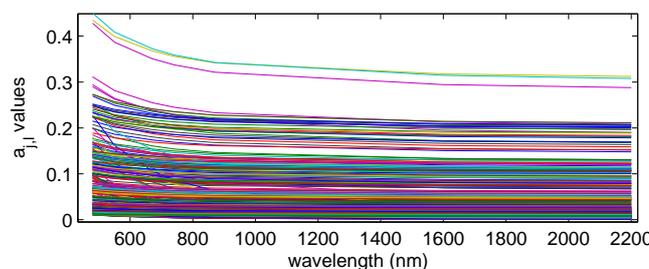


FIGURE 2.21 – Valeurs de $a_{j,\ell}(i)$ en fonction de la longueur d'onde - Image urbaine à la résolution 5 m

Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de mélange de réflectances adapté aux milieux urbains a été développé, en partant d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif. Un modèle linéaire quadratique a été obtenu, qui a ensuite été validé à travers des images simulées présentant des cas de figure réalistes de scènes urbaines.

Nous avons ainsi démontré que les termes quadratiques ne peuvent être négligés sur des scènes urbaines, surtout en présence de bâtiments et de canyons. Ces termes peuvent en effet y représenter de 15 à 20 % de la réflectance totale du pixel.

Il a aussi été montré que la propriété de somme à 1 des coefficients, utilisée couramment pour les modèles linéaires, reste vraie pour les coefficients de la partie linéaire de notre modèle.

Nous sommes finalement arrivés à un modèle linéaire quadratique invariant, adapté à l'utilisation de méthodes de démélange, avec des informations supplémentaires sur les coefficients de mélange de la partie quadratique (comme la répartition des valeurs et le fait qu'ils restent inférieurs à 0.5).

Dans le chapitre suivant, nous décrirons le développement de méthodes de démélange adaptées à ce modèle.

Chapitre 3

Méthodes de démixage spectral

Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons établi et validé le modèle de mélange linéaire quadratique. Celui-ci représente bien les principaux phénomènes se produisant dans les milieux urbains et décrit donc les données d'observation à notre disposition.

Ce chapitre vise à présenter des méthodes de démixage adaptées à ce modèle linéaire quadratique. Rappelons que le but est de démixer les données observées d'une manière non supervisée, on utilisera donc des méthodes de séparation aveugle de sources. Nos sources ici seront les spectres de réflectances. Comme on l'a vu dans le chapitre 1, "Le démixage spectral", à notre connaissance, la quasi-totalité des méthodes qui ont jusqu'à présent été proposées pour ce type de modèle sont supervisées.

Il a été décidé, dans le cadre de cette thèse, de s'orienter vers des méthodes exploitant la positivité des données, comme on l'expliquera en début de ce chapitre (section 2). Les méthodes privilégiées ont donc été des méthodes basées sur la NMF (Non-negative Matrix Factorization).

Nous commencerons ce chapitre par préciser, dans la première section, notre problématique, c.à.d. le mélange que l'on veut séparer ainsi que les contraintes. La deuxième section expliquera l'orientation méthodologique choisie, à savoir l'exploitation de la positivité, ainsi que la démarche, avec la première méthode testée qui est une méthode NMF de la littérature ayant été adaptée ici à notre problème. La section 3 contiendra la première méthode NMF développée spécifiquement pour notre modèle linéaire quadratique. Elle est basée sur un gradient projeté à pas fixe. La section 4 présentera la deuxième méthode qui est une variante améliorée de la première, utilisant une mise à jour de Newton. La section 5 présentera la troisième méthode NMF proposée, basée sur un algorithme multiplicatif.

3.1 Problématique

Rappelons notre problématique : nous avons à notre disposition une image urbaine hyperspectrale en réflectance et on veut extraire la composition en matériaux de ses pixels. Les

mélanges dans nos pixels sont décrits par le modèle linéaire quadratique suivant présenté dans le chapitre précédent dans l'équation (2.23), que nous réécrivons ici sous forme vectorielle avec de nouvelles notations. Les contraintes liées aux coefficients proviennent aussi du chapitre précédent (section 2.4). Nous avons donc, pour un pixel i donné ($i = 1 \dots P$, P étant le nombre de pixels) :

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^M a_j(i) \mathbf{s}_j + \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) \mathbf{s}_j \odot \mathbf{s}_\ell, \quad \forall i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^M a_j(i) = 1 \\ a_j(i) \geq 0, & j = 1 \dots M \\ 0 \leq a_{j,\ell}(i) \leq 0.5, & 1 \leq j \leq \ell \leq M \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

- \mathbf{x}_i : spectre du pixel i , représente la réflectance équivalente du pixel.
- \mathbf{s}_j : le spectre de la source j , qui est le spectre de réflectance du matériau j (\odot correspond à la multiplication terme à terme) .
- \mathbf{x}_i et \mathbf{s}_j sont des vecteurs de taille L , avec L : nombre de longueurs d'onde considérées (nombre de bandes spectrales de l'image).
- M : nombre de matériaux présents dans l'image
- $a_j(i)$ et $a_{j,\ell}(i)$: coefficients de mélange respectivement de la partie linéaire et quadratique.

Le but est de faire du démixage d'une manière non supervisée, c.à.d., à partir des données qui sont les spectres des pixels d'une image (en unité de réflectance), extraire aussi bien les spectres de réflectance que les coefficients de mélange, qui sont aussi inconnus.

Notre intérêt est évidemment de bien estimer surtout la partie correspondant à la composition réelle des pixels (composition réelle de la surface au sol représentée par le pixel), c.à.d. la partie linéaire du mélange. Tenir compte de l'existence des interactions représentées par les termes quadratiques a pour but d'améliorer la précision de l'estimation dans des cas où cette partie quadratique ne peut être raisonnablement négligée.

Il s'agit donc d'avoir un algorithme aux entrées et sorties suivantes :

- *Entrées* : les spectres \mathbf{x}_i des pixels et le nombre de matériaux M .
- *Sorties* : les spectres \mathbf{s}_j et les coefficients a_j .

Il n'est pas déraisonnable de supposer, à ce stade du travail, le nombre de matériaux M connu. En effet on peut en avoir une estimation par des méthodes classiques d'extraction de endmembers (voir chapitre 1) ou par ACP par exemple. Il est aussi possible d'appliquer la méthode de SAS avec différentes valeurs de M et prendre le résultat le plus vraisemblable et cohérent avec ce que l'on peut savoir sur la scène.

3.2 Vers l'exploitation de la positivité

3.2.1 Pourquoi la positivité ?

On s'intéresse ici au démélange pour des scènes urbaines. Ce type de scènes est caractérisé par une grande variabilité spatiale à l'échelle du mètre (au niveau de la nature des surfaces présentes, de leur orientation...). Pour une résolution de quelques mètres (résolution des capteurs hyperspectraux en général), la présence de pixels purs pour tous les matériaux présents sur la scène est donc très peu probable. Cela écarte la possibilité d'aller vers une méthode pouvant exploiter la parcimonie spatiale ou la présence de pixels purs. La figure 3.1 sur laquelle on peut voir la même image à la résolution 0.8 m (figure 3.1(a)) et 8 m (figure 3.1(b)) illustre cette grande variabilité spatiale.

D'autre part, l'observation de nos spectres de réflectance montre qu'ils ne sont pas du tout parcimonieux (pas de valeurs nulles), et il est difficile de trouver une transformée (des variations spectrales) qui permet de passer à une représentation parcimonieuse sans compliquer notre modèle. Au vu de cela nous avons choisi d'écarter les méthodes basées sur la parcimonie (méthodes SCA dans le chapitre "Etat de l'art en SAS").

Le fait de s'intéresser à des spectres de milieu urbain ajoute une difficulté supplémentaire, qui est que les spectres de matériaux urbains sont souvent très corrélés entre eux. Sur la figure 3.2 on peut voir les coefficients de corrélation entre les spectres de 6 matériaux. Exceptée la végétation qui présente des coefficients plutôt faibles avec les autres matériaux (inférieurs à 0.5), les autres matériaux sont très corrélés (coefficients de corrélation supérieurs à 0.8 dans la majorité des cas). Cette constatation écarte l'utilisation d'une deuxième classe de méthodes qui est l'ICA (voir chapitre "Etat de l'art en SAS").



(a) résolution de 0.8 m



(b) résolution de 8 m

FIGURE 3.1 – Images multispectrales en luminance acquises par le capteur aéroporté PELICAN (ONERA-IGN-CNES) sur Toulouse

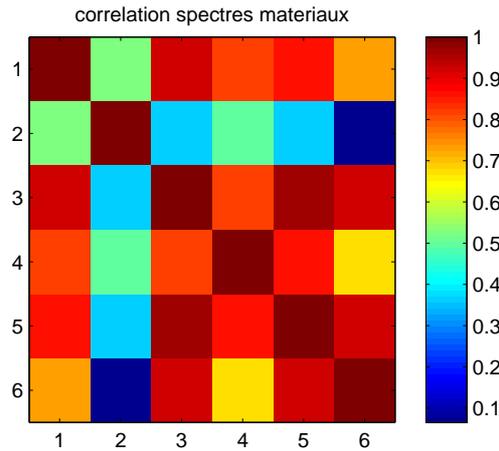


FIGURE 3.2 – Coefficients de corrélation entre les spectres des 6 matériaux suivants : 1. asphalte, 2. pelouse, 3. sol nu, 4. brique, 5. aluminium, 6. béton

On pourrait penser aux méthodes géométriques, utilisées en démixage en télédétection (voir chapitre 1, "Le démixage spectral"), mais ces méthodes sont basées sur l'hypothèse que les données forment un simplexe, ce qui est vrai uniquement dans le cas d'un mélange linéaire. Une extension à une configuration géométrique adaptée au cas linéaire quadratique ne semble pas évidente, nous avons donc préféré laisser de côté ce type de méthodes.

Au vu de ces contraintes, nous avons décidé d'exploiter la positivité de nos données et de nous intéresser aux approches de type NMF (voir chapitre "Etat de l'art en SAS"), qui ont déjà été utilisées dans le cas linéaire et peuvent être étendues, comme on le verra, pour le cas d'un mélange linéaire quadratique.

Cette piste n'est bien sûr pas la seule possible, il y a aussi les méthodes bayésiennes qui auraient pu être envisagées, certaines ayant d'ailleurs déjà été proposées en supervisé.

3.2.2 Première méthode : NMF linéaire multiplicative étendue

La première approche pour résoudre notre problème (équation (3.1)) a été d'appliquer une méthode NMF linéaire de la littérature en considérant les termes quadratiques comme des "sources" supplémentaires, qu'on pourra désigner par "pseudo-sources", sans pour autant tenir compte du lien existant entre ces pseudo-sources et les vraies sources. Notre modèle peut donc être écrit comme suit sous forme matricielle (c.à.d. pour P pixels) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{AS} \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{X} &= [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_P]^T, \quad (P \geq 2) \text{ avec } \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i(1) & \cdots & x_i(L) \end{bmatrix}^T, \\
 - \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_M & \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_M \odot \mathbf{s}_M \end{bmatrix}^T, \text{ avec } \mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} s_j(1) & \cdots & s_j(L) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

$$- \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1(1) & \cdots & a_M(1) & a_{1,1}(1) & a_{1,2}(1) & \cdots & a_{M,M}(1) \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_1(P) & \cdots & a_M(P) & a_{1,1}(P) & a_{1,2}(P) & \cdots & a_{M,M}(P) \end{bmatrix} : \text{la matrice de mélange.}$$

Cette réécriture du modèle nous permet d'étendre au cas linéaire quadratique le principe de la NMF qui est en réalité adaptée aux mélanges linéaires.

La première méthode que nous avons adaptée à notre problématique et testée est l'algorithme multiplicatif de Lee et Seung [35] avec la norme classique de Frobenius. Son principe a été présenté dans le chapitre "Etat de l'art en SAS". Nous avons ici étendu son utilisation au cas d'un modèle linéaire quadratique, on le notera donc *Linéaire ext* (avec "ext" pour "extended" en anglais). C'est un algorithme itératif dont les mises à jour des matrices à chaque itération sont programmées, dans notre cas, comme suit :

Algorithme *Linéaire ext*

1. $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S} \odot ((\mathbf{A}^T \mathbf{X}) \oslash (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{S} + \varepsilon))$
2. $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} \odot ((\mathbf{X} \mathbf{S}^T) \oslash (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^T + \varepsilon))$
3. $[a_1(i) \cdots a_M(i)] \leftarrow [a_1(i) \cdots a_M(i)] / \sum_{j=1}^M a_j(i)$
4. $a_{j,\ell}(i) \leftarrow \min \{a_{j,\ell}(i), 0.5\}$

La notation " \leftarrow " veut dire que l'on affecte la valeur du terme à droite au terme de gauche. Les notations \odot et \oslash correspondent respectivement à la multiplication et division terme à terme. Le terme ε au dénominateur est choisi positif et très petit et sert à éviter les divisions par zéro. Les étapes 3 et 4 servent respectivement à satisfaire la contrainte de somme à 1 pour les coefficients de la partie linéaire et la contrainte d'avoir des valeurs inférieures à 0.5 pour les coefficients quadratiques. Ces deux étapes ne sont pas dans la méthode d'origine.

Cette version multiplicative, par rapport à un algorithme de gradient projeté (voir chapitre "Etat de l'art en SAS"), a l'avantage de permettre de s'affranchir du choix du pas de descente. De plus, la convergence est plus rapide que celle d'un gradient à pas fixe.

3.3 Première méthode proposée : NMF LQ Gradient

Les performances de l'algorithme *Linéaire ext* n'étant pas assez satisfaisantes pour notre modèle, nous avons développé un algorithme NMF adapté à notre modèle linéaire quadratique. Pour des raisons de simplicité, nous avons commencé par une méthode basée sur un algorithme de gradient projeté à pas fixe. Le principe est de tenir compte, dans le calcul du gradient, de la présence des termes quadratiques.

3.3.1 Cas de 2 sources ($M = 2$)

Nous nous limiterons pour commencer à un mélange de deux sources \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 , sans termes au carré. Ce mélange s'écrit donc comme suit, pour une observation (pixel) \mathbf{x}_i

$$\mathbf{x}_i = a_1(i)\mathbf{s}_1 + a_2(i)\mathbf{s}_2 + a_{1,2}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2. \quad (3.3)$$

Cela donne sous forme matricielle

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} \quad (3.4)$$

avec :

- $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_P]^T$, avec $\mathbf{x}_i = [x_i(1) \cdots x_i(L)]^T$
- $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2]^T$, avec $\mathbf{s}_j = [s_j(1) \cdots s_j(L)]^T$
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1(1) & a_2(1) & a_{1,2}(1) \\ \vdots & & \\ a_1(P) & a_2(P) & a_{1,2}(P) \end{bmatrix}$ la matrice de mélange.

Dans l'expression (3.4), on considère que la troisième ligne de la matrice \mathbf{S} correspond à une pseudo-source égale au produit de nos deux sources réelles. Nous appellerons dans la suite cette pseudo-source, la "troisième source", mais sans oublier que notre mélange est en fait réellement composé d'uniquement deux sources, qui sont \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 .

3.3.1.1 Ecriture du critère

Comme expliqué dans le chapitre "Etat de l'art en SAS", différents algorithmes de type NMF ont été proposés dans la littérature pour des mélanges linéaires (voir [38]), basés sur différents critères à minimiser avec ou sans contraintes et donnant lieu à différentes règles de mise à jour. Pour des raisons de simplicité, nous avons opté pour le critère classique de norme euclidienne ou de Frobenius (voir équation 3.5), avec un simple algorithme de gradient projeté à pas fixe (voir [38]). Mais notre modèle implique un nouveau calcul du gradient qui aboutit à de nouvelles expressions de mise à jour pour l'estimation de notre matrice \mathbf{S} . Ce nouveau calcul de gradient va permettre de prendre en compte le fait que la troisième source est en réalité le produit des deux premières, et non juste une source supplémentaire comme c'est le cas dans l'algorithme *Linéaire ext* présenté dans la section 3.2.2.

Pour faciliter le calcul nous réécrivons nos matrices comme suit

- $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_a \quad \mathbf{A}_b]$, où $\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} a_1(1) & a_2(1) \\ \vdots & \vdots \\ a_1(P) & a_2(P) \end{bmatrix}$ et $\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} a_{1,2}(1) \\ \vdots \\ a_{1,2}(P) \end{bmatrix}$
- $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_a \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix}$, où $\mathbf{S}_a = [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2]^T$ et $\mathbf{S}_b = [\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2]^T$.

Notre critère à minimiser s'écrit alors

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|_F^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_a\mathbf{S}_a - \mathbf{A}_b\mathbf{S}_b\|_F^2. \quad (3.5)$$

3.3.1.2 Calcul des gradients

Le calcul de gradient par rapport à la matrice de mélange n'est pas altéré par notre modèle, en comparaison du cas linéaire. Les dépendances par rapport à la matrice de mélange \mathbf{A} restent en effet inchangées par rapport au cas linéaire. En écrivant ainsi notre critère

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \text{Tr}((\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})(\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})^T) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{X}^T + \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T) \end{aligned} \quad (3.6)$$

on aboutit facilement à l'expression du gradient par rapport à la matrice de mélange (voir [126] pour le calcul matriciel)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (-\mathbf{X}\mathbf{S}^T - \mathbf{X}\mathbf{S}^T + 2\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^T) \\ &= -(\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{S}^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le fait que la troisième source soit le produit de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 change par contre le calcul du gradient par rapport aux sources, en comparaison du modèle linéaire. Le calcul du gradient étant fait sous forme scalaire, nous écrivons donc d'abord notre critère sous forme scalaire comme suit

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{i,n} [\mathbf{X} - \mathbf{A}_a\mathbf{S}_a - \mathbf{A}_b\mathbf{S}_b]_{in}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,n} [X_{in} - (\mathbf{A}_a\mathbf{S}_a)_{in} - (\mathbf{A}_b\mathbf{S}_b)_{in}]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,n} [X_{in} - \sum_{j=1}^2 a_j(i)S_{jn} - a_{1,2}(i)S_{1n}S_{2n}]^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec $S_{jn} = [\mathbf{S}_a]_{jn}$ et $X_{in} = [\mathbf{X}]_{in}$. On peut alors calculer le gradient du critère J par rapport à S_{1n} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial S_{1n}} &= \sum_i (X_{in} - \sum_{j=1}^2 a_j(i)S_{jn} - a_{1,2}(i)S_{1n}S_{2n}) \\ &\quad \times (-a_1(i) - a_{1,2}(i)S_{2n}) \\ &= -\sum_i a_1(i) (X_{in} - \sum_{j=1}^2 a_j(i)S_{jn} - a_{1,2}(i)S_{1n}S_{2n}) \\ &\quad - S_{2n} \sum_i a_{1,2}(i) (X_{in} - \sum_{j=1}^2 a_j(i)S_{jn} - a_{1,2}(i)S_{1n}S_{2n}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'expression du gradient par rapport à S_{2n} peut se déduire facilement de (3.9) en inversant, pour $a_j(i)$ et S_{jn} , les indices 1 et 2.

En remplaçant l'écriture scalaire par des produits matriciels, nous obtenons finalement

$$\frac{\partial J}{\partial S_{1n}} = -[\mathbf{A}_a^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{1n} - [\mathbf{S}_a]_{2n} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_n \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial S_{2n}} = -[\mathbf{A}_a^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{2n} - [\mathbf{S}_a]_{1n} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_n \quad (3.11)$$

3.3.1.3 Les mises à jour

En appliquant l'algorithme de descente de gradient, cela aboutit naturellement pour la matrice \mathbf{A} à la mise à jour suivante, pour une itération $(m + 1)$:

$$\mathbf{A}^{(m+1)} = \mathbf{A}^{(m)} - \alpha_A \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} \quad (3.12)$$

où α_A est un gain d'adaptation positif (pas du gradient) choisi suffisamment petit pour que l'algorithme converge.

Cela nous donne, de la même manière, pour une itération $(m + 1)$, les règles de mise à jour suivantes pour les deux sources (sans oublier que l'expression du gradient est ici différente du cas linéaire) :

$$S_{1n}^{(m+1)} = S_{1n}^{(m)} - \alpha_S \frac{\partial J}{\partial S_{1n}} \quad (3.13)$$

$$S_{2n}^{(m+1)} = S_{2n}^{(m)} - \alpha_S \frac{\partial J}{\partial S_{2n}} \quad (3.14)$$

α_S est le pas du gradient correspondant à la matrice \mathbf{S} . Le pas peut en effet être différent pour les mises à jour de chacune des deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{S} (voir [38]).

Pour la troisième ligne de la matrice \mathbf{S} , cependant, on n'applique pas de descente de gradient. Comme nous pouvons le voir dans (3.15), nous copions le produit élément par élément des deux premières lignes :

$$S_{3n}^{(m+1)} = S_{1n}^{(m+1)} S_{2n}^{(m+1)} \quad (3.15)$$

Nous forçons ainsi la 3^{ème} source à coller à la réalité du mélange en lui imposant d'être égale au produit des deux premières.

Pour ce qui est des mises à jour des équations (3.12), (3.13) et (3.14), l'algorithme du gradient appliqué tel quel ne garantit pas la positivité du résultat. Pour résoudre ce problème, nous optons pour la solution (utilisée dans la littérature [38]) qui consiste à comparer, à chaque

itération de l'algorithme, les valeurs obtenues après mise à jour avec un ϵ très faible et positif et à garder le maximum des deux :

$$\mathbf{A}^{(m+1)} = \max\{\mathbf{A}^{(m)}, \epsilon\} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}_a^{(m+1)} = \max\{\mathbf{S}_a^{(m)}, \epsilon\} \quad (3.17)$$

Cela consiste plus précisément à comparer chaque élément de la matrice à ϵ , et s'il est inférieur à ϵ , à le remplacer par ϵ . Nous éliminons ainsi tous les éléments négatifs et garantissons la non négativité sur laquelle reposent les méthodes NMF.

3.3.1.4 Algorithme final

Pour compléter l'algorithme, il faut ajouter les contraintes liées aux coefficients. Celles-ci sont imposées aux mises à jour des matrices à chaque itération, de la même manière que pour l'algorithme *Linéaire ext* dans la section 3.2.2. Pour chaque itération, l'algorithme procède donc comme suit :

Algorithme

1. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_a :

$$S_{1n} \leftarrow S_{1n} + \alpha_S [\mathbf{A}_a^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{1n} + \alpha_S [\mathbf{S}_a]_{2n} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_n$$

$$S_{2n} \leftarrow S_{2n} + \alpha_S [\mathbf{A}_a^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{2n} + \alpha_S [\mathbf{S}_a]_{1n} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_n$$

$$\mathbf{S}_a \leftarrow \max\{\mathbf{S}_a, \epsilon\}$$

2. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_b à partir de \mathbf{S}_a :

$$S_{3n} \leftarrow S_{1n} S_{2n}$$

3. $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} + \alpha_A (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{S}^T$

$$\mathbf{A} \leftarrow \max\{\mathbf{A}, \epsilon\}$$

4. $[a_1(i) \ a_2(i)] \leftarrow [a_1(i) \ a_2(i)] / \sum_{j=1}^2 a_j(i)$

5. $a_{1,2}(i) \leftarrow \min\{a_{1,2}(i), 0.5\}$

Cet algorithme a donné des résultats encourageants avec des mélanges de deux sources (comme on le verra dans le chapitre suivant) et l'étape suivante a donc été de l'étendre au cas général de M sources.

3.3.2 Cas général de M sources

Il s'agit dans cette section de présenter l'extension de l'algorithme précédent au cas général de M sources. On s'intéresse donc maintenant au modèle général (3.1) défini au début de ce chapitre, et qui s'écrit sous forme matricielle comme expliqué dans (3.2). Notre critère s'écrit donc comme suit, en adoptant les mêmes notations que précédemment (voir (3.5)) :

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|_F^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_a \mathbf{S}_a - \mathbf{A}_b \mathbf{S}_b\|_F^2. \quad (3.18)$$

avec cette fois-ci :

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \text{ où } \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} a_1(1) & \cdots & a_M(1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1(P) & \cdots & a_M(P) \end{bmatrix} \\
 \text{et } \mathbf{A}_b &= \begin{bmatrix} a_{1,1}(1) & a_{1,2}(1) & \cdots & a_{M,M}(1) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,1}(P) & a_{1,2}(P) & \cdots & a_{M,M}(P) \end{bmatrix} \\
 \bullet \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_a \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix}, \text{ où } \mathbf{S}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_M \end{bmatrix}^T \text{ et } \mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_M \odot \mathbf{s}_M \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned}$$

Le calcul pour la matrice \mathbf{A} étant inchangé par rapport au cas $M = 2$ (expressions données par les équations (3.7) et (3.12)), on s'intéresse ici uniquement au calcul pour la matrice \mathbf{S} . Pour ce faire, le critère J est écrit sous forme scalaire comme dans (3.8) pour le cas de 2 sources :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i,n} \left[X_{in} - \sum_{j=1}^M a_j(i) S_{jn} - \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) S_{jn} S_{\ell n} \right]^2 \quad (3.19)$$

Notons que dans cette équation et le calcul qui suit, on considère que $a_{j,\ell} = a_{\ell,j}$, ce terme pouvant être présent au maximum une seule fois pour un couple $(j, \ell) = (\ell, j)$ donné.

A partir de l'écriture (3.19), le calcul du gradient par rapport à une source p donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial S_{pn}} &= \sum_i \left(X_{in} - \sum_{j=1}^M a_j(i) S_{jn} - \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) S_{jn} S_{\ell n} \right) \\
 &\quad \times \left(-a_p(i) - \sum_{j=1, j \neq p}^M a_{j,p}(i) S_{jn} - 2a_{p,p}(i) S_{pn} \right) \\
 &= -\sum_i a_p(i) \left(X_{in} - \sum_{j=1}^M a_j(i) S_{jn} - \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) S_{jn} S_{\ell n} \right) \\
 &\quad - \sum_{j=1, j \neq p}^M \left[S_{jn} \sum_i a_{j,p}(i) \left(X_{in} - \sum_{j=1}^M a_j(i) S_{jn} - \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) S_{jn} S_{\ell n} \right) \right] \\
 &\quad - 2S_{pn} \sum_i a_{p,p}(i) \left(X_{in} - \sum_{j=1}^M a_j(i) S_{jn} - \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=j}^M a_{j,\ell}(i) S_{jn} S_{\ell n} \right)
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir de l'expression scalaire du gradient (3.20), on peut passer à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial S_{pn}} &= -[\mathbf{A}_a^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{pn} - \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{(jp)n} \\ &\quad - 2[\mathbf{S}_a]_{pn} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{(pp)n} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où (jp) est l'indice de la colonne de la matrice \mathbf{A}_b correspondant aux coefficients $a_{jp}(i)$. Il correspond dans ce cas là aussi, évidemment, à l'indice de la ligne où se trouve le terme $\mathbf{s}_j \odot \mathbf{s}_p$ dans la matrice \mathbf{S}_b (il est par exemple égal à 1 pour $j = p = 1$).

L'algorithme proposé ici suppose en effet que l'on impose les positions des termes quadratiques dans la matrice \mathbf{S}_b , étant donné que ces termes sont calculés à partir des M sources de la partie linéaire. Le calcul des indices (jp) est immédiat et nécessite uniquement la connaissance de M .

Il est à noter que le calcul a été présenté ici dans le cas général d'un modèle linéaire quadratique. Si l'on dispose d'un modèle bilinéaire, c.à.d. sans les termes au carré, il est possible de l'adapter facilement. Il suffit, en effet, d'enlever le dernier terme de l'expression (3.21), c.à.d. le terme sur la 2ème ligne. Ce terme correspond en effet à la présence de termes au carré.

Notre algorithme dans le cas général de M sources, s'effectue ensuite suivant le même principe que pour le cas $M = 2$. On a donc pour chaque itération :

Algorithme *LQ Grd*

1. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_a :

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_a]_{pn} &\leftarrow [\mathbf{S}_a]_{pn} + \alpha_S [\mathbf{A}_a^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{pn} + \alpha_S \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{(jp)n} \\ &\quad + 2 \alpha_S [\mathbf{S}_a]_{pn} \times [\mathbf{A}_b^T(\mathbf{X} - \mathbf{AS})]_{(pp)n} \\ \mathbf{S}_a &\leftarrow \max\{\mathbf{S}_a, \epsilon\} \end{aligned}$$

2. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_b à partir de \mathbf{S}_a :

$$[\mathbf{S}_b]_{(jp)n} \leftarrow [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{S}_a]_{pn}$$

3. $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} + \alpha_A (\mathbf{X} - \mathbf{AS})\mathbf{S}^T$

$$\mathbf{A} \leftarrow \max\{\mathbf{A}, \epsilon\}$$

4. $[a_1(i) \cdots a_M(i)] \leftarrow [a_1(i) \cdots a_M(i)] / \sum_{j=1}^M a_j(i)$

5. $a_{j,\ell}(i) \leftarrow \min\{a_{j,\ell}(i), 0.5\}$

Nous avons donc proposé ici un algorithme dédié aux mélanges linéaires quadratiques, lorsque les données sont positives. Il a été développé dans notre cas particulier de démélange spectral, avec nos contraintes liées aux coefficients. Néanmoins, cette méthode peut être adaptée à une autre application, en enlevant les étapes 4 et 5 liées à ces contraintes. On peut aussi imaginer de rajouter des contraintes supplémentaires au critère, suivant l'application et d'adapter l'algorithme en conséquence.

Cet algorithme, pour notre application, a donné des résultats très encourageants, mais a l'inconvénient de reposer sur une descente de gradient à pas fixe, ce qui peut réduire ses performances lorsque les pas sont mal réglés. Il repose aussi sur un algorithme dont la convergence peut être très lente. De plus, le fait d'avoir deux pas à régler, complique les choses. On propose donc dans la section suivante une variante de l'algorithme qui permet de pallier en partie ce problème.

3.4 Deuxième méthode : NMF LQ Gradient-Newton

Dans l'algorithme précédent, le choix du pas de descente (α_A ou α_S) n'est pas chose simple. Il existe d'ailleurs, dans le cadre général des problèmes d'optimisation par algorithme de gradient [127] [128], des algorithmes permettant de calculer le pas à chaque itération. Cependant, ces méthodes automatiques de choix du pas, même si elles sont préférables à un pas fixe, ne garantissent pas toujours un choix optimal et peuvent aussi ralentir le calcul. Une mise à jour du type Newton peut alors être préférable lorsque l'on a la possibilité de calculer la dérivée seconde du critère (calcul pas trop complexe). Cela permet de s'affranchir de la contrainte du pas et peut permettre d'avoir une meilleure convergence et donc de meilleures performances.

L'expression du gradient par rapport aux sources n'étant pas très simple, nous nous sommes contentés à ce stade de laisser la mise à jour des sources telle quelle et d'appliquer la mise à jour de Newton uniquement pour la matrice des coefficients de mélange (appliquer Newton nécessite en effet le calcul de la matrice hessienne). L'expression de celle-ci s'obtient comme expliqué dans la suite (dans [38] une démonstration un peu différente est donnée).

Rappelons l'expression du critère J sous forme scalaire, sans séparer cette fois-ci les parties linéaires et quadratiques des matrices, étant donné que l'on s'intéresse à la dérivation par rapport à la matrice de mélange :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i,n} [X_{in} - \sum_{j=1}^K A_{ij} S_{jn}]^2 \quad (3.22)$$

où K est le nombre de colonnes de la matrice \mathbf{A} (c.à.d. nombre total de toutes les "sources" y compris les termes quadratiques). On obtient l'expression scalaire suivante pour le gradient (déjà démontrée matriciellement dans (3.7)) :

$$\frac{\partial J}{\partial A_{pk}} = \sum_n \left(\sum_{j=1}^K A_{pj} S_{jn} - X_{pn} \right) S_{kn} = [(\mathbf{AS} - \mathbf{X})\mathbf{S}^T]_{pk} \quad (3.23)$$

Le calcul donne alors pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial A_{pk} \partial A_{m\ell}} = \begin{cases} \sum_n S_{\ell n} S_{kn} = [\mathbf{SS}^T]_{\ell k} = [\mathbf{SS}^T]_{k\ell} & \text{si } p = m, \forall p \\ 0 & \text{si } p \neq m \end{cases} \quad (3.24)$$

Notons que $\mathbf{SS}^T \in \mathbb{R}_+^{K \times K}$, et que la matrice de gradient, $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{P \times K}$, a la même dimension que \mathbf{A} .

On peut remarquer du résultat (3.24) que, d'une part, la dérivée seconde est nulle si $p \neq m$, et d'autre part qu'elle ne dépend pas de la valeur de p , elle ne dépend donc pas de l'indice des pixels, c.à.d. l'indice des lignes de la matrice.

Si on voulait, à partir de (3.24), écrire la matrice Hessienne totale (que l'on notera $\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{A}^2}$) pour \mathbf{A} , en vectorisant cette dernière (ligne par ligne) cela donnerait une matrice diagonale par blocs (de taille $KP \times KP$) :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{A}^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{S}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S}\mathbf{S}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{S}\mathbf{S}^T \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Cette écriture nous montre qu'il n'y a pas d'interférence entre les lignes et l'on peut donc raisonner comme suit.

Notons \mathbf{A}_p la p -ème ligne de \mathbf{A} , $\left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}}\right]_p$ la p -ème ligne de la matrice de gradient. Soit \mathbf{H} la matrice telle que $H_{k\ell} = \frac{\partial^2 J}{\partial A_{pk} \partial A_{p\ell}}$ (c.à.d. $\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$). La matrice \mathbf{H} est donc la Hessienne correspondant à ce vecteur ligne \mathbf{A}_p . On obtient alors la mise à jour de Newton pour ce vecteur en appliquant l'expression habituelle de Newton :

$$\mathbf{A}_p^T \leftarrow \mathbf{A}_p^T - \mathbf{H}^{-1} \left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}}\right]_p^T \quad (3.26)$$

La matrice \mathbf{H} étant symétrique, l'écriture (3.26) est équivalente à l'écriture suivante (on passe de vecteurs colonnes à des vecteurs lignes) :

$$\mathbf{A}_p \leftarrow \mathbf{A}_p - \left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}}\right]_p \mathbf{H}^{-1} \quad (3.27)$$

La matrice \mathbf{H} étant la même pour toutes les lignes de \mathbf{A} , on peut donc écrire la mise à jour de Newton de \mathbf{A} comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\leftarrow \mathbf{A} - \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{H}^{-1} \\ &= \mathbf{A} - \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{A} - (\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{X})\mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} + \mathbf{X}\mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{X}\mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (3.28)$$

On obtient une expression assez simple de la mise à jour de \mathbf{A} . L'algorithme donne alors, pour chaque itération :

Algorithme *LQ Grd-Newton*

1. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_a :

$$[\mathbf{S}_a]_{pn} \leftarrow [\mathbf{S}_a]_{pn} + \alpha_S [\mathbf{A}_a^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{pn} + \alpha_S \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{(jp)n} \\ + 2 \alpha_S [\mathbf{S}_a]_{pn} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{(pp)n}$$

$$\mathbf{S}_a \leftarrow \max\{\mathbf{S}_a, \epsilon\}$$

2. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_b à partir de \mathbf{S}_a :

$$[\mathbf{S}_b]_{(jp)n} \leftarrow [\mathbf{S}_a]_{jn} [\mathbf{S}_a]_{pn}$$

3. $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{X}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1}$

$$\mathbf{A} \leftarrow \max\{\mathbf{A}, \epsilon\}$$

4. $[a_1(i) \cdots a_M(i)] \leftarrow [a_1(i) \cdots a_M(i)] / \sum_{j=1}^M a_j(i)$

5. $a_{j,\ell}(i) \leftarrow \min\{a_{j,\ell}(i), 0.5\}$

Par rapport à l'algorithme précédent c'est donc uniquement l'étape 3 qui change ici. Cette modification, même si elle concerne la mise à jour d'une seule des deux matrices, a montré une amélioration des performances de l'algorithme, comme on pourra le voir au chapitre suivant. Une transformation complète (c.à.d. pour la matrice des sources aussi) de l'algorithme en un algorithme de Newton peut donc paraître comme une des perspectives intéressantes de ce travail, étant donné que le temps nous a manqué de le faire dans le cadre de cette thèse.

3.5 Troisième méthode proposée : NMF LQ Multiplicative

Une autre manière de s'affranchir des pas de descente dans l'algorithme *LQ Grd* (section 3.3.2) est de développer une version multiplicative de cet algorithme. L'algorithme multiplicatif peut s'obtenir à partir de l'algorithme de gradient en choisissant d'exprimer le pas en fonction des matrices produits [36], comme détaillé ci-dessous pour notre cas.

Nous nous contenterons dans cette partie du modèle bilinéaire, donc sans les termes au carré.

La mise à jour de \mathbf{A} est inchangée par rapport au cas linéaire, c'est donc la même que dans l'algorithme *Linéaire ext* (section 3.2.2) :

$$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} \odot ((\mathbf{X}\mathbf{S}^T) \oslash (\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^T + \epsilon)) \quad (3.29)$$

On va donc procéder au calcul de la mise à jour multiplicative de la matrice \mathbf{S}_a . Pour cela, on part de la mise à jour de l'algorithme *LQ Grd*, d'après lequel on a, pour la source p (pour le cas d'un modèle bilinéaire et donc sans le dernier terme dans l'expression du gradient (3.21)) :

$$S_{pn} \leftarrow S_{pn} - \phi_{pn} \frac{\partial J}{\partial S_{pn}} \quad (3.30)$$

avec
$$\frac{\partial J}{\partial S_{pn}} = -[\mathbf{A}_a^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{pn} - \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S})]_{(jp)n}$$

où ϕ_{pn} est ici le pas du gradient, qui sera dépendant des indices p et n . A noter qu'on s'intéresse ici aux mises à jour de la partie linéaire donc $S_{pn} = [\mathbf{S}_a]_{pn}$.

Pour choisir l'expression du pas ϕ_{pn} nous suivons le raisonnement suivant. Ce pas ϕ_{pn} doit être choisi de sorte à donner une mise à jour multiplicative et qui conserve la positivité. Le premier point est vérifié si le pas contient le terme S_{pn} au numérateur (pour permettre une factorisation dans l'expression (3.30)). Pour obtenir la deuxième condition, il faut faire en sorte de se débarrasser, dans le terme de droite de (3.30), de tous les termes précédés par un signe moins (pour aboutir à juste une somme de termes positifs). Une façon de faire est de placer ces termes au dénominateur du pas ϕ_{pn} , ce qui permettra une simplification lors de la réduction au même dénominateur dans (3.30).

Suivant ce raisonnement, nous choisissons de fixer les pas ϕ_{pn} comme suit :

$$\phi_{pn} = \frac{S_{pn}}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n}} \quad (3.31)$$

Le calcul de la mise à jour de la source p se fait alors en remplaçant, dans l'équation (3.30), le pas ϕ_{pn} par son expression (3.31) :

$$\begin{aligned} S_{pn} &\leftarrow \frac{S_{pn} [\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + S_{pn} \times \left(\sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n} \right)}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n}} \\ &+ \frac{S_{pn} [\mathbf{A}_a^T (\mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{S})]_{pn} + S_{pn} \left(\sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T (\mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{S})]_{(jp)n} \right)}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n}} \\ &= \frac{S_{pn} [\mathbf{A}_a^T \mathbf{X}]_{pn} + S_{pn} \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{X}]_{(jp)n}}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

On obtient donc finalement la mise à jour multiplicative suivante :

$$S_{pn} \leftarrow S_{pn} \times \frac{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{X}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{X}]_{(jp)n}}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n} + \varepsilon} \quad (3.33)$$

où (jp) correspond, comme expliqué dans la section 3.3.2, à la position du vecteur $\mathbf{s}_j \odot \mathbf{s}_p$ dans la matrice \mathbf{S}_b .

Comme pour le cas linéaire, ε (positif et très petit) est ajouté au dénominateur pour éviter les éventuelles divisions par zéro.

Il est facile de vérifier sur la mise à jour (3.33) que si la convergence est atteinte, le quotient est égale à 1 et la valeur à droite est alors égale à S_{pn} .

Cet algorithme permet donc, d'une part, de se libérer du pas de descente et de ses inconvénients. D'autre part, de par la construction de la mise à jour qui est de forme multiplicative ne contenant que des sommes de termes positifs, la positivité est garantie à chaque itération,

dès lors que l'initialisation est positive. On peut donc se passer des étapes, présentes dans l'algorithme *LQ Grd* et l'algorithme *LQ Grd-Newton*, qui consistaient à forcer la positivité des solutions à chaque itération en les comparant à une valeur faible positive (équation (3.16)).

L'algorithme final s'écrit de la manière suivante :

Algorithme *LQ mult*

1. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_a :

$$[\mathbf{S}_a]_{pn} \leftarrow [\mathbf{S}_a]_{pn} \times \frac{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{X}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{X}]_{(jp)n}}{[\mathbf{A}_a^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{pn} + \sum_{j=1, j \neq p}^M [\mathbf{S}_a]_{jn} \times [\mathbf{A}_b^T \mathbf{A} \mathbf{S}]_{(jp)n} + \varepsilon}$$

2. Mise à jour de la matrice \mathbf{S}_b à partir de \mathbf{S}_a :

$$[\mathbf{S}_b]_{(jp)n} \leftarrow [\mathbf{S}_a]_{jn} [\mathbf{S}_a]_{pn}$$

3. $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} \odot ((\mathbf{X} \mathbf{S}^T) \oslash (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^T + \varepsilon))$

4. $[a_1(i) \cdots a_M(i)] \leftarrow [a_1(i) \cdots a_M(i)] / \sum_{j=1}^M a_j(i)$

5. $a_{j,\ell}(i) \leftarrow \min \{a_{j,\ell}(i), 0.5\}$

La convergence de cet algorithme n'a pas été prouvée théoriquement. Néanmoins, en pratique, le critère décroît et on a bien convergence vers un minimum (comme tout algorithme de type NMF). Les performances sont d'ailleurs bonnes comme il sera montré dans le chapitre suivant, où les performances des 4 algorithmes présentés ici seront comparées.

La démonstration théorique de la convergence de cet algorithme pourrait cependant être un point intéressant à étudier et pourra donc être considérée comme une des perspectives de ce travail de thèse.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les méthodes de démixage proposées dans le cadre de cette thèse pour résoudre notre problématique, à savoir faire du démixage non supervisé dans le cas d'images hyperspectrales urbaines, et donc avec un modèle de mélange linéaire quadratique. Quatre algorithmes basés sur la NMF ont été présentés. Le premier correspond à une adaptation d'une méthode linéaire de la littérature à notre problème, tandis que les 3 autres algorithmes ont été développés spécifiquement dans le cadre de cette thèse pour répondre à notre problématique, c'est-à-dire pour un modèle linéaire quadratique. Les performances de ces méthodes seront présentées et comparées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Tests et performances

Introduction

Dans ce chapitre sont présentées les performances des différentes méthodes décrites au chapitre précédent ainsi qu'un comparatif entre celles-ci. Les mêmes notations et définitions que dans le chapitre précédent seront donc utilisées ici.

Les résultats présentés concernent essentiellement des mélanges artificiels obtenus à partir de vrais spectres de réflectance. Quelques résultats préliminaires avec des images réelles seront fournis à la fin.

La première section présentera les critères de performance utilisés pour évaluer les performances des méthodes sur les données simulées. La deuxième section est dédiée à la description des conditions de tests ainsi que des données simulées. Dans la section 3 nous présentons une comparaison des performances des algorithmes sur les différents cas d'études définis dans la section 2, ainsi qu'une analyse des résultats et du comportement des algorithmes. Dans la section 4 une étude des résultats en fonction du nombre de pixels traités est présentée. La section 5 montre finalement les résultats des premiers tests effectués avec des images réelles.

4.1 Critères de performances

Cette section a pour but de présenter les différents critères de performances qui seront utilisés dans ce chapitre.

Qualité de reconstruction des données

Pour vérifier la bonne convergence de l'algorithme utilisé et la bonne reconstruction des données observées, on compare ces données au produit des deux matrices estimées (sources et mélange). Pour cela on utilisera une erreur quadratique moyenne (ou norme de Frobenius) normalisée :

$$Err_{tot} = \frac{\|\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{S}}\|_F}{\|\mathbf{X}\|_F} \quad (4.1)$$

Qualité d'estimation des spectres

Pour mesurer la ressemblance entre les vrais spectres (ceux présents dans les mélanges) et ceux estimés par nos algorithmes on utilisera l'angle (en radian) entre le vrai spectre j et celui estimé (SAM en anglais pour Spectral Angle Mapper), après correction des permutations dans les $\hat{\mathbf{s}}_j$:

$$SAM_{OUTj} = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{s}_j, \hat{\mathbf{s}}_j \rangle}{\|\mathbf{s}_j\| \|\hat{\mathbf{s}}_j\|} \right) \quad (4.2)$$

avec $j = 1 \dots M$. Mais c'est surtout la moyenne des SAM sur les matériaux qui sera utilisée :

$$SAM_{OUT} = \text{mean}_j(SAM_{OUTj}) \quad (4.3)$$

Qualité d'estimation des coefficients

Les performances d'estimation des coefficients de mélange seront mesurées par le RMSE (pour Root Mean Square Error, en anglais) entre les coefficients et leurs estimations :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MP} \sum_{i,j} (a_j(i) - \hat{a}_j(i))^2} \quad (4.4)$$

avec $j = 1 \dots M$ et $i = 1 \dots P$. Cette mesure est choisie du fait de son utilisation courante dans la littérature en démixage spectral.

En ce qui concerne les performances d'estimation des spectres et des coefficients de mélange, on évalue uniquement l'estimation de la partie linéaire du mélange. Seule cette partie nous intéresse vraiment car elle correspond à la composition réelle des surfaces représentées par les pixels.

4.2 Conditions de test

4.2.1 Méthodes testées

Dans ce chapitre sont testées et comparées les méthodes NMF décrites dans le chapitre précédent et qui seront notées ici comme suit :

- *Linéaire ext* : Méthode linéaire de Lee et Seung adaptée à la présence des termes quadratiques. Cette méthode cherche donc K sources (incluant les M sources et les termes quadratiques considérés comme des "pseudo-sources")
- *LQ Grd* : Méthode LQ Gradient
- *LQ Grd-Newt* : Méthode LQ Gradient-Newton
- *LQ mult* : Méthode LQ Multiplicative

Ces méthodes seront aussi comparées dans la plupart des cas étudiés aux performances de la méthode linéaire de Lee et Seung appliquée dans un cas classique de modèle linéaire, donc en cherchant uniquement M sources (ignorant la présence des termes quadratiques). On notera cette méthode *Linéaire*.

4.2.2 Initialisation des algorithmes

La convergence des algorithmes NMF peut dépendre de l'initialisation, comme expliqué dans le chapitre "Etat de l'art en SAS". Nous avons donc entrepris de tester nos algorithmes dans différents cas d'initialisation, d'abord sans utiliser d'information a priori et ensuite en utilisant une information a priori sur les coefficients de mélange.

4.2.2.1 Initialisations sans information a priori : *init 1* et *init 2*

Dans la configuration où aucune information a priori sur les coefficients de mélange ou les spectres n'est disponible, les algorithmes seront testés avec les initialisations suivantes :

- La matrice $\hat{\mathbf{A}}$: la matrice de mélange estimée est initialisée aléatoirement par une loi uniforme entre 0 et 1 puis est normalisée pour respecter les contraintes liées aux coefficients de mélange de la partie linéaire et quadratique.
- La matrice $\hat{\mathbf{S}}$: pour cette matrice, 2 initialisations différentes ont été testées :
 1. Initialisation avec des spectres constants de valeurs 0.5 (valeur choisie car les spectres ont des valeurs entre 0 et 1).
 2. Initialisation avec l'algorithme d'extraction de spectres N-FINDR [82] utilisé pour trouver K spectres ("endmembers"), K étant le nombre total de spectres présents dans la matrice \mathbf{S} (comme défini dans la section 3.4 du chapitre précédent), en comptant donc aussi les spectres issus du produit de deux spectres. On considère donc nos termes quadratiques comme des spectres supplémentaires (cela peut paraître étonnant mais se justifie : avec des termes quadratiques, les données ne forment plus un simplexe et donc il est difficile de s'attendre de toute façon à un résultat précis de N-FINDR).

Nous avons donc ici 2 méthodes d'initialisation différentes, qu'on désignera par *init 1* et *init 2*, sachant que la différence résidera dans l'initialisation des spectres uniquement, étant donné que l'initialisation de la matrice de mélange se fera de la même manière aléatoire dans les deux cas.

4.2.2.2 Initialisation avec information a priori sur les coefficients : *init 3*

Il est aussi intéressant de voir comment réagissent les algorithmes à une initialisation plus proche de la réalité des mélanges. On se met ici dans le cas où l'on suppose que l'on connaît les coefficients de mélange avec une certaine erreur de précision, à 20 % près par exemple.

Les spectres seront initialisés par des constantes. On désignera cette initialisation par *init 3*.

Cela peut correspondre au cas réaliste où l'on a à disposition, pour la même scène, une image hyperspectrale et une image panchromatique à haute résolution (ce sera par exemple le cas avec le projet Hypxim [129]). L'image panchromatique peut alors nous fournir approximativement les proportions des différents matériaux présents dans chaque pixel ainsi que leur nombre, en effectuant une segmentation ou classification par exemple.

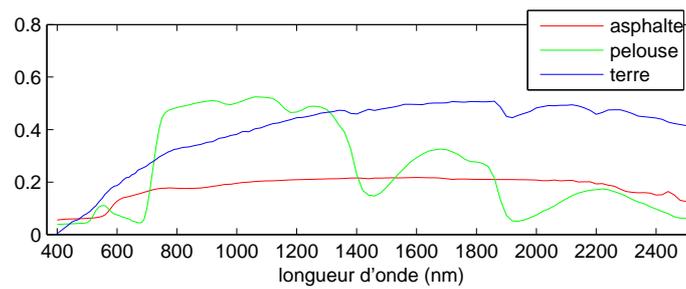


FIGURE 4.1 – Spectres de réflectance des matériaux de sol

4.2.3 Présentation des données synthétiques

Pour les tests présentés sur images synthétiques, on considèrera des petites images de 2 ou 3 matériaux, avec les contributions dues aux réflexions, donc avec les termes quadratiques présents dans notre modèle. On ne considèrera pas les termes au carré, mais cela ne change rien sur le principe (on supposera juste qu'il n'y a pas de réflexions entre 2 surfaces d'un même matériau).

4.2.3.1 Génération des images

Les images sont formées de la manière suivante. Une image \mathbf{X} correspond à 2 ou 3 spectres de matériaux, stockés dans une matrice \mathbf{S} , mélangés par une matrice de mélange \mathbf{A} : $\mathbf{X} = \mathbf{AS}$

- La matrice \mathbf{S} contient les 2 ou 3 spectres des matériaux qui seront contenus dans les pixels, en plus des produits deux à deux de ces spectres (elle contiendra donc N spectres : les M spectres des matériaux et leurs produits 2 à 2).
- La matrice de mélange, qui sera alors de taille $P \times N$ (avec P nombre de pixels de l'imagette), sera générée comme suit, pour chaque pixel :
 - Les coefficients de la partie linéaire sont générés aléatoirement, uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ puis normalisés pour avoir une somme à 1.
 - Les coefficients de la partie quadratique sont générés suivant une loi normale de moyenne 0.1 et d'écart-type 0.15, $\mathcal{N}(0.1, 0.15)$ (d'après les valeurs constatées au chapitre 2 pour ces coefficients), puis sont projetés sur l'intervalle $[0, 0.5]$ (si une valeur est en dehors de l'intervalle on lui affecte la valeur de la borne la plus proche).

4.2.3.2 Matériaux utilisés

Les spectres utilisés pour ces images correspondent aux matériaux suivants, qui sont représentatifs de ce que l'on peut trouver en milieu urbain :

- matériaux pour le sol : asphalte, pelouse, terre
- matériaux pour les murs : béton, brique, aluminium

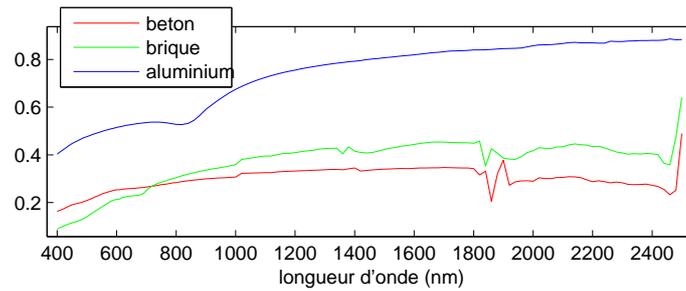


FIGURE 4.2 – Spectres de réflectance des matériaux de murs

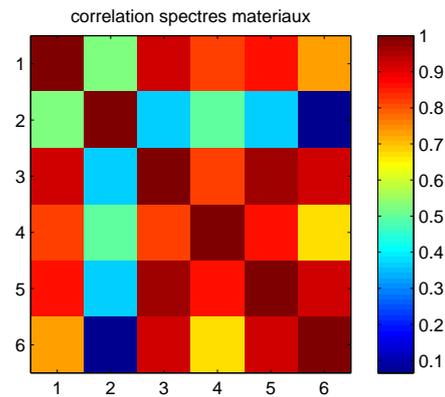


FIGURE 4.3 – Coefficients de corrélation entre les spectres des matériaux : 1. asphalte, 2. pelouse, 3. terre, 4. béton, 5. brique, 6. aluminium

Sur les figure 4.1 et 4.2 sont tracés les spectres de ces matériaux¹. Comme on peut le voir, mis à part le spectre de la végétation, les autres spectres se ressemblent beaucoup. Sur la figure 4.3 on rappelle les coefficients de corrélation entre ces différents matériaux, déjà montrés au chapitre précédent.

Les spectres utilisés contiennent 126 échantillons dans l'intervalle spectral $[0.4, 2.5 \mu\text{m}]$.

4.2.3.3 Cas étudiés

On étudiera les cas d'imagettes contenant 2 matériaux puis 3 matériaux. Notre modèle de mélange et les méthodes qui seront testées sont adaptés au cas urbain, avec la présence de structures 3D. Différents cas seront étudiés ici, correspondant à des configurations réalistes.

- **Cas 1 : 2 matériaux**

Ce cas correspond en milieu urbain à la configuration décrite sur la figure 4.4, c'est-à-dire lorsque le capteur, pour un pixel donné, voit une partie du sol et une partie d'un mur. La contribution reçue contient donc ces deux matériaux et le produit de la réflexion entre

1. Ces spectres viennent de la base de données MEMOIRES développée par l'Onera : www.onera.fr/dota/memoires/index.php

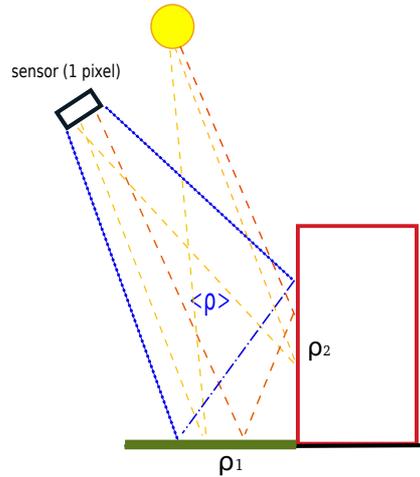


FIGURE 4.4 – Illustration du cas 1 de mélange avec 2 matériaux

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
sol	asphalte	asphalte	asphalte	pelouse	pelouse	pelouse	terre	terre	terre
mur	béton	brique	aluminium	béton	brique	aluminium	béton	brique	aluminium

TABLEAU 4.1 – Cas de 2 matériaux - Les 9 couples de matériaux utilisés pour les imagerie

eux. Les données vérifient le mélange suivant de deux matériaux :

$$\mathbf{x}_i = a_1(i)\mathbf{s}_1 + a_2(i)\mathbf{s}_2 + a_{1,2}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 \quad (4.5)$$

On prendra donc pour ce cas des couples de spectres dont un correspond à un matériau au sol et l'autre à un matériau de mur. Cela nous donne 9 combinaisons possibles et donc 9 couples, qui sont définis dans le tableau 4.1.

Avec chaque couple de spectres, on générera 20 images à partir de 20 matrices de mélange différentes (ces 20 matrices de mélange sont les mêmes pour tous les couples). On a donc 9x20 images différentes sur lesquelles seront testés nos algorithmes.

• **Cas 2 : 3 matériaux**

On considèrera ici pour chaque trio de spectres, deux spectres de matériaux de sol et un spectre de mur. Le cas étudié ici pourrait donc être illustré par l'exemple de la figure 4.5, où l'on a deux matériaux au sol et un au mur et des interactions possibles entre les trois. Cela correspond donc au mélange suivant :

$$\mathbf{x}_i = a_1(i)\mathbf{s}_1 + a_2(i)\mathbf{s}_2 + a_3(i)\mathbf{s}_3 + a_{1,2}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2 + a_{1,3}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_3 + a_{2,3}(i)\mathbf{s}_2 \odot \mathbf{s}_3 \quad (4.6)$$

On se retrouve ici aussi avec 9 combinaisons possibles de spectres et on aura donc comme précédemment 9x20 images. Les trios de spectres sont listés dans le tableau 4.2.

• **Cas 3 : 3 matériaux sans $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$**

Cela correspond à un cas peut-être plus réaliste que le précédent, avec les 2 matériaux au

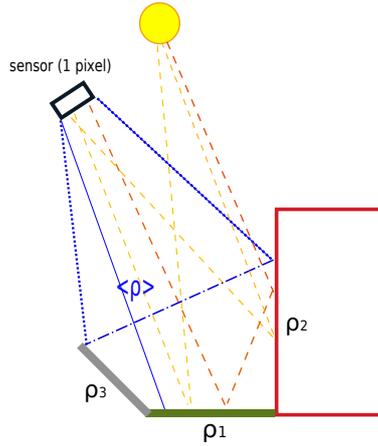


FIGURE 4.5 – Illustration du cas 2 de mélange avec 3 matériaux

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
sol	asphalte	asphalte	asphalte	asphalte	asphalte	asphalte	pelouse	pelouse	pelouse
sol	pelouse	pelouse	pelouse	terre	terre	terre	terre	terre	terre
mur	béton	brique	aluminium	béton	brique	aluminium	béton	brique	aluminium

TABLEAU 4.2 – Cas de 3 matériaux - Les 9 trios de matériaux utilisés pour les imagettes

sol situés sur la même surface. Il n'y a donc pas de réflexions entre eux. Ce cas correspond à la configuration de la figure 4.4, mais avec 2 matériaux au sol (au lieu d'un seul). On prend donc ici les mêmes matrices que dans le cas précédent (cas 2), sauf que dans les matrices de mélange les coefficients a_{12} sont tous nuls. On a donc l'équation de mélange suivante :

$$\mathbf{x}_i = a_1(i)\mathbf{s}_1 + a_2(i)\mathbf{s}_2 + a_3(i)\mathbf{s}_3 + a_{1,3}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_3 + a_{2,3}(i)\mathbf{s}_2 \odot \mathbf{s}_3 \quad (4.7)$$

Les trios de spectres utilisés restent les mêmes.

- **Cas 4 : 3 matériaux sans $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$ et sans \mathbf{s}_3**

Ce cas correspond à la configuration précédente (cas 3) mais dans le cas où le capteur est en visée nadir (c.à.d. que la direction de visée est perpendiculaire à la scène), ce qui arrive fréquemment. Le mur n'est donc pas vu par le capteur, on a juste sa contribution par l'intermédiaire des termes quadratiques (les réflexions). Cela correspond au mélange suivant :

$$\mathbf{x}_i = a_1(i)\mathbf{s}_1 + a_2(i)\mathbf{s}_2 + a_{1,3}(i)\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_3 + a_{2,3}(i)\mathbf{s}_2 \odot \mathbf{s}_3 \quad (4.8)$$

L'étude de ces différents cas va nous permettre de comparer les algorithmes et de voir leurs performances et limitations. Les cas étudiés correspondent à des configurations réalistes et sont une première étape avant de passer à des images réelles.

4.3 Performances globales des 5 algorithmes

Cette section a pour but de comparer les performances des 5 algorithmes cités dans la section 4.2.1, c.à.d. nos quatre algorithmes et l'algorithme linéaire de base, et ce dans les différentes configurations décrites plus haut. Les images utilisées pour cette section ont toutes une taille de 9 pixels (3x3).

4.3.1 Cas 1 : Mélanges de 2 matériaux

4.3.1.1 Comparaison des 5 algorithmes

On compare ici les 5 algorithmes, utilisés chacun avec les deux initialisations init 1 et init 2 présentées plus haut (l'initialisation init 3 sera testée à part plus loin dans ce chapitre). On aura donc 10 cas. Pour chacun de ces cas, et pour chaque image, la méthode est lancée pour 30 initialisations différentes (de la matrice \hat{A}). Ceci nous permet de voir le comportement global de chaque méthode, indépendamment de l'initialisation.

Voici le protocole suivi pour un algorithme avec un type d'initialisation donné :

Protocole 1

- Pour chacun des 9 ensembles de spectres (couples ici, trios dans les tests suivants) :
 - Pour chacune des 20 matrices de mélange :
 - On crée une image (1 ensemble de spectres mélangés avec une des matrices de mélange)
 - L'algorithme est appliqué à l'image en utilisant 30 initialisations différentes
 - On obtient 30 résultats différents
- On calcule les statistiques sur les 9x20x30 résultats obtenus

Le tableau 4.3 montre, pour chacun des 10 cas, les statistiques des résultats obtenus sur les 9x20 images et sur les 30 initialisations pour chacune. Sont ainsi donnés la valeur moyenne (mean), l'écart type (std), le minimum (min) et le maximum (max). Le tableau indique aussi le temps CPU moyen pour chacune des méthodes, le calcul ayant été fait avec Matlab sur un processeur double cœur avec une fréquence de 2.8 GHz et une mémoire vive de 4 Go.

L'algorithme *LQ Grd*, qui correspond au gradient linéaire quadratique à pas fixe, donne les moins bons résultats, mais ceci est compréhensible si on regarde l'erreur totale en "fin de convergence" (quand la condition d'arrêt est atteinte), qui est de l'ordre de 5 %. La condition d'arrêt utilisée correspond au moment où le critère d'arrêt et les mises à jour des matrices se stabilisent (avec une précision de 10^{-6} pour le critère et de 10^{-5} pour les matrices)². Cela veut dire en effet que l'algorithme n'a pas complètement convergé vers un minimum mais qu'il

2. Pour l'algorithme *Linéaire*, et uniquement avec init 1, la précision pour le critère a été réduite à 10^{-5} car la convergence était trop lente, compromettant l'obtention des résultats en un temps raisonnable. Et même dans ces conditions, on peut voir que le temps CPU pour cet algorithme avec init 1 est plus élevé que dans tous les autres cas.

Méthodes		Linéaire		Linéaire ext		LQ Grd		LQ Grd-Newt		LQ mult	
		init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2
<i>SAM_{OUT}</i> (rad)	mean	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10	0.10	0.05	0.05	0.04	0.04
	std	0.09	0.09	0.06	0.06	0.07	0.07	0.04	0.04	0.03	0.03
	min	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.04	0.00	0.00
	max	0.35	0.35	0.39	0.36	0.34	0.49	0.32	0.23	0.23	0.22
RMSE	mean	0.15	0.15	0.19	0.20	0.27	0.26	0.11	0.12	0.10	0.10
	std	0.13	0.12	0.11	0.12	0.10	0.10	0.06	0.06	0.06	0.06
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00
	max	0.63	0.60	0.59	0.57	0.53	0.55	0.27	0.27	0.43	0.42
<i>Err_{tot}</i> ($\times 10^{-2}$)	mean	4.6	4.6	0.2	0.2	5.0	4.9	0.4	0.4	0.3	0.3
temps CPU (s)	mean	3.3	2.7	1.8	1.6	3.5	3.5	1.2	0.6	1.1	1.1

TABLEAU 4.3 – Cas 1 - Synthèse des résultats obtenus pour chaque méthode - les résultats pour chaque méthode correspondent aux statistiques des résultats sur les 9x20 images, sur 30 initialisations différentes des algorithmes pour chaque image

n'évoluait plus, ceci est un inconvénient de l'utilisation d'un pas fixe. Cet algorithme a donc été un point de départ pour nos méthodes mais la version améliorée de Newton, *LQ Grd-Newt*, et la version multiplicative *LQ mult* sont préférables. On constate aussi que les deux dernières méthodes donnent les meilleurs résultats et leurs performances sont presque deux fois meilleures que celles de l'algorithme *Linéaire ext*. Cela veut dire que tenir compte de la présence des termes quadratiques dans le calcul du gradient présente un apport non négligeable.

Ce qui peut paraître surprenant ici c'est que l'algorithme *Linéaire* donne des performances meilleures que l'algorithme *Linéaire ext*. Cela peut s'expliquer par le fait qu'ici on a un seul terme quadratique, sa présence peut donc ne pas être très perturbatrice pour la méthode *Linéaire*, qui arrive quand même à converger avec une précision raisonnable. Cette interprétation sera vérifiée à travers les résultats obtenus dans les sections suivantes. La méthode *Linéaire ext* qui estime le terme quadratique comme une troisième "source", peut se trouver perturbée par le fait que ce terme soit très corrélé avec les deux premiers, ce qui peut fausser l'estimation des coefficients de mélange notamment.

Finalement, ces premiers résultats illustrent l'intérêt des méthodes Linéaires Quadratiques proposées par rapport à la version linéaire étendue (*Linéaire ext*) ou linéaire.

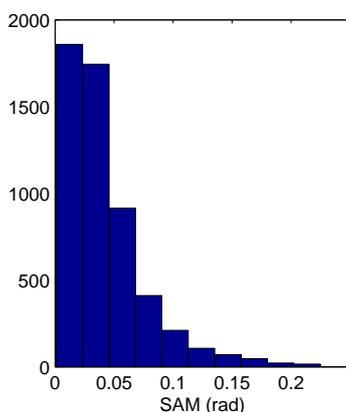
Dans ce premier cas on peut aussi remarquer que les méthodes ne sont pas très sensibles au type d'initialisation, entre celles utilisées ici (init 1 et init 2).

4.3.1.2 Analyse des résultats à travers l'algorithme *LQ mult*

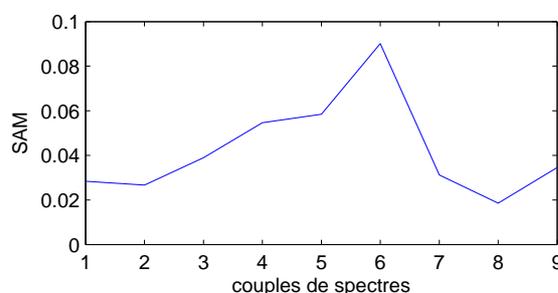
Dans cette section, on se focalise sur les résultats obtenus avec l'algorithme *LQ mult* (avec l'initialisation *init 2*), qui est celui qui a donné les meilleures performances d'après le tableau 4.3.

La figure 4.6(a) montre que la plupart des valeurs de SAM obtenues (sur 9x20x30 cas) sont inférieures à 0.1 (sachant que la valeur de 0.1 rad est souvent utilisée en classification comme seuil pour différencier des classes de matériaux, c'est d'ailleurs la valeur par défaut sur le logiciel ENVI), donc même si le tableau 4.3 montre des valeurs élevées pour le max de SAM obtenu pour l'algorithme *LQ mult*, on peut voir d'après l'histogramme que ces valeurs sont très peu fréquentes.

La figure 4.6(b) présente la répartition des valeurs des SAM en fonction des couples de matériaux. Pour chaque couple, la valeur présentée correspond à la moyenne sur les 20 matrices de mélange (donc sur 20 images observées différentes) et sur 30 initialisations pour chaque image. On remarque que les résultats d'estimation sont très bons pour les couples 1, 2, 3, 7, 8 et 9, c.à.d. lorsque l'on n'a pas de végétation, même si les spectres sont très corrélés. Les valeurs les moins bonnes correspondent aux couples 4, 5 et 6. Or ces couples sont ceux dont un des spectres correspond à celui de la végétation. Cela peut paraître paradoxal, car c'est le cas où les spectres sont les moins corrélés et donc la séparation devrait être plus facile. Il est néanmoins possible que les valeurs faibles de SAM obtenues dans le cas sans végétation soient dues au fait que les spectres des sources soient très ressemblants (très corrélés). Les valeurs faibles de SAM ne reflèteraient alors pas forcément une bonne estimation mais la ressemblance initiale entre les sources et les mélanges. Pour une interprétation et analyse plus complète de ces résultats, il faut donc les mettre en perspective avec les résultats d'estimation des coefficients, c.à.d. les valeurs de RMSE obtenues : même pour les sources corrélées, l'estimation des coefficients de



(a) Histogramme de tous les SAM obtenus (9x20x30)



(b) SAM pour les 9 couples de spectres, moyenne sur 20 matrices x 30 initialisations

FIGURE 4.6 – Cas 1 - Algorithme *LQ mult* (*init 2*) - Détail des résultats des SAM

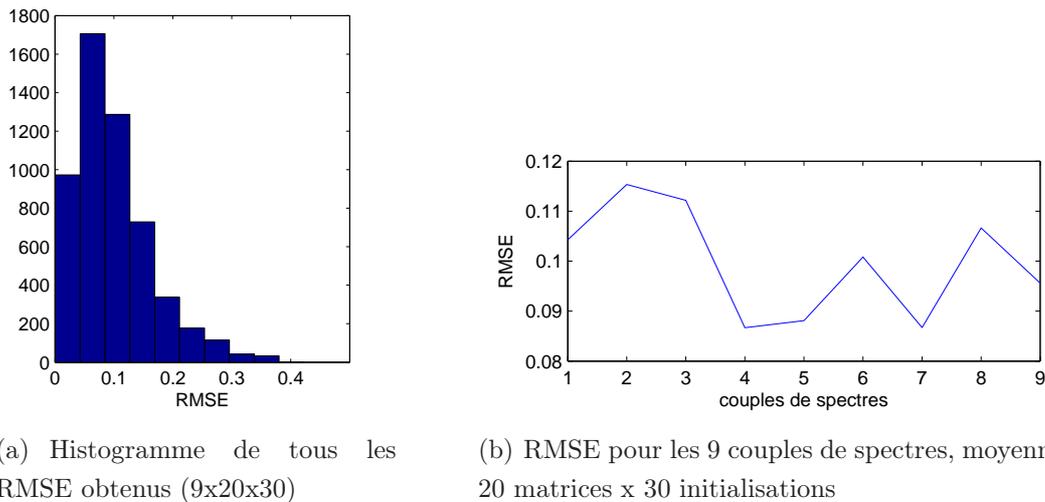
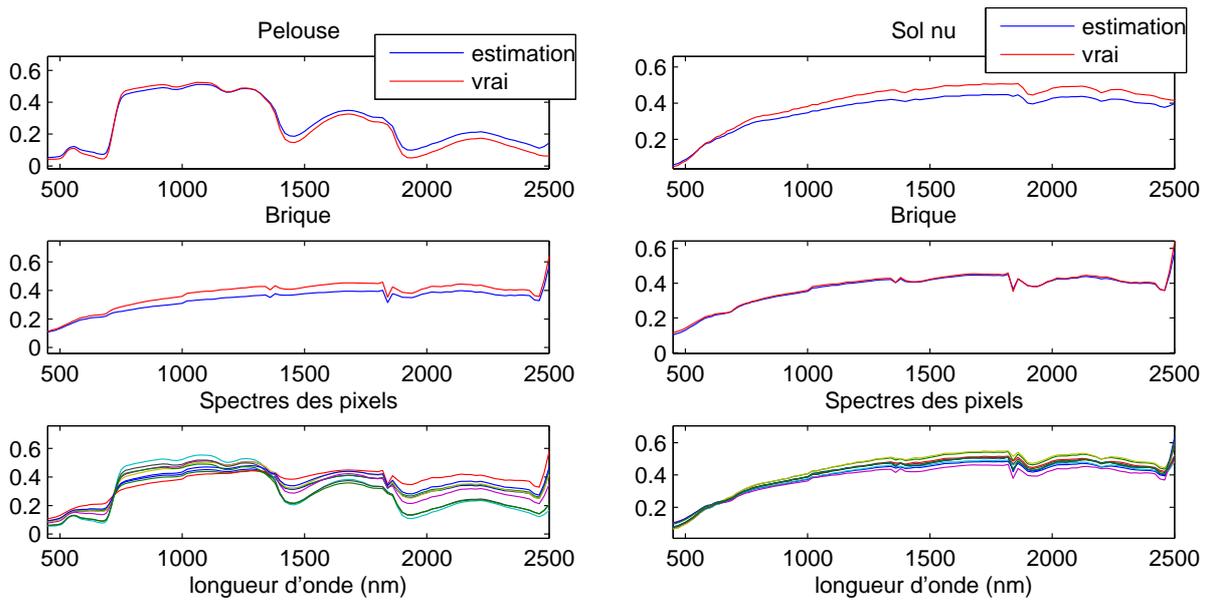


FIGURE 4.7 – Cas 1 - Algorithme LQ *mult* (*init 2*) - Détail des résultats des RMSE

mélange permet de savoir si la séparation est réussie.

La figure 4.7(a) montre un histogramme de toutes les valeurs de RMSE obtenues (9x20x30 cas). On peut voir qu'une majorité des valeurs est autour de 0.1, néanmoins il existe des valeurs plus élevées. La figure 4.7(b) représente la répartition des valeurs des RMSE en fonction des couples de matériaux (pour chaque couple, RMSE moyennés sur les 20 images et 30 initialisations). Contrairement à ce qui a été constaté à travers la figure 4.6(b), ici l'estimation des coefficients est moins bonne pour la plupart des couples sans végétation (couples 1, 2, 3, 8) alors que pour les 3 couples faisant intervenir la végétation les RMSE sont bons. Ce résultat s'explique de la manière suivante : les coefficients sont plus facilement affectés correctement à des spectres qui ne se ressemblent pas, alors qu'entre spectres très ressemblants l'algorithme peut se tromper et affecter à l'un une partie des coefficients de l'autre (car cela ne changerait pas beaucoup la valeur du critère). Pour les spectres corrélés, il est donc important de regarder l'estimation des coefficients pour conclure si l'estimation est bonne ou pas.

Regardons à présent des exemples de résultats dans les cas avec et sans végétation. La figure 4.8(a) montre un exemple de résultat avec une image faisant intervenir le couple 5 (donc présence d'un spectre de végétation), pour une initialisation donnée des matrices. Cet exemple correspond à un SAM de 0.06 et se trouve donc proche de la moyenne des résultats obtenus pour ce couple (d'après la figure 4.6(b)). La figure 4.8(b) correspond à un couple sans végétation. On peut voir de petits décalages dans les spectres estimés pour les deux cas. Cela veut dire que, pour certains spectres, si on cherche à étudier les particularités de certains matériaux (identification des matériaux basée sur la profondeur de bandes d'absorption particulières) cela risque de n'être pas assez précis. Néanmoins, l'allure globale des spectres est plutôt bien estimée, et donc si le but est de faire de la classification (ce qui est la motivation ici : permettre à l'avenir d'améliorer la classification en milieu urbain pour les pixels mixtes) les spectres obtenus sont très satisfaisants. Pour ce qui est des RMSE, la valeur obtenue est moins bonne pour le couple



(a) Couple 5 (SAM = 0.06 rad, RMSE = 0.09)

(b) Couple 8 (SAM = 0.02 rad, RMSE = 0.12)

FIGURE 4.8 – Cas 1 - Algorithme $LQ\ mult\ (init\ 2)$ - Exemples de résultats de spectres avec (a) et sans (b) présence de la végétation - Vrais spectres (rouge), estimations (bleu) et les spectres des pixels (mélanges) - exemple de résultat avec 1 image pour 1 initialisation

sans végétation, ce qui confirme l'explication donnée concernant la mauvaise affectation des coefficients à cause de la ressemblance des spectres. On voit aussi dans ce cas comment les mélanges ressemblent beaucoup aux deux spectres, et surtout au spectre de brique qui est finalement le mieux estimé.

On peut donc conclure que l'estimation est globalement bonne mais est un peu moins satisfaisante pour les coefficients de mélange lorsque les spectres des matériaux sont très corrélés.

A partir des deux exemples de la figure 4.8 on peut aussi constater qu'il est difficile à partir des données brutes (spectres des pixels) d'obtenir les spectres des deux matériaux sans méthode de démixage. On peut au mieux deviner la présence du spectre le plus marqué par des variations.

Pour les quelques cas où l'estimation n'est vraiment pas bonne, il reste un dernier élément important à mettre en évidence et qui peut jouer un rôle. La figure 4.9 montre les différentes valeurs de RMSE pour les 9 couples de spectres, et pour les 20 matrices de mélange, c.à.d. que pour chaque couple on a les valeurs obtenues sur les 20 images qui le contiennent (résultats moyennés sur 30 initialisations différentes pour chaque image). Chaque courbe correspond donc à une matrice de mélange (20 courbes). Ce que l'on peut constater ici c'est que le résultat semble beaucoup dépendre de la matrice de mélange. Ceci est clairement mis en évidence par les exemples de la figure 4.10 où on a, pour le couple 1 de matériaux (asphalte/béton), les spectres des pixels (mélanges) obtenus par la matrice de mélange 1 et la matrice 19. Pour

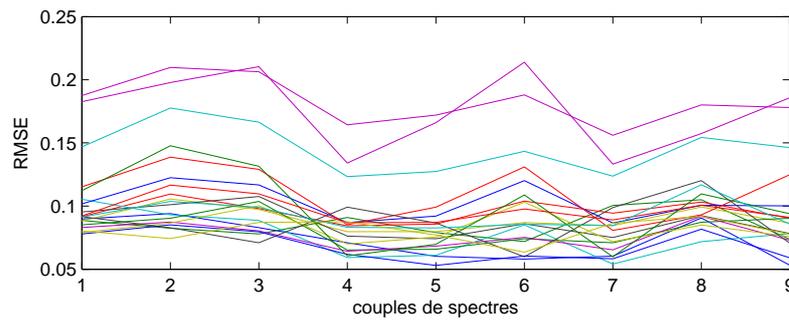


FIGURE 4.9 – Cas 1 - Algorithme $LQ\ mult\ (init\ 2)$ - RMSE pour les 9 couples de spectres, pour les 20 matrices de mélange

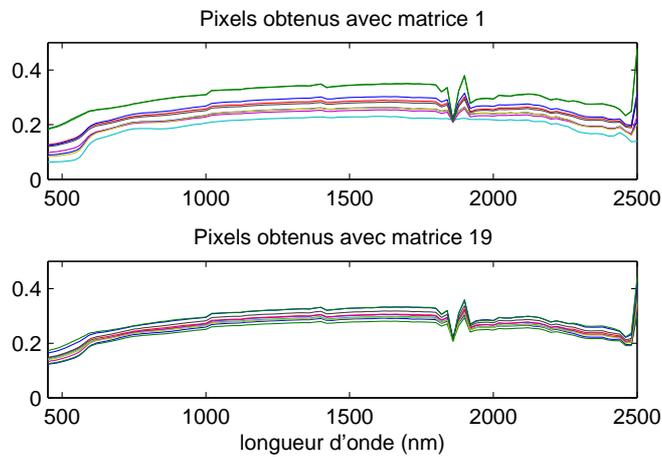


FIGURE 4.10 – Cas 1 - Algorithme $LQ\ mult\ (init\ 2)$ - Spectres des pixels de 2 images faisant intervenir le couple 1 de spectres (asphalte/béton), avec la matrice 1 (en haut) et la matrice 19 (en bas)

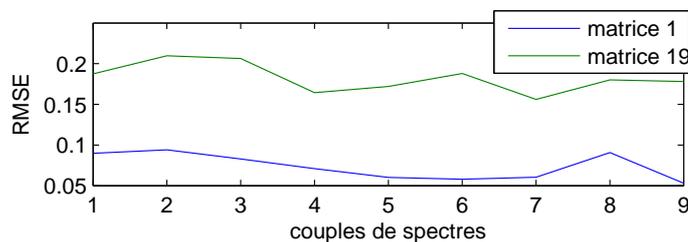


FIGURE 4.11 – Cas 1 - Algorithme $LQ\ mult\ (init\ 2)$ - Valeurs moyennes de RMSE (sur 30 initialisations) obtenues avec les images générées avec les matrices de mélange 1 (en bleu) et 19 (en vert), pour les 9 couples de spectres

la première matrice il y a plus de diversité dans les mélanges, ceci peut avoir un fort impact sur la qualité de l'estimation. La figure 4.11, qui montre les RMSE respectifs pour ces deux

matrices obtenus pour les 9 couples, confirme cela. On voit clairement que les performances sont bien meilleures lorsque l'on a plus de pixels différents, la matrice de mélange est en effet sûrement mieux conditionnée dans ce cas-là. A noter que cette nécessité d'avoir des observations différentes est propre à la plupart des méthodes de démixage ou séparation de sources et n'est donc pas surprenante.

4.3.2 Cas 2 : Mélanges de 3 matériaux

4.3.2.1 Comparaison des 5 algorithmes

On présente ici dans un premier temps, comme dans le cas 1, les statistiques des performances des 5 algorithmes avec les deux initialisations *init 1* et *init 2*. Ces résultats sont synthétisés dans le tableau 4.4, qui contient donc les statistiques globales des résultats obtenus sur les 9 x 20 images, et pour chacune sur 30 initialisations différentes. Les résultats présentés ont donc été obtenus suivant le *Protocole 1* défini en section 4.3.1.1.

Les résultats de ce tableau peuvent sembler un peu surprenants et décevants, car les algorithmes *Linéaire ext* et *Linéaire* semblent donner les meilleures performances en moyenne, si on regarde conjointement le SAM des spectres et le RMSE des coefficients de mélange. Néanmoins, on peut aussi remarquer qu'il y a, pour toutes les méthodes, des valeurs maximales assez élevées, des valeurs minimales faibles et des écarts types élevés. Cela laisse penser que les résultats dépendent ici beaucoup des initialisations (rappelons que pour chaque image les algorithmes sont lancés pour 30 initialisation différentes de $\hat{\mathbf{A}}$, aussi bien pour l'init 1 que pour l'init 2). Ceci n'est pas étonnant pour des algorithmes de type NMF et ce problème a déjà été soulevé dans le chapitre "Etat de l'art en SAS".

Méthodes		Linéaire		Linéaire ext		LQ Grd		LQ Grd-Newt		LQ mult	
		init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.20	0.20	0.16	0.16	0.20	0.20	0.25	0.20	0.18	0.19
	std	0.12	0.12	0.06	0.06	0.10	0.10	0.17	0.12	0.09	0.09
	min	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01
	max	0.75	0.75	0.40	0.45	0.64	0.64	0.92	0.84	0.53	0.77
RMSE	mean	0.21	0.21	0.21	0.21	0.29	0.29	0.29	0.30	0.26	0.26
	std	0.08	0.08	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.04	0.04
	min	0.01	0.02	0.01	0.01	0.13	0.12	0.06	0.07	0.06	0.05
	max	0.52	0.55	0.37	0.39	0.48	0.48	0.53	0.48	0.39	0.41
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	5.0	5.0	0.2	0.2	4.1	4.0	2.7	1.9	0.5	0.5

TABLEAU 4.4 – Cas 2 - Comparatif des résultats obtenus pour chaque méthode - les résultats pour chaque méthode correspondent aux statistiques des performances sur les 9 x 20 images, pour 30 initialisations (donc 9x20x30 cas)

Etant donné qu'il est difficile de trouver les meilleures valeurs d'initialisation (une faible erreur totale de reconstruction n'est pas une condition suffisante pour que le résultat soit "bon", bien qu'elle soit nécessaire), faire la moyenne des résultats obtenus sur plusieurs initialisations (moyenne des matrices $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$ obtenues) semble être une bonne solution. Pour avoir des performances plus stables, on propose donc, pour chaque image traitée avec une des méthodes, de faire la moyenne des matrices obtenues sur les 30 différentes initialisations (moyenne des 30 matrices $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$ obtenues), après permutation des sources et coefficients associés (rappelons ici que l'estimation en SAS se fait à une permutation près)³.

Voici donc le nouveau protocole suivi :

Protocole 2

- Pour chacun des 9 ensembles de spectres (trios ici et dans la suite) :
 - Pour chacune des 20 matrices de mélange :
 - On crée une image (1 ensemble de spectres mélangés avec une des matrices de mélange)
 - L'algorithme est appliqué à l'image en utilisant 30 initialisations différentes
 - On fait une moyenne des 30 résultats obtenus :
 - moyenne des 30 $\hat{\mathbf{A}} \mapsto \hat{\mathbf{A}}_m$
 - moyenne des 30 $\hat{\mathbf{S}} \mapsto \hat{\mathbf{S}}_m$
 - Les performances sont calculées sur ces nouvelles matrices $\hat{\mathbf{A}}_m$ et $\hat{\mathbf{S}}_m$
- On calcule les statistiques sur les 9x20 résultats obtenus

Le tableau 4.5 présente donc les statistiques des performances sur les 9x20 images mais après avoir moyenné, pour chacune, les résultats sur 30 initialisations. On peut remarquer que les résultats sont meilleurs, on s'affranchit de l'influence de l'initialisation. Les écarts types pour le SAM et le RMSE sont plus faibles, ce qui confirme que les valeurs précédentes étaient dues à la dépendance des performances vis à vis de l'initialisation. La solution choisie (moyenne des matrices $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$ obtenues sur les 30 initialisations) sera donc celle adoptée dans la suite de ce chapitre.

Pour revenir à la comparaison des méthodes, le tableau 4.5 montre que les algorithmes *LQ mult* et *LQ Grd-Newt* sont ceux qui donnent les meilleures performances, surtout en ce qui concerne le SAM et l'erreur de reconstruction. On obtient l'erreur de reconstruction la plus faible avec l'algorithme *LQ mult*.

La méthode la moins satisfaisante est l'algorithme *Linéaire*, qui atteint ici de moins bonnes performances (comparée aux autres méthodes) que dans le cas 1 (section 4.3.1)⁴. Ceci confirme notre interprétation du résultat obtenu au cas 1 : cette méthode arrivait dans le cas 1 à estimer

3. On gère les permutations en recherchant les sources et estimations les mieux appariées en terme de SAM.

4. Notons ici que les très grandes erreurs de reconstruction de la méthode linéaire sont dues à des cas où l'algorithme converge vers une solution complètement mauvaise pour les spectres et les coefficients associés : un spectre de l'ordre de 10^5 , dont l'allure est mal estimée (si on fait abstraction du facteur d'échelle), avec un coefficient associé de 10^{-5} .

Méthodes		Linéaire		Linéaire ext		LQ Grd		LQ Grd-Newt		LQ mult	
		init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.15	0.16	0.11	0.11	0.10	0.10	0.09	0.10	0.09	0.09
	std	0.10	0.12	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04
	min	0.02	0.02	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
	max	0.61	0.89	0.20	0.19	0.22	0.22	0.25	0.25	0.23	0.21
RMSE	mean	0.14	0.14	0.12	0.12	0.12	0.12	0.11	0.12	0.11	0.11
	std	0.05	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.05	0.03	0.03
	min	0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.07	0.03	0.03	0.03	0.03
	max	0.36	0.39	0.20	0.20	0.21	0.19	0.24	0.26	0.20	0.20
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	1522	1384	39	39	5.7	5.8	5.7	5.0	2.8	2.9
temps CPU (s)	mean	6.2	6.3	0.8	0.8	4.7	4.8	8.0	3.6	1.2	1.2

TABLEAU 4.5 – Cas 2 - Comparatif des résultats obtenus pour chaque méthode - les résultats pour chaque méthode correspondent aux statistiques des résultats sur les 9 x 20 images, après moyennage des résultats sur 30 initialisations pour chaque image (donc 9x20 cas)

les spectres car il y avait un seul terme quadratique perturbateur, or ici il y en a trois, le modèle linéaire n'est donc plus suffisant pour représenter les mélanges et donner une bonne estimation. Ceci nous incite à penser que plus le nombre de sources augmente, plus l'utilisation des méthodes tenant compte des termes quadratiques est préférée, car ces derniers deviennent moins négligeables, relativement à la valeur de réflectance totale.

Si on compare maintenant les 4 algorithmes tenant compte des termes quadratiques, le moins performant est l'algorithme *Linéaire ext* adapté de la littérature, surtout pour ce qui est du SAM et de l'erreur de reconstruction qui est assez élevée (plus de 30%). Notons qu'il est normal d'obtenir ici des erreurs de reconstruction plus élevées que précédemment, car le résultat retenu pour chaque image (c.à.d. les nouvelles matrices \hat{A}_m et \hat{S}_m obtenues après moyennage), ne correspond pas à une minimisation donnée du critère. Néanmoins, les résultats (SAM et RMSE) sont plus fiables si l'erreur de reconstruction est faible et l'erreur de reconstruction avec l'algorithme *Linéaire ext* est vraiment très élevée.

En ce qui concerne le type d'initialisation choisie pour les spectres, les méthodes ne semblent pas y être très sensibles.

4.3.2.2 Analyse des résultats à travers l'algorithme *LQ mult*

Tout comme pour le cas 1, nous nous intéressons maintenant uniquement à l'algorithme *LQ mult* afin de vérifier les conclusions préliminaires faites dans le cas 1 (mélanges de 2 matériaux).

Sur la figure 4.12, le graphique du haut montre tous les SAM obtenus pour les 9 trios de

matériaux, et pour les 20 matrices de mélange. Chaque courbe correspond à une matrice de mélange. La figure du bas montre la moyenne, pour chaque trio de matériau, sur les 20 matrices de mélange, et donc sur les 20 images faisant intervenir ce trio. Les meilleures performances en terme de SAM correspondent aux trios 4, 5 et 6. Ces trios sont les seuls ne contenant pas un spectre de végétation et ne comprenant donc que des spectres de matériaux urbains ou de la terre. Cependant ce résultat est encore une fois à prendre avec prudence comme expliqué dans la section 4.3.1.2 et est à comparer avec le résultat obtenu pour les RMSE. Ce qu'on peut remarquer aussi de la figure du dessus, c'est que le résultat dépend encore ici des matrices de mélange, et donc des types de mélanges présents dans l'image étudiée.

Pour l'estimation des coefficients, la figure 4.13 montre la moyenne des valeurs de RMSE obtenues pour chaque trio de matériaux (moyenne sur les 20 images pour chaque trio). En ce qui concerne la différence entre les trios avec et sans végétation, on peut constater que les meilleurs RMSE concernent des trios où il y a de la végétation (7, 8 et 9). On peut donc dire encore une fois que de bonnes valeurs de SAM ne garantissent pas d'avoir de bonnes valeurs de RMSE (cas des trios sans végétation) car le fait que les spectres soient corrélés peut dégrader un peu l'estimation des coefficients.

La figure 4.14(a) montre un exemple de ce que donne le résultat d'estimation sur un cas avec présence d'un spectre de végétation (après moyenne sur 30 initialisations), pour le trio de matériaux numéro 7. Cet exemple correspond à un SAM de 0.06 rad. On peut voir qu'il existe un petit décalage ou petites différences entre les spectres estimés et les vrais. On retrouve aussi un petit résidu du spectre de végétation sur le spectre de béton, au niveau des bandes d'absorption de la végétation (entre 700 et 1400 nm). Néanmoins l'allure des spectres est globalement bien estimée. La figure 4.14(b) montre un exemple d'estimation dans un cas sans végétation (trio numéro 5). Le SAM ici est de 0.05 rad. L'allure des spectres est bien estimée, il reste néanmoins un peu de résidu du spectre 3 (brique) dans l'estimation du spectre 1 (asphalte), ce qui peut s'expliquer par le fait que le spectre 1 soit assez plat, et donc peut-être plus difficile à retrouver

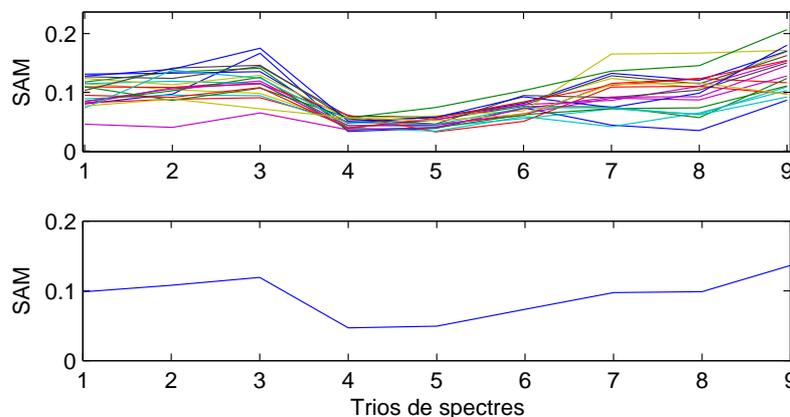


FIGURE 4.12 – Cas 2 - Algorithme *LQ mult* - Détail des SAM obtenus - en haut : 20 courbes représentant les SAM pour toutes les images (9x20 images) - en bas : moyenne des SAM obtenus pour chaque trio de matériaux

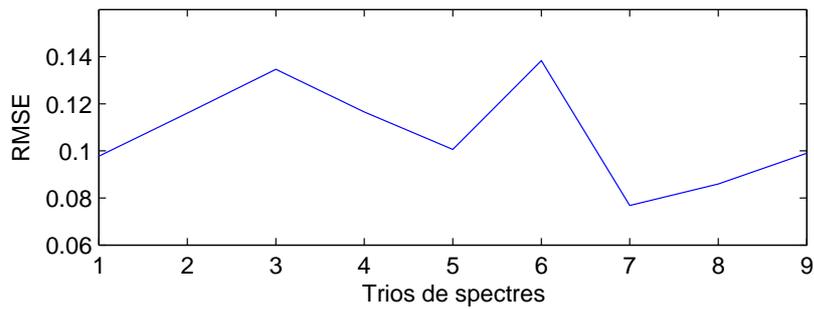
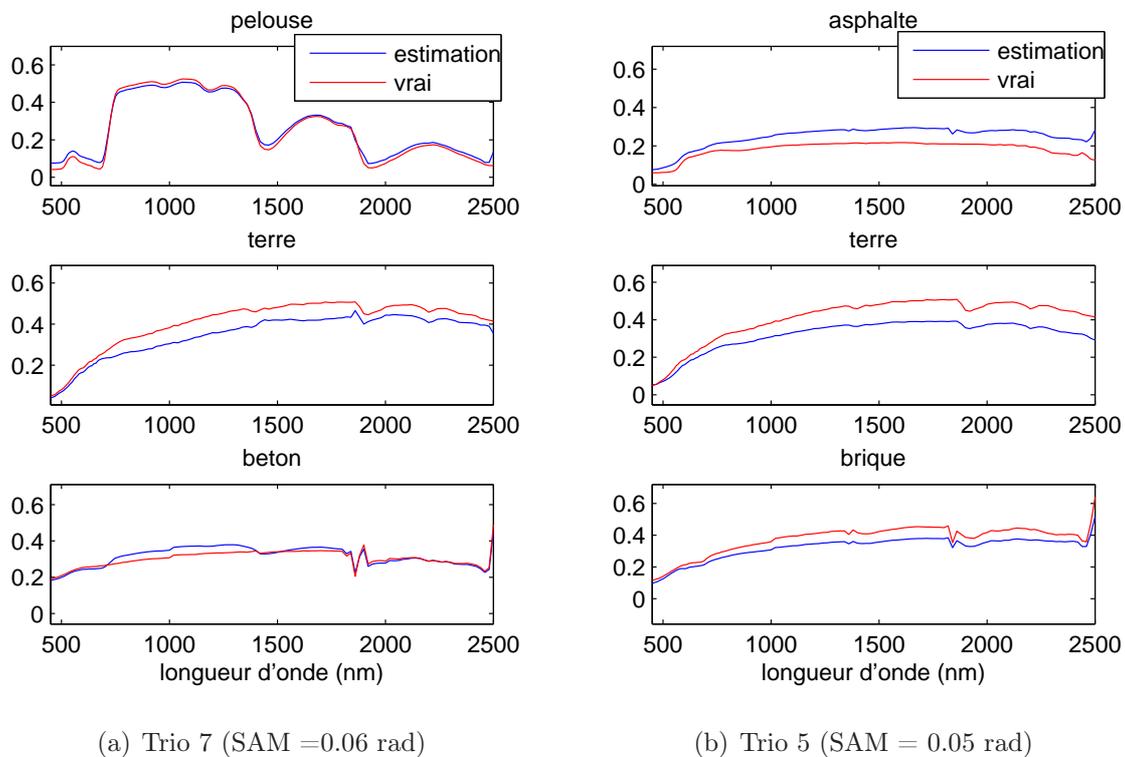


FIGURE 4.13 – Cas 2 - Algorithme $LQ\ mult$ - Moyenne des RMSE obtenus pour chaque trio de matériaux



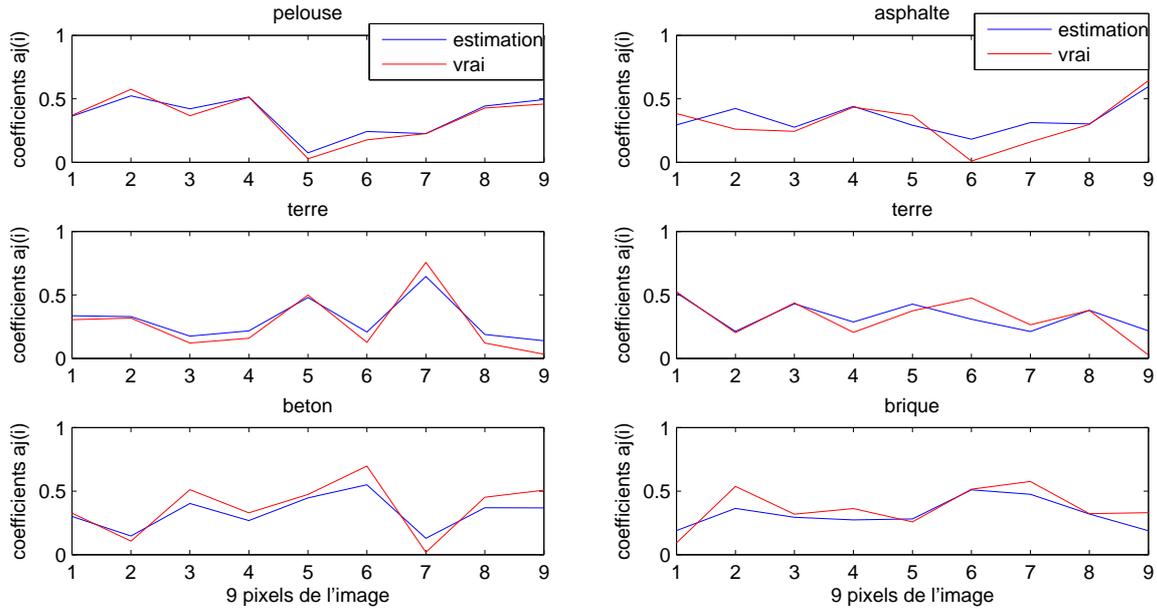
(a) Trio 7 (SAM = 0.06 rad)

(b) Trio 5 (SAM = 0.05 rad)

FIGURE 4.14 – Cas 2 - Algorithme $LQ\ mult$ - Exemples de résultats de spectres avec et sans présence de la végétation

dans des mélanges (spectres des pixels) qui seront surtout marqués par les variations des autres spectres.

Sur la figure 4.15 on peut voir ce que donne l'estimation des coefficients sur les deux images correspondant aux exemples de spectres de la figure 4.14. L'estimation est bonne. Ce qu'on peut remarquer ici aussi c'est que la précision d'estimation des coefficients ne dépend pas de la valeur de ceux-ci, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que l'algorithme estime simultanément tous les coefficients en utilisant toute l'information. Cet exemple (même s'il ne représente pas tous les résultats obtenus) confirme aussi la précédente constatation concernant l'estimation des



(a) Trio 7 (RMSE = 0.07)

(b) Trio 5 (RMSE = 0.1)

FIGURE 4.15 – Cas 2 - Algorithme $LQ\ mult$ - Exemple de résultats pour les coefficients avec et sans présence de la végétation

coefficients : pour des SAM équivalents ici, le RMSE dans le cas sans végétation (spectres tous corrélés) est moins bon.

4.3.2.3 Synthèse préliminaire

On peut à présent conclure, à travers les cas d'étude 1 et 2 (sections 4.3.1 et 4.3.2), que les méthodes proposées dans le cadre de ce travail pour le modèle linéaire quadratique présentent des performances satisfaisantes (des SAM majoritairement inférieurs à 0.1 rad pour les spectres et des RMSE de l'ordre de 0.1 pour l'estimation des coefficients), surtout en ce qui concerne les algorithmes $LQ\ Grd-Newt$ et $LQ\ mult$ (l'algorithme $LQ\ Grd$ ayant surtout été un point de départ pour ces deux dernières méthodes). Les algorithmes proposés donnent globalement de meilleures performances que l'algorithme *Linéaire ext* qui est une extension d'une méthode de la littérature. Nous avons aussi pu voir que l'algorithme *Linéaire* ne suffit pas ici à représenter les données, et donne donc des performances beaucoup moins bonnes que nos algorithmes.

L'allure des spectres est en général bien estimée par nos algorithmes même si dans certains cas il y a de petits décalages ou résidus de mélange. Cela peut avoir un impact si l'on veut faire de l'identification de matériaux (par étude de certaines bandes d'absorption...) mais les spectres estimés peuvent être correctement classés si l'on projette de faire de la classification.

On a aussi pu voir à travers ces deux cas d'études, les limitations des algorithmes : dépendance par rapport aux matrices de mélange, c.à.d. la diversité dans les pixels (contrainte qui concerne la plupart des méthodes de séparation de sources en général), et aux situations

favorables et défavorables (concernant surtout l'impact de la corrélation entre les spectres sur l'estimation des coefficients).

Les deux cas qui sont présentés dans la suite correspondent à des configurations plus spécifiques à notre problématique liée aux images urbaines. Ceci permettra de voir le comportement des algorithmes proposés dans ces cas que l'on peut trouver dans des images réelles. On se contentera dans la suite de présenter les résultats obtenus par les algorithmes *Linéaire*, *Linéaire ext*, *LQ Grd-Newt* et *LQ mult*, l'algorithme *LQ Grd* ayant surtout été un point de départ pour les deux derniers.

4.3.3 Cas 3 : Mélanges de 3 matériaux, sans contribution $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$

Les résultats obtenus pour ce cas avec nos deux algorithmes linéaires quadratiques (*LQ Grd-Newt* et *LQ mult*) sont comparables à ceux obtenus pour le cas 2 et il nous a donc semblé inutile de mettre un tableau avec les mêmes valeurs que le tableau 4.5. Ainsi, l'absence totale d'un terme quadratique dans les mélanges est très bien gérée par les algorithmes et ne pose pas de problème. Ceci était prévisible de par la construction des mises à jour des algorithmes.

4.3.4 Cas 4 : Mélanges de 3 matériaux, sans $\mathbf{s}_1 \odot \mathbf{s}_2$ et sans \mathbf{s}_3

4.3.4.1 Résultats des différents algorithmes

Comme décidé précédemment, les résultats présentés ici correspondent pour chaque image à une moyenne des résultats obtenus avec 30 initialisations différentes (suivant le *Protocole 2*).

Les résultats du tableau 4.6 montrent que nos deux algorithmes linéaires quadratiques donnent de meilleures performances que l'algorithme *Linéaire ext* adapté de la littérature, surtout l'algorithme *LQ Grad-Newt* (avec *init 1*) qui fournit la meilleure estimation des coefficients. Ce qui est un peu surprenant c'est que cette bonne estimation est obtenue avec l'initialisation *init 1* mais pas avec *init 2*. La méthode *Linéaire*, qui a été ici utilisée pour chercher $M = 3$ sources (pour une cohérence dans la comparaison avec les autres algorithmes), donne encore une fois les moins bonnes performances (en regardant simultanément le SAM et RMSE).

Un examen des résultats des algorithmes *Linéaire ext* et *LQ mult* nous a montré que les deux ont du mal à trouver que la source \mathbf{s}_3 est absente, c.à.d. que le coefficient qui lui est associé est nul (ou au moins faible), et tous les deux estiment mal cette troisième source qui n'intervient dans les mélanges qu'à travers les termes quadratiques. C'est ce qui explique les fortes valeurs de RMSE avec ces algorithmes. L'algorithme *LQ Grd-Newt* utilisé avec *init 1* est le seul qui donne des valeurs faibles pour les coefficients associés à la source \mathbf{s}_3 , il se rapproche donc plus de la réalité des mélanges, ce qui lui permet de mieux estimer la partie réellement présente (les sources \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 et leurs coefficients). Ceci est confirmé par les résultats du tableau 4.7 où les performances présentées sont calculées uniquement pour les deux premières sources (les seules présentes dans la partie linéaire). L'algorithme *Linéaire* a donc cette fois-ci été utilisé

Méthodes		Linéaire (M=3)		Linéaire ext		LQ Grd-Newt		LQ mult	
		init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.19	0.19	0.14	0.14	0.12	0.12	0.12	0.12
	std	0.12	0.12	0.04	0.04	0.05	0.06	0.04	0.04
	min	0.04	0.04	0.08	0.07	0.04	0.05	0.04	0.04
	max	0.65	0.63	0.27	0.26	0.26	0.36	0.21	0.21
RMSE	mean	0.25	0.25	0.26	0.26	0.14	0.26	0.25	0.25
	std	0.04	0.04	0.03	0.03	0.05	0.04	0.01	0.02
	min	0.16	0.16	0.23	0.22	0.05	0.13	0.22	0.21
	max	0.38	0.38	0.34	0.35	0.28	0.38	0.33	0.33
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	852	978	40	41	6.5	6.4	2.4	2.5

TABLEAU 4.6 – Cas 4 - Comparatif des résultats obtenus pour chaque méthode - les résultats pour chaque méthode correspondent aux statistiques des résultats sur les 9 x 20 images, après moyennage des résultats sur 30 initialisations pour chaque image

pour chercher uniquement $M = 2$ sources, pour permettre une comparaison cohérente.

A partir de ce tableau, on peut remarquer que l'estimation par nos algorithmes de la partie liée aux deux premières sources, en oubliant donc la source 3, est très bonne pour le SAM. Par contre pour le RMSE, seul l'algorithme *LQ Grd-Newt* utilisé avec *init 1* donne un bon résultat car les autres estiment mal les coefficients liés à la source 3 ce qui perturbe l'estimation pour les 2 premières sources. Quant à l'algorithme *Linéaire*, si on regarde les valeurs moyennes des performances, il peut sembler fournir de meilleures performances que dans les cas où les nôtres

Méthodes		Linéaire (M=2)		Linéaire ext		LQ Grd-Newt		LQ mult	
		init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2	init 1	init 2
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.13	0.08	0.07	0.06	0.07	0.07	0.05	0.05
	std	0.12	0.09	0.02	0.02	0.04	0.04	0.03	0.03
	min	0.01	0.09	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01
	max	0.35	0.35	0.13	0.13	0.20	0.20	0.18	0.16
RMSE	mean	0.15	0.15	0.22	0.22	0.12	0.20	0.20	0.20
	std	0.09	0.12	0.04	0.04	0.04	0.04	0.02	0.02
	min	0.03	0.00	0.17	0.16	0.04	0.12	0.17	0.16
	max	0.49	0.60	0.33	0.35	0.22	0.35	0.29	0.29
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	5.3	4.6	40	41	6.5	6.5	2.4	2.5

TABLEAU 4.7 – Cas 4 - Comparatif des résultats obtenus pour chaque méthode - Performances pour les 2 premières sources uniquement

ne marchent pas, mais c'est l'algorithme qui présente ici les valeurs les plus élevées de valeurs maximales de SAM et RMSE ainsi que d'écart-types. Il n'est donc pas très fiable.

Nous analysons dans la suite uniquement les résultats obtenus par l'algorithme *LQ Grd-Newton* utilisé avec *init 1*.

4.3.4.2 Analyse des résultats avec l'algorithme *LQ Grd-Newton*

La figure 4.16 montre pour chacun des 9 trios de spectres utilisés, la moyenne des SAM obtenus sur les 20 images formées à partir de ce trio, et ce pour chacun des 3 spectres. On a donc 3 courbes représentant chacune la moyenne des SAM obtenue pour l'une des sources des trios. Les valeurs des SAM obtenues pour la source 3 sont toujours les plus élevées, alors que les SAM obtenus pour les sources 1 et 2 sont plutôt satisfaisants. L'algorithme arrive à bien estimer les 2 spectres présents dans la partie linéaire du mélange (et qui représentent donc la vraie composition des pixels au sol) mais estime mal la source 3 qui n'intervient dans les mélanges qu'à travers les termes quadratiques (c.à.d. les termes dus aux réflexions). Cela veut dire que l'algorithme estime bien les spectres des matériaux présents dans les pixels, ce qui est bien notre objectif.

Ce résultat est illustré par les exemples de spectres que l'on peut voir sur la figure 4.17. Nous montrons encore une fois un exemple de résultat pour un trio faisant intervenir un spectre de végétation (trio numéro 7, sur la figure 4.17(a)) et un trio sans végétation (trio numéro 5, sur la figure 4.17(b)). Sur ces deux exemples on peut voir que la troisième source qui représente un matériau de mur non visible par le capteur n'est pas bien retrouvée. Néanmoins, les 2 sources présentes réellement dans les pixels sont bien estimées. Le SAM global moyen correspondant aux deux premières sources uniquement est d'ailleurs de 0.07 rad (moyenne des deux courbes).

La figure 4.18 montre les résultats d'estimation des coefficients de mélange pour ces deux mêmes exemples. L'estimation est satisfaisante car même si les coefficients de mélange de la source 3 ne sont pas nuls, leurs valeurs sont très faibles ce qui se rapproche de la réalité. De plus l'estimation des coefficients associés aux spectres 1 et 2 est bonne.

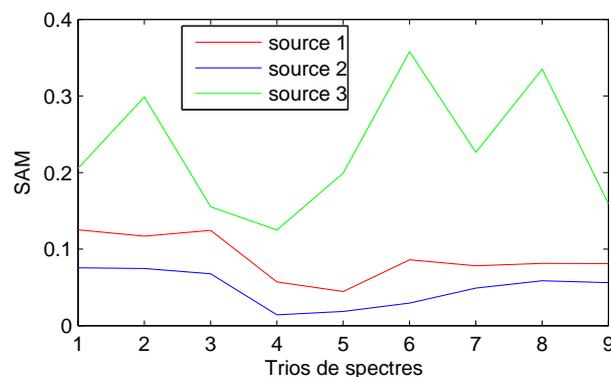


FIGURE 4.16 – Cas 4 - Algorithme *LQ Grd-Newton* (*init 1*) - Moyenne des SAM obtenus sur 20 images différentes pour chaque trio de spectres, pour les 3 spectres du trio

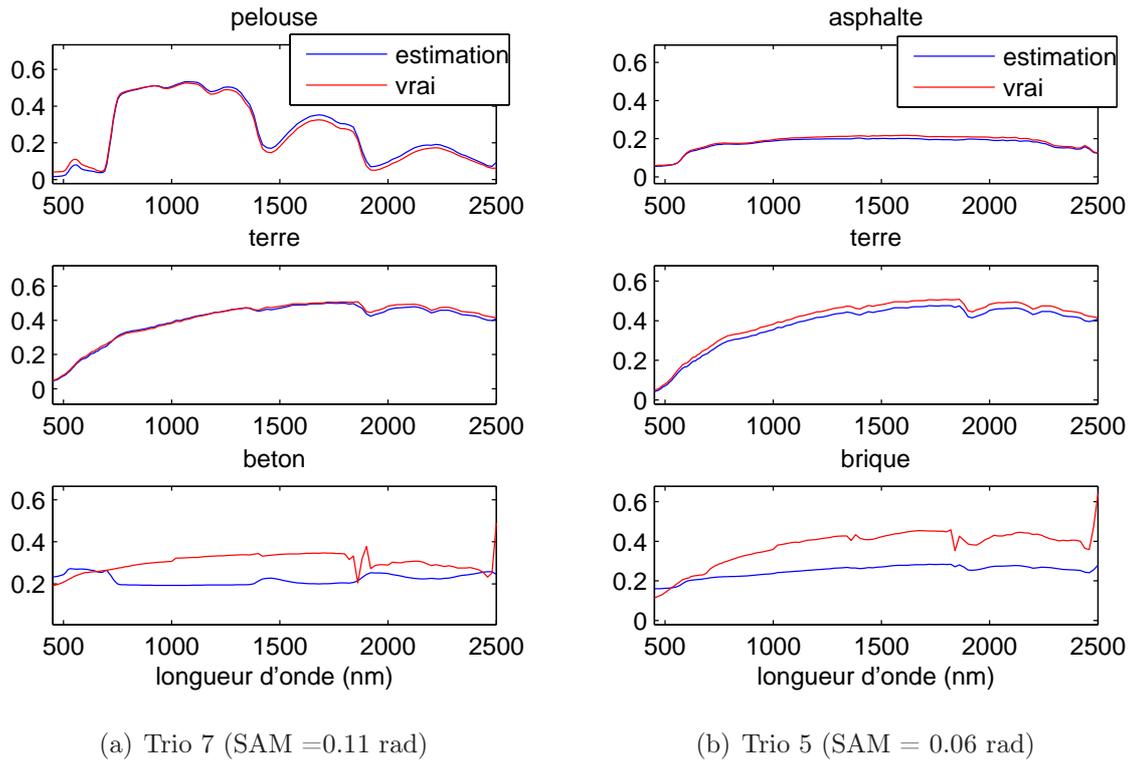


FIGURE 4.17 – Cas 4 - Algorithme $LQ\ Grd-Newt$ (*init 1*) - Exemples de résultats de spectres avec et sans présence de la végétation

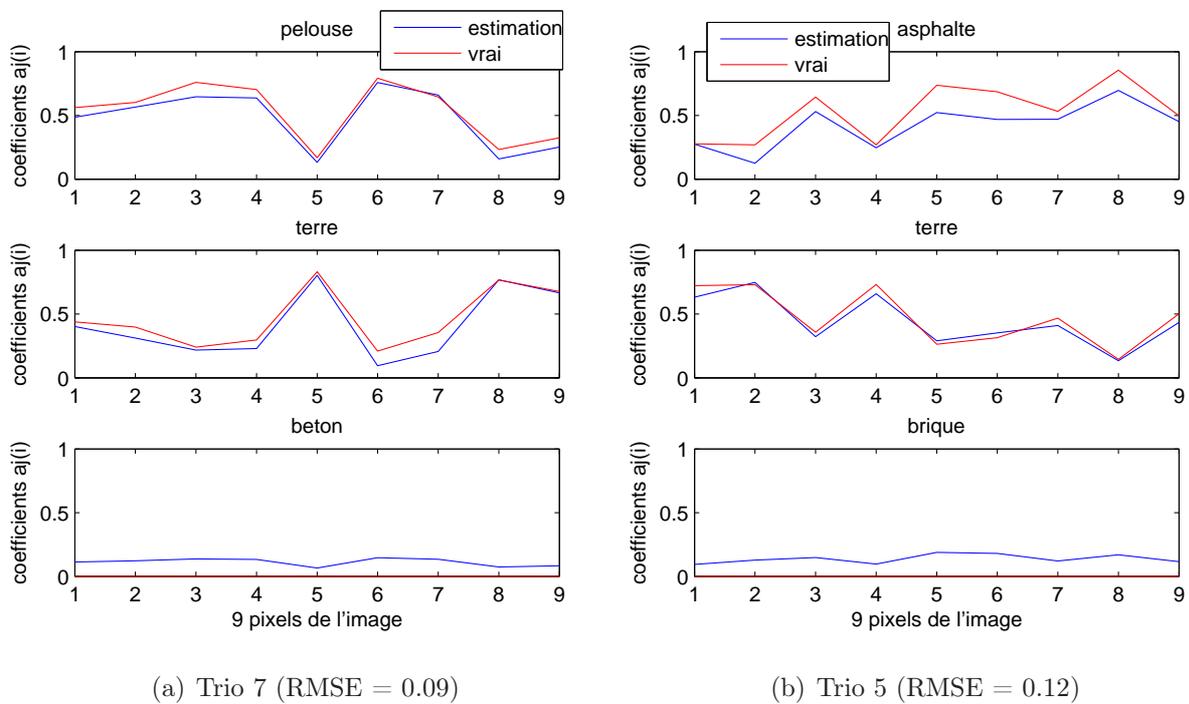


FIGURE 4.18 – Cas 4 - Algorithme $LQ\ Grd-Newt$ (*init 1*) - Exemples de résultats sur les coefficients avec et sans présence de la végétation

On peut conclure cette sous-section en disant que les résultats obtenus sur ce dernier cas avec notre algorithme *LQ Grd-Newton* sont satisfaisants et très encourageants, d'autant plus que l'estimation se fait complètement en aveugle sans utilisation d'information a priori sur les données. Une étude plus approfondie du comportement de l'algorithme *LQ mult* est nécessaire pour comprendre pourquoi son comportement dans ce cas d'étude a été différent de *LQ Grd-Newton*, ceci peut être envisagé parmi les perspectives de ce travail de thèse.

Finalement, à travers les quatre cas d'étude, on peut aussi conclure que l'initialisation avec *init 1* semble être la plus satisfaisante (elle semble être soit mieux soit équivalente à *init 2*), peut-être parce qu'elle conditionne moins l'algorithme au départ, laissant plus de liberté. Il faudrait néanmoins une étude plus approfondie du comportement des algorithmes vis à vis de différentes initialisations pour tirer des conclusions plus précises. Néanmoins le fait que nos algorithmes donnent des résultats satisfaisants avec une initialisation aussi peu contraignante qu'*init 1* est un point positif.

4.3.4.3 Tests avec *init 3*

Dans cette sous-section, le but est de voir quelles performances on peut atteindre en ajoutant de l'information a priori. On présente donc ici des résultats de tests faits avec l'initialisation *init 3* présentée dans la section 4.2.2.2.

On suppose donc ici que l'on connaît la répartition des matériaux sur nos pixels avec un certain pourcentage d'erreur (20 % par exemple), cela revient à connaître les coefficients de la partie linéaire de nos mélanges avec 20 % d'erreur. Comme déjà expliqué dans la section 4.2.2.2, ces tests présentent un intérêt car on peut se retrouver dans un cas réel avec une image panchromatique à haute résolution de la même scène que celle de l'image hyperspectrale traitée. Le tableau 4.8 montre les résultats obtenus pour chaque méthode. Ces résultats correspondent aux statistiques des résultats sur les 9 x 19 images (une matrice de mélange pour laquelle l'algorithme *LQ mult* n'arrive pas du tout à converger a été éliminée), et sur 5 initialisations différentes pour chaque image.

Contrairement à ce qui précède, on ne fera pas ici la moyenne des résultats obtenus (moyenne des matrices estimées) pour chaque image avec les différentes initialisations car cela n'aurait pas vraiment de sens. On est censé avoir, pour chaque cas, une unique estimation approximative des abondances pour initialiser l'algorithme. Pour avoir des résultats représentatifs on a lancé notre algorithme pour chaque image avec 5 approximations différentes des abondances comme initialisation (les spectres étant initialisés avec des constantes comme expliqué en section 4.2.2.2). Le protocole suivi ici est donc le *Protocole 1*, avec 5 initialisations au lieu de 30.

L'algorithme *Linéaire* n'a pas été présenté ici car il nous semble avoir suffisamment montré à travers les tests sur données simulées qu'il n'était pas approprié.

On constate ici que pour l'estimation des spectres, l'algorithme *LQ mult* est légèrement meilleur (si on regarde les valeurs minimales en plus de la moyenne). L'algorithme *LQ Grd-Newton*

Méthodes		Linéaire ext	LQ Grd-Newt	LQ mult
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.12	0.23	0.11
	std	0.05	0.13	0.06
	min	0.06	0.02	0.02
	max	0.41	0.88	0.50
$RMSE$	mean	0.05	0.19	0.05
	std	0.02	0.11	0.02
	min	0.01	0.03	0.02
	max	0.11	0.59	0.16
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	0.1	3.5	0.4
$RMSE_{in}$	mean : 0.09	std : 0.01	min : 0.08	max : 0.11

TABLEAU 4.8 – Cas 4 - Comparatif des résultats obtenus pour chaque méthode avec *init 3* - les résultats pour chaque méthode correspondent aux statistiques des résultats sur les 9 x 19 images, et sur 5 initialisations différentes pour chaque image - la dernière ligne correspond au RMSE en entrée (initialisation)

est moins performant que dans le cas complètement aveugle (tableau 4.6). Pour ce qui est de l'estimation des coefficients, les algorithmes *Linéaire ext* et *LQ mult* donnent des performances équivalentes. Les deux améliorent l'estimation des coefficients par rapport à l'initialisation (voir dernière ligne du tableau qui montre les valeurs de $RMSE$ en entrée, $RMSE_{in}$, c.à.d. mesurées entre les vrais coefficients et ceux utilisés pour l'initialisation) et donnent une estimation acceptable des spectres.

Finalement les méthodes tenant compte des termes quadratiques dans le calcul s'avèrent surtout avantageuses lorsque l'on est complètement en aveugle, avec aucune information a priori (cas précédents étudiés).

4.4 Performances en fonction du nombre de pixels

Voir les performances en fonction du nombre de pixels, c.à.d. en fonction du nombre d'observations utilisées, peut être un point intéressant à étudier. Si on imagine en effet travailler sur une image réelle morceau par morceau, quel est le nombre minimal de pixels différents qu'il faut avoir sur cette imagerie pour réussir le démélange? On ne peut répondre entièrement à cette question, car cela dépend en partie du contenu de l'image étudiée et de la précision exigée, néanmoins on peut voir le comportement de nos méthodes en fonction du nombre d'observations utilisées.

Cette étude est faite dans le cas général de 3 sources (cas 2 étudié à la section 4.3.2). On se focalise donc sur l'algorithme *LQ mult* (pour lequel avaient été obtenus les meilleurs résultats), avec l'initialisation *init 2* (qui était équivalente à *init 1* pour ce cas-là, il serait néanmoins

Taille images		4	9	16	25
SAM_{OUT} (rad)	mean	0.11	0.09	0.08	0.07
	std	0.05	0.04	0.03	0.03
	min	0.04	0.03	0.02	0.02
	max	0.24	0.21	0.18	0.18
$RMSE$	mean	0.12	0.11	0.10	0.09
	std	0.04	0.03	0.03	0.03
	min	0.04	0.03	0.04	0.03
	max	0.21	0.19	0.19	0.18
$Err_{tot}(\times 10^{-2})$	mean	1.7	2.9	2.9	2.8

TABLEAU 4.9 – Cas 2 - Algorithme $LQ\ mult$ (*init 2*) - Performances en fonction du nombre de pixels des images

utile de compléter cette étude en réalisant ces tests avec *init 1*). On étudie l'évolution des performances de cet algorithme pour 4 tailles d'images : 2x2 (4 pixels), 3x3 (9 pixels), 4x4 (16 pixels) et 5x5 (25 pixels).

Dans chaque cas, on présente les statistiques des résultats obtenus sur 9x20 images, comme précédemment. Pour chacune de ces images, le résultat final est un moyennage des résultats obtenus sur 30 initialisations différentes. Le tableau 4.9 montre les résultats en question. Il apparaît que plus l'on a d'observations (pixels), meilleure est l'estimation.

Rappelons que tous les résultats présentés précédemment dans ce chapitre ont été obtenus avec des images de 9 pixels, on peut donc s'attendre à une amélioration des résultats si on prend plus de pixels. Néanmoins, il n'est pas sûr que l'on ait à notre disposition, dans des images réelles, beaucoup de pixels ayant des valeurs différentes (par exemple si les bâtiments sont alignés avec les lignes ou colonnes de l'image). Avoir des pixels redondants n'a pas vraiment d'intérêt et ne rajoute pas d'information pour l'estimation. Il était donc intéressant de voir les performances de nos algorithmes avec un assez faible nombre de pixels, d'où l'intérêt de nous être contentés de 9 pixels pour le reste du chapitre.

4.5 Première tentative avec des images réelles

Dans cette section nous présentons la première tentative de démixage par nos méthodes sur des images réelles. Les algorithmes testés sont les suivants : *Linéaire*, *Linéaire ext*, *LQ Grd-Newt* et *LQ mult*.

4.5.1 Description des données

Les données traitées correspondent à des imagerie extraites d'images hyperspectrales acquises sur la ville de Nantes, avec un capteur Hypspec⁵. Ces images sont de résolution spatiale 1m et ont 160 bandes spectrales couvrant l'intervalle [410,987 nm]. Les images en réflectance à notre disposition sont issues d'un traitement fait par l'Institut de Planétologie et de Géologie de Nantes.

Les zones choisies pour les imagerie étudiées correspondent toutes à une zone à côté d'un mur de bâtiment au soleil. C'est en effet à côté des bâtiments qu'il est plus probable de trouver l'effet des réflexions et donc des termes quadratiques. Il est aussi probable d'avoir des réflexions entre la végétation (qui est présente sur ces imagerie) et le sol.

Il sera difficile de valider les résultats obtenus avec ces imagerie car l'on ne dispose pas de la vérité terrain, ni d'image mieux résolue (ce qui aurait permis d'avoir au moins une approximation des coefficients de mélange), ni de mesure de spectres de réflectance sur le terrain. On ne connaît pas non plus les matériaux présents sur les murs, pour vérifier si ceux-ci réfléchissent ou pas vers le sol. Ces images ont aussi un niveau de bruit non négligeable, visible aussi bien spatialement que spectralement.

4.5.2 Comment interpréter les résultats ?

Afin de pallier le manque de données pour l'interprétation et la validation des résultats, nous avons opté pour l'utilisation d'une méthode de classification. Celle-ci nous permettra d'extraire, à partir des pixels les plus "purs", des spectres "références" (ce terme est à considérer avec prudence ici car il ne s'agit pas d'une vérité terrain mais juste d'un élément de comparaison) des matériaux présents dans les imagerie, les moins bruités possibles. Pour cela nous avons procédé comme suit pour chaque imagerie :

1. Appliquer une ACP (Analyse en Composantes Principales) aux spectres des pixels en gardant un nombre de composantes correspondant au nombre de matériaux que l'on suppose présents dans la scène (ici 2 généralement, on cherchera donc aussi 2 classes). Notons ici que la décroissance des valeurs propres de la matrice de covariance des données est assez continue, et ne laisse pas forcément supposer que l'on peut garder uniquement les deux premières composantes. Cela peut être dû au fait que les mélanges ont plus de composantes car ne sont pas linéaires. Le bruit peut aussi jouer un rôle.
2. Faire une classification par la méthode K-means (dite aussi méthode des centres mobiles) [130] sur les pixels qui ont à présent 2 composantes.
3. Pour chaque classe obtenue, on procède comme suit dans le domaine spectral d'origine :
 - Prendre le spectre qui correspond à la médiane de la classe
 - Calculer le SAM entre ce spectre et tous les autres de la classe

5. <http://www.neo.no/hypspec/>.

- Garder ceux qui ont un SAM le plus faible (avec un seuil correspondant à la valeur minimale de SAM obtenue à laquelle on ajoute 0.05 rad)
- Calculer la moyenne de ces spectres, pour obtenir un spectre "référence" de la classe, avec un bruit réduit (bruit réduit grâce au moyennage)

L'étape 3 sert à éliminer tous les spectres non purs qui se situent à la frontière des classes. Nous avons donc finalement des spectres référence moins bruités que les spectres de l'image. Ceci permettra donc une validation partielle et qualitative.

Les cartes d'abondance seront validées qualitativement et visuellement, en fonction de ce que l'on peut voir sur la composition des imagerie.

Pour ce qui est des termes quadratiques, on ne connaît malheureusement pas les matériaux présents sur les murs et il n'existe aucun moyen d'obtenir cette information. De ce fait, interpréter et valider les résultats des termes quadratiques sera encore plus difficile que pour la partie linéaire (qui représente la composition des pixels vue par le capteur).

4.5.3 Présentation des résultats

Quatre imagerie sont traitées et toutes correspondent à une zone au pied d'un mur au soleil. Une visualisation de ces imagerie et des spectres des pixels avec le logiciel ENVI, nous a montré qu'il y a deux matériaux visibles sur toutes.

Nous avons donc appliqué les 4 algorithmes à chaque imagerie pour $M = 2$ puis $M = 3$. Le résultat dans le deuxième cas n'est pas satisfaisant car soit le 3ème spectre retrouvé correspond à du bruit et les cartes d'abondances sont fausses soit l'estimation des 3 spectres donne un résultat erroné (signaux ne ressemblant pas à des spectres, cartes d'abondances fausses). Ceci a été constaté pour toutes les images étudiées ici. Cela veut dire que soit le mur n'est pas assez réfléchissant pour que sa contribution puisse être présente, soit la contribution des réflexions est noyée dans le bruit qui est assez élevé sur ces images. Dans la suite on présente donc uniquement les résultats obtenus avec $M = 2$. Les interactions donnant lieu aux termes quadratiques seront donc finalement entre les deux matériaux présents, dont l'un des deux correspond à de la végétation.

D'autre part, pour $M = 2$ les algorithmes *Linéaire ext* et *LQ Grd-Newt* donnent aussi des résultats erronés (avec au mieux seul le spectre de végétation estimé et le deuxième ne correspondant à aucun matériau), et ce pour les 4 imagerie étudiées. On présentera donc uniquement les résultats obtenus avec l'algorithme *Linéaire* et *LQ mult*.

Les algorithmes ont tous été testés avec les deux types d'initialisation *init 1* et *init 2*, avec 10 initialisations différentes dans chaque cas. Dans les cas où le démélange fonctionne (pas de résultat d'estimation erroné), on n'a constaté aucune différence de résultat entre les deux types d'initialisations. Et étonnamment, les résultats obtenus sur les 10 initialisations différentes sont visuellement identiques. Les résultats montrés dans la suite correspondront donc à un exemple de résultat (pour une initialisation donnée), étant donné qu'elles sont équivalentes.

4.5.3.1 Imagette 1

La figure 4.19 représente une bande de l'imagette 1 (figure 4.19(a)) et de l'image à partir de laquelle celle-ci a été extraite (figure 4.19(b)), montrant l'emplacement de l'imagette extraite. Une visualisation de l'imagette et des spectres des pixels avec le logiciel ENVI, nous a montré que les deux matériaux visibles sur l'imagette sont : un matériau de type asphalté qui recouvre le sol (partie claire sur l'imagette) et de la végétation (couleur foncée).

Sur la figure 4.20(a) sont représentés les spectres des pixels de l'imagette. Cela permet notamment de donner une idée du bruit, qui est présent partout et très accentué aux niveaux des fortes longueurs d'onde.

La figure 4.20(b) montre la carte de classification obtenue avec la méthode K-means. Cela correspond à peu près aux deux matériaux qu'on voit sur l'imagette (figure 4.19(a)), sachant qu'au niveau des frontières entre les deux classes le résultat de la classification n'est pas bon car les pixels ne sont pas purs. C'est la raison pour laquelle, dans notre étape 3 de prétraitement, nous gardons uniquement les spectres les plus ressemblants au sein de chaque classe pour calculer le spectre "référence". On ne présentera pas cette carte de classification pour les autres imagettes car la répartition des classes est assez nette sur l'imagette elle-même.

La figure 4.21 montre les spectres extraits avec les algorithmes *Linéaire* (4.21(a)) et *LQ mult* (4.21(b)). Les spectres estimés (bleu) sont comparés aux spectres références (rouge) issus de l'étape de prétraitement par classification. Les résultats concordent. Néanmoins rien ne garantit que ce qu'on appelle les spectres "références" soient ceux qui correspondent vraiment à la réalité. On peut d'ailleurs deviner sur le spectre 2 rouge un petit résidu de végétation (au niveau des longueurs d'onde 480 et 700 nm). Ce qu'on peut dire ici c'est que les deux méthodes de démixage donnent des résultats équivalents. Les cartes d'abondance obtenues par les deux

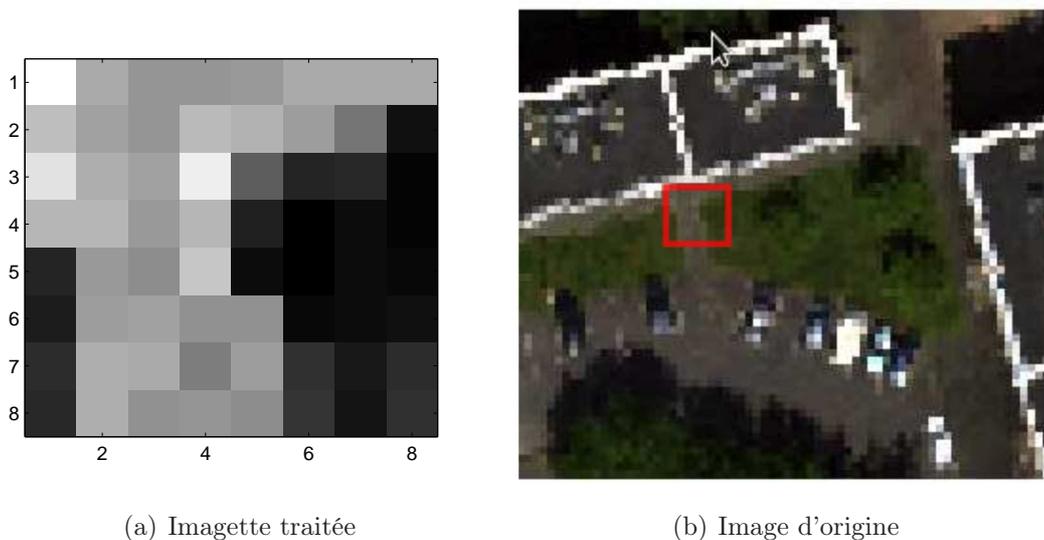


FIGURE 4.19 – Imagette 1 (a) et l'image d'origine avec l'emplacement de l'imagette indiqué (b) - longueur d'onde 550 nm

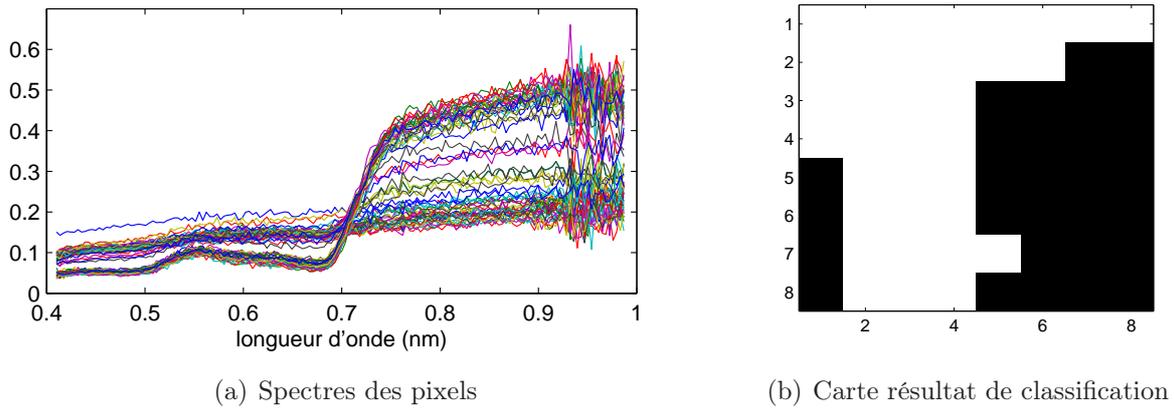


FIGURE 4.20 – Imagerie 1 - (a) spectres des pixels - (b) carte des deux classes obtenue par la classification

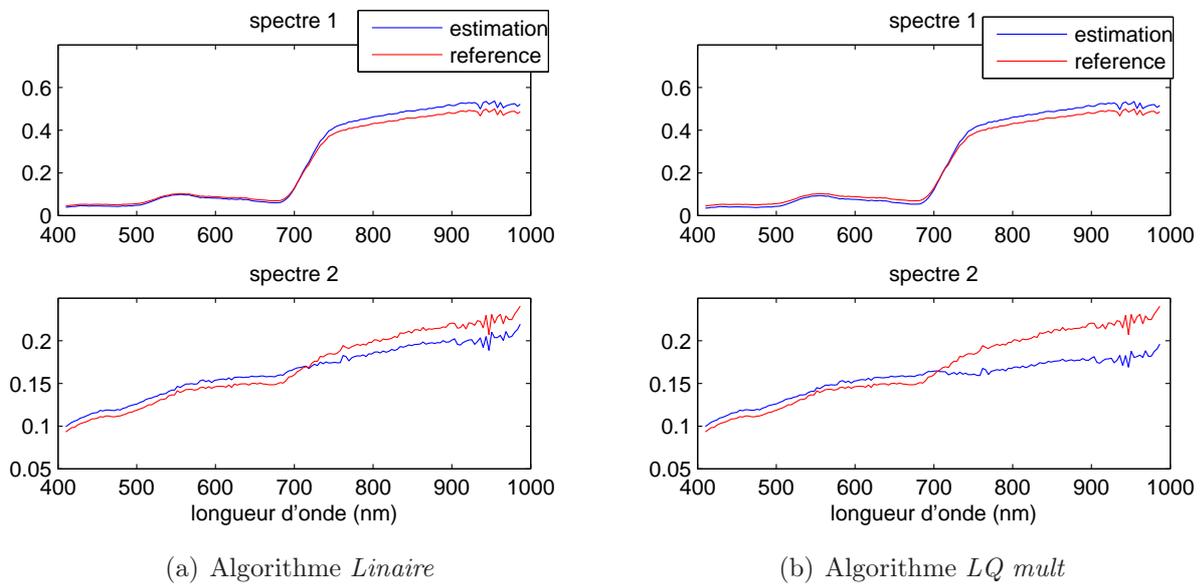


FIGURE 4.21 – Imagerie 1 - Spectres extraits par les algorithmes *Linéaire* et *LQ mult* (bleu), comparés aux spectres référence (rouge)

méthodes (figure 4.22) semblent d'ailleurs identiques et en adéquation avec l'imagerie observée figure 4.19(a).

Pour ce qui est du terme quadratique, l'algorithme *LQ mult* trouve que sa contribution est présente au niveau de la transition entre le sol et la végétation (voir carte d'abondance correspondante figure 4.23), ce qui n'est pas illogique si la végétation est un peu haute (pas de l'herbe). Néanmoins il est difficile d'interpréter avec exactitude le résultat pour le terme quadratique étant donné le manque d'information à notre disposition.

L'erreur de reconstruction (Erreur totale) obtenue ici est de 6.1% pour l'algorithme *LQ mult* et 7.7% pour l'algorithme *Linéaire*. On peut donc supposer que le résultat obtenu avec l'algorithme linéaire quadratique correspond plus à la réalité du mélange.

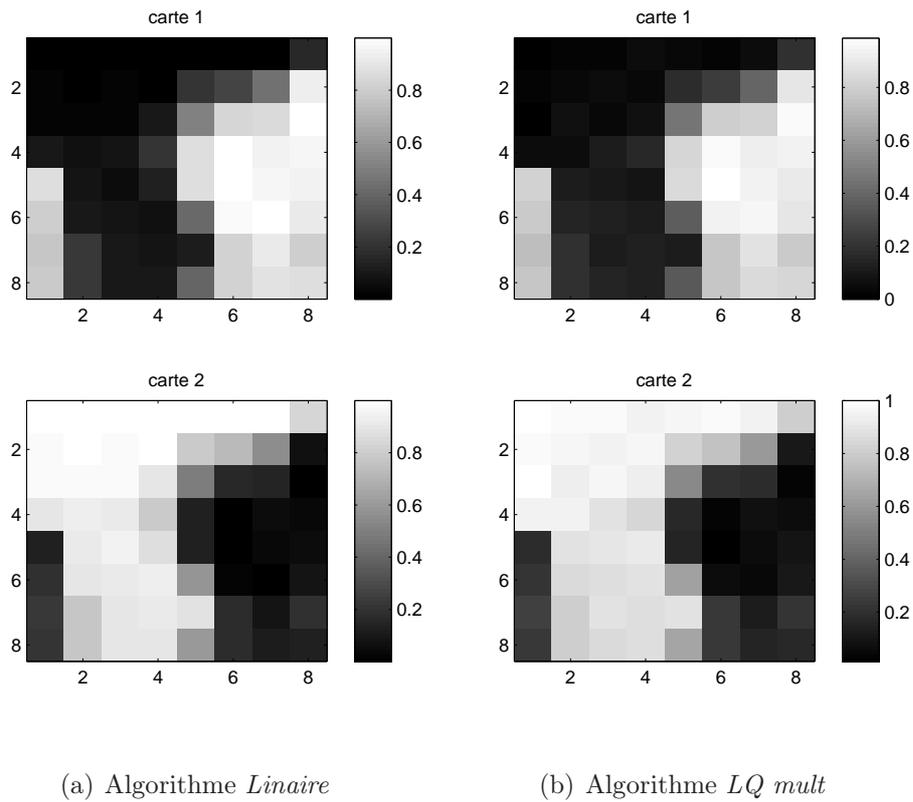


FIGURE 4.22 – Imagerie 1 - Cartes d'abondance estimées par les algorithmes *Linéaire* et *LQ mult*, pour la partie linéaire

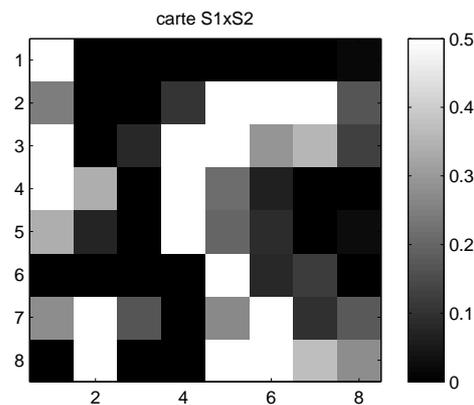


FIGURE 4.23 – Imagerie 1 - Carte d'abondance du terme quadratique estimée par l'algorithme *LQ mult*

Remarquons ici qu'il n'est pas surprenant d'avoir un résidu plus élevé que ce que l'on avait avec les images simulées étant donné, d'un côté, la présence du bruit et, d'un autre côté, la possible variabilité au sein de chaque classe de matériau.

4.5.3.2 Imagette 2

On s'intéresse ici à la deuxième imagette (voir figure 4.24), qui contient elle aussi un matériau au sol de type asphalte (pixels clairs) et de la végétation (pixels foncés).

Cette fois-ci, le résultat obtenu avec la méthode *Linéaire* est en partie erroné : seul le spectre de végétation est retrouvé correctement (voir figure 4.25(a)). Le spectre 2 retrouvé par l'algorithme *Linéaire* semble correspondre à l'opposé du spectre de végétation, à plus faible amplitude. Il ne correspond pas à un matériau donné. L'algorithme *LQ mult* donne un spectre qui ressemble plus à ce qui pourrait être de l'asphalte.

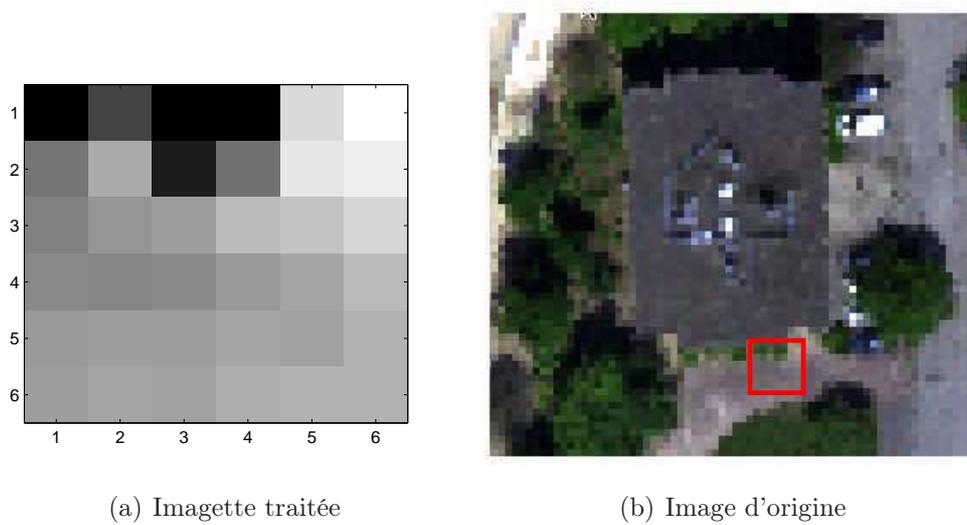


FIGURE 4.24 – Imagette 2 (a) et l'image d'origine avec l'emplacement de l'imagette indiqué (b) - longueur d'onde 550 nm

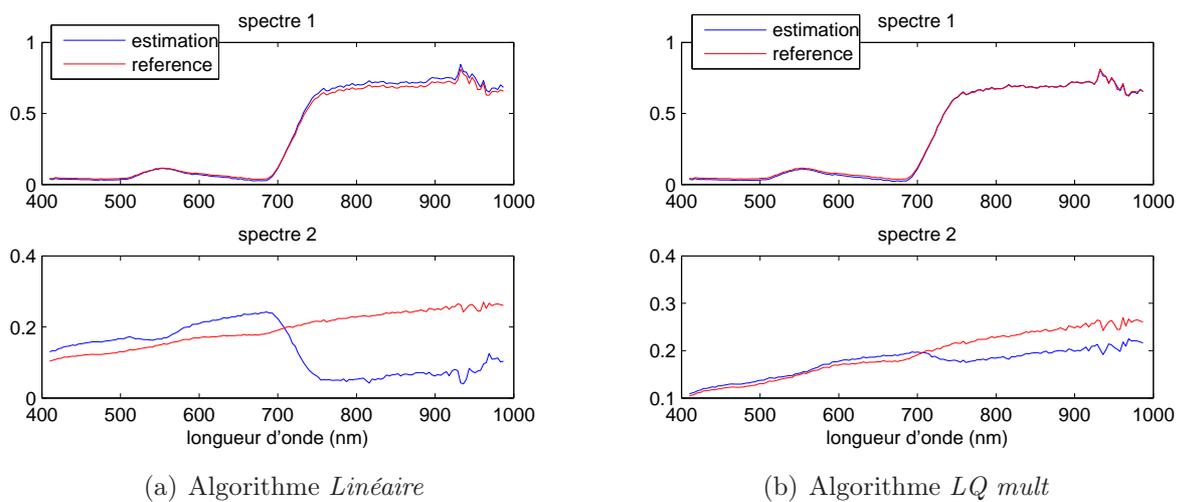


FIGURE 4.25 – Imagette 2 - Spectres extraits par les algorithmes *Linéaire* et *LQ mult* (bleu), comparés aux spectres référence (rouge)

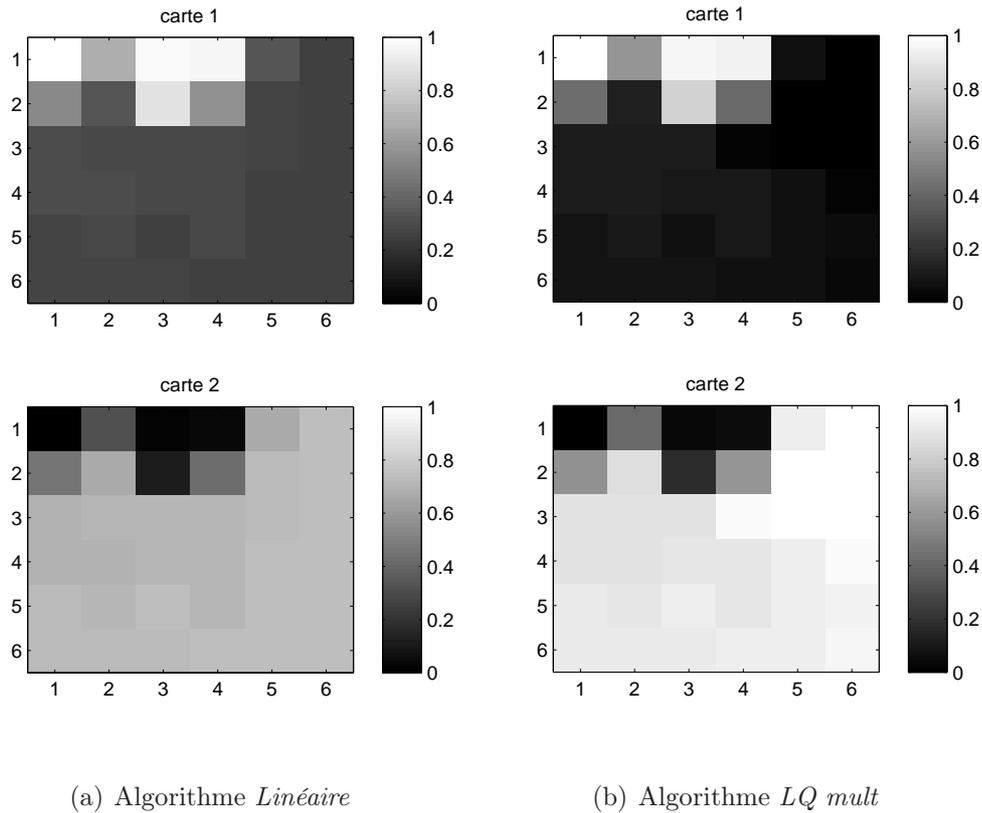


FIGURE 4.26 – Imagerie 2 - Cartes d'abondance estimées par les algorithmes *Linéaire* et *LQ mult*, pour la partie linéaire

Pour ce qui est des cartes d'abondance pour la partie linéaire (figure 4.26), le résultat donné par notre algorithme *LQ mult* correspond plus à la réalité car la partie basse de l'image ne contient normalement pas de végétation, et donc les pixels correspondants sur la carte 1 devraient avoir un coefficient quasi nul, ce qui n'est pas le cas avec la méthode linéaire. Cela implique que la présence de l'asphalte (carte 2) est sous-estimée dans cette zone par cette méthode. Finalement l'estimation de la partie linéaire est meilleure ici par l'algorithme *LQ mult*.

Pour ce qui est du terme quadratique, la carte estimée par la méthode linéaire quadratique (figure 4.27), situe sa présence sur le sol, au bord de la végétation, ce qui est encore une fois cohérent.

Pour ce qui est de l'erreur totale (résidu), elle est encore une fois plus faible pour la méthode linéaire quadratique : 7.7% contre 10.2% pour la méthode linéaire.

4.5.3.3 Imagerie 3

L'imagerie 3 (figure 4.28) contient aussi un matériau de type asphalte (pixels clairs) et de la végétation (pixels foncés). La méthode *Linéaire* donne ici aussi un résultat erroné (seul le spectre de végétation est retrouvé et l'autre est complètement faux). Seul le résultat obtenu

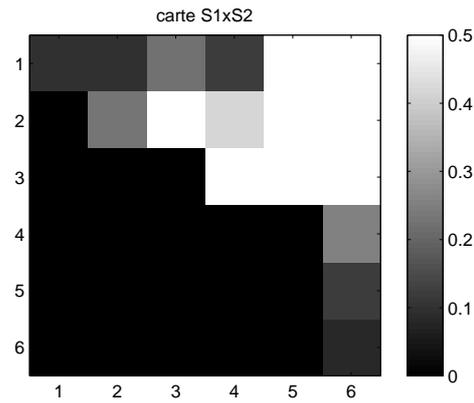


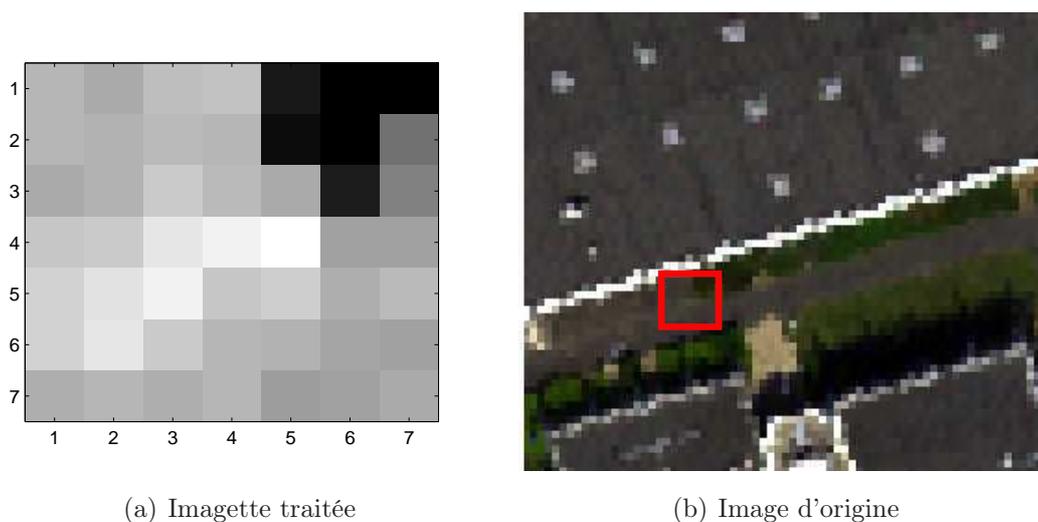
FIGURE 4.27 – Imagerie 2 - Carte d'abondance du terme quadratique estimée par l'algorithme *LQ mult*

par l'algorithme *LQ mult* est donc présenté.

La figure 4.29 montre les spectres et les abondances obtenus par l'algorithme pour la partie linéaire. Les spectres concordent avec les spectres de référence (qui rappelons-le ne sont pas forcément mieux ou plus "purs"). Les cartes sont cohérentes avec l'imagerie. Remarquons ici que les écarts entre les spectres de référence et estimés sont plus importants à partir de 700 nm. Ceci peut s'expliquer par le fait que le niveau du bruit soit plus élevé sur cet intervalle spectral, on en voit d'ailleurs certains résidus sur les spectres.

La carte du terme quadratique (figure 4.30) montre la présence de ce terme essentiellement sur le sol. La partie éloignée de la végétation n'est pas forcément explicable, il est possible aussi que ce terme serve à compenser la variabilité spatiale des matériaux à certains endroits.

Ce qu'on peut conclure néanmoins c'est que notre méthode s'avère plus fiable ici que la



(a) Imagerie traitée

(b) Image d'origine

FIGURE 4.28 – Imagerie 3 (a) et l'image d'origine avec l'emplacement de l'imagerie indiqué (b) - longueur d'onde 550 nm

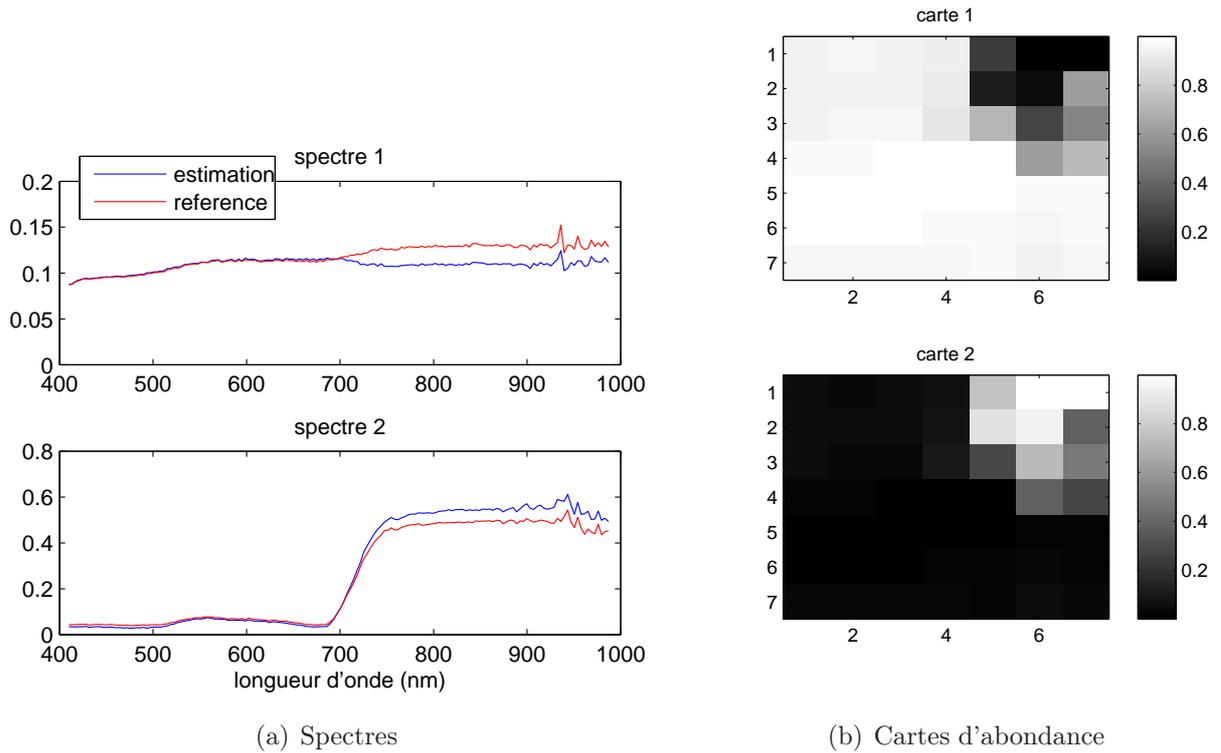


FIGURE 4.29 – Imagerie 3 - Spectres et cartes d'abondance estimés par l'algorithme $LQ\ mult$, pour la partie linéaire

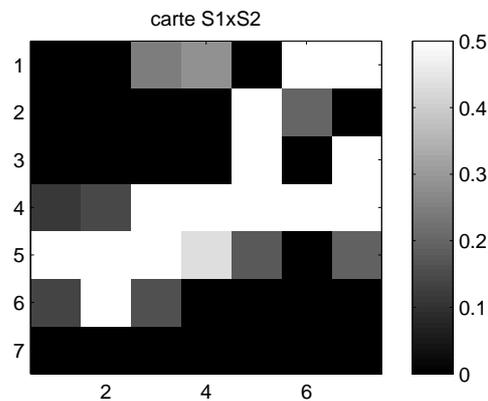


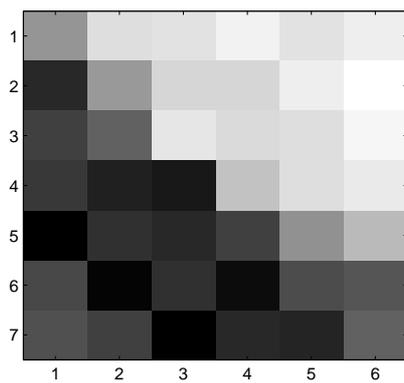
FIGURE 4.30 – Imagerie 3 - Carte d'abondance du terme quadratique estimée par l'algorithme $LQ\ mult$

méthode linéaire, étant donné que c'est la seule qui arrive à estimer la composition linéaire de l'image, ce qui est notre objectif (tenir compte des termes quadratiques pour mieux estimer la partie linéaire).

4.5.3.4 Imagette 4

Nous finissons avec cette imagette (figure 4.31) qui contient de la végétation (pixels foncés) et un matériau au sol à réflectance assez élevée (encore une fois après étude de l'imagette avec ENVI). La figure 4.32 montre les spectres des pixels de l'imagette. Encore une fois on peut remarquer que le bruit est assez fort. Mais ici une autre constatation peut être faite : le signal pour certains spectres est très bas dans les intervalles [400,500 nm] et [600,700 nm], avec des valeurs quasiment du même ordre de grandeur que les oscillations dues au bruit sur les spectres (ceci n'a pas été constaté pour les autres imagette, voir par exemple la figure 4.20(a) pour l'imagette 1).

Dans ce cas-ci, en plus de l'estimation erronée du matériau du sol, l'algorithme *Linéaire* n'arrive pas à estimer correctement le spectre de végétation, surtout au niveau des intervalles spectraux où le signal est bas pour certains pixels. On présente donc encore une fois uniquement les résultats obtenus avec notre algorithme *LQ mult* qui nous donne une estimation cohérente.



(a) Imagette traitée



(b) Image d'origine

FIGURE 4.31 – Imagette 4 (a) et l'image d'origine avec l'emplacement de l'imagette indiqué (b) - longueur d'onde 550 nm

La figure 4.33 montre les spectres et cartes d'abondances de la partie linéaire estimés par notre algorithme. Les spectres correspondent aux bons matériaux. Néanmoins un petit problème d'estimation apparaît sur le spectre de végétation entre les longueurs d'onde 600 et 700 nm. Ce problème peut être lié à ce qui a été constaté sur les données (figure 4.32), c.à.d. le fait que le signal soit quasiment nul, du niveau du bruit, sur cette zone, pour certains pixels. Néanmoins, en comparaison aux données d'origine, on peut voir que notre méthode donne une estimation plutôt satisfaisante.

Les cartes sont cohérentes avec l'imagette (figure 4.31(a)) et l'analyse qu'on en a faite avec ENVI et la classification. La méthode donne donc des résultats satisfaisants pour la vraie composition des pixels (partie linéaire).

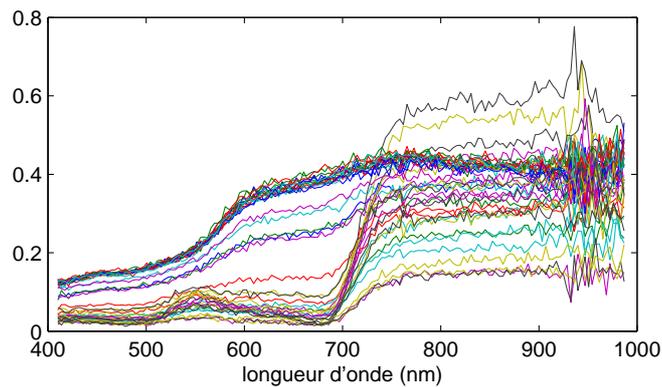
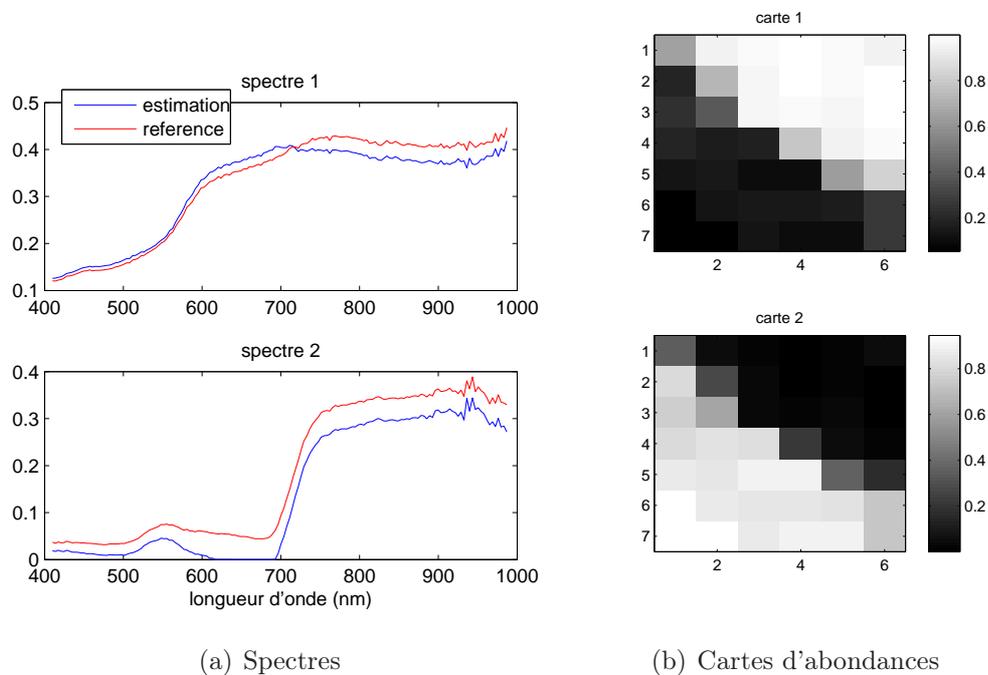


FIGURE 4.32 – Imagerie 4 - Spectres des pixels



(a) Spectres

(b) Cartes d'abondances

FIGURE 4.33 – Imagerie 4 - Spectres et cartes d'abondances estimés par l'algorithme *LQ mult*, pour la partie linéaire

La carte du terme quadratique (figure 4.34) n'est pas très facile à interpréter cette fois-ci. Ce terme est présent sur toute la partie sol et un peu sur la végétation. Cette dernière partie compense peut-être la variabilité des spectres de végétation sur la zone.

4.5.4 Conclusion sur les résultats avec données réelles

Ces premiers tests sur des images réelles n'ont pas pu être complètement validés et interprétés étant donné le manque d'information sur le contenu de ces images mais aussi le fait qu'elles soient particulièrement bruitées. Néanmoins, au vu des informations à notre disposi-

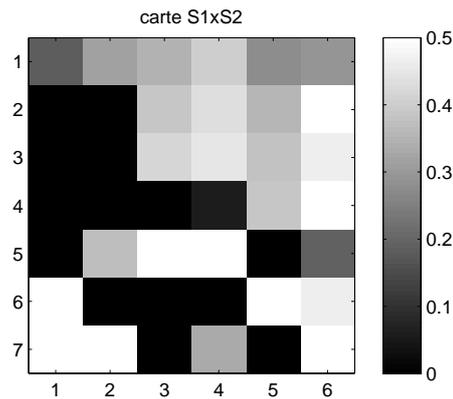


FIGURE 4.34 – Imagerie 4 - Carte d'abondance du terme quadratique estimée par l'algorithme *LQ mult*

tion, les résultats obtenus sont très encourageants. Notre méthode *LQ mult* nous permet de retrouver dans tous les cas ce qui semble être la composition de l'image, alors que la méthode linéaire échoue dans 3 cas sur 4. Cela montre d'un côté la robustesse de notre méthode mais aussi l'utilité de tenir compte de la présence des termes quadratiques pour mieux estimer la partie linéaire qui correspond à la vraie composition des pixels. Sur les imagerie étudiées la méthode linéaire quadratique s'est avérée plus fiable. Il serait bien sûr intéressant de faire des tests supplémentaires sur d'autres images réelles dès qu'on en aura à notre disposition. L'idéal serait aussi d'avoir une vérité terrain qui permettrait une validation plus précise des résultats.

Conclusion

Ce chapitre avait pour but d'évaluer et valider les performances des algorithmes développés dans le cadre de cette thèse pour faire du démixage spectral avec un modèle linéaire quadratique, sur des images urbaines. Les résultats obtenus sur des données simulées sont satisfaisants et encourageants. Ils montrent que des algorithmes NMF dédiés au mélange linéaire quadratique donnent de meilleures performances qu'une méthode linéaire de la littérature ou une méthode linéaire adaptée au modèle mais qui ne tient pas compte des termes quadratiques dans le calcul. Les premiers tests sur les seules données d'images urbaines à notre disposition ont donné des résultats encourageants, même si la validation et l'interprétation des résultats n'étaient pas évidentes à cause de l'absence d'information sur le contenu de ces images.

Conclusion et perspectives

Dans cette première partie du travail de thèse nous nous sommes intéressés au démixage hyperspectral pour des images urbaines. A la résolution spatiale de nos images (quelques mètres), la variabilité des milieux urbains est importante. Ainsi, les surfaces au sol correspondant aux pixels sont des zones non homogènes composées de plusieurs matériaux. Le but du démixage est alors de retrouver les matériaux présents sur la scène en extrayant leurs spectres et leurs proportions.

Différents travaux existent sur le démixage spectral et le premier chapitre a donc été consacré à un état de l'art des méthodes de démixage ainsi que des modèles utilisés.

La plupart des méthodes sont basées sur un modèle linéaire. Dans les scènes de milieu urbain, de par la présence de structures 3D, des réflexions entre les différentes surfaces peuvent se produire, et ceci implique un modèle plus compliqué. Dans le chapitre 2 nous démontrons comment les mélanges, pour des scènes urbaines, peuvent être décrits par un modèle linéaire quadratique. L'établissement de ce modèle est fait à partir d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif. Une validation de ce modèle à partir d'images simulées a ensuite été présentée. Nous finissons le chapitre en fournissant le modèle simplifié qui peut être utilisé pour du démixage spectral, ainsi que les possibles hypothèses sur les coefficients de mélange. Le modèle final qui est linéaire quadratique invariant spectralement est aussi justifié par les résultats obtenus sur nos images simulées. Ce modèle a déjà été utilisé dans des travaux de démixage de la littérature, mais sans justification physique et avec des hypothèses différentes sur les coefficients qui ne sont pas non plus justifiées.

Une fois le modèle de mélange établi, il a été possible de passer à l'étape de démixage. Le chapitre 3 présente donc les différentes méthodes linéaires quadratiques développées dans le cadre de cette thèse. Ces méthodes sont basées sur la NMF (Non-negative Matrix Factorization) et exploitent donc la positivité des données. Le choix méthodologique est expliqué en début de ce chapitre, au vu de l'état de l'art fait sur le démixage spectral (chapitre 1) mais aussi du chapitre "Etat de l'art en SAS" en début du manuscrit. La première méthode testée est une méthode NMF linéaire de la littérature que nous avons étendue pour l'adapter à notre modèle. Nous avons ensuite présenté les trois méthodes NMF développées ici spécifiquement pour le modèle linéaire quadratique, dans le sens où elles tiennent compte de la présence des termes quadratiques dans le calcul du gradient de la fonction de coût.

Les performances des méthodes ont ensuite été évaluées dans le chapitre 4, essentiellement sur des données simulées. Des tests ont été fait dans différentes configurations qui peuvent être rencontrées en milieu urbain. Les résultats montrent que les méthodes NMF proposées, qui tiennent compte des termes quadratiques dans le calcul du gradient, donnent soit de meilleures performances soit des performances équivalentes comparées à la méthode linéaire que nous avons étendue. Et leurs performances sont toujours meilleures que celles de la méthode linéaire. Les méthodes proposées s'avèrent plus fiables en général que la méthode NMF linéaire (qui n'est pas adaptée à notre modèle) ou même la méthode linéaire étendue à notre modèle mais sans modification dans le calcul du gradient. Des tests ont ensuite été faits sur quelques images réelles mais sur lesquelles il n'était pas facile de faire une validation complète et précise vu le manque d'information sur leur contenu et le fait qu'elles soient très bruitées. Ces tests ont néanmoins montré que l'une de nos méthodes (la méthode multiplicative) est préférable à la méthode linéaire (qui ne donne pas un résultat correct 3 fois sur 4).

Les résultats obtenus sur cette partie de la thèse sont finalement satisfaisants et très encourageants. Nous avons justifié et validé un modèle de mélange pour les milieux urbains et avons développé des méthodes de démixage adaptées à ce modèle linéaire quadratique. Les méthodes proposées sont aveugles et à notre connaissance il n'y en a pas d'autres dédiées à des mélanges linéaires quadratiques de spectres corrélés et avec peu de parcimonie spatiale (pas ou peu de pixels purs), tout en étant aveugles. Ce travail ouvre aussi la voie à beaucoup de perspectives possibles dont voici quelques-unes :

- Notre modèle de mélange physique a uniquement été validé sur des images simulées, pour compléter cette validation on pourrait utiliser des images réelles, pour lesquelles on aurait une vérité terrain assez complète.
- Rappelons que notre modèle linéaire quadratique est valable uniquement pour les pixels complètement ou partiellement au soleil. Il serait intéressant d'étudier aussi le cas où les pixels sont complètement à l'ombre et de développer un modèle physique qui décrit les phénomènes dans ce cas.
- Pour la méthode LQ Gradient proposée à pas fixe, il est possible d'essayer un pas variable, en utilisant par exemple la règle d'Armijo [38][127][131]. Cela pourrait améliorer la précision de convergence (on obtiendrait un résidu plus faible) et pourrait être plus rapide.
- Pour ce qui est de l'algorithme LQ Gradient-Newton, il serait très intéressant d'appliquer la mise à jour de Newton aussi à la matrice des sources, pour se débarrasser du 2ème pas fixe. Au vu des améliorations obtenues avec la version actuelle par rapport à la version gradient à pas fixe, on pourrait imaginer un gain supplémentaire en performances.
- Il est connu que la NMF est sensible à l'initialisation, et nos résultats obtenus en témoignent. Une exploration de différentes méthodes d'initialisation pourrait donc s'avérer utile. Nous avons testé la méthode N-FINDR, d'autres méthodes d'extraction de end-

members pourraient être testées.

- Toujours dans le cadre de l'initialisation, il pourrait aussi être intéressant, lorsque les spectres initiaux sont extraits par une méthode de type N-FINDR, d'initialiser la matrice de mélange en utilisant des moindres carrés (dans le même principe que ce qui a été fait dans la méthode 1 proposée dans le chapitre 3 de la partie astrophysique). Dans notre travail ici nous nous sommes contentés d'une initialisation aléatoire des coefficients. De même dans le cas de l'initialisation utilisant des coefficients connus à 20% près, il serait intéressant de tester l'utilisation des moindres carrés pour estimer une initialisation des spectres au lieu d'une initialisation avec des constantes.
- Dans le cas où le résultat final est une moyenne des résultats obtenus sur différentes initialisation, il pourrait être plus judicieux de remplacer la moyenne par la médiane. Cela permettrait de moins subir l'influence des éventuels résultats aberrants.
- Les tests faits sur des images réelles très bruitées nous suggèrent l'intérêt d'étudier l'impact du bruit sur nos méthodes, en bruitant par exemple nos images simulées, avec différents niveaux de bruit.
- Bien entendu, on ne pourrait oublier la nécessité de faire une validation des méthodes sur de vraies images, ayant une vérité terrain. Dans ce but, une campagne aéroportée prévue par l'ONERA (sur Toulouse et Amiens) pourrait être utilisée.
- Dans le cadre de la mission Hypxim, il serait intéressant de mieux évaluer l'apport des méthodes dans le cas de présence de données panchromatiques fournissant une estimation des abondances. Quelques résultats ont été présentés dans ce travail, mais une étude plus approfondie est nécessaire, pour voir la meilleure manière d'exploiter à l'initialisation cette information.

Partie 2 : Astrophysique



Introduction

Ce volet du travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet européen MUSE (Multi Unit Spectroscopic Explorer). MUSE⁶ est un spectro-imageur, ou plus précisément un spectrographe intégral de champ de nouvelle génération, opérant dans le domaine visible du spectre [465 nm, 930 nm]. Il sera intégré au VLT (Very Large Telescope) au Chili fin 2013.

MUSE permettra donc de fournir des images astrophysiques hyperspectrales d'environ 3500 bandes spectrales. Ces images nécessiteront différents traitements avant d'être exploitées, tels que le débruitage et la déconvolution, mais aussi la séparation de sources. Le développement de telles méthodes a été prévu dans le cadre du projet DAHLIA⁷.

DAHLIA est un projet qui a été proposé avec la perspective de l'arrivée en 2013 de MUSE au VLT, dans le but de fournir des outils de traitement adaptés pour l'exploitation des données MUSE et l'imagerie hyperspectrale en général (combinaison/fusion de cubes, déconvolution, segmentation non-supervisée de sources noyées dans le bruit, séparation aveugle de sources ...). Il associe plusieurs équipes de traitement de signal et d'images qui travaillent en collaboration avec des astrophysiciens. Le travail de séparation de sources effectué ici pour MUSE rentre dans le cadre de DAHLIA.

Nous nous intéressons dans notre travail à la séparation de sources pour des images de champs denses d'étoiles. La figure 35 représente un exemple d'image (à une longueur d'onde donnée) que fournira MUSE. Comme on peut le voir, les étoiles ne sont pas ponctuelles mais étalées. Ceci est dû à la PSF (Point Spread Function) induite par l'instrument et les effets de l'atmosphère. A cause de cette PSF, certaines étoiles peuvent en cacher d'autres et certaines taches résultent de la superposition de plusieurs étoiles.

Chaque étoile étant caractérisée par un spectre, le but est donc de pouvoir séparer ces mélanges de spectres pour identifier les différentes étoiles présentes, même invisibles à l'œil nu. Notre travail a donc pour but de développer des méthodes de séparation de sources, adaptées aux données, qui permettront cela.

L'instrument MUSE n'étant pas encore disponible, les images sur lesquelles nous travaillerons dans le cadre de ce travail sont des images simulées fournies par des collègues astrophysiciens travaillant aussi dans le cadre de MUSE⁸. Ces images sont supposées réalistes et tenant

6. Plus d'informations disponibles sur le site muse.univ-lyon1.fr

7. DAHLIA (Dedicated Algorithms for HyperspectraL Imaging in Astronomy) est un projet financé par l'ANR. Pour plus de détails voir dahlia.oca.eu/foswiki

8. Simulations supervisées par R. Bacon, astrophysicien, au Centre de Recherche Astrophysique de Lyon.

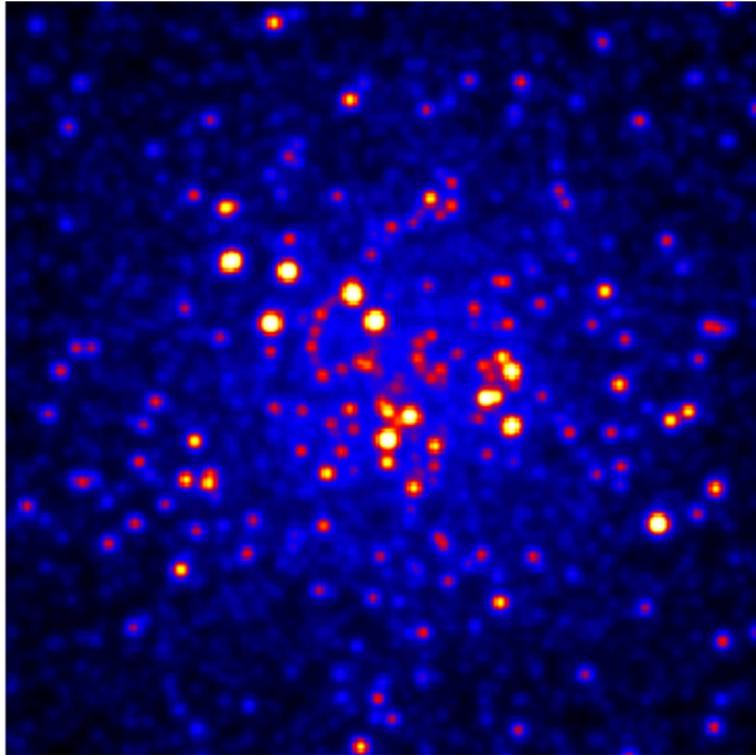


FIGURE 35 – Exemple d’image MUSE d’un champ dense d’étoiles, à une longueur d’onde

compte de toute la chaîne de formation des images MUSE.

La présentation de ce travail sera organisée de la manière suivante. Le premier chapitre sera consacré à un petit état de l’art sur l’utilisation des méthodes de SAS en astrophysique. Le deuxième chapitre décrira le modèle de mélange représentant les données auxquelles on s’intéresse, ainsi que les données qui seront utilisées. Nous présenterons ensuite les méthodes de SAS explorées. Le chapitre 3 décrira la première approche et les résultats correspondants. Le chapitre 4 concerne la deuxième approche proposée et ses résultats. Nous finirons par la conclusion et les perspectives de cette partie du travail de thèse.

Chapitre 1

Méthodes de SAS en astrophysique

Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter un rapide état de l'art indicatif sur l'utilisation des méthodes de SAS dans le traitement de données astrophysiques. Le premier constat est que l'utilisation de la SAS reste moins répandue en astrophysique que pour l'observation de la Terre. Le deuxième est que l'on retrouve essentiellement l'utilisation de méthodes basées sur l'ICA. Le modèle de mélange considéré est un modèle linéaire, instantané dans la plupart des cas, et convolutif dans certains. On s'intéressera ici uniquement aux travaux utilisant un modèle linéaire instantané, qui est celui qui nous intéressera dans notre travail. La plupart des méthodes exploitent l'hypothèse d'indépendance ou non corrélation des sources, hypothèse qui, comme on le verra au chapitre suivant, n'est pas du tout valide sur nos données. Rappelons que la majorité des classes de méthodes qui seront présentées ici ont été définies dans le chapitre "Etat de l'art en SAS".

La première section présentera des exemples de travaux utilisant l'ICA. La deuxième section concernera les approches bayésiennes. La troisième section regroupera les autres types de méthodes.

1.1 Méthodes ICA

La SAS a surtout eu un grand intérêt en cosmologie, et plus précisément pour séparer, à partir de cartes du ciel, le Fond Diffus Cosmologique (dit souvent CMB pour "Cosmic Microwave Background" en anglais) des composantes du premier plan (foreground en anglais) ou autres sources perturbatrices sur les images, le but étant d'isoler le CMB pour en extraire des informations. L'observation est alors modélisée par une combinaison linéaire des différentes composantes.

Dans ce cadre on peut commencer par citer des travaux utilisant des méthodes ICA de la littérature. Ainsi, [132] propose d'appliquer une méthode ICA basée sur la non gaussianité des sources, utilisant un réseau de neurones. [133] et [134] utilisent l'algorithme FastICA [13].

Parmi les méthodes développées spécifiquement pour cette application (le CMB) il y a SMICA (Spectral Matching Independent Component Analysis) [135], [136] qui est une méthode basée sur l'ICA. La méthode est capable d'extraire des sources gaussiennes en présence de bruit. Elle est basée sur la diversité spectrale des sources et opère dans le domaine de Fourier. Dans [137], la méthode est étendue au domaine des ondelettes, c.à.d. qu'une transformée en ondelettes est appliquée aux données avant le traitement et la méthode utilise les coefficients d'ondelettes au lieu des coefficients de Fourier. [138] présente une extension de SMICA à l'estimation de la polarisation du Fond Diffus Cosmologique.

Des méthodes ICA ont aussi été appliquées ou développées pour faire de la SAS sur des données de Mars. Dans [139], par exemple, la méthode JADE [19] a été appliquée pour extraire, à partir d'une image hyperspectrale de Mars (sonde Mars Express), les matériaux présents (glaces de H_2O et CO_2). Dans [140] il est néanmoins montré que l'ICA ne donne pas de résultats très concluants sur ces données (les sources ne sont pas complètement décorrélatées) et les auteurs proposent plutôt une méthode bayésienne exploitant la positivité des données, qui est présentée dans [32]. Plus tard, dans [141], il est proposé de faire de la SAS sur ces mêmes données de Mars en combinant l'ICA et la méthode bayésienne de [32].

On retrouve aussi l'utilisation de méthodes de SAS sur d'autres types d'images astrophysiques telles que les images de galaxies, dans le but de séparer les différentes composantes de ces images. Citons dans ce cadre [142] où il est proposé d'appliquer des méthodes ICA (SOBI [20] et FastICA [13]). La SAS y est présentée comme une voie intéressante pour l'étude de ces données.

L'ICA est aussi utilisée dans [143] pour séparer des artefacts (distributions stellaires, fluctuations atmosphériques, etc.) d'images astrophysiques. D'après l'article, l'ICA est bien adaptée car ces artefacts sont théoriquement indépendants les uns des autres et des sources d'intérêt elles-mêmes.

1.2 Méthodes bayésiennes

La deuxième classe de méthodes qui semble la plus utilisée sur des données astrophysiques correspond aux méthodes bayésiennes, dont un exemple a déjà été cité ci-dessus pour le traitement d'images de Mars.

Commençons par l'application de la SAS pour le traitement du Fond Diffus Cosmologique (CMB). On peut citer [144] qui propose une méthode bayésienne utilisant l'algorithme EM (Expectation-Maximization). La méthode est semi-aveugle car elle utilise comme information a priori la connaissance des densités spectrales des sources.

Dans le même principe (utilisation d'information a priori), [145] présente une extension de la méthode MEM (Maximum-Entropy Method).

Plus récemment, [146] montre l'avantage d'utiliser des méthodes bayésiennes (quelques-unes sont présentées dans l'article) sur ces données de CMB car elles permettent d'exploiter les

informations a priori sur ces données.

Même si l'ICA n'est pas utilisée dans ces derniers travaux cités, ceux-ci exploitent l'indépendance entre les sources car elle semble être vérifiée par les données concernées.

1.3 Autres types de méthodes

D'autres types de méthodes de SAS ont été utilisées comme par exemple la NMF que l'on retrouve dans [147], utilisée pour extraire des spectres à partir d'images astrophysiques hyperspectrales. L'algorithme utilisé est celui de Lee et Seung [36].

Il y a aussi la méthode ILC (Internal Linear Combination) qui a été beaucoup utilisée pour extraire les données de Fond Diffus Cosmologique (et qui n'est pas une des méthodes de SAS de la littérature). Cette méthode n'est pas aveugle à l'origine mais on peut citer [148] qui en présente une version généralisée et plus "aveugle" permettant d'extraire plusieurs sources même si celles-ci sont corrélées. La méthode est basée sur des combinaisons utilisant la matrice de covariance des observations et des décompositions en valeurs propres. Elle est fortement liée au cas particulier de cette application.

Dans [149] une méthode de SAS pour des sources mutuellement corrélées est présentée et appliquée à l'étude du Fond Diffus Cosmologique. La méthode est basée sur des statistiques du 2nd ordre et exploite une information a priori sur la structure de la matrice de mélange et plus précisément sur la paramétrisation de la matrice de mélange.

Il est aussi possible de se référer à [150] où plusieurs méthodes utilisées pour la SAS appliquée au Fond Diffus Cosmologique sont présentées (dont certaines ont été présentées ci-dessus). Des exemples de travaux peuvent aussi être trouvés dans [151].

Conclusion

Le but de ce chapitre était de donner un aperçu des méthodes de SAS utilisées en astrophysique. Il est possible de consulter les références dans les différents travaux cités pour plus d'exemples. Globalement, le recours aux méthodes de SAS reste assez réduit comparé à d'autres domaines tels que l'observation de la terre. On retrouve essentiellement des méthodes basées sur l'ICA qui nécessitent l'indépendance statistique des sources. Viennent ensuite les méthodes bayésiennes, qui permettent d'exploiter l'information a priori que l'on peut avoir sur les données, mais ces méthodes utilisent aussi souvent l'indépendance entre les sources. Cette hypothèse n'est pas valable pour les données auxquelles nous nous intéressons.

Pour ce qui est des problématiques, nous n'avons pas vu d'application de la SAS à la séparation de spectres d'étoiles, comme c'est l'objet de notre travail.

Dans le chapitre suivant nous présenterons les données qui nous concernent et le modèle de mélange. Nous verrons alors l'orientation méthodologique choisie dans notre cas.

Chapitre 2

Présentation des données et modèle de mélange

Introduction

Les données MUSE ne sont pas simples à modéliser. La PSF (Point Spread Function)¹ de MUSE varie aussi bien spatialement que spectralement, et ne satisfait pas les conditions habituelles d'invariance par translation. Une étude des propriétés de la PSF, fournie par des collègues travaillant aussi sur le projet MUSE et DAHLIA [152], nous a permis de modéliser les mélanges dans les données qui nous intéressent. Dans ce chapitre, nous montrons comment on aboutit à ce modèle. Nous décrivons ensuite les données qui seront utilisées dans le cadre de ce travail.

La première section décrit la chaîne de formation des données MUSE. La deuxième section présente les principales hypothèses utilisées dans notre travail. Nous détaillons ensuite, dans la section 3, l'obtention du modèle de mélange qui décrit les données. Dans la section 4 nous présentons les données à notre disposition. Et finalement, dans la section 5, nous expliquons les contraintes liées aux données et le choix qui s'en suit sur les approches de SAS choisies.

2.1 Mécanisme de formation des données

Nous expliquons ici rapidement la chaîne de formation des données MUSE pour mieux comprendre l'origine de la PSF. La figure 2.1 montre les différentes étapes qui aboutissent aux cubes à partir des données observées. L'information arrive d'abord au télescope, après avoir subi les effets de l'atmosphère. Une optique adaptative sert à corriger partiellement ces effets atmosphériques. Le signal est ensuite transmis à l'instrument MUSE qui fournit des images sur 24 capteurs CCD. C'est ensuite le DRS (Data Reduction Software) qui permet de

1. La PSF est le cube résultant de l'observation par l'instrument d'un objet ponctuel aussi bien spatialement que spectralement.

reconstruire le cube à partir des 24 images fournies par l'instrument (réduction des données et interpolation). Le DRS fait aussi la soustraction du ciel et fournit, en plus du cube de données (avec ciel soustrait), un cube d'une estimation de la variance du bruit en chaque pixel (cube correspondant à une réalisation du bruit).

Le bruit de MUSE est poissonnien, car c'est un bruit d'acquisition lié au comptage des photons par le capteur, et peut être approximé par un bruit gaussien (étant donné le grand nombre de photons). Après soustraction du ciel, ce bruit est modélisé par un bruit gaussien de moyenne nulle et sa variance correspond aux données avant la soustraction du ciel. Il est donc important de noter que la puissance du bruit est "proportionnelle" au signal en tout point du cube. D'ailleurs l'estimation que fournit le DRS de la variance du bruit correspond en fait au cube de données bruitées avant soustraction du ciel (c'est une réalisation du bruit).

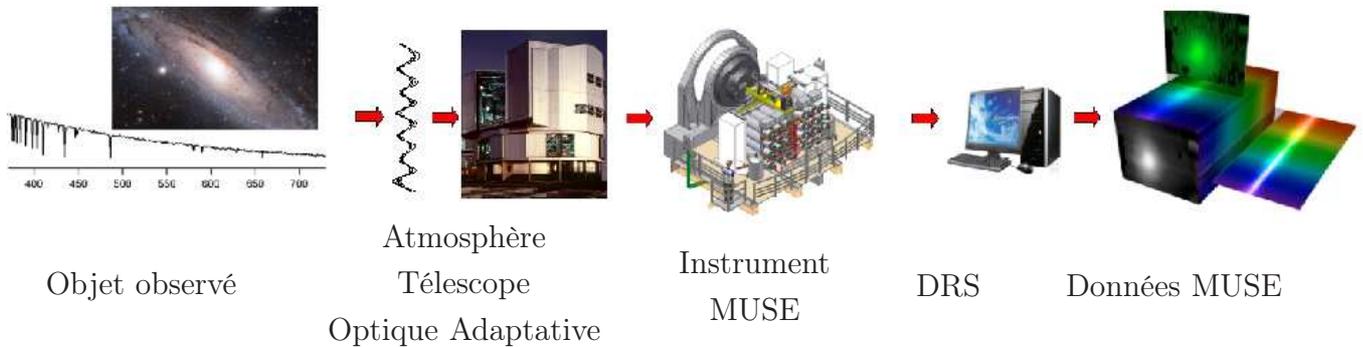


FIGURE 2.1 – Formation des cubes de données MUSE à partir de l'objet observé

La PSF que l'on retrouve sur les données est finalement due aux effets résiduels (après correction par l'optique adaptative) de l'atmosphère, du télescope puis de l'instrument MUSE. Ses caractéristiques dépendent donc de celles de ces différentes composantes et ont été étudiées dans [152]. Sa caractéristique la plus importante est qu'elle varie aussi bien spatialement que spectralement, et ne satisfait pas les conditions habituelles d'invariance par translation. Ce n'est pas une simple convolution des données.

2.2 Hypothèses sur la PSF et les données

Comme dit dans la section précédente, la PSF dépend de la longueur d'onde et de la position spatiale. Pour un objet donné ponctuel situé en (z, μ) , on note donc $h_{z, \mu}^{PSF}(p, \lambda)$ la valeur en (p, λ) de la PSF qui lui est appliquée (p et z étant des coordonnées spatiales 2D dans l'image et μ et λ des coordonnées spectrales).

L'obtention de notre modèle est basée sur certaines hypothèses sur la PSF. Ces hypothèses ont été justifiées dans [152]. Nous présentons donc ici les hypothèses dont nous avons besoin :

- **H1** : La PSF est séparable en la PSF spatiale, c.à.d. la FSF (Field Spread Function),

multipliée par la PSF spectrale, c.à.d. la LSF (Line Spread Function) :

$$h_{z,\mu}^{PSF}(p, \lambda) = h_{z,\mu}^{FSF}(p) h_{z,\mu}^{LSF}(\lambda) \quad (2.1)$$

- **H2** : La LSF a un support spectral réduit.
- **H3** : La FSF varie lentement spectralement, elle peut être considérée localement constante (sur quelques dizaines de pixels spectraux).

Ces hypothèses relatives à la PSF de MUSE sont assez réalistes et basées sur une étude des données (sauf peut-être la première, mais elle est néanmoins largement utilisée au sein du projet MUSE pour raison de simplicité).

Nous utiliserons dans notre travail les hypothèses supplémentaires suivantes (la première pouvant être considérée comme une information a priori) :

- ↔ La position de chaque étoile du champ de MUSE étudié est connue (avec précision sub-pixellaire). Cette information sera fournie grâce aux images acquises par le télescope Hubble². Cela suppose que nous connaissons aussi le nombre d'étoiles présentes. Cette hypothèse a été considérée réaliste par des collègues astrophysiciens travaillant aussi sur MUSE.
- ↔ Nous supposons le spectre du ciel parfaitement soustrait des données à notre disposition (cette soustraction ayant été faite a priori par le DRS).

2.3 Modèle de mélange

Les hypothèses précédentes sur la PSF nous permettent d'écrire le modèle de mélange. On suppose que les étoiles sont des sources ponctuelles spatialement avant l'effet de la PSF. Le spectre d'une étoile i située en z_i (position spatiale 2D), à la longueur d'onde λ , sera noté $e_i(\lambda)$. Et $w_i(p, \lambda) = e_i(\lambda)\delta(p - z_i)$ sera la contribution de cette étoile au point spatial 2D p (avec δ une impulsion de Dirac). Après la prise en compte de l'effet de la PSF, la contribution d'une étoile en un pixel (spatial et spectral) d'un cube de MUSE s'écrit alors comme suit

$$\begin{aligned} y_{z_i}(p, \lambda) &= \iint w_i(z, \mu) h_{z,\mu}^{PSF}(p, \lambda) dz d\mu \\ &= \iint e_i(\mu)\delta(z - z_i) h_{z,\mu}^{PSF}(p, \lambda) dz d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} e_i(\mu) h_{z,\mu}^{PSF}(p, \lambda) d\mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Hubble est un télescope spatial en orbite autour de la terre depuis 1990. Il est couplé à divers spectromètres, ce qui lui permet de couvrir un domaine spectral allant de l'infrarouge au proche ultra-violet.

On suppose que la PSF est séparable en une PSF spatiale, la FSF, et une PSF spectrale, la LSF (hypothèse **H1**). Cela donne

$$y_{z_i}(p, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{FSF}(p) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu. \quad (2.3)$$

On sait que la LSF vérifie l'hypothèse suivante : son support spectral est petit, elle s'étend sur peu de pixels spectraux (hypothèse **H2**). On peut donc la supposer nulle en dehors d'un petit intervalle de largeur $2K$ autour de λ :

$$y_{z_i}(p, \lambda) = \int_{\lambda-K}^{\lambda+K} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{FSF}(p) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu. \quad (2.4)$$

On utilise maintenant la dernière hypothèse (hypothèse **H3**) : la FSF varie lentement spectralement, elle peut donc être considérée constante sur un petit intervalle spectral. On peut supposer que c'est le cas pour l'intervalle $[\lambda-K, \lambda+K]$ pris ici. On aura donc $h_{z_i, \mu}^{FSF}(p) \simeq h_{z_i, \lambda}^{FSF}(p)$ pour $\mu \in [\lambda-K, \lambda+K]$. Ceci nous permet de réécrire notre équation comme suit

$$y_{z_i}(p, \lambda) = h_{z_i, \lambda}^{FSF}(p) \int_{\lambda-K}^{\lambda+K} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu. \quad (2.5)$$

Lorsqu'un pixel contient la somme des contributions de plusieurs sources, par exemple S sources, nous avons donc :

$$y(p, \lambda) = \sum_{i=1}^S y_{z_i}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^S h_{z_i, \lambda}^{FSF}(p) \int_{\mathbb{R}} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu \quad (2.6)$$

Notons ici, qu'intégrer la LSF sur tout le spectre ou juste sur l'intervalle $[\lambda-K, \lambda+K]$, ne change rien au final car la LSF est nulle en dehors de cet intervalle.

Pour la suite on utilisera les notations suivantes :

- $x_{i, \lambda} = \int_{\mathbb{R}} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu$: spectre de l'étoile i "convolué"³ par la LSF, pour la longueur d'onde λ
- $\mathbf{x}_\lambda = [x_{1, \lambda}, \dots, x_{S, \lambda}]^T$: pour les S étoiles (T correspond à la transposée)
- $\mathbf{y}_\lambda = [y(p_1, \lambda), \dots, y(p_N, \lambda)]^T$: image étudiée (champ observé), pour une longueur d'onde λ , vectorisée, avec N le nombre de pixels dans le champ
- $\mathbf{m}_{i, \lambda} = [h_{z_i, \lambda}^{FSF}(p_1), \dots, h_{z_i, \lambda}^{FSF}(p_N)]^T$, la FSF vectorisée pour l'étoile i .

3. Par abus de langage, on appelle l'opération $\int_{\mathbb{R}} e_i(\mu) h_{z_i, \mu}^{LSF}(\lambda) d\mu$ une convolution même s'il ne s'agit pas d'une vraie convolution.

L'équation précédente peut alors s'écrire matriciellement comme suit

$$\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{M}_\lambda \mathbf{x}_\lambda \quad (2.7)$$

où $\mathbf{M}_\lambda = [\mathbf{m}_{1,\lambda} \dots \mathbf{m}_{S,\lambda}]$ contient les FSF vectorisées correspondant aux S étoiles du champ. On a donc $\mathbf{M}_\lambda \in \mathbb{R}^{N \times S}$, $\mathbf{y}_\lambda \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ et $\mathbf{x}_\lambda \in \mathbb{R}^{S \times 1}$.

On cherchera à estimer les spectres des étoiles convolués par les LSF, c.à.d. \mathbf{x}_λ . Ces spectres seront nos "sources". Par abus de langage on désignera souvent dans la suite "les spectres des étoiles convolués par les LSF" par "les spectres des étoiles" ou juste "les spectres". Il s'agit donc, à partir d'une image \mathbf{y}_λ constituée des contributions de différentes sources (même extérieures à l'image), d'estimer les échantillons des sources qui sont dans le vecteur \mathbf{x}_λ , sans ou avec peu de connaissances sur la matrice des FSF \mathbf{M}_λ .

On a ici, pour une longueur d'onde λ donnée, un modèle de mélange linéaire par rapport aux spectres (nos sources). Notons que ce modèle n'est pas invariant spectralement car les FSF dépendent de la longueur d'onde et ne peuvent être supposées invariantes spectralement que localement.

Le modèle présenté dans (2.7) correspond aux données non bruitées. Les données sont en réalité bruitées, avec un bruit additif, qui peut être considéré gaussien de moyenne nulle. Le bruit n'est pas convolué par la FSF car se situe au niveau du capteur, il n'est pas corrélé (spatialement et spectralement et par rapport aux sources) et il est non stationnaire. Le modèle complet des données bruitées peut alors s'écrire :

$$\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{M}_\lambda \mathbf{x}_\lambda + \mathbf{b}_\lambda \quad (2.8)$$

avec $\mathbf{b}_\lambda \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\sigma}_\lambda)$. On connaîtra une estimation de la variance du bruit en tout point du cube (donnée par le DRS).

2.4 Présentation des données

Lors de ce travail de thèse, les tests ont été réalisés sur des données synthétiques réalistes, qui nous ont été fournies dans le cadre du projet MUSE⁴ (rappelons que des données réelles ne sont pas encore disponibles).

Sur la figure 2.2 est représenté le champ sur lequel nos méthodes ont été testées (carré coloré de l'image), de taille 16 x 16 pixels, ainsi que son voisinage. Ce champ correspond à une petite partie du champ entier observé par MUSE. Les valeurs indiquées sur les axes sont en arcsec et correspondent à la distance à partir du centre du champ complet MUSE. Sont indiquées aussi les positions des étoiles (représentées par des points bleus) dans le champ ainsi que dans son voisinage. Chaque pixel correspond à 0.2 x 0.2 arcsec². Comme on le verra dans la suite, les étoiles du voisinage contribuent à l'information à l'intérieur du champ.

Pour ce champ, nous avons à notre disposition les données suivantes :

4. Simulations supervisées par R. Bacon, astrophysicien, au Centre de Recherche Astrophysique de Lyon.

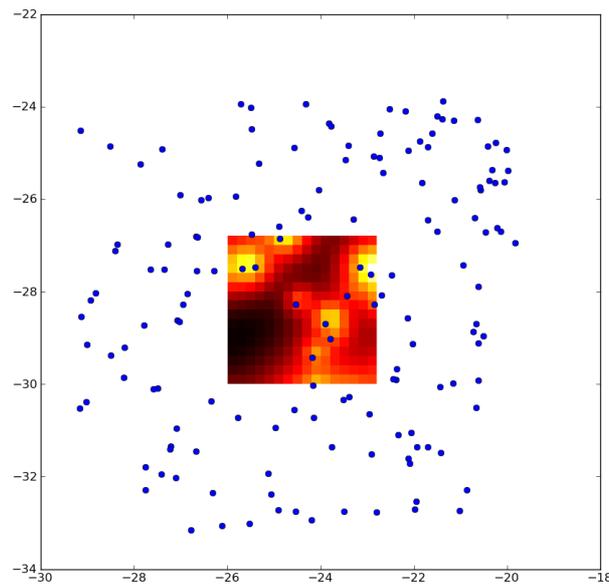


FIGURE 2.2 – Le champ étudié (carré coloré) et son voisinage (les valeurs sur les axes sont en arcsec et correspondent à la distance à partir du centre du champ complet MUSE)

- le cube des données observées, en version bruitée (avec un rapport signal sur bruit de 28 dB) et non bruitée :
 - de taille spatiale 16x16 pixels
 - de 3578 longueurs d'onde, couvrant le domaine spectral allant de 465 à 930 nm, avec un pas de 0.13 nm.
- Pour chacune des étoiles dans le champ et son voisinage, nous avons :
 - le spectre de l'étoile "convolué" par la LSF
 - le cube de l'étoile "convolué" par la PSF
 - ↔ ces deux informations nous permettent de déduire la FSF pour chaque longueur d'onde pour l'étoile en question.
 - la position sub-pixellaire en arcsec de l'étoile
- Le cube de variance de bruit, correspondant au cube bruité.

Ces données complètes nous permettent de tester nos méthodes et de vérifier les résultats puisqu'on connaît la composition exacte du champ.

2.5 Etude des données MUSE et choix méthodologique

Les méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) nécessitent certaines hypothèses sur les sources et les mélanges (exemple : Indépendance ou non corrélation, parcimonie ...). Il est en effet impossible de retrouver des sources inconnues, sans avoir une condition sur celles-ci, permettant de contraindre le système de SAS. Suivant les hypothèses utilisées, cela mène à des

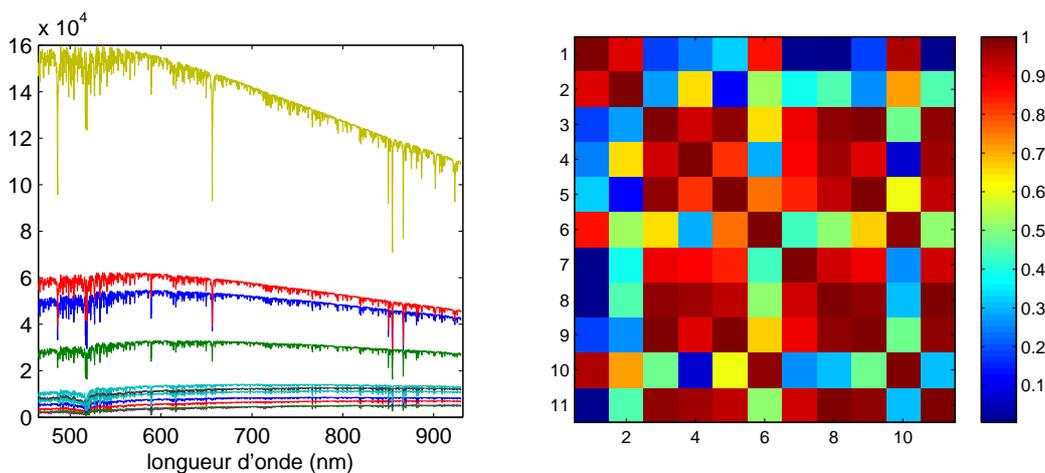
types de méthodes différentes (voir chapitre "Etat de l'art en SAS"). Voyons ce qu'il en est pour les données MUSE.

Nous nous intéressons, dans le cadre du projet MUSE, à la SAS dans les champs denses d'étoiles, plus précisément dans des amas globulaires. Dans ces champs d'étoiles, nous retrouvons des étoiles ayant des âges similaires, leurs spectres représentent donc des caractéristiques très similaires, essentiellement concernant les raies d'absorption. Les spectres des étoiles sont en effet caractérisés par un continuum et par des raies d'absorption.

Tous les spectres dans un amas globulaire possèdent des raies d'absorption localisées aux mêmes longueurs d'onde, même si leur amplitude peut varier. Même si on trouve une certaine variabilité dans le continuum, la plupart des spectres sont donc très corrélés entre eux (voir figure 2.3), essentiellement à cause des raies. Les méthodes de SAS basées sur l'indépendance des sources (méthodes ICA), qui sont les méthodes les plus répandues, sont donc inadaptées pour ces données.

D'un autre côté, les données, telles quelles, ne sont pas parcimonieuses dans le sens "séparation de sources", c.à.d. que l'on n'a pas de parcimonie "conjointe" (voir chapitre "Etat de l'art en SAS") :

- spectralement : même si on enlève le continuum on ne pourra pas trouver des domaines spectraux où l'on a la contribution d'une seule source, étant donné que les raies sont situées aux mêmes longueurs d'ondes.
- spatialement : les étoiles sont très proches spatialement et recouvrantes, quelle que soit l'observation, à cause de l'étalement de la PSF, il est donc difficile d'isoler une étoile sur une observation (qui serait dans ce cas là l'image à une longueur d'onde).



(a) 11 spectres du champ étudié

(b) Matrice de covariance des 11 spectres

FIGURE 2.3 – Spectres des 11 étoiles (convolués par la LSF) du champ, exprimés en nombre de photons (a) et coefficients de corrélation entre ces spectres (b)

Il ne paraît pas évident, vu les données, de trouver une transformée parcimonieuse qui permette d'avoir les conditions de parcimonie requises pour la SAS. L'utilisation de méthodes de SAS basées sur la parcimonie a donc été écartée.

Les données MUSE sont par ailleurs positives (même si après extraction du fond du ciel on peut se retrouver avec quelques valeurs négatives, mais qui ne sont que des valeurs aberrantes liées à l'extraction). Les méthodes de SAS basées sur la non-négativité peuvent donc convenir. On décide donc, dans le cadre de cette thèse, de s'orienter vers des approches qui exploitent la positivité des données.

Conclusion

Avant de s'orienter vers une méthode de séparation de sources il est essentiel d'essayer de connaître le modèle de mélange qui décrit les données et de voir les propriétés de celles-ci. C'était l'objet de ce chapitre, dans lequel on a d'abord présenté notre modèle de mélange, puis discuté des propriétés des données pour expliquer l'orientation méthodologique choisie dans la suite. Nous avons aussi présenté dans ce chapitre les données sur lesquelles seront testées nos méthodes.

Il a été montré que nos données sont régies par un modèle de mélange linéaire par rapport aux sources (spectres des étoiles "convolués" par la LSF), mais que ce modèle n'est pas invariant spectralement. Après analyse des propriétés des données, il a été décidé de s'orienter vers des méthodes de SAS basées sur la positivité des données.

Dans le chapitre suivant nous présentons la première approche et les résultats associés. Dans le chapitre 4 nous proposons une deuxième approche qui donnera des résultats plus satisfaisants que la première.

Chapitre 3

Première approche de séparation de sources

Introduction

Nous avons établi dans le chapitre précédent notre modèle de mélange et expliqué que l'on s'orientait vers des méthodes exploitant la positivité des données. Dans ce chapitre nous présentons la première approche choisie pour la séparation de sources et les résultats qu'elle donne. La méthode choisie est semi aveugle car utilise une information a priori sur la FSF. Elle est basée sur la NMF (Non-negative Matrix Factorization) et des moindres carrés avec des contraintes de non négativité.

Dans la section 1 sera décrite la méthode. La section 2 présentera les critères de performances utilisés. La section 3 montre quelques tests préliminaires dans le cadre d'étude des données à notre disposition. Les résultats de la méthode seront présentés dans les section 4 et 5 avec deux cas de tests différents.

3.1 Présentation de la méthode : LSQ-NMF

3.1.1 Application de la NMF à notre problématique

En choisissant d'exploiter la positivité des données, une des classes de méthodes majeures à laquelle on pense est la NMF [38]. Ce type de méthode est bien adapté pour un modèle de mélange linéaire invariant. Rappelons en effet que la NMF consiste à factoriser une matrice non négative \mathbf{V} en produit de deux matrices non négatives \mathbf{W} et \mathbf{H} tel que $\mathbf{V} \approx \mathbf{WH}$ (voir chapitre "Etat de l'art en SAS").

Voyons maintenant comment appliquer ce type de méthodes à notre problématique. Rappelons l'équation (2.7) qui décrit le modèle de mélange dans le cas sans bruit, pour une longueur

d'onde donnée λ :

$$\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{M}_\lambda \mathbf{x}_\lambda \quad (3.1)$$

Pour pouvoir appliquer une méthode basée sur la NMF à notre problème, il faudrait que la matrice \mathbf{M}_λ soit indépendante de la longueur d'onde, qu'elle soit la même pour différents vecteurs \mathbf{y}_λ et \mathbf{x}_λ .

Ceci est possible si on applique l'hypothèse **H3**, présentée dans le chapitre précédent (section 2.2), et selon laquelle la FSF varie lentement suivant la longueur d'onde. On suppose donc que la FSF est constante par morceaux spectraux. On peut donc considérer que l'on a la même matrice \mathbf{M}_λ pour des longueurs d'onde voisines :

$$\mathbf{M}_\lambda \simeq \mathbf{M}, \quad \text{pour } \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad (3.2)$$

avec $[\lambda_1, \lambda_2]$ assez petit. On notera L le nombre de longueurs d'ondes de l'intervalle. Comme dans le chapitre précédent on a $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times S}$.

On peut alors réécrire notre problème de la manière suivante

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{X} \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} - \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_{\lambda_1} \dots \mathbf{y}_{\lambda_2}] \in \mathbb{R}^{N \times L} \\ - \mathbf{X} &= [\mathbf{x}_{\lambda_1} \dots \mathbf{x}_{\lambda_2}] \in \mathbb{R}^{S \times L} \end{aligned}$$

Nous avons donc un modèle linéaire invariant par morceaux spectraux. Nous pouvons à présent appliquer la NMF à nos données en le faisant sur des intervalles successifs jusqu'à l'estimation des spectres entiers. La longueur des intervalles a été fixée après vérification sur les données ($L = 100$ longueurs d'ondes dans nos données, ce qui donne 36 intervalles).

Pour des raisons de simplicité, notre choix s'est porté sur l'algorithme multiplicatif de Lee et Seung [36] avec la norme de Frobenius.

3.1.2 Initialisation : moindres carrés (LSQ) avec FSF partiellement connue

Information a priori sur la FSF

Comme on l'a vu précédemment (dans le chapitre "Etat de l'art en SAS" et dans la partie 1 de la thèse), les méthodes NMF ne garantissent généralement pas une solution unique et dépendent fortement de l'initialisation de l'algorithme [38]. Pour contraindre la solution au problème, on s'oriente donc vers une méthode "semi aveugle", en exploitant de l'information a priori sur les données.

On suppose que l'on connaît approximativement les coefficients de la FSF pour chaque étoile et en tout point du champ étudié (par exemple à 10 % près). Cette hypothèse est réaliste

car est justifiée d'un côté par l'hypothèse de connaissance des positions des étoiles expliquée dans le chapitre précédent (section 2.2), et d'un autre côté par le fait que des collègues avaient commencé à travailler sur la modélisation et estimation de la FSF [153]. On connaît donc la matrice \mathbf{M} à un certain pourcentage près, ceci nous servira pour l'initialisation de la NMF :

↔ La matrice initiale \mathbf{M}^0 sera l'approximation qu'on aura de \mathbf{M} .

Application des moindres carrés

A partir de l'approximation de la matrice \mathbf{M} , c.à.d. \mathbf{M}^0 , nous pouvons estimer une approximation de la matrice \mathbf{X} qui servira pour l'initialisation de celle-ci.

L'équation (3.1) correspond à notre modèle pour une longueur d'onde donnée. Connaissant la matrice \mathbf{M}^0 , nous pouvons calculer une estimation de \mathbf{x}_λ . La méthode la plus immédiate est d'utiliser des moindres carrés (que l'on notera souvent dans la suite LSQ pour Least Square). Cela consiste à trouver \mathbf{x}_λ^0 qui minimise le critère suivant :

$$\min_{\mathbf{x}_\lambda} \|\mathbf{y}_\lambda - \mathbf{M}^0 \mathbf{x}_\lambda\|_F, \quad \text{avec } \mathbf{x}_\lambda \geq 0 \quad (3.4)$$

On ajoute une contrainte de positivité puisque les données vérifient cette hypothèse et pour éviter de se retrouver avec des solutions négatives qui ne pourraient être utilisées pour l'initialisation de la NMF.

Les matrices qui serviront à initialiser l'algorithme NMF seront donc \mathbf{M}^0 et $\mathbf{X}^0 = [\mathbf{x}_{\lambda_1}^0 \cdots \mathbf{x}_{\lambda_2}^0]$.

3.2 Critères de performances utilisés

Pour étudier les performances de la méthode, nous calculons d'abord l'erreur totale de reconstruction (résidu normalisé), qui permet aussi de vérifier la convergence de la NMF :

$$Err_{tot} = \frac{\|\mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{M}\mathbf{X}}\|_2}{\|\mathbf{Y}\|_2} \quad (3.5)$$

Nous calculons aussi l'erreur sur la FSF et les sources, mais uniquement pour les étoiles à l'intérieur du champ qui sont les seules qui nous intéressent (sachant que \mathbf{X} et \mathbf{M} incluent des étoiles du voisinage, comme il sera expliqué dans la section 3.3.1) :

$$Err_X = \frac{\|\mathbf{X}_{champ} - \widehat{\mathbf{X}}_{champ}\|_2}{\|\mathbf{X}_{champ}\|_2} \quad (3.6)$$

$$Err_M = \frac{\|\mathbf{M}_{champ} - \widehat{\mathbf{M}}_{champ}\|_2}{\|\mathbf{M}_{champ}\|_2} \quad (3.7)$$

Dans ces trois définitions, la notation sans "^" correspond à la vraie matrice, tandis que la notation avec "^" peut représenter la valeur à l'initialisation ou après NMF. Ces trois erreurs seront utilisées aussi bien après l'initialisation, qu'après la NMF. Cela permettra de voir le gain éventuel de la NMF après LSQ.

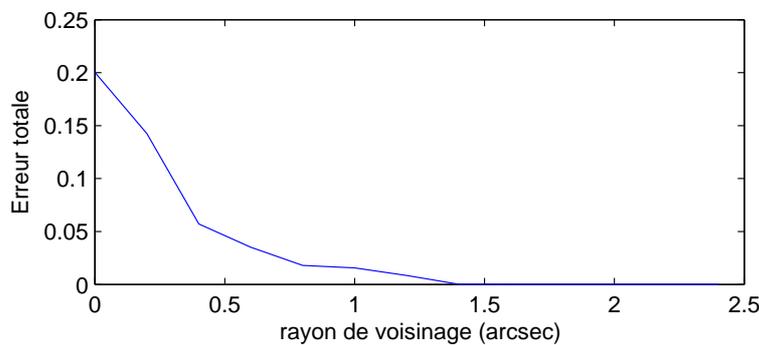
3.3 Tests préliminaires pour étudier les données

Le but de cette section est de mettre en évidence certaines caractéristiques importantes des données, avant de commencer à les traiter. Pour cela, nous supposons ici connaître la FSF et estimons les spectres des étoiles uniquement avec des moindres carrés, avec contraintes de non négativité. Pour chaque longueur d'onde, nous connaissons donc la matrice \mathbf{M}_λ et cherchons \mathbf{x}_λ , jusqu'à estimation du spectre entier des sources. On se place dans cette section dans le cas non bruité.

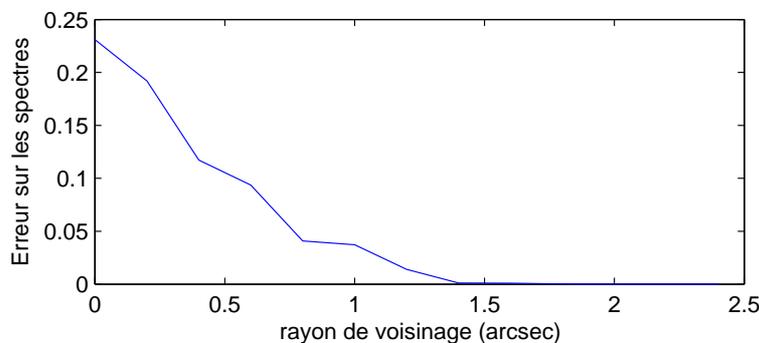
3.3.1 Rôle des étoiles dans le voisinage du champ étudié

A cause de l'étalement spatial de la PSF, et plus précisément de la FSF (la PSF spatiale), les étoiles dans le voisinage du champ étudié peuvent contribuer à l'information contenue dans les pixels du champ. Ne pas tenir compte de ce voisinage peut donc altérer la précision de l'estimation.

Dans la figure 3.1, sont représentées l'erreur de reconstruction des données et l'erreur d'estimation des spectres en fonction du rayon de voisinage (en arcsec) pris en compte lors de l'estimation.



(a) Erreur totale (résidu)



(b) Erreur sur les sources dans le champ

FIGURE 3.1 – Err_{tot} et Err_X en fonction du rayon de voisinage (arcsec) pris en compte - estimation des spectres avec LSQ en connaissant la FSF

rayon vois.(arcsec)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
nombre d'étoiles	11	14	22	27	36	42	50	59	66	76	85	95	110

TABLEAU 3.1 – Nombre d'étoiles estimées en fonction du rayon de voisinage pris en compte

Ce qu'on appelle rayon de voisinage c'est une distance ajoutée, de chaque côté du champ, qui agrandit donc le champ au sein duquel on prend en compte les étoiles. Par exemple prendre un rayon de 1 arcsec (rappelons qu'un pixel correspond à 0.2 arcsec), cela veut dire que l'on se retrouve, au lieu du carré initial qui délimite le champ, avec un carré dont les côtés font 2 arcsec de plus (1 arcsec ajouté de chaque côté). On prend alors en compte, dans notre calcul, les étoiles dans le voisinage qui sont à l'intérieur de ce nouveau carré. Cela veut dire, concrètement, que dans notre modèle (équation (3.1)), les contributions de toutes les étoiles contenues dans ce nouveau champ seront contenues dans la matrice \mathbf{M}_λ et le vecteur \mathbf{x}_λ .

Néanmoins, seule l'estimation des étoiles dans le champ original (sans voisinage) nous intéresse au final, et l'ajout des autres contributions a pour but d'améliorer l'estimation de celles-ci. Ce que l'on voit sur la figure est donc l'erreur d'estimation des étoiles localisées dans le champ uniquement (comme expliqué dans la section 3.2).

On peut voir sur la figure que plus on prend en compte d'étoiles du voisinage, meilleure est la précision d'estimation des étoiles dans le champ. Si l'on ne prend en compte aucune étoile du voisinage, notre modèle ne représente pas le contenu des pixels et donc l'estimation ne peut être bonne. A partir d'un rayon de 1.4 arcsec à peu près, l'amélioration devient négligeable.

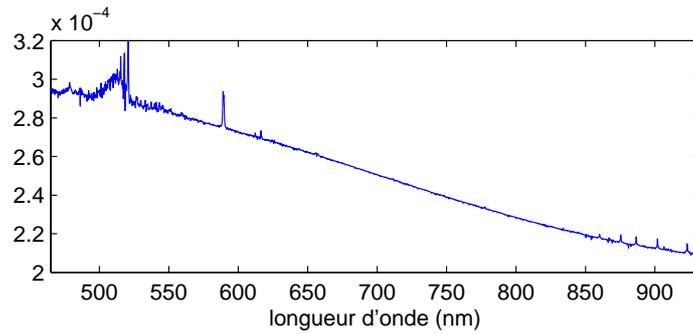
Dans le tableau 3.1 est donné, par indication, le nombre d'étoiles que l'on a pour les différents rayons de voisinage pris en compte.

Pour la suite de ce chapitre, mais aussi dans le suivant, on se fixe donc un rayon de voisinage de 1.4 arcsec. On peut voir sur le tableau que cela revient à estimer les spectres de 59 étoiles.

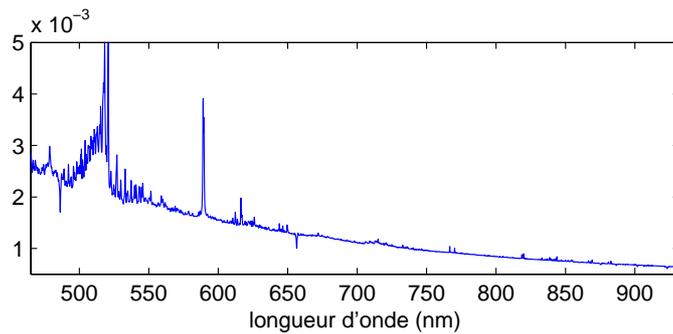
3.3.2 Etude en fonction de la longueur d'onde

Une autre étude intéressante consiste à voir l'évolution de la précision d'estimation en fonction de la longueur d'onde. La figure 3.2 montre l'erreur de reconstruction totale (résidu) et l'erreur d'estimation des sources en fonction de la longueur d'onde.

Les valeurs peuvent paraître faibles, mais c'est normal puisqu'on est ici dans un cas idéal : sans bruit, avec FSF connue, et avec un rayon de voisinage de 1.4 arcsec. Ce qui est important à remarquer ici, plus que les valeurs, c'est l'allure des courbes, c.à.d. comment évoluent les performances en fonction de la longueur d'onde. On constate en effet que l'estimation est meilleure dans le domaine spectral du rouge (grandes longueurs d'onde) que dans celui du bleu (petites longueurs d'onde). Ceci peut s'expliquer par le fait que le FSF a un support spatial plus large dans le bleu alors qu'elle s'étend sur moins de pixels dans le rouge. Sa contribution est donc plus importante dans le bleu. En effet, plus la FSF est étendue spatialement, plus les mélanges sont importants dans les pixels car on retrouve alors sur un seul pixel les contributions



(a) Erreur totale (résidu)



(b) Erreur sur les sources dans le champ

FIGURE 3.2 – Err_{tot} et Err_X en fonction de la longueur d'onde (rayon de voisinage de 1.4 arcsec) - estimation des spectres avec LSQ en connaissant la FSF

des FSF de plusieurs étoiles qui lui sont voisines.

3.4 Cas de test 1 : erreur sur FSF simulée par du bruit

Comme mentionné dans la section 3.1.2, la méthode repose sur une connaissance approximative de la FSF (connaissance avec 10% d'erreur par exemple). N'ayant pas d'autre moyen au début de notre étude pour modéliser cela, nous avons opté pour la solution suivante : utiliser la FSF fournie avec les données en lui ajoutant un bruit relatif pour simuler l'erreur sur la connaissance de cette FSF. L'erreur est donc modélisée par un bruit gaussien additif avec en tout point un écart-type égal à 10% de l'amplitude de la FSF. La FSF à laquelle on ajoute l'erreur est une moyenne, des FSF qui nous sont fournies, sur l'intervalle spectral traité (moyenne sur L FSF).

L'erreur étant modélisée par un bruit aléatoire, nous testons la méthode décrite dans la section 3.1 sur 30 initialisations différentes, pour mieux juger le comportement global de la méthode. Nous traitons ici le cube non bruité, pour voir les performances de la méthode indépendamment du bruit.

La première chose constatée, est que malheureusement le résultat donné par LSQ pour les spectres n'est pas ensuite amélioré par la NMF. L'erreur moyenne d'estimation des spectres est

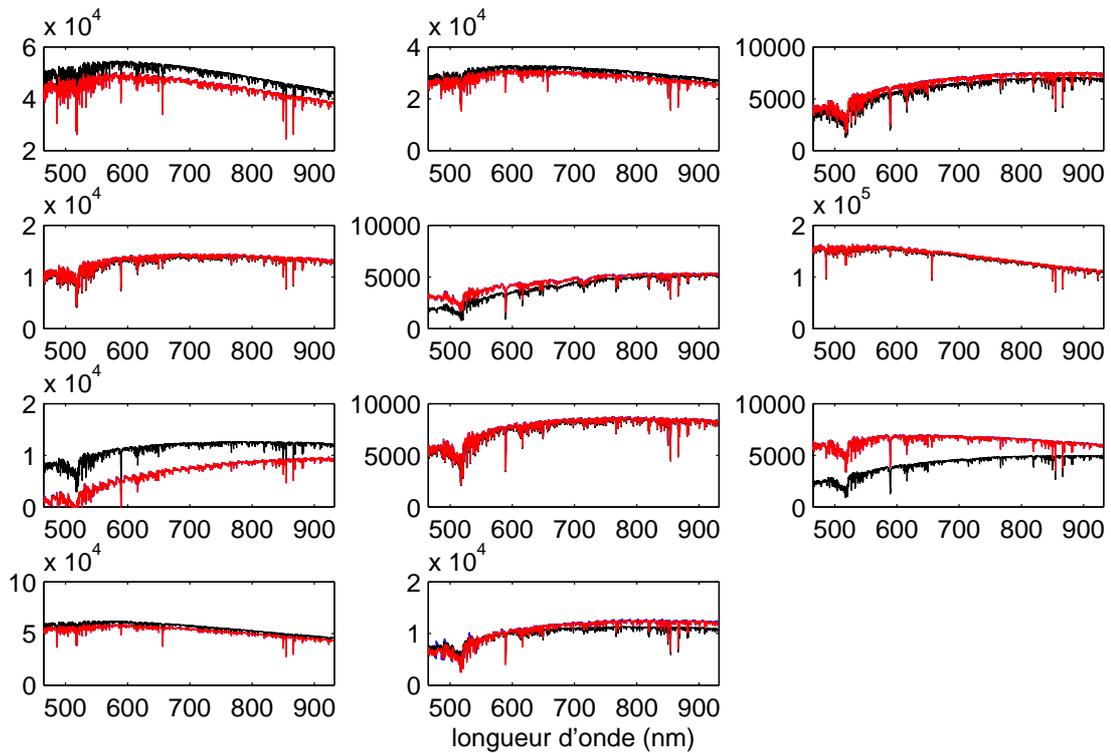


FIGURE 3.3 – Cas 1 - Spectres des étoiles estimés par LSQ (rouge), par NMF (bleu) et les vrais (noir)

de 0.15.

La figure 3.3 montre les vrais spectres des étoiles (en noir) et, pour un cas d'initialisation (parmi les 30), les spectres obtenus par LSQ (en rouge) et les spectres obtenus par NMF (en bleu). Ces derniers (bleus) sont très peu visibles car se superposent à ceux de LSQ. Le cas présenté (parmi les 30) dans la figure correspond à une erreur d'estimation dans la moyenne d'erreur trouvée de 0.15. Ces spectres correspondent aux étoiles à l'intérieur du champ présenté dans le chapitre précédent (figure 2.2)

Intéressons-nous maintenant à l'erreur totale d'estimation (résidu) et à l'erreur sur la FSF. La figure 3.4, montre l'erreur totale et l'erreur sur la FSF, après initialisation par LSQ et après la NMF, pour les 36 intervalles spectraux sur lesquelles a été appliquée la méthode séparément. Les résultats montrés sont une moyenne des performances sur les 30 initialisations testées. On remarque sur la figure 3.4(a) que le résidu est plus faible après la NMF, en comparaison de celui après LSQ. La NMF diminue donc le résidu de reconstruction des données, sans améliorer l'estimation des spectres. Cela s'explique en partie par la figure 3.4(b), sur laquelle on peut voir que, mises à part quelques bandes spectrales dans le bleu, l'erreur sur la FSF diminue après la NMF. Mais pourquoi donc la NMF améliore-t-elle uniquement la FSF et non les spectres? Il est possible que la NMF converge tout simplement vers une autre solution qui minimise le

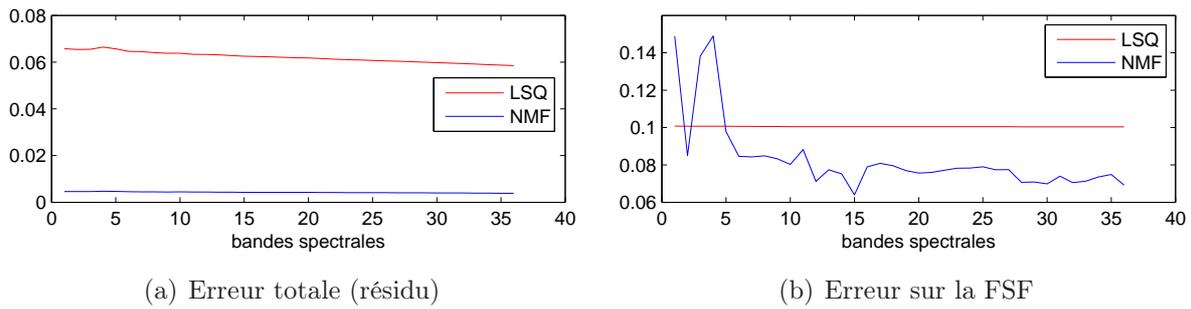


FIGURE 3.4 – Cas 1 - Erreur totale et erreur sur la FSF, à l’initialisation et après la NMF

critère mais qui n’est pas celle que l’on recherche. On sait en effet que la NMF ne donne pas une solution unique (voir chapitre "Etat de l’art en SAS").

La figure 3.5 montre un zoom sur la bande spectrale [543, 556 nm], c.à.d. entre la 600ème et 700ème longueur d’onde du spectre. L’estimation par NMF en bleu est très peu visible car elle est superposée avec l’estimation par LSQ (rouge). Il apparaît que l’estimation par LSQ (en rouge) ou NMF, est quasiment identique à la vraie source (noir), avec un décalage. Malheureusement, ces décalages peuvent être différents d’une bande spectrale à une autre, et on obtient donc un spectre déformé pour certaines étoiles, lorsqu’on recolle les morceaux (voir

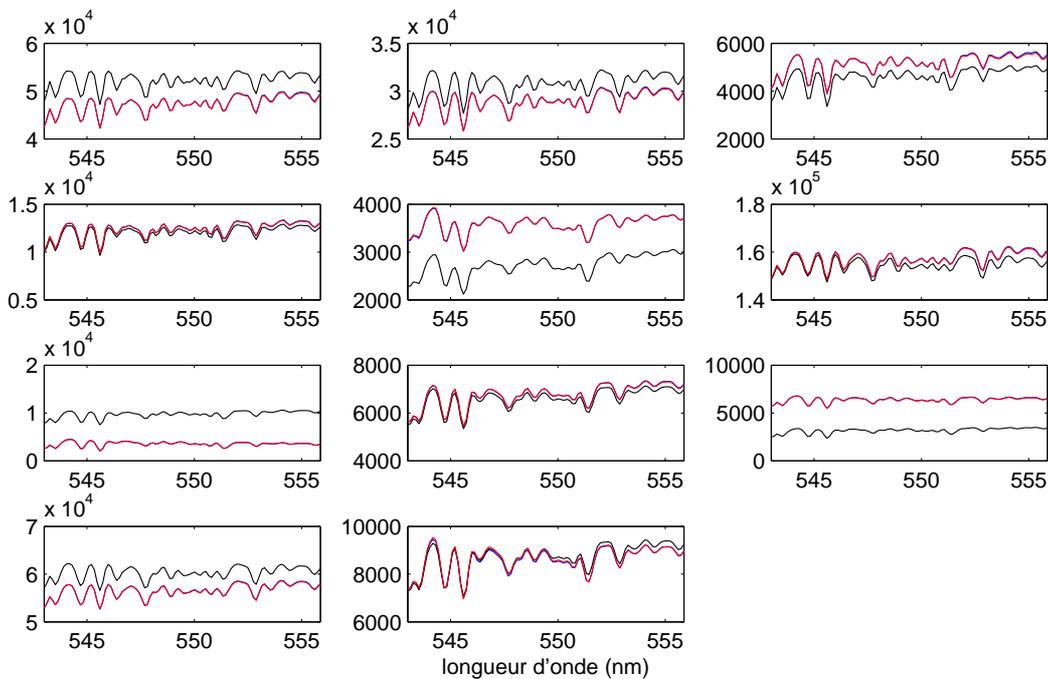


FIGURE 3.5 – Cas 1 - Bande spectrale [543, 556 nm] des spectres des étoiles estimés par LSQ (rouge), par NMF (bleu) et les vrais (noir)

figure 3.3).

3.5 Cas de test 2 : erreur sur FSF plus réaliste

Lorsque nous avons eu plus d'information sur la FSF, notamment sur son modèle analytique (sur lequel avaient travaillé des collègues dans le cadre du projet MUSE), il a été possible de modéliser l'erreur sur la FSF d'une manière plus réaliste et refaire les tests précédents pour voir le comportement de la méthode dans ce cas-là.

3.5.1 Modèle de la FSF

Il a été montré, dans le cadre du projet MUSE, que la FSF peut être modélisée par une fonction de Moffat circulaire [153]. A la position spatiale (x, y) , la FSF correspondant à une étoile localisée en (x_0, y_0) , s'exprime donc avec une fonction Moffat comme ceci :

$$\text{Moffat}_{x_0, y_0}(x, y) = \frac{1}{\Phi} \left(1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha^2} \right)^{-\beta}, \quad \text{avec } \alpha \geq 0, \beta > 1 \quad (3.8)$$

où $\Phi = \frac{\pi\alpha^2}{\beta - 1}$ correspond au flux total, ce qui permet d'avoir une expression normalisée en flux.

Les paramètres α et β :

- peuvent être supposés invariants spatialement localement dans le champ, ce qui est le cas sur notre champ étudié
- varient en fonction de la longueur d'onde, surtout α .

Les positions spatiales peuvent être exprimées en arcsec ou en unité de pixels, cela jouera uniquement sur la valeur de α qui prend la même unité. Nous utiliserons ici l'unité de pixel. (x_0, y_0) peut néanmoins correspondre à une position sub-pixellaire.

3.5.2 Tests et résultats

Nous reprenons ici le même scénario que dans la section précédente, mais en modélisant cette fois-ci l'erreur sur la FSF d'une manière plus réaliste : le modèle de la FSF étant connu, l'erreur possible sur son approximation peut venir des paramètres α et β ou d'une erreur sur la position des étoiles. Nous nous limitons ici à une erreur sur les paramètres. Pour chaque bande spectrale, des valeurs de α et β sont choisies de façon à donner une erreur d'approximation de la FSF de 10% (erreur moyenne de 10%). Nous construisons donc, en appliquant la formule (3.8), notre matrice initiale \mathbf{M}^0 qui est une approximation à 10% près de \mathbf{M} . Nous appliquons ensuite LSQ pour estimer une initialisation de la matrice des spectres \mathbf{X}^0 . Nous testons ici un seul cas d'initialisation (pour un seul couple (α, β) à chaque bande spectrale traitée).

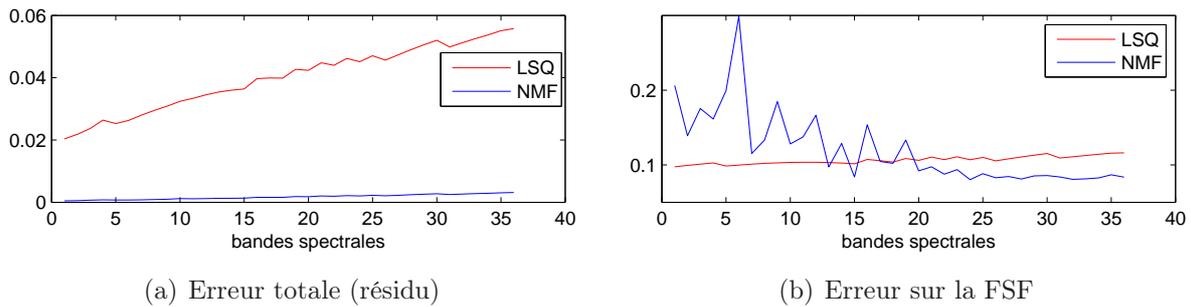


FIGURE 3.6 – Cas 2 - Erreur totale et erreur sur la FSF, à l'initialisation et après la NMF

Comme pour le cas précédent, la NMF converge vers une solution, car le résidu diminue par rapport à l'initialisation (voir figure 3.6(a)), mais tout en gardant l'estimation des spectres de l'initialisation (c.à.d. fournie par LSQ). Les spectres présentent donc le même décalage que précédemment. Ce qui est surprenant, c'est que la NMF dégrade l'estimation de la FSF sur la moitié des longueurs d'ondes (voir figure 3.6(b)). Cela veut dire que la NMF converge vraisemblablement vers une autre solution possible du critère, et on retrouve encore le problème de non unicité de la solution.

Conclusion

La méthode présentée dans ce chapitre était la première approche pour aborder le problème de séparation de sources sur les données MUSE, choisie à un moment où l'on n'avait pas encore le modèle de la FSF. Les résultats ont été assez décevants, car finalement la méthode (NMF après LSQ) n'apporte pas plus d'information sur les données (spectres et FSF) que ce que l'on avait avec l'information a priori (connaissance partielle de la FSF, puis utilisation de LSQ). Sans plus de contrainte, la NMF peut converger vers de mauvaises solutions.

Nous nous sommes orientés, par la suite, vers une autre approche, toujours basée sur la positivité, mais qui exploite à présent ce modèle de la FSF connu (la Moffat). Cette nouvelle méthode fait l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4

Deuxième approche de séparation de sources

Introduction

La méthode précédente n'ayant pas été satisfaisante, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche de SAS pour faire du démélange sur les données MUSE. Cette méthode exploite aussi la positivité des données. Nous utilisons ici la connaissance du modèle de la FSF (présenté à la fin du chapitre précédent, avec la fonction de Moffat) mais pas des valeurs de ses paramètres. On peut donc dire que la séparation se fait plus en "aveugle" que dans le cas de la méthode précédente, où l'on supposait avoir une estimation partielle de la FSF.

Dans la première section, nous présentons la première méthode proposée et les calculs qui lui sont associés. La deuxième section décrit les critères de performances utilisés. La section 3 est consacrée aux premiers résultats de tests sur cette méthode. Une version plus rapide de la méthode est présentée dans la section 4. La section 5 présente les résultats obtenus avec cette dernière version.

4.1 Présentation de la méthode : LSQ-Grd

4.1.1 Principe de la méthode

4.1.1.1 Idée

La méthode présentée dans le chapitre précédent avait pour but d'estimer les spectres et les coefficients de la matrice \mathbf{M} simultanément. Il fallait donc estimer, pour chaque étoile, tous les coefficients relatifs à sa FSF (à chaque pixel du champ). En l'absence de contrainte sur les données (hormis la positivité), cela faisait beaucoup de coefficients à estimer, en plus des spectres. Les résultats étaient donc assez décevants car la NMF, utilisée ainsi sans contraintes supplémentaires, ne convergeait pas vers la solution voulue.

A présent nous connaissons le modèle de la FSF (fonction de Moffat présentée en fin de chapitre précédent (3.8)) et il est donc possible de réduire le nombre de variables à estimer. L'idée est donc de remplacer l'estimation des valeurs de la FSF en chaque pixel et pour chaque étoile, par l'estimation des paramètres dont dépend la FSF et qui sont les mêmes pour tous les pixels et toutes les étoiles : les paramètres (α, β) , la position des étoiles étant supposée connue. Rappelons que ces paramètres (α, β) varient en fonction de la longueur d'onde et peuvent être considérés constants localement spatialement et donc pour une petite partie du champ (ce qui sera le cas ici).

L'idée est donc d'estimer, à chaque longueur d'onde, les valeurs (α, β) et les valeurs des spectres des étoiles.

4.1.1.2 Critère minimisé

Le critère minimisé, pour chaque longueur d'onde, est le suivant dans le cas de données sans bruit (le critère dans le cas bruité est donné plus bas) :

$$J = \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x} \|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

La norme utilisée est la norme de Frobenius (même si ceci n'apparaît pas sur la notation). Pour minimiser ce critère nous proposons un algorithme itératif, applicable à chaque longueur d'onde séparément et dont la description est donnée ci-dessous.

4.1.1.3 Hypothèses

Voici les principales hypothèses ou informations a priori utilisées dans la méthode :

- Les FSF pour chaque étoile sont modélisées par une Moffat qui dépend des paramètres suivants (expression rappelée ci-dessous) :
 - de la position des étoiles \rightarrow connues.
 - des (α, β) \rightarrow à estimer.
- L'intervalle dans lequel varient les paramètres (α, β) est connu approximativement (en fonction de λ), cette information sert uniquement à la première initialisation de l'algorithme.

Rappelons ici l'expression d'un coefficient M_{pk} de la matrice \mathbf{M} en fonction des paramètres (α, β) , c.à.d. en utilisant l'expression de la Moffat donnée dans le chapitre précédent (équation (3.8)) :

$$M_{pk} = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left(1 + \frac{(z_x - z_x(k))^2 + (z_y - z_y(k))^2}{\alpha^2} \right)^{-\beta}, \quad \text{avec } \alpha \geq 0, \beta > 1 \quad (4.2)$$

où $(z_x(k), z_y(k))$ sont les coordonnées spatiales de la source d'indice k , les lignes du champ

étudié sont indexées par z_y et les colonnes par z_x . Notons N_ℓ le nombre de lignes du champ étudié, on a alors¹ :

- $z_x = \text{ceil}(\frac{p}{N_\ell})$, où *ceil* correspond à un arrondi vers la valeur supérieure entière la plus proche.
- $z_y = \text{mod}(p, N_\ell)$, c.à.d. correspond au reste de la division de p par N_ℓ . Les valeurs nulles de z_y sont remplacées ensuite par N_ℓ , pour avoir des valeurs entre 1 et N_ℓ .

Les coordonnées z_x et z_y dépendent donc de l'indice p même si cela ne transparaît pas dans les notations.

Ces définitions sont dues au fait que, dans notre modèle, la FSF de chaque source est vectorisée (correspond à une colonne de la matrice \mathbf{M}), alors que dans l'expression de la Moffat les coordonnées spatiales doivent correspondre aux coordonnées d'origine dans le champ.

4.1.1.4 Algorithme proposé

L'algorithme proposé permettra de mettre à jour les estimations de (α, β) et des spectres des étoiles d'une manière alternée, et pour chaque longueur d'onde indépendamment. Pour cela on utilisera des moindres carrés avec contraintes de positivité (pour l'estimation des spectres) et un algorithme de descente de gradient à pas fixe (pour les paramètres). Ce dernier algorithme a été choisi pour des raisons de simplicité. Notre algorithme global est donc appelé "LSQ-Grd" pour Least Square - Gradient.

Le but final de cet algorithme est bien sûr d'obtenir les spectres des étoiles contenues dans le champ étudié.

Algorithme LSQ-Grd

- Initialisation : (α, β) (+ spectres)
- Calcul de la matrice \mathbf{M} en utilisant la Moffat pour ces valeurs initiales de (α, β)
- Répéter jusqu'à convergence :
 - **Estimer \mathbf{x}** : par moindres carrés avec contraintes de non négativité, avec \mathbf{M} fixée :

$$\mathbf{x} \leftarrow \min_x J, \quad \text{avec } \mathbf{x} \geq 0 \quad (4.3)$$

- **Estimer (α, β)** : par un algorithme de descente de gradient projeté à pas fixe², avec \mathbf{x} fixé :
 - Répéter jusqu'à convergence de l'algorithme de gradient :

$$\alpha \leftarrow \left[\alpha - \varepsilon \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right]_{P^+} \quad (4.4)$$

$$\beta \leftarrow \left[\beta - \varepsilon \frac{\partial J}{\partial \beta} \right]_{P^+} \quad (4.5)$$

où la notation $[z]_{P^+}$ correspond à la projection de z sur l'intervalle P^+ .

1. On raisonne par ligne car ce travail a été fait sur Matlab, qui travaille ligne par ligne quand une matrice est vectorisée, ce qui est le cas des plans de nos données et FSF (qui ont été vectorisés).

2. Le pas du gradient a été fixé à 10^{-9} pour les données non bruitées et 10^{-7} pour les données bruitées.

- Calcul de la matrice \mathbf{M} en utilisant la fonction de Moffat pour ces valeurs de (α, β)

On parle d'une descente de gradient "projeté" car à chaque itération les valeurs de α et β sont projetées sur un certain intervalle, c.à.d. qu'elles sont forcées à rester dans cet intervalle. L'intervalle choisi est $P^+ = [1, 5]$, suite aux valeurs constatées sur nos données et la condition sur β . Il est en accord avec les valeurs constatées sur les données (entre 1 et 2.2) sans pour autant être trop contraignant. En pratique, si à une itération donnée la valeur estimée de α ou β est en dehors de l'intervalle fixé, elle est ramenée à la borne de l'intervalle la plus proche.

Le principe de l'algorithme est le même dans le cas avec ou sans bruit, seul l'expression du critère J change.

4.1.1.5 Initialisation

Comme dit précédemment, la méthode est applicable à chaque longueur d'onde séparément. Néanmoins, en pratique, on l'applique séquentiellement aux différentes longueurs d'ondes de notre cube de données. L'initialisation de l'algorithme et de ses différentes parties est donc gérée comme suit (pour chaque longueur d'onde) :

- Initialisation de l'algorithme global *LSQ-Grd* :
 - L'estimation séquentielle pour les longueurs d'ondes successives permet, à chaque longueur d'onde, d'initialiser l'algorithme avec les valeurs précédentes de (α, β) (celles estimées à la longueur d'onde précédente). Cela a pour avantage d'accélérer la convergence car les valeurs de (α, β) varient lentement spectralement. Pour la première longueur d'onde, on utilise la connaissance a priori de l'intervalle dans lequel varient les valeurs de (α, β) . On initialise avec des valeurs prises aléatoirement dans cet intervalle.
 - L'algorithme ne nécessite pas une initialisation des spectres, étant donné que ceux-ci sont estimés en premier, à partir de l'initialisation des paramètres (α, β) .
- Initialisation aux différentes itérations :
 - pour l'algorithme de gradient, l'initialisation de (α, β) se fait à partir des valeurs estimées à l'itération précédente de l'algorithme global.
 - l'initialisation des valeurs des spectres, aux différentes itérations, n'est pas indispensable, elle est gérée automatiquement par la fonction utilisée pour faire les moindres carrés (fonction 'lsqnonneg' de Matlab). Mais il est possible d'utiliser aussi les valeurs des itérations précédentes pour l'initialisation (comme pour les paramètres).

4.1.2 Calcul du gradient pour l'estimation de (α, β)

Même si λ n'apparaît pas dans les notations (pour plus de lisibilité), il faut garder en tête que la méthode présentée dans ce chapitre se fait longueur d'onde par longueur d'onde, donc tous les calculs présentés ici seront pour une longueur d'onde donnée.

Réécriture de J sous forme scalaire :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - (\mathbf{M}\mathbf{x})_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(y_n - \sum_{j=1}^S M_{nj}x_j \right)^2 \quad (4.6)$$

avec M_{nj} élément (n, j) de la matrice \mathbf{M} , y_n échantillon n du vecteur \mathbf{y} et x_j échantillon j du vecteur \mathbf{x} .

Expression du gradient par rapport à α et β :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \sum_p \sum_k \frac{\partial J}{\partial M_{pk}} \times \frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \sum_p \sum_k \frac{\partial J}{\partial M_{pk}} \times \frac{\partial M_{pk}}{\partial \beta} \quad (4.8)$$

Calcul du gradient par rapport aux coefficients de la matrice \mathbf{M} :

$$\frac{\partial J}{\partial M_{pk}} = (y_p - (\mathbf{M}\mathbf{x})_p) (-x_k) = - [(\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x})\mathbf{x}^T]_{pk} \quad (4.9)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \sum_p \sum_k (y_p - (\mathbf{M}\mathbf{x})_p) (-x_k) \times \frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha} \\ &= - \sum_p (y_p - (\mathbf{M}\mathbf{x})_p) \sum_k \frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha} x_k \\ &= - \sum_p [\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}]_p \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \mathbf{x} \right]_p \\ &= - \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \mathbf{x} \right]^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

On obtient de même pour β :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = - \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta} \mathbf{x} \right]^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Pour le calcul de $\frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial M_{pk}}{\partial \beta}$, on utilise l'expression d'un coefficient M_{pk} en fonction des paramètres (α, β) , donnée dans l'équation (4.2). Pour faciliter le calcul, on pose :

$$Z = (z_x - z_x(k))^2 + (z_y - z_y(k))^2 \quad (4.12)$$

ce terme ne dépend ni de α ni de β .

On a alors pour le calcul de $\frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{pk}}{\partial \alpha} &= \frac{\beta - 1}{\pi} \times \frac{-2}{\alpha^3} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta} + \frac{\beta - 1}{\pi \alpha^2} \times (-\beta) \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta-1} \times \frac{-2}{\alpha^3} \times Z \\
&= \frac{2(\beta - 1)}{\pi \alpha^3} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta-1} \left(\frac{\beta}{\alpha^2} Z - \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)\right) \\
&= \frac{2(\beta - 1)}{\pi \alpha^3} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta-1} \left(\frac{\beta - 1}{\alpha^2} Z - 1\right)
\end{aligned}$$

Le calcul de $\frac{\partial M_{pk}}{\partial \beta}$ donne³ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{pk}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\pi \alpha^2} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta} - \frac{\beta - 1}{\pi \alpha^2} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta} \times \ln \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi \alpha^2} \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)^{-\beta} \times \left(1 - (\beta - 1) \ln \left(1 + \frac{Z}{\alpha^2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.1.3 Cas bruité

Les données MUSE sont en réalité bruitées, donc même si les premiers tests sont faits sur les données non bruitées à notre disposition, l'étape finale est de passer aux données bruitées. Rappelons que le bruit est supposé additif, gaussien, avec une variance qui dépend aussi bien de la position spatiale que de la longueur d'onde (voir chapitre 2).

Dans la méthode, la matrice des variances du bruit est prise en compte à chaque longueur d'onde (ce n'est donc pas la même d'une longueur d'onde à une autre). Le nouveau critère minimisé est le suivant⁴ (voir partie 1, chapitre "Estimation Theory", dans [8]) :

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}\|_{\mathbf{W}}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \tag{4.14}$$

avec $\mathbf{W} = \text{diag}(1/\sigma_1^2, \dots, 1/\sigma_N^2)$.

Cela donne

$$\frac{\partial J}{\partial M_{pk}} = [-\mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x})\mathbf{x}^T]_{pk} \tag{4.15}$$

Ce qui donne les expressions suivantes pour les gradients par rapport à α et β :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = - \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \mathbf{x} \right]^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = - \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta} \mathbf{x} \right]^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}) \tag{4.17}$$

3. calcul utilisant : $\frac{\partial(a^{-x})}{\partial x} = -a^{-x} \ln(a)$.

4. Dans le cas bruité, le critère peut aussi s'écrire : $J = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x}\|^2$, avec $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ et $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}$. $\tilde{\mathbf{y}}$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ sont d'ailleurs les entrées de la fonction 'lsqnonneg' dans le cas bruité.

4.2 Critères de performances utilisés

Pour évaluer les performances de la méthode, nous calculons d'abord l'erreur totale de reconstruction normalisée, pour chaque longueur d'onde :

$$Err_{tot_\lambda} = \frac{\|\mathbf{y}_\lambda - \widehat{\mathbf{M}}_\lambda \widehat{\mathbf{x}}_\lambda\|_2}{\|\mathbf{y}_\lambda\|_2} \quad (4.18)$$

Et l'erreur totale moyenne : $Err_{tot} = mean_\lambda(Err_{tot_\lambda})$.

Nous calculons aussi l'erreur sur la FSF et les sources, mais uniquement pour les étoiles à l'intérieur du champ.

L'erreur sur les spectres sera calculée sur les spectres entiers et l'on notera \mathbf{s}_i le spectre entier de l'étoile i :

$$Err_{s_i} = \frac{\|\mathbf{s}_i - \widehat{\mathbf{s}}_i\|_2}{\|\mathbf{s}_i\|_2} \quad (4.19)$$

Et la moyenne d'erreur sur les spectres : $Err_s = mean_i(Err_{s_i})$.

L'erreur sur la FSF sera calculée par longueur d'onde, sur la partie de la matrice \mathbf{M} qui concerne l'intérieur du champ, c.à.d. pour les FSF des étoiles dans le champ (même si cela ne transparaît pas dans la notation) :

$$Err_{M_\lambda} = \frac{\|\mathbf{M}_\lambda - \widehat{\mathbf{M}}_\lambda\|_2}{\|\mathbf{M}_\lambda\|_2} \quad (4.20)$$

Et on pourra aussi calculer l'erreur totale moyenne : $Err_M = mean_\lambda(Err_{M_\lambda})$.

Dans ces trois définitions, la notation sans "^" correspond à la vraie matrice ou vecteur, tandis que la notation avec "^" correspond à l'estimation par la méthode.

4.3 Premiers tests et résultats

Comme expliqué dans le chapitre précédent (section 3.3.1), il est important de tenir compte des étoiles dans le voisinage pour avoir une bonne estimation des étoiles du champ étudié, car les étoiles du voisinage participent à l'information dans les pixels du champ (effet de la PSF). Dans ce chapitre (comme dans le précédent) le rayon de voisinage pris en compte est 1.4 arcsec.

4.3.1 Cas sans bruit

Nous présentons ici les résultats obtenus avec les données non bruitées, pour mieux évaluer le comportement de la méthode indépendamment du bruit.

La figure 4.1 montre l'erreur d'estimation des spectres pour les 11 étoiles du champ. L'erreur moyenne obtenue sur ces étoiles est de 0.008, c.à.d. inférieure à 1%. Seules les étoiles 3, 7 et 11 sont estimées avec une erreur supérieure à 1% mais leur erreur d'estimation reste faible. L'estimation des spectres est donc très bonne. Ceci peut être vérifié en regardant l'allure des spectres estimés et les vrais spectres sur la figure 4.2.

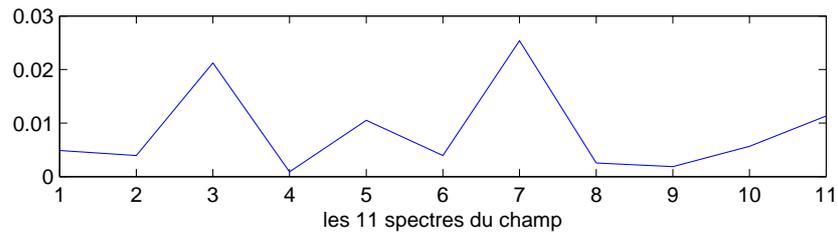


FIGURE 4.1 – Erreur d'estimation des 11 spectres du champ - sans bruit

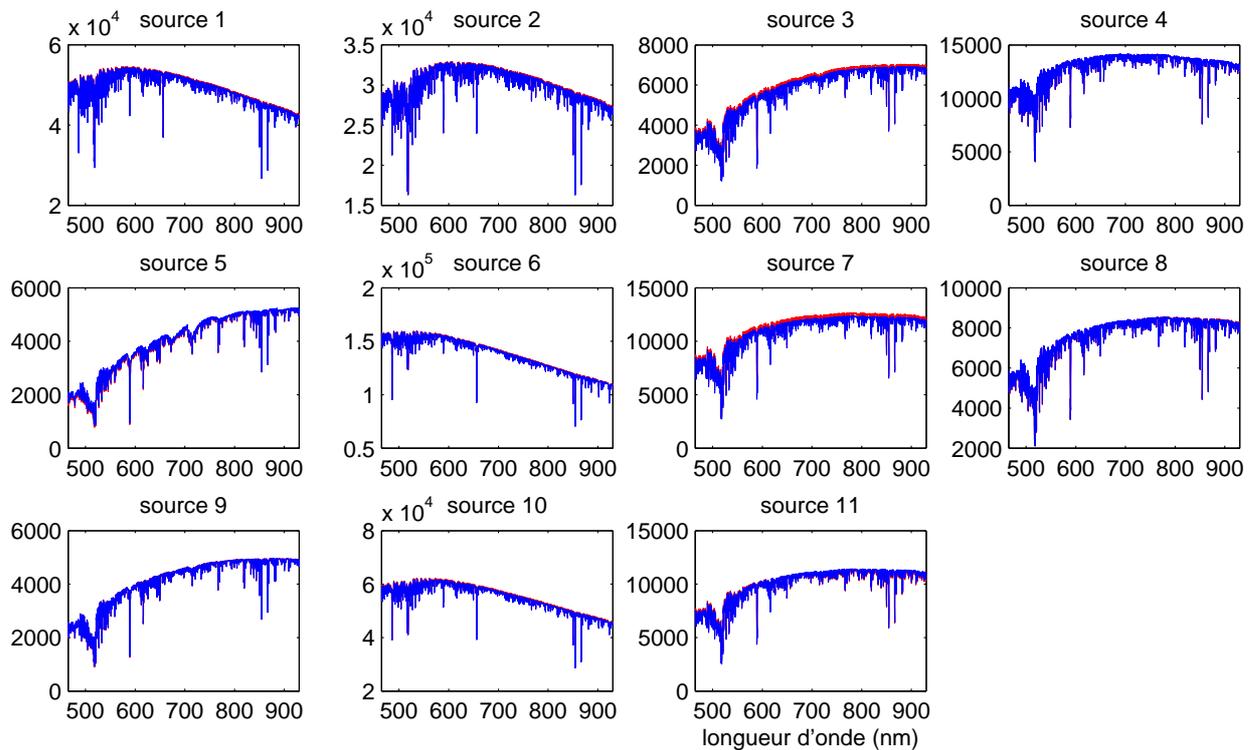


FIGURE 4.2 – Spectres des 11 étoiles du champ, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - sans bruit

Les spectres estimés (en bleu) sont quasiment tous bien superposés aux vrais spectres (en rouge) et les profondeurs des raies sont bien estimées. On retrouve juste un petit décalage pour les étoiles 3 et 7 déjà citées. Ceci peut s'expliquer par le fait que ces étoiles sont situées dans le champ à côté d'étoiles plus lumineuses (respectivement 2 et 6), on retrouve donc sur leur pixels une forte contribution de ces étoiles lumineuses, ce qui peut altérer un peu l'estimation.

Intéressons-nous à présent à l'estimation des paramètres (α, β) et de la FSF. Pour les paramètres (α, β) , nous n'avons pas leurs vraies valeurs avec les données, nous avons uniquement les cubes de FSF pour chaque étoile. Ce qu'on appellera donc les "vrais" paramètres et qui nous serviront de comparaison sont des paramètres obtenus "manuellement" en calculant pour une

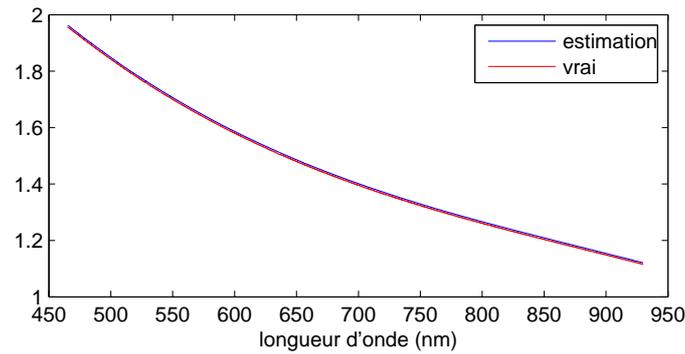
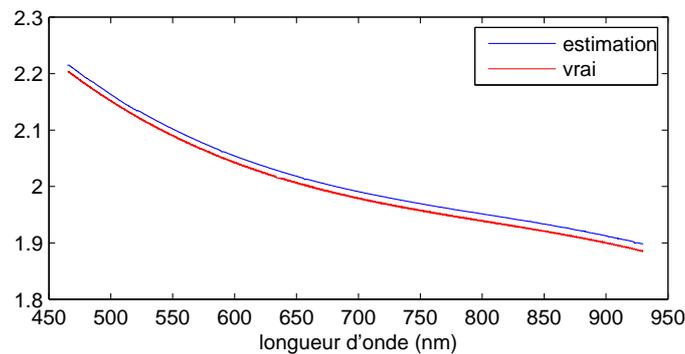
(a) Valeurs de α (b) Valeurs de β

FIGURE 4.3 – Valeurs de (α, β) en fonction de la longueur d'onde, les "vraies" (rouge) et les estimations (bleu) - sans bruit

séries de valeurs de paramètres dans un intervalle (avec un pas assez fin entre les valeurs) l'erreur entre la Moffat et les FSF à notre disposition (pour les étoiles du champ). Les paramètres qui nous ont donné l'erreur la plus faible (et donc la meilleure correspondance entre la Moffat et nos FSF) sont considérés comme étant les "vrais" paramètres.

Sur la figure 4.3 sont représentés les paramètres (α, β) estimés et les "vrais" pour toutes les longueur d'onde du spectre de MUSE. Il y a un petit décalage entre les valeurs estimées et les "vraies" mais l'estimation reste très satisfaisante. Cela est confirmé par l'erreur sur la FSF, c.à.d. l'erreur entre les vrais cubes de FSF et ceux déduits des Moffat obtenues avec ces valeurs de (α, β) . En effet, sur la figure 4.4, on peut voir que la différence entre notre erreur d'estimation des FSF (en bleu) et celle obtenue avec les "vraies" valeurs de (α, β) , n'est que de 0.2%, ce qui est très faible. On obtient par notre méthode une erreur moyenne d'estimation de la FSF de 1.4%.

Pour finir, on peut regarder l'erreur totale d'estimation qui correspond au résidu de reconstruction de nos données. La figure 4.5 montre cette erreur totale en fonction de la longueur d'onde. On peut constater que l'erreur est assez faible (inférieure à 1%), ce qui montre que notre algorithme converge correctement et que nos résultats sont satisfaisants.

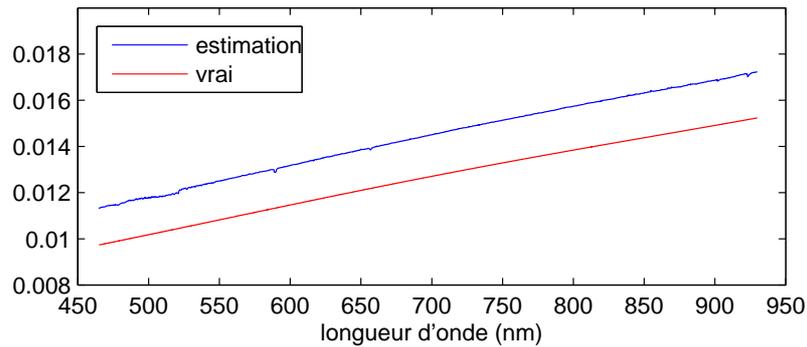


FIGURE 4.4 – Erreur sur les FSF en fonction de la longueur d'onde, pour les valeurs de (α, β) estimées par notre algorithme (bleu) et pour celles obtenues manuellement représentant ce qu'on appelle les "vraies" valeurs (rouge) - sans bruit

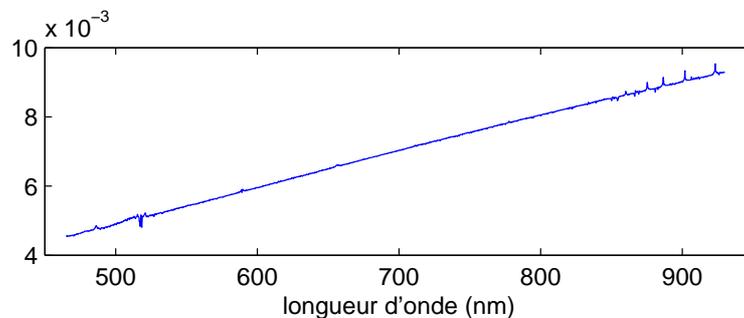


FIGURE 4.5 – Erreur totale en fonction de la longueur d'onde - sans bruit

4.3.2 Cas avec bruit

4.3.2.1 (α, β) connus

Ce premier cas est testé pour nous donner une idée de la meilleure estimation qu'on peut obtenir des spectres dans le cas bruité, c.à.d. dans le cas où l'on "connaît" les coefficients (α, β) et donc les FSF (les valeurs de (α, β) utilisées sont les "vraies" utilisées précédemment et qui ne sont donc pas fournies avec les données). Cela permettra de comparer ce résultat à celui obtenu dans le cas où tout est estimé (spectres et paramètres). L'estimation des spectres est faite ici longueur d'onde par longueur d'onde par moindres carrés avec contrainte de positivité.

Les erreurs obtenues sur les 11 étoiles sont représentées sur la figure 4.6. L'erreur moyenne obtenue sur toutes les étoiles est de 7.3%. Sur la figure 4.7 sont représentés les spectres estimés (en bleu) et les vrais (en rouge). Les données manquantes sur l'intervalle spectral [579,600 nm] sont dues au fait que l'Optique Adaptative (citée au chapitre 2, section 2.1) utilise des étoiles laser sodium. Les données sur cette zone spectrale sont donc très bruitées et inexploitable. Les spectres estimés sont bruités mais ont néanmoins la même allure globale que les vrais spectres, certains sont même assez peu bruités avec les raies plutôt bien estimées. Mais il n'est pas

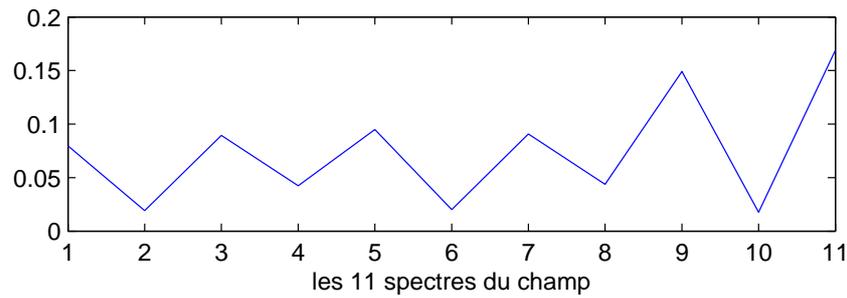


FIGURE 4.6 – Erreur d'estimation des 11 spectres du champ - avec bruit - (α, β) connus

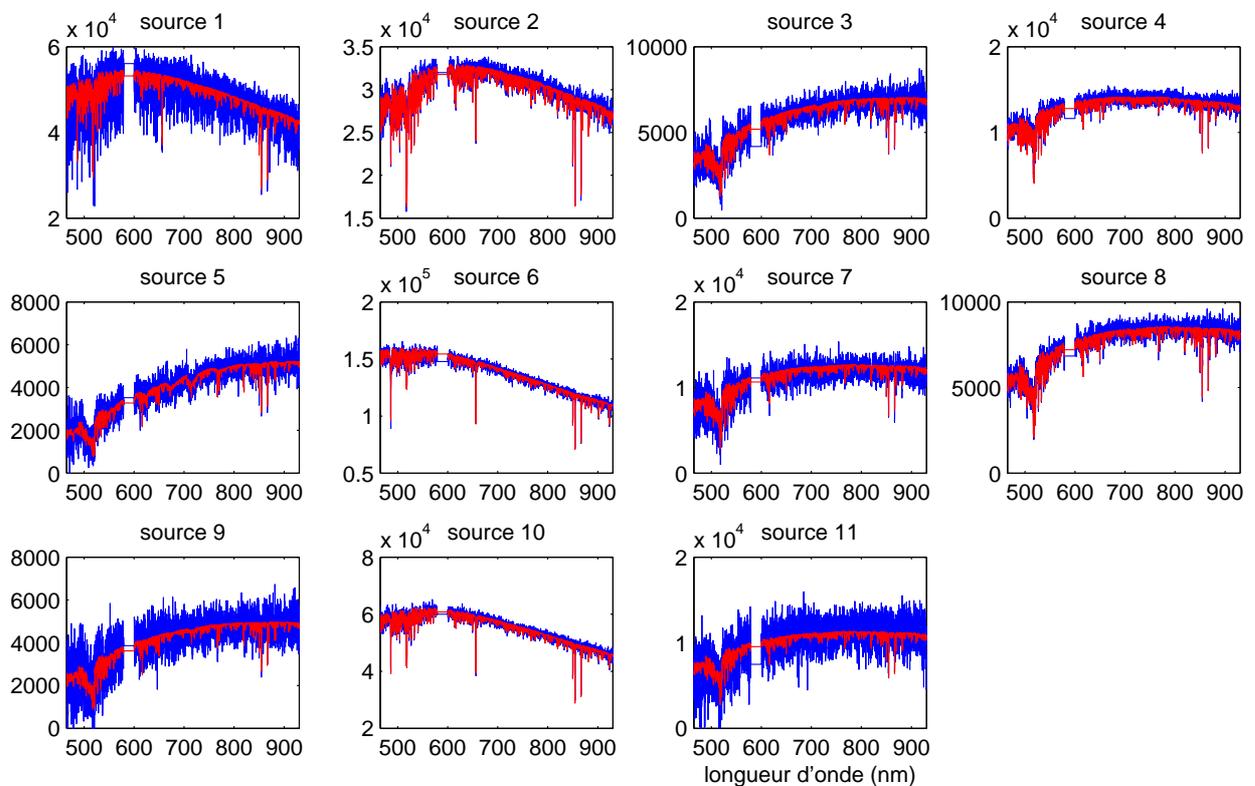


FIGURE 4.7 – Spectres des 11 étoiles du champ, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - avec bruit - (α, β) connus

étonnant de trouver des spectres bruités, le but était juste de séparer les spectres et non de faire du débruitage.

Ce résultat correspond à ce que l'on peut avoir de mieux, c'est à dire dans un cas non aveugle. Comme on peut le voir, le bruit dégrade les performances par rapport au cas non bruité.

On remarque bien sûr que la qualité d'estimation n'est pas la même pour les différentes étoiles, mais on ne s'attardera pas ici à analyser ces résultats qui ont pour objectif de juste

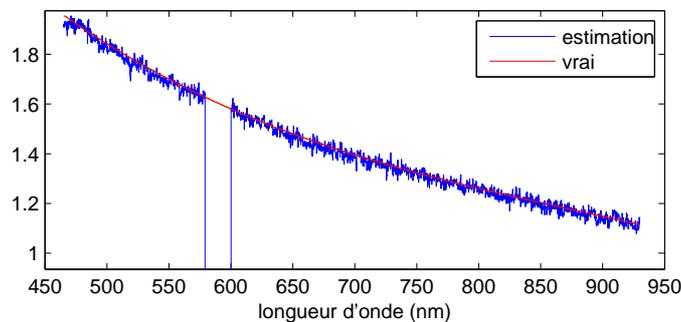
servir de comparaison avec les résultats obtenus dans la suite. Cette analyse sera donc plus approprié dans le cas réaliste où on ne connaît ni les (α, β) ni les spectres.

4.3.2.2 (α, β) inconnus

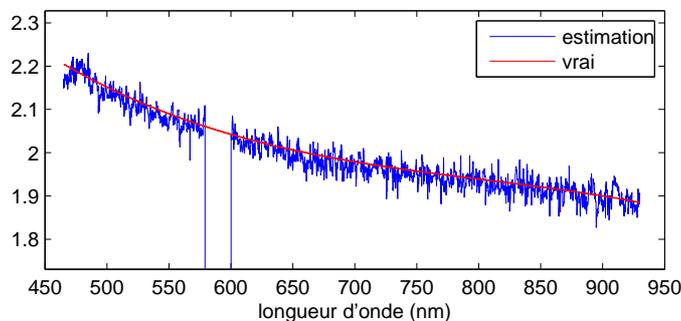
On s'intéresse à présent au cas réaliste, c.à.d. à estimer à partir des données bruitées aussi bien les paramètres (α, β) que les spectres, et ce avec l'algorithme LSQ-Grd présenté.

Commençons par regarder l'estimation des paramètres (α, β) et donc des FSF. La figure 4.8 montre les valeurs estimées (en bleu) des paramètres en fonctions de la longueur d'onde, ainsi que les vraies valeurs (en rouge). L'estimation n'est pas aussi précise que dans le cas sans bruit, mais les écarts restent faibles et n'ont pas beaucoup de conséquences sur l'erreur d'estimation de la FSF. Ceci se voit à travers la figure 4.9 où est tracée l'erreur moyenne d'estimation des FSF en fonction de la longueur d'onde. L'erreur reste assez faible, avec une valeur moyenne de 1.8%, ce qui est proche de la valeur obtenue dans le cas non bruité (qui était de 1.4%).

Intéressons-nous à présent au résultat d'estimation des spectres pour vraiment voir s'il a été affecté par ces petites erreurs sur l'estimation des paramètres (α, β) . On peut voir sur la figure 4.10 les erreurs obtenues sur les 11 étoiles. Les erreurs sont quasiment les mêmes que celles obtenues dans le cas précédent où les (α, β) étaient connus et que seuls les spectres étaient



(a) Valeurs de α



(b) Valeurs de β

FIGURE 4.8 – Valeurs de (α, β) en fonction de la longueur d'onde, les "vraies" (rouge) et les estimations (bleu) - avec bruit - (α, β) inconnus

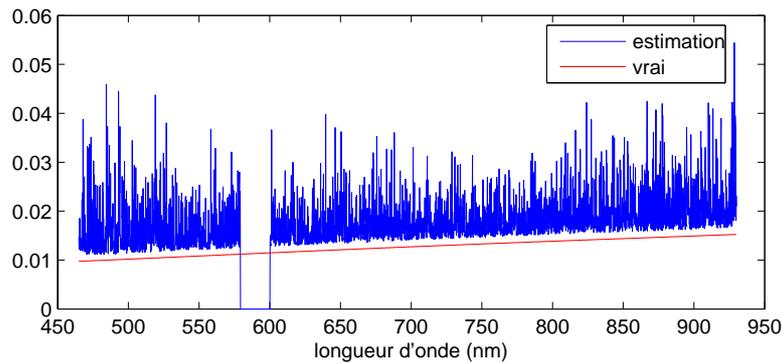


FIGURE 4.9 – Erreur sur les FSF en fonction de la longueur d'onde - avec bruit - (α, β) inconnus

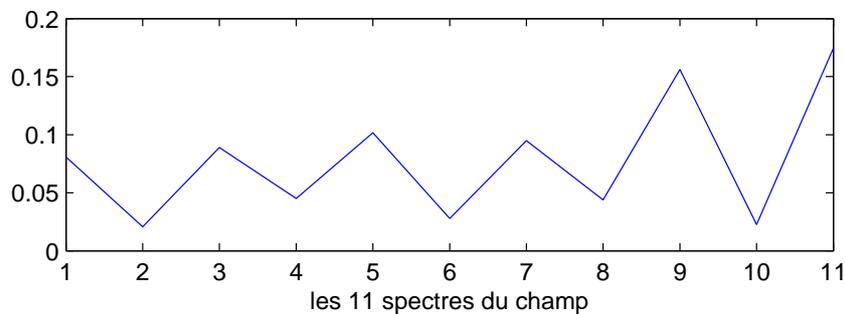


FIGURE 4.10 – Erreur d'estimation des 11 spectres du champ - avec bruit - (α, β) inconnus

estimés (figure 4.6). D'ailleurs l'erreur moyenne sur ces valeurs est de 7.6%, ce qui est quasiment la même valeur que précédemment (qui était de 7.3%). Sur la figure 4.11 sont représentés les spectres estimés (en bleu) et les vrais (en rouge). Ils ont la même allure que sur la figure 4.7. Ceci nous permet d'affirmer que les écarts sur l'estimation de (α, β) ne sont pas très importants et on peut dire qu'ils sont plutôt bien estimés, étant donné qu'ils nous permettent d'obtenir une estimation des spectres équivalente au cas où on connaît les (α, β) . L'allure des spectres est donc due à la présence du bruit.

Il est indispensable à présent d'essayer de comprendre la disparité dans l'estimation des différents spectres. Cela se voit dans leur allure (certains sont très bruités et d'autres beaucoup moins) et se reflète sur les erreurs d'estimation (figure 4.10). La figure 4.12 montre la position des 11 étoiles dans le champ étudié. Les numéros sur cette figure concordent avec la numérotation des 11 sources sur toutes les figures précédentes présentant les spectres ou leur erreur d'estimation. Cette figure va nous permettre de situer chaque étoile dans le champ ce qui est utile pour l'analyse des résultats.

Étudions à présent la qualité d'estimation des différents spectres. Voici notre interprétation concernant les étoiles dont l'estimation est très bruitée :

- les étoiles 1 et 11 : ces étoiles sont situées sur les bord du champ, l'information dans le

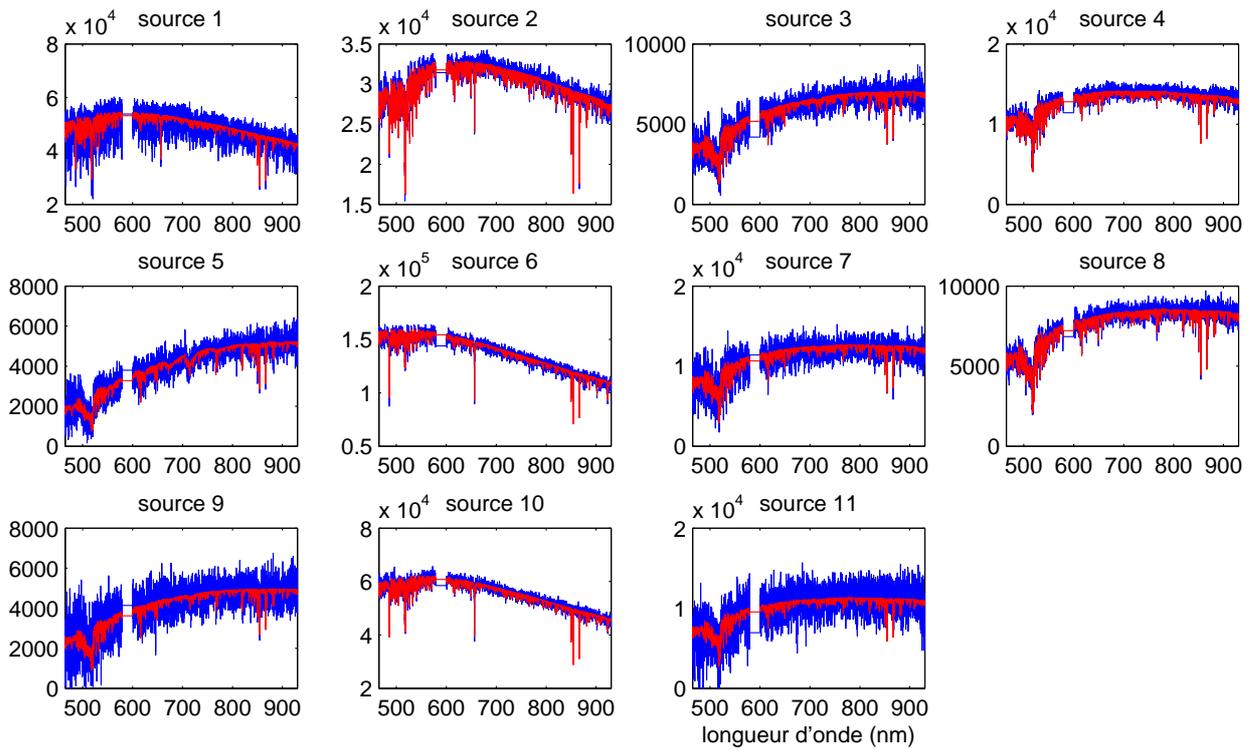


FIGURE 4.11 – Spectres des 11 étoiles du champ, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - avec bruit - (α, β) inconnus

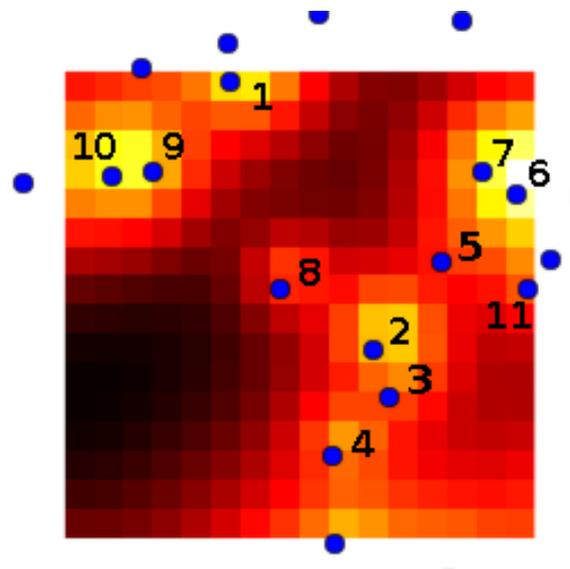


FIGURE 4.12 – Les étoiles numérotées dans le champ

cube pour ces étoiles est donc incomplète. Ceci peut expliquer le fait qu'elles ne soient pas très bien estimées.

- les étoiles 3, 5, 7 et 9 : ces étoiles sont proches d'une autre étoile beaucoup plus forte

(brillante) qu'elles (leurs voisines respectives sont les étoiles 2, 6, 6 et 10). La magnitude des étoiles peut être lue sur les échelles de la figure 4.11. Leur spectre est alors noyé dans un bruit d'un niveau plus élevé que l'amplitude du spectre. En effet le niveau du bruit de MUSE est de par sa nature proportionnel au niveau du signal total sur le pixel considéré (voir explication au chapitre 2, section 2.1). A l'emplacement d'une étoile forte, le bruit est plus fort et une étoile voisine plus faible est alors difficilement estimée correctement.

Pour ce qui est des estimations peu bruitées :

- les étoiles 2, 6 et 10 : ces étoiles ne sont pas isolées mais sont fortes par rapport à leurs voisines, elles sont donc plutôt bien estimées et pas très bruitées. Les raies les plus marquées sont bien estimées.
- les étoiles 4 et 8 : ces deux étoiles ont aussi une estimation satisfaisante, pas très bruitée alors qu'elles ne sont pas très fortes. Elles sont en effet relativement éloignées par rapport à d'autres étoiles (donc ne sont pas perturbées par un bruit plus fort) et sont aussi éloignées du bord (donc pas de manque d'information les concernant).

Pour finir de convaincre de l'apport de la SAS même sur les données bruitées (malgré le fait que pour certaines étoiles les spectres extraits soient assez bruités), on montre à présent un comparatif entre les données brutes et nos résultats. La figure 4.13 montre en effet :

- en noir : pour chaque étoile, le spectre extrait des données brutes de départ (cube de données bruité), du pixel correspondant à la position de l'étoile en question. Cela correspondrait au spectre que l'on pourrait avoir, pour chaque étoile, sans SAS, directement des données brutes.
- en rouge : les vrais spectres des étoiles, multipliés par les coefficients de FSF correspondant à la position de chaque étoile (coefficient obtenu avec les vrais (α, β)). Cette multiplication par le coefficient de FSF correspondant permet d'avoir une grandeur homogène avec celle des données (et donc celle des spectres noirs) pour pouvoir faire une comparaison qui a du sens.
- en bleu : les spectres estimés, multipliés aussi par les coefficients de FSF correspondants (obtenus cette fois-ci à partir des (α, β) estimés).

A partir de cette figure on voit clairement que, même pour les spectres estimés les plus bruités, le résultat d'estimation est une nette amélioration par rapport aux données brutes. La méthode de SAS permet d'obtenir des spectres qui ont le bon ordre de grandeur (concernant la magnitude de l'étoile) et la bonne allure même si celle-ci est bruitée. De plus, pour une partie des étoiles l'estimation permet d'obtenir des spectres où même une bonne partie des raies est bien estimée. A partir de cela on peut conclure que la méthode donne des résultats vraiment satisfaisants sur les données réalistes.

Il y a néanmoins un inconvénient à cette méthode. L'estimation se fait longueur d'onde par longueur d'onde et cela donne un temps de calcul assez long. Dans la section suivante, nous

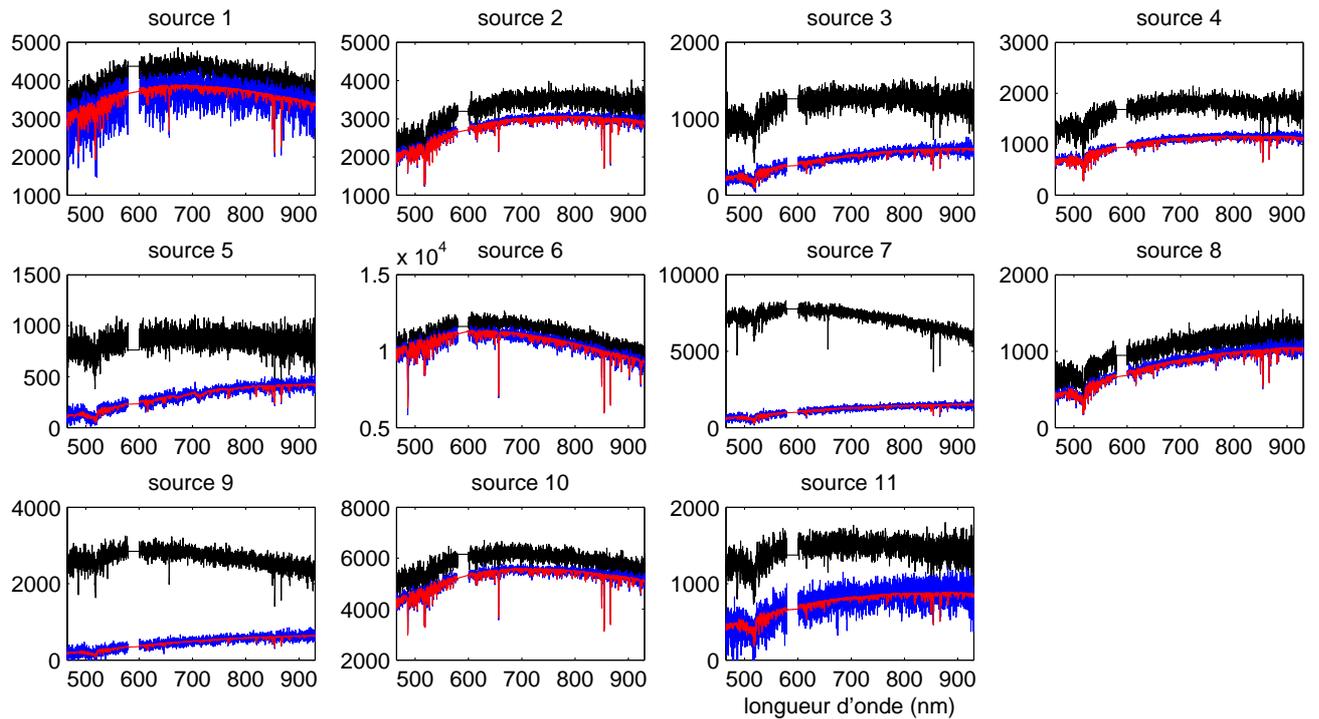


FIGURE 4.13 – Comparaison entre les spectres estimés (bleu), les vrais spectres (rouge) et les spectres extraits du cube de données de départ (avant SAS) à la position des pixels où se situent les étoiles (noir)

proposons donc une version accélérée de la méthode.

Pour ce qui est du débruitage, cela ne concerne pas notre part de travail puisque notre but était de faire de la SAS. Nous avons néanmoins étudié les données pour voir les possibilités de débruitage, il en résulte que la tâche risque d'être difficile. Un filtrage classique est impossible car les spectres sans bruit ont autant de hautes fréquences que le bruit, à cause de la présence des raies. Il faudrait donc peut-être des méthodes tenant compte de la structure des spectres, pour éviter de perdre de l'information, comme par exemple des méthodes à dictionnaires. Cette question de débruitage reste ouverte et n'a pas été traitée dans le cadre de ce travail.

4.4 Version accélérée de la méthode

Les temps de calcul de la méthode présentée sont assez longs et peuvent être rédhibitoires. Nous proposons alors une version plus rapide de la méthode qui exploite le fait que les valeurs de (α, β) varient assez lentement et d'une manière monotone en fonction de la longueur d'onde. La nouvelle méthode opère comme suit :

1. Méthode LSQ-Grd appliquée toutes les K longueurs d'onde

Ceci permet d'obtenir les valeurs de (α, β) pour une longueur d'onde sur K (K peut être pris égal à 100 par exemple).

2. Interpolation des valeurs (α, β)

Une interpolation permet d'obtenir une estimation des valeurs de (α, β) à toutes les longueurs d'onde du spectre de MUSE.

3. Estimation des spectres, avec (α, β) connus

Estimation, pour chaque longueur d'onde, des valeurs des spectres par moindres carrés avec contraintes de positivité.

Cette utilisation de la méthode précédente permet de gagner un temps considérable en calcul étant donné que la méthode précédente est utilisée K fois moins de fois.

4.5 Résultats de tests de la version accélérée

Le but de cette section est de démontrer que cette nouvelle version de notre méthode n'altère pas les résultats.

4.5.1 Cas sans bruit

On commence comme précédemment par le cube non bruité. Sur la figure 4.14 on peut voir le résultat des deux premières étapes du nouvel algorithme, à savoir les valeurs des (α, β) estimés à la première étape, toutes les 100 longueurs d'onde, et le résultat de l'interpolation donnant une estimation de (α, β) à toutes les longueurs d'onde.

L'interpolation faite ici est une interpolation par des splines. Le résultat après interpolation ne semble pas différent de celui obtenu dans la section 4.3.1. L'erreur sur la FSF permet de confirmer cela (voir figure 4.15). On peut voir que l'on obtient le même écart d'erreur avec le cas des vrais paramètres. La moyenne de l'erreur sur la FSF est aussi stable (égale à 1.4%). On obtient donc aussi les mêmes performances pour les spectres, avec une erreur moyenne de 0.8%.

4.5.2 Cas avec bruit

Il est moins évident, avec le cube bruité, d'obtenir les mêmes résultats qu'avec la méthode initiale. En effet l'estimation des (α, β) n'est pas aussi lisse dans le cas bruité (voir figure 4.8), et une interpolation pourrait donc donner des valeurs assez éloignées des valeurs recherchées. Étant donné l'allure de décroissance des vrais (α, β) , on peut alors s'orienter vers une interpolation par un polynôme de degré 2, pour moins tenir compte des éventuelles valeurs aberrantes. Dans la figure 4.16(a) on peut voir les valeurs de (α, β) estimées à l'étape 1 de la nouvelle méthode et ce que donne une interpolation par des splines. La figure 4.16(b) montre le résultat d'interpolation par un polynôme d'ordre 2. Le deuxième résultat se rapproche plus des vraies valeurs.

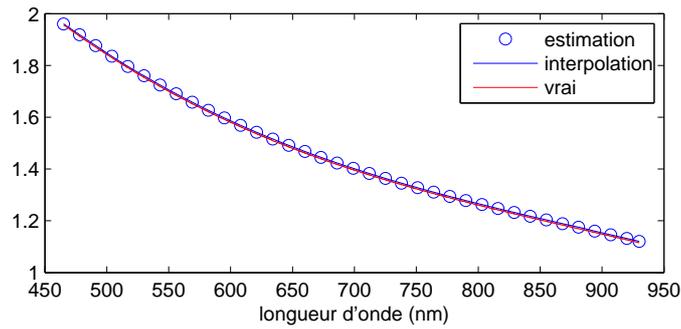
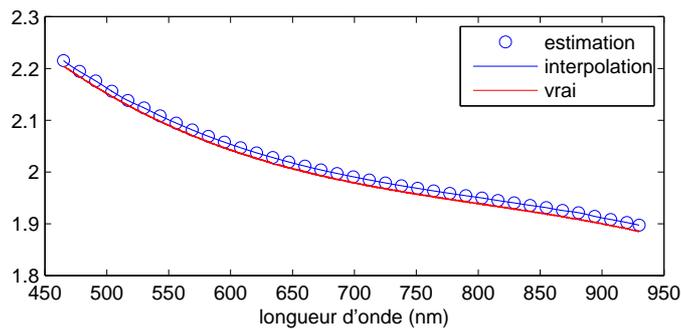
(a) Valeurs de α (b) Valeurs de β

FIGURE 4.14 – Valeurs de (α, β) en fonction de la longueur d'onde, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - méthode accélérée - sans bruit

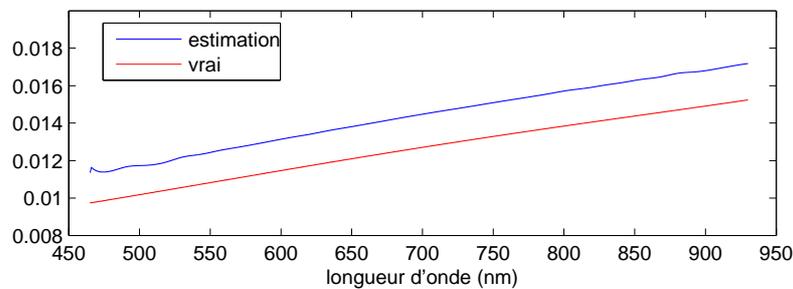
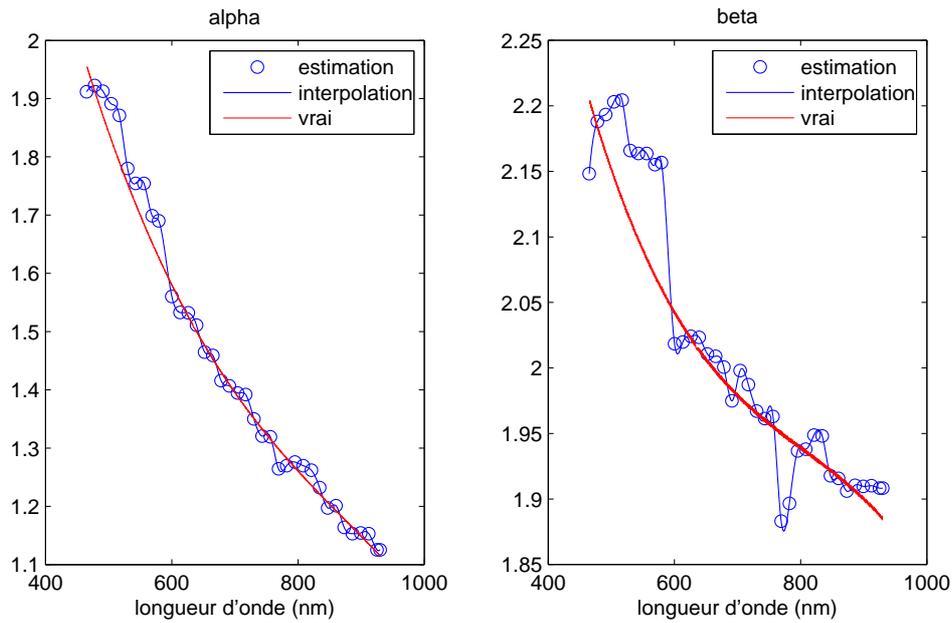
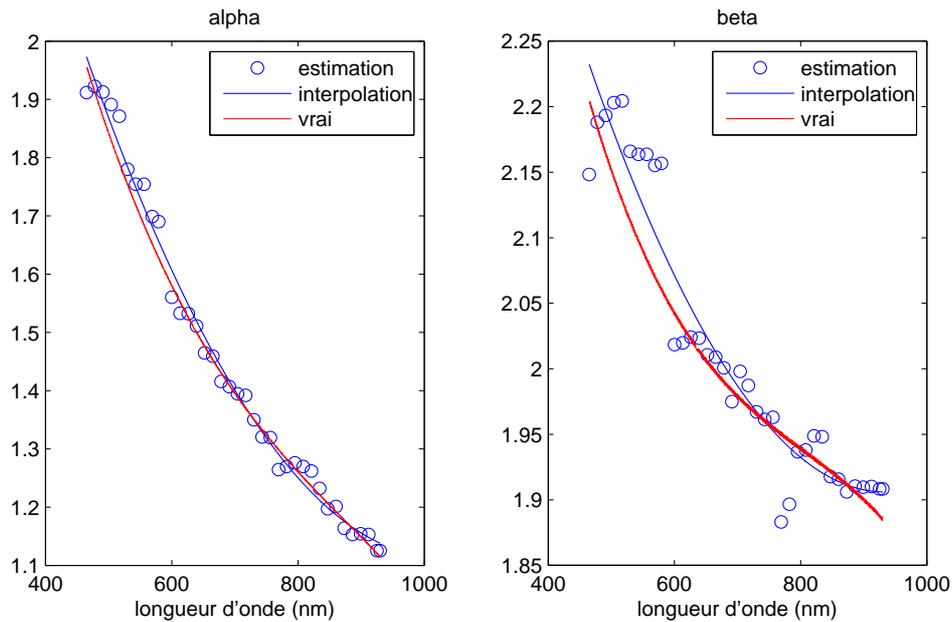


FIGURE 4.15 – Erreur sur les FSF en fonction de la longueur d'onde - méthode accélérée - sans bruit

Avec la première interpolation, on obtient les spectres avec une erreur moyenne de 7.6% alors que l'erreur est de 7.4% avec la deuxième méthode. Ces deux erreurs sont proches de l'erreur obtenue précédemment (section 4.3.2.2) avec la méthode initiale (7.6%) et peuvent sembler donc satisfaisantes toutes les deux. Mais ce n'est pas le cas si on compare les spectres estimés dans les deux cas. Sur la figure 4.17 on peut voir les spectres obtenus avec la première méthode d'interpolation (splines). Des erreurs sont présentes, surtout aux longueurs d'ondes où les (α, β) estimés sont loin des vraies valeurs. Cela déforme un peu les spectres à ces endroits là.



(a) Interpolation avec des splines



(b) Interpolation avec un polynôme de degré 2

FIGURE 4.16 – Valeurs de (α, β) en fonction de la longueur d'onde, les "vraies" (rouge) et les estimations (bleu) - méthode accélérée - avec bruit

Visuellement ces déformations sont surtout visibles sur les spectres 2, 6 et 10 sur lesquels on voit apparaître des bosses à certaines longueurs d'onde sur les spectres estimés (bleus). La figure 4.18 montre les spectres obtenus avec la deuxième méthode (polynôme d'ordre 2). Les déformations qui étaient visibles dans la figure précédente ont disparu et les spectres ont la même allure que

ceux obtenus avec la méthode initiale LSQ-Grd appliquée à toutes les longueurs d'onde.

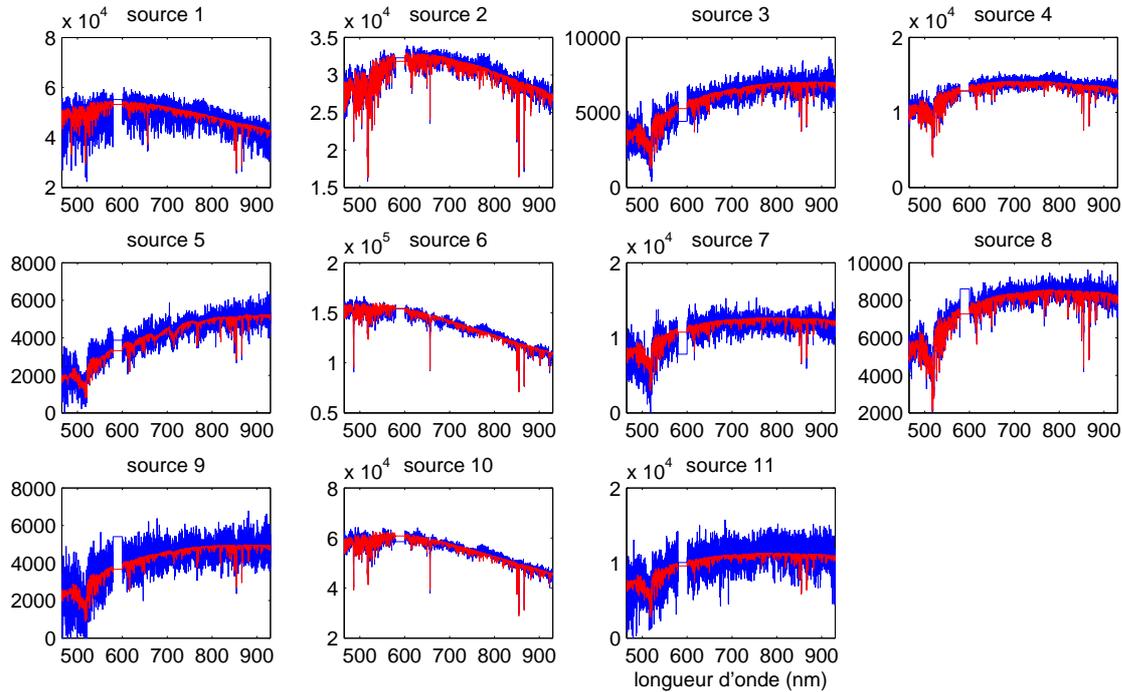


FIGURE 4.17 – Spectres des 11 étoiles du champ, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - méthode accélérée - avec bruit - Interpolation de (α, β) avec des splines

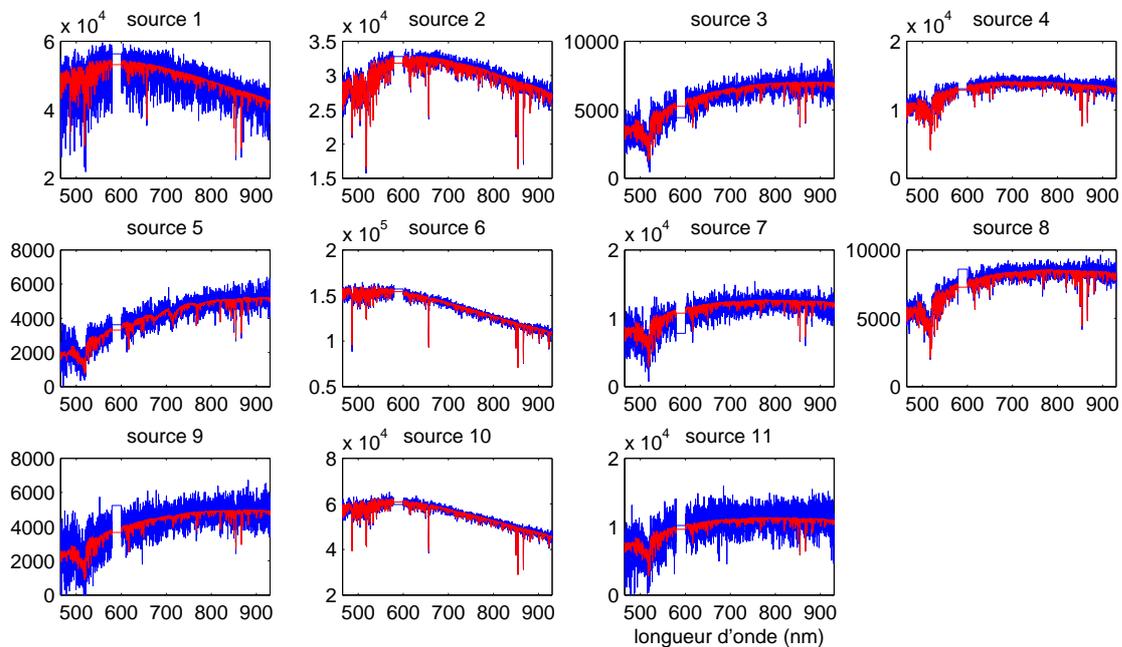


FIGURE 4.18 – Spectres des 11 étoiles du champ, les vrais (rouge) et les estimations (bleu) - méthode accélérée - avec bruit - Interpolation de (α, β) avec un polynôme de degré 2

Cette nouvelle version de la méthode donne donc les mêmes résultats que la méthode de

départ et a l'avantage d'être au moins 100 fois plus rapide. Elle met un peu moins de 8h pour faire la SAS sur ce sous-champ étudié, le calcul ayant été fait avec Matlab sur un processeur double cœur avec une fréquence de 2.8 GHz et une mémoire vive de 4 Go.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la deuxième approche de SAS sur laquelle nous avons travaillé lors de la thèse pour traiter les données MUSE. Cette approche donne des résultats satisfaisants étant donné les difficultés propres aux données traitées (bruit, spectres très corrélés). De plus la méthode de SAS proposée est quasi-aveugle, la seule information a priori utilisée est la position des étoiles. Or avoir cette information est réaliste, comme expliqué auparavant, étant donné qu'elle peut être fournie par le télescope Hubble. D'un autre côté, les données traitées sont réalistes du point de vue des astrophysiciens qui nous les ont fournies et permettent donc une validation correcte de la méthode de SAS.

Conclusion et perspectives

Cette partie de la thèse a été consacrée à nos travaux de Séparation Aveugle de Sources (SAS) sur des images hyperspectrales astrophysiques. Les données concernées sont des images de champs denses d'étoiles du spectro-imageur MUSE. Le but de ce travail était d'extraire les spectres des étoiles présentes sur ces images. Or à cause de la PSF (Point Spread Function), les étoiles sont étalées et les informations contenues dans les pixels peuvent donc résulter des contributions de plusieurs étoiles. C'est là que réside l'intérêt de la SAS : extraire à partir de ces signaux qui sont des mélanges les spectres des étoiles qui sont donc nos "sources".

Nous avons commencé par un rapide état de l'art sur l'utilisation des méthodes de SAS en astrophysique dans le chapitre 1.

Dans le chapitre 2 nous avons montré dans un premier temps l'écriture du modèle de mélange, partant d'hypothèses réalistes sur la PSF de MUSE. Il en résulte que, pour chaque longueur d'onde, les pixels peuvent s'écrire comme un mélange linéaire des spectres des étoiles, pondérés par des coefficients de la PSF spectrale, la FSF (Field Spread Function). Ce modèle linéaire n'est néanmoins pas invariant spectralement.

Nous avons ensuite présenté les données MUSE à notre disposition, qui sont des données simulées (car l'instrument MUSE n'est pas encore finalisé), mais réalistes, qui nous ont été fournies par des astrophysiciens maîtrisant la chaîne d'acquisition de MUSE.

Une analyse de ces données nous a permis de voir les principales caractéristiques pouvant être importantes pour le choix méthodologique en SAS : les données ne sont pas parcimonieuses, les spectres sont très corrélés, les cubes et spectres sont positifs. La dernière partie de ce chapitre explique donc notre choix d'approches de SAS basées sur la positivité.

Le chapitre 3 décrit la première approche de SAS testée pour extraire les spectres des données MUSE. La méthode utilise l'hypothèse que la FSF peut être considérée constante localement spectralement pour obtenir un modèle linéaire invariant spectralement par morceaux. Cela a permis l'utilisation d'une méthode NMF avec une initialisation utilisant une information a priori : La FSF est supposée connue à 10% près et les spectres sont alors initialisés par des moindres carrés. Les résultats de cette méthode semi-aveugle ont néanmoins été assez décevants car la NMF n'améliore pas le résultat donné par l'initialisation. Ce chapitre a néanmoins présenté une information importante sur les données : la nécessité de tenir compte des étoiles voisines du champ dans l'estimation.

Nous nous sommes alors orientés vers une approche différente mais toujours basée sur la positivité des données, celle-ci fait l'objet du chapitre 4. Cette approche exploite une nouvelle information que nous avons eue sur les données, qui est le modèle paramétrique de la FSF de MUSE (information que nous n'avons pas au début de ce travail de thèse). Il a été démontré par des collègues que la FSF de MUSE peut être modélisée par une fonction de Moffat. Cette fonction dépend de paramètres (α, β) qui varient spectralement et de la position des étoiles. Au lieu d'essayer d'estimer tous les coefficients de FSF comme c'était le cas avec la NMF, il était donc possible d'estimer uniquement les paramètres (α, β) . Les positions des étoiles sont supposées connues (c'était d'ailleurs le cas aussi pour la première méthode) car elles peuvent être obtenues par le télescope Hubble. La méthode mise en place est donc itérative et alterne l'estimation des spectres par moindres carrés (avec contraintes de positivité) et estimation des paramètres par un algorithme de gradient projeté. Les résultats obtenus sont très satisfaisants : les spectres sont estimés avec une erreur moyenne inférieure à 8 % et les étoiles les plus fortes avec une erreur inférieure à 5 % avec une bonne estimation de leurs raies les plus marquantes. Le bruit présent sur les données empêche malheureusement d'estimer avec beaucoup de précision les étoiles faibles situées à proximité d'étoiles fortes. Le résultat est néanmoins satisfaisant du point de vue SAS, tel qu'il a été démontré dans ce chapitre.

Pour ce qui est des perspectives de ce travail, différentes améliorations peuvent être envisagées, en lien avec la dernière méthode, en voici quelques exemples :

- Pour améliorer la convergence de l'algorithme de gradient en terme de vitesse mais peut-être aussi de précision, il peut être intéressant d'utiliser un pas de descente variable (au lieu d'un pas fixe comme c'est le cas actuellement), en utilisant par exemple la règle de Armijo [127][131].
- Une autre alternative pourrait être aussi d'utiliser un algorithme de Newton. Il n'y a évidemment aucune garantie pour que la Hessienne soit bien conditionnée, mais cela peut être intéressant à tester quand même. On pourrait obtenir un gain en temps et en précision.
- Un autre point intéressant serait de voir comment l'algorithme réagirait à des positions moins précises des étoiles, en introduisant par exemple une erreur sur les positions à notre disposition.
- Si les résultats sont sensibles aux positions des étoiles, on peut supposer qu'on les connaisse à un pourcentage près au départ (10 ou 20% par exemple), et qu'ensuite seules les positions des étoiles à l'intérieur du champ soient estimées pour être affinées. On peut imaginer que les positions des étoiles du voisinage n'ont pas besoin d'être estimées très précisément car celles-ci servent uniquement à améliorer l'estimation des étoiles dans le champ.

CONCLUSION GENERALE

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse au développement de méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) pour l'imagerie hyperspectrale, plus particulièrement dans le cadre de deux champs d'application : l'astrophysique et la télédétection urbaine. L'étude de ce type de données est très intéressante, d'autant plus que l'utilisation de données hyperspectrales commence à avoir un grand intérêt dans beaucoup d'autres applications très diverses : analyse d'œuvres d'art, analyse de scènes en criminologie, de données biomédicales...

Les données hyperspectrales peuvent être traitées de diverses manières, en exploitant l'information spectrale différemment : simultanément (c.à.d. en traitant simultanément toutes les bandes spectrales), comme le cas de la NMF dans la partie télédétection de ce document, ou séquentiellement (traitement bande par bande) comme c'est le cas de notre méthode LSQ-Grd pour MUSE.

Nous avons donc développé pour ces deux applications des méthodes de SAS différentes mais qui ont néanmoins des points importants en commun tels que l'exploitation de la positivité des données et la séparation de sources très corrélées. Ces deux propriétés peuvent concerner beaucoup de données réelles dans diverses applications.

Nous avons aussi pu voir, à travers ce travail, que la démarche entreprise pour le choix des méthodes de SAS dépend fortement du modèle de mélange et de notre connaissance des données. Dans chacune des deux applications, l'étape d'analyse et de compréhension des phénomènes physiques aboutissant à la formation des données a été un point crucial. Pour la télédétection, nous avons conduit nous-mêmes cette première étape afin de justifier et valider le modèle de mélange des réflectances en milieu urbain, en partant d'équations physiques basées sur le transfert radiatif. Pour ce qui est de l'astrophysique, l'étape d'analyse de la chaîne d'acquisition et tout ce qu'elle implique sur les propriétés de la PSF (Point Spread Function) et du bruit a été faite par des collègues. Cette étude était indispensable et nous a permis, en exploitant des hypothèses connues sur les données, d'aboutir au modèle de mélange que vérifient les données de MUSE. Nous avons d'ailleurs vu aussi comment l'ajout de l'information sur le modèle de la FSF (Field Spread Function) a donné une autre orientation à notre choix méthodologique, ceci illustre l'importance de ces connaissances au départ.

Il ressort de cette expérience que, pour des données réelles, une bonne connaissance des phénomènes qui les régissent, des hypothèses réalistes ou non, du modèle, est primordiale. Mais cette étape nécessite une bonne communication avec d'autres spécialistes (physiciens,

astrophysiciens, instrumentalistes...), notamment des personnes qui vont exploiter par la suite les données traitées, ce qui n'est pas toujours évident.

La validation des méthodes de traitement sur des données réelles ou très réalistes s'avère aussi être un point qui peut être problématique. Pour notre application aux images urbaines, nous avons été confrontés au manque de vérité terrain sur les images réelles traitées. Pour ce qui est du projet astrophysique MUSE, des collègues nous ont fourni des images réalistes (obtenues après modélisation de la chaîne d'acquisition) avec les données nécessaires pour la validation (les vrais spectres d'étoiles, les FSF...), mais lorsque les données réelles seront là (fin 2013) il sera moins évident de valider les résultats.

Finalement, le fait de travailler sur deux applications différentes a été une expérience très riche, car cela permet d'avoir une vision plus large et ouverte.

D'autre part, ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives, dont une partie a déjà été citée dans les conclusions propres à chaque partie, telles que :

- Télédétection urbaine : Divers tests de validation (notamment sur des images réelles) ainsi que différentes études (cas complètement à l'ombre, initialisations des algorithmes de SAS, influence du bruit, du nombre de pixels traités...) sont encore nécessaires, sans oublier les améliorations algorithmiques possibles...
- Astrophysique : Là aussi des améliorations algorithmiques sont possibles, on peut aussi aller vers une solution plus "aveugle" (s'affranchir de connaissance exacte de position des étoiles), ou trouver des solutions pour le bruit...

Au delà de ces perspectives déjà citées (se référer aux conclusions de chaque partie pour plus de détails), ce travail peut donner lieu à différentes pistes, plus générales, à plus à long terme, dont voici quelques-unes :

- Les méthodes linéaires quadratiques proposées pourraient être étendues et adaptées à d'autres applications où le modèle est linéaire quadratique.
- Etendre les méthodes linéaires quadratiques développées à des modèles polynomiaux peut aussi être envisagé, pour des applications qui le nécessitent (par exemple : dans certains cas en télédétection, les réflexions d'ordre supérieur ne peuvent être négligées...).
- Etude du problème d'unicité de la NMF : Il serait intéressant de voir comment pallier le problème de non unicité des solutions de la NMF. Mais cela semble plus faisable dans le cadre d'une application donnée que dans un cadre général. Cela pourrait se faire par exemple par l'ajout de contraintes additionnelles liées au problème. Dans notre travail lié à la télédétection urbaine, la seule contrainte utilisée à ce stade a été la somme à 1 des coefficients de mélange de la partie linéaire.

Concernant le cas particulier de la télédétection urbaine, deux points semblent aussi intéressants à explorer :

- Comme on l'a vu dans le cadre de ce travail, en milieu urbain, il serait imprudent de négliger les non linéarités dues aux réflexions. Mais d'un autre côté, on a aussi vu que ces non linéarités ne concernent pas tous les pixels de l'image. Les réflexions sont plus présentes à certains endroits de la scène (cela dépend des matériaux présents, géométrie des bâtiments, orientation du soleil...). Les méthodes linéaires quadratiques sont souvent plus coûteuses et compliquées à mettre en œuvre. Il serait donc très intéressant de pouvoir détecter, d'une manière automatique, les pixels non linéaires sur une image donnée. Il suffirait alors d'appliquer la méthode non linéaire uniquement aux pixels où le mélange est non linéaire. Cela est plus ou moins fait par exemple dans [105], où la méthode, basée sur un noyau adaptatif, détecte automatiquement la non linéarité, à travers la valeur d'un paramètre du noyau utilisé. Mais cette méthode estime la composition des pixels, en même temps qu'elle détecte la non linéarité, et n'est pas spécifique à un modèle linéaire quadratique.
- Une autre piste concerne l'amélioration de la classification en milieu urbain. Ce point a été cité comme une des motivations de la partie de ce travail de thèse liée à l'urbain. La classification des pixels d'une image suppose que ces pixels sont "purs", pour être affectés à une classe. Or, en milieu urbain, étant donné la grande variabilité spatiale, c'est le cas uniquement si la résolution est très bonne. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est néanmoins possible d'exploiter les méthodes de démélange pour traiter les pixels non purs. Une fois la composition de ces pixels estimée, il peut être envisagé d'affecter les "sous-pixels" purs à la classe des pixels voisins. Cela sous-entend l'obtention d'une représentation sub-pixellaire de l'image et donc l'améliorer de sa résolution. Un exemple de travail allant dans ce sens peut être trouvé dans [154], mais dans un cadre de mélanges linéaires.

Bibliographie

- [1] M. S. Pedersen, J. Larsen, U. Kjems, and L. C. Parra. *A Survey of Convolutional Blind Source Separation Methods*, pages 1–34. Springer, 2007.
- [2] S. Makino, T.-W. Lee, and H. Sawada (Eds). *Blind speech separation*. Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007.
- [3] P. Comon and C. Jutten. *Séparation de sources 2; au-delà de l'aveugle et applications*. Hermès, 2007.
- [4] P. Comon and C. Jutten. *Handbook of Blind Source Separation, Independent Component Analysis and Applications*. Academic Press, Oxford UK, Burlington USA, 2010.
- [5] Y. Deville. *Signaux temporels et spatiotemporels, Traitement du signal - Analyse des signaux, théorie de l'information, traitement d'antenne, séparation aveugle de sources*. Ellipses, 2011.
- [6] C. Jutten and J. Karhunen. Advances in blind source separation (BSS) and independent component analysis (ICA) for nonlinear mixtures. *International Journal of Neural Systems*, 14(5) :267–292, 2004.
- [7] P. Comon and C. Jutten. *Séparation de sources 1; concepts de base et analyse en composantes indépendantes*. Hermès, 2007.
- [8] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja. *Independent component analysis*. John Wiley & Sons Inc, a volumee in Series on Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control, 2001.
- [9] P. Comon. Independent component analysis, a new concept? *Signal Processing*, 36(3) :287 – 314, 1994.
- [10] J.-F. Cardoso. The three easy routes to independent component analysis, contrasts and geometry. In *Proceedings of ICA*, pages 1–6, San Diego, USA, 2001.
- [11] C. Jutten and J. Herault. Blind separation of sources, part I : An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture. *Signal Processing*, 24(1) :1 – 10, 1991.
- [12] A. Mansour and C. Jutten. What should we say about the kurtosis? *IEEE Signal Processing Letters*, 6 :321–322, 1999.
- [13] A. Hyvärinen. Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 10(3) :626–634, 1999.

- [14] M. Gaeta et J.L. Lacoume. Estimateurs du maximum de vraisemblance étendus à la séparation de sources non gaussiennes. *Traitement du signal*, 7(5) :419–434, 1990.
- [15] A. Belouchrani and J.-F. Cardoso. Maximum likelihood source separation for discrete sources. In *Proceedings of EUSIPCO*, volume 2, pages 768–771, 1994.
- [16] D.-T. Pham and P. Garat. Blind separation of mixtures of independent sources through a quasi maximum likelihood approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(7) :1712–1725, 1997.
- [17] D.-T. Pham. Blind separation of instantaneous mixture of sources via the gaussian mutual information criterion. In *Proceedings of EUSIPCO*, pages 3–6, Tampere, Finland, 2000.
- [18] M. Babaie-Zadeh and C. Jutten. A general approach for mutual information minimization and its application to blind source separation. *Signal Processing*, 85(5) :975–995, 2005.
- [19] J.-F. Cardoso and A. Souloumias. Blind beamforming for non gaussian signals. *IEE Proceedings-F Radar and Signal Processing*, 140(6) :362–370, 1993.
- [20] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines. A blind source separation technique using second order statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2) :434–444, 1997.
- [21] D.-T. Pham and J.-F. Cardoso. Blind separation of instantaneous mixtures of non stationary sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49 :1837–1848, 2000.
- [22] R. Gribonval and S. Lesage. A survey of sparse component analysis for blind source separation : principles, perspectives, and new challenges. In *ESANN*, pages 323–330, 2006.
- [23] M. Puigt. *Méthodes de séparation aveugle de sources fondées sur des transformées temps-fréquence. Application à des signaux de parole*. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse 3, 2007.
- [24] R. Gribonval. *Séparation de sources 2, au-delà de l'aveugle et application*, chapter 10 : Parcimonie. P. Comon and C. Jutten, Hermès, 2007.
- [25] A. Jourjine, S. Rickard, and Ö. Yilmaz. Blind separation of disjoint orthogonal signals : Demixing N sources from 2 mixtures. In *proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, pages 2985–2988, 2000.
- [26] Ö. Yilmaz and S. Rickard. Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52 :1830–1847, 2004.
- [27] F. Abrard and Y. Deville. A time-frequency blind signal separation method applicable to underdetermined mixtures of dependent sources. *Signal Processing*, 85(7) :1389–1403, 2005.
- [28] Y. Deville and M. Puigt. Temporal and time-frequency correlation-based blind source separation methods. part I : Determined and underdetermined linear instantaneous mixtures. *Signal Processing*, 87(3) :374–407, 2007.

- [29] S. Arberet. *Estimation robuste et apprentissage aveugle de modèles pour la séparation de sources sonores*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2008.
- [30] Y. Li, S. Amari, A. Cichocki, D. W. C. Ho, and S. Xie. Underdetermined blind source separation based on sparse representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54 :423–437, 2006.
- [31] K. H. Knuth. A Bayesian approach to source separation. In *Proceedings of the First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation : ICA*, pages 283–288, 1999.
- [32] S. Moussaoui, D. Brie, A. Mohammad-Djafari, and C. Carteret. Separation of non-negative mixture of non-negative sources using a bayesian approach and MCMC sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(11) :4133–4145, 2006.
- [33] P. Paatero and U. Tapper. Positive matrix factorization : A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values. *Environmetrics*, 5(2) :111–126, 1994.
- [34] P. Paatero. Least squares formulation of robust non-negative factor analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 37(1) :23–35, 1997.
- [35] D. D. Lee and H. S. Seung. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. In *Nature*, volume 401, pages 788–791, 1999.
- [36] D. D. Lee and H. S. Seung. Algorithms for non-negative matrix factorization. In *Proc. NIPS*, volume 13. MIT Press, 2001.
- [37] M. Berry, M. Browne, A. Langville, V. Pauca, and R. Plemmons. Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1) :155–173, 2007.
- [38] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S.-I. Amari. *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations : Applications to Exploratory Multi-Way Data Analysis and Blind Source Separation*. John Wiley and Sons, 2009.
- [39] A. Cichocki, R. Zdunek, and S.-i. Amari. Nonnegative matrix and tensor factorization [lecture notes]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 25(1) :142–145, 2008.
- [40] I. Dhillon and S. Sra. Generalized nonnegative matrix approximations with bregman divergences. *Sciences New York*, 18(2) :283–290, 2006.
- [41] A. Cichocki, S. Amari, R. Zdunek, R. Kompass, G. Hori, and Z. He. Extended smart algorithms for non-negative matrix factorization. *Lecture Notes in Computer Science*, 4029 :548–562, 2006.
- [42] D. L. Donoho and V. Stodden. When does non-negative matrix factorization give a correct decomposition into parts? In *Proc. NIPS 2003, MIT Press*, 2003.
- [43] S. Moussaoui, D. Brie, and J. Idier. Non-negative source separation : range of admissible solutions and conditions for the uniqueness of the solution. In *Proceedings of IEEE*

- International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, volume 5, pages 289 – 292, 2005.
- [44] S. Wild, J. Curry, and A. Dougherty. Improving non-negative matrix factorizations through structured initialization. *Pattern Recognition*, 37(11) :2217–2232, 2004.
- [45] C. Boutsidis and E. Gallopoulos. Svd based initialization : A head start for nonnegative matrix factorization. *Pattern Recognition*, 41(4) :1350 – 1362, 2008.
- [46] M. Rezaei, R. Boostani, and M. Rezaei. An efficient initialization method for nonnegative matrix factorization. *Journal of Applied Science*, 11(2) :354–359, 2011.
- [47] A. Cichocki and R. Zdunek. Multilayer nonnegative matrix factorization using projected gradient approaches. *International Journal of Neural Systems*, 17(6) :431–446, 2007.
- [48] P. O. Hoyer. Non-negative sparse coding. In *Proceedings of IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, pages 557–565, 2002.
- [49] H. Kim and H. Park. Sparse non-negative matrix factorizations via alternating non-negativity-constrained least squares for microarray data analysis. *Bioinformatics*, 23(12) :1495–1502, 2007.
- [50] Z. Chen, A. Cichocki, and T. M. Rutkowski. Constrained non-negative matrix factorization method for EEG analysis in early detection of alzheimer’s disease. In *proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, pages 893–896, 2006.
- [51] K Drakakis, S Rickard, R De Frein, and A Cichocki. Analysis of financial data using non-negative matrix factorization. *International Mathematical Forum*, 3(38) :1853–1870, 2008.
- [52] C.-J. Lin. Projected gradient methods for nonnegative matrix factorization. *Neural Computation*, 19 :2756–2779, 2007.
- [53] R. Zdunek and A. Cichocki. Fast nonnegative matrix factorization algorithms using projected gradient approaches for large-scale problems. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2008 :3 :1–3 :13, 2008.
- [54] T. Virtanen. Monaural sound source separation by nonnegative matrix factorization with temporal continuity and sparseness criteria. In *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, volume 15, pages 1066 –1074, 2007.
- [55] Cédric Févotte and Jérôme Idier. Algorithms for nonnegative matrix factorization with the beta-divergence. *Neural Computation*, 23(9) :2421–2456, 2011.
- [56] N. Bertin, E. Vincent, and R. Badeau. Fast Bayesian NMF algorithms enforcing harmonicity and temporal continuity in polyphonic music transcription. In *WASPAA*, pages 29–32, New Paltz, USA, 2009.
- [57] P. Paatero. The multilinear engine : A table-driven, least squares program for solving multilinear problems, including the n-way parallel factor analysis model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8(4) :pp. 854–888, 1999.

- [58] J.-H. Wang, P. K. Hopke, T. M. Hancewicz, and S. L. Zhang. Application of modified alternating least squares regression to spectroscopic image analysis. *Analytica Chimica Acta*, 476(1) :93 – 109, 2003.
- [59] R. Albright, J. Cox, D. Duling, A. N. Langville, and C. D. Meyer. Algorithms, initializations, and convergence for the nonnegative matrix factorization. *Technical report, NCSU Technical Report Math 81706*, 2006.
- [60] M. Krob and M. Benidir. Blind identification of a linear-quadratic mixture : application to quadratic phase coupling estimation. In *IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pages 351 –355, 1993.
- [61] K. Abed-Meraim, A. Belouchrani, and Y. Hua. Blind identification of a linear-quadratic mixture of independent components based on joint diagonalization procedure. In *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, volume 5, pages 2718 –2721, 1996.
- [62] S. Hosseini and Y. Deville. Blind separation of linear-quadratic mixtures of real sources using a recurrent structure. In *Proceedings of the 7th International Work-Conference on Artificial and Natural Neural Networks : Part II : Artificial Neural Nets Problem Solving Methods, IWANN*, pages 241–248, 2003.
- [63] S. Hosseini and Y. Deville. Blind maximum likelihood separation of a linear-quadratic mixture. *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, 3195 :694–701, 2004.
- [64] Y. Deville and S. Hosseini. Recurrent networks for separating extractable-target nonlinear mixtures. Part I : non-blind configurations. *Signal Processing*, 89(4) :378–393, 2009.
- [65] Y. Deville and S. Hosseini. Blind operation of a recurrent neural network for linear-quadratic source separation : fixed points, stabilization and adaptation scheme. In *Proceedings of the 9th international conference on Latent variable analysis and signal separation, LVA/ICA*, pages 237–244, 2010.
- [66] F. Mokhtari, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten. Blind separation of bilinear mixtures using mutual information minimization. In *Proceedings of IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, MLSP*, pages 1–6, 2009.
- [67] F. Merrih-Bayat, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten. Linear-quadratic blind source separating structure for removing show-through in scanned documents. *International Journal on Document Analysis and Recognition*, 14(4) :319–333, 2011.
- [68] L. T. Duarte, R. Suyama, R. Attux, Y. Deville, J. Romano, and C. Jutten. Blind source separation of overdetermined linear-quadratic mixtures. In *Latent Variable Analysis and Signal Separation*, volume 6365 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 263–270. 2010.

- [69] Y. Deville and S. Hosseini. Blind identification and separation methods for linear-quadratic mixtures and/or linearly independent non-stationary signals. In *9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, ISSPA*, pages 1–4, 2007.
- [70] L.T. Duarte, R. A. Ando, R. Attux, Y. Deville, and C. Jutten. Separation of sparse signals in overdetermined linear-quadratic mixtures. In *Proceedings of the 10th international conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation, LVA/ICA*, pages 239–246, 2012.
- [71] L. T. Duarte, C. Jutten, and S. Moussaoui. Bayesian source separation of linear-quadratic and linear mixtures through a MCMC method. In *Proceedings of the 19-th international IEEE workshop on Machine Learning for Signal Processing, MLSP*, 2009.
- [72] L. T. Duarte, C. Jutten, and S. Moussaoui. Bayesian source separation of linear and linear-quadratic mixtures using truncated priors. *Journal of Signal Processing Systems*, 65 :311–323, 2011.
- [73] N. Keshava and J. F. Mustard. Spectral unmixing. *IEEE signal processing magazine*, 19(1) :44–57, 2002.
- [74] D. C. Heinz and C.-I. Chang. Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 39(3) :529–545, 2001.
- [75] Z. Guo, T. Wittman, and S. Osher. L1 unmixing and its application to hyperspectral image enhancement. In *SPIE Conference Series*, volume 7334, 2009.
- [76] K. E. Themelis, A. A. Rontogiannis, and K. Koutroumbas. Semi supervised hyperspectral unmixing via the weighted lasso. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1194–1197, 2010.
- [77] M. Parente and A. Zymnis. Statistical clustering and mineral spectral unmixing in Aviris hyperspectral image of Cuprite, cs229 report, 2005.
- [78] L. Zhao and K. Zhang. A new least squares subspace projection approach to unmix hyperspectral data. In *GCIS '09 : Proceedings of the 2009 WRI Global Congress on Intelligent Systems*, pages 350–354, 2009.
- [79] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias. Vertex Component Analysis : A fast algorithm to unmix hyperspectral data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(4) :898–910, 2005.
- [80] O. Eches, N. Dobigeon, C. Mailhes, and J.-Y. Tournier. Bayesian estimation of linear mixtures using the normal compositional model. application to hyperspectral imagery. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(6) :1403–1413, 2010.
- [81] D. Stein. Application of the normal compositional model to the analysis of hyperspectral imagery. In *IEEE Workshop on Advances in Techniques for Analysis of Remotely Sensed Data*, pages 44–51, 2004.

- [82] M. E. Winter. N-FINDR : an algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data. In *Proc. SPIE, Imaging spectrometry 5*, volume 3753, pages 266–275, 1999.
- [83] J. W. Boardman, F. A. Kruse, and R. O. Green. Mapping target signatures via partial unmixing of aviris data. In *Fifth annual JPL Airborne Earth Science Workshop*, volume 95, pages 23–26, 1995.
- [84] C.-I. Chang, C.-C. Wu, W.-M. Liu, and Y.-C. Ouyang. A new growing method for simplex-based endmember extraction algorithm. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(10) :2804–2819, 2006.
- [85] M. D. Craig. Minimum-volume transforms for remotely sensed data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(3) :542–552, 1994.
- [86] A. Ifarraguerri and C.-I. Chang. Multispectral and hyperspectral image analysis with convex cones. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 37(2) :756–770, 1999.
- [87] J. Bowles, D. Gillis, and P. Palmadesso. New improvements in the orasis algorithm. In *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, volume 3, pages 293 –298, 2000.
- [88] M. Parente and A. Plaza. Survey of geometric and statistical unmixing algorithms for hyperspectral images. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2010.
- [89] J. M. Bioucas-Dias and A. Plaza. An overview on hyperspectral unmixing : Geometrical, statistical, and sparse regression based approaches. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 1135 –1138, 2011.
- [90] J.M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot. Hyperspectral unmixing overview : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches. *Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, IEEE Journal of*, 5(2) :354 –379, april 2012.
- [91] A. Plaza, P. Martinez, R. Perez, and J. Plaza. A quantitative and comparative analysis of endmember extraction algorithms from hyperspectral data. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 42(3) :650–663, 2004.
- [92] V. P. Pauca, J. Piper, and R. J. Plemmons. Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis. In *Linear algebra and its applications*, volume 416, pages 29–47, 2006.
- [93] P. Sajda, S. Du, and L. Parra. Recovery of constituent spectra using non-negative matrix factorization. In *Proc. SPIE*, volume 5207, pages 321–331, 2003.
- [94] L. Miao and H. Qi. Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(3) :765 –777, 2007.

- [95] J. Bayliss, J. A. Gualtieri, and R. F. Cromp. Analyzing hyperspectral data with independent component analysis. In *Proc. SPIE AIPR Workshop*, volume 9, pages 133–143, 1997.
- [96] J. Wang and C.-I. Chang. Applications of independent component analysis in endmember extraction and abundance quantification for hyperspectral imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(9) :2601–2616, 2006.
- [97] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias. Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data? *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(1) :175–187, 2005.
- [98] S. Jia and Y. Qian. Spectral and spatial complexity-based hyperspectral unmixing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(12) :3867–3879, 2001.
- [99] O. Eches, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet. A reversible-jump mcmc algorithm for estimating the number of endmembers in the normal compositional model application to the unmixing of hyperspectral images. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2010.
- [100] M. T. Eismann and R. C. Hardie. Stochastic spectral unmixing with enhanced endmember class separation. *Applied Optics*, 43(36) :6596–6608, 2004.
- [101] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias. Hyperspectral unmixing algorithm via dependent component analysis. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 2007.
- [102] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias. Learning dependent sources using mixtures of dirichlet : Applications on hyperspectral unmixing. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2009.
- [103] J. C. Harsanyi and C.-I. Chang. Hyperspectral image classification and dimensionality reduction : an orthogonal subspace projection approach. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32 :779–785, 1994.
- [104] P. Huard and R. Marion. Study of non-linear mixing in hyperspectral imagery - a first attempt in the laboratory. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2011.
- [105] J. Broadwater and A. Banerjee. Mapping intimate mixtures using an adaptive kernel-based technique. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2011.
- [106] J. Plaza, A. Plaza, R. Perez, and P. Martinez. Joint linear/nonlinear spectral unmixing of hyperspectral image data. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 2007.
- [107] U. Kumar, S. K. Raja, C. Mukhopadhyay, and T. V. Ramachandra. A multi-layer perceptron based non-linear mixture model to estimate class abundance from mixed pixels. In *IEEE Students' Technology Symposium (TechSym)*, pages 148 –153, 2011.

- [108] A. Plaza, P. Martinez, R. Perez, and J. Plaza. Spatial/spectral endmember extraction by multidimensional morphological operations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(9) :2025 – 2041, 2002.
- [109] C.-I. Chang. Orthogonal subspace projection (osp) revisited : a comprehensive study and analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(3) :502 – 518, 2005.
- [110] R. Pu, P. Gong, R. Michishita, and T. Sasagawa. Spectral mixture analysis for mapping abundance of urban surface components from the terra/aster data. *Remote Sensing of Environment*, 112(3) :939 – 954, 2008.
- [111] W. Liu and E. Y. Wu. Comparison of non-linear mixture models : Sub-pixel classification. *Remote Sensing of environment*, 94(2) :145–154, 2005.
- [112] R. Heylen, D. Burazerovic, and P. Scheunders. Non-linear spectral unmixing by geodesic simplex volume maximization. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 5(3) :534 –542, 2011.
- [113] J. Broadwater and A. Banerjee. A generalized kernel for areal and intimate mixtures. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2010.
- [114] W. Fan, B. Hu, J. Miller, and M. Li. Comparative study between a new nonlinear model and common linear model for analysing laboratory simulated forest hyperspectral data. *International Journal of Remote Sensing*, 30(11) :2951–2962, 2009.
- [115] B. Somers, K. Cools, S. Delalieux, J. Stuckens, D. Van der Zande, W. W. Verstraeten, and P. Coppin. Nonlinear hyperspectral mixture analysis for tree cover estimates in orchards. *Remote Sensing of Environment*, 113(6) :1183 – 1193, 2009.
- [116] J. M. P. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias. Nonlinear mixture model for hyperspectral unmixing. In *SPIE Conference on Image and Signal Processing for Remote Sensing XV*, 2009.
- [117] X. Chen and L. Vierling. Spectral mixture analyses of hyperspectral data acquired using a tethered balloon. *Remote Sensing of Environment*, 103(3) :338 – 350, 2006.
- [118] T. W. Ray and B. C. Murray. Nonlinear spectral mixing in desert vegetation. *Remote Sensing of Environment*, 55(1) :59 – 64, 1996.
- [119] A. Halimi, Y. Altmann, N. Dobigeon, and J-Y. Tourneret. Nonlinear unmixing of hyperspectral images using a generalized bilinear model. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(11) :4153 –4162, 2011.
- [120] I. Meganem, P. Deliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini. Linear-quadratic mixing model for reflectances in urban environments. *to appear in IEEE Transactions on Geoscience And Remote Sensing*, 2013.
- [121] G. Fontanilles, X. Briottet, S. Fabre, S. Lefebvre, and P.-F. Vandenhoute. Aggregation process of optical properties and temperature over heterogeneous surfaces in infrared domain. *Applied Optics*, 49(24) :4655–4669, 2010.

- [122] F. Becker and Z.L. Li. Surface temperature and emissivity at various scales : Definition, measurement and related problems. *Remote Sensing Reviews*, 12(3-4) :225–253, 1995.
- [123] C. Miesch, X. Briottet, Y. H. Kerr, and F. Cabot. Radiative transfer solution for rugged and heterogeneous scene observations. *Applied Optics*, 39 :6830–6846, 2000.
- [124] E. F. Vermote, D. Tanre, J. L. Deuze, M. Herman, and J.-J. Morcette. Second simulation of the satellite signal in the solar spectrum, 6S : an overview. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(3) :675–686, may 1997.
- [125] J. A. Gómez, E. de Miguel, O. G. de la Cámara, and A. Fernández-Renau. Status of the in-flight sensor. In *5th EARSeL Workshop on Imaging Spectroscopy*, 2007.
- [126] K. B. Petersen and M. S. Pedersen. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*. URL :<http://matrixcookbook.com/>, 2008.
- [127] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, Mass., U.S.A., 2nd edition, 1999.
- [128] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, U.S.A., 2000.
- [129] Briottet X., Marion R., Carrère V., Jacquemoud S., Chevrel S., Prastault P., D’oria M., Giloupe P., Hosford S., Lubac B., and Bourguignon A. HYPXIM : A new hyperspectral sensor combining Science/Defence applications. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2011.
- [130] J.P. Nakache and J. Confais. *Approche pragmatique de la classification : Arbres hiérarchiques, Partitionnements*. Technip, 2004.
- [131] L. Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, 16(1) :1–3, 1966.
- [132] C. Baccigalupi, L. Bedini, C. Burigana, G. De Zotti, A. Farusi, D. Maino, M. Maris, F. Perrotta, E. Salerno, L. Toffolatti, and A. Tonazzini. Neural networks and separation of cosmic microwave background and astrophysical signals in sky maps. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318 :769–780, 2000.
- [133] D. Maino, A. Farusi, C. Baccigalupi, F. Perrotta, A. J. Banday, L. Bedini, C. Burigana, G. De Zotti, K. M. Górski, and E. Salerno. All-sky astrophysical component separation with fast independent component analysis (FastICA). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 334(1) :53–68, 2002.
- [134] C. Baccigalupi, F. Perrotta, G. De Zotti, G. F. Smoot, C. Burigana, D. Maino, L. Bedini, and E. Salerno. Extracting cosmic microwave background polarisation from satellite astrophysical maps. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354 :55–70, 2004.
- [135] J. Delabrouille, J.-F. Cardoso, and G. Patanchon. Multidetector multicomponent spectral matching and applications for cosmic microwave background data analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346 :1089–1102, 2003.

- [136] G. Patanchon, J.-F. Cardoso, J. Delabrouille, and P. Vielva. Cosmic microwave background and foregrounds in Wilkinson Microwave Anisotropy Probe first-year data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(4) :1185–1194, 2005.
- [137] Y. Moudden, J.-F. Cardoso, J.-L. Starck, and J. Delabrouille. Blind component separation in wavelet space. application to cmb analysis. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2005(15) :2437–2454, 2005.
- [138] J. Aumont and J.F. Macias-Perez. Blind component separation for polarized observations of the CMB. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 376 :739–758, 2007.
- [139] O. Forni, F. Poulet, J.-P. Bibring, S. Erard, C. Gomez, Y. Langevin, B. Gondet, and The Omega Science Team. Component separation of omega spectra with ICA. In *36th Annual Lunar and Planetary Science Conference*, page 1623, 2005.
- [140] C. Jutten, S. Moussaoui, and F. Schmidt. How to apply ica on actual data? Example of mars hyperspectral image analysis. In *15th International Conference on Digital Signal Processing*, pages 3 –12, 2007.
- [141] S. Moussaoui, H. Hauksdottir, F. Schmidt, C. Jutten, J. Chanussot, D. Brie, S. Douté, and J.A. Benediktsson. On the decomposition of Mars hyperspectral data by ICA and Bayesian positive source separation. *Neurocomputing*, 71(10-12) :2194–2208, 2008.
- [142] D. Nuzillard and A. Bijaoui. Blind source separation and analysis of multispectral astronomical images. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147(1) :129–138, 2000.
- [143] M. Funaro, E. Oja, and H. Valpola. Independent component analysis for artefact separation in astrophysical images. *Neural Networks*, 16(3-4) :469–478, 2003.
- [144] H. Snoussi, G. Patanchon, J. F. Macias-Perez, A. Mohammad-Djafari, and J. Delabrouille. Bayesian blind component separation for cosmic microwave background observations. In *the MAXENT international workshop*, 2001.
- [145] V. Stolyarov, M. P. Hobson, A. N. Lasenby, and R. B. Barreiro. All-sky component separation in the presence of anisotropic noise and dust temperature variations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 357 :145–155, 2005.
- [146] E. Kuruoglu. Bayesian source separation for cosmology. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(1) :43 –54, 2010.
- [147] O. Berné, C. Joblin, Y. Deville, J. D. Smith, M. Rapacioli, J. P. Bernard, J. Thomas, W. Reach, and A. Abergel. Analysis of the emission of very small dust particles from Spitzer spectro-imagery data using blind signal separation methods. *Astronomy and Astrophysics*, 469 :575–586, 2007.
- [148] M. Remazeilles, J. Delabrouille, and J.-F. Cardoso. Foreground component separation with generalized internal linear combination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418 :467–476, 2011.

-
- [149] L. Bedini, D. Herranz, E. Salerno, C. Baccigalupi, E. E. Kuruoglu, and A. Tonazzini. Separation of correlated astrophysical sources using multiple-lag data covariance matrices. *EURASIP Journal of Applied Signal Processing*, 2005 :2400–2412, 2005.
- [150] S. M. Leach, J.-F. Cardoso, C. Baccigalupi, R. B. Barreiro, M. Betoule, J. Bobin, A. Bonaldi, J. Delabrouille, G. de Zotti, C. Dickinson, H. K. Eriksen, J. González-Nuevo, F. K. Hansen, D. Herranz, M. Le Jeune, M. López-Caniego, E. Martínez-González, M. Massardi, J.-B. Melin, M.-A. Miville-Deschênes, G. Patanchon, S. Prunet, S. Ricciardi, E. Salerno, J. L. Sanz, J.-L. Starck, F. Stivoli, V. Stolyarov, R. Stompor, and P. Vielva. Component separation methods for the PLANCK mission. *Astronomy and Astrophysics*, 491 :597–615, 2008.
- [151] J.-L. Starck and F. Murtagh. *Astronomical Image and Data Analysis*. 2nd edition, Springer, Astronomy and Astrophysics Library, 2006.
- [152] H. Carfantan, A. Jarno, D. Serre, V. Mazet, and S. Bourguignon. *Modélisation de la PSF de MUSE*. MUSE, ANR DAHLIA, internal report, 2010.
- [153] D. Serre, E. Villeneuve, H. Carfantan, L. Jolissaint, V. Mazet, S. Bourguignon, and A. Jarno. Modeling the spatial PSF at the VLT focal plane for MUSE WFM data analysis purpose. *SPIE Proc. Astronomical Telescopes and Instrumentation*, 2010.
- [154] A. Villa, J. Li, A. Plaza, and J.M. Bioucas-Dias. A new semi-supervised algorithm for hyperspectral image classification based on spectral unmixing concepts. In *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2011.

Publications scientifiques de l'auteur

Article de revue internationale

- [1] I. Meganem, P. Deliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini. Linear-quadratic mixing model for reflectances in urban environments. *to appear in IEEE Transactions on Geoscience And Remote Sensing*, 2013.

Actes de conférences internationales avec comité de lecture

- [2] I. Meganem, Y. Deville, S. Hosseini, H. Carfantan, and M.S. Karoui. Extraction of stellar spectra from dense fields in hyperspectral MUSE data cubes using non-negative matrix factorization. In *Proceedings of 3rd IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), Lisbon, Portugal*, 2011.
- [3] I. Meganem, Y. Deville, S. Hosseini, P. Déliot, and X. Briottet. Linear-quadratic and polynomial non-negative matrix factorization ; application to spectral unmixing. In *Proceedings of the 19th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Barcelona, Spain*, 2011.
- [4] I. Meganem, P. Déliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini. Physical modelling and non-linear unmixing method for urban hyperspectral images. In *Proceedings of 3rd IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), Lisbon, Portugal*, 2011.

Actes de conférences nationales avec comité de lecture

- [5] I. Meganem, Y. Deville, S. Hosseini, P. Déliot, and X. Briottet. Méthode de factorisation en matrices non négatives pour des mélanges linéaires quadratiques. In *Proceedings of 23ème édition du colloque GRETSI, Bordeaux, France*, 2011.

Colloques nationaux sans actes

- [6] I. Meganem, Y. Deville, S. Hosseini, P. Déliot, and X. Briottet. A non-negative matrix factorization method for a linear-quadratic mixing model in urban hyperspectral images. In *2ème colloque de la Société Française de Télédétection Hyperspectrale (SFTH), Toulouse, France*, 2012.
- [7] I. Meganem, P. Déliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini. Physical modelling and non-linear unmixing method for urban hyperspectral images. In *1er colloque de la Société Française de Télédétection Hyperspectrale (SFTH), Paris, France*, 2011.

Blind source separation methods for hyperspectral imaging. Application to urban remote sensing and astrophysics

Inès MEGANEM

Abstract

In this work, we developed Blind Source Separation methods (BSS) for hyperspectral images, concerning two applications : urban remote sensing and astrophysics.

The first part of this work concerned spectral unmixing for urban images, with the aim of finding, by an unsupervised method, the materials present in the scene, by extracting their spectra and their proportions. Most existing methods rely on a linear model, which is not valid in urban environments because of 3D structures. Therefore, the first step was to derive a mixing model adapted to urban environments, starting from physical equations based on radiative transfer theory. The derived linear-quadratic model, and possible hypotheses on the mixing coefficients, are justified by results obtained with simulated realistic images. We then proposed, for the unmixing, BSS methods based on NMF (Non-negative Matrix Factorization). These methods are based on gradient computation taking into account the quadratic terms. The first method uses a gradient descent algorithm with a constant step, from which we then derived a Newton version. The last proposed method is a multiplicative NMF algorithm. These methods give better performance than a linear method from the literature.

Concerning astrophysics, we developed BSS methods for dense field images of the MUSE instrument. Due to the PSF (Point Spread Function) effect, information contained in the pixels can result from contributions of many stars. Hence, there is a need for BSS, to extract from these signals that are mixtures, the star spectra which are our "sources". The mixing model is linear but spectrally non-invariant. We proposed a BSS method based on positivity. This approach uses the parametric model of MUSE FSF (Field Spread Function). The implemented method is iterative and alternates spectra estimation using least squares (with positivity constraint) and FSF parameter estimation by a projected gradient descent algorithm. The proposed method yields good performance with simulated MUSE images.

Méthodes de Séparation Aveugle de Sources pour l'imagerie hyperspectrale. Application à la télédétection urbaine et à l'astrophysique

Inès MEGANEM

Résumé

Au cours de cette thèse nous avons développé des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) pour des images hyperspectrales, dans le cadre de deux champs d'application : la télédétection urbaine et l'astrophysique.

Dans la première partie de la thèse nous nous sommes intéressés au démixage hyperspectral pour des images urbaines, le but étant de retrouver d'une manière non supervisée les matériaux présents sur la scène en extrayant leurs spectres et leurs proportions. La plupart des méthodes de la littérature sont basées sur un modèle linéaire, qui n'est pas valide en milieu urbain à cause des structures 3D. Une première étape a donc été d'établir un modèle de mélange adapté aux milieux urbains, en partant d'équations physiques basées sur la théorie du transfert radiatif. Le modèle final de forme linéaire quadratique invariant spectralement, ainsi que les possibles hypothèses sur les coefficients de mélange, sont justifiés par les résultats obtenus sur des images simulées réalistes. Nous avons ensuite proposé, pour le démixage, des méthodes de SAS fondées sur la FMN (Factorisation en Matrices Non-négatives). Ces méthodes sont basées sur un calcul de gradient qui tient compte des termes quadratiques. La première méthode utilise un algorithme de gradient à pas fixe, à partir de laquelle une version de Newton a aussi été proposée. La dernière méthode est un algorithme FMN multiplicatif. Les méthodes proposées donnent de meilleures performances qu'une méthode linéaire de la littérature.

En astrophysique nous avons développé des méthodes de SAS pour des images de champs denses d'étoiles du spectro-imageur MUSE. A cause de la PSF (Point Spread Function), les informations contenues dans les pixels peuvent résulter des contributions de plusieurs étoiles. C'est là que réside l'intérêt de la SAS : extraire, à partir de ces signaux qui sont des mélanges, les spectres des étoiles qui sont donc nos "sources". Le modèle de mélange est linéaire non invariant spectralement. Nous avons proposé une méthode de SAS basée sur la positivité des données. Cette approche exploite le modèle paramétrique de la FSF (Field Spread Function) de MUSE. La méthode mise en place est itérative et alterne l'estimation des spectres par moindres carrés (avec contraintes de positivité) et estimation des paramètres de la FSF par un algorithme de gradient projeté. La méthode proposée donne de bonnes performances sur des images simulées de MUSE.