



# Stratégies de calcul intensif pour la simulation du post-flambement local des grandes structures composites raidies aéronautiques

Ludovic Barrière

## ► To cite this version:

Ludovic Barrière. Stratégies de calcul intensif pour la simulation du post-flambement local des grandes structures composites raidies aéronautiques. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA de Toulouse, 2014. Français. NNT: . tel-01018592

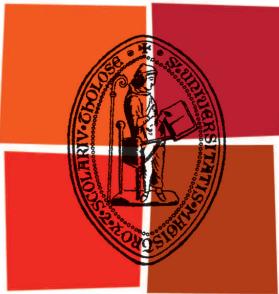
**HAL Id: tel-01018592**

<https://theses.hal.science/tel-01018592>

Submitted on 4 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par:

Institut National Supérieur des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA)

Discipline ou spécialité:

Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux

---

Présentée par

Ludovic BARRIÈRE

Sujet de la thèse:

Stratégies de calcul intensif pour la simulation du post-flambement local des grandes structures composites raidies aéronautiques

Soutenue le 30 Janvier 2014

---

Jury:

Bruno CASTANIÉ	Professeur des Universités à l'INSA de Toulouse	Directeur
Christian REY	Professeur des Universités au LMT, ENS Cachan	Rapporteur
David DUREISSEIX	Professeur des Universités à l'INSA de Lyon	Rapporteur
Olivier POLIT	Professeur des Universités au LEME, Paris X	Président
Steven MARGUET	Maître de Conférence à l'Université de Toulouse	Co-directeur
Jean-Charles PASSIEUX	Maître de Conférence à l'INSA de Toulouse	Co-directeur
Philippe CRESTA	Ingénieur de Recherche, Airbus Group Innovations	Invité

---

École doctorale:

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGEP)

Unité de recherche:

Institut Clément Ader EA-814



---

# Remerciements

---

Je tiens à remercier en premier lieu Bruno CASTANIÉ pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour l'avoir dirigé de la meilleure manière possible. Son exigence, son ouverture d'esprit et son expérience scientifique m'ont été très utiles. Son souci de la valorisation m'a en outre permis de participer à plusieurs conférences internationales (et de visiter notamment la côte Est Australienne!). Et enfin sa sympathie a rendu ces trois ans (et un peu plus) très agréables.

Mes co-encadrants, Steven MARGUET, Jean-Charles PASSIEUX et Philippe CRESTA, ont été très complémentaires et ont toujours su me motiver, m'aider, me guider ou me laisser prendre mes responsabilités selon les circonstances. Sans les échanges que nous avons eus, ce travail n'aurait pas été le même. Sans leur disponibilité et sans leurs nombreuses qualités humaines, que je n'ai pas la place d'énumérer, je n'aurais pas passé d'aussi bonnes années de thèse. Merci à eux.

Qu'il me soit permis de remercier tout particulièrement Olivier POLIT d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance. Lui et les rapporteurs, Christian REY et David DUREISSEIX, que je remercie également, m'ont fait l'immense honneur d'examiner mes travaux. Par leurs remarques et par les discussions que nous avons eues, ils ont contribué à améliorer la qualité de ce mémoire. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie chaleureusement Damien CROZES pour son aide, mais aussi pour sa gentillesse et sa disponibilité. Ce sont des collaborations spontanées comme celles-ci qui donnent de la profondeur à une expérience professionnelle. C'est dans le même esprit que j'ai eu la chance de côtoyer Joseph MORLIER. En plus de ses conseils, sa curiosité et sa bonne humeur m'ont permis d'avancer, je l'en remercie.

Ayant été accueilli au Département de Mécanique des Structures et Matériaux de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, je remercie son directeur et les personnels scientifiques et techniques. Merci à Marie-Odile MONSU et Luc TOUCHET pour les services administratifs rendus efficacement.

Qu'auraient été ces trois ans de thèse sans les collègues doctorants et chercheurs de l'Institut Clément Ader ? Je remercie donc dans le désordre, Amélie, Elsa, Teddy, Thomas, Julien, Pablo, Léo, Simon, Étienne, Benjamin, Jean-Sebastien, Haris, Sing, Hakim, Laurent, Florian, Nicolas, Victor, Simon D., Luc, Joël, Floran, Loïc, Ameur, Jean-François, Christophe, Sam, Miguel, Guilhem, Christian, Soraya, Jean-Phi, Sylvain, Greg, Irène, Jean-Emmanuel, Michael, Isabelle, Laure, Kamel, John, et tous les stagiaires, pour les moments partagés de doutes, de joie, de délice, de science (quand même un peu) et de pétanque... Je remercie également les amis d'ici et d'ailleurs, Loïc et Gaëlle, Nichou, Manu, les basketteurs de l'AS ISAE, les amis de longue date, Jean et Ysa, JB et Steph, Mika et sa troupe, Guigui, Vanessa,

Chacha et tous les autres, que j'ai toujours plaisir à retrouver.

Mes remerciements vont bien sûr à ma famille. Mes parents et mes grands-parents ont su me transmettre leurs valeurs et m'ont mis dans les conditions de réussir tout ce que j'ai entrepris. Leur amour m'a porté et je leur dois beaucoup. Merci aussi à Vincent et Elise, aux cousins et cousines et aux oncles et tantes, qui sont tous exceptionnels.

Enfin, je terminerai en remerciant Nathalie. Car une thèse, c'est bien, mais à deux, c'est mieux ! La fin aura été un peu intense, mais nous avons pu profiter de ces trois ans pour vivre une belle expérience, faire de beaux voyages, partager nos passions, nous supporter et nous soutenir dans l'adversité. Beaucoup d'amour, de tendresse et d'attentions qui ne laissent présager que du bonheur pour la suite, un peu plus au nord, en Belgique.

---

# Résumé

---

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude du post-flambement local des grandes structures composites raidies. Le post-flambement de telles structures concerne effectivement, en priorité, les éléments de peau entre les raidisseurs, appelés mailles. La simulation du post-flambement par la méthode des éléments-finis est aujourd'hui limitée par le coût du calcul, en particulier pour les grandes structures. Seules des zones restreintes peuvent être étudiées, en négligeant les interactions global/local.

L'objectif de cette thèse est de proposer une stratégie de calcul performante pour la simulation du post-flambement local des grandes structures raidies à partir des connaissances sur le comportement mécanique des structures en post-flambement et d'un découpage naturel le long des raidisseurs favorable au calcul parallèle.

Plusieurs stratégies de résolution ont déjà été proposées dans la littérature. Parmi celles-ci, les méthodes de réduction de modèle adaptative ont démontré leur capacité à réduire le nombre d'inconnues tout en maîtrisant l'erreur d'approximation de la solution des problèmes non-linéaires. La construction d'une base réduite à faible coût et l'amélioration de l'efficacité de la procédure adaptative font partie des défis actuels concernant ces méthodes. Par ailleurs, les méthodes de décomposition de domaine avec localisation non-linéaire sont particulièrement adaptées au calcul parallèle en mécanique des structures en présence de non-linéarités locales. L'équilibrage des charges et l'extensibilité du problème d'interface en sont les principales limites.

Les travaux de thèse portent dans un premier temps sur une stratégie de réduction de modèle adaptative. La base réduite initiale est formée de seulement deux composantes, calculées en début de résolution à faible coût. Les informations qui y sont contenues permettent de trouver un compromis entre leur coût de constitution et le coût de la procédure d'adaptation, qui est choisie du type "à la volée". Cette stratégie est évaluée sur un problème de post-flambement en cisaillement d'une plaque raidie et donne lieu à une publication. Dans le cas d'un flambement localisé sur quelques mailles d'une grande structure raidie, comme celle d'un fuselage, une combinaison avec une méthode de décomposition de domaine primaire est ensuite formulée. La réduction de modèle par projection est partitionnée, ainsi que la procédure d'adaptation. Le traitement des zones en post-flambement est différencié par localisation non-linéaire réduite et le coût de la procédure d'adaptation est rationalisé.

Toutes les méthodes sont implémentées dans un code de recherche programmé pendant la thèse. L'expérience du développement de code pour l'évaluation de méthodes de résolution est capitalisée à travers la conception et la programmation d'une bibliothèque éléments-finis orientée objet.



---

# Abstract

---

This thesis is part of the study of local post-buckling of large stiffened composite structures. Post-buckling of such structures actually rather concerns skin between stiffeners, called the elementary mesh of the structure. The finite element simulation of structures subjected to post-buckling still faces computational limits, especially for large structures. Only restricted area may be studied for now, neglecting global/local interactions.

The aim of the thesis is to propose an efficient computational strategy for local post-buckling analysis of large stiffened structures from knowledge on mechanical behavior of post-buckling structures and a natural partitionning along stiffeners conducive to parallel computation.

Several strategies have already been proposed in response to this issue. Among them are the adaptive model reduction solving techniques which demonstrated their ability to drastically reduce the number of unknowns as well as to control the approximation error of solving non-linear problems. The challenges regarding these techniques are the computation of a reduced basis at lower cost and the use of an efficient adaptive procedure. Furthermore, domain decomposition methods with a non-linear local step are suited to parallel computation in structural mechanics in the presence of local non-linearities. Load balancing and scalability of the global step are their main limits.

Our work deals first with an adaptive model reduction strategy. An initial reduced basis is made of two components only, which are computed at a low cost. They contain relevant information enabling to find a compromise between the cost of building them up and the cost of the “on the fly” adaptivity. This strategy is evaluated in the case of shear of a stiffened panel and has just been published. In order to address larger stiffened structures subjected to local post-buckling, like an aircraft fuselage, partitioning is then performed. The model reduction, as well as the adaptive procedure are written in the framework of the primal domain decomposition method with a non-linear local step. Local problems and interface problem are solved using a reduced basis. The adaptive procedure is rationalized over subdomains and interface. The partitioned strategy is also tested in the case of shear of a stiffened panel.

The methods are implemented in a research code developed for the purpose of the thesis. Experience and feedbacks on software development for the evaluation of solving methods are capitalized in a finite element object oriented library.



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>viii</b>
<b>Figures</b>	<b>xi</b>
<b>Tableaux</b>	<b>xvii</b>
<b>Algorithmes</b>	<b>xix</b>
 <b>Introduction générale</b>	 <b>3</b>
 <b>I Etat de l'art en simulation du post-flambement des structures et stratégies de calcul avancées</b>	 <b>9</b>
<b>1 Post-flambement des structures raidies et méthodes classiques de résolution</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	14
1.2 Phénomène de post-flambement . . . . .	14
1.2.1 Flambement général des structures élancées . . . . .	14
1.2.2 Réponse des structures raidies en post-flambement . . . . .	19
1.2.3 Endommagements et ruptures induits . . . . .	20
1.3 Modélisation des structures élancées et non-linéarités géométriques . . . . .	22
1.3.1 Cinématiques des structures élancées . . . . .	22
1.3.2 Équation d'équilibre : principe des puissances virtuelles . . . . .	26
1.3.3 Problème de flambement . . . . .	28
1.4 Méthodes de résolution semi-analytiques . . . . .	29
1.4.1 Méthode de Ritz-Galerkin . . . . .	29
1.4.2 Approche par développement asymptotique en post-flambement initial	31
1.4.3 Pré-dimensionnement de panneaux raidis . . . . .	33
1.5 Résolution par la méthode des éléments-finis . . . . .	37
1.5.1 Discrétisation du PPV . . . . .	37
1.5.2 Problème tangent et méthode de Newton-Raphson . . . . .	39
1.5.3 Approche global/local . . . . .	43
1.5.4 Méthodes alternatives . . . . .	45

1.6	Bilan du chapitre . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Stratégies de calcul avancées</b>	<b>51</b>
2.1	Introduction . . . . .	52
2.2	Réduction de modèle . . . . .	52
2.2.1	Réduction de modèle par projection . . . . .	52
2.2.2	Réduction de modèle a priori . . . . .	60
2.3	Calcul parallèle par décomposition de domaine . . . . .	64
2.3.1	Décomposition de domaine sans recouvrement . . . . .	65
2.3.2	Formulation du problème d'interface . . . . .	66
2.3.3	Résolution itérative du problème d'interface . . . . .	71
2.3.4	Newton-Krylov-Schur et localisation non-linéaire . . . . .	73
2.4	Approches combinées . . . . .	77
2.4.1	Méthode LaTIn micro/macro . . . . .	77
2.4.2	Autour des éléments finis généralisés . . . . .	78
2.4.3	Méthode asymptotique numérique et POD . . . . .	81
2.4.4	Partition de la réduction de modèle . . . . .	82
2.5	Bilan du chapitre . . . . .	85

## **II Contribution au calcul haute performance pour le post-flambement local des structures raidies**

**87**

<b>3</b>	<b>Réduction de modèle adaptative en post-flambement</b>	<b>91</b>
3.1	Introduction . . . . .	92
3.2	Stratégie PBAMR (Post-Buckling Adaptive Model Reduction) . . . . .	92
3.2.1	Une base réduite initiale minimale . . . . .	93
3.2.2	Une procédure d'adaptation <i>à la volée</i> . . . . .	94
3.2.3	Algorithme général . . . . .	95
3.3	Implémentation et validation du code de recherche . . . . .	97
3.4	Comportement de la stratégie et étude paramétrique sur un cas simple . . . . .	103
3.5	Étude des performances numériques : application à un panneau raidi . . . . .	108
3.6	Bilan du chapitre . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Réduction de modèle adaptative et décomposition de domaine pour le post-flambement local</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	114
4.2	Stratégie PBAMR et décomposition de domaine . . . . .	114
4.2.1	Partition de la réduction de modèle par projection . . . . .	114
4.2.2	Partition de la complétion <i>à la volée</i> . . . . .	117
4.2.3	Considérations pour le post-flambement local . . . . .	118
4.2.4	Algorithme général d'une stratégie de résolution pour le post-flambement local : PBAMR-DD . . . . .	123
4.3	Validation . . . . .	126
4.4	Bilan du chapitre . . . . .	130

<b>5 Une bibliothèque Python pour le développement de stratégies de calcul avancées</b>	<b>133</b>
5.1 Introduction . . . . .	134
5.2 Programmation orientée objet pour les éléments finis et les méthodes de résolution associées . . . . .	135
5.3 Conception de la bibliothèque ICAFE . . . . .	136
5.3.1 Les méthodes et leurs contraintes . . . . .	136
5.3.2 Organisation générale . . . . .	137
5.3.3 Zoom sur le package <code>domain</code> . . . . .	139
5.3.4 Zoom sur le package <code>mesh</code> . . . . .	142
5.3.5 Implémentation pour le calcul parallèle . . . . .	145
5.4 Bilan du chapitre . . . . .	148
<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>154</b>
<b>Annexes</b>	<b>170</b>
<b>A Evaluation d'une approche par éléments finis enrichis pour le post-flambement local</b>	<b>171</b>
A.1 Introduction . . . . .	172
A.2 Stratégie de calcul par GFEM en post-flambement local . . . . .	172
A.3 Évaluation sur un cas simple de poutre . . . . .	173
A.4 Bilan du chapitre . . . . .	177
<b>B Approche hybride primale-duale-mixte</b>	<b>179</b>
B.1 Introduction . . . . .	180
B.2 Extension de l'approche hybride . . . . .	180
B.3 Bilan et perspectives . . . . .	186



---

# Table des figures

---

1	Organisation des essais et simulations dans l'industrie aéronautique, (a) actuelle et (b) prévue dans le cadre du <i>Virtual Testing</i> . Source : EADS . . . . .	3
2	Flambement local du fuselage d'un Falcon 7X lors d'un essai statique. Source : Dassault Aviation . . . . .	4
3	Standards de conception des structures composites actuels et à venir avec l'élargissement du domaine de post-flambement autorisé. La charge critique de flambement doit passer d'environ 100% de la charge limite (généralement de l'ordre de 105%, mais cela dépend des structures) à 40% de la charge ultime pour les structures composites. Source : Projet européen <i>COCOMAT</i> . . . . .	5
1.1	Phénomène de flambement. Changement de branche d'équilibre. . . . .	14
1.2	Stabilité d'une branche d'équilibre en post-flambement. Influence du pilotage en effort ou déplacement. . . . .	15
1.3	<i>Snap-through</i> , ou claquage d'une membrane sphérique. . . . .	15
1.4	Exemple des poutres d'Euler . . . . .	16
1.5	(a) Plaque à bords libres en compression (instable), (b) Plaque à bords appuyés ou retenus de manière élastique (stable) . . . . .	17
1.6	(a) Cloque à 45° et (b) distribution du flux de cisaillement dans une plaque rectangulaire en post-flambement sous sollicitation en cisaillement pur (avant flambement le flux est homogène). source : simulation par Abaqus. . . . .	18
1.7	Définition d'un facteur d'abattement à partir de données d'essais sur cylindre sous chargement axial [Morgan <i>et al.</i> , 1965]. Avec $P$ la charge critique mesurée, $P_c$ la charge critique théorique et $\frac{R}{t}$ le rapport rayon sur épaisseur du cylindre. . . . .	18
1.8	Structure de fuselage typique. . . . .	19
1.9	Un mode de flambement local et un mode de flambement global associés respectivement à la 1ère et à la 17ème charge critique d'un panneau composite raidî [Boni <i>et al.</i> , 2012]. . . . .	20
1.10	Flambements locaux non-admissibles au niveau d'un raidisseur et modes de rupture induits. . . . .	21
1.11	Test de décollement de raidisseur en flexion sept points [Van Rijn, 2000]. . . . .	21
1.12	Cinématique de poutre (a) sans cisaillement (théorie de Bernouilli) et (b) avec cisaillement (théorie de Timoshenko). . . . .	22
1.13	Cinématiques de plaque (a) sans cisaillement (théorie de Love-Kirchhoff) et (b) avec cisaillement (théorie de Reissner-Mindlin). . . . .	23
1.14	Répartition des contraintes de cisaillement transverses (a) réelles, (b) approchées par la cinématique de Reissner-Mindlin. . . . .	26
1.15	Représentation d'un solide occupant un domaine $\Omega$ , soumis à un champ d'effort extérieur volumique et à un champ d'effort sur un contour $\partial\Omega_F$ , vérifiant des conditions essentielles sur un contour $\partial\Omega_u$ . . . . .	26

1.16 Répartition des contraintes en post-flambement aux bords d'une plaque carré en compression selon l'axe $y$ pour $n=10$ . [Timošenko et Gere, 1963]. . . . .	31
1.17 Plaque retenue de manière élastique [Vescovini et Bisagni, 2012] . . . . .	32
1.18 Distribution des contraintes en post-flambement dans une plaque en compression retenue de manière élastique sur ses bords [Vescovini et Bisagni, 2012]. . . . .	33
1.19 Répartition des contraintes de compression en post-flambement dans un panneau raidi. . . . .	34
1.20 Solutions simplement supporté et encastrée au niveau des raidisseurs [Byklum et al., 2004] . . . . .	35
1.21 Panneau raidi idéalisé en approches semi-analytiques par [Bisagni et Vescovini, 2009]. . . . .	35
1.22 (a) Raidisseur retenu élastiquement par les peaux adjacentes en post-flambement, (b) Réponse approchée d'un panneau raidi par la méthode de [Stamatelos et al., 2011]. . . . .	36
1.23 Quelques éléments classiques [Dhatt et al., 2013]. . . . .	37
1.24 Courbes d'effort-déplacement pour les comportements de <i>snap-through</i> et <i>snap-back</i> . . . . .	41
1.25 Technique de suivi de branche d'équilibre : (a) Arc-length sphérique, (b) Riks	42
1.26 Modèle éléments finis d'un essai de post-flambement d'une plaque raidie en composite [Bertolini et al., 2009]. . . . .	43
1.27 Approche global-local descendante en dimensionnement des structures. Modèle global AIRBUS et modèles locaux par [Bertolini, 2008]. . . . .	44
1.28 Modélisation en approche descendante (a) et en raffinement local (b) [Cresta, 2008]. . . . .	44
1.29 Comparaison des déformées locales obtenues par (a) modèle raffiné, (b) modèle raffiné localement et (c) approche descendante [Cresta, 2008]. . . . .	45
1.30 Schéma géométrique associé à la méthode LaTIn [Ladevèze, 1999]. Variétés de l'espace des solutions et schéma itératif. . . . .	48
1.31 (a)Schéma du dispositif de poutre soumise à un effort vertical. (b) Contraintes de cisaillement et de tension diagonale au centre du panneau A [Barrau et Castanié, 2005]. . . . .	49
2.1 Schéma de principe de l'action des stratégies de résolution. . . . .	52
2.2 Principe de la réduction de modèle par projection : approximation par combinaison linéaire de quelques modes globaux de déplacement ou de déformation. Ici, les inconnues du problème se résument aux coefficients $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	53
2.3 Concept de calcul offline/online . . . . .	55
2.4 Illustration du critère de compléTION à la volée. . . . .	58
2.5 Illustration des procédures adaptatives (a) à la volée et (b) <i>a posteriori</i> . CompléTION <i>a posteriori</i> réalisée par passage à l'incrément suivant (1) ou par correction de l'incrément initialisé (2). . . . .	59
2.6 Principe de l'adaptativité par intervalle de la méthode APHR ( <i>A Priori HyperReduction</i> ). . . . .	61
2.7 Intégration sur les éléments connectés aux noeuds de contrôle. . . . .	61
2.8 Tâches exécutées en parallèle sur N processeurs. Distinction entre tâches indépendantes et dépendantes. . . . .	64
2.9 Décomposition d'un domaine $\Omega$ sans recouvrement. . . . .	65
2.10 Schéma de principe des méthodes NKS. Source : [Cresta, 2008] . . . . .	73

## Table des figures

---

2.11 Schéma de principe des méthodes NKS avec localisation non-linéaire. Source : [Cresta, 2008] . . . . .	74
2.12 Schéma de principe de la formulation mixte pour la localisation non-linéaire. . . . .	76
2.13 Enrichissement de l'interpolation sur une zone restreinte à la fissure. La zone de transition entre éléments enrichis par les fonctions asymptotiques en pointe de fissure et éléments non-enrichis est matérialisée en rouge. . . . .	79
2.14 Stratégie d'échantillonnage pour la POD pour les problèmes non-linéaire d'évolution. $a_1$ et $a_2$ sont les amplitudes normalisées de deux types de chargement. Source [Yvonnet <i>et al.</i> , 2007] . . . . .	82
2.15 Réduction de modèle partitionnée. . . . .	82
2.16 Illustration du traitement spécifique d'un sous-domaine en cas d'erreur d'approximation trop importante. . . . .	84
3.1 Diagramme de classe minimal du code de recherche. . . . .	98
3.2 Définition du cas d'étude : plaque en cisaillement pur, bords rigides articulés aux coins (carré déformable). . . . .	98
3.3 Comparaison des premiers modes de flambement normalisés avec un code commercial (Abaqus). Champs de déplacement normalisé du premier, second et troisième mode de flambement calculé par (a, c et e) Abaqus et par (b, d et f) le code de recherche. . . . .	100
3.4 Comparaison des distributions des flux de cisaillement obtenus aux incrément 6 et 10 par (a et c) Abaqus et par (b et d) le code de recherche. Les résultats du code de recherche sont obtenus par la stratégie PBAMR. Le rendu par Abaqus est réalisé tel qu'une cellule correspond à un élément fini, alors que le rendu du code de recherche attribut une cellule par point d'intégration, ce qui explique la différence de résolution. . . . .	101
3.5 Comparaison des champs de défexion obtenus aux incrément 6 et 10 par (a et c) Abaqus et par (b et d) le code de recherche. Les résultats du code de recherche sont obtenus par la stratégie PBAMR. . . . .	102
3.6 Comparaison de l'évolution du flux de cisaillement maximum (a) et de la défexion maximale (b). L'erreur relative est calculée entre d'une part les résultats de la stratégie PBAMR et d'Abaqus, et d'autre part entre les résultats de la stratégie PBAMR et de la méthode de Newton-Raphson. . . . .	102
3.7 Suivi des coordonnées généralisées de la partie hors-plan (a) et plane (b) du champ de déplacement au cours des itérations. Les lignes pointillées verticales représentent les incrément, exprimés en facteur de charge critique de flambement. . . . .	103
3.8 Solution du calcul en post-flambement du panneau en cisaillement (a), le premier mode de flambement (b), et les deux premiers vecteurs additionnels de la base réduite (c, d) calculés par la procédure adaptative <i>à la volée</i> . Le champ de défexion est identifié par la coloration. . . . .	104
3.9 Évolution du ratio de forme du champ de déplacement au cours du chargement, exprimé en terme de facteur de charge critique de flambement. . . . .	105
3.10 Comparaison de la défexion maximale (a) et du flux de cisaillement maximal (b) obtenus par la stratégie PBAMR et la réduction de modèle non-adaptative.	105

3.11	Comparaison de l'erreur d'approximation obtenue par Newton-Raphson complet, la stratégie PBAMR et la réduction de modèle non-adaptative. Le paramètre de convergence $\eta_{New}$ est identifié par la ligne rouge en pointillés, et détermine la précision des deux premières méthodes seulement. . . . .	106
3.12	Comparaison de la distribution du flux de cisaillement obtenu par la stratégie PBAMR (a) et la réduction de modèle non adaptative (b). . . . .	106
3.13	Influence du paramètre de complétion $k$ et du paramètre de convergence $\eta_{New}$ sur le nombre de complétions. . . . .	107
3.14	Influence du paramètre de complétion $k$ et du paramètre de convergence $\eta_{New}$ sur le nombre d'itérations de la stratégie PBAMR. . . . .	107
3.15	Flambement local d'un panneau raidi artificiellement. . . . .	108
3.16	Évolution de la taille de la base réduite au cours des incrément pour différents raffinements de maillage. . . . .	109
3.17	Nombre d'itérations obtenues par la stratégie PBAMR et par Newton-Raphson complet (NR). . . . .	110
3.18	Temps de résolution de la stratégie PBAMR en comparaison avec la méthode de Newton-Raphson. Trois raffinements de maillage sont testés. . . . .	110
3.19	(a) Réduction du temps de calcul par la stratégie PBAMR par rapport à la méthode de Newton-Raphson. (b) Rapport entre une itération réduite et une itération complète de Newton. (c) Ratio entre une itération augmentée et une itération complète. . . . .	111
4.1	Analyse de flambement local à interfaces mixtes. Définition d'une zone de condensation de la raideur autour de l'interface. Mode de flambement localisé sur un sous-domaine et (1) ses voisins directs ou (2) aux abords de l'interface. . . . .	121
4.2	Cas d'un déplacement de corps rigide d'un sous-domaine provoqué par le flambement d'un autre sous-domaine. . . . .	122
4.3	Schéma de principe de l'adaptivité locale simple ou multiple. La première étape de localisation représentée ne requiert pas de complétion. La procédure d'adaptivité est en revanche déclenchée dans les suivantes. $\hat{L}$ représente un sous-domaine réduit et condensé sur son interface. $NLR$ désigne la localisation non-linéaire réduite dont la convergence de l'erreur, avec ou sans procédure d'adaptivité, est schématisée à côté. . . . .	123
4.4	Partition en quatre sous-domaines d'un panneau raidie en cisaillement pur. . . . .	126
4.5	Suivi de la taille des bases réduites au cours des incrément. . . . .	127
4.6	Efforts de membrane (a, c et e) et champs de déplacement (b, d et f) le long du raidisseur artificiel entre les domaines 1 et 2, mesurés aux incrément 3 (a et b), 6 (c et d) et 10 (e et f). . . . .	128
4.7	Ratio (en %) entre les temps de résolution des itérations par la stratégie PBAMR-DD et par NKS-NLL . (a) itérations réduites, (b) itérations enrichies d'une complétion. . . . .	129
4.8	Comparaison des temps de calcul des compléments de Schur locaux. Ratio entre la condensation réduite et la condensation non-réduite. . . . .	130
5.1	Organisation en package de la bibliothèque ICAFE . . . . .	138
5.2	Illustration de la description des sous-domaines, de leurs bords et des interfaces locales dans la bibliothèque ICAFE . . . . .	140
5.3	décomposition de domaine multi-niveaux . . . . .	141

## Table des figures

---

5.4	Diagramme des classes du package <code>domain</code> . . . . .	143
5.5	Diagramme des classes du package <code>mesh</code> . . . . .	144
5.6	Schéma de principe du parallélisme dynamique par la fonction MPI <i>spawn</i> . Concept de mise en attente, ou <i>Wait For Job</i> (WFJ), des processus esclaves.	146
5.7	Implémentation du constructeur de <code>DomainDecorator</code> pour le calcul parallèle.	146
5.8	Implémentation de la méthode <code>waitForJob</code> de la classe <code>DomainDecorator</code> .	147
5.9	Implémentation de la méthode <code>call_method</code> de la classe <code>DomainDecorator</code> .	148
5.10	Implémentation séquentielle et parallélisée du calcul des opérateurs des sous-domaines. Diffusion du mot clé <i>computeOperators</i> correspondant au nom de la méthode à exécuter en parallèle. . . . .	148
A.1	Illustration du concept Global/Local pour l'enrichissement d'un modèle grossier en post-flambement local. . . . .	173
A.2	Cas d'étude en post-flambement d'une poutre. . . . .	174
A.3	Comparaison des déformées pour différents maillages et enrichissements. La solution de référence éléments-finis est E0_M2. (a) Enrichissements portés par un maillage de type M0. (b) Enrichissements portés par un maillage de type M1. (c) Enrichissements portés par un maillage de type M2. . . . .	176



---

# Liste des tableaux

---

3.1	Géométrie et propriétés matériau de la plaque en cisaillement . . . . .	98
3.2	Facteurs de charge critique de flambement calculés sur une configuration pré-chargée à 10% des déplacements imposés nominaux. . . . .	99
4.1	Récapitulatif des performances de la méthode PBAMR-DD en comparaison avec la méthode de NKS avec localisation non-linéaire (NKS-NLL). . . . .	129
A.1	Types d'enrichissements par degré de liberté. . . . .	174
A.2	Niveaux de raffinement de maillages. . . . .	175
A.3	Nombre de degrés de liberté et de points d'intégrations pour les différents maillages et enrichissements. . . . .	175



---

# Liste des Algorithmes

---

1	Méthode de Newton-Raphson (efforts imposés) . . . . .	41
2	Méthode de Newton-Krylov-Schur en approche primale . . . . .	74
3	Méthode de Newton-Krylov-Schur avec localisation non-linéaire . . . . .	75
4	Algorithme de la stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement (PBAMR) . . . . .	96
-	Fonction RBInit . . . . .	124
-	Fonction RBInit-nonlocal . . . . .	124
5	Stratégie de résolution en post-flambement par réduction de modèle adaptative et décomposition de domaine (PBAMR-DD). . . . .	125



# **Introduction générale**



La dernière décennie a vu l'aboutissement de grands programmes aéronautiques innovants. Les A380, B787 et A350 ont notamment intégrés dans leurs structures des matériaux composites à base de fibres de carbone et de matrice organique, dans des proportions de plus en plus importantes. L'innovation est effectivement nécessaire dans un secteur aussi concurrentiel que l'aéronautique. Elle doit être un levier pour l'amélioration des performances et des services rendus par l'avion, et pour la réduction de son impact environnemental. Mais il s'agit aussi, sous une autre forme, de réduire les coûts de production et les temps des cycles de développement (*Time To Market*) pour améliorer la rentabilité des programmes.

Une partie du cycle de développement d'un aéronef consiste à concevoir la structure pour qu'elle réponde aux critères de performance et aux normes de sécurité. Cette phase s'appuie sur des essais et des simulations qui permettent de tester, de comprendre et de valider les concepts technologiques proposés de l'échelle d'un coupon à celle de la structure complète, en passant par les échelles intermédiaires :

- détails structuraux (jonctions collés ou boulonnées)
- sous-structures (panneaux de fuselage, portes)
- sous-ensemble (tronçon de fuselage, aile)

Aujourd'hui, un grand nombre d'essais et de simulations sont réalisés aux petites échelles. Ce nombre diminue à mesure que l'échelle augmente, comme le montre la Figure 1a. Il est certain que le coût d'un essai est fonction de l'échelle du composant. Les enjeux concernant les essais sur la cellule complète d'un avion sont donc particulièrement importants.

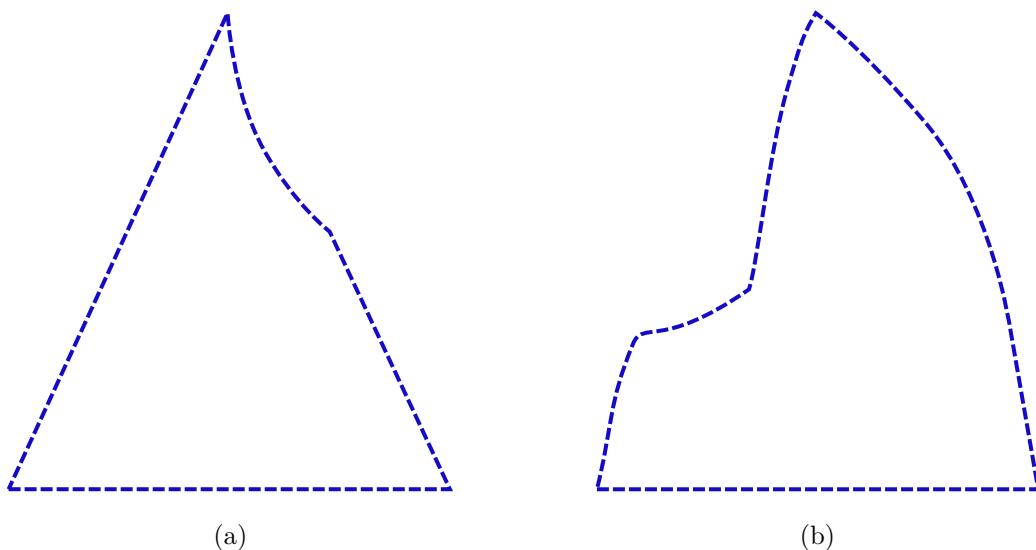


FIGURE 1 – Organisation des essais et simulations dans l'industrie aéronautique, (a) actuelle et (b) prévue dans le cadre du *Virtual Testing*. Source : EADS

La maximisation de la confiance dans les essais les plus critiques est un des objectifs du *Virtual Testing*. Le concept du *Virtual Testing* vise ainsi à augmenter la part de la simulation dans le processus de conception comme l'illustre la Figure 1b. La simulation doit en effet permettre d'aboutir à des prototypes de structures virtuelles optimisées par rapport aux critères donnés et suffisamment fiables pour que le premier essai soit le bon (*Getting it right the first time!* selon les termes anglophones). La fiabilité du prototype virtuel repose sur les comparaisons essais/simulations réalisées aux échelles inférieures, et une certaine maturité des modélisations utilisées. De cette manière le *Virtual Testing* doit pouvoir participer de la

réduction des coûts et des délais de développement.

En ce qui concerne les performances, les standards de conception des structures aéronautiques fixent les priorités en termes de modélisation des phénomènes physiques. Il est ainsi primordial que le comportement de la structure soit de nature réversible pour des charges inférieures aux charges ultimes. La charge ultime correspond en effet à la charge maximale supportée par la structure en phase d'exploitation, ou charge limite, multipliée par un coefficient de sécurité (actuellement 1.5). La première nécessité est donc de pouvoir modéliser le comportement linéaire de la structure et prédire l'initiation des phénomènes irréversibles ou dégradations (endommagements, déformation plastique, ...). Cependant, les structures aéronautiques sont constituées d'éléments élancés (plaques, poutres) susceptibles de flamber lorsque la charge appliquée dépasse leur charge critique de flambement. La phase de post-flambement qui s'ensuit est réversible jusqu'à un certain niveau de chargement à partir duquel des dégradations apparaissent. Ces dégradations peuvent être de nature et de localisation différentes de celles qui apparaissent sans flambement, du fait de la modification du mode de travail de la structure. C'est le cas du décollement des raidisseurs induit par les concentrations de contraintes à leurs jonctions avec la peau en flambement. La Figure 2 montre que le flambement des structures raidies aéronautiques est en effet prioritairement localisé, la peau du fuselage formant par exemple des cloques entre les raidisseurs.



FIGURE 2 – Flambement local du fuselage d'un Falcon 7X lors d'un essai statique. Source : Dassault Aviation

Dans les standards de conception actuels des structures composites, le flambement est autorisé autour de la charge limite (voir Figure 3a). Autrement dit, le post-flambement doit être réversible jusqu'à la charge ultime, soit environ 1.5 fois la charge critique de flambement. La réduction de la masse est un facteur de performance important et l'autorisation du flambement donne une marge supplémentaire pour alléger les structures. En effet, en réduisant les épaisseurs des éléments élancés, ou en choisissant des matériaux de masse volumique plus faible (ce qui induit souvent une rigidité plus faible), la charge critique de la structure diminue. Lorsque la charge critique est inférieure à la charge ultime, le critère de flambement devient limitant pour la réduction de la masse, devant les critères de réversibilité du comportement. C'est la raison pour laquelle, de nouveaux standards de conception ont été proposés dans le cadre d'un projet Européen sur le post-flambement des structures

composites. Ils visent à élargir la plage de chargement en phase de post-flambement (voir la Figure 3b).

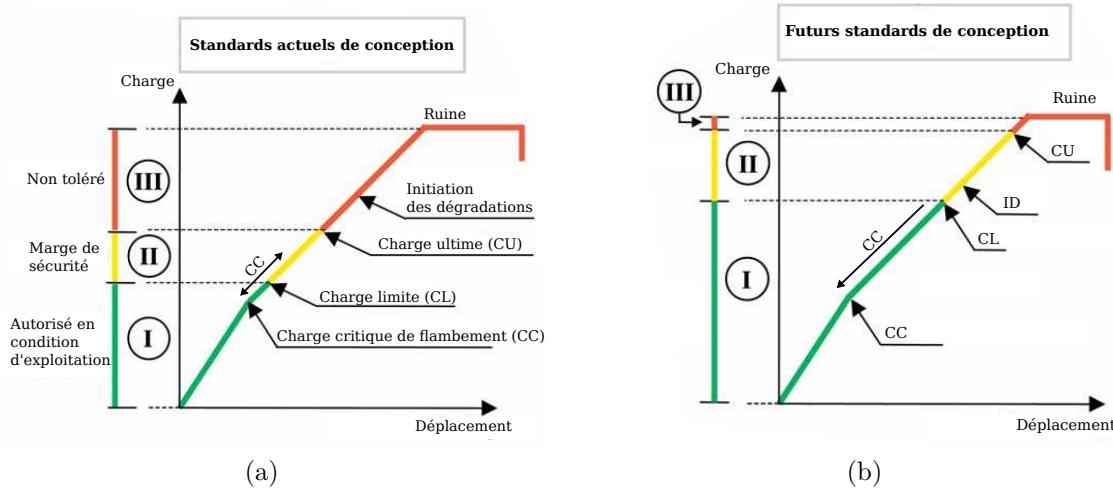


FIGURE 3 – Standards de conception des structures composites actuels et à venir avec l’élargissement du domaine de post-flambement autorisé. La charge critique de flambement doit passer d’environ 100% de la charge limite (généralement de l’ordre de 105%, mais cela dépend des structures) à 40% de la charge ultime pour les structures composites. Source : Projet européen COCOMAT

Dans le cadre du *Virtual Testing* et en vue de l’allègement des structures, la simulation du post-flambement local des grandes structures raidies prend toute son importance. De nombreux défis restent néanmoins à relever. Alors que la modélisation des coupons ou des panneaux est aujourd’hui suffisamment précise pour représenter les phénomènes observés, celles des sous-structures et de la structure complète ne permettent pas de prédire les effets locaux non-linéaires comme le post-flambement, ni leurs impacts tant sur les dégradations à l’échelle microscopique, que sur la réponse globale de la structure. Une des raisons tient de la complexité des modèles qu’il faudrait mettre en place et de la taille des systèmes d’équations à résoudre. Pourtant, les ressources informatiques n’ont cessé de croître, avec notamment l’ère des super-calculateurs et des processeurs *multi-cores*, dotés d’espaces mémoire toujours plus grands. Ces nouveaux moyens reposent sur une approche différente de la puissance informatique. Autrefois il s’agissait d’augmenter la fréquence des opérations réalisées. Maintenant, pour des raisons technologiques, la tendance est à la parallélisation des tâches. Le saut en termes de taille et de multiplicité des problèmes à résoudre est trop important pour pouvoir s’appuyer uniquement sur l’accroissement des ressources informatiques. Les méthodes de calcul doivent aussi changer, et s’adapter notamment aux nouvelles architectures parallèles des nouveaux ordinateurs et plate-formes de calcul.

Les méthodes de calcul mises en place aujourd’hui permettent de contourner le problème du coût du calcul des problèmes de grande taille par la parallélisation mais n’apportent pas de solution suffisamment précise et prédictive pour être employées dans le cadre du *Virtual Testing*. Il s’agit en effet de méthodes basées sur une sous-structuration, qui dans le domaine linéaire permettent de calculer une solution exacte en parallélisant les calculs par sous-structure. Dans le domaine non-linéaire, comme pour le post-flambement local, les interactions entre les sous-structures et la structure globale ne sont pas prises en compte par ces approches dites “descendantes”. Les efforts transitent ainsi de l’échelle globale vers

les échelles locales mais les modifications de raideurs locales ne sont pas répercutées dans la modélisation de la réponse globale.

Pour réaliser un réel couplage entre les modèles fins locaux, éventuellement non-linéaires, et les modèles globaux, des méthodes multi-échelles sont développées dans les laboratoires de recherche en mécanique numérique. Les méthodes de décomposition de domaine ont prouvé leur capacité à résoudre efficacement, avec précision, des problèmes de grandes tailles en exploitant les ressources parallèles. Elles bénéficient surtout d'une bonne extensibilité. Autrement dit, l'accélération du calcul est conservée, voire améliorée, lorsque la taille des problèmes et le nombre de processeurs en parallèle augmentent. Les méthodes de décomposition de domaine sont matures et sont même implémentées dans certains logiciels de simulation commerciaux. Leur faiblesse réside toutefois dans la prise en compte de phénomènes non-linéaires localisés, qui engendrent soit un surcoût global, soit un déséquilibre entre les charges de calculs affectées aux processeurs en parallèle.

Outre le recours au calcul parallèle, des recherches s'orientent depuis longtemps déjà (W. Ritz fin 19e siècle, R.-R Craig fin des années 60, A.K. Noor à la fin des années 70) vers l'utilisation d'une représentation réduite de la solution pour diminuer la taille des problèmes. Aujourd'hui, cette idée donne lieu à quelques méthodes qui font l'objet de nombreux travaux. Il y a d'une part les méthodes de réduction de modèle par base réduite qui permettent d'utiliser des connaissances sur le problème à résoudre, acquises notamment par l'expérience et les multiples simulations déjà réalisées sur un modèle similaire dans le cadre d'une optimisation par exemple (méthodes dites *base réduite* (RB) et *décomposition orthogonale propre* (POD)). Et il y a d'autre part, les méthodes qui construisent une représentation réduite de la solution dans tout un espace de paramètres, à moindre coût, par séparation de variables (méthode dite *décomposition propre généralisée* (PGD)). Ces différentes approches sont très efficaces pour des problèmes linéaires, mais nécessitent des aménagements en présence de non-linéarités (post-flambement). Par ailleurs, pour construire une représentation réduite, il faut souvent être capable de résoudre le problème initial pour différentes valeurs des paramètres, ce qui peut constituer un défi en soi, comme pour le post-flambement local des structures aéronautiques.

## Objectifs et apports de la thèse :

L'objectif de nos travaux de recherche est donc de proposer une stratégie de calcul adaptée au problème du post-flambement local des grandes structures raidies aéronautiques. L'utilisation de la compréhension mécanique du phénomène de post-flambement local, à travers une représentation réduite, et la mise à profit du découpage naturel des structures raidies dans une même stratégie, constituent la voie d'étude choisie. La réduction de modèle par projection et la décomposition de domaine sont les principaux ingrédients que nous avons associés dans cette stratégie. À la façon de la méthode de Craig-Bampton [Craig et Bampton, 1968] pour les problèmes dynamiques de grande taille, notre proposition recherche un équilibre global à partir de représentations réduites locales. Une difficulté réside dans la non-linéarité du phénomène local.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention entre l'Institut Clément Ader et EADS Innovation Works. Elle s'inscrit dans la suite des travaux menés par Julien Bertolini sur l'étude de l'influence du post-flambement sur le décollement de raidisseurs dans les structures composites raidies [Bertolini, 2008]. Elle découle également des recherches de Philippe Cresta, sur des méthodes de décomposition de domaine en présence de non-linéarités

locales [Cresta, 2008]. Le manuscrit s'articule de la façon suivante :

La première partie regroupe les chapitres qui permettent de situer les travaux de cette thèse dans la littérature :

- **Le premier chapitre** introduit le problème mécanique du post-flambement et sa modélisation. Les méthodes classiques de résolution sont présentées et leurs faiblesses sont mises en évidence.
- **Le second chapitre** présente des stratégies de calcul avancées qui ont fait leurs preuves dans la résolution de problèmes présentant des caractéristiques communes à celui du post-flambement local des grandes structures raidies.

La seconde partie présente les contributions personnelles sous la forme de trois chapitres :

- **Le troisième chapitre** est en effet consacré à une méthode réduction de modèle adaptative en post-flambement. Une représentation réduite du phénomène est ainsi construite efficacement malgré la non-linéarité du post-flambement.
- **Le quatrième chapitre** présente l'extension de la précédente méthode au cas du post-flambement local des grandes structures raidies. Cette extension est réalisée au moyen d'une combinaison avec une méthode de décomposition de domaine.
- Enfin, **le cinquième chapitre** présente les réflexions et les travaux autour de la programmation de stratégies de calcul avancées dans une bibliothèque Python orientée objet.

En annexe, un chapitre décrit une voie d'étude intéressante mais seulement partiellement explorée au cours de cette thèse et un autre formalise une extension d'une méthode de décomposition de domaine dite hybride.

### Valorisation scientifique :

Les travaux de cette thèse ont été valorisés à travers la publication d'un article dans une revue à comité de lecture [Barrière *et al.*, 2013] et la participation à des conférences nationales et internationales [Barrière *et al.*, 2012 ; Barrière *et al.*, 2013b ; Barrière *et al.*, 2013c ; Barrière *et al.*, 2013a].



## Première partie

**Etat de l'art en simulation du  
post-flambement des structures et  
stratégies de calcul avancées**



---

La première partie de ce manuscrit a pour but de préciser le cadre de l'étude. La simulation du phénomène de post-flambement des structures nécessite en effet trois étapes. La première étape est celle de l'expérience, des observations et de la compréhension mécanique du phénomène qui permettent notamment d'énoncer des hypothèses simplificatrices. La seconde étape consiste en la mise en équation du problème, sa modélisation. Enfin, la troisième étape, qui nous intéresse particulièrement, est celle de la résolution. Cette partie regroupe donc deux chapitres :

- Le premier fait le point sur le phénomène de post-flambement des structures raidies d'une part et sur les méthodes plutôt classiques de mise en équation et de résolution d'autre part.
- Dans le second chapitre, nous avons voulu présenter des méthodes de résolution plus innovantes, souvent plus performantes, en élargissant la perspective à des méthodes qui n'ont probablement pas encore été appliquées à la résolution de problème de post-flambement, mais qui, par certains aspects, présentent un intérêt pour la résolution de problèmes non-linéaires de grande taille qui nous préoccupent.



---

# Post-flambement des structures raidies et méthodes classiques de résolution

---

**Résumé**

*Le post-flambement a fait l'objet de nombreuses études depuis les années 40, de la simple poutre aux structures raidies complexes. Malgré cela, il reste un thème de recherche dynamique. La sensibilité aux défauts, l'optimisation de la masse des structures, les dommages induits par ce mode de déformation particulier sont autant de thématiques scientifiques. Les questions sous-jacentes concernent les aspects de modélisation et de résolution de ces problèmes non-linéaires. Ce chapitre constitue un bref état de l'art des réponses classiquement apportées à ces questions.*

**Sommaire**

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Phénomène de post-flambement</b>	<b>14</b>
1.2.1	Flambement général des structures élancées	14
1.2.2	Réponse des structures raidies en post-flambement	19
1.2.3	Endommagements et ruptures induits	20
<b>1.3</b>	<b>Modélisation des structures élancées et non-linéarités géométriques</b>	<b>22</b>
1.3.1	Cinématiques des structures élancées	22
1.3.2	Équation d'équilibre : principe des puissances virtuelles	26
1.3.3	Problème de flambement	28
<b>1.4</b>	<b>Méthodes de résolution semi-analytiques</b>	<b>29</b>
1.4.1	Méthode de Ritz-Galerkin	29
1.4.2	Approche par développement asymptotique en post-flambement initial	31
1.4.3	Pré-dimensionnement de panneaux raidis	33
<b>1.5</b>	<b>Résolution par la méthode des éléments-finis</b>	<b>37</b>
1.5.1	Discrétisation du PPV	37
1.5.2	Problème tangent et méthode de Newton-Raphson	39
1.5.3	Approche global/local	43
1.5.4	Méthodes alternatives	45
<b>1.6</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>49</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre présente le cadre général des travaux de thèse réalisés. Les phénomènes de flambement et post-flambement, qui concernent les structures élancées, sont décrits dans une première section. Une attention particulière est portée aux structures raidies aéronautiques, notamment celles en matériaux composites. Dans une seconde section, la modélisation de ces structures est présentée et les équations qui gouvernent le flambement et le post-flambement sont formulées. Enfin, les deux dernières sections sont dédiées aux méthodes de résolution. Les méthodes semi-analytiques, rapides et peu coûteuses mais restreintes aux problèmes géométriquement et matériellement simple sont, d'une part, exposées. D'autre part, une revue de méthodes numériques éprouvées, basées sur les éléments-finis et adaptées à une grande diversité de problème, mais plus coûteuses, est établie.

## 1.2 Phénomène de post-flambement

L'étude du post-flambement, comme son nom l'indique, décrit le comportement d'une structure après un certain niveau de chargement appelé chargement critique de flambement. Le flambement, ou flambage, concerne toutes les structures dites "élancées", qui présentent au moins une dimension très petite devant les autres. Dans le cas des plaques et coques, cette dimension est l'épaisseur. Pour les poutres, il s'agit des dimensions de la section, faibles devant la longueur. Le flambement des structures de base, plaques, coques et poutres est d'abord introduit. Ces structures de base s'assemblent pour former des structures raidies qui héritent de la sensibilité au flambement de leurs composants. Une attention particulière est donc porté ensuite à ces structures qui sont largement utilisées en aéronautique.

### 1.2.1 Flambement général des structures élancées

L'instabilité de flambement est liée à la géométrie de la structure et à son chargement. Une structure élancée chargée en compression dans son plan ou le long de son axe, par opposition à un chargement transverse ou en flexion, entre dans un état d'équilibre instable à partir d'un certain niveau de chargement. Autrement dit, au delà de ce niveau de chargement, une perturbation infinitésimale modifie le mode de déformation de la structure [Timošenko et Gere, 1963]. Le flambement correspond donc à un changement de branche d'équilibre, de la branche fondamentale à une branche secondaire, tel que décrit Figure 1.1.

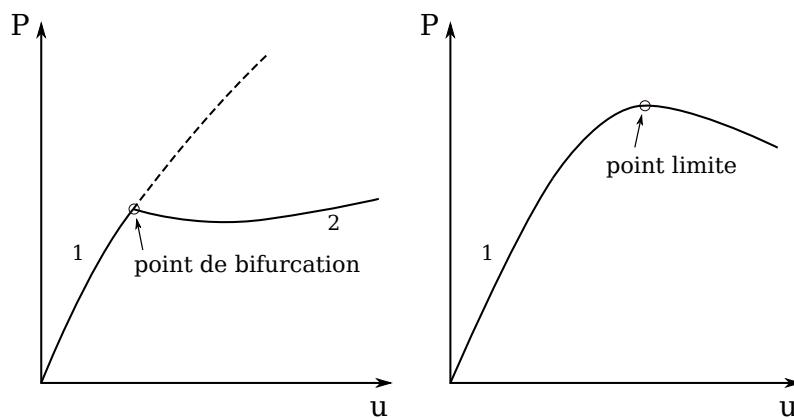


FIGURE 1.1 – Phénomène de flambement. Changement de branche d'équilibre.

La charge critique de flambement défini un point théorique de la courbe reliant les efforts au déplacement, appelé point de bifurcation ou point limite.

Après flambement (en phase de post-flambement), la structure se déforme dans les directions transverses à l'axe ou au plan de chargement. Une partie de l'énergie de déformation dans le plan, ou selon l'axe, est donc transformée en énergie de déformation de flexion et de cisaillement transverse. Le nouvel état d'équilibre peut-être lui-même stable ou instable dans le sens où une perturbation de l'effort imposé entraîne une augmentation indéterminée de la déflexion.

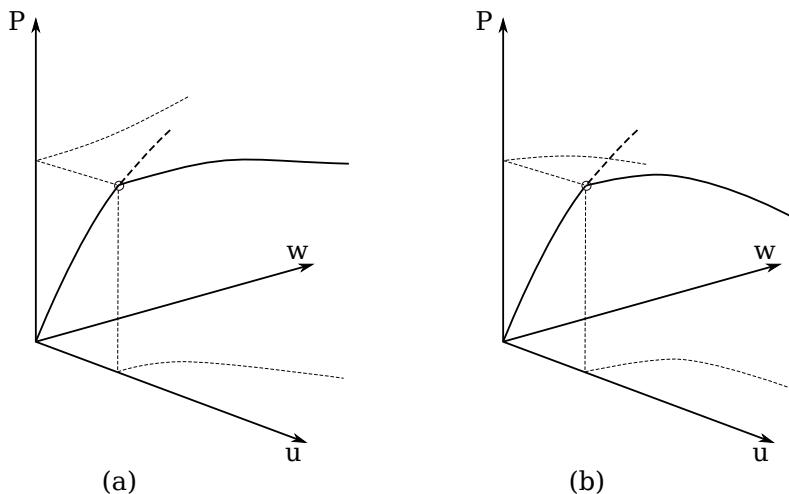


FIGURE 1.2 – Stabilité d'une branche d'équilibre en post-flambement. Influence du pilotage en effort ou déplacement.

Il est intéressant de noter qu'un chargement par déplacement imposé conduit nécessairement à une branche secondaire stable, par projection de celle-ci dans le plan formé par le déplacement imposé et la déflexion Figure 1.2. De façon générale, une branche d'équilibre instable conduit à la ruine immédiate de la structure. Mais la branche d'équilibre peut également être initialement instable puis retrouver sa stabilité. C'est le cas du *snap-through*, ou phénomène de claquage, schématisé Figure 1.3.

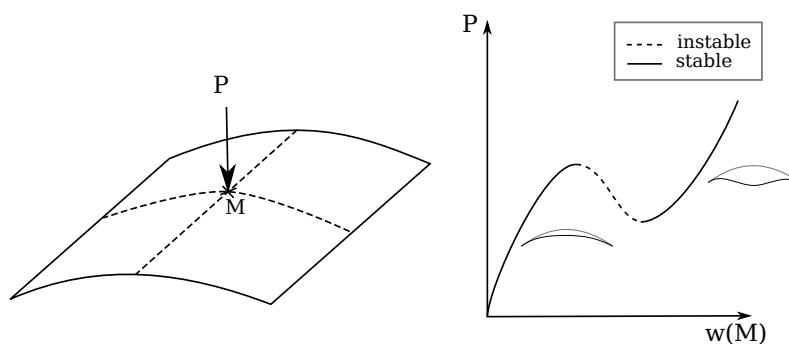


FIGURE 1.3 – *Snap-through*, ou claquage d'une membrane sphérique.

Dans le cas d'un post-flambement stable, le comportement de la structure peut rester réversible (élastique), puis devenir irréversible (plastification) ou même rompre. Il peut y avoir également de nouveaux changements de branche d'équilibre, appelés flambements secondaires ou changements de mode.

Quelques cas de flambement général de poutres droites sont représentés Figure 1.4. La charge critique  $P_{cr}$  dont une expression est donnée par la formule d'Euler (1.1), dépend des conditions limites à travers un facteur  $c$ , de la raideur  $E$  et du moment quadratique  $I$  de la poutre (donc de la forme de la section) et enfin de sa longueur  $l$ .

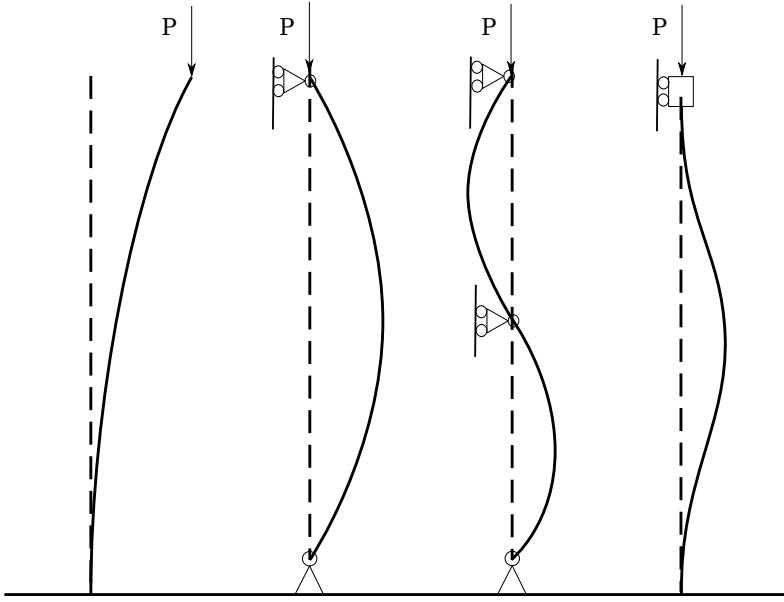


FIGURE 1.4 – Exemple des poutres d'Euler

Le facteur  $c$  prend en compte les conditions d'appui. Il vaut 4 dans le cas d'un double encastrement, 1 pour une poutre articulée et  $\frac{1}{4}$  pour une poutre encastrée-libre.

$$P_{cr} = c \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1.1)$$

En post-flambement, la branche secondaire est théoriquement instable (horizontale) [Stolz, 2003], mais en pratique le chargement peut augmenter légèrement avec la déflexion à cause de non-linéarités géométriques. Dans le cas des plaques et des coques, les conditions limites et le type de chargement (compression, cisaillement) jouent aussi un rôle important sur la charge critique et sur la stabilité de la réponse après flambement. Les charges critiques d'une plaque rectangulaire en compression (1.2) ou en cisaillement (1.3) (de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$ , de module  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ ), exprimées en contraintes,  $\sigma_{cr}$  et  $\tau_{cr}$ , sont ainsi de la forme suivante [Timoshenko et Gere, 1963] :

$$\sigma_{cr} = k \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \quad (1.2)$$

$$\tau_{cr} = k' \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \quad (1.3)$$

Des abaques permettent de déterminer les coefficients  $k$  et  $k'$  en fonction des conditions limites.

Dans le cas d'une plaque homogène, isotrope et rectangulaire, les configurations pour lesquelles les bords sont libres se rapprochent du cas d'une poutre et présentent une plus faible raideur en post-flambement [Vescovini et Bisagni, 2012]. Lorsque les bords sont appuyés ou retenus de manière élastique, la déformée de flambement est sinusoïdale dans les deux

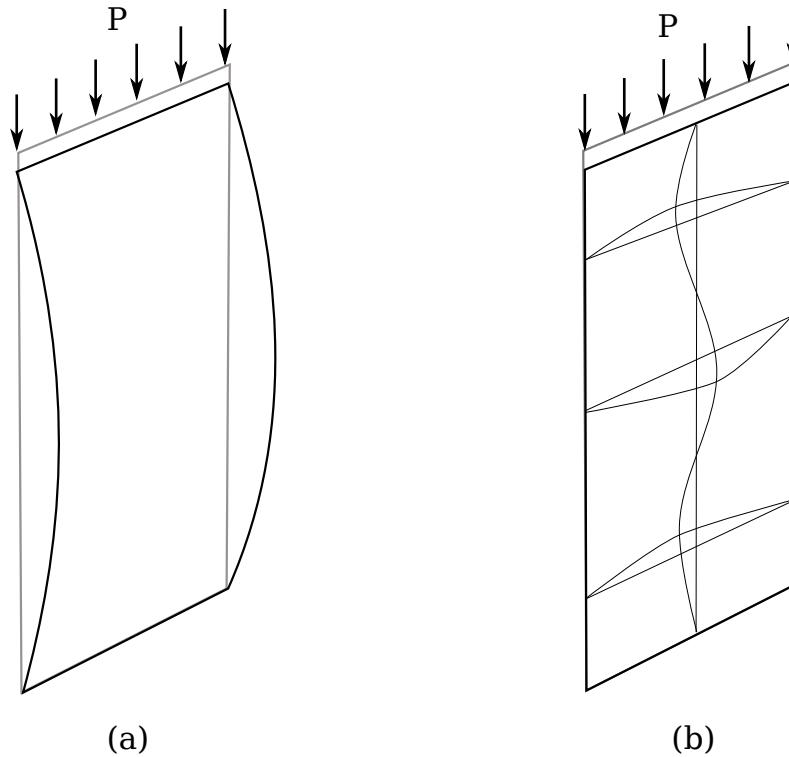


FIGURE 1.5 – (a) Plaque à bords libres en compression (instable), (b) Plaque à bords appuyés ou retenus de manière élastique (stable)

directions (longueur et largeur) dont les longueurs d'ondes dans ces directions dépendent des dimensions Figure 1.5. Dans ce cas, le post-flambement est stable, même si la raideur peut diminuer sensiblement. Dans tous les cas, le flambement est lié à une contrainte de compression. Ainsi le flambement en cisaillement résulte d'un état de traction/compression dans les directions principales [Timošenko et Gere, 1963]. Les cloques se forment selon ces directions, c'est à dire à  $45^\circ$ . De manière générale, le post-flambement des plaques et coques induit la transformation d'une partie de l'énergie de déformation de membrane en énergie de flexion ou de cisaillement transverse. La répartition des contraintes est aussi modifiée par le couplage membrane-flexion qui traduit le non-allongement du plan moyen [Timošenko et Gere, 1963]. Le phénomène est mis en évidence en Figure 1.6 par la simulation du post-flambement d'une plaque rectangulaire en cisaillement.

Le flambement, caractérisé notamment par une charge critique et un mode de déformation, est sensible à des défauts initiaux qui peuvent être de deux origines. D'une part les défauts de fabrication (géométrie, matériau), et d'autre part les défauts de chargement (montage désaxé). La tendance est à l'abaissement de la charge critique avec l'amplitude des défauts, comme l'illustrent les travaux de [Morgan et al., 1965], avec une charge critique mesurée systématiquement inférieure à la charge critique théorique.

Les défauts altèrent donc la réponse avant et après la charge critique dans une mesure qui dépend de leur position, de leur type et de leur taille [Simitses, 1986] mais aussi de la structure elle-même, plus ou moins sensible, comme le montre la Figure 1.7 (jusqu'à 75% d'abattement de la charge critique pour une coque cylindrique fine).

Bien que la réponse en présence de petits défauts soit asymptotiquement égale à celle de la structure théorique idéalisée [Rivello, 1969] et que le passage de la bifurcation soit plus ré-

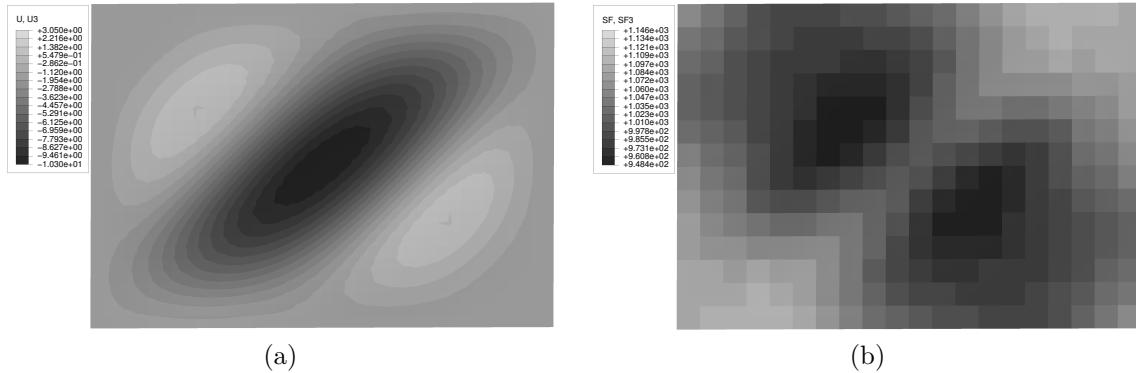


FIGURE 1.6 – (a) Cloque à  $45^\circ$  et (b) distribution du flux de cisaillement dans une plaque rectangulaire en post-flambement sous sollicitation en cisaillement pur (avant flambement le flux est homogène). source : simulation par Abaqus.

gulier, il convient d'évaluer l'abattement de la charge critique pour le dimensionnement. Des facteurs d'abattement de charge critique peuvent être calculés. Les approches stochastiques tentent d'élaborer des conceptions robustes et fiables et moins conservatives que celles obtenues par approche déterministe [Lee *et al.*, 2010 ; Castro *et al.*, 2013]. L'exemple des facteurs d'abattement obtenus dans les années 60 pour des structures de type coques cylindriques (voir Figure 1.7) montre le conservatisme de cette dernière approche [Arbocz et Starnes Jr, 2002].

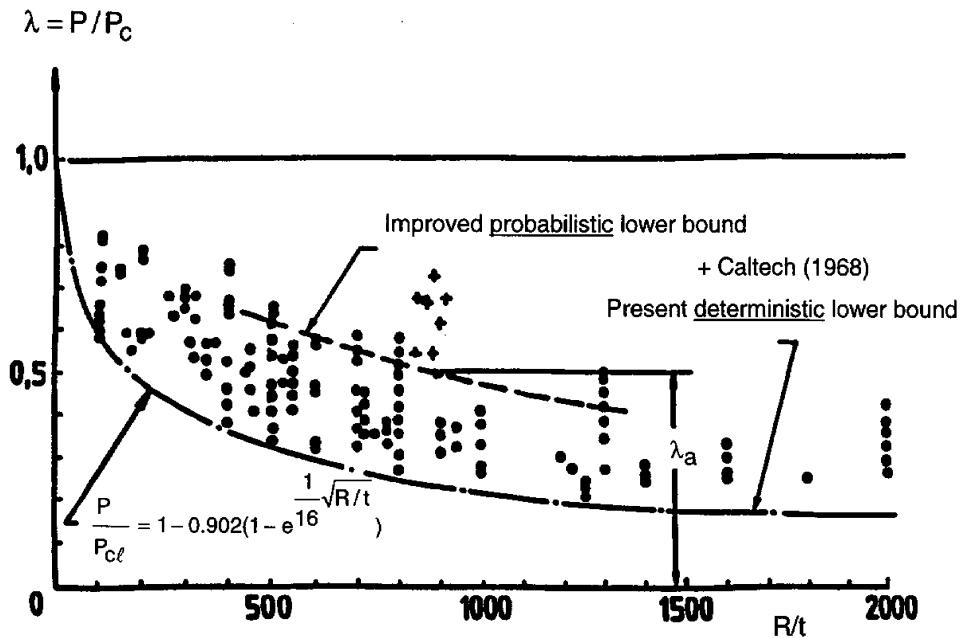


FIGURE 1.7 – Définition d'un facteur d'abattement à partir de données d'essais sur cylindre sous chargement axial [Morgan *et al.*, 1965]. Avec  $P$  la charge critique mesurée,  $P_c$  la charge critique théorique et  $\frac{R}{t}$  le rapport rayon sur épaisseur du cylindre.

L'importance du facteur d'abattement dépend de la méthode de conception de la structure. Si le but est d'empêcher tout flambement, alors ce facteur est déterminant. Sinon, il donne une information sur le comportement de la structure sans restreindre nécessairement, dans le cas d'une branche secondaire stable, le domaine de chargement.

### 1.2.2 Réponse des structures raidies en post-flambement

Les structures élémentaires sont assemblées pour former ce que l'on appelle les structures raidies. Ces structures se retrouvent dans le génie civil et dans le transport, notamment aérien, et dans le spatial, pour leur haute résistance et leur faible masse. La plupart des structures raidies dans le secteur du transport sont en effet constituées d'une peau et d'un système de raidisseurs. Ce type d'assemblage permet de concevoir des structures à forts moments quadratiques pour un minimum de masse. L'étude de la sensibilité de ces structures au flambement, et de leur réponse en post-flambement fait l'objet de nombreux travaux.

Le système de raidisseurs des fuselages est formé par des cadres dans le plan perpendiculaire à l'axe du fuselage et par des lisses entre les cadres comme illustré par la Figure 1.8. Il existe d'autres systèmes de raidisseur, comme ceux des structures géodésiques [Vasiliev *et al.*, 2001 ; Meyer et Gaudin, 2011], qui ne sont pas détaillés ici.

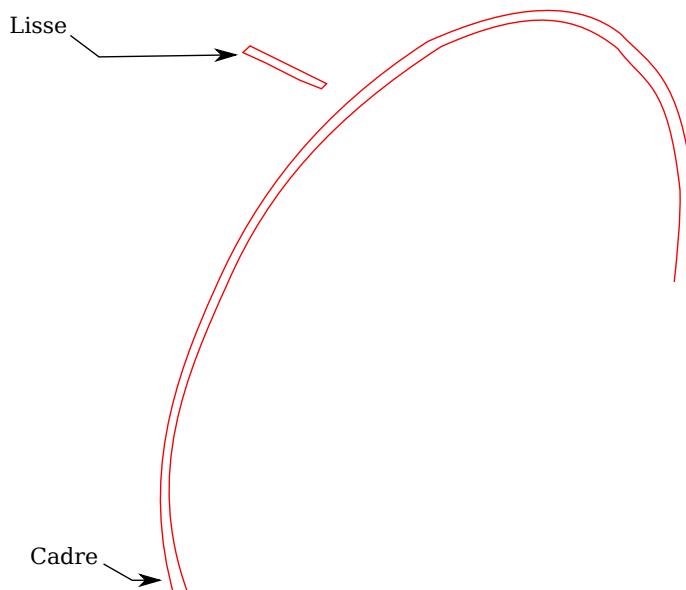


FIGURE 1.8 – Structure de fuselage typique.

Dans un cadre aéronautique, ces structures sont conçues avant tout pour travailler sous des chargements macroscopiques de flexion et torsion (éventuellement combinés) [Perrais et Finance, 2001], qui se traduisent au niveau des composants (panneaux raidis) par du cisaillement, de la compression, de la traction et leurs combinaisons.

Par opposition au flambement d'ensemble des structures élancées en général, les structures raidies présentent essentiellement des instabilités locales dans les zones en compression et cisaillement. Le flambement local se produit lorsqu'un composant de la structure est traversé par un flux d'effort supérieur à sa propre charge critique (avec des conditions limites particulières qui dépendent des liaisons avec le reste de la structure). L'échelle intermédiaire de la longueur d'onde de flambement est alors introduite entre celle d'un détail structural et celle d'une maille structurale élémentaire (peau entourée de raidisseurs). Le caractère multi-échelle du phénomène de flambement des structures raidies en ressort, notamment celui des fuselages.

Le flambement de la peau entre les raidisseurs se distingue des autres modes de flambement

ment pour deux raisons. La première raison est liée à la charge critique généralement plus faible de ce mode de déformation (voir Figure 1.9), qui en fait le premier mode de flambement observé dans les structures raidies aéronautiques (voir Figure 2). La seconde raison est liée à son admissibilité.

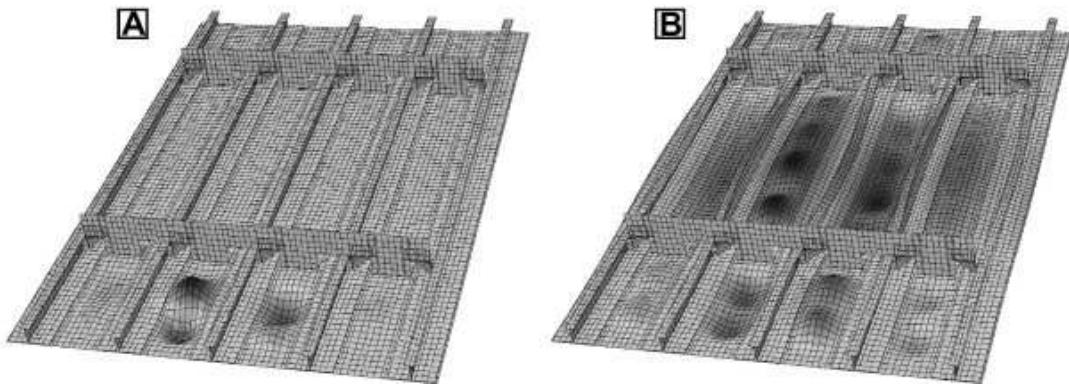


FIGURE 1.9 – Un mode de flambement local et un mode de flambement global associés respectivement à la 1ère et à la 17ème charge critique d'un panneau composite raidi [Boni *et al.*, 2012].

Les flambements locaux non-admissibles conduisent soit à un endommagement immédiat de la structure, soit à la ruine si l'équilibre post-flambement est instable. Dans ce dernier cas, la charge supportée avant flambement par les zones flambées n'est pas repris par le reste de la structure. Le flambement des parties d'un raidisseur (talon, âme, semelle) conduit à des modes de rupture qui seront détaillés dans la section suivante.

Les flambements locaux admissibles entraînent en revanche une modification de la raideur locale et une re-répartition des efforts dans la structure qui doit continuer de résister à la charge appliquée dans un premier temps. L'autorisation, dans un certain domaine de chargement, du flambement local de la peau des structures raidies aéronautiques conduit par ailleurs à un gain de masse significatif. L'équilibre de la structure reste stable mais le niveau des déformations et des contraintes augmentant, des flambements secondaires non-admissibles ou des endommagements peuvent apparaître.

C'est l'objet de la sous-section suivante d'aborder les endommagements et ruptures induits par les flambement locaux.

### 1.2.3 Endommagements et ruptures induits

Les déformations dues au flambement local de la peau dans les structures raidies sont parfois très éloignées de celles observées dans leur mode de déformation fondamental. Des modes d'endommagement et de rupture sont donc induits, qui ne se rencontreraient pas autrement qu'en post-flambement.

Les flambements locaux non-admissibles concernent avant tout les raidisseurs. La Figure 1.10 représente quelques modes de rupture induits rencontrés en aéronautique.

Dans le flambement admissible de la peau d'une structure raidie, le couplage membrane-flexion dans les plaques modifie la distribution des efforts de cohésions (donc des contraintes). Notamment, les moments fléchissant sont les plus importants aux points stationnaires de la défexion, tandis que les moments de torsion sont maximum aux points d'inflexion [Meeks *et al.*, 2005]. Ces moments étaient *a priori* nuls avant flambement. En ce qui concerne les

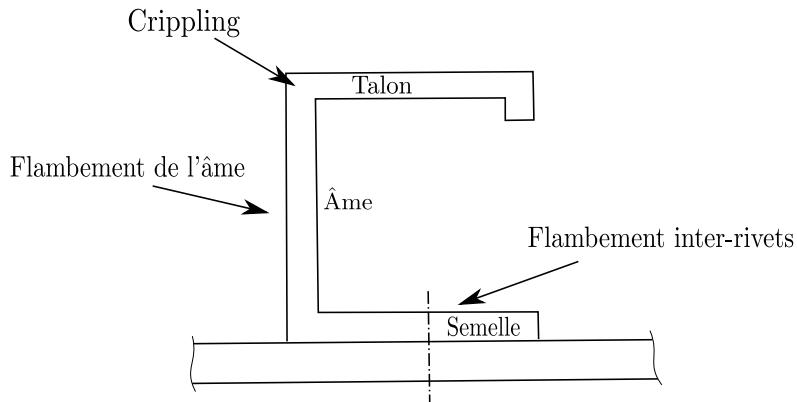


FIGURE 1.10 – Flambements locaux non-admissibles au niveau d'un raidisseur et modes de rupture induits.

efforts de membrane, certaines zones sont déchargées et d'autres assurent la résistance de la structure face aux efforts extérieurs.

Cette distribution d'efforts non-homogène induit une localisation des endommagements et de la plasticité. Des modes de ruptures tels que le décollement de la peau et des raidisseurs pour les structures composites apparaissent et font l'objet de nombreuses études (voir Figure 1.11 et Figure 1.26) [Bertolini *et al.*, 2009 ; Orifici *et al.*, 2008a ; Orifici *et al.*, 2008b ; Perret *et al.*, 2011]. Ces modes de ruptures sont également sensibles à des sollicitations en fatigue, par flambement répété [Krueger *et al.*, 2002].



FIGURE 1.11 – Test de décollement de raidisseur en flexion sept points [Van Rijn, 2000].

Il est donc finalement important de pouvoir prédire l'initiation de ces dommages pour vérifier l'intégrité de la structure avant la charge ultime. Ensuite, l'étude de leur évolution permet de définir des niveaux de criticité et des procédures spécifiques à mettre en œuvre. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limitons donc au cadre du comportement réversible des structures en post-flambement local (ou post-flambement élastique).

## 1.3 Modélisation des structures élancées et non-linéarités géométriques

La modélisation du post-flambement des structures raidies repose sur celle des éléments constitutifs que sont les poutres, les plaques et les coques. Dans les applications aéronautiques, la modélisation des structures se limite souvent à des plaques planes et des poutres droites, les courbures étant représentées par la juxtaposition de plusieurs plaques planes (facétisation). Ce sont les modélisations qui sont retenues dans ces travaux de thèse et présentées dans cette section. Les équations d'équilibre sous leur forme faible, ou Principe des Puissances Virtuelles (PPV), sont ensuite formulées.

### 1.3.1 Cinématiques des structures élancées

Le champ de déplacement des structures élancées est décrit par celui de leur axe ou plan moyen. Le champ de déplacement dans l'épaisseur ou la section est exprimé différemment selon que les cisaillements transverses sont pris en compte ou non.

**Théories sans cisaillement transverse :**

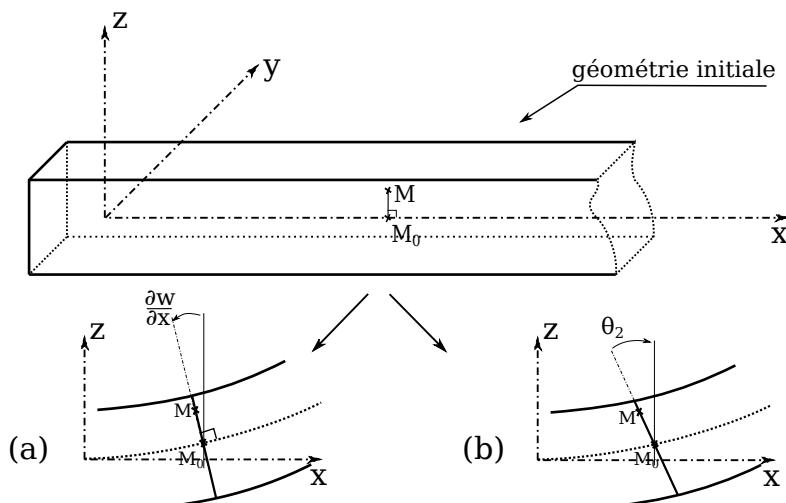


FIGURE 1.12 – Cinématique de poutre (a) sans cisaillement (théorie de Bernouilli) et (b) avec cisaillement (théorie de Timoshenko).

Le cisaillement transverse dans les plaques minces et les poutres fines est généralement négligé. Selon les hypothèses de Bernouilli pour les poutres, ou de Love-Kirchhoff pour les plaques et coques, les sections ou les fibres droites restent droites et perpendiculaires à l'axe ou au plan moyen de la structure (voir Figure 1.12 et Figure 1.13).

Le champ de déplacement d'un point M de coordonnées  $(x, y, z)$  dans une plaque mince s'écrit alors :

$$\underline{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

où  $(u_0, v_0, w_0)$  est le déplacement du point  $M_0$  de coordonnées  $(x, y, 0)$ , projection orthogonale du point M sur l'axe ou le plan moyen en configuration non-déformée.

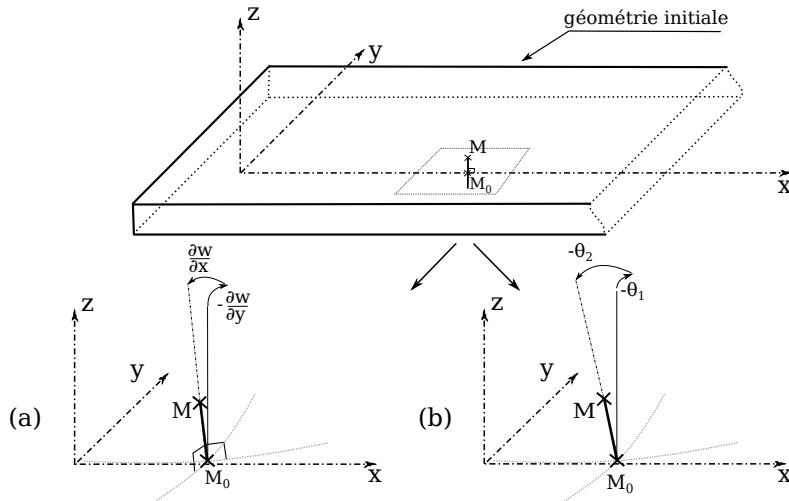


FIGURE 1.13 – Cinématiques de plaque (a) sans cisaillement (théorie de Love-Kirchhoff) et (b) avec cisaillement (théorie de Reissner-Mindlin).

Cette théorie est la plus répandue dans les calculs analytiques pour sa simplicité et son faible nombre d'inconnues (pas d'inconnues de rotation).

### Théories avec cisaillement transverse :

Le cisaillement n'est plus négligeable dès lors que rapport entre la longueur caractéristique et l'épaisseur est inférieur à 10. Il est pris en compte par les hypothèses de Timoshenko pour les poutres et de Reissner-Mindlin pour les plaques et coques. Selon ces hypothèses, les sections ou les fibres droites initialement perpendiculaires à l'axe ou au plan moyen restent droites, mais les angles de rotation des sections ou des fibres ne sont plus égaux aux gradients de déplacement transverse (voir Figure 1.12 et Figure 1.13). Cette cinématique est la plus répandue dans les applications numériques pour le réalisme de la représentation du milieu 3D et son adaptabilité<sup>1</sup>.

Le champ de déplacement d'un point M de coordonnées  $(x, y, z)$  dans une plaque épaisse s'écrit alors :

$$\underline{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) + z\theta_2 \\ v_0(x, y) - z\theta_1 \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

### Mesures de déformations et contraintes en non-linéaire géométrique :

Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), la géométrie initiale est confondue avec la géométrie finale, ce qui permet d'écrire toutes les grandeurs dans un repère unique. Ceci est valable lorsque les déplacements et les déformations restent infinitésimaux. Lorsqu'on passe en grandes déformations et/ou en grands déplacements, il faut prendre en compte la nouvelle géométrie. C'est cette dépendance du domaine d'étude vis-à-vis des déplacements qui induit la non-linéarité géométrique. Même si on peut considérer qu'en flambement élastique des structures raidies, les déformations restent petites et les rotations modérées ( $< 10^\circ$ ),

1. Il est en effet possible de représenter des plaques minces, bien que pour des méthodes de résolution approchée, certaines précautions numériques soient nécessaires pour maîtriser le rapport entre l'approximation de l'énergie de cisaillement et celle de l'énergie de flexion en  $O(1/h^2)$  [Zienkiewicz et Taylor, 1967].

les déplacements sont suffisamment grands pour devoir actualiser la géométrie ou ne pas négliger les ordres élevés dans l'expression des déformations. Surtout, la prise en compte de ces ordres élevés permet de modéliser les couplages membrane-flexion et les instabilités, caractéristiques du phénomène de flambement.

Dans le cadre des grandes déformations, grands déplacements et grandes rotations, la mesure des déformations peut se faire par le tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  dont la version linéarisée est utilisée en HPP.  $\underline{\underline{E}}$  représente la partie symétrique du tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  dont les termes quadratiques sont conservés en grands déplacements (1.6).

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Id}} + \nabla(u) \\ \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Id}}) \\ \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\nabla(u) + \nabla(u)^T) + \frac{1}{2}\nabla(u)\nabla(u)^T \end{cases} \quad (1.6)$$

Pour une cinématique de plaque, seuls les termes quadratiques hors-plan sont conservés par l'introduction des hypothèses de Von Karman : les déplacements dans le plan sont petits devant le déplacement hors-plan et les rotations sont modérées. Les déformations  $E_{33}$  sont négligées du fait de la faible épaisseur et des conditions de bords libres. Les déformations de Green-Lagrange deviennent donc, en notation “ingénieur” vectorielle :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_1 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Les déformations sont alors exprimées sous leur forme généralisée (1.8). Ce formalisme permet de mettre en évidence les modes de déformation de ces structures : membrane ( $\underline{E}_m$ ), flexion ( $\kappa_b$ ) et cisaillement transverse ( $\gamma_s$ ) :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{Bmatrix} \underline{E}_m - z\underline{\kappa}_b \\ \underline{\gamma}_s \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Une décomposition de  $\underline{E}_m$  mets en valeur les contributions des déplacements plan et hors-plan dans la déformation membranaire :

$$\underline{E}_m = \underline{E}_{m(u,v)} + \underline{E}_{m(w)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

En grandes transformations, le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (PK2)  $\underline{\underline{S}}$  mesure l'état de contrainte résultant d'une force sur la configuration initiale par unité d'aire non déformée. Il est conjugué énergétiquement aux déformations de Green-Lagrange. Il est relié au tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  par la relation (1.10).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{det(\underline{\underline{F}})} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad (1.10)$$

Les contraintes PK2 n'ont pas la pertinence physique des contraintes de Cauchy, qui permettent d'établir, par exemple, des lois d'écoulement. Néanmoins, pour des petits déplacements, les deux mesures coïncident. En notation vectorielle et en contraintes planes, le tenseur des contraintes PK2 devient :

$$\underline{S} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{S}_m \\ \underline{S}_s \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Les contraintes généralisées (appelées aussi flux d'efforts ou efforts de cohésion), conjuguées des déformations généralisées, sont calculées par intégration dans l'épaisseur (ou la section) des contraintes (Cauchy ou PK2).

$$\underline{N} = \int_z \underline{S}_m dz \quad (1.12)$$

$$\underline{M} = \int_z -z \underline{S}_m dz \quad (1.13)$$

$$\underline{Q} = \int_z \underline{S}_s dz \quad (1.14)$$

La loi de comportement généralisée qui relie contraintes et déformations généralisées se calcule également par intégration de la loi de comportement à travers l'épaisseur (sous l'hypothèse des contraintes planes et des déformations transverses négligeables).

On considère la loi de comportement d'un matériau isotrope et homogène dans l'épaisseur ( $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé) qui s'écrit :

$$\underline{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}_D \underline{E} \quad (1.15)$$

Dans le cas général d'un matériau dont les propriétés varient dans l'épaisseur (par exemple un composite stratifié), la loi de comportement généralisée prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & 0 \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{G}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{E}_m \\ \underline{\kappa_b} \\ \underline{\gamma_s} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

À ce stade, il est intéressant de noter que la matrice de couplage membrane-flexion  $\underline{\underline{B}}$  est nulle pour des structures symétriques dans leurs épaisseurs, mais qu'un couplage membrane-flexion non-linéaire est introduit par  $\underline{\underline{E}}_m$ . Par ailleurs, un facteur multiplicatif est introduit dans la matrice de raideur en cisaillement transverse  $\underline{\underline{G}}$  ( $\frac{5}{6}$  pour un matériau homogène), afin de compenser l'écart avec l'énergie de déformation obtenue en 3D [Batoz et Dhatt, 1990]. En effet, les contraintes de cisaillement transverse s'annulent sur les surfaces inférieures et supérieures de la plaque. Sous l'hypothèse d'un profil réel parabolique de ces contraintes dans l'épaisseur, d'amplitude unitaire, une énergie de cisaillement équivalente est obtenue pour un profil constant de valeur  $\frac{\pi^2}{12} \approx \frac{5}{6}$  (voir Figure 1.14).

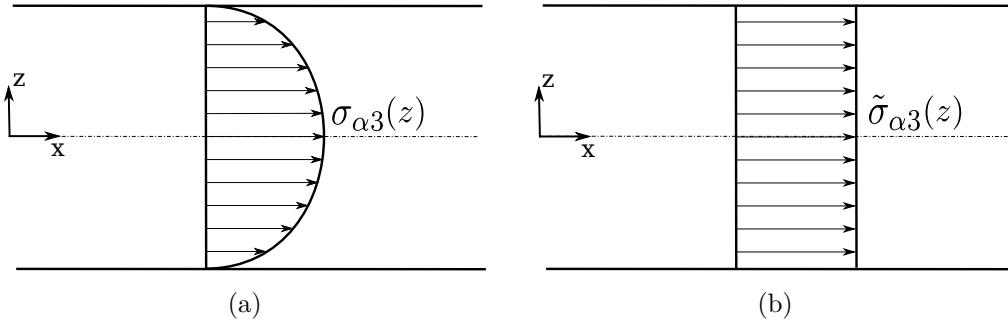


FIGURE 1.14 – Répartition des contraintes de cisaillement transverses (a) réelles, (b) approchées par la cinématique de Reissner-Mindlin.

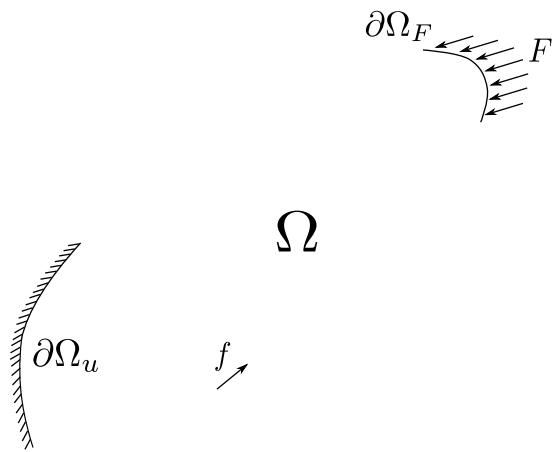


FIGURE 1.15 – Représentation d'un solide occupant un domaine  $\Omega$ , soumis à un champ d'effort extérieur volumique et à un champ d'effort sur un contour  $\partial\Omega_F$ , vérifiant des conditions essentielles sur un contour  $\partial\Omega_u$ .

### 1.3.2 Équation d'équilibre : principe des puissances virtuelles

L'équilibre d'un solide déformable  $\Omega$  (voir Figure 1.15) se traduit par la vérification du Principe des Puissances Virtuelles (PPV).

Ce principe découle de la formulation intégrale faible de l'équilibre local, telle que le champ de déplacement  $\underline{u}$  soit cinématiquement admissible (ensemble de solution noté  $C.A.(\Omega)$ ). Le champ virtuel  $\underline{\delta}u$  est également cinématiquement admissible et s'annule sur  $\partial\Omega_u$  (ensemble de solutions noté  $C.A._0(\Omega)$ ). Une condition de régularité sur les champs est imposée qui correspond au premier espace de Sobolev, noté  $H^1(\Omega)$ , regroupant les fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  et dont les dérivées sont également de carré intégrable. Cette condition est généralement intégrée dans la définition des ensembles cinématiquement admissibles.

En termes énergétiques, la variation de l'énergie interne doit être égale à la variation d'énergie externe. Autrement dit, la variation de l'énergie potentielle totale est nulle à l'équilibre. Le PPV s'écrit donc, en statique :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \underline{\delta\varepsilon}(\underline{\delta u}_v) : \underline{\underline{\sigma}} dV - \int_{\Omega} \underline{\delta u}_v^T \cdot \underline{f} dV - \int_{\partial\Omega_F} \underline{\delta u}_v^T \cdot \underline{F} dS = 0 , \\ \forall \underline{u} \in C.A.(\Omega_0), \quad \forall \underline{\delta u}_v \in C.A._0(\Omega) \quad (1.17)$$

En dynamique, cette variation est égale à la variation du travail des forces inertielles.

Dans l'équation (1.17), les puissances sont calculées par rapport à la configuration courante inconnue. La variation d'énergie interne est exprimée en fonction du tenseur des déformations de Green linéarisées et du tenseur des contraintes de Cauchy. Il est néanmoins plus aisés de travailler relativement à une configuration connue par changement de variables : pour un élément de volume  $dV = \det(\underline{F})dV_0$  et pour un élément de surface orienté par sa normale  $ndS = \det(\underline{F})\underline{F}^{-1}\underline{n}_0dS_0$ .

En formulation lagrangienne totale, la configuration initiale  $\Omega_0$  est donc utilisée. Son contour est noté  $\partial\Omega_0$ . Le changement de variables amène à utiliser les tenseurs de contraintes et déformations introduit précédemment, qui prennent en compte la différence entre géométrie déformée et géométrie initiale : Piola-Kirchhoff de seconde espèce  $\underline{\underline{S}}$  et Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$ . Le PPV en Formulation Lagrangienne Totale (FLT) s'écrit donc :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \delta\underline{\underline{E}}(\underline{\delta u}) : \underline{\underline{S}} dV_0 - \int_{\Omega_0} \underline{\delta u}^T \cdot \underline{f} dV_0 - \int_{\partial\Omega_{F,0}} \underline{\delta u}^T \cdot \underline{F} dS_0 , \\ \forall \underline{u} \in C.A.(\Omega_0), \quad \forall \underline{\delta u} \in C.A._0(\Omega_0) \quad (1.18)$$

avec la variation des déformations due aux déplacements virtuels :

$$\delta\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\nabla(\delta u_v) + \nabla(\delta u_v)^T) + \nabla(\underline{u})\nabla(\delta u_v)^T \quad (1.19)$$

Cette expression du PPV constitue au sens général le problème à résoudre en formulation lagrangienne totale. Selon les modélisations cette expression est pré-intégrée, dans l'épaisseur  $h$  pour les plaques et coques, dans la section  $S$  pour les poutres, afin de faire intervenir les déformations et contraintes généralisées et de constituer les équations d'équilibres simplifiées des structures élancées, utilisées en calcul analytique.

L'expression de la puissance des efforts internes pré-intégrée dans l'épaisseur devient :

$$\delta\Pi_{int} = \int_{\omega_0} \int_z \delta\underline{E_m}^T \cdot \underline{S_m} - z \partial \underline{\kappa_b}^T \cdot \underline{S_m} + \partial \underline{\gamma_s}^T \cdot \underline{S_s} dz dS_0 \quad (1.20)$$

puis

$$\delta\Pi_{int} = \int_{\omega_0} \delta\underline{E_m}^T \cdot \underline{N} + \delta\underline{\kappa_b}^T \cdot \underline{M} + \delta\underline{\gamma_s}^T \cdot \underline{Q} dS_0 \quad (1.21)$$

avec  $\omega_0$  la surface moyenne de la plaque. Soit  $\underline{p} = h \underline{f}(x, y)$ , l'expression du PPV pour les plaques est la suivante :

$$\int_{\omega_0} \delta\underline{E_m}^T \cdot \underline{N} + \delta\underline{\kappa_b}^T \cdot \underline{M} + \delta\underline{\gamma_s}^T \cdot \underline{Q} dS_0 = \int_{\omega_0} \underline{\delta u}_v^T \underline{p}(x, y) dS_0 + \int_{\partial\Omega_{F,0}} \underline{\delta u}_v^T \underline{F} dS_0 , \\ \forall \underline{u} \in C.A.(\Omega_0), \quad \forall \underline{\delta u}_v \in C.A._0(\Omega_0) \quad (1.22)$$

### 1.3.3 Problème de flambement

Le problème de flambement est caractérisé par une charge critique correspondant au point de bifurcation ou point limite de la branche d'équilibre, des modes de déformations et une évolution non-linéaire sur la branche d'équilibre en post-flambement.

L'analyse linéaire de flambement est une première approche qui permet de déterminer les charges critiques et les modes de déformations associées. Cette approche ne renseigne pas sur l'amplitude des déformations mais est très utilisée pour le dimensionnement des structures dans le cas où le flambement n'est pas admissible.

Pour fixer les idées, le cas d'une plaque est considéré. Considérons un effort extérieur  $\underline{F}_{xy_0} = (F_x, F_y)$  plan sur un contour de la plaque  $\partial\Omega_F$ . Le PPV pour l'équilibre des plaques (1.22) se décompose en partie plane et partie hors-plan du fait de l'indépendance des champs virtuels correspondants :

$$\int_{\omega_0} \underline{\delta E_m}^T(u,v) \underline{N} dS_0 + \int_{\partial\Omega_{0,F}} (\delta u_v, \delta v_v) \cdot \underline{F}_{xy_0} dS_0 = 0 \quad (1.23)$$

$$\int_{\omega_0} \underline{\delta E_m}^T(w) \underline{N} + \underline{\delta \kappa_b}^T \underline{M} + \underline{\delta \gamma_s}^T \underline{Q} dS_0 = 0 \quad (1.24)$$

L'équation (1.23) permet de déterminer un équilibre membranaire et donc un champ d'effort  $\underline{N}_0$  et un champ de déplacement  $(u_0, v_0)$  valables pour un champ de flexion  $(w, \underline{\theta})$  nul. Cette solution caractérise la branche d'équilibre fondamentale d'une plaque, pour tout  $\underline{F}_{xy} = \lambda \underline{F}_{xy_0}$ , tel que :

$$(u, v) = \lambda(u_0, v_0) \quad (1.25)$$

$$(w, \underline{\theta}) = (0, \underline{0}) \quad (1.26)$$

$$\underline{N} = \lambda \underline{N}_0 \quad (1.27)$$

$$\underline{M} = \underline{Q} = \underline{0} \quad (1.28)$$

$\lambda$  est appelé facteur de charge. Cette hypothèse de linéarité est à la base de la théorie du flambement d'Euler. Un développement asymptotique au premier ordre de l'équilibre en flexion permet d'étudier la stabilité de la branche d'équilibre fondamentale.

$$(w, \underline{\theta}) = (0, \underline{0}) + a(w_1, \underline{\theta}_1) \quad (1.29)$$

$$\underline{M} = a \underline{M}_1 \quad (1.30)$$

$$\underline{Q} = a \underline{Q}_1 \quad (1.31)$$

De cette manière l'équation d'équilibre en flexion se résume à l'expression suivante :

$$\int_{\omega_0} \underline{\delta \kappa_b}^T \underline{M} + \underline{\delta \gamma_s}^T \underline{Q} dS_0 + \lambda \int_{\omega_0} \underline{\delta E_m}^T(w) \underline{N}_0 dS_0 = 0, \quad \forall (\delta w_v, \underline{\delta \theta}_v) \in C.A._0(\Omega) \quad (1.32)$$

qui peut se mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$(\delta w_v, \underline{\delta \theta}_v) (k_e(w, \underline{\theta}) - \lambda k_g(w)) = 0, \quad \forall (\delta w_v, \underline{\delta \theta}_v) \in C.A._0(\Omega) \quad (1.33)$$

Pour chaque valeur propre  $\lambda_{cr}$ , qui définit un point de bifurcation ou un point limite, une expression de la flèche non-nulle satisfait aux conditions limites et à l'équilibre en flexion ainsi linéarisé, il s'agit du mode de flambement. Dans l'équation (1.33) l'opérateur  $k_e$  représente la rigidité élastique de flexion, et l'opérateur  $k_g$  la rigidité géométrique, due aux grands déplacements et à l'état de pré-contrainte  $\underline{N}_0$ .

Un développement asymptotique à des ordres supérieurs [Nguyen, 2000] permet d'étudier la stabilité de la branche secondaire au voisinage du point de bifurcation. Mais pour une connaissance du comportement après la charge critique de flambement, une autre approche appelée analyse non-linéaire de flambement ou analyse de post-flambement, doit être menée. Elle renseigne sur l'amplitude de la déformée ainsi que sur la redistribution des contraintes qui se produit effectivement dans ce domaine de chargement. Dans ce cas, une résolution itérative du problème s'impose. D'après la procédure de Newton-Raphson, l'équation d'équilibre est linéarisée pour faire apparaître le problème tangent. Cette procédure est détaillée dans la suite (voir sous-section 1.5.2).

## 1.4 Méthodes de résolution semi-analytiques

Les méthodes purement analytiques de résolution des équations d'équilibre ont montré leurs limites lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes linéaires complexes ou non-linéaires [Timošenko et Gere, 1963]. Leur avantage est cependant de proposer des solutions exactes sous forme d'expressions analytiques, précieuses pour l'optimisation, l'analyse de sensibilité, et dont le calcul pour un jeu de paramètres donné est très peu coûteux. Le terme *semi-analytique* désigne des méthodes qui proposent :

- l'expression de solutions approchées sous forme analytique d'un problème linéaire.
- ou l'expression des équations d'équilibre non-linéaires intégrées analytiquement à résoudre par un schéma numérique itératif.

Ces méthodes permettent de résoudre de nombreux problèmes, notamment ceux du flambement et post-flambement des structures élancées [Bloom et Coffin, 2001]. Elles sont limitées sur la représentation de géométries complexes autres que des plaques rectangulaires ou circulaires et des coques cylindriques ou sphériques, mais les solutions approchées sont obtenues sous forme analytique et leur évaluation reste d'un coût très faible. Les méthodes semi-analytiques sont donc particulièrement attractives en phase de pré-dimensionnement. Ces dernières constituent d'ailleurs un champ de recherche actif malgré l'avènement de méthodes numériques telles que celle des éléments-finis (voir Résolution par la méthode des éléments-finis) plus versatiles mais aussi plus coûteuses.

Quelques approches sont présentées ici dans leur application à l'étude du post-flambement des plaques et des structures raidies.

### 1.4.1 Méthode de Ritz-Galerkin

La méthode de Ritz-Galerkin revient à choisir le champ solution  $\underline{u}$  et le champ virtuel  $\underline{\delta u}_v$  de la formulation variationnelle (ou PPV) (1.18), comme une combinaison linéaire de fonctions cinématiquement admissibles :

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \sum_i \alpha_i g_i(x, y, z) = \underline{g}^T(x, y, z) \underline{\alpha} \\ \underline{\delta u}_v &= \sum_i \beta_i g_i(x, y, z) = \underline{g}^T(x, y, z) \underline{\beta}\end{aligned}\quad (1.34)$$

L'expression des déformations de Green-Lagrange et de leur variation, approchées par la méthode de Ritz-Galerkin s'en déduisent alors :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \left( \underline{\nabla}(g)^T + \frac{1}{2} \underline{\alpha}^T \underline{\nabla}(g)^T \underline{\nabla}(g) \right) \underline{\alpha} = \underline{\underline{B}}_g(\underline{\alpha}) \underline{\alpha} \\ \underline{\delta \underline{\underline{E}}} &= \left( \underline{\nabla}(g)^T + \underline{\alpha}^T \underline{\nabla}(g)^T \underline{\nabla}(g) \right) \underline{\beta} = \underline{\underline{\delta B}}_g(\underline{\alpha}) \underline{\beta}\end{aligned}\quad (1.35)$$

Comme le PPV est vérifié pour tout champ virtuel cinématiquement admissible, les  $\beta_i$  sont éliminés et il en résulte un système d'équations linéaires en  $\underline{\alpha}$  :

$$\int_{\Omega_0} \underline{\delta B_g}^T(\underline{\alpha}) \underline{DB_g}(\underline{\alpha}) dS_0 \underline{\alpha} = \int_{\Omega_0} \underline{g}^T \underline{f} dS_0 + \int_{\partial\Omega_0} \underline{g}^T \underline{F} dS_0 \quad (1.36)$$

Les fonctions  $g_i$  peuvent être choisies sur une base trigonométrique ou polynomiale, généralement par troncature. Elles forment une base d'approximation ou base de Ritz, et leur choix est guidé notamment par l'admissibilité cinématique. La précision du calcul dépend toutefois directement du choix de la base et de l'ordre de troncature.

Dans le cas des plaques planes, les fonctions de contraintes d'Airy sont souvent utilisées comme inconnues à la place des champs de déplacement du plan ( $u$  et  $v$ ) [Timošenko et Gere, 1963]. Les fonctions d'Airy vérifient les relations (1.37) qui satisfont l'équilibre des plaques en membrane.

$$N_x = \chi_{,yy} \quad , N_y = \chi_{,xx} \quad , N_{xy} = -\chi_{,xy} \quad (1.37)$$

Les fonctions d'Airy sont alors approchées par une combinaison de fonctions trigonométriques statiquement admissibles, et introduites dans l'expression du PPV.

[Timošenko et Gere, 1963] et [Bloom et Coffin, 2001] résolvent une grande variété de problèmes de flambement et post-flambement de poutres, plaques et coques, par la méthode de Ritz-Galerkin.

Par exemple, une plaque carrée de côté  $2a$  est soumise à de la compression dans un cadre rigide. Un choix d'approximation du champ de déplacement par un seul terme est proposé :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= C_w \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \\ u(x, y) &= C_u \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \\ v(x, y) &= C_v \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{e}{2a}y \end{aligned} \quad (1.38)$$

avec  $e$  le raccourcissement dans la direction  $y$ .

Ce choix simplifié de fonctions d'approximation de Ritz traduit la connaissance *a priori* de la forme du champ de déplacement avec notamment la forme en cloche de la déformée hors-plan. Avec une telle approximation, la résolution des équations est très peu coûteuse. Les coefficients  $C_u, C_v$  sont calculés en fonction de  $C_w$ .  $C_w$ , le raccourcissement critique  $e_{cr}$  et la contrainte de compression correspondante  $\sigma_{cr}$  sont ensuite obtenus en cherchant les valeurs non-nulles de  $C_w$  pour lesquelles l'équilibre est vérifié. L'état de contrainte peut être alors calculé pour toute valeur de  $e = ne_{cr}$ . Une représentation des contraintes aux bords est donnée pour  $n = 10$  Figure 1.16.

Néanmoins, à cause de l'approximation du champ de déplacement à un seul terme, la raideur de la plaque et l'expression de la largeur effective sont surestimées par rapport à l'expérience. L'ajout de termes dans la représentation des déplacements améliore ces résultats mais alourdi le calcul. L'expression des termes supplémentaires est en outre moins intuitive.

Une étude de l'influence du nombre de termes des bases trigonométriques tronquées est proposée dans [Bisagni et Vescovini, 2009]. Les séries trigonométriques utilisées sont des doubles séries de sinus et cosinus pour représenter à la fois les variations longitudinales et transversales. Ces séries sont bien adaptées aux domaines rectangulaires et sont de fait très utilisées pour les études analytiques. Dans l'étude citée précédemment, des séries de 3x3 à 12x12 termes en déplacement hors-plan et fonction d'Airy sont comparées. Il est montré

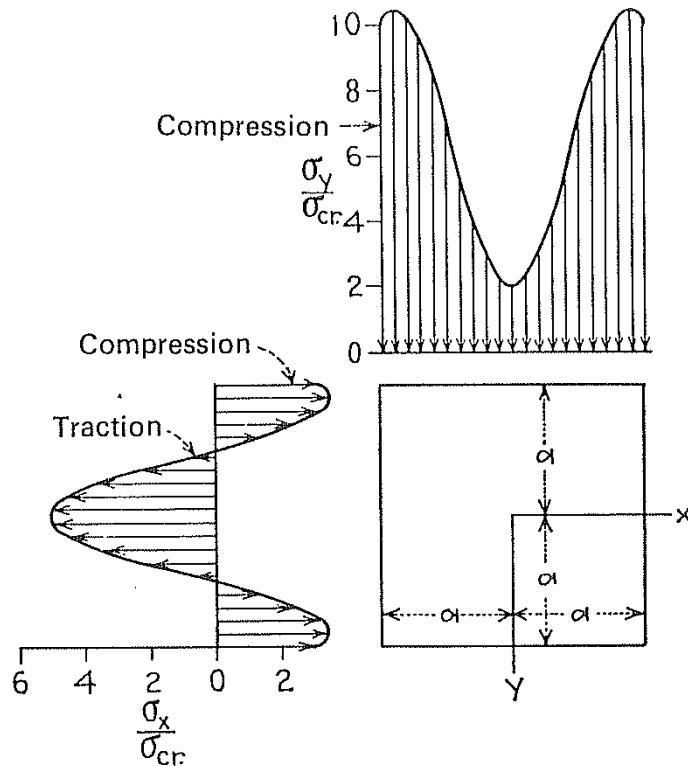


FIGURE 1.16 – Répartition des contraintes en post-flambement aux bords d'une plaque carré en compression selon l'axe  $y$  pour  $n=10$ . [Timošenko et Gere, 1963].

notamment que la raideur converge et qu'elle diminue avec l'augmentation du nombre de termes en déplacement hors-plan.

Finalement, la précision des méthodes de Ritz-Galerkin pour le post-flambement dépend de termes d'ordres plus élevés que ceux qu'il est possible d'intuiter. Malgré le nombre d'inconnues qui se rajoutent (une inconnue par terme), leur nombre total reste bien inférieur à celui d'une approximation par éléments-finis. La limite de ces approches reste donc liée à la géométrie des structures pour lesquelles il faut disposer d'une base de fonctions cinématiquement ou statiquement admissibles.

#### 1.4.2 Approche par développement asymptotique en post-flambement initial

La théorie générale de la phase initiale de post-flambement [Koiter, 1945] repose sur l'hypothèse que pour un chargement au voisinage de la charge critique de flambement, l'état d'équilibre est obtenu par une petite variation autour de l'état d'équilibre fondamental. Cette phase se traduit par une faible non-linéarité de la réponse, des rotations modérées et petites déformations, soit le domaine de validité des hypothèses de Von Karman. Dans le cas des plaques et coques raidies cette phase se termine souvent par l'apparition d'endommagement, ce qui signifie que l'ensemble du post-flambement élastique peut être considéré comme post-flambement initial.

L'approche consiste à tirer profit de l'hypothèse de proximité des états d'équilibre par un développement asymptotique du champ de déplacement en post-flambement  $u_{post}$  au

voisinage du point de bifurcation :

$$\underline{u}_{post} = a_0 \underline{u}_{pre} + a_1 \underline{u}_1 + \underline{\delta u} \quad (1.39)$$

$\underline{u}_{pre}$  est le champ de déplacement avant le flambement, sur la branche fondamentale.  $\underline{u}_1$  est le mode de flambement correspondant à la bifurcation, calculé par analyse de flambement linéaire, et  $a_1$  son amplitude.  $\underline{\delta u}$  regroupe les termes d'ordres supérieurs, qui représentent l'effet des redistributions de contraintes, dont une expression est calculée [Koiter, 1956] sous la forme d'un développement en série trigonométrique. L'amplitude des premiers termes de cette série est proportionnelle à  $a_1^2$ .  $\underline{\delta u}$  est donc petit devant la contribution du mode de flambement.

Cette théorie a par exemple permis de calculer la réponse initiale en post-flambement d'enveloppe cylindrique [Hutchinson, 1967]. [Hui, 1988] a comparé cette approche à la méthode de Ritz-Galerkin et montré son domaine d'application (niveau de chargement) pour un problème de poutre en compression sur support élastique.

Plus récemment, [Vescovini et Bisagni, 2012] ont développé une approche intéressante par rapport à la théorie de Koiter, pour une plaque rectangulaire en compression longitudinale, simplement supportée et retenue de manière élastique sur ses bords longitudinaux par des ressorts de torsion (voir Figure 1.17).

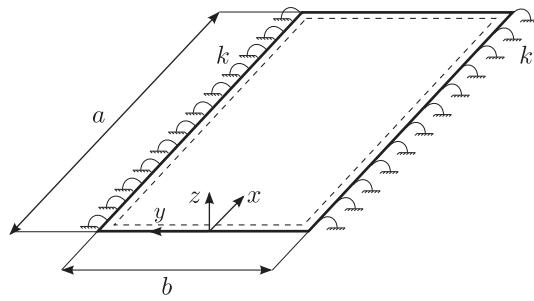


FIGURE 1.17 – Plaque retenue de manière élastique [Vescovini et Bisagni, 2012]

L'approche consiste en une approximation du déplacement hors-plan par l'unique fonction du mode de flambement, calculée au préalable par une méthode de Ritz-Galerkin comme expliqué précédemment (voir Méthode de Ritz-Galerkin). L'approximation est de la forme donnée par l'équation (1.40), où  $A$  est l'amplitude,  $m_{cr}$  le nombre entier de demi-longueur d'onde du premier mode de flambement et  $k$  la raideur des ressorts de torsion.

$$w(x, y) = A \sin(m_{cr}\pi x)[\cos(\pi y) + (1 + \cos(2\pi y))\frac{k}{4\pi}] \quad (1.40)$$

Les efforts de membrane sont approchés au moyen d'une fonction d'Airy. Les dérivées de la fonction d'Airy s'ajoutent à la partie proportionnelle au champ d'effort avant flambement  $N_0$  (en compression, seul  $N_x$  est non nul avant flambement).

$$N_x = \chi_{,yy} + B N_0 \quad , N_y = \chi_{,xx} \quad , N_{xy} = -\chi_{,xy} \quad (1.41)$$

Ainsi, par rapport à l'approche de [Koiter, 1956], les termes d'ordres supérieurs en déplacement hors-plan sont négligés. Dans le plan, ces termes sont représentés par les dérivés de la fonctions d'Airy.

La comparaison des résultats de cette approche avec ceux d'un modèle élément fini a montré la bonne concordance du champ de déplacement hors-plan, du raccourcissement et

de la force appliquée (erreur relative inférieure à 6%) ce qui permet un suivi précis de la courbe effort-déplacement. Toutefois, la faiblesse de cette approche est mise en évidence par l'étude de la distribution des contraintes, notamment la contrainte longitudinale. Selon la raideur du ressort de torsion et le ratio de la plaque ( $a/b$ ), le maximum de l'erreur relative atteint localement 2 à 13% (voir Figure 1.18) pour des niveaux de chargement de 2 à 2.5 fois la charge critique de flambement.

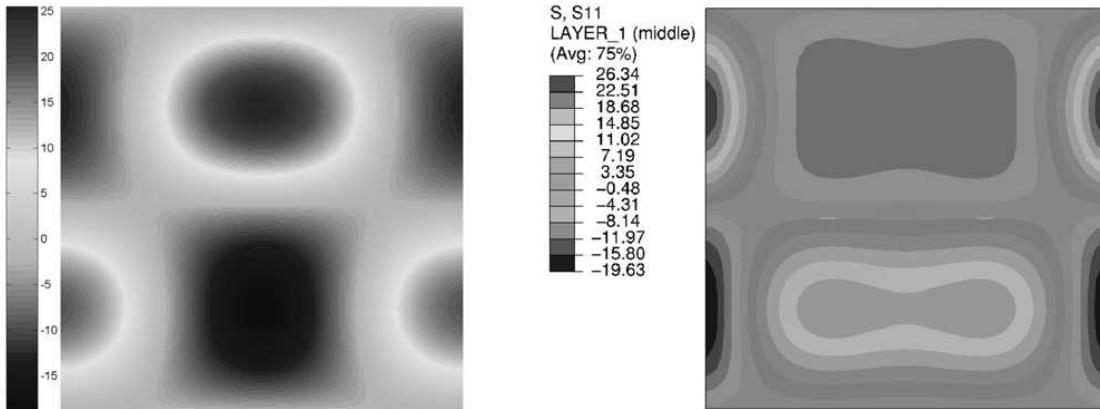


FIGURE 1.18 – Distribution des contraintes en post-flambement dans une plaque en compression retenue de manière élastique sur ses bords [Vescovini et Bisagni, 2012].

Les différences observées sur la distribution des contraintes sont, d'après les auteurs, dues à la représentation par le seul mode de flambement du champ de déplacement hors-plan, autrement dit, aux termes d'ordres supérieurs négligés. Ces différences peuvent avoir des conséquences sur la prédition des phénomènes locaux d'endommagement. Néanmoins elles sont relativement faibles au regard de la réduction du nombre d'inconnues du problème et elles évoluent de façon croissante avec le chargement.

Ces résultats permettent de valider, d'une part le rôle prépondérant des termes d'ordre 1 (mode de flambement) du développement asymptotique proposé par [Koiter, 1945] et d'autre part, l'importance des termes d'ordres supérieurs pour représenter avec précision la redistribution des contraintes.

### 1.4.3 Pré-dimensionnement de panneaux raidis

Le calcul analytique du champ de contrainte d'une plaque rectangulaire en compression (voir Figure 1.16) permet de déterminer une largeur effective qui s'oppose à la force totale de compression en fonction du facteur de charge  $n$  [Timošenko et Gere, 1963] :

$$P = -h \int_{-a}^a \sigma_y dx = \underbrace{2a \left( 0.623 + \frac{0.377}{n} \right)}_{\text{largeur effective}} hn\sigma_{cr} \quad (1.42)$$

La notion de largeur effective a donné lieu à des méthodes simplifiées de conception en post-flambement des structures aéronautiques [Bruhn, 1973]. Notamment la méthode dite des “super-raidisseurs” pour le dimensionnement d'un panneaux raidis en compression tel que celui Figure 1.21. Selon cette méthode, la contrainte de compression avant flambement est la même dans la peau et dans les raidisseurs. Une fois la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  de la peau atteinte (voir équation (1.2)), celle-ci ne croit plus sur une certaine largeur de bande

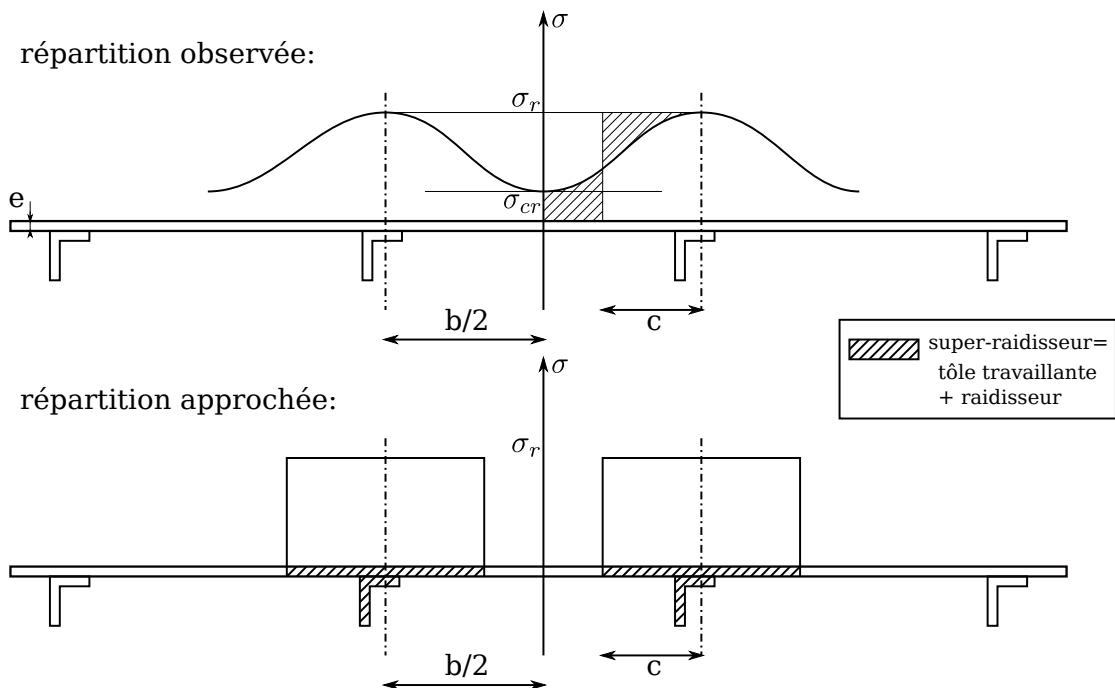


FIGURE 1.19 – Répartition des contraintes de compression en post-flambement dans un panneau raidi.

au centre de la peau et le surplus de charge se réparti sur les bords de la peau et sur les raidisseurs. L'allure de cette répartition est présentée Figure 1.19.

La méthode des “super-raidisseurs” considère donc qu’en post-flambement, le panneau raidi est équivalent aux raidisseurs et aux bandes de peau de largeur  $c$ , sous la même contrainte  $\sigma$ . Le rapport entre la largeur de bande et la largeur  $b$  de l’écartement des raidisseurs évolue en fonction du rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}$  selon les formules empiriques de Marguerre ou Karman [Marguerre, 1937]. Bien qu’empirique et conservative, la méthode des “super-raidisseurs” est largement utilisée à ce jour en pré-dimensionnement aéronautique. Aucune information n’est cependant donnée sur la déformée et la ruine du panneau raidi est supposée lorsque la contrainte critique de flambement des raidisseurs est atteinte.

De manière plus prédictive, les approches semi-analytiques ont été étendues au flambement et post-flambement de panneaux raidis. Initialement des conditions de raidisseur infiniment rigides en flexion et infiniment souples en torsion sont introduites par des conditions limites de bords *simplement appuyés*, comme dans [Timošenko et Gere, 1963] ou [Romeo et Frulla, 1997]. Dans [Byklum et Amdahl, 2002] et [Byklum et al., 2004], après avoir étudié successivement le post-flambement d’une plaque simplement supportée puis encastrée pour en tirer des champs de déplacement hors plan ( $w_s$  et  $w_c$ ) et des fonctions d’Airy ( $\chi_s$  et  $\chi_c$ ) admissibles, le cas d’un raidisseur est vu comme une condition limite intermédiaire. Les solutions du problème de post-flambement d’une plaque munie d’un ou plusieurs raidisseurs sont recherchées comme des combinaisons des solutions simplement supportées et encastrées (voir Figure 1.20).

Une extension originale de cette théorie permet d’étudier des plaques raidies de manière irrégulière [Brubak et Hellesland, 2007].

Dans les travaux de [Bisagni et Vescovini, 2009], une méthode est proposée pour l’étude du post-flambement local de panneaux raidis longitudinalement. La raideur de torsion des raidisseurs est prise en compte par une approche de Saint-Venant [Paik et Thayamballi,

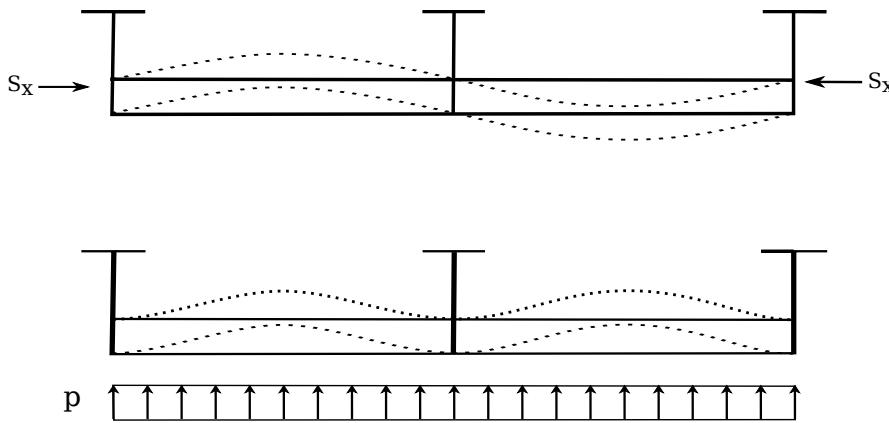


FIGURE 1.20 – Solutions simplement supporté et encastrée au niveau des raidisseurs [Byklum et al., 2004]

2000]. Le problème est résolu sur un élément de plaque compris entre deux raidisseurs dont la raideur est divisée par deux de manière à représenter les éléments de structures adjacents (voir Figure 1.21). Dans ce cas, l'énergie de déformation de la plaque s'ajoute à l'énergie de torsion des raidisseurs et une condition d'équilibre entre les moments de torsion des raidisseurs et les moments de flexion de la plaque est imposée. La condition de déplacement hors-plan nul au niveau des raidisseur est prise en compte dans le choix des champs cinématiquement admissibles.

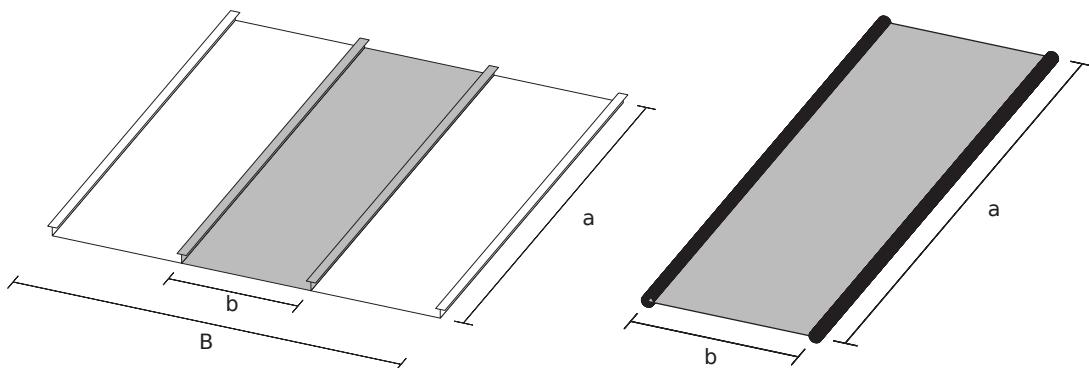


FIGURE 1.21 – Panneau raidi idéalisé en approches semi-analytiques par [Bisagni et Vesco-vini, 2009].

Une approche simplifiée, proposée par [Stamatelos et al., 2011], repose sur l'hypothèse que la peau en post-flambement entre les raidisseurs a des rigidités négligeables en flexion et en compression dans le sens du chargement, et qu'elle affecte les raidisseurs seulement par ses raideurs en torsion et en tension perpendiculairement au chargement. Ainsi après flambement local de la peau, le problème est équivalent à des raidisseurs avec des conditions élastiques aux bords (Figure 1.22a). La ruine de la structure correspond alors au flambement des raidisseurs (Figure 1.22b).

Dans toutes ces approches, il est intéressant de constater que la résolution fait appel à des hypothèses simplificatrices sur le comportement d'un panneau raidi en post-flambement.

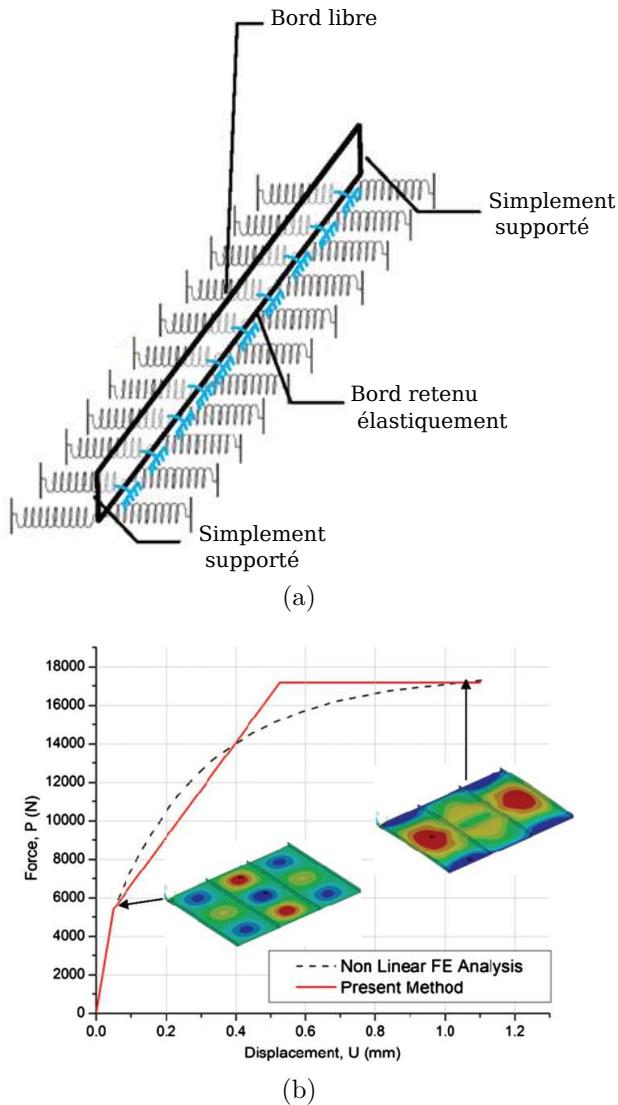


FIGURE 1.22 – (a) Raidisseur retenu élastiquement par les peaux adjacentes en post-flambement, (b) Réponse approchée d'un panneau raidi par la méthode de [Stamatelos *et al.*, 2011].

Notamment, les raidisseurs sont souvent considérés comme étant suffisamment rigides pour que le flambement soit localisé au niveau des éléments de peau. C'est en parti dû au fait que le flambement des raidisseurs entraîne généralement la ruine [Stamatelos *et al.*, 2011], surtout pour des structures raidies de manière purement longitudinale. Le bon accord des solutions calculées par ces méthodes avec celles des modèles éléments-finis de référence valide en tout cas les hypothèses réalisées. Même si ces approches sont limitées sur la représentation des détails structuraux, nombreux dans les structures raidies, elles n'en sont pas moins performantes et suffisamment prédictives pour des études de pré-dimensionnement. Il existe d'ailleurs des outils numériques qui intègrent les développements présentés ici et qui sont utilisés aussi bien pour des travaux de recherche académique (*StiPAn* [Bisagni et Vescovini, 2009]) que pour la certification de structures industrielles (*PULS* [*PULS*, 2006] distribué par Det Norske Veritas). La comparaison des temps de calcul avec la méthode des éléments-finis montre la pertinence de ces outils (quelques secondes contre plus de 1000 par éléments-finis [Bisagni et Vescovini, 2009]).

## 1.5 Résolution par la méthode des éléments-finis

La méthode d'approximation et de résolution par éléments finis est très utilisée en calcul de structure pour sa polyvalence notamment. Elle permet de modéliser une grande variété de structures et de résoudre les équations d'équilibre en prenant en compte plusieurs physiques si nécessaire. C'est une méthode utilisée pour résoudre de nombreux problèmes physiques basés sur des équations différentielles (thermo-mécanique, mécanique des fluides, magnétique).

### 1.5.1 Discrétisation du PPV

La résolution des équations d'équilibre par élément finis passe par la discrétisation. La formulation intégrale faible, ou principe des puissances virtuelles, s'y prête parfaitement. Le domaine d'intégration est ainsi décomposé à l'aide de formes géométriques simples appelées "éléments" qui forment un maillage. Aux noeuds des éléments sont définis les fonctions d'interpolation qui constituent une base de l'espace d'approximation de la géométrie et des inconnues du problème (approche iso-paramétrique). Les valeurs des inconnues aux noeuds sont ses degrés de liberté. Dans la forme la plus courante de la méthode des éléments finis en calcul de structure , ces inconnues sont les 3 translations ( $u_1, u_2, u_3$ ) et 3 rotations ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) de l'espace 3D (formulation en déplacement). Ces trois inconnues peuvent être complétées ou remplacées par des inconnues de contraintes et donner lieu à une formulation en contraintes ou mixte à 2 champ par exemple [Reissner, 1950].

Chaque élément représente un domaine  $\Omega^e$ , tel que  $\bigcup_e \Omega^e = \Omega$ ,  $\Omega$  étant le domaine d'étude complet. Il existe un grand nombre d'éléments qui diffèrent par leur dimension (1D, 2D ou 3D), leur interpolation, leurs noeuds, dont certains sont représentés Figure 1.23. Les éléments surfaces et linéaires, contrairement aux éléments volumes, intègrent de façon spécifique (analytique ou numérique) le PPV dans l'épaisseur ou la section (voir l'équation (1.22)). Il existe cependant des éléments volumes dédiés à la modélisation de structures élancées qui permettent le collage de maillage entre des structures minces (cinématique de coque) et des structures épaisses modélisées par éléments volumiques [Trinh, 2009].

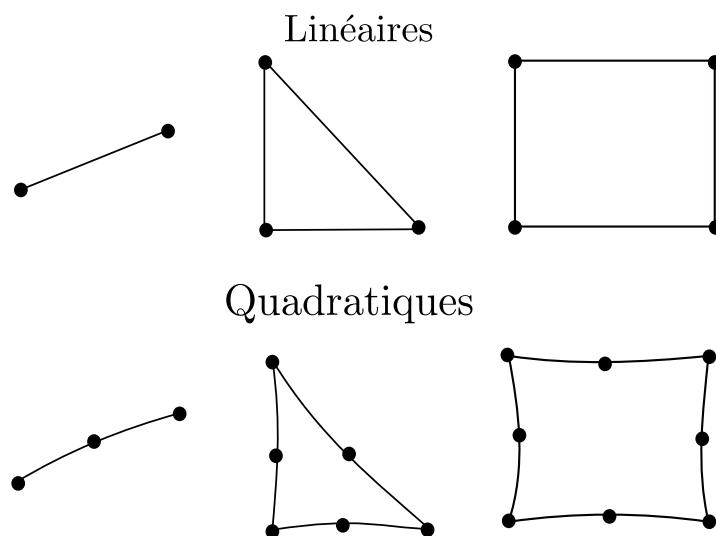


FIGURE 1.23 – Quelques éléments classiques [Dhatt *et al.*, 2013].

Le champ de déplacement est approché ( $\hat{u}$ ) sur  $\Omega^e$  au moyen de l'interpolation élémentaire.

taire :

$$\hat{u}^e(x) = \underline{\underline{N}}^e(x)\underline{q}^e \quad (1.43)$$

où  $\underline{\underline{N}}^e$  est la matrice des fonctions d'interpolation élémentaires et  $\underline{q}^e$  est le vecteur des inconnues nodales (translations et rotations). Dans la suite la notation des grandeurs approchées  $\hat{\square}$  est délaissée au profit de la lisibilité. Les déformations de Green-Lagrange sont donc également approchées :

$$\underline{E}^e = (\underline{\underline{B}}_L^e + \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}_{NL}^e(\underline{q}^e))\underline{q}^e = \underline{\underline{B}}^e(\underline{q}^e)\underline{q}^e \quad (1.44)$$

$\underline{\underline{B}}_L^e$  est la matrice gradient des fonctions d'interpolation et la matrice  $\underline{\underline{B}}_{NL}^e(\underline{q}^e)$  est issue de la partie quadratique des déformations (Son expression détaillée se trouve dans des ouvrages tels que [de Borst et Crisfield, 2012] ou dans [Drapier, 2010]).

Les déformations dues au champ de déplacement virtuel  $\underline{\delta u}_v$ , lui-même discrétisé dans le même espace que  $\hat{u}^e$ , s'écrivent donc sous leur forme discrétisée d'après (1.19) :

$$\underline{\delta E}^e = (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)\underline{\delta q}^e_v \quad (1.45)$$

L'introduction des équations (1.43), (1.44) et (1.45) dans l'équilibre (1.18) au niveau élémentaire donne :

$$\delta\Pi^e = \underline{\delta q}^{eT}_v \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{S} \, dV_0 - \underline{\delta q}^{eT}_v \int_{\Omega_0^e} \underline{\underline{N}}^{eT} \cdot \underline{f} \, dV_0 - \underline{\delta q}^{eT}_v \int_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{N}}^{eT} \cdot \underline{F} \, dS_0 \quad , \\ \forall \underline{\delta q}_v \in C.A._0(\Omega_0) \quad (1.46)$$

La loi de comportement (1.15) permet d'écrire la variation d'énergie interne en fonction des déplacements uniquement, avec pour chaque élément  $\underline{S}^e = \underline{\underline{D}}\underline{E}^e = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{B}}^e\underline{q}^e$  :

$$\delta\Pi_{int}^e = \underline{\delta q}^{eT}_v \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{B}}_L^e + \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}_{NL}^e(\underline{q}^e)) \, dV_0 \underline{q}^e \quad (1.47)$$

et d'exhiber la matrice de raideur élémentaire :

$$K^e = \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{B}}_L^e + \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}_{NL}^e(\underline{q}^e)) \, dV_0 \quad (1.48)$$

Par ailleurs l'intégration de la variation du travail des efforts extérieurs (volumiques et sur le contour) permet de constituer un vecteur des efforts extérieurs équivalents aux noeuds :

$$\delta\Pi_{ext}^e = \underline{\delta q}^{eT}_v \underline{F}_{ext}^e \quad (1.49)$$

Finalement le système d'équations caractérisant l'équilibre élémentaire s'écrit :

$$\underline{\underline{K}}^e(\underline{q}^e)\underline{q}^e - \underline{F}_{ext}^e = \underline{F}_{int}^e - \underline{F}_{ext}^e = 0 \quad (1.50)$$

Un assemblage des équilibres élémentaires contribue à former l'équilibre global, soit le résidu des efforts intérieurs et extérieurs à annuler :

$$\underline{R}(q) = \underline{\underline{K}}(q)\underline{q} - \underline{F}_{ext} = 0 \quad (1.51)$$

L'intégration sur le domaine élémentaire se fait numériquement, classiquement par la méthode des points de Gauss et après transformation de l'élément réel dans un élément

de référence. L'étape d'intégration est délicate puisqu'elle influe sur l'apparition de modes de déformation élémentaires à énergie nulle ou de phénomènes de verrouillage en cisaillement pour les plaques et coques. La sous-intégration sélective (intégration non-exacte du comportement en cisaillement) permet par exemple de le contrôler. D'autres méthodes de représentation discrète du cisaillement transverse ou de formulation mixte peuvent cependant être appliquées favorablement [Batoz et Dhatt, 1990].

### 1.5.2 Problème tangent et méthode de Newton-Raphson

**Principes généraux :**

La matrice de raideur (1.48) dépend des déplacements. Par conséquent la résolution du problème non-linéaire se fait par linéarisation de Newton [de Borst et Crisfield, 2012] de l'équation (1.51). Soit par un développement limité au premier ordre :

$$\underline{R}(\underline{q} + \underline{\delta q}) \approx \underline{R}(\underline{q}) + \frac{\partial \underline{R}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \underline{\delta q} = 0 \quad (1.52)$$

Dans la suite, les efforts extérieurs sont supposés conservatifs et le comportement du matériau est élastique linéaire. D'où le calcul de la matrice de raideur tangente élémentaire  $\underline{\underline{K}}_t^e$  :

$$\underline{\underline{K}}_t^e(\underline{q}^e) = \frac{\partial F_{int}^e}{\partial \underline{q}^e} = \frac{\partial}{\partial \underline{q}^e} \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{S}^e \, dV_0 \quad (1.53)$$

$$\underline{\underline{K}}_t^e(\underline{q}^e) = \frac{1}{\partial \underline{q}^e} \int_{\Omega_0^e} \partial \underline{\underline{B}}_{NL}^e{}^T \underline{S}^e \, dV_0 + \frac{1}{\partial \underline{q}^e} \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{\underline{D}} \partial \hat{\underline{E}} \, dV_0 \quad (1.54)$$

En substituant  $\partial \hat{\underline{E}}$  d'après (1.45),

$$\underline{\underline{K}}_t^e(\underline{q}^e) = \frac{1}{\partial \underline{q}^e} \int_{\Omega_0^e} \partial \underline{\underline{B}}_{NL}^e{}^T \underline{S}^e \, dV + \int_{\Omega_0^e} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e)^T \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{B}}_L^e + \underline{\underline{B}}_{NL}^e) \, dV \quad (1.55)$$

et en remarquant que  $\partial \underline{\underline{B}}_{NL}^e{}^T \underline{S}^e$  peut s'écrire sous la forme  $\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{H}} \partial \underline{q}^e$ , où  $\underline{\underline{T}}$  est la matrice de l'état des contraintes et  $\underline{\underline{H}}$  une matrice gradient des fonctions d'interpolations, il vient l'expression de la matrice de raideur tangente comme une somme de contributions :

$$\underline{\underline{K}}_t^e = \underline{\underline{K}}_G + \underline{\underline{K}}_L + \underline{\underline{K}}_{NL} \quad (1.56)$$

avec  $\underline{\underline{K}}_L$  la matrice de raideur du problème linéaire,  $\underline{\underline{K}}_{NL}$  la matrice de raideur tangente des grands déplacements et  $\underline{\underline{K}}_G$  la matrice de raideur géométrique associée à l'état de contrainte existant dans la configuration courante, calculé dans la configuration initiale.

Le problème tangent (1.57) est alors résolu et les opérateurs mis à jour ( $\underline{\underline{K}}_t(\underline{q})$  et  $\underline{R}(\underline{q})$ ) jusqu'à convergence du déplacement ou du résidu des efforts.

$$\underline{\underline{K}}_t(\underline{q}) \underline{\delta q} = -\underline{R}(\underline{q}) \quad (1.57)$$

La résolution du système suppose que le problème soit bien posé au regard des conditions limites notamment. Elle peut se faire de manière directe (factorisation) ou itérative (gradient conjugué). Chaque résolution du système est une itération de Newton qui corrige le vecteur solution  $\underline{q}$ . Le critère d'arrêt des itérations est souvent normalisé par rapport à une grandeur

caractéristique [Crisfield, 1991] pour être moins dépendant du problème. Le critère le plus utilisé est le résidu normalisé par les efforts extérieurs avec un seuil de convergence  $\eta_{New}$  d'un ordre de grandeur compris entre  $10^{-2}$  et  $10^{-6}$  selon le niveau de précision souhaité [Dhatt et al., 2013].

$$e < \eta_{New} \quad (1.58)$$

$$\text{avec } e = \frac{\|R\|}{\|F_{ext}\|} \quad (1.59)$$

### Aspects pratiques :

Au voisinage de la solution, la convergence est quadratique (l'opérateur de raideur tangent y est défini positif) sauf aux points de bifurcation et points limites où la seconde variation de l'énergie est inférieure ou égale à 0 (l'opérateur tangent n'est plus défini positif) et la solution instable. Pour s'assurer de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson, il convient donc de découper le chargement en incrémentations afin de rester au voisinage de la solution. Il s'agit alors d'une procédure incrémentale-itérative. Comme le chargement est réalisé au moyen d'efforts extérieurs et/ou de déplacements imposés, un facteur de charge  $\lambda$  peut être défini. L'effort extérieur à l'incrément  $n$  vaut  $F_{ext,n} = \lambda_n F_{ext}$ . Pour les déplacements imposés, on peut décomposer le vecteur des degrés de liberté en une partie libre  $q_f$ , inconnue, et une partie contrainte, connue, qui vaut  $q_p = \lambda_n q_{p,n}$  à l'incrément  $n$ .

La taille des incrémentations  $\Delta\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} - \lambda_n$  est cependant arbitraire sans connaissance préalable de la solution. C'est pour cette raison que des procédures adaptatives ont été proposées afin de réduire ou agrandir la taille de l'incrément pendant le calcul en fonction de la convergence. Une approche se base sur un nombre d'itérations optimal  $Ni_{opt}$  pour évaluer la taille du prochain incrément, en fonction du nombre d'itérations réalisées  $Ni_n$  :

$$\Delta\lambda_{n+1} = \Delta\lambda_n \frac{Ni_{opt}}{Ni_n} \quad (1.60)$$

L'incrément initial est défini en fonction de l'expérience de l'utilisateur. L'Algorithme 1 décrit la procédure avec une incrémentation à efforts imposés.

Par ailleurs, certains comportements nécessitent un pilotage particulier de l'incrémentation. Les deux cas de figure suivant sont notamment concernés :

- le *snap-through* Figure 1.24a : il s'agit d'un point limite que l'on retrouve dans les cas de claquage d'une coque soumise à un chargement transverse ponctuel ou réparti (pression).
- le *snap-back* Figure 1.24b : ce phénomène a été décrit initialement par [Karman et Tsien, 1941] dans le cas du flambement de coques cylindriques. Il est observé également en propagation de fissure fragile [Carpinteri, 1990].

Dans le cas d'une incrémentation à effort imposé ( $\Delta\lambda$  fixé pour l'incrément), le passage d'un snap-through induit un incrément de déplacement de très grande amplitude ce qui empêche la bonne convergence de l'algorithme de Newton. De la même façon, une incrémentation à déplacement imposé ( $\Delta q_p$  fixé pour l'incrément) ne convient pas au passage d'un snap-back.

Une procédure élégante qui permet d'analyser ces comportements est la méthode de longueur d'arc (*arc-length*), proposée par [Wempner, 1971] et déclinée ensuite en plusieurs

**Algorithme 1 :** Méthode de Newton-Raphson (efforts imposés)

---

```

initialisation :  $\Delta\lambda = 1/n_{max}$ ,  $\lambda = \Delta\lambda$ ,  $n = 0$ ,  $\underline{q}_0 = \underline{0}$ 
tant que  $\lambda < 1$  faire (boucle incrémentale)
     $n = n + 1$ ;
     $\underline{F}_{ext,n} = \lambda \underline{F}_{ext}$ ;
     $\underline{q}_{n,0} = \underline{q}_{n-1}$ ;
    assembler  $\underline{\underline{K}}_t(\underline{q}_{n,0})$  et  $\underline{R}(\underline{q}_{n,0}, \underline{F}_{ext,n})$  (prédition);
     $i = 0$ ;
    tant que  $e > \eta_{New}$  faire (boucle itérative de correction)
        imposer les conditions limites  $\underline{\delta q}_{n,i+1} = \underline{0}$ ;
        résoudre  $\underline{\underline{K}}_t(\underline{q}_{n,i}) \underline{\delta q}_{n,i+1} = -\underline{R}(\underline{q}_{n,i}, \underline{F}_{ext,n})$ ;
         $\underline{q}_{n,i+1} = \underline{q}_{n,i} + \underline{\delta q}_{n,i+1}$ ;
         $i = i + 1$ ;
        mettre à jour  $\underline{\underline{K}}_t(\underline{q}_{n,i})$  et  $\underline{R}(\underline{q}_{n,i}, \underline{F}_{ext,n})$ ;
     $\Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{N_{i_{opt}}}{i}$ ;
     $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ ;

```

---

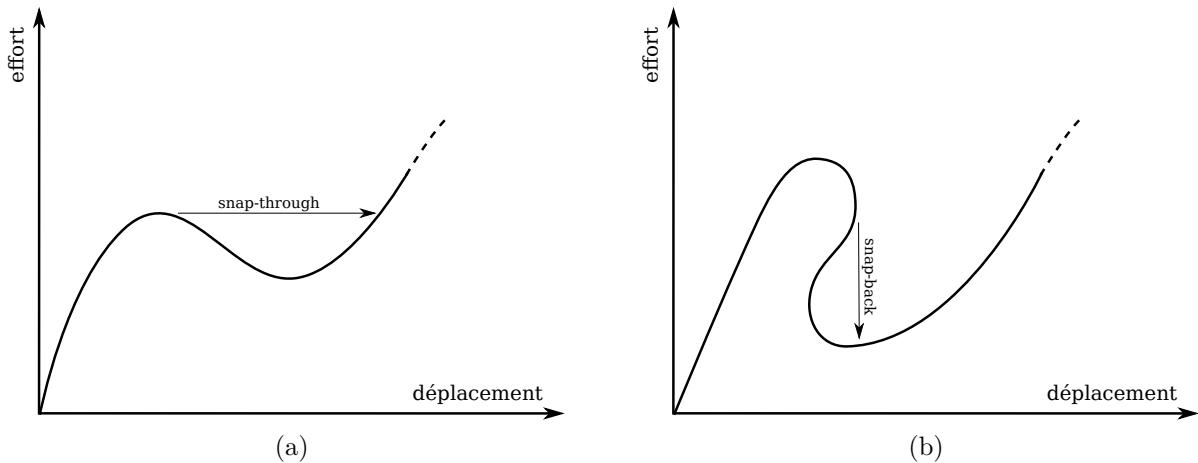


FIGURE 1.24 – Courbes d’effort-déplacement pour les comportements de *snap-through* et *snap-back*

variantes, dont notamment la méthode de Riks [Crisfield, 1991]. Il s’agit d’imposer une contrainte sur la taille de l’incrément  $n$  défini par  $(\underline{\Delta q}_n, \Delta\lambda_n)$  et de résoudre itérativement un problème augmenté (1.61). Par la méthode de Riks, la contrainte consiste à orthogonaliser les pas de correction à l’itération  $i$  par rapport au pas de prédition (indiqué par 0).

$$\begin{cases} \underline{\underline{K}}_t(\underline{q}_{n,i}) \underline{\delta q}_{n,i} = -\underline{R}(\underline{q}_{n,i}, \lambda_{n,i}) \\ \underline{\Delta q}_{n,0} \underline{\delta q}_{n,i}^T + \Delta\lambda_{n,0} \underline{\delta q}_{n,i} = 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

La Figure 1.25 illustre le fonctionnement de ces techniques de suivi de branche d’équilibre.

Dans le cas du post-flambement local des structures raidies et même de la plupart des plaques sans condition de bord libre (voir Réponse des structures raidies en post-flambement), la forme générale de la branche d’équilibre ne justifie pas l’utilisation de telles techniques.

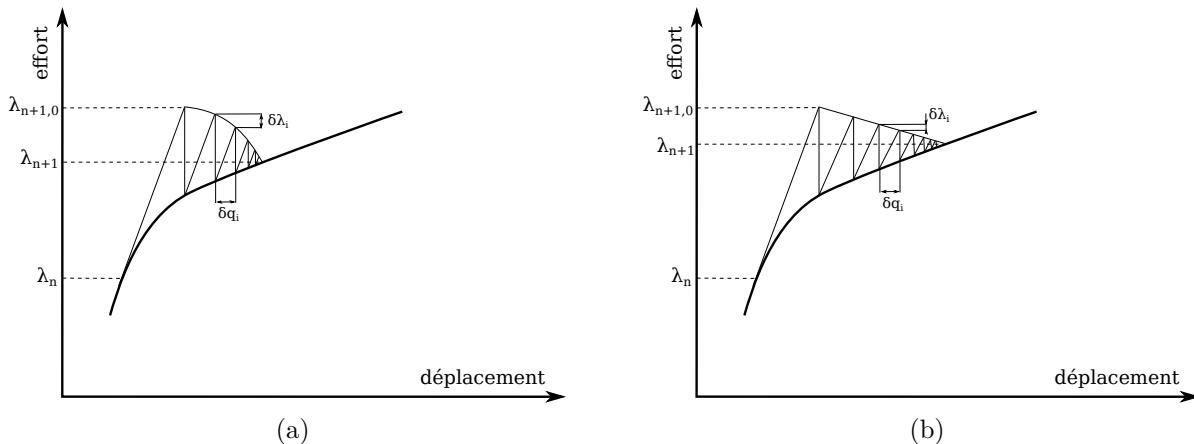


FIGURE 1.25 – Technique de suivi de branche d'équilibre : (a) Arc-length sphérique, (b) Riks

Dans le cadre de cette thèse, le pilotage en déplacements et/ou efforts imposés suffit donc à parcourir les branches d'équilibre.

### Quelques variantes :

L'assemblage et la factorisation de la matrice de raideur tangente sont coûteux numériquement et peuvent rendre certains calculs irréalisables (besoins en mémoire vive, temps de calcul). Pour ces raisons, des approximations de la raideur tangente ont été proposées. Cela a donné lieu à trois procédures qui remplacent avantageusement la procédure de Newton-Raphson dans de nombreux cas.

- La procédure de Pseudo-Newton, la plus simple, consiste à n'évaluer la matrice de raideur tangente (assemblage et factorisation) qu'à la première itération et à la conserver pour les itérations suivantes. La convergence s'en trouve altérée mais le coût de calcul est fortement réduit. Cette approche n'est pertinente que pour des cas faiblement non-linéaires mais reste robuste de façon générale. Bien sûr, elle ne convient pas au passage de snap-through ou de snap-back, pour lesquels l'opérateur tangent change radicalement au cours de l'incrément.
- La procédure de Quasi-Newton construit une approximation de l'opérateur de raideur tangent par corrections successives au cours des itérations. Son assemblage n'est réalisé qu'au premier incrément. Les corrections sont calculées à partir de l'incrément d'efforts intérieurs qui résulte de l'incrément de déplacement calculé à l'itération précédente (1.62).

$$(\underline{\underline{K}}_{t_i} + \underline{\underline{\delta K}}_{t_{i+1}}) \underline{\delta q}_{i+1} = \underline{\delta F}_{int_{i+1}} \quad (1.62)$$

Des expressions de  $\underline{\underline{\delta K}}_{t_{i+1}}$  d'ordre 1 ou 2 [Dennis et Moré, 1977 ; Dennis et Schnabel, 1983] qui satisfont l'équation (1.62) évitent d'assembler la matrice de raideur tangente à chaque itération. Pour éviter aussi la factorisation, une solution consiste à corriger directement la matrice tangente factorisée [Broyden, 1970]. La convergence de la procédure de Quasi-Newton n'est pas quadratique comme celle de Newton-Raphson mais d'un ordre compris entre 1 et 2. Bien que des gains significatifs aient été obtenus avec cette méthode, une perte de stabilité numérique a aussi été rapportée [Crisfield, 1979]. Comme pour la procédure de Pseudo-Newton, le passage de fortes non-linéarités n'est pas le point fort des méthodes

d'approximation de l'opérateur de raideur linéarisé.

#### **Application au post-flambement :**

Comme évoqué plus haut, la méthode de Newton-Raphson est très couramment utilisée pour la résolution des problèmes de post-flambement modélisés par éléments-finis. Elle est implémentée dans à peu près tous les codes du commerce. L'utilisateur peut avoir la possibilité de régler les paramètres de la méthode. Cependant, dans le cadre de l'étude du décollement peau/raidisseurs en post-flambement, [Bertolini *et al.*, 2009] ont proposé un modèle de panneau raidie adapté à la représentation du phénomène de flambement. La taille de la structure (de l'ordre du mètre) et une modélisation fine des conditions limites (carré déformable) ont aboutis à un modèle de plus de sept millions de degrés de libertés Figure 1.26, avec des temps de résolution par une méthode de Newton-Raphson prohibitifs.

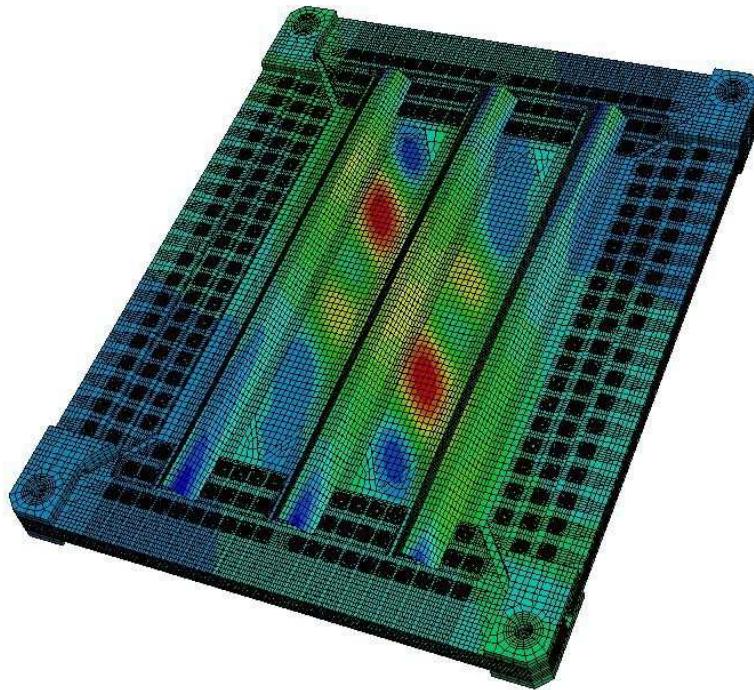


FIGURE 1.26 – Modèle éléments finis d'un essai de post-flambement d'une plaque raidie en composite [Bertolini *et al.*, 2009].

Ce genre de modèle représente les limites actuelles de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution de problèmes de post-flambement.

#### **1.5.3 Approche global/local**

Dans le cadre du calcul non-linéaire sur des problèmes de grande taille, présentant des phénomènes multi-échelles, lorsque l'utilisation de méthodes d'approximation de la matrice de raideur tangente (voir Problème tangent et méthode de Newton-Raphson ) ne suffit pas à rendre le calcul abordable, d'autres approches sont proposées. On s'intéresse ici aux approches utilisées actuellement pour la conception en bureau d'études des structures d'aéronefs par exemple [Cornuault, 1998].

Le principe repose sur l'utilisation de modèles distincts pour les différentes échelles des constituants et des phénomènes de la structure, conformément à l'organisation de la pyramide

des essais-calculs présentée en Introduction générale.

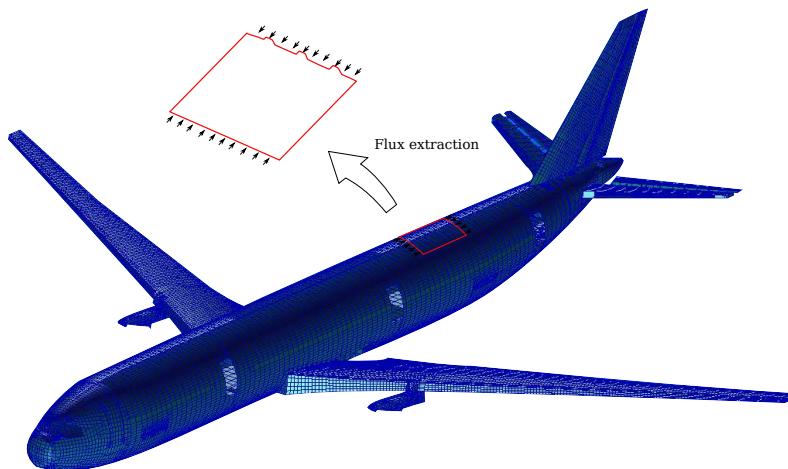


FIGURE 1.27 – Approche global-local descendante en dimensionnement des structures. Modèle global AIRBUS et modèles locaux par [Bertolini, 2008].

Des modèles linéaires peu raffinés sont utilisés aux plus grandes échelles. Bien qu'idéalisant fortement la géométrie, ces modèles sont déjà de taille conséquente. Ils permettent de calculer la réponse de la structure aux sollicitations macroscopiques et d'en déduire les flux d'efforts.

À mesure que l'échelle diminue, la géométrie est moins idéalisée, jusqu'à la modélisation complète en 3 dimensions des détails structuraux. À partir d'un certain niveau, les endommagements et les contacts peuvent être pris en compte.

Le couplage de ces modèles se fait d'une manière descendante par extractions des flux d'effort (conditions statiques) ou des déplacements (conditions cinématiques) à un niveau supérieur, et leur utilisation comme conditions limites au niveau inférieur (voir Figure 1.27), ceci de manière récursive, mais unidirectionnelle. Cette approche, qui est également mise en œuvre dans de nombreux travaux de recherche [Bertolini, 2008], est souvent jugée conservatrice.

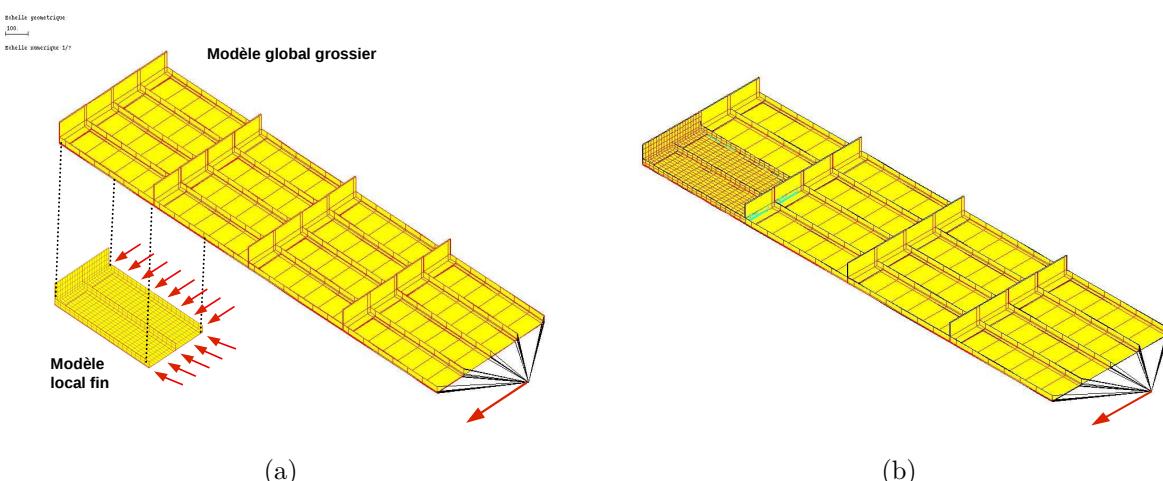


FIGURE 1.28 – Modélisation en approche descendante (a) et en raffinement local (b) [Cresta, 2008].

Une évaluation de l'approximation réalisée par les approches descendantes pour le post-flambement local d'un panneau raidi est proposée dans [Cresta, 2008]. Par comparaison de l'approche descendante par extraction de conditions cinématiques avec une modélisation totalement raffinée et une modélisation localement raffinée, cette étude quantifie les limites d'une telle approche dans son application au post-flambement local d'un panneau raidi (Figure 1.28).

Il résulte de cette étude que le couplage par extraction des conditions cinématiques induit une erreur importante (20% en amplitude de déplacement) sur la réponse en post-flambement local (Figure 1.29). Le couplage par conditions statiques est plus conservatif puisque les efforts sont généralement surestimés par le calcul global grossier. L'approche par raffinement local est quant à elle assez précise sur la déformée. Il faut cependant connaître a priori la zone à raffiner et être certain que les zones avoisinantes ne flamberont pas, suite à la redistribution des efforts par exemple.

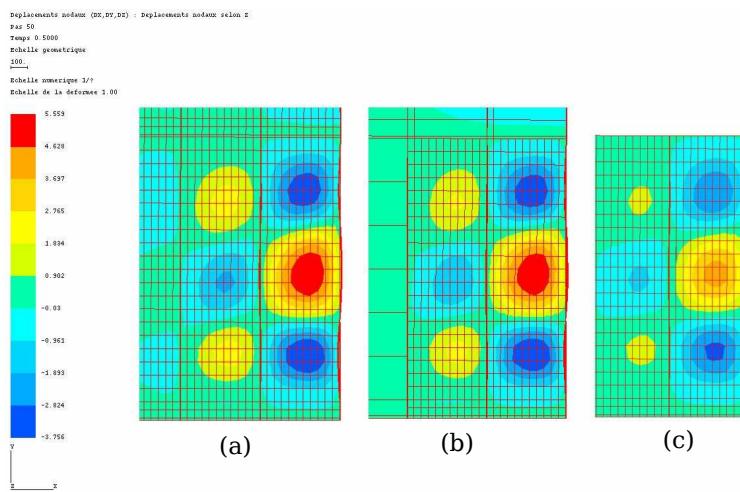


FIGURE 1.29 – Comparaison des déformées locales obtenues par (a) modèle raffiné, (b) modèle raffiné localement et (c) approche descendante [Cresta, 2008].

En conclusion, dans un cadre non-linéaire, l'utilisation de l'approche global-local descendante peut s'avérer hasardeuse et surtout incapable de prédire les interactions entre le phénomène local et la réponse globale de la structure. Du point de vue du *Virtual Testing*, l'augmentation de la part de simulation aux grandes échelles ne passe donc pas par l'utilisation de cette approche. Elle permet cependant de mettre en œuvre des modèles raffinés qui sont capables de prédire l'initiation de phénomènes non-linéaires locaux (charge critique de flambement) et/ou non-réversibles (délamination, décollement de raidisseur). Enfin, les modèles raffinés peuvent être développés indépendamment en comparaison avec les essais “coupons” et recevoir *in fine* les efforts provenant du modèle global. Cette approche permet donc de sous-traiter les calculs locaux sur plusieurs niveaux.

#### 1.5.4 Méthodes alternatives

Quelques méthodes qui permettent de résoudre efficacement des problèmes non-linéaires en mécanique des structures sont présentées. Elles se positionnent comme des méthodes alternatives à celle de Newton-Raphson. La méthode asymptotique numérique et la méthode LaTIn (Large Time Increment) sont des méthodes non-incrémentales, dites de continuation.

Elles permettent de connaître la solution sur tout un intervalle de temps de manière continue. Une méthode qui consiste à modéliser un comportement non-linéaire géométrique par un matériau équivalent endommageable dans le but de réduire le coût du calcul est également introduite.

### Méthode asymptotique numérique :

La méthode asymptotique numérique (MAN), à laquelle un ouvrage est dédié [Cochelin, 2007], est basée sur un développement asymptotique de la solution du problème non-linéaire à la manière de [Koiter, 1945]. Le développement asymptotique choisi est celui des séries entières tronquées à un ordre  $N$  en fonction d'un paramètre de chemin  $a$  qui représente un point sur la branche d'équilibre  $R(U, \lambda) = 0$ . Dans le cadre d'une discréttisation par éléments-finis, le développement en série entière est vectoriel pour le vecteur déplacement  $\underline{q}$  et scalaire pour le facteur de charge  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \underline{q}(a) &= \underline{q}_0 + a\underline{q}_1 + a^2\underline{q}_2 + \dots + a^N\underline{q}_N \\ \lambda(a) &= \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.63)$$

Le paramètre de chemin est défini en général comme une pseudo-longueur d'arc (1.64). D'autres définitions peuvent être utilisées non sans influer sur les performances de la méthode, comme par exemple  $a = \lambda$ .

$$a = (\underline{q}^T - \underline{q}_0^T)\underline{q}_1 + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \quad (1.64)$$

L'objectif de la résolution par la MAN est de déterminer les termes des séries et leur domaine de validité  $a_{max}$  pour une précision donnée.

Le calcul des termes de la série se fait en injectant les développements (1.63) dans l'équation d'équilibre  $R(\underline{q}(a), \lambda(a)) = 0$ . Cette dernière étant cubique en fonction du vecteur déplacement, une variable intermédiaire est introduite pour retrouver un problème quadratique qui présente de meilleures propriétés pour un développement en série, notamment un calcul très simple des seconds membres [Baguet, 2001]. Le point  $(\underline{q}_0, \lambda_0)$  étant une solution de l'équilibre, et ce dernier devant être vérifié pour toute valeur du paramètre de chemin,  $N$  équations linéaires sont obtenues, une par ordre, avec la particularité d'avoir toutes le même opérateur et des seconds membres dépendant des ordres inférieurs uniquement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \underline{q}} \underline{q}_1 + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \lambda_1 &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \underline{q}} \underline{q}_2 + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \lambda_2 &= F_2(\underline{q}_1, \lambda_1) \\ \dots \\ \frac{\partial R}{\partial \underline{q}} \underline{q}_p + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \lambda_p &= F_p(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_{p-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \dots \end{aligned} \quad (1.65)$$

Ce système d'équations est complété par celui obtenu par injection du développement en série dans l'équation (1.64). La résolution se fait alors de manière séquentielle, de l'ordre 1 à l'ordre  $N$ .

Le domaine de validité est calculé ensuite soit par différence entre les troncatures à l'ordre  $N$  et  $N - 1$  qui s'écartent à proximité du rayon de convergence, soit par une approximation asymptotique du résidu. Si le domaine de validité n'englobe pas la totalité de la branche d'équilibre étudiée, plusieurs morceaux sont calculés en développant successivement des séries depuis les bords des domaines déjà résolus :  $\underline{q}_0 = q_{[0,a_{max}]}(a_{max})$ ,  $\lambda_0 = \lambda_{[0,a_{max}]}(a_{max})$ .

La méthode asymptotique numérique est robuste et fiable. Elle permet de parcourir des branches d'équilibre présentant des bifurcations soit en traversant les bifurcations soit en les empruntant [Baguet, 2001 ; Boutyour *et al.*, 2004]. Si elle a été initialement conçue pour des problèmes de post-flambement, plusieurs problèmes de mécanique non-linéaire ont été résolus avec succès [Zahrouni, 1998 ; Cadou *et al.*, 2006]. Enfin le coût du calcul est faible devant celui d'une méthode de prédiction-correction de type Newton-Raphson grâce à la factorisation d'un unique opérateur pour tous les ordres et des domaines de validité beaucoup plus grands que les pas de l'incrémentation de Newton. Si le calcul des seconds membres et la séquentialité du calcul des ordres des séries peuvent s'avérer limitant, des développements ont permis d'améliorer les performances de la méthode sur de nombreux aspects tels que la largeur du domaine de validité [Cochelin *et al.*, 1994].

### Méthode LaTIn :

La méthode LaTIn (*Large Time Increment*) est une méthode de résolution non-incrémentale des problèmes d'évolution, c'est à dire qu'une approximation de la solution est recherchée sur tout un espace-temps de manière itérative [Ladevèze, 1999]. Elle repose sur trois principes de base énoncés ici :

- Le **premier principe** de la méthode LaTIn est de séparer les difficultés dans la formulation du problème. Deux groupes d'équations sont formés, celui des équations linéaires (équilibre global) qui permettent de vérifier l'admissibilité de la solution (variété  $A_d$  de l'espace des solutions) et celui des équations locales, éventuellement non-linéaires (comportement local), qui permettent de vérifier la loi de comportement sur l'espace-temps (variété  $\Gamma$  de l'espace des solutions). Ce premier principe est schématisé en Figure 1.30.
- Le **second principe** indique que le problème est résolu par itérations successives entre les deux groupes d'équations. Pour cela, des directions de recherche sont définies,  $E^+$  et  $E^-$ . Connaissant l'approximation de la solution à l'itération  $n$  sur  $A_d$ , la direction  $E^+$  permet de résoudre les équations locales (par exemple en fixant les contraintes) à l'itération  $n + 1/2$ . De même la direction  $E^-$  permet de résoudre les équations globales à l'itération  $n + 1$  (par exemple dans l'espace tangent à  $\Gamma$ ).
- Le **troisième et dernier principe** repose sur l'utilisation d'une approximation des inconnues du problème linéaire comme une somme de termes, chaque terme étant le produit d'une fonction scalaire du temps et d'une fonction de l'espace. Cette méthode est connue sous le nom d'approximation radiale. La résolution du problème linéaire se fait par un algorithme itératif qui permet de calculer les termes de l'approximation radiale.

La méthode LaTIn a démontré son efficacité notamment sur les problèmes de non-linéarité matériau de plasticité [Cognard, 1989] et de délamination [Allix, 1987]. Un point intéressant concerne l'initialisation des fonctions d'espace de l'approximation radiale qui peut permettre d'introduire des connaissances acquises de calculs précédents, rendant la méthode pertinente pour des études paramétriques [Boucard, 2001].

Dans le cas des non-linéarités géométriques, une attention particulière doit être portée à la vérification du premier principe de la méthode. En effet, le changement de configuration est pris en compte au niveau global en formulation lagrangienne totale, ce qui conduit à une non-linéarité sur  $A_d$ . Néanmoins cette non-linéarité est jugée "douce" et la résolution est toujours possible en actualisant  $A_d$  à chaque itération. Une formulation corotationnelle [Fellippa et Haugen, 2005] permet cependant de transférer les non-linéarités géométriques au niveau des équations locales. C'est la stratégie employée par [Boucard *et al.*, 1997] pour la

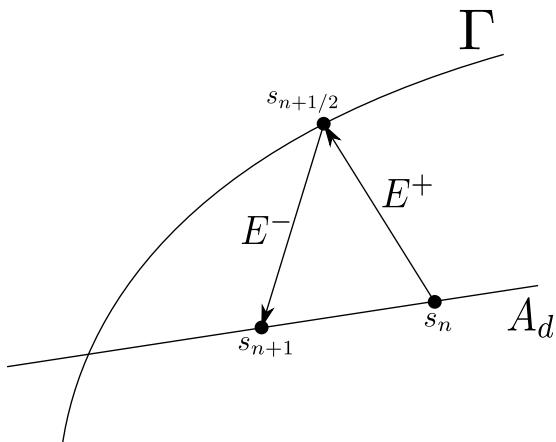


FIGURE 1.30 – Schéma géométrique associé à la méthode LaTIn [Ladevèze, 1999]. Variétés de l'espace des solutions et schéma itératif.

résolution efficace (8 itérations) d'un problème de post-flambement.

#### Approche par matériau équivalent :

L'approche proposée dans [Barrau et Castanié, 2005] est basée sur l'observation de l'état des contraintes dans l'âme d'une poutre soumise à un effort vertical. Comme observé précédemment dans [Kuhn, 1956], l'âme passe d'un état de cisaillement avant flambement à un état de tension à  $45^\circ$  avec une contrainte diagonale en compression qui stagne.

L'idée développée consiste à reproduire l'évolution des contraintes de la Figure 1.31b dans un matériau orthotrope virtuel par l'utilisation de variables d'endommagement. Concrètement, le panneau A est divisé en zone centrale orthotrope endommageable et zones de bords, plus rigides, qui sont traitées avec le matériau isotrope initial. La largeur des zones de bords est déterminée grâce à la méthode de la largeur effective déjà présentée dans ce manuscrit (voir Méthode de Ritz-Galerkin). Cette formulation, introduite dans un modèle éléments-finis au niveau de la zone en flambement permet de grossir le maillage et de réduire le coût du calcul grâce à une convergence rapide des variables d'endommagement.

L'approche par matériau équivalent endommageable peut être vu comme une méthode basée sur l'homogénéisation. Elle repose cependant sur une connaissance préalable du comportement non-linéaire local, à la différence d'autres méthodes basées sur l'homogénéisation dans lesquelles la résolution de problèmes locaux fait partie intégrante du processus [Feyel et Chaboche, 2000]. Cette approche perd donc en prédictibilité et son adaptation à des matériaux orthotropes n'est pas directe.

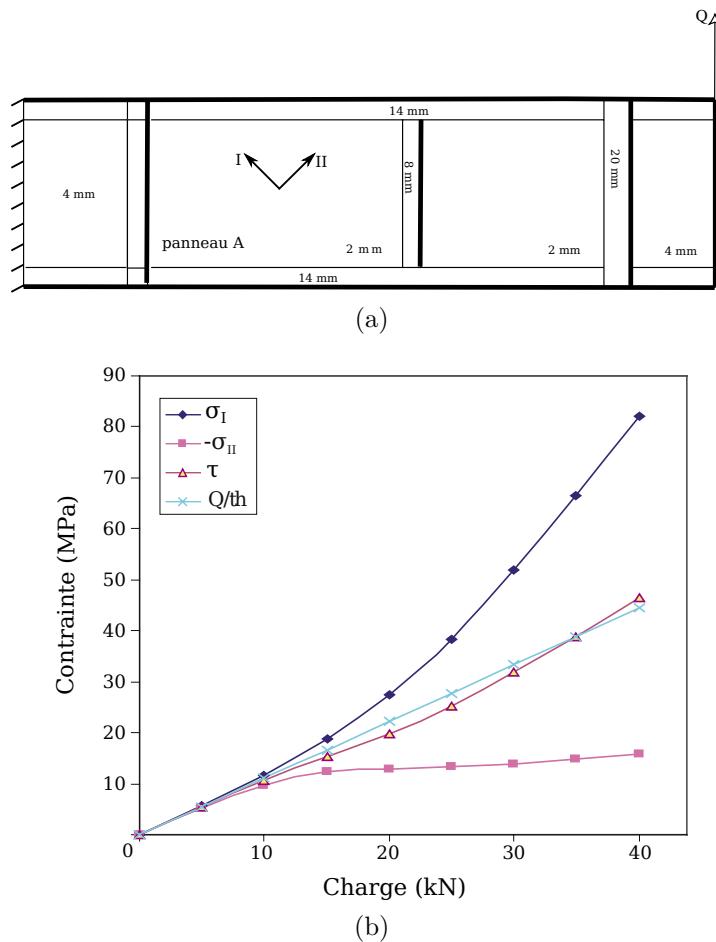


FIGURE 1.31 – (a) Schéma du dispositif de poutre soumise à un effort vertical. (b) Contraintes de cisaillement et de tension diagonale au centre du panneau A [Barrau et Castanié, 2005].

## 1.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, le phénomène de post-flambement des structures raidies a été introduit avec sa modélisation classique. Une brève revue des méthodes usuelles de résolution a ensuite été présentée.

À travers les méthodes de résolution semi-analytiques, les solutions classiques de post-flambement des plaques permettent de bien appréhender le phénomène grâce à leur forme analytique. Cependant, les restrictions portant sur ces méthodes, comme notamment la prise en compte de détails structuraux et de formes géométriques complexes, ne leur permettent pas de répondre à tous les besoins industriels. Elles jouent en revanche un rôle important en phases de pré-dimensionnement et d'optimisation des structures en post-flambement.

La méthode des éléments finis et les méthodes de résolution associées, également introduites dans ce chapitre, sont capables de résoudre des problèmes plus complexes, au delà même du post-flambement élastique. Les éléments-finis sont aujourd’hui utilisés aussi bien en phase amont de conception qu’en phase avancée, lorsque les détails structuraux ont été définis. Quelle que soit la phase, la modélisation du post-flambement requiert une discrétisation assez fine, engendrant un nombre d’inconnues considérable. Bien que l’étape de discrétisation en éléments-finis s’intègre de plus en plus dans le processus de conception grâce, par exemple, au lien CAO-MEF et que son découpage en sous-structures soit aisé, la taille des modèles en terme de mémoire vive est critique et la résolution des grands systèmes matriciels

traduisant l'équilibre est coûteuse, surtout en non-linéaire. Cela limite donc les possibilités d'optimisation des grandes structures en post-flambement.

Aussi bien pour les méthodes de résolution semi-analytique qu'éléments-finis, les questions de robustesse et de précision, de temps de calcul et de taille des modèles sont donc primordiales. Les méthodes de résolution exposées dans ce chapitre atteignent à ce propos leurs limites plus ou moins rapidement. L'élargissement de ces limites a déjà été fait soit par amélioration de l'existant (Pseudo-Newton, développement asymptotique), soit par rupture avec l'existant (MAN, LaTIn). Notre objectif est d'élargir les limites actuelles du calcul des grandes structures en post-flambement local. Dans le chapitre suivant, nous établissons une revue de stratégies avancées, développées notamment pour améliorer la résolution de problèmes non-linéaires de grande taille en mécanique des structures.

---

# Stratégies avancées en mécanique non-linéaire des structures et problèmes de grande taille

---

**Résumé**

Ce chapitre présente une revue non-exhaustive des méthodes innovantes qui tentent d'apporter des solutions à la problématique du coût de calcul des problèmes non-linéaires de grande taille tout en préservant la précision. Les méthodes de réduction de modèle et de décomposition de domaine prennent une place conséquente dans ce chapitre mais nous l'avons élargi à d'autres méthodes parfois moins dédiées à la performance numérique qu'à la précision, la prédictivité et la robustesse de la simulation. Cette revue est néanmoins centrée sur l'intérêt que présentent les différentes méthodes pour la simulation du post-flambement local des structures raidies.

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Réduction de modèle</b>	<b>52</b>
2.2.1	Réduction de modèle par projection	52
2.2.2	Réduction de modèle a priori	60
<b>2.3</b>	<b>Calcul parallèle par décomposition de domaine</b>	<b>64</b>
2.3.1	Décomposition de domaine sans recouvrement	65
2.3.2	Formulation du problème d'interface	66
2.3.3	Résolution itérative du problème d'interface	71
2.3.4	Newton-Krylov-Schur et localisation non-linéaire	73
<b>2.4</b>	<b>Approches combinées</b>	<b>77</b>
2.4.1	Méthode LaTIn micro/macro	77
2.4.2	Autour des éléments finis généralisés	78
2.4.3	Méthode asymptotique numérique et POD	81
2.4.4	Partition de la réduction de modèle	82
<b>2.5</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>85</b>

---

## 2.1 Introduction

Les problèmes de grande taille et non-linéaires, tels que celui du post-flambement local de structures raidies, peuvent engendrer des systèmes d'équations à plusieurs dizaines de millions d'inconnues. L'espace mémoire occupé, ainsi que les temps de constitution des opérateurs et de résolution des systèmes linéaires deviennent incompatibles avec les ressources disponibles et les délais de conception actuels. Ceci malgré l'avènement des super-calculateurs et les progrès dans les algorithmes de résolution de systèmes linéaires directs ou itératifs.

C'est pour cela que des stratégies ont été développées autour des solveurs de systèmes linéaires et en amont, au niveau de la mise en équation (voir Figure 2.1). Deux concepts ont été particulièrement explorés. Celui de la réduction de modèle tente d'approcher la solution au moyen d'une représentation réduite bien choisie de l'espace des solutions. Celui de la décomposition de domaine répartit les efforts de calcul sur l'ensemble des processeurs disponibles.

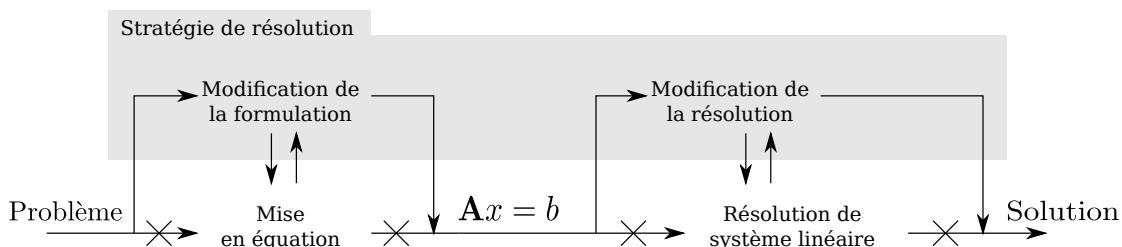


FIGURE 2.1 – Schéma de principe de l'action des stratégies de résolution.

Nous présentons dans ce chapitre un état de l'art des méthodes qui découlent de ces concepts. La première section est dédiée à la réduction de modèle. Trois approches y sont introduites : par projection, par réduction a priori, par séparation de variables. La seconde section traite du calcul parallèle par décomposition de domaine.

Dans la troisième section, nous nous intéressons à des approches qui combinent les avantages de différentes méthodes avancées afin de repousser les limites du calcul haute performance.

## 2.2 Réduction de modèle

Étant donné un modèle mécanique qui se traduit par une équation d'équilibre à résoudre sur un domaine avec des conditions de Neumann et de Dirichlet, la réduction de modèle consiste dans un sens général à trouver une expression peu coûteuse, éventuellement approchée, de la solution de ce problème bien posé sans résoudre directement le système initial d'équations. Cela peut se traduire de différentes manières, dont nous proposons un état de l'art tout en exhibant les applications à l'étude du post-flambement local des structures raidies.

### 2.2.1 Réduction de modèle par projection

La réduction de modèle par projection est une version discrète de la méthode de Ritz-Galerkin (voir Méthode de Ritz-Galerkin), appliquée à la méthode des éléments-finis.

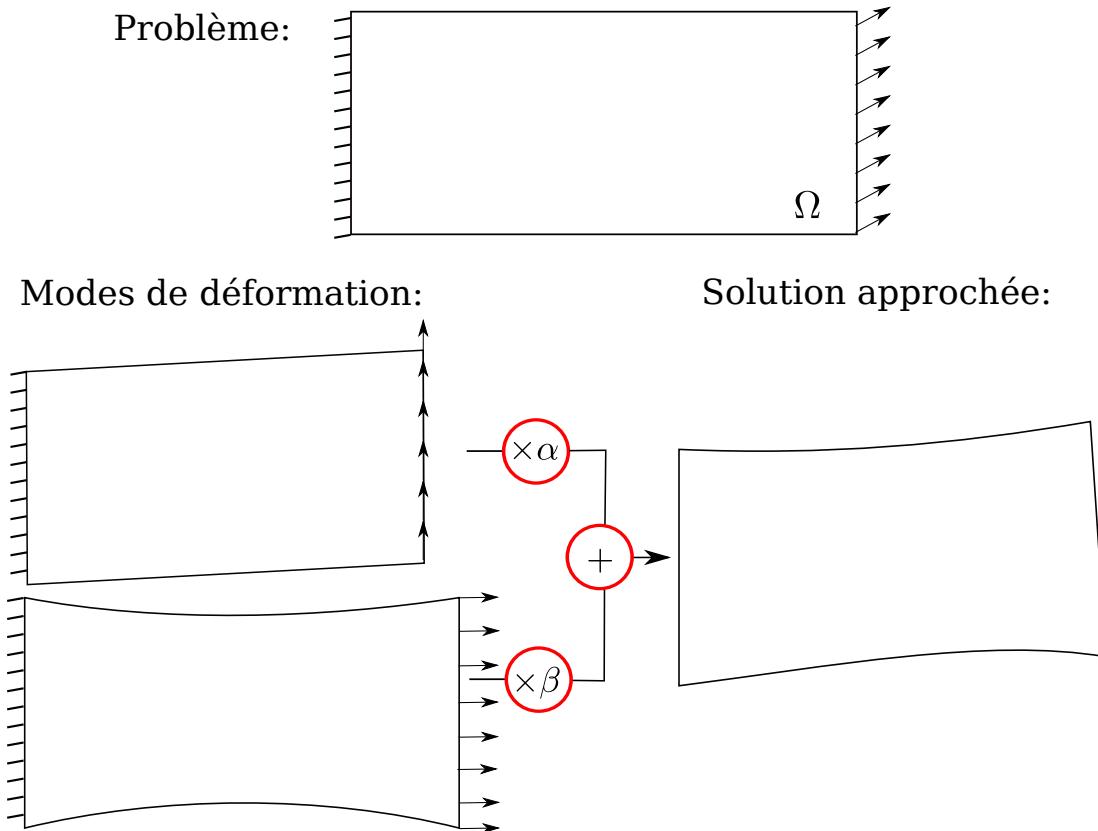


FIGURE 2.2 – Principe de la réduction de modèle par projection : approximation par combinaison linéaire de quelques modes globaux de déplacement ou de déformation. Ici, les inconnues du problème se résument aux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

La Figure 2.2 montre le principe d'approximation par combinaison linéaire de modes de déformation sur lequel repose la réduction de modèle par projection.

Les modes de déformations constituent une base  $\underline{\underline{C}}$  d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^N$ , où  $N$  est la dimension du problème discret initial. La solution du problème est recherchée dans le sous-espace  $Im(\underline{\underline{C}})$ , comme une combinaison des vecteurs de la base  $\underline{\underline{C}}$  de dimension  $N_c$  très inférieure à  $N$ .

$$\underline{q}_C = \underline{\underline{C}} \underline{\alpha} = \sum_{i=1}^{N_c} \underline{C}_i \alpha_i \quad (2.1)$$

Les  $\alpha_i$  sont les facteurs multiplicateurs des colonnes  $\underline{C}_i$  de la base réduite, également appelés coordonnées modales ou inconnues généralisées, qui deviennent les  $N_c$  inconnues du problème réduit. Comme pour la méthode de Ritz-Galerkin, le vecteur  $\underline{\delta q}$  des inconnues virtuelles est également choisi comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\underline{\underline{C}}$ . Il en découle le PPV projeté dans le sous-espace  $Im(\underline{\underline{C}})$  :

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{C}} \underline{\alpha} = \underline{\underline{C}}^T \underline{F}_{ext} \quad (2.2)$$

Soit l'annulation de la projection résidu des efforts :

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{R} = 0 \quad (2.3)$$

En non-linéaire, par linéarisation du résidu projeté, le problème tangent (1.57) devient :

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{C}} \underline{\delta \alpha} = -\underline{\underline{C}}^T \underline{R} \quad (2.4)$$

Avec  $\delta\alpha$  l'incrément des inconnues généralisées. Le critère d'arrêt, qui caractérise la convergence des itérations du problème tangent réduit, s'exprime donc avec le résidu et les efforts extérieurs projetés :

$$e_C < \eta_{New} \quad (2.5)$$

$$\text{avec } e_C = \frac{\|\underline{C}^T \underline{R}\|}{\|\underline{C}^T \underline{F}_{ext}\|} \quad (2.6)$$

La résolution des systèmes projetés de taille  $N_c \times N_c$  est a priori beaucoup moins coûteuse que celle des systèmes de taille  $N \times N$ . D'autant plus que la complexité de l'algorithme de résolution d'un système linéaire n'est pas linéaire (en  $O(N^3)$  pour le Pivot de Gauss). Il faut cependant tenir compte de la phase de projection qui diminue le gain en temps de calcul. L'opérateur de raideur projeté est, par ailleurs, plein, ce qui rend la résolution moins efficace qu'avec l'opérateur de raideur par bande initial.

Sur ce principe relativement simple, de nombreuses applications ont été proposées, à la fois en calcul de structure linéaire statique et dynamique [Hurty, 1965 ; Hughes et Skelton, 1981] ou en mécanique des fluides [Rowley, 2005 ; Lieu *et al.*, 2006], et aussi en calcul non-linéaire [Noor et Peters, 1980 ; Volkwein, 2005].

L'erreur d'approximation par réduction de modèle  $e_{rom}$  peut être définie comme une norme de la différence entre la solution et la solution approchée au moyen de la réduction de modèle :

$$e_{rom} = \|q - q_C\| \quad (2.7)$$

Mais  $q$  étant généralement inconnu, l'erreur d'approximation est plutôt évaluée par une norme euclidienne des efforts résiduels [Noor et Peters, 1980], égale à celle utilisée dans le critère d'arrêt de la procédure de Newton-Raphson sur le problème complet (voir Problème tangent et méthode de Newton-Raphson), qui caractérise l'écart à l'équilibre :

$$e_{rom} = e = \frac{\|R(q_C)\|}{\|\underline{F}_{ext}\|} \quad (2.8)$$

L'approximation de la solution est ainsi obtenue avec une certaine précision qui dépend d'une part du choix de la base réduite et d'autre part des moyens mis en œuvre pour contrôler l'erreur d'approximation. Le niveau de précision  $\eta_{rom}$  est fixé selon les besoins de l'utilisateur, dans le cadre d'un compromis précision/coût. Dans le cas où l'on désire obtenir la même précision que par résolution du problème complet  $\eta_{rom} = \eta_{New}$ .

La mesure d'erreur  $e_{rom}$  concerne l'erreur du modèle entier. Il se peut que l'utilisateur ne cherche seulement à obtenir qu'une approximation de certaines quantités dites "d'intérêt". Dans ce cas, une mesure d'erreur ciblée sur des quantités d'intérêt est possible [Florentin et Díez, 2012 ; Hoang *et al.*, 2013]. Cette approche permet, de manière plus fine et plus physique, de définir la qualité d'une base réduite et de décider de la nécessité de mettre en œuvre une procédure pour l'améliorer.

### 2.2.1.1 Constitution d'une base réduite

Comme les bases de Ritz en approche semi-analytique, il existe une grande variété de choix de base réduite. Ce choix fait appel à une connaissance préalable qui peut résulter d'une analyse modale, de précédents calculs pour différents paramètres, d'un développement

asymptotique, etc. La phase de constitution d'une base réduite est souvent appelée *phase hors-ligne* (ou *offline*), par opposition à la phase de résolution des systèmes réduits, dite *phase en ligne* (ou *online*). Cette distinction est souvent réalisée parce que la constitution des bases réduites a un coût qui réduit fortement le gain de la réduction de modèle. Pour autant cette phase peut être menée indépendamment, en amont et être rentabilisée par plusieurs phases *online*.

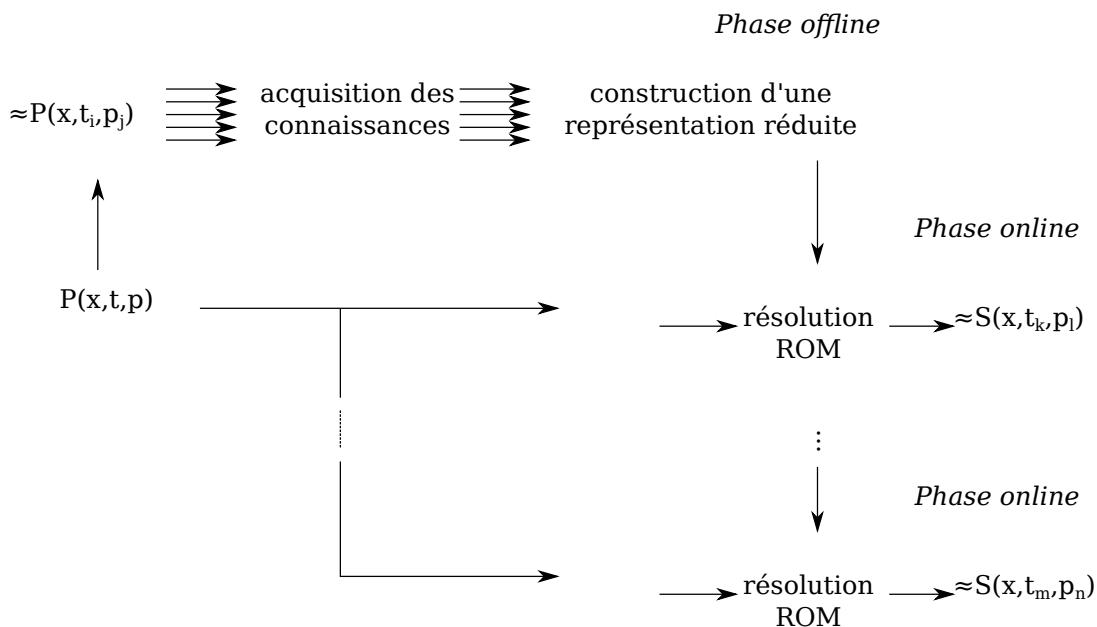


FIGURE 2.3 – Concept de calcul offline/online

### Les méthodes de constitution de base réduite :

Les principales bases réduites utilisées dans la littérature sont les suivantes :

- Les *bases modales tronquées* sont classiquement utilisées en réduction de modèle par projection. L'avantage des bases modales tronquées vient du fait que leur calcul est réalisé par des méthodes éprouvées d'analyse modale (problème aux valeurs propres) et qu'elles ont une certaine pertinence mécanique. En effet, par définition, la base modale permet de représenter tous les modes de déformation de la structure et l'ordre de troncature élimine les modes à plus faibles valeurs propres, qui ont un impact moindre sur l'erreur en énergie de la solution. Relier l'ordre de troncature à l'erreur d'approximation de la réduction de modèle est cependant hasardeux et le choix de l'ordre de troncature d'une base modale est comparable à celui d'une série trigonométrique pour les méthodes semi-analytiques : il faut tester la convergence de l'erreur d'approximation.
- La *décomposition propre orthogonalisée* (POD) (aussi connue sous le nom de *analyse des composantes principales* (PCA), *décomposition aux valeurs singulières* (SVD) ou *décomposition de Karhunen–Loeve* (KLD)) est une méthode issue des statistiques qui permet d'extraire une représentation optimale d'un échantillon de vecteurs (*snapshot*), avec un nombre réduit de composantes. Autrement dit, en phase *offline*, un *snapshot*

peut être constitué à partir de solutions pré-calculées (ou mesurées expérimentalement) de problèmes similaires au problème à résoudre. Soit  $\underline{\underline{Q}}$  ce *snapshot* de  $N_s$  vecteurs, une base réduite  $\underline{\underline{C}}^{pod}$  de taille  $N_c^{pod}$  est recherchée telle qu'elle minimise l'erreur  $J(\underline{\underline{C}}^{pod})$  [Volkwein, 1999] :

$$J(\underline{\underline{C}}^{pod}) = \sum_{i=1}^{N_s} \| \underline{Q}_i - \sum_{j=1}^{N_c^{pod}} \underline{C}_j^T \underline{Q}_i \underline{C}_j \|^2 \quad (2.9)$$

L'erreur minimisée est celle de la représentation du *snapshot* par un nombre restreint de vecteurs et à ne pas confondre avec celle de l'approximation par réduction de modèle du problème *online*.

- En non-linéaire, les *techniques de perturbation statique*, dont s'inspire la méthode asymptotique numérique (voir Méthodes alternatives), fournissent une série de dérivées du vecteur des inconnues par rapport à un paramètre de chemin [Thompson et Walker, 1968]. Leur calcul ne nécessite la factorisation que de la matrice tangente et les dérivées successives du vecteur  $\underline{q}$  sont évaluées séquentiellement. Cette base réduite requiert des mises à jour pour rester dans son domaine de validité.

### Cas d'applications et limites :

En dynamique linéaire, la base tronquée des modes de vibration est la plus couramment utilisée [Hintz, 1975 ; Hughes et Skelton, 1981 ; Wilson *et al.*, 1982 ; Kline, 1986]. Une bonne précision est obtenue pour un nombre restreint de modes. La base tronquée est souvent associée à une condensation de Guyan pour des grandes structures [Craig et Bampton, 1968]. Dans le cas d'une application à l'identification inverse en dynamique linéaire par erreur en relation de comportement, [Deraemaeker *et al.*, 2002] ont proposé de compléter la base réduite modale par des réponses statiques.

En statique linéaire, les bases modales sont peu utilisées. La POD a montré en revanche sa pertinence pour des applications où il est nécessaire de faire un grand nombre de simulations similaires. Par exemple, il est possible d'effectuer un échantillonnage dans un espace paramétrique pour générer des *snapshots*. La base POD ainsi constituée sert à explorer le reste de l'espace paramétrique à moindre coût [Gogu *et al.*, 2010]. Néanmoins, la robustesse d'une base réduite POD vis à vis d'un changement de paramètre peut être faible et dépend à la fois de l'application (sensibilité aux paramètres) et de l'échantillonnage initial.

Dans le cas de la mécanique non-linéaire, les bases réduites initiales, constituées en phase *offline*, ne peuvent suffire à représenter la solution et son évolution non-linéaire, sans atteindre des tailles qui réduiraient l'efficacité de la réduction de modèle. Les bases réduites obtenues par perturbation statique ont en effet un certain domaine de validité [Noor et Peters, 1980]. En dynamique non-linéaire, la base modale tronquée doit être mise à jour ou adaptée en cours de résolution [Chang et Engblom, 1992 ; Touzé et Amabili, 2006 ; Amabili et Touzé, 2007 ; Touzé *et al.*, 2008]. [Kerfriden *et al.*, 2011] ont proposé l'utilisation des bases POD dans un cadre non-linéaire en ayant recours à une adaptation de la base en cours de calcul. Il est en effet plus complexe et plus coûteux de générer un *snapshot* qui prenne en compte les non-linéarités.

Une application de la POD au post-flambement est cependant proposée par [Yvonnet *et al.*, 2007] en combinaison avec la MAN (voir sous-section 2.4.3). Une technique d'échantillonnage particulière est développée. Son coût reste toutefois élevé. Plus classiquement en

post-flambement, la base tronquée des modes de flambement est utilisée mais n'est généralement pas suffisante pour atteindre un bon niveau de précision. Elle a été complétée (ou remplacée) par les modes issus de la perturbation statique [Nagy, 1979 ; Almroth *et al.*, 1978 ; Noor et Peters, 1980 ; Kling *et al.*, 2006]. Malgré cela, une mise à jour ou une complémentation de la base réduite *online* reste nécessaire.

### 2.2.1.2 Maîtrise d'erreur et base réduite adaptative

Rappelons que la solution du problème complet  $\underline{q}$  appartient à l'espace des vecteurs de  $\mathbb{R}^N$ . Soit le sous-espace  $Im(\underline{\underline{C}})$  générée par la base réduite, il existe alors un sous-espace supplémentaire  $Im(\underline{\underline{C}})^\perp$  tel que :

$$\mathbb{R}^N = Im(\underline{\underline{C}}) \oplus Im(\underline{\underline{C}})^\perp \quad (2.10)$$

où  $\square^\perp$  défini une condition d'orthogonalité. Le vecteur  $\underline{q}$  peut donc s'écrire comme la somme de deux vecteurs :

$$\underline{q} = \underline{q}_C + \underline{q}_C^\perp \quad \text{tel que } \underline{q}_C \in Im(\underline{\underline{C}}) \quad \text{et} \quad \underline{q}_C^\perp \in Im(\underline{\underline{C}})^\perp \quad (2.11)$$

La première composante est calculée par la résolution du problème réduit tandis que la seconde composante, inconnue, est directement liée à l'erreur d'approximation :

$$\|\underline{q}_C^\perp\| = e_{rom} \quad (2.12)$$

Pour un problème linéaire, l'erreur d'approximation découle directement du choix de la base réduite initiale. La représentation d'états intermédiaires le long d'une branche d'équilibre non-linéaire augmente la complexité puisqu'il s'agit de représenter une famille de vecteurs incrémentés  $\{\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n\}$  qui ne sont pas tous colinéaires.

Afin de maîtriser l'erreur d'approximation par réduction de modèle par projection, dans le cadre d'une résolution incrémentale-itérative, plusieurs solutions sont proposées dans la littérature. Ce sont des procédures adaptatives qui mettent à jour ou complètent, en phase *online*, la base réduite initiale par des vecteurs additionnels. Nous proposons de classer ces solutions en deux catégories : les procédures *a posteriori* et les procédures *à la volée*. Leurs fonctionnements sont illustrés Figure 2.5.

- **Procédure d'adaptation *a posteriori*** (à l'échelle des incrémentés) :

Ce type de procédure repose sur l'évaluation de l'erreur d'approximation après convergence d'un incrément réduit. Si le critère de précision (2.8) n'est pas vérifié, une action de correction est enclenchée. [Almroth *et al.*, 1978] ont proposé d'utiliser la solution approchée comme un prédicteur et d'ajouter à la base réduite initiale le vecteur solution orthonormalisé de la correction (par Newton-Raphson) sur le problème complet. La solution de la correction,  $\underline{\Delta q}_{corr}$ , est orthonormalisée et ajoutée à la base réduite  $\underline{\underline{C}}$ . Au lieu d'ajouter le vecteur solution orthonormalisé de la correction, la base réduite peut être mise à jour, surtout lorsqu'il s'agit d'une base modale tronquée ou obtenue par perturbation statique [Noor et Peters, 1980 ; Kling *et al.*, 2006].

Par ailleurs, l'utilisation d'un paramètre de raideur courante (*current stiffness parameter*) permet de rationaliser les complétements dans les zones de faible non-linéarité [Kling *et al.*, 2006].

– Procédure d’adaptation à la volée (à l’échelle des itérations) :

Dans cette procédure, l’incomplétude de la base réduite est détectée pendant les itérations de correction de Newton. Plus exactement, un test est réalisé en même temps que le test de convergence à l’itération  $i$ . Un critère basé sur la comparaison entre l’erreur d’approximation  $e_{rom}$  et l’erreur à convergence du problème réduit  $e_C$  est présenté par [Kerfriden et al., 2011] :

$$e_C < k e_{rom} \quad (2.13)$$

Le paramètre  $k$  traduit une différence d’ordre de grandeur en vitesse de convergence entre les deux erreurs. Selon sa valeur, la complétion est déclenchée plus ou moins tôt, comme le montre le schéma de la Figure 2.4.

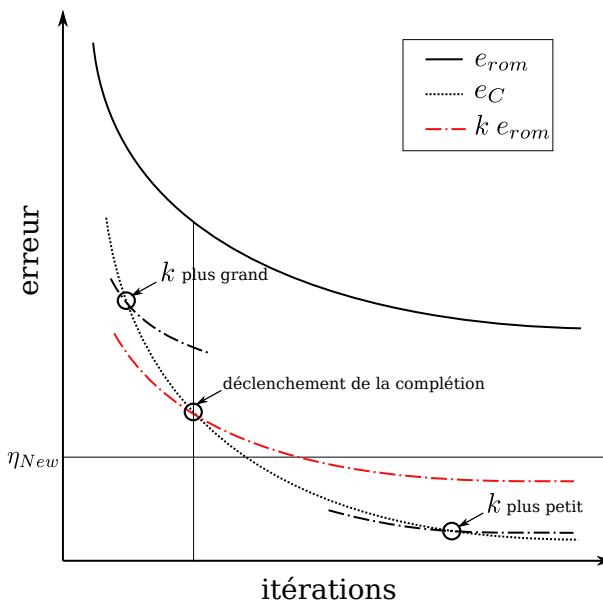


FIGURE 2.4 – Illustration du critère de complétion à la volée.

Si une complétion est déclenchée, l’itération est enrichie du calcul de  $\underline{\delta q}_C^{\perp^i}$  qui est ensuite orthonormalisé et ajouté à la base réduite. Concrètement l’itération enrichie peut simplement consister en une résolution du système tangent complet.

Dans le cas d’un opérateur tangent symétrique défini positif (définissant un produit scalaire de  $\mathbb{R}^N$ ), [Kerfriden et al., 2011] ont proposé d’augmenter l’itération du problème réduit par un gradient conjugué projeté. Autrement dit, la solution du système tangent réduit initialise le problème projeté qui recherche la partie de la solution dans le sous-espace orthogonal  $Im(\underline{\underline{C}})^{\perp_KT}$ . Un projecteur  $K_T$ -orthogonal est défini :

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{C}})^{-1} \underline{\underline{C}}^T \quad (2.14)$$

L’espace  $\mathbb{R}^N$  est ainsi décomposé en sous-espaces supplémentaires  $Im(\underline{\underline{C}})$  et  $Im(\underline{\underline{C}})^{\perp_KT}$ . De cette façon la résolution du système tangent complet est équivalente à la résolution découpée du système tangent réduit (2.4) et du système projeté par  $P$  (2.15).

$$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{P}} \underline{\delta q}_C^{\perp_KT} = -\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{R}} \quad (2.15)$$

Le système (2.15) est résolu efficacement par un gradient conjugué, et permet d’obtenir directement  $\underline{\delta q}_C^{\perp_KT}$ . Tant que la matrice tangente n’est pas actualisée, ce vecteur peut

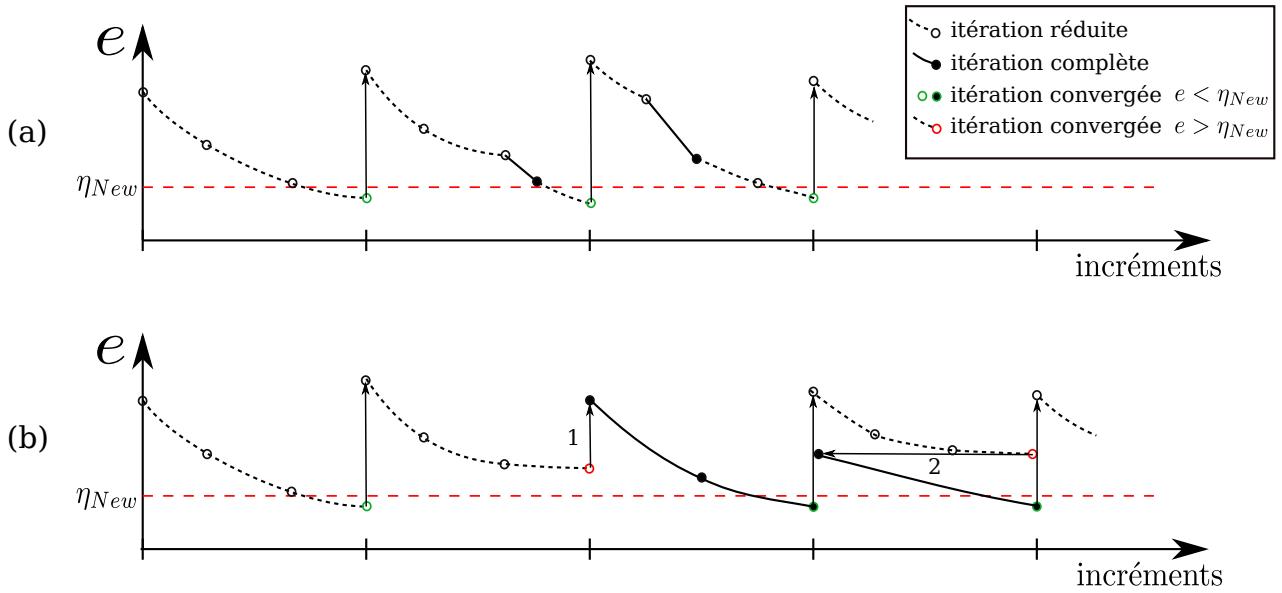


FIGURE 2.5 – Illustration des procédures adaptatives (a) *à la volée* et (b) *a posteriori*. Complétion *a posteriori* réalisée par passage à l'incrément suivant (1) ou par correction de l'incrément initialisé (2).

être ajouté à la base réduite après simple normalisation.

Les procédures d'adaptation *à la volée* présentent l'avantage de ne nécessiter la résolution que d'un seul système tangent complet à la fois. À l'inverse, après convergence du problème réduit, tout un incrément doit être résolu (plusieurs itérations) par la procédure *a posteriori*. De plus, l'utilisation d'un gradient conjugué projeté, préconditionné par la projection, peut réduire le coût des itérations enrichies. D'autant plus que [Kerfriden *et al.*, 2011] ont montré qu'une approximation grossière de  $\underline{\delta q}_C^\perp$  suffit, soit un très faible nombre d'itérations du gradient conjugué projeté. Néanmoins, seule une comparaison du nombre et du coût total des complétions sur un problème donné peut permettre de définir l'approche la plus efficace. Ce genre d'étude n'a cependant pas été trouvée dans la littérature.

Les procédures adaptatives qui complètent la base réduite initiale requièrent la mise en place d'une gestion de la taille de la base réduite. En effet, à force de complétions la taille de la base réduite augmente et le gain réalisé diminue. Il se peut aussi que certains vecteurs ou modes de la base réduite deviennent obsolètes dans la représentation des incrémentations successifs. Certaines méthodes de gestion de la base réduite sont introduites ici, parmi de nombreuses possibles :

- La base réduite de trop grande taille peut être considérée comme un *snapshot* pour une POD [Kerfriden *et al.*, 2011].
- Pour la procédure de complétion *à la volée*, l'ensemble des vecteurs additionnels d'un incrément peuvent être réduits en une seule contribution avant de passer à l'incrément suivant [Kerfriden *et al.*, 2011].
- Seul le vecteur solution du dernier incrément est conservé [Noor et Peters, 1980 ; Kling *et al.*, 2006].
- Pour un système symétrique, l'étude de la convergence entre deux itérations de Newton des valeurs de Ritz (projection de l'opérateur dans la base réduite), permet également

de sélectionner efficacement les composantes les plus pertinentes [Gosselet et Rey, 2003].

Ces méthodes peuvent cependant engendrer des compléments supplémentaires si une information importante (comme un mode de déformation) est retirée de la base réduite [Kerfriden *et al.*, 2011].

### 2.2.2 Réduction de modèle a priori

La constitution d'une base réduite initiale peut être un handicap pour les méthodes de réduction de modèle par projection présentée ci-avant. Leur robustesse face à un changement de paramètre est difficilement acquise. Surtout, les opérateurs du problème tangent doivent être évalués à chaque itération (au moins le vecteur résidu). Deux approches sont présentées, qui constituent des alternatives à la réduction de modèle par projection reposant sur une base réduite constituée *offline*.

#### Hyper-Réduction A Priori :

Une alternative aux procédures adaptatives de base réduite et à l'évaluation des opérateurs sur tout le domaine est proposée par [Ryckelynck, 2005] sous le nom d'*Hyper-Réduction A Priori* (APHR). La méthode APHR repose sur trois principes :

- **Une base réduite *a priori* :**

Une base réduite est constituée sans besoin d'une compréhension mécanique du problème. Il s'agit de la base d'un sous-espace de Krylov généré à partir du résidu des efforts intérieurs et extérieurs  $\underline{\mathcal{K}}_r(\underline{K}_T, \underline{R}^n)$ . Les espaces de Krylov permettent de construire, par de simples opérations de type produit matrice-vecteur, des sous-espaces affines très pertinents pour chercher des approximations de la solution d'un système linéaire. Dans [Ryckelynck, 2005], une base de trois vecteur est ainsi formée.

- **Adaptivité par intervalle :**

La méthode APHR est incrémentale. À la fin de l'incrément  $n$ , résolu par le modèle réduit avec la  $k^{\text{ième}}$  base  $\underline{C}_k$ , l'erreur d'approximation est estimée par le calcul du résidu complet  $\underline{R}^n$ . Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, l'incrément est recalculé avec une base réduite adaptée  $\underline{C}_{k+1}$ . L'adaptation de la base réduite se fait en deux étapes. La première étape consiste à réaliser une POD sur les solutions réduites des incrément précédents ( $[\underline{\alpha}^1 \underline{\alpha}^2 \dots \underline{\alpha}^n]$ ,  $n$  le dernier incrément calculé) pour obtenir une matrice de sélection  $\underline{V}$ . Dans la seconde étape, la base réduite adaptée  $\underline{C}_{k+1}$  est constituée de  $\underline{C}_k \underline{V}$  et de la base de Krylov calculée avec le résidu  $\underline{R}^n$ .

$$\underline{C}_{k+1} = [\underline{C}_k \underline{V} \quad \underline{\mathcal{K}}_r(\underline{K}_T, \underline{R}^n)] \quad (2.16)$$

L'estimation de l'erreur d'approximation peut avoir lieu tous les  $\beta$  incrément réduits. Dans ce cas, ce sont les incrément intermédiaires qui sont recalculés. Le pas  $\beta$  est variable en fonction de l'adaptation ou non de la base réduite lors du dernier intervalle. Le principe de l'adaptivité par intervalle est schématisé en Figure 2.6.

- **Intégration réduite des équations d'équilibre :**

Le calcul des solutions réduites ne se fait pas par projection du problème complet. Il se fait sur un nombre réduit de degrés de liberté du problème complet, appelés variables de contrôle en référence à des mesures expérimentales qui pourraient être réalisées en

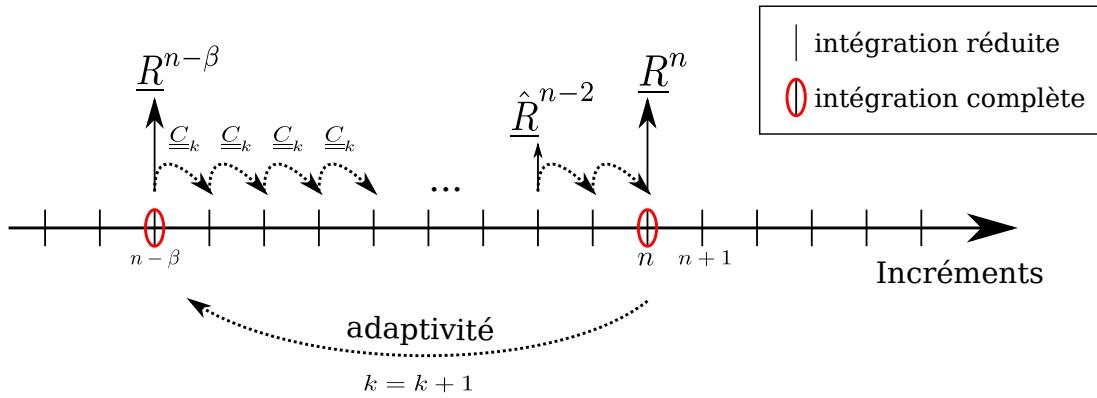


FIGURE 2.6 – Principe de l’adaptivité par intervalle de la méthode APHR (*A Priori HyperReduction*).

certains points du domaine d’étude. Une matrice de restriction  $\underline{P}$ , construite à partir d’une cartographie des niveaux d’erreurs, permet d’obtenir les équations d’équilibre restreintes aux degrés de liberté de contrôle, qui sont résolues par projection dans la base réduite.

$$\underline{P}^T \underline{K} \underline{P} \underline{q} = \underline{F}_{ext} \quad (2.17)$$

Les opérateurs de ce système restreint ne sont évalués qu’aux points d’intégrations des éléments connectés aux variables de contrôle ce qui réduit fortement leur coût et ce qui explique pourquoi le résidu complet n’est calculé que tous les  $\beta$  incrément. La matrice de restriction est déterminée par rapport aux plus grandes valeurs du résidu.

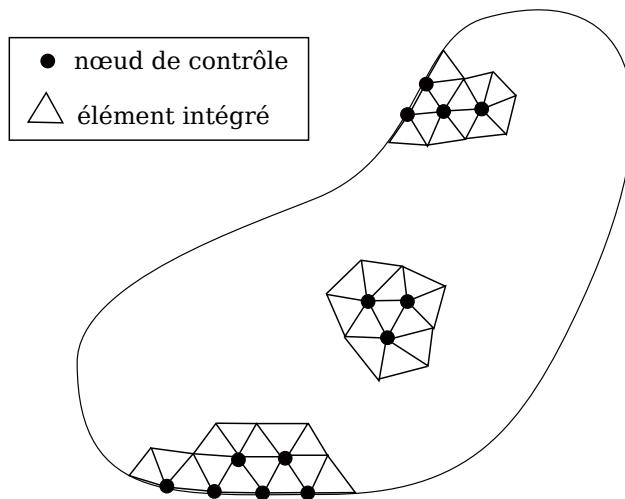


FIGURE 2.7 – Intégration sur les éléments connectés aux noeuds de contrôle.

Le principe d’intégration réduite des équations d’équilibre est une approximation du système d’équations à résoudre. On trouve également des approximations des opérateurs non-linéaires par base POD “statique” [Chaturantabut et Sorensen, 2010] [Astrid *et al.*, 2008] [Nguyen *et al.*, 2008], avec une évaluation des coefficients sur un domaine d’intégration réduit. Ces méthodes sont rassemblées sous le terme de *gappy* POD.

Ces méthodes sont sensibles au choix de la matrice de restriction mais sont très efficaces en présence de non-linéarités très localisées. Le cas du post-flambement n’a semble-t-il pas

été traité, mais comme les non-linéarités géométriques affectent le domaine dans une grande proportion, les performances pourraient être limitées. Dans le cas d'un post-flambement local, en revanche, ces méthodes paraissent intéressantes.

### Proper Generalized Decomposition :

Une autre approche, la *Proper Generalized Decomposition* (PGD), connaît un développement accéléré. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une méthode de réduction de modèle au sens où elle ne résout pas le problème en phase *online* à partir d'une représentation par base réduite constituée en phase *offline* ou *online*. La PGD est plutôt une méthode pour construire une représentation dans un espace de paramètre défini, non pas sous la forme d'une base réduite, mais par une série de produit de fonctions à variable séparées. Il s'agit d'une étape *offline*. En phase *online*, l'accès à la solution pour un point de l'espace de paramètre est quasiment instantané.

L'approximation du champ solution par une série de produit de fonctions à variables séparées, reprend ainsi les idées de la méthodes LaTIn [Ladevèze et al., 2010] (voir sous-section 1.5.4) en l'étendant à d'autres paramètres que le temps et l'espace :

$$u^m(x_j, j \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n X_j^i(x_j) \quad (2.18)$$

où les  $x_j, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , sont les paramètres du modèle (position, temps, géométrie, matériau, ...),  $X_j^i$  les termes de la série associés à chaque paramètre.  $m$  est l'ordre d'approximation, supposé petit.

L'approximation est le plus souvent introduite dans les équations d'équilibre sous leur forme faible, comme par exemple le PPV. Chaque  $n$ -uplet de fonction est déterminé séquentiellement comme une meilleure approximation de rang 1. L'approximation  $u^m$  est donc construite par  $m$  corrections successives de rang 1 (algorithme de type glouton ou *greedy* en anglais) tel que pour le  $k$ -ième  $n$ -uplet :

$$u^k(x_j, j \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^n X_j^i(x_j)}_{k-1 \text{ n-uplets connus}} + \underbrace{\prod_{j=1}^n X_j^k(x_j)}_{\text{correction par un } n\text{-uplet inconnu}} \quad (2.19)$$

Chaque correction de rang 1 conduit à un système de  $n$  problèmes variationnels couplés dont la résolution est rendue indépendante par un algorithme de point fixe.

La résolution du PPV en quasi-statique, avec un champ d'effort extérieur dépendant du temps  $\underline{F}(x, t)$ , est présentée brièvement ici pour  $n = 2$  ( $\underline{X}_1^k(x)$  pour l'espace et  $\underline{X}_2^k(t)$  pour le temps). Supposons connue l'approximation au rang  $k - 1$  et déterminons la correction de rang 1 à apporter. Le champ de déplacement virtuel donne dans un premier temps :

$$\underline{\delta u}_v(x_j) = \underline{\delta X}_1^k(x) \underline{X}_2^k(t) + \underline{X}_1^k(x) \underline{\delta X}_2^k(t) \quad (2.20)$$

Le PPV (sans forces de volume) s'écrit donc :

$$\int_{\Omega} \int_{[0,T]} \underline{\underline{\delta \epsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^k) dt dx - \int_{\partial \Omega_F} \int_{[0,T]} (\underline{\delta X}_1^k(x) \underline{X}_2^k(t) + \underline{X}_1^k(x) \underline{\delta X}_2^k(t)) \cdot \underline{F}(x, t) dt dx = 0 \quad (2.21)$$

avec  $\underline{\underline{\delta \epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla(\underline{\delta u}_v) + \nabla(\underline{\delta u}_v)^T)$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^k) = \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^k)$ . La résolution se réalise en deux étapes :

- Le problème en espace, sachant  $X_2^k(t)$  ( $\delta X_2^k(t)$  s'annule) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{[0,T]} & \left( \nabla(\delta \underline{X}_1^k(x)) + \nabla(\delta \underline{X}_1^k(x))^T \right) X_2^k(t) : \underline{\underline{D}} : \left( \nabla(\underline{X}_1^k) + \nabla(\underline{X}_1^k)^T \right) X_2^k(t) dt dx = \\ & \int_{\partial \Omega_F} \delta \underline{X}_1^k(x) \cdot \left( \int_{[0,T]} X_2^k(t) \underline{F}(x, t) dt \right) dx - \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{[0,T]} \left( \nabla(\delta \underline{X}_1^k(x)) + \nabla(\delta \underline{X}_1^k(x))^T \right) X_2^k(t) : \underline{\underline{D}} : \underline{\epsilon}(u^{k-1}) dt dx \quad (2.22) \end{aligned}$$

- Le problème en temps, sachant  $\underline{X}_1^k(x)$  ( $\delta \underline{X}_1^k(x)$  s'annule) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{[0,T]} \int_{\Omega} & \left( \nabla(X_1^k(x)) + \nabla(X_1^k(x))^T \right) \delta X_2^k(t) : \underline{\underline{D}} : \left( \nabla(\underline{X}_1^k) + \nabla(\underline{X}_1^k)^T \right) X_2^k(t) dx dt = \\ & \int_{[0,T]} \delta X_2^k(t) \left( \int_{\partial \Omega_F} \underline{X}_1^k(x) \cdot \underline{F}(x, t) dx \right) dt - \\ & \frac{1}{2} \int_{[0,T]} \int_{\Omega} \left( \nabla(\underline{X}_1^k(x)) + \nabla(\underline{X}_1^k(x))^T \right) \delta X_2^k(t) : \underline{\underline{D}} : \underline{\epsilon}(u^{k-1}) dx dt \quad (2.23) \end{aligned}$$

- Les itérations de point fixe entre (2.22) et (2.23) convergent vers un couple  $(\underline{X}_1^k(x), X_2^k(t))$ .

À la fin du processus, une approximation de rang  $m$  est connue pour toutes les valeurs des paramètres dans leurs intervalles respectifs, comme une abaque obtenue en *offline* et restituée *online* à faible coût, voire en temps réel.

De nombreuses applications de la PGD ont été proposées notamment aux problèmes multi-paramétriques de grande dimension [Ammar *et al.*, 2006 ; Chinesta *et al.*, 2007 ; Chinesta *et al.*, 2008], aux problèmes à variables stochastiques [Nouy, 2010 ; Gallimard *et al.*, 2013], à la simulation en temps réel pour l'haptique [Bordeu *et al.*, 2011], à des problèmes de plaques 3D [Bognet *et al.*, 2012] et de plaques composites [Vidal *et al.*, 2013], puis également à la corrélation d'image [Passieux et Périé, 2012].

La PGD est aussi utilisée dans un cadre non-linéaire par l'intermédiaire de la méthode LaTIn et de son étape linéaire [Ladevèze *et al.*, 2010]. L'application de la méthode seule requiert en effet quelques aménagements puisque les termes non-linéaires dépendant de  $u^k$  doivent être mis à jour ou linéarisés d'une manière ou d'une autre [Chinesta *et al.*, 2010]. Dans le cadre de la résolution par la méthode des éléments frontières en thermique non-linéaire, [Joyot *et al.*, 2011] ont proposé de décomposer les opérateurs, dépendant du champ inconnu  $u$ , sous forme séparée à chaque étape du calcul (à l'étape  $k$ , l'opérateur  $A(u^k) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^n A_j(x_j)$ ). Le surcoût engendré n'est pas négligeable et des améliorations ont été proposées dans [Joyot *et al.*, 2013], comme par exemple le développement de Taylor des opérateurs, ou un couplage avec la MAN qui revient à calculer en même temps les  $X_j^k$  et les  $A_j^k$  exprimés en séries entières.

Dans [Niroomandi *et al.*, 2013], une application dans le cadre des solides hyper-élastiques est proposée et résolue de manière explicite sous une forme linéarisée (enrichissement de l'approximation PGD à chaque pas de temps).

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'application de la PGD aux problèmes non-linéaires géométriques. Cependant, au vu des méthodes développées pour prendre en compte la non-linéarité, cela semble aujourd'hui possible. Dans le cadre du post-flambement, la prise en compte des bifurcations et du changement de branche n'est toutefois pas trivial et reste à explorer [Chinesta *et al.*, 2010].

## 2.3 Calcul parallèle par décomposition de domaine

Outre la réduction de modèle, une stratégie consiste à tirer profit des ordinateurs à architecture parallèle. Ces ordinateurs sont en effet conçus pour réaliser un grand nombre d'opérations élémentaires par seconde (FLOPS - *Floating Point Operation Per Second*) grâce, non pas à une fréquence d'horloge plus élevée, mais plutôt à un nombre important de processeurs en réseaux et à une gestion performante de transmission des données. Ce type d'architecture s'est également développé, à plus petite échelle, à l'intérieur même des ordinateurs de bureau grâce aux processeurs *multi-cores* (jusqu'à 10 cores actuellement). Sans entrer plus dans les détails technologiques, cela permet de réaliser plusieurs tâches en parallèle et donc d'accélérer les calculs selon, en théorie, la loi d'Amdahl [Amdahl, 1967] :

$$S = \frac{1}{(1-s) + \frac{s}{N}} \quad (2.24)$$

où  $s$  est la proportion parallélisable de la procédure sur  $N$  processeurs. En pratique, selon les applications, il faut souvent prendre en compte des temps de communication entre processeurs et des temps d'attente liés à une répartition inégale des charges de calcul entre les processeurs dans la phase distribuée, qui réduisent l'accélération  $S$ . La notion de proportion parallélisable ne fait effectivement pas la distinction entre tâches indépendantes et dépendantes comme le représente le schéma Figure 2.8.

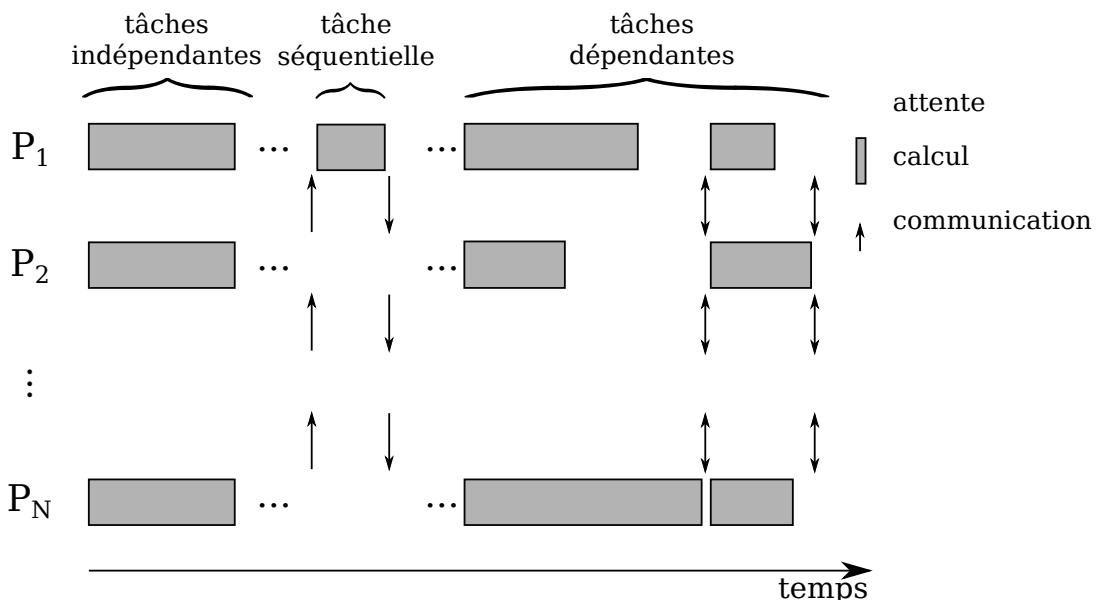


FIGURE 2.8 – Tâches exécutées en parallèle sur  $N$  processeurs. Distinction entre tâches indépendantes et dépendantes.

Ainsi, il convient de développer des méthodes de résolution adaptées au calcul parallèle. Les méthodes de décomposition de domaine en font partie. Initialement proposées par [Schwarz, 1870], il existe deux grandes classes de méthodes qui sont celles avec et sans recouvrement. Nous présentons dans cette section la version de la méthode dans laquelle la décomposition du domaine d'étude se fait sans recouvrements. Cette méthode est la plus répandue en calcul de structure, notamment en raison de sa simplicité de mise en œuvre. Une revue des méthodes sans-recouvrement a été réalisée par [Gosselet et Rey, 2006].

### 2.3.1 Décomposition de domaine sans recouvrement

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement reposent sur une résolution de l'équilibre local par sous-domaine et de l'équilibre global des interfaces.

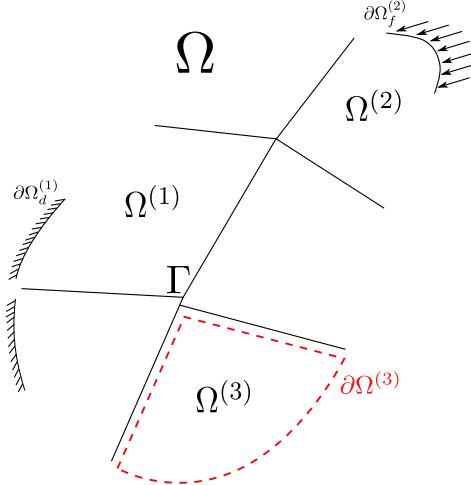


FIGURE 2.9 – Décomposition d'un domaine  $\Omega$  sans recouvrement.

Soit  $\Omega$  le domaine d'étude, décomposé en  $n_s$  sous-domaines  $\Omega^{(s)}$  et  $\Gamma = \bigcup_{(i,j)} (\partial\Omega^i \cap \partial\Omega^j)$  l'interface entre les sous-domaines, l'équilibre du problème décomposé est caractérisé par :

- l'admissibilité statique pour tout sous-domaine  $s$  (PPV local) :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\delta u}_v \in (C.A.), \int_{\Omega^{(s)}} \underline{\delta \epsilon}(\underline{\delta u}_v) : \underline{\sigma} dV - \int_{\partial\Omega_F^{(s)} \setminus \Gamma \cap \partial\Omega^{(s)}} \underline{\delta u}_v \cdot \underline{F} dS \\ - \int_{\Gamma \cap \partial\Omega^{(s)}} \underline{\delta u}_v \cdot \underline{\lambda^{(s)}} dS = 0 \quad (2.25) \end{aligned}$$

où  $\underline{\lambda^{(s)}}$  représente les efforts imposés sur le sous-domaine  $s$  par ses voisins ( $\underline{\lambda^{(s)}}$  est nul à l'intérieur des sous-domaines).

- l'admissibilité cinématique aux frontières :

$$\forall s, \quad \underline{u}^{(s)} = \underline{U}_d, \quad \text{sur } \partial\Omega_d^{(s)} \quad (2.26)$$

- la continuité des déplacements à l'interface :

$$\forall s, \quad \underline{u}^{(s)} = \underline{u}^{(\bar{s})}, \quad \text{sur } \partial\Omega^{(s)} \cap \partial\Omega^{(\bar{s})}, \quad \Omega^{(\bar{s})} = \Omega \setminus \Omega^{(s)} \quad (2.27)$$

- et l'équilibre de l'interface :

$$\forall s, \quad \underline{\lambda^{(s)}} + \underline{\lambda^{(\bar{s})}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega^{(s)} \cap \partial\Omega^{(\bar{s})} \quad (2.28)$$

Les équations (2.27) et (2.28) forment les conditions de raccord.

Discretisées par la méthode des éléments-finis ces équations deviennent<sup>1</sup> :

1. Le formalisme de [Gosselet, 2003] est repris ici.

$$\underline{\underline{K}}^{(s)} \underline{q}^{(s)} = \underline{F}_{ext}^{(s)} + \underline{\lambda}^{(s)} \quad (2.29)$$

$$\underline{t}_d^{(s)} \underline{q}^{(s)} = \underline{t}_d^{(s)} \underline{\underline{A}}_d^{(s)T} \underline{q}_d \quad (2.30)$$

$$\sum_{(s)} \underline{\underline{\bar{A}}}^{(s)} \underline{t}^s \underline{q}^{(s)} = 0 \quad (2.31)$$

$$\sum_{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{t}^s \underline{\lambda}^{(s)} = 0 \quad (2.32)$$

où  $\underline{t}$ ,  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{\bar{A}}}$  sont les opérateurs de trace, d'assemblage et d'assemblage signé sur l'interface.  $\underline{t}_d$ ,  $\underline{\underline{A}}_d$  sont les opérateurs de trace et d'assemblage sur  $\partial\Omega_d$ .

L'opérateur d'assemblage signé peut être décrit simplement en prenant le cas  $n_s = 2$  pour lequel  $\underline{\underline{\bar{A}}}^{(1)} = -\underline{\underline{A}}^{(1)}$  et  $\underline{\underline{\bar{A}}}^{(2)} = \underline{\underline{A}}^{(2)}$  afin que la condition de continuité soit vérifiée :  $\underline{\underline{\bar{A}}}^{(1)} \underline{t}^1 \underline{q}^1 + \underline{\underline{\bar{A}}}^{(2)} \underline{t}^2 \underline{q}^2 = 0$ .

La discrétisation par éléments-finis entre les domaines voisins à l'interface peut être coïncidente<sup>2</sup> ou non, compatibles<sup>3</sup> ou non. Le cas de non-coïncidence et de non-compatibilité est bien géré par la technique des *mortars* [Bernardi *et al.*, 1993 ; Abdoulaev *et al.*, 1999] qui réalise un “collage” au sens faible le long de l'interface. D'un point de vue pratique, la technique des *mortars*, au niveau des interfaces, revient à modifier les opérateurs d'assemblage et à introduire des multiplicateurs de Lagrange pour vérifier les conditions de raccord au sens faible. Cette approche a notamment été proposée dans [Amini, 2008 ; Amini *et al.*, 2009].

Nous nous limitons à la présentation du cas coïncident qui correspond au découpage d'un modèle éléments-finis existant le long des contours des éléments et qui est le plus répandu dans les applications de la décomposition de domaine. La compatibilité est donc celle du modèle initial.

### 2.3.2 Formulation du problème d'interface

Le système des équations (2.29) à (2.32) peut se résoudre directement en prenant comme inconnues les  $\underline{q}^s$  et  $\underline{\lambda}^s$ , ce qui conduit à une formulation à trois champ [Marini, 1994]. Cependant cette méthode est délaissée au profit des approches suivantes qui définissent des inconnues propres à l'interface.

**Approche primale** [Mandel, 1993] :

Une unique inconnue d'interface en déplacements  $\underline{q}_b$  est définie, qui permet de vérifier *a priori* la condition de continuité à l'interface (2.31) :

$$\forall s, \quad \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{q}_b = \underline{t}^{(s)} \underline{q}^{(s)} = \underline{q}_b^{(s)} \quad (2.33)$$

2. Il s'agit d'une correspondance noeud à noeud de part et d'autre de l'interface

3. Il s'agit d'une continuité  $C^0$ , voire  $C^1$ , de l'interpolation à travers l'interface.

En notant  $i$  l'indice des degrés de libertés internes au sous-domaine, et  $b$  l'indice des degrés de liberté d'interface, le système d'équation à résoudre est réécrit sous la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \underline{\underline{K}}_{ii}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \underline{\underline{K}}_{ib}^{(1)} & \underline{\underline{A}}^{(1)T} \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & \underline{\underline{K}}_{ii}^{(n_s)} & \underline{\underline{K}}_{ib}^{(n_s)} & \underline{\underline{A}}^{(n_s)T} \\ \underline{\underline{A}}^{(1)} & \underline{\underline{K}}_{bi}^{(1)} & \dots & \dots & \underline{\underline{A}}^{(n_s)} & \underline{\underline{K}}_{bb}^{(n_s)} & \underline{\underline{A}}^{(n_s)T} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{q}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{q}_i^{(n_s)} \\ \underline{q}_b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{F}_{ext}^{(1)}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{F}}_{ext}^{(s)}_i \\ \sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{F}}_{ext}^{(s)}_b \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

où les réactions  $\underline{\lambda}_b^{(s)}$  s'éliminent naturellement au second membre par la condition d'équilibre (2.32), et les  $\underline{\lambda}_i^{(s)}$  sont nulles par définition.

Le système (2.34) est d'abord résolu à l'interface puis à l'intérieur de chaque sous-domaine. Pour cela les inconnues internes sont éliminées par condensation :

$$\begin{aligned} \forall s, \quad & \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)} \underline{q}_i^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{ib}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{q}_b = \underline{F}_{ext}^{(s)}_i \\ & \underline{q}_i^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)-1} \left( \underline{F}_{ext}^{(s)}_i - \underline{\underline{K}}_{ib}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{q}_b \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Et par substitution dans la dernière ligne de (2.34), le problème d'équilibre de l'interface est obtenu :

$$\underbrace{\sum_s \left( \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{S}}_p^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \right) \underline{q}_b}_{\underline{\underline{S}}_p} = \underbrace{\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{b}_p^{(s)}}_{\underline{\underline{b}}_p} \quad (2.36)$$

où  $\underline{\underline{S}}_p$  est le complément de Schur primal, assemblage des compléments de Schur des sous-domaines tels que :

$$\underline{\underline{S}}_p^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{bb}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{bi}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)-1} \underline{\underline{K}}_{ib}^{(s)} \quad (2.37)$$

les  $\underline{b}_p^{(s)}$  sont les opérateurs primaux des efforts condensés à l'interface des sous-domaines et  $\underline{b}_p$  leur assemblage sur l'interface :

$$\underline{b}_p^{(s)} = \underline{F}_{ext}^{(s)}_b - \underline{\underline{K}}_{bi}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)-1} \underline{F}_{ext}^{(s)}_i \quad (2.38)$$

Enfin, une fois  $\underline{q}_b$  calculé, l'équation (2.35), dite de localisation, permet de déduire les  $\underline{q}_i^{(s)}$  indépendamment par sous-domaine.

Jusque là, cette approche est identique à la sous-structuration classique avec condensation de Guyan [Guyan, 1965]. Il faut noter par ailleurs que le problème de localisation est un problème à interfaces fixes, bien posé, ce qui justifie l'existence et l'unicité de la solution [Gosselet et Rey, 2006].

**Approche duale** [Farhat et Roux, 1991] :

De la même façon que l'approche précédente, une unique inconnue  $\underline{\lambda}_b$  est définie pour les inter-efforts d'interface telle que l'équilibre des réactions d'interface (2.32) est vérifiée *a priori* :

$$\forall s, \quad \underline{\lambda}_b^{(s)} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\lambda}_b \quad (2.39)$$

L'équilibre par sous-domaine (2.29) devient :

$$\underline{\underline{K}}^{(s)} \underline{q}^{(s)} = \underline{F}_{ext}^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{\underline{\bar{A}}}^{(s)T} \underline{\lambda}_b \quad (2.40)$$

Afin d'exprimer le problème d'interface, il faut éliminer les inconnues en déplacement et inverser la matrice  $\underline{\underline{K}}^{(s)}$ . Le problème étant mal posé (conditions de Neumann sur l'interface), il est fait appel à une matrice pseudo-inverse (généralement celle de Moore-Penrose), notée  $\underline{\underline{K}}^{(s)^\dagger}$ , telle que :

$$\forall \underline{x} \in \text{Im}(\underline{\underline{K}}^{(s)}), \underline{\underline{K}}^{(s)} \underline{\underline{K}}^{(s)^\dagger} \underline{x} = \underline{x} \quad (2.41)$$

De cette manière, il est nécessaire de prendre en compte une partie rigide du déplacement (à énergie nulle), appartenant au noyau de  $\underline{\underline{K}}^{(s)}$  ( $\text{ker}(\underline{\underline{K}}^{(s)})$ ). Soit  $\underline{\underline{R}}^{(s)}$  une base de  $\text{ker}(\underline{\underline{K}}^{(s)})$ , et  $\underline{\alpha}^{(s)}$  l'amplitude des modes rigides, le vecteur déplacement s'écrit :

$$\underline{q}^{(s)} = \underline{\underline{K}}^{(s)^\dagger} (\underline{F}_{ext}^{(s)} + \underline{t}^{(s)T} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\lambda}_b) + \underline{\underline{R}}^{(s)} \underline{\alpha}^{(s)} \quad (2.42)$$

avec la condition que les efforts extérieurs  $\underline{F}_{ext}^{(s)} + \underline{t}^{(s)T} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\lambda}_b$  appartiennent à  $\text{Im}(\underline{\underline{K}}^{(s)})$ , ce qui s'écrit comme une condition d'orthogonalité par rapport à  $\underline{\underline{R}}^{(s)}$  :

$$\underline{\underline{R}}^{(s)T} (\underline{F}_{ext}^{(s)} + \underline{t}^{(s)T} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\lambda}_b) = 0 \quad (2.43)$$

Autrement dit, les efforts extérieurs au sous-domaine  $s$  ne doivent pas exciter ses modes rigides de déplacement, leur résultante doit être nulle. La substitution de  $\underline{q}^{(s)}$  dans l'équation de continuité cinématique (2.30) par son expression (2.42) abouti, sous la contrainte d'admissibilité (2.43), au système en  $\underline{\lambda}_b$  et  $\underline{\alpha} = \{\dots, \underline{\alpha}^{(s)}, \dots\}^T$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{S}_d^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\lambda}_b \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{b}_d^{(s)} \\ -\underline{\underline{e}} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

où  $\underline{S}_d^{(s)}$  est le complément de Schur dual,

$$\underline{S}_d^{(s)} = \underline{t}^{(s)} \underline{\underline{K}}^{(s)^\dagger} \underline{t}^{(s)T} \quad (2.45)$$

$\underline{b}_d^{(s)}$  est le second membre condensé dual,

$$\underline{b}_d^{(s)} = \underline{t}^{(s)} \underline{\underline{K}}^{(s)^\dagger} \underline{F}_{ext}^{(s)} \quad (2.46)$$

et  $\underline{\underline{G}}$  et  $\underline{\underline{e}}$  sont les opérateurs de contrainte :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}} &= \left[ \dots \quad \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{t}^{(s)} \underline{\underline{R}}^{(s)} \quad \dots \right] \\ \underline{\underline{e}} &= \left\{ \dots \quad \underline{\underline{R}}^{(s)T} \underline{F}_{ext}^{(s)} \quad \dots \right\}^T \end{aligned} \quad (2.47)$$

La contrainte portant seulement sur les modes rigides, elle peut être améliorée en ajoutant des contraintes sur le déplacement, telles que la continuité en moyenne sur les interfaces, ou la continuité des déplacements des « coins » pour les problèmes de plaques et coques [Farhat *et al.*, 2000]. Ces contraintes ont pour effet d'améliorer l'extensibilité de la méthode. Les approches duales sont généralement regroupées sous le nom de méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting), qui, selon les contraintes supplémentaires sur les déplacements, s'appellent FETI-2 ou FETI-DP. La gestion des redondances aux noeuds d'interfaces entre plus de deux domaines est également source de variantes de la méthode FETI mais n'apporte généralement aucun avantage particulier.

Il est enfin intéressant de noter que les opérateurs des approches primales et duales sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S_d^{(s)}}} &= \underline{\underline{S_p^{(s)}}}^+ \\ \underline{\underline{S_p^{(s)}}} &= \underline{\underline{S_d^{(s)}}}^+ \\ \underline{\underline{b_d^{(s)}}} &= \underline{\underline{S_d^{(s)}}} \underline{\underline{b_p^{(s)}}}\end{aligned}\quad (2.48)$$

**Approche hybride** [Gosselet et Rey, 2006] :

Cette approche propose un formalisme qui permet d'intégrer les approches primales et duales dans un même problème. Une partie des degrés de libertés de l'interface peuvent être définis comme variables primales, et l'autre partie comme variables duales. Un choix judicieux permet par exemple de supprimer les modes de déplacement rigide des sous-domaines pour le calcul des inter-efforts. Ce type d'approche donne également une grande modularité dans la programmation des méthodes de décomposition de domaine. À notre connaissance, elle n'a été employée que dans un cadre dual/primal. Une extension de la formulation est proposée dans cette thèse (en Annexe B), qui intègre également les interfaces mixtes, présentées ci-après.

**Approche mixte** [Glowinski et Le Tallec, 1990 ; Series *et al.*, 2003] :

Dans les approches mixtes, il n'est pas supposé d'égalité *a priori* des inter-efforts ou des déplacements d'interface. Les approches mixtes de type FETI-2-Champs reposent sur l'introduction d'une inconnue d'interface  $\underline{\mu_b}$  sous la forme d'une combinaison linéaire des réactions et des déplacements d'interface :

$$\forall s, \quad \underline{\mu_b^{(s)}} = \underline{\lambda_b^{(s)}} + \underline{T_b^{(s)}} \underline{q_b^{(s)}} \quad (2.49)$$

avec la matrice de raideur  $\underline{\underline{T_b^{(s)}}}$ , qui représente la raideur de l'interface du sous-domaine  $s$ . Les conditions de raccord (2.31) et (2.32) sont alors reformulées en tenant compte de la raideur d'interface. Pour chaque sous-domaine  $s$ , on peut écrire :

$$\underline{\lambda_b^{(s)}} + \underline{\lambda_b^{(\bar{s})}} + \underline{\underline{T_b^{(s)}}} (\underline{q_b^{(s)}} - \underline{q_b^{(\bar{s})}}) = \underline{0} \quad (2.50)$$

Où les  $\square_b^{(\bar{s})}$  sont les grandeurs d'interface des voisins directs du sous-domaine  $s$  restreintes à  $\Gamma^{(s)}$ . Soit :

$$\forall s, \quad \underline{\underline{A^{(s)}T}} \sum_k \underline{\underline{A^{(k)}}} \underline{\lambda_b^{(k)}} + \underline{\underline{T_b^{(s)}}} \underline{\underline{\bar{A}^{(s)}}}^T \sum_k \underline{\underline{\bar{A}^{(k)}}} \underline{q_b^{(k)}} = \underline{0} \quad (2.51)$$

En substituant l'expression de  $\underline{\lambda_b^{(k)}}$  obtenue à partir de l'Équation 2.49 :

$$\forall s, \quad \underline{\underline{A^{(s)}T}} \sum_k \underline{\underline{A^{(k)}}} \underline{\mu_b^{(k)}} - \left( \underline{\underline{A^{(s)}T}} \sum_k \underline{\underline{A^{(k)}}} \underline{\underline{T_b^{(k)}}} \underline{q_b^{(k)}} - \underline{\underline{T_b^{(s)}}} \underline{\underline{\bar{A}^{(s)}}}^T \sum_k \underline{\underline{\bar{A}^{(k)}}} \underline{q_b^{(k)}} \right) = \underline{0} \quad (2.52)$$

Par assemblage, et en introduisant la notation par bloc  $\square^\diamond$  (voir l'encadré ci-après), les conditions de raccords mixtes s'écrivent :

$$\underline{\underline{A^\diamond T}} \underline{\underline{A^\diamond \mu_b^\diamond}} - \left( \underline{\underline{A^\diamond T}} \underline{\underline{A^\diamond T}}^T - \underline{\underline{T_b^\diamond}} \underline{\underline{\bar{A}^\diamond}}^T \underline{\underline{\bar{A}^\diamond}} \right) \underline{q_b^\diamond} = \underline{0}^\diamond \quad (2.53)$$

**La notation par bloc**, introduite notamment par [Gosselet, 2003], permet une écriture simplifiée des équations en décomposition de domaine :

- Les opérateurs d’assemblage :

$$\underline{\underline{A}}^\diamond = \left[ \underline{\underline{A}}^{(1)} \dots \underline{\underline{A}}^{(n_s)} \right] \text{ et } \bar{\underline{\underline{A}}}^\diamond = \left[ \bar{\underline{\underline{A}}}^{(1)} \dots \bar{\underline{\underline{A}}}^{(n_s)} \right] \quad (2.54)$$

- Les vecteurs d’efforts, déplacements, résidus, ... :

$$\underline{\underline{\square}}^\diamond = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\square}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\square}}^{(n_s)} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

- Les opérateurs de raideur, compléments de Schur, ... :

$$\underline{\underline{\square}}^\diamond = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\square}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{\square}}^{(n_s)} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Dans ce manuscrit, cette notation sera principalement utilisée en Annexe B.

Par ailleurs, pour chaque équilibre local, l’introduction de l’inconnue mixte dans l’équation d’équilibre locale, après condensation sur l’interface, amène le système suivant :

$$\left( \underline{\underline{S}}_p^{(s)} + \underline{\underline{T}}_b^{(s)} \right) \underline{q}_b^{(s)} = \underline{b}_p^{(s)} + \underline{\mu}_b^{(s)} \quad (2.57)$$

Sous l’hypothèse que  $\underline{\underline{T}}_b^{(s)}$  est choisie telle que  $\left( \underline{\underline{S}}_p^{(s)} + \underline{\underline{T}}_b^{(s)} \right)$  soit inversible, l’expression de  $\underline{q}_b^{(s)}$  tirée de (2.57) est introduite dans la condition de raccord (2.53). Cela permet d’obtenir le système global en  $\underline{\mu}_b^\diamond$  :

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{A}}^{\diamond T} \underline{\underline{A}}^\diamond - \left( \underline{\underline{A}}^{\diamond T} \underline{\underline{A}}^\diamond \underline{\underline{T}}_b^\diamond - \underline{\underline{T}}_b^\diamond \bar{\underline{\underline{A}}}^{\diamond T} \bar{\underline{\underline{A}}}^\diamond \right) \left( \underline{\underline{S}}_p^\diamond + \underline{\underline{T}}_b^\diamond \right)^{-1} \right) \underline{\mu}_b^\diamond = \\ & \left( \underline{\underline{A}}^{\diamond T} \underline{\underline{A}}^\diamond \underline{\underline{T}}_b^\diamond - \underline{\underline{T}}_b^\diamond \bar{\underline{\underline{A}}}^{\diamond T} \bar{\underline{\underline{A}}}^\diamond \right) \left( \underline{\underline{S}}_p^\diamond + \underline{\underline{T}}_b^\diamond \right)^{-1} \underline{b}_p^\diamond \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ce système possède donc environ deux fois plus d’inconnues d’interface que ceux des approches primales et duales puisqu’il n’est pas défini d’inconnue unique d’interface. Deux aspects pratiques doivent par ailleurs être soulignés :

- Cette approche n’est pas bien adaptée aux interfaces ponctuelles pour lesquelles il n’est pas aisément de déterminer une raideur d’interface ayant un sens mécanique (voir le deuxième aspect). Ainsi, une connectivité simplifiée est définie, qui ne prend en compte que les sous-domaines deux à deux, en éliminant les interfaces ponctuelles. Cette connectivité simplifiée n’empêche en rien de déterminer l’équilibre et ce même pour les approches primales et duales. La programmation en est d’ailleurs moins complexe.

- Le choix des matrices de raideur d’interface pour chaque sous-domaine est un paramètre important de la méthode mixte. De manière optimale d’un point de vue mécanique, la matrice d’interface d’un sous-domaine devrait être égale à l’opérateur de raideur du reste de la structure condensé sur cette interface (c.a.d. le complément de Schur du complémentaire du sous-domaine dans la structure). Mais ce choix n’est absolument pas optimal du point de vue calcul parallèle puisque d’une part il ne respecte pas la localisation des données et entraîne des échanges d’opérateurs pleins, et d’autre part le calcul de ces opérateurs est très coûteux. Pour remédier à cela, des approximations ont été proposées comme par exemple le complément de Schur du sous-domaine voisin ou d’une zone “proche” de l’interface (bande d’éléments d’une profondeur à définir) [Cresta, 2008]. Tous ces choix vérifient l’hypothèse d’inversibilité de  $(\underline{S_p^{(s)}} + \underline{T_b^{(s)}})$ . La dernière possibilité constitue l’alternative la plus répandue, bien qu’elle nécessite de définir la zone “proche” de l’interface, qui influe sur la convergence de la méthode. Il est par ailleurs possible d’utiliser les approximations *lumped* et *super-lumped* de cet opérateur qui seront présentées dans la sous-section suivante.

Le formalisme de l’approche mixte présenté ici, en est un parmi plusieurs possibles. Un autre formalisme est introduit par [Cresta, 2008] spécifiquement pour les cas non-linéaire. Celui-ci est présenté en sous-section 2.3.4.

#### Autres types de raccords :

Nous avons détaillé jusqu’à présent les différentes approches dans le cadre d’interfaces parfaites. Il est également possible d’intégrer dans les conditions de raccord une description d’interfaces de contact avec ou sans frottement entre les sous-domaines [Champaney *et al.*, 1997 ; Passieux, 2008]. Cela ouvre notamment la possibilité de traiter des problèmes mettant en œuvre un nombre important de contacts [Alart *et al.*, 2012 ; Visseq *et al.*, 2012].

### 2.3.3 Résolution itérative du problème d’interface

Toutes les approches présentées précédemment définissent un problème global sur les inconnues d’interface et un problème de localisation par sous-domaine. Ce dernier se résout généralement au moyen d’un solveur direct. Le problème global peut également se résoudre de manière directe par factorisation du complément de Schur. Ce calcul est très coûteux (opérateur plein) et une des raisons d’être des méthodes de décomposition de domaine réside dans l’utilisation d’un solveur itératif de type Krylov (gradient conjugué, GMRES). En effet, la nature additive du complément de Schur permet de réaliser la majeure partie des produits matrices/vecteurs indépendamment par sous-domaine [Farhat et Roux, 1991] tout en évitant un assemblage des compléments de Schur locaux. Seule une étape de sommation des contributions entre sous-domaines voisins est nécessaire à chaque itération.

La force des méthodes de décomposition de domaine est de disposer de préconditionneurs efficaces pour les algorithmes itératifs, ce qui améliore sensiblement les performances de la résolution du problème d’interface. En outre, un problème grossier peut être défini pour initialiser l’algorithme itératif et réduire le nombre d’itérations. Ces deux points sont abordés brièvement ici.

### Préconditionnement :

Un préconditionneur mathématiquement optimal est l'inverse de l'opérateur de raideur du problème. Mais ce préconditionneur n'étant pas accessible à l'échelle du problème d'interface - surtout si le complément de Schur n'est pas assemblé - des approximations sont obtenues à moindre coût. Une méthode classique consiste à approcher l'inverse de l'opérateur de Schur global par l'assemblage des inverses des compléments de Schur locaux :

$$\underline{\underline{\tilde{S}_p}}^{-1} = \sum_s \underline{\underline{W}}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{S_p}}^{(s)-1} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{W}}^{(s)T} \quad (2.59)$$

$$\underline{\underline{\tilde{S}_d}}^{-1} = \sum_s \underline{\underline{\bar{W}}}^{(s)} \underline{\underline{\bar{A}}}^{(s)} \underline{\underline{S_d}}^{(s)-1} \underline{\underline{\bar{A}}}^{(s)T} \underline{\underline{\bar{W}}}^{(s)T} \quad (2.60)$$

Les matrices  $\underline{\underline{W}}^{(s)}$  et  $\underline{\underline{\bar{W}}}^{(s)}$  sont des matrices diagonales de pondération (*scaling*) sans lesquelles le préconditionnement n'est pas aussi performant, notamment en présence d'hétérogénéités de part et d'autre de l'interface et pour les problèmes multiphysiques [Gosselet *et al.*, 2002]. Dans ce cas, les matrices de pondération sont constituées des termes diagonaux de la matrice de rigidité d'interface  $\underline{\underline{K}}_{bb}^{(s)}$  normalisés.

L'inverse des compléments de Schur locaux est souvent remplacée par la pseudo-inverse, ce qui permet d'utiliser les propriétés (2.48) reliant compléments de Schur primal et dual. De cette manière aucune inversion de matrice n'est nécessaire. On parle alors de préconditionnement de type Neumann pour l'approche primaire et de type Dirichlet pour l'approche duale. Le recours aux pseudo-inverses introduit cependant une condition sur le résidu pondéré qui doit se trouver dans  $Im(\underline{\underline{S_p}}^{(s)})$  en approche primaire et dans  $Im(\underline{\underline{S_d}}^{(s)})$  en approche duale. Cette condition d'optimalité du préconditionneur est déjà prise en compte par la contrainte d'admissibilité en approche duale.

Il est possible de donner une approximation plus grossière du préconditionneur dual (2.60) en approchant les compléments de Schur primaux  $\underline{\underline{S_p}}^{(s)}$  par les blocs  $\underline{\underline{K}}_{bb}^{(s)}$  des matrices de raideur locales (version *lumped*), ou par leurs diagonales  $diag(\underline{\underline{K}}_{bb}^{(s)})$  (version *super-lumped*). Un compromis est recherché entre un conditionnement optimal et le coût de calcul des préconditionneurs.

### Problèmes grossiers :

Les problèmes grossiers servent à initialiser le solveur itératif du problème d'interface. Par cette initialisation, le but souvent recherché est de propager une information dans toute la structure. Cette stratégie améliore sensiblement la convergence des solveurs et la rend indépendante du nombre de sous-domaines [Widlund, 2009].

Un problème grossier peut résulter d'une contrainte d'admissibilité, comme c'est le cas des méthodes duales, une condition d'optimalité, comme pour la méthode primaire préconditionnée, et/ou d'une contrainte optionnelle guidée par une compréhension mécanique et une anticipation des difficultés de convergence. Dans le premier cas, l'idée est de vérifier une contrainte du type  $\underline{\underline{G}}^T \underline{x}_b = \underline{e}$  par l'initialisation, puis de calculer le reste de la solution dans un sous-espace supplémentaire à  $Im(\underline{\underline{G}})$ , grâce à un projecteur. Dans les autres cas, comme en réduction de modèle, une matrice  $\underline{\underline{Q}}$  définit un sous-espace de solutions grossières

dans lequel est recherchée l'initialisation, le reste de la solution étant également calculé par projection orthogonale dans le sous-espace supplémentaire.

En ce qui concerne les contraintes optionnelles, la matrice  $\underline{C}$  peut être composée de modes rigides d'interface (c'est le cas de la méthode primale préconditionnée), de modes propres, de base de déformation ou d'efforts macroscopiques pour chaque interface entre deux domaines (extension, vrillages, etc.) [Cresta, 2008]. Dans le cas d'une résolution multiple du problème d'interface (optimisation, calcul non-linéaire), il est également possible de réutiliser les sous-espaces de Krylov générés par les résolutions itératives précédentes [Risler et Rey, 2000 ; Rey et Gosselet, 2003 ; Gosselet et Rey, 2003]. Cette dernière technique peut accélérer de manière remarquable (gain de 60 dans [Gosselet et Rey, 2003]) la résolution des problèmes d'interface successifs. Elle donne lieu aux variantes GIRKS (*Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces*) et SRKS (*Selective Reuse of Krylov Subspace*) [Gosselet et al., 2012].

### 2.3.4 Newton-Krylov-Schur et localisation non-linéaire

Les méthodes de décomposition de domaine s'appliquent à la résolution des systèmes d'équations linéaires de grande taille. Y compris ceux des problèmes tangents obtenus par linéarisation de Newton dans le cas d'un problème non-linéaire. Dans ce cas on parle de méthode Newton-Krylov-Schur (NKS), pour exprimer la combinaison entre le schéma de Newton, la condensation de Schur par sous-domaine pour obtenir un problème d'interface et des problèmes locaux indépendants, et les solveurs itératifs parallèles de Krylov. L'Algorithme 2 montre les différentes étapes de la résolution par des méthodes NKS à travers l'approche primaire. Les méthodes NKS ont été notamment utilisées dans [Rey, 1994] sur un problème non-linéaire élastique hétérogène et dans [Farhat et al., 2000] pour traiter des non-linéarités géométriques.

Les techniques GIRKS et SRKS ont été développées en partie pour les problèmes d'interfaces en non-linéaire qui sont résolus à chaque itération (ligne 1 de l'Algorithme 2). Néanmoins des changements trop importants des matrices de raideur peuvent rendre les sous-espaces de Krylov des itérations précédentes obsolètes. Cela se produit par exemple en post-flambement [Cresta, 2008].

Au delà du préconditionnement du solveur itératif du problème d'interface, les méthodes NKS ne sont pas bien adaptées aux non-linéarités localisées. De fait, la présence d'une non-linéarité au sein d'un sous-domaine pénalise l'ensemble de la procédure aussi bien au niveau de l'interface que des autres problèmes locaux. Le processus itératif qui permet de faire converger le problème non-linéaire englobe effectivement la méthode de décomposition de domaine, comme cela est représenté sur le schéma Figure 2.10.

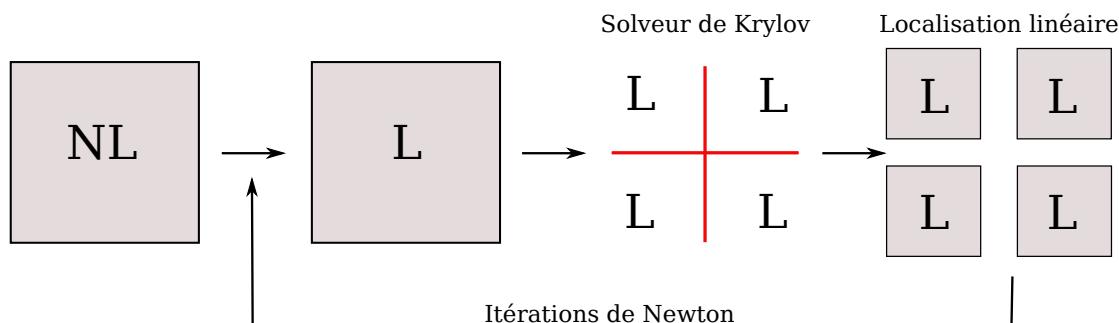


FIGURE 2.10 – Schéma de principe des méthodes NKS. Source : [Cresta, 2008]

---

**Algorithme 2 :** Méthode de Newton-Krylov-Schur en approche primale

---

```

initialisation :  $\lambda = \Delta\lambda$ 
tant que  $\lambda < 1$  faire (boucle incrémentale)
    pour chaque Sous-domaine  $s$  faire
        assembler  $\underline{K}_t^{(s)}$  et  $\underline{R}^{(s)}$ ;
        factoriser  $\underline{\underline{K}}_{t-ii}^{(s)}$ ;
        condenser le résidu  $\underline{r}^{(s)} = \underline{R}_b - \underline{\underline{K}}_{t-bi}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{t-ii}^{(s)-1} \underline{R}_i$ ;
    tant que  $e > \eta_{New}$  faire (boucle itérative globale)
        1   résoudre  $\underline{S}_t \underline{\delta q}_b = \underline{r}$  (solveur de Krylov);
         $\underline{q}_b = \underline{q}_b + \underline{\delta q}_b$ ;
        pour chaque Sous-domaine  $s$  faire (localisation)
             $\underline{\delta q}_i^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{t-ii}^{(s)-1} \left( -\underline{R}_i^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{t-ib}^{(s)} \underline{A}^{(s)T} \underline{\delta q}_b \right)$ ;
             $\underline{q}_i^{(s)} = \underline{q}_i^{(s)} + \underline{\delta q}_i^{(s)}$ ;
            assembler  $\underline{K}_t^{(s)}$  et  $\underline{R}^{(s)}$ ;
            factoriser  $\underline{\underline{K}}_{t-ii}^{(s)}$ ;
            condenser le résidu  $\underline{r}^{(s)}$ ;
            calculer  $e = \|\underline{r}\| / \|\lambda \underline{F}_{ext}\|$ ;
         $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ ;

```

---

Dans le but de différencier le traitement des non-linéarités locales, [Cresta *et al.*, 2007 ; Pebrel et Rey, 2008] ont proposé une procédure de Newton à deux niveaux. L'étape de résolution du problème tangent condensé à l'interface reste inchangée mais la localisation se fait comme un problème non-linéaire à part entière. Cette stratégie, appelée localisation non-linéaire, permet de différencier le traitement de chacun des sous-domaines et de réduire le nombre d'itérations du schéma de Newton global. Le schéma de principe Figure 2.11 met en évidence l'imbrication des procédures de Newton et permet une comparaison avec les méthodes NKS classiques.

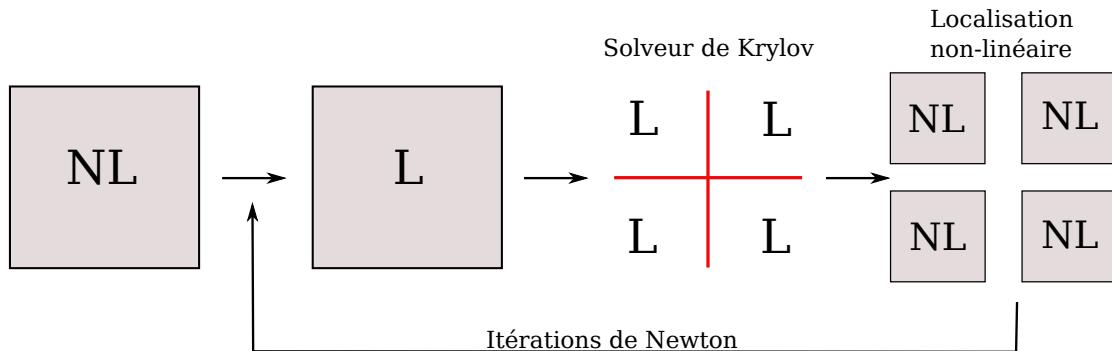


FIGURE 2.11 – Schéma de principe des méthodes NKS avec localisation non-linéaire. Source : [Cresta, 2008]

La localisation non-linéaire permet d'appliquer les conditions limites d'interface de manière incrémentale et adaptative. Plusieurs schémas d'incrémentation ont été proposés dont

l'incrémentation à partir de la solution de la dernière itération globale, ou l'incrémentation à partir de la solution du dernier incrément global ou de la configuration initiale. Dans un cas, il s'agit d'une technique de sous-cyclage différentiée par sous-domaine, dans l'autre, cela s'apparente à un calcul complet de la solution locale pour les nouvelles conditions limites à l'interface. Ce dernier cas peut être très coûteux mais permet de prendre en compte un effet d'histoire ou une sensibilité de la solution à l'incrémentation. En ce qui concerne le post-flambement, les deux approches produisent généralement la même solution [Cresta, 2008].

L'Algorithme 3 de la méthode NKS avec localisation non-linéaire montre qu'un paramètre de convergence local  $\eta_{local}$  doit être défini. Ce paramètre n'a pas d'influence sur la précision du résultat obtenu qui est pilotée par le critère de convergence global. Mais d'après [Cresta et al., 2007], il existe une valeur optimale à donner au critère de convergence local pour minimiser le nombre d'itérations globales et locales. Cette valeur est en général bien plus élevée que celle du critère global (typiquement  $\eta_{local} = \sqrt{\eta_{New}}$ ).

---

**Algorithme 3 :** Méthode de Newton-Krylov-Schur avec localisation non-linéaire

```

initialisation :  $\lambda = \Delta\lambda$ 
tant que  $\lambda < 1$  faire (boucle incrémentale)
    pour chaque Sous-domaine  $s$  faire
        assembler  $\underline{K}_t^{(s)}$  et  $\underline{R}^{(s)}$ ;
        factoriser  $\underline{\underline{K}}_t^{(s)}_{ii}$ ;
        condenser le résidu  $\underline{r}^{(s)} = \underline{R}_b - \underline{\underline{K}}_t^{(s)} \underline{K}_t^{(s)-1} \underline{R}_i$ ;
    tant que  $e > \eta_{New}$  faire (boucle itérative globale)
        résoudre  $\underline{S}_t \underline{\delta q}_b = \underline{r}$  (solveur de Krylov);
        pour chaque Sous-domaine  $s$  faire (localisation)
            tant que  $e_L > \eta_{local}$  faire (boucle itérative locale)
                 $\underline{\delta q}_i^{(s)} = \underline{\underline{K}}_t^{(s)-1} \left( -\underline{R}_i^{(s)} - \underline{\underline{K}}_t^{(s)}_{ib} \underline{A}^{(s)T} \underline{\delta q}_b \right)$ ;
                 $\underline{q}_i^{(s)} = \underline{q}_i^{(s)} + \underline{\delta q}_i^{(s)}$ ;
                assembler  $\underline{K}_t^{(s)}$  et  $\underline{R}^{(s)}$ ;
                factoriser  $\underline{\underline{K}}_t^{(s)}_{ii}$ ;
                calculer  $e_L = \|\underline{R}^{(s)}\| / \|\underline{F}_{ext}^{(s)}\|$ ;
                 $\underline{q}_b^{(s)} = \underline{q}_b^{(s)} + \underline{A}^{(s)T} \underline{\delta q}_b$ ;
                condenser le résidu :  $\underline{r}^{(s)}$ ;
            calculer  $e = \|\underline{r}\| / \|\lambda \underline{F}_{ext}\|$ ;
         $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ ;
    
```

---

Enfin, une comparaison des performances des méthodes avec et sans localisation non-linéaire met en évidence la pertinence du traitement local des non-linéarités. [Cresta et al., 2007] montrent ainsi dans une application au post-flambement local d'un caisson en flexion que le nombre d'itérations globales de Newton est diminué d'un facteur 3.6, et que le nombre d'itérations locales (tous sous-domaines confondus) reste stable.

Il est également intéressant de noter que des raccords de type mixtes offrent de meilleures performances que les raccords primaux. Une approche mixte est en effet proposée par [Cresta,

2008 ; Hinojosa, 2012] dans le cadre de la localisation non-linéaire. Cette approche mixte diffère de celle présentée en sous-section 2.3.2 par l'introduction de champs  $\underline{U}$  et  $\underline{F}$  propres à l'interface. Une condition relie la trace des inconnues des sous-domaines sur l'interface  $\underline{q}_b^{(s)}$  et  $\underline{\lambda}_b^{(s)}$  aux champs de l'interface. La résolution doit mener à l'annulation du saut en déplacement et en effort de part et d'autre de l'interface, grâce à un algorithme à deux directions de recherche comme celui de la méthode LaTin (voir sous-section 1.5.4). Le schéma Figure 2.12 illustre la définition particulière de l'interface dans cette approche.

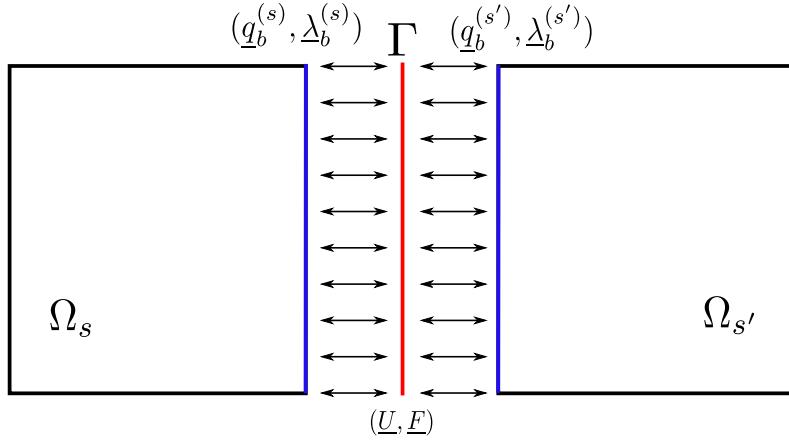


FIGURE 2.12 – Schéma de principe de la formulation mixte pour la localisation non-linéaire.

La direction de recherche locale peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left(\underline{\lambda}_b^{(s)} - \underline{F}^{(s)}\right) + \underline{k}^{(s)} \left(\underline{q}_b^{(s)} - \underline{U}^{(s)}\right) = \underline{0} \quad (2.61)$$

où  $\underline{U}^{(s)} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{U}$  et  $\underline{F}^{(s)} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{F}$  sont les restrictions des champs d'interface à l'interface du sous-domaine  $s$ . Ainsi l'étape locale tangente mixte par sous-domaine, connaissant  $\underline{U}$  et  $\underline{F}$ , s'écrit :

$$\left(\underline{\underline{K}}_T^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{k}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)}\right) \underline{\delta q}^{(s)} = -\underline{R}^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \left(\underline{k}^{(s)} \underline{\Delta U}^{(s)} + \underline{F}^{(s)}\right) \quad (2.62)$$

où  $\underline{\Delta U}^{(s)} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{U} - \underline{q}_b^{(s)}$  est le saut de déplacement à l'interface du côté du sous-domaine  $s$ . Le champ  $\underline{\lambda}_b^{(s)} = \underline{k}^{(s)} \underline{\Delta U}^{(s)} + \underline{F}^{(s)}$  est déterminé d'après l'Équation 2.61 une fois le champ de déplacement local actualisé. Ce problème tangent local est bien posé grâce à l'ajout d'une raideur d'interface  $\underline{k}^{(s)}$ . Cette raideur, considérée comme une direction de recherche pour le problème local, est définie de la même manière que pour les approches mixtes classiques (approximation du complément de Schur tangent du reste de la structure).

L'étape globale consiste ensuite à actualiser les champs  $\underline{U}$  et  $\underline{F}$ , les champs locaux étant déterminés précédemment. Pour fermer le problème, une direction de recherche est définie de part et d'autre de l'interface (indépendamment par sous-domaine) :

$$\bar{\underline{k}}^{(s)} \left(\underline{U}^{(s)} - \underline{q}_b^{(s)}\right) = \underline{F}^{(s)} - \underline{\lambda}_b^{(s)} \quad (2.63)$$

La raideur  $\bar{\underline{k}}^{(s)}$  est naturellement prise égale à l'opérateur de Schur du sous-domaine  $s$ . Par linéarisation de Newton, le problème global à l'interface s'écrit :

$$\underline{\underline{S}}_T \underline{\delta U} = -\underline{r}^m \quad (2.64)$$

avec

$$\underline{\underline{S}_T} = \sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{S}_T}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{r}^m} = \sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \left( \underline{\underline{S}_T}^{(s)} \underline{q}_b^{(s)} + \underline{\underline{R}_b}^{(s)} - \underline{\underline{K}_T}^{(s)}_{bi} \underline{\underline{K}_T}^{(s)-1}_{ii} \underline{\underline{R}_i}^{(s)} \right) \quad (2.65)$$

Après actualisation du champ de déplacement d'interface  $\underline{U}$ , une étape indépendante par sous-domaine permet de calculer les efforts d'interface  $\underline{F}$ , qui découle de l'Équation 2.63 :

$$\underline{F}^{(s)} = \underline{\lambda}_b^{(s)} + \underline{\underline{S}_T}^{(s)} (\underline{U}^{(s)} - \underline{q}_b^{(s)}) \quad (2.66)$$

Le problème global, Équation 2.64, est ainsi très proche des méthodes NKS primales, à ceci près qu'un terme lié à l'écart en déplacement des deux cotés de l'interface est introduit dans le résidu condensé mixte  $\underline{\underline{r}^m}$ . Cela simplifie la mise en œuvre de cette approche, et surtout les préconditionneurs et problèmes grossiers sont identiques à ceux de l'approche primaire. L'avantage de la méthode est la relaxation des conditions limites imposées aux sous-domaines à l'étape de localisation.

Conformément aux attentes et pour les deux types de raccords, le plus grand nombre d'itérations locales se produit au niveau des sous-domaines soumis au post-flambement, ce qui a pour effet de déséquilibrer la répartition des charges de calcul à travers les processeurs. Un équilibrage des charges à la volée est possible dans le cas où le nombre de sous-domaines est plus grand que le nombre de processeurs disponibles. Autrement, c'est le découpage initial des sous-domaines qui permet d'ajuster les charges bien qu'il soit difficile de distinguer *a priori* le comportement linéaire ou non-linéaire des zones. Par ailleurs un découpage favorable aux méthodes de localisation non-linéaire se fait de manière à ce que les phénomènes non-linéaires restent le plus possible localisés à l'intérieur des sous-domaines [Hinojosa, 2012]. C'est le cas pour le post-flambement local des panneaux raidis avec un découpage privilégié le long des raidisseurs.

## 2.4 Approches combinées

Si les méthodes de réduction de modèle et de décomposition de domaine font partie des approches classiques en calcul haute performance, elles s'associent également avec d'autres approches, spécialisées dans la résolution de certains types de problèmes, pour donner lieu à des méthodes particulièrement intéressantes et performantes. La combinaison des approches permet en effet de tirer le meilleur de chacune d'elles. Notamment dans le cas de problèmes multi-échelles et non-linéaires, le recours à une méthode de décomposition de domaine ou à une méthode de réduction de modèle au sein même de la méthode de résolution dédiée à ce type de problème, permet d'améliorer l'extensibilité et de traiter des problèmes de grande taille. Nous proposons donc d'étendre la revue des stratégies de calcul avancées à quelques approches combinées.

### 2.4.1 Méthode LaTIn micro/macro

La méthode LaTIn micro/macro [Ladevèze *et al.*, 2001] peut se traduire comme la combinaison de la méthode LaTIn (voir sous-section 1.5.4) et de l'approche mixte de décomposition de domaine. Une décomposition du domaine temporel est également envisageable mais ne sera pas présentée ici [Passieux *et al.*, 2010]. En plus de cela, une séparation d'échelle est

réalisée pour les grandeurs d'interface. Une quantité “micro” (exposant  $\square^m$ ) et une quantité “Macro” (exposant  $\square^M$ ) sont distinguées pour les champs d'efforts et de déplacements :

$$\underline{\lambda}_b^{(s)} = \underline{\lambda}_b^{M(s)} + \underline{\lambda}_b^{m(s)} \quad (2.67)$$

$$\underline{q}_b^{(s)} = \underline{q}_b^{M(s)} + \underline{q}_b^{m(s)} \quad (2.68)$$

Le problème de référence est formulé par sous-domaine (groupes d'équations locales et d'équations linéaires) auquel s'ajoute l'admissibilité des variables “macro” (équation linéaire globale) et le comportement de l'interface (équation locale, éventuellement non-linéaire).

Un sous-espace “grossier” est défini pour les quantités spatiales “macro”, qui comporte en pratique des modes rigides et de déformation macroscopiques de l'interface (extension, flexion, etc.). Le cas les plaques et coques est présenté par [Cresta, 2008].

De cette manière, l'étape locale à l'itération  $n + 1/2$  est réalisée indépendamment par sous-domaine et fait intervenir un paramètre de raideur d'interface (approche mixte). L'étape linéaire, se résout en trois phases :

- Vérification de l'équilibre “micro” par sous-domaine sachant les efforts calculés à l'étape  $n + 1/2$ .
- Mise à jour des variables “macro” d'interface pour vérifier l'équilibre global des interfaces entre sous-domaines, connaissant l'équilibre “micro”.
- Second calcul “micro” par sous-domaine avec les efforts et déplacements “macro” d'interface à jour.

L'approximation radiale utilisée dans l'approche LaTIn, qui repose sur le même principe que la PGD (voir sous-section 2.2.2), est elle-même employée pour les variables “micro” et “macro” par sous-domaine. Les fonctions spatiales macro sont données par le sous-espace grossier [Ladevèze *et al.*, 2010].

L'intérêt de l'approche micro/macro réside dans la description peu coûteuse de l'équilibre global des sous-domaines entre eux. Cela permet d'améliorer l'extensibilité de la méthode, notamment quand le nombre de sous-domaines augmente et par conséquent la taille de l'interface. En cela elle se rapproche du concept de problème grossier introduit en décomposition de domaine pour la résolution du problème d'interface sous-section 2.3.3.

## 2.4.2 Autour des éléments finis généralisés

La méthode des éléments finis généralisés (GFEM), ou étendus (XFEM), a été mise au point par [Melenk et Babuska, 1996] et [Belytschko et Black, 1999]. Grâce à la partition de l'unité dans un domaine  $\Omega$ , réalisée par un jeu de  $N$  fonctions  $\phi_i(x)$  :

$$\sum_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.69)$$

Cette partition de l'unité est déjà réalisée par les fonctions classiques d'interpolation éléments-finis  $N_i(x)$ . N'importe quelle fonction  $\Phi(x)$  peut alors enrichir l'interpolation élément fini par son produit avec les  $\phi_i$  :

$$\hat{u}(x) = \sum_i N_i(x) u_i + \sum_i \phi_i(x) \Phi(x) \alpha_i \quad (2.70)$$

Les  $\alpha_i$  sont des inconnues qui permettent de moduler l'enrichissement. En pratique, les mêmes fonctions d'interpolation  $N_i(x)$  et  $\phi_i(x)$  sont utilisées. Les fonctions d'enrichissement

permettent alors de représenter des singularités et leur évolution par l'utilisation de fonctions *level set*, et cela sans avoir à modifier le maillage. Les fonctions *level set* définissent implicitement les contours d'une singularité [Sethian, 1999].

La X/GFEM est principalement utilisée en mécanique de la rupture, avec des fonctions d'enrichissement pour la représentation de la fissure et d'autres pour l'approximation du champ de déplacement en pointe de fissure par des solutions asymptotiques obtenues analytiquement [Moës *et al.*, 1999]. L'enrichissement de l'interpolation peut également rendre, par exemple, une approximation conforme à la flexion des plaques pour un maillage initialement non-conforme. Ce concept d'adaptation de l'enrichissement et du maillage est connu sous le nom de *hp-adaptation*, méthode développée notamment par [Duarte et Oden, 1996], et donne lieu au méthodes GFEM adaptatives [Arndt *et al.*, 2010]. L'enrichissement est alors simplement constitué de fonctions polynomiales.

De façon générale, le cadre de l'enrichissement permet de rendre l'analyse plus versatile, le maillage indépendant de la localisation des discontinuités, des géométries complexes, des singularités et du degré d'interpolation, et d'introduire des connaissances mécaniques (champ de déformation en pointe de fissure) dans la formulation.

Un point important de la méthode concerne l'intégration numérique, qui, pour être exacte, nécessite une adaptation en rapport avec l'enrichissement de l'interpolation [Strouboulis *et al.*, 2000]. L'ajout d'inconnues aux noeuds et l'augmentation du coût de l'intégration numérique sont ainsi un premier frein à l'extensibilité de la méthode.

### X/GFEM et multi-échelle :

Afin de traiter des problèmes de grande taille, des zones restreintes d'enrichissement peuvent être définies, seulement où cela est nécessaire (par exemple autour et en pointe de fissure). La gestion de la non-conformité induite entre zones enrichie et non-enrichie est alors réalisée de différentes manières dont notamment, l'utilisation d'une fonction de pondération décroissante de l'enrichissement au niveau de la transition entre les zones non-conformes [Chahine *et al.*, 2008a ; Ventura *et al.*, 2009] Figure 2.13.

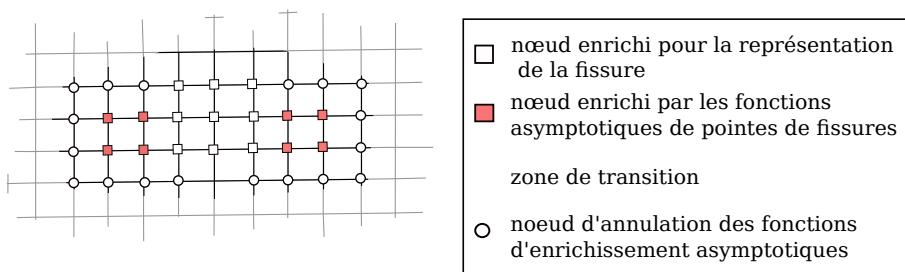


FIGURE 2.13 – Enrichissement de l'interpolation sur une zone restreinte à la fissure. La zone de transition entre éléments enrichis par les fonctions asymptotiques en pointe de fissure et éléments non-enrichis est matérialisée en rouge.

Le développement de la combinaison de la GFEM avec des approches multi-échelles existantes est apparu pour plusieurs raisons.

Il y a d'une part la constitution de fonctions d'enrichissement grâce à un dialogue entre un modèle local fin et un modèle global grossier et enrichi. [Duarte et Kim, 2008] ont ainsi proposé d'évaluer les fonctions d'enrichissement à l'aide d'une formulation global/local et d'un modèle local fin qui permet de générer des fonctions d'enrichissement pertinentes à utiliser au niveau global (*Mesh Based Handbook*).

Il y a d'autre part l'intégration de l'approche X/GFEM dans un modèle élément fini standard et le couplage entre un code élément fini commercial ne disposant pas de la formulation X/GFEM et un code dédié. L'idée est de rendre possible le traitement d'un phénomène local dans un modèle global *a priori* inadapté. [Wyart et al., 2008 ; Wyart et al., 2009] ont pour cela combiné X/GFEM et décomposition de domaine duale. Un couplage non-intrusif est développé par [Passieux et al., 2013b ; Rannou et al., 2009 ; Gerstenberger et Tuminaro, 2012] sur la base d'une combinaison avec une méthode multigrille localisée.

Enfin, [Guidault et al., 2006 ; Guidault et al., 2008] ont voulu prendre en compte le caractère multi-échelle dans une combinaison avec la méthode LaTIn micro/marco présentée dans la sous-section 2.4.1 précédente. Sur la base d'une décomposition de domaine mixte, les champs de déplacement et d'effort aux interfaces sont séparés en partie macro et partie micro, avec une base macro prenant en compte les discontinuités. Cette approche permet un traitement efficace des interactions local/global dues à la présence d'une fissure, qui est décrite indépendamment du maillage et de la décomposition de domaine.

### X/GFEM et réduction de modèle :

La méthode des éléments finis généralisés requiert d'avoir à disposition un certain nombre de fonctions d'enrichissement pour la description du champ de déplacement, comme par exemple les solutions asymptotiques en pointe de fissure. Ces fonctions sont parfois complexes voire impossibles à obtenir analytiquement, notamment pour une fissure propageant à l'interface de deux matériaux [Chahine et al., 2008b]. Un certain nombre de connaissances sur la solution peuvent être acquises en amont du calcul (*offline*) à la manière des méthodes de réduction de modèle. Ce concept a été proposé par [Chahine et al., 2009] pour une approximation des fonctions d'enrichissement en pointe de fissure à l'interface de deux matériaux. Un modèle éléments finis fin, restreint en pointe de fissure, est sollicité sous deux modes d'ouverture de la fissure (mode I et mode II) et deux fonctions d'enrichissement sont générées.

[Aquino et al., 2009] ont développé dans le même temps une approche POD-GFEM, qui permet de générer des fonctions d'enrichissement à partir de données expérimentales ou numériques, les *snapshots*. Il est intéressant de constater que cette approche fournit une meilleure précision que la réduction de modèle par POD, du fait de la modulation des fonctions d'enrichissement par les coefficients nodaux  $\alpha_i$ . Le maillage plus grossier utilisé dans l'approche POD-GFEM en comparaison avec le modèle éléments-finis, et un faible nombre de fonctions d'enrichissement obtenues grâce à la POD, agissent comme une réduction de modèle, avec l'avantage que le support des modes POD et celui du problème *online* peuvent être différents.

L'approche présentée par [Niroomandi et al., 2012b], illustre la variété des couplages possibles entre X/GFEM et réduction de modèle par base réduite. Le problème considéré ici est celui de la simulation en temps réel d'opération chirurgicale, pour laquelle il existe une base réduite POD capable de représenter les principaux modes de déformations de l'organe

opéré. Cependant, la modélisation de la fissure ne convient pas à la réduction de modèle par projection. C'est le but du couplage local avec la XFEM sur un domaine  $\Omega_L$  incluant la fissure, qui est réalisée au moyen de l'approximation du champ de déplacement suivante :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N C_j(x) \alpha_i^{POD} + \sum_{i \in \Omega_L} N_i(x) u_i^L + \sum_k N_k(x) \Phi(x) \alpha_k^{XFEM} \quad (2.71)$$

De cette approximation découle un couplage dans les opérateurs entre degrés de libertés généralisés  $\alpha_i^{POD}$  (multiplicateurs des modes POD) et degrés de liberté locaux  $u_i^L$  et  $\alpha_k^{XFEM}$ . Une intégration numérique spécifique doit être faite localement, mais la méthode permet de conserver les très bonnes performances de la réduction de modèle tout en rendant possible la prise en compte de fissures et plus généralement d'un phénomène local complexe qui n'était pas représentable par une combinaison de modes POD reproduisant le comportement global de la structure. Il faut toutefois que la modification du comportement global due à la fissure soit prise en compte par la base POD utilisée.

Une autre approche consiste à réduire par POD un modèle X/GFEM. Dans le cadre de la propagation de fissure en sollicitations cycliques, les travaux de [Galland *et al.*, 2011] présentent une approche XFEM-POD avec un *morphing* du maillage qui suit la pointe de fissure. La validité de la base POD est ainsi maintenue sur plusieurs pas de propagation et celle-ci est complétée (à partir du résultat du calcul complet) lorsque l'erreur d'approximation est trop importante.

Nous ne connaissons aucune application des méthodes X/GFEM au flambement ou au post-flambement. La combinaison des éléments finis généralisés (ou étendus) avec les méthodes multi-échelles et les techniques de réduction de modèle ouvrent néanmoins des perspectives sur des applications au post-flambement local des grandes structures raides. Une proposition est ainsi formalisée et testée en Annexe A.

### 2.4.3 Méthode asymptotique numérique et POD

Une étape limitant les performances de la Méthode Asymptotique Numérique (voir sous-section 1.5.4) est celle du calcul des termes de la série par la résolution séquentielle des systèmes linéaires associées. La combinaison de la MAN avec la réduction de modèle par POD, proposée par [Yvonnet *et al.*, 2007] pour le post-flambement de microstructures cellulaires, mène donc à une méthode plus efficace pour la continuation de branches d'équilibres. Chaque terme de la série entière est en effet lui-même développé sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de la base POD. La taille des problèmes à résoudre est donc fortement réduite. La combinaison de la MAN et de la POD a été étendue par la suite à la résolution de problèmes hyper-élastiques par [Niroomandi *et al.*, 2010] et associée pour plus d'efficacité à une technique d'interpolation des coefficients de la base POD et des termes non-linéaires du second membre dans [Niroomandi *et al.*, 2012a].

Ces approches ont montré d'excellentes performances, notamment parce que le rayon de convergence de la MAN n'est pas altéré par la réduction de modèle. Le couplage avec la POD requiert de porter une attention particulière à la difficulté et au coût de la constitution de *snapshots* pertinents, surtout pour les problèmes non-linéaires où l'échantillonnage doit se faire tout au long des chemins de chargement. [Yvonnet *et al.*, 2007] proposent à ce propos une stratégie d'échantillonnage dans un espace de chargements macroscopiques normalisés, le long de chemins définis par une combinaison linéaire des chargements et un seul paramètre d'évolution (voir Figure 2.14).

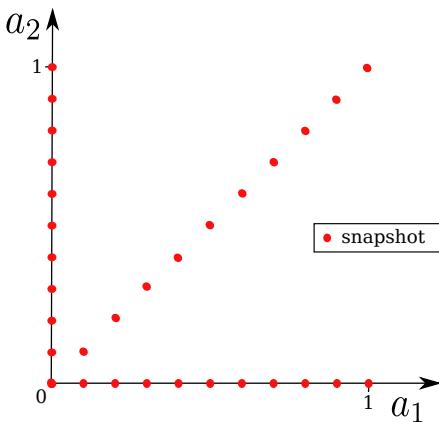


FIGURE 2.14 – Stratégie d'échantillonnage pour la POD pour les problèmes non-linéaire d'évolution.  $a_1$  et  $a_2$  sont les amplitudes normalisées de deux types de chargement. Source [Yvonnet *et al.*, 2007]

Cette stratégie, appliquée au post-flambement d'une structure cellulaire, peut permettre de construire des bases réduites pertinentes mais à un coût malgré tout élevé. Les modes de déformation doivent être relativement peu sensibles aux variations de répartition du chargement (entre  $a_1$  et  $a_2$ ). Dans le cas contraire la multiplication des chemins de chargement échantillonnés risque de rendre la phase *offline* prohibitive.

#### 2.4.4 Partition de la réduction de modèle

Afin d'améliorer l'extensibilité des méthodes de réduction de modèle qui sont limitées notamment par le coût de la projection et de la mise à jour des opérateurs, une idée, illustrée sur la Figure 2.15, consiste à décomposer le domaine d'étude.

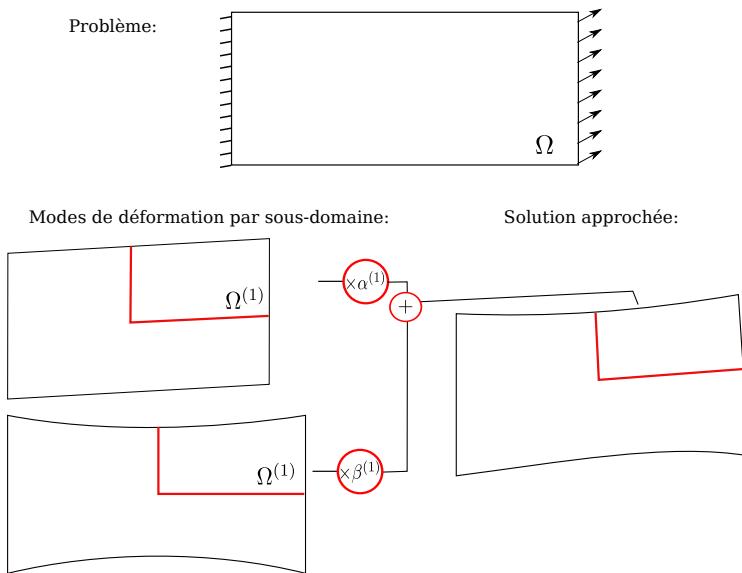


FIGURE 2.15 – Réduction de modèle partitionnée.

La combinaison de la réduction de modèle et de la décomposition de domaine trouve ses racines dans les travaux de [Craig et Bampton, 1968]. Dans cette approche, désormais assez

classique en bureau d'étude pour l'analyse dynamique des grandes structures, une séparation par sous-structure est réalisée entre degrés de liberté internes et à l'interface comme pour l'approche primale en décomposition de domaine (voir équation (2.34)). L'expression des degrés de liberté internes peut être décomposée en une contribution des modes de déplacement à interface fixe de la sous-structure  $\underline{\underline{\Phi}}_{ii}^{(s)}$  et une contribution des modes contraints  $\underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)}$  tels que :

$$\begin{aligned} \underline{q}_i^{(s)} &= \underline{\underline{\Phi}}_{ii}^{(s)} \underline{\alpha}_i^{(s)} + \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)} \underline{q}_b^{(s)} \\ \text{où } \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)} &= -\underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)-1} \underline{\underline{K}}_{ib}^{(s)} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Le calcul des modes à interfaces fixes est réalisé indépendamment par sous-structure (par analyse modale) et seule une troncature de la base modale est conservée dans  $\underline{\underline{\Phi}}_{ii}^{(s)}$  de manière à réduire la dimension du problème. Une base réduite locale  $\underline{\underline{\Phi}}^{(s)}$  s'exprime donc :

$$\underline{\underline{\Phi}}^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Phi}}_{ii}^{(s)} & \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_{b,\mathbb{R}^{N_b}} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Ce qui, par projection de Galerkin, donne lieu à l'équation d'équilibre locale exprimée en termes de degrés de liberté d'interface et de coordonnées généralisées des degrés de liberté internes  $\underline{\alpha}_i^{(s)}$ . La matrice de raideur et la matrice de masse (en dynamique) deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}^{(s)} &= \underline{\underline{\Phi}}^{(s)T} \underline{\underline{K}}^{(s)} \underline{\underline{\Phi}}^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\alpha\alpha}^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{bb}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{bi}^{(s)} \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{M}}^{(s)} &= \underline{\underline{\Phi}}^{(s)T} \underline{\underline{M}}^{(s)} \underline{\underline{\Phi}}^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{\alpha\alpha}^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{bb}^{(s)} + \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)T} \underline{\underline{M}}_{ii}^{(s)} \underline{\underline{\Phi}}_{ib}^{(s)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Il est intéressant de noter le caractère diagonal des matrices de raideur et de masse associées aux modes internes à interface fixe (par  $\underline{\underline{K}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  orthogonalité des modes vibratoires). L'assemblage des problèmes locaux se fait sans condensation des coordonnées généralisées locales puisque d'une part leur nombre est sensé rester très faible et d'autre part elles sont justement découplées. Une application à l'analyse de flambement a été proposée par [Huang et Wang, 1993], mais le post-flambement n'a semble-t-il pas été abordé de cette manière à cause de la non-linéarité du phénomène. Il faut noter une contribution de [Rixen, 2004] sur une version "duale" de la méthode de Craig et Bampton.

Plus récemment [Ryckelynck et Missoum Benziane, 2010] ont présenté la méthode APHR (voir sous-section 2.2.2) combinée à une méthode de décomposition de domaine de type duale. La méthode APHR *Multi-Niveau* tire donc profit du calcul parallèle à la fois pour le calcul des coefficients du modèle réduit, au niveau de l'adaptation de la base et à celui de l'intégration réduite. Seule l'étape d'adaptation de la base réduite fait appel au solveur de décomposition de domaine pour atteindre un équilibre global.

La partition de la réduction de modèle par POD est réalisée par [Kerfriden et al., 2012], dans l'application à la mécanique de la rupture. La méthode établie repose sur la constitution d'une base POD pour chaque sous-domaine. L'approximation ne concerne que la partie interne du champ de déplacement par sous-domaine comme le décrit l'Équation 2.75.

$$\left\{ \frac{\delta q_i^{(s)}}{\delta q_b^{(s)}} \right\} = \left\{ \frac{C_i \delta \alpha_i^{(s)}}{\delta q_b^{(s)}} \right\} \quad (2.75)$$

Le problème linéarisé par sous-domaine devient donc, après projection de Galerkin :

$$\underline{\underline{\hat{K}}}_t^{(s)} \left\{ \begin{array}{c} \delta \alpha_i^{(s)} \\ \underline{\underline{\delta q_b}}^{(s)} \end{array} \right\} = -\underline{\hat{R}}^{(s)} \quad (2.76)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\hat{K}}}_t^{(s)} = \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C_i}}^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I_{b,\mathbb{R}^{N_b}}}} \end{array} \right]^T \underline{\underline{K}}_t^{(s)} \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C_i}}^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I_{b,\mathbb{R}^{N_b}}}} \end{array} \right] \\ \underline{\hat{R}}^{(s)} = \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C_i}}^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I_{b,\mathbb{R}^{N_b}}}} \end{array} \right]^T \underline{\underline{R}} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Le problème global condensé à l'interface, formulé à partir d'une approche primale de décomposition de domaine, n'est pas réduit mais tient compte des approximations internes à travers les opérateurs projetés et condensés :

$$\underline{\underline{\hat{S}_p}} \delta q_b = \underline{\hat{b}_p} \quad (2.78)$$

En revanche, la localisation est réalisée dans un sous-espace réduit :

$$\underline{\delta \alpha_i}^{(s)} = \underline{\underline{\hat{K}}}_t^{(s)-1} (-\underline{\hat{R}}^{(s)}_i - \underline{\underline{\hat{K}}}_t^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{\delta q_b}}) \quad (2.79)$$

Dans le cas où une base réduite locale conduit à une erreur d'approximation trop importante, le sous-domaine concerné est traité de manière complète, sans réduction de modèle (voir Figure 2.16). C'est le cas, dans les travaux de Kerfriden *et al.*, d'un sous-domaine traversé par une fissure.

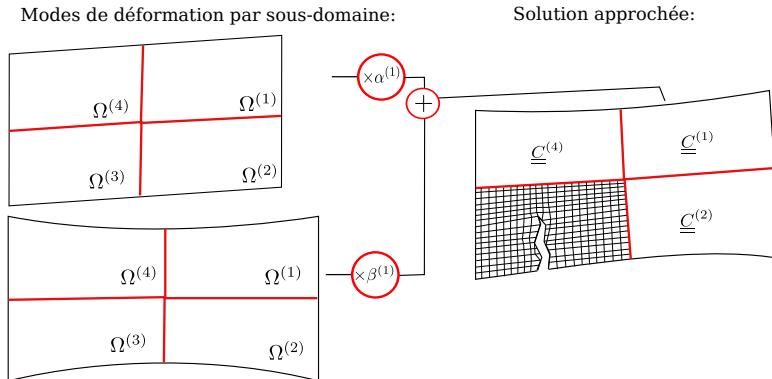


FIGURE 2.16 – Illustration du traitement spécifique d'un sous-domaine en cas d'erreur d'approximation trop importante.

Cette méthode permet de concentrer les efforts de calcul dans les zones présentant de fortes non-linéarités. Sans un découpage adapté, l'équilibrage des charges de calculs entre sous-domaine peut cependant être détérioré. Par ailleurs, une technique d'approximation des opérateurs par sous-domaine a été employée, basée sur un domaine d'intégration réduit et une approximation des opérateurs par POD (*gappy* POD [Nguyen *et al.*, 2008], voir sous-section 2.2.2). Une perspective de ces travaux concerne la réduction de l'espace des degrés de libertés d'interface pour une étape globale moins coûteuse.

## 2.5 Bilan du chapitre

Nous avons présenté une revue, non-exhaustive, des méthodes et stratégies de résolution avancées en calcul de structure qui s'adressent à des problèmes de grande taille à travers deux axes :

- l'axe de la réduction de modèle par une représentation minimale de la solution.
- l'axe du calcul parallèle par une séparation des échelles globale et locale.

Les méthodes de réduction de modèle par projection et de décomposition de domaine font figure d'approches fondamentales dans le calcul intensif en mécanique des structures. Toutefois, il faut souligner les nouvelles approches développées récemment et surtout la multitude de concepts proposées sur la base de combinaisons de méthodes plus ou moins éprouvées, qui débloquent certains verrous comme par exemple celui de la simulation en temps réel.

Nous proposons, en bilan de ce chapitre, de résumer les principaux concepts mis en œuvre dans les méthodes présentées, et de voir en quoi ils peuvent être intéressants du point de vue du calcul des grandes structures raidies en post-flambement local.

- le concept des problèmes *offline* et *online* en réduction de modèle permet de distinguer la phase de production de la solution (*online*) de celle de la construction d'une représentation minimale (*offline*). Ce concept suppose qu'il existe un temps et des moyens suffisants pour lesquelles il est possible de construire une représentation réduite pertinente, robuste et précise de toute solution dans un espace de paramètres borné. Ce concept convient bien aux applications dédiées à la simulation en temps réel de modèles de taille petite à intermédiaire. Mais pour les problèmes de grande taille, le temps et les moyens peuvent manquer pour réaliser l'échantillonnage (POD) ou la résolution gloutonne (PGD). En cela, ce concept ne peut débloquer à lui seul le verrou du calcul des grandes structures raidies en post-flambement local, sauf à être combiné à une approche de séparation d'échelles globale et locale. Enfin, la présence de non-linéarité complexifie l'étape *offline* puisque, notamment, le niveau de chargement devient un paramètre. Les méthodes de réduction de modèle en post-flambement ont recours à une adaptation de la base réduite modale en phase *online*, conformément au concept suivant.
- le concept d'adaptation de la représentation réduite en cours de calcul (c'est à dire en phase *online*) permet d'envisager de disposer d'une représentation initiale incomplète (voire inexistante dans le cas de la méthode APHR) et de la compléter en fonction de l'erreur observée *a posteriori* ou d'un défaut de convergence (*à la volée*). Cela permet d'une part de réduire les efforts pour constituer la représentation initiale, et d'autre part de prendre en compte les non-linéarités avec précision, à faible coût additionnel. C'est un concept intéressant pour la réduction de modèle en post-flambement bien que vraisemblablement peu extensible du fait de l'étape de complétion. Là encore, la combinaison avec une méthode de décomposition de domaine, comme celle de la méthode *Multi-level APHR*, peut débloquer ce verrou.
- le concept de problème global grossier pour les méthodes de décomposition de domaine permet de répartir efficacement une information dans toute la structure et d'obtenir la déformation macroscopique. La résolution du problème global à l'interface est accélérée. Les conséquences d'un phénomène non-linéaire localisé sont donc évaluées à moindre coût. Ce concept a déjà été appliqué au calcul en post-flambement local des structures raidies et il a démontré sa robustesse et amélioré l'extensibilité. Un enjeu est de déterminer des problèmes grossiers adaptés.

- le concept de traitement local spécifique rationalise la résolution des problèmes présentant des non-linéarités ou singularités locales. Les méthodes adaptées à la prise en compte de ces phénomènes sont appliquées sur une zone restreinte du domaine. À travers la localisation non-linéaire, ce concept a déjà permis de résoudre efficacement le problème de post-flambement local des grandes structures raidies. Le traitement local devient alors le processus limitant les performances des méthodes.

Finalement, une nouvelle approche en résolution des problèmes de post-flambement local des grandes structures raidies peut tirer partie de chacun de ces différents concepts. L'enjeu est donc de réaliser la combinaison d'une représentation initiale réduite qui utilise les connaissances sur le phénomène de post-flambement, d'une adaptation en cours de calcul qui tient compte de la non-linéarité, et d'une décomposition de domaine avec un problème global grossier et un traitement local spécifique.

# **Deuxième partie**

## **Contribution au calcul haute performance pour le post-flambement local des structures raidies**



---

La partie précédente a permis de dresser un état de l'art à la fois sur le phénomène physique étudié et sur les méthodes de résolution, plus ou moins performantes, auxquelles il est possible d'avoir recours.

Dans cette seconde partie, sont présentées les contributions de la thèse au problème du coût de calcul de la simulation en post-flambement des grandes structures composites raidies aéronautiques. La compréhension mécanique du problème est exploitée. Deux aspects sont notamment fondamentaux :

- la connaissance d'une forme approchée de la déformée de flambement grâce à l'analyse linéaire de flambement et sa contribution dans la représentation du post-flambement.
- la localisation du phénomène de flambement admissible d'une structure raidie aéronautique au sein des mailles structurales élémentaires (cloquage de la peau entre raidisseurs). Ceci n'étant valable que pour une plage de chargement qui dépend de la structure elle-même.

Le Chapitre 3 rend compte de la proposition d'une stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement. L'originalité de l'approche réside dans la définition d'une base réduite initiale minimale et l'utilisation d'une procédure d'adaptation *à la volée* dans le cadre du post-flambement. Ce chapitre fait l'objet d'une publication [Barrière *et al.*, 2013] et d'une communication [Barrière *et al.*, 2012].

Le Chapitre 4 tente d'apporter une réponse au caractère local du post-flambement des structures raidies et propose une combinaison entre la stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement et une méthode de décomposition de domaine avec localisation non-linéaire. Ce chapitre a fait l'objet de trois communications [Barrière *et al.*, 2013b ; Barrière *et al.*, 2013c ; Barrière *et al.*, 2013a].

Ces deux premiers chapitres ont nourri une réflexion sur la conception d'une bibliothèque dédiée au développement de méthodes de résolution avancées en calcul de structures. Le résultat de cette réflexion est présenté dans le Chapitre 5.



# 3 Réduction de modèle adaptative en post-flambement

## Résumé

*Une contribution à la réduction de modèle pour la simulation du post-flambement est présentée dans ce chapitre. Une stratégie est proposée qui montre de bonnes performances dans la représentation, à moindre coût et à moindre complexité de mise en œuvre, du post-flambement des structures raidies dans un contexte aéronautique.*

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>92</b>
<b>3.2</b>	<b>Stratégie PBAMR (Post-Buckling Adaptive Model Reduction)</b>	<b>92</b>
3.2.1	Une base réduite initiale minimale	93
3.2.2	Une procédure d'adaptation à la volée	94
3.2.3	Algorithme général	95
<b>3.3</b>	<b>Implémentation et validation du code de recherche</b>	<b>97</b>
<b>3.4</b>	<b>Comportement de la stratégie et étude paramétrique sur un cas simple</b>	<b>103</b>
<b>3.5</b>	<b>Étude des performances numériques : application à un panneau raidi</b>	<b>108</b>
<b>3.6</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>111</b>

## 3.1 Introduction

Ce chapitre se concentre sur une approche en réduction de modèle pour le post-flambement. Les méthodes de réduction de modèle ont été introduites dans le chapitre précédent, en particulier celles utilisées pour la résolution des problèmes de post-flambement. La recherche d'un compromis entre les coûts des phases *offline* et *online*, avec la contrainte de maîtriser le niveau de précision de l'approximation réalisée, constitue encore une problématique ouverte. Une stratégie est donc proposée ici, qui repose sur une base réduite initiale de taille minimale inspirée des approches semi-analytiques et une procédure d'adaptation *à la volée*.

Dans une première section, la stratégie proposée est présentée. Le choix d'une base réduite initiale minimale pour la résolution du post-flambement y est motivé et la procédure d'adaptation détaillée. Les sections suivantes sont consacrées aux tests numériques. Dans un premier temps l'implémentation de la stratégie dans un code de recherche est expliquée et validée par comparaison avec un logiciel du commerce. Puis, le comportement de la stratégie est étudié afin de valider le choix de la base réduite et de la procédure d'adaptation. L'influence des paramètres de la méthode est mise en évidence. Enfin, à travers un cas d'application sur une structure raidie, les performances en termes de coût de calcul sont analysées.

## 3.2 Stratégie PBAMR (Post-Buckling Adaptive Model Reduction)

La réduction de modèle par projection pour la résolution du post-flambement repose, dans la littérature (voir sous-section 2.2.1.1), sur une base réduite constituée d'une troncature de la base des modes de flambement à un ordre  $p_{mf}$  [Nagy, 1979] [Kling *et al.*, 2006] et/ou de vecteurs issus d'une perturbation statique jusqu'à un ordre  $p_{ps}$  [Noor *et al.*, 1981 ; Kling *et al.*, 2006] et/ou d'une base POD construite à partir d'un échantillonnage adapté au non-linéarités [Yvonnet *et al.*, 2007].

Certaines des stratégies de la littérature reposent sur une adaptation *a posteriori* (voir sous-section 2.2.1.2) de la base réduite afin de maîtriser l'erreur d'approximation. Et ceci malgré les efforts consentis pour constituer une base réduite initiale en phase *offline* (calcul de  $p_{mf}$  modes de flambement,  $p_{ps}$  dérivées d'ordres supérieurs). D'autres approches consacrent encore plus de ressources sur la phase *offline*, à travers l'échantillonnage adapté, afin d'obtenir une base réduite suffisamment complète pour atteindre la précision souhaitée, sans toutefois de garanties. Les ordres de troncature ou de développement asymptotique ( $p_{mf}$  et  $p_{ps}$ ), ainsi que l'échantillonnage en POD, sont des paramètres importants des stratégies de résolution existantes qu'il est difficile de maîtriser. Le coût de la phase *offline* en dépend fortement, sans garantie de précision en phase *online* en raison des non-linéarités.

C'est en réponse à cette difficulté et ce coût associé à la constitution d'une base réduite pertinente pour l'étude du post-flambement que nous proposons une stratégie qui tire profit d'une base réduite initiale minimale et une procédure adaptative efficace. L'objectif est double :

- minimiser l'investissement initial en partant du principe que de nouveaux investissements seront nécessaires en cours de calcul : phase *offline* simplifiée pour l'utilisateur et moins coûteuse.

- minimiser les investissements en cours de calcul : phase *online* performante.

### 3.2.1 Une base réduite initiale minimale

Le choix d'une base réduite initiale s'inspire des méthodes semi-analytiques présentées en Section 1.4, en particulier de l'approximation du champ de déplacement par développement asymptotique en post-flambement initial de [Koiter, 1945] et des travaux plus récents de [Bisagni et Vescovini, 2009 ; Vescovini et Bisagni, 2012].

En effet, l'équation (1.39) décrit le champ de déplacement en post-flambement comme une combinaison du champ de déplacement de la branche d'équilibre fondamentale, du mode de flambement et de termes d'ordres supérieurs. Le rôle prépondérant des deux premiers termes a été montré sur une application semi-analytique par [Vescovini et Bisagni, 2012] et est appuyé par les développements analytiques de Koiter sur l'amplitude des termes d'ordres supérieurs.

La base réduite initiale  $\underline{\underline{C}}_{init}$  proposée est donc composée d'un mode de déplacement solution de la branche d'équilibre fondamentale  $\underline{q}_0/\|\underline{q}_0\|$ , calculé par un calcul statique linéaire ou non-linéaire, et d'un seul mode de flambement  $\underline{q}_B$ , de plus faible charge critique, issu d'une analyse de flambement linéaire :

$$\underline{\underline{C}}_{init} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{q}_0}{\|\underline{q}_0\|} & \underline{q}_B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Cette base réduite initiale est associée à une procédure d'adaptation décrite ci-après en sous-section 3.2.2, qui permet de prendre en compte les termes d'ordres supérieurs dans l'expression du développement asymptotique du champ de déplacement (1.39).

À ce stade, la base réduite initiale repose sur l'hypothèse qu'il n'existe pas d'instabilités secondaires de flambement dans la plage de chargement étudiée. Il s'agit, pour un flambement global de la structure, d'un changement de mode. Or le changement de mode (*mode switching* en anglais) peut se produire dans de nombreuses configurations [Falzon et Hitchings, 2003 ; Bertolini *et al.*, 2009], avec parfois des charges critiques de flambement très proches les unes des autres voire confondues. Pour un flambement localisé, le flambement secondaire peut se traduire par un flambement successif de différentes zones de la structure.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, le cas des premières charges critiques très proches est résolu par la perturbation selon le premier mode de flambement. Mais cela ne prévient pas des changements de branche d'équilibre ultérieurs. Bien que la procédure d'adaptation donne à la stratégie une certaine robustesse qui permettra de calculer la solution même en cas de changement de mode ou flambements locaux successifs, il est probable que le coût engendré soit élevé et rende la stratégie inefficiente.

Pour traiter ces cas de figure, il est envisagé plusieurs solutions :

- l'extension de la base réduite initiale aux modes de flambement dont la charge critique se trouve dans le domaine de chargement. Malgré l'erreur d'approximation des charges critiques obtenues par analyse linéaire, celles-ci sont en général sur-estimées ce qui confère à cette approche un certain conservatisme. Il est cependant important que le changement de mode ou les flambements successifs locaux soient prédits par l'analyse de flambement.
- la détection des points de bifurcation secondaires [Baguet, 2001], et la mise à jour de la base réduite au moment de les franchir.
- la définition d'un nombre maximal d'appels à la procédure d'adaptation par incrément, au delà duquel un incrément est résolu sans réduction de modèle. Une fois l'équilibre

déterminé, la base réduite est par exemple réinitialisée avec la solution fondamentale normée et la dernière solution calculée orthonormée. Cette approche rejoint les méthodes d'adaptation *a posteriori* déjà mises en œuvre en post-flambement.

Dans un premier temps il a été choisi de restreindre l'étude aux cas sans flambement secondaire. L'objectif est en effet de caractériser la pertinence de la base réduite initiale minimale.

### 3.2.2 Une procédure d'adaptation à la volée

La procédure d'adaptation à la volée, proposée par [Kerfriden *et al.*, 2011], est appliquée ici dans le cadre du post-flambement. L'avantage de cette méthode pour l'adaptation de base réduite en post-flambement, par rapport aux méthodes dites *a posteriori* (voir sous-section 2.2.1.2), réside d'une part dans sa plus grande flexibilité et d'autre part dans le caractère progressif de la non-linéarité géométrique et des redistributions de contraintes qui se produisent entre chaque état d'équilibre en post-flambement. En réalisant une seule itération de complétion de la base réduite à la fois, au cours de la résolution itérative d'un incrément par la méthode de Newton-Raphson, cette procédure est à même de compléter la base réduite incrément par incrément. De plus, la faible amplitude des termes d'ordres supérieurs de l'approximation du champ de déplacement en phase initiale de post-flambement (1.39) permet de faire l'hypothèse d'un faible nombre de complétions par incrément.

Dans le cas d'un opérateur symétrique, défini positif, le calcul d'un vecteur additionnel par complétion à la volée peut se réaliser sous la forme d'un problème découpé comme expliqué en sous-section 2.2.1.2. À la résolution du système tangent réduit, s'ajoute la résolution du système tangent projeté dans le sous-espace des vecteurs manquants à la solution pour satisfaire l'annulation du résidu. Cette dernière est réalisée de manière itérative par un algorithme de type gradient conjugué [Kerfriden *et al.*, 2011]. Or le cadre du post-flambement des structures présente quelques restrictions importantes à l'usage d'un algorithme de type gradient conjugué projeté.

Premièrement, en présence de non-linéarités géométriques, l'opérateur tangent en formulation Lagrangienne perd sa symétrie hors équilibre [Simo et Vu-Quoc, 1986]. Il faut alors recourir à une forme plus simple de la complétion à la volée, à savoir la résolution complète du système tangent (1.57), éventuellement initialisé par la résolution du système tangent réduit :

$$\underline{\underline{K}}_T \underline{\delta q}_K = -\underline{R} - \underline{\underline{K}}_T \underline{\delta q}_C \quad (3.2)$$

Étant donné la non-symétrie de  $\underline{\underline{K}}_T$ , il est alors nécessaire d'orthonormaliser  $\underline{\delta q}_K$  par rapport à  $Im(\underline{\underline{C}})$ . Il est aussi possible de symétriser l'opérateur tangent [Simo, 1992], sans perdre ni le sens mécanique, ni la convergence vers l'équilibre.

Deuxièmement, l'opérateur est également mal conditionné du fait des ordres de grandeur différents des raideurs selon les degrés de libertés (plans, hors-plan et rotations). Cela concerne principalement les modélisations de plaques et coques sur la base de cinématiques de type Reissner-Mindlin [Gee *et al.*, 2005]. Le mauvais conditionnement n'est pas favorable à une résolution du système linéaire par un algorithme itératif. Même si un projecteur constitue un pré-conditionnement du système, l'avantage du gradient conjugué projeté, même avec un critère de convergence élevé, pourrait ainsi être perdu.

Le choix d'une procédure d'adaptation *à la volée* basée sur la résolution du système tangent complet, éventuellement, initialisé est donc privilégié. Ce choix élimine la nécessité de déterminer un critère de convergence d'un algorithme itératif. La précision du vecteur additionnel ainsi calculé étant maximale, il permet d'obtenir en théorie un nombre minimal de complétions. Le critère de compléction proposé par [Kerfriden *et al.*, 2011] est conservé (voir sous-section 2.2.1.2). Il sert à déclencher la procédure de compléction et fait intervenir le paramètre de compléction  $k$ . La valeur optimale de ce paramètre reste à identifier pour les problèmes de post-flambement.

### 3.2.3 Algorithme général

Comme la plupart des méthodes de réduction de modèle par projection, l'algorithme de la stratégie PBAMR repose donc sur celui de Newton-Raphson ou une des variantes existantes (voir sous-section 1.5.2).

L'Algorithme 4 présente la version de la stratégie qui a été retenue et étudiée par la suite. Le choix d'une actualisation des opérateurs à chaque itération, ligne 5, assure une convergence plus rapide pour les applications à suivre, et permet surtout de s'affranchir de paramètres supplémentaires à ce stade du développement de la stratégie. Dans la suite, les performances de la stratégie sont donc comparées à celles d'un algorithme de Newton-Raphson complet. L'influence de la mise à jour des opérateurs sur la stratégie pourra faire l'objet d'une étude à part entière. Par ailleurs, le même critère de convergence est utilisé par la stratégie PBAMR ligne 4, cela de manière à comparer les méthodes pour un même niveau de précision. Selon le contexte et la précision attendue de la résolution par réduction de modèle adaptative, le paramètre de convergence  $\eta_{New}$  peut cependant être ajusté par l'utilisateur.

Dans cet algorithme, la résolution du système tangent est réalisée par projection sur la base réduite, ligne 10. Si le critère de compléction, ligne 6, est vérifié, la résolution du système réduit est remplacée par la résolution du système complet ligne 7. La procédure de compléction s'achève par l'orthonormalisation de la solution par rapport à la base réduite et l'ajout du vecteur additionnel. La nouvelle base réduite ainsi constituée peut faire l'objet d'un contrôle de sa taille ligne 9. Plusieurs possibilités pour maîtriser la taille d'une base réduite ont déjà été évoquées sous-section 2.2.1.2. Ici, nous nous attendons d'une part à un faible nombre de complétions et d'autre part à ce que toutes les composantes de la base réduite conservent leur rôle dans la représentation de la solution. Pour ces raisons, toutes les composantes de la base réduite sont maintenues au cours des itérations et incrément. Dans le cas d'un changement de mode, il peut cependant être pertinent de mettre en place ce genre de méthode.

La constitution de la base réduite initiale est réalisée en deux étapes. ligne 1, la composante de la branche fondamentale est calculée. Un calcul linéaire est possible de même qu'un incrément non-linéaire qui permet de prendre en compte d'éventuelles non-linéarités de la branche fondamentale. À partir de l'état d'équilibre obtenu,  $(\underline{q}_0, \underline{F}_{ext0})$ , une analyse de flambement est réalisée ligne 2. Seuls le premier mode de flambement  $\underline{U}_B$  et son facteur de charge critique associé  $\lambda_{cr}$  sont calculés.

Une fois la base réduite initiale constituée, le prochain incrément de déplacement est initialisé  $\underline{q}_1^0$  ligne 3. Plutôt que de repartir d'un champ de déplacement nul, la solution

---

**Algorithme 4 :** Algorithme de la stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement (PBAMR)

---

```

initialisation :  $\underline{q}_0^0 = \underline{0}$ 

calcul de la base réduite initiale :
1   Calcul de l'équilibre fondamental :  $(\underline{q}_0, \underline{F}_{ext_0})$ ;
2   Calcul du premier mode de flambement :  $(\lambda_{cr}, \underline{q}_B)$ ;
    $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{q}_0}{\|\underline{q}_0\|} & \underline{q}_B \end{bmatrix};$ 

3 initialisation :  $\underline{q}_1^0 = 0$  ou  $\underline{q}_1^0 = \underline{q}_0$  ou  $\underline{q}_1^0 = \lambda_{cr}\underline{q}_0$ 

pour  $n = 1$  à  $max$  faire
    initialisation :  $i = 0$ 
    tant que  $\frac{\|\underline{R}\|}{\|\underline{F}_{ext}\|} < \eta_{New}$  faire
        mise à jour des opérateurs :
        
$$\underline{\underline{K}}_T = \frac{\partial F_{int}(\underline{q}_n^i)}{\partial \underline{q}};$$

        
$$\underline{R} = \underline{F}_{ext_n} + \underline{F}_{int}(\underline{q}_n^i);$$

        si  $\frac{\|\underline{\underline{C}}^T \underline{R}\|}{\|\underline{\underline{C}}^T \underline{F}_{ext}\|} < k \frac{\|\underline{R}\|}{\|\underline{F}_{ext}\|}$  alors (Résolution du système tangent complet)
        
$$\underline{\underline{K}}_T \underline{\delta q} = -\underline{R};$$

        complétion de la base réduite :
        
$$\text{orthonormalisation de } \underline{\delta q} \text{ par rapport à } \underline{\underline{C}} : \underline{\delta q}_C^\perp;$$

        
$$\underline{\underline{C}} \leftarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\delta q}_C^\perp \end{bmatrix};$$

        contrôle de la taille de la base réduite;
        sinon (Résolution du système tangent réduit)
        
$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{C}} \underline{\delta \alpha} = -\underline{\underline{C}}^T \underline{R};$$

        
$$\underline{\delta q} = \underline{\underline{C}} \underline{\delta \alpha};$$

        
$$\underline{q}_n^{i+1} = \underline{q}_n^i + \underline{\delta q};$$

        
$$i \leftarrow i + 1;$$

    
$$\underline{q}_{n+1}^0 = \underline{q}_n^i;$$


```

---

du premier incrément (linéaire ou non-linéaire) peut être utilisée. Il est également possible de tirer profit du facteur de charge critique pour initialiser l'équilibre proche de la charge de flambement (e.g. à 95%) et de la franchir au cours de l'incrément de chargement. Cet incrément et les suivants sont résolus par réduction de modèle adaptative.

### 3.3 Implémentation et validation du code de recherche

Un code de recherche a été développé dans le cadre de ces travaux de thèse. Son implémentation est brièvement décrite pour permettre au lecteur d'en comprendre les limites. Le langage de programmation choisi est Python [Van Rossum et Drake, 2001], disposant d'un grand nombre de bibliothèques scientifiques, notamment pour le calcul numérique (Algèbre linéaire - *linalg*). Il permet en outre la programmation orientée objet.

Ce code repose sur un élément fini de plaque quadratique à huit noeuds. La cinématique retenue est celle des plaques épaisses de Reissner-Mindlin. La formulation lagrangienne totale est utilisée. Les calculs des matrices de raideur tangente et des efforts intérieurs sont décrits en Section 1.5. Une intégration réduite est choisie de manière à prévenir le verrouillage en cisaillement transverse. Chaque noeud possède 3 degrés de liberté en déplacement et 2 degrés de liberté en rotation. Le troisième degré de liberté de rotation autour de la normale au plan de la plaque, dit *spin*, n'est pas pris en compte puisque le code a été initialement conçu pour des structures planes.

La structure du code s'articule autour de quelques classes représentées en Figure 3.1. Au plus bas niveau se trouve la classe **Node**. Au dessus de la classe **Element** se trouvent la classe **Substructure** et la classe **Structure**. Cette construction proche des entités éléments-finis permet notamment d'implémenter des approches de sous-structuration ou de décomposition de domaine. En ce qui concerne la réduction de modèle, la classe **Substructure** possède un attribut **subspace** qui contient les vecteurs constituant la base réduite. Ces classes sont instanciées dans un programme principal à partir d'un fichier d'entrée définissant la géométrie, le maillage et les conditions limites, puis transmises à une fonction solveur du module **Solver**. La stratégie PBAMR est implémentée dans ce dernier, avec également la procédure de Newton-Raphson. À ce stade, les méthodes étudiées ne requièrent aucune partition de la structure. Le problème est donc défini par une seule instance **Substructure**.

La mesure de performance est réalisée par décompte des différentes opérations (incréments, itérations, assemblages, complétions de base réduite, ...) et mesure des temps de calcul respectifs.

Outre les cas tests réalisés sur l'élément de plaque et son assemblage, le code de recherche est validé en flambement et post-flambement par comparaison avec le logiciel commercial [Abaqus, 2007]. Cette validation est présentée dans la suite de cette section.

Le cas d'étude choisi est celui d'une plaque en cisaillement pur (voir Figure 3.2), qui correspond à une sollicitation rencontrée par les mailles structurales des structures raidies aéronautiques. Les conditions limites nominales en déplacement sur tout le contour sont les suivantes :

- $u(x, y) = 0.001 \times y$
- $v(x, y) = 0.001 \times x$

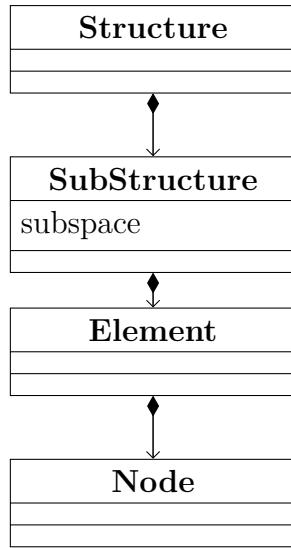


FIGURE 3.1 – Diagramme de classe minimal du code de recherche.

$$- w(x, y) = \theta_x = \theta_y = 0$$

Leur amplitude est fixée empiriquement de manière à atteindre un certain niveau de post-flambement en terme de facteur de charge critique de flambement. Dans le cadre du dimensionnement des structures raidies aéronautiques, rappelons que l'objectif actuel est d'autoriser le flambement de la structure à partir de la charge limite et jusqu'à la charge ultime (1.5 fois la charge limite, voir Figure 3). Le chargement nominal est défini ici de manière à dépasser 2.5 fois la charge critique de flambement. Les propriétés du matériau sont choisies homogènes et isotropes et l'épaisseur de la plaque est constante (voir Tableau 3.1).

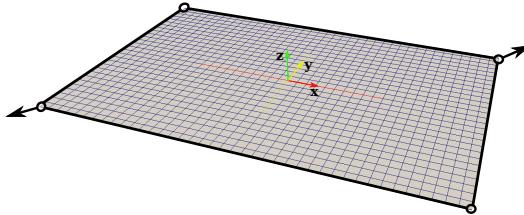


FIGURE 3.2 – Définition du cas d'étude : plaque en cisaillement pur, bords rigides articulés aux coins (carré déformable).

Géométrie	Propriétés matériau		
longueur	1000 mm	E	70000 MPa
largeur	700 mm	$\nu$	0.33
épaisseur	7 mm		

TABLEAU 3.1 – Géométrie et propriétés matériau de la plaque en cisaillement

Une analyse de flambement linéaire est d'abord réalisée. L'état pré-contraint est obtenu par application de 10% des déplacements nominaux imposés sur le contour. Le Tableau 3.2 récapitule les trois premiers facteurs de charge critique de flambement obtenus. Les modes de flambement associés sont quant à eux comparés Figure 3.3. La faible erreur relative sur les

Facteurs de charge critique	Abaqus	Code de recherche	Erreur relative
$\lambda_1$	4.55	4.75	4.4%
$\lambda_2$	4.78	4.99	4.4%
$\lambda_3$	7.95	8.29	4.3%

TABLEAU 3.2 – Facteurs de charge critique de flambement calculés sur une configuration pré-chargée à 10% des déplacements imposés nominaux.

charges critiques et les fortes similitudes de forme des modes de flambement correspondants valident l’analyse de flambement réalisée par le code de recherche.

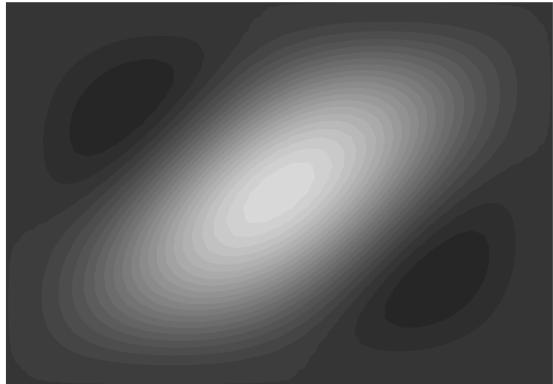
Le post-flambement est ensuite analysé. Le chargement est appliqué en 10 incrément fixés. La charge critique de flambement est dépassée à l’incrément 5 (le déplacement imposé atteint 50% du déplacement nominal alors que la première charge critique vaut  $\lambda_1 \times 10\% = 47.5\%$ ). Dans le but de déclencher le flambement de la plaque sans défaut, une perturbation est introduite au début de l’incrément 5. La perturbation se fait selon le premier mode de flambement d’une amplitude égale à la moitié de l’épaisseur de la plaque.

Dans le code de recherche, la stratégie PBAMR est utilisée pour la résolution avec le même critère de convergence que la procédure de Newton-Raphson,  $\eta_{New} = 10^{-3}$ . Les distributions des flux de cisaillements en post-flambement à l’équilibre des incrément 6 et 10 montrent une bonne corrélation Figure 3.4, de même que les valeurs maximales au cours des incrément Figure 3.6a avec une erreur relative inférieure à 2.3% (1.6% à l’incrément 10) entre les valeurs de la stratégie PBAMR du code de recherche et celles d’Abaqus.

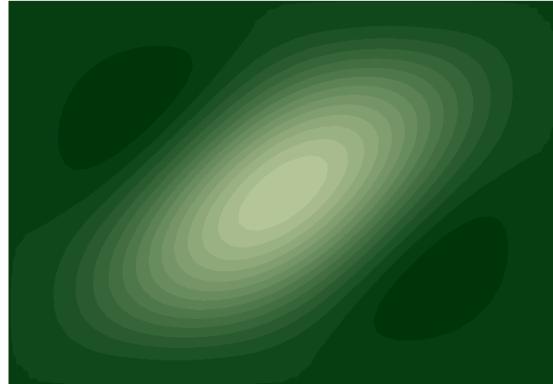
En ce qui concerne la déflexion, les distributions correspondent également de manière satisfaisante aux incrément 6 et 10 Figure 3.5. L’erreur relative sur la déflexion maximale au cours des incrément ne dépasse pas 5.6% (3.1% à l’incrément 10) Figure 3.6b.

Le niveau des erreurs relatives en effort et déplacement peut s’expliquer par une différence dans la formulation de l’élément de plaque en non-linéaire géométrique et/ou dans la définition du critère de convergence qu’il serait intéressant d’examiner plus en détail [Abaqus, 2007]. Toutefois, l’erreur reste faible et permet de valider le calcul en post-flambement par le code de recherche pour la suite des travaux. Par ailleurs, en raison du critère de convergence commun à la stratégie PBAMR et à la procédure de Newton-Raphson implémentés dans le code de recherche, les erreurs relatives entre ces deux méthodes sont négligeables, comme attendu en Section 3.2.

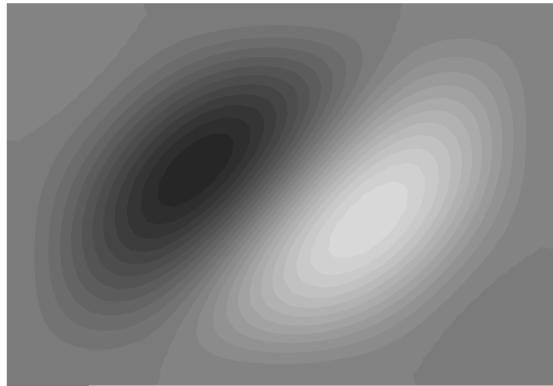
Maintenant que la qualité des solutions obtenues par le code de recherche, aussi bien par la méthode de Newton-Raphson que par la stratégie PBAMR, a été démontrée en comparaison avec Abaqus, notre étude se concentre sur le comportement et les performances de la stratégie PBAMR.



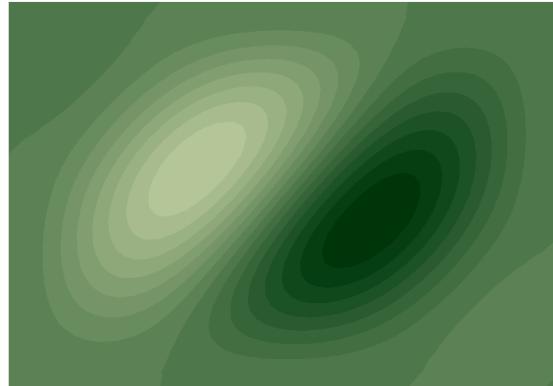
(a)



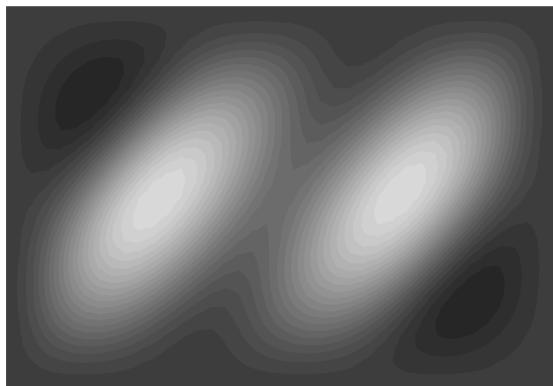
(b)



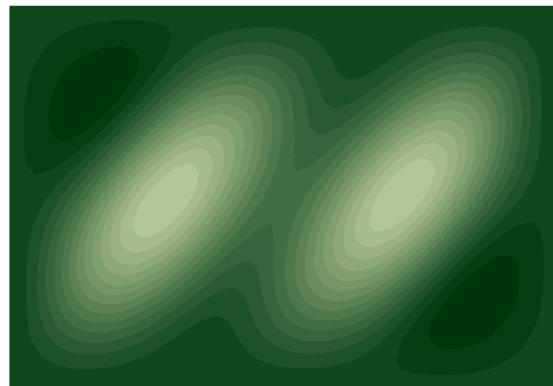
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.3 – Comparaison des premiers modes de flambement normalisés avec un code commercial (Abaqus). Champs de déplacement normalisé du premier, second et troisième mode de flambement calculé par (a, c et e) Abaqus et par (b, d et f) le code de recherche.

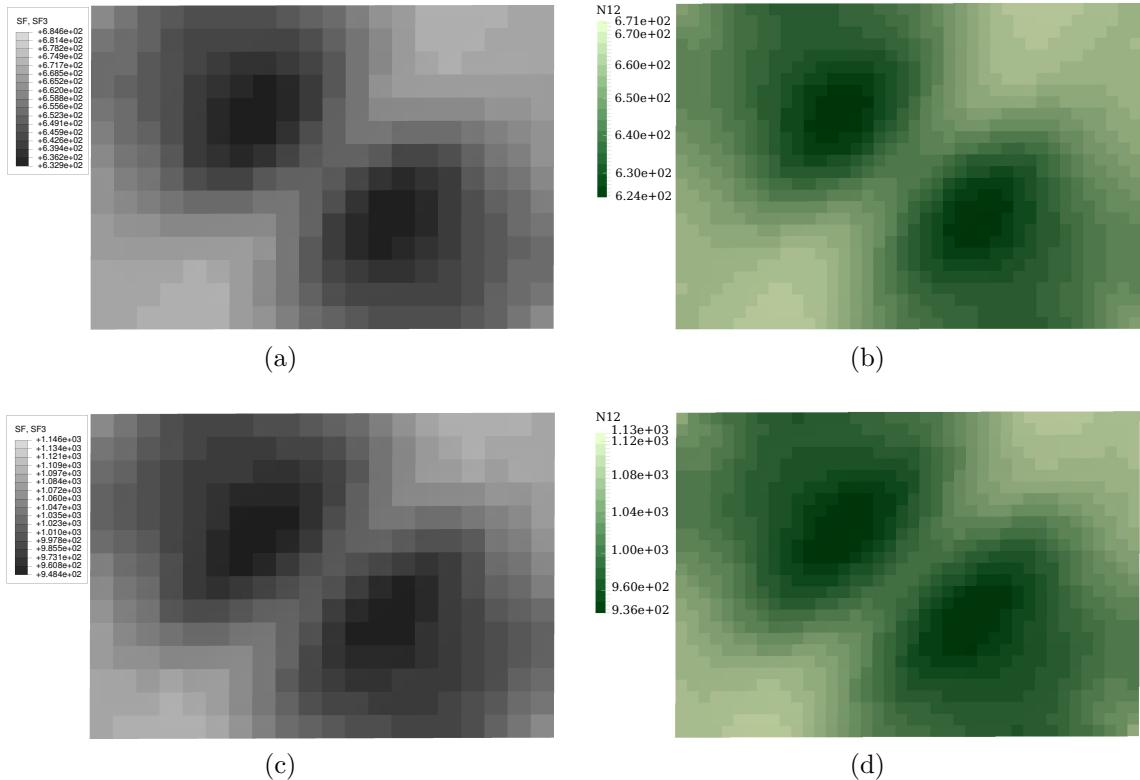


FIGURE 3.4 – Comparaison des distributions des flux de cisaillement obtenus aux incrément 6 et 10 par (a et c) Abaqus et par (b et d) le code de recherche. Les résultats du code de recherche sont obtenus par la stratégie PBAMR. Le rendu par Abaqus est réalisé tel qu'une cellule correspond à un élément fini, alors que le rendu du code de recherche attribut une cellule par point d'intégration, ce qui explique la différence de résolution.

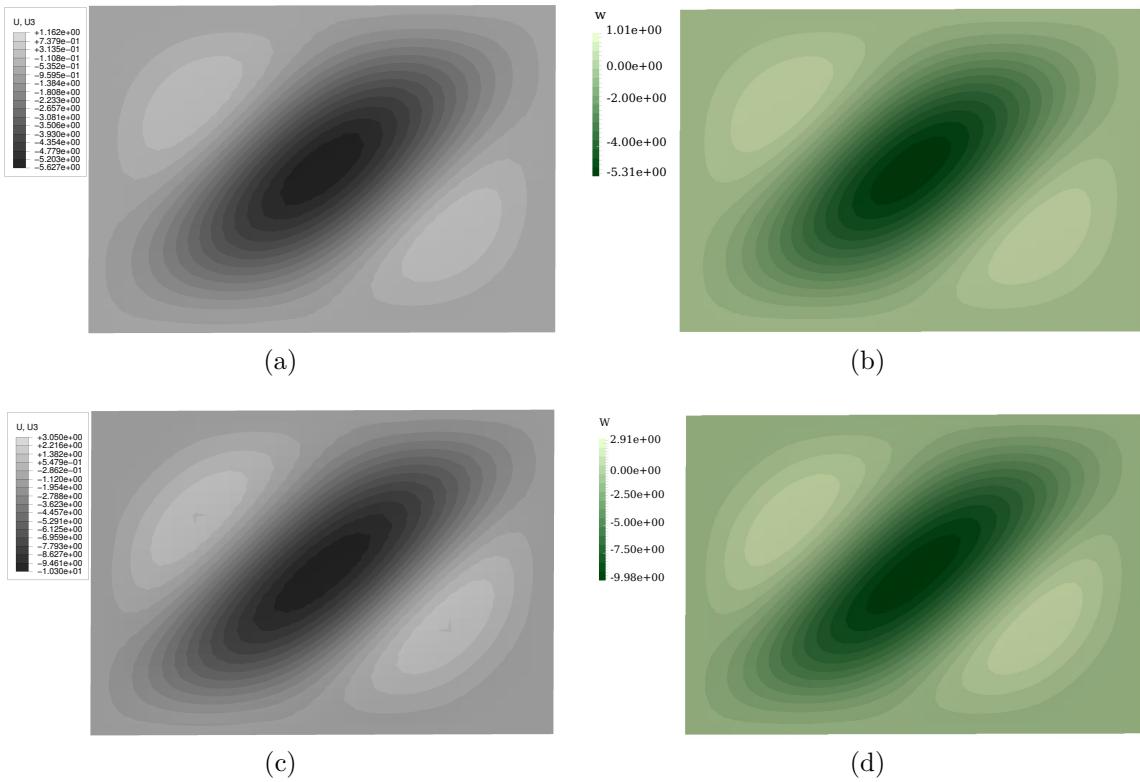


FIGURE 3.5 – Comparaison des champs de déflexion obtenus aux incrément 6 et 10 par (a et c) Abaqus et par (b et d) le code de recherche. Les résultats du code de recherche sont obtenus par la stratégie PBAMR.

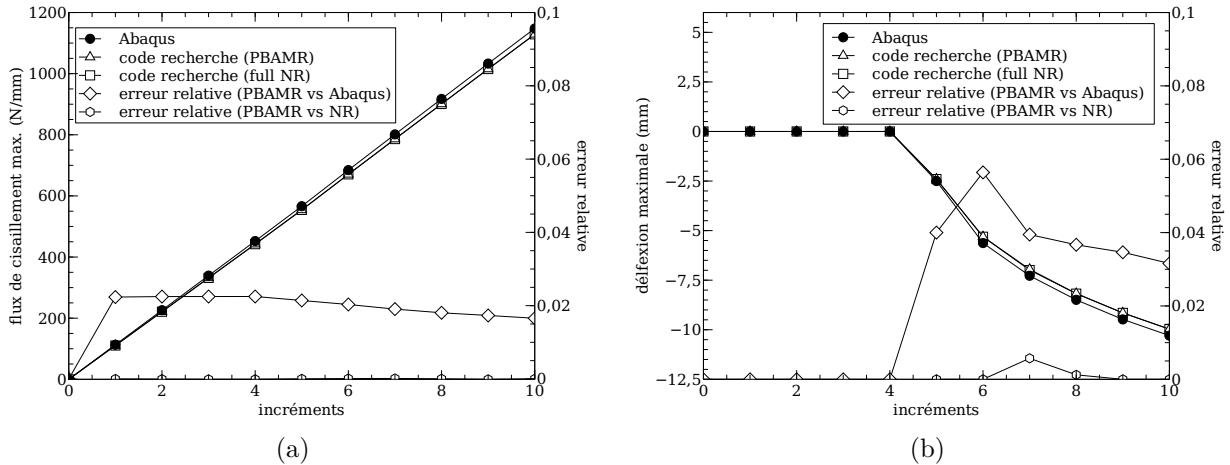


FIGURE 3.6 – Comparaison de l'évolution du flux de cisaillement maximum (a) et de la déflexion maximale (b). L'erreur relative est calculée entre d'une part les résultats de la stratégie PBAMR et d'Abaqus, et d'autre part entre les résultats de la stratégie PBAMR et de la méthode de Newton-Raphson.

### 3.4 Comportement de la stratégie et étude paramétrique sur un cas simple

Cette première partie de l'étude de la stratégie s'attache à mettre en évidence la pertinence du choix du sous-espace initial et de la procédure adaptative. L'influence des paramètres de la stratégie ( $\eta_{New}$  et  $k$ ) est également vérifiée. Le cas d'étude reste celui présenté dans la section précédente Figure 3.2.

Tout d'abord, avec  $\eta_{New} = 1 \times 10^{-3}$  et  $k = 10^{-3}$ , un suivi des coordonnées généralisées des composantes du champ de déplacement permet de mesurer l'importance de chaque vecteur de la base réduite dans la représentation de la solution. Dans la Figure 3.7 nous étudions séparément la partie plane et la partie hors-plan du champ de déplacement, au cours des itérations. Elles sont projetées respectivement dans les parties plane et hors-plan de la base réduite (orthonormalisées).

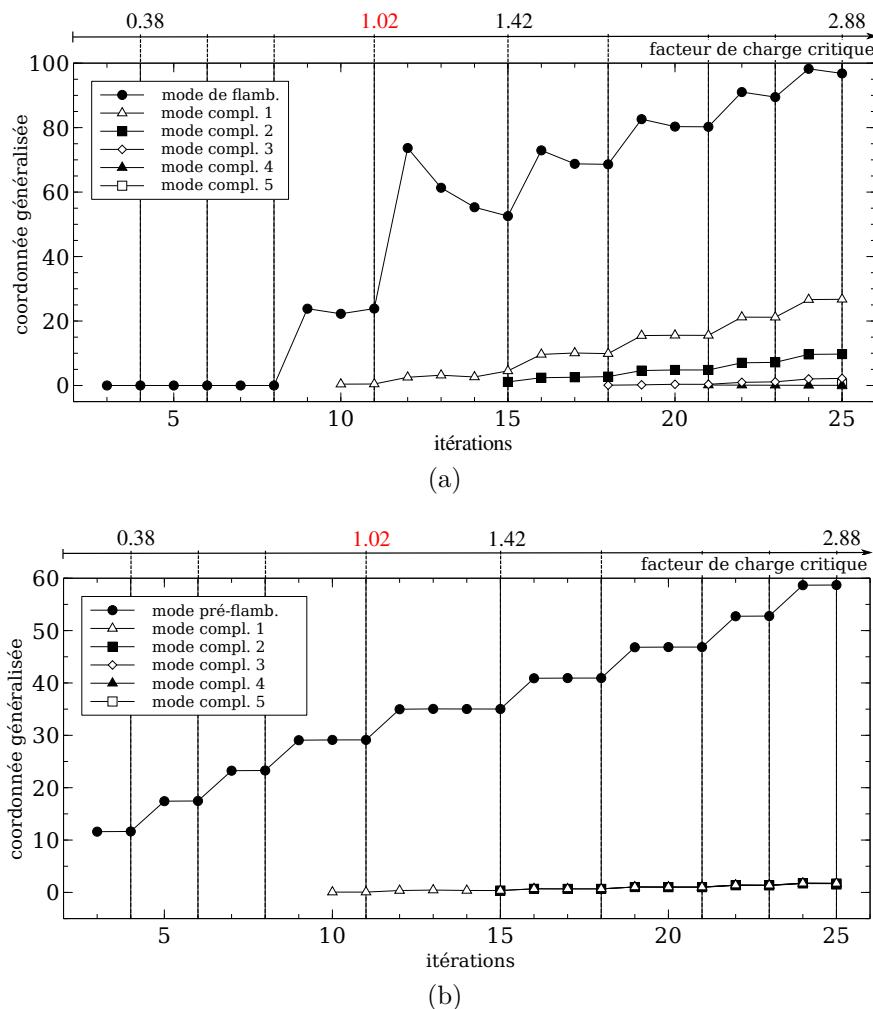


FIGURE 3.7 – Suivi des coordonnées généralisées de la partie hors-plan (a) et plane (b) du champ de déplacement au cours des itérations. Les lignes pointillées verticales représentent les incrémentés, exprimés en facteur de charge critique de flambement.

Ainsi, dans la phase de post-flambement, le mode de flambement semble rester prépondérant dans le domaine de chargement étudié (jusqu'à 2.88 fois la charge critique de flambement). Il est donc tout à fait pertinent de l'inclure dans la base réduite initiale. Il en

est de même pour les composantes planes du champ de déplacement, dont la représentation repose en grande partie sur le mode fondamental avant flambement. Par ailleurs, les modes additionnels, issus des cinq complétions *à la volée*, apparaissent au fur et à mesure des incrémentations mais semblent contribuer à la représentation des états d'équilibre postérieurs. Cela justifie leur conservation dans la base réduite. Il est néanmoins intéressant de constater que les derniers modes additionnels ont une contribution très faible qui augmente peu. Cela peut indiquer que la procédure de compléction n'est pas déclenchée de façon optimale. Malgré cela, le nombre de complétions *à la volée* est petit, soit seulement cinq itérations de compléction sur l'ensemble de la résolution, ce qui confirme l'hypothèse d'un faible nombre de complétions en phase de post-flambement initial.

De manière qualitative, l'étude de la déformée permet de comprendre le rôle mécanique des vecteurs additionnels. Le suivi d'un ratio de forme de la déformée est réalisé. Ce ratio est défini à partir du petit axe  $a$  et du grand axe  $b$  de l'ellipse formée par les iso-valeurs, en terme de déplacement hors-plan, de la cloque principale de flambement (voir Figure 3.8). L'iso-valeur à 75% du déplacement du sommet de la cloque est considérée.

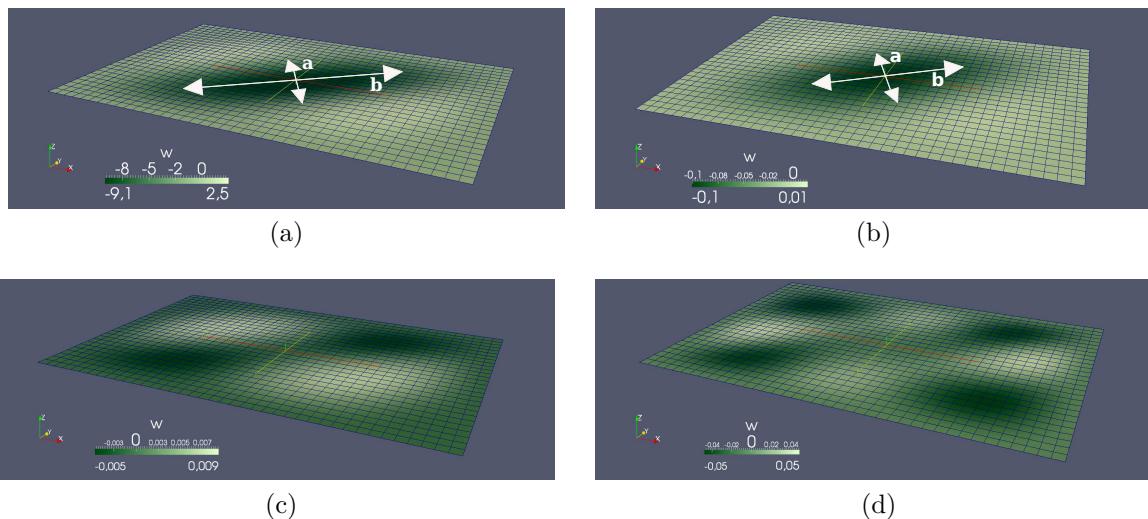


FIGURE 3.8 – Solution du calcul en post-flambement du panneau en cisaillement (a), le premier mode de flambement (b), et les deux premiers vecteurs additionnels de la base réduite (c, d) calculés par la procédure adaptative *à la volée*. Le champ de déflexion est identifié par la coloration.

L'évolution du ratio  $a/b$  au cours des incrémentations est présentée Figure 3.9. Le ratio de la déformée du mode de flambement est de 0.48 tandis que celui de la solution en post-flambement passe de 0.43 à 0.33 entre le premier et le dernier incrément de chargement. Cette évolution traduit un allongement et un resserrement de la cloque qui sont bien représentés par les vecteurs additionnels en Figure 3.8c et Figure 3.8d. Ce changement de forme est le résultat de la redistribution des contraintes, sous la forme ici d'une tension diagonale à 45°, qui n'est pas prise en compte par la base réduite initiale.

D'une manière plus quantitative, l'influence des vecteurs additionnels sur l'approximation est évaluée en comparant la résolution par la stratégie PBAMR à celle d'une réduction de modèle non adaptative avec la même base réduite initiale. La Figure 3.10 reporte, pour chacune des résolutions, l'évolution de la déflexion maximale d'une part et celle du cisaillement maximal d'autre part. Avant le flambement qui se produit à l'incrément 5, aucun écart

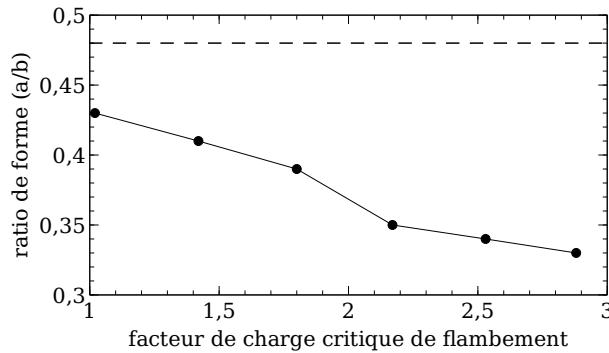


FIGURE 3.9 – Évolution du ratio de forme du champ de déplacement au cours du chargement, exprimé en terme de facteur de charge critique de flambement.

n'est observable entre les courbes. L'effet de l'adaptivité est visible par la suite principalement sur le déplacement maximal. Bien que le flux de cisaillement maximal soit relativement bien approché sans l'adaptivité de la base réduite, sa distribution, présentée Figure 3.12, est sensiblement affectée par la non prise en compte des effets non-linéaires. Ces résultats sont en accord avec ceux des méthodes semi-analytiques obtenus par [Bisagni et Vescovini, 2009] (voir sous-section 1.4.2).

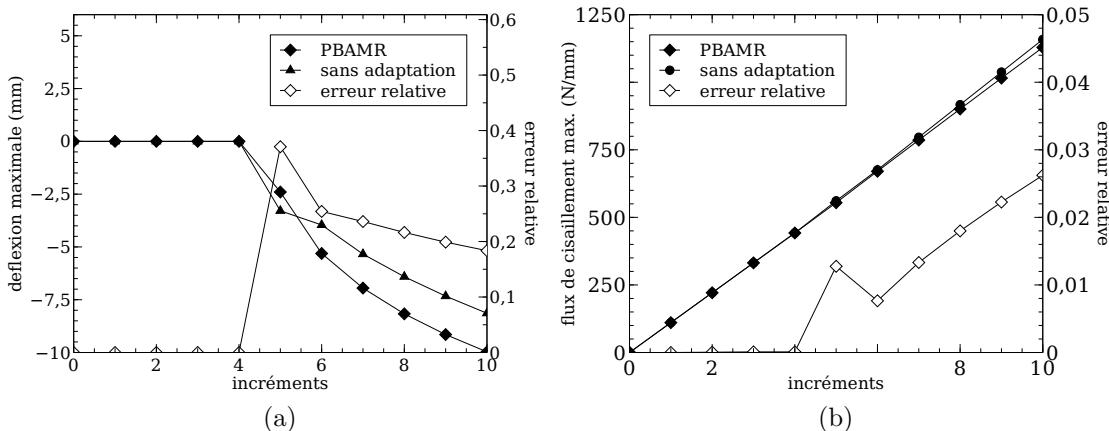


FIGURE 3.10 – Comparaison de la déflexion maximale (a) et du flux de cisaillement maximal (b) obtenus par la stratégie PBAMR et la réduction de modèle non-adaptative.

Enfin, l'erreur d'approximation des états d'équilibre successifs n'est pas maîtrisée sans procédure adaptative et dépasse rapidement les 10% (voir Figure 3.11). À l'inverse, la stratégie PBAMR, comme la procédure de Newton-Raphson, respecte le critère de convergence  $\eta_{New}$  fixé auparavant.

Les vecteurs additionnels calculés par la procédure adaptative permettent donc de prendre en compte l'effet de la redistribution des contraintes sur le champ de déplacement. Ils pilotent ainsi la précision de la résolution des états d'équilibre en post-flambement. Les paramètres de la stratégie PBAMR pilotent quand à eux l'efficacité de la méthode. L'objectif étant de minimiser le nombre de complétions de la base réduite tout en satisfaisant un certain niveau de précision et en maîtrisant le nombre d'itérations. Les influences du paramètre de compléTION  $k$  et du paramètre de convergence  $\eta_{New}$  sont donc évaluées. Rappelons que ce

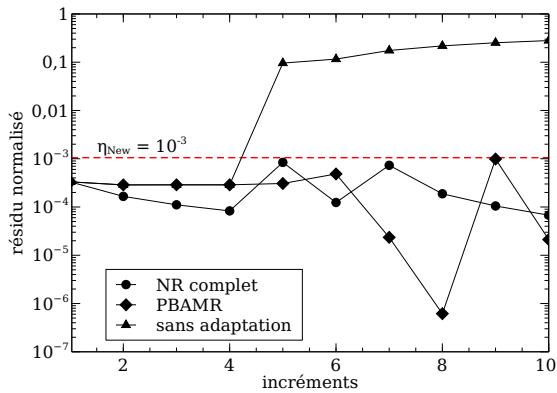


FIGURE 3.11 – Comparaison de l’erreur d’approximation obtenue par Newton-Raphson complet, la stratégie PBAMR et la réduction de modèle non-adaptative. Le paramètre de convergence  $\eta_{New}$  est identifié par la ligne rouge en pointillés, et détermine la précision des deux premières méthodes seulement.

sont les seuls paramètres de la méthode.

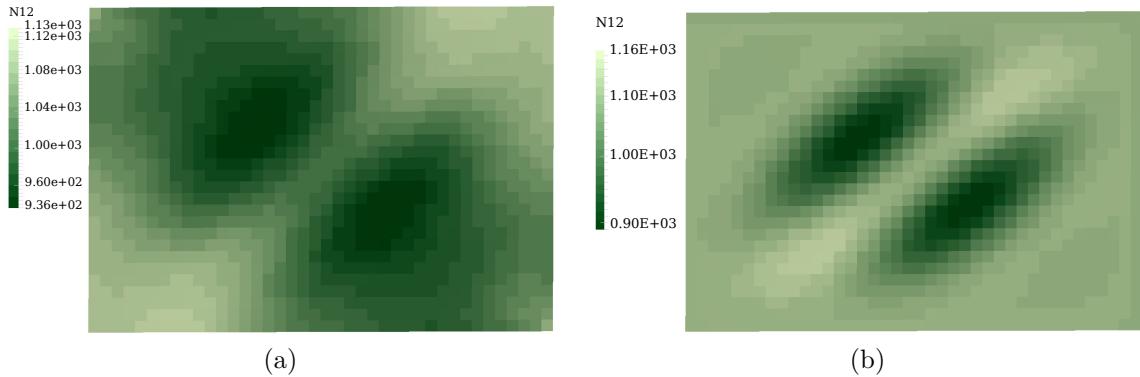


FIGURE 3.12 – Comparaison de la distribution du flux de cisaillement obtenu par la stratégie PBAMR (a) et la réduction de modèle non adaptative (b).

L’influence du paramètre de complémentation  $k$  est évaluée dans l’intervalle  $1.10^{-4} - 5.10^{-1}$  (5 points). Celle du paramètre de convergence  $\eta_{New}$  est évaluée autour de la valeur  $1.10^{-3}$  (3 points). Cette valeur est considérée comme une référence de précision qu’il est possible d’ajuster dans le respect d’un ordre de grandeur et ce pour les besoins des performances de la méthode de résolution.

Quinze tests numériques sur le même problème sont ainsi réalisés dont les résultats en terme de nombre de complétements et de nombre d’itérations sont reportés Figure 3.13 et Figure 3.14. D’après ces graphes, un nombre minimal de complétements est atteint pour une valeur de  $k$  en dessous de  $10^{-2}$ . Cela signifie qu’il est nécessaire de réaliser un nombre minimal de complétements pour satisfaire à la précision de l’approximation. En deçà, le nombre d’itérations augmente sensiblement avec la diminution de la valeur de  $k$  en raison du retardement du déclenchement des complétements nécessaires. C’est effectivement le comportement observé par [Kerfriden *et al.*, 2011] dans le cas de la réduction de modèle adaptative par POD.

L’influence du paramètre de convergence  $\eta_{New}$  est quant à elle moins marquée. Il est cependant intéressant de noter qu’un relâchement assez faible sur la précision demandée peut réduire de quelques unités le nombre de complétements et le nombre d’itérations.

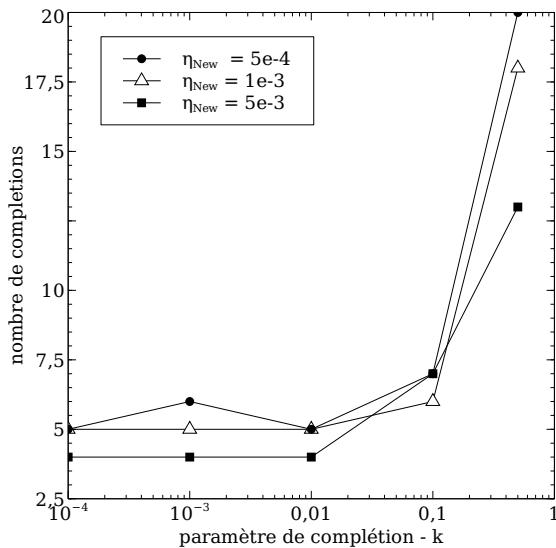


FIGURE 3.13 – Influence du paramètre de complétement  $k$  et du paramètre de convergence  $\eta_{New}$  sur le nombre de complétings.

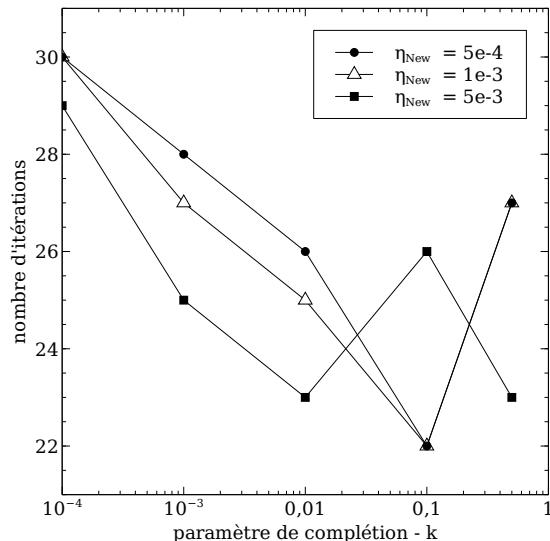


FIGURE 3.14 – Influence du paramètre de complétement  $k$  et du paramètre de convergence  $\eta_{New}$  sur le nombre d'itérations de la stratégie PBAMR.

Enfin, une dépendance au problème des paramètres, notamment  $k$ , est à envisager. La valeur optimale de  $k$  identifiée ici est déjà différente de celle obtenue par [Kerfriden *et al.*, 2011] sur un problème de treillis de barres endommageables. Néanmoins, le post-flambement initial qui nous intéresse est caractérisé par une non-linéarité géométrique, relativement modérée, répartie sur l'ensemble des incrément. Dans la suite nous choisissons donc de retenir la valeur de  $k = 10^{-2}$ .

### 3.5 Étude des performances numériques : application à un panneau raidi

L'étude des performances de la stratégie PBAMR est réalisée sur un modèle plus représentatif d'une structure raidie, à la fois par la taille, et par le comportement en post-flambement. Le modèle, représenté Figure 3.15, est composé d'une plaque raidie au moyen de conditions limites sur les déplacements hors-plan et rotations. Une sollicitation en cisaillement est appliquée de la même manière que sur le cas simple précédemment utilisé, c'est à dire par conditions limites en déplacement qui reproduisent l'essai typique du carré déformable [Bertolini, 2008]. L'écart entre les raidisseurs n'est pas uniforme ce qui implique un flambement privilégié dans la zone la plus large du panneau raidi. Les déplacements nominaux imposés sont les suivants :

- $u(x, y) = 0.018 \times y$
- $v(x, y) = 0.018 \times x$
- $w(x, y) = \theta_x = \theta_y = 0$

L'effort  $F$ , représenté sur la Figure 3.15, est la réaction équivalente sur les coins opposés du dispositif. Lorsque les déplacements nominaux imposés sont atteints, l'effort  $F$  vaut 9130kN, soit 2.75 fois l'effort critique  $F_{cr} = 3320$ kN.

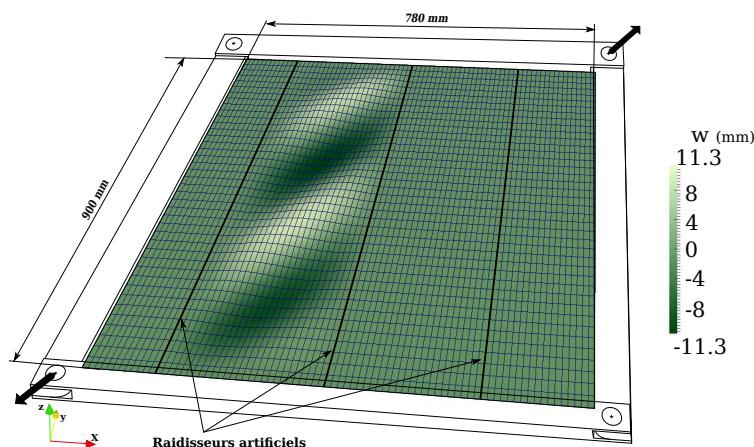


FIGURE 3.15 – Flambement local d'un panneau raidi artificiellement.

La résolution du problème est réalisée en 10 incrément, par déplacements imposés. Le premier incrément est résolu sans réduction de modèle et sert, avec une analyse de flambement linéaire, à la constitution de la base réduite initiale. Les incréments suivants sont résolus par réduction de modèle adaptative conformément à la stratégie PBAMR. Le paramètre de complétion  $k$  est choisi à partir de la précédente étude paramétrique à  $10^{-2}$ . Le paramètre de convergence est fixé à  $5 \times 10^{-3}$  à la fois pour la stratégie PBAMR mais aussi pour la procédure de Newton-Raphson de référence.

La charge critique de flambement est atteinte entre le second et le troisième incrément, ce qui permet de considérer 8 incréments dans le domaine de post-flambement. Une perturbation selon le premier mode de flambement est réalisée afin de déclencher le changement de branche d'équilibre, d'une amplitude d'une demi-épaisseur de la peau du panneau raidi.

Afin d'évaluer l'extensibilité de la stratégie PBAMR, trois niveaux de raffinement de maillage sont considérés. La convergence du maillage est déjà atteinte pour le premier niveau à 5254 degrés de liberté (d.d.l.). Les niveaux supplémentaires à 11066 d.d.l. et 16774 d.d.l. permettent de résoudre des problèmes de taille conséquente qui ne sont toutefois pas représentatifs des problèmes industriels (e.g. 7 millions de d.d.l. [Bertolini, 2008]).

Le comportement de la stratégie PBAMR pour la résolution de ce problème est présenté Figure 3.16. La taille de la base réduite y est observée au cours des incrémentations. Initialement composé de deux vecteurs, la base réduite est complétée de manière assez régulière dans le domaine de post-flambement. Le nombre de complétions semble diminuer avec le raffinement du maillage. Un total de 8 complétions est réalisé pour le maillage le plus grossier et seulement 6 pour le maillage le plus fin. À l'inverse, le nombre d'itérations augmente légèrement avec le raffinement en Figure 3.17, quelle que soit d'ailleurs la méthode de résolution (PBAMR ou Newton-Raphson complet). Ce comportement est exhibé ici parce que l'étude de l'extensibilité est basée sur le raffinement d'un même modèle. Sans modifier la solution obtenue, l'évolution du maillage entraîne une modification de la mesure de l'erreur utilisée pour les critères de convergence et de compléction. Malgré cela, avec moins d'une compléction par incrément en phase de post-flambement et moins d'itérations par la stratégie PBAMR, le critère de compléction et son paramètre  $k$  identifié précédemment, semblent avoir une robustesse suffisante.

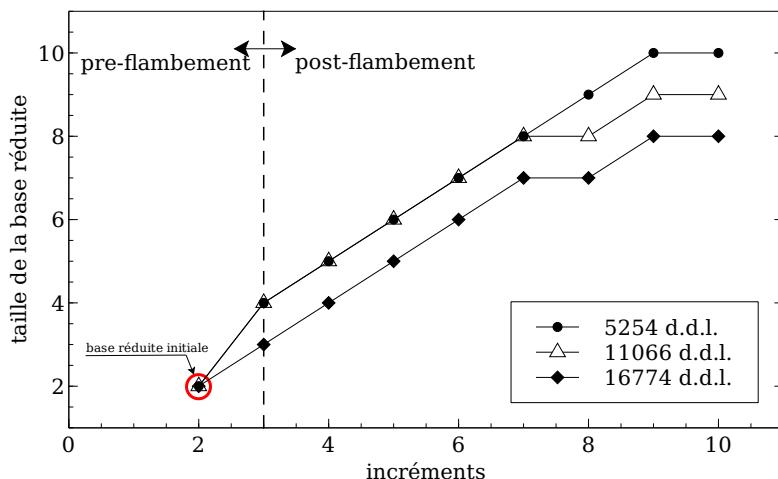


FIGURE 3.16 – Évolution de la taille de la base réduite au cours des incrémentations pour différents raffinements de maillage.

Les résultats obtenus en terme de nombre de complétions et d'itérations laissent présager d'une bonne performance sur la réduction du temps de calcul. La Figure 3.18 présente les temps de calcul cumulés au cours des itérations de la résolution du problème tangent. Les temps d'assemblage des opérateurs ne sont pas pris en compte. Étant donné le nombre d'itérations relativement proche entre la stratégie PBAMR et la procédure de Newton-Raphson, la comparaison des temps de résolution seuls, reste pertinente et permet de s'affranchir des aspects liés à la programmation.

De plus l'opération d'assemblage est la même pour les deux méthodes et est plus dépendante de l'implémentation du code de calcul que l'opération de résolution qui repose en partie sur des bibliothèques standard de calcul numérique ou des algorithmes éprouvés.

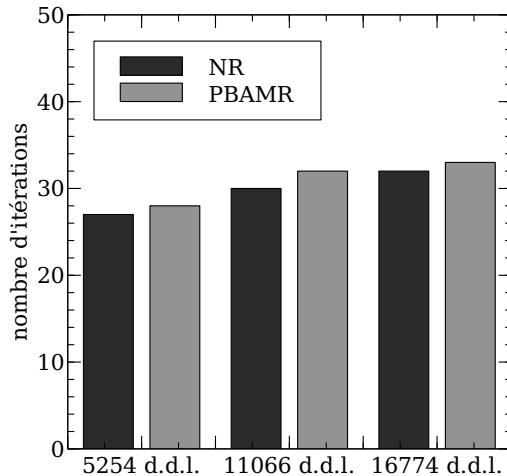


FIGURE 3.17 – Nombre d’itérations obtenues par la stratégie PBAMR et par Newton-Raphson complet (NR).

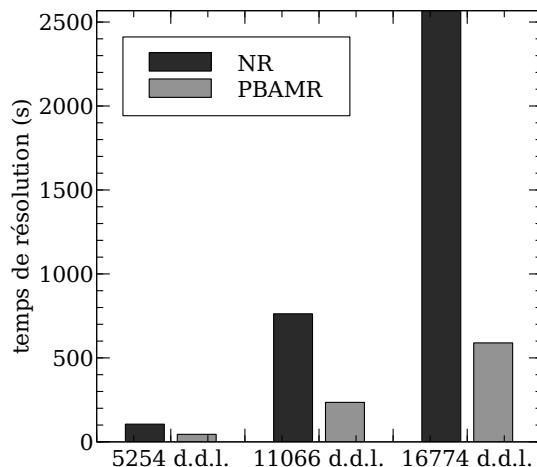


FIGURE 3.18 – Temps de résolution de la stratégie PBAMR en comparaison avec la méthode de Newton-Raphson. Trois raffinements de maillage sont testés.

Les temps de résolution cumulés illustrent bien la problématique de l’extensibilité de la méthode de résolution. Une analyse plus approfondie est donnée par la Figure 3.19. Le ratio entre une itération sur le problème réduit (projection puis résolution du système réduit) montre tout l’intérêt de la réduction de modèle. En revanche l’adaptivité est payée au prix d’une itération de complétion (résolution puis complétion de la base réduite) légèrement plus coûteuse que l’itération de Newton complète.

Finalement, la réduction du temps de résolution des itérations atteint 77% pour le problème le plus finement maillé. L’évolution de ce gain en fonction du raffinement est croissante. Il faut cependant nuancer cette extensibilité favorable au regard de la différence du nombre de complétions. En revanche, le coût d’une itération sur le problème réduit tire bien profit de l’augmentation de la dimension du problème. Cela concerne aussi les itérations augmentées qui s’améliorent du fait de la complexité de l’opération de complétion de la base réduite (orthonormalisation en  $O(N^2)$ ) inférieure à la complexité de la résolution du système complet ( $O(N^3)$ ).

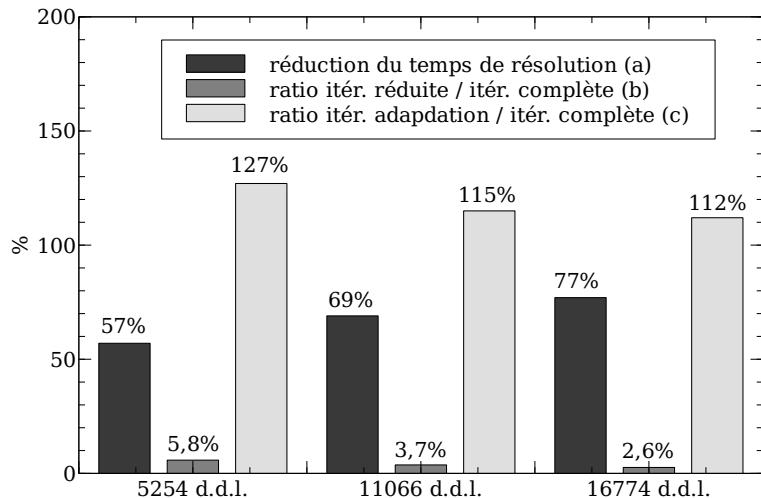


FIGURE 3.19 – (a) Réduction du temps de calcul par la stratégie PBAMR par rapport à la méthode de Newton-Raphson. (b) Rapport entre une itération réduite et une itération complète de Newton. (c) Ratio entre une itération augmentée et une itération complète.

## 3.6 Bilan du chapitre

Une stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement (PBAMR) a été présentée et étudiée dans ce chapitre. Une base réduite initiale minimale pour le post-flambement est introduite. Par son faible coût, elle est constituée en phase *online*. Grâce à une procédure adaptative *à la volée*, appliquée pour la première fois à un problème de post-flambement, la base réduite est complétée au cours des itérations. L'étude du comportement de la stratégie valide les hypothèses selon lesquelles, d'une part les composants de la base réduite initiale sont pertinents dans la représentation du champ de déplacement en post-flambement, et d'autre part le nombre de complétions est faible et réparti au cours des incrément. Cela dans la limite de la représentativité des cas d'applications étudiés et du niveau de chargement qui dépasse malgré tout le domaine de post-flambement des structures aéronautiques.

L'analyse des performances montre le potentiel de cette stratégie dans le cadre de la simulation du post-flambement des grandes structures raidies. Une réduction du temps de résolution de 77% est observée pour un modèle de panneau raidi artificiellement de près de 17000 degrés de libertés. L'extensibilité, bien que contrastée, laisse présumer des gains tout aussi intéressants sur des modèles de plus grande taille.

Ces caractéristiques font de la stratégie PBAMR une alternative aux méthodes de réduction de modèle basées sur une base réduite certes plus complète mais qui requiert une phase *offline* importante sans réelles garanties d'une meilleure précision ou d'un coût *online* plus faible.

Toutefois, les limites actuelles concernent la prise en compte du phénomène de flambement secondaire qui peut se produire dans les structures raidies notamment. Des aménagements sont proposés mais n'ont pas été implémentés. La détection et la prédiction du mode de flambement associé à cette seconde instabilité sont *a priori* les points les plus critiques. La représentation de l'état d'équilibre sur la nouvelle branche, si le mode de flambement correspondant est connu, doit en effet répondre aux mêmes critères que ceux de la branche d'équilibre précédente.

Nous avons choisi de laisser ce point en suspend au profit de l'amélioration de la stratégie par rapport au traitement des non-linéarités locales. En effet, le coût de la procédure de complétion, limitant les performances de la stratégie, pourrait être rationalisé par un traitement spécifique de la non-linéarité locale. Cette problématique fait l'objet du chapitre suivant.

# 4 Réduction de modèle adaptative et décomposition de domaine pour le post-flambement local

## Résumé

Dans ce chapitre, le caractère local du post-flambement des structures raidies est pris en compte dans une stratégie qui permet notamment de rationaliser le coût de l'adaptivité de la base réduite. Cette approche combine réduction de modèle adaptative et décomposition de domaine dans un formalisme assez général, mais son application, notamment le choix des bases réduites, est résolument orientée vers la problématique du post-flambement local des structures raidies aéronautiques.

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	114
<b>4.2</b>	<b>Stratégie PBAMR et décomposition de domaine</b>	114
4.2.1	Partition de la réduction de modèle par projection	114
4.2.2	Partition de la complétion <i>à la volée</i>	117
4.2.3	Considérations pour le post-flambement local	118
4.2.4	Algorithme général d'une stratégie de résolution pour le post-flambement local : PBAMR-DD	123
<b>4.3</b>	<b>Validation</b>	126
<b>4.4</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	130

## 4.1 Introduction

La localisation du post-flambement ouvre des perspectives d'amélioration de la stratégie PBAMR décrite dans le chapitre précédent. [Kerfriden *et al.*, 2012] ont proposés une combinaison entre réduction de modèle et décomposition de domaine pour une application en mécanique de la rupture non-linéaire (voir sous-section 2.4.4). Nos travaux se sont également orientés dans cette voie pour la résolution du post-flambement local, avec les spécificités qui seront détaillées dans ce chapitre.

La combinaison entre ces deux approches peut en effet répondre à la problématique posée par le post-flambement local. D'une part la stratégie PBAMR est capable de réduire la dimension d'un problème de post-flambement mais est limitée par le coût de la projection et l'adaptivité. D'autre part la décomposition de domaine permet de séparer le traitement des différents sous-domaines pour plus de flexibilité et un coût partagé entre plusieurs processeurs. Ses performances en termes de résolution sont limitées par un déséquilibre des charges de calcul entre sous-domaines et par l'extensibilité du problème d'interface.

Nous présentons donc une stratégie de combinaison pour l'analyse du post-flambement local. La première section décrit la méthode. Cette dernière est validée dans une seconde section sur le même cas d'étude que celui de la stratégie PBAMR.

Ce chapitre a fait l'objet de deux communications orales [Barrière *et al.*, 2013b ; Barrière *et al.*, 2013c] et d'un poster [Barrière *et al.*, 2013a].

## 4.2 Stratégie PBAMR et décomposition de domaine

Cette section présente la formulation d'une stratégie qui repose sur la combinaison de la stratégie PBAMR et d'une méthode de décomposition de domaine primale. La méthode de Newton-Krylov-Schur primale (voir sous-section 2.3.4) a en effet été choisie pour cette combinaison. La partition se fait ici en deux étapes :

- partition de la réduction de modèle par projection
- partition de la procédure d'adaptation

### 4.2.1 Partition de la réduction de modèle par projection

La partition du problème tangent par sous-domaine s'écrit (pour les notations se référer à la Section 2.3) :

$$\underline{\underline{K}_T^{(s)}} \underline{\delta q}^{(s)} = -\underline{\underline{R}}^{(s)} + \underline{\lambda}^{(s)} \quad (4.1)$$

$$\sum_s \underline{\underline{\bar{A}}}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\delta q}^{(s)} = \underline{0} \quad (4.2)$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\lambda}^{(s)} = \underline{0} \quad (4.3)$$

$$\underline{\underline{t}_d^{(s)}} \underline{\delta q}^{(s)} = \underline{0} \quad (4.4)$$

La partition de la réduction de modèle introduit une base réduite par sous-domaine  $\underline{\underline{C}}^{(s)}$  pour l'approximation des incrément de déplacement tel que :

$$\underline{\delta q_C}^{(s)} = \underline{\underline{C}}^{(s)} \underline{\delta \alpha}^{(s)} \quad (4.5)$$

Dans le cadre d'une approche primale (voir sous-section 2.3.2), la séparation entre degrés de liberté internes (indice  $i$ ) et à l'interface (indice  $b$ ) d'un sous-domaine implique une partition de la base réduite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta q_{C_i^{(s)}} \\ \delta q_{C_b^{(s)}} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_b^{(s)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta \alpha_i^{(s)} \\ \delta \alpha_b^{(s)} \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

Il faut noter que cette séparation augmente le sous-espace engendré par la base réduite. Par ailleurs, l'égalité *a priori* des inconnues primales d'interface impose la définition d'une unique base réduite d'interface  $\underline{\underline{C}}_b$ , associée aux coordonnées généralisées  $\underline{\alpha}_b$ , telle que :

$$\delta q_{C_b^{(s)}} = \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \delta \alpha_b, \quad \forall s \quad (4.7)$$

Par projection de Galerkin, l'équation (4.1) devient :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \end{array} \right]^T \underline{\underline{K}}_T^{(s)} \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta \alpha_i^{(s)} \\ \delta \alpha_b \end{array} \right\} = \\ - \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \end{array} \right]^T \left( \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} \\ \underline{\underline{R}}_b^{(s)} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{\lambda}}_b^{(s)} \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ainsi, après assemblage et élimination des multiplicateurs de Lagrange, le problème de localisation réduit par sous-domaine s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{\alpha}_i^{(s)} = \left( \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_T^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \left( -\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} - \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_T^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \delta \alpha_b \right), \quad \forall s \quad (4.9)$$

Le problème d'interface réduit s'exprime par condensation des opérateurs locaux projetés dans leurs bases réduites respectives :

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_T \delta \alpha_b = -\hat{\underline{r}} \quad (4.10)$$

Le complément de Schur global réduit  $\hat{\underline{\underline{S}}}_T$  peut s'écrire comme la somme des projections des compléments de Schur locaux approchés :

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_T = \sum_s \underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{A}}^{(s)} \hat{\underline{\underline{S}}}_T^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{C}}_b \quad (4.11)$$

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_T^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{T,bb}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{T,bi}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \left( \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{T,ii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{T,ib}^{(s)} \quad (4.12)$$

Le résidu condensé réduit se calcule de la même façon :

$$\hat{\underline{r}} = \sum_s \underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{A}}^{(s)} \hat{\underline{r}}^{(s)} \quad (4.13)$$

$$\hat{\underline{r}}^{(s)} = \underline{\underline{R}}_b^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{T,bi}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \left( \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{T,ii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)} \right)^{-1} \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} \quad (4.14)$$

L'approche NKS avec localisation mixte développée par [Cresta, 2008] (voir sous-section 2.3.4), peut se prêter également à la partition d'une base réduite de l'espace des d.d.l. primaux. Comme le champ de déplacement du sous-domaine est différencié de celui de l'interface, il

n'est *a priori* pas nécessaire de séparer les inconnues internes et d'interface dans le problème de localisation réduite mixte. Néanmoins, il faut pouvoir exprimer une base réduite pour les champs de déplacement d'interface  $\underline{U}$  et  $\underline{q}_b^{(s)}$ . Par exemple, la trace de la base réduite du sous-domaine :

$$\underline{\underline{C}}_b^{(s)} = \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\underline{C}}^{(s)}, \text{ tel que , } \underline{U}^{(s)} = \underline{\underline{C}}_b^{(s)} \underline{\beta}^{(s)}, \text{ et , } \underline{q}_b^{(s)} = \underline{\underline{C}}_b^{(s)} \underline{\alpha}^{(s)} \quad (4.15)$$

D'où la direction de recherche du problème local réduit :

$$\underline{\underline{C}}_b^{(s)T} (\underline{\lambda}_b^{(s)} - \underline{F}^{(s)}) + \underline{\underline{C}}_b^{(s)T} \underline{k}^{(s)} \underline{\underline{C}}_b^{(s)} (\underline{\alpha}^{(s)} - \underline{\beta}^{(s)}) = 0 \quad (4.16)$$

Puis le problème de localisation :

$$\underline{\underline{C}}^{(s)T} \left( \underline{K}_T^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{k}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \right) \underline{\underline{C}}^{(s)} \delta \underline{\alpha}^{(s)} = \underline{\underline{C}}^{(s)T} \left( -\underline{R}^{(s)} + \left( \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{k}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \Delta \hat{\underline{U}}^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{F}^{(s)} \right) \right) \quad (4.17)$$

où  $\Delta \hat{\underline{U}}^{(s)} = \underline{\underline{C}}^{(s)} (\underline{\beta}^{(s)} - \underline{\alpha}^{(s)})$ .

La direction de recherche du problème global réduit, définie par sous-structure, peut se réduire également.

$$\underline{\underline{C}}_b^{(s)T} \underline{k}^{(s)} \underline{\underline{C}}_b^{(s)} (\underline{\beta}^{(s)} - \underline{\alpha}_b^{(s)}) = \underline{\underline{C}}_b^{(s)T} (\underline{F}^{(s)} - \underline{\lambda}_b^{(s)}) \quad (4.18)$$

Une unique base réduite d'interface doit être définie pour pourvoir assembler le problème global réduit, qui prend la même forme que celui de l'Équation 4.10 avec un résidu réduit modifié (voir sous-section 2.3.4). Dans le cas où les bases réduites sont compatibles, mais différentes, il s'agit donc de minimiser l'écart entre les deux représentations du champ  $\underline{U}$  des deux cotés de l'interface. Des multiplicateurs de Lagrange à l'interface  $\underline{\Lambda}$ , pour forcer l'égalité des solutions réduites à l'interface, peuvent être introduits et le problème global réduit devient :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_T^{(1)} & & \underline{\underline{C}}_b^{(1)T} \underline{\underline{A}}^{(1)T} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \underline{\underline{S}}_T^{(n_s)} & \underline{\underline{C}}_b^{(n_s)T} \underline{\underline{A}}^{(n_s)T} \\ \underline{\underline{A}}^{(1)} \underline{\underline{C}}_b^{(1)} & \dots & \underline{\underline{A}}^{(n_s)} \underline{\underline{C}}_b^{(n_s)} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\delta \beta}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\delta \beta}^{(n_s)} \\ \underline{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{r}}^{m(1)} \\ \vdots \\ \underline{\hat{r}}^{m(n_s)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Il n'est toutefois pas certain que cette approche soit plus performante que la définition d'une unique base réduite d'interface.

Dans le cas d'une approche duale, la séparation des inconnues internes et à l'interface n'est pas nécessaire, ce qui permet de définir une base réduite indépendamment par sous-domaine. Néanmoins, il faut alors identifier un sous-espace pertinent pour les multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\lambda}_b$  de l'interface, et garantir que les bases réduites sont compatibles de part et d'autre de l'interface. Des travaux ont été menés sur le choix d'un espace approprié pour la représentation des inter-efforts [Desmeure *et al.*, 2011], mais nous avons choisi de nous intéresser en priorité à l'approche primale.

### 4.2.2 Partition de la complétiōn à la volée

Nous proposons de partitionner la procédure d'adaptation qui s'est avérée être pénalisante pour la réduction de modèle, notamment dans la stratégie PBAMR. Dans l'approche développée par [Kerfriden *et al.*, 2012] (voir sous-section 2.4.4), certains sous-domaines sont traités sans réduction de modèle. Ce sont les sous-domaines qui contiennent de fortes non-linéarités locales et dont la base réduite n'est pas suffisamment complète *a priori*. Dans le cadre d'une base réduite constituée par POD, un critère de validation croisée est proposé et permet de définir, pour une dimension donnée de la base POD, le traitement réduit ou complet d'un sous-domaine. Il n'y a donc pas de procédure d'adaptation en phase *online* dans cette approche.

Lorsqu'une procédure d'adaptation est pertinente pour un problème donné (ici le post-flambement), sa partition peut pourtant se réaliser. L'objectif est d'obtenir une procédure indépendante par sous-domaine et pour l'interface de manière à différencier la gestion de l'incomplétude des bases réduites locales et d'interface.

Dans le cas général, la procédure d'adaptation à la volée repose sur la résolution d'une itération de Newton complète. La partition est alors directe, puisqu'il s'agit d'une itération de NKS présentée en sous-section 2.3.4. Le système tangent complet peut aussi être initialisé par la solution de l'itération réduite  $\underline{\delta q}_C$ , comme dans l'équation (3.2). Le problème tangent partitionné et initialisé s'écrit alors pour tout sous-domaine  $s$  :

$$\underline{\underline{K}}_T^{(s)} \underline{\delta q}_K^{(s)} = -\underline{\underline{R}}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_T^{(s)} \underline{\delta q}_C^{(s)} + \underline{\lambda}^{(s)} \quad (4.20)$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\delta q}_K^{(s)} = 0 \quad (4.21)$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\underline{t}}^{(s)} \underline{\lambda}^{(s)} = 0 \quad (4.22)$$

$$\underline{\underline{t}}_d^{(s)} \underline{\delta q}_K^{(s)} = 0 \quad (4.23)$$

L'initialisation se retrouve, après assemblage et élimination des multiplicateurs de Lagrange, dans les équations de localisation pour chaque sous-domaine :

$$\underline{\delta q}_{K_i}^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{Tii}^{(s)-1} \left( -\underline{\underline{R}}_i^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{Ti}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} (\underline{\delta q}_{C_b}^{(s)} + \underline{\delta q}_{K_b}^{(s)}) \right) - \underline{\delta q}_{C_i}^{(s)} \quad (4.24)$$

et également dans le problème d'interface :

$$\underline{\underline{S}}_T \underline{\delta q}_{K_b}^{(s)} = -\underline{r} - \underline{\underline{S}}_T \underline{\delta q}_{C_b} \quad (4.25)$$

L'initialisation du problème d'interface par la solution du problème réduit peut être vue comme un problème grossier (voir sous-section 2.3.3). Un algorithme de Krylov-augmenté peut donc permettre de résoudre efficacement le problème d'interface issu de la procédure d'adaptation de la base réduite. Le cadre de la réduction de modèle offre ainsi un problème grossier pertinent qui peut être enrichi par des considérations présentées en sous-section 2.3.3. Cela va dans le sens d'une résolution itérative efficace du problème d'interface pour la complétiōn de la base réduite. Un préconditionnement de type Neumann dans le cadre de la décomposition de domaine primale est en outre possible (voir sous-section 2.3.3).

Dans le cas d'un opérateur tangent symétrique défini positif, la partition du problème projeté dans  $Im(\underline{\underline{C}})^{\perp_{K_T}}$  (introduit en sous-section 2.2.1.2) n'est pas envisageable. En effet,

le projecteur  $\underline{\underline{P}}$  (2.14) n'est pas indépendant par sous-domaine ce qui rend sa construction inefficiente. En revanche, l'algorithme de Krylov-augmenté pour la résolution du problème d'interface peut prendre la forme d'un gradient conjugué projeté (4.25). Un projecteur  $\underline{\underline{P}}_b$  réalise alors la projection dans  $Im(\underline{\underline{C}}_b)^{\perp_{\underline{\underline{S}}_T}}$ . De la même façon, pour le problème de localisation, un projecteur  $\underline{\underline{P}}^{(s)}_i$  peut réaliser une projection dans  $Im(\underline{\underline{C}}^{(s)}_i)^{\perp_{\underline{\underline{K}}^{(s)}_{T_{ii}}}}$ . Mais comme les opérateurs tangents locaux  $\underline{\underline{K}}^{(s)}_{T_{ii}}$  sont factorisés pour le calcul des compléments de Schur, un solveur direct sera plus approprié pour le calcul des vecteurs additionnels locaux  $\underline{\delta q}_{K_i}^{(s)}$ .

Un point important de la partition de la procédure d'adaptation concerne la différenciation par sous-domaine et pour l'interface. L'étape de localisation (4.24), comme la localisation de la méthode NKS, respecte bien l'indépendance entre les sous-domaines mais dépend de l'incrément des degrés de liberté d'interface. Toutefois, la complétion de la base réduite d'interface n'est pas nécessaire à la complétion des bases réduites locales (il s'agit du cas où  $\underline{\delta q}_K^{(s)} = \underline{0}$ ).

Le critère de complétion utilisé pour la stratégie PBAMR (voir Chapitre 3) est basé sur une mesure de l'erreur globale. Cette erreur est mesurée en décomposition de domaine par le résidu condensé normalisé (voir la convergence des méthodes NKS sous-section 2.3.4). Le critère de complétion associé est donc le suivant :

$$\frac{\|\hat{r}\|}{\|\hat{F}_{ext}\|} < k_g \frac{\|r\|}{\|F_{ext}\|} \quad (4.26)$$

où  $k_g$  est le paramètre de complétion global. Ce critère prend en compte l'erreur globale de la solution approchée sans distinguer les sous-domaines et l'interface. Nous faisons le choix d'utiliser ce critère comme une condition nécessaire au déclenchement des étapes d'adaptation locales.

Un critère sur l'erreur résiduelle à l'interface sert donc à déclencher plus précisément la résolution du problème de complétion à l'interface :

$$\frac{\|\underline{\underline{C}}_b^T \underline{R}_b\|}{\|\underline{\underline{C}}_b^T \underline{F}_{ext_b}\|} < k_b \frac{\|R_b\|}{\|F_{ext_b}\|} \quad (4.27)$$

où  $k_b$  est le paramètre de complétion à l'interface.

Enfin un critère pour chaque sous-domaine permet de déclencher la résolution des problèmes de localisation indépendamment les uns des autres :

$$\frac{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{R}_i\|}{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{F}_{ext_i}\|} < k_i \frac{\|R_i\|}{\|F_{ext_i}\|} \quad (4.28)$$

### 4.2.3 Considérations pour le post-flambement local

À ce stade, la partition de la réduction de modèle et de la procédure d'adaptivité sont présentées dans un cadre général. Une bonne efficacité de la stratégie repose toutefois sur une adéquation avec le problème étudié, en l'occurrence celui du post-flambement local des structures raidies. Trois aspects sont abordés dans cette section. Les deux premiers concernent la constitution des bases réduites initiales. Le dernier introduit la localisation non-linéaire réduite pour différencier le traitement des non-linéarités locales de la résolution de l'équilibre

global.

### Choix des bases réduites :

Nous nous plaçons, dans un premier temps, dans le cas d'un flambement localisé au sens de la décomposition de domaine. Un découpage le long des raidisseurs et un flambement local de la peau correspondent à cette hypothèse. À ce propos, [Cresta, 2008] a montré que les méthodes de décomposition de domaine en post-flambement local sont plus performantes lorsque les non-linéarités sont concentrées à l'intérieur des sous-domaines (voir sous-section 2.3.4).

Dans ce cadre et conformément à la stratégie PBAMR, nous proposons de constituer la base réduite initiale de chaque sous-domaine à partir du mode de déplacement fondamental et d'un mode de flambement. Le calcul du champ de déplacement fondamental de l'ensemble de la structure,  $\underline{q}_0$ , peut être réalisé par décomposition de domaine comme dans le cas de la constitution des *snapshots* POD par [Kerfriden *et al.*, 2012]. Les champs par sous-domaine  $\underline{q}_{0,i}^{(s)}$  et à l'interface  $\underline{q}_{0,b}$  sont ainsi obtenus directement, et en mettant à profit les possibilités de calcul parallèle.

Quant au mode de flambement, il peut se calculer indépendamment par sous-domaine sous l'hypothèse d'un flambement à interfaces fixes. Les modes de flambement à interfaces fixes sont issus d'une analyse de flambement telle que les d.d.l. d'interface sont considérés encastrés. La base réduite initiale pour chaque sous-domaine  $s$  s'écrit donc :

$$\underline{\underline{C}}_i^{(s)} = \left[ \frac{\underline{q}_{0,i}^{(s)}}{\|\underline{q}_{0,i}^{(s)}\|} \underline{q}_{B_i}^{(s)} \right] \quad (4.29)$$

Par hypothèse, l'interface est suffisamment rigide pour que le problème condensé ne présente pas d'instabilité dans le domaine de chargement étudié. Dès lors, il n'est pas nécessaire d'introduire de mode de flambement d'interface dans la base réduite initiale correspondante. Celle-ci est donc simplement constituée du mode de déplacement fondamental :

$$\underline{\underline{C}}_b = \left[ \frac{\underline{q}_{0,b}}{\|\underline{q}_{0,b}\|} \right] \quad (4.30)$$

Si l'interface n'est pas soumise à du flambement, elle peut subir néanmoins l'effet de la redistribution des contraintes due au flambement interne des sous-domaines. Cet effet est pris en compte par la procédure d'adaptation partitionnée.

Un avantage offert par le partitionnement doit concerner le flambement local successif, au cours du chargement, de plusieurs sous-domaines. En effet, la stratégie PBAMR ne prend en compte que le premier mode de flambement de la structure, peu importe sa localisation. Ce mode est inutile à la représentation d'un nouveau mode local qui peut apparaître sans modifier le premier. Il est donc intéressant de noter que le cadre de la partition permet d'aborder le premier mode de flambement de chaque sous-domaine sans mise à jour ou augmentation de la taille des bases réduites initiales.

Dans un second temps, nous envisageons le cas d'un flambement traversant l'interface. Sans parler de flambement global (qui sort du cadre de notre étude), il peut être en effet

complexe de définir *a priori* le découpage d'une structure raidie de manière à respecter les hypothèses précédentes de localisation du flambement.

Pour définir les bases réduites initiales des sous-domaines et de l'interface, le calcul des modes de flambement à interfaces fixes ne suffit plus. Une méthode simple mais coûteuse, consiste à réaliser l'analyse de flambement sans décomposition de domaine et de partitionner *a posteriori* les modes de flambement ainsi obtenus. De manière plus performante, l'analyse de flambement peut se réaliser dans le cadre d'une partition. Il s'agit de l'application de la méthode de [Craig et Bampton, 1968] au flambement proposée par [Huang et Wang, 1993] (voir sous-section 2.4.4). Dans ce cas, les modes de flambement sont directement partitionnés, au prix d'un calcul global et d'une troncature des modes de flambement à interfaces fixes de chacun des sous-domaine.

Afin de s'affranchir d'un calcul global, tout en prenant en compte des modes de flambement pour lesquels l'interface ne peut pas être considérée comme effectivement fixe, nous proposons une méthode inspirée notamment des méthodes analytiques de pré-dimensionnement au flambement de panneaux raidis (voir sous-section 1.4.3). Le problème de flambement local avec une raideur d'interface définie à partir du reste de la structure, peut en effet permettre de représenter certains modes de flambement qui ne sont pas exactement locaux au sens de la décomposition de domaine. Comme pour les approches mixtes de décomposition de domaine, en particulier la localisation non-linéaire mixte [Cresta, 2008], un complément de Schur du reste de la structure peut être évalué. Les seuls sous-domaines voisins, voire même une bande d'éléments autour de l'interface, peuvent être considérés pour le calcul à moindre coût de cet opérateur et pour rendre compte d'une raideur locale au voisinage de l'interface. L'étendue de cette zone de condensation dépend du mode de flambement à prédire, comme l'illustre la Figure 4.1.

Une approche prenant en compte l'effet de la structure à plus grande distance de manière efficace est proposée par [Gendre et al., 2011] pour le couplage non-intrusif de code. Selon le principe de Saint-Venant, le complément de Schur calculé combine la raideur locale condensée d'une bande d'élément autour de l'interface, avec la raideur globale condensée du reste de la structure, homogénéisée par une projection dans le sous-espace des efforts macroscopiques d'interface. Cette approche est utilisée pour la résolution d'un problème non-linéaire mais il faudrait évaluer l'influence de l'homogénéisation sur le problème de flambement local.

Il paraît donc possible d'étendre la stratégie PBAMR-DD à l'étude de cas de flambement traversant ou impliquant des raidisseurs. En améliorant la pertinence des bases réduites locales calculées, la stratégie peut devenir moins sensible au découpage en sous-domaines réalisé *a priori*.

Soit  $\underline{\underline{T}}^{(s)}$  le complément de Schur de la zone de condensation sur l'interface du sous-domaine  $s$ . Le problème de flambement local discréétisé s'écrit donc :

$$\left( \underline{\underline{K}}_L^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{\underline{T}}_L^{(s)} + \lambda \left( \underline{\underline{K}}_{NL}^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{\underline{T}}_{NL}^{(s)} \right) \right) \underline{\underline{\delta q}} = \underline{\underline{0}} \quad (4.31)$$

où  $\underline{\underline{T}}_L^{(s)}$  et  $\underline{\underline{T}}_{NL}^{(s)}$  sont respectivement la partie élastique et la partie non-linéaire de l'opérateur de Schur  $\underline{\underline{T}}^{(s)}$ . Cette idée mérite des développements supplémentaires pour gérer le cas où le mode de flambement calculé dans un sous-domaine n'est pas compatible avec celui calculé dans le sous-domaine voisin. Cela peut se produire, par exemple, lorsque la zone d'approximation du complément de Schur du reste de la structure est mal définie.

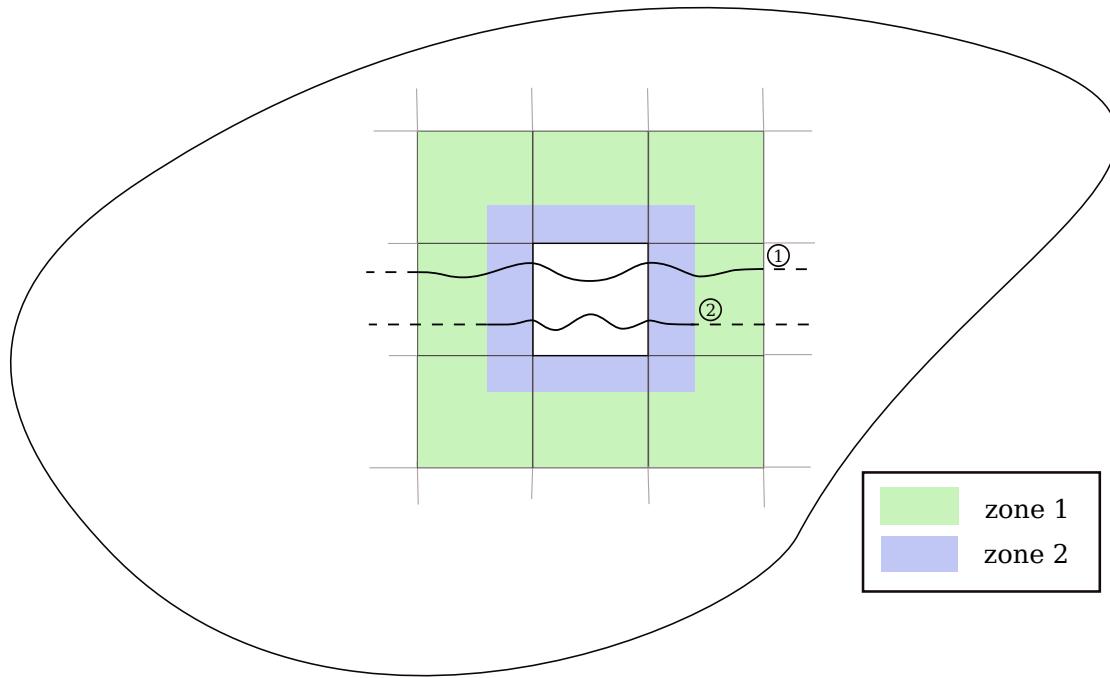


FIGURE 4.1 – Analyse de flambement local à interfaces mixtes. Définition d'une zone de condensation de la raideur autour de l'interface. Mode de flambement localisé sur un sous-domaine et (1) ses voisins directs ou (2) aux abords de l'interface.

#### Prise en compte des mouvements de corps rigides locaux :

Lorsqu'un sous-domaine subit un déplacement de corps rigide, les modes de déplacement dus à des déformations qui constituent la base réduite locale ne permettent plus de représenter l'état d'équilibre alors même que le mode de déformation reste inchangé. Ce cas de figure est tout à fait à même de se produire en présence de non-linéarité locale, comme schématisé en Figure 4.2.

Afin de conserver la pertinence d'une base réduite, il suffit de lui ajouter les modes rigides du sous-domaine, correspondant aux champs de déplacements suivants :

- 3 champs de déplacement de translation des points  $M$  du sous-domaine  $s$  :

$$\underline{u}_{tx}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_{ty}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_{tz}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

- 3 champs de déplacement par rotation des points  $M$  du sous-domaine  $s$  autour de son centre de rotation  $G^{(s)}$  :

$$\underline{u}_{rx}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{G^{(s)} M}, \quad \underline{u}_{ry}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{G^{(s)} M}, \quad \underline{u}_{rz}^{(s)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \underline{G^{(s)} M} \quad (4.33)$$

Il est intéressant de rappeler que des modes de corps rigides sont utilisés pour former un sous-espace grossier pour le problème d'interface en décomposition de domaine et accélérer la résolution. Ici, ils permettent de propager au niveau local une information sur le mouvement global de la structure.



FIGURE 4.2 – Cas d'un déplacement de corps rigide d'un sous-domaine provoqué par le flambement d'un autre sous-domaine.

### Localisation non-linéaire réduite :

Ayant fait ses preuves pour le calcul du post-flambement local par décomposition de domaine, la localisation non-linéaire est introduite dans la stratégie proposée (voir Algorithme 3). Des itérations sur le problème de localisation réduit par projection (4.9) sont ainsi réalisées. Le problème de complétion de la base réduite locale (4.24) peut donc constituer une itération de la localisation non-linéaire si le critère de complétion locale est vérifié.

Deux implémentations de l'adaptivité au niveau local sont envisagées :

- **adaptivité locale simple** : lorsque le critère de complétion est vérifié avant l'étape de localisation, la première itération est enrichie du calcul d'un vecteur additionnel pour la complétion de la base réduite (4.24). Les itérations suivantes sont réalisées sur le problème local réduit avec la base réduite complétée. La convergence au sens du problème réduit définit alors le critère d'arrêt local :

$$\frac{\underline{\underline{C}}^{(s)T} \underline{R}^{(s)}}{\underline{\underline{C}}^{(s)T} \underline{\underline{F}_{ext}}^{(s)}} < \hat{\eta}_L \quad (4.34)$$

où  $\hat{\eta}_L$  est le paramètre de convergence dans le sous-espace réduit. Le potentiel de la base réduite locale complétée est ainsi exploité pour représenter les effets non-linéaires locaux à moindre coût. L'idée de cette approche est de répercuter les effets d'une complétion de la base réduite locale sur le problème global avant d'entamer une nouvelle adaptation.

- **adaptivité locale multiple** : Si, comme pour la méthode NKS avec localisation non-linéaire (voir sous-section 2.3.4), le critère de convergence local est basée sur l'erreur du problème complet (4.35), il est alors nécessaire de permettre plusieurs adaptivités

locales successives.

$$\frac{\underline{R}^{(s)}}{\underline{F}_{ext}^{(s)}} < \eta_L \quad (4.35)$$

D'après [Cresta *et al.*, 2007], un paramètre de convergence relativement large pour les itérations de localisation non-linéaire ( $\sqrt{\eta_{New}}$ ) est optimal. Le nombre d'itérations enrichies d'une complétion de la base réduite doit donc rester faible pour chaque étape de localisation. Malgré cela, il est possible que les vecteurs additionnels soient moins pertinents à la prochaine étape de localisation, après une nouvelle étape globale. C'est le risque pris en complétant la base réduite plusieurs fois par étape de localisation non-linéaire à interfaces fixes.

Le schéma en Figure 4.3 illustre ces deux variantes de l'adaptivité locale.

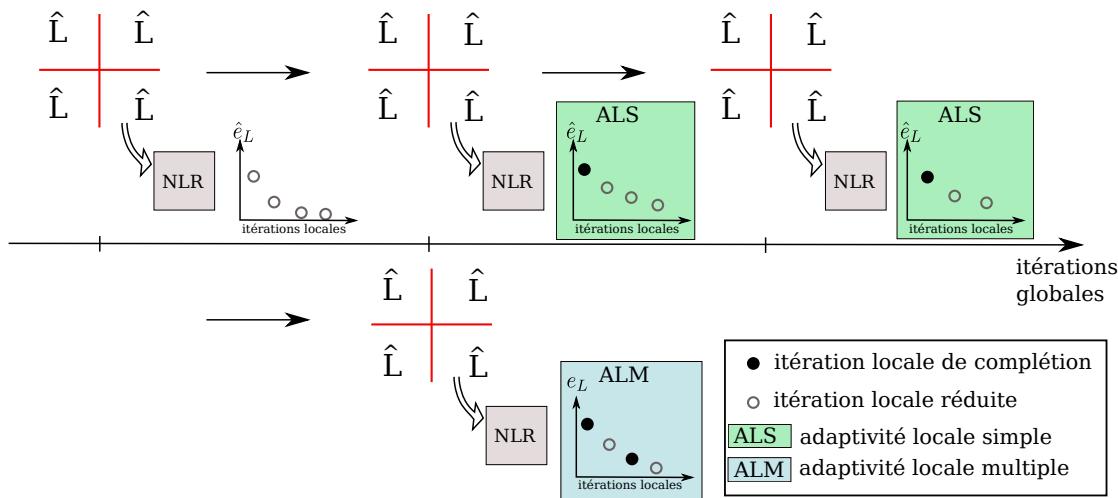


FIGURE 4.3 – Schéma de principe de l'adaptivité locale simple ou multiple. La première étape de localisation représentée ne requiert pas de complétion. La procédure d'adaptivité est en revanche déclenchée dans les suivantes.  $\hat{L}$  représente un sous-domaine réduit et condensé sur son interface.  $NLR$  désigne la localisation non-linéaire réduite dont la convergence de l'erreur, avec ou sans procédure d'adaptivité, est schématisée à côté.

#### 4.2.4 Algorithme général d'une stratégie de résolution pour le post-flambement local : PBAMR-DD

L'Algorithme 5 présente l'implémentation qui a été retenue pour la validation de la stratégie de combinaison. ligne 1, la fonction RBInit initialise les bases réduites locales selon le principe du flambement localisé au sens du découpage en sous-domaine. La version RBInit-nonlocal peut permettre d'initialiser les bases réduites locales pour du flambement à interfaces non fixes.

Pour chaque incrément, les itérations globales sont réalisées tant que le critère de convergence de l'erreur globale n'est pas vérifié ligne 2. Le critère de complétion global est évalué ligne 3. La résolution du problème condensé à l'interface est conditionnée par le critère de complétion d'interface ligne 4. Après résolution, réduite ou enrichie de la complétion de la

base réduite d'interface, l'étape de localisation non-linéaire par sous-domaine ligne 5 est choisie du type **adaptivité locale simple**. Selon la vérification du critère de complétion local ligne 6, une itération enrichie de la complétion de la base réduite locale est résolue. ligne 7, les itérations de localisation non-linéaire réduite sont ensuite réalisées jusqu'à convergence dans le sous-espace réduit.

---

**Fonction RBInit**


---

Calcul de l'équilibre fondamental (algorithme NKS) :  $\forall s, \underline{q}_0^{(s)} ;$

$$\underline{C}_b = \begin{bmatrix} \underline{q}_{0,b} \\ \|\underline{q}_{0,b}\| \end{bmatrix};$$

**pour chaque** *Sous-domaine s faire*

    Calcul du premier mode de flambement à interfaces fixes :  $(\lambda_{cr}^{(s)}, \underline{q}_B^{(s)}) ;$

$$\underline{\underline{C}}_i^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{0,i}^{(s)} \\ \|\underline{q}_{0,i}^{(s)}\| \end{bmatrix} \underline{q}_B_i^{(s)};$$


---

---

**Fonction RBInit-nonlocal**


---

Calcul de l'équilibre fondamental (algorithme NKS) :  $\forall s, \underline{q}_0^{(s)} ;$

**pour chaque** *Sous-domaine s faire*

**Calcul du premier mode de flambement à interfaces mixtes**

$$\begin{bmatrix} (\underline{\underline{K}}_L^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{\underline{T}}_L^{(s)} + \lambda (\underline{\underline{K}}_{NL}^{(s)} + \underline{\underline{t}}^{(s)T} \underline{\underline{T}}_{NL}^{(s)})) \underline{q} = 0; \\ (\lambda_{cr}^{(s)}, \underline{q}_B^{(s)}) ; \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_i^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{0,i}^{(s)} \\ \|\underline{q}_{0,i}^{(s)}\| \end{bmatrix} \underline{q}_B_i^{(s)};$$

**pour chaque** *interface locale entre deux sous-domaines  $\Gamma_{kl}$  faire*

$$\underline{\underline{C}}_{kl} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{t}}^{(k)} \underline{q}^{(s)}_{0,b} \\ \|\underline{\underline{t}}^{(k)} \underline{q}^{(s)}_{0,b}\| \end{bmatrix} \underline{q}_B_b^{(s)};$$

Assemblage des bases réduites des interfaces locales :  $\underline{\underline{C}}_b ;$

---

Dans une première approche le paramètre de convergence dans les sous-espaces réduits locaux  $\hat{\eta}_L$  est pris égal à  $\eta_{New}$  par défaut. Les paramètres de complétion  $k_g$ ,  $k_b$  et  $k_i$  sont fixés à la même valeur de  $10^{-2}$  (valeur prise pour la stratégie PBAMR au Chapitre 3).

**Algorithme 5 :** Stratégie de résolution en post-flambement par réduction de modèle adaptative et décomposition de domaine (PBAMR-DD).

---

```

initialisation :  $\lambda = \Delta\lambda$ 
1 RBIInit()
tant que  $\lambda < 1$  faire (boucle incrémentale)
    pour chaque Sous-domaine s faire
        assembler  $\underline{\underline{K}}_t^{(s)}$  et  $\underline{\underline{R}}^{(s)}$ ;
    2 tant que  $e > \eta_{New}$  faire (boucle itérative globale)
        3  $COMPL = \frac{\|\hat{r}\|}{\|\hat{F}_{ext}\|} < k_g e$ 
        4 si  $\frac{\|\underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{R}}_b\|}{\|\underline{\underline{C}}_b^T \underline{\underline{F}}_{ext,b}\|} < k_b \frac{\|\underline{\underline{R}}_b\|}{\|\underline{\underline{F}}_{ext,b}\|}$  et  $COMPL$  alors (complétion à l'interface)
            pour chaque s calculer :  $\underline{\underline{S}}_t^{(s)}$  et  $\underline{\underline{r}}^{(s)}$ ;
            résoudre  $\underline{\underline{S}}_t \underline{\underline{\delta q}}_b = -\underline{\underline{r}}$  (solveur de Krylov augmenté);
            orthonormaliser  $\underline{\underline{\delta q}}_b$  par rapport à  $\underline{\underline{C}}_b$  :  $\underline{\underline{\delta q}}_b^\perp$ ;
             $\underline{\underline{C}}_b \leftarrow [\underline{\underline{C}}_b \underline{\underline{\delta q}}_b^\perp]$ ;
        else
            pour chaque s calculer :  $\hat{\underline{\underline{S}}}_t^{(s)}$  et  $\hat{\underline{\underline{r}}}^{(s)}$ ;
            résoudre  $\hat{\underline{\underline{S}}}_t \hat{\underline{\underline{\delta \alpha}}}_b = -\hat{\underline{\underline{r}}}$  (solveur direct);
             $\underline{\underline{\delta q}}_b = \underline{\underline{C}}_b \hat{\underline{\underline{\delta \alpha}}}_b$ ;
        5 pour chaque Sous-domaine s faire (localisation)
            6 si  $\frac{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)}\|}{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{F}}_{ext,i}^{(s)}\|} < k_i \frac{\|\underline{\underline{R}}_i^{(s)}\|}{\|\underline{\underline{F}}_{ext,i}^{(s)}\|}$  et  $COMPL$  alors (complétion locale)
                 $\underline{\underline{\delta q}}_i^{(s)} = \underline{\underline{K}}_{T,ii}^{(s)-1} \left( -\underline{\underline{R}}_i^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{T,ib}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{\delta q}}_b^{(s)} \right)$ ;
                orthonormaliser  $\underline{\underline{\delta q}}_i^{(s)}$  par rapport à  $\underline{\underline{C}}_i^{(s)}$  :  $\underline{\underline{\delta q}}_i^{(s)\perp}$ ;
                 $\underline{\underline{C}}_i^{(s)} \leftarrow [\underline{\underline{C}}_i^{(s)} \underline{\underline{\delta q}}_i^{(s)\perp}]$ ;
                Mettre_à_jour_les_d.d.l._locaux
                 $\underline{\underline{q}}_i^{(s)} = \underline{\underline{q}}_i^{(s)} + \underline{\underline{\delta q}}_i^{(s)}$ ;
                 $\underline{\underline{q}}_b^{(s)} = \underline{\underline{q}}_b^{(s)} + \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{\delta q}}_b$ ;
                 $\underline{\underline{\delta q}}_b = \underline{\underline{0}}$ ;
                assembler  $\underline{\underline{K}}_t^{(s)}$  et  $\underline{\underline{R}}^{(s)}$ ;
            7 tant que  $\hat{e}_L > \hat{\eta}_L$  faire (localisation non-linéaire réduite)
                 $\underline{\underline{\delta \alpha}}_i^{(s)} = (\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{T,ii}^{(s)} \underline{\underline{C}}_i^{(s)})^{-1} (-\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)} - \underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{K}}_{T,ib}^{(s)} \underline{\underline{A}}^{(s)T} \underline{\underline{\delta q}}_b)$ ;
                Mettre_à_jour_les_d.d.l._locaux();
                assembler  $\underline{\underline{K}}_t^{(s)}$  et  $\underline{\underline{R}}^{(s)}$ ;
                calculer  $\hat{e}_L = \frac{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{R}}_i^{(s)}\|}{\|\underline{\underline{C}}_i^{(s)T} \underline{\underline{F}}_{ext}^{(s)}\|}$ ;
                calculer  $e = \|\underline{\underline{r}}\| / \|\lambda \underline{\underline{F}}_{ext}\|$ ;
                 $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ ;

```

---

## 4.3 Validation

Nous proposons de valider la stratégie PBAMR-DD, de combinaison entre la réduction de modèle adaptative et la décomposition de domaine. Le cas du panneau raidi artificiellement, soumis à une sollicitation de cisaillement pur (voir Section 3.5) est utilisé dans les mêmes conditions qu'au Chapitre 3 pour une comparaison avec la méthode PBAMR. Le modèle à 5254 d.d.l. est décomposé en quatre sous-domaines le long des raidisseurs comme illustré Figure 4.4. Le flambement se produit ainsi de manière localisée au sens du découpage en sous-domaine. Plus précisément, le domaine 2 est le seul à flamber dans la plage de chargement, selon un mode de flambement à interfaces fixes. Les domaines voisins restent en déformation de membrane pure.

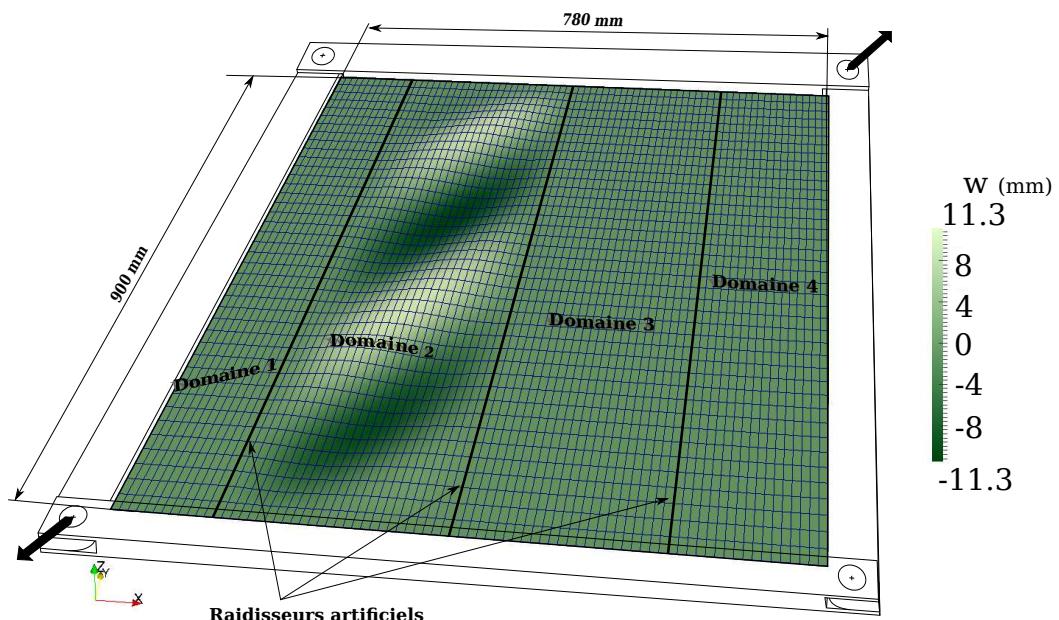


FIGURE 4.4 – Partition en quatre sous-domaines d'un panneau raidi en cisaillement pur.

Ce problème présente une caractéristique intéressante pour valider les concepts mis en œuvre dans la stratégie PBAMR-DD. Certains domaines ne sont en effet pas soumis à une instabilité de flambement, ce qui doit permettre la mise en évidence de la rationalisation de la procédure d'adaptation par sa partition. Par ailleurs, les conditions aux limites en déplacements imposées sur le contour du panneau sont partagées par tous les sous-domaines, ce qui prévient, dans un souci de simplification, de tout mode de déplacement de corps rigide des sous-domaines.

Un suivi de la taille des bases réduites est donc réalisé et présenté Figure 4.5. La base réduite d'interface, initialement composée d'un seul vecteur, est complétée à quatre reprises. Celle du domaine 2, initialement composée de deux vecteurs, est également complétée à quatre reprises mais pas nécessairement aux mêmes incrémentations ce qui confirme l'efficacité du découplage entre le problème de complétion de la base réduite d'interface et des bases réduites locales. L'indépendance entre les sous-domaines est quant à elle démontrée par l'absence de complétions dans les domaines 1, 3 et 4. Il est intéressant de noter que le champ de déplacement des domaines ayant un comportement linéaire sont bien représentés par leurs

bases réduites initiales.

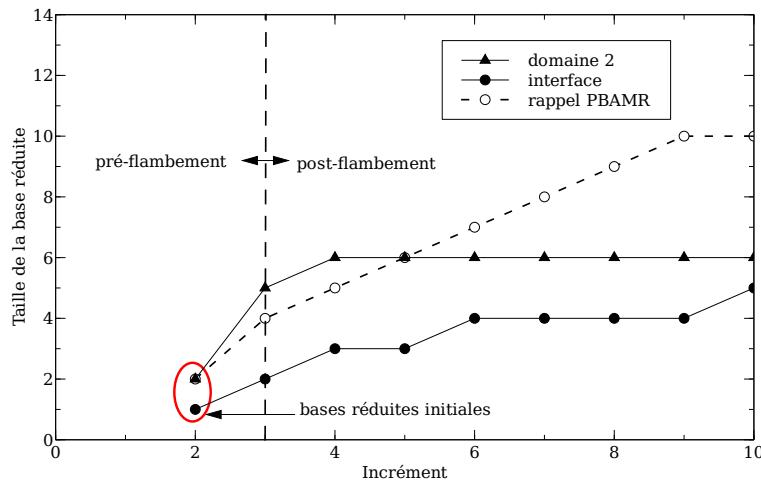


FIGURE 4.5 – Suivi de la taille des bases réduites au cours des incrément.

Le rappel des complétions réalisées par la stratégie PBAMR contraste avec celles obtenues par partition. Les complétions du domaine 2 sont en effet concentrées aux premier et deuxième incrément de post-flambement et la base réduite ainsi complétée reste valide pour les six incrément suivants.

Les vecteurs additionnels dans la base réduite d'interface, qui apparaissent de manière étalée au cours des incrément, reflètent la redistribution progressive des contraintes aux bords du domaine 2. La Figure 4.6 illustre ce propos par le relevé des efforts de membrane et des déplacements plans le long du raidisseur artificiel situé entre les domaine 1 et 2. Les efforts de cisaillement, homogènes avant flambement, subissent par exemple une perturbation d'amplitude inférieure à 2.5% au premier incrément de post-flambement et à 15% pour le dernier incrément. L'amplitude des efforts axiaux, nuls avant flambement, passe de 5% à 30% de l'amplitude moyenne du cisaillement entre le premier et le dernier incrément de post-flambement. Le champ de déplacement associé subit une perturbation inférieure à 7% pour  $u(x)$  au dernier incrément et entre 2.5% et 20% pour  $v(x)$ . La perturbation sur le champ de déplacement à l'interface n'est vraisemblablement pas suffisamment élevée pour induire une erreur résiduelle importante et nécessiter des complétions de la base réduite du domaine 1. Avec un critère d'erreur plus précis, il faut donc s'attendre à réaliser des complétions dans les sous-domaines voisins d'un sous-domaine en post-flambement. Néanmoins, une rigidité axiale des raidisseurs (ici nulle) doit minimiser les variations observées sur ce panneau.

Une perspective sur la performance de la stratégie PBAMR-DD est donnée par comparaison avec la méthode NKS avec localisation non-linéaire (NKS-NLL) (approche primale, paramètres  $\eta_{New} = \eta_L = 5 \times 10^{-3}$ ). Le nombre et la durée (temps de calcul) des itérations globales et locales, le nombre et la durée des complétions des bases réduites sont rassemblés dans le Tableau 4.1.

L'approche PBAMR-DD semble ainsi générer plus d'itérations globales que sont homologue non-réduite avec, dans ce cas précis, un facteur de 1.3. De la même façon, le nombre d'itérations locales (les itérations réduites et enrichies d'une complétion sont confondues) est plus élevé d'un facteur allant de 1.26 à 1.41. L'augmentation du nombre d'itérations va dans le sens de ce qui a été observé pour la stratégie PBAMR, dans une proportion toutefois plus importante (facteur inférieur à 1.1).

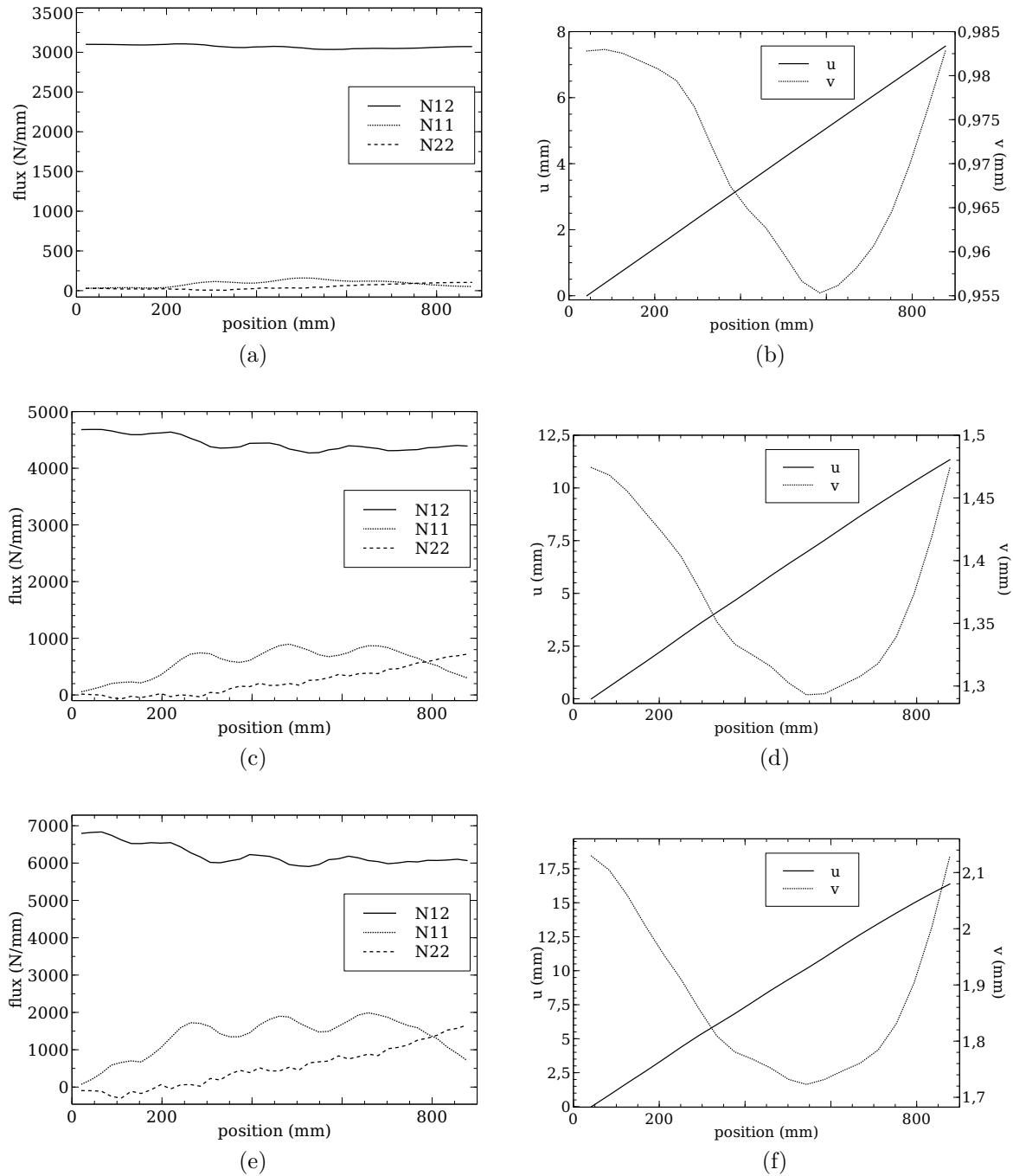


FIGURE 4.6 – Efforts de membrane (a, c et e) et champs de déplacement (b, d et f) le long du raidisseur artificiel entre les domaines 1 et 2, mesurés aux incrément 3 (a et b), 6 (c et d) et 10 (e et f).

La mesure des temps de calcul pour la résolution de chacune des itérations permet d'établir des temps moyens par itération. Dans le cas de la stratégie PBAMR-DD le temps moyen par itération correspond à celui d'une itération de résolution d'un système réduit. Pour la méthode NKS-NLL, il s'agit d'une résolution d'un système non-réduit. Le temps moyen pour une itération enrichie d'une complétion est présenté à part. Un bilan des gains réalisés par itération est donné par la Figure 4.7. Sachant que la taille des problèmes locaux et d'interface est très inférieure à celle du problème entier, les ordres de grandeur du rapport entre les

		itérations globales (nombre)	itérations locales (nombre)	dont complétions (nombre)	itération (temps moy. en ms)	complétion (temps moy. en ms)
PBAMR-DD	global	30	-	4	2.5	20
	dom. 1	-	49	0	7	0
	dom. 2	-	55	4	28	450
	dom. 3	-	49	0	21	0
	dom. 4	-	53	0	10	0
NKS-NLL	global	23	-	-	15	-
	dom. 1	-	37	-	39	-
	dom. 2	-	39	-	360	-
	dom. 3	-	36	-	250	-
	dom. 4	-	42	-	94	-

TABLEAU 4.1 – Récapitulatif des performances de la méthode PBAMR-DD en comparaison avec la méthode de NKS avec localisation non-linéaire (NKS-NLL).

itérations sont comparables à ceux obtenus avec la stratégie PBAMR. En ce qui concerne les itérations globales, il faut préciser que les systèmes ont été résolus de manière directe.

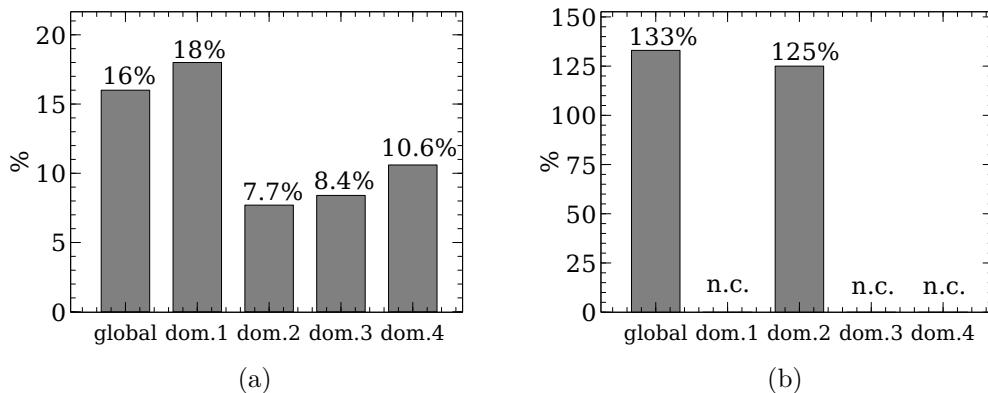


FIGURE 4.7 – Ratio (en %) entre les temps de résolution des itérations par la stratégie PBAMR-DD et par NKS-NLL . (a) itérations réduites, (b) itérations enrichies d'une complétion.

En Figure 4.8, il est intéressant de noter que le calcul des compléments de Schur locaux est réduit dans des proportions équivalentes à la réduction des itérations locales (factorisation de la matrice tangente locale projetée dans un sous-espace réduit).

Enfin, le déséquilibrage des charges induit par la différence de non-linéarité entre les sous-domaines, et observé pour les méthodes NKS avec localisation non-linéaire (voir sous-section 2.3.4), ne semble, quant à lui, pas amélioré par la stratégie PBAMR-DD. Même si dans ce cas, le déséquilibrage provient avant tout de la différence de dimension des problèmes locaux, l'écart de coût entre les sous-domaines à comportement quasi-linéaire et celui qui est soumis à du post-flambement, est amplifié par le coût de l'adaptivité. Néanmoins, le coût de résolution du problème local du sous-domaine 2 est réduit par rapport à sa version non-réduite.

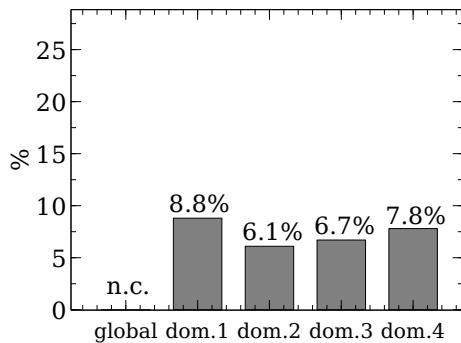


FIGURE 4.8 – Comparaison des temps de calcul des compléments de Schur locaux. Ratio entre la condensation réduite et la condensation non-réduite.

Pour pouvoir parler du gain en temps de calcul apporté par la stratégie PBAMR-DD, il faut cependant que le nombre d’itérations (locales et globales) soit proche. Dans le cas présent, l’écart nous semble trop important pour négliger les opérations d’assemblage des opérateurs induites. Le gain annoncé serait donc trop dépendant du code de mise en œuvre de la stratégie. À ce stade, il paraît donc intéressant d’envisager l’utilisation d’une méthode d’intégration sur un domaine réduit, comme celles introduites en sous-section 2.2.2, et mises en œuvre par [Kerfriden *et al.*, 2012] dans le cadre d’une partition du domaine d’étude. De tels développements pourraient constituer une voie d’amélioration intéressante des stratégies PBAMR et PBAMR-DD.

Malgré cela, le cas du panneau raidi artificiellement permet de valider le concept de partitionnement de la réduction de modèle adaptative en montrant notamment l’indépendance du déclenchement des complétions des bases réduites d’interface et des sous-domaines et la réduction du coût des étapes locales et globales.

## 4.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, une stratégie dédiée à la résolution de problèmes de post-flambement local de structures raidies est proposée et mise en œuvre. Comme pour la stratégie PBAMR, le post-flambement initial est considéré et l’idée de constitution d’une base réduite initiale minimale, en phase *online*, est conservée. Mais une réponse est apportée au caractère local du phénomène par la combinaison avec une méthode de décomposition de domaine primaire.

La partition de la réduction de modèle par projection est ainsi formalisée. Contrairement aux précédentes approches de combinaison de méthodes de réduction de modèle et de décomposition de domaine [Craig et Bampton, 1968 ; Kerfriden *et al.*, 2012], le problème d’interface est réduit. Comme les problèmes grossiers utilisés en décomposition de domaine, le problème réduit à l’interface doit permettre une meilleure extensibilité de la stratégie. Les bases réduites par sous-domaine et pour le problème d’interface peuvent être définies de plusieurs manières. Nous nous sommes restreint dans cette thèse au cas d’un flambement localisé à l’intérieur d’un sous-domaine, ce qui permet de constituer les bases réduites locales indépendamment par sous-domaine au prix d’un découpage adapté. La procédure d’adaptation *à la volée* est ensuite rationalisée. Des critères sont donc définis pour le déclenchement indépendant des complétions des bases réduites locales et de l’interface. La localisation non-linéaire réduite est enfin utilisée pour différentier le traitement des non-linéarités locales et

ce à moindre coût.

La stratégie PBAMR-DD est comparée avec la stratégie PBAMR et la méthode NKS avec localisation non-linéaire. Les résultats obtenus permettent d'une part de valider l'indépendance des complétions locales et d'autre part de mettre en lumière les gains potentiels en termes de temps de calcul. Néanmoins, l'étude s'est limitée à un seul modèle et l'influence des paramètres, à savoir les paramètres de compléition locaux et à l'interface, et les paramètres de convergence des étapes de localisation non-linéaire réduite, mériterait d'être investiguée davantage. La suite des travaux sur cette stratégie doit se concentrer sur ces aspects, ainsi que sur les problématiques du flambement successif dans les sous-domaines voisins et des possibles interactions entre flambements locaux. La problématique du changement de mode (*mode switching*) reste également à résoudre mais est inhérente à la stratégie PBAMR.

De la même façon que pour la stratégie PBAMR, les hypothèses sur le comportement de la structure ont finalement permis de proposer une stratégie sur-mesure. Malgré une contrainte supplémentaire sur le découpage en sous-domaines, il est intéressant de constater le bénéfice mutuel que s'apportent les méthodes combinées dans cette stratégie. Une extension de cette stratégie a été envisagée, notamment à travers la constitution efficace de bases réduites initiales pour des flambements non-locaux au sens du découpage en sous-domaine. L'accélération de la résolution des itérations de compléition des bases réduites (globale et locales), à travers un solveur itératif adapté, peut également faire partie des voies d'études pour améliorer les performances de la stratégie.



---

# Une bibliothèque Python pour le développement de stratégies de calcul avancées

---

**Résumé**

Ce chapitre est le fruit des réflexions menées pendant la thèse sur la définition d'un outil modulaire pour l'aide au développement de stratégies de résolution en mécanique des structures. Le paradigme objet, offert par le langage Python, déjà utilisé pour le code de recherche développé initialement, permet d'envisager une boîte à outil pour le chercheur qui souhaite implémenter et tester des méthodes de résolutions sur des cas représentatifs avec une grande souplesse.

**Sommaire**

---

5.1	Introduction	134
5.2	Programmation orientée objet pour les éléments finis et les méthodes de résolution associées	135
5.3	Conception de la bibliothèque ICAFE	136
5.3.1	Les méthodes et leurs contraintes	136
5.3.2	Organisation générale	137
5.3.3	Zoom sur le package domain	139
5.3.4	Zoom sur le package mesh	142
5.3.5	Implémentation pour le calcul parallèle	145
5.4	Bilan du chapitre	148

---

## 5.1 Introduction

Le développement de méthodes de résolution nécessite de disposer d'un code pour leur implémentation et l'étude de leurs performances numériques. Pour développer efficacement de nouvelles méthodes ou stratégies de résolution, il faut pouvoir réutiliser tout ou partie des développements existants ou greffer des fonctionnalités à différents endroits dans l'architecture d'un code éléments finis. Cela peut se situer au niveau d'un seul ou d'un ensemble d'éléments, comme au niveau d'un domaine géométrique, ou encore celui d'une formulation ou d'un solveur.

La parallélisation est également importante. On peut considérer deux types de parallélisme selon l'architecture, sachant que les deux types peuvent être associés dans une même application. Il y a donc le parallélisme à mémoire distribuée et le parallélisme à mémoire partagée. Le premier permet de lancer des calculs sur des clusters de calcul à architecture distribuée, mais est plus intrusif que le second en termes de programmation. C'est pourquoi il est nécessaire de le prendre en compte dès la conception du code.

Enfin, il est important pour un laboratoire de recherche de capitaliser les développements réalisés au fil des années, des contrats et des thèses. Cela donne une cohérence supplémentaire et accélère les avancées de la recherche. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que toutes les méthodes ne peuvent être implémentées dans un même code. À moins d'avoir identifié clairement tout un pan de recherche relatif à quelques méthodes, qu'il sera possible d'explorer avec un seul et même outil, l'investissement d'un laboratoire doit être mesuré. Les éditeurs de logiciels commerciaux sont d'ailleurs confrontés aux limites des choix initiaux en termes de langage ou de conception, et le changement représente alors un coût (en temps et en argent) qui peut freiner les velléités en termes d'innovation.

Nous avons donc choisis de capitaliser les développements sous la forme d'une bibliothèque écrite en langage Python [Van Rossum et Drake, 2001] de manière orientée objet, que nous avons nommée ICAFE (Institut Clément Ader Finite Elements). Le format d'une bibliothèque se prête en effet à la réutilisation de tout ou partie des développements. La cohérence des composantes de cette bibliothèque permet d'associer les fonctionnalités désirées dans un programme nouveau. Enfin, ce format est favorable au développement incrémental, par couches successives. Le paradigme objet augmente par ailleurs la modularité et la rapidité de développement de greffons. Pour finir, le langage Python, de plus en plus utilisé pour la recherche scientifique, tous domaines confondus, est privilégié pour plusieurs raisons. La première tient de la simplicité et de la rapidité de développement permises par ce langage interprété grâce à un typage dynamique et une syntaxe épurée. La lisibilité du code est également renforcée par la sensibilité aux tabulations. La question de la performance est souvent un argument formulée à l'encontre de ce langage. Bien que pour certaines applications critiques il soit préférable de travailler avec des langages plus proches de la machine (C/C++/Fortran), il est tout à fait possible d'utiliser Python pour du calcul haute performance [Klöckner et al., 2009]. D'autant plus que Python peut faire appel à des fonctions en C/C++ ou Fortran de manière efficace et relativement simple pour le programmeur [Behnel et al., 2011]. Certaines bibliothèques Python d'algèbre linéaire sont d'ailleurs implémentées en C (basées sur LAPACK, ATLAS, PETSc). Dans le but de développer de méthodes avancées, de démontrer des concepts, de tester et comparer des algorithmes, Python apparaît donc comme un bon compromis en termes d'investissement en programmation de la part des chercheurs et de performance des codes de calcul scientifique.

Premièrement, un bref état de l'art des concepts proposés pour la programmation orientée objet de la méthode des éléments finis en mécanique des structures, ainsi que pour les

méthodes de décomposition de domaine, est présenté dans ce document. Dans un second temps, la conception retenue et l'état actuel de la bibliothèque ICAFE, sont exposés. Cet outil de recherche n'est pas achevé au terme de cette thèse, aussi les outils de collaboration et de gestion de version sont introduits dans un troisième temps.

## 5.2 Programmation orientée objet pour les éléments finis et les méthodes de résolution associées

La programmation orientée objet offre plus de modularité, de ré-utilisabilité et de flexibilité qu'une programmation procédurale. De plus en plus d'outils de simulation numérique, académiques ou industriels, reposent sur le paradigme objet, notamment en langage C++. Les concepts de base de la programmation orientée objet peuvent se résumer à l'encapsulation, l'héritage et le polymorphisme [Meyer, 1988]. Cependant de nombreux patrons de conception peuvent être constitués à partir de ces simples concepts [Wolfgang, 1994 ; Gamma *et al.*, 1999]. Ces patrons de conception (ou *Design Patterns*) répondent à des problématiques récurrentes en conception logiciel. [Heng et Mackie, 2009] ont proposé des *Design Patterns* pour la conception d'un code éléments-finis. Nous proposons une brève revue des conceptions choisies dans la littérature.

Dans le cadre de la simulation numérique par la méthode des éléments-finis, des recherches ont donc été menées sur la façon de concevoir un code modulaire qui réponde aux forts besoins d'évolutivité de la méthode (formulation de nouveaux éléments, nouvelles équations constitutives, nouvelles méthodes de résolution, ...). Des classes de base qui décrivent les entités d'un modèle éléments finis (degré de liberté, noeud, élément, maillage) ont été introduites par [Miller, 1988]. La formulation du problème en est indépendante et peut former une autre classe [Peskin et Russo, 1988]. Dans un cadre non-linéaire matériau, le point de Gauss et le matériau peuvent avantageusement faire partie des objets de base [Menétrey et Zimmermann, 1993]. [Dubois-Pelerin et Pegon, 1998] se sont concentrés sur la conception des objets supervisant le modèle éléments finis pour l'analyse non-linéaire. Une classe `Problem` contient le modèle, une méthode de continuation et une méthode de résolution. La méthode de résolution peut faire appel à des classes dérivées d'une classe abstraite (i.e. dont certaines méthodes ne sont pas implémentées) `NonLinearSolver` ou d'une classe abstraite `LinearSolver` selon les caractéristiques du problème. Il est alors aisé d'ajouter des classes `NewtonRaphson`, `ModifiedNewtonRaphson` ou `BFGS` qui implémentent la classe `NonLinearSolver`. De la même façon l'ajout de solveurs linéaires est simplifié par les classes abstraites qui définissent les entrées/sorties et les méthodes des solveurs linéaires et non-linéaires.

La problématique d'amélioration de la performance numérique a été abordée par [Pantale, 2005] à travers la parallélisation de l'assemblage dans un code orienté objet, ayant sensiblement la même structure de classe que celle présentée plus tôt. L'encapsulation des données dans les classes de manière hiérarchisée (du degré de liberté au maillage complet) donne en effet une indépendance entre les éléments qui permet de paralléliser très directement le calcul des opérateurs élémentaires, via un protocole de *multi-threading* à mémoire partagée comme OpenMP [Dagum et Menon, 1998]. La parallélisation de la résolution peut se faire également par l'implémentation de méthodes de décomposition de domaine. Dans une bibliothèque existante (logiciel ZéBuLoN [Northwest Numerics, 2013]), [Gosselet, 2003] a ainsi proposé l'ajout d'une classe `PARALLEL_FORMULATION`. Cette classe dérive d'une classe `IT_S_OPERATOR`

qui réalise les opérations classiques d'une boucle d'un solveur itératif `ITER_SOLVER` (produit matrice/vecteur, produit scalaire, préconditionnement, projection). La formulation parallèle repose sur une description des sous-domaines et de leurs interfaces par des objets spécifiques. Le traitement de chaque sous-domaine est affecté à un processeur, ce qui assure la localisation des données. Les degrés de liberté d'interface sont également stockés au niveau local dans une classe `BOUNDARY`. Une représentation des interfaces locales entre les domaines deux à deux (par connectivité) est privilégiée pour la communication entre les sous-domaines voisins. Les opérateurs d'interface (complément de Schur, préconditionneur, scaling, second membre condensé) sont aussi représentés par une classe qui dérive de la classe `B_OPERATOR`. Grâce à une instance d'une classe `EXCHANGER` qui propose des méthodes de communication (envoie et réception de message), la résolution itérative du problème d'interface (par un algorithme de type Krylov) peut être effectuée en parallèle. Les objets "compléments de Schur" disposent ensuite d'une méthode pour la localisation de la solution à l'intérieur des sous-domaines. Cette implémentation orientée objet de la méthode de décomposition de domaine autorise la définition de plusieurs types d'interface (primale, duale ou mixte) et l'ajout de différents opérateurs comme les préconditionneurs, les scalings, les problèmes grossiers.

En ce qui concerne la réduction de modèle, [Aquino, 2007] a proposé un implémentation orientée objet de la POD. Une classe `POD` gère le sous-espace (snapshots, matrice de corrélation, base réduite POD). Le modèle réduit est également représenté par une classe `ReducedModel` qui réalise l'intégration des opérateurs élémentaires dans le sous-espace réduit plutôt que de projeter le système assemblé. La classe `ReducedModel` hérite, comme la classe `FullFEModel` du modèle complet, d'une classe `BasePDE`, ce qui rend possible le passage d'un modèle complet à un modèle réduit, et permet d'ajouter d'autres types de modèles réduits.

Une implémentation orientée objet de la méthode XFEM est proposée dans [Bordas *et al.*, 2007]. D'une part, les classes de base d'un code éléments finis sont modifiées, ceci notamment pour intégrer l'ajout de degrés de liberté à certains nœuds. Le calcul de la matrice d'interpolation et de la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation des éléments est adapté pour prendre en compte l'enrichissement. Au niveau du problème global, l'enrichissement mène parfois à des dépendances linéaires dans la matrice de raideur qui sont supprimées par une méthode spécifique. D'autre part, des classes supplémentaires sont créées pour gérer les fonctions d'enrichissement (`EnrichmentFunction`) et la description des entités physiques et géométriques nécessitant un enrichissement tels que les fissures, les trous ou les interfaces entre matériaux. Une classe particulière pour les règles d'intégration numérique est proposée (classe `IntegrationRule`) ce qui permet de dériver plusieurs méthodes de la littérature [Belytschko *et al.*, 2009].

## 5.3 Conception de la bibliothèque ICAFE

La conception de la bibliothèque ICAFE répond à un cahier des charges concernant le type de méthode qu'elle doit permettre de développer. Sans pouvoir tout implémenter à court terme, il est nécessaire d'anticiper les contraintes qui pourraient empêcher l'extension rapide vers les différents types de méthodes identifiés.

### 5.3.1 Les méthodes et leurs contraintes

L'étude bibliographique des stratégies de résolution avancées en Chapitre 2 a permis de mettre en lumière quelques approches actuelles mais il n'est bien sûr pas envisageable de

construire un code de recherche qui les intègre toutes. Au regard des travaux de cette thèse, des perspectives qui sont ouvertes, et des activités du laboratoire en termes de développement de méthodes numériques [Passieux *et al.*, 2013b ; Gogu *et al.*, 2010] certaines méthodes, et leur combinaison, sont privilégiées. Nous présentons ces méthodes et les contraintes associées en termes de fonctionnalités d'un code de recherche :

- **Décomposition de domaine** : différentes méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement ont été présentées en Chapitre 2. Plusieurs types de raccords doivent pouvoir être définis afin d'étudier leur influence pour un problème donné, les préconditionneurs et les problèmes grossiers les plus adaptés. Il peut être également intéressant de définir une décomposition de domaine imbriquée (multi-niveaux) pour traiter efficacement des problèmes fortement multi-échelles.
- **Réduction de modèle par projection** : ces méthodes nécessitent de pouvoir construire une base réduite et de réaliser une projection de Galerkin du système d'équations. L'introduction de cette fonctionnalité, dans un solveur, ne présente pas de difficulté particulière. L'intégration réduite des équations d'équilibre doit cependant être possible pour améliorer les performances de la réduction de modèle comme cela est envisagé pour les stratégies PBAMR et PBAMR-DD (voir sous-section 2.2.2 et Chapitre 4).
- **Méthodes X/GFEM** : l'enrichissement d'interpolation par les méthodes X/GFEM offre une grande flexibilité pour augmenter le degré d'interpolation ou introduire une description implicite de la géométrie. Pour cela, il faut prévoir l'ajout de degrés de liberté aux noeuds et leur association avec des fonctions d'enrichissement. Les fonctions d'enrichissement doivent pouvoir faire appel à une description implicite de la géométrie (e.g. fonctions *level set*). Cette fonctionnalité permettrait d'approfondir l'étude de l'approche par enrichissement en post-flambement local présentée en Annexe A.
- **Méthodes multi-grilles** : dans ces méthodes, plusieurs discréétisations sont associées à la même zone géométrique, et celles-ci ne sont pas toujours imbriquées et ne coïncident pas forcément entre elles sur leurs contours. Il est donc important de pouvoir associer plusieurs maillages à une zone géométrique et de pouvoir construire les opérateurs de prolongation et de restriction qui permettent de transférer l'interpolation d'un champ d'un maillage à un autre. Certaines méthodes multi-grilles (Arlequin [Ben Dhia, 1998]) font évoluer un maillage raffiné local par dessus un maillage grossier (suivi d'un phénomène local, propagation de fissure) [Ben Dhia et Jamond, 2010 ; Passieux *et al.*, 2013b].

### 5.3.2 Organisation générale

La bibliothèque ICAFE ne vient pas se greffer sur un outil existant, ce qui laisse plus de liberté mais oblige à traiter l'ensemble des composantes d'un code éléments-finis. La Figure 5.1 montre l'organisation de la bibliothèque proposée sous la forme d'un diagramme UML ([www.uml.org](http://www.uml.org)). Elle s'articule autour de package (ensemble de classes) pour en faciliter la réutilisation par entité fonctionnelle. Chaque package est représenté avec ses classes principales.

Nous proposons ainsi sept packages relatifs aux différentes fonctionnalités d'un code éléments-finis. Les quatre packages qui suivent regroupent des fonctionnalités génériques d'un code éléments finis :

- le package **problem** fournit les outils pour définir un problème mécanique à résoudre, une ou plusieurs fois, sur un domaine donné par une méthode donnée. La classe **Problem** contient donc des instances des classes des autres packages et des méthodes pour

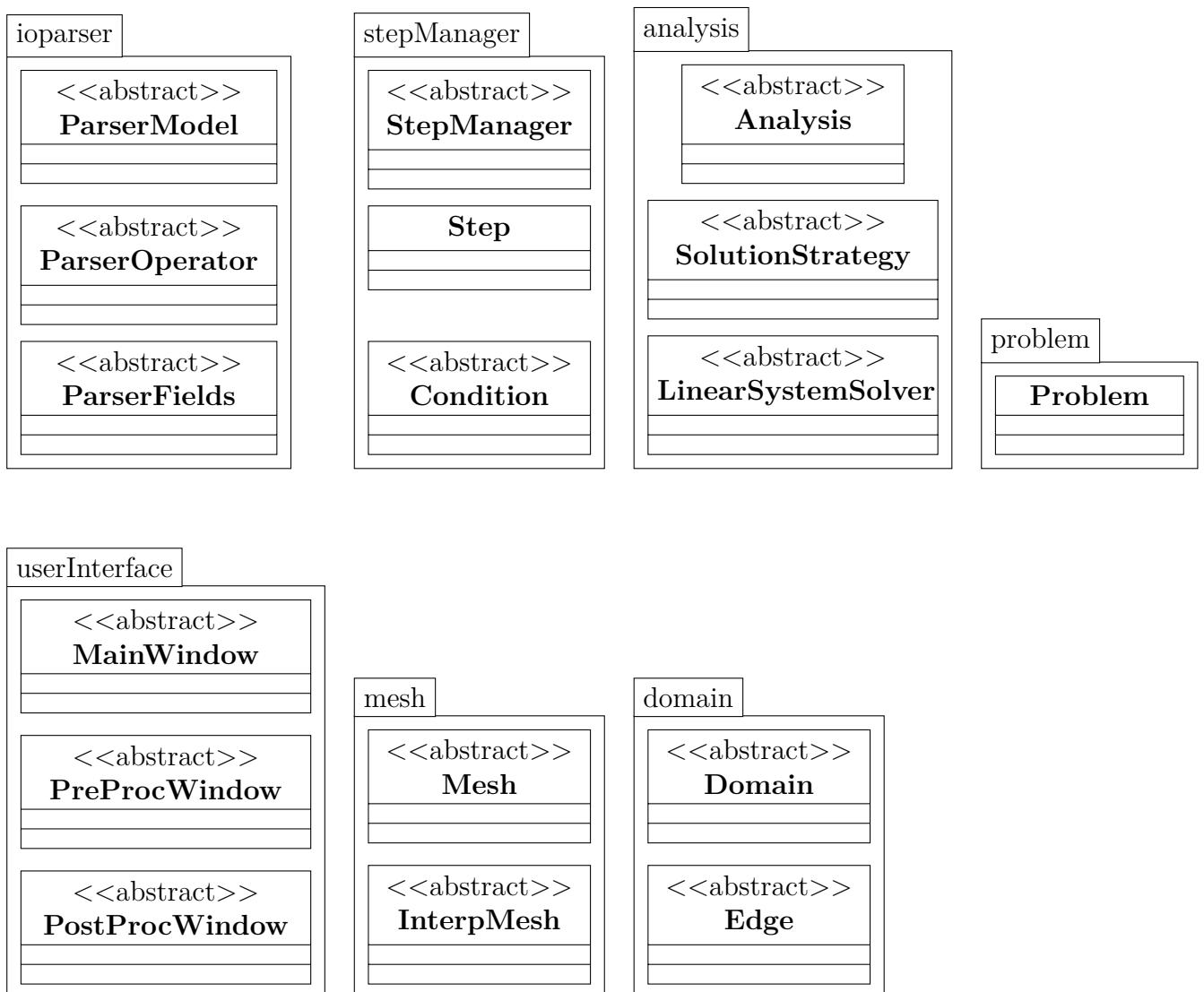


FIGURE 5.1 – Organisation en package de la bibliothèque ICAFE

initialiser et lancer la (multiple) résolution du problème.

- le package `ioparser` regroupe les outils pour la lecture et l'écriture de fichier de données, sur la description du modèle discréte (classe `ParserModel`), sur les opérateurs (classe `ParserOperator`) ou sur les résultats du calcul (classe `ParserFields`).
- le package `userInterface` permet d'implémenter des interfaces utilisateurs pour la gestion des paramètres d'exécution, de chargement, de résolution, etc. (classe `PreProcWindow`). Des fenêtres de visualisation des résultats peuvent également y être implémentées (classe `PostProcWindow`).
- le package `stepManager` offre un cadre pour la programmation de méthodes de gestion et de pilotage du chargement et des conditions limites. La classe `StepManager` permet d'organiser les cas de chargements et les méthodes associées (dans la classe `Step`). Chaque cas de chargement est une combinaison de conditions limites de Neumann ou Dirichlet (classe `Condition`).

Ces packages viennent en support du cœur de métier de la bibliothèque ICAFE, qui reste les méthodes de résolution. Le développement de celles-ci se fait au niveau des packages `analysis`, `domain` et `mesh` :

- le package `analysis` est articulé en trois classes qui représentent les différents niveaux de résolution d'un problème mécanique. La classe abstraite `Analysis` s'implémente pour chaque type d'analyse (statique, dynamique, ...) et définit les opérateurs et schémas incrémentaux-itératifs requis. Pour la résolution des équations d'équilibre, elle fait appel à une stratégie de résolution, implémentation de la classe abstraite `SolutionStrategy`. Enfin, au plus bas niveau de résolution sont définis des solveurs de système linéaire à partir de la classe `LinearSystemSolver`.
- le package `domain` sert à la représentation des domaines géométriques d'un modèle. La classe `Domain` et la classe `Edge` permettent de décrire un domaine et ses bords. Un domaine est capable de construire ses opérateurs grâce aux instances de la classe `Mesh` qu'il contient (voir point suivant).
- le package `mesh` contient la discréétisation d'un domaine (implémentation de la classe abstraite `Mesh`). La classe `InterpMesh`, qui hérite de la classe abstraite `Mesh`, représente une interpolation sur un bord de domaine. Elle n'implémente pas de méthode de calcul d'opérateur de raideur ou de masse, mais peut construire un vecteur second membre.

Nous détaillons les caractéristiques originales des derniers packages `domain` et `mesh` dans les sous-sections qui suivent. L'implémentation du package `analysis`, notamment pour le lien entre solveur de système linéaire et formulation parallèle, s'est inspirée directement de celle proposée dans [Gosselet, 2003].

### 5.3.3 Zoom sur le package `domain`

Un objet de la classe `Domain` représente une géométrie. La description de cette géométrie peut reposer sur un ou plusieurs maillages. Ainsi un objet `Domain` possède plusieurs instances de la classe `Mesh`. Cela permet d'envisager notamment l'implémentation de méthodes multi-grilles par domaine géométrique. Un domaine peut également contenir des objets `Edge` qui en sont simplement une variété géométrique et permettent de définir des conditions sur un bord du domaine (efforts, déplacements). Les objets `Edge` reposent sur les traces des interpolations par éléments-finis du domaine auquel ils appartiennent. Ce sont aussi des entités géométriques définies par un ou plusieurs maillages mais qui sont réduits à leurs interpolations (instances de la classe `InterpMesh`).

La décomposition de domaine (avec ou sans recouvrement) engendre la définition de

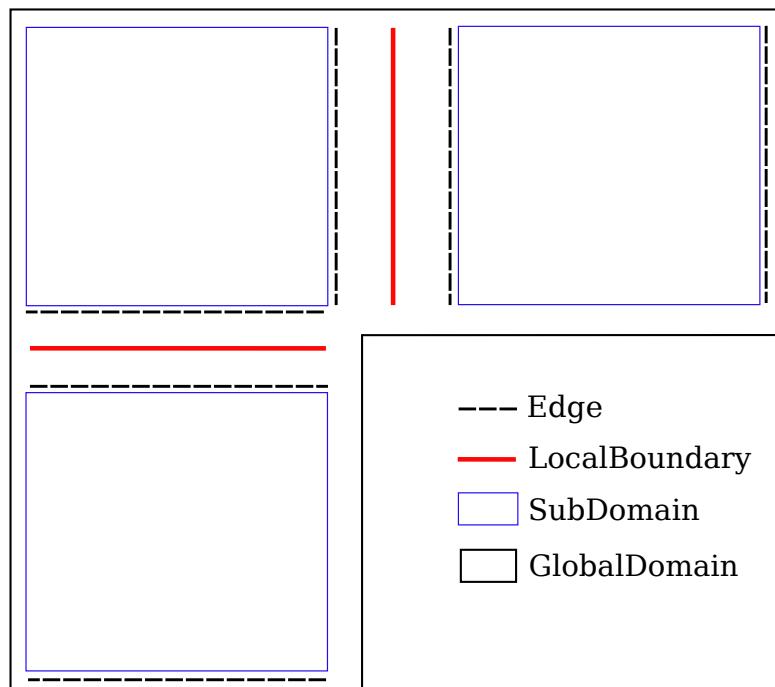


FIGURE 5.2 – Illustration de la description des sous-domaines, de leurs bords et des interfaces locales dans la bibliothèque ICAFE

plusieurs sous-domaines qu'il faut pouvoir raccorder. Nous proposons de gérer le découpage en sous-domaines au niveau géométrique, c'est à dire au sein du package `domain`. D'après les travaux de [Gosselet, 2003], les interfaces entre domaines doivent être définies deux à deux. Nous respectons ce principe en associant dans une interface locale `LocalBoundary` les objets `Edge` de deux domaines voisins. L'interface locale possède sa propre interpolation et ses propres degrés de liberté (objet `InterpMesh`) afin qu'il soit possible de définir par exemple des opérateurs *mortar* entre les `Edges` de part et d'autre de l'interface, ou bien de différencier inconnues d'interface et inconnues des sous-domaines dans le cadre de la localisation mixte (voir sous-section 2.3.4). Le schéma Figure 5.2 récapitule la description géométrique choisie.

La question se pose alors sur la gestion de l'ensemble des sous-domaines et de leurs interfaces locales (éventuellement redondantes). Pour y répondre, nous proposons de créer deux classes d'objets qui sont des domaines avec des fonctionnalités supplémentaires :

- la classe `SubDomain` est un domaine qui sait construire son complément de Schur en fonction des interfaces locales avec ses voisins. Elle possède également une méthode de localisation.
- la classe `GlobalDomain` est également un domaine. Elle permet de gérer un ensemble de sous-domaines et leurs interfaces locales. La connectivité globale y est construite par assemblage des interfaces locales.

Nous introduisons à ce stade le *pattern decorator*. Il permet en effet de réaliser une particularisation dynamique d'un domaine (en `SubDomain` ou `GlobalDomain`). L'idée est de gagner en flexibilité et de permettre une décomposition de domaine à la volée. La classe `DomainDecorator` transforme une instance de la classe `Domain` ou d'une classe qui en hérite, en surchargeant ou en ajoutant des méthodes et des attributs. Le *pattern decorator* prévoit que la classe `DomainDecorator` hérite elle-même de la classe `Domain` afin qu'un objet "décoré" puisse être "décoré" à nouveau dynamiquement et soit toujours vu de l'extérieur comme un objet `Domain`. La classe `DomainDecorator` est explicitée ici :

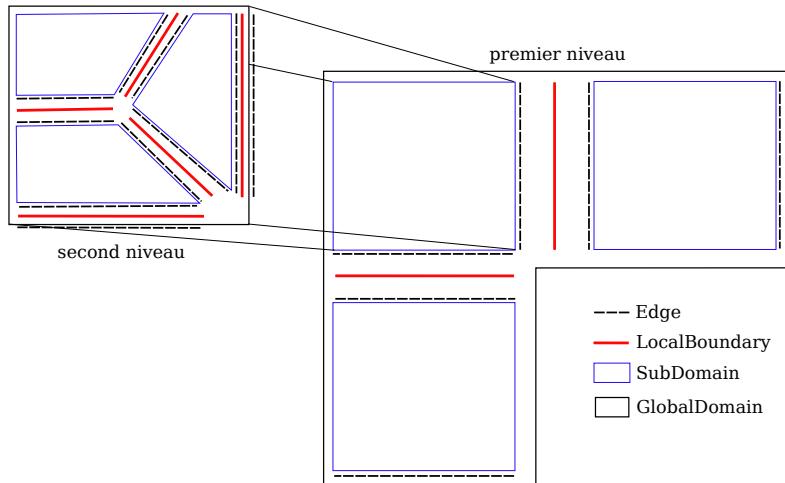


FIGURE 5.3 – décomposition de domaine multi-niveaux

```
class DomainDecorator(Domain):
    def __init__(self, instanceOfDomain):
        '''Constructeur du decorateur.'''
        # recuperation des attributs de l objet Domain a decorer
        meshes = instanceOfDomain.meshes
        edges = instanceOfDomain.edges
        ...
        # constructeur de Domain
        super(DomainDecorator, self).__init__(self, meshes, edges, ...)
```

Les classes `GlobalDomain` et `SubDomain` sont donc des décorateurs de domaine dans le sens où ils décrivent un domaine géométrique discrétré avec des bords. Pour autoriser la décomposition de domaine multi-niveaux (voir Figure 5.3), il faut ensuite fournir à la classe `GlobalDomain`, les méthodes d'un sous-domaine (calcul de compléments de Schur et localisation), par exemple par héritage multiple. Il faut également prendre la précaution de définir des interfaces locales entre les sous-domaines et les bords du `GlobalDomain` afin de pouvoir y condenser ses opérateurs.

Le *pattern decorator* est également utile pour définir le type d'interface locale. La classe `BoundaryDecorator` permet de modifier le comportement d'une instance de la classe `LocalBoundary`. Notamment, lorsqu'elle est de type mixte, il est important que l'interface construise les opérateurs d'assemblage adaptés (deux fois plus d'inconnues) et assure l'échange des opérateurs de raideur d'interface. Le type d'interface étant défini localement, il est possible de les associer dans un même problème. Cependant le calcul du complément de Schur des sous-domaines en est modifié. Par exemple, [Gosselet, 2003] a formulé un complément de Schur dans une approche hybride primaire-duale. En Annexe B, nous étendons cet approche hybride aux interfaces mixtes. Avec ce type de formalisme, la méthode de calcul du complément de Schur d'un sous-domaine est rendue générique. Toutefois il est préférable de définir une classe abstraite `Schur` et ses différentes implémentations pour maximiser la modularité du code, à l'instar de la proposition de [Gosselet, 2003]. De même, afin d'envisager l'implémentation de la localisation mixte, la méthode de localisation des sous-domaines doit faire appel à une instance de classe dérivant d'une classe abstraite `Localise`.

La conception générale du package `domain` est résumée dans le format UML en Figure 5.4.

### 5.3.4 Zoom sur le package `mesh`

Le package `mesh` fournit les classes pour la construction des opérateurs des équations d'équilibre sur un domaine discréteisé par éléments finis. La classe abstraite `Mesh` définit un maillage contenant notamment des degrés de liberté, des noeuds, des éléments, mais dont la fonction d'assemblage des opérateurs n'est pas implémentée. En effet, nous proposons de dériver deux types de maillages :

- la classe `OwnedMesh` implémente un maillage propre à la bibliothèque ICAFE, réalisant l'intégration et l'assemblage des opérateurs grâce aux éléments dont il est constitué.
- la classe `InterfacedMesh` implémente un maillage interfacé avec un code externe ayant la capacité d'assembler les opérateurs du modèle éléments-finis. Cette sous-traitance permet de se concentrer sur la résolution du problème tout en ayant accès à des fonctionnalités de modélisation avancée, possédées par le code externe. Les classes du package `ioparser` sont utilisées pour l'écriture de fichier d'entrée et la lecture des opérateurs renvoyés par le code externe. Selon les codes externes, il est possible de définir un interfaçage dynamique (par librairie dynamique) sans passer par la lecture/écriture de fichier.

À ce jour, la classe `InterfacedMesh` a été implémentée dans le cadre d'une lecture/écriture de fichier. Seules les fonctionnalités de parsing pour le logiciel Nastran [Nastran, 2010] ont été implémentées. Avec ce logiciel il est possible d'ordonner, dans le fichier d'entrée, la lecture et l'écriture de fichiers d'opérateurs (matrices de raideur, vecteurs).

Nous implémentons, dans la classe `OwnedMesh`, une façon de prendre en compte l'enrichissement d'interpolation par méthode X/GFEM. La classe `Mesh` possède en attribut une liste de fonctions d'enrichissement (attribut `enrichments`). Les fonctions sont des instances de la classe `Enrichment`, définies sur tout ou partie du domaine interpolé par le maillage. Lorsque les noeuds du maillage n'appartiennent pas au domaine de définition de la fonction, la contribution de leur fonction d'interpolation enrichie n'est pas prise en compte. Un mapping (mise en correspondance) permet de relier les fonctions au type de champ (ou type de degré de liberté) dont elles enrichissent l'interpolation (numéroté entre 0 et 5 pour le cas 3D). Chaque fonction d'enrichissement se voit également associée, toujours par mapping, à un nouveau degré de liberté aux noeuds (à partir du numéro 6 dans le cas 3D).

Pour réaliser l'intégration numérique, les objets "éléments" possèdent des instances de la classe `IntegrationPoint` et des méthodes de quadrature pour déterminer leurs positions. Dans le cas de l'enrichissement de l'interpolation, il faut relier la fonction d'enrichissement à la quadrature et proposer éventuellement des méthodes de partition des éléments [Holdych *et al.*, 2008 ; Belytschko *et al.*, 2009 ; Ventura, 2006 ; Bordas *et al.*, 2007]. Ce point n'a pas été abordé plus en détails dans le cadre de cette thèse, tout comme la description implicite de la géométrie et son lien avec l'enrichissement. Toutefois, de notre point de vue, la capacité d'ajout de degrés de liberté et le lien avec les fonctions d'enrichissement est un des aspects les plus intrusifs des méthodes d'enrichissement d'interpolation, ce qui laisse l'opportunité d'implémenter des méthodes X/GFEM dans la bibliothèque ICAFE dans le cadre de futurs travaux de recherche à l'Institut Clément Ader.

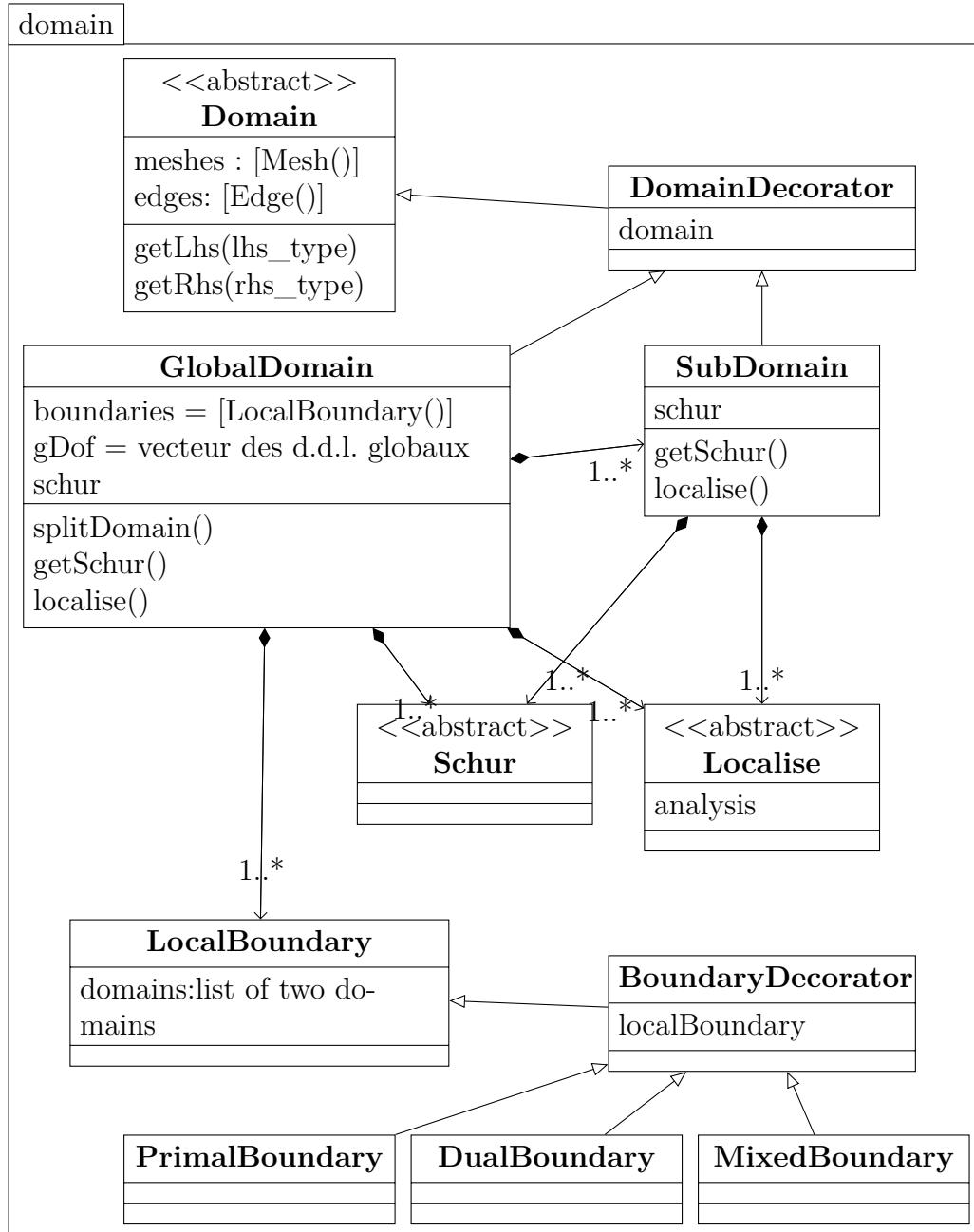


FIGURE 5.4 – Diagramme des classes du package `domain`

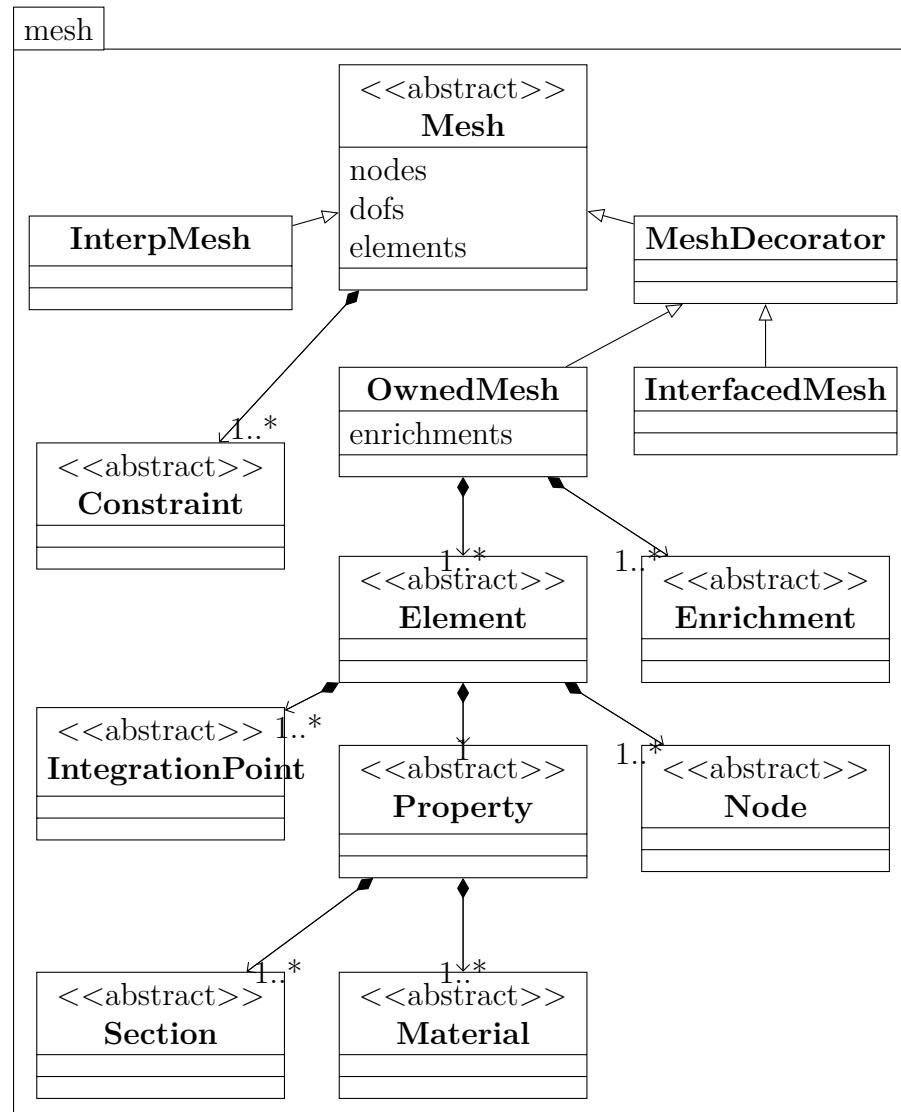


FIGURE 5.5 – Diagramme des classes du package `mesh`

### 5.3.5 Implémentation pour le calcul parallèle

Il existe, en python, plusieurs bibliothèques pour la programmation parallèle en MPI. Pour ce projet, nous avons choisi `mpi4py` développé par [Dalcín *et al.*, 2005 ; Dalcín *et al.*, 2008]. Elle fournit la grande majorité des fonctions des protocoles MPI et MPI-2.

#### Parallélisation dynamique et peu intrusive en décomposition de domaine :

La conception de la bibliothèque ICAFE a pour l'instant été présentée sans aborder les aspects relatifs au parallélisme. Néanmoins il est important de les prendre en compte dès la conception à cause du caractère intrusif des requêtes MPI. Pour une bonne performance, le calcul parallèle doit respecter la localisation des données. En effet, le partage d'information entre les processus engendre des temps de communication et donc d'attente. Dans les méthodes de décomposition de domaine, une attention est portée à ce principe. La programmation orientée objet permet de renforcer la localisation par l'encapsulation des objets. Une stratégie de parallélisation consiste donc à affecter un sous-domaine et ses données à chaque processus. Toutes les opérations d'assemblage, de calcul de complément de Schur (primal et dual) et de localisation sont strictement locales. Dans le cas d'une approche mixte, des échanges de direction de recherche (matrices de raideurs) entre sous-domaines voisins sont nécessaires. La parallélisation du solveur itératif avec problème grossier requiert également des échanges entre les sous-domaines [Gosselet, 2003].

Afin d'assurer la localisation des données tout au long de la simulation, avec des appels successifs aux différentes méthodes des sous-domaines (`getSchur()`, `localise()`) il est possible d'avoir recours à un mécanisme de parallélisation de type *client-server* ou *master-worker*. La fonction MPI `Spawn` permet d'engendrer à la volée une relation *client-server* entre les processus en spécifiant une fonction exécutable. La possibilité de réaliser des appels successifs à différentes méthodes sur les processus *worker* peut être donnée par une fonction `waitForJob` et un passage de mots clés (par *broadcasting*).

Nous avons traduit cette fonctionnalité MPI en donnant la capacité à un `GlobalDomain` d'engendrer des processus pour ses sous-domaines `SubDomain`. Chaque processus engendré via la fonction `spawnProcesses()` de la classe `GlobalDomain`, fait appel à un fichier exécutable `workers.py`. Ce fichier initialise les sous-domaines à partir de leurs données d'entrée (sous forme de fichier ou par réception depuis le `GlobalDomain`) et lance leur fonction `waitForJob()`. Le concept de *Wait For Job*, a été implémenté au niveau du décorateur de domaine comme le montrent la Figure 5.7, la Figure 5.8 et la Figure 5.9.

Les communicateurs (inter et intra) sont des attributs de la classe `DomainDecorator`. Chaque sous-domaine peut donc communiquer avec le `GlobalDomain` qu'il constitue à travers l'inter-communicateur `master`. Les sous-domaines peuvent également communiquer entre eux grâce à l'intra-communicateur `coworkers`. Enfin, un domaine global, ou par imbrication un sous-domaine décoré en `GlobalDomain`, peut avoir des sous-domaines et communiquer avec eux par l'intercommunicateur `workers`.

L'intérêt de cette implémentation réside dans la non-intrusion du parallélisme dans les méthodes locales des sous-domaines. Il est intéressant de noter que la différence entre le programme séquentiel et parallèle concerne simplement les boucles d'appel des méthodes par sous-domaines. Un exemple est donné Figure 5.10.

De plus cela permet une adaptivité de la décomposition de domaine par l'allocation dynamique des processus. Le processus *master*, correspondant à une instance de `GlobalDomain`, gère l'ordonnancement des tâches parallélisées. Mais il peut aussi, par imbrication, avoir

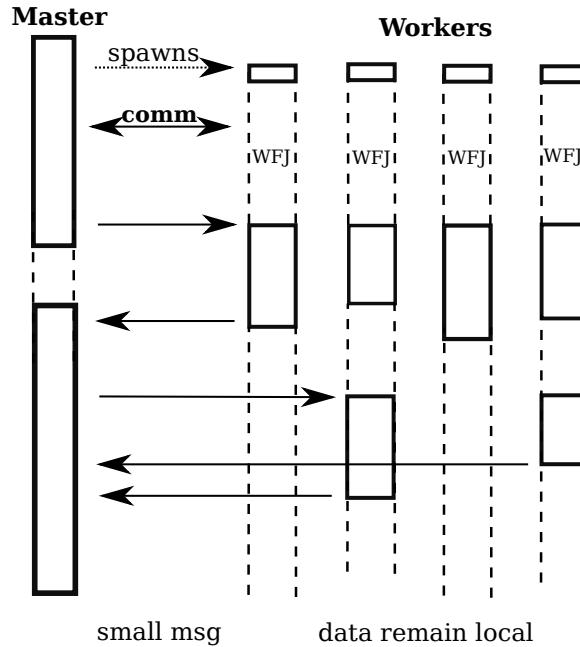


FIGURE 5.6 – Schéma de principe du parallélisme dynamique par la fonction MPI *spawn*. Concept de mise en attente, ou *Wait For Job* (WFJ), des processus esclaves.

```
class DomainDecorator(Domain):

    def __init__(self, instanceOfDomain, intracomm=None,
                 parent_intercomm=None, child_intercomm=None):
        '''Constructeur du decorateur.'''
        # recuperation des attributs de l objet Domain a decorer
        meshes = instanceOfDomain.meshes
        edges = instanceOfDomain.edges
        ...
        # constructeur de Domain
        super(DomainDecorator, self).__init__(self, meshes, edges, ...)
        # inter-communicateur avec un processus 'master'
        self.master = parent_intercomm
        # intra-communicateur entre les processus 'co-workers'
        self.coworkers = intracomm
        # inter-communicateur avec des sous-processus 'workers'
        self.workers = child_intercomm
        # dictionnaire de methodes de communication
        self.jobs = {0: self.recv,
                    1: self.send,
                    2: self.reduce,
                    3: self.scatter,
                    5: self.isend,
                    6: self.irecv,
                    }

```

FIGURE 5.7 – Implémentation du constructeur de DomainDecorator pour le calcul parallèle.

```
def waitForJob(self, parent_intercomm=None, intracomm=None):
    ''' Methode d'attente et de gestion des
        taches ordonnees par le processus maitre'''

    msg=None
    # tant que le maitre ordonne de travailler
    while 1:
        # reception des ordres
        jobid,args,kwargs = self.master.bcast(root=0)

        # interpretation des ordres:
        # les arguments contiennent une methode statique
        if jobid == 'staticmethod':
            args[0](self, *args[1:], **kwargs)
        # ordre de deconnection
        elif jobid=='disconnect':
            try:
                self.workers.bcast((‘disconnect’, [], {}),root=MPI.ROOT)
            except AttributeError:
                pass
            msg='disconnect'
            break

        # ordre de rapatriement des donnees du domaine avant deconnection
        elif jobid==‘domain’:
            msg='domain'

        try:
            # execution d'une methode de communication
            jobid = self.jobs[jobid](*args,**kwargs)
        except KeyError:
            # execution d'une methode du sous-domaine
            msg = self.call_method(jobid,*args,**kwargs)

        if msg:
            break

    return msg
```

FIGURE 5.8 – Implémentation de la méthode `waitForJob` de la classe `DomainDecorator`.

```

def call_method(self, method, *args, **kwargs):
    ''' Appel d'une methode par son nom '''
    try:
        m = getattr(self,method)
    except AttributeError:
        return 0
    else:
        # renvoi le resultat de la methode appelee
        return m(*args,**kwargs)

```

FIGURE 5.9 – Implémentation de la méthode `call_method` de la classe `DomainDecorator`.

```

# gdomain est une instance de GlobalDomain
# calcul des operateurs locaux en sequentiel:
for domain in gdomain.domains:
    domain.computeOperators(lhslist,rhslist)
# calcul des operateurs en parallel:
gdomain.workers.bcast((‘computeOperators’,[lhslist,rhslist],{}),root=MPI_ROOT)

```

FIGURE 5.10 – Implémentation séquentielle et parallélisée du calcul des opérateurs des sous-domaines. Diffusion du mot clé `computeOperators` correspondant au nom de la méthode à exécuter en parallèle.

à réaliser des opérations de condensation et de localisation comme n’importe quel sous-domaine.

## 5.4 Bilan du chapitre

Ce chapitre a présenté les travaux menés dans le cadre de cette thèse sur la conception et la programmation d’un outil de développement de méthodes avancées en calcul de structure. Il s’agit d’un projet à long terme qui a été initié en cherchant à fermer le moins de portes possibles. À ce jour, l’implémentation s’est concentrée, d’une part sur la partie maillage et interface avec le logiciel Nastran afin d’ouvrir la possibilité de traiter des modèles industriels de post-flambement local des structures raidies, et d’autre part sur l’implémentation des aspects relatifs aux domaines et à leur décomposition pour permettre l’étude des différents types de raccords sur la stratégie PBAMR-DD. Des étapes de validation intermédiaires ont permis de conforter certains choix mais le fonctionnement général de la bibliothèque n’a pas pu être attesté. Des dispositions relatives au développement collaboratif ont été prises (dépôt, gestion de version, documentation) pour assurer aussi une continuité avec de futurs travaux.

Ce sont donc essentiellement des concepts qui ont été présentés dans ce chapitre et qui devront être éprouvés par l’implémentation et le test de méthodes avancées, dont celles proposées dans cette thèse en Chapitre 3 et Chapitre 4. Ces méthodes pourront alors être évaluées sur des modèles plus représentatifs des structures aéronautiques raidies. L’extension vers des conditions de raccord duales ou mixtes sera simplifiée.

# **Conclusion**



Ce travail de thèse a contribué à trouver une réponse à la problématique de la simulation du post-flambement local des grandes structures raidies aéronautiques. Ce phénomène non-linéaire résulte d'une instabilité locale dans les structures raidies. Il affecte leur réponse globale et modifie les modes de sollicitation des composants. Des modes de dégradation spécifiques sont en jeu, particulièrement critiques pour des structures composites (décollement peau/raidisseur). Motivée par un besoin de réduction de masse des aéronefs, l'évolution des méthodes de conception vers l'élargissement du domaine de post-flambement rend donc nécessaire la simulation précise de ce comportement multi-échelle non-linéaire. Non-linéarité et multiplicité des échelles sont des caractéristiques qui impactent considérablement le coût de la simulation. Les ressources étant limitées et les besoins croissants, le développement de nouvelles stratégies de calcul s'impose. Nous avons donc cherché dans le cadre de cette thèse, à contribuer à ces développements. Nous avons retenu une approche par combinaison des méthodes de réduction de modèle et de décomposition de domaine en non-linéaire.

Le méthodes de décomposition de domaine en non-linéaire, aussi appelées méthodes de Newton-Krylov-Schur, ont fait l'objet d'un certain nombre de travaux avant cette thèse. Au niveau des itérations du problème global condensé linéarisé, résolu par un algorithme itératif de Krylov préconditionné et augmenté, la réutilisation (sélective) des sous-espaces de Krylov a déjà permis une accélération très importante du calcul. Au niveau local, en présence de non-linéarité localisée, l'imbrication d'un algorithme de Newton a également contribué à mieux prendre en compte le caractère multi-échelle du comportement non-linéaire local dans des travaux précédents. Néanmoins, ces deux approches permettant d'accélérer la simulation de nombreux phénomènes non-linéaires éventuellement localisés, ne tirent pas profit d'une connaissance *a priori* sur le post-flambement local.

L'utilisation d'une compréhension mécanique du post-flambement peut se réaliser par des méthodes de réduction de modèle. La réduction du nombre d'inconnues est une autre approche qui permet d'accélérer la résolution des équations d'équilibre. La constitution d'une représentation réduite a fait l'objet de nombreux travaux pour différentes applications. Par troncature de base modale, par des méthodes statistiques d'analyse d'échantillon vectoriel (POD), par réutilisation de solution calculée (ou de sous-espace de Krylov) ou encore par séparation de variables, les moyens sont multiples mais tous présentent une certaine faiblesse devant les non-linéarités. Seule, la représentation réduite constituée par ces méthodes avant résolution du problème non-linéaire, est généralement très coûteuse et/ou peu robuste. Elle requiert l'adjonction d'une procédure adaptative (par intervalle, à la volée ou *a posteriori*). C'est notamment le cas de la réduction de modèle en post-flambement. Nous avons donc proposé une stratégie de réduction de modèle adaptative pour le post-flambement (PBAMR). Ce qui permet à cette stratégie d'être efficace, c'est sa pertinence par rapport à la description du post-flambement initial donnée par les méthodes semi-analytiques sous forme de développement asymptotique. En effet, d'une part la base réduite initiale minimale (donc peu coûteuse) reprend les deux premiers termes du développement. D'autre part, la non-linéarité de post-flambement, prise en compte dans les termes d'ordres supérieurs du développement asymptotique, permet de ne compléter la représentation réduite qu'une seule fois en moyenne par incrément de charge, jusqu'à près de trois fois la charge critique de flambement (ce qui satisfait les besoins actuels en termes de conception). En effet, l'adaptivité a un coût qu'il convient de limiter en y recourant le moins possible.

Ayant défini une représentation réduite adaptative pour l'utilisation des connaissances *a priori* sur le post-flambement, nous avons proposé de l'introduire dans les méthodes de décomposition de domaine qui, comme mentionné, n'en tiraient pas profit jusqu'alors. Dans le

même temps qu'elle réduit le nombre d'inconnues des problèmes locaux et global issus de la décomposition de domaine, cette combinaison permet de rationaliser le coût de l'adaptivité grâce à un critère de déclenchement multi-niveaux. La réduction de modèle concerne en effet à la fois les problèmes locaux et le problème d'interface. La constitution des bases réduites est également rationalisée dans l'approche présentée.

La stratégie PBAMR est une approche de réduction de modèle purement *online*. Elle peut aussi constituer un moyen de réduire le coût de constitution de *snapshots* pour la représentation du post-flambement dans un domaine paramétrique donné. Sa force réside aussi dans le faible nombre de paramètres, ce qui la rend applicable en milieu industriel. Par ailleurs, l'adaptivité à la volée, qui n'avait pas été appliquée aux non-linéarités géométriques de post-flambement, a montré sa pertinence dans la stratégie PBAMR. La combinaison avec une méthode de décomposition de domaine primale, avec un découpage adapté en sous-domaines, offre une réponse à la problématique du post-flambement local de la peau entre les raidisseurs d'une grande structure raidie aéronautique.

La stratégie PBAMR et sa combinaison avec la décomposition de domaine (PBAMR-DD) présentent cependant quelques limites. Le changement de mode de flambement (*mode switching*), qui peut survenir par la présence de bifurcations secondaires, n'est pas pris en compte. Bien que la procédure adaptative confère une certaine robustesse à la stratégie, le nombre de complétions de la base réduite, en cas de changement de mode, risque de la rendre inefficente. Nous avons proposé quelques pistes pour traiter le *mode switching* (mise à jour de la base réduite, augmentation de la taille initiale, etc.). En ce qui concerne la combinaison avec la décomposition de domaine, bien que la partition soit guidée par des considérations mécaniques (raideur importante des raidisseurs), une contrainte est imposée par l'implémentation actuelle. Le calcul du mode de flambement par sous-domaine est en effet réalisé à interfaces fixes. Cela permet de rendre indépendantes les constitutions des bases réduites par sous-domaine mais impose que les raidisseurs, le long desquels le découpage est réalisé, ne flambent pas. Dans le cadre du post-flambement local des grandes structures raidies, il est possible de se ramener à ce genre de configuration mais cela impose une connaissance *a priori* de la réponse de la structure. Pour plus de flexibilité dans la méthode nous avons également proposé des pistes concrètes pour la prise en compte d'un flambement non local, strictement, au sens de la décomposition en sous-domaine. Les limites de notre étude concernent donc l'extension vers le *mode switching* et le flambement non local en décomposition de domaine, mais aussi l'évaluation de l'influence des paramètres de déclenchement de l'adaptivité et de convergence multi-niveaux pour la stratégie PBAMR-DD.

Les perspectives de ces travaux sont donc les suivantes. La stratégie PBAMR-DD pourrait tirer parti d'une localisation non-linéaire mixte qui a montré qu'elle permettait d'améliorer les performances des méthodes de décomposition de domaine en présence de non-linéarités locales. L'investigation des méthodes de constitution de bases réduites locales pour le post-flambement est aussi une voie d'étude intéressante pour rechercher une façon de les rendre indépendantes par sous-domaine tout en capturant des modes à interfaces non-fixes. L'intégration réduite des équations d'équilibre en réduction de modèle peut permettre d'accélérer la phase d'assemblage des opérateurs qui n'a pas été abordée par les stratégies PBAMR et PBAMR-DD. L'adaptivité de la base réduite d'interface pourrait éventuellement faire appel à des solveurs itératifs et leurs méthodes d'accélérations utilisées pour les problèmes globaux en décomposition de domaine (GIRKS, SRKS, problème grossier). Le post-flambement étant

localisé, il n'est aussi peut-être pas nécessaire de réaliser le calcul d'un vecteur additionnel pour la base réduite d'interface sur l'ensemble de l'interface. La résolution du problème complet sur une restriction de l'interface peut ainsi rationaliser un peu plus le coût de l'adaptivité. On peut aussi imaginer, dans le même esprit, une décomposition de domaine multi-niveaux.

Dans l'idée de constitution d'une représentation réduite du post-flambement dans un espace de paramètre (chargement, géométrie, matériau, séquence d'empilement des composites stratifiés, etc.), il est certainement avantageux de travailler sur des sous-structures (bien moins coûteux). La difficulté réside alors dans l'intégration de ces représentations locales dans un assemblage de sous-structures. La question de la description de l'espace des conditions limites (efforts ou déplacement) aux bords des sous-structures est ici primordiale. Cette question a été abordé dans les travaux de J. Yvonnet pour la POD [Yvonnet et al., 2007] et une voie intéressante est développée par A. Ammar avec la PGD [Ammar et al., 2011]. Ce domaine de recherche constitue clairement une perspective pour nos travaux, dans le but d'évoluer vers une simulation *online* toujours plus performante et de capitaliser des ressources *offline*.

Enfin, en terme d'étude du post-flambement local des grandes structures raidies, les perspectives de nos travaux seraient d'intégrer une analyse locale d'initiation du décollement de raidisseurs sur la base de critères développés précédemment au sein de l'Institut Clément Ader. L'interaction entre les différents flambements locaux présente également un intérêt pour fournir des méthodes de pré-dimensionnement. L'intégration d'une description des incertitudes pourrait permettre d'étudier la sensibilité du post-flambement des grandes structures aux défauts géométriques, matériaux ou de chargement. Et finalement, le lien avec des essais de post-flambement (post-traitement, identification, pilotage dynamique) pourrait être rendu plus performant grâce au développement de méthodes de corrélation d'images avancées sur la base des méthodes de réduction de modèle adaptative [Passieux et Périé, 2012 ; Passieux et al., 2013a ; Bazilevs et al., 2012].



---

# Bibliographie

---

- [Abaqus, 2007] ABAQUS (2007). Abaqus analysis, user's manual, version 6.7. *2 citations pages 97 et 99*
- [Abdoulaev *et al.*, 1999] ABDOULAEV, G. S., ACHDOU, Y., KUZNETSOV, Y. A. et PRUD'HOMME, C. (1999). On a parallel implementation of the mortar element method. *RAIRO-M2AN Modelisation Math et Analyse Numerique-Mathem Modell Numerical Analysis*, 33(2):245–260. *Cité page 66*
- [Alart *et al.*, 2012] ALART, P., ICETA, D. et DUREISSEIX, D. (2012). A nonlinear domain decomposition formulation with application to granular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 205-208:59–67. *Cité page 71*
- [Allix, 1987] ALLIX, O. (1987). Délaminaison : approche par la mécanique de l'endommagement. *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, 50:39–53. *Cité page 47*
- [Almroth *et al.*, 1978] ALMROTH, B.-O., BROGAN, F.-A. et STERN, P. (1978). Automatic choice of global shape functions in structural analysis. *AIAA Journal*, 16(5):525–528. *Cité page 57*
- [Amabili et Touzé, 2007] AMABILI, M. et TOUZÉ, C. (2007). Reduced-order models for nonlinear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : Comparison of POD and asymptotic nonlinear normal modes methods. *Journal of Fluids and Structures*, 23(6):885–903. *Cité page 56*
- [Amdahl, 1967] AMDAHL, G. M. (1967). Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities. In *Proceedings of the April 18-20, 1967, spring joint computer conference*, page 483–485. *Cité page 64*
- [Amini, 2008] AMINI, A. (2008). *Analyse multi-échelle de structures hétérogènes par décomposition de domaine : Application aux navires à passagers*. Thèse de doctorat, Université de Nantes. *2 citations pages 66 et 186*
- [Amini *et al.*, 2009] AMINI, A. M., DUREISSEIX, D. et CARTRAUD, P. (2009). Multi-scale domain decomposition method for large-scale structural analysis with a zooming technique : Application to plate assembly. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(4):417–443. *Cité page 66*
- [Ammar *et al.*, 2011] AMMAR, A., CHINESTA, F. et CUETO, E. (2011). Coupling finite elements and proper generalized decompositions. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(1). *Cité page 153*
- [Ammar *et al.*, 2006] AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3):153–176. *Cité page 63*
- [Aquino, 2007] AQUINO, W. (2007). An object-oriented framework for reduced-order models using proper orthogonal decomposition (POD). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4375–4390. *Cité page 136*

- [Aquino *et al.*, 2009] AQUINO, W., BRIGHAM, J. C., EARLS, C. J. et SUKUMAR, N. (2009). Generalized finite element method using proper orthogonal decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(7):887–906. *2 citations pages 80 et 177*
- [Arbocz et Starnes Jr, 2002] ARBOCZ, J. et STARNES JR, J. (2002). Future directions and challenges in shell stability analysis. *Thin-Walled Structures*, 40(9):729–754. *Cité page 18*
- [Arndt *et al.*, 2010] ARNDT, M., MACHADO, R. et SCREMIN, A. (2010). An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, 329:659–672. *Cité page 79*
- [Astrid *et al.*, 2008] ASTRID, P., WEILAND, S., WILLCOX, K. et BACKX, T. (2008). Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2237–2251. *Cité page 61*
- [Baguet, 2001] BAGUET, S. (2001). *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique*. Thèse de doctorat. *3 citations pages 46, 47, et 93*
- [Barrau et Castanié, 2005] BARRAU, J.-J. et CASTANIÉ, B. (2005). Buckling and post-buckling of beams with flat webs. *Thin-Walled Structures*, 43:877–894. *3 citations pages xiv, 48, et 49*
- [Barrière *et al.*, 2012] BARRIÈRE, L., MARGUET, S., CASTANIÉ, B. et CRESTA, P. (2012). A computational strategy for post-buckling analysis of large stiffened structures. In *28th International Council in Aeronautical Sciences, ICAS2012*, Brisbane, Australia. *2 citations pages 7 et 89*
- [Barrière *et al.*, 2013a] BARRIÈRE, L., MARGUET, S., PASSIEUX, J.-C., CASTANIÉ, B. et CRESTA, P. (2013a). An adaptive model reduction strategy for local post-buckling analysis of stiffened structures (poster). In *2nd International Workshop on Reduced Basis, POD and PGD model*, Blois. *3 citations pages 7, 89, et 114*
- [Barrière *et al.*, 2013b] BARRIÈRE, L., MARGUET, S., PASSIEUX, J.-C., CASTANIÉ, B. et CRESTA, P. (2013b). Décomposition de domaine et réduction de modèle : stratégie de résolution pour le post-flambement local des structures raidies. In *11th Colloque National en Calcul des Structures, CSMA*, Giens, France. *3 citations pages 7, 89, et 114*
- [Barrière *et al.*, 2013c] BARRIÈRE, L., MARGUET, S., PASSIEUX, J.-C., CASTANIÉ, B. et CRESTA, P. (2013c). Modelling strategies for post-buckling analysis of large stiffened structures. In *17th International Conference on Composite Structures, ICCS17*, Porto, Portugal. *3 citations pages 7, 89, et 114*
- [Barrière *et al.*, 2013] BARRIÈRE, L., MARGUET, S., CASTANIÉ, B., CRESTA, P. et PASSIEUX, J. (2013). An adaptive model reduction strategy for post-buckling analysis of stiffened structures. *Thin-Walled Structures*, 73:81–93. *2 citations pages 7 et 89*
- [Batoz et Dhatt, 1990] BATOZ, J.-L. et DHATT, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*. Paris, France. *2 citations pages 25 et 39*
- [Bazilevs *et al.*, 2012] BAZILEVS, Y., MARSDEN, A. L., SCALEA, F., MAJUMDAR, A. et TATINENI, M. (2012). Toward a computational steering framework for large-scale composite structures based on continually and dynamically injected sensor data. *Procedia Computer Science*, 9:1149–1158. *Cité page 153*
- [Behnel *et al.*, 2011] BEHNEL, S., BRADSHAW, R., CITRO, C., DALCIN, L., SELJEBOTN, D. S. et SMITH, K. (2011). Cython : The best of both worlds. *Computing in Science & Engineering*, 13(2):31–39. *Cité page 134*

- [Belytschko et Black, 1999] BELYTSCHKO, T. et BLACK, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5):601–620. *Cité page 78*
- [Belytschko *et al.*, 2009] BELYTSCHKO, T., GRACIE, R. et VENTURA, G. (2009). A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4):043001. *3 citations pages 136, 142, et 174*
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12):899–904. *Cité page 137*
- [Ben Dhia et Jamond, 2010] BEN DHIA, H. et JAMOND, O. (2010). On the use of XFEM within the arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(21):1403–1414. *Cité page 137*
- [Bernardi *et al.*, 1993] BERNARDI, C., MADAY, Y. et PATERA, A. T. (1993). Domain decomposition by the mortar element method. In KAPER, H. G., GARBEY, M. et PIEPER, G. W., éditeurs : *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, numéro 384 de NATO ASI Series, pages 269–286. Springer Netherlands. *2 citations pages 66 et 186*
- [Bertolini, 2008] BERTOLINI, J. (2008). *Contribution à l'analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs*. Thèse de doctorat, IGMT. *5 citations pages xiv, 6, 44, 108, et 109*
- [Bertolini *et al.*, 2009] BERTOLINI, J., CASTANIÉ, B., BARRAU, J.-J., NAVARRO, J.-P. et PETIOT, C. (2009). Multi-level experimental and numerical analysis of composite stiffener debonding. part 2 : Element and panel level. *Composite Structures*, 90(4):392 – 403. *4 citations pages xiv, 21, 43, et 93*
- [Bisagni et Vescovini, 2009] BISAGNI, C. et VESCOVINI, R. (2009). Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels. *Thin-Walled Structures*, 47(3):318–334. *7 citations pages xiv, 30, 34, 35, 36, 93, et 105*
- [Bloom et Coffin, 2001] BLOOM, F. et COFFIN, D. W. (2001). *Handbook of the Thin Plate Buckling and Post Buckling*. Chapman & Hall/CRC. *2 citations pages 29 et 30*
- [Bognet *et al.*, 2012] BOGNET, B., BORDEU, F., CHINESTA, F., LEYGUE, A. et POITOU, A. (2012). Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201–204:1–12. *Cité page 63*
- [Boni *et al.*, 2012] BONI, L., FANTERIA, D. et LANCIOTTI, A. (2012). Post-buckling behaviour of flat stiffened composite panels : Experiments vs. analysis. *Composite Structures*, 94(12):3421–3433. *2 citations pages xiii et 20*
- [Bordas *et al.*, 2007] BORDAS, S., NGUYEN, P. V., DUNANT, C., GUIDOUM, A. et NGUYEN-DANG, H. (2007). An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(6):703–732. *2 citations pages 136 et 142*
- [Bordeu *et al.*, 2011] BORDEU, F., CHINESTA, F., LEYGUE, A., CUETO, E. et NIROOMANDI, S. (2011). Réduction de modèle par pgd appliquée la simulation en temps réel de solide déformables. In *10ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2011*, Giens. *Cité page 63*
- [Boucard, 2001] BOUCARD, P.-A. (2001). Application of the LATIN method to the calculation of response surfaces. In *Proceeding of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Cambridge, USA*, volume 1, page 78–81. *Cité page 47*

- [Boucard *et al.*, 1997] BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P., POSS, M. et ROUGÉE, P. (1997). A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers & Structures*, 64(1–4):499–508. *Cité page 47*
- [Boutyour *et al.*, 2004] BOUTYOUR, E. H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M. et BOUDI, M. (2004). Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and padé approximants. *International journal for numerical methods in engineering*, 60(12):1987–2012. *Cité page 47*
- [Broyden, 1970] BROYDEN, C. G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1):76–90. *Cité page 42*
- [Brubak et Hellesland, 2007] BRUBAK, L. et HELLESLAND, J. (2007). Semi-analytical post-buckling and strength analysis of arbitrarily stiffened plates in local and global bending. *Thin-Walled Structures*, 45(6):620–633. *Cité page 34*
- [Bruhn, 1973] BRUHN, E. F. (1973). *Analysis and design of flight vehicle structures*. G.W. Jacobs., Philadelphie. *Cité page 33*
- [Byklum et Amdahl, 2002] BYKLUM, E. et AMDAHL, J. (2002). A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling. *Thin-Walled Structures*, 40(11):925–953. *Cité page 34*
- [Byklum *et al.*, 2004] BYKLUM, E., STEEN, E. et AMDAHL, J. (2004). A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels. *Thin-Walled Structures*, 42(5):701–717. *3 citations pages xiv, 34, et 35*
- [Cadou *et al.*, 2006] CADOU, J. M., POTIER-FERRY, M. et COCHELIN, B. (2006). A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 25(2):234–254. *Cité page 47*
- [Carpinteri, 1990] CARPINTERI, A. (1990). A catastrophe theory approach to fracture mechanics. *International journal of fracture*, 44(1):57–69. *Cité page 40*
- [Castro *et al.*, 2013] CASTRO, S. G. P., ZIMMERMANN, R., ARBELO, M. A. et DEGENHARDT, R. (2013). Exploring the constancy of the global buckling load after a critical geometric imperfection level in thin-walled cylindrical shells for less conservative knock-down factors. *Thin-Walled Structures*. *Cité page 18*
- [Chahine *et al.*, 2008a] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2008a). Crack tip enrichment in the XFEM using a cutoff function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(6):629–646. *Cité page 79*
- [Chahine *et al.*, 2008b] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2008b). Spider XFEM, an extended finite element variant for partially unknown crack-tip displacement. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17(5–7):625–636. *Cité page 80*
- [Chahine *et al.*, 2009] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2009). A reduced basis enrichment for the extended finite element method. *Math Model Nat Phenom*, 4(1):88–105. *Cité page 80*
- [Champaney *et al.*, 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263. *2 citations pages 71 et 186*

- [Chang et Engblom, 1992] CHANG, C.-L. et ENGBLOM, J.-J. (1992). Reduced basis alternatives to the solution of nonlinear dynamical systems. *Journal of Aircraft*, 29(5):760–767.  
Cité page 56
- [Chaturantabut et Sorensen, 2010] CHATURANTABUT, S. et SORENSEN, D. C. (2010). Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764.  
Cité page 61
- [Chinesta *et al.*, 2010] CHINESTA, F., AMMAR, A. et CUETO, E. (2010). Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multi-dimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327–350.  
Cité page 63
- [Chinesta *et al.*, 2007] CHINESTA, F., AMMAR, A., FALCO, A. et LASO, M. (2007). On the reduction of stochastic kinetic theory models of complex fluids. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 15(6):639.  
Cité page 63
- [Chinesta *et al.*, 2008] CHINESTA, F., AMMAR, A., LEMARCHAND, F., BEAUCHENE, P. et BOUST, F. (2008). Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):400–413.  
Cité page 63
- [Cochelin, 2007] COCHELIN, B. (2007). *Méthode asymptotique numérique*. Hermès Science publications;Lavoisier, Paris.  
Cité page 46
- [Cochelin *et al.*, 1994] COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1994). Asymptotic-numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(7):1187–1213.  
Cité page 47
- [Cognard, 1989] COGNARD, J.-Y. (1989). *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrémentation de Temps*. Thèse de doctorat.  
Cité page 47
- [Cornuault, 1998] CORNUAULT, C. (1998). Modélisation mécanique et optimisation des structures d'avions. *Nouvelle revue d'aéronautique et d'astronautique*, 1:35–53.  
Cité page 43
- [Cottrell *et al.*, 2006] COTTRELL, J. A., REALI, A., BAZILEVS, Y. et HUGHES, T. J. R. (2006). Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(41):5257–5296.  
Cité page 177
- [Craig et Bampton, 1968] CRAIG, R.-R. et BAMPTON, M.-C.-C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA JOURNAL*, Vol. 6:pages 1313–1319.  
5 citations pages 6, 56, 82, 120, et 130
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.  
14 citations pages xiv, xv, 7, 44, 45, 71, 73, 74, 75, 78, 115, 119, 120, et 186
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446.  
3 citations pages 74, 75, et 123
- [Crisfield, 1979] CRISFIELD, M. (1979). A faster modified newton-raphson iteration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20(3):267–278.  
Cité page 42

- [Crisfield, 1991] CRISFIELD, M.-A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley.  
2 citations pages 40 et 41
- [Dagum et Menon, 1998] DAGUM, L. et MENON, R. (1998). OpenMP : an industry standard API for shared-memory programming. *Computational Science & Engineering, IEEE*, 5(1): 46–55.  
Cité page 135
- [Dalcín *et al.*, 2005] DALCÍN, L., PAZ, R. et STORTI, M. (2005). MPI for python. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 65(9):1108–1115.  
Cité page 145
- [Dalcín *et al.*, 2008] DALCÍN, L., PAZ, R., STORTI, M. et D’ELÍA, J. (2008). MPI for python : Performance improvements and MPI-2 extensions. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 68(5):655–662.  
Cité page 145
- [de Borst et Crisfield, 2012] de BORST, R. et CRISFIELD, M. A. (2012). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Wiley, Chichester, West Sussex, U.K.  
2 citations pages 38 et 39
- [De Luycker *et al.*, 2011] DE LUYCKER, E., BENSON, D. J., BELEYTSCHKO, T., BAZILEVS, Y. et HSU, M. C. (2011). X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(6):541–565. Cité page 177
- [Dennis et Moré, 1977] DENNIS, Jr., J. E. et MORÉ, J. J. (1977). Quasi-newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*, 19(1):46–89.  
Cité page 42
- [Dennis et Schnabel, 1983] DENNIS, J. J. E. et SCHNABEL, R. B. (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM.  
Cité page 42
- [Deraemaeker *et al.*, 2002] DERAEMAEKER, A., LADEVÈZE, P. et LECONTE, P. (2002). Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(21–22):2427–2444.  
Cité page 56
- [Desmeure *et al.*, 2011] DESMEURE, G., GOSSELET, P., REY, C. et CRESTA, P. (2011). Traitement des quantités duales d’interface par une représentation dans  $H^{1/2}$  pour une méthode de décomposition de domaine mixte. *20ème Congrès Français de Mécanique, 28 août/2 sept. 2011-25044 Besançon, France (FR)*.  
Cité page 116
- [Dhatt *et al.*, 2013] DHATT, G., LEFRANÇOIS, E. et TOUZOT, G. (2013). *Finite Element Method*. John Wiley & Sons.  
3 citations pages xiv, 37, et 40
- [Drapier, 2010] DRAPIER, S. (2010). Méthodes numériques d’approximation et résolution en mécanique. Cours de l’Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 3eme Année ICM-option Matériaux et Mécanique-module Mécanique Numérique. Cité page 38
- [Duarte et Kim, 2008] DUARTE, C. et KIM, D. (2008). Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8):487–504. 3 citations pages 80, 172, et 173
- [Duarte et Oden, 1996] DUARTE, C. et ODEN, J. (1996). An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4):237–262.  
Cité page 79
- [Dubois-Pèlerin et Pegon, 1998] DUBOIS-PÈLERIN, Y. et PEGON, P. (1998). Object-oriented programming in nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, 67(4):225–241.  
Cité page 135
- [Dureisseix et Farhat, 2001] DUREISSEIX, D. et FARHAT, C. (2001). A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2643–2666. Cité page 186

- [Falzon et Hitchings, 2003] FALZON, B. et HITCHINGS, D. (2003). Capturing mode-switching in postbuckling composite panels using a modified explicit procedure. *Composite Structures*, 60(4):447–453. *Cité page 93*
- [Farhat et al., 2000] FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (2000). The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4):333–374. *2 citations pages 68 et 73*
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227. *2 citations pages 67 et 71*
- [Felippa et Haugen, 2005] FELIPPÀ, C. et HAUGEN, B. (2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2285–2335. *Cité page 47*
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309–330. *Cité page 48*
- [Florentin et Díez, 2012] FLORENTIN, E. et DÍEZ, P. (2012). Adaptive reduced basis strategy based on goal oriented error assessment for stochastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225–228:116–127. *Cité page 54*
- [Galland et al., 2011] GALLAND, F., GRAVOUIL, A., MALVESIN, E. et ROCETTE, M. (2011). A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5):699–716. *Cité page 81*
- [Gallimard et al., 2013] GALLIMARD, L., VIDAL, P. et POLIT, O. (2013). Coupling finite element and reliability analysis through proper generalized decomposition model reduction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(13):1079–1093. *Cité page 63*
- [Gamma et al., 1999] GAMMA, E., HELM, R., JOHNSON, R. et LASVERGÈRES, J.-M. (1999). *Design patterns : catalogue de modèles de conception réutilisables*. Vuibert, Paris. *Cité page 135*
- [Gee et al., 2005] GEE, M., RAMM, E. et WALL, W. (2005). Parallel multilevel solution of nonlinear shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(21-24):2513–2533. *Cité page 94*
- [Gendre et al., 2011] GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(9):889–905. *Cité page 120*
- [Gerstenberger et Tuminaro, 2012] GERSTENBERGER, A. et TUMINARO, R. (2012). An algebraic multigrid approach to solve XFEM based fracture problems. *Int J Numer Methods Eng*, 94(3):248–272. *Cité page 80*
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method. In *third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, page 224–231. *Cité page 69*

- [Gogu *et al.*, 2010] GOGU, C., HAFTKA, R., RICHE, R. L., MOLIMARD, J. et VAUTRIN, A. (2010). Introduction to the bayesian approach applied to elastic constants identification. *AIAA Journal*, 48(5):893–903. *2 citations pages 56 et 137*
- [Gosselet, 2003] GOSSELET, P. (2003). *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paris VI. *10 citations pages 65, 70, 135, 139, 140, 141, 145, 180, 182, et 185*
- [Gosselet et Rey, 2003] GOSSELET, P. et REY, C. (2003). On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. In *Proceedings of the fourteenth international conference on domain decomposition methods*, page 419–426. *2 citations pages 60 et 73*
- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archive of Computational Methods in Engineering*, 13(4):515–572. *3 citations pages 64, 67, et 69*
- [Gosselet *et al.*, 2002] GOSSELET, P., REY, C., LÉNÉ, F. et DASSET, P. (2002). A domain decomposition method for quasi-incompressible formulations with discontinuous pressure field : Application to the mechanical study of a flexible bearing. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11(2-4):363–377. *Cité page 72*
- [Gosselet *et al.*, 2012] GOSSELET, P., REY, C. et PEBREL, J. (2012). Total and selective reuse of krylov subspaces for the resolution of sequences of nonlinear structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. *Cité page 73*
- [Guidault *et al.*, 2006] GUIDAULT, P.-A., ALIX, O., CHAMPAGNEY, L. et CORNUAULT, C. (2006). Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local. *Revue européenne de mécanique numérique*, 15(1-2-3):187–198. *Cité page 80*
- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P.-A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399. *Cité page 80*
- [Guyan, 1965] GUYAN, R. J. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380–380. *Cité page 67*
- [Heng et Mackie, 2009] HENG, B. et MACKIE, R. (2009). Using design patterns in object-oriented finite element programming. *Computers & Structures*, 87(15–16):952–961. *Cité page 135*
- [Hinojosa, 2012] HINOJOSA, J. A. (2012). *Sur la robustesse d'une méthode de décomposition de domaine mixte avec relocalisation non linéaire pour le traitement des instabilités géométriques dans les grandes structures raidies*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan. *2 citations pages 75 et 77*
- [Hintz, 1975] HINTZ, R. M. (1975). Analytical methods in component modal synthesis. *AIAA Journal*, 13(8):1007–1016. *Cité page 56*
- [Hoang *et al.*, 2013] HOANG, K. C., KERFRIDEN, P. et BORDAS, S. P. A. (2013). Space-time goal-oriented reduced basis approximation for linear wave equation. arXiv e-print 1305.3528. *Cité page 54*
- [Holdych *et al.*, 2008] HOLDYCH, D. J., NOBLE, D. R. et SECOR, R. B. (2008). Quadrature rules for triangular and tetrahedral elements with generalized functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 73(9):1310–1327. *Cité page 142*

- [Huang et Wang, 1993] HUANG, J. et WANG, T.-L. (1993). Buckling analysis of large and complex structures by using substructuring techniques. *Computers and structures*, Vol. 46:pages 845–850. *2 citations pages 83 et 120*
- [Hughes et Skelton, 1981] HUGHES, P. C. et SKELTON, R. E. (1981). Modal truncation for flexible spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(3):291–297. *2 citations pages 54 et 56*
- [Hui, 1988] HUI, D. (1988). Postbuckling behavior of infinite beams on elastic foundations using koiter's improved theory. *International journal of non-linear mechanics*, 23(2):113–123. *Cité page 32*
- [Hurty, 1965] HURTY, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4):678–685. *Cité page 54*
- [Hutchinson, 1967] HUTCHINSON, J. W. (1967). Initial post-buckling behavior of toroidal shell segments. *International Journal of Solids and Structures*, 3(1):97–115. *Cité page 32*
- [Joyot *et al.*, 2013] JOYOT, P., BUR, N., F. CHINESTA et P. VILLON (2013). La méthode PGD appliquée à l'équation de la chaleur non-linéaire : vers une formulation performante. *In 11ème colloque national en calcul de structure, CSMA 2013*, Giens. *Cité page 63*
- [Joyot *et al.*, 2011] JOYOT, P., G. BONITHON, F. CHINESTA et P. VILLON (2011). La méthode PGD-BEM appliquée à l'équation de la chaleur non- linéaire. *In 10ème colloque national en calcul de structure, CSMA 2011*, Giens. *Cité page 63*
- [Karman et Tsien, 1941] KARMAN, T. V. et TSIEN, H. (1941). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of Aeronautical Science*, 8:303–312. *Cité page 40*
- [Kerfriden *et al.*, 2011] KERFRIDEN, P., GOSSELET, P., ADHIKARI, S. et BORDAS, S.-P.-A. (2011). Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented Newton-Krylov algorithms : An adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8):850–866. *8 citations pages 56, 58, 59, 60, 94, 95, 106, et 107*
- [Kerfriden *et al.*, 2012] KERFRIDEN, P., GOURY, O., RABCZUK, T. et BORDAS, S.-P.-A. (2012). A partitioned model order reduction approach to rationalise computational expenses in nonlinear fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. *5 citations pages 83, 114, 117, 119, et 130*
- [Kline, 1986] KLINE, K. A. (1986). Dynamic analysis using a reduced basis of exact modes and ritz vectors. *AIAA journal*, 24(12):2022–2029. *Cité page 56*
- [Kling *et al.*, 2006] KLING, A., DEGENHARDT, R. et ZIMMERMANN, R. (2006). A hybrid subspace analysis procedure for non-linear postbuckling calculation. *Composite Structures*, 73:162–170. *3 citations pages 57, 59, et 92*
- [Klöckner *et al.*, 2009] KLÖCKNER, A., PINTO, N., LEE, Y., CATANZARO, B., IVANOV, P., FASIH, A., SARMA, A. D., NANONGKAI, D., PANDURANGAN, G. et TETALI, P. (2009). PyCUDA : GPU run-time code generation for high-performance computing. *Arxiv preprint arXiv*, 911. *Cité page 134*
- [Koiter, 1945] KOITER, W.-T. (1945). *On the stability of static equilibrium*. Thèse de doctorat, Polytechnic Institut Delft. *4 citations pages 31, 33, 46, et 93*
- [Koiter, 1956] KOITER, W.-T. (1956). Buckling and post-buckling behaviour of a cylindrical panel under axial compression. Rapport technique NLL-TR S.476, National Aerospace Laboratory NLR. *Cité page 32*

- [Krueger *et al.*, 2002] KRUEGER, R., PARIS, I. L., O'BRIEN, T. et MINGUET, P. J. (2002). Fatigue life methodology for bonded composite skin/stringer configurations. *Journal of composites technology & research*, 24(2):308–331. *Cité page 21*
- [Kuhn, 1956] KUHN, P. (1956). *Stresses in aircraft and shell structures*. McGraw-Hill. *Cité page 48*
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Mechanical engineering series. Springer, New York. *3 citations pages xiv, 47, et 48*
- [Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):121–138. *Cité page 77*
- [Ladevèze *et al.*, 2010] LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2010). The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21–22):1287–1296. *3 citations pages 62, 63, et 78*
- [Le-Manh et Lee, 2013] LE-MANH, T. et LEE, J. (2013). Postbuckling of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric analysis. *Composite Structures*. *Cité page 177*
- [Lee *et al.*, 2010] LEE, M. C., MIKULIK, Z., KELLY, D. W., THOMSON, R. S. et DEGENHARDT, R. (2010). Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures. *Composite Structures*, 92(6):1469–1477. *Cité page 18*
- [Lieu *et al.*, 2006] LIEU, T., FARHAT, C. et LESOINNE, M. (2006). Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41–43):5730–5742. *Cité page 54*
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Comm. Appl. Numer. Methods Engng.*, 9:233–241. *Cité page 66*
- [Marguerre, 1937] MARGUERRE, K. (1937). *The apparent width of the plate in compression*. National Advisory Committee for Aeronautics. *Cité page 34*
- [Marini, 1994] MARINI, F. B. L. (1994). A three-field domain decomposition method. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering : The Sixth International Conference on Domain Decomposition, June 15-19, 1992, Como, Italy*, volume 157, page 27. *Cité page 66*
- [Meeks *et al.*, 2005] MEEKS, C., GREENHALGH, E. et FALZON, B. G. (2005). Stiffener debonding mechanisms in post-buckled CFRP aerospace panels. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(7):934–946. *Cité page 20*
- [Melenk et Babuska, 1996] MELENK, J. et BABUSKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314. *Cité page 78*
- [Menétrey et Zimmermann, 1993] MENÉTREY, P. et ZIMMERMANN, T. (1993). Object-oriented non-linear finite element analysis : application to j2 plasticity. *Computers & structures*, 49(5):767–777. *Cité page 135*
- [Meyer, 1988] MEYER, B. (1988). *Object-oriented software construction*, volume 2. Prentice hall New York. *Cité page 135*
- [Meyer et Gaudin, 2011] MEYER, C. et GAUDIN, J. (2011). *Structural Panel with integrated reinforcement*. EP Patent 2,397,402. *Cité page 19*

- [Miller, 1988] MILLER, G. R. (1988). A LISP-based object-oriented approach to structural analysis. *Engineering with computers*, 4(4):197–203. *Cité page 135*
- [Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 46:131–150. *2 citations pages 79 et 173*
- [Morgan *et al.*, 1965] MORGAN, E. J., SEIDE, P. et WEINGARTEN, V. I. (1965). Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 3(3):500–505. *3 citations pages xiii, 17, et 18*
- [Nagy, 1979] NAGY, D. (1979). Modal representation of geometrically nonlinear behavior by the finite element method. *Computers & Structures*, 10(4):683–688. *2 citations pages 57 et 92*
- [Nastran, 2010] NASTRAN, M. S. C. (2010). Quick reference guide. *MSC. SOFTWARE*, 1. *Cité page 142*
- [Nguyen *et al.*, 2008] NGUYEN, N. C., PATERA, A. T. et PERAIRE, J. (2008). A ‘best points’ interpolation method for efficient approximation of parametrized functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 73(4):521–543. *2 citations pages 61 et 84*
- [Nguyen, 2000] NGUYEN, Q.-S. (2000). Stabilité et mécanique non linéaire. *Revue Francophone de Génie Civil*, 4(1):149–149. *Cité page 29*
- [Niroomandi *et al.*, 2010] NIROOMANDI, S., ALFARO, I., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2010). Model order reduction for hyperelastic materials. *International journal for numerical methods in engineering*, 81(9):1180–1206. *Cité page 81*
- [Niroomandi *et al.*, 2012a] NIROOMANDI, S., ALFARO, I., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2012a). Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 105(1):1–12. *Cité page 81*
- [Niroomandi *et al.*, 2012b] NIROOMANDI, S., ALFARO, I., GONZALEZ, D., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2012b). Real-time simulation of surgery by reduced-order modeling and x-FEM techniques. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 28(5):574–588. *Cité page 80*
- [Niroomandi *et al.*, 2013] NIROOMANDI, S., GONZÁLEZ, D., ALFARO, I., BORDEU, F., LEYGUE, A., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2013). Real-time simulation of biological soft tissues : a PGD approach. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 29(5):586–600. *Cité page 63*
- [Noor *et al.*, 1981] NOOR, A.-K., ANDERSEN, C.-M. et PETERS, J.-M. (1981). Reduced basis technique for collapse analysis of shells. *AIAA Journal*, 19(3):393–397. *Cité page 92*
- [Noor et Peters, 1980] NOOR, A.-K. et PETERS, J.-M. (1980). Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4):455–462. *4 citations pages 54, 56, 57, et 59*
- [Northwest Numerics, 2013] NORTHWEST NUMERICS, I. (2013). Z-set, developer manual, version 8.5. *Cité page 135*
- [Nouy, 2010] NOUY, A. (2010). Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):403–434. *Cité page 63*

- [Orifici *et al.*, 2008a] ORIFICI, A., THOMSON, R., DEGENHARDT, R., KLING, A., ROHWER, K. et BAYANDOR, J. (2008a). Degradation investigation in a postbuckling composite stiffened fuselage panel. *Composite Structures*, 82(2):217–224. *Cité page 21*
- [Orifici *et al.*, 2008b] ORIFICI, A. C., de ZARATE ALBERDI, I. O., THOMSON, R. S. et BAYANDOR, J. (2008b). Compression and post-buckling damage growth and collapse analysis of flat composite stiffened panels. *Composites Science and Technology*, 68(15-16):3150–3160. *Cité page 21*
- [Paik et Thayamballi, 2000] PAIK, J. K. et THAYAMBALLI, A. K. (2000). Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges. *Thin-Walled Structures*, 37(1):27–55. *Cité page 34*
- [Pantale, 2005] PANTALE, O. (2005). Parallelization of an object-oriented FEM dynamics code : influence of the strategies on the speedup. *Advances in Engineering Software*, 36(6):361–373. *Cité page 135*
- [Passieux, 2008] PASSIEUX, J.-C. (2008). *Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan. *2 citations pages 71 et 186*
- [Passieux *et al.*, 2010] PASSIEUX, J.-C., LADEVÈZE, P. et NÉRON, D. (2010). A scalable time-space multiscale domain decomposition method : adaptive time scale separation. *Comput. Mech.*, 46(4):621–633. *Cité page 77*
- [Passieux *et al.*, 2013a] PASSIEUX, J.-C., NAVARRO, P., MARGUET, S., FERRERO, J.-F. et PÉRIÉ, J.-N. (2013a). Medium velocity impact force estimation through high speed digital image correlation. In *21th DYMAT technical meeting : High speed imaging for dynamic testing of material and structures, London, UK*. *Cité page 153*
- [Passieux et Périé, 2012] PASSIEUX, J.-C. et PÉRIÉ, J.-N. (2012). High resolution digital image correlation using proper generalized decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(6):531–550. *2 citations pages 63 et 153*
- [Passieux *et al.*, 2013b] PASSIEUX, J.-C., RÉTHORÉ, J., GRAVOUIL, A. et BAÏETTO, M.-C. (2013b). Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid x-FEM solver. *Computational Mechanics*, pages 1–13. *2 citations pages 80 et 137*
- [Pebrel et Rey, 2008] PEBREL, J. et REY, C. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *Cité page 74*
- [Perrais et Finance, 2001] PERRAIS, J.-P. et FINANCE, R. (2001). *Calcul des charges appliquées à une structure d'avion*. ENSAE, Toulouse. *Cité page 19*
- [Perret *et al.*, 2011] PERRET, A., MISTOU, S. et FAZZINI, M. (2011). Global behaviour of a composite stiffened panel in buckling. part 1 : Numerical modelling. *Composite Structures*, 93(10):2610–2618. *Cité page 21*
- [Peskin et Russo, 1988] PESKIN, R. L. et RUSSO, M. F. (1988). An object oriented system environment for partial differential equation solution. In *ASME Int. Comput. Eng. Conf*, volume 1, page 409–415. *Cité page 135*
- [PULS, 2006] PULS, D. (2006). DNV PULS, 2006. user's manual (version 2.05). Rapport technique, Technical Report. *Cité page 36*
- [Rannou *et al.*, 2009] RANNOU, J., GRAVOUIL, A. et BAÏETTO-DUBOURG, M. C. (2009). A local multigrid x-FEM strategy for 3-d crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(4):581–600. *Cité page 80*

- [Reissner, 1950] REISSNER, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, 29(2):90–95. *Cité page 37*
- [Rey, 1994] REY, C. (1994). *Développement d'algorithmes parallèles de résolution en calcul non-linéaire de structures hétérogènes : application au cas d'une butée acier élatomère*. Thèse de doctorat. *Cité page 73*
- [Rey et Gosselet, 2003] REY, C. et GOSSELET, P. (2003). Solution to large nonlinear systems : acceleration strategies based on domain decomposition and reuse of krylov subspaces. In *Proceedings of the 6th ESAFORM conference on material forming*. *Cité page 73*
- [Risler et Rey, 2000] RISLER, F. et REY, C. (2000). Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical algorithms*, 23(1):1–30. *Cité page 73*
- [Rivello, 1969] RIVELLO, R. M. (1969). *Theory and analysis of flight structures*. McGraw-Hill. *Cité page 17*
- [Rixen, 2004] RIXEN, D. J. (2004). A dual Craig–Bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2):383–391. *Cité page 83*
- [Romeo et Frulla, 1997] ROMEO, G. et FRULLA, G. (1997). Post-buckling behaviour of graphite/epoxy stiffened panels with initial imperfections subjected to eccentric biaxial compression loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(6):1017–1033. *Cité page 34*
- [Rowley, 2005] ROWLEY, C. W. (2005). Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(03):997–1013. *Cité page 54*
- [Ryckelynck, 2005] RYCKELYNCK, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366. *Cité page 60*
- [Ryckelynck et Missoum Benziane, 2010] RYCKELYNCK, D. et MISSOUM BENZIANE, D. (2010). Multi-level a priori Hyper-Reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17-20):1134–1142. *Cité page 83*
- [Schwarz, 1870] SCHWARZ, H. A. (1870). *Über einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren*. Zürcher u. Furrer. *Cité page 64*
- [Series et al., 2003] SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F.-X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de lagrange. In *Actes du 16eme congrès fran\ccais de mécanique*. *Cité page 69*
- [Sethian, 1999] SETHIAN, J. A. (1999). *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press. *Cité page 79*
- [Simitses, 1986] SIMITSES, G. (1986). Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells : A review. *Applied Mechanics Reviews*, 39(10):1517–1524. *Cité page 17*
- [Simo, 1992] SIMO, J. C. (1992). The (symmetric) hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics : intrinsic definition and geometric interpretation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96(2):189–200. *Cité page 94*
- [Simo et Vu-Quoc, 1986] SIMO, J. C. et VU-QUOC, L. (1986). A three-dimensional finite-strain rod model. part II : computational aspects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 58(1):79–116. *Cité page 94*

- [Stamatelos *et al.*, 2011] STAMATELOS, D., LABEAS, G. et TSERPES, K. (2011). Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels. *Thin-Walled Structures*, 49(3):422–430. *3 citations pages xiv, 35, et 36*
- [Stolz, 2003] STOLZ, C. (2003). *Stabilité des matériaux et des structures*. Editions Ecole Polytechnique. *Cité page 16*
- [Strouboulis, 2003] STROUBOULIS, T. (2003). Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3109–3161. *Cité page 172*
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69. *Cité page 79*
- [Thompson et Walker, 1968] THOMPSON, J. et WALKER, A. (1968). The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems. *International Journal of Solids and Structures*, 4(8):757–768. *Cité page 56*
- [Timošenko et Gere, 1963] TIMOŠENKO, S.-P. et GERE, J.-M. (1963). *Theory of elastic stability*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill Kogakusha, New York Toronto London Tokyo, 2nd edition édition. *9 citations pages xiv, 14, 16, 17, 29, 30, 31, 33, et 34*
- [Touzé et Amabili, 2006] TOUZÉ, C. et AMABILI, M. (2006). Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298(4–5):958–981. *Cité page 56*
- [Touzé *et al.*, 2008] TOUZÉ, C., AMABILI, M. et THOMAS, O. (2008). Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21–24):2030–2045. *Cité page 56*
- [Trinh, 2009] TRINH, V.-D. (2009). *Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech. *Cité page 37*
- [Valizadeh *et al.*, 2012] VALIZADEH, N., NATARAJAN, S., GONZALEZ-ESTRADA, O. A., RABCZUK, T., BUI, T. Q. et BORDAS, S. (2012). NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates : Static bending, vibration, buckling and flutter. *Composite Structures*. *Cité page 177*
- [van Erp et Menken, 1991] van ERP, G. M. et MENKEN, C. M. (1991). Initial post-buckling analysis with the spline finite-strip method. *Computers & Structures*, (5):1193–1201. *Cité page 177*
- [Van Rijn, 2000] VAN RIJN, J. C. F. N. (2000). *A seven-point bending test to determine the strength of the skin-stiffener interface in composite aircraft panels*. Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam. *2 citations pages xiii et 21*
- [Van Rossum et Drake, 2001] VAN ROSSUM, G. et DRAKE, F. (2001). *Python Reference Manual*. Virginia, USA, PythonLabs édition. Available at <http://www.python.org>. *2 citations pages 97 et 134*
- [Vasiliev *et al.*, 2001] VASILIEV, V., BARYNIN, V. et RASIN, A. (2001). Anisogrid lattice structures – survey of development and application. *Composite Structures*, 54(2–3):361–370. *Cité page 19*

- [Ventura, 2006] VENTURA, G. (2006). On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended finite-element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(5):761–795. *2 citations pages 142 et 172*
- [Ventura *et al.*, 2009] VENTURA, G., GRACIE, R. et BELYTSCHKO, T. (2009). Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1):1–29. *Cité page 79*
- [Vescovini et Bisagni, 2012] VESCOVINI, R. et BISAGNI, C. (2012). Single-mode solution for post-buckling analysis of composite panels with elastic restraints loaded in compression. *Composites Part B : Engineering*, 43(3):1258–1274. *5 citations pages xiv, 16, 32, 33, et 93*
- [Vidal *et al.*, 2013] VIDAL, P., GALLIMARD, L. et POLIT, O. (2013). Proper generalized decomposition and layer-wise approach for the modeling of composite plate structures. *International Journal of Solids and Structures*, 50(14–15):2239–2250. *Cité page 63*
- [Visseq *et al.*, 2012] VISSEQ, V., MARTIN, A., ICETA, D., AZEMA, E., DUREISSEIX, D. et ALART, P. (2012). Dense granular dynamics analysis by a domain decomposition approach. *Computational Mechanics*, 49(6):709–723. *Cité page 71*
- [Volkwein, 1999] VOLKWEIN, S. (1999). *Proper orthogonal decomposition and singular value decomposition*. Karl-Franzens-Universität Graz & Technische Universität Graz. *Cité page 56*
- [Volkwein, 2005] VOLKWEIN, S. (2005). Proper orthogonal decomposition (POD) for nonlinear dynamical systems. *DISC Summerschool*, 2005. *Cité page 54*
- [Wempner, 1971] WEMPNER, G. A. (1971). Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11):1581–1599. *Cité page 40*
- [Widlund, 2009] WIDLUND, O. B. (2009). The development of coarse spaces for domain decomposition algorithms. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, numéro 70 de Lecture Notes in Computational Science and Engineering, pages 241–248. Springer Berlin Heidelberg. *Cité page 72*
- [Wilson *et al.*, 1982] WILSON, E. L., YUAN, M.-W. et DICKENS, J. M. (1982). Dynamic analysis by direct superposition of ritz vectors. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 10(6):813–821. *Cité page 56*
- [Wolfgang, 1994] WOLFGANG, P. (1994). *Design patterns for object-oriented software development*. Reading, Mass. : Addison-Wesley. *Cité page 135*
- [Wyart *et al.*, 2009] WYART, E., COULON, D., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2009). Application of the substructured finite element/extended finite element method (s-FE/XFE) to the analysis of cracks in aircraft thin walled structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(1):44–58. *Cité page 80*
- [Wyart *et al.*, 2008] WYART, E., DUFLOT, M., COULON, D., MARTINY, P., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2008). Substructuring FE-XFE approaches applied to three-dimensional crack propagation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2):626–638. *Cité page 80*
- [Yvonnet *et al.*, 2007] YVONNET, J., ZAHROUNI, H. et POTIER-FERRY, M. (2007). A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(1-4):265–280. *6 citations pages xv, 56, 81, 82, 92, et 153*

- [Zahrouni, 1998] ZAHROUNI, H. (1998). *Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations*. Thèse de doctorat. Cité page 47
- [Zienkiewicz et Taylor, 1967] ZIENKIEWICZ, O. et TAYLOR, R. (1967). *The Finite Element Method, Volume 2, Solid Mechanics*. Butterworth-Hienemann. Cité page 23

---

# Evaluation d'une approche par éléments finis enrichis pour le post-flambement local

---

## Sommaire

---

A.1	Introduction	172
A.2	Stratégie de calcul par GFEM en post-flambement local	172
A.3	Évaluation sur un cas simple de poutre	173
A.4	Bilan du chapitre	177

---

## A.1 Introduction

La mise à profit d'une compréhension ou d'une expérience acquise sur un problème donné peut se faire dans le cadre de la réduction de modèle par projection, comme cela a été réalisé dans le Chapitre 3 et le Chapitre 4. Dans ce chapitre, nous présentons une autre façon d'incorporer une connaissance *a priori* dans un modèle, avec le même objectif de réduire le coût du calcul. La méthode X/GFEM introduite en sous-section 2.4.2 permet effectivement d'enrichir l'interpolation avec des fonctions qui, sans raffinement du maillage, apportent une précision supplémentaire. Un compromis entre l'enrichissement de l'interpolation et le raffinement du maillage doit être trouvé de sorte que l'intégration numérique n'engendre pas de coût excessif. Dans la même sous-section, nous avons présenté des approches existantes, combinant X/GFEM et réduction de modèle. Ce chapitre s'en inspire et tente de dessiner les contours d'une approche pertinente pour la simulation du post-flambement.

Cette approche a été étudiée en début de thèse en parallèle avec les approches de réduction de modèle par projection. Nous avons choisi de nous concentrer sur les secondes pour des raisons de facilité d'implémentation (les approches X/GFEM étant plus intrusives dans la formulation EF). Néanmoins, l'étude qui est rapportée ici montre la pertinence de la combinaison X/GFEM et réduction de modèle pour l'analyse du post-flambement et ouvre des perspectives de recherche intéressantes de notre point de vue, particulièrement dans le cadre du pré-dimensionnement de panneaux raidis.

## A.2 Stratégie de calcul par GFEM en post-flambement local

Par analogie avec la stratégie PBAMR et les méthodes analytiques de développement asymptotique, il est possible de considérer que l'interpolation élément fini standard entre les noeuds du modèle convient à la représentation de l'état d'équilibre fondamental. Les fonctions d'enrichissement ont alors la charge de représenter les variations dues au post-flambement, à savoir le mode de flambement et les termes d'ordres supérieurs.

Un mode de flambement peut donc être introduit comme fonction d'enrichissement. Il est soit déterminé analytiquement, soit interpolé par une fonction – par exemple une *spline*, une série sinusoïdale ou autre – après un calcul par éléments finis sur un maillage adapté, selon le principe des *mesh-based handbook* [Strouboulis, 2003] ou d'enrichissement global-local [Duarte et Kim, 2008]. La régularité d'un mode de flambement ( $C^\infty$ ) est un atout à la fois pour l'interpolation d'un vecteur de mode de flambement calculé par éléments finis mais aussi pour l'intégration numérique qui ne requiert pas de partitionnement des éléments [Ventura, 2006].

Les termes d'ordres supérieurs ne sont quant-à-eux pas forcément connus *a priori*, de la même façon qu'en réduction de modèle par projection. Ils sont le résultat de la redistribution de contrainte par l'effet non-linéaire géométrique. La difficulté de l'enrichissement en post-flambement réside donc dans leur représentation.

Une solution consiste à utiliser des fonctions calculées de manière semi-analytique (voir Section 1.4). À partir de la représentation du post-flambement d'un élément de structure simple (poutre, plaque rectangulaire, cylindre, ...), tel que les méthodes semi-analytiques le permettent, il est possible d'introduire cette représentation au niveau local d'un problème plus complexe, de grande taille, initialement inadapté à la représentation du post-flambement local. Dans ce cas, l'enrichissement prends en compte l'effet non-linéaire géométrique. Le

cadre des X/GFEM est d'ailleurs utilisé en ce sens pour la description du champ de déplacement en pointe de fissure [Moës et al., 1999].

Une approche de type global/local, comme proposée par [Duarte et Kim, 2008], peut également permettre de déterminer les fonctions d'enrichissement d'un problème grossier à partir de modèles fins locaux. L'intérêt d'une telle approche réside dans la prise en compte des interactions global/local à moindre coût, après avoir calculé une représentation des réponses locales indépendamment (voir sous-section 1.5.3). Ce concept est illustré en Figure A.1.

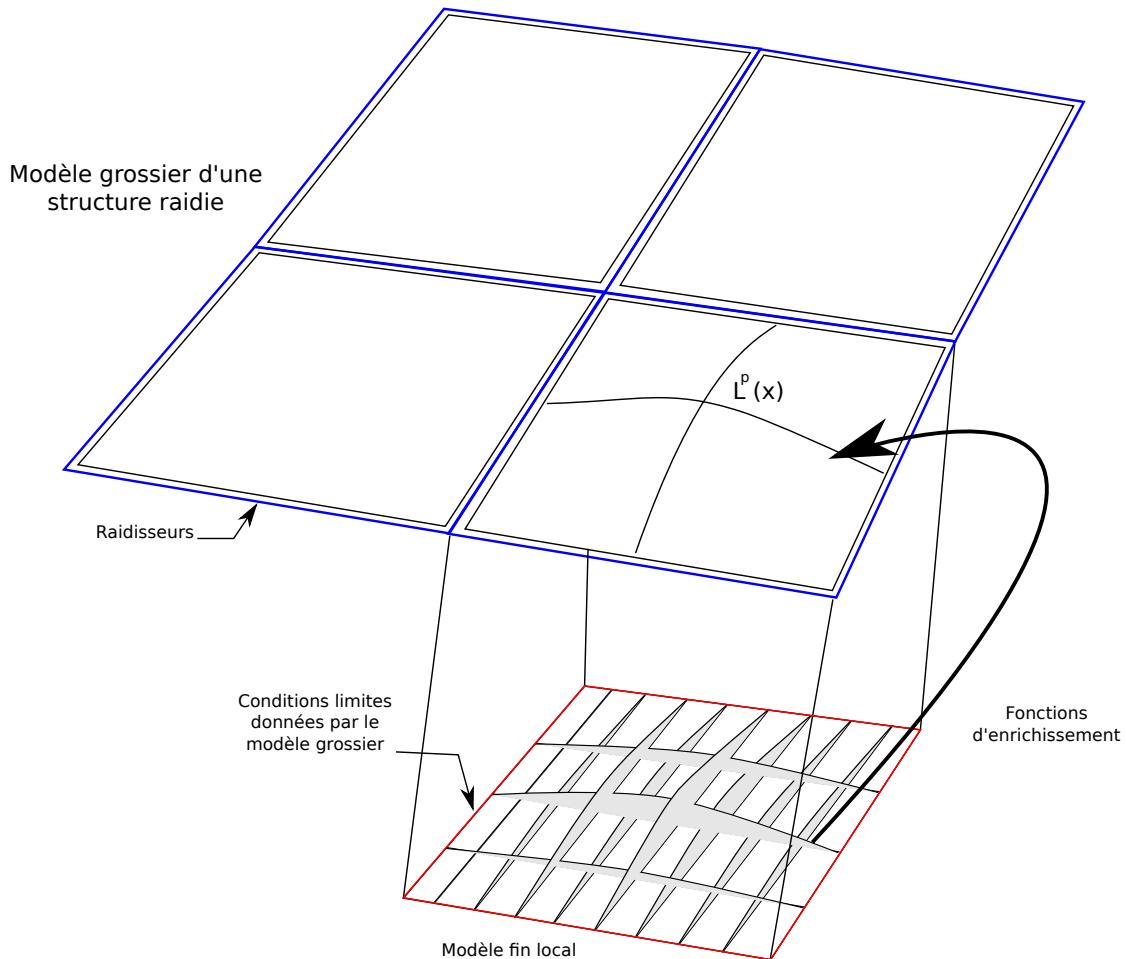


FIGURE A.1 – Illustration du concept Global/Local pour l'enrichissement d'un modèle grossier en post-flambement local.

### A.3 Évaluation sur un cas simple de poutre

Un outil a été développé pendant cette thèse pour tester l'enrichissement en post-flambement. Il s'agit d'un code basé sur des éléments finis de poutres dont l'interpolation des différents champs de déplacement peut être enrichie. La stratégie proposée est donc évaluée dans le cas du post-flambement d'une poutre droite, avec une cinématique de Timoshenko, soit 3 degrés de liberté par nœud (voir sous-section 1.3.1).

L'enrichissement du champ de déplacement axial est représenté par la fonction  $f_u(x)$ . Dans le cas général,  $f_u(x)$  n'est pas calculable par analyse linéaire de flambement. Dans le cas des poutres, la redistribution des contraintes en post-flambement est linéaire. C'est à dire

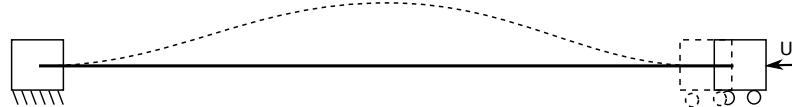


FIGURE A.2 – Cas d'étude en post-flambement d'une poutre.

que le mode de flambement correspond à la déformée de post-flambement. Par conséquent l'enrichissement selon  $u(x)$  peut être calculé analytiquement de manière exacte. Un développement asymptotique de  $u(x)$  au premier ordre et une substitution du mode de flambement dans l'équilibre axial permettent d'y aboutir. Pour simplifier l'écriture, replaçons nous dans le cadre des poutres de Bernoulli en grands déplacements. Soit  $f_v(x)$  le mode de flambement. La flèche étant proportionnelle au mode de flambement :  $v(x) = \alpha f_v(x)$ . Posons, par développement à l'ordre 1, l'expression du champ axial en post-flambement :  $u(x) = a_0 x + f_u(x)$ . Alors l'équilibre axial s'écrit :

$$N'(x) = 0 \quad \text{soit} \quad f_u''(x) = -\alpha f_v'(x) f_v''(x) \quad (\text{A.1})$$

avec  $N$  l'effort normal dans la poutre.

L'expression de  $f_u(x)$  est donc calculée dans l'exemple traité par dérivation de la fonction du mode de flambement. L'expression obtenue est ici un sinus ( $\sin(4\pi x/L)$ ). En pratique, les modes de flambement sont calculé par éléments finis puis interpolés. Nous avons choisi une interpolation par fonction spline. Ainsi, l'enrichissement axial peut se déduire numériquement par dérivation des fonctions splines du mode de flambement.

Type	$u(x)$	$v(x)$	$\theta$
E0	aucun	aucun	aucun
E1	aucun	mode de flambement	mode de flambement
E2	$f_u(x)$	mode de flambement	mode de flambement

TABLEAU A.1 – Types d'enrichissements par degré de liberté.

Trois types d'enrichissement sont définis dans le Tableau A.1. Nous proposons en effet de tester le cas d'un enrichissement des champs  $v(x)$  et  $\theta(x)$  seulement, afin d'évaluer l'influence de l'enrichissement axial. Dans ce cas, une des questions est également de déterminer comment le maillage initial de la zone enrichie (ici la poutre en entier) influence le résultat. La question sous-jacente est la suivante : Peut-on se passer de l'enrichissement axial dont la détermination a un coût et qui ajoute des inconnues ?

Trois raffinement de maillage sont pris en compte et identifiés dans le Tableau A.2. Le maillage le plus fin correspond à la convergence de la solution pour des éléments à interpolation linéaire et non enrichie.

Pour chaque maillage et pour chaque enrichissement, une étude de convergence du nombre de points d'intégration a été menée afin d'obtenir une intégration exacte. Des méthodes plus avancées pour la détermination de la quadrature sont proposées dans [Belytschko *et al.*, 2009]. Évidemment, sans enrichissement, il faut un nombre suffisant d'éléments pour représenter le post-flambement, c'est pourquoi les maillages de types M0 et M1 ne sont pas considérés pour E0.

maillage	nombre d'éléments
M1	1
M2	5
M3	20

TABLEAU A.2 – Niveaux de raffinement de maillages.

	nombre de d.d.l.			points d'intégration		
	E0	E1	E2	E0	E1	E2
M0	-	10	12	-	5	5
M1	-	54	72	-	7	7
M2	63	105	126	20	20	20

TABLEAU A.3 – Nombre de degrés de liberté et de points d'intégrations pour les différents maillages et enrichissements.

Les tracés des déformées obtenues en post-flambement pour différentes combinaisons de maillage et d'enrichissement (décris dans le Tableau A.3) sont présentés en Figure A.3. La solution exacte étant contenue dans l'enrichissement E2, la déformée se superpose dès le maillage le plus grossier M0, c'est à dire pour un seul élément. Le coût du calcul est ainsi réduit par rapport à la solution de référence E0\_M2 (éléments finis standards) grâce à un nombre total d'inconnues (12 contre 63) et un nombre de points d'intégration (5 contre 20) faible. Il est néanmoins plus intéressant de constater que sans enrichissement axial (E1), la solution obtenue pour les maillages M0 et M1 n'est pas satisfaisante. Le non-enrichissement du champ  $u(x)$  se traduit par une augmentation de la rigidité en flexion pour le maillage M0 et par une bifurcation sur un mode de flambement différent pour le maillage M1, dont la déformée est vraisemblablement plus adaptée à l'interpolation du champ  $u(x)$  avec 5 éléments linéaires. Lorsque le maillage est suffisamment fin pour que l'interpolation linéaire du champ  $u(x)$  soit conforme, l'erreur sur la solution est alors très faible.

Il est donc important, dans le cas du post-flambement d'une poutre, de disposer d'une fonction d'enrichissement adaptée pour chaque degré de liberté. Le maillage permet toutefois d'ajuster la représentation mais pas toujours suffisamment. Dans le cas des plaques, le problème se complexifie donc d'autant plus qu'il n'existe généralement pas d'expression ou de relation exacte entre le mode de flambement et les termes d'ordres supérieurs des champs de déplacement du plan.

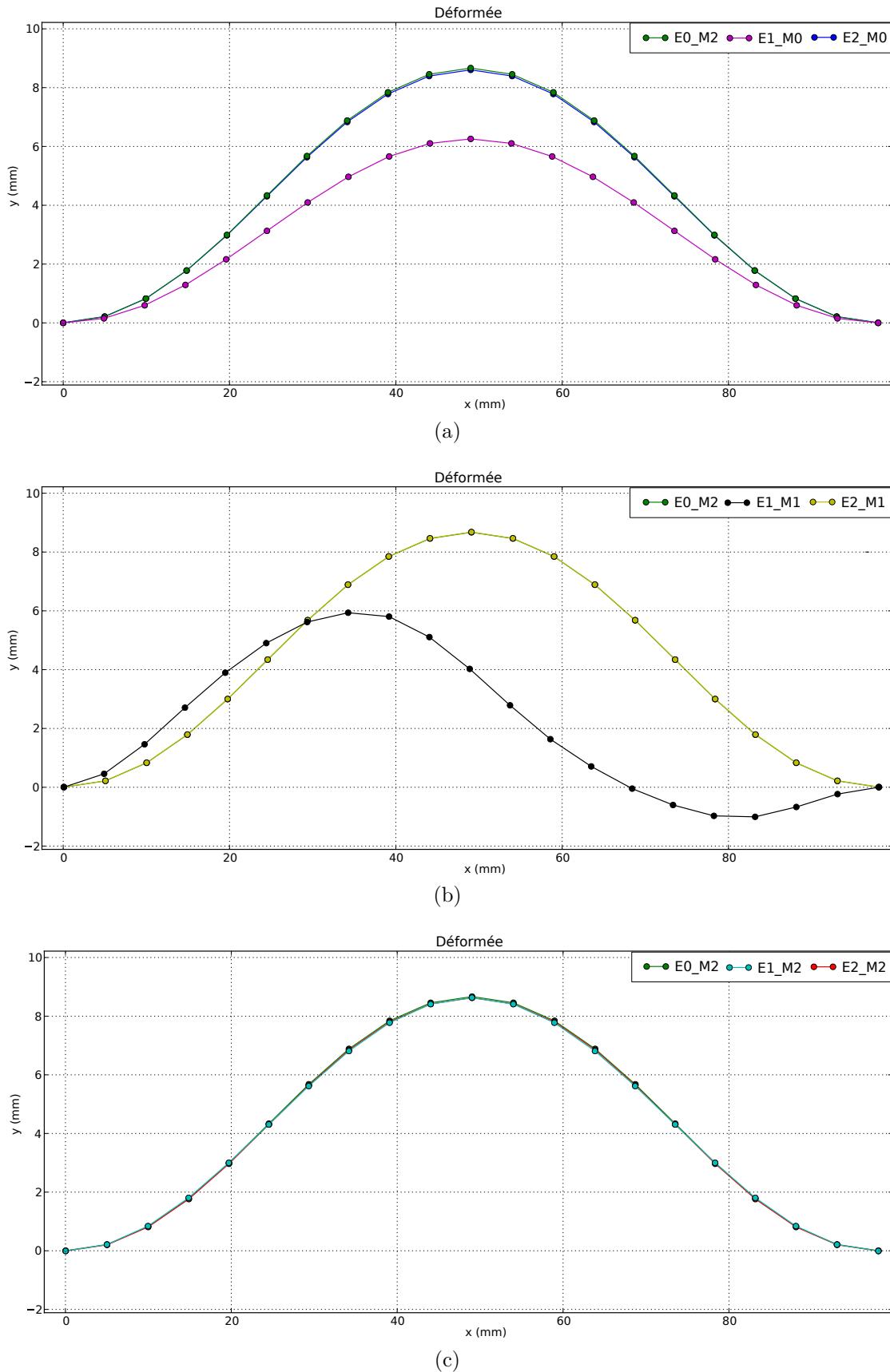


FIGURE A.3 – Comparaison des déformées pour différents maillages et enrichissements. La solution de référence éléments-finis est E0\_M2. (a) Enrichissements portés par un maillage de type M0. (b) Enrichissements portés par un maillage de type M1. (c) Enrichissements portés par un maillage de type M2.

## A.4 Bilan du chapitre

Les résultats obtenus dans cette courte étude sur l'application des méthodes GFEM pour le post-flambement ouvrent des perspectives pour le développement de stratégies de calcul en post-flambement local des grandes structures raidies. Le ratio du nombre d'inconnues sur le nombre de points d'intégration est en effet favorable. Les verrous identifiés à ce stade concernent la détermination des fonctions d'enrichissement représentatives des effets non-linéaires du post-flambement. Cependant, dans cette étude sur une simple poutre, nous montrons que le maillage influence le résultat obtenu lorsque l'enrichissement n'est pas adapté. Cela signifie aussi que l'enrichissement ne doit pas nécessairement contenir la solution exacte, comme cela a été d'ailleurs observé par [Aquino *et al.*, 2009]. Ainsi, un maillage suffisamment fin (néanmoins plus grossier que pour l'interpolation standard) doit permettre la représentation de la solution non-linéaire à moindre coût.

Une autre approche peut consister à adapter les fonctions d'enrichissement elles-mêmes en utilisant des points de contrôle, comme ceux des fonctions NURBS (Non-Uniform Rational Basis Splines) utilisées pour l'interpolation iso-géométrique [De Luycker *et al.*, 2011]. Les approches iso-géométriques avec fonctions d'interpolation NURBS ont été utilisées pour l'analyse vibratoire ou de flambement [Cottrell *et al.*, 2006 ; Valizadeh *et al.*, 2012]. Les travaux de [Le-Manh et Lee, 2013] montrent le potentiel de ces méthodes pour l'analyse du post-flambement. On peut citer également des travaux, plus anciens, sur la méthode *spline finite-strip* en post-flambement initial qui tirent également parti des fonctions *splines* pour réaliser une interpolation d'ordre élevé [van Erp et Menken, 1991].

Finalement, dans le cadre du post-flambement local, bien qu'il nous paraisse abordable de générer ces fonctions par des calculs éléments-finis locaux, une solution peut donc venir de l'introduction d'un enrichissement adaptatif.



---

**Approche hybride  
primale-duale-mixte**

---

**Sommaire**

---

<b>B.1</b>	<b>Introduction</b>	180
<b>B.2</b>	<b>Extension de l'approche hybride</b>	180
<b>B.3</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	186

---

## B.1 Introduction

La rédaction de ce chapitre est motivée par la définition d'un formalisme favorable à l'implémentation des différentes méthodes de décomposition de domaine. L'approche hybride proposée par [Gosselet, 2003] a déjà permis de combiner dans un même problème des interfaces primales et duales. Naturellement, l'approche hybride est équivalente à une approche primaire si toutes les interfaces sont définies par des conditions de raccord primaires. Il en est de même pour l'approche duale. Nous proposons donc d'étendre cette approche hybride *primale-duale* aux interfaces mixtes, d'où le nom d'approche hybride *primale-duale-mixte*. Nous suivons la même démarche que celle exposée dans [Gosselet, 2003] pour l'approche hybride *primale-duale*.

## B.2 Extension de l'approche hybride

Soit un domaine  $\Omega$  partitionné en  $n_s$  sous-domaines  $\Omega^s$ , sans recouvrement. L'équilibre discrétisé de chaque sous-domaine s'écrit :

$$\forall s, \underline{\underline{K}}^{(s)} \underline{q}^{(s)} = \underline{F}^{(s)} + \underline{\lambda}^{(s)} \quad (\text{B.1})$$

où les  $\underline{\underline{K}}^{(s)}$  sont les matrices de raideur, les  $\underline{q}^{(s)}$  sont les vecteurs des inconnues primales (déplacement), les  $\underline{F}^{(s)}$  sont les vecteurs des efforts extérieurs et les  $\underline{\lambda}^{(s)}$  sont les réactions d'interfaces avec les sous-domaines voisins, qui sont nulles à l'intérieur des sous-domaines par définition.

On pose  $\underline{q}_b^{(s)} = \underline{\underline{t}}_b^{(s)} \underline{q}^{(s)}$  et  $\underline{\lambda}_b^{(s)} = \underline{\underline{t}}_b^{(s)} \underline{\lambda}^{(s)}$  la trace sur l'interface des inconnues primales et duales du sous-domaine  $s$ . L'équilibre global est défini par les équilibres par sous-domaines et les conditions de raccords suivantes :

$$\sum_s \underline{\bar{A}}^{(s)} \underline{q}_b^{(s)} = \underline{0} \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_s \underline{\underline{A}}^{(s)} \underline{\lambda}_b^{(s)} = \underline{0} \quad (\text{B.3})$$

Dans l'approche hybride, une partie de l'interface est définie comme étant primaire (indice  $p$ ). Une unique inconnue en déplacement  $\underline{q}_p$  est définie.  $\underline{\underline{t}}_p^{(s)}$  est l'opérateur de trace vers l'interface primaire du sous-domaine  $s$ . La condition de continuité en déplacement est donc vérifiée *a priori* sur les interfaces primales. La condition de raccord sur les interfaces primales devient donc simplement une condition sur les réactions :

$$\sum_s \underline{\underline{A}}_p^{(s)} \underline{\lambda}_p^{(s)} = \underline{0} \quad (\text{B.4})$$

où  $\underline{\underline{A}}_p^{(s)}$  est l'opérateur d'assemblage sur l'interface primaire. De la même façon, sur la partie de l'interface définie comme étant duale (indice  $d$ ), une unique inconnue de réaction  $\underline{\lambda}_d$  est commune aux sous-domaines voisins.  $\underline{\underline{t}}_d^{(s)}$  est l'opérateur de trace vers l'interface duale du sous-domaine  $s$ . L'annulation des réactions est donc vérifiée *a priori*. La condition de raccord ne concerne que les déplacements sur cette partie de l'interface :

$$\sum_s \underline{\bar{A}}_d^{(s)} \underline{q}_d^{(s)} = \underline{0} \quad (\text{B.5})$$

où  $\underline{q}_d^{(s)} = \underline{\underline{t}}_d^{(s)} \underline{q}_m^{(s)}$ .

Enfin, le troisième type d'interface peut être attribué à une dernière partie. C'est l'interface mixte (indice  $m$ ), le long de laquelle une relation entre inconnues primales et duales est définie en introduisant une raideur d'interface  $\underline{T}_m^{(s)}$  et une inconnue  $\underline{\mu}_m^{(s)}$  telles que :

$$\underline{\mu}_m^{(s)} = \underline{\lambda}_m^{(s)} + \underline{\underline{T}}_m^{(s)} \underline{q}_m^{(s)} \quad (\text{B.6})$$

où  $\underline{q}_m^{(s)} = \underline{\underline{t}}_m^{(s)} \underline{q}_m^{(s)}$ .  $\underline{\underline{t}}_m^{(s)}$  est l'opérateur de trace vers l'interface mixte du sous-domaine  $s$ . La condition de raccord le long de l'interface mixte s'écrit donc (notation par bloc) :

$$\underline{\underline{A}}_m^{\diamond} \underline{\underline{A}}_m^{\diamond} \underline{\mu}_m^{\diamond} - \left( \underline{\underline{A}}_m^{\diamond} \underline{\underline{A}}_m^{\diamond} \underline{T}_m^{\diamond} - \underline{\underline{T}}_m^{\diamond} \underline{\underline{A}}_m^{\diamond T} \underline{\underline{A}}_m^{\diamond} \right) \underline{q}_m^{\diamond} = \underline{0}^{\diamond} \quad (\text{B.7})$$

L'indice  $i$  identifie les inconnues internes aux sous-domaines, ce qui permet d'écrire l'équation d'équilibre global :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} \frac{K_{ii}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{id}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{im}^{(1)}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{di}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dd}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{(1)}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mi}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{(1)}}{\text{sym}} & \frac{K_{mm}^{(1)}}{\text{sym}} \end{array} \right] \stackrel{0}{=} \left[ \begin{array}{c} \frac{K_{ip}^{(1)} A_p^{(1)T}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{dp}^{(1)} A_p^{(1)T}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mp}^{(1)} A_p^{(1)T}}{\text{sym}} \\ \vdots \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \underline{q}_i^{(1)} \\ \underline{q}_d^{(1)} \\ \underline{q}_m^{(1)} \\ \vdots \end{array} \right) \\ & \stackrel{0}{=} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{K_{ii}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{id}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{im}^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{di}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dd}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mi}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{(n_s)}}{\text{sym}} & \frac{K_{mm}^{(n_s)}}{\text{sym}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{K_{ip}^{(n_s)} A_p^{(n_s)T}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{dp}^{(n_s)} A_p^{(n_s)T}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mp}^{(n_s)} A_p^{(n_s)T}}{\text{sym}} \\ \sum_s \underline{\underline{A}}_p^{(s)} \underline{\underline{K}}_{pp}^{(s)} \underline{\underline{A}}_p^{(s)T} \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \underline{q}_i^{(n_s)} \\ \underline{q}_d^{(n_s)} \\ \underline{q}_m^{(n_s)} \\ q_p \end{array} \right) \\ & \text{sym} \quad \text{sym} \quad \sum_s \underline{\underline{A}}_p^{(s)} \underline{\underline{K}}_{pp}^{(s)} \underline{\underline{A}}_p^{(s)T} \\ & \left( \begin{array}{c} \frac{F_i^{(1)}}{\text{sym}} \\ \frac{F_d^{(1)}}{\text{sym}} \\ \frac{F_m^{(1)}}{\text{sym}} \\ \vdots \\ \frac{F_i^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ \frac{F_d^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ \frac{F_m^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ \sum_s \underline{\underline{A}}_p^{(s)} \underline{F}_p^{(s)} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \frac{0}{\text{sym}} \\ \frac{\bar{A}_d^{(1)T} \lambda_d}{\text{sym}} \\ \frac{\lambda_m^{(1)}}{\text{sym}} \\ \vdots \\ \frac{0}{\text{sym}} \\ \frac{\bar{A}_d^{(n_s)T} \lambda_d}{\text{sym}} \\ \frac{\lambda_m^{(n_s)}}{\text{sym}} \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

avec les conditions de raccord (B.5) et (B.7). L'objectif est de condenser le problème global sur les inconnues d'interfaces  $(\underline{q}_p, \underline{\lambda}_d, \underline{\mu}_m^{\diamond})$ .

Du système de l'Équation B.8 sont extraites les  $n_s$  premières équations (notation par bloc) :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} \frac{K_{ii}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{id}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{im}^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{di}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{dd}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mi}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{dm}^{\diamond}}{\text{sym}} & \frac{K_{mm}^{\diamond}}{\text{sym}} + \underline{T}_m^{\diamond} \end{array} \right]}_{\underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond}} \left( \begin{array}{c} \underline{q}_i^{\diamond} \\ \underline{q}_d^{\diamond} \\ \underline{q}_m^{\diamond} \end{array} \right) + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \frac{K_{ip}^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{dp}^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{K_{mp}^{\diamond}}{\text{sym}} \end{array} \right]}_{\underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond}} \underline{\underline{A}}_p^{\diamond T} \underline{q}_p = \underbrace{\left( \begin{array}{c} \frac{F_i^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{F_d^{\diamond}}{\text{sym}} \\ \frac{F_m^{\diamond}}{\text{sym}} \end{array} \right)}_{\underline{\underline{F}}_{\bar{p}}^{\diamond}} + \left( \begin{array}{c} \frac{0}{\text{sym}} \\ \frac{\bar{A}_d^{\diamond T} \lambda_d}{\text{sym}} \\ \frac{\underline{\mu}_m^{\diamond}}{\text{sym}} \end{array} \right) \quad (\text{B.9})$$

Un indice  $\bar{p}$  a été introduit, qui regroupe les inconnues en déplacements interne et aux interfaces duale et mixte tel que :

$$\underline{q}_{\bar{p}}^{\diamond} = \underline{\underline{\underline{t}}}_{\bar{p}}^{\diamond} \underline{q}^{\diamond} = \begin{pmatrix} q_i^{\diamond} \\ q_d^{\diamond} \\ q_m^{\diamond} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

De manière générale, la notation  $\bar{\square}$  où  $\square$  est un indice (ou une somme d'indices) sera utilisée pour désigner les inconnues dont l'indice n'est pas  $\square$ .

L'expression de  $\underline{q}_{\bar{p}}^{\diamond}$  est donnée par l'équation (B.9), par inversion de la matrice  $\underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond}$ . Afin de prendre en compte des problèmes locaux mal posés (sous-domaine ne possédant que des interfaces duales), le recours à une pseudo-inverse et une condition de non-excitation des modes rigides sont retenus dans la suite (comme pour l'approche duale et hybride primale-duale [Gosselet, 2003]) :

$$\underline{q}_{\bar{p}}^{\diamond} = \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{(s)+} \left( \underline{F}_{\bar{p}}^{\diamond} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\underline{A}}}_d^{\diamond T} \lambda_d \\ \underline{\underline{\underline{\mu}}}_m^{\diamond} \end{pmatrix} - \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond T} \underline{q}_p \right) + \underline{\underline{\underline{R}}}_{\bar{p}}^{\diamond} \underline{\alpha}^{\diamond} \quad (\text{B.11})$$

avec

$$\underline{\underline{\underline{R}}}_{\bar{p}}^{\diamond} = \begin{bmatrix} R_{\bar{p}}^{(1)} \\ \ddots \\ R_{\bar{p}}^{(n_s)} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{\alpha}^{\diamond} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\alpha}^{(n_s)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

et  $R_{\bar{p}}^{(s)} \in \ker(\underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{(s)})$  les modes rigides du sous-domaine  $s$  et  $\underline{\alpha}^{(s)}$  leur amplitude. La condition de non-activation des modes rigides s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{R}}}_{\bar{p}}^{\diamond T} \left( \underline{F}_{\bar{p}}^{\diamond} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\underline{A}}}_d^{\diamond T} \lambda_d \\ \underline{\underline{\underline{\mu}}}_m^{\diamond} \end{pmatrix} - \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond T} \underline{q}_p \right) = \underline{0} \quad (\text{B.13})$$

La  $(n_s + 1)$ <sup>ème</sup> équation du système global (B.8) s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{q}_{\bar{p}}^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{pp}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond T} \underline{q}_p = \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{F}_{\bar{p}}^{\diamond} \quad (\text{B.14})$$

où  $\underline{q}_{\bar{p}}^{\diamond}$  est finalement substitué par son expression de l'Équation B.11 :

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{pp}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond T} - \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond T} \right) \underline{q}_p + \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{t}}}_{d\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{\underline{A}}}_d^{\diamond T} \lambda_d + \\ & \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{t}}}_{m\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{\underline{\mu}}}_m^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{R}}}_{\bar{p}}^{\diamond} \underline{\alpha}^{\diamond} = \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{F}_{\bar{p}}^{\diamond} - \underline{\underline{\underline{A}}}_p^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} \underline{\underline{\underline{K}}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond} + \underline{\underline{\underline{F}}}_{\bar{p}}^{\diamond} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Notons que les opérateurs de trace introduits ici sont simplement une restriction des opérateurs de trace définis précédemment, tels que :

$$\underline{\underline{\underline{t}}}_{d\bar{p}}^{(s)} = \underline{\underline{\underline{t}}}_d^{(s)} \underline{\underline{\underline{t}}}_{\bar{p}}^{(s)T} \quad (\text{B.16})$$

$$\underline{\underline{\underline{t}}}_{m\bar{p}}^{(s)} = \underline{\underline{\underline{t}}}_m^{(s)} \underline{\underline{\underline{t}}}_{\bar{p}}^{(s)T} \quad (\text{B.17})$$

Pour définir le problème global condensé à l'interface, il reste à traduire les conditions de raccord en remarquant simplement que :

- pour l'Équation B.5,  $\underline{q}_d^{(s)} = \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^T \underline{q}_{\bar{p}}^{(s)}$ . L'expression de la condition devient par substitution :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{q}_d^\diamond &= \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond \underline{q}_{\bar{p}}^{(s)} = \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \left( -\underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{q}_p + \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond T \underline{\lambda}_d + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond T \underline{\mu}_m^\diamond \right) + \\ &\quad \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond \underline{R}_{\bar{p}}^\diamond \underline{\alpha}^\diamond + \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{F}_{\bar{p}}^\diamond = 0 \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

- pour l'Équation B.7,  $\underline{q}_m^{(s)} = \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^T \underline{q}_{\bar{p}}^{(s)}$ . Par substitution et à la condition que  $(\underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T_m^\diamond - \underline{T}_m^\diamond \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond)$  soit inversible<sup>1</sup>, l'expression de la condition de raccord mixte devient :

$$\begin{aligned} &\left( (\underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T_m^\diamond - \underline{T}_m^\diamond \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond)^{-1} \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond - \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond T \right) \underline{\mu}_m^\diamond - \\ &\quad \left( \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond T \underline{\lambda}_d - \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{\underline{A}}}_p^\diamond T \underline{q}_p + \right. \\ &\quad \left. \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{F}_{\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond R_{\bar{p}}^\diamond \underline{\alpha}^\diamond \right) = 0 \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

Finalement, l'assemblage du problème global condensé (équations (B.15), (B.18) et (B.19)) peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^\diamond & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{S}}}_{pp}^\diamond & \underline{\underline{\underline{S}}}_{pd}^\diamond & \underline{\underline{\underline{S}}}_{pm}^\diamond \\ -\underline{\underline{\underline{S}}}_{pd}^\diamond T & \underline{\underline{\underline{S}}}_{dd}^\diamond & \underline{\underline{\underline{S}}}_{dm}^\diamond \\ \underline{\underline{\underline{S}}}_{pm}^\diamond T & -\underline{\underline{\underline{S}}}_{dm}^\diamond T & \underline{\underline{\underline{S}}}_{mm}^\diamond \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^\diamond T & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond T & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond \\ \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond T & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond T & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond \\ \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_p \\ \underline{\lambda}_d \\ \underline{\mu}_m^\diamond \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\underline{S}}}_{pdm}} = \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^\diamond & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond & \underline{\underline{\underline{I}}}_m^\diamond \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b}_p^\diamond \\ -\underline{b}_d^\diamond \\ -\underline{b}_m^\diamond \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{A}}}_p^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \\ \underline{\underline{\underline{A}}}_d^\diamond \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond \\ -\underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond \end{bmatrix} \underline{R}_{\bar{p}}^\diamond \underline{\alpha}^\diamond}_{\underline{\underline{\underline{b}}}_{pdm}} \quad (\text{B.20})$$

où  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{pdm}$  est le complément de Schur *primal-dual-mixte* assemblé et où les composantes des compléments de Schur des sous-domaines ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{S}}}_{pp}^\diamond &= K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond - \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond, \quad \underline{\underline{\underline{S}}}_{pd}^\diamond = K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond T, \quad \underline{\underline{\underline{S}}}_{pm}^\diamond = K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond T \\ \underline{\underline{\underline{S}}}_{dd}^\diamond &= \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^{(s)} \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^\diamond T, \quad \underline{\underline{\underline{S}}}_{dm}^\diamond = \underline{\underline{\underline{t}}}_{dp}^{(s)} \underline{K}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond T \\ \underline{\underline{\underline{S}}}_{mm}^\diamond &= (\underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T_m^\diamond - \underline{T}_m^\diamond \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond)^{-1} \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond T \underline{\underline{\underline{A}}}_m^\diamond - \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond K_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond + \underline{\underline{\underline{t}}}_{mp}^\diamond T \end{aligned}$$

Il est possible de reconnaître dans les composantes des compléments de Schur des sous-domaines, les compléments de Schur primaux  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{pp}^{(s)}$  et duraux  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{dd}^{(s)}$  déjà introduits en sous-section 2.3.2. Le complément de Schur mixte  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{mm}^\diamond$  est modifié par rapport à l'expression en Équation 2.58. Cela est nécessaire pour obtenir une symétrie (ou anti-symétrie) entre les composantes  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{pd}^\diamond$  et  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{dp}^\diamond$ ,  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{pm}^\diamond$  et  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{mp}^\diamond$ ,  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{md}^\diamond$  et  $\underline{\underline{\underline{S}}}_{dm}^\diamond$ .

1. Il suffit pour cela que les raideurs d'interface soient définies comme elles le sont classiquement en approche mixte (complément de Schur du sous-domaine voisin, d'une bande d'éléments, etc.)

Dans l'Équation B.20,  $\underline{b}_{pdm}$  est le second membre condensé, dont les composantes par sous-domaines s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\underline{b}_p^\diamond &= \underline{\underline{F}}_p^\diamond - \underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond +} \underline{\underline{F}}_{\bar{p}}^\diamond \\ \underline{b}_d^\diamond &= \underline{\underline{t}}_{d\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond +} \underline{\underline{F}}_{\bar{p}}^\diamond \\ \underline{b}_m^\diamond &= \underline{\underline{t}}_{m\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^{\diamond +} \underline{\underline{F}}_{\bar{p}}^\diamond\end{aligned}$$

La prise en compte de la contrainte d'admissibilité sur les modes rigides Équation B.13 se fait (voir l'approche duale en sous-section 2.3.2) en notant :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{G}}_p^\diamond &= \underline{\underline{R}}_{\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{K}}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \underline{\underline{A}}_p^{\diamond T}, \quad \underline{\underline{G}}_d^\diamond = \underline{\underline{R}}_{\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{t}}_{d\bar{p}}^\diamond {}^T \underline{\underline{A}}_d^{\diamond T}, \quad \underline{\underline{G}}_m^\diamond = \underline{\underline{R}}_{\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{t}}_{m\bar{p}}^\diamond {}^T \\ \text{et } \underline{\underline{e}} &= \underline{\underline{R}}_{\bar{p}}^{\diamond T} \underline{\underline{F}}_{\bar{p}}^\diamond\end{aligned}$$

d'où le système constraint :

$$\left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{S}}_{pdm} \\ \left( -\underline{\underline{G}}_p^{\diamond T} \underline{\underline{G}}_d^{\diamond T} \underline{\underline{G}}_m^{\diamond T} \right) \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{G}}_p^{\diamond T} \\ \underline{\underline{G}}_d^{\diamond T} \\ -\underline{\underline{G}}_m^{\diamond T} \\ \underline{\underline{0}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{q}}_p \\ \underline{\underline{\lambda}}_d \\ \underline{\underline{\mu}}_m^\diamond \\ \underline{\underline{\alpha}}^\diamond \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \underline{b}_{pdm} \\ -\underline{\underline{e}} \end{array} \right) \quad (\text{B.21})$$

Comme pour l'approche hybride *primale-duale*, le problème obtenu correspond à la résolution d'un système linéaire sous contrainte. Contrainte qui tient de la possible non-inversibilité des matrices de raideur  $K_{\bar{p}\bar{p}}^{(s)}$  de chaque sous-domaine, traduite par la présence éventuelle de modes rigides selon la définition des interfaces. L'anti-symétrie partielle de l'opérateur peut se corriger en posant  $\hat{\lambda}_d = -\lambda_d$  :

$$\left[ \begin{array}{c} \hat{\underline{\underline{S}}}_{pdm} \\ \left( \underline{\underline{G}}_p^{\diamond T} \underline{\underline{G}}_d^{\diamond T} - \underline{\underline{G}}_m^{\diamond T} \right) \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{G}}_p^{\diamond T} \\ \underline{\underline{G}}_d^{\diamond T} \\ -\underline{\underline{G}}_m^{\diamond T} \\ \underline{\underline{0}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{q}}_p \\ \hat{\underline{\underline{\lambda}}}_d \\ \underline{\underline{\mu}}_m^\diamond \\ \underline{\underline{\alpha}}^\diamond \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \underline{b}_{pdm} \\ \underline{\underline{e}} \end{array} \right) \quad (\text{B.22})$$

tel que :

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_{pdm}^\diamond = \left[ \begin{array}{ccc} \underline{\underline{S}}_{pp}^\diamond & -\underline{\underline{S}}_{pd}^\diamond & \underline{\underline{S}}_{pm}^\diamond \\ -\underline{\underline{S}}_{pd}^{\diamond T} & -\underline{\underline{S}}_{dd}^\diamond & \underline{\underline{S}}_{dm}^\diamond \\ \underline{\underline{S}}_{pm}^{\diamond T} & \underline{\underline{S}}_{dm}^{\diamond T} & \underline{\underline{S}}_{mm}^\diamond \end{array} \right] \quad (\text{B.23})$$

L'opérateur symétrisé reste toutefois non-positif, ce qui oriente le choix d'un solveur itératif pour le problème d'interface vers la méthode GMRES (Generalized Minimal RESidual method), et cela de la même façon que pour l'approche hybride *primale-duale*.

### Préconditionnement et problème grossier :

Le préconditionnement de l'approche hybride *primale-duale* proposé par [Gosselet, 2003] repose sur une analyse mécanique des compléments de Schur locaux. En effet, une approximation du préconditionneur idéal (l'inverse ou pseudo-inverse du complément de Schur complet), s'écrit comme la somme des inverses des compléments de Schur locaux. Dans l'approche primale, celui-ci n'est autre que le complément de Schur dual. Inversement, dans l'approche duale, il s'agit du complément de Schur primal. En considérant l'équilibre d'un sous-domaine sous un chargement qui n'excite pas les modes rigides, P. Gosselet a mis en évidence l'expression de la pseudo-inverse du complément de Schur hybride *primal-dual*. La même analyse peut être *a priori* menée dans le cas de l'approche *primale-duale-mixte*. Considérons donc l'équilibre local sous chargement équilibré :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{ip}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{id}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{im}^{(s)} \\ \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{K}}_{pp}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{pd}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{pm}^{(s)} \\ \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{K}}_{dd}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{dm}^{(s)} \\ \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{K}}_{mm}^{(s)} + \underline{\underline{T}}_m^{(s)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_i^{(s)} \\ \underline{q}_p^{(s)} \\ \underline{q}_d^{(s)} \\ \underline{q}_m^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\lambda}_p^{(s)} \\ \underline{\lambda}_d^{(s)} \\ \underline{\mu}_m^{(s)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Par condensation des inconnues internes, il vient :

$$\underline{\underline{S}}_{pdm}^{(s)} \begin{pmatrix} \underline{q}_p^{(s)} \\ \underline{\lambda}_d^{(s)} \\ \underline{\mu}_m^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda}_p^{(s)} \\ \underline{q}_d^{(s)} \\ \underline{q}_m^{(s)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

En définissant  $\underline{\underline{S}}_{mdp}^{(s)}$  comme l'opérateur d'interface qui associe les réactions sur les inconnues duales et mixtes et les déplacements sur les inconnues primales à une réaction imposée sur les inconnues primales et une condition de Dirichlet sur les inconnues duales et mixtes, on obtient :

$$\underline{\underline{S}}_{mdp}^{(s)} \begin{pmatrix} \underline{\lambda}_p^{(s)} \\ \underline{q}_d^{(s)} \\ \underline{q}_m^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q}_p^{(s)} \\ \underline{\lambda}_d^{(s)} \\ \underline{\mu}_m^{(s)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

avec :

$$\underline{\underline{S}}_{mdp}^{(s)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{t}}_p^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{t}}_p^{(s)T} & -\underline{\underline{t}}_p^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d}}^{(s)} & \underline{\underline{t}}_p^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{m}}^{(s)} \\ \underline{\underline{-sym}} & \underline{\underline{K}}_{\overline{d} \overline{d+m}}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d}}^{(s)} & \underline{\underline{K}}_{\overline{d} \overline{d+m}}^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{m}}^{(s)} \\ \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{sym}} & \underline{\underline{K}}_{\overline{m} \overline{m}}^{(s)} + \underline{\underline{T}}_m^{(s)} - \underline{\underline{K}}_{\overline{m} \overline{d+m}}^{(s)} \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{d+m}}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{\overline{d+m} \overline{m}}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Cet opérateur est donc la pseudo-inverse du complément de Schur primal-dual-mixte local. Il peut être utilisé pour le préconditionnement du problème global tel quel ou dans une version *lumped* ou *super-lumped* (voir sous-section 2.3.3). Notons cependant que nous

n'avons pas trouvé dans la littérature de préconditionneur pour l'approche mixte. Peut-être convient-il mieux de ne pas en utiliser, auquel cas, (B.27) devient :

$$\underline{\underline{S}}_{mdp}^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{t_p^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}} \frac{K_{d+m d+m}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}}^+ \frac{t_p^{(s)T}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}} & -\frac{t_p^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}} \frac{K_{d+m d+m}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}}^+ \frac{K_{d+m d}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d}} & \underline{\underline{0}} \\ (\frac{t_p^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}} \frac{K_{d+m d+m}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d+m}}^+ \underline{\underline{K}}_{d+m d}^{(s)})^T & \underline{\underline{K}}_{dd}^{(s)} - \frac{K_{d d+m}^{(s)} K_{d+m d+m}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d d+m} \underline{\underline{K}}_{d+m d+m}}^+ \frac{K_{d+m d}^{(s)}}{\underline{\underline{K}}_{d+m d}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & I_m^{(s)} \end{bmatrix} \quad (B.28)$$

où on peut reconnaître le préconditionneur de l'approche hybride *primale-duale*.

En ce qui concerne les problèmes grossiers, ils peuvent être introduits de la même manière que pour les approches primales, duales, mixtes et hybrides (voir sous-section 2.3.3).

#### Cas de la localisation mixte :

L'approche de type mixte, proposée par [Cresta, 2008] pour la localisation non-linéaire peut être introduite dans cette formulation hybride *primale-duale-mixte* par le biais des interfaces primales. En effet, le système global condensé pour cette approche (voir sous-section 2.3.4) consiste en un complément de Schur primal, un vecteur déplacement d'interface et un second membre condensé modifié par l'ajout d'une contribution du “saut en déplacement à l'interface”.

## B.3 Bilan et perspectives

L'approche hybride *primale-duale* est étendue aux interfaces mixtes. L'approche hybride *primale-duale-mixte* n'a pas forcément pour objectif d'être une méthode de décomposition de domaine en elle-même. Il s'agit plutôt de réunir dans une même écriture tous les ingrédients qui permettent d'aboutir à un large panel de méthodes de décomposition de domaine sans-recouvrement existantes.

La combinaison des différents types d'interface peut toutefois s'avérer intéressante. C'est le cas notamment en présence d'hétérogénéités, comme le montre P. Gosselet pour l'approche hybride *primale-duale*. L'approche mixte présentée ici ne tient en outre compte que d'interfaces parfaites mais elle peut également être un bon moyen d'intégrer des interfaces avec ou sans frottements [Champaney *et al.*, 1997 ; Passieux, 2008]. Des travaux ont déjà permis d'intégrer ces types d'interfaces dans l'approche duale [Dureisseix et Farhat, 2001]. Une extension de l'approche hybride *primale-duale-mixte* à d'autres types d'interfaces peut constituer une perspective pour unifier les méthodes de décomposition de domaine et offrir un cadre pour en découvrir les meilleures combinaisons. On peut penser aussi à formaliser la possible non compatibilité des sous-domaines de part et d'autre de l'interface en incluant les raccords de type *mortar* [Bernardi *et al.*, 1993], déjà mis en œuvre dans le cadre d'une approche duale par [Amini, 2008].

