



FILIERE : PHYSIQUES - CHIMIES

MEMOIRE DE C.A.P.E.N

(Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale)

Sous le thème:

**DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS:
«THEOREME DE BERNOULLI ET QUELQUES APPLICATIONS»**

Présenté et soutenu par:

DAMA Rajoelison Alexandre

Encadré par:

Monsieur RATSIMBAZAFY

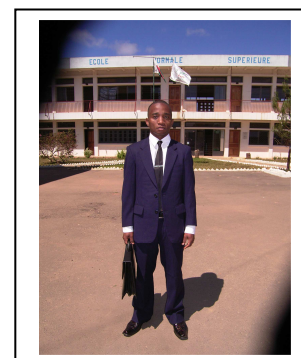
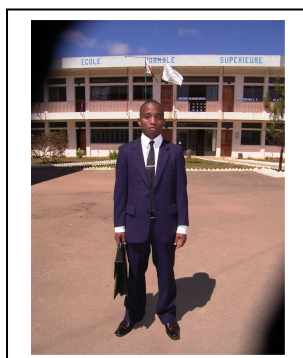
Les membres de jury:

Président de jury: Monsieur RASOLOARIJAONA Madison
Maître de conférences

Directeur de mémoire: Monsieur RATSIMBAZAFY
Enseignant chercheur

Examineur: Madame RANIVONADRASANA Florentine
Enseignant chercheur

Promotion 2010



DEDICACE.

Je dédie ce mémoire :

**A Dieu car il m'a aidé et donné la force et la santé durant mes études.*

**A mon Père et à ma Mère qui m'ont partagé ses soucis et n'ont pas cessé de me soutenir moralement et financièrement, de me conseiller et qui m'ont aidé jour et nuit pour la réalisation de ce mémoire.*

**A mes frères qui ont partagé avec moi les inquiétudes et les difficultés différentes à mes travaux et qui m'ont aidé et donné des conseils lors de mon travail.*

**A mes amis, qui, de près et de loin, m'ont aidé au cours de ce travail et m'ont apporté leur soutien moral.*

Monsieur DAMA Rajoelison Alexandre

REMERCIEMENT.

Nous tenons tout d'abord à remercier le Seigneur qui nous a beaucoup aidé et nous a donné la chance de mener à bons termes nos études. Que la gloire Lui revienne.

Nous exprimons ensuite nos vifs remerciements à tous ceux qui, de loin ou de près, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Ainsi, dans le cadre de la réalisation de ce mémoire, nous remercions particulièrement les personnes ci-après :

- Monsieur RASOLOARIJONA Madison qui n'a pas hésité à venir présider cette soutenance ;
- Madame RANIVONANDRASANA Florentine qui a accepté d'en être l'examineur ;
- Monsieur RATSIMBAZAFY qui nous a beaucoup aidés pour mettre au point ce travail ;
- Madame le Directeur, tous les professeurs et le personnel administratif de l'Ecole Normale Supérieure de Fianarantsoa. Nous ne vous oublions pas, car c'est grâce à vous, à votre soutien pédagogique et moral que nous avons pu mener à terme nos études.

Nous ne pouvons pas mettre à côté le Général de Brigade RANDRIANANDRASANA Andrianasolo Hermond, Monsieur Le secrétaire principale de la faculté de science de l'université de Fianarantsoa RABEMANANJARA Lucien et l'Adjudant ERNEST pour les soutiens matériels. Il en est de même le CED II et de la Bibliothèque de Fianarantsoa qui ont accepté de nous laisser consulter leurs documents précieux nécessaires.

Mes remerciements les plus chaleureux vont également à mes parents qui m'ont témoigné de leur sympathie affection m'a permis de mener à bout mes longues études.

« Réjouissez-vous toujours dans le Seigneur, je le répète, réjouissez-vous. »

Philipiens.4 :4

Sommaire

DEDICACE	1
REMERCIEMENT	2
SOMMAIRE	3
NOMENCLATURE	5
LISTE DES FIGURES	7
ABREVIATIONS	9
INTRODUCTION	10
PREMIERE PARTIE : Les différentes formes d'équations de la dynamique des fluides parfaits	11
Chapitre-I. EQUATIONS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DE FLUIDE PARFAIT	12
I-1.-Equation d'Euler.....	12
I-2.-Autres formes des équations d'Euler.....	13
I-3.-Autres équations de la dynamique de fluide parfait.....	16
I-4.-Conditions aux limites.....	17
I-5.-Equation intrinsèque.....	20
I-6.-Cas particulier.....	24
Chapitre-II.- RELATION DE BERNOULLI	25
II-1.-Etablissement de l'équation de Bernoulli.....	26
II-2.-Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli.....	27
II-3.-Formules d'application pratique.....	32
II-4.-Ecoulement à énergie constante.....	33
II-5.-Généralisation de la formule de Bernoulli.....	36
Chapitre-III.-THEOREME DE QUANTITE DES MOUVEMENTS	42
III-1.-Théorème d'Euler.....	43
III-2.-Enonce pratique du théorème d'Euler.....	46
DEUXIEME PARTIE: Application de la formule de Bernoulli	47
Chapitre-IV.-APPLICATION DU THEOREME DE BERNOULLI	48
IV-1.-Formule de Torricelli.....	48
IV-2.-Calcul du débit d'un orifice: coefficient de contraction.....	52
IV-3.-Ecoulement réel par un orifice.....	58
IV-4.-Pression dans une conduite. Tube piézométrique.....	61
IV-5.-Pression en un point d'arrêt.....	64
IV-6.-Tube de Pitot.....	66
IV-7.-Phénomène de venturi.....	69

IV-8.-Application du théorème de Bernoulli généralisé (Théorème de Cotton-Fortier.....	72
Chapitre-V.-QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION DE LA FORMULE DE BERNOULLI.....	77
V-1.-Relation entre la pression atmosphérique et la pression à l'intérieure d'un verre ou d'un tube contenant de fluide.....	77
V-2.-Cas de robinet.....	78
V-3.-Tuyau de section variable.....	80
V-4.-Expérience sur un tube de caoutchouc.....	82
V-5.-Le jet d'air.....	82
CONCLUSION.....	83
BIBLIOGRAPHIE.....	84
ANNEXES.....	85
*Annexe-I.-BARRAGE.....	85
I-1.-Histoire.....	86
I-2.-Etudes hydrauliques.....	86
I-3.-Vies de barrage.....	90
I-4.-Conséquences environnementales.....	92
*Annexe-II.-HISTOIRE DEDANIEL Bernoulli.....	95
II-1.-Biographies, travaux.....	96
II-2.-Publications	97
TABLES DE MATIERES.....	98

NOMENCLATURE :

Σ : Somme totale

$\vec{F}$: Force d'inertie

$\vec{\gamma}$: Accélération

ρ : Masse volumique du fluide

P : Pression

∂ : Dérivée partielle

q_v : Débit en volume

ρ_0 : Masse volumique initiale du fluide

X, Y, Z : Composants de $\vec{F}$ sur les axes

$\vec{V}$: Vitesse de fluide

u, v, w : Composants de la vitesse sur les axes

t : Temps

l, m, n : Les cosinus directeurs de la normale à la surface en un point M

Ox, Oy, Oz: Axes

$\overrightarrow{rot}$: Rotation

$\overrightarrow{grad}$: Gradient

$\vec{t}$: Le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire

R_T : Rayon de la courbure

m : Masse du fluide

T, N : Les composantes de $\vec{F}$ sur M_x, M_y

R_C : Rayon de courbure de courant

h : Hauteur

g : Intensité de pesanteur terrestre

ϖ : Poids volumique

ω : Vitesse de rotation angulaire

φ : Potentiel de vitesse

$\vec{\pi}$: Forces extérieures

$\vec{K}$: Forces de parois exercées sur les fluides

$\vec{R}$: Forces des pressions sur les parois

C_C : Coefficient de contraction

σ : Air dans une section contractée

C_q : Coefficient de débit

η : Rendement d'un orifice

A : Prise de pression

K : Coefficient

α : Coefficient numérique

H : Charge totale moyenne dans la section S

Q : Masse d'eau écouant par seconde à travers une section droite

LISTES DES FIGURES :

Figure.1 : Ligne de courant

Figure.2 : Paroi fixe

Figure.3: Paroi mobile

Figure.4 : Montrant un système d'axes

Figure.5 : Référentiel trirectangulaire

Figure.6 : Montrant l'augmentation de la pression quand on s'éloigne du centre de courbure

Figure.7 : Interprétation énergétique de la formule de Bernoulli

Figure.8 : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Figure.9 : Fluide incompressible dans une surface (S)

Figure.10 : Application du théorème de quantité de mouvement dans le cas d'un mouvement permanent

Figure.11 : Surface de référence

Figure.12 : Ecoulement d'un liquide par un orifice de mince paroi

Figure.13 : Ecoulement d'un gaz par un orifice à mince paroi

Figure.14 : Etude de la contraction de la veine

Figure.15 : Orifice à mince paroi

Figure.16 : Fente étroite

Figure.17 : Orifice à bois profiles

Figure.18 : Orifice rentrant

Figure.19 : Orifice rentrant

Figure.20 : Etudes des jets

Figure.21 : Coefficient de contraction et coefficient de débit de divers orifices

Figure.22 : Vidage d'un réservoir

Figure.23 : Tube piézométrique Réservoir de liquide sous pression

Figure.24 : Tube piézométrique

Figure.25 : Prises de pression statique

Figure.26 : La hauteur piézométrique

Figure.27 : Ecoulement autour d'un point d'arrêt

Figure.28 : Pression en un point d'arrêt

Figure.29 :) Tube de Pitot (tube double)

Figure.30 : Tube de venturi (débitmètre

Figure.31 : Diffuseur de turbine hydraulique

Figure.32 : Canalisations

Figure.33 : Ecoulement dans un convergent

Figure.34 : Ecoulement dans un divergent

Figure.35: Pression à l'intérieure d'un verre

Figure.36 : Résistance locale

Figure.37 : Tuyau de section variable

Figure.38 : Tube de caoutchouc

Figure.39 : Le jet d'air

Figure.40 : Le barrage Daniel Johnson

Figure.41 : Barrage de Limmen

Figure.42 : Barrage Hoover

Figure.43 : Evacuateur de crues du barrage Matsumoto

Figure.44 : Barrage de poids

Figure.45: Barrage voûte

Figure.46 : Barrages mobiles à aiguilles Barrage centreforts

Figure.47 : Barrages mobiles à aiguilles

Figure.48: Entretien des barrages

Figure.49: Conséquences environnementale

Figure.50: DANIEL Bernoulli

ABBREVIATIONS :

FID : Fonds d'Intervention pour le Développement.

PSDR : Programme de Soutien pour le Développement Rural.

DRDR : Direction Régionale pour le Développement rural.

DDR : Direction du Développement rural.

UE : Union Européenne.

INTRODUCTION :

La mécanique de fluide s'occupe de vaste domaine dans la discipline de la physique.

Elle est plus expérimentale et plus applicable pour nous car elle agit directement dans la vie courante.

C'est pourquoi cette partie de la mécanique est réservée surtout aux grandes écoles d'ingénieurs, de professeurs. A partir de cette mécanique de fluide, où on peut résoudre les problèmes posés par le mouvement des fluides.

En France, la mécanique des fluides est généralement considérée comme une discipline rattachée aux Mathématiques. Cependant, malgré l'introduction d'hypothèse simple, on se trouve rapidement devant de très grandes difficultés de calculs et, pour résoudre les problèmes pratiques, il faut souvent faire appel à l'expérience. C'est pour cela, qu'à côté des nous d'illustres Mathématiciens : Bernoulli, d'Alembert, Euler, Stokes..., on trouve ceux de beaucoup d'Ingénieurs : Bazin, Navier, Saint-Venant...

Ici à Madagascar, on y trouve encore beaucoup de ressources naturelles comme les nombreux parcs réservés, des rivières, des fleuves, des cours d'eau..., et de plus 70 pourcent de la population sont encore dans les régions rurales, c'est-à-dire, des cultivateurs qui ont besoin des aides techniques comme la construction des barrages, c'est pourquoi on choisit dans cette mécanique de fluide « La relation de Bernoulli et ses applications » comme sujet de recherche pendant la réalisation de ce mémoire car là, on peut aider la population malgache dans ses problèmes.

Alors pour aborder cette étude, il faut voir dans le premier chapitre, l'équation générale de la dynamique des fluides parfaits. Le deuxième chapitre est consacré à l'élaboration de la relation de Bernoulli. Le troisième chapitre, nous allons voir le théorème des quantités de mouvement. Le quatrième chapitre expose quelques applications du théorème de Bernoulli. Enfin le cinquième chapitre montre les importances de l'application de la formule de Bernoulli dans la vie courante.

PREMIERE PARTIE :

LES DIFFERENTES FORMES

D'EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DES

FLUIDES PARFAITS

Chapitre-I.-EQUATIONS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux mouvements des fluides parfaits, c'est à dire sans frottement (fluides non visqueux). Cependant, il nous arrivera parfois

d'indiquer dans les équations comme peuvent s'introduire d'autres termes caractérisent les fluides réels.

Nous étudierons tout particulièrement le cas des fluides incompressibles.

I-1.-Equations d'Euler

Si on étudie les forces qui réagissent sur un élément de volume, on distingue :

- a)-Les forces de volume, proportionnelles à l'élément de volume ;
- b)- Les forces de pression, proportionnelles aux éléments de surface et normales à ces éléments.
- d) – Les forces d'inerties proportionnelles à l'accélération $\vec{\gamma}$ au volume. Cet ensemble de forces satisfait à l'équation :

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}} \quad (1)$$

En statique $\vec{\gamma} = \vec{0}$ donc $\sum \vec{F} = \vec{0}$. En raisonnant sur un élément de volume parallélépipédique on avait trouvé comme équations.

$$\boxed{\begin{cases} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}} \quad (2)$$

Dans un système de coordonnées triangulaire.

(1) Cette expression est valable que pour une particule d'individualité donnée ; on ne

Peut donc l'appliquer qu'en suivant la particule dans son mouvement ;

Par ailleurs ; $\vec{\gamma}$ étant une accélération absolue, les formulations que nous déduisons de l'équation (1) ne seront valable que dans un référentiel absolu.

En dynamique de fluides $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$.

On peut donc partir des équations précédentes et leur ajouter un second membre. Dans un système d'axes trirectangulaires, on a l'habitude de les écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \gamma_x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \gamma_y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \gamma_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3)$$

Ou sous forme vectorielle : $(3')$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad P}$$

Ces sont les équations d'Euler où X, Y, Z sont les composants suivants les axes de la force de volume $\vec{F}$ par unité de masse.

I-2.- Autre forme des équations d'Euler.

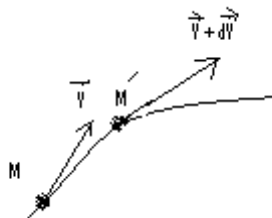
Les équations de la dynamique de fluides sont souvent utilisées sous une autre forme.

Considérons la trajectoire d'une particule et soit $\vec{V}$, de

Composantes u, v, w sa vitesse à l'instant t. Ces

Composantes sont fonctions de x, y, z et t.

Figure.1.-Ligne de courant



En particulier

$$u = f(x, y, z, t)$$

A l'instant $t + dt$, on a :

$$u + du = f_1(x + udu, y + vdv, z + wdw)$$

$$= F_1(x, y, z, t) + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt + \dots$$

$$D'où \quad \gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ces composants de l'accélération d'une particule, en variable d'Euler sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y = \frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z = \frac{dw}{dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (4)$$

Dans les équations du mouvement (3), on peut donc remplacer $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ par les expressions précédentes.

On obtient ainsi la formule classique des équations d'Euler, valable pour un fluide parfait :

(5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz}$$

Nous supposons dans ce qui suit, que les forces de volume doivent d'un potentiel :

$$X = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u = gh$$

où « h » est compté positivement vers le haut à partir d'un plan horizontal de référence.

Si « Z » est compté aussi positivement vers le haut, on aura :

$$Z = Y = 0$$

$$z = -g \frac{\partial h}{\partial z} = -g$$

Remarque à propos de l'expression des termes d'inertie.

a) Les expressions (4) sont les projections vectorielles :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{grad}_V^2 + \overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} \quad (5)$$

b) En tenant compte de l'équation de continuité, et dans le cas d'un mouvement conservatif, les termes d'inertie peuvent s'exprimer d'une autre manière. Par exemple :

$$\begin{aligned} \rho \gamma_x &= \rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - u \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Soit en vertu de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \sum \rho q_v \quad (6)$$

Soit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{div} \rho \vec{V} = \sum \rho q_v \quad (6')$$

Et dans le cas d'un mouvement conservatif :

$$\rho \gamma_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$$

Pour un fluide incompressible, nous obtenons ainsi

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}$$

I-3.-Autres équations de la dynamique des fluides parfaits.

Les caractéristiques du mouvement d'un fluide dépendent de 6 inconnues u, v, w, P, ρ . Les équations précédentes sont au nombre de « 3 », il n'en faut donc « 3 » autres pour résoudre les problèmes de dynamique. Ce sont les suivants :

I-3-1. -L'équation de continuité : elle a été établie dans le chapitre précédent, elle traduit le principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial\left(\frac{\rho u}{\partial x}\right) + \partial\left(\frac{\rho v}{\partial y}\right) + \partial\left(\frac{\rho w}{\partial z}\right) = \sum \rho q_v$$

q_v est le débit volumique de source ($q_v > 0$), de puits ($q_v < 0$), situés dans le volume de fluide étudié

I-3-2.-L'équation caractéristique de fluide : cette équation est donnée par la physique, elle traduit les propriétés fondamentales du fluide :

$$(P, \rho, T) = 0$$

Elle se traduit en générale «3» formes suivantes :

$$\rho = f(T) \quad \text{Pour un liquide incompressible}$$

$$\rho = \rho_0(T)[1 + Kp] \quad \text{Pour un liquide légèrement compressible}$$

$$\frac{p}{\rho} = r T \quad \text{Pour un gaz parfait}$$

I-3-3.-L'équation complémentaire :

Cette équation est fournie par la thermodynamique, elle caractérise le type de transformation subie par le fluide en mouvement.

En fluide parfait nous supposons les transformations réversibles (pas de frottement), les lois sont alors relativement simples.

Les plus usuels sont :

α) - Pour une transformation isotherme : Température constante. L'équation d'état est donc :

$$\rho = \text{Cte} \quad \text{Pour un liquide incompressible ;}$$

$$\frac{p}{\rho} = \text{Cte} \quad \text{Pour un gaz parfait}$$

β) - Pour une transformation adiabatique, on peut encore admettre $\rho = \text{Cte}$ pour un liquide incompressible (à condition de ne pas se trouver dans le voisinage du point critique), et $\frac{p}{\rho^k} = \text{Cte}$ s'il s'agit d'un gaz parfait (l'écoulement était déjà supposé réversible, il est donc isentropique).

I-4-Conditions aux limites : Les six équations précédentes à six inconnus peuvent avoir ou non une ou plusieurs solutions. De toute façon ces solutions, si elles existent, contiennent des constantes d'intégration qui seront déterminées par les conditions initiales.

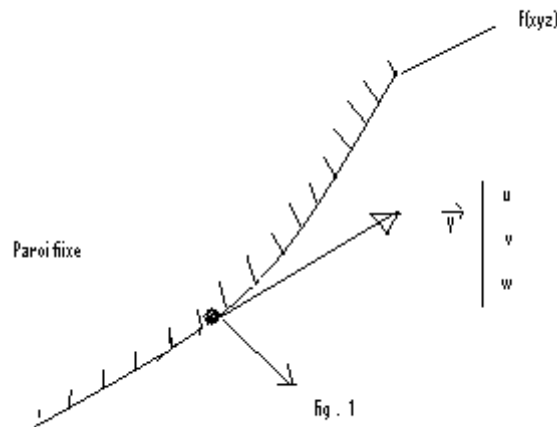
Pour un fluide parfait, les conditions aux limites sont habituellement définies par des parois fixes ou mobiles, ou par des surfaces libres.

I-4-1.-Paroi fixe(Fig.2) : -Soit $F(x, y, z) = 0$; l'équation de paroi

Les vitesses $\vec{V} \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$; doit être parallèle à la paroi, donc perpendiculaire à la normale à

la paroi. Cette normale étant définie par les composantes $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$

la condition aux limites :
$$\boxed{u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0} \quad (7)$$

Figure.2.-Paroi fixe

I-4-2.- Paroi mobile : On exprime que la composante de la vitesse du fluide suivant la normale à la paroi est égale à la composante de la vitesse de la paroi suivant cette normale.

Si l'équation de la paroi est $F(x, y, z, t) = 0$ à l'instant $\ll t \gg$, on démontre que la condition aux limites se traduit par la relation :

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

I-4-3.-Démonstration (fig. 2) : Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface en M , nous avons :

$$l = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial x} ; \quad m = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial y} ; \quad n = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (8)$$

En posant :

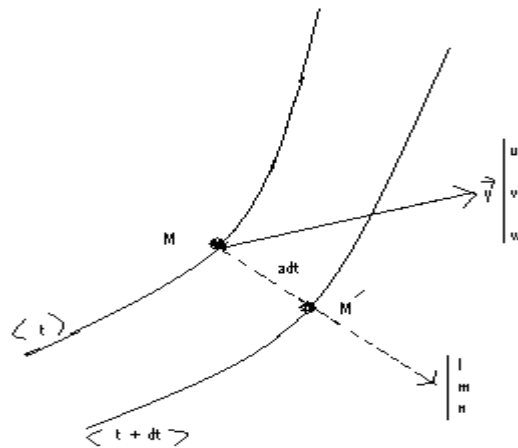
$$R = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Soit à la composante normale de la vitesse de déplacement du point M de la paroi :

Figure.3.-Paroi mobile

$$|\overrightarrow{MM'}| = a dt$$

$$\overrightarrow{MM'} \begin{cases} dx = a dt \\ dy = a m dt \\ dz = a n dt \end{cases}$$



À l'instant $t + dt$, nous avons :

$$F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0$$

Soit, en faisant un développement limité :

$$F(x, y, z, t) + a \left[l \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} + n \frac{\partial F}{\partial z} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0$$

et en vertu des équations (8), le crochet s'écrit :

$$l \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} + n \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{R} \cdot R^2 = R$$

Il devint donc :

$$a = - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

Exprimons maintenant, qu'en chaque point, tout le long de MM' , les particules fluides ont, dans la condition normal (l, m, n) une composante de vitesse égale à a . Il suffit pour cela, de projeter leur vitesse (u, v, w) dans cette direction.

Cela donne :

$$a = lu + mv + nw$$

Remplaçons, l, m, n et a par leur valeur, il vient :

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

I-4-4.-Surface libre : Le long de cette surface la pression est constante (pression atmosphérique), elle doit donc vérifier :

$$P(x, y, z, t) = 0$$

Le long de cette surface isobare la vitesse u, v, w d'une particule fluide doit avoir la même vitesse normale que celle d'un point de la surface. La condition à exprimer est donc identique à la précédente, il suffit de remplacer F par P.

I-4-5.-Surface de discontinuité : Le long de cette surface d'équation $F(x, y, z, t) = 0$, la vitesse subit un changement brusque d'intensité mais non de direction. La condition à satisfaire est :

$$(u_2 - u_1) \frac{\partial F}{\partial x} + (v_2 - v_1) \frac{\partial F}{\partial y} + (w_2 - w_1) \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

I-5.-Equation Intrinsèques :

Les équations d'Euler sont la traduite de l'égalité vectorielle :

$$m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}$$

C'est-à-dire pour l'unité de volume :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad} P} \quad (9)$$

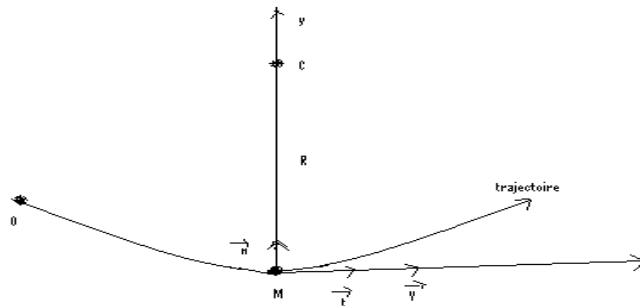
$\vec{F}$ étant la force de volume par unité de masse

Cette équation vectorielle est aussi vraie en projection sur une direction quelconque

Prenons un système d'axes de coordonnées liés à la trajectoire tel qu'au temps $t = 0$, en M (fig.4).

- ox soit confondu avec la tangente,
- oy soit confondu avec la normale principale
- oz soit confondu avec la binormiale

Figure.4.-Système d'axes(ox , oy , oz) de coordonnées liés à la trajectoire



Le mouvement a lieu dans le plan osculateur M_{xy} . En appliquant $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire en M , on a :

$$\vec{V} = V \vec{\tau}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dV}{dt} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Soit S la longueur d'arc de trajectoire compté positivement dans le sens du mouvement à partir d'une origine arbitraire O . On peut écrire (formule de Frenet) :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R_T} \cdot V$$

où R_T est le rayon de courbure de la trajectoire et $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale principale.

Donc :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dV}{dt} + \vec{n} \frac{V^2}{R_T}$$

$$\gamma_x = \frac{dV}{dt} \quad ; \quad \gamma_y = \frac{V^2}{R_T} \quad ; \quad \gamma_z = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial S}$$

D'où les équations intrinsèques (axes liés à la trajectoire) :

$$\boxed{\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial S} = \rho T - \frac{\partial P}{\partial S}} \quad (10)$$

$$\boxed{\rho \frac{V^2}{R_T} = \rho N - \frac{\partial P}{\partial n}}$$

T et N étant les composantes de $\vec{F}$ sur M_x et M_y .

En général, nous à considérer que des écoulements permanents, par suite $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, et les projections de l'équation (9) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho V \frac{\partial V}{\partial S} = \rho T - \frac{\partial P}{\partial S} \\ \rho \frac{V^2}{R} = \rho N - \frac{\partial P}{\partial n} \end{array} \right. \quad (11)$$

R est toujours le rayon courbure de la trajectoire, confondu maintenant avec celui de la ligne de courant.

Si les forces de volume dérivent d'un potentiel u nous avons :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{grad} u \text{ donc :}$$

$$T = - \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$N = - \frac{\partial u}{\partial n}$$

Et les équations (11) deviennent :

$$\boxed{\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = - \rho \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial s}} \quad (12)$$

$$\boxed{\rho \frac{V^2}{R} = - \rho \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial P}{\partial S}}$$

En général les forces de volume se réduisent aux forces de pesanteur: $u = gh$ (h étant compté positivement vers le haut à partir d'un plan de référence quelconque horizontal).

Pour l'écoulement d'un fluide incompressible ($f = \text{Cte}$) dans le champ de pesanteurs les équations dynamiques du mouvement s'écrivent donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho V \frac{\partial V}{\partial s} &= - \frac{\partial}{\partial s} (P + \rho gh) = - \frac{\partial P_g}{\partial s} \\ \rho \frac{V^2}{R} &= - \frac{\partial}{\partial n} (P + \rho gh) = - \frac{\partial P_g}{\partial n} \end{aligned}} \quad (13)$$

Comme en hydrostatique nous retrouvons sous le même signe différentiel les deux quantités P et ρgh et nous continuerons à appeler P_g (pression motrice) l'expression

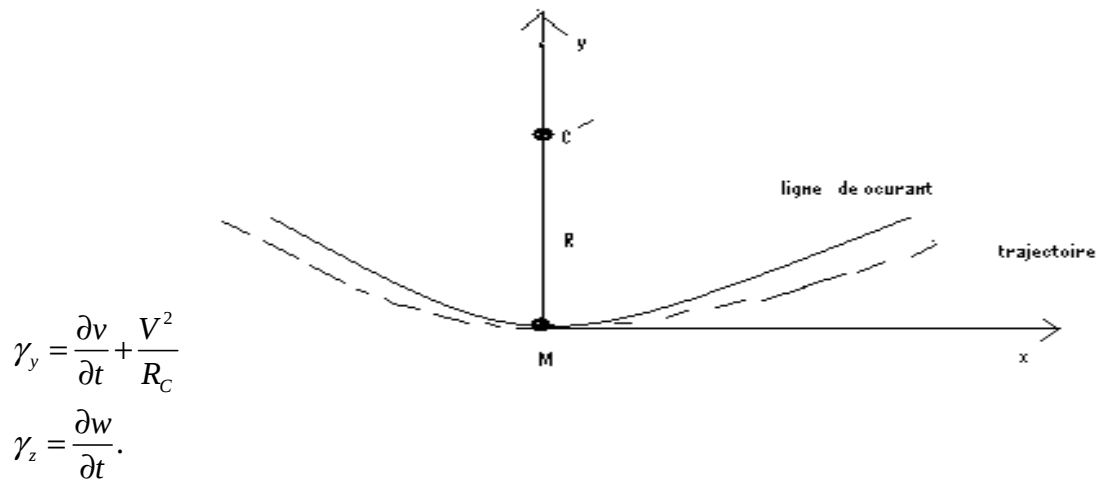
$P + \rho gh$ (*).

REMARQUE : 1) Dans le cas générale, si on prend un référentiel trirectangle lié à la

ligne de courant, et non plus à la trajectoire, ces deux courbes étant cependant

tangente en M , (fig. 5), on trouve :

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

Figure.5.-Référentiel trirectangle

R_c étant le rayon courbure de la ligne de courant

2) En écoulement permanent, les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ disparaissent et $R_c = R_T = R$.

I-6.- Cas particulier :

Les écoulements définies par les équations (13) sont les plus importants au point de vue pratique et ces expressions sont très utiles car elles permettent d'étudier d'une manière simple les variations de P_g le long des lignes de courant ou le long de leur normales.

Etudions quelques cas particulier important correspondant à ce deuxième aspect.

a) $R = \infty$. Le rayon de courbure étant infini, les trajectoires sont des droites (pas forcément parallèle).

Dans ces conditions nous trouvons :

- Dans le cas général (équation 11) : $\frac{\partial P}{\partial n} = \rho N$;
- Dans le champ de pesanteur (équation 13) : $\frac{\partial P_g}{\partial n} = 0$

Dans ce dernier cas, l'expression $P + \rho gh$ reste constante quand se déplace normalement aux trajectoires :

la répartition de pression en Hydrostatique.

Pour un écoulement permanent, incompressible dans le champ de pesanteur, l'équation du mouvement :

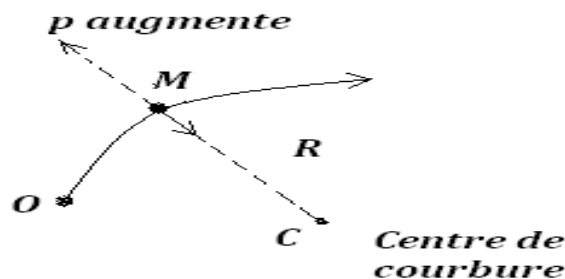
$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overline{\text{grad}} p_g \quad (14)$$

b) $R \neq 0$. Dans bien des cas on peut considérer comme nulles ou négligeables les forces de volume devant les forces d'inertie. On trouve alors :

$$\rho \frac{V^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad (15)$$

La pression diminue dans le sens de $\vec{n}$, donc augmente quand on s'éloigne du centre courbure (fig. 6). On dit encore que l'augmentation de pression est telle qu'elle compense exactement les forces centrifuges.

Figure.6.-La pression augmente quand on s'éloigne du centre de courbure.



REMARQUE : -Dans les problèmes on n'étudie pas en générale le mouvement des fluides à partir de ces diverses équations différentielles car, moyennant certaines conditions, il est possible d'en donner tout de suite une intégrale première soit sous la forme du théorème de Bernoulli (formule de Bernoulli), soit sous la forme du théorème d'Euler (théorème d'impulsion ou des quantités de mouvement).

Chapitre-II.-RELATION DE BERNOULLI.

Les hypothèses de calcul sont les suivants :

-Fluide parfait en écoulement permanent : rotationnel ou non.

-Forces de volume dérivant d'un potentiel $\vec{U} = -\overline{\text{grad}} U$

$-\rho$ n'est fonction que de P , ou bien ρ est constante.

II-1.-Etablissement de l'équation de Bernoulli.

Si nous restons le long d'une ligne de courant, confondu avec la trajectoire, la première des équations (12), nous donne :

$$\boxed{V \frac{dV}{ds} = -\frac{du}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds}} \quad (16)$$

Qu'on peut intégrer sous la forme : (17)

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + u + \int \frac{dp}{\rho} = Cte}$$

Le long d'une ligne de courant, l'expression précédente est donc constante, l'intégrale pouvant se calculer si on connaît la relation liant ρ et P .

Entre deux points 1 et 2 de la ligne de courant, on peut écrire :

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + u_2 - u_1 + \int \frac{dp}{\rho} = Cte \quad (18)$$

Si les forces de volume se réduisent aux seules de gravité, on remplacera U par gh .

Si, en outre, ρ est constante (fluide incompressible), le calcul de l'intégral est immédiat et on trouve soit :

$$\frac{V^2}{2} - gh + \frac{p}{\rho} = Cte \quad (19)$$

Soit :

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho}} \quad (20)$$

Telles sont les diverses expressions de l'équation dite de DANIEL Bernoulli (1738) et dont l'importance est fondamentale en mécanique de fluides.

II-2.- Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli.

Pour un écoulement incompressible, écrivons l'équation (19) sous la forme :

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gh = Cte \quad (21)$$

Ou :

$$\rho \frac{V^2}{2} + p_g = Cte \quad (22)$$

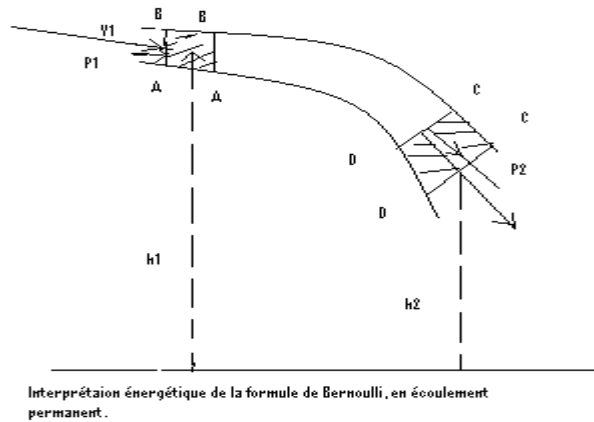
$\rho \frac{V^2}{2}$ est l'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide. Quant à p_g , nous avons vu en hydrostatique, que cela représentait l'énergie potentielle de l'unité de volume de fluide dans le champ de pesanteur et sous la pression P . La somme $\rho \frac{V^2}{2} + p_g$ correspond donc à l'énergie mécanique totale de l'unité de volume de fluide et l'équation de Bernoulli traduit la conservation de cette énergie mécanique totale au cours du mouvement (permanent). Pour un tel écoulement, le principe de la conservation de l'énergie confond avec l'intégrale des équations dynamiques. On doit donc pouvoir retrouver le même résultat en étudiant

directement les échanges énergétiques d'une particule avec l'extérieur. Considérons en effet, en régime permanent, un filet de courant infiniment étroit ABCD

(fig. 7). Les quantités p, ρ et V sont constants dans une même section d'aire S située à la Cote h .

Pendant le temps dt la masse de fluide contenu dans la section ABCD passe en $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$, mais l'énergie mécanique contenue dans la partie commune $\hat{A}\hat{B}CD$ n'a pas changé. Du point de vue énergétique tout se passe comme si, pendant le temps dt , la masse contenu dans $AB\hat{B}\hat{A}$ passait directement en $DC\hat{C}\hat{D}$.

Figure.7.-Interprétation énergétique de la formule de Bernoulli, en écoulement permanent.



Nous avons donc à exprimer :

a) La conservation de masse :

$$\rho S_1 V_1 dt = \rho S_2 V_2 dt = dm$$

b) La conservation de l'énergie : en supposant nuls les échanges thermiques et la variation de l'énergie interne, l'augmentation de l'énergie cinétique de la masse dm est égal au travail des forces extérieures.

Ces derniers sont constitués par :

-le travail de forces de pression :

$+\rho S_1 V_1 dt$ en AB

$-\rho S_2 V_2 dt$ en CD

-Le travail de la pesanteur :

$$(h_1 - h_2) g dm$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\frac{1}{2} dm' (V_2^2 - V_1^2) = (\rho_1 S_1 V_1 - \rho_2 S_2 V_2) dt + (h_1 - h_2) dm} \quad (23)$$

Compte tenu de la conservation de la masse, il vient

$$\frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) = (P_1 - P_2) + \rho g (h_1 - h_2)$$

Donc :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g h_2$$

REMARQUE :

a) L'expression $\rho g + \rho \frac{V^2}{2}$ représente l'énergie mécanique totale contenue dans l'unité de volume de fluide, c'est donc le travail mécanique total que la particule est susceptible de fournir. D'une manière générale l'énergie peut se présenter sous différents aspects : mécanique, calorifique, chimique, atomique, etc....., mais, en ce qui concerne l'énergie mécanique, elle se présente ici sous trois formes : énergie de position, énergie de pression, énergie cinétique. Les deux premières formes constituent l'énergie de potentielle.

Dans le cas d'un fluide pesant incompressible nous avons pour la masse m de volume v :

-comme énergie de position (énergie d'altitude) :

$$\boxed{mgh = \varpi v h} \quad (24)$$

-comme énergie de pression :

$$\boxed{PV = \frac{P}{\varpi} \cdot \varpi V = \frac{P}{\varpi} \cdot mg} \quad (25)$$

elle est égale au produit de poids du fluide par la hauteur $\frac{p}{\varpi}$ représentative de la pression,

-comme énergie cinétique :

$$\boxed{\int dm \frac{V^2}{2}} \quad (26)$$

On doit tenir compte de l'énergie cinétique de rotation et de translation. Si cette dernière existe seule, on peut l'écrire sous la forme :

$$\int dm V^2 = \frac{1}{2} m V^2 = m g \frac{V^2}{2g} \quad (27)$$

où V représente la vitesse du centre de gravité de la particule.

Dans le cas d'un fluide compressible, l'énergie de pression seront égal à :

$$m \int \frac{dp}{\rho} = m g \int \frac{dp}{\varpi}$$

b) Il n'est naturellement pas nécessaire, pour établir l'équation de Bernoulli, de passer par les équations intrinsèques. On peut opérer directement en utilisant les équations cartésiennes.

Si l'écoulement est permanent, nous avons :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

et en tenant compte des équations (3) :

$$dp = \rho [X dx + Y dy + Z dz] - \rho \left[\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right]$$

Par ailleurs, le long d'une ligne de courant nous avons des expressions de la forme : $dx = u dt$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{du}{dt} dx = \frac{du}{dt} u dt = u du$$

Il vient donc :

$$dp = \rho [X dx + Y dy + Z dz] - \rho [u du + v dv + w dw]$$

Soit :

$$dp = -\rho du - \rho d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

c) L'équation de Bernoulli peut s'établir par des considérations vectorielles directes. Substituons, dans le premier membre de l'équation (9), la dérivée $\frac{d\vec{V}}{dt}$ par son expression développée donnée par l'équation (6), il vient :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \frac{V^2}{2} + \rho \overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} p.$$

Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{Cte}$), en mouvement permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et si le champ de forces dérive d'un potentiel ($\vec{F} = -\overrightarrow{grad} u$), nous obtenons :

$$\boxed{\overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = -\overrightarrow{grad} \left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} \right)} \quad (28)$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette relation par $\vec{V}$, le premier membre donne un résultat nul, donc :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

$\vec{V}$ n'étant pas identiquement nul, le vecteur $\overrightarrow{grad}$ est donc normale à $\vec{V}$ (ou bien nul). Cela signifie que $\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2}$ ne varie pas dans le sens de $\vec{V}$, c'est-à-dire le long de la ligne de courant : C'est bien ce qu'indique la formule de Bernoulli.

d) En multipliant scalairement les deux membres de l'équation (28) par $\overrightarrow{rot} \vec{V}$, nous obtenons des conclusions analogues : le vecteur $\overrightarrow{grad}$ est normale à $\overrightarrow{rot} \vec{V}$ ce qui montre que $\frac{p}{\rho} + u +$

$\frac{V^2}{2}$ ne varie pas non plus le long de la ligne tourbillon.

II-3.-Formules d'application pratique.

II-3-1.-Cas des gaz : - Lorsqu'un gaz est soumis à des faibles variations de pression, on peut le considérer comme incompressible ($\rho = \text{Cte}$).

Comme en outre les variations de cote sont souvent négligeables devant les variations dues aux vitesses, on pourra négliger le terme en ρgh écrire, l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{\rho V^2}{2} + P = \text{Cte}} \quad (29)$$

avec les définitions suivantes :

P = pression statique

$\frac{\rho V^2}{2}$ = pression dynamique

$P + \frac{\rho V^2}{2} = P_t$ = pression totale au point (30)

Ces sont des quantités homogènes à des pressions

II-3-2.-Cas des liquides ($\rho = \text{Cte}$) : - On n'exprime des différents termes de la relation de Bernoulli en hauteurs de liquides : on divise pour cela les pressions et les quantités homogènes aux pressions par les poids volumique $\varpi = \rho g$ du liquide.

L'équation de Bernoulli s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + h = \text{Cte}} \quad (31)$$

Avec les définitions suivantes :

$\frac{V^2}{2g}$ = hauteur due à la vitesse

$\frac{P}{\varpi}$ = hauteur due à la pression

h = cote du point

$$\frac{P_g}{\varpi} = \frac{P}{\varpi} + h = \text{hauteur piézométrique}$$

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\varpi} + h = \frac{P_t}{\varpi} = \text{charge totale au point considéré (32)}$$

Ce sont des quantités homogènes à des longueurs ou des énergies par unité de poids.

II-4.- Ecoulement à énergie constante.

Nous avons déjà dit que les équations du mouvement d'un fluide parfait se traduisent par l'égalité vectorielle :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}P}. \quad (32)$$

Pour un fluide incompressible pesant (dans le champ de pesanteur), nous avons :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho u). \quad (14)$$

Or, nous avons l'identité vectorielle (formule 5) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

Si nous supposons le mouvement $(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0)$.

Comme le champ de vitesse dérive d'un potentiel $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})$, il vient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{V^2}{2}$$

et l'équation (14) s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

Soit en intégrant :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} = \text{Cte} \quad (33)$$

Alors que dans les paragraphes précédents la constante de la formule de Bernoulli avait été établie le long d'une ligne de courant seulement, maintenant la constante est valable dans toute la masse de fluide en mouvement à rotationnel permanent.

Si le fluide est compressible, non pesant, avec une masse volumique ne dépend que de ρ , on a de même :

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{Cte.} \quad (34)$$

Dans tout la masse de fluide

De tels écoulements sont dits à énergie constante. C'est en particulier ce qui se

passerait pour un fluide parfait dont les lignes de courant partent toutes d'un espace où

règnent les conditions statiques : repos ou mouvement rectiligne uniforme.

REMARQUE.

a) On peut donner de ces résultats une autre démonstration.

Reprenons les équations intrinsèques en mouvement permanent (formule 13).

La première qui s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \frac{\partial V^2}{2 \partial s} \quad (35)$$

Indique que, le long de la trajectoire, confondu d'ailleurs avec la ligne de courant,

la pression varie en sens inverse du carré de la vitesse. Son intégration avait conduit à la formule de Bernoulli, soit par exemple :

$$P_{g1} - P_{g2} = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \quad \text{ou} \quad P_g + \rho \frac{V^2}{2} = \text{Cte} \quad (36)$$

Cette relation permet de calculer les variations de p_g le long d'une ligne de courant quand on connaît celles de V . Mais elle n'indique pas comment varie p_g (ou comment varie la constante de Bernoulli) quand on change de ligne de courant.

Pour cela, il faut utiliser la deuxième des formules (13).

$$\frac{\rho V^2}{2} = - \frac{\partial p}{\partial n} \quad (37)$$

Nous savons déjà que P_g augmente quand on s'éloigne du centre de courbure.

Si dans cette équation nous ajoutons et retranchons au premier membre la quantité :

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial n} = \rho V \frac{\partial V}{\partial n}$$

Il vient :

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial n} + \rho V \left(\frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n} \right)} \quad (38)$$

Cette équation n'est pas aussi facilement intégrable que (35). Comme l'expression entre parenthèse, au deuxième membre, représente le rotationnel de la vitesse, elle disparaît dans le cas d'un écoulement irrotationnel et il reste :

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial n}} \quad (39)$$

Maintenant, on peut intégrer le long de la normale, et on est conduit au même résultat que (36). L'équation de Bernoulli, avec sa constante établie pour une ligne de courant quelconque, est valable en tout point du fluide, ce qui définit les écoulements à énergie constante.

Une autre façon de raisonner peut être la suivante : les équations intrinsèques du mouvement permanent d'un fluide pesant irrotationnel étant donnée par (35) et (39), elles traduisent l'égalité vectorielle :

$$\boxed{-\vec{\text{grad}} P_g = \frac{\rho}{2} \vec{\text{grad}} V^2} \quad (40)$$

Pour un fluide incompressible elles s'intègrent en donnant :

$$P_g + \rho \frac{V^2}{2} = Cte$$

Pour un fluide compressible l'équation (32) donne :

$$\int \frac{dp}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} = Cte$$

Dans les deux cas de la constante est valable dans tout le fluide.

b) Pour un mouvement permanent, la formule de Bernoulli est valable le long d'une ligne de courant, mais la constante de Bernoulli varie quand on passe d'une ligne de courant à une autre, c'est à dire l'énergie mécanique totale varie d'une ligne de courant à une autre. Cette variation pourra cependant être évaluée chaque fois qu'on saura intégrer l'équation (38).

c) Reprenons l'équation (28). La quantité $\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} = Cte$ représente l'énergie de l'unité de masse et cette équation indique comment, varie cette énergie quand on se déplace dans l'espace.

Quand $\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{0}$, l'écoulement est irrotationnel, l'équation nous montre que

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2}\right) = 0, \text{ c'est-à-dire que } \overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \text{ dans tout l'espace.}$$

Mais la même propriété s'obtient si $\vec{V}$ et $\overrightarrow{rot\vec{V}}$ sont parallèles en tout point ce qui montre que les écoulements sont irrotationnels ne sont pas les seuls qui puissent s'effectuer à énergie constante.

d) Dans le raisonnement précédent, nous avons supposé le mouvement permanent mais nous n'avons exploité cette particularité que pour annuler $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$.

Par conséquent l'intégrale de $\overrightarrow{grad}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2}\right) = 0$ conduit d'une manière plus générale à :

$$\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} = f(t) \quad (\text{et non } = Cte)$$

où V ne varie pas avec t , mais P et U peuvent être fonction du temps. Par exemple la pression dans un écoulement incompressible peut être une fonction du temps sans pour cela que soient affectés ni les lignes de courant, ni les vitesses (exemple, tunnel hydraulique à pression variable).

II-5.-Généralisation de la formule de Bernoulli.

II-5-1.-Cas d'un fluide traversant une machine hydraulique. – La machine peut être réceptrice (turbine) ou génératrice (pompe).

Dans le premier cas, soit E l'énergie mécanique que la machine absorbe par unité de masse de fluide qui la traverse. En reprenant un raisonnement précédent fondé sur la conservation de l'énergie mécanique, au lieu d l'équation (23), on obtient :

$$dm \cdot \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = (p_1 S_1 V_1 - p_2 S_2 V_2) dt + (h_1 - h_2) dm - E dm.$$

D'où la formule :

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_{g1}}{\varpi} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_{g2}}{\varpi} + \frac{E}{g}} \quad (41)$$

Valable pour un fluide incompressible, en mouvement permanent, dans le champ de pesanteur.

La traversée du récepteur se traduit par un abaissement de la charge totale de la quantité $\frac{E}{g}$.

Si, au lieu d'un récepteur, nous avons un générateur, fournissant l'énergie mécanique E par unité de masse de fluide, l'expression (41) serait valable en changeant simplement le signe devant $\frac{E}{g}$:

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_{g1}}{\varpi} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_{g2}}{\varpi} - \frac{E}{g}} \quad (42)$$

II-5-2.-Cas des mouvements en rotation constante autour d'un axe fixe.

—Dans certains écoulements : turbines, pompes centrifuges..., on peut rapporter le mouvement à des axes tournant autour de l'axe. Mais alors les équations d'Euler ne sont plus valables sans les formes données car la vitesse à envisager est la vitesse relative W du fluide par rapport à ces axes. On peut cependant établir un bilan énergétique, en tenant compte des travaux de la force centrifuge et de la force de Coriolis qui sont des forces de volume particulier.

La dernière étant toujours normale à W , ne fournit aucun travail, mais il n'en est pas de même de la première.

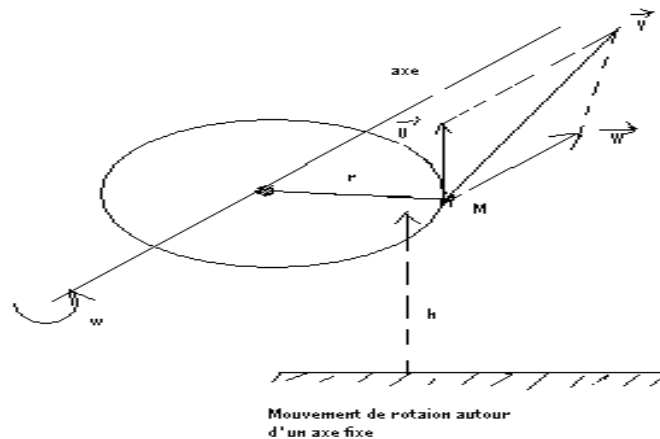
Quand la masse dm passe de la distance r_1 à l'axe à la distance r_2 (fig. 8), le travail

mécanique fournit par la force centrifuge est reçu par la particule est égal à :

$$dm \int_{r_1}^{r_2} \omega^2 r dr = dm \frac{\omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

ω étant la vitesse de rotation angulaire, constante, des axes tournants.

Figure.8.-Mouvement de rotation au tour d'un axe fixe



L'équation de la conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc maintenant :

$$dm \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = (\rho_1 S_1 V_1 - \rho_2 S_2 V_2) dt + (h_1 - h_2) g dm + \frac{\omega^2}{2} dm (r_2^2 - r_1^2).$$

Comme ωr n'est autres que la vitesse d'entraînement $U = \omega r$ à la distance r

(vitesse tangentielle), l'équation précédente s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{W^2}{2g} + \frac{p_g}{\varpi} - \frac{U^2}{2g} = Cte} \quad (43)$$

elle est valable le long d'une trajectoire pour l'écoulement permanent d'un fluide incompressible, quand le système d'axes de références tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe de rotation.

En particulier, s'il s'agit d'un liquide tournant en bloc autour de l'axe, $W = 0$ nous obtenons :

$$\frac{p_g}{\varpi} - \frac{U^2}{2g} = Cte$$

Résultat déjà trouvé à propos de la statique des fluides tournants

II-5-3.-Cas des fluides réels. – Quand un écoulement s’effectue avec frottement (fluides réels), on n’a pas le droit d’appliquer en toute rigueur l’équation de Bernoulli, même le long d’une ligne de courant, car il n’y a pas conservation de l’énergie mécanique.

Les frottements font en effet apparaître de l’énergie calorifique aux dépens de l’énergie mécanique. Cette dernière diminue au cours du mouvement, on dit qu’il se produit une perte de charge.

Si ces pertes de charges sont petites, on peut les négliger et écrire le théorème en première approximation pour évaluer les variations de pression et de vitesse au cours du mouvement.

Si ces pertes de charges sont notables, il faudra introduire d’autres relations théoriques ou expérimentales pour calculer les variations de pression ou de vitesse. On peut, si l’on veut, écrire une relation analogue à celle que donne l’équation (41), le récepteur étant constitué par la conduite ou le fluide lui-même, et E représentant pour l’unité de masse de fluide, l’énergie mécanique transformée en chaleur par frottement.

II-5-4.-Cas des mouvements non permanent. – Reprenons les équations intrinsèques (10), elles s’écrivent :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial s} = T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{V^2}{R_T} = N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Si nous considérons le premier et qu’on intègre le long d’une ligne de courant, dans le cas d’un fluide incompressible, dans le champ de pesanteurs, nous trouvons :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial s}$$

et

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{p_{g_1} - p_{g_2}}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

équation valable à chaque instant.

L'intégrale porte sur les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial t}$ obtenu à un instant donné.

S'il s'agit, par exemple, d'un tube de courant à section constante et de longueurs s , V et $\frac{\partial V}{\partial t}$ ne dépendent que du temps ($V_1 = V_2$), et on a :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} s = \frac{p_{g_1} - p_{g_2}}{\rho}} \quad (44)$$

II-5-5.-Généralisation. –L'intégration précédente n'est valable que si l'on demeure le long d'une ligne de courant et la formule (44) par exemple est intéressante si l'écoulement est unidimensionnel.

On peut généraliser ces résultats dans le cas où l'écoulement est irrotationnel. Supposons qu'il soit tridimensionnel et soit φ le potentiel des vitesses. Nous avons :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

avec les conditions d'irrotationnalité :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

Par ailleurs, les équations d'Euler, en mouvement non permanent, nous donne trois expressions de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Au premier membre, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Et remplacer les autres dérivées partielles par celles que nous fournissent les conditions d'irrotationnalité. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + u \right)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + u \right).$$

En combinant les trois équations analogues et en intégrant, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + u = f(t)} \quad (45)$$

Cette expression est valable dans tout l'espace, $f(t)$ est une fonction du temps définie par les conditions aux limites.

II-5-6.-Formule de Bernoulli généralisé. –On peut généraliser la formule, de Bernoulli et donner une expression traduisant le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un mouvement quelconque.

Pour un fluide incompressible contenu dans un domaine D limitée par la surface S (fig.9), on trouve :

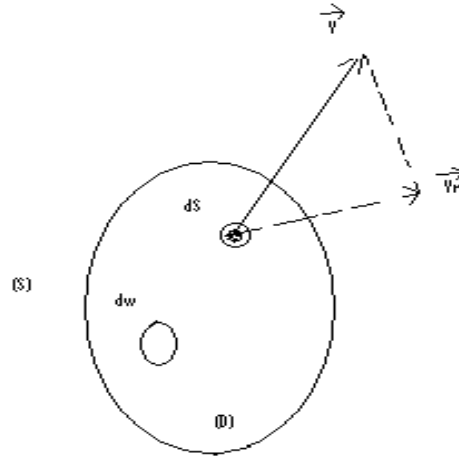
$$\boxed{\iiint_D \frac{\rho \partial \frac{V^2}{2}}{\partial t} d\omega + \iint_S \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g h \right) V_n dS = W} \quad (46)$$

$d\omega$ est un élément du volume D .

dS est un élément de surface pris sur S , V_n est la projection de la vitesse V sur la normale à dS , V_n étant constante positivement vers l'extérieur W représente la puissance mécanique fournie au fluide dans le domaine D par des surfaces solides mobile complètement baignées par le fluide et qui peuvent se trouver à l'intérieur de D . Si le fluide fournit de l'énergie mécanique à ces surfaces il faudra compter W négativement, de même si une partie de cette énergie disparaît par frottement (fluides réels).

La quantité $\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gh \right) V_n ds$ s'appelle **débit d'énergie mécanique à travers la surface dS**.

Figure.9.-Fluide incompressible dans une surface (S)



Pour un écoulement permanent, l'intégrale triple, est nulle est le théorème de Bernoulli généralisé peut s'exprimer de la manière suivante :

En écoulement permanent le débit total d'énergie mécanique sortant de la surface fermée S, est égal à la puissance fournie au fluide à l'intérieur de la surface S.

Chapitre-III.-THEOREME DES QUANTITES DE MOUVEMENT

Les seules équations dynamiques du mouvement d'un fluide parfait sont celles d'Euler. Dans le cas particulier où le champ de forces dérive d'un potentiel, on peut les intégrer : c'est ainsi qu'on a obtenu la formule de Bernoulli valable dans le champ de pesanteur. Cette formule sera applicable à un écoulement quelconque si on est sûr au préalable que l'énergie mécanique s'y conserve, et elle permettra de calculer toutes les particularités du mouvement.

Dans beaucoup de problèmes cependant, il importe moins de connaître ce détail que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur des parois solides. Bien qu'on puisse théoriquement calculer cette résultante à partir de l'intégration des forces de pression, il est souvent beaucoup plus simple d'opérer directement en appliquant le théorème des quantités de mouvements ou théorème d'Euler. Ce théorème permet de déterminer les forces agissantes sur un volume fluide quand on connaît seulement

les vitesses des éléments situés sur la surface limitant le volume. Le théorème d'Euler n'implique pas la conservation de l'énergie mécanique, il est applicable aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides réels

III-1.-Théorème d'Euler

Par impulsion ou quantité de mouvement d'une masse ponctuelle m on entend le produit $m\vec{V}$ de la masse par sa vitesse. L'impulsion est un vecteur et, au même titre que la vitesse, possède trois composantes : mu, mw, mw .

Le principe fondamental de la dynamique, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = d \frac{m\vec{V}}{dt}$ appliqué à une masse ponctuelle peut donc s'exprimer ainsi :

La dérivée par rapport au temps de l'impulsion est équivalente à la résultante des forces extérieures appliquées à la masse.

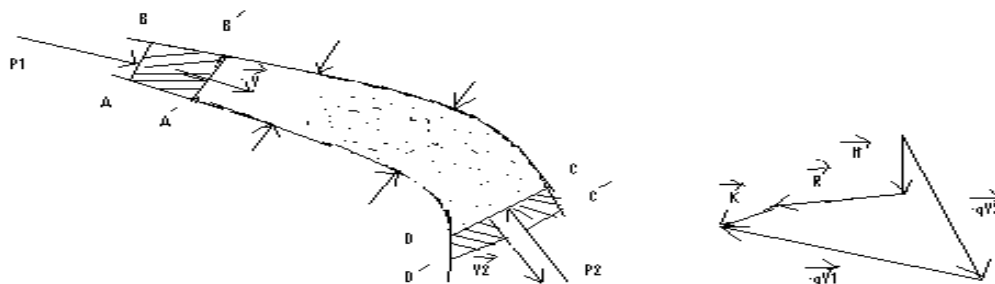
Ce théorème reste encore vrai si la masse n'est pas ponctuelle : il correspond alors au théorème du centre de gravité bien connu en mécanique. Il indique donc l'équivalence entre les deux systèmes de vecteurs :

$$\sum \vec{F} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} (\sum m\vec{V})$$

Supposons le mouvement permanent, le fluide incompressible et un filet de courant assez étroit pour que dans la section droite, les quantités p, ρ .

V restent constantes (fig. 10).

Figure. 10.-Application du théorème des quantités de mouvement dans le cas d'un mouvement permanent.



Considérons le volume contenu dans ABCD à l'instant «t» et appliquons la relation précédente sous la forme :

$$\sum \vec{F} dt \text{ équivalent à } d(\sum m \vec{V}).$$

Pendant le temps dt le fluide est venu en $\acute{A}\acute{B}\acute{C}\acute{D}$ et, comme le mouvement est permanent, tout se passe comme si on avait transporté le volume $AB\acute{B}\acute{A}$ où la pression est P_1 , la vitesse V_1 , en $DC\acute{C}\acute{D}$ où la pression P_2 la vitesse V_2 .

Ces éléments de volume ont la même masse, à savoir qdt en appelant **q le débit en masse** à travers le filet de courant. La variation de quantité de mouvement $d(\sum m \vec{V})$ qui intéresse pendant le temps dt la masse de fluide envisagée est donc :

$$qdt(\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

Nous avons donc :

$$\sum \vec{F} \text{ équivalent à } q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

$\sum \vec{F}$ représente l'ensemble des forces appliquées au volume ABCD, ce sont :

- les forces extérieures (de pesanteur par exemple) : soit $\vec{\pi}$,
- les forces des pressions sur les parois latérales et sur les bases du tube : soit $\vec{R}$,
- les forces des parois exercées sur le fluide par les surfaces solides éventuellement en contact avec lui : soit $\vec{K}$. Ce sont aussi des forces de pression.

On ne tient pas compte des forces intérieures puisqu'elles forment un système équivalent à zéro.

On écrira donc l'égalité vectorielle (fig. 9).

$$\boxed{q\vec{V}_2 - q\vec{V}_1 = \vec{\pi} + \vec{R} + \vec{K}} \quad (47)$$

où $q\vec{V}_2$ est appelé débit de quantité de mouvement sortant par la section CD et $q\vec{V}_1$ débit de quantité de mouvement entrant par la section AB.

Le raisonnement se généralise à l'étude du fluide contenu dans une surface formée quelconque S appelée surface de référence (fig. 11).

Par un élément de surface dS , sort par unité de temps, un débit de masse :

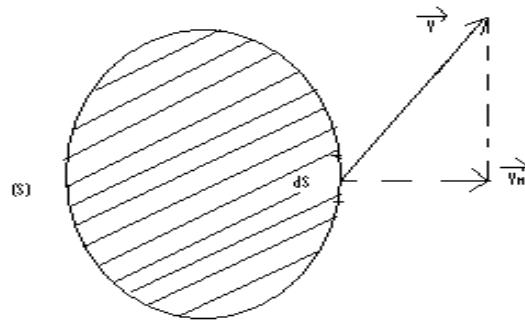
$$dq = \rho dS V_n$$

V_n étant la composante de la vitesse $\vec{V}$, normale à dS .

Par ce même dS , il passe par unité de temps une quantité de mouvement (débit de quantité de mouvement) égale à :

$$dq\vec{V} = \rho dS V_n \vec{V}$$

Figure.11.- Surface de référence



Si on convient de compter positivement toute, quantité de mouvement qui sort de S , négativement toute quantité de mouvement qui y entre, on aura équivalence entre l'intégrale suivante :

$$\int_S \rho dS V_n \vec{V}$$

(qui représente le débit total de quantité de mouvement qui sort de S) et le système des forces appliquées au fluide contenu dans S .

D'où le théorème d'Euler :

III-2.-Théorème d'Euler : (énoncé pratique)

En régime permanent les débits de quantité de mouvement sortant de S est équivalent au système des forces appliquées au fluide contenu dans S :

$$\boxed{\int_S \rho dS V_n \vec{V} \text{ équivalent à } \sum \vec{F}} \quad (48)$$

Remarques.

a) L'application de ce théorème est très commode. Elle ne fait pas intervenir la connaissance des phénomènes se passant à l'intérieur de S (turbulence, viscosité).

Il est simplement nécessaire de connaître la vitesse régnant tout le long de la surface S.

b) Ce théorème d'ailleurs s'applique en général en considérant les projections de quantités de mouvement et des forces sur des axes arbitraire, ou en prenant les mouvements de ces vecteurs par rapport en un point, une droite. On sera ramené alors à écrire des égalités entre les projections ou entre les moments.

c) On peut, choisir la surface S d'une manière quelconque, mais elle doit être tracée dans le fluide ou sur une surface limitant le fluide étudié. En particulier elle ne doit pas traverser des parois solides, à moins qu'on ne connaisse les efforts qui s'exercent à travers ces parois.

d) En régime quelconque non permanent, on peut généraliser le théorème de quantité de mouvement. Il traduit l'équivalence entre le système des forces extérieures $\sum \vec{F}$ appliquée au fluide contenu dans le domaine D (fig.6) et le système de vecteur suivant :

$$\iiint_D \partial \frac{\rho \vec{V}}{\partial t} d\omega + \iint_S \rho \vec{V} V_n dS.$$

DEUXIEME PARTIE :

APPLICATIONS DE LA FORMULE DE

BERNOULLI

Chapitre-IV.-APPLICATIONS DU THEOREME DE BERNOULLI

Pour appliquer le théorème de Bernoulli à un problème d'écoulement il faut connaître la forme de l'écoulement (par exemple les lignes de courant) :

- soit par une observation expérimentale,
- soit à partir d'une hypothèse.

IV-1.-Formule de Torricelli.

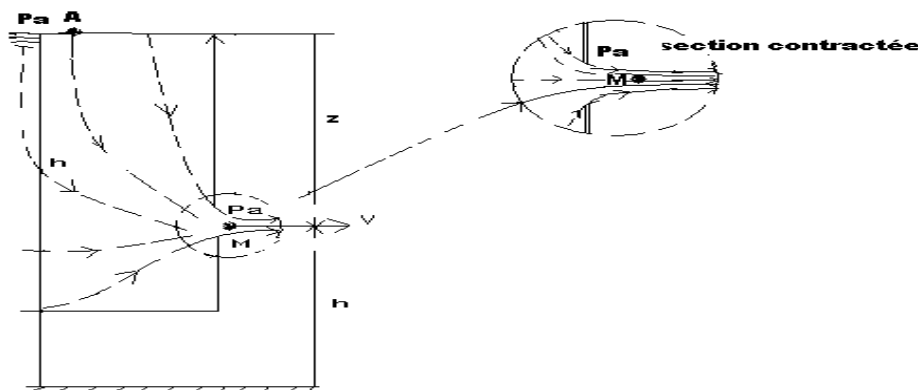
Un réservoir contient un fluide qu'il fasse échapper par un orifice étroit de section S . On se propose de calculer le débit de fluide qui s'écoule.

Moyennant quelques hypothèses simples l'application du théorème de Bernoulli va permettre de déterminer la vitesse V de sortie du fluide, à partir de laquelle on pourra obtenir le débit.

Supposons par exemple que le réservoir contienne un liquide qui s'écoule à l'air libre et que ses dimensions soient suffisamment grandes pour que pendant un certain intervalle de temps Δt , on puisse négliger la variation du niveau de la surface libre et considérer le mouvement comme permanent (fig.12). L'expérience montre qu'un tel écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- Tout le fluide participe au mouvement.
- Dans le réservoir l'écoulement est du type convergent.
- A la sortie de l'orifice, le jet présente une partie contractée où les lignes de courant sont parallèles et pratiquement rectilignes.

Fig.12.-Ecoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi



C'est dans cette région que nous pourrions facilement calculer V . En effet, d'après un résultat connu, la pression P_g reste constante quand on se déplace normalement aux lignes de courant quand celles-ci sont rectilignes, sa valeur sera par exemple égale celle qu'elle prend sur les bords du jet, au contact de l'air. Si M est un point de la section contractée, on a donc :

$$P_{gM} = Cte \quad (1)$$

Par ailleurs on peut admettre que cet écoulement est à énergie constante car les particules partent pratiquement du repos. En mouvement permanent, la constante de Bernoulli est la même pour tout les lignes de courant, pour tous les points du fluide.

Entre un point A quelconque de la surface libre et un point M quelconque de la section contractée, nous avons ainsi :

$$P_{gA} + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_{gM} + \rho \frac{V_M^2}{2} = Cte \quad (2)$$

P_{gM} étant constante, V_M l'est donc aussi : dans la section contractée la vitesse est donc constante.

Quand à la vitesse V_A , on peut la considérer comme négligeable (a fortiori son carré) de sorte qu'on sensiblement :

$$V_M = \sqrt{2 \frac{P_{gA} - P_{gM}}{\rho}} \quad (3)$$

IV-1-1.-Cas d'un liquide (réservoir ouvert) : –La pression atmosphérique extérieure P_a règne en A et en W .

Nous avons donc :

$$P_{gA} - P_{gM} = (P_a + \rho g h_A) - (P_a + \rho g h_M)$$

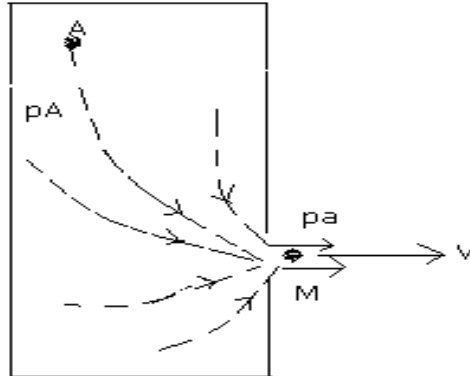
$$= \rho g (h_A - h_M) = \rho g z$$

et par conséquent :

$$V = \sqrt{2gh} \quad (4)$$

IV-1-2.-Cas d'un gaz (réservoir clos) : –Le gaz est à la pression P_A dans le réservoir et se détend à la pression atmosphérique P_a après avoir traversé l'orifice (fig.13).

Figure.13.-Ecoulement d'un gaz par un orifice à mince paroi



Si $P_A - P_a$ est petit devant P_a on peut considérer le gaz comme incompressible et appliquer la relation de Bernoulli sous sa forme la plus simple entre un point A quelconque situé dans le réservoir, mais loin de l'orifice, et un point M quelconque de la section contractée. Quand il s'agit des gaz, on néglige habituellement les forces de pesanteur, de sorte qu'on retrouve l'équation (3), qui s'écrit alors :

$$V = \sqrt{2 \frac{p_A - p_M}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (5)$$

Application numérique.

$$P_a = 1 \text{ atm} \neq 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_A - p_a = \frac{p_a}{100} \text{ soit } p_A - p_a = 10^3 \text{ Pa.}$$

Si le réservoir contient de l'air à 15° :

$$\rho = 1,25 \text{ Kg.m}^3$$

D'où

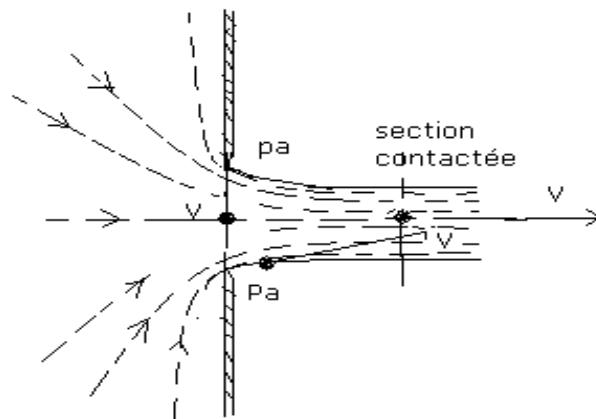
$$V = \sqrt{2 \frac{10^3}{1,25}} = \sqrt{1600} = 40 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

REMARQUES

a) Les expressions que nous avons données pour calculer la vitesse ne sont valables, rappelons-le, que dans la section contractée, mais elles ne dépendent pas de la forme de l'orifice, pourvu que celle-ci soit de petites dimensions par rapport à celle du réservoir.

En particulier, dans le plan de l'orifice même, la vitesse et la pression sont difficiles à déterminer : en effet les lignes de courant y sont courbes (fig.14) et par suite quand on se rapproche du centre C, la pression doit augmenter à partir de la valeur P_a qui existe sur les bords, en temps la vitesse décroît.

Figure.14.-Etude de la contraction de la veine



En tout point des bords du jet la pression est constante et égale à P_a , la vitesse est sensiblement constante en grandeur et égale à la valeur V qui règne dans la section contractée.

b) La section contractée se trouve toujours dans le voisinage de l'orifice, à l'ordre d'une distance du rayon, pour un orifice circulaire.

c) La formule (4) est identique à celle qui fournirait la vitesse de chute libre d'un corps tombant sans vitesse initiale d'une hauteur z . Elle montre que la vitesse d'écoulement ne dépend pas de la nature du fluide intéressé.

d) Considérons maintenant une particule de fluide issue de point A (fig.12 ou 13), elle possède au départ une certaine énergie mécanique, pratiquement énergétiquement potentielle. A mesure qu'elle se rapproche de l'orifice, une partie de l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique. La transformation est complète quand la particule arrive dans la section contractée : un orifice est donc un transformateur d'énergie potentielle (de pression ou d'altitude, ou des deux) en énergie cinétique.

IV-2.-Calcul du débit d'un orifice : coefficient de contraction.

La vitesse étant uniforme dans la section contractée, en appelant σ l'air de cette dernière, le volume en débit est donné par :

$$q_v = \sigma V. \quad (6)$$

Mais σ est inconnu en général, car sa valeur dépend de divers facteurs, et pour la caractériser, on introduit le rapport C_c :

$$C_c = \frac{\text{section contractée}}{\text{section de l'orifice}} = \frac{\sigma}{S} \quad (7)$$

Appelé **coefficient de contraction**. Ce coefficient a été déterminé dans certains cas simples.

IV-2-1.-orifice en mince paroi.

Un orifice est dit en mince paroi, si la veine fluide qui le traverse ne la touche que le suivant une arête. Cela se produit quand l'épaisseur e de la paroi est petite devant les dimensions transversales de l'orifice.

Dans la pratique les bords de l'orifice sont biseautés et, pour protéger le biseau contre les détériorations, on remplace souvent l'arête vive par un petit col cylindrique d'épaisseur e . L'écoulement doit se produire dans le sens défini par la figure.15-b.

Figure.15.-Orifice en mince paroi

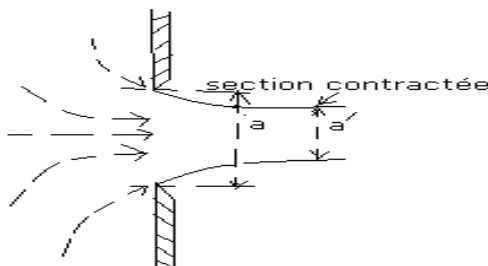
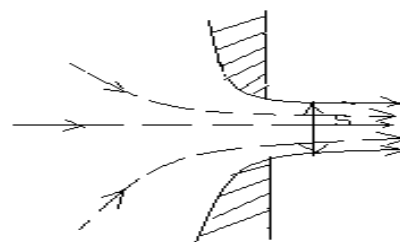
-Orifice circulaire (fig.15). – A condition que $\frac{e}{D} \leq \frac{1}{100}$ on peut admettre que :

$$C_c = 0,6 \quad (8)$$

-Orifice carré ou rectangulaire.-Le coefficient C_c est voisin de 0,6.

Si on introduit une fente étroite, horizontale, très allongée (fig.16) l'écoulement est pratiquement bidimensionnel et on peut déterminer théoriquement le coefficient de contraction.

IV-2-2.-Orifice quelconque.

**Figure.16. Fente étroite****Figure.17. –Orifices à bords profilés**

On trouve ainsi :

$$C_c = \frac{a'}{a} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0,611 \quad (9)$$

-Orifice en forme de tuyère (fig.17). –Si on donne à l’orifice une forme arrondie, épousant la forme des lignes de courant, le jet ne présente plus de contraction à la sortie et le coefficient de contraction est égal à l’unité :

$$C_c = 1 \quad (10)$$

Dans la pratique on arrondit l’orifice en forme circulaire ou parabolique.

- Orifice rentrant (orifice de Borda fig.18). –Dans certaines conditions que nous préciserons plus loin, on peut calculer le coefficient de contraction qui est égal à :

$$C_c = 0,5 \quad (11)$$

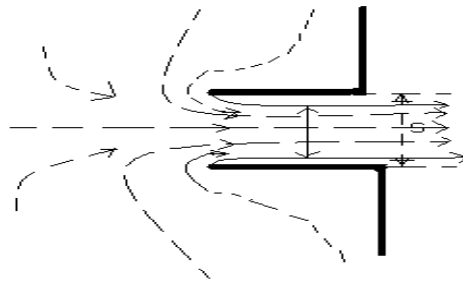


Figure.18. -Orifice rentrant (Borda).

En conclusion, suivant la forme de l’orifice, le coefficient de contraction est susceptible de prendre valeurs variant entre 0,5 et 1, cette dernière valeur correspondant aux orifices les mieux profilés.

IV-2-3.-Orifice large rectangulaire.

Si les dimensions de l’orifice ne sont plus petites devant les dimensions du réservoir, en particulier devant la hauteur z (fig.19), les approximations que nous avons faites ne sont plus valables. Toutefois, le jet présente encore en général une section contractée où on peut supposer les lignes de courant sensiblement rectilignes, et la pression constante égal à P_a .

Dans le cas d’un orifice rectangulaire, cette section contractée est approximativement rectangulaire. Le calcul du débit s’effectue au moyen d’une intégrale, car la vitesse en un point M dépend de la cote $z = h_0 - h$.

Nous avons en effet, en appliquant le théorème de Bernoulli entre le point M et une section amont suffisamment éloignée :

$$V = \sqrt{2g(h_0 - h) + V_0^2}$$

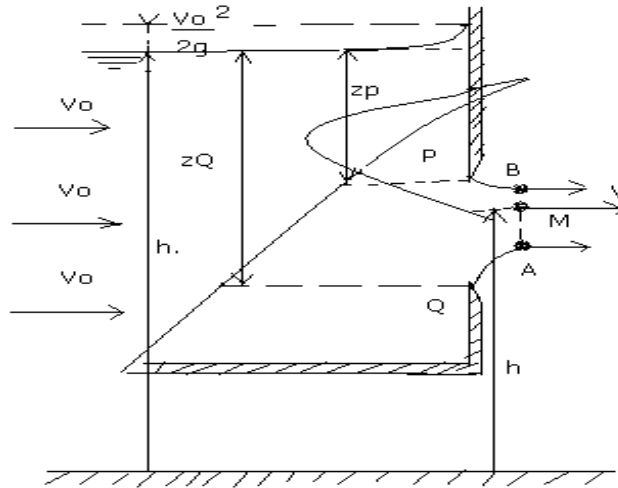


Figure.19.-Orifice large.

Cette formule ci-dessus tient compte de la vitesse V_0 du fluide arrivant en amont.

Le débit de fluide peut donc s'écrire, pour l'unité de largeur de la section contractée AB :

$$q_v = \int_A^B V dh$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2gZ}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{V_0^2}{2g} + h_0 - h \right]^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{h_B}^{h_A}$$

Le calcul de l'intégral nécessite la connaissance des cotes h_A et h_B .

En introduisant la profondeur Z du centre de la section contractée (fig.17) et en posant $AB = 2b$, on trouve :

$$q_v = \frac{2}{3} \sqrt{2gZ}^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{b}{Z} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{b}{Z} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

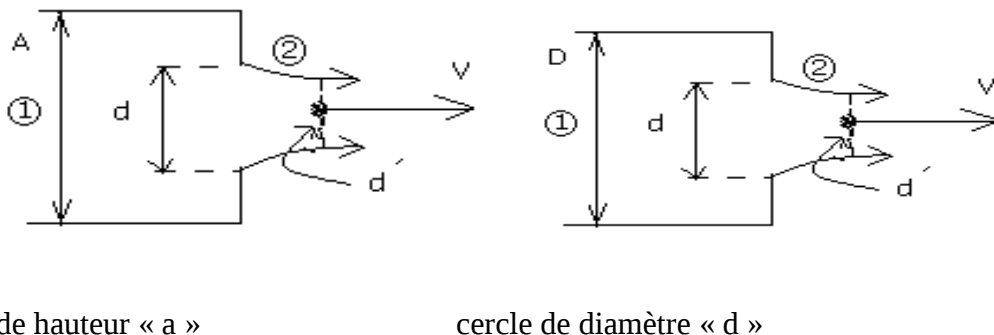
IV-2-4.-Etude général des jets.

Le problème que nous venons d'étudier, de l'écoulement à travers un orifice percé dans un réservoir de grandes dimensions, fait partie du problème plus général des jets issus d'un orifice percé dans un réservoir de forme quelconque.

Tant que l'écoulement suit les parois qui le limitent, lignes de courant et vitesses peuvent être déterminées en utilisant les méthodes analytiques étudiées en cinématique. Mais si le fluide quitte les parois, ces méthodes ne s'appliquent plus.

Il en est ainsi dans les écoulements réels, quand il se forme de décollement de fluide ou des proches des vapeurs dues à la cavitation. Dans une telle proche, la pression est constante, et d'après la formule de Bernoulli, la vitesse du fluide sur la surface qui la limite doit aussi être constante.

La même chose se produit quand, dans un fluide au repos, s'écoule un autre sous forme de jet. Les limitent du jet forment une surface où la pression motrice et la vitesse sont constante. S'il s'agit d'un jet issu d'un orifice en forme de fente allongée, la forme du jet peut être déterminée mathématiquement comme nous l'avons déjà dit d'un orifice circulaire, on fait appel au calcul numérique. Mais en général, ce n'est pas la forme du jet qui est intéressante à connaître, mais son coefficient de contraction C_c . Ce dernier est fonction de dimension géométrique de l'écoulement, il n'en devient indépendant que si les dimensions du réservoir amont, ou de la conduite amont sont grandes devant celles de l'orifice.



Fente de hauteur « a »

cercle de diamètre « d »

Figure.20.-Etude des jets.

C'est ce que nous avons considéré jusqu'à maintenant, ce que nous avons permis de donner des valeurs fixes pour C_c , dépendant seulement de la forme de l'orifice. Si donc l'orifice n'est plus petit devant la conduite amont, le coefficient de contraction est susceptible de varier.

Les résultats expérimentaux montrent cependant que sa valeur est la même pour un orifice circulaire que pour un orifice en forme de fente allongée. Dans l'un et l'autre cas le coefficient de débit C_q , que définirons dans le paragraphe suivant sont reliés à C_c par les relations suivantes :

Pour la fente :

$$C_q = \frac{q_v'}{\sqrt{\frac{2\Delta p_g}{\rho}}} = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2 \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \quad (12)$$

Pour le cercle :

$$C_q = \frac{q_v'}{\frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2\Delta p_g}{\rho}}} = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2 \left(\frac{a}{A}\right)^4}} \quad (13)$$

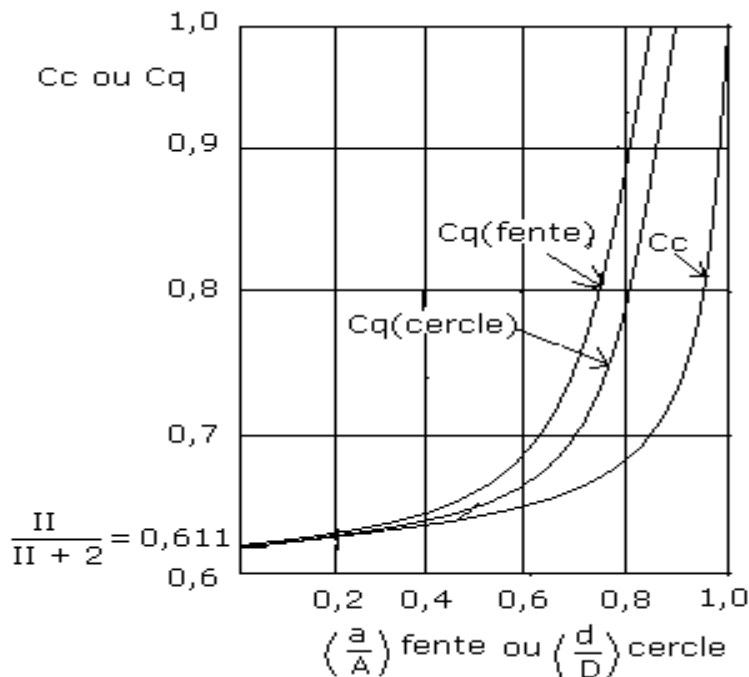


Figure.21.-Coefficient de contraction et coefficient de débit de divers orifices.

Les notations utilisées apparaissent dans les figures 19. Ces résultats s'obtiennent facilement en appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections 1 et 2 et en tenant compte de la vitesse amont. Dans le cas de la fente, q_v représente le débit en volume pour une fente de longueur unité. La figure 19 donne les variations de C_c et C_q pour ces deux types d'orifices en fonction des rapports $\frac{a}{A}$ et $\frac{d}{D}$.

IV-3.-Ecoulement réel par un orifice.

IV-3-1.-Coefficient de vitesse et de débit. Si nous considérons un écoulement réel, la vitesse réelle mesurée dans la section contractée est légèrement inférieure à celle que nous donne l'équation de Bernoulli (équation.3), car il se produit toujours une certaine perte d'énergie dans l'écoulement.

S'il s'agit d'un orifice quelconque, la vitesse réelle est égale à :

$$\boxed{W_M = \varphi V_M} \quad (14)$$

φ étant un coefficient numérique de l'ordre de 0,99 à 0,95 appelé **coefficient de vitesse**.

On introduit également dans les calculs le coefficient de débit C_q défini par :

$$\boxed{C_q = \frac{q_v}{S \sqrt{\frac{2 \Delta p_g}{\rho}}}} \quad (15)$$

q_v étant le débit de l'orifice, S la section de l'orifice et Δp_g la différence de pression (motrices) régnant en amont de celui-ci et la section contractée.

Ainsi dans le cas d'un liquide naturel s'écoulant par un petit orifice, au lieu de l'équation .4, nous aurons les résultats suivants.

$$W_M = \varphi \sqrt{2gz}$$

$$q_v = W_M \sigma = \varphi C_c S \sqrt{2gz}$$

$$= \varphi C_q S \sqrt{2gz}$$

D'

$$C_q = C_C \quad (16)$$

IV-3-2.-Rendement d'un orifice.-Nous avons déjà dit qu'un orifice pouvait être considéré comme un transformateur d'énergie. Dans la réalité, une telle transformation s'accompagne toujours d'une perte d'énergie, on peut donc définir le rendement de transformation comme étant le rapport des énergies mises en jeu. Si l'on considère l'unité de masse traversant l'orifice, ce rapport est donné par l'expression suivante (dans le cas d'un orifice de petites dimensions) :

$$\eta = \frac{\text{énergie cinétique}}{\text{énergie potentielle transformée}} = \frac{\frac{W_M^2}{2}}{gz} = \frac{W_M^2}{2gz}$$

IV-3-3.-Temps de vidage d'un récipient (fig.22).-Si Σ est la section du récipient à la cote z , atteinte à l'instant t , S la section de l'orifice, et dV le volume du fluide écoulé pendant le temps dt , nous avons successivement :

$$dv = -\Sigma dz$$

$$dv = q_v dt = C_q S \sqrt{2gz} dt$$

D'où :

$$t = -\int_{z_0}^0 \frac{\Sigma dz}{C_q S \sqrt{2gz}} \quad (17)$$

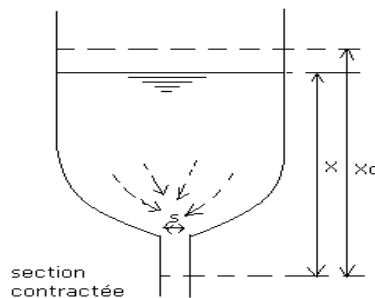


Figure.22.-vidage d'un réservoir.

Le calcul n'est possible que si on peut exprimer Σ en fonction de z . Dans le cas d'un récipient cylindrique vertical, $\Sigma = \text{Cte}$, nous avons sensiblement :

$$t = \frac{\Sigma}{C_q S \sqrt{2gz}} \left| 2\sqrt{z} \right|_0^{z_0} = \frac{2 \Sigma z_0}{C_q S \sqrt{2gz_0}} \quad (18)$$

Dans cette dernière expression le numérateur est égal au double du volume total du liquide écoulé, et le dénominateur au débit volumique à l'instant initial.

Remarque.-Dans toutes les formules que nous avons établies précédemment, à partir de celle de Torricelli, nous avons supposé implicitement, lorsqu'il s'agissait d'écoulement de liquide, que la surface libre du réservoir était à la même pression P_a que le jet issu de l'orifice.

S'il n'en est pas ainsi (par exemple s'il s'agit d'un liquide sortant d'un réservoir clos ou règne à la surface libre la pression P différente de P_a fig.23), il faudra écrire :

$$p + \rho g h_B = p_a + \rho g h_M + \rho \frac{V^2}{2} \quad (19)$$

et pour retrouver une expression simple pour V , on pourra exprimer les pressions P et P_a en hauteur de liquide de masse volumique ρ soit :

$$P_a = \rho g h_a \quad \text{et} \quad p = \rho g h$$

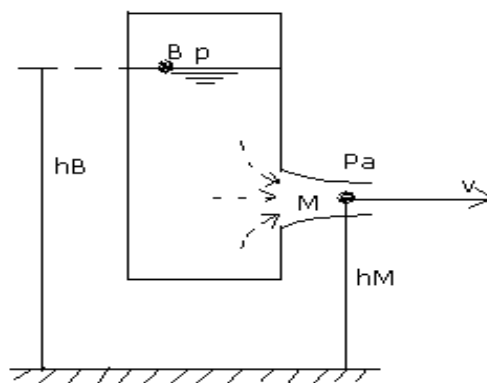


Figure.23.-Réservoir de liquide sous pression.

IV-4.-Pression dans une conduite. Tube piézométrique.

Si on assimile la conduite à un filet de courant, la vitesse est la même dans toute la section droite. On peut appliquer la formule de Bernoulli (en écoulement permanent) :

$$p + \rho gh + \rho \frac{V^2}{2} = Cte = p_t$$

Entre deux sections (1) et (2), on a donc (fig.22.)

$$p_1 + \rho gh_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

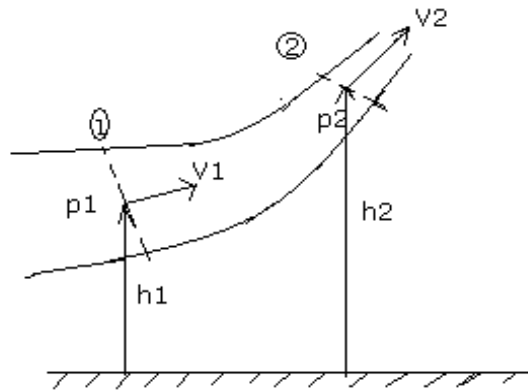


Figure.24.-Tube piézométrique

Lorsque la conduite est cylindrique ou prismatique, la vitesse reste parallèle aux génératrices et les lignes de courant sont de droites parallèles aux génératrices.

Dans ces conditions nous savons que la répartition des pressions est hydrostatique le long d'une ligne normale aux lignes de courant.

Dans une section droite, nous avons par conséquent :

$$\boxed{p + \rho gh = Cte = p_g} \quad (21)$$

(Pour un gaz on aurait $p = Cte$)

On peut mesurer la quantité $p + \rho gh$ à l'aide d'un tube piézométrique. C'est un tube débouchant dans la conduite et ouverte aux deux extrémités. Il peut être de forme et d'inclinaison quelconque par rapport à la verticale.

L'ouverture débouchant dans la conduite s'appelle prise de pression statique, elle peut être située soit sur la paroi, soit à l'intérieur de celle-ci.

Dans ces conditions, une partie de fluide monte dans la conduite et le niveau se fixe en un point B (fig.25).

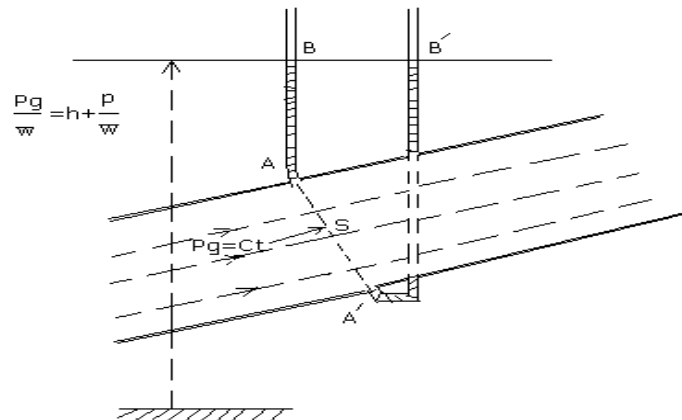


Figure.25.-Prises de pression statique.

Montrons que la cote de ce point mesure, par rapport au plan de référence, la quantité :

$$\frac{p_g}{\varpi} = \frac{p}{\varpi} + h$$

où p est au-dessus de la pression atmosphérique.

En effet, la quantité $p + \rho gh$ reste constante quand on se déplace dans le tube AB (loi d'hydrostatique).

Elle reste aussi constante quand on se déplace dans la section droite S de la canalisation. Mais ces deux constantes sont égales car $p + \rho gh$ ne change pas, en A, on passe de la canalisation de la tube piézométrique. En effet h est le même et on peut faire l'hypothèse raisonnable que p ne subit pas de discontinuité

La cote du niveau B mesure donc bien la quantité $\frac{p}{\varpi} + h$ régnant dans la section S. Elle ne dépend pas de la position de A dans la section S.

Le niveau B donc reste dans le même plan horizontal quand la prise de pression se déplace dans une même section droite de la canalisation (sur son pourtour ou à l'intérieur).

La détermination de la quantité $\frac{p}{\rho} + h$ régnant en un point d'une canalisation à l'aide du tube piézométrique, ne suppose essentiellement que l'introduction de la prise de pression ne perturbe pas l'écoulement, ni sa forme, ni sa vitesse en ce point.

Si la prise de pression A perturbe l'écoulement, le tube piézométrique permet de déterminer encore une certaine valeur de la quantité $\frac{p}{\rho} + h$, c'est celle qui existe au niveau de A, mais pour ce nouvel écoulement, différent de celui qui existait initialement.

Hypothèse sur la prise de pression.—En statique de fluide on mesure la pression au moyen d'un manomètre. En dynamique des fluides parfaits, la pression serait celle que donnerait une « particule manométrique » qui suivrait le mouvement de fluide. C'est une définition théorique. La définition pratique fait appel aux hypothèses suivantes :

1° Supposons un fluide parfait se déplaçant au voisinage d'une paroi continue où l'on creuse une petite cavité C sans saillie ni bavure (fig.25). La paroi peut être considérée comme une ligne de courant qui n'est pas modifiée par la présence de la cavité qui se remplit de fluide mort.

2° Le fluide mort et le fluide en mouvement sont en contact en M par une surface fictive (prolongement de la surface de paroi) le long de laquelle il y a une discontinuité de vitesses. On admet qu'il n'y a pas de discontinuité de pression à la traversée de cette surface.

On pourra donc mesurer la pression du fluide mort avec un manomètre, elle sera égale à celle du fluide en mouvement en M.

Une telle prise de pression qui permet de mesurer la pression statique en un point où la vitesse est V s'appelle **prise de pression statique**.

La prise de pression statique peut être située soit sur la paroi de la canalisation, soit à l'intérieur de celle-ci.

Lorsqu'on l'introduit à l'intérieur de la canalisation, on peut associer à une portion de paroi plane continue dont la direction est bien parallèle aux lignes de courant (disque de Ser) (fig.26).

Dans tous les cas, il faut que la présence de la prise de pression ne modifie pas la vitesse V .

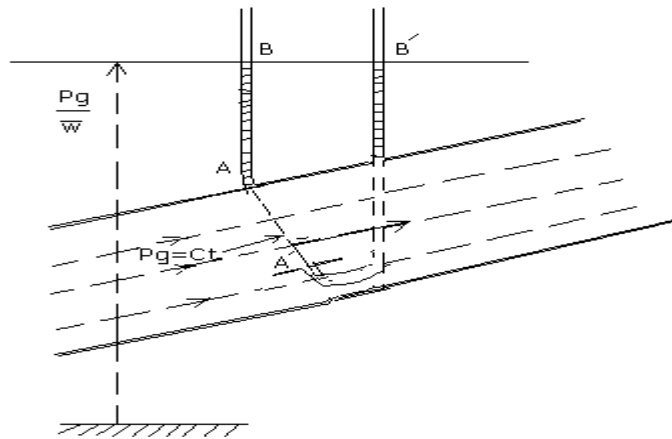


Figure.26.-La hauteur piézométrique $\frac{p_g}{\varpi}$ reste constante dans la section droite.

IV-5.-pression en un point d'arrêt.

Soit un obstacle immobile situé dans un fluide en mouvement (fig.27) et supposons l'écoulement permanent, sans frottement. Il existe une ligne de courant MR qui s'arrête en R sur l'obstacle et le long de laquelle on peut appliquer la formule de Bernoulli. R est un point d'arrêt, la vitesse y est nulle. Nous avons donc :

$$p_n + \rho g h_n = p + \rho g h + \rho \frac{V^2}{2}$$

Soit :

$$p_{gR} = p_g + \rho \frac{V^2}{2}$$

Ou :

$$\frac{p_{gR}}{\varpi} = \frac{p_g}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV-23})$$

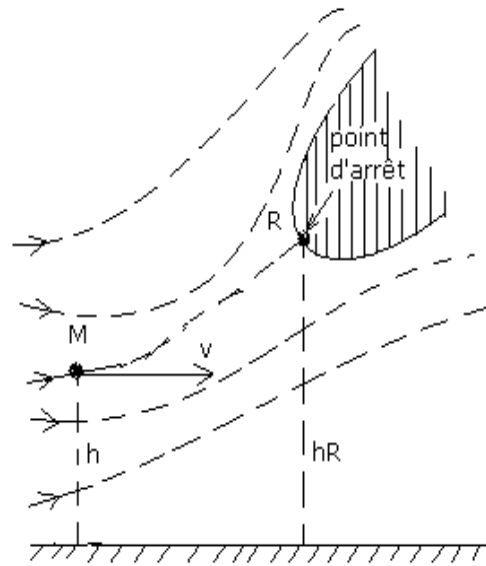


Figure.27.-Ecoulement autour d'un point d'arrêt.

Si on pratique en R un trou de prise de pression qu'on relie à un tube piézométrique, le niveau du fluide monte jusqu'au point B dont la cote mesure, comme nous venons de le voir,

la quantité $\frac{P_{gR}}{\varpi}$ (fig. 28)

Plaçons maintenant en M une prise de pression statique reliée à un autre tube piézométrique, le niveau du fluide monte jusqu'au point C dont la cote mesure

$$\frac{P_{gM}}{\varpi}.$$

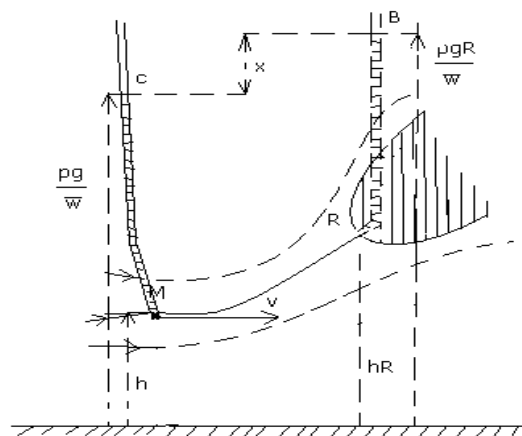


Figure.28.-Pression en un point d'arrêt.

En vertu de l'équation (IV.22) la dénivellation entre les deux tubes est égale à la quantité $\frac{P_{gR}}{\varpi}$. On a donc :

$$\boxed{V = \sqrt{2gz}} \quad (\text{IV-23})$$

La prise de pression R s'appelle prise de pression totale.

La quantité $p_{gh} = \frac{p_R}{\varpi} + h_R$ est égale à la charge totale le long de la ligne de courant MR.

IV-5-1.-Cas des liquides.- Lorsque le fluide est un liquide, on utilise la notion de charge totale comme nous venons de la définir, et les pressions sont généralement exprimées en hauteur de liquide. La vitesse V en un point M se déduit facilement de la lecture z .

IV-5-2.-Cas des gaz.- On néglige en général les forces de volume (forces de pesanteur) devant les forces de pression. Cela revient à confondre P et P_g .

L'équation (IV-22) est remplacée par la suivante :

$$\text{D'où} \quad P_R = p + \rho \frac{V^2}{2}$$

$$V = \sqrt{2 \frac{P_R - P}{\rho}}$$

Il n'est nécessaire de passer par l'intermédiaire de tube piézométrique.

Les pressions $P_R - P$ au moyen d'un manomètre différentiel.

IV-6.- Tube de Pitot.

C'est un appareil qui, utilisant les relations précédentes, permet de mesurer les vitesses d'écoulement en un point. Il est muni d'une prise de pression totale R et d'une prise de pression statique en A qu'on relie :

-soit à 2 tubes piézométriques (liquides),

-soit à 1 manomètre différentiel (gaz),

Sec caractéristiques dimensionnelles sont indiquées sur la figure 29.

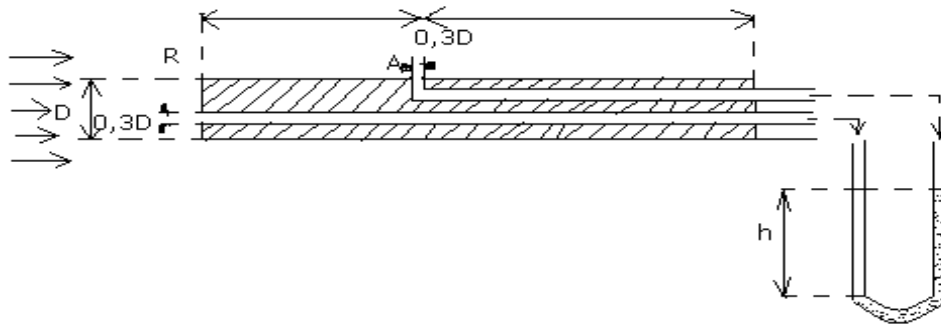


Figure.29.-Tube de Pitot (tube double).

Dans un écoulement permanent uniforme, on oriente l'appareil parallèlement aux lignes de courant de telle son introduction n'apporte qu'un minimum de perturbations.

Dans le cas de gaz, la vitesse d'écoulement est donnée par :

$$V = \sqrt{2 \frac{p_R - p_A}{\rho}}$$

REMARQUE.-En aérodynamique subsonique le manomètre relié au tube de Pitot contient souvent de l'eau et de la différence de pression $P_R - P_A$, est alors exprimée en hauteur d'eau, soit h mm d'eau.

On a donc :

$$p_R - p_A = \rho_e g h = 10^3 \times 10 \times \frac{h}{10^3} = 10 \times h P_a$$

Dans le cas de l'air, et dans les cas habituels $\rho_a = 1,25 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$, par suite :

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho_a} (p_R - p_A)} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times h}{1,25}} = 4\sqrt{h} \quad (25)$$

Cette forme $V=4\sqrt{h}$ donne ainsi en m/s la vitesse de l'air mesurée au tube de Pitot où h est exprimée en mm d'eau.

Elle est simple et très utile dans la pratique, car elle fournit une bonne approximation dans les habituels où les mesures portent sur de l'air dans les conditions voisines de 15° et 760 mm d'Hg.

IV-7.-Phénomène de Venturi.

Soit une conduite de section S variable parcourue par un fluide et pouvant présenter par une inclinaison quelconque par rapport à l'horizontal.

Si on assimile cette conduite à un filet de courant, la vitesse V est uniforme dans une section quelconque. L'application du théorème de Bernoulli nous donne :

$$\frac{p_g}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = Cte$$

Avec : $VS = Cte$

$S \searrow, V \nearrow$ par suite $P_g \searrow$. S et p_g varient donc dans le même sens.

Des tubes piézométriques placés en diverses sections indiquent par conséquent des niveaux différents, niveaux d'autant plus bas que la section S est plus petite. Dans la partie la plus étroite de la conduite il peut se produire ainsi de pressions qui peuvent être importantes et qu'on utilise dans certains appareils : trompe à vide, éjecteurs, etc.... On utilise également cette propriété pour réaliser des débitmètres appelés **tubes de Venturi**.

IV-7-1.-Tube de Venturi.

C'est une tuyauterie convergente – divergente qu'on intercale dans une conduite de section S_1 dont on détermine son débit (fig.30).

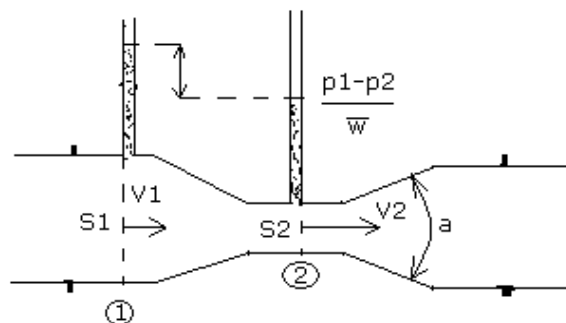


Figure.30.-Tube de Venturi (débitmètre).

Entre l'amont et le col de section S_2 nous avons :

$$\frac{p_{g1}}{\varpi} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_{g2}}{\varpi} + \frac{V_2^2}{2g}$$

avec:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2.$$

D'où :

$$\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \frac{V_1^2}{V_2^2} \right] = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi}}$$

Et le débit de la conduite est donné par :

$$q_v = S_2 V_2 = \frac{S_2 \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi}} \quad (\text{IV-26})$$

La différence $\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi}$ se détermine à l'aide des tubes piézométrique comme l'indique la figure. 29, ou à l'aide d'un manomètre différentiel relié aux deux prises de pression station.

Si le conduit est parcouru par un gaz, la mesure de la différence $p_{g1} - p_{g2}$

Se ramène à une mesure de la différence $P_1 - P_2$.

Condition de réalisation. Cavitation.

a) On a affaire en réalité à une masse fluide qu'on ne peut confondre avec un filet. Les lignes de courant peuvent se détacher de la paroi si le divergent est trop ouvert la répartition des vitesses n'est plus uniforme dès que l'angle α n'est pas très petit). Dans la pratique, l'angle

total du divergent ne doit pas dépasser de 7° environ. Le convergent par contre peut un angle très grand, sans aucun inconvénient.

b) Dans le cas d'un écoulement d'un liquide, il faut que la pression absolue minimale, à la gorge, soit supérieure à la tension de vapeur saturante du liquide à la température de l'écoulement, si non il aurait **cavitation**.

En effet d'après la formule de Bernoulli la pression motrice $P_g = P + \rho gh$ diminue quand la vitesse augmente. En un point donné, défini par sa cote h , une diminution de P_g correspond à une même diminution de la pression P . Mais pour un fluide donné et pour une température donnée, la phase liquide n'existe que si la pression absolue est supérieure à une certaine valeur P_s qui correspond à la tension de vapeur saturante du fluide.

Si donc P atteint la valeur P_s , une deuxième phase apparaît : le liquide entre en ébullition et des bulles de vapeur se forment au sein de l'écoulement. Dans ces conditions la loi de continuité de l'écoulement n'est plus observée et la formule de Bernoulli n'est plus applicable.

Le phénomène de la cavitation est en général nuisible et on cherche la plupart du temps à l'éviter : les bulles de vapeur ont en effet une action physico-chimique intense (corrosion) et leur disparition, dans les régions de l'écoulement où la pression augmente de nouveau, entraîne des actions mécaniques très fortes : (vibrations, chocs, bruits, etc....).

C'est ainsi qu'on a mesuré au cours de ce phénomène, des augmentations brusques de pression locale de l'ordre de 30 000 bars.

IV-7-2.-Diffuseur de turbine.

Le fluide qui sort d'une machine hydraulique, une turbine par exemple, possède nécessairement une certaine vitesse, donc une certaine cinétique. Cette énergie se perd sous forme de chaleur si on ne la récupère pas un procédé convenable.

Ajoutons à l'appareil une conduite divergente, appelé diffuseur s'ouvrant sous la surface libre du canal de fuite et dont la section de sortie(2) soit suffisamment grande pour qu'on puisse négliger la vitesse V_2 (fig.30).

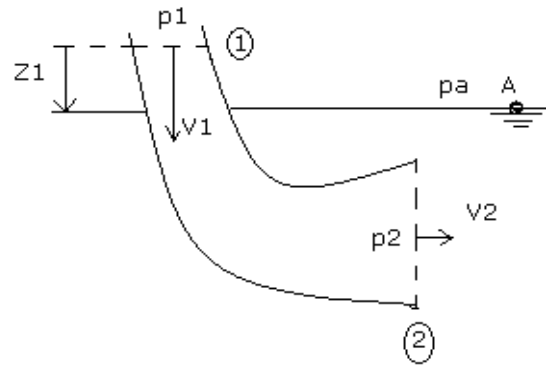


Figure.30.-Diffuseur de turbine hydraulique.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les section 1 et 2, nous avons :

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varpi} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi}$$

Le plan de référence choisi est celui de la surface libre au-dessus de laquelle règne la pression atmosphérique p_a . Nous avons donc :

$$p_1 = p_a - \left(z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} \right)$$

S'il n'y avait pas de diffuseur, la pression régnant à la sortie de la turbine serait la pression atmosphérique p_a . La présence de ce dispositif abaisse donc cette pression de sortie d'une valeur équivalente à $z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2}$. Le terme z_1 qui serait perdu sur

la hauteur de chute, est ainsi complètement récupérée ainsi que l'énergie cinétique $\rho \frac{V_1^2}{2}$.

z_1 peut être positif ou négatif (turbine immergée).

Deux conditions sont pratiquement nécessaires pour que le diffuseur fonctionne convenablement :

α) Il faut que l'angle de la divergence ne soit pas trop grand (on admet un angle inférieure à 7° , pour un diffuseur conique).

β) La pression P_1 , qui est inférieure à la pression atmosphérique P_a , doit être supérieure à la pression de vapeur saturante de l'eau (sinon il y aurait cavitation à la sortie de la turbine. Par exemple, si $z_1=0$, et en admettant que la condition de non cavitation se réduise à $p_1 > 0$, on

trouve :

$$\frac{p_a}{\rho} = \frac{v_i^2}{2g} > 0$$

Soit, dans le cas d'un écoulement d'eau :

$$V_1 < \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^5}{10^3}} \approx 14 \text{ m/s}.$$

La vitesse de l'eau dans la section de sortie de la turbine ne doit pas dépasser 14m/s sous peine de la cavitation en cet endroit.

IV-8.-Application du théorème de Bernoulli généralisé.

(Théorème de Cotton-Fortier)

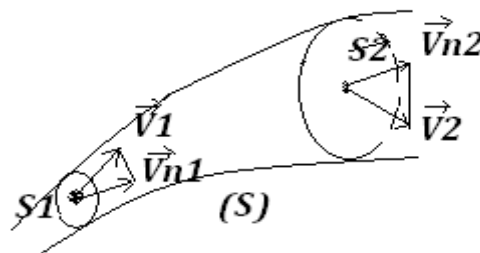
En mouvement permanent, s'il n'y a aucune puissance fournie (ou reçue) à l'intérieure et sur

la surface Σ , et en l'absence de frottement, nous avons : $\int_{\Sigma} (p + \rho gh + \frac{V^2}{2}) V_n dS = 0$.

Nous remplacerons $P + \rho gh$ par P_g étant entendu que : pour un liquide P_g représente $P + \rho gh$; pour un gaz P_g représente P .

Dans de nombreuses applications où le fluide s'écoule dans une canalisation : conduite, canal, etc..., on peut considérer la surface Σ comme étant constituée par les deux sections S_1 et S_2 de la canalisation et la surface latérale intermédiaire (fig.32).

Figure.32 : Canalisation : Conduite, canal, etc....



Si nous orientons V_n dans la même sens que $\vec{V}$ dans les sections S_1 et S_2 , et, comme à travers la surface latérale il ne passe aucun débit l'expression précédente peut s'écrire :

$$\int_{S_1} \left(p_g + \rho \frac{V^2}{2} \right) V_n dS = \int_{S_2} \left(p_g + \rho \frac{V^2}{2} \right) V_n dS \quad \text{IV-27}$$

Le long d'une section S , nous avons donc :

$$\int_S \left(p_g + \rho \frac{V^2}{2} \right) V_n dS = Cte$$

Supposons maintenant que dans la section S , la vitesse soit parallèle à une direction fixe, la répartition des pressions est hydrostatique : $P_g = Cte$.

On peut écrire, en introduisant un coefficient numérique α dépendant de la répartition des vitesses dans la section S :

$$\int_S \left(p_g + \rho \frac{V^2}{2} \right) V_n dS = \left(p_g + \alpha \rho \frac{U^2}{2} \right) q_v = Cte$$

q_v est le débit total traversant la section S , U la vitesse débitante dans cette section. Ils sont définis par :

$$q_v = \iint_S V_n dS \quad \text{et} \quad U = \frac{q_v}{S}$$

On pose :

$$p_t = p_g + \alpha \rho \frac{U^2}{2} \quad \text{(IV-28)}$$

où

$$H = \frac{p_g}{\varpi} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \frac{p_t}{\varpi} \quad \text{(IV-29)}$$

P_t est la pression totale moyenne, H est la charge totale moyenne dans la section S . Cette charge caractérise l'énergie mécanique totale de l'unité de poids de fluide traversant la section.

Si on considère deux sections S_1 et S_2 traversées successivement par le fluide, l'équation (IV-27), nous donne :

$$P_{t1}q_{v1} = P_{t2}q_{v2}$$

et puisque $q_{v1} = q_{v2}$, il vient :

$$P_{t1} = P_{t2}$$

Ou :

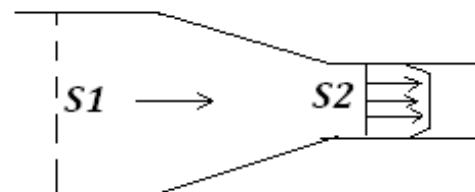
$$p_{g1} + \alpha_1 \rho \frac{U_1^2}{2} = p_{g2} + \alpha_2 \rho \frac{U_2^2}{2} \quad (\text{IV-30})$$

Cette formule permet de ramener l'étude de l'écoulement dans une conduite à un problème unidimensionnel concernant les variables moyennes mesurées dans une section : P_g , U , α .

Les coefficients α_1 et α_2 sont différents en général, car la répartition des vitesses n'est pas forcément la même dans les deux sections envisagées (fig.33). Si dans une section la répartition est uniforme ($V = \text{Cte}$) le coefficient α est égal à 1.

IV-8-1.-Cas d'un convergent (fig.33).

Figure.33 :-Ecoulement dans un convergent



En écoulement convergent, les fluides réels se comportent très approximativement comme des fluides parfaits, c'est-à-dire qu'il ne se produit pas de perte de charge. Nous avons donc :

$$p_{g1} - p_{g2} = \alpha_2 \rho \frac{U_2^2}{2} - \alpha_1 \rho \frac{U_1^2}{2}$$

Dans la partie convergente α_2 est généralement très voisin de 1.

Si $\frac{S_1}{S_2}$ est grand devant l'unité on a très sensiblement :

$$p_{g1} - p_{g2} = \alpha_2 \rho \frac{U_2^2}{2} \neq \rho \frac{U_2^2}{2}$$

Nous avons vu qu'on peut profiter de cette différence de pressions pour mesurer le débit d'une conduite.

En introduisant les coefficients α_1 et α_2 , on obtient une formule un peu différente de l'équation (IV-26), mais qui s'écrit toujours sous la forme :

$$q_v = K S_2 \sqrt{2g} \sqrt{\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi}} \quad (\text{IV-31})$$

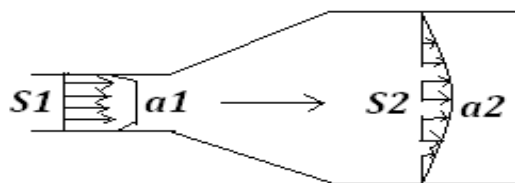
où le coefficient K dépend de $\frac{S_1}{S_2}$, α_1 et α_2 .

Si $\frac{S_1}{S_2}$ est très petit, K est voisin de 0,98.

Remarquons que, pour le même débit et quand le fluide change, la différence de hauteur piézométriques $\frac{p_{g1} - p_{g2}}{\varpi}$ ne change pas (alors que la différence $P_1 - P_2$ change).

IV-8-2.- Cas d'un divergent (fig.34)

Figure.34.-Ecoulement dans un divergent.



Si le fluide est réel, l'expérience montre qu'il peut se produire une perte de charge notable entre les sections S_1 et S_2 . Cette perte faible cependant si l'augmentation de section est lente. Dans ces conditions les vitesses moyennes restent sensiblement parallèles à l'axe du cône.

Il faudra écrire ici la formule de Bernoulli sous la forme :

$$p_{g1} + \alpha_1 \rho \frac{U_1^2}{2} = p_{g2} + \alpha_2 \rho \frac{U_2^2}{2} + \Delta P_t \quad (\text{IV-32})$$

où ΔP_t est la perte de charge par unité de volume de fluide, elle est mesurée en unités de pression.

On détermine ΔP_t expérimentalement ainsi que les répartitions des vitesses dans les sections S_1 et S_2 .

Si dans la section S_1 la répartition est uniforme $\alpha_1=1$. Dans la section S_2 elle s'en éloigne notablement et on peut avoir $2 < \alpha_2$.

Si le fluide est parfait il n'y a pas de perte de charge : $\Delta P_t = 0$.

Efficacité d'un diffuseur.- Si l'écoulement dans un divergent se faisait sans perte la diminution de l'énergie cinétique : $\alpha_1 \rho \frac{U_1^2}{2} - \alpha_2 \rho \frac{U_2^2}{2}$ serait exactement compensée par l'augmentation d'énergie potentielle $P_{g1} - P_{g2}$.

Puisqu'il faut en réalité tenir compte d'une perte d'énergie, on peut définir l'efficacité de diffuseur par le rapport :

$$\eta = 1 - \frac{\Delta P_t}{\frac{\rho}{2} (\alpha_1 U_1^2 - \alpha_2 U_2^2)} \quad (\text{IV-33})$$

qui est, pour l'unité de volume de fluide, le rapport de l'énergie potentielle récupérée à l'énergie cinétique perdue.

Pour un diffuseur conique de section, ce rendement est maximal pour un angle total au sommet θ de 7° , et il ne dépasse pas la valeur 0,85 à 0,90.

Pour un angle sommet $\theta = 30^\circ$, le rendement ne vaut que 0,5.

Nous concluons donc que si, dans la réalité, il est relativement facile de transformer l'énergie potentielle en énergie cinétique, la transformation inverse nécessite certaine précaution pour s'effectuer sans trop de perte d'énergie.

Chapitre-V.-QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA FORMULE DE BERNOULLI.

On a dit que la formule de Bernoulli est très applicable dans vaste domaine sur la mécanique de fluide et Bernoulli a découvert des relations qu'agissent directement sur notre vie quotidienne et de même pour le développement d'un pays. Maintenant on va voir quelques applications de ces relations-là en accompagnant par des expériences correspondantes.

V-1.-Relation entre la pression atmosphérique et la pression à l'intérieure d'un verre ou d'un tube contenant de fluide.

.-Observation

Dans ce premier exemple prenons l'eau comme fluide utilisé.

Nous allons prendre maintenant un verre contenant de l'eau de volume quelconque. On recouvre l'ouverture de ce verre par de papier mince puis on le renverse.

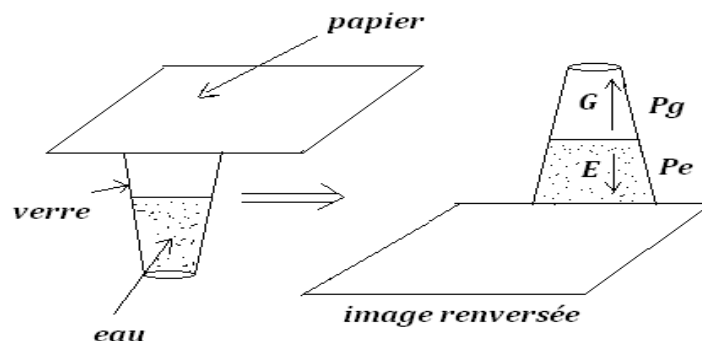
-Expérience.

*Matériels utilisés : -Verre ou sorte de tube

-Fluide (l'eau)

-Papier mince (papier vélin)

Figure.35. –Pression à l'intérieure d'un verre



-Résultats.

L'eau n'est pas perdue, c'est-à-dire, ce papier mince peut la soutenir.

-Interprétation.

L'eau exerce une force de pression P_E sur le papier qui dirige vers le bas et de vitesse V_E et de masse volumique ρ_E tandis que le gaz dans la partie vide du verre exerce une force de pression P_G sur le papier qui dirige vers le haut ***appelée force de succion***, de vitesse V_G et de masse volumique ρ_G .

Cette égalité est vérifiée par la relation de Bernoulli :

$$P_E + \rho_E \frac{V_E^2}{2} = P_G + \rho_G \frac{V_G^2}{2} = Cte$$

C'est pourquoi l'eau ne perd pas, donc elle reste en équilibre.

Dans la vie quotidienne, nous pouvons trouver cet exemple là-dessus sur le cas d'une seringue.

Par conséquent, pour faire sortir de liquide dans une seringue, il faut toujours appliquer une force de pression à l'aide d'un piston pour augmenter la pression d'une partie contenant de gaz.

V-2.-Cas de robinet

- **Effet Magnus** :

Si maintenant la conduite reste de section constante mais que l'on met un obstacle à l'intérieur ; l'obstacle diminue la section, on a donc le même effet. Si cet obstacle est un cylindre tournant, d'axe perpendiculaire à l'axe de la canalisation, alors le frottement accélère le fluide d'un côté et le ralentit de l'autre. On a donc une diminution de pression d'un côté et une augmentation de l'autre, le cylindre subit une force : c'est l'effet Magnus (l'on considère souvent l'effet Magnus dans l'air, qui est un fluide compressible, mais le principe général reste le même).

Si la canalisation a une section constante, et qu'elle ne présente pas d'obstacle, alors la vitesse est constante. Si l'altitude varie, alors l'équation de Bernoulli nous indique que la pression varie à l'opposé de l'altitude.

En plus de transformation isotherme, isobare, adiabatique, poly tropique, il y a aussi dans la vie quotidienne que l'on appelle **le laminage**.

Le laminage est le fait de diminution de la pression du jet de fluide se coulant à travers un obstacle appelé **résistance locale**.

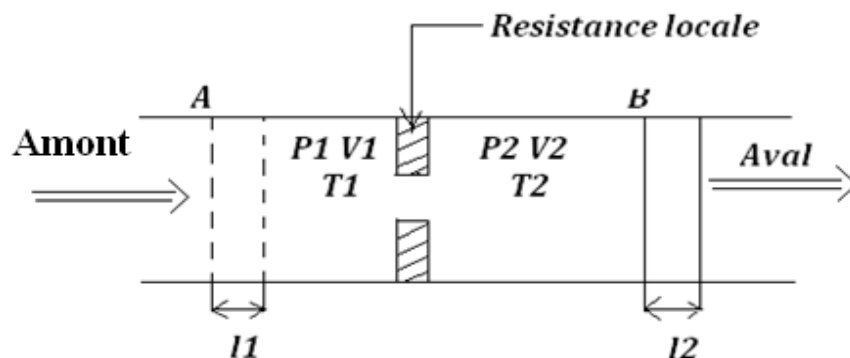
C'est un phénomène fréquent en pratique : l'écoulement de l'eau à travers un robinet partiellement ouvert, le passage de l'air à travers un registre partiellement ouvert.

Dans ce deux cas l'effet produit par le dispositif à étranglement se manifeste par une diminution de la pression en aval de l'étranglement.

La chute de pression en aval d'une résistance locale s'explique par la dissipation du flux d'énergie pour vaincre cette résistance locale.

Considérons l'écoulement d'un fluide le long d'un tube présentant une résistance locale.

Figure.36 : Resistance locale



Le tube a la même section en aval et en amont de l'obstacle. Cela nous permet de négliger la variation de l'énergie cinétique du fluide en écoulement.

Admettons que la paroi du fluide est thermiquement isolée et que le laminage est adiabatique. Considérons une masse de gaz comprise entre la section A en amont de la résistance locale et la section B en aval de cette résistance. Comme le gaz s'écoule les sections A et B se déplaçant le long du tube dont la section est S.

A un instant quelconque surtout pendant la nuit, des nombreux robinets des consommateurs sont fermés. Dans ce temps-là essayons de regarder un robinet de notre maison, il y a encore de fuite d'eau lors que celle-ci n'est pas bien serrée. Celle-ci est due à l'augmentation de pression de fluide en aval de l'obstacle par rapport à la pression du fluide en amont de l'obstacle.

Cette variation des pressions nous permet d'appliquer la formule de Bernoulli :

$$P_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{V_B^2}{2} = Cte$$

Donc on nous conseille de vérifier bien les robinets de notre maison lors qu'il fait nuit, sinon nous avons un risque d'inondation.

V-3.-Tuyau de section variable.

- **Effet Venturi :**

Supposons maintenant que la vitesse ne soit pas nulle, mais que l'on reste toujours à la même altitude (z constant).

Si un liquide s'écoule dans une canalisation, alors comme il est incompressible, son [débit](#) (volume transitant à travers une surface par unité de temps) est constant. Si la canalisation s'élargit, alors la vitesse diminue (puisque le débit est le produit de la vitesse par la section, les deux varient à l'inverse). Le théorème de Bernoulli nous indique alors que la pression augmente.

À l'inverse, si la canalisation se rétrécit, le fluide accélère et sa pression diminue. On qualifie ce dispositif expérimental de tube de Venturi.

Ce résultat est assez peu intuitif car on s'attendrait à ce que la pression augmente lorsque la section diminue.

La figure. 37 représente un tuyau de section variable à travers lequel on fait passer un courant d'air. Pour juger de la pression de l'air en différentes parties du tuyau, on utilise des tubes manométriques disposés comme indique la figure. 37. On constate que dans les tubes

manométriques reliés aux rétrécissements du tuyau, le niveau d'eau est plus élevé que dans les tubes reliés parties larges du tuyau.

Cela montre bien que dans les parties étroites la pression de l'air dans le courant est plus petite que dans les parties larges du tuyau, résultat conforme :

$$P + \frac{V^2}{2} = Cte$$

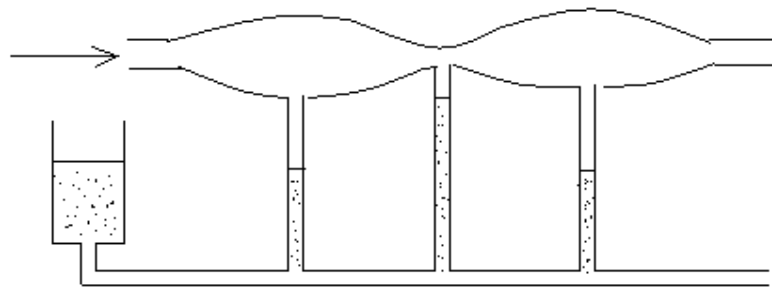


Figure.37. Tuyau de section variable.

Cette expérience peut servir à expliquer le principe de fonctionnement des compteurs d'eau qui mesurent le débit d'eau, c'est-à-dire la masse d'eau Q s'écoulant par seconde à travers une section droite du conduit. On introduit dans le conduit **un tube dit de Venturi** dont la section droite est plus petite que celle du conduit.

Soient S_1 et S_2 la section de la partie large et de la partie étroite du conduit et P_1 , P_2 les pressions d'eau que l'on y mesure à l'aide de manomètres. Appliquons l'équation de Bernoulli :

$$P_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = P_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

On a ainsi $M_1 = V_1 S_1 = V_2 S_2$, d'où l'on tire V_1 et V_2 ; après substitution dans la relation précédente on obtient :

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{S_1^2 - S_2^2}}$$

V-4.-Expérience sur un tube de caoutchouc.

Prenons un tube de caoutchouc muni d'un embout de verre conique et insufflons-y de l'air (fig.38, vue de dessus). La pression de l'air dans la partie effilée de l'embout et dans le jet qui en sort est plus petite que la pression atmosphérique.



Figure.38. Tube de caoutchouc.

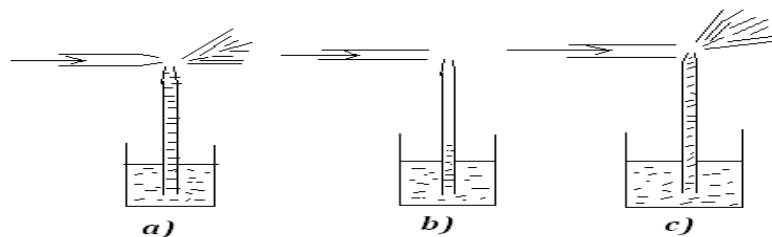
Si nous approchons le jet d'air d'une petite boule creuse en celluloïd suspendue à un fil, nous verrons que la boule sera aspirée et entraînée par le jet d'air. En dirigeant le jet suivant la verticale ascendante, on arrive à maintenir la boule en sustentation à une certaine hauteur. Elle se comporte à la façon d'une boule placée dans un creux. Il est donc d'inutile d'attacher la boule.

V-5.-le jet d'air

Approchons maintenant le jet d'air de l'extrémité supérieure effilée d'un tube de verre dont l'autre extrémité plonge dans l'eau (fig. 39,a).

Dans le tube de verre on verra monter le niveau d'eau qui sera ensuite pulvérisée et entraîné par jet d'air. C'est le principe de fonction des pulvérisateurs. Si l'embout n'est pas effilé et présente une section constante (fig.39, b), l'eau ne sera pas aspirée à moins qu'on ne place l'embout tout contre le tube de verre (fig.39, c) de façon à y créer un interstice. Cet interstice fera fonction d'embout effilé et créera dans le jet d'air une pression réduite, ce qui provoquera l'aspiration de l'eau et sa pulvérisation.

Figure.39 : Le jet d'air



CONCLUSION GENERALE :

En guise de conclusion, on peut dire que DANIEL Bernoulli avait trouvé des relations plus importantes sur l'amélioration de la technologie qui agissent directement au développement d'un pays car à l'aide de Bernoulli on peut augmenter de plus en plus la production vivrière

Alors, Madagascar aussi a besoin de Bernoulli en tant que pays en voie de développement, qui laisse encore les secteurs primaires et qui prennent beaucoup de place comme les productions rizicoles, manioc etc.... C'est pourquoi notre ancien gouvernement a été crée des instituts comme le PSDR, DDR, DRDR assurant les développements régionaux et notre gouvernement actuel aussi partage gratuitement de nombreux domaines à cultiver à la population prête. Les accords avec les Unions Européennes(U.E), les Fonds d'Intervention pour le Développement(FID) ont les mêmes objectifs aux développements régionaux. Mais cette activité pareille à la culture de riz exige des inondations permanents donc Bernoulli peut les emportés des solutions comme les barrages hydrauliques, des canalisations. De plus, il y a aussi les projets des distributions des eaux potables dans les parties sud de Madagascar. On peut aussi construire dans notre île beaucoup de centrales hydrauliques comme à Moroteza, Mahazoarivo, Bezavo dans le district de VONDROZO.

Mais dans la réalisation pratique, on trouve encore beaucoup d'obstacles comme l'insuffisance des financements, des matériels, des techniciens même. Pour ces raisons, on trouve des rares centrales hydrauliques encore à Madagascar et des barrages en dures.

Finalement d'autres avantages peuvent être obtenus par l'application de la formule de Bernoulli comme l'utilisation des eaux potables qui rend les habitants en bonne santé et surtout la protection de l'environnement car le fonctionnement des centrales hydrauliques et la vie des barrages dépendent de la bonne condition climatique, mais il y a quand même d'autres impacts négatifs comme la pollution des eaux, le délai stage.

Alors DANIEL Bernoulli faisait des importantes découvertes, malgré les besoins de l'homme ne sont pas encore complets.

Donc cette recherche a été commencé, mais pas encore terminé car les buts des chercheurs c'est de dominer complètement la nature et de donner des vies meilleures aux hommes.

Bibliographie

- Radelet-De Grave (Patricia), Daniel Bernoulli et le parallélogramme des forces, *Sciences et techniques en perspectives* 11 (1986-1987), 69-90.
- Seth (Catriona), "Une nouvelle province des mathématiques", *Les rois aussi en mouraient. Les Lumières en lutte contre la petite vérole*, Paris, Desjonquères, 2008
- Rios, Jorge L. Paes - *Études en modèles réduits du déversoir de l'usine de Tucuruí* - in Congrès International des Grands Barrages - ICOLD - San Francisco, 1986.
- [Un grand barrage démantelé en France ? article de Martin Arnould du WWF, L'Écologiste n°20, sept-oct-nov. 2006, p. 8](#)
- [La continuité écologique des cours d'eau](#)
- Guide pour la réhabilitation des moulins hydrauliques en vue de la production d'électricité, de Michel Heschung. Master en Architecture et Développement durable, 2007, 112 pages, FFAM 10 rue de l'Echarpe 31000 Toulouse

ANNEXES

Annexe-I.-Barrage



Figure.40.-Le barrage Daniel-Johnson,



Figure.41.-Barrage de Limmern(canton de Glaris, Suisse)

situé à 214 km au nord de la ville
de Baie-Comeau, au Québec.



Figure.42.-Barrage Hoover, États-Unis



Figure.43.-Évacuateur de crues du barrage
Matsumoto (Préfecture de Nagano, Japon)

I-1.-Histoire.

Les barrages existent probablement depuis la préhistoire (réserve d'eau potable, d'irrigation, viviers, piscicultures).

D'après N. Schnitter-Reinhardt, le plus ancien barrage connu serait un barrage poids construit près de Jawa, en [Jordanie](#), construit vers la fin du 4^e millénaire avant J.-C. Hérodote cite un barrage construit par le pharaon [Ménès](#), fondateur de la première dynastie, à Kosheish, pour alimenter la ville de [Memphis](#).

La première de rupture de barrage connue est celui de Sadd El Kaffara, sur le Wadi Garawi, 30 km au Sud du [Caire](#). Elle se serait produite entre 2650 et 2465 avant J.-C. C'est probablement la rupture de ce barrage qui en a arrêté la construction pendant un millénaire¹.

Les [Romains](#) ont construit des barrages : par exemple, deux barrages en Espagne, dans la région de [Mérida](#), les barrages de Proserpina et de Cornalvo, d'une hauteur de 12 à 19 m, construits vers 25 avant J.-C., ou encore, au [Portugal](#), le [barrage romain de Belas](#).

Mais c'est au Moyen Âge qu'ils se sont fortement développés en Europe pour alimenter les moulins à eau. Il semble qu'ils aient parfois pu s'appuyer sur des sédiments accumulés en amont d'embâcles naturels, ou sur les lieux de barrages de castors dont la toponymie conserve des traces (par exemple en France avec le mot [bief](#) et *bièvre* (ancien nom de castor) qui pourraient être liés, ou avec des noms de communes tels que [Beuvry](#) (un des anciens noms de castor) ou [Labeuvrière](#) (la « castorière »). Les cartes anciennes, de Cassini par exemple, portent témoignage des nombreux barrages de petites rivières faits par les paysans ou les moines locaux, pour conserver l'eau et y élever du poisson ou pour le rouissage du lin ou du chanvre.

En conservant des volumes d'eau et une hauteur d'eau plus importante en saison sèche, ces barrages ont également pu *tamponner* les fluctuations estivales des nappes (car toutes choses égales par ailleurs, c'est la hauteur d'eau qui contrôle la vitesse de percolation, cf. [Loi de Darcy](#)).

I-2.-Études hydrauliques. En [hydraulique](#) le [modèle réduit](#) est très utilisé pour les études de [mécanique des fluides](#) des [ouvrages](#) tels que [ports](#), [digues](#), **barrages**, etc. On utilise dans ces cas-là la vraisemblance du [nombre de Froude](#).

Types de barrages.

Il existe plusieurs types de barrage, alors nous allons voir quelques exemples :

Barrage poids

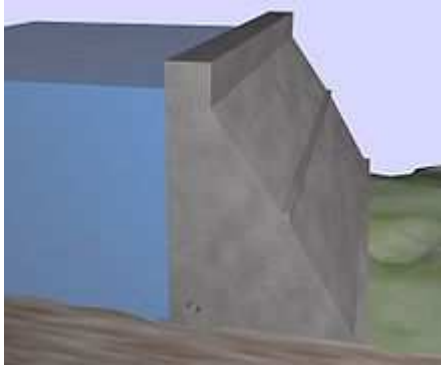


Figure.44.-Barrage poids

Un barrage poids est un barrage dont la propre masse suffit à résister à la pression exercée par l'eau. Ce sont des barrages souvent relativement épais, dont la forme est généralement simple (leur section s'apparente dans la plupart des cas à un triangle rectangle).

On compte deux grandes familles de barrage-poids, les barrages poids-béton, et les barrages en remblais (ces derniers n'étant d'ailleurs généralement pas qualifiés de barrage-poids, mais de barrage en remblais).

Même si les barrages voûtes ou à contrefort nécessitent moins de matériaux que les barrages poids, ces derniers sont encore très utilisés de nos jours. Le barrage-poids en béton est choisi lorsque le rocher du site (vallée, rives) est suffisamment résistant pour supporter un tel ouvrage (sinon, on recourt aux barrages en remblais), et lorsque les conditions pour construire un barrage voûte ne sont pas réunies (cf. ci-dessous). Le choix de la technique est donc d'abord géologique : une assez bonne fondation rocheuse est nécessaire. Mais il faut également disposer des matériaux de construction (granulats, ciment) à proximité.

La technologie des barrages-poids a évolué. Jusqu'au début du XX^e siècle (1920-1930), les barrages poids étaient construits en maçonnerie (il existe beaucoup de barrages de ce type en France, notamment pour l'alimentation en eau des voies navigables).



Un barrage-poids évidé : le barrage amont d'[Aussois](#) en [Savoie](#)

Plus tard, c'est le béton conventionnel qui s'est imposé.

Depuis [1978](#), une nouvelle technique s'est substituée au béton conventionnel. Il s'agit du béton compacté au rouleau. C'est un béton (granulats, sable, ciment, eau) avec peu d'eau, qui a une consistance granulaire et pas liquide. Il se met en place comme un remblai, avec des engins de terrassement. Il présente le principal avantage d'être beaucoup moins cher que le béton classique.

Le barrage de la [Grande-Dixence](#) en [Suisse](#) est un barrage-poids.

Barrage voûte.

Article principal : [Barrage voûte](#).

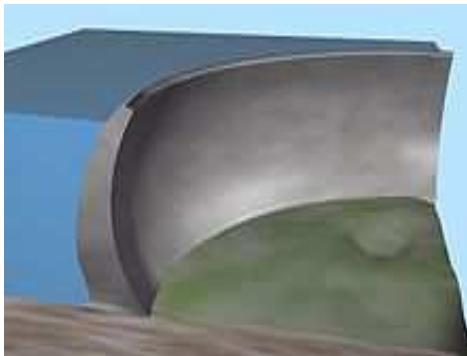


Figure.45.-Barrage voûte

Un barrage-voûte : le [barrage de Monteynard](#)

La poussée de l'eau est reportée sur les flancs de la vallée au moyen d'un mur de béton arqué horizontalement, et parfois verticalement (on la qualifie alors de voûte à *double courbure*).

La technique de barrage-voûte nécessite une vallée plutôt étroite (même si des barrages voûtes ont été parfois construits dans des vallées assez larges, poussant cette technologie à ses limites) et un bon rocher de fondation.

Même lorsque ces conditions sont réunies, le barrage-voûte est aujourd'hui souvent concurrencé par le barrage-poids en béton ou le barrage en enrochements, dont la mise en œuvre peut être davantage mécanisée.

Par le peu de matière utilisée, c'est évidemment une technique très satisfaisante économiquement.

Cependant, la plus grande catastrophe de barrage vécue en France ([Malpasset](#), au-dessus de [Fréjus](#), le [2 décembre 1959](#)) concernait un barrage-voûte en cours de mise en eau ; c'est la fondation (et non pas le barrage lui-même) qui n'a pas supporté les efforts appliqués par la retenue.

Avant cet accident (et, pour certains, aujourd'hui encore), la voûte est considérée comme le plus sûr des barrages. Malpasset est le seul cas connu de rupture d'un barrage-voûte.

On rencontre aussi des barrages avec plusieurs voûtes comme le [barrage de l'Hongrin](#) en [Suisse](#).

Barrage contreforts ou multivoûtes.

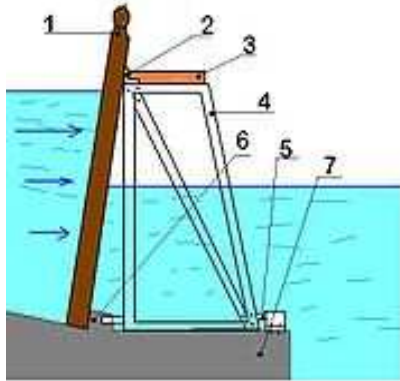


Figure.46.-Barrage contreforts

Lorsque les appuis sont trop distants, ou lorsque le matériau local est tellement compact qu'une extraction s'avère presque impossible, la technique du barrage à contreforts permet de réaliser un barrage à grande économie de matériaux.

Le mur plat ou multivoutes (Vézins, Migoëlou ou Bissorte) en béton s'appuie sur des contreforts en béton armé encastrés dans la fondation, qui reportent la poussée de l'eau sur les fondations inférieures et sur les rives. Un des exemples le plus important de ce type est le barrage [Daniel-Johnson](#) au [Québec](#), [Canada](#).

Figure.47.- Barrages mobiles à aiguilles.



Système Poirée : 1=aiguille, 2=appui, 3=passerelle, 4=fermette, 5=pivot, 6=heurtoir, 7=radier

Le **barrage mobile** ou à *niveau constant*, a une hauteur limitée ; il est généralement édifié en aval du cours des rivières, de préférence à l'endroit où la pente est la plus faible. On utilise généralement ce type de barrage dans l'aménagement des estuaires et des deltas.

Selon le type de construction le barrage mobile peut-être :

I-3.-Vies de barrages.

Figure.48.-Entretien des barrages.



Accumulation de débris naturels et anthropiques contre le mur d'un barrage.

Un barrage n'est pas un simple mur plus ou moins solide. Il n'est pas inerte et fait l'objet surveillance sismologique et technique sous plusieurs critères. L'ouvrage vit, travaille et se fatigue en fonction des efforts auxquels il est soumis.

Pour des raisons de maintenance des ouvrages, les barrages sont régulièrement inspectés. Chaque année, l'aspect extérieur du barrage est examiné, et périodiquement (tous les 10 ans en France) la retenue d'eau est vidée afin de permettre l'accès à la fois à la partie inférieure de l'ouvrage et aux équipements (conduites d'eau, grilles, vannes, etc.).

Les ouvrages intéressant la [sécurité publique](#) sont également auscultés, par des capteurs permettant de mesurer leurs comportements (mesures de déplacements, de pression d'eau, de débit...). De son état dépend la sécurité des populations installées en aval.

Pour autant la probabilité de rupture est extrêmement faible : statistiquement, une rupture par an sur un parc mondial de 16 000 barrages, [Chine](#) exclue. En [Europe](#), la probabilité est encore plus basse. En fait le danger est le plus élevé au moment du premier remplissage, le risque étant cependant bien moins élevé pour les ouvrages en béton que pour ceux en remblais.

En France, les barrages construits dans les Alpes, dans les [années 1950](#) et [1960](#), au plus fort de l'[âge d'or](#) de la [houille blanche](#), sont aujourd'hui parvenus dans une phase de vieillissement qui nécessite des frais de maintenance de plus en plus élevés. [EDF](#) estime que la plupart des ouvrages hydrauliques atteignent seulement la moitié de leur espérance de vie mais a annoncé un important programme d'investissements pour la maintenance et la réhabilitation.

I-3-1.-Catastrophes.

Un défaut de conception ou d'entretien peut conduire à une catastrophe : si le barrage cède alors que la retenue d'eau est relativement importante, un raz-de-marée peut déferler sur les populations vivant en aval, plus ou moins canalisé par la topographie du cours d'eau sur lequel le barrage était implanté. (Voir l'article [Catastrophe](#)). En France, une telle catastrophe a eu lieu en [1959](#) près de Fréjus, au [Barrage de Malpasset](#).

Le film [La Folie des hommes](#) (2001), relate les déboires du [barrage de Vajont](#), en Italie, au début des années 1960.

Tiré d'un fait réel, le film montre les causes et l'enchaînement des événements qui conduisirent à un glissement de terrain de 270 millions de mètres cubes dans les eaux du lac de retenue du barrage. La vague gigantesque qui s'ensuivit fit 2 000 victimes, le [9 octobre 1963](#).

I-3-2.-Séismes.

Les séismes font partie des événements susceptibles de nuire à la stabilité des barrages.

Cependant, historiquement, les ruptures causées par des séismes sont très peu nombreuses comparées à celles dues à des défauts de conception.

En France, les grands barrages font l'objet d'une simulation informatique de comportement dans le cas du plus fort séisme historique connu dans la région (souvent estimé d'après des documents anciens, mais n'allant pas bien au-delà de 500 ans environ). Ainsi le séisme de référence dans les Pyrénées est celui du 21 juin 1660, de magnitude estimée autour de 6 et dont l'intensité a été de IX à Bagnères de Bigorre). Un tel séisme causerait aujourd'hui des dégâts importants dans les Hautes-Pyrénées, mais serait néanmoins supporté par tous les grands barrages.

Les ruptures les plus fréquentes ont concerné des ouvrages en remblai de taille modérée, construits avec des matériaux sableux ou silteux, ou fondés sur des sols de cette nature ; il peut en effet se développer dans ce cas un phénomène appelé [thixotropie](#), qui fait perdre toute résistance au sable ou au silt saturé.

I-4-Conséquences environnementales.

Article détaillé : [Impact environnemental des barrages](#).



Figure.49.-Conséquences environnementales

Les grands barrages sont de puissants facteurs de fragmentation écologique pour les poissons migrateurs.

I-4-1.-Impacts négatifs.

Un barrage peut générer une [fragmentation écologique](#), lorsqu'il est un frein ou blocage à la [migration](#) d'espèces aquatiques. Il y a dans certains pays obligation depuis quelques années sur les ouvrages neufs (en France, sur les rivières classées « migrateurs » depuis la Loi « Pêche » n° 84-512 du 29 juin 1984) de créer des [échelles à poissons](#). Celles-ci sont encore rares sur les ouvrages anciens ou sur les rivières où la présence d'espèces migratrices n'est pas identifiée. Réciproquement, certains ouvrages sont équipés sans obligation, par la volonté de l'exploitant. Certaines échelles à poissons mal conçues ou mal construites peuvent se révéler peu efficaces. Le transport des poissons en camion est parfois la solution alternative retenue, par exemple sur la [Garonne](#) entre [Carbonne](#) et [Camons](#), où l'enchaînement de cinq barrages importants aurait nécessité des équipements onéreux, et un trajet très éprouvant pour le migrateur. Les poissons sont donc « piégés » à une extrémité de la chaîne, identifiés et transportés par camion-citerne à l'autre extrémité.

Un barrage peut générer des modifications hydrauliques, lorsqu'il bouleverse le débit naturel et saisonnier du cours d'eau, affecte le niveau des nappes et le transfert des matières en suspension et sédiments. Il a des effets différés sur les [écosystèmes](#) d'une vaste zone en raison de l'inondation de la zone [amont](#), et de la forte modification du régime d'écoulement des eaux de la zone [aval](#), ainsi que de la modification de la qualité des eaux provoquée par la retenue.

Un barrage peut générer une modification des structures écologiques et faciliter des «[invasions biologiques](#)». Un [écosystème](#) sub-naturel et plus ou moins équilibré se reconstitue dans ces zones plus ou moins rapidement (en l'espace d'environ 30 ans, l'écosystème serait recréé à 99 %, y compris en aval dans les anciennes zones asséchées).

Néanmoins, cet écosystème n'est jamais identique à celui d'origine : la disparition des courants en amont, et la très forte diminution du débit en aval, ainsi que la disparition ou le lissage des débits saisonniers provoque généralement la disparition de certaines espèces autochtones. De plus, une étude⁶ publiée en septembre 2008 a confirmé aux USA que dans les bassins-versant, les milieux artificiels que sont les lacs de retenues étaient beaucoup plus propices au développement d'espèces aquatiques dites « [invasives](#) » que les lacs naturels, Cette étude a cherché à corréler dans la [région des grands lacs](#) l'importance des invasions biologiques avec la physico-chimie de la masse d'eau, l'intensité et la nature des activités nautiques avec la distribution géographique de cinq espèces non indigènes L'étude a montré

que le risque d'invasion biologique est (pour la région des grands lacs) de 2,4 à 300 fois plus élevé dans les lacs de retenue que dans les lacs naturels (vers 2005/2008). Ce risque a augmenté avec les temps, et la menace augmente pour les lacs naturels car l'augmentation du nombre de retenues touchées a presque partout diminué la distance entre eaux « contaminées » et eaux naturelles. C'est dans ce cas l'homme qui joue le rôle principal de colporteur et en particulier selon Pieter TJ Johnson l'un des auteurs de l'étude, les activités de pêche et de nautisme qui favorisent la dissémination de nombreux organismes, dont la [moule zébrée](#) (accrochée sous les bateaux), les [myriophylles](#) invasif accrochés aux remorques porte-bateaux, et les éperlans arc-en-ciel et une écrevisses invasive qui a été utilisée comme appâts (aujourd'hui interdit).

I-4-2.-Impacts positifs.

Un lac de barrage peut être un accueil d'oiseaux migrateurs, lieux de reproduction de certaines espèces aquatiques,

Un lac de barrage peut améliorer les conditions d'écoulement en étiage ; De plus en plus, les barrages hydroélectriques participent à un soutien d'étiage, permettant une vie estivale de rivières par ailleurs affectées par de nombreux prélèvements (autorisés ou non), d'améliorer le refroidissement des eaux, et la dilution des pollutions en aval. En France, depuis la même Loi Pêche de [1984](#), tous les obstacles sur les rivières françaises doivent obligatoirement laisser dans le cours d'eau 1/40 du module (moyenne de débit), et 1/10 pour tous les ouvrages neufs ou dont le titre est renouvelé. Afin de mettre fin à cette situation inégalitaire (posant de nombreux problèmes de variation des débits sur un même cours d'eau), la nouvelle Loi sur l'Eau et les Milieux aquatiques a fixé au 1^{er} janvier 2014 la date limite de délivrance de 1/10 pour tous les ouvrages. Cette LEMA introduit cependant l'exception des barrages de haute chute, assurant le soutien du réseau électrique, auxquels le débit réservé pourra être limité à 1/20 (une liste devant être fixée par décret). De même, sur justification par une étude adaptée, le débit pourra être modulé sur l'année (régime réservé).

Un lac de barrage peut être une source de production d'[énergie renouvelable](#), seule capable d'assurer sans production de [gaz à effet de serre](#) la variation de production imposée par le consommateur, avec restitution intégrale de l'eau après utilisation de son énergie potentielle.

Les barrages d'irrigation ou d'eau potable sont aussi construits pour apporter des bienfaits pour l'agriculture et l'alimentation en eau. Ces impacts doivent donc être pesés au même titre que les inconvénients portés au milieu aquatique ou à la pêche de loisir.

*Annexe-II.-Histoire de DANIEL Bernoulli.

Daniel Bernoulli (29 janvier 1700 [Bâle] - 17 mars 1782 [Bâle]).

Daniel Bernoulli est un des plus importants membres de la famille Bernoulli. Né à Groningue, aux Pays-Bas, il retourne à Bâle, là où se situe le cœur de la famille Bernoulli, alors qu'il a cinq ans et que son père vient d'obtenir la chaire de mathématiques de cette ville. Son père justement, Jean Bernoulli, réitère avec lui l'erreur que son propre père avait commise : il souhaite absolument que Daniel ait une situation prospère, et il le pousse d'abord vers le commerce (voie qui ne lui plaît absolument pas), puis vers la médecine.

Daniel passe effectivement son doctorat de médecine en 1721. Mais il a profité de ses études pour apprendre auprès de son père, et surtout de son frère, Nicolas II, les derniers développements du calcul infinitésimal. Ainsi, sa thèse porte sur le mécanisme de la respiration, et ses travaux font de lui un spécialiste de Physique mathématique plutôt qu'un spécialiste de médecine.

Après un séjour à Venise, Bernoulli part à Saint-Pétersbourg occuper la chaire de mathématiques en 1725. Il est accompagné par son frère, Nicolas II, qui décède quelques mois plus tard. En 1727, un des meilleurs élèves de son père (et pour cause!), Leonhard Euler, le rejoint et il s'ensuit la période la plus fructueuse scientifiquement de Daniel Bernoulli. Cependant, Bernoulli n'est pas heureux à Saint-Pétersbourg, et il retourne à Bâle en 1734. La même année, il obtient pour ses travaux en astronomie le grand prix de l'Académie des Sciences de Paris, prix qu'il partage avec son père. Ce dernier est furieux de voir que son fils est devenu son égal, et il le renvoie de la maison familiale. Comme Euler, Daniel Bernoulli obtiendra dix fois ce grand prix.

Daniel Bernoulli est plus un mathématicien physicien qu'un mathématicien pure. Son œuvre de référence est *Hydrodynamica*, publiée en 1738, où il étudie l'écoulement d'un liquide à travers un orifice. Ses théories concernant la cinétique des gaz sont remarquables, il étudie également les vibrations. En mathématiques, il s'intéresse beaucoup aux probabilités, et à leurs applications aux sciences sociales. Il résout un problème de Riccati concernant les

équations différentielles, travaille sur les fractions continues, et les fonctions trigonométriques.

Terminons cette biographie par une anecdote amusante : alors que Daniel Bernoulli voyageait avec un homme cultivé qui ne savait pas qui il était, celui-ci demanda son nom : "Je suis Daniel Bernoulli". L'homme, croyant à une plaisanterie, répondit : "Et moi je suis Isaac Newton". Cette histoire, disait Daniel Bernoulli, m'a fait plus plaisir que tous les honneurs!

Figure.50.-Daniel Bernoulli



Daniel Bernoulli ([Groningue 9 février 1700](#) - [Bâle 17 mars 1782](#)) est un [médecin](#), [physicien](#) et [mathématicien suisse](#). C'est le fils de [Jean Bernoulli](#) et le neveu de [Jacques Bernoulli](#).

II-1.-Biographie, travaux.

Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Ami de [Leonhard Euler](#), il travaille avec lui dans plusieurs domaines des [mathématiques](#) et de la [physique](#) (il partagea avec lui dix fois le prix annuel de l'[Académie des sciences](#) de [Paris](#)), qu'il s'en fit une sorte de revenu. Les différents problèmes qu'il tente de résoudre (théorie de l'[élasticité](#), mécanisme des [marées](#)) le conduisent à s'intéresser et développer des outils mathématiques tels que les [équations différentielles](#) ou les [séries](#). Il collabore également avec [Jean le Rond d'Alembert](#) dans l'étude des cordes vibrantes. Il fut le premier à utiliser un symbole (A.S.) pour désigner la [fonction arc sinus](#).

Il passe quelques années à [Saint-Pétersbourg](#) comme professeur de [mathématiques](#) mais l'essentiel de sa carrière se déroule à l'université de [Bâle](#) où il enseigne successivement l'[astronomie](#), la [médecine](#) et la [philosophie](#). Il fut comme son père, membre des Académies de Paris, de [Berlin](#), de [Londres](#) et de Saint-Pétersbourg.

Il publie en [1738](#)

*son ouvrage *Hydrodynamica* ([Strasbourg](#), [1738](#), in-4) dans lequel il expose le théorème fondamental de la [mécanique des fluides](#) qui porte son nom : le [théorème de Bernoulli](#).

*et aussi un essai de « Théorie sur la mesure du risque »¹, dans lequel il énonce le [Paradoxe de Saint-Pétersbourg](#) - né de discussions entre lui et son frère [Nicolas](#) - considéré aujourd'hui par certains économistes de la finance comme fondateur des bases de la théorie [économique](#) et financière de l'[aversion au risque](#), la [prime de risque](#) et l'[utilité](#), bien que ne traitant pas directement de ces questions¹.

[II-2.-Publications.](#)

**Hydrodynamica, suivie de Viribus et Motibus Fluidorum commentarii. Opus Academicum...* [Strasbourg](#) Dulsecker, [1738](#). Dans son Hydrodynamique, il montre l'importance du principe de la conservation de l'énergie, et expose les premiers éléments de la théorie cinétique des gaz. Les molécules gazeuses, en état d'agitation d'autant plus vive que la pression est plus élevée, heurtent les parois du récipient qui les contient; la pression est le résultat de cette multitude de chocs (Source : Daumas, *Histoire de la Science*, p. 903). On y trouve aussi.

TABLES DES MATIERES

DEDICACE	1
REMERCIEMENT	2
SOMMAIRE	3
NOMENCLATURE	5
LISTE DES FIGURES	7
ABREVIATIONS	9
INTRODUCTION	10
PREMIERE PARTIE : Les différentes formes d'équations de la dynamique des fluides parfaits	11
Chapitre-I. EQUATIONS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DE FLUIDE PARFAIT	12
I-1.-Equation d'Euler.....	12
I-2.-Autres formes des équations d'Euler.....	13
I-3.-Autres équations de la dynamique de fluide parfait.....	16
I-3-1.-L'équation de continuité.....	16
I-3-2.-L'équation caractéristique de fluide.....	16
I-3-3.-L'équation complémentaire.....	16
I-4.-Conditions aux limites.....	17
I-4-1.-Parois fixe.....	17
I-4-2.-Parois mobile.....	18
I-4-3.-Démonstration.....	18
I-4-4.-Surface libre.....	20
I-4-5.-Surface de continuité.....	20
I-5.-Equation intrinsèque.....	20
I-6.-Cas particulier.....	24
Chapitre-II.- RELATION DE BERNOULLI	25
II-1.-Etablissement de l'équation de Bernoulli.....	26
II-2.-Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli.....	27
II-3.-Formules d'application pratique.....	32
II-3-1.-Cas des gaz.....	32
II-3-2.-Cas des liquides.....	32

II-4.-Ecoulement à énergie constante.....	33
II-5.-Généralisation de la formule de Bernoulli.....	36
II-5-1.-Cas d'un fluide traversant une machine hydraulique.....	36
II-5-2.-Cas des mouvements en rotation constante autour d'un axe fixe.....	37
II-5-3.-Cas des fluides réels.....	39
II-5-4.-Cas du mouvement non permanent.....	39
II-5-5.-Généralisation.....	40
II-5-6.-Formule de Bernoulli généralisée.....	41
Chapitre-III.-THEOREME DE QUANTITE DES MOUVEMENTS.....	42
III-1.-Théorème d'Euler.....	43
III-2.-Enonce pratique du théorème d'Euler.....	46
DEUXIEME PARTIE: Application de la formule de Bernoulli.....	47
Chapitre-IV.-APPLICATION DU THEOREME DE BERNOULLI.....	48
IV-1.-Formule de Torricelli.....	48
IV-1-1.-Cas d'un liquide.....	49
IV-1-2.-Cas d'un gaz.....	50
IV-2.-Calcul du débit d'un orifice: coefficient de contraction.....	52
IV-2-1.-Orifice à mince parois.....	52
IV-2-2.-Orifice quelconque.....	53
IV-2-3.-Orifice large rectangulaire.....	54
IV-2-4.-Etude général des jets.....	56
IV-3.-Ecoulement réel par un orifice.....	58
IV-3-1.-Coefficient de vitesse et de débit.....	58
IV-3-2.-Rendement d'un orifice.....	59
IV-3-3.-Temps de vidage d'un récipient.....	59
IV-4.-Pression dans une conduite. Tube piézométrique.....	61
IV-5.-Pression en un point d'arrêt.....	64
IV-5-1.-Cas des liquides.....	66
IV-5-2.-Cas des gaz.....	66
IV-6.-Tube de Pitot.....	66
IV-7.-Phénomène de venturi.....	68
IV-7-1.-Tube venturi.....	68
IV-7-2.-Diffuseur de turbine.....	70
IV-8.-Application du théorème de Bernoulli généralisé (Théorème de Cotton-Fortier.....	72

IV-8-1.-Cas d'un convergent.....	74
IV-8-2.-Cas d'un divergent.....	75
Chapitre-V.-QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION DE LA FORMULE DE BERNOULLI.....	77
V-1.-Relation entre la pression atmosphérique et la pression à l'intérieure d'un verre ou d'un tube contenant de fluide.....	77
V-2.-Cas de robinet.....	78
*Effet Magnus.....	77
V-3.-Tuyau de section variable.....	80
*Effet venturi.....	79
V-4.-Expérience sur un tube de caoutchouc.....	82
V-5.-Le jet d'air.....	82
CONCLUSION.....	83
BIBLIOGRAPHIE.....	84
ANNEXES.....	85
*Annexe-I.-BARRAGE.....	85
I-1.-Histoire.....	86
I-2.-Etudes hydrauliques.....	86
I-3.-Vies de barrage.....	90
I-3-1.-Catastrophe.....	91
I-3-2.-Séismes.....	92
I-4.-Conséquences environnementales.....	92
I-4-1.-Impacts négatifs.....	93
I-4-2.-Impacts positifs.....	94
*Annexe-II.-HISTOIRE DEDANIEL Bernoulli.....	95
II-1.-Biographies, travaux.....	96
II-2.-Publications.....	97
TABLES DES MATIERES.....	98

CURRICULUM VITAE

A-ETAT CIVIL

Nom : DAMA
Prénoms : Rajoelison Alexandre
Date et lieu de naissance : 21 Août 1981 à Mahatsinjo – Moroteza - Vondrozo
Nationalité : Malgache
Situation de famille : Célibataire
Adresse actuelle : CUR Andrainjato Lot E -107 Fianarantsoa- 301
Adresse de parents : Andranodaro - Vondrozo



B-ETUDES ET DIPLÔMES OBTENUS

1986-1988 : EPP Karianga
1989-1991 : EPP Marovato
1992-1994 : EPP Vondrozo
1994 : CEPE à l'EPP de Vondrozo
1995-1999 : CEG Vondrozo
1999 : BEPC au CEG de Vondrozo
2000-2002 : Au Lycée de Vondrozo
2003-2004 : Amboanio Lycée de Farafangana
2004 : Baccalauréat série D au Lycée de Amboanio de Farafangana
2005-2010 : A l'Ecole Normale Supérieure « E.N.S » de l'Université de Fianarantsoa
2010 : Fin d'études à l'E.N.S

B-FORMATION PROFESSIONNELLE

2003 : Formation «Speaking, Writing, Listening» de la langue Anglaise à Farafangana
2010 : Formation de la guide touristique à Farafangana

C-LANGUES

Malagasy : parlée, écrite ; Française : parlée, écrite ; Anglaise : parlée, écrite

D-ACTIVITE SOCIALE

2005-2006 : Membre et conseiller de l'Association des Etudiants Natifs de Vondrozo

Vondrozo « A.E.N.V » et délégué de classe deuxième année de l'E.N.S

2007 : Membre et vice-président de l'A.E.N.V

2008 : Président de l'A.E.N.V

2009 : Membre et responsable sociale de l'association des étudiants du grands Sud-est

Federal

F-ACTIVITES SPORTIVES

Foot-ball;

Basket-ball;

Volley-ball;

Hand-ball.

G-LOISIRS

Musique ;

Jeux ;

Film