



Discrétisation des modèles sigma invariants conformes sur des supersphères et superespaces projectifs

Constantin Candu

► To cite this version:

Constantin Candu. Discrétisation des modèles sigma invariants conformes sur des supersphères et superespaces projectifs. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. tel-00494973

HAL Id: tel-00494973

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494973>

Submitted on 24 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par
Constantin CANDU

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE — PARIS 6

dans la spécialité de
PHYSIQUE THÉORIQUE

de l'École Doctorale de Physique de la Région Parisienne
ED107

Sujet de la thèse :

DISCRÉTISATION DES MODÈLES SIGMA INVARIANTS CONFORMES SUR DES SUPERSPHÈRES ET SUPERESPACES PROJECTIFS

soutenue le 31 octobre 2008

devant le jury composé de :

M. Hubert SALEUR	IPhT, Saclay	(Directeur de thèse)
M. Volker SCHOMERUS	DESY Theory Group, Hamburg	(Rapporteur)
M. Martin ZIRNBAUER	Institut für Theoretische Physik, Köln	(Rapporteur)
M. Denis BERNARD	LPT, ENS	(Examineur)
M. Jean-Bernard ZUBER	LPTHE	(Examineur)
M. Jesper JACOBSEN	LPT, ENS	(Invité)

À ma mère, à mon père et à ma sœur ...

REMERCIEMENTS

JE voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à Hubert Saleur pour avoir été un directeur de thèse patient et très attentionné.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Jesper Jacobsen, qui a été mon co-directeur de thèse informel, pour sa disponibilité à répondre à mes questions à tout moment.

Pendant mon travail de recherche pour cette thèse j'ai eu le plaisir de rencontrer Paul Martin, Nick Read, Volker Schomerus, Martin Zirnbauer, Thomas Quella, Sylvain Ribault et de correspondre avec Jérôme Germoni. Je les remercie pour les discussions et les correspondances intéressantes et utiles que nous avons eues.

Je remercie l'Institut de Physique Théorique, CEA/Saclay pour m'avoir accueilli pendant mes trois ans de thèse. Je tiens à noter que l'atmosphère profondément scientifique qui règne sur le centre à beaucoup stimulé mon travail de recherche.

Un grand merci à tous les thésards de l'IPhT, et plus particulièrement à l'ancien thésard de mes directeurs de recherche Yacine Ikhlef et à leur présent thésard Jérôme Dubail, pour des discussions intéressantes et utiles, mais aussi Michael Bon, Pierre Hosteins, Guillaume Beuf et Clément Gombaudo pour des discussions moins professionnelles, mais pas moins utiles ou intéressantes.

Enfin, infiniment merci à ma famille pour m'avoir soutenu et, surtout, à ma sœur, qui connaît bien la vie d'étranger, pour avoir partagé avec moi son élan de réussite.

Saclay, le 11 mars 2009.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	vii
PRÉFACE	1
1 NOTIONS MATHÉMATIQUES	7
1.1 SUPERALGÈBRES DE LIE	9
1.1.1 Rappel sur les algèbres de Lie	9
1.1.2 Théorème de Weyl	11
1.1.3 Superalgèbres de Lie	12
1.1.4 Superalgèbres de Lie classiques basiques	14
1.1.5 Superalgèbre enveloppante	17
1.1.6 Systèmes de racines	17
1.1.7 Systèmes de racines simples	19
1.1.8 Modules de plus haut poids	21
1.1.9 Blocs des superalgèbres de Lie	24
1.1.10 Classes de modules indécomposables relevantes pour les application physiques	25
1.1.11 Modules projectifs, injectifs, standards, co-standards et basculants	29
1.2 SUPERGROUPES DE LIE	32
1.2.1 Supergroupes de matrices	32
1.2.2 Homotopie des supergroupes de Lie	34
2 MODÈLES SIGMA CONFORMES	37
2.1 PROBLÉMATIQUE DE LA SUPERSYMMÉTRIE GLOBALE	39
2.1.1 Unitarité	39
2.1.2 Théorie conforme des champs logarithmique	40
2.2 MODÈLES SIGMA GÉNÉRIQUES	45
2.2.1 Présentation des modèles sigma	45
2.2.2 Effets quantiques	51
2.2.3 Déformations conformes quantiques des modèles sigma	60
2.3 MODÈLES SIGMA AVEC LIGNE CRITIQUE	65
2.3.1 Modèles sigma quantiques conformes	65
2.3.2 Stratégies possibles	75
CONCLUSION	79
3 CHAÎNES QUANTIQUES AVEC SYMÉTRIE $OSP(2S+2 2S)$	81
3.1 GÉOMÉTRIE DE LA SUPERSPHÈRE	83
3.2 PROPRIÉTÉS DU MODÈLE DISCRET	86

3.2.1	Emboîtement des spectres	86
3.2.2	Champs chiraux	88
3.3	MODÈLE DISCRET	89
3.3.1	Algèbre de Brauer	90
3.3.2	Gaz de boucles sur le réseau diagonal	95
3.3.3	Chaîne ouverte	97
3.4	SYMÉTRIES DE LA CHAÎNE OUVERTE $OSp(4 2)$	98
3.5	CONSÉQUENCES SUR LA THÉORIE CONFORME AVEC BORD	99
	CONCLUSION	104
4	CHAÎNES QUANTIQUES AVEC SYMÉTRIE $GL(N N)$	105
4.1	MODÈLES SIGMA SUR LES SUPERESPACES PROJECTIFS	107
4.2	MODÈLE DISCRET	108
4.2.1	Algèbre de Brauer avec paroi	109
4.2.2	Modèle de boucles et chaînes quantiques	111
4.2.3	Les fermions symplectiques	113
4.3	EXPOSANTS DU MODÈLE DE BOUCLES	118
	CONCLUSION	125
	CONCLUSION GÉNÉRALE	127
	A ANNEXES	131
	BIBLIOGRAPHIE	209

LISTE DES FIGURES

3.1	Représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$	94
3.2	Exemple de configuration du modèle à six-vertex sur un réseau diagonal 6×4 avec bords spatiaux réfléchissants à gauche et à droite et direction temporelle périodique verticale. Les hauteurs sur le réseau dual correspondent à la discrétisation du boson compact.	95
3.3	Gaz de boucle denses qui s'interectent sur un réseau diagonal.	96
3.4	Sur l'axe horizontal sont indiquées les représentations irréductibles $G(\lambda_{k,l})$ de $OSp(4 2)$, sur l'axe vertical — les représentations irréductibles $B_L(\lambda_{k,l})$ de $B_L(2)$. Les flèches verticales représentent des homomorphismes nilpotents entres les modules de $OSp(4 2)$, réalisés par l'action de $B_L(2)$. Les flèches horizontales représentent des homomorphismes nilpotents entre les modules de $B_L(2)$, réalisés par l'action de $OSp(4 2)$	100

4.1	Représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{m,n}(Q)$. La ligne verticale entre les $2m$ vertex à gauche et les $2n$ vertex à droite représente la paroi.	111
4.2	Un modèle de boucles dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre $B_{5,4}(0)$. La paroi de $B_{5,4}(0)$ est représentée par une ligne pointillée verticale.	112
4.3	Élimination de la paroi dans un diagramme de $B_{3,3}(0)$.	112
4.4	Les vertex homogènes d'interaction de la matrice des transfert locale sur le réseau triangulaire. La direction de transfert est verticale.	112
4.5	Numérotation modulo 4 des arêtes du réseau triangulaire.	113
4.6	Exemple de diagramme réduit dans $B_{4,4}^{2,2}$.	119
4.7	Les exposants à 4, 6 et 8 pattes pour des conditions de bord périodiques.	120
4.8	Rapport des exposants à $2k$ -pattes pour des conditions de bord périodiques.	121
4.9	Les exposants à 4, 6 et 8 pattes dans des conditions de bord ouvertes.	123
4.10	Rapport des exposants à $2k$ -pattes pour des conditions de bord ouvertes.	124
4.11	Convergence de la charge centrale dans des conditions de bord périodiques.	125

PRÉFACE, INTRODUCTION...

MOTIVATION

Physique statistique

L'exploitation systématique de l'invariance conforme des théories des champs en deux dimensions [6] a produit des méthodes de calcul extrêmement puissantes pour obtenir exactement les propriétés des modèles de mécanique statistique à leur point critique et à grande distance (infrarouge). Les exemples classiques sont les systèmes ferromagnétiques multicritiques[23], les problèmes de percolation [40], les polymères, et les marches hamiltoniennes [5, 4, 44, 43] : dans tous ces cas, les spectres d'exposants critiques et de nombreuses fonctions de corrélation sont maintenant connues exactement. Plus récemment, la relation entre l'invariance conforme et la théorie des processus d'évolution stochastique de Loewner (SLE) [45, 78] a fourni un point de vue différent et très riche sur ces questions, et ouvert la porte à la preuve rigoureuse de nombreux résultats considérés exacts mais non démontrés par les physiciens.

Dans tous les modèles que nous avons mentionnés, le passage à la description des propriétés infra-rouges par une théorie conforme est, si on peut le dire, systématique : i) on trouve une reformulation du modèle statistique par un modèle de boucles qui ne s'intersectent pas ; ii) on interprète les boucles comme des lignes de niveau dans un modèle de hauteurs ; iii) le dernier est emporté par le flot du groupe de renormalisation vers un gaz de Coulomb [74]. L'approche par SLE fait aussi jouer aux boucles sans intersections un rôle essentiel - elles sont alors interprétées comme des interfaces entre différents domaines.

Il est certainement tentant de changer légèrement la perspective, et d'étudier les modèles de boucles indépendamment des modèles "classiques" qui les ont motivés. Dans la plupart des cas, on se rend compte que les boucles cachent des symétries. La raison simple de ce phénomène est que ces boucles, au lieu d'être interprétées de façon duale comme des parois (dans un modèle de hauteur, par exemple) peuvent aussi être considérées comme des trajectoires de "particules" transportant un indice vivant dans une certaine représentation d'un certain groupe. En fait, les modèles de boucles possèdent typiquement des symétries continues de groupes de Lie [5, 61], de groupes quantiques [52], et même des symétries continues qui contiennent les (super)algèbres de Lie en tant que sous-algèbres. En [63], ces dernières ont été appelées des algèbres de symétrie étendues ou, techniquement, elles se présentent comme le commutant des algèbres de Temperley-Lieb sur certaines chaînes quantiques. On s'attend naturellement que cette symétrie continue soit présente dans la théorie conforme qui décrit les propriétés infra-rouges. Pour l'instant, les seules de théories

conformes avec symétrie continue relativement bien comprise sont les modèles sigma de Wess-Zumino-Witten. Une question encore non résolue est de caractériser les autres classes possibles [61], on y reviendra dans cette thèse.

En revenant aux modèles de boucles, la relation avec les symétries continues fait naturellement réaliser que la contrainte de non intersection est très spécifique, et impose en fait une extension considérable de la symétrie de (super)groupe (quantique) naturellement présente [63]. Génériquement, on devrait introduire dans ces modèles des **intersections**. Bien sur, cette simple modification rend immédiatement impossible la description en termes de modèles de hauteur ou d'interfaces. En fait, les premières études sur le sujet [42] ont montré que, pour des symétries arbitraires, ou bien les intersections étaient irrelevantes, ou bien elles changeaient profondément la classe d'universalité, la nouvelle classe étant de type phase de Goldstone et, donc, peu intéressante, car les exposants des opérateurs à k -pattes s'annulent tous. Il y a néanmoins, comme nous allons le voir, des exceptions à cette règle un peu décevante. Il s'agit

- ★ du modèle de boucles avec fugacité 2 et vertex à 4 pattes, qui, nous le verrons, est relié au modèle sigma sur la supersphère $S^{2S+1|2S} \simeq \text{OSp}(2S+2|2S)/\text{OSp}(2S+1|2S)$
- ★ du modèle de boucles avec fugacité 0 et vertex à 6 pattes, qui, nous le verrons, est relié au modèle sigma sur le superspace projectif $\mathbb{C}P^{N-1|N} \simeq \text{U}(N|N)/\text{U}(N-1|N) \times \text{U}(1)$.

Théorie conforme des champs

D'un point de vue assez différent, un des problèmes les plus importants en théorie conforme des champs moderne est la quantification des cordes se propageant sur des fonds qui définissent une correspondance AdS/CFT [41]. La propagation d'une corde bosonique dans le fond $\mathcal{M}$ peut être reformulée à partir d'un modèle sigma avec superspace cible $\mathcal{M}$ [56]. La théorie conforme qui décrit, par exemple, la quantification de la corde supersymétrique sur le fond $AdS_5 \times S^5$ [59], est un modèle sigma avec espace cible homogène $\mathcal{M} = \text{PSU}(2,2|4)/\text{SO}(1,4) \times \text{SO}(5)$, qui a comme sous-espace de base $AdS_5 \times S^5$, et une action métrique standard. Le modèle sigma est conforme au niveau quantique et possède une symétrie continue globale, dans ce cas, $\text{PSU}(2,2|4)$. Le point crucial, qui rend le modèle difficile, est l'absence d'une symétrie de Kac-Moody. Jusqu'à présent, cette symétrie avait été absolument cruciale pour résoudre les théories conformes avec symétrie continue. Par ailleurs, la présence d'une symétrie globale de supergroupe rend la théorie conforme non seulement non-unitaire, mais aussi logarithmique ! La situation est telle que, jusqu'à présent, le modèle sigma n'est simplement pas résolu.

Dans ce contexte, de nouvelles méthodes d'analyse — analytiques ou même numériques — sont, comme nous allons le voir, les bienvenues.

SUJET DE LA THÈSE

Le contexte de cette thèse est l'étude des modèles sigma avec symétrie continue et invariants conformes en deux dimensions, qui sortent du

cadre traditionnel des modèles gaussiens ou des modèles sigma de Wess-Zumino-Witten.

Les modèles sigma sur des superspaces symétriques, définis par une action métrique standard, exhibent de telles propriétés [1]. Ils ont de plus une particularité qui, sur le fond des modèles sigma invariants conforme les plus étudiés, est assez intrigante, à savoir l'existence d'une ligne de points critiques sur laquelle la charge centrale ne varie pas alors que les exposants changent. Les seules théories conformes connues à présent qui sont relativement bien comprises et qui possèdent cette propriété sont les modèles gaussiens. L'intérêt et la difficulté de ces modèles sigma vient encore une fois du fait qu'ils ne possèdent pas d'algèbre de courant, au moins génériquement sur la ligne critique. On montrera néanmoins (ce qui était déjà suspecté [9]), qu'ils possèdent une algèbre chirale qui est beaucoup plus grande que l'algèbre de Virasoro et qui garde ses caractéristiques sur toute la ligne critique, comme l'algèbre de Virasoro elle-même.

Pour explorer ces nouveaux aspects d'une théorie conforme, nous nous sommes restreints à l'étude des modèles sigma les plus simples satisfaisant les critères suivants : i) l'espace cible doit être un superspace symétrique de rang un et compact ; ii) la théorie continue doit admettre une discrétisation dont l'algèbre des matrices de transfert [19] est relativement bien comprise aussi bien du point de vue de la théorie des représentations que de la possibilité de faire des calculs numériques.

Les modèles sigma sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$, dont la sous-variété de base est la sphère S^{2S+1} , sont conformes et possèdent une symétrie continue globale de supergroupe de Lie $OSp(2S + 2|2S)$. On va montrer qu'ils admettent une discrétisation par un gaz de boucles, dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre de Brauer. Cette algèbre a été étudiée depuis longtemps [58] et des résultats importants sur sa théorie des représentations sont connus [20, 17]. De plus, une expérience importante de calculs numériques sur les modèles statistiques, dont les objets sont des boucles, a été déjà accumulée [42].

Une autre série de modèles sigma conformes, qui satisfont les critères de simplicité mentionnés, ont comme espace cible les superspaces projectifs $CP^{N-1|N}$, dont l'espace de base est CP^{N-1} . Ces modèles possèdent une symétrie globale $GL(N|N)$ et on va montrer qu'ils admettent une discrétisation par un gaz de boucles, dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre de Brauer avec paroi.

L'étude des modèles sigma sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$, par le modèle de boucles associé, est l'objectif principal de cette thèse. Une étude moins élaborée pour le modèle sigma sur les superspaces projectifs $CP^{N-1|N}$, par le modèle de boucles associé, est aussi effectuée.

La stratégie principale qu'on a adoptée dans la recherche des résultats exacts sur ces modèles sigma est l'étude détaillée des symétries de la théorie continue, d'un côté, et du modèle discret, de l'autre. Cette analyse permet de faire le pont entre le comportement du modèle discret et la théorie continue.

STRUCTURE DE LA THÈSE

Cette thèse suppose que le lecteur a des connaissances de base sur les théories conformes et les modèles sigma, connaissances que nous ne rappelons pas.

Le premier chapitre introduit les notions mathématiques utilisées au cours de l'exposé. Pour mieux expliquer la différence entre les théories des représentations des algèbres et superalgèbres de Lie on introduit les concepts de base — produit tensoriel, (super)algèbre enveloppante, Casimir, dualité, forme invariante, solvabilité, simplicité, espace des poids, systèmes de racines, systèmes de racines simples, représentation, modules de plus haut poids, caractères centraux, blocs — par contraste. Une discussion importante de ce chapitre porte sur les représentations indécomposables des superalgèbres de Lie qui sont relevantes dans les applications physiques aux modèles de boucles et aux modèles sigma sur des superspaces symétriques. On conclut par la définition des supergroupes de Lie $GL(M|N)$ et $OSp(R|2S)$ et on fait quelques remarques sur leur topologie.

Le deuxième chapitre commence par une brève discussion sur le rôle de l'unitarité dans les modèles de physique théorique et continue par une courte introduction à certaines théories non-unitaires appelées théories conformes logarithmiques. Dans la section suivante on introduit les modèles sigma avec action métrique standard. Les différences essentielles entre les modèles sigma avec symétrie de groupe de Lie, d'un côté, et symétrie de supergroupe de Lie, de l'autre, sont discutées. Ensuite on analyse les déformations des modèles sigma par des termes de Wess-Zumino ou des termes topologiques. Après cette partie introductive, on classe dans la dernière section les modèles sigma métriques avec ligne de points critiques sur des superspaces symétriques. On conclut par une revue des approches possibles pour résoudre exactement ces modèles sigma avec ligne critique, qui sont en interaction hautement non-linéaire.

Le troisième chapitre commence par une introduction rapide à la géométrie de la supersphère. Ensuite on utilise des méthodes perturbatives et non-perturbatives pour révéler quelques propriétés nécessaires d'un modèle discret dans la même classe d'universalité que le modèle sigma. On continue en proposant un modèle de boucles et en vérifiant que toutes les contraintes dérivées précédemment sont satisfaites. Après on étudie en grands détails l'algèbre de symétrie complète du modèle discret associé au modèle sigma sur la supersphère $S^{3|2}$. Dans la dernière section on utilise cette analyse pour élucider les dimensions conformes des opérateurs de bord de la théorie conforme du modèle sigma $S^{3|2}$ et on propose une généralisation à tous les modèles sigma $S^{2S+1|2S}$. Une observation importante sur la forme conjecturée de la fonction de partition est sa coïncidence avec la fonction de partition du modèle de Gross-Neveu $OSp(4|2)$ dans la limite de couplage faible.

Le quatrième chapitre commence par une définition des superspaces projectifs $CP^{N-1|N}$ et des modèles sigma correspondants. On continue par l'introduction d'un modèle de boucles et d'une chaîne quantique qui possèdent toutes les symétries des modèles sigma superprojectifs $CP^{N-1|N}$. Dans la dernière section on présente des calculs numériques qui soutiennent l'hypothèse que le modèle de boucles et la chaîne quantique

qu'on considère sont des discrétisations des modèles sigma superprojectifs $\mathbb{CP}^{N-1|N}$.

Les deux derniers chapitres forment le cœur de la thèse. Dans chacun de ces chapitres on découvre une discrétisation de modèles sigma invariants conformes sur un réseau Σ par un modèle statistique dont les objets sont des boucles qui couvrent entièrement Σ . À chaque vertex du réseau Σ les boucles soit s'(auto)évitent soit s'intersectent. L'algèbre des matrices de transfert des modèles discrets admet naturellement une interprétation en tant qu'algèbre des invariants du supergroupe de symétrie $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ ou $\mathrm{GL}(N|N)$. La fugacité des boucles contractibles est fixé à 2 dans le cas de l'algèbre de Brauer et à 0 dans le cas de l'algèbre de Brauer avec paroi. La fugacité des boucles non-contractibles détermine les conditions de bord du modèle discret et correspond dans la limite continue aux conditions de bord du modèle sigma.

Des arguments de théorie des représentations combinés à la solution exacte de certains "sous-secteurs" et des calculs numériques montrent que le poids des intersections correspond, dans la limite continue, au couplage exactement marginal du modèle sigma qui paramètre la ligne critique. L'analyse détaillée des symétries discrètes - en particulier la structure des blocs de l'algèbre de Brauer - combinée à des calculs perturbatifs donne lieu à une proposition pour, selon les cas, le spectre partiel ou complet de la théorie conforme. Une dualité exacte est également conjecturée dans les cas des modèles sur la supersphère.

Cette thèse a fait l'objet des publications suivantes :

- Constantin Candu and Hubert Saleur, *A lattice approach to the conformal $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ supercoset sigma model Part I : Algebraic structures in the spin chain. The Brauer algebra.*, accepté par Nucl. Phys. B, numéro de référence : NPB-D-08-00181R1, preprint [arXiv:0801.0430](#),
- Constantin Candu and Hubert Saleur, *A lattice approach to the conformal $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ supercoset sigma model. Part II : The boundary spectrum.*, accepté par Nucl. Phys. B, DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2008.08.015>
- Constantin Candu, Jesper Lykke Jacobsen and Hubert Saleur, *New universality classes of dense polymers and conformal sigma models*, preprint [arXiv:toappearsoon](#)

qui ont été attachées dans l'annexe.

NOTIONS MATHÉMATIQUES

1

SOMMAIRE

1.1	SUPERALGÈBRES DE LIE	9
1.1.1	Rappel sur les algèbres de Lie	9
1.1.2	Théorème de Weyl	11
1.1.3	Superalgèbres de Lie	12
1.1.4	Superalgèbres de Lie classiques basiques	14
1.1.5	Superalgèbre enveloppante	17
1.1.6	Systèmes de racines	17
1.1.7	Systèmes de racines simples	19
1.1.8	Modules de plus haut poids	21
1.1.9	Blocs des superalgèbres de Lie	24
1.1.10	Classes de modules indécomposables relevantes pour les application physiques	25
1.1.11	Modules projectifs, injectifs, standards, co-standards et basculants	29
1.2	SUPERGROUPES DE LIE	32
1.2.1	Supergroupes de matrices	32
1.2.2	Homotopie des supergroupes de Lie	34

APRÈS un bref rappel sur la théorie des algèbres de Lie simples et, notamment, du théorème de Weyl, qui est central à la théorie des représentations de dimension finie, j'introduis les notions générales sur les superalgèbres de Lie. La première section de ce chapitre est conclue par une discussion des représentations indécomposables qui sont utiles dans les applications aux chaînes quantiques et aux modèles sigma sur des superspaces symétriques. Dans la deuxième section je définis les supergroupes GL et OSp.

1.1 SUPERALGÈBRES DE LIE

1.1.1 Rappel sur les algèbres de Lie

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On va noter par $\text{End } V$ l'ensemble des transformations linéaires de V . On va appeler l'algèbre obtenue en munissant $\text{End } V$ d'une opération binaire, qui est le commutateur :

$$[x, y] := xy - yx, \quad x, y \in \text{End } V$$

de deux *endomorphismes* de V par $\mathfrak{gl}(V)$.

Une *représentation* linéaire d'une algèbre de Lie L est une application $\mathbb{C}$ -linéaire :

$$\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

ou linéaire tout simplement, telle que :

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)],$$

pour $x, y \in L$ quelconques. L'espace vectoriel V est appelé *l'espace de base* de la représentation ϕ . Souvent, lorsqu'on veut mettre en évidence l'espace de base de la représentation ϕ , on dit que V – un espace vectoriel muni d'une action linéaire de L – est un *module* de L .

La représentation ϕ est appelé *fidèle* si $\phi(x) = 0$ implique $x = 0$. Selon le **théorème de Ado**, toute algèbre de Lie a une représentation fidèle de dimension finie. Ainsi, toute algèbre de Lie peut être considéré comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$.

On peut associer à ϕ une représentation appelé *représentation conjuguée* ϕ^* par la formule :

$$\phi^*(x) = -\phi^t(x),$$

où $\phi^t(x)$ signifie la transposée de la matrice $\phi(x)$. L'enchaînement des raisonnements qui suit prouve que ϕ^* est, en effet, une représentation de l'algèbre de Lie L :

$$[\phi^*(x), \phi^*(y)] = [\phi(x)^t, \phi(y)^t] = \phi^t(x)\phi^t(y) - \phi^t(y)\phi^t(x) = -\phi^t([x, y]) = \phi^*([x, y]).$$

Dans le langage des modules, l'espace de base de la représentation ϕ^* est l'espace vectoriel dual V^* munie d'une action de L donné par :

$$(x \cdot \omega)(v) := -\omega(x \cdot v), \quad v \in V, \quad \omega \in V^*,$$

où ω est une forme et v un vecteur.

Plus généralement, si

$$\text{Hom}(V, W) \ni f : V \rightarrow W$$

dénote l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel V dans W , alors l'action de L définie par

$$(x \cdot f)(v) := x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$$

lui donne une structure de module de L . Cette action apparaît de façon naturelle à la suite de l'isomorphisme $\phi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow W \otimes V^*$, donné par

$$\phi(w \otimes \omega)(v) = w\omega(v)$$

et l'action traditionnelle de L sur le produit tensoriel $M \otimes N$ de deux modules :

$$x \cdot (m \otimes n) = (x \cdot m) \otimes n + m \otimes (x \cdot n).$$

Une algèbre de Lie s'appelle *simple* si elle n'a pas d'idéaux propres. Une algèbre de Lie s'appelle *nilpotente* si la série d'idéaux

$$L^0 = L, L^1 = [L^0, L], L^2 = [L^1, L], \dots$$

est finie. Selon le **théorème d'Engel**, pour toute algèbre de Lie *nilpotente* L qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ il existe une base de V dans laquelle les matrices de L sont strictement triangulaires.

Une algèbre de Lie s'appelle *résoluble* si la série d'idéaux

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \dots$$

a un nombre fini de termes non triviaux. Selon le **théorème de Lie**, pour toute algèbre de Lie résoluble L qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ il existe une base de V dans laquelle les matrices de L sont triangulaires. L'algèbre de Lie L est résoluble si et seulement si $[L, L]$ est nilpotente.

Une algèbre de Lie L a un idéal résoluble maximal unique. Cet idéal est appelé le *radical* $\text{rad } L$ de L .

Une algèbre de Lie s'appelle *semi-simple* si son radical est zéro. Pour une algèbre semi-simple $[L, L] = L$.

Le *centre* $Z(L)$ d'une algèbre de Lie L est composé des éléments dont le crochet avec tout autre élément de L est zéro.

Une algèbre de Lie L s'appelle *réductive* si $\text{rad}(L) = Z(L)$. Par exemple la superalgèbre $\mathfrak{gl}(n)$ est réductive.

Le *radical* $\text{rad } \beta$ d'une forme bilinéaire $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ sur un espace vectoriel V est défini par

$$\text{rad } \beta = \{x \in V \mid \beta(x, V) = 0\}.$$

Une forme non dégénérée a un radical zéro. Soit $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation d'une algèbre de Lie. On peut définir une forme bilinéaire sur L

$$\beta_V(x, y) = \text{tr}_V \phi(x)\phi(y)$$

qui possède la propriété de symétrie

$$\beta_V(x, y) = \beta_V(y, x)$$

et d'invariance

$$\beta_V(x[y, z]) = \beta_V([x, y]z)$$

L'importance de la propriété d'invariance réside dans le fait que le $\text{rad } \beta$ est un idéal de L . Le **théorème de Cartan** prouve essentiellement que $\text{rad } \beta$ est un idéal résoluble si ϕ est une représentation fidèle. Pour une algèbre de Lie simple, qui n'a pas d'idéaux propres, toute représentation, outre la représentation triviale, est fidèle.

Soit $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation d'une algèbre de Lie L simple. Soit x_i une base de L et y_i sa base duale par rapport à β_V , qui n'est pas dégénérée. Alors l'endomorphisme

$$C(\phi) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i)$$

commute avec L . Selon le lemme de Schur, $C(\phi)$ est proportionnel à l'identité. Le coefficient de proportionnalité $c(\phi)$ se déduit de

$$\mathrm{tr}_V C(\phi) = c(\phi) \dim V = \sum_i \mathrm{tr} \phi(x_i) \phi(y_i) = \sum_i \beta_V(x_i, y_i) = \dim L. \quad (1.1)$$

1.1.2 Théorème de Weyl

On est maintenant préparé à prouver le **théorème de Weyl**.

Théorème de Weyl Soit $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie de l'algèbre semi-simple L . Alors ϕ est entièrement réductible.

La preuve détaillée du théorème peut être trouvée dans le livre à la fois très compact et complet de J. E. Humphreys [36]. Je vais présenter plus bas l'idée générale seulement pour mettre en évidence ce qui empêche sa généralisation.

On commence par un *cas spécial*. Soit W un sous-module simple, c'est-à-dire irréductible, de V tel que le module quotient V/W est de dimension 1. Soit $C(\phi)$ le Casimir de L dans la représentation ϕ . L'algèbre de Lie L étant semi-simple, c'est-à-dire $[L, L] = L$, toute représentation de dimension 1 est triviale. Ainsi, $C(\phi)$ agit de façon triviale sur V/W . Selon le lemme de Schur, $C(\phi)$ restreint à W est proportionnel à l'identité. La constante de proportionnalité est strictement positive à cause de l'éq. (1.1). Comme le Casimir $C(\phi)$ commute avec L , il fournit un endomorphisme du module V . Le noyau $\mathrm{Ker} C(\phi) \simeq V/W$ et son image $\mathrm{Im} C(\phi) \simeq W$ sont deux sous-modules de V dont l'intersection est zéro. On vient, donc, de démontrer la décomposition $V \simeq W \oplus V/W$.

Avec ce résultat, est ensuite possible de démontrer, par induction sur la dimension de W , que V est toujours une somme directe quel que soit le sous-module W tel que $\dim V/W = 1$, c'est-à-dire pas nécessairement irréductible.

On considère maintenant le *cas général* d'un module M qui contient un sous-module N . Soit V le sous-espace de $\mathrm{Hom}(M, N)$ composé des applications linéaires f , telles que $f|_N \propto 1_N$. Soit W le sous-espace de $\mathrm{Hom}(M, N)$ composé des applications linéaires f , telles que $f|_M = 0$. Comme l'action de L envoie V en W , le dernier est un sous-module de V tel que $\dim V/W = 1$. Selon le cas spécial qu'on a traité plus haut, V/W est un sous-module trivial de V , ce qui veut dire qu'il existe une application $f|_N = 1_N$ telle que $0 = (x \cdot f)(m) = x \cdot f(m) - f(x \cdot m)$. Ainsi, on vient de prouver que $M \simeq N \oplus \mathrm{Ker} f$.

Le point crucial dans la preuve c'est que la représentation triviale d'une algèbre de Lie semi-simple est la seule représentation irréductible à avoir un Casimir nul. Comme on va voir dans la suite, la généralisation de la semi-simplicité pour les superalgèbres de Lie assure que toutes les représentations unidimensionnelles restent triviales, donc ont toujours un Casimir nul, mais, par contre, il est tout à fait possible que le Casimir d'une représentation non-triviale soit zéro.

1.1.3 Superalgèbres de Lie

Une algèbre A sur $\mathbb{C}$ est une *superalgèbre* s'il existe une décomposition $A \simeq A_0 \oplus A_1$ telle que $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$, où les indices de gradation $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour un élément $a \in A_\alpha$ on dit que a est *homogène* de degré $|a| := \alpha$. Pour la suite, on suppose implicitement que a est homogène dans toute expression qui fait intervenir le degré $|a|$ de façon explicite.

Exemple 1.1 Pour un espace vectoriel gradé $V \simeq V_0 \oplus V_1$ sur $\mathbb{C}$ l'algèbre $\text{End } V$ devient une superalgèbre si on la munit de la gradation suivante :

$$(\text{End } V)_\alpha = \{a \in \text{End } V \mid a \cdot V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}\}. \quad (1.2)$$

Une superalgèbre $L = L_0 \oplus L_1$ est une *superalgèbre de Lie* si elle est munie d'un crochet $\mathbb{C}$ -bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ qui est *super-anti-commutatif* :

$$[a, b] = (-1)^{|a||b|} [b, a] \quad (1.3)$$

et qui satisfait l'identité de super-Jacobi :

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - (-1)^{|a||b|} [b, [a, c]]. \quad (1.4)$$

Exemple 1.2 La superalgèbre $\text{End } V$ devient une superalgèbre de Lie notée par $\mathfrak{gl}(V)$ si on la munit du crochet

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba.$$

Pour vérifier l'identité de super-Jacobi l'identité suivante est très utile

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{|a||b|} b[a, c].$$

Une façon équivalente de voir les superalgèbres de Lie est la suivante. Une superalgèbre de Lie est un triplet (L_0, L_1, ϕ) , où L_0 est une algèbre de Lie, L_1 est un module de L_0 et ϕ est homomorphisme $\phi : S^2 L_1 \rightarrow L_0$ qui satisfait :

$$\phi(a, b)c + \phi(b, c)a + \phi(c, a)b = 0, \quad a, b, c \in L_1.$$

Ici $S^n V$ dénote la n -ème puissance symétrique d'un module V .

Une *représentation* d'une superalgèbre de Lie $L \simeq L_0 \oplus L_1$ est une application linéaire :

$$\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

où $V \simeq V_0 \oplus V_1$, telle que $\phi(L_\alpha) \subset \mathfrak{gl}(V)_\alpha$ et

$$\phi([x, y]) = \phi(x)\phi(y) - (-1)^{|x||y|} \phi(y)\phi(x)$$

pour $x, y \in L$ homogènes quelconques. Ainsi défini l'espace de base $V \simeq V_0 \oplus V_1$ de la représentation ϕ est un module gradé de L . On peut associer à ϕ une représentation conjuguée ϕ^* dont l'espace de base est le module dual à V , c'est à dire l'espace vectoriel $V^* \simeq (V_0)^* \oplus (V_1)^*$ munie de l'action suivante de L

$$(x \cdot \omega)(v) = -(-1)^{|x||\omega|} \omega(x \cdot v), \quad v \in V, \quad \omega \in V^*, \quad (1.5)$$

où x et ω sont homogènes.

Pour $M \simeq M_0 \oplus M_1$ et $N \simeq N_0 \oplus N_1$ deux modules de la superalgèbre $L \simeq L_0 \oplus L_1$, on peut construire le module $M \otimes N$ appelé produit tensoriel de M et N , dont la gradation est donné par :

$$\begin{aligned}(M \otimes N)_0 &\simeq M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1 \\ (M \otimes N)_1 &\simeq M_1 \otimes N_0 \oplus M_0 \otimes N_1,\end{aligned}$$

et l'action de L est définie comme :

$$x \cdot (m \otimes n) = (x \cdot m) \otimes n + (-1)^{|x||m|} m \otimes (x \cdot n). \quad (1.6)$$

Ainsi, à la suite de l'isomorphisme des espaces vectoriels

$$\text{Hom}(M, N) \simeq N \otimes M^*, \quad (1.7)$$

l'action de L définie par

$$(x \cdot f)(m) := x \cdot f(m) - (-1)^{|f|} f(x \cdot m)$$

munit $\text{Hom}(M, N)$ d'une structure de module de L , dont la gradation est

$$f(M_i) \subset N_{i+|f|}.$$

On appelle un *homomorphisme de modules* d'une superalgèbre de Lie L , une application linéaire $\text{Hom}_L(M, N) \ni \phi : M_\alpha \rightarrow N_{\alpha+|\phi|}$ d'un module $M \simeq M_0 \oplus M_1$ à un module $N \simeq N_0 \oplus N_1$ qui commute avec l'action de L .

Le **théorème d'Ado** est applicable aux superalgèbres aussi, c'est-à-dire que pour toute superalgèbre de Lie $L \simeq L_0 \oplus L_1$ il existe un espace vectoriel $V \simeq V_0 \oplus V_1$ tel que L peut être vu comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$. On sous entend que $L_\alpha \subset \mathfrak{gl}(V)_\alpha$.

La définition de *simplicité*, *nilpotence*, *résolubilité* et *semi-simplicité* se fait de la même façon que pour les algèbres de Lie en sec. 1.1.1.

Le **théorème d'Engel** reste vrai pour les superalgèbres de Lie, c'est-à-dire que pour toute superalgèbre de Lie nilpotente $L \simeq L_0 \oplus L_1$ vue comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ il existe une base homogène de $V \simeq V_0 \oplus V_1$ dans laquelle les matrices de L sont strictement triangulaires.

Le **théorème de Lie** n'est plus valide, c'est-à-dire que ce n'est plus possible de représenter les éléments de toute superalgèbre résoluble par des matrices triangulaires. Ceci est le cas de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(1|1)$.

Une forme bilinéaire β sur une superalgèbre de Lie $L \simeq L_0 \oplus L_1$ est appelé *consistante* si

$$\beta(L_0, L_1) = 0$$

supersymétrique si

$$\beta(x, y) = (-1)^{|x||y|} \beta(y, x)$$

et *invariante* si

$$\beta(x[y, z]) = \beta([x, y]z).$$

L'étude des algèbres de Lie commence naturellement par l'étude de ses idéaux. Avec les mêmes arguments que pour les algèbres de Lie, l'étude des idéaux des superalgèbres de Lie peut être ramenée à l'étude des radicaux des formes bilinéaires sur L qui possèdent les propriétés de consistance, supersymétrie et invariance. Comme le **critère de Cartan** n'est plus

valide pour les superalgèbres, les radicaux de ces formes ne sont pas nécessairement solubles.

Une superalgèbre de Lie $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ s'appelle *classique basique* si L est simple, $L_{\bar{0}}$ est réductive et L admet une forme consistante, symétrique et invariante. Pour une superalgèbre de Lie simple toute forme consistante, symétrique et invariante est soit non-dégénérée soit s'annule identiquement. De plus, deux formes consistantes, symétriques et invariantes sont proportionnelles.

Soit $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie classique basique dont β est une forme consistante, symétrique et invariante. Soit $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation irréductible de L . La représentation ϕ est nécessairement fidèle si $\dim V > 1$, car dans le cas contraire $\text{Ker } \phi$ est un idéal propre de L . Soit x_i une base homogène de L et y_i sa base duale par rapport à la forme β . La consistance de β implique $|i| := |x_i| = |y_i|$. Alors on peut définir un élément de $\text{End } V$ qui commute avec L appelé le Casimir de la représentation ϕ :

$$C(\phi) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i) = \sum_i (-1)^{|i|} \phi(y_i)\phi(x_i).$$

On appelle *sous-algèbre de Borel* d'une superalgèbre de Lie $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ une sous-algèbre résoluble maximale. Kac a prouvé dans [46] qu'une superalgèbre de Lie $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ est résoluble si et seulement si $L_{\bar{0}}$ est résoluble. Ainsi, toute sous-algèbre de Borel d'une superalgèbre $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ contient nécessairement la sous-algèbre de Borel de $L_{\bar{0}}$.

1.1.4 Superalgèbres de Lie classiques basiques

On va noter la superalgèbre $\mathfrak{gl}(V)$ également par $\mathfrak{gl}(m|n)$ ou $m = \dim V_{\bar{0}}$ et $n = \dim V_{\bar{1}}$. Pour définir une forme consistante, supersymétrique et invariante sur $\mathfrak{gl}(V)$ introduisons la représentation matricielle suivante pour $a \in \text{End } V$:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où $\alpha \in \text{End } V_{\bar{0}}$, $\delta \in \text{End } V_{\bar{1}}$, $\beta \in g_{-1} = \text{Hom}(V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}})$ et, finalement, $\gamma \in g_1 = \text{Hom}(V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}})$. Notons que les matrices a avec $\gamma = \beta = 0$ sont paires, tandis que celles avec $\alpha = \delta = 0$ sont impaires. En utilisant les isomorphismes canoniques $\text{Hom}(V, W) \simeq W \otimes V^*$ on obtient la décomposition suivante de la partie impaire

$$\mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}} \simeq V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}}^* \oplus V_{\bar{1}} \otimes V_{\bar{0}}^* = g_{-1} \oplus g_1 \quad (1.9)$$

en tant que modules de $\mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}} \simeq g_0 = \mathfrak{gl}(V_{\bar{0}}) \oplus \mathfrak{gl}(V_{\bar{1}})$.

Si les indices de gradation de $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ sont vus comme appartenant au $\mathbb{Z}$ et non pas au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $\mathfrak{gl}(V)$ acquiert, par la même eq. (1.2), une structure gradée sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{gl}(V) \simeq g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1. \quad (1.10)$$

Soit $e_1, \dots, e_m$ une base de $V_{\bar{0}}$ et $e_{m+1}, \dots, e_{m+n}$ une base de $V_{\bar{1}}$. Si E_i^j est la base canonique de $\text{End } V$

$$E_i^j e_k = \delta_k^j e_i,$$

alors le crochet de la superalgèbre $\mathfrak{gl}(V)$ a la forme explicite

$$[E_i^j, E_k^l] = \delta_k^j E_i^l - (-1)^{(|i|+|j|)(|k|+|l|)} \delta_i^l E_k^j.$$

À l'aide de l'homomorphisme (des modules) *supertrace* $\text{str} : \text{End } V \rightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$\text{str } a = \text{tr } \alpha - \text{tr } \delta$$

on peut construire une forme consistante, supersymétrique et invariante donnée par

$$\beta_V(x, y) = \text{str } xy, \quad x, y \in \mathfrak{gl}(V). \quad (1.11)$$

L'invariance et la supersymétrie de β_V peuvent être déduites seulement du fait que str est un homomorphisme de modules.

L'ensemble des éléments de $\mathfrak{gl}(V)$ avec *supertrace* zéro constitue un idéal noté par $\mathfrak{sl}(V)$ ou $\mathfrak{sl}(m|n)$. Après un calcul direct dans la base canonique de $\text{End } V$ il est possible de démontrer que les seuls idéaux de $\mathfrak{gl}(V)$ sont $\mathfrak{sl}(V)$ et les endomorphismes proportionnels à l'identité id_V ou id_{m+n} . Il y a deux cas possibles.

Si $m \neq n$ alors $\mathfrak{sl}(V) \cap \text{id}_V = \emptyset$. À nouveau, après un calcul direct dans la base canonique de $\text{End } V$, on montre que $\mathfrak{sl}(V)$ ne peut pas avoir d'idéaux et, donc, est simple. De plus, comme

$$\mathfrak{sl}(V)_{\bar{0}} \simeq \mathfrak{sl}(V_{\bar{0}}) + \mathfrak{sl}(V_{\bar{1}}) + \mathfrak{u}(1)$$

est réductive, alors $\mathfrak{sl}(m|n)$ est classique basique, car la forme invariante dans l'éq. (1.11) est non dégénérée lors de sa restriction à $\mathfrak{sl}(V)$. On peut prendre comme générateur de $\mathfrak{u}(1)$, par exemple, l'élément

$$n \sum_{i=1}^m E_{ii} + m \sum_{j=m+1}^{m+n} E_{jj}$$

de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{sl}(m|n)$.

Si $m = n$ alors id_{2n} constitue le seul idéal de $\mathfrak{sl}(n|n)$ et, donc, la superalgèbre quotient $\mathfrak{psl}(n|n) = \mathfrak{sl}(n|n) / \mathbb{C} \text{id}_{2n}$ est simple.

La partie paire de $\mathfrak{psl}(n|n)$ étant semi-simple

$$\mathfrak{psl}(n|n)_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n),$$

donc, réductive et la forme invariante de l'éq. (1.11) non-dégénérée modulo $\mathbb{C} \text{id}_{2n}$, la superalgèbre $\mathfrak{psl}(n|n)$ est basique classique. Notons que même si on a utilisé l'espace vectoriel V pour construire la forme invariante de $\mathfrak{psl}(n|n)$, V est exactement le noyau $\mathbb{C} \text{id}_V \cdot V \simeq V$ de la projection canonique du quotient $\pi : \mathfrak{sl}(n|n) \rightarrow \mathfrak{psl}(n|n)$, ce qui veut dire que V est équivalent au module trivial de $\mathfrak{psl}(n|n)$.

Notons que les superalgèbres $\mathfrak{sl}(m|n)$ avec $m \neq n$ et $\mathfrak{psl}(n|n)$ ont la même décomposition de la partie paire en tant que module de la partie impaire que celle dans l'éq. (1.9) et on peut leur attribuer la même structure gradée sur $\mathbb{Z}$ que dans l'éq. (1.10).

Soit $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire, consistante, supersymétrique et non-dégénérée sur $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ et $\text{pr} : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ la projection associée

$$v \otimes w \xrightarrow{\text{pr}} (v, w).$$

La superalgèbre $\mathfrak{osp}(V)$ ou $\mathfrak{osp}(m|2n)$ est définie comme la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ qui commute avec pr . Autrement dit, $\mathfrak{osp}(V)$ laisse invariant le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$:

$$\mathfrak{osp}(m|2n)_\alpha = \{a \in \mathfrak{gl}(V)_\alpha \mid (a \cdot v, w) + (-1)^{|a||v|}(v, a \cdot w) = 0, \quad v, w \in V\}.$$

La partie paire de la superalgèbre est

$$\mathfrak{osp}(m|2n)_0 \simeq \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{sp}(2n)$$

tandis que la partie impaire a la structure suivante

$$\mathfrak{osp}(m|2n)_1 \simeq V_0 \otimes V_1$$

en tant que module de $\mathfrak{osp}(m|2n)_0$. Notons que V_0 et V_1 sont auto-duaux en tant que modules de $\mathfrak{so}(m)$ et, respectivement, $\mathfrak{sp}(2n)$. Munie de la forme consistante, symétrique, invariante et non-dégénérée de $\mathfrak{gl}(V)$ la superalgèbre $\mathfrak{osp}(m|2n)$ devient classique basique.

Pour donner la forme explicite du crochet on introduit la matrice

$$G_{ij} = (e_i, e_j) \quad (1.12)$$

où e_i est une base homogène de V . Soit e^i la base de V^* duale à e_j en V^* . Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ réalise un isomorphisme entre le module V et le module dual V^* donné explicitement par

$$e^j = G^{ji} e_i, \quad (1.13)$$

où $G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i$. Notons l'ordre inverse des indices dans la formule

$$G^{ij} = (e^j, e^i).$$

La représentation matricielle de $-x$ agissant sur V^* dans l'éq. (1.5) exprimée en terme des éléments de matrice de x agissant sur V s'appelle la *super-transposée* de x :

$$(x^{st})_j^i = (-1)^{|i|(|i|+|j|)} x_j^i.$$

Le module V étant auto-dual, il doit exister une transformation d'équivalence entre $x \in \mathfrak{osp}(V)$ et x^{st} . En utilisant l'isomorphisme entre V et V^* de l'éq. (1.13) on obtient

$$(x^{st})_j^i = G_{lj} x_k^l G^{ik}$$

On peut prendre en tant que générateurs de $\mathfrak{osp}(V)$ les matrices dont l'action sur les bases de V et de V^* sont

$$\begin{aligned} T_i^j e_k &= \delta_k^j e_i - (-1)^{(|i|+|j|)|k|} G_{ki} e^j \\ T_i^j e^l &= G^{lj} e_i - (-1)^{(|i|+|j|)|l|} \delta_i^l e^j. \end{aligned} \quad (1.14)$$

En utilisant l'inclusion $\mathfrak{osp}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$, l'isomorphisme $\mathfrak{gl}(V) \simeq V \otimes V$ des modules de $\mathfrak{osp}(V)$ et la déf. (1.6) du module produit tensoriel, on obtient à partir des éqs. (1.14) la forme explicite du crochet

$$\begin{aligned} [T_i^j, T_k^l] &= \delta_k^j T_i^l - (-1)^{(|i|+|j|)|k|} G_{ki} G^{jp} T_p^l \\ &\quad + (-1)^{(|i|+|j|)|k|} G^{lj} G_{ip} T_k^p - (-1)^{(|i|+|j|)(|k|+|l|)} \delta_i^l T_k^j. \end{aligned}$$

1.1.5 Superalgèbre enveloppante

Soit $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un espace vectoriel gradé. Soit $V^{\otimes}$ la somme directe des puissances tensorielles de V :

$$V^{\otimes} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k},$$

où $V^{\otimes 0} := \mathbb{C}$. Doté de la gradation

$$|v_1 \otimes \cdots \otimes v_k| := |v_1| + \cdots + |v_k|,$$

et de la multiplication $V^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes l} = V^{\otimes(k+l)}$, l'espace vectoriel $V^{\otimes}$ acquiert la structure d'une superalgèbre, appelé *superalgèbre tensorielle* $T(V)$ sur V .

Soit $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie et $\mathcal{I}$ l'idéal généré en $T(L)$ par les éléments de la forme :

$$[a, b] - a \otimes b + (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

La superalgèbre $U(L) := T(L)/\mathcal{I}$ est appelée la *superalgèbre enveloppante* de L . L'action de L sur le module puissance tensorielle $L^{\otimes k}$ induit une action de L dans la superalgèbre enveloppante $U(L)$ qui est, donc, un module (infini) de L .

Le théorème suivant est indispensable à la théorie des représentations des superalgèbres de Lie.

Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt Soit $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie, $b_1, \dots, b_B$ une base de $L_{\bar{0}}$ et $f_1, \dots, f_F$ une base de $L_{\bar{1}}$. Alors les éléments de la forme :

$$b_1^{i_1} \dots b_B^{i_B} f_1^{j_1} \dots f_F^{j_F}, \quad i_1, \dots, i_B \in \mathbb{N}, \quad j_1, \dots, j_F \in \{0, 1\}$$

sont une base de $U(L)$.

La preuve peut être trouvée dans [69].

1.1.6 Systèmes de racines

Soit $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie classique basique. On appelle *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{h}_L$ toute sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $L_{\bar{0}}$. Les racines de l'algèbre de Lie $L_{\bar{0}}$ sont appelées des *racines paires* de L . Les poids de $L_{\bar{1}}$ en tant que module de l'algèbre de Lie $L_{\bar{0}}$ sont appelés des *racines impaires*. Les sous-systèmes des racines paires et impaires sont notés par $\Delta_{\bar{0}}$ et $\Delta_{\bar{1}}$, respectivement.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathfrak{gl}(m|n)}$ est engendrée par les matrices diagonales. Pour décrire le système de racines de la superalgèbre $\mathfrak{gl}(V)$ on introduit une base dans $\mathfrak{h}_{\mathfrak{gl}(m|n)}^*$ donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon_i(E_j^j) &= \delta_i^j, & 1 \leq i \leq m \\ \delta_i(E_j^j) &= \delta_{m+i}^j, & 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

où $j \leq m+n$. Le système de racines de $\mathfrak{gl}(m|n)$ est alors

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\epsilon_i - \epsilon_j\} \cup \{\delta_k - \delta_l\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm \epsilon_i \mp \delta_k\}$$

où $i, j \leq m$ et $k, l \leq n$.

Le système des racines de $\mathfrak{sl}(m|n)$ s'obtient par la restriction de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{gl}(m|n)}$ à $\mathfrak{sl}(m|n)$. Cette restriction induit une équivalence des poids de $\mathfrak{sl}(m|n)$ modulo la super-trace :

$$\text{str} = \sum_i \delta_i - \sum_k \epsilon_k$$

ou brièvement $\mathfrak{h}_{\mathfrak{sl}(m|n)}^* = \mathfrak{h}_{\mathfrak{gl}(m|n)}^* / \mathbb{C} \text{str}$.

Les poids de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{psl}(n|n)}^*$ sont des éléments de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{sl}(n|n)}^*$ qui s'annulent lorsqu'on les évalue sur l'identité id_{2n} , c'est-à-dire

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{psl}(n|n)}^* = \left\{ \sum_i a_i \delta_i + \sum_k b_k \epsilon_k + \mathbb{C} \text{str} \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{sl}(n|n)}^* \mid \sum_i a_i + \sum_k b_k = 0 \right\}. \quad (1.15)$$

Cette contrainte implique que les poids δ_i et ϵ_k ne sont plus linéairement indépendants dans $\mathfrak{h}_{\mathfrak{psl}(n|n)}^*$.

Pour décrire le système de racines de $\mathfrak{osp}(m|2n)$ on choisit la forme invariante de l'éq. (1.12) comme

$$(\cdot, \cdot) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \text{id}_r & 0 & 0 \\ \text{id}_r & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\text{id}_n \\ 0 & 0 & \text{id}_n & 0 \end{array} \right),$$

si $m = 2r$ est paire et

$$(\cdot, \cdot) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & \text{id}_r & 0 & 0 & 0 \\ \text{id}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{id}_n \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_n & 0 \end{array} \right),$$

si $m = 2r + 1$ est impaire. Alors les matrices

$$\begin{aligned} h^i &= E_i^i - E_{i+r}^{i+r}, & i &\leq r \\ h^i &= E_i^i - E_{i+n}^{i+n}, & m < i \leq m+n \end{aligned}$$

sont une base de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{osp}(m|2n)}$.

Si on prend comme base de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{osp}(m|2n)}^*$ les formes linéaires :

$$\begin{aligned} \epsilon_k(E_j^j) &= \delta_k^j - \delta_{k+r}^j, & k &\leq r, \\ \delta_i(E_j^j) &= \delta_{i+m}^j - \delta_{i+m+n}^j, & i &\leq n \end{aligned}$$

alors les racines paires de $\mathfrak{osp}(2r|2n)$ sont

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i \neq j} \cup \{\pm \delta_k \pm \delta_l\},$$

les racines impaires de $\mathfrak{osp}(2r|2n)$ sont

$$\Delta_{\bar{1}} = \{\pm \epsilon_i \pm \delta_k\}$$

les racines paires de $\mathfrak{osp}(2r+1|2n)$ sont

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm \epsilon_i\}_{i \neq j} \cup \{\pm \delta_k \pm \delta_l\},$$

et, finalement, les racines impaires de $\mathfrak{osp}(2r+1|2n)$ sont

$$\Delta_{\bar{1}} = \{\pm\epsilon_i \pm \delta_k, \pm\delta_k\}.$$

Pour toutes les superalgèbres qu'on a considérées plus haut, la forme invariante β de l'éq. (1.11) restreinte à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ reste non dégénérée. Elle réalise un isomorphisme $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ donné par

$$\phi(h)(h') = \beta(h, h').$$

Ainsi, la forme invariante de l'éq. (1.11) restreinte à $\mathfrak{h}$ induit en $\mathfrak{h}^*$ un produit scalaire symétrique non dégénéré, qu'on dénote par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour $\mathfrak{gl}(m|n)$ et par $2\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour $\mathfrak{osp}(m|2n)$, qui le munit d'une structure d'espace pseudo-euclidien. Les éléments de matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base ϵ_i, δ_k de $\mathfrak{h}^*$ ont la même forme :

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \delta_k, \delta_l \rangle = -\delta_{kl}, \quad \langle \epsilon_i, \delta_k \rangle = 0,$$

pour $\mathfrak{gl}(m|n)$ et $\mathfrak{osp}(m|2n)$.

Le groupe de Weyl $\mathcal{W}$ du système de racines Δ est par définition le groupe de Weyl de $\Delta_{\bar{0}}$. Le vecteur de Weyl ρ est défini comme

$$\rho = \rho_0 - \rho_1,$$

où

$$2\rho_{\bar{i}} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\bar{i}}} \alpha \quad (1.16)$$

pour $\bar{i} \in \mathbb{Z}_2$. L'action modifiée du groupe de Weyl est alors par définition

$$w \circ \lambda = w \cdot (\lambda + \rho) - \rho. \quad (1.17)$$

1.1.7 Systèmes de racines simples

Soit $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ la représentation fondamentale d'une superalgèbre de Lie classique basique $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ de la sec. 1.1.4. Le choix d'une base totalement ordonnée dans $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ induit un ordre total dans la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{gl}(V)$ et, donc, dans l'espace de poids Γ de $\mathfrak{gl}(V)$. Lorsque L est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ alors son espace de poids X est un quotient de Γ . Ceci est le cas de toutes les superalgèbres de Lie classiques basiques sauf pour la série $\mathfrak{psl}(n|n)$.

À ce stade, il faut mentionner que au lieu de traiter la série $\mathfrak{psl}(n|n)$ séparément du reste des superalgèbres de Lie classiques basiques, à cause de la façon très particulière (1.15) dont les poids de $\mathfrak{psl}(n|n)$ sont définis à partir des poids ϵ_i, δ_j de $\mathfrak{gl}(n|n)$, il est plus pratique de comprendre la théorie des représentations de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n|n)$ par les mêmes moyens que la théorie des représentations des superalgèbres $\mathfrak{sl}(m|n)$, $n \neq m$ et $\mathfrak{osp}(m|2n)$, et, ensuite, de construire les représentations de $\mathfrak{psl}(n|n)$ par induction. La procédure d'induction est très simple, car si V est une représentation de $\mathfrak{sl}(n|n)$, alors elle consiste, essentiellement, à calculer la valeur propre e du générateur central id_{2n} de $\mathfrak{sl}(n|n)$ sur V . Si $e \neq 0$ alors la représentation induite

$$\text{ind}_{\mathfrak{sl}(n|n)}^{\mathfrak{psl}(n|n)} V = V / \text{id}_{2n} V$$

est la représentation triviale et si $e = 0$ alors le noyau $\text{id}_{2n} V = eV$ de l'induction est zéro.

Reprenons notre discussion sur les espaces de poids Γ et X . L'ordre total dans Γ induit un ordre total dans X . La notion de positivité d'un poids de L est bien définie, c'est-à-dire, tout poids est soit positif soit négatif. Une base sur $\mathbb{N}$ du système de racines positives de L est appelée *système de racines simples*. Le choix du système de racines simples, dans le système de racines positives, n'est pas unique, contrairement à la situation analogue des algèbres de Lie semi-simples. Voyons plus en détail d'où provient cette différence de comportement.

On peut renverser la logique. Fixons une base Δ_0 sur $\mathbb{Z}$ du système de racines complet Δ de L . Ce choix définit un ordre total sur X qu'on va noter $<_{\Delta_0}$. De plus, différents choix de base donnent des définitions différentes pour l'ordre total et, donc, pour le système de racines positives. Soit $s \in \text{GL}(V)$ une transformation linéaire qui permute les vecteurs de base de V . Les transformations de similarité sLs^{-1} ne sont des automorphismes de L que si s préserve la gradation $L \simeq L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$. Ceci est le cas si et seulement si s est homogène et, donc, permute des vecteurs de base pairs avec des vecteurs de base pairs et des vecteurs de base impairs avec des vecteurs de base impairs. D'un côté l'automorphisme s change la définition de l'ordre total sur Γ et, par conséquent sur X aussi. De l'autre côté l'auto-morphisme s de L est représenté dans X par une réflexion de Weyl w_s . Par définition, une transformation de Weyl change le signe d'une racine et, donc, transforme nécessairement au moins une racine simple dans une racine négative. Par conséquence $w_s \cdot \Delta_0$ est un système de racines simples qui définit un nouvel ordre total $<_{w_s \cdot \Delta_0}$ sur X . Au cas où l'image $<_{\mathcal{W} \cdot \Delta_0}$ est l'ensemble de tous les ordres totaux possibles, alors il devient clair, vu l'injectivité de l'application $\Delta_0 \rightarrow <_{\Delta_0}$, que chaque ordre total $<$ et, donc, système de racines positives, détermine un seul système de racines simples $\Delta_0^<$. Autrement dit, si l'action du groupe de Weyl $\mathcal{W}$ sur les vecteurs de base de $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ est transitive alors un système de racines positives arbitraire détermine un seul système de racines simples. Comme, dans le cas général, $\mathcal{W}$ ne permute pas les vecteurs de base pairs avec les vecteurs de base impairs alors son action n'est pas transitive.

Comme pour les algèbres de Lie simples on peut représenter la classe d'équivalence des systèmes de racines simples $\mathcal{W} \cdot \Delta_0$ par des diagrammes de Dynkin [46]. Selon la discussion précédente, une superalgèbre de Lie classique basique aura nécessairement plusieurs diagrammes de Dynkin possibles.

Parmi les choix possibles de systèmes de racines simples Δ_0 d'un sous-système de racines positives d'une super-algèbre de Lie classique basique L il existe toujours un choix préférentiel où Δ_0 ne contient qu'une seule racine impaire. Ce système de racines simple est appelé système de racines simples distingué. En effet, on peut vérifier que ce choix est pour $\mathfrak{sl}(m|n)$, où $m \neq n$, donné par

$$\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m \quad (1.18)$$

avec l'ordre total

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \epsilon_m,$$

pour $\mathfrak{osp}(2r+1|2n)$ est donné par

$$\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{r-1} - \epsilon_r, \epsilon_r, \quad (1.19)$$

et pour $\mathfrak{osp}(2r|2n)$ — par

$$\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{r-1} - \epsilon_r, \epsilon_{r-1} + \epsilon_r, \quad (1.20)$$

avec l'ordre total dans les deux cas

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \epsilon_r.$$

1.1.8 Modules de plus haut poids

Soit $L \simeq L_0 \oplus L_1 \subset \mathfrak{gl}(V)$ une superalgèbre de Lie classique basique, où $V \simeq V_0 \oplus V_1$ est l'espace de base de la représentation fondamentale. Le choix d'une base totalement ordonnée de V induit une décomposition des éléments de la superalgèbre de Lie L dans une partie diagonale $\mathfrak{h}$ — la sous-algèbre de Cartan, une partie $\mathfrak{n}^+$ nilpotente triangulaire au dessus de la diagonale et une partie $\mathfrak{n}^-$ nilpotente triangulaire en dessous de la diagonale. Dans ces notations, les éléments de $\mathfrak{n}^+$ ont un poids positif par rapport à $\mathfrak{h}$, tandis que $\mathfrak{n}^-$ ont un poids négatif.

Par *abus de langage*, on va appeler la superalgèbre de Lie

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$$

une *sous-algèbre de Borel*. Notons que *ce n'est pas* la sous-algèbre résoluble maximale. Ceci peut être vu sur l'exemple de $\mathfrak{gl}(1|1)$, qui est entièrement résoluble. De la même façon que dans la théorie des représentations des algèbres de Lie simples, les représentations irréductibles de la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ sont toutes de dimension un. Soit $M \simeq \mathbb{C}v$ une telle représentation, où v est le seul vecteur de base de la représentation unidimensionnelle. Alors l'action de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ sur M

$$h \cdot v = \lambda(h)v, \quad h \in \mathfrak{h} \quad (1.21)$$

définit une forme $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ qui est appelée le poids de M ou, plutôt, le plus haut poids de M à cause de l'action triviale de $\mathfrak{n}^+$

$$n \cdot v = 0, \quad n \in \mathfrak{n}^+. \quad (1.22)$$

Si M est un module d'une superalgèbre de Lie L et $v \in M$ satisfait les eqs. (1.21, 1.22), alors v est appelé *vecteur maximal* de poids λ .

Pour un $\mathfrak{b}$ -module $M(\lambda)$ de plus haut poids λ on peut définir par induction un module de la superalgèbre L

$$Z(\lambda) = \mathcal{U}(L) \otimes_{\mathfrak{b}} M(\lambda), \quad (1.23)$$

appelé module de plus haut poids λ .

Les modules $Z(\lambda)$ sont infinis et n'admettent des quotients finis que pour des valeurs particulières du plus haut poids λ . Une propriété très générale des superalgèbres de Lie est que tout module indécomposable a un sous-module maximal unique. Le quotient du module de plus haut

poids $Z(\lambda)$ par le sous-module maximal est, donc, une représentation irréductible $S(\lambda)$ avec plus haut poids λ . L'étude des sous-modules de plus haut poids de $Z(\lambda)$ revient à l'identification des vecteurs maximaux, où un vecteur maximal est, par définition, un élément de $Z(\lambda)$ sur lequel $\mathfrak{n}^+$ agit de façon triviale, c'est-à-dire comme dans l'éq. (1.22). Avant de passer à l'analyse de sous-modules des modules de plus haut poids des superalgèbres de Lie classiques basiques, il est particulièrement utile de se rappeler les faits suivants sur la théorie des représentations des algèbres de Lie simples.

Soit $\mathcal{Z}(L)$ le centre de l'algèbre de Lie enveloppante $U(L)$ d'une algèbre de Lie simple L et soit $Z(\lambda)$ un module de plus haut poids de L . L'action de $\mathcal{Z}(L)$ sur $Z(\lambda)$

$$z \cdot v = \chi_\lambda(z)v \quad (1.24)$$

définit une application $\chi_\lambda : \mathcal{Z}(L) \rightarrow \mathbb{C}$ appelée le caractère de $Z(\lambda)$. Le caractère χ_λ n'est pas uniquement déterminé par le poids λ . En effet, si $Z(\lambda)$ contient un vecteur maximal v_μ de poids μ , alors il engendre un sous-module $Z(\mu)$ et, par la déf. (1.24),

$$z \cdot v_\mu = \chi_\mu(z)v_\mu.$$

En même temps, selon la même déf. (1.24)

$$z \cdot v_\mu = \chi_\lambda(z)v_\mu, \quad v_\mu \in Z(\lambda)$$

ce qui nous amène à conclure que

$$Z(\mu) \subset Z(\lambda) \Rightarrow \chi_\lambda = \chi_\mu. \quad (1.25)$$

La caractérisation de la classe d'équivalence des poids qui définissent un seul caractère est connue sous le nom du théorème de Harish-Chandra [36]. Si deux poids λ et μ définissent un seul caractère $\chi_\lambda = \chi_\mu$, alors on va dire que les poids λ et μ sont équivalents et on va noter cette relation d'équivalence par $\lambda \simeq \mu$.

Théorème de Harish-Chandra Soit χ_λ le caractère défini par le poids λ , χ_μ le caractère défini par le poids μ et ρ le vecteur de Weyl. Alors $\chi_\lambda = \chi_\mu$, c'est-à-dire $\lambda \simeq \mu$, si et seulement si $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ se trouvent dans la même orbite du groupe de Weyl $\mathcal{W}$.

Ensuite, il est possible de montrer, par construction explicite d'un vecteur maximal, que si $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ se trouvent dans la même orbite de $\mathcal{W}$ et $\mu < \lambda$ alors $Z(\mu) \subset Z(\lambda)$. Cela donne l'implication inverse à (1.25) et, donc, on peut résumer les derniers résultats sous la forme

$$Z(\mu) \subset Z(\lambda) \Leftrightarrow \mu \simeq \lambda \Leftrightarrow \mathcal{W} \cdot (\mu + \rho) = \mathcal{W} \cdot (\lambda + \rho) \quad (1.26)$$

Les classes d'équivalence des poids, par rapport à la relation d'équivalence $\simeq$, s'appellent des *blocs*.

Le bloc est une notion très générale qui apparaît dans l'étude des représentations indécomposables de tous les types d'algèbres non-semi simples (dans notre cas cette algèbre est $U(L)$). Elle est définie, dans le cas général, comme la classe d'équivalence des représentations irréductibles qui

sont connectées, par paires, par des représentations indécomposables au sens suivant. Deux représentations irréductibles S et S' se trouvent dans le même bloc si et seulement si il existe une série de représentations indécomposables

$$I_0, I_1, \dots, I_n$$

telle que

$$S \cap I_0 \neq \emptyset, \quad I_{i-1} \cap I_i \neq \emptyset, \quad S' \cap I_n \neq \emptyset$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Pour établir l'équivalence de cette définition généralisée avec la définition précédente il suffit d'ordonner les poids d'une orbite du groupe de Weyl dans une série croissante $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ et pour chaque paire $\lambda_i < \lambda_j$ de prendre en tant que modules indécomposables I_i les modules de plus haut poids $Z(\lambda_i), Z(\lambda_{i+1}), \dots, Z(\lambda_j)$.

La notion de bloc n'est pas fréquemment rencontrée dans le cadre de la théorie de représentations finies des algèbres de Lie simples à cause des faits suivants. Comme on a vu de l'éq. (1.26), les poids μ de *tous* les vecteurs maximaux d'un module $Z(\lambda)$ de plus haut poids λ peuvent être obtenus par l'action modifiée du groupe de Weyl

$$w \circ \lambda = w \cdot (\lambda + \rho) - \rho.$$

Le point crucial à remarquer est que dans chaque orbite de l'action modifiée du groupe de Weyl il existe juste un seul poids dominant. Cette affirmation est connue aussi sous une autre forme — l'action modifiée du groupe de Weyl permute les chambres de Weyl. Cela veut dire que si on est intéressé par les représentations de dimension finie des algèbres de Lie simples, dont les plus hauts poids sont des poids dominants, alors chaque bloc ne contient qu'une seule représentation irréductible, ce qui est en accord avec le résultat général du théorème de Weyl 1.1.2. Comme on va voir dans la suite, pour les superalgèbres de Lie le théorème de Harish-Chandra n'est plus vrai. La possibilité qu'un bloc contienne plus qu'un poids dominant reste, donc, ouverte. Après ce rappel sur la théorie des représentations de plus haut poids des algèbres de Lie simples on revient au traitement des représentations des superalgèbres de Lie classiques basiques.

Pour les superalgèbres de Lie la situation est beaucoup plus compliquée. Tout d'abord, à partir du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ¹, de la sec. 1.1.5, la restriction d'un module de plus haut poids $Z(\lambda)$ à $L_{\bar{0}}$ admet un quotient de dimension finie si et seulement si λ est dominant par rapport au système de racines simples de $L_{\bar{0}}$ induit par l'ordre total du système de racines simples de L . Pour $\mathfrak{sl}(m|n)$ cela veut dire que les labels de Dynkin de λ , par rapport aux racines simples paires du système (1.18) de racines simples distinguées, sont des entiers, car le système induit des racines simples de $L_{\bar{0}}$ est un sous-ensemble du dernier. Dans le cas de $\mathfrak{osp}(m|2n)$, le système de racines simples de $L_{\bar{0}}$ induit du système (1.19, 1.20) distingué de racines simples de L contient une racine supplémentaire $2\delta_n$. Pour que $Z(\lambda)$ ait un quotient fini il faut que les labels de Dynkin de λ soient des entiers par rapport aux racines simples paires du système de racines simples distinguées et par rapport à $2\delta_n$ aussi.

¹Le carré dans $U(L)$ d'un générateur fermionique de L est zéro.

Après avoir identifié les modules de plus haut poids $Z(\lambda)$ qui admettent un quotient fini on se demande naturellement combien de quotients finis possibles il y a. Comme on va voir dans la sec. 1.1.9, il est en effet possible que le quotient fini ne soit pas uniquement déterminé. Il devient alors utile de distinguer entre deux types de poids. Un poids dominant d'une superalgèbre de Lie classique basique est appelé *typique* s'il est le seul poids dominant dans son bloc. Un poids dominant d'une superalgèbre de Lie classique basique est appelé *atypique* s'il n'est pas le seul poids dominant dans son bloc. L'identification des blocs des superalgèbres de Lie classiques basiques est le sujet de la section suivante. Cette section est utile pour évaluer correctement le degré de complexité que les représentations indécomposables peuvent atteindre.

1.1.9 Blocs des superalgèbres de Lie

On a introduit la définition de bloc d'une algèbre de Lie simple dans la sec. 1.1.8. Là on a parlé aussi de cette notion dans le cadre de la théorie des représentations des algèbres non-semi-simples génériques. De cette définition générale, deux poids μ et λ se trouvent dans le même bloc si et seulement si les caractères des représentations de plus haut poids $Z(\lambda)$ et $Z(\mu)$ coïncident $\chi_\lambda = \chi_\mu$. Cette condition établit une relation d'équivalence notée par $\lambda \simeq \mu$.

De la même façon que pour les algèbres de Lie on démontre que si λ et μ se trouvent dans la même orbite de l'action modifiée (1.17) du groupe de Weyl $\mathcal{W}$, alors $\lambda \simeq \mu$. Il se trouve que l'équivalence des poids $\lambda \simeq \mu$ est possible en dehors des orbites de $\mathcal{W}$. Dans [47] Kac a montré que si

$$\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0 \quad (1.27)$$

pour une racine impaire α de norme nulle

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$$

alors

$$\chi_\lambda = \chi_{\lambda + c\alpha}.$$

L'idée est la suivante. Soit v_λ le vecteur de plus haut poids du module de plus haut poids $Z(\lambda)$, β la seule racine impaire du système distingué de racines simples et $F_{\pm\beta}$ les générateurs de plus haut poids $\pm\beta$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Alors la condition que le descendant au niveau un

$$v_{\lambda-\beta} = F_{-\beta}v_\lambda$$

soit un vecteur maximal revient à demander que

$$F_\beta v_{\lambda-\beta} \propto H_\beta v_\lambda = \langle \lambda, \beta \rangle v_\lambda = 0,$$

ou

$$\langle \lambda, \beta \rangle = \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0.$$

Ensuite on utilise l'invariance des caractères χ_μ sur les orbites de Weyl et la transitivité de l'action du groupe de Weyl sur le sous-système de racines impaires pour arriver à la condition (1.27). La condition (1.27) est aussi appelée *condition d'atypie* pour le poids λ .

Les blocs des superalgèbres de Lie ont, donc, la structure suivante [54, 72]. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ l'ensemble maximal de racines paires de norme nulle linéairement indépendantes qui satisfont la conditions d'atypie (1.27), alors

$$\chi_\lambda = \chi_{\lambda + \mathbb{C}\alpha_1 + \dots \mathbb{C}\alpha_k}$$

et le bloc de λ est de la forme

$$[\lambda] = \mathcal{W} \circ (\lambda + \mathbb{C}\alpha_1 + \dots \mathbb{C}\alpha_k).$$

L'entier k est appelé le *degré d'atypie du bloc* du poids λ . Notons que si $k > 0$ alors le bloc $[\lambda]$ contient une infinité de poids dominants. On voit, donc, qu'un poids dominant est typique, c'est-à-dire est le seul poids dominant dans son bloc, si et seulement si il ne satisfait aucune condition d'atypie, ou si le degré d'atypie du bloc est $k = 0$.

Au final, il est utile de retenir un critère nécessaire pratique pour déterminer si deux poids se trouvent dans le même bloc — leur Casimir doit être le même.

1.1.10 Classes de modules indécomposables relevantes pour les applications physiques

On a vu dans la sec. 1.1.9 que les poids dominants se divisent en deux classes — typiques et atypiques. Comme les poids typiques sont les seuls dans leur bloc, le module de plus haut poids $Z(\lambda)$ admet un quotient irréductible fini unique $S(\lambda)$. Ils sont les analogues des représentations irréductibles des algèbres de Lie simples : i) le théorème de Harish-Chandra de la sec. 1.1.8 reste vrai pour les poids typiques ; ii) on peut calculer les caractères des représentations irréductibles correspondant aux poids typiques par une formule du même type que la formule de Weyl

$$\chi_\lambda = \text{tr}_{S(\lambda)} e^H = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{(w \cdot (\lambda + \rho)) (H)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{l(w)} e^{(w \cdot \rho) (H)}},$$

où $l(w)$ est le nombre de réflexions élémentaires par lesquelles un élément w du groupe de Weyl $\mathcal{W}$ peut être exprimé.² Ici, par réflexions élémentaires on comprend les réflexions qui correspondent aux racines du sous-système de racines simples paires induit par le système distingué de racines simples.

Le fait qu'on sache d'avance qu'un poids λ est typique permet de construire explicitement le quotient fini unique irréductible $S(\lambda)$ du module de plus haut poids $Z(\lambda)$. En effet, soit $\bar{\lambda}$ le plus haut poids de $Z(\lambda)$ par rapport au sous-système de racines simples paires induit par le système distingué de racines simples. Notons par $S_0(\bar{\lambda})$ la représentation irréductible de la sous-algèbre paire $L_{\bar{0}}$ de plus haut poids $\bar{\lambda}$. On peut la promouvoir de façon triviale à une représentation de $L_{\bar{0}} + \mathfrak{n}_1^+$. La représentation induite

$$S(\lambda) = \text{ind}_{L_{\bar{0}} + \mathfrak{n}_1^+}^L S_0(\bar{\lambda})$$

²Seulement le nombre *minimal* de réflexions élémentaires par lesquelles un élément arbitraire $w \in \mathcal{W}$ peut être exprimé est bien défini. Ce nombre s'appelle la longueur de w . Malgré cela, la parité $(-1)^{l(w)}$ est définie de façon non-ambiguë pour toute décomposition possible de w en produit de réflexions élémentaires.

est alors finie, selon le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt de la sec. 1.1.5, et, donc, irréductible car elle est un quotient de $Z(\lambda)$.

Les représentations irréductibles avec poids atypiques peuvent constituer des indécomposables. On est confronté au problème de classification des structures de représentations indécomposables possibles. Selon la discussion de la sec. 1.1.9, ce problème se résout, effectivement, par blocs. Il est, ainsi, utile de parler de la théorie des représentations d'un bloc. Le degré de complexité varie considérablement d'un bloc à l'autre selon le degré d'atypie du bloc. Germoni a montré en [26] que si le degré d'atypie du bloc est $k \geq 2$ alors ses représentations indécomposables ne peuvent pas être classifiées, c'est-à-dire identifiées par un nombre fini de paramètres, car la théorie des représentations du bloc est de type dit *sauvage*. Ce comportement est fortement décourageant à la première vue.

Néanmoins, l'expérience déjà acquise montre que dans les applications physiques on n'a pas nécessairement besoin de savoir classifier et construire toutes les représentations indécomposables possibles. Dans l'étude des chaînes quantiques du ch. 3 on est intéressé par les représentations indécomposables qui sont engendrées par les puissances tensorielles $V^{\otimes L}$ de la représentation fondamentale V de $\mathfrak{osp}(m|2n)$. Pour toute chaîne de longueur finie, les représentations engendrées peuvent être, évidemment, classifiées, c'est-à-dire identifiées à l'isomorphisme près par un nombre fini de paramètres. Il n'est pas du tout évident que ceci reste vrai dans la limite de longueur infinie. On va voir dans le ch. 3 que ceci est le cas pour la chaîne $V^{\otimes L}$ de $\mathfrak{osp}(4|2)$.

Un autre exemple vient des modèles sigma sur les superspaces symétriques $\mathcal{M} \simeq G/H$. Les représentations relevantes sont celles qui apparaissent dans la décomposition de l'espace fonctionnel $L_2(\mathcal{M})$. Pour les modèles sigma sur les espaces symétriques, le choix de l'espace $L_2(\mathcal{M})$ est partiellement justifié par l'unitarité de l'action quasi-régulière du groupe de Lie G . Tout de même, l'argument ultime est la nécessité de l'existence de la fonction à deux points pour tous les opérateurs du modèle sigma. Plus spécifiquement, l'action des modèles sigma s'annule pour des configurations constantes des champs 2.2.1. Cela veut dire que les modes zéro se factorisent dans la mesure de l'intégrale fonctionnelle. Pour que les opérateurs de la théorie de dimension classique zéro aient une fonction à deux points bien définie à l'ordre zéro dans la théorie des perturbations il est nécessaire qu'ils soient de carré intégrable sur des configurations constantes des champs, même si l'espace cible est non-compact. Les fonctions de l'espace $L_2(\mathcal{M})$ ne forment pas une algèbre, c'est-à-dire $L_2(\mathcal{M})$ n'est pas clos par rapport à la multiplication des fonctions. On aurait, donc, envie de dire que la classe de représentations pertinentes pour les modèles sigma n'est pas close par rapport au produit tensoriel. Ceci serait, pourtant, une conclusion précipitée.

Pour comprendre ce désaccord apparent, considérons pour l'instant l'espace symétrique principal chiral compact qui correspond à un groupe de Lie G . Soit $R(G)$ l'espace des fonctions composé des combinaisons linéaires *finies* des éléments de matrice des représentations unitaires finies de G . Cet espace possède une structure d'algèbre par rapport à la multiplication de fonctions. En effet, le produit des éléments de base de $R(G)$ s'interprète comme le produit tensoriel de deux représenta-

tions irréductibles et, donc, peut être décomposé dans une somme finie des éléments de $R(G)$. En fait, l'algèbre des fonctions $R(G)$ possède une structure plus riche d'algèbre de Hopf, dont la comultiplication $\Delta : R(G) \rightarrow R(G) \otimes R(G)$ est définie par

$$\Delta f = \sum_i a_i \otimes b_i,$$

où les fonctions $a_i, b_i \in R(G)$ sont définies de façon unique par l'action régulière du groupe G sur $R(G)$

$$f(hk) = \sum_i a_i(h)b_i(k).$$

Pour plus de détails sur les structures algébriques qu'on peut définir sur l'espace de fonctions $R(G)$ voir [81, 68]. Pour nous il suffit de savoir que l'action régulière à droite et à gauche de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ admet une représentation dans l'espace des opérateurs différentiels sur $R(G)$, où on a noté par $\mathfrak{g}$ la superalgèbre de Lie du supergroupe G . Le lien entre $R(G)$ et $L_2(G)$ est établi par le théorème de Peter-Weyl [14], selon lequel $R(G)$ est un sous-espace dense de $L_2(G)$. L'espace $L_2(G)$ est en fait plus grand que $R(G)$, car il peut contenir des combinaisons linéaires infinies d'éléments de $R(G)$, mais convergentes par rapport à la mesure de $L_2(G)$. Ces combinaisons linéaires infinies sont la généralisation de la représentation en série de Fourier d'une fonction dans $L_2(S^1)$ au cas des fonctions dans $L_2(G)$. Les éléments de matrice des représentations unitaires finies sont les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $R(G)$.

L'analyse harmonique des espaces symétriques compacts $\mathcal{M} \simeq G/H$ peut être déduite de l'analyse harmonique sur le groupe G . Soit $R(\mathcal{M})$ l'algèbre des fonctions sur $\mathcal{M}$ qui est close sous la multiplication. Elle peut être vue en tant que sous-algèbre de $R(G)$, par restriction aux éléments de matrice des représentations irréductibles de G qui sont invariants sous l'action régulière à droite du sous-groupe H . Notons que $R(\mathcal{M})$ ne possède plus de comultiplication. Par la factorisation de la mesure

$$d\mu(G) = d\mu(\mathcal{M})d\mu(H)$$

on voit tout suite que $R(\mathcal{M})$ est dense en $L_2(\mathcal{M})$. Les fonctions de $L_2(G)$ admettent aussi une décomposition en série de Fourier généralisée.

Des résultats similaires existent pour les espaces symétriques non-compacts [48]. La différence principale est que l'algèbre des fonctions $R(\mathcal{M})$ est engendrée par les éléments de matrice des représentations unitaires infinies. Les fonctions de $L_2(\mathcal{M})$ admettent une décomposition en *intégrale* de Fourier. De façon analogue à la mécanique quantique d'une particule libre, c'est-à-dire à l'analyse harmonique de $L_2(\mathbb{R})$ en tant que module de $U(1)$, $R(\mathcal{M})$ n'est plus un sous-espace de $L_2(\mathcal{M})$, car les fonctions propres de l'opérateur Laplace-Beltrami ne sont pas de carré intégrable. Dans le langage de la mécanique quantique, les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont "normalisables au sens de la fonction δ ".

Dans tous les cas considérés, les représentations unitaires qui apparaissent dans la décomposition de $L_2(\mathcal{M})$ sont identifiées par un seul label — leur plus haut poids.

Une généralisation du théorème de Peter-Weyl pour les supergroupes et, plus généralement pour les superespaces symétriques $\mathcal{M} \simeq G/H$ n'existe pas encore. Vu que le théorème de Peter-Weyl a plusieurs formes dans la littérature, soyons plus précis sur ce qu'on veut dire par cela. On voudrait avoir une caractérisation exacte de la classe des représentations du supergroupe G dont les éléments de matrice sont tels que : i) ils engendrent une algèbre $R(\mathcal{M})$ sous la multiplication des fonctions ii) les éléments de $L_2(\mathcal{M})$ admettent une représentation en série ou intégrale de Fourier par rapport à la base de $R(\mathcal{M})$. Notons que pour les supergroupes il n'existe pas de superespaces symétriques principaux chiraux, c'est-à-dire des superespaces homogènes avec structure riemannienne qui admettent deux actions du supergroupe G , qui commutent entre elles, et une structure de supervariété de supergroupe [82].³ Même si le résultat désiré n'existe pas encore, la résolution de l'analyse harmonique détaillée de $L_2(\mathcal{M}^G)$ pour les supergroupes $GL(1|1)$, $SL(2|1)$, $PSL(2|2)$ laisse deviner la réponse [71, 71, 29], où on a noté par $\mathcal{M}^G$ un espace symétrique principal chiral de G . Dans tous ces cas, l'espace des fonctions $L_2(\mathcal{M}^G)$ se décompose sous l'action régulière, à gauche ou à droite, du supergroupe G dans une somme directe des représentations indécomposables dites *projectives* et qu'on va définir dans la sec. 1.1.11. Chaque *couverture projective* d'une représentation irréductible, notion qu'on va définir dans la sec. 1.1.11, apparaît avec une multiplicité donnée par la dimension de la représentation irréductible correspondante. L'article de Schomerus et Quella [57] indique que ce scénario doit être valide pour tous les supergroupes de type I, c'est-à-dire qui admettent une $\mathbb{Z}$ -gradation de même type que $GL(N|M)$. Notons que les représentations adjointes des algèbres non-semi-simples finies [3] se décomposent aussi que dans des représentations projectives. Il est, donc, très probable que l'algèbre recherchée $R(\mathcal{M}^G)$ est engendrée par les éléments de matrice des représentations projectives, car cette classe de représentations possède la propriété recherchée de clôture par rapport au produit tensoriel. Plus que cela, on n'a besoin que d'un seul label pour identifier les représentations indécomposables dans cette classe, car, comme on va le voir dans la sec. 1.1.11, il existe une bijection entre les représentations projectives et les représentations irréductibles.

Mentionnons aussi qu'on peut montrer que si $\mathcal{M} \simeq G/H$ est un superespace symétrique compact, alors le sous-espace de fonctions $R(\mathcal{M}) \subset L_2(\mathcal{M})$ muni de structure d'algèbre close sous la multiplication des fonctions, dont on demande également qu'il soit dense en $L_2(\mathcal{M})$, ne peut pas être vu comme sous-algèbre de $R(\mathcal{M}^G)$ par restriction, où $\mathcal{M}^G$ est un espace principal chiral. En fait, de la non-compacité nécessaire de $\mathcal{M}^G$ [82] et de l'hypothèse de compacité de $\mathcal{M}$, on peut déduire que $R(\mathcal{M}^G) \cap R(\mathcal{M}) = \emptyset$.

On va conclure cette section en remarquant que la classe des représentations indécomposables dont i) les éléments peuvent être classifiés par un nombre fini de paramètres et ii) qui est close sous le produit tensoriel, est beaucoup plus grande que celle des représentations projectives et, en même temps, beaucoup plus petite que la classe des représentations engendrées par les éléments de matrice de la représentations fondamentale

³En fait, pour être plus précis, la seule exception est le supergroupe $OSp(1|2n)$.

et de sa conjuguée [27]. Ainsi, la clôture de la classe des représentations pertinentes aux applications physiques par rapport au produit tensoriel est nécessaire mais pas du tout suffisante.

1.1.11 Modules projectifs, injectifs, standards, co-standards et basculants

La définition exacte de représentation projective est assez abstraite.

Définition 1.1 *Le module P d'une superalgèbre de Lie $L \simeq L_0 \oplus L_1$ est appelé projectif si pour tout homomorphisme surjectif $h : M \twoheadrightarrow N$ et homomorphisme $f : P \rightarrow N$ il existe un homomorphisme $g : P \rightarrow M$ tel que $h \circ g = f$.*

Les homomorphismes h, f, g sont des homomorphismes de modules, c'est-à-dire ils commutent avec l'action de la superalgèbre L . La notion de module projectif fait partie du vocabulaire de base de la théorie homologique des représentations, dont la référence classique est [7] et moins classique [3]. Dans un langage catégorique la définition est équivalente à l'affirmation que tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ & & \uparrow f \\ & & P \end{array}$$

peut être étendu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \nwarrow \exists g & & \uparrow f \\ & & P \end{array} . \quad (1.28)$$

À titre illustratif, pour voir comment la déf. 1.1 fonctionne en pratique, démontrons la propriété suivante : si P est un module quotient d'un certain module M alors il existe un sous-module N de M tel que $M \simeq N \oplus P$.

En effet, l'hypothèse que P est un module quotient de M est équivalente à l'existence du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & P \\ & & \uparrow \text{id} \\ & & P \end{array} ,$$

où id est l'homomorphisme identité. Selon la définition de projectivité (1.28) ce diagramme implique l'existence d'un homomorphisme g

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & P \\ \nwarrow g & & \uparrow \text{id} \\ & & P \end{array}$$

tel que $h \circ g = \text{id}$. De la surjectivité de h il en résulte que g est injectif et, donc, P est aussi un sous-module de M . En même temps, $\ker h$ est aussi

un sous-module de M . Au final, on voit que $e = g \circ h$ est un endomorphisme idempotent de M qui satisfait $e|_P \simeq \text{id}$ et $e|_{\ker h} = 0$. On a donc prouvé la décomposition $M \simeq \ker h \oplus P$, où l'idempotent e projette sur P et l'idempotent complémentaire $1 - e$ projette sur $\ker h$. $\square$

Une autre conséquence de la déf. (1.28) est la propriété suivante des modules projectifs

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xleftarrow{h^*} & N^* \\ & \searrow \exists g^* & \downarrow f^* \\ & & P^* \end{array} \quad (1.29)$$

où M^*, N^*, P^* sont les modules duaux et h^*, f^*, g^* sont les homomorphismes induites par dualité. Explicitement, si $h : M \rightarrow N$ est un homomorphisme alors l'homomorphisme dual induit $h^* : N^* \rightarrow M^*$ est défini par

$$(h^*(v))(m) = v(h(m)). \quad (1.30)$$

On vérifie immédiatement de l'éq. (1.30) que si h est surjectif alors h^* est injectif. Comme $h^{**} = h$ on en déduit que l'inverse est vrai aussi, d'où la forme du diagramme (1.29).

Un module I qui satisfait la même propriété que P^* est appelé module injectif. On démontre de la même façon que pour les modules projectifs, que *si un module injectif I est un sous-module d'un module arbitraire M alors il existe un module N tel que $M \simeq I \oplus N$.*

Remarquons que les représentations irréductibles $S(\lambda)$, qui correspondent aux poids typiques λ , sont trivialement projectives et injectives dans la catégorie des modules finis. En effet, par la définition d'un poids typique, le module simple $S(\lambda)$ est seul dans son bloc, dans la catégorie des modules finis. Le seul homomorphisme non-trivial dans ce bloc est l'homomorphisme identité et les définitions de projectivité et injectivité sont vérifiées de façon triviale. La forme

$$\beta_\lambda(X, Y) = \text{tr}_{S(\lambda)} R_\lambda(X) R_\lambda(Y),$$

avec λ typique, est non-dégénérée, consistante, supersymétrique et invariante pour toutes les représentations irréductibles $R_\lambda : L \rightarrow \mathfrak{gl}(S(\lambda))$, des superalgèbres de Lie classiques basique sauf $\mathfrak{psl}(N|N)$. Ceci prouve que $S(\lambda)$ sont des représentations auto-duales. L'affirmation reste vraie pour $\mathfrak{psl}(N|N)$, mais la preuve se fait par induction à partir de $\mathfrak{sl}(N|N)$, comme expliqué au début de la sec. 1.1.7.

Ce résultat se généralise aux représentations projectives, c'est-à-dire les classes des modules projectifs et injectifs coïncident. Par conséquence les modules projectifs ne peuvent pas être des constituants des représentations indécomposables plus grandes.

Pour calculer les représentations projectives il est utile de connaître les résultats suivants de la théorie homologique des représentations :

i) l'induction

$$\text{ind}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}} P = U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{s}} P$$

d'une représentation projective P d'une sous-algèbre arbitraire $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ est une représentation projective de $\mathfrak{g}$;

ii) la restriction

$$\text{res}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}} P$$

d'une représentation projective P de $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ est une représentation projective. Dans les calculs pratiques on peut prendre en tant que $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ et en tant que P toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}_0$.

La définition standard de couverture projective d'une représentation arbitraire nécessite l'introduction de notions supplémentaires. De façon alternative, on préfère définir la couverture projective $P(\lambda)$ d'une représentation irréductible $S(\lambda)$ comme la représentation projective indécomposable dont le quotient par le sous-module maximal est $S(\lambda)$. Avec cette définition, si on suppose que $P(\lambda)$ existe, il en résulte, par applications enchaînées du diagramme (1.28) à

$$\begin{array}{ccc} M \hookrightarrow P(\lambda) & \twoheadrightarrow & S(\lambda) \\ & & \text{id} \downarrow \\ M' \hookrightarrow P'(\lambda) & \twoheadrightarrow & S(\lambda) \end{array}$$

que si $P(\lambda)$ et $P'(\lambda)$ sont deux couvertures projectives alors il existe un isomorphisme $P(\lambda) \simeq P'(\lambda)$. Pour prouver l'existence de la couverture projective il suffit de montrer que pour toute représentation irréductible $S(\lambda)$ il existe une représentation projective $\Pi(\lambda)$ (pas nécessairement indécomposable) et un homomorphisme surjectif $h : \Pi(\lambda) \twoheadrightarrow S(\lambda)$. Soit W un module arbitraire de $\mathfrak{g}_0$ qui apparaît dans la restriction de $\text{res}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}} S(\lambda)$, c'est-à-dire $f : W \hookrightarrow \text{res}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}} S(\lambda)$, alors on peut prendre en tant que $\Pi(\lambda)$ le module $\text{ind}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}} W$ et en tant que h l'homomorphisme surjectif $h(u \star w) = u \cdot f(w)$, où $u \in U(\mathfrak{g})$ et $u \star w \in U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} W$ est l'image de $u \otimes w$ par induction.

Il y a une manière très pratique de construire des quotients de modules (1.23) de plus haut poids $Z(\lambda)$ qui sont pertinents dans les applications aux modèles sigma sur les superspaces symétriques non-compacts. On pose alors

$$\Gamma^0(Z(\lambda)) = R(\mathcal{M}^G) \otimes_{U(\mathfrak{g})} Z(\lambda). \quad (1.31)$$

Ici $R(\mathcal{M}^G)$ est l'algèbre des fonctions sur le superspace symétrique principal chiral $\mathcal{M}^G$ pour le supergroupe G , qui a été introduite à la fin de la sec. 1.1.10. Par exemple, l'espace de fonctions $L_2(\mathcal{M}^G)$ peut être vu comme induit à partir de l'espace de fonctions $L_2(\mathcal{M}_0^G)$ sur la sous-variété de base $\mathcal{M}_0^G$

$$L_2(\mathcal{M}^G) = R(\mathcal{M}^G) \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} L_2(\mathcal{M}_0^G).$$

Cette procédure d'induction nécessite, quand même, une compréhension très exacte de l'espace fonctionnel $R(\mathcal{M}^G)$ et de sa structure algébrique. En fait, on peut définir des procédures d'induction analogues à l'éq. (1.31) en utilisant aux lieux de l'algèbre de fonctions $R(\mathcal{M}^G)$ tout autre *bi-module* de $U(\mathfrak{g})$ qui est mieux compris que $U(\mathfrak{g})$ lui-même.

On va brièvement mentionner deux autres classes de représentations indécomposables qui sont importantes dans l'approche purement mathématique à la théorie des représentations des superalgèbres de Lie — les modules (co-)standards et les modules basculants. Ils ont été introduits dans le but de simplifier le calcul des représentations projectives à travers des relations de dualité à la Bernstein-Gelfand-Gelfand [12].

Les modules standards et co-standards sont définis de manière différente pour les superalgèbres de Lie classiques basiques de type I et pour

le reste. Une superalgèbre de Lie classique basique $\mathfrak{g}$ est dite de type I si elle admet une gradation sur $\mathbb{Z}$ de la même forme que $\mathfrak{gl}(m|n)$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{-1},$$

où $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_1$. Soit λ un poids dominant de $\mathfrak{g}_0$ et $S_0(\lambda)$ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}_0$ de plus haut poids λ . Elle peut être étendue de façon triviale à une représentation $E_+(\lambda)$ de plus *haut* poids λ pour la superalgèbre $\mathfrak{s}_+ = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ et à une représentation $E_-(\lambda)$ de plus *bas* poids λ pour la superalgèbre $\mathfrak{s}_- = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{-1}$

$$\text{res}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}_{\pm}} E_{\pm}(\lambda) = S_0(\lambda), \quad \mathfrak{g}_{\pm} E_{\pm}(\lambda) = 0.$$

Les modules standards sont les modules de Kac $K(\lambda)$ et le module co-standard sont les modules de Kac duaux $\bar{K}(\lambda)$ définis par

$$K(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{s}_+} E_+(\lambda), \quad \bar{K}(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{s}_-} E_-(\lambda).$$

Les modules de Kac sont reliés par la relation de dualité

$$\bar{K}(\lambda - 2\rho_{\bar{1}}) \simeq K^*(\lambda),$$

où $\rho_{\bar{1}}$ a été défini dans l'éq. (1.16).

Pour les superalgèbres de Lie classiques basiques qui ne sont pas de type I les modules standard sont définis par une procédure d'induction de type (1.31). Pour définir les modules co-standard on a besoin de définir aussi le dual régularisé de $R(\mathcal{M}^G)$ comme par exemple en [68].

Enfin, un module basculant M est défini par les propriétés suivantes

i) M a une filtration

$$M = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset 0$$

dont les sous-quotients

$$V_i/V_{i+1}$$

sont isomorphes à des modules standards ;

ii) M a une filtration

$$M = \bar{V}_0 \supset \bar{V}_1 \supset \cdots \supset \bar{V}_n \supset 0$$

dont les sous-quotients

$$\bar{V}_i/\bar{V}_{i+1}$$

sont isomorphes à des modules co-standards ;

iii) il n'existe pas de module indécomposable N tel que N/M est un module standard ou, de façon équivalente, il n'existe pas de module $\bar{N}$ tel que $\bar{N}/M$ est un module co-standard.

1.2 SUPERGROUPES DE LIE

1.2.1 Supergroupes de matrices

Les supergroupes de Lie peuvent être définis de plusieurs façons. On va commencer par la façon classique qui est aussi la plus simple.

Soit B une algèbre de Grassmann sur $\mathbb{C}$ à L générateurs, où L est suffisamment grand pour que son choix n'influence pas les constructions qui suivent. En d'autres mots, B est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^L$

$$B = \bigwedge \mathbb{C}^L. \quad (1.32)$$

Les éléments de B sont des puissances extérieures d'ordre $k = 0, 1, \dots, L$ des vecteurs de base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^L$. L'algèbre de Grassmann B est, ainsi, munie d'une graduation sur $\mathbb{Z}$ concentré dans $\{0, 1, \dots, L\}$. La graduation induite $\bar{\cdot} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ munie $B \simeq B_{\bar{0}} \oplus B_{\bar{1}}$ d'une structure de superalgèbre super-commutative comme défini dans la sec. 1.1.3. Remarquons qu'un élément b de B est inversible si et seulement si sa projection sur la composante de degré $k = 0$ de B est non-nulle. On va noter par $\text{rad } B$ le radical de B , c'est-à-dire l'idéal des éléments nilpotents.

Soit $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec $\dim V_{\bar{0}} = m$ et $\dim V_{\bar{1}} = n$. On va noter par la suite l'évaluation de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation de tous les objets par $|\cdot|$. On associe à V un module de B

$$U = B \otimes_{\mathbb{C}} V \quad (1.33)$$

gradué comme $|u| = |b| + |v|$. L'ensemble des endomorphismes $\text{End}_B U$ acquiert une structure de superalgèbre avec la graduation

$$\phi \in \text{End}_B U : \quad |\phi| = \alpha \implies \phi \cdot u \in B_{\alpha+|u|}.$$

Le sous-ensemble des endomorphismes inversibles et paires de $\text{End}_B U$ est appelé le supergroupe $\text{GL}(m|n)$.

Soit $e_1 < \dots < e_m$ une base de $V_{\bar{0}}$ et $e_{m+1} < \dots < e_{m+n}$ une base de $V_{\bar{1}}$. Dans cette base, les endomorphismes de $M \in \text{GL}(m|n)$ peuvent être représentés par des matrices de taille $(m+n) \times (m+n)$

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

avec a, d des matrices de taille $m \times m$ et, respectivement, $n \times n$, dont les éléments prennent des valeurs dans $B_{\bar{0}}$, et des matrices β, γ de taille $n \times m$ et, respectivement, $m \times n$, dont les éléments prennent des valeurs dans $B_{\bar{1}}$. Les endomorphismes M sont inversibles si et seulement si leur superdétérminant

$$\text{sdet } M = \frac{\det(a - \beta d^{-1} \gamma)}{\det d} = \frac{\det a}{\det(d - \gamma a^{-1} \beta)}$$

est non-nul. Le superdétérminant satisfait la même propriété que le déterminant

$$\text{sdet } MN = \text{sdet } M \text{sdet } N. \quad (1.34)$$

Le quotient

$$\text{GL}(m|n) / \text{rad } B \text{GL}(m|n) \simeq \text{GL}(m, \mathbb{C}) \times \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

est appelé sous-variété de base du supergroupe $\text{GL}(m|n)$. Le module U est appelé le module fondamental de $\text{GL}(m|n)$.

Le supergroupe $SL(m|n)$ est le sous-groupe des matrices unimodulaires $GL(m|n)$.

On peut définir le B -module $\text{Hom}_B(M, N)$ pour des B -modules arbitraires M et N de la même façon qu'on a défini $\text{End}_B U$. Soit U le module fondamental de $GL(m|2n)$ et $\beta \in \text{Hom}_B(U \otimes_B U, B_0)$ une forme non-dégénérée symétrique. Le supergroupe $\text{OSp}(m|2n)$ est défini comme le sous-groupe de $GL(m|2n)$ pour lequel la forme β est un invariant, c'est-à-dire

$$\text{OSp}(m|2n) = \{g \in GL(m|2n) \mid \beta(g \cdot u_1 \otimes_B g \cdot u_2) = \beta(u_1 \otimes_B u_2)\}.$$

On vérifie facilement que la sous-variété de base du supergroupe $\text{OSp}(m|2n)$ est

$$\text{OSp}(m|2n) / \text{rad } B \text{ OSp}(m|2n) \simeq O(m, \mathbb{C}) \times SP(2n, \mathbb{C}).$$

De l'éq. (1.34) on vérifie que les endomorphismes $M \in \text{OSp}(m|2n)$ sont de superdét $\text{sdet } M = \pm 1$.

La question de formes réelles possibles pour les supergroupes est assez subtile, car on n'est pas très sûr de comment définir la conjugaison complexe pour les éléments de l'algèbre de Grassmann B . Plus précisément cette conjugaison n'est pas unique.

Il existe une construction alternative du supergroupe $G = GL(m|n)$ à partir de l'algèbre enveloppante $U(L)$ de la superalgèbre de Lie $L = \mathfrak{gl}(m|n, \mathbb{C})$. Je ne vais pas expliquer les détails, qui peuvent être trouvés dans [81, 70], mais juste donner l'idée générale. On commence la construction en définissant un dual $U(L)^0$ de l'algèbre *infinie* $U(L)$ qui soit possible à gérer, c'est-à-dire $f \in U(L)^0 \subset U(L)^*$ si $\ker f$ contient un idéal I_f de $U(L)$ tel que $\dim U(L)/I_f < \infty$. La structure de superalgèbre de Hopf de $U(L)$ induit une structure de superalgèbre de Hopf en $U(L)^0$. Ensuite on montre que $U(L)^0$ admet comme base les éléments de matrice de toutes les représentations finies de $U(L)$. Après on montre que les éléments de matrice de la représentation fondamentale de $\mathfrak{gl}(m|n)$ et de sa conjuguée engendrent une sous-algèbre $\mathbb{C}(G)$ de $U^0(L)$ qui admet une structure de Hopf elle aussi et qui, en plus, est dense dans $U^*(L)$. Finalement, on montre que les éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(G), B)$ admettent une structure de groupe qui est isomorphe à la définition précédente pour $GL(m|n)$.

1.2.2 Homotopie des supergroupes de Lie

On va montrer, guidé par [55], que les supergroupes de Lie sont homotopiquement équivalents à leur sous-variété de base.

Soit G un des supergroupes $GL(m|n)$, $SL(m|n)$ ou $\text{OSp}(m|2n)$ considérés dans la section précédente et U son B -module fondamental (1.33). Notons par $\|\cdot\|$ la gradation sur $\mathbb{Z}$ de l'algèbre de Grassmann B . Soit $D(\lambda)$ un opérateur dont l'action sur les éléments $b \in B$ de degré $\|b\|$ est définie comme $D(\lambda) \cdot b = (1 - \lambda)^{\|b\|} b$. On étend l'action de $D(\lambda)$ sur tous les éléments de B par linéarité. On vérifie facilement que si $M \in G$ alors $D(\lambda) \cdot M \in G$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$. De plus, on a $D(0) \cdot M = M$,

$D(1) \cdot M = \pi(M)$ et $D(\lambda) \cdot \pi(M) = \pi(M)$, où π est la projection canonique sur la sous-variété de base de G

$$\pi : G \rightarrow G / \text{rad } BG.$$

Avec ces propriétés, $D(\lambda)$ définit une équivalence d'homotopie entre le supergroupe G et sa sous-variété de base $\pi(G)$.

Selon un résultat bien connu de la géométrie différentielle, deux variétés qui sont homotopiquement équivalentes ont les mêmes groupes d'homologie et de cohomologie. Des résultats qui généralisent la relation entre l'homotopie et la cohomologie au cas des supervariétés existent aussi [60, 49].

MODÈLES SIGMA CONFORMES

2

SOMMAIRE

2.1	PROBLÉMATIQUE DE LA SUPERSYMMÉTRIE GLOBALE	39
2.1.1	Unitarité	39
2.1.2	Théorie conforme des champs logarithmique	40
2.2	MODÈLES SIGMA GÉNÉRIQUES	45
2.2.1	Présentation des modèles sigma	45
2.2.2	Effets quantiques	51
2.2.3	Déformations conformes quantiques des modèles sigma	60
2.3	MODÈLES SIGMA AVEC LIGNE CRITIQUE	65
2.3.1	Modèles sigma quantiques conformes	65
2.3.2	Stratégies possibles	75
	CONCLUSION	79

Ce chapitre commence par une brève discussion sur le rôle de l'unitarité dans les modèles de la physique théorique moderne et continue par une courte introduction à certaines théories non-unitaires appelées théories conformes logarithmiques. Dans la section suivante j'introduis le lecteur aux modèles sigma. Les différences essentielles entre les modèles sigma avec symétrie de groupe de Lie, d'un côté, et symétrie de supergroupe de Lie, de l'autre, sont discutées. Ensuite j'analyse les déformations des modèles sigma par ajout de termes de Wess-Zumino ou de termes topologiques à l'action métrique standard. Après cette première partie introductive, je classifie dans la dernière section les modèles sigma avec action métrique standard sur des superespaces symétriques et qui ont une ligne de points critiques. Je conclus par une discussion des approches pour résoudre exactement ces modèles sigma qui sont en interaction hautement non-linéaire.

2.1 PROBLÉMATIQUE DE LA SUPERSYMÉTRIE GLOBALE

2.1.1 Unitarité

Les théories physiques sont unitaires. Cette phrase résonnait dans tous les cours de mécanique quantique, théorie quantique des champs de la matière ou de la physique des particules. Par ailleurs, dans les cours de physique statistique, de la matière condensée ou de théorie conforme des champs on nous a fait remarquer qu'il existe des modèles statistiques et des théories des champs non-unitaires qui ont des applications physiques.

Étant donné l'ampleur du domaine de la physique théorique il est à présent difficile pour un spécialiste d'évaluer ce qui a ou ce qui n'a pas de sens physique hors de son domaine de compétence. Selon les grecs, la physique est la science de la nature. On va, donc, dire qu'une notion mathématique dans un modèle de la physique théorique a un *sens physique* si elle décrit de façon abstraite un objet ou une caractéristique d'un objet ou, encore, un phénomène de la nature.

Ainsi, les états de l'espace d'Hilbert de la mécanique quantique modélisent les états ou les caractéristiques des objets réels et, donc, ont un sens physique. Le groupe de symétrie d'un système dynamique s'exprime naturellement par des relations entre ses états possibles qui sont indépendantes de son évolution. Dans le formalisme de la mécanique quantique les transformations de symétrie sont représentées par des isométries du produit scalaire de l'espace d'Hilbert, à une phase près, qui commutent avec l'hamiltonien. Ceci justifie l'intérêt exceptionnel, dans le cadre de la mécanique quantique, accordé aux représentations unitaires des groupes de symétrie.

Les états des champs de la matière sont aussi décrits par un espace de Hilbert. L'unitarité de la théorie est attribuée à l'unitarité de la matrice S . Tout de même, en pratique, on modifie le système dynamique, en *sacrifiant son évolution unitaire en faveur des propriétés de symétrie plus élevées*. Ceci est le cas de la quantification des bosons de jauge, avec l'introduction des oscillateurs de polarisation temporelle et longitudinale.

Ce scénario d'émergence des théories des champs (avec dynamique ou statistique) non-unitaires est assez générique. La physique de la matière condensée nous offre des exemples parlants dans le cadre des systèmes électroniques désordonnés. Un sujet intrigant, qui fait partie de ce domaine, est la transition du deuxième ordre entre les phases localisées et délocalisées des électrons qui arrive entre les plateaux dans l'effet Hall quantique entier. Pour une description théorique détaillée du phénomène voir [8, 83]. Suivons en plus de détails le fil du raisonnement qui nous amène à traiter une théorie non-unitaire dans ce cas.

Considérons un système de la mécanique quantique en $2 + 1$ dimension avec le hamiltonien

$$H = H_0 + V$$

où H_0 décrit la dynamique de l'électron interagissant avec un champ magnétique externe et V est un potentiel aléatoire dont la distribution est *gaussienne*

$$\mathcal{P}[V(x)] = e^{-\frac{1}{2\sigma} \int d^2x V^2(x)} \mathcal{D}[V(x)].$$

Les caractéristiques mesurables du gaz des électrons dans l'effet Hall quantique, comme par exemple la résistivité longitudinale ou transverse, s'expriment en termes de la moyenne sur le désordre des produits de fonctions de Green avancées et retardées

$$\frac{1}{H - E - i\epsilon} \cdots \frac{1}{H - E' + i\epsilon} \cdots$$

Dans l'approche super-symétrique, avant de moyenner sur le désordre, on exprime le produit des fonctions de Green par des intégrales gaussiennes d'une théorie de champs libres. Par exemple

$$\left\langle x_1 \left| \frac{1}{H - E - i\epsilon} \right| x_2 \right\rangle = i \langle \eta(x_1) \bar{\eta}(x_2) \rangle_S$$

où la fonction de corrélation à droite de l'équation est calculée dans une théorie libre avec l'action

$$S[\eta, \bar{\eta}, \phi] = i \int d^2 x (\bar{\eta}(x)(H - E - i\epsilon)\eta(x) + \bar{\phi}(x)(H - E - i\epsilon)\phi(x)).$$

Ici $\eta, \bar{\eta}$ sont une paire de fermions symplectiques, ϕ un boson complexe et la convention pour le poids de l'intégrale fonctionnelle est e^{-S} . L'effet de moyenner sur le désordre

$$\overline{\langle \eta(x_1) \bar{\eta}(x_2) \rangle_S} = \langle \eta(x_1) \bar{\eta}(x_2) \rangle_{\bar{S}},$$

introduit un terme d'interaction de type Gross-Neveu dans l'action libre S

$$\bar{S}[\eta, \bar{\eta}, \phi] = S[\eta, \bar{\eta}, \phi] + \frac{\sigma}{2} \int d^2 x (\bar{\phi}(x)\phi(x) + \bar{\eta}(x)\eta(x))^2.$$

Cette action est manifestement invariante sous une super-symétrie globale $\mathfrak{osp}(2|2)$ qui laisse invariant le produit scalaire $\bar{\phi}\phi + \bar{\eta}\eta$.

Ainsi, on est tenté de conclure que le contenu physique d'une théorie des champs réside exclusivement dans ses fonctions de corrélations. Le problème d'interprétation probabiliste de l'espace des états ne se pose même pas.

Il y a quand même un prix important à payer pour le passage à des théories des champs dont l'espace des états est non-Hilbertien — les représentations des groupes de symétrie qui caractérisent ces systèmes dynamiques ou statistiques ne sont plus nécessairement unitaires. L'exploitation de ces symétries requiert la maîtrise de techniques nouvelles de la théorie des représentations des algèbres non semi-simples. J'invite le lecteur à utiliser la première partie de cette thèse pour se familiariser avec ces nouvelles notions.

2.1.2 Théorie conforme des champs logarithmique

Dans une *théorie conforme unitaire* les champs quantiques sont organisés dans des représentations irréductibles de Virasoro qui sont isomorphes à des quotients irréductibles des modules de Verma.

Dans une *théorie conforme non-unitaire* il est permis d'avoir des représentations indécomposables de l'algèbre de Virasoro. Néanmoins, si tous

les champs de la théorie sont des descendants des champs primaires, le spectre s'organise toujours dans des représentations irréductibles de Virasoro. Ceci est dû au fait que les fonctions de corrélations dans une théorie conforme sont calculées avec la forme de Shapovalov. Elle doit être nécessairement non-dégénérée, car un radical non-nul impliquera l'existence des champs dont les fonctions de corrélations avec tous les autres champs de la théorie s'annulent. Pour un module de plus haut poids le sous-module maximal est exactement le radical de la forme de Shapovalov et, donc, le quotient d'un module de plus haut poids par le radical de la forme de Shapovalov est irréductible.

Dans une *théorie conforme logarithmique* l'action du générateur de dilatation L_0 n'est pas semi-simple. Autrement dit, il existe une décomposition de L_0 dans une composante diagonale et une composante nilpotente

$$L_0 = L_0^d + L_0^n \quad (2.1)$$

telle que

$$[L_0^d, L_0^n] = 0.$$

Par conséquent, il n'est pas possible de générer tous les champs quantiques à partir des opérateurs primaires. En particulier, ceci veut dire que la théorie des représentations des algèbres de Virasoro restreintes à des modules de Verma ne suffit plus pour décrire les propriétés conformes de certains champs. Dans la suite je vais illustrer sur quelques exemples à quel niveau la non-semi-simplicité de L_0 complique ou modifie l'exploitation de la symétrie conforme dans les théories conformes logarithmiques.

Je vais suivre les mêmes définitions et notations que [64]. Les premiers types de modules de l'algèbre de Virasoro avec la propriété (2.1) qui ont émergé dans les théories conformes [67, 65, 66, 31] peuvent être décrits par une structure de cellule de Jordan de l'action de L_0 dans l'espace du plus haut poids. La seule généralisation qu'on fait par rapport aux modules de Verma c'est de considérer un espace de plus haut poids de dimension plus grande que un avec une action arbitraire de L_0 là-dedans. Cette action peut être ramenée à la forme de Jordan. Sans perte de généralité on se restreint à une seule cellule de Jordan. Si l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Virasoro est $\mathcal{U}$, l'algèbre enveloppante universelle de la sous-algèbre de Virasoro générée par les modes $L_{\pm n}$, $n > 0$ est $\mathcal{U}^\pm$, alors

Définition 2.1 *Un module de Verma-Jordan $VJ(h, c) = \mathcal{U}^- v_{k-1}$ de plus haut poids h et de rang k est engendré par un vecteur v_{k-1} qui satisfait les propriétés suivantes*

- (i) $\mathcal{U}^+ v_n = 0, \quad L_0 v_n = h v_n + v_{n-1}, \quad n = 1, \dots, k-1$
- (ii) $L_0 v_0 = h v_0$

Les modules de Verma-Jordan sont universels dans le même sens que les modules de Verma. L'exemple classique d'un tel module est la structure du vide dans la théorie conforme des fermions symplectiques.

Les fermions symplectiques sont une théorie conforme logarithmique construite sur les champs libres de deux fermions symplectiques

$$S[\eta^1, \eta^2] = \int d^2x \partial_\mu \eta^1(x) \partial_\mu \eta^2(x) \quad (2.2)$$

dont la décomposition en modes, pour des conditions au bord périodiques, est

$$\eta^\alpha(z, \bar{z}) = \bar{\eta}^\alpha - i\eta_0^\alpha \log |z|^2 + i \sum_{n \neq 0} \frac{\eta_n^\alpha}{nz^n} + \frac{\bar{\eta}_n^\alpha}{n\bar{z}^n},$$

la quantification établi par

$$\{\eta_n^1, \eta_m^2\} = n\delta_{n+m}, \quad \{\bar{\eta}^1, \eta_0^2\} = -\{\bar{\eta}^2, \eta_0^1\} = i, \quad (2.3)$$

et le tenseur énergie-impulsion a la forme

$$T(z) =: \partial\eta^1(z)\partial\eta^2(z) : \quad (2.4)$$

Les fermions symplectiques ont une charge centrale $c = -2$. Ils apparaissent naturellement dans l'étude de la limite continue de la chaîne $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$, où V est la représentation fondamentale de $\mathfrak{gl}(1|1)$ et V^* est la représentation conjuguée, munie d'un hamiltonien de Temperley-Lieb [67, 39]. On interprète les modes zéro η_0^1, η_0^2 comme la limite continue des générateurs fermioniques de $\mathfrak{gl}(1|1)$, donc, d'annihilation. L'action de

$$L_0 = -\eta_0^1\eta_0^2 - \sum_{n \neq 0} : \eta_n^1\eta_{-n}^2 : \quad (2.5)$$

est non-diagonale par rapport aux modes zéro de création $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2$. Les états de la théorie s'organisent dans des représentations de $\mathfrak{gl}(1|1)$ ¹ de la forme

$$\begin{array}{ccc} & \bar{\eta}^2\Phi & \\ \nearrow \eta_0^2 & & \searrow \eta_0^1 \\ \bar{\eta}^2\bar{\eta}^1\Phi & \xrightarrow{L_0^n} & \Phi, \\ \searrow \eta_0^1 & & \nearrow \eta_0^2 \\ & \bar{\eta}^1\Phi & \end{array}$$

où Φ est un état de la théorie chirale, engendré par les champs $\partial\eta^1, \partial\eta^2$, qui, en particulier, peut être un état de plus haut poids comme, par exemple, le vide Ω . L'état $\bar{\eta}^2\bar{\eta}^1\Phi$ est appelé partenaire logarithmique de Φ . Il n'est pas difficile de vérifier avec l'éq. (2.5) que L_0 connecte de façon nilpotente les partenaires logarithmiques. Si on dénote par v_0 le vide Ω et par v_1 son partenaire logarithmique $\omega = \bar{\eta}^2\bar{\eta}^1\Omega$ alors on vérifie que toutes les conditions de la def. 2.1 sont satisfaites. Ainsi, le vide de la théorie des fermions symplectiques est un (quotient du) module de Verma-Jordan $VJ(0, -2)$.

La fonction de partition de l'action (2.2) est zéro. De la même façon, les fonctions de corrélations entre tous les champs chiraux s'annulent, car ils ne contiennent pas les modes zéro $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2$. Montrons que ce comportement des fonctions de corrélations est reproduit parfaitement par la forme de Shapovalov.

Le module dual de Verma-Jordan $VJ^*(h, c)$ est défini par

$$(L_n\phi)(v) := \phi(L_{-n}v), \quad \phi \in VJ^*(h, c), v \in VJ(h, c).$$

¹Pour être précis la valeur propre du générateur central de $\mathfrak{gl}(1|1)$ est toujours zéro dans l'espace des états de la théorie. On a, strictement parlant, une symétrie $\mathfrak{pgl}(1|1) = \mathfrak{gl}(1|1)/\mathbb{C} \text{ id}$.

Si $u^m(v_n) = \delta_n^m$ est la base duale standard alors

$$(L_0 u^m)(v_n) = u^m(L_0 v_n) = h\delta_n^m + \delta_{n-1}^m = (hu^m + u^{m+1})(v_n).$$

Dans les notations covariantes

$$v^n = u^{k-1-n}, \quad n = 0, \dots, k-1$$

on voit que $VJ^*(h, c)$ est un (quotient d'un) module de Verma-Jordan de plus haut poids h engendré par la forme v^{k-1} . L'homomorphisme des modules de Virasoro $\varphi : VJ(h, c) \rightarrow VJ^*(h, c)$ donné par

$$u \cdot v_{k-1} \xrightarrow{\varphi} u \cdot v^{k-1}, \quad u \in \mathcal{U}^- \quad (2.6)$$

induit la forme symétrique de Shapovalov

$$\langle v, w \rangle = \varphi(v)(w).$$

Ainsi, avec la forme de Shapovalov pour les fermions symplectiques on reproduit la même normalisation du vide et de son partenaire logarithmique que dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle

$$\langle \omega, \Omega \rangle = \langle \Omega, \omega \rangle = 1, \quad \langle \omega, \omega \rangle = \langle \Omega, \Omega \rangle = 0.$$

Pour avoir une théorie conforme où les fonctions de corrélations contiennent toute l'information sur les opérateurs, il faut se restreindre à des représentations sur lesquelles la forme de Shapovalov est non-dégénérée. Il est clair que, contrairement aux cas des modules de Verma, le radical de la forme de Shapovalov n'est plus le sous-module maximal d'un module de Verma-Jordan. En conclusion, le quotient d'un module de Verma-Jordan par le radical de la forme de Shapovalov n'est pas irréductible et, donc, le spectre d'une théorie conforme contient des représentations indécomposables de l'algèbre de Virasoro. L'analyse des sous-modules des modules de Verma-Jordan s'est avérée un problème très complexe [64]. En particulier, lorsque le plus haut poids d'un module de Verma-Jordan est dans le tableau de Kac, il possède une infinité de sous-modules qui ne sont ni de plus haut poids ni de Verma-Jordan. Ceci suggère que les modules de Verma-Jordan ne sont pas la seule généralisation possible des modules de Verma compatible avec l'éq. (2.1). L'exemple d'un tel module, que je donne dans la suite, est dû à Flohr dans [22].

Soit M le module engendré par l'action des modes de $T(z)$ sur les champs : $\eta^2(z, \bar{z})\eta^1(z, \bar{z})\partial\eta^1(z)$: et $\eta^1(z, \bar{z})$ ou, autrement dit, de l'action de l'algèbre de Virasoro sur les états $v_1 = \bar{\eta}^2\bar{\eta}^1\eta_{-1}^1\Omega$ et, respectivement, $v_0 = \bar{\eta}^1\Omega$. On vérifie avec un calcul direct les propriétés suivantes :

- i) $V_0 = \mathcal{U}v_0$ est un sous-module de M de plus haut poids $h_0 = 0$
- ii) $V_1 = \mathcal{U}v_1$ est le module quotient M/V_0 qui est de plus haut poids $h_1 = 1$
- iii) $(L_0 - h_1)v_1 = L_0^nv_1 = \eta_{-1}^1\Omega$, où v_1 est le partenaire logarithmique de $\eta_{-1}^1\Omega$
- iv) $L_1v_1 = iv_0$.

La dernière propriété montre que M est engendré par v_1 et possède un "ascendant nul".

Les transformations conformes des champs qui engendrent ce type de module ne sont pas connues en général. Par conséquent, dans une théorie conforme logarithmique on ne peut pas déduire en toute généralité la forme des fonctions de corrélations à deux et à trois points à partir des identités de Ward. Ceci est néanmoins faisable si les champs font partie de l'espace de plus haut poids d'un module de Verma-Jordan.

Considérons deux modules de Verma-Jordan de plus haut poids h, h' et de rang k, l . Regroupons les champs correspondant aux états des espaces de plus haut poids $\Phi_0(z, \bar{z}), \dots, \Phi_{k-1}(z, \bar{z})$ dans un seul vecteur $\Phi(z)$ et les champs $\Phi'_0(w), \dots, \Phi'_{l-1}(w)$ dans $\Phi'(w)$. Si $\hat{h}$ et $\hat{h}'$ est la représentation de L_0 dans l'espace de plus haut poids du module de Verma-Jordan du vecteur $\Phi(z)$ et, respectivement, $\Phi'(z)$ alors

$$\begin{aligned} [L_n, \Phi(z)] &= (z^{n+1}\partial + z^n(n+1)\hat{h})\Phi(z) \\ [L_n, \Phi'(z)] &= (z^{n+1}\partial + z^n(n+1)\hat{h}')\Phi'(z) \end{aligned}$$

et les identités de Ward pour les fonctions a deux points

$$G_{ij}(z, w) = \langle \Phi_i(z) \Phi'_j(w) \rangle$$

prennent la forme matricielle

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w} \right) \mathbf{G}(z, w) &= 0 \\ \left(z \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial w} \right) \mathbf{G}(z, w) + \hat{h} \mathbf{G}(z, w) + \mathbf{G}(z, w) (\hat{h}')^t &= 0 \\ \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} + w^2 \frac{\partial}{\partial w} \right) \mathbf{G}(z, w) + 2z \hat{h} \mathbf{G}(z, w) + 2w \mathbf{G}(z, w) (\hat{h}')^t &= 0. \end{aligned}$$

La première équation implique l'invariance par translation

$$\mathbf{G}(z, w) = \mathbf{G}(z - w)$$

la compatibilité de la deuxième et troisième équation

$$\hat{h} \mathbf{G}(z - w) = \mathbf{G}(z - w) (\hat{h}')^t$$

ce qui donne finalement

$$\mathbf{G}(z, w) = \frac{1}{(z - w)^{2\hat{h}}} \mathbf{S} = \mathbf{S} \frac{1}{(z - w)^{2(\hat{h}')^t}}$$

avec une matrice S qui satisfait

$$\hat{h} \mathbf{S} = \mathbf{S} (\hat{h}')^t.$$

On vérifie facilement que $S \neq 0$ implique $h = h'$. Lorsque S est inversible, S^t est l'homomorphisme φ de l'éq. (2.6) qui induit la forme de Shapovalov. La composante nilpotente de $\hat{h}$ génère des logarithmes dans la fonction à deux points ce qui justifie le nom de théorie conforme logarithmique.

Au final, une remarque intéressante s'impose. Selon le lemme de Schur, dans une théorie conforme non-logarithmique l'opérateur charge centrale

doit être proportionnel à l'identité dans toutes les représentations de l'algèbre de Virasoro engendrées par les champs primaires de la théorie, car celles-ci sont irréductibles. Dans une théorie conforme logarithmique l'opérateur charge centrale peut avoir une composante nilpotente dans les représentations indécomposables de l'algèbre de Virasoro. Une construction qui illustre cela est fourni par une déformation des fermions symplectiques

$$T(z) = \partial\eta^1(z)\partial\eta^2(z) + \partial^2\eta^1(z)\bar{\eta}^2 + \bar{\eta}^1\partial^2\eta^2(z).$$

Le tenseur d'énergie-impulsion déformé a un développement du produit avec lui même de la forme

$$T(z)T(w) \sim \frac{C}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)^3},$$

où la charge centrale est un opérateur non-diagonalisable

$$C = -2 - 24\bar{\eta}^1\eta^2.$$

de valeur propre $c = -2$.

2.2 MODÈLES SIGMA GÉNÉRIQUES

2.2.1 Présentation des modèles sigma

À toute *variété riemannienne* $\mathcal{M}$ paramétrée par les coordonnées ϕ^a et avec élément de distance carré infinitésimale

$$ds^2 = d\phi^a g_{ab}(\phi) d\phi^b$$

on peut associer une action

$$S[\phi(x)] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\mu}\phi^a g_{ab}(\phi) \partial_{\mu}\phi^b. \quad (2.7)$$

Les coordonnées $\phi^a(x)$ paramètrent un point de $\mathcal{M}$ pour chaque point x d'un domaine Σ de l'espace euclidien bi-dimensionnel. La théorie des champs définie par l'action (2.7) et par certaines conditions de bord pour les champs $\phi(x)$ sur $\partial\Sigma$ s'appelle le modèle sigma non-linéaire sur la variété $\mathcal{M}$. La variété $\mathcal{M}$ s'appelle l'*espace cible* du modèle sigma et la variété Σ s'appelle *feuille d'univers*. Ainsi définis, les modèles sigma ont l'avantage d'être invariants par rapport aux re-paramétrages de $\mathcal{M}$. Le désavantage, lorsque $\mathcal{M}$ est courbe, c'est la difficulté d'exploiter les isométries de la métrique, car elles ne sont pas réalisées linéairement sur les coordonnées ϕ^a de la variété. On donnera dans la suite des formulations différentes qui n'ont pas ce désavantage.

On va quantifier les modèles sigma dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle régularisée sur un réseau carré $\mathcal{L}$. Soit i le label des noeuds du réseau $\mathcal{L}$ avec un *nombre fini de sites* et ϕ^a un paramétrage de $\mathcal{M}$. Le poids d'une configuration $\phi^a(i)$ est

$$\prod_{\langle i,j \rangle} e^{-H_{ij}},$$

où le produit est sur les arêtes $\langle i, j \rangle$ de $\mathcal{L}$ et l'interaction locale H_{ij} est le carré de la distance entre les points $\phi^a(i)$ et $\phi^a(j)$. On a explicitement

$$H_{ij} = \int_0^1 ds g_{ab}(\phi_{ij}(s)) \frac{d\phi_{ij}^a(s)}{ds} \frac{d\phi_{ij}^b(s)}{ds},$$

où $\phi_{ij}^a(s)$ est la géodésique la plus courte qui connecte les points $\phi^a(i)$ et $\phi^a(j)$ et qui est une solution de l'équation

$$\frac{d^2 \phi_{ij}^a(s)}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a(\phi_{ij}(s)) \frac{d\phi_{ij}^b(s)}{ds} \frac{d\phi_{ij}^c(s)}{ds} = 0, \quad \phi_{ij}^a(0) = \phi^a(i), \quad \phi_{ij}^a(1) = \phi^a(j),$$

où $\Gamma_{bc}^a(g)$ est la connexion de Levi-Civita

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{g^{ad}}{2} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial \phi^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial \phi^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial \phi^d} \right),$$

et g^{ab} est l'inverse de g_{ab} . Finalement, la mesure de l'intégrale fonctionnelle est définie par

$$\mathcal{D}[\phi] = \prod_{i \in \mathcal{L}} \sqrt{g(i)} d\phi^1(i) \dots d\phi^n(i), \quad (2.8)$$

où $g(i) = \det g_{ab}(\phi(i))$ et $n = \dim \mathcal{M}$. Cette façon de quantifier le modèle sigma a l'avantage d'être manifestement invariante par rapport aux reparamétrages de $\mathcal{M}$, à condition que $\mathcal{M}$ soit une variété *compacte*. Cette condition est nécessaire pour que la fonction de partition soit bien définie, car le poids d'une configuration constante sur $\mathcal{L}$, appelé *mode zéro*, est 1. Ainsi, la contribution du mode zéro à la fonction de partition est exactement le volume de $\mathcal{M}$, qui est défini si $\mathcal{M}$ est une variété compacte. Lorsque $\mathcal{M}$ est non-compacte, l'introduction d'un régulateur pour le mode zéro est nécessaire. On ne va pas discuter la forme générale d'un tel régulateur, mais plutôt remarquer qu'il peut briser certaines symétries de l'action.

Si on développe la métrique $g_{ab}(\phi(x))$ dans l'action (2.7) en puissances de $\phi^a(x)$

$$g_{ab}(\phi(x)) = g_{ab}(0) + \partial_c g_{ab}(0) \phi^c(x) + \frac{1}{2} \partial_c \partial_d g_{ab}(0) \phi^c(x) \phi^d(x) + \dots,$$

on obtient une théorie des champs avec une infinité de constantes de couplages $g_{ab}(0), \partial_c g_{ab}, \partial_c \partial_d g_{ab}(0), \dots$. En deux dimensions les modèles sigma ont la spécificité que toutes ces constantes de couplage ont une dimension zéro et, donc, en tant que théories quantiques des champs sont renormalisables. Le flot du groupe de renormalisation pour ces constantes de couplage modifie la géométrie de l'espace cible. Ce changement de géométrie peut être visualisé dans une fonction bêta

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_{ab}(\bar{\phi}, \mu) = \beta_{ab}(g) \quad (2.9)$$

qui doit être un tenseur symétrique covariant et qui s'obtient en rajoutant des contre-termes à l'action (2.7) pour rendre l'action effective $\Gamma[\bar{\phi}]$ finie et indépendante de l'échelle de renormalisation μ . Pour un espace cible géométrique la trajectoire que la métrique va suivre, dans l'espace de toutes les

métriques difféomorphes à $g_{ab}(\bar{\phi}, \mu)$, est un objet très compliqué. Néanmoins, si g_{ab} possède des isométries, alors le tenseur β_{ab} doit lui aussi être invariant par rapport à l'algèbre de Lie des isométries. Quelles sont les variétés $\mathcal{M}$ pour lesquelles les symétries de β_{ab} sont le plus contraignantes ?

Soit $\mathcal{M}$ un espace homogène, c'est-à-dire supposons qu'il existe un groupe de Lie G avec une action transitive ² sur $\mathcal{M}$. Soit O un point de base de $\mathcal{M}$ et H le sous-groupe de G qui laisse invariant ce point, c'est-à-dire H est le stabilisateur du point O . L'espace homogène $\mathcal{M}$ peut être alors identifié au quotient G/H . Si H est le sous-groupe d'éléments de G invariants par rapport à un automorphisme involutif σ , alors G/H est appelé espace symétrique. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G , $\mathfrak{h}$ — l'algèbre de Lie du sous-groupe H fixée par σ , et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l'espace vectoriel quotient inversé par σ . L'espace vectoriel $\mathfrak{m}$ fournit une représentation de $\mathfrak{h}$. Si le module $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ est irréductible, alors l'espace symétrique G/H est appelé irréductible. On peut montrer qu'un espace symétrique est irréductible s'il est soit une variété de groupe simple ou soit un espace homogène G/H avec G un groupe de Lie simple. Autrement dit, un espace symétrique irréductible n'est pas le produit direct de deux autres espaces symétriques.

On peut montrer que l'irréductibilité de $\mathfrak{m}$, en tant que représentation de $\mathfrak{h}$, implique que le tenseur métrique g_{ab} est fixé, à une constante de proportionnalité près, par la condition que son algèbre d'isométries est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En particulier, tous les tenseurs symétriques de rang deux qui ont les mêmes isométries que g_{ab} sont proportionnels à la métrique. Par conséquent, lorsque $\mathcal{M}$ est un espace symétrique irréductible le tenseur β_{ab} doit être proportionnel à g_{ab} . Ainsi, le changement de la géométrie de l'espace cible sous le flot du groupe de renormalisation se réduit à une dilatation uniforme dans tout son volume. On peut expliciter cela directement dans l'action (2.7) en factorisant une constante de couplage g_σ^2

$$S[\phi(x)] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma d^2x \partial_\mu \phi^a g_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^b \quad (2.10)$$

qui renormalise le modèle sigma sur l'espace symétrique irréductible $\mathcal{M}$ avec métrique g_{ab} fixée.

Les espaces symétriques $\mathcal{M}$ avec structure riemannienne ont été classifiés par E. Cartan [34] et sont de la forme $\mathcal{M} = G/K$ avec K un sous-groupe compact. Il faut noter que les seuls espaces symétriques compacts chiraux ³ avec structure riemannienne sont des groupes de Lie compacts.

Il est naturel de classifier les modèles sigma dans des familles correspondant à la symétrie G de l'action (2.10) et les ordonner à l'intérieur de ces familles par un degré de difficulté appelé le rang de l'espace symétrique. Techniquement, le rang de l'espace symétrique est défini comme la dimension du sous-espace maximal de l'espace tangent à l'intérieur duquel la courbure s'annule. Ceci se voit plus clairement dans la limite de couplage faible $g_\sigma \rightarrow 0$ où le modèle sigma se réduit à la mécanique

² G agit de façon transitive sur $\mathcal{M}$ si pour toute paire des points $P, Q \in \mathcal{M}$ il existe un $g \in G$ tel que $P = g \cdot Q$. En particulier, tous les points de $\mathcal{M}$ peuvent être obtenus par l'action de G sur un point de base $O \in \mathcal{M}$.

³Un espace symétrique est appelé chiral s'il admet deux action — à gauche et à droite — de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et si ces deux actions commutent entr'elles.

quantique d'une particule qui se déplace librement sur l'espace cible $\mathcal{M}$. Mathématiquement ce problème est équivalent à l'analyse harmonique de l'espace symétrique $\mathcal{M}$ dont la difficulté croît sensiblement avec le rang de $\mathcal{M}$.

Les modèles sigma les plus étudiés sont, sans doute, les modèles sur les sphères $S^{N-1} \simeq \text{SO}(N)/\text{SO}(N-1)$, qui peuvent être définis de façon équivalente par l'action

$$S[n(x)] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma d^2x \partial_\mu n^i \partial_\mu n^i, \quad \sum_{i=1}^N n^i(x)^2 = 1. \quad (2.11)$$

L'avantage de cette formulation est la linéarité de l'action du groupe de symétrie $\text{O}(N)$ sur les variables $n^i(x)$, par contraste avec l'éq. (2.10).

Le modèle sigma sphérique est le représentant le plus simple des modèles sigma sur les grassmanniennes réelles

$$GR(N, n) = \frac{\text{O}(N)}{\text{O}(N-n) \times \text{O}(n)}. \quad (2.12)$$

L'analogue des grassmanniennes $GR(N, n)$ pour les modèles sigma avec symétrie $\text{U}(N)$ sont les grassmanniennes complexes

$$GC(N, n) = \frac{\text{U}(N)}{\text{U}(N-n) \times \text{U}(n)} \quad (2.13)$$

dont le représentant le plus simple est la série des espaces complexes projectifs $GC(N, 1) \simeq \mathbb{C}P^{N-1}$. Lorsque on veut exploiter la linéarité de l'action du groupe de symétrie pour les modèles sigma sur des grassmanniennes on peut écrire une action analogue à l'action des modèles sigma sphériques (2.11). Pour cela il faut remarquer que la position d'un point sur le quotient $\text{O}(N)/\text{O}(N-n)$ ou $\text{U}(N)/\text{U}(N-n)$ est fixée par n vecteurs orthonormaux $z_1, \dots, z_n$ dans l'espace euclidien ou, respectivement, hilbertien à N dimensions. Ce sont les variables dynamiques, soumises à des contraintes, analogues à $n^i(x)$ dans l'éq. (2.11). Les coordonnées z_i sont redondantes, car le point sur la grassmannienne qu'elles décrivent est le plan qui passe par les sommets des z_i . Soit $\text{O}(n)$ ou $\text{U}(n)$ le groupe qui transforme les z_i sans briser l'orthonormalité tout en les laissant dans le même plan. Alors, la classe d'équivalence $\text{O}(n) \cdot z_1 \otimes z_2 \otimes \dots \otimes z_n$ ou $\text{U}(n) \cdot z_1 \otimes z_2 \otimes \dots \otimes z_n$ est un point sur la grassmannienne $GR(N, n)$ ou, respectivement, $GC(N, n)$. Comme les $z_i(x)$ sont des variables dynamiques, le dernier quotient s'effectue en demandant que l'action ait une invariance de jauge locale par les transformations de $\text{O}(n)$ ou $\text{U}(n)$. Au final, l'action qui décrit les modèles sigma sur les grassmanniennes doit avoir la forme suivante

$$S[z_1(x), \dots, z_n(x)] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma d^2x \text{tr} D_\mu z^\dagger D_\mu z, \quad z^\dagger(x)z(x) = \text{id}_{n \times n}, \quad (2.14)$$

où z est une matrice $N \times n$ avec $z_{ij} = (z_j)_i$ et la dérivée covariante est définie comme

$$D_\mu z = \partial_\mu z - z A_\mu, \quad D_\mu z^\dagger = \partial_\mu z^\dagger + A_\mu z^\dagger, \quad (2.15)$$

ce qui montre que z est covariant tandis que $z^\dagger$ est contravariant par rapport aux transformations de jauge $O(n)$ ou $U(n)$

$$\begin{aligned} h \times z &\rightarrow zh^\dagger \\ h \times A_\mu &\rightarrow hA_\mu h^\dagger - \partial_\mu h h^\dagger \end{aligned}$$

qui laissent invariante l'action (2.14). L'invariance de l'action (2.14) par rapport aux transformations globales $O(N)$ ou $U(N)$

$$g \times z \rightarrow gz$$

est évidente. La connexion A_μ n'est pas un champ dynamique et, après son intégration, on obtient

$$A_\mu = z^\dagger \partial_\mu z \quad (2.16)$$

qui vérifie la condition d'auto-dualité $A_\mu^\dagger = -A_\mu$. Lorsque $n = 1$ et z est un champ vectoriel réel l'action (2.14) se réduit à l'action (2.11), tandis que si z est complexe on obtient le modèle CP^{N-1} avec invariance de jauge $U(1)$.

Une autre classe de modèles sigma particulièrement étudiée est constituée par les modèles sigma sur des groupes de Lie *compacts*, qui s'appellent les modèles sigma principaux chiraux. Soit $\mathcal{M} = G$ un groupe de Lie compact, alors tous les représentations de G sur des espaces de Hilbert de dimension finie sont unitaires. À toute représentation unitaire $R : G \rightarrow U(V)$ sur un espace de Hilbert V on peut associer une métrique bi-invariante

$$\text{tr}_V dR(g) dR^\dagger(g) = \sum_{a,b} dR_{ab}(g) dR_{ab}^*(g). \quad (2.17)$$

qui définit une action avec un espace cible G

$$S_V[g(x)] = \frac{1}{4\lambda^2} \int_\Sigma d^2x \text{tr}_V \partial_\mu R(g) \partial_\mu R^\dagger(g) \quad (2.18)$$

qui est du type (2.7) en termes des champs qui paramètrent G . Cette action est invariante par rapport aux reparamétrages de G par translation à gauche ou à droite

$$S_V[h_L g(x)] = S_V[g(x) h_R^{-1}] = S_V[g(x)], \quad h_L \in G_L, h_R \in G_R \quad (2.19)$$

La mesure de Haar $d\mu(g)$ permet de quantifier le modèle sigma chiral. La mesure de l'intégrale fonctionnelle

$$\mathcal{D}[g(x)] = \prod_{x \in \Sigma} d\mu(g(x)).$$

ne jouit d'une symétrie globale $G_L \times G_R$ de reparamétrage que si G est un groupe unimodulaire. Pour les groupes de Lie simples les métriques dans l'éq. (2.17) sont proportionnelles. Il est ainsi possible de parler d'un modèle sigma sur G sans spécifier la représentation R qui a été utilisée pour construire l'action.

La généralisation de la définition des modèles sigma pour le cas où l'espace cible est une supervariété riemannienne est directe. L'intégrale fonctionnelle converge car la sous-variété de base d'une supervariété riemannienne est une variété riemannienne. La généralisation de la notion

d'espace symétrique G/H pour le cas où G est un supergroupe est moins évidente. Ce problème a été traité soigneusement par M. Zirnbauer en [82]. Une différence importante par rapport aux espaces symétriques c'est le conflit entre la compacité ⁴ de $\mathcal{M}$ et la structure riemannienne pour la sous-variété de base. Plus précisément, soit $\mathfrak{h}$ la superalgèbre de Lie du supergroupe H et notons par $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l'espace vectoriel quotient. L'origine de ce conflit se trouve dans la façon dont la forme bilinéaire, non-dégénérée, consistante, supersymétrique, invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$, qui induit la métrique sur $\mathcal{M}$ par restriction à $\mathfrak{m}$, est définie. Soit $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ la représentation fidèle sur $V \simeq V_0 \oplus V_1$ qui définit la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle X, Y \rangle = \text{str}_V R(X)R(Y).$$

Si maintenant $m \in \mathfrak{m}_0$ se décompose comme $m = m_0 + m_1$ avec $R(m_0) \in \text{End } V_0$, $R(m_1) \in \text{End } V_1$ et $\langle m_0, m_1 \rangle = 0$, alors la restriction $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{m}_0}$

$$\langle m, m \rangle = \text{tr}_{V_0} R(m_0)^2 - \text{tr}_{V_1} R(m_1)^2$$

est positive définie si et seulement si $R(m_0) = R(m_0)^\dagger = R(m_0^\dagger)$ et $R(m_1) = -R(m_1)^\dagger = R(-m_1^\dagger)$. Comme R est fidèle on a $m_0^\dagger = m_0$ et $m_1^\dagger = -m_1$. Par l'application $\exp : \mathfrak{m} \rightarrow G$ suivie de la projection sur $\mathcal{M}$ on voit que la sous-variété de base a une composante non-compacte, engendrée par $\{m_0 \in \mathfrak{m} \mid R(m_0) \in \text{End } V_0\}$, et une composante compacte, engendrée par $\{m_0 \in \mathfrak{m} \mid R(m_0) \in \text{End } V_0\}$. Ces ensembles dépendent de la représentation choisie seulement à travers la graduation du module fidèle $V \simeq V_0 \oplus V_1$. Au final, on arrive à conclure que dans la classe des espaces symétriques qui généralisent les grassmanniennes complexes et réelles des éqs. (2.12, 2.13) seulement les trois séries

$$\frac{\text{OSp}(m_1 + m_2|2n)}{\text{O}(m_1) \times \text{OSp}(m_2|2n)',} \quad \frac{\text{OSp}(m|2n_1 + 2n_2)}{\text{OSp}(m|2n_1) \times \text{Sp}(2n_2)',} \quad \frac{\text{GL}(m_1 + m_2|n)}{\text{GL}(m_1) \times \text{GL}(m_2|n)}$$

ont une forme compacte, où tous les supergroupes sont définis sur une algèbre de Grassmann complexe. Les représentants compacts les plus simples sont les supersphères

$$S^{n-1|2m} = \frac{\text{OSp}(m|2n)}{\text{OSp}(m-1|2n)}$$

et les superespaces projectifs

$$\mathbb{C}P^{m-1|n} = \frac{\text{U}(m|n)}{\text{U}(1) \times \text{U}(m-1|n)',}$$

où cette fois-ci tous les supergroupes sont pris dans leur forme compacte.

Au final, notons que, selon la discussion qu'on vient de faire, il n'est pas possible de réconcilier la structure de supergroupe avec une structure de supervariété riemannienne, à l'exception du supergroupe $\text{OSp}(1|2S)$. Dans tous les autres cas, pour que la métrique soit définie positive la sous-variété de base doit être un produit direct entre

⁴Une supervariété est compacte si la sous-variété de base est compacte.

une variété de groupe compacte et une variété principale chirale non-compacte. Par exemple, pour que le supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$ soit un superespace symétrique avec structure riemannienne la sous-variété de base peut être soit $\text{O}(R) \times \text{Sp}(2S, \mathbb{C}) / \text{Sp}(S)$ soit $\text{O}(R, \mathbb{C}) / \text{O}(R) \times \text{Sp}(S)$, où $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(2S, \mathbb{C}) \cap \text{SU}(2S)$. En conclusion, les modèles sigma sur les supergroupes, à l'exception de $\text{OSp}(1|2S)$, n'admettent pas une quantification par l'intégrale fonctionnelle.

2.2.2 Effets quantiques

L'action (2.11) des modèles sigma fournit un tenseur énergie-impulsion classique

$$T_{\mu\nu} = \frac{g_{ab}(\phi)}{g_\sigma^2} \left(\partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b - \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \partial_\rho \phi^a \partial_\rho \phi^b \right)$$

qui, dans les coordonnées holomorphes et anti-holomorphes

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

construites à partir des coordonnées euclidiennes x, y , est de trace nulle

$$T_{xx} + T_{yy} = 4T_{z\bar{z}} = 0.$$

Par conséquent, la conservation du tenseur énergie-impulsion prend dans les coordonnées $z, \bar{z}$ une forme simplifiée

$$\bar{\partial} T_{z\bar{z}} = 0, \quad \partial T_{z\bar{z}} = 0 \quad (2.20)$$

ce qui révèle l'invariance conforme des modèles sigma au niveau classique.

Les lois de conservation de la théorie classique peuvent ne plus être valides dans la théorie quantique. Les termes qu'il faut rajouter aux équations de conservation classiques pour qu'elles soient valides dans la théorie quantique sont appelés des *anomalies*. Lorsque les anomalies peuvent être ramenées à une forme qui est une divergence totale alors on peut les interpréter comme des corrections quantiques aux courants classiques ou des déformations quantiques des symétries classiques. Dans le cas contraire les fluctuations quantiques brisent les symétries classiques.

Regardons, à titre illustratif, quelles sont les anomalies possibles dans les éqs. (2.20). Pour être plus précis, on veut trouver une base pour les anomalies compatibles avec les nombres quantiques des champs dans les éqs. (2.20). Évidemment, si la théorie classique est invariante sous les transformations de symétrie du groupe de Poincaré dans l'espace-temps, alors la théorie quantique le sera aussi et, donc, les anomalies des éqs. (2.20) sont nécessairement des divergences totales. À première vue, les corrections possibles sont une combinaison linéaire des scalaires ⁵

$$\partial \phi^a D \bar{\partial} \phi^b J_{ab}(\phi), \quad D \partial \phi^a \bar{\partial} \phi^b K_{ab}(\phi),$$

pour $\bar{\partial} T_{z\bar{z}} = 0$ et des scalaires

$$\partial \phi^a \bar{D} \partial \phi^b \bar{J}_{ab}(\phi), \quad \bar{D} \bar{\partial} \phi^a \partial \phi^b \bar{K}_{ab}(\phi),$$

⁵Les termes $\partial \phi^a \partial \phi^b \bar{\partial} \phi^c L_{abc}(\phi)$ ne sont pas possibles, car ils ne respectent pas l'invariance par rapport aux inversions dans la feuille d'univers.

pour $\partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, où $J, \bar{J}, K, \bar{K}$ sont des tenseurs invariants, c'est-à-dire constants par rapport aux dérivées covariantes de l'espace cible ∇_a et $D, \bar{D}$ sont les générateurs des translations dans l'espace cible induites par les translations $dz, d\bar{z}$ de la feuille d'univers. Étant donné que les anomalies sont définies modulo des opérateurs qui s'annulent grâce aux équations de mouvement

$$D\bar{\partial}\phi^a = \bar{D}\partial\phi^a = \partial\bar{\partial}\phi^a + \Gamma_{bc}^a \partial\phi^b \bar{\partial}\phi^c = 0$$

et que sur un (super)espace symétrique il existe, à un facteur scalaire près, un seul tenseur invariant de rang deux, on voit que la version quantique la plus générale des éqs. (2.20) est

$$\bar{\partial}T_{zz} + \alpha\partial\left(g_{ab}(\phi)\partial\phi^a\bar{\partial}\phi^b\right) = 0, \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \beta\bar{\partial}\left(g_{ab}(\phi)\partial\phi^a\bar{\partial}\phi^b\right) = 0.$$

Ces anomalies s'interprètent comme la nécessité de modifier l'expression du tenseur énergie-impulsion dans la théorie quantique. Si, effectivement, $\alpha, \beta \neq 0$ la théorie quantique n'est plus invariante conforme.

Une conséquence des éqs. (2.20) est l'existence d'une infinité de courants conservés

$$\bar{\partial}T_{zz}^n = 0, \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}}^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Une théorie quantique des champs est, par définition, *intégrable* s'il existe une infinité de courants conservés. Comme cela a été montré par les Zamolodchikov en [80], dans une telle théorie il n'y a pas de création de particules et les éléments de la matrice S associés au processus de diffusion de plusieurs particules se factorisent sur les éléments de la matrice S associés au processus de diffusion de deux particules.⁶

L'existence de courants quantiques, induits par les versions quantiques des éqs. (2.21), dans les modèles sigma principaux chiraux sur $SO(N)$ et $SU(N)$, ainsi que pour les modèles sigma sur S^{N-1} et $\mathbb{C}P^{N-1}$ a été considérée en [28]. Par exemple, en faisant le même genre d'analyse qu'on vient de faire pour le tenseur énergie-impulsion, les auteurs de [28] trouvent que la version quantique de $\bar{\partial}T_{zz}^2 = 0$ pour le modèle sigma S^{N-1} , défini dans l'éq. (2.11), est

$$\bar{\partial}(\partial n \partial n)^2 = \alpha\bar{\partial}[(\partial^2 n \partial^2 n)] + \beta\bar{\partial}[(\partial n \bar{\partial} n)(\partial n \partial n)] + \gamma\bar{\partial}[\partial^2 n \bar{\partial} n].$$

Il s'avère que parmi les modèles mentionnés, seul le modèle sigma sur $\mathbb{C}P^{N-1}$, pour $N > 1$, n'admet pas d'autres courants conservés que le tenseur énergie-impulsion. Ceci est un signe fort que les fluctuations quantiques changent de façon drastique la physique du modèle sigma classique sur $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Dans cette thèse on n'est intéressé que par les modèles sigma quantiques conformes en deux dimensions. Pour qu'une théorie quantique des

⁶Plus généralement, dans une théorie des champs intégrable les éléments de la matrice S associés à un processus arbitraire de diffusion se factorisent sur les éléments de la matrice S associés à un processus de diffusion *élémentaire*. Dans la plupart des exemples connus le processus élémentaire est la diffusion de deux particules. Néanmoins, on peut imaginer des théories avec des "lois de sélection", imposées par les symétries du problème, qui, effectivement, interdisent les diffusions à deux particules, par exemple des généralisations du modèle à six-vertex sur le réseau triangulaire.

champs en deux dimensions soit invariante conforme, c'est-à-dire ait un tenseur énergie-impulsion de trace nulle, il suffit qu'elle soit invariante par rapport aux translations, aux rotations et au changement d'échelle [6, 24, 50]. Dans la quantification sur le réseau des modèles sigma compacts, introduite dans la sec. 2.2.1, l'invariance par rapport aux translations et aux rotations est évidente, dans la limite continue. Le comportement de la théorie par rapport aux changements d'échelle, c'est-à-dire la modification du nombre de sites du réseau $\mathcal{L}$ de la sec. 2.2.1, est décrit par le groupe de renormalisation. La théorie quantique est n'invariante par rapport aux changements d'échelle qu'aux points fixes du groupe de renormalisation, c'est-à-dire lorsque la fonction bêta de l'éq. (2.9) s'annule.

Illustrons comment on calcule, à une boucle, la fonction bêta d'un modèle sigma générique. Pour donner un sens aux intégrales fonctionnelles dans les calculs perturbatifs, la régularisation dimensionnelle est plus adaptée que la régularisation sur le réseau. Son avantage principal est de rendre plate la mesure de l'intégrale fonctionnelle.

Soit $\bar{\phi}(x)$ une solution des équations classiques de mouvement du champ $\phi(x)$ "dans le vide"

$$D_\mu \partial_\mu \bar{\phi}^a(x) = 0, \quad (2.22)$$

où D_μ est la dérivée covariante dont l'action sur un vecteur contravariant $V^a(x)$ est

$$D_\mu V^a = (\partial_\mu \delta_b^a + \partial_\mu \phi^c \Gamma_{bc}^a) V^b. \quad (2.23)$$

Pour renormaliser le modèle sigma il suffit de rendre finie la fonction de partition

$$\int \mathcal{D}[\phi] e^{-S[\phi]},$$

calculée par la méthode de la phase stationnaire autour de la solution classique $\bar{\phi}(x)$, en rajoutant des contre-termes à l'action $S[\phi]$. La fonction de partition perturbative dépend du point où la phase devient stationnaire. On introduit l'action effective

$$e^{-\Gamma[\bar{\phi}]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-S[\bar{\phi}+\phi]}, \quad (2.24)$$

où la solution classique $\bar{\phi}$ de l'éq. (2.22) est appelée *champ de fond* et ϕ décrit les fluctuations quantiques sur le champ de fond. Notons que cette définition de l'action effective n'est pas du tout standard. La difficulté de définir l'action effective comme la transformée de Legendre de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes est reliée à la non-covariance du terme source

$$\int_\Sigma d^2x J^a(x) \phi^a(x)$$

typique des modèles sigma *linéaires*.⁷

Un calcul de l'action effective directement à partir de la définition (2.24), c'est-à-dire en effectuant une intégration gaussienne sur ϕ

⁷Un modèle sigma linéaire est une théorie des champs définie par une certaine action sur un ensemble de champs fondamentaux dont toutes les transformations de symétrie qui laissent l'action invariante forme un groupe de Lie et sont réalisées linéairement.

après avoir développé l'action $S[\bar{\phi} + \varphi]$ jusqu'au deuxième ordre en puissances de φ n'est pas satisfaisant, car on recherche une interprétation géométrique pour la fonction bêta et, donc, toutes les expressions dans les calculs intermédiaires doivent être manifestement covariantes. La série de Taylor pour $S[\bar{\phi} + \varphi]$ en puissances de φ n'est évidemment pas covariante.

La façon covariante de procéder est de développer $S[\bar{\phi} + \varphi]$ en fonction du vecteur tangent ξ en $\bar{\phi}$ le long de la géodésique qui relie $\bar{\phi}$ à $\bar{\phi} + \varphi$. Elle est connue dans la littérature sous le nom de *la méthode du champ de fond*. Les calculs sont assez techniques et je préfère envoyer le lecteur vers quelques très bonnes références [10, 11]. Après des calculs proprement faits on obtient l'expression suivante pour $S[\bar{\phi} + \varphi]$ jusqu'au deuxième ordre en ξ

$$S[\bar{\phi} + \varphi] = S[\bar{\phi}] + S^{(2)}[\xi, \bar{\phi}]$$

avec

$$S^{(2)}[\xi, \bar{\phi}] = \frac{\mu^{d-2}}{2} \int d^d x \left[D_\mu \xi^a g_{ab}(\bar{\phi}) D_\mu \xi^b + R_{abcd}(\bar{\phi}) \xi^b \xi^c \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial_\mu \bar{\phi}^d \right],$$

où R_{abcd} est le tenseur de courbure de Riemann et μ est l'échelle de renormalisation. L'évaluation de l'intégrale gaussienne

$$e^{-\Gamma[\phi]} = e^{-S[\bar{\phi}]} \int \mathcal{D}[\xi] e^{-S^{(2)}[\xi, \bar{\phi}]}$$

peut être effectuée par différentes méthodes [10]. Une façon de procéder est d'utiliser un *vielbein* V_a^i pour factoriser la métrique

$$g_{ab} = V_a^i V_b^j g_{ij}, \quad V_a^i V_b^j g^{ab} = \delta^{ij}.$$

et faire apparaître le terme de l'action libre

$$S_0 = \frac{\mu^{d-2}}{2} \int d^d x \partial_\mu \xi^i \partial_\mu \xi^i$$

pour les champs

$$\xi^i = \xi^a V_a^i.$$

dans $S^{(2)}$. Enfin, on utilise la formule $\langle e^x \rangle = e^{\frac{\langle x^2 \rangle}{2}}$, pour une variable aléatoire x de distribution gaussienne pour calculer l'action effective à une boucle

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\bar{\phi}] + \frac{G(0)\mu^{d-2}}{2} \int_\Sigma d^d x R_{ab} \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial_\mu \bar{\phi}^b,$$

où

$$G(0) = \frac{1}{2\pi(2-d)} + \dots$$

est la régularisation dimensionnelle du propagateur

$$\langle \xi^i(x) \xi^j(y) \rangle = \delta^{ij} G(x-y)$$

lorsque $x \rightarrow y$ et R_{ab} est le tenseur de Ricci. On rajoute un contre-terme à $S[\phi]$ tel que $\Gamma[\bar{\phi}]$ est finie dans la limite $d \rightarrow 2$. En demandant que

$\Gamma[\bar{\phi}]$ soit indépendant de l'échelle de renormalisation μ on obtient dans la limite $d \rightarrow 2$ le résultat de Friedan [25]

$$\mu \frac{dg_{ab}}{d\mu} = \frac{R_{ab}}{2\pi} + \dots \quad (2.25)$$

Le formalisme manifestement covariant qu'on a choisi révèle une interprétation géométrique de la fonction bêta et nous fournit un critère nécessaire simple, mais pas forcément suffisant, que doivent satisfaire les modèles sigma quantiques et conformes pour *toute* valeur de la constante de couplage g_σ .

Pour comprendre comment l'éq. (2.25) se simplifie pour les espaces symétriques $\mathcal{M} = G/H$ irréductibles on a besoin de comprendre un peu plus la géométrie de ces derniers. À la base de la géométrie différentielle des espaces symétriques se trouvent les vecteurs de Killing. Ils sont introduits de la façon suivante. Les éléments du groupe de Lie simple compact G peuvent être paramétrés au voisinage de l'identité par $e^{i\lambda^\alpha T_\alpha}$, où T_α sont un ensemble hermitien de générateurs du groupe

$$[T_\alpha, T_\beta] = if_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma,$$

et les coordonnées locales λ^α sont réelles de même que les constantes de structure $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$. L'action d'un élément infinitésimal $e^{i\delta\lambda^\alpha T_\alpha}$ du groupe G induit une translation infinitésimale $\delta\phi^i$ sur l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$, paramétré par les coordonnées locales ϕ^i . La matrice de proportionnalité entre $\delta\lambda^\alpha$ et $\delta\phi^i$ définit les vecteurs de Killing

$$\delta\phi^i = \delta\lambda^\alpha A_\alpha^i(\phi). \quad (2.26)$$

Il est possible de donner une formule générale explicite pour les vecteurs de Killing. Pour la déduire on utilise la définition de l'espace symétrique en tant qu'espace homogène. Un point sur $\mathcal{M} = G/H$ est une classe d'équivalence gH , où $g \in G$. Rappelons qu'on dénote par $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe H , fixée par l'automorphisme involutif σ

$$\sigma A \sigma = A, \quad A \in \mathfrak{h}$$

et par $\mathfrak{m}$ l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ inversé par σ

$$\sigma X \sigma = -X, \quad X \in \mathfrak{m},$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe G . En particulier, ceci veut dire que

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

et que $\mathfrak{m}$ est une représentation de $\mathfrak{h}$. Montrons qu'on peut paramétrer $\mathcal{M} = G/H$, au voisinage de l'identité, comme $e^X H$, où $X \in \mathfrak{m}$. Toute élément g du groupe G peut être représenté de façon unique en tant que produit

$$g = mh, \quad \sigma m \sigma = m^{-1}, \quad \sigma h \sigma = h \in H, \quad (2.27)$$

où, au voisinage de l'identité, $m \in e^\mathfrak{m}$. En effet, les éléments m et h sont déterminés de façon unique par les expressions suivantes

$$m = \sqrt{g\sigma g^{-1}\sigma}, \quad h = m^{-1}g$$

On conclut donc qu'au voisinage de l'identité chaque $X \in \mathfrak{m}$, où $m = e^X$, paramètre une classe d'équivalence différente $e^X H$ du quotient $\mathcal{M} = G/H$. La question de calcul des vecteurs de Killing revient à déterminer δX dans la formule

$$e^{\delta L} \cdot e^X H = e^{X+\delta X} H \quad (2.28)$$

au premier ordre dans $\delta L \in \mathfrak{g}$. Pour comprendre encore mieux la signification de l'éq. (2.28) prenons un élément arbitraire g du groupe de Lie simple compact G au voisinage de l'identité et représentons le sous la forme (2.27)

$$g = e^X e^A, \quad X \in \mathfrak{m}, \quad A \in \mathfrak{h}. \quad (2.29)$$

Alors le résultat de l'action infinitésimale de $e^{\delta L}$ sur g peut être à nouveau factorisé comme dans l'éq. (2.29)

$$e^{\delta L} \cdot g = e^{\delta L} \cdot e^X e^A = e^{X+\delta X} e^{A+\delta A} \quad (2.30)$$

avec $\delta X \in \mathfrak{m}$ et $\delta A \in \mathfrak{h}$. Le sens non-trivial de cette équation revient aux deux faits suivants : i) δX et δA sont déterminés de façon unique par δL et $\sigma \delta L \sigma$ et ii) δX ne dépendent pas de A , mais que de δL et X . Le dernier fait permet de passer de l'éq. (2.30) à l'éq. (2.28).

En utilisant une version de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{Z+\delta Z} = \left(1 + \frac{e^{\text{ad } Z} - 1}{\text{ad } Z} \delta Z\right) e^Z + \mathcal{O}(\delta Z^2)$$

on montre que

$$\delta X = \frac{\text{ad } X}{\tanh \text{ad } X} \cdot \delta L_{\mathfrak{m}} - \text{ad } \delta L_{\mathfrak{h}} \cdot X, \quad (2.31)$$

où $\delta L_{\mathfrak{m}}$ et $\delta L_{\mathfrak{h}}$ sont les composantes de δL par rapport à la décomposition $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. En écrivant l'éq. (2.31) dans des coordonnées, après le choix d'un ensemble de générateurs T_α de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on arrive à une expression explicite des vecteurs de Killing de l'éq. (2.26)

Notons quelques particularités de l'éq. (2.31). Tout d'abord il y a deux types de vecteurs de Killing : linéaires et non-linéaires dans les coordonnées $X = \phi^i T_i \in \mathfrak{m}$. En effet, on voit de l'éq. (2.31) que les vecteurs de Killing qui correspondent aux générateurs de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sont linéaires dans les coordonnées $X = \phi^i T_i \in \mathfrak{m}$, tandis que les vecteurs de Killing qui correspondent aux générateurs de l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{m}$ sont non-linéaires. Ensuite, au point de l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ qui correspond à la classe d'équivalence de l'origine du groupe, c'est-à-dire pour $\phi^i = 0$, les vecteurs de Killing devient

$$A_\alpha^i(0) = \delta_\alpha^i. \quad (2.32)$$

L'action infinitésimale du groupe G sur l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ peut être représentée de façon plus élégante par des dérivées de Lie définies comme

$$\mathcal{L}_\alpha = iT_\alpha, \quad (2.33)$$

où on comprend par T_α la représentation différentielle du générateur dans l'espace des fonctions où tenseurs sur l'espace symétrique. Par exemple, la dérivée de Lie d'un scalaire $V(\phi)$ est

$$\delta \lambda^\alpha \mathcal{L}_\alpha V(\phi) = V(\phi + \delta \phi) - V(\phi) = \delta \lambda^\alpha A_\alpha^i V_{,i}(\phi),$$

où $\delta\phi$ est défini dans l'éq. (2.26). Pour calculer la dérivée de Lie d'un vecteur il faut tenir compte non pas seulement de la translation du point de base ϕ induite par l'action infinitésimale du groupe $e^{i\delta\lambda^\alpha T_\alpha}$, mais aussi de la façon dont les vecteurs de base de l'espace tangent se transforment sous cette action. Par exemple, si $V^i(\phi)$ est un vecteur, alors la dérivée de Lie est défini par

$$\begin{aligned}\delta\lambda^\alpha (\mathcal{L}_\alpha V^i(\phi)) \frac{\partial}{\partial\phi^i} &= V^i(\psi) \frac{\partial}{\partial\psi^i} - V^i(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi^i} \\ &= \delta\lambda^\alpha (A_\alpha^j(\phi) V_{j,i}^i(\phi) - A_{\alpha,j}^i(\phi) V^j(\phi)) \frac{\partial}{\partial\phi^i},\end{aligned}\quad (2.34)$$

où $\psi = \phi + \delta\phi$. Pour calculer la dérivée de Lie dans l'éq. (2.34) on a utilisé le Jacobien

$$\left. \frac{\partial\psi^i}{\partial\phi^j} \right|_\phi \approx \delta_j^i + \delta\lambda^\alpha A_{\alpha,j}^i(\phi)$$

de la transformation infinitésimale des coordonnées $\phi \rightarrow \psi$. De la même façon on calcule les dérivées de Lie des tenseurs de rang plus élevés.

Le fait (2.33) que les dérivées de Lie sont une représentation différentielle des générateurs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ implique qu'ils se transforment dans la représentation adjointe

$$\mathcal{L}_\alpha A_\beta^i = A_\alpha^j A_{\beta,j}^i - A_{\alpha,j}^i A_\beta^j = -f_{\alpha\beta}{}^\gamma A_\gamma^i. \quad (2.35)$$

Jusqu'à présent on n'a pas encore parlé de la métrique. Elle est définie par la condition qu'elle soit un tenseur covariant de rang deux invariant par rapport à l'action du groupe G , c'est-à-dire annihilée par les dérivées de Lie. Explicitement on a

$$\mathcal{L}_\alpha g^{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_\alpha^{ij} + A_\alpha^{ji} = 0, \quad (2.36)$$

où les dérivées covariantes sont par rapport à la connexion de Levi-Civita. On vérifie à l'aide de l'éq. (2.35) que

$$g^{(0)ij} = A_\alpha^i A_\beta^j \kappa^{\alpha\beta}$$

est une solution de l'équation de Killing éq. (2.36), où $\kappa^{\alpha\beta}$ est l'inverse de la forme invariante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle.$$

On montre dans la suite que

$$g^{ij} = g_\sigma^2 g^{(0)ij} = g_\sigma^2 A_\alpha^i A_\beta^j \kappa^{\alpha\beta}, \quad (2.37)$$

où g_σ^2 est une constante de proportionnalité, est la solution la plus générale de l'éq. (2.36) si et seulement si $\mathfrak{m}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire si et seulement si l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ est irréductible.

Pour voir cela on remarque que l'invariance de la métrique par rapport à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ au point $\phi = 0$ revient à

$$\mathcal{L}_a g^{ij}(0) = A_a^k(0) g_{,k}^{ij}(0) + A_{a,k}^i(0) g^{kj}(0) + A_{a,k}^j(0) g^{ik}(0) = 0,$$

où T_a est la restriction de la base T_α de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. Á l'aide de l'éq. (2.31) cette expression peut être ramenée à la forme

$$(R_m(T_a) \cdot G^{-1}(0))^{ij} = R_m(T_a)^i_k g^{kj}(0) + R_m(T_a)^j_k g^{ik}(0) = 0, \quad (2.38)$$

où $R_m(T_a)$ est la représentation du générateur T_a dans l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$

$$R_m(T_a)^j_i = i f_{ai}^j = i A_{a,i}^j(0), \quad (2.39)$$

G^{-1} est la matrice avec des éléments g^{ij} vue en tant qu'homomorphisme $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{C}$ qui commute avec l'action de $\mathfrak{h}$ et $\cdot$ dénote l'action de $\mathfrak{h}$ sur le module tensoriel $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$. Selon le lemme de Schur, si $\mathfrak{m}$ est irréductible, alors tous les scalaires du module tensoriel $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$ sont proportionnels entre eux ou, en d'autres mots, tous les homomorphismes $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{C}$ de modules de $\mathfrak{h}$ sont proportionnels entre eux. Mais de l'autre côté

$$g^{(0)ij}(0) = \kappa^{ij}$$

est un de tels homomorphismes

$$\begin{aligned} T_a \cdot \langle T^i, T^j \rangle &= \langle \text{ad } T_a T^i, T^j \rangle + \langle T^i, \text{ad } T_a T^j \rangle = \langle [T_a, T^i], T^j \rangle + \langle T^i, [T_a, T^j] \rangle \\ &= - \langle [T^i, T_a], T^j \rangle + \langle T^i, [T_a, T^j] \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

où on a utilisé l'invariance de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On voit donc que la forme la plus générale de la métrique au point $\phi = 0$, pour un espace symétrique irréductible, est

$$g^{ij}(0) = g_\sigma^2 A_\alpha^i(0) A_\beta^j(0) \kappa^{\alpha\beta},$$

mais comme ceci est une égalité tensorielle elle doit être vraie partout. On arrive à conclure que l'éq. (2.37) est la forme la plus générale de la métrique sur un espace symétrique irréductible.

On calcule le tenseur de Riemann à partir de la définition

$$[\nabla_k, \nabla_l] A_\alpha^i = R_{jkl}^i A_\alpha^j.$$

Pour cela on a besoin de calculer les dérivées covariantes des vecteurs de Killing. On utilise l'équation de Killing (2.36) et l'éq. (2.35) pour arriver à

$$A_\alpha^{jk} = -g_\sigma^2 \left(\delta_\beta^\alpha - \frac{1}{2} m_\alpha^\beta \right) f_{\beta\gamma\delta} A^{j\gamma} A^{k\delta}, \quad (2.41)$$

où $m_{\alpha\beta}$ est la quantité

$$m_{\alpha\beta} = g_\sigma^2 g(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta) = g_\sigma^2 A_\alpha^i A_\beta^j g_{ij}.$$

Notons qu'on lève et descend les indices de groupe G à l'aide la forme invariante $\kappa_{\alpha\beta}$. Pour être complet, on élabore un peu sur le sens de la quantité $m_{\alpha\beta}$. On vérifie facilement que m_α^β est un projecteur

$$m_\alpha^\gamma m_\gamma^\beta = m_\alpha^\beta.$$

De façon équivalente, $m_{\alpha\beta}$ est un endomorphisme de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ qui commute avec l'action de $\mathfrak{g}$

$$\mathcal{L}_\alpha \cdot \frac{m_{\beta\gamma}}{g_\sigma^2} = \mathcal{L}_\alpha \cdot g(\mathcal{L}_\beta, \mathcal{L}_\gamma) = g(\text{ad } \mathcal{L}_\alpha \cdot \mathcal{L}_\beta, \mathcal{L}_\gamma) + g(\mathcal{L}_\beta, \text{ad } \mathcal{L}_\alpha \cdot \mathcal{L}_\gamma) = 0,$$

où on a appliqué un raisonnement similaire à celui de l'éq. (2.40). Mit dans une forme plus abstraite, ce dernier résultat est une manifestation du fait qu'il existe une projection de l'espace tangent du groupe de Lie G vers l'espace tangent de l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ qui commute avec l'action de $\mathfrak{g}$. Cette remarque donne plus de sens à l'équation

$$m_{\alpha}^{\beta} A_{\beta}^i = A_{\alpha}^i$$

qu'on vérifie facilement.

À l'aide de l'éq. (2.41) on arrivent à exprimer le tenseur de courbure de Riemann par des vecteurs de Killing et les constantes de structure du groupe G . On arrive à montrer ainsi que le tenseur de courbure est constant par rapport à la dérivée covariante ∇ . C'est pour cela qu'on va se contenter de donner que son expression au point $\phi = 0$. L'origine des simplifications dans le point $\phi = 0$ en résulte de l'éq. (2.32). On obtient ainsi, pour le tenseur de Riemann

$$R_{ijkl}(0) = \frac{1}{g_{\sigma}^2} f_{ija} f_{kl}^a. \quad (2.42)$$

et pour le tenseur de Ricci

$$R_{jl}(0) = \kappa^{ik} f_{ija} f_{kl}^a = \frac{1}{2} \kappa^{\alpha\beta} (\text{ad } T_{\alpha} \text{ ad } T_{\beta})_{jl} = \frac{g_{\sigma}^2}{2} C(\mathfrak{g}) g_{jl}(0) \quad (2.43)$$

où $C(\mathfrak{g})$ est la valeur propre du Casimir de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans la représentation adjointe. La preuve plus détaillée de l'éq. (2.42) peut être trouvée dans l'appendice de [10]. Dans le raisonnement de l'éq. (2.43) on a utilisé le fait que la forme invariante $\kappa^{\alpha\beta}$ est bloc diagonale par rapport à la décomposition $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$.⁸ Comme l'éq. (2.43) est une égalité tensorielle elle doit être vraie par tout.

Des raisonnements un peu différents, mais de la même nature, peuvent être utilisés pour montrer que dans le cas des espaces symétriques *non-compacts* il faut rajouter un facteur -1 dans l'éq. (2.43). De façon naïve, ce signe -1 peut être obtenu après une rotation de Wick $\phi^j \rightarrow i\phi^j$ qui "décompactifie" l'espace symétrique sans briser la structure symétrique σ . Notons que s'il existe plusieurs espaces symétriques G/H avec un groupe G fixe, alors ils ont tous la même constante de proportionnalité $C(\mathfrak{g})$ entre la métrique et le tenseur de Ricci.

En tenant compte du fait que seulement g_{σ}^2 peut dépendre de l'échelle de renormalisation μ , on obtient la fonction bêta suivante pour les modèles sigma sur des espaces symétriques irréductibles

$$\mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{g_{\sigma}^2} = \pm \frac{C(\mathfrak{g})}{4\pi} + \dots, \quad (2.44)$$

où $\dots$ représente les contributions d'ordres plus élevés dans la théorie des perturbations. Dans l'éq. (2.44) il faut choisir le signe $+$ ou $-$ pour les espaces symétriques compacts et, respectivement, non-compacts. Les points fixes de l'éq. (2.44) sont discutés dans la section suivante.

⁸ Les indices de groupe α , même dans les constantes de structure, sont levés et descendus avec la forme invariante $\kappa_{\alpha\beta}$ et non pas avec la forme de Killing. Le choix de la forme $\kappa_{\alpha\beta}$ normalise le Casimir.

Au final, mentionnons que la généralisation du calcul de la fonction bêta pour les modèles sigma sur des *supervariétés* de Riemann ne pose aucun problème. Pour les modèles sigma sur des superspaces symétriques qui n'admettent pas de forme compacte les différents signes dans l'éq. (2.44) correspondent aux deux formes réelles non-compactes possibles pour la sous-variété riemannienne de base. Ceci a été expliqué à la fin de la sec. 2.2.1.

2.2.3 Déformations conformes quantiques des modèles sigma

Dans cette section on va se restreindre à des modèles sigma sur des variétés riemanniennes. Tout modèle sigma sur une variété plate est conforme. On vérifie cette affirmation perturbativement à une boucle sur l'éq. (2.25). L'exemple le plus simple est le modèle sigma sur le cercle S^1 aussi appelé *boson libre compact*. Si on paramètre S^1 par l'angle

$$\phi \equiv \phi + 2\pi$$

alors l'action prend la forme

$$S[\phi] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi.$$

Les translations de ϕ par un angle constant laissent l'action invariante. En tenant compte des inversions $\phi \rightarrow -\phi$, on voit que le groupe de symétrie de l'action du boson libre compact est $O(2)$. Une autre variété de courbure zéro est le tore ou, plus généralement, $(S^1)^{\times n}$ qui n'est rien d'autre que la théorie conforme de n bosons libres compacts. Un exemple de modèle sigma conforme non-compacte est la théorie des champs de plusieurs bosons libres qui paramètre un espace euclidien.

Bien sûr, à part les subtilités liées à la prise en compte de l'ensemble complet des minima de l'action du boson libre compact ou de la régularisation du mode zéro du boson libre non-compact, les exemples de modèles sigma conformes mentionnés sont triviaux. Il se trouve qu'il n'y a pas d'autre exemple de théorie conforme dans le cadre des modèles sigma sur des espaces symétriques. Ceci est visible clairement à partir de l'éq. (2.44). Pour toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ le Casimir de la représentation adjointe est strictement positif. On arrive à conclure que les modèles sigma en interaction sur des espaces symétriques ne sont pas conformes quantiquement et le flot du groupe de renormalisation les dirige soit vers un régime de couplage fort, lorsque l'espace cible est compact, soit vers un régime d'interaction faible, lorsque l'espace cible est non-compact. L'éq. (2.25) ne suffit pas pour conclure que le flot du groupe de renormalisation n'a pas de point fixe dans l'infra-rouge pour les modèles sigma en interaction forte. L'étude de la limite infra-rouge des théories de champs en régime d'interaction forte est un problème délicat qui nécessite une approche particulière pour chaque cas. Quelques méthodes employées avec succès sont les techniques d'intégrabilité, la dualité avec des théories de champs en régime d'interaction faible et l'étude numérique des discrétisations sur réseau. Pour les modèles sigma en interaction faible la limite infrarouge peut être étudiée perturbativement.

Le moment est venu de définir les théories de champs qui nous intéressent dans cette thèse. On va dire qu'une théorie des champs est intéressante si elle possède les propriétés suivantes : i) elle n'est pas une théorie de champs libres ; ii) la quantification ne brise pas la symétrie conforme ; iii) la symétrie de l'action est un groupe continu.⁹ Dans cette situation, on se demande naturellement comment il faut généraliser la déf. (2.7) des modèles sigma pour qu'elle admette l'existence d'exemples intéressants.

Une façon possible de généraliser les modèles sigma est de rajouter au Lagrangien de l'action (2.7) un terme invariant sous les reparamétrages de $\mathcal{M}$ et qui contient deux dérivées des champs $\phi(x)$. Si la deuxième classe de cohomologie $H^2(\mathcal{M})$ de l'espace cible du modèle sigma est non triviale, alors le terme le plus simple qui satisfait les critères mentionnés est

$$S_{top}[\phi] = \int_{\Sigma} d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi^a \partial_{\nu} \phi^b \omega_{ab}(\phi) \quad (2.45)$$

où $\omega = \omega_{ab}(\phi) d\phi^a \wedge d\phi^b$ est une 2-forme fermée mais pas exacte. Ce terme est appelé *terme topologique*, car il ne dépend pas de la façon dont $\mathcal{M}$ est paramétré par Σ à travers les fonctions $\phi^a(x)$, mais seulement de l'image $\phi(\Sigma)$

$$S_{top}[\phi] = \int_{\phi(\Sigma)} d\phi^a d\phi^b \omega_{ab}(\phi).$$

Par exemple, le modèle sigma sur la sphère S^2 , défini par l'action du type (2.11), possède un terme topologique qui dans les notations standards prend la forme

$$S_{top}[n] = \frac{i\theta}{8\pi} \int_{\Sigma} \epsilon_{ijk} d^2x \varepsilon_{\mu\nu} n^i \partial_{\mu} n^j \partial_{\nu} n^k,$$

où la 2-forme ω utilisée est juste la forme de volume sur la sphère et θ est une constante de couplage. Si les conditions de bord consistent à demander l'existence de la limite $\lim_{|x| \rightarrow \infty} n^i(x)$ alors $\Sigma \simeq S^2$ et $-iS_{top}[n]$ est un entier qui décrit la classe d'homotopie de l'application $n : S^2 \rightarrow S^2$. On voit donc que la constante de couplage θ est un angle.

Plus généralement, les grassmanniennes complexes possèdent toutes une seule 2-forme tandis que les grassmanniennes réelles, sauf la sphère $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$, ont une deuxième classe de cohomologie triviale. Pour les modèles sigma (2.13) sur des grassmanniennes complexes le terme topologique est

$$i\theta \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \text{tr} \partial_{\mu} z^{\dagger} \partial_{\nu} z.$$

On remarque tout de suite que c'est une divergence totale qui ne contribue pas aux équations de mouvement. Cette observation, que le terme topologique ne contribue pas aux équations de mouvement, est valide pour les modèles sigma génériques. Pour voir cela, considérons la variation de la fonctionnelle

$$I_n[\phi] = \frac{1}{n} \int_{\Xi} d^n x \omega_{a_1 \dots a_n}(\phi) \partial_{\mu_1} \phi^{a_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{a_n} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n},$$

⁹Dans les chapitres suivants on va rajouter aussi la quatrième propriété par laquelle on demande l'existence d'une discrétisation sur le réseau sous forme de gaz de boucles.

où l'espace-temps Ξ est de dimension n et $\omega_{a_1 \dots a_n} d\phi^{a_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{a_n}$ est une forme fermée mais pas exacte. En utilisant le lemme de Poincaré pour représenter localement ω sous forme exacte on montre que

$$\begin{aligned} \delta I_n[\phi] &= \int_{\Xi} d^n x \partial_{\mu_1} [\omega_{a_1 \dots a_n}(\phi) \delta \phi^{a_1} \partial_{\mu_2} \phi^{a_2} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{a_n} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}] \\ &= \int_{\partial \Xi} d^{n-1} x \omega_{a_1 \dots a_n}(\phi) \delta \phi^{a_1} \partial_{\mu_2} \phi^{a_2} \dots \partial_{\mu_n} \phi^{a_n} \varepsilon_{\mu_2 \dots \mu_n} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lorsque les conditions de bord imposées sur les champs $\phi^a(x)$ sont telles que $\partial \Xi = 0$ alors $\delta I_n[\phi] = 0$. Dans ce cas, en décomposant le cycle $\phi(\Xi)$ dans les cycles fondamentaux de $H_n(\mathcal{M})$ on peut montrer que la valeur de $I_n[\phi]$ est quantifiée par $\dim H^n(\mathcal{M})$ entiers n_i .

En revenant au terme topologique (2.45), on voit que les configurations possibles des champs $\phi^a(x)$ se distribuent dans des classes d'équivalence topologiques selon la valeur quantifiée de $I_2[\phi] = S_{top}[\phi]$. Comme les équations de mouvement classiques restent inchangées on conclut que le terme topologique n'affecte pas les raisonnements qui ont amené au calcul de la fonction bêta dans l'éq. (2.25). En effet, la fonction de partition de la sec. 2.2.2 calculée perturbativement par la méthode de la phase stationnaire autour d'une solution classique $\bar{\phi}^a(x)$ n'est rien d'autre que la contribution à la fonction de partition exacte des configurations de champs fluctuant autour de $\bar{\phi}^a(x)$ et, donc, se trouve dans la même classe topologique que $\bar{\phi}^a(x)$. Il est clair que si la constante de couplage g_σ se renormalise avec la fonction bêta dans l'éq. (2.25), pour régulariser la contribution à la fonction de partition des configurations des champs dans une classe topologique quelconque, alors elle renormalise la fonction de partition entière aussi.

Même si Haldane a conjecturé [33, 32] que le terme topologique peut modifier le flot du groupe de renormalisation vers l'infra-rouge, où le modèle sigma est en régime de couplage fort, on se rend compte que la déformation des modèles sigma par des termes topologiques n'est pas ce qui nous intéresse. Néanmoins l'étude du terme topologique fournit une nouvelle idée de déformation des modèles sigma potentiellement plus intéressante. En effet, lorsque la troisième classe de cohomologie $H^3(\mathcal{M})$ n'est pas vide, alors on voit sur l'éq. (2.46) que $\delta I_3[\phi]$ est une intégrale dans un espace-temps bi-dimensionnel et, donc, l'addition du terme $I_3[\phi]$ à l'action (2.7) des modèles sigma modifie les équations de mouvement classiques. En variant l'action $S[\phi] + I_3[\phi]$ on obtient les nouvelles équations de mouvement

$$\mathcal{D}_\mu \partial_\mu \phi^a(x) = 0.$$

On voit apparaître une nouvelle dérivée covariante $\mathcal{D}_\mu$ dont l'action sur un vecteur contravariant $V^a(\phi)$ est définie par

$$\mathcal{D}_\mu V^a = (\partial_\mu \delta_b^a + \Gamma_{bc}^a \partial_\mu \phi^c - T_{bc}^a \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi^c) V^b,$$

où le tenseur

$$T_{bc}^a = g^{ad} \omega_{dbc}$$

demande clairement une interprétation en tant que *torsion* et ω est la 3-forme qui définit $I_3[\phi]$. On peut dire que l'effet du terme $I_3[\phi]$ se traduit par une modification de la géométrie de l'espace cible, c'est-à-dire par

le passage de la connexion de Levi-Civita à une nouvelle connexion avec torsion fixé par la 3-forme ω . La reprise [11] des calculs de renormalisation de la sec. (2.2.2) fournit les deux fonctions bêta suivantes

$$\mu \frac{dg_{ab}}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{R}_{(ab)} + \dots \quad (2.47)$$

$$\mu \frac{d\omega_{abc}}{d\mu} = -\frac{3}{2\pi} D_{[a} \mathcal{R}_{bc]} + \dots, \quad (2.48)$$

où $\mathcal{R}_{abcd}$ est le tenseur de Riemann calculé avec la connexion $\Gamma_{bc}^a - T_{bc}^a$. En tenant compte du fait que

$$\mathcal{R}_{[ab]} = D_c T_{ab}^c$$

on voit sur les éqs. (2.47, 2.48) que le flot du groupe de renormalisation se simplifie beaucoup lorsque la forme ω est choisie *harmonique*

$$\Delta\omega_{abc} = 4D^d D_{[d} \omega_{abc]} + 3D_{[a} D^d \omega_{bc]d} = 3D_{[a} D^d \omega_{bc]d} = 0.$$

En effet, dans ce cas la fonction bêta (2.48) pour la forme ω s'annule et, donc, ω ne se renormalise pas. De plus, le tenseur de Ricci $\mathcal{R}_{ab}$ devient symétrique.

L'annulation de la fonction bêta pour des formes harmoniques ω peut être comprise d'une façon différente lorsque l'espace cible est une variété compacte. La condition que ω soit fermée mais pas exacte veut dire qu'elle peut être écrite comme $\omega = \gamma + d\alpha$, où γ est à nouveau fermée mais pas exacte et α est une 2-forme arbitraire. Soit Ξ une extension tri-dimensionnelle de l'espace-temps physique Σ dont le bord est $\partial\Xi = \Sigma$ et $\phi^a(x)$ une configuration des champs dans cet espace-temps étendu Ξ . Le domaine d'intégration $B = \phi(\Xi)$ de la 3-forme ω dans $I_3[\phi]$ n'est défini que modulo des sous-variétés sans bord de dimension 3, car seulement le bord bi-dimensionnel ∂B est fixé par l'image $\phi(\Sigma)$ des configurations des champs $\phi^a(x)$ dans l'espace-temps physique Σ . Cela veut dire que $I_3[\phi]$ n'est défini que modulo des termes du type

$$\int_c \omega, \quad (2.49)$$

où c est une sous-variété compacte sans bord de dimension 3. En décomposant la forme ω en une combinaison linéaire

$$\omega = \sum_{i=1}^{b_3} 2\pi k_i \omega_i + d\alpha$$

d'une forme exacte $d\alpha$ et de $b_3 = \dim H^3(\mathcal{M})$ formes ω_i duales, par le théorème DeRham (qui s'applique aux variétés compactes), aux cycles fondamentaux c_i de $H_3(\mathcal{M})$

$$\int_{c_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

on peut voir comment rendre non-pertinente l'ambiguïté dans la définition de $I_3[\phi]$. En effet, si k_i sont des entiers lorsque $H_3(\mathcal{M})$ ne contient pas de sous-groupes de torsion ou si k_i sont des multiples entiers de p^{-1} , où

p est le plus petit multiple des rang des groupes de torsion de $H^3(\mathcal{M})$ ¹⁰, alors le terme ambigu de l'éq. (2.49) prend des valeurs dans $2\pi\mathbb{N}$ et, donc, $e^{-I[\phi]}$ est bien défini. Cette quantification des constantes de couplages k_i empêche leur renormalisation. Un terme dans l'action qui n'est bien défini que pour des valeurs quantifiées de la constante de couplage est appelé terme de Wess-Zumino-Witten. Seule $d\alpha$ peut être affecté par la renormalisation. Lorsque ω est harmonique, alors $d\alpha = 0$ et on arrive à conclure que ω ne se renormalise pas.

En déformant les modèles sigma sur des espaces symétriques irréductibles $\mathcal{M} = G/H$ par des termes de Wess-Zumino-Witten il est toujours possible d'annuler la fonction bêta de la métrique. En effet, le tenseur de Ricci généralisé dans l'éq (2.47) s'écrit dans la forme

$$\mathcal{R}_{ab} = R_{ab} - \omega_{acd}\omega_{bef}g^{ce}g^{df}. \quad (2.50)$$

On a déjà vu dans l'éq. (2.43) que R_{ab} est proportionnel à la métrique si l'espace symétrique est irréductible. Notons que ω est une forme invariante par rapport aux dérivées de Lie du groupe G . En effet, comme $\mathcal{M}$ est un espace symétrique, alors l'opérateur de Laplace est en fait la représentation différentielle du Casimir de G . Une forme harmonique est une fonction propre du laplacien avec valeur propre zéro. Elle se transforme donc dans la représentation triviale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G . Une forme harmonique est donc invariante.¹¹ En mettant ensemble l'irréductibilité de $\mathcal{M}$, l'invariance de ω et la symétrie du dernier terme dans l'éq. (2.50) on voit qu'il doit nécessairement être proportionnel à la métrique. Comme la discussion sur l'ambiguïté du terme Wess-Zumino-Witten fixe entièrement ω , il suffit de proprement choisir la constante de proportionnalité g_σ^2 dans l'éq. (2.43) pour annuler le tenseur de Ricci $\mathcal{R}_{ab}$ dans l'éq. (2.50).

Pour conclure, la déformation des modèles sigma (2.7) par des termes de Wess-Zumino-Witten fournit des exemples de théories des champs intéressantes. Il faut encore se convaincre qu'il existe des espaces symétriques avec une troisième classe de cohomologie non-triviale. Je ne connais que deux exemples de tels espaces symétriques : i) les variétés des groupes de Lie compacts K ; ii) les variétés non-compactes associées G/K , où G est la complexification de K . La 3-forme harmonique ω est induite par le tenseur invariant de rang 3 qui correspond aux constantes de structure du groupe

$$\omega_{abc} = 2 \operatorname{tr} \left(g^{-1} \partial_{[a} g g^{-1} \partial_b g g^{-1} \partial_{c]} g \right) = \operatorname{tr} \left(g^{-1} \partial_a g [g^{-1} \partial_b g, g^{-1} \partial_c g] \right).$$

Un calcul direct montre que ω est fermée. Pour se convaincre que ω est harmonique il suffit de vérifier que $\Delta\omega = 0$ au point de la variété qui correspond à l'identité du groupe. En tenant compte des propriétés de symétrie de la forme ω et de la métrique

$$g_{ab} = \operatorname{tr} g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g$$

¹⁰Un sous-groupe de torsion de $H_3(\mathcal{M})$ est engendré par un cycle γ tel qu'il existe un entier p_i , appelé rang, pour lequel $p_i\gamma = \partial A$, où A est une sous-variété de $\mathcal{M}$ de dimension 4.

¹¹Selon le théorème de Hodge à chaque classe de cohomologie correspond une forme harmonique. Donc l'étude de la cohomologie des espaces symétriques est très intimement reliée à la théorie des invariants du groupe G sur l'espace symétrique.

sous l'automorphisme $g \rightarrow g^{-1}$ on voit facilement que la connexion de Levi-Civita s'annule à l'origine et ω_{abc} est égale aux constantes de structure du groupe jusqu'au premier ordre dans les coordonnées locales ϕ^a . Par conséquent

$$D_a \omega_{bcd} = 0$$

à l'origine et, donc, partout ailleurs. Au final, ω est en effet harmonique.

2.3 MODÈLES SIGMA AVEC LIGNE CRITIQUE

2.3.1 Modèles sigma quantiques conformes

Dans la sec. 2.2.3, on a étudié le modèle sigma sur un espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$. On a vu qu'il ne reste conforme après la quantification, pour toute valeur de la constante de couplage g_σ^2 , que si G est un groupe abélien et, donc, que si le modèle sigma est une théorie des champs libres. Si G est non-abélien alors le modèle sigma est soit en régime d'interaction forte, lorsque l'espace cible est compact, soit en régime d'interaction faible, lorsque l'espace cible est non-compact. Lorsque $\mathcal{M}$ est irréductible et le modèle sigma admet un terme de Wess-Zumino-Witten (WZW) il existe un certain choix quantifié de la constante de couplage g_σ^2 qui le rend conforme au niveau quantique si on le *déforme* par ce terme de WZW. C'est notamment le cas des modèles sigma principaux chiraux avec terme WZW qui sont appelés modèles sigma de Wess-Zumino-Witten ou encore Wess-Zumino-Novikov-Witten. Dans le but de construire des théories quantiques conformes en interaction avec symétrie de groupe de Lie non-abélienne, la nécessité de déformer le modèle sigma (2.7) avait son origine dans la positivité stricte du Casimir dans la partie droite de l'éq. (2.44).

On a mentionné à plusieurs reprises dans le chapitre 1 que le Casimir d'une superalgèbre de Lie n'est pas défini positif même pour les superalgèbres de Lie semi-simples. Ceci est une conséquence du fait que le produit scalaire induit dans l'espace des poids par la forme symétrique, consistante et invariante d'une superalgèbre de Lie, restreinte à la sous-algèbre de Cartan, n'est pas défini positif. Il est donc tout à fait possible que la fonction bêta (2.44) s'annule pour certains modèles sigma (2.7) sur des *superespaces* symétriques $\mathcal{M} = G/H$. Comme le supergroupe G n'est pas forcé d'être abélien on s'attend à l'existence de modèles sigma quantiques conformes en interaction. Remarquons tout de suite que dans le cas où les superalgèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ du modèle sigma $\mathcal{M} = G/H$ sont telles que la fonction bêta (2.44) s'annule, la constante de couplage g_σ^2 ne subit aucune quantification. On peut, donc, parler d'une *ligne critique* pour les modèles sigma (2.7) quantiques conformes. Visiblement, la structure de ces théories conformes s'annonce beaucoup plus riche par comparaison aux modèles WZW sur des groupes de Lie compacts ou les espaces symétriques non-compacts associés et, certainement, beaucoup plus intéressante que celle du boson libre compactifié ou pas. Après cette introduction de motivation passons à l'identification des modèles sigma (2.7) quantiques conformes sur des superespaces symétriques.

Selon la formule (2.44) pour la fonction bêta des modèles sigma (2.10) la fonction bêta s'annule, au premier ordre dans la théorie des perturba-

tions, lorsque le Casimir $C(\mathfrak{g})$ de la représentation adjointe de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du superspace symétrique G/H s'annule.

Il existe trois séries de superalgèbres de Lie classiques basiques

$$\mathfrak{psl}(n|n), \quad \mathfrak{osp}(2n+2|2n), \quad D(2,1;\alpha)$$

et trois séries supplémentaires

$$\mathfrak{gl}(n|n), \quad \mathfrak{pgl}(n|n), \quad \mathfrak{sl}(n|n),$$

pour lesquelles le Casimir de la représentation adjointe s'annule.

Ainsi, selon la classification de Zirnbauer [82], les superspaces homogènes complexes qui admettent une structure de supervariété riemannienne et qui *a priori* peuvent servir d'espaces cible pour les modèles sigma quantiques conformes sont les variétés de supergroupes

$$\begin{aligned} &GL(N|N), \quad SL(N|N), \quad PGL(N|N), \quad PSL(N|N) \\ &OSp(2S+2|2S), \quad G(\alpha), \end{aligned} \quad (2.51)$$

les supergrassmanniennes "réelles"

$$\frac{OSp(2S+2|2S)}{OSp(2S+2-n|2S-2m) \times OSp(n|2m)}, \quad (2.52)$$

les supergrassmanniennes "complexes"

$$\frac{GL(N|N)}{GL(N-n|N-m) \times GL(n|m)} \quad (2.53)$$

et, enfin, les trois séries

$$\frac{GL(2S|2S)}{OSp(2S|2S)}, \quad \frac{SL(2S|2S)}{OSp(2S|2S)}, \quad \frac{OSp(2S+2|2S)}{GL(S+1|S)}. \quad (2.54)$$

Tous les supergroupes dans les séries (2.51, 2.52, 2.53, 2.54) sont complexes et $G(\alpha)$ est l'exponentielle de la superalgèbre de Lie $D(2,1;\alpha)$. Notons que ni $GL(N|N)$, ni $SL(N|N)$ et ni $PGL(N|N)$ ne sont des groupes réductifs. Il n'est donc pas possible de représenter, par exemple, le premier espace homogène dans l'éq. (2.54) comme le produit direct du deuxième espace homogène dans l'éq. (2.54) par une variété unidimensionnelle.

Seulement le groupe $O(2)$, les grassmanniennes réelles

$$\frac{OSp(2S+2|2S)}{OSp(2S+2-n|2S) \times SO(n)}, \quad \frac{OSp(2S+2|2S)}{OSp(2S+2|2S-2m) \times Sp(2m)}$$

et les grassmanniennes complexes

$$\frac{GL(N|N)}{GL(N-n|N) \times GL(n)}$$

admettent une forme compacte.

On se demande maintenant lesquels des modèles sigma sur les superspaces symétriques (2.51, 2.52, 2.53, 2.54) restent conformes aux ordres plus élevés de la théorie de perturbation et, bien sur, lesquels d'entre eux sont exactement conformes.

On connaît la fonction bêta pour les modèles sigma génériques jusqu'à quatre boucles dans la théorie des perturbations [30, 38, 76]. Écrivons la correction de la fonction bêta à n -boucles comme $\beta_{ij}^{(n)}$. La contribution à la fonction bêta à deux boucles est selon [30]

$$\beta_{ij}^{(2)} = \frac{1}{8\pi^2} R_{iklm} R_j^{klm}. \quad (2.55)$$

À l'aide de l'éq. (2.42) cette expression peut être ramenée, pour $\phi = 0$, à la forme

$$\beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} = \frac{g_\sigma^2}{8\pi^2} f_{aik} f_{bj}^k f_{lm}^a f^{blm}. \quad (2.56)$$

Notons par $\tilde{\kappa}_{ab}$ la forme consistante, supersymétrique et invariante de $\mathfrak{h}$ définie par

$$\tilde{\kappa}_{ab} = \langle \widetilde{T_a, T_b} \rangle = \text{str } R_m(T_a T_b) = f_{alm} f_b^{lm}. \quad (2.57)$$

On garde la convention selon laquelle les indices sont levés et baissés à l'aide de la forme invariante $\kappa_{\alpha\beta}$ de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de son inverse $\kappa^{\alpha\beta}$. L'éq. (2.55) peut être alors ramenée à la forme

$$\beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} = \frac{g_\sigma^2}{8\pi^2} R_m(T_a T_b)_{ij} \tilde{\kappa}^{ab}. \quad (2.58)$$

On généralise cette dernière équation aux modèles sigma sur des superspaces symétriques. Pour les superalgèbres de Lie *simples* toutes les formes consistantes, supersymétriques, invariantes et non-dégénérées sont proportionnelles entre eux. On a donc pour les superspaces symétriques de l'éq. (2.51) et des deux premières séries de l'éq. (2.54) l'égalité

$$\tilde{\kappa}^{ab} = q \kappa^{ab} \quad (2.59)$$

avec une certaine constante de proportionnalité q déterminée par

$$q = \frac{\text{sdim } \mathfrak{m}}{p \text{sdim } \mathfrak{h}} C(\mathfrak{m}) = \frac{\text{sdim } \mathfrak{m}}{2 \text{sdim } \mathfrak{h}} C(\mathfrak{g}), \quad (2.60)$$

où p est la constante de proportionnalité

$$\kappa_{ab} = p \rho_{ab} \quad (2.61)$$

entre la forme invariante κ_{ab} et la forme canonique ρ_{ab} pour la superalgèbre de Lie simple $\mathfrak{h}$ qui normalise de façon standard le Casimir $C(\mathfrak{m})$. Notons que les égalités (2.59, 2.60, 2.61) restent vraies aussi pour une superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ pas simple, mais telle que $\mathfrak{h}/\ker R_m$ est simple. Dans ce cas il faut remplacer dans les éqs. (2.59, 2.60, 2.61) la superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par son quotient simple $\mathfrak{h}/\ker R_m$. Ceci est le cas des premiers trois supergroupes non simples dans l'éq. (2.51).

L'éq. (2.58) prend pour les superspaces symétriques des éqs. (2.51, 2.54), sauf la dernière série dans l'éq. (2.54), la forme finale

$$\beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} = \frac{q g_\sigma^2}{8\pi^2} R_m(T_a T^a)_{ij} = \frac{q g_\sigma^4}{(4\pi)^2} C(\mathfrak{g}) g_{ij}(0), \quad (2.62)$$

où la dernière égalité est obtenue de la même façon que dans l'éq. (2.43). On voit donc que pour les superspaces symétriques des éqs. (2.51, 2.54),

sauf la dernière série dans l'éq. (2.54), la fonction bêta à deux boucles dans la théorie des perturbations est toujours zéro.

Pour les supergrassmanniennes réelles et complexes des éqs. (2.52, 2.53) la situation est plus compliquée car la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ n'est pas simple. Plus précisément, pour les supergrassmanniennes réelles (2.52)

$$\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'', \quad (2.63)$$

où $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}''$ sont des superalgèbres de Lie simples.

On va analyser d'abord les supergrassmanniennes réelles. La décomposition (2.63) veut dire que $\tilde{\kappa}_{ab}$ est bloc diagonale

$$\tilde{\kappa}_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_{a'b'} & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa}_{a''b''} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

où $T_{a'}$ et $T_{a''}$ est la restriction de la base T_a de $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}''$ respectivement, et que

$$\tilde{\kappa}_{a'b'} = q' \kappa_{a'b'}, \quad \tilde{\kappa}_{a''b''} = q'' \kappa_{a''b''} \quad (2.65)$$

avec des constantes de proportionnalité q' et q'' *a priori* différentes. L'éq. (2.58) prend pour les superspaces symétriques (2.52) la forme

$$\beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} = \frac{g_{\sigma}^2}{8\pi^2} R_m (q' \kappa^{a'b'} T_{a'} T_{b'} + q'' \kappa^{a''b''} T_{a''} T_{b''}). \quad (2.66)$$

Pour interpréter les deux termes dans la dernière égalité de l'éq. (2.66) on a besoin de l'isomorphisme suivant

$$\mathfrak{m} \simeq \text{vec } \mathfrak{h}' \otimes_{\mathbb{C}} \text{vec } \mathfrak{h}'',$$

où $\text{vec } \mathfrak{h}'$ et $\text{vec } \mathfrak{h}''$ dénotent les représentations fondamentales, c'est-à-dire vectorielles des superalgèbres de Lie $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}''$ respectivement. On voit donc que les termes de l'éq. (2.66) correspondent aux Casimirs $C(\text{vec } \mathfrak{h}')$ et $C(\text{vec } \mathfrak{h}'')$ normalisés de façon non-standard. La façon standard de normaliser le Casimir $C(\text{vec } \mathfrak{h}')$ et $C(\text{vec } \mathfrak{h}'')$ utilise la forme consistante, supersymétrique et invariante $\rho'_{a'b'}$ et, respectivement, $\rho''_{a''b''}$ de la représentation fondamentale $\text{vec } \mathfrak{h}'$ et, respectivement, $\text{vec } \mathfrak{h}''$ comme expliqué à la fin de la sec. 1.1.6. On se convaincra facilement de la validité des égalités suivantes

$$\rho'_{a'b'} = \kappa_{a'b'}, \quad \rho''_{a''b''} = \kappa_{a''b''}. \quad (2.67)$$

Avec ce dernier résultat on arrive à une nouvelle forme de l'éq. (2.66)

$$\beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} = \frac{g_{\sigma}^4}{8\pi^2} (q' C(\text{vec } \mathfrak{h}') + q'' C(\text{vec } \mathfrak{h}'')) g_{ij}(0). \quad (2.68)$$

Celle-ci peut être simplifiée encore plus à l'aide de l'égalité suivante

$$C(\mathfrak{m}) = C(\text{vec } \mathfrak{h}' + \text{vec } \mathfrak{h}'') = \frac{C(\mathfrak{g})}{2}.$$

En particulier, on vérifie l'accord avec l'éq. (2.62) lorsque $\mathfrak{h}' = 0$ où $\mathfrak{h}'' = 0$. Au final, on voit que la fonction bêta de l'éq. (2.68) s'annule soit si

$$C(\text{vec } \mathfrak{h}') = C(\text{vec } \mathfrak{h}'') = 0 \quad (2.69)$$

ou soit si

$$q' = q''. \quad (2.70)$$

En fait, après un calcul explicite de q', q''

$$q' = \frac{\text{sdim } \mathfrak{m}}{\text{sdim } \mathfrak{h}'} C(\text{vec } \mathfrak{h}'), \quad q'' = \frac{\text{sdim } \mathfrak{m}}{\text{sdim } \mathfrak{h}''} C(\text{vec } \mathfrak{h}''). \quad (2.71)$$

on peut montrer que les deux conditions (2.69, 2.70) sont équivalentes. En effet, avec

$$\begin{aligned} \text{sdim } \mathfrak{m} &= (n - 2m)(2 - n + 2m), \\ \text{sdim } \mathfrak{h}' &= \frac{1}{2}(n - 2m)(n - 2m - 1), \\ C(\text{vec } \mathfrak{h}') &= n - 2m - 1, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{osp}(n|2m)$ on obtient ¹²

$$q' = 2(2 - n + 2m), \quad q'' = 2(n - 2m).$$

Pour les supergrassmanniennes réelles les conditions (2.69, 2.70) reviennent à la restriction

$$n = 2m + 1$$

dans l'éq. (2.52).

On se concentre maintenant sur le cas des supergrassmanniennes complexes (2.53) pour $m \neq n$. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ n'est pas simple, mais est généralement la somme directe

$$\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{z}, \quad (2.72)$$

de deux algèbres simples $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}''$ de type $\mathfrak{sl}$ et d'une sous-algèbre centrale $\mathfrak{z}$ de dimension deux. Écrivons le module fondamental V de $\mathfrak{gl}(N|N)$ dans la forme

$$V \simeq V' \oplus V''$$

de façon que le plongement $\mathfrak{gl}(n|m)$ et de $\mathfrak{gl}(N - n|N - m)$ dans $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{gl}(V')$ et respectivement $\mathfrak{gl}(V'')$. Soit π' et π'' les projecteurs sur V' et respectivement V'' . On prend en tant que base du centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{h}$ les générateurs E et Z qui, dans la représentation V , ont la forme suivante

$$E = \pi' + \pi'', \quad Z = \pi' - \pi''.$$

Il n'est pas difficile de calculer les composantes suivantes de la forme invariante standard (1.11)

$$\langle Z, Z \rangle = \langle E, E \rangle = 0, \quad \langle E, Z \rangle = \langle Z, E \rangle = 2(n - m).$$

On en déduit, donc, que les générateurs duaux, par rapport à la forme standard $\kappa_{\alpha\beta} = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle$, sont

$$E^* = \frac{Z}{2(n - m)}, \quad Z^* = \frac{E}{2(n - m)}. \quad (2.73)$$

¹²Lorsque $\text{sdim } \mathfrak{h}' = \text{sdim } \mathfrak{h}'' = 0$ on vérifie par des moyens indépendants que ce résultat tient toujours.

En forme matricielle, le plongement de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}, \quad A' \in \mathfrak{h}', \quad A'' \in \mathfrak{h}'', \quad E = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix}$$

tandis que celui de $\mathfrak{m}$ est

$$K = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}, \quad (2.74)$$

où $M \in \text{Hom}(V'', V')$ et $N \in \text{Hom}(V', V'')$. De cette dernière équation on prouve l'isomorphisme suivant

$$\mathfrak{m} \simeq \text{vec } \mathfrak{h}' \otimes_{\mathbb{C}} \text{vec}^* \mathfrak{h}'' \oplus \text{vec}^* \mathfrak{h}' \otimes_{\mathbb{C}} \text{vec } \mathfrak{h}'' = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_- \quad (2.75)$$

de $\mathfrak{m}$ en tant que représentation de $\mathfrak{h}$. Notons que malgré le fait que $\mathfrak{m}$ n'est pas irréductible, son centre $\text{End}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{m}$ est toujours de dimension un lorsqu'on impose la condition de réalité. Ceci veut dire que dans l'éq. (2.74) on se restreint qu'à des éléments hermitiens $K^\dagger = K$ de $\mathfrak{m}$ ou que $N = M^\dagger$.

Ensuite, on vérifie que E est dans le noyau de la représentation $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire

$$R_{\mathfrak{m}}(E) = 0, \quad R_{\mathfrak{m}}(Z) = 2(P_+ - P_-) \quad (2.76)$$

où $P_{\pm}$ sont les projecteurs sur $\mathfrak{m}_{\pm}$. À l'aide des éqs. (2.73, 2.76) on peut calculer les composantes dans $\mathfrak{z}$ de la forme invariante $\tilde{\kappa}^{ab}$ de l'éq. (2.57)

$$\text{str } R_{\mathfrak{m}}(Z^* Z^*) = \text{str } R_{\mathfrak{m}}(E^* Z^*) = 0, \quad \text{str } R_{\mathfrak{m}}(E^{*2}) = -2.$$

Pour les composantes $\tilde{\kappa}^{ab}$ dans la sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ on a les mêmes relations (2.64, 2.65, 2.67) avec des constantes q', q'' données par la même éq. (2.71). On obtient pour la fonction bêta (2.58) l'expression suivante

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(2)}|_{\phi=0} &= \frac{g_{\sigma}^2}{8\pi^2} \left(R_{\mathfrak{m}}(q' T_{a'} T_{b'} \kappa^{a'b'} + q'' T_{a''} T_{b''} \kappa^{a''b''}) + R_{\mathfrak{m}}(E^2) \langle \widetilde{E^*}, \widetilde{E^*} \rangle \right) \\ &= \frac{g_{\sigma}^4}{8\pi^2} (q' C(\text{vec } \mathfrak{h}') + q'' C(\text{vec } \mathfrak{h}'')) g_{ij}(0) \end{aligned} \quad (2.77)$$

exactement comme pour les supergrassmanniennes réelles dans l'éq. (2.68). Avec

$$\begin{aligned} \text{sdim } \mathfrak{m} &= -2(n - m)^2, \\ \text{sdim } \mathfrak{h}' &= \text{sdim } \mathfrak{h}'' = (n - m)^2 - 1, \\ C(\text{vec } \mathfrak{h}') &= -C(\text{vec } \mathfrak{h}'') = n - m - \frac{1}{n - m}, \end{aligned}$$

et

$$C(\text{vec } \mathfrak{h}') + C(\text{vec } \mathfrak{h}'') = \frac{C(\mathfrak{g})}{2}$$

on vérifie qu'il y a deux conditions non équivalentes pour l'annulation de la fonction bêta (2.77). La première condition

$$q' = q'' \quad \Rightarrow \quad n = m$$

a été exclue par hypothèse, tandis que la deuxième condition

$$C(\text{vec } \mathfrak{h}') = C(\text{vec } \mathfrak{h}'') = 0$$

fournit la restriction

$$n - m = \pm 1. \quad (2.78)$$

Pour compléter l'analyse des supergrassmanniennes complexes (2.53) il faut considérer aussi le cas $n = m$. Écrivons le module fondamental V de $\mathfrak{gl}(N|N)$ dans la forme

$$V \simeq V' \oplus V''$$

de façon que le plongement $\mathfrak{gl}(n|n)$ et de $\mathfrak{gl}(N - n|N - n)$ dans $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{gl}(V')$ et respectivement $\mathfrak{gl}(V'')$. Soit E' et E'' les projecteurs sur V' et respectivement V'' . De plus, soit E'_0 et E'_1 les projecteurs sur le sous-espace paire et, respectivement, impaire de V' . Pareil, on désigne par E''_0 et E''_1 les projecteurs sur le sous-espace paire et, respectivement, impaire de V'' . Prenons en tant que base de $\mathfrak{gl}(n|n)$ la base canonique de $\mathfrak{sl}(n|n)$ plus le générateur de graduation

$$Z' = E'_0 - E'_1.$$

Pareil pour la base de $\mathfrak{gl}(N - n|N - n)$ et Z'' . En tenant compte de l'isomorphisme (2.75) et du fait que $\text{sdim vec } \mathfrak{gl}(n|n) = \text{sdim vec } \mathfrak{gl}(N - n|N - n) = 0$ on obtient par calcul direct que la restriction de la forme $\tilde{\kappa}_{ab}$ à la sous-algèbre $\mathfrak{gl}(n|n)$ ou $\mathfrak{gl}(N - n|N - n)$ est identiquement zéro. Dans la base choisie, il n'existe qu'une seule composante de la forme invariante $\tilde{\kappa}^{ab}$ qui ne s'annule pas

$$\langle \widetilde{E'^*}, \widetilde{E''^*} \rangle = \frac{\langle \widetilde{Z'}, \widetilde{Z''} \rangle}{4(N - n)n} = -\frac{\dim \mathfrak{m}}{4(N - n)n} = -2.$$

La fonction bêta de l'éq. (2.56) devient alors

$$\beta_{ij}^{(2)} = \frac{g_\sigma^2}{4\pi^2} R_m(E'E'')_{ij} \langle \widetilde{E'^*}, \widetilde{E''^*} \rangle = -\frac{g_\sigma^4}{2\pi^2} g_{ij}(0)$$

une quantité différente de zéro. En conclusion, les modèle sigma sont conformes seulement sur les supergrassmanniennes complexes déjà trouvées dans l'éq. (2.78).

On arrive enfin à l'analyse de la dernière série d'espaces symétriques dans l'éq. (2.54). Pour décrire le plongement de $\mathfrak{gl}(S + 1|S)$ dans $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$ on choisit une base particulière de la représentation fondamentale V de $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$. Soit $e_1, e_2, \dots, e_{4S+2}$ les vecteurs de la base ordonnée dont les poids sont respectivement

$$\epsilon_1, \dots, \epsilon_{S+1}, \delta_1, \dots, \delta_S, -\epsilon_1, \dots, -\epsilon_{S+1}, -\delta_1, \dots, -\delta_S,$$

dans les notations de la sec. 1.1.6. Notons par V' et V'' le sous-espace de V dont les éléments sont des vecteurs de poids positif et respectivement négatif. Soit π' et π'' les projecteurs sur V' et respectivement V'' . L'automorphisme involutif σ qui définit l'espace symétrique dans la dernière série de l'éq. (2.54) est alors défini par

$$\sigma = \pi' - \pi''.$$

Pour définir la superalgèbre $\mathfrak{osp}(2S+2|2S)$, choisissons le produit scalaire invariant de V dans la forme de la sec. (1.1.6). Les éléments de $\mathfrak{g}$ ont alors la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\text{st}} \end{pmatrix}, \quad B^{\text{st}} = -B, \quad C^{\text{st}} = -C,$$

où $A \in \text{End } V'$, $B \in \text{Hom}(V'', V')$, $C \in \text{Hom}(V', V'')$, $A^{\text{st}} \in \text{End } V''$. La sous-algèbre $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{gl}(S+1|S)$ fixée par l'automorphisme involutif σ est alors composée des éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme $B = C = 0$, tandis que les éléments de $\mathfrak{m}$ sont du type $A = 0$.

La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est réductive avec un générateurs central que l'on prend dans la forme

$$Z = \sigma.$$

La représentation $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ est isomorphe au tenseur supersymétrique de rang deux. Si les poids δ_i, ϵ_j sont ordonnés comme dans la sec. 1.1.7 alors le plus haut poids de $\mathfrak{m}$ est

$$\Lambda_{\mathfrak{m}} = 2\delta_1 - \frac{\langle 2\delta_1, \text{str} \rangle}{\langle \text{str}, \text{str} \rangle}. \quad (2.79)$$

Tenant compte du fait que $\text{sdim } \mathfrak{m} = 0$ on obtient que le générateur central Z ne contribue pas à la fonction bêta (2.56)

$$\langle \widetilde{Z^*}, \widetilde{Z^*} \rangle = \langle \widetilde{Z}, \widetilde{Z} \rangle = 4 \text{sdim } \mathfrak{m} = 0.$$

Pour calculer la constante de proportionnalité q' entre la forme invariante $\tilde{\kappa}^{a'b'}$, restreinte à la sous-algèbre simple $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}/\mathbb{C}Z$, et la forme standard de $\kappa^{a'b'}$ il suffit de calculer un seul élément de matrice. Si $\delta_i = H_i^*$ alors

$$\text{str } R_{\mathfrak{m}}(H_i - H_j)^2 = \sum_{\lambda} \langle \lambda, \delta_i - \delta_j \rangle^2 (-1)^{|\lambda|} = \langle \delta_i - \delta_j, \delta_i - \delta_j \rangle q' = -2q'$$

où la somme est sur les poids non dégénérés $\delta_i + \delta_j$, $\delta_i + \epsilon_k$, $\epsilon_k + \epsilon_l$ du module $\mathfrak{m}$, ou $i, j = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, S+1$ avec la condition supplémentaire $k \neq l$. On obtient que $q' = -1$ et donc

$$\beta_{ij}^{(2)} = -\frac{g_{\sigma}^4 C(\mathfrak{m})}{8\pi^2} g_{ij}(0).$$

Enfin, en calculant le Casimir de la représentation de $\mathfrak{sl}(S+1|S)$ avec plus haut poids (2.79)

$$C(\mathfrak{m}) = -1$$

on voit que la fonction bêta ne s'annule pas.

On vient de finir l'analyse de la fonction bêta à deux boucles pour tous les superspaces symétriques. On a vu que certaines fonctions bêta ne s'annulent pas à cet ordre, tandis que d'autres sont toujours zéro. Voyons si on peut argumenter que les modèles sigma conformes à deux boucles restent conformes à tous les ordres de la théorie des perturbations et même qu'il le sont non perturbativement.

On avait mentionné dans la sec. 2.2.2 que les espace symétriques irréductibles admettent, jusqu'à une constante de proportionnalité près, un seul tenseur symétrique invariant de rang deux et que la fonction bêta doit

être nécessairement proportionnelle à la métrique. On peut évaluer cette constante de proportionnalité à $\phi = 0$, où la condition d'invariance sous l'action de $\mathfrak{h}$ s'écrit comme dans l'éq. (2.38). Ceci veut dire que la constante de proportionnalité entre β_{ij} à $\phi = 0$ et $g_{ij}(0)$ est la valeur propre d'un élément central de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ dans la représentation $\mathfrak{m}$. La remarque cruciale qui s'impose est *l'appartenance de $\mathfrak{m}$ au bloc fondamental*¹³ de $\mathfrak{h}$ dans tous les cas où la fonction bêta s'annule à deux boucles ! On rappelle que les valeurs propres des éléments centraux sont constantes dans les blocs. En particulier, les valeurs propres des éléments centraux sont toutes nulles dans le bloc fondamental. On conclut donc que la fonction bêta des modèles sigma sur les espaces symétriques représentés dans le tab. 2.1 sont *exactement conformes*.

Pour calculer la charge centrale des modèles sigma quantiques conformes sur les superspaces symétriques du tab. 2.1 l'astuce suivante est utile. La limite $g_\sigma \rightarrow 0$ des modèles sigma (2.10) n'est pas bien définie. On peut donner un sens précis à cette limite en redéfinissant les champs $\partial_\mu \phi^a(x) \rightarrow g_\sigma \partial_\mu \phi^a(x)$ et en prenant ensuite la limite $g_\sigma \rightarrow 0$. Plus concrètement on effectue un changement de variables

$$\phi^a(x) = \zeta^a + g_\sigma \zeta^a(x), \quad (2.80)$$

où ζ_a est le mode zéro du champ $\phi^a(x)$ et $\zeta^a(x)$ sont les nouveaux champs dynamiques sans mode zéro. La mesure de l'intégrale fonctionnelle se factorise alors comme

$$\mathcal{D}[\phi] \propto d\mu(\tilde{\zeta}) \mathcal{D}[\zeta], \quad (2.81)$$

où $d\mu(\tilde{\zeta})$ est la forme de volume dans l'espace cible. La limite $g_\sigma \rightarrow 0$ est maintenant bien définie et on obtient une théorie des champs libres $\zeta^a(x)$ avec l'action

$$S_{\tilde{\zeta}}[\zeta] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \partial_\mu \zeta^a g_{ab}(\tilde{\zeta}) \partial_\mu \zeta^b, \quad (2.82)$$

où ζ^a joue le rôle des paramètres. Si la fonction de partition pour la théorie des champs libre définie par l'action $S_{\tilde{\zeta}}[\zeta]$ est

$$Z(\tilde{\zeta}) = \int \mathcal{D}[\zeta] e^{-S_{\tilde{\zeta}}[\zeta]}, \quad (2.83)$$

qui est bien défini à cause de l'absence du mode zéro dans les champs $\zeta^a(x)$, alors la fonction de partition du modèle sigma initiale dans la limite $g_\sigma \rightarrow 0$ devient

$$Z = \int d\mu(\tilde{\zeta}) Z(\tilde{\zeta}).$$

La limite $g_\sigma \rightarrow 0$ des fonctions de corrélations se calcule dans le cadre de la même logique : i) on effectue le changement des variables (2.80, 2.81); ii) on calcule les fonctions de corrélations des champs $\zeta^a(x)$ dans la limite $g_\sigma \rightarrow 0$ à ζ^a fixe ; iii) on intègre sur les modes zéros ζ^a .

Le fait d'avoir bien défini la limite $g_\sigma \rightarrow 0$ nous permet de voir les modèles sigma (2.10) à g_σ quelconque comme une déformation par un opérateur exactement marginal de la théorie des champs libres (2.82, 2.83).

¹³Le bloc fondamental est le bloc de la représentation de dimension un. Voir la sec. 1.1.9 pour un rappel de la notion du bloc.

TAB. 2.1 – Modèles sigma quantiques conformes sur des superspaces symétriques.

Charge centrale	Espace cible	
1	$\mathrm{OSp}(2S+2 2S)$	$G(\alpha)$
0	$\mathrm{GL}(N N)$	$\mathrm{GL}(2S 2S) / \mathrm{OSp}(2S 2S)$
-1	$\mathrm{SL}(N N)$	$\mathrm{PGL}(N N) \mid \mathrm{SL}(2S 2S) / \mathrm{OSp}(2S 2S)$
-2	$\mathrm{PSL}(N N)$	
1	$\mathrm{OSp}(2S+2 2S) / \mathrm{OSp}(2p+1 2p) \times \mathrm{OSp}(2q+1 2q)$	
-2	$\mathrm{GL}(N N) / \mathrm{GL}(m+1 m) \times \mathrm{GL}(n-1 n)$	

On sait bien [15] que la déformation par un opérateur exactement marginal d'une théorie conforme ne change pas sa charge centrale. Sur la forme (2.82) pour l'action des modèles sigma (2.10) dans la limite $g_\sigma \rightarrow 0$, au sens qu'on vient d'expliquer, on voit que les dimensions paires des superspaces symétriques (2.51, 2.52, 2.53, 2.54) sont paramétrées par des bosons réels, tandis que les dimensions impaires — par des fermions symplectiques. On a, donc, une expression très simple pour la charge centrale

$$c = \mathrm{sdim} \mathcal{M}, \quad (2.84)$$

ce qui donne le tab. 2.1 des charges centrales, où $p+q = S$ pour les grassmanniennes réelles et $m+n = N$ pour les grassmanniennes complexes. On voit du tab. 2.1 que toutes les charges centrales pour ces théories conformes avec lignes critiques sont des entiers $-2, -1, 0$ ou 1 .

Il y a trois représentants élémentaires dans le tab. 2.1. Les deux premiers sont le boson libre compact ou non-compact, ce qui correspond aux modèles sigma sur les deux formes réelles du groupe complexe $\mathrm{OSp}(2S+2|2S)$ pour $S = 0$. Le troisième est la paire des fermions symplectiques, ce qui, comme on va voir toute suite, correspond au modèle sigma sur le supergroupe $\mathrm{PSL}(1|1)$.

Soit π la projection canonique de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{sl}(1|1)$ sur $\mathfrak{psl}(1|1)$. Si $f, \bar{f}$ sont les générateurs fermioniques de $\mathfrak{sl}(1|1)$ alors les générateurs de $\mathfrak{psl}(1|1)$ sont définis par

$$F = \pi(f), \quad \bar{F} = \pi(\bar{f}).$$

Il n'est pas difficile de vérifier à partir de cette définition que la superalgèbre de Lie $\mathfrak{psl}(1|1)$ n'est rien d'autre qu'une algèbre de Grassmann dans les générateurs $F, \bar{F}$. Un élément générique du supergroupe $\mathrm{PSL}(1|1)$ est alors de la forme

$$g(\eta, \bar{\eta}) = e^{\eta F + \bar{\eta} \bar{F}}. \quad (2.85)$$

La forme invariante $\langle \ , \ \rangle$ de $\mathfrak{gl}(1|1)$, définie par

$$\langle R(X), R(Y) \rangle = \mathrm{str} R(X)R(Y), \quad (2.86)$$

où R est la représentation fondamentale de $\mathfrak{gl}(1|1)$, induit une forme invariante $(\ , \)$ sur $\mathfrak{psl}(1|1)$ de la façon suivante

$$(\pi(X), \pi(Y)) = \langle R(X), R(Y) \rangle.$$

Cette induction est possible justement parce que le noyau de la projection π est exactement le noyau de la forme (2.86). Si on pose

$$R(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\bar{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, dans la base ordonnée $F < \bar{F}$, les éléments de matrice de la forme $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ deviennent

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant tous les ingrédients pour calculer l'action du modèle sigma principal chirale sur $\text{PSL}(1|1)$

$$S[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma (g^{-1} \partial_\mu g, g^{-1} \partial_\mu g)$$

et obtenir

$$S[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{g_\sigma^2} \int_\Sigma \partial_\mu \eta \partial_\mu \bar{\eta}. \quad (2.87)$$

On sait bien que le spectre des fermions symplectiques ne dépend pas de la constante de couplage g_σ . Néanmoins, ceci ne veut pas dire que la constante de couplage g_σ est complètement redondante dans la théorie conforme logarithmique des fermions symplectiques, car les éléments de matrice non diagonaux des opérateurs chiraux peuvent en dépendre.

Dans ce qui suit, par ligne critique on comprend plutôt une déformation d'une théorie conforme par un seul opérateur exactement marginal tel que le spectre de la théorie conforme *varie* continûment en fonction du couplage g_σ de cet opérateur. Ainsi, les fermions symplectiques n'ont pas de ligne critique. Ils ont pourtant contribué beaucoup au développement de la compréhension abstraite des théories conformes logarithmiques en tant que telles.

Au final, remarquons que les déformations de la sec. 2.2.3 par des termes topologiques ou de WZW s'appliquent aussi bien aux modèles sigma sur des superspaces symétriques qu'aux modèles sigma sur des espaces symétriques. Il faut seulement faire attention à ne pas briser la positivité de l'action lorsqu'on se restreint aux configurations des champs qui prennent leurs valeurs dans la sous-variété de base $\mathcal{M}_0$ de l'espace cible. Ceci va imposer une borne supérieure à la valeur absolue de la constante de couplage quantifiée du terme topologique $S_{top}[\phi]$ par rapport à g_σ

$$|\text{Re } S_{top}[\phi]| \leq S[\phi], \quad \phi(x) \in \mathcal{M}_0.$$

2.3.2 Stratégies possibles

L'existence des théories conformes avec ligne critique, présentées dans le tab. 2.1, nous confronte avec le problème de leur résolution. La présence d'une symétrie globale de supergroupe implique la non-unitarité et la nature logarithmique de ces théories conformes. Alternativement, l'aspect logarithmique est une conséquence de la présence des fermions symplectiques dans l'action (2.82). Dans leur formulation (2.10), les modèles sigma sont hautement non-linéaires dans les champs fondamentaux. On voit donc que la résolution s'annonce difficile.

Quelles sont les méthodes pour attaquer ce type de modèles et, surtout, y a-t-il des méthodes qui amènent à des résultats exacts? Jusqu'à présent on n'a utilisé que la symétrie globale de supergroupe et des arguments perturbatifs, par exemple, pour prouver la symétrie conforme

ou pour calculer la charge centrale (2.84). Y a-t-il d'autres approches plus puissantes qui permettent de calculer la fonction de partition et les fonctions de corrélations exactement ?

À présent, les seules informations qu'on connaisse sur les modèles sigma dans le tab. 2.1 sont l'existence d'une symétrie globale de supergroupe et d'une symétrie conforme. *Est ce que l'exploitation des symétries globales et conformes dans les modèles sigma du tab. 2.1 suffit pour intégrer les théories conformes correspondantes ?* Pour comprendre mieux cette question donnons quelques exemples.

Considérons d'abord les modèles minimaux diagonaux avec des conditions de bord doublement périodiques. Le calcul de tous les objets physiques de la théorie — comme la fonction de partition ou les fonctions de corrélations — peut être ramené à l'étude de la théorie des représentations de l'algèbre de symétrie complète du modèle minimal. En effet, un modèle minimal diagonal de charge centrale

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'}, \quad p, p' \in \mathbb{N}, \quad (2.88)$$

possède une algèbre de symétrie qui est le produit direct de deux algèbres de Virasoro $\mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c)$. Par rapport à $\mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c)$, l'espace des états $\mathcal{H}$ de la théorie se décompose dans une somme directe

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{\substack{1 \leq r < p' \\ 1 \leq s < p}} M(h_{r,s}, c) \times \bar{M}(h_{r,s}, c) \quad (2.89)$$

où $M(h_{r,s}, c)$ et $\bar{M}(h_{r,s}, c)$ sont des quotients irréductibles des modules de Verma $V(h_{r,s}, c)$ et, respectivement, $\bar{V}(h_{r,s}, c)$ des algèbres de Virasoro $\mathcal{V}(c)$ et, respectivement, $\bar{\mathcal{V}}(c)$, et les dimensions conformes $h_{r,s}$ sont données par

$$h_{r,s} = \frac{(pr - p's)^2 - (p - p')^2}{4pp'}. \quad (2.90)$$

Les expressions de la charge centrale (2.88), des dimensions conformes (2.90) et des bornes de sommations dans la décomposition (2.89) peuvent être déduites de la condition de minimalité [24] et sont des détails qui n'ont pas d'importance pour la suite.

On veut mettre en évidence dans l'éq. (2.89) juste les points suivants : i) dans $\mathcal{H}$, les états de plus haut poids par rapport à l'algèbre de symétrie $\mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c)$ sont *uniquement déterminés* par leur poids $h_{r,s}$; ii) tous les champs quantiques de la théorie peuvent être engendrés par l'action de l'algèbre de symétrie $\mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c)$ sur les opérateurs primaires. Le premier point montre que l'algèbre de symétrie *complète* d'un modèle minimal diagonal est la symétrie conforme $\mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c)$. Une fois l'action explicite de l'algèbre de Virasoro sur les champs primaires résolue, le deuxième point permet d'exprimer une fonction de corrélation arbitraire en terme de fonctions de corrélations entre des opérateurs primaires. Le calcul de ces dernières peut être réduit, à l'aide du point i), à l'étude des sous-modules maximaux des modules de Verma $V(h_{r,s}, c)$ ou, en d'autres termes, à l'étude des descendants nuls des opérateurs primaires.

Ainsi, on voit, sur l'exemple des modèles minimaux diagonaux, que la connaissance de l'algèbre de symétrie complète et de sa théorie de représentations suffit pour intégrer entièrement le modèle. Cet exemple est très particulier — l'algèbre de symétrie complète est évidente par construction. Lorsque la théorie conforme est définie par une action et un processus de quantification alors la symétrie complète du modèle n'est pas du tout évidente, mais doit être calculée.

On va illustrer cela sur le cas du modèle WZW sur un groupe de Lie compact simple G défini comme la déformation du modèle sigma principal chiral (2.18) par un terme de WZW de la sec. 2.2.3. L'action du modèle WZW est bi-invariante par rapport aux translations globales de gauche

$$h \times g(x) \rightarrow hg(x)$$

et de droite

$$h \times g(x) \rightarrow g(x)h^{-1}$$

des champs fondamentaux $g(x) \in G$. Si les conditions de bord sont doublement périodiques alors les translations globales et la symétrie conforme forment une algèbre de symétrie "évidente"

$$\mathfrak{g} \times \bar{\mathfrak{g}} \times \mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c), \quad (2.91)$$

où $\mathfrak{g}$ et $\bar{\mathfrak{g}}$ est l'algèbre de Lie des translations globales de gauche et, respectivement, de droite et

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + g}$$

est la charge centrale du modèle WZW. On a noté par g le nombre dual de Coxeter de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ et par $k \in \mathbb{N}$ le niveau du modèle WZW, qui quantifie la constante de couplage du terme WZW et du terme cinétique comme expliqué dans la sec. 2.2.3.

On sait bien [24] que les modèles WZW possèdent une symétrie affine $\hat{\mathfrak{g}}(k) \times \hat{\mathfrak{g}}(k)$ moins évidente. Pour un modèle de WZW diagonal l'espace des états $\mathcal{H}$ de la théorie se décompose dans une somme directe des représentations irréductibles de l'algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}(k) \times \hat{\mathfrak{g}}(k)$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda} G(\lambda, k) \times \bar{G}(\lambda, k), \quad (2.92)$$

où $G(\lambda, k)$ et $\bar{G}(\lambda, k)$ sont des représentations intégrables de plus haut poids par rapport à l'algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}(k) \times \hat{\mathfrak{g}}(k)$. Comme il n'y a pas de multiplicités dans l'éq. (2.92) on voit que l'algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}(k) \times \hat{\mathfrak{g}}(k)$ est l'algèbre de symétrie complète des modèles WZW. De la même façon que pour les modèles minimaux diagonaux, le calcul de la fonction de partition et des fonctions de corrélations est réduit à des problèmes de la théorie des représentations de l'algèbre de symétrie *complète* $\hat{\mathfrak{g}}(k) \times \hat{\mathfrak{g}}(k)$.

L'incomplétude de l'algèbre de symétrie évidente (2.91) peut être révélée si on décompose la fonction de partition du modèle WZW diagonal, calculée dans une représentation de champs libres, en une somme de caractères irréductibles de (2.91). Plus précisément, soit $H_1, \dots, H_r$ les générateurs de la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit D le réseau de plus hauts poids dominants de $\mathfrak{g}$. La décomposition de la fonction de partition

du modèle WZW diagonal dans une somme de caractères irréductibles de l'algèbre de symétrie (2.91) est alors

$$\begin{aligned} Z(q, \bar{q}, \{z\}, \{\bar{z}\}) &= \text{tr}_{\mathcal{H}} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \prod_{i=1}^r z_i^{H_i} \prod_{i=1}^r \bar{z}_i^{\bar{H}_i} \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in D \\ \bar{\lambda} \in \bar{D}}} \text{ch}_{\lambda}(\{z\}) \text{ch}_{\bar{\lambda}}(\{\bar{z}\}) \chi_{\lambda}(q) \chi_{\bar{\lambda}}(\bar{q}), \end{aligned}$$

où ch_{λ} sont les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ de plus haut poids λ et χ_{λ} sont appelés des fonctions de branchement. L'algèbre de symétrie (2.91) est complète si et seulement si les fonctions de branchement χ_{λ} sont des caractères des représentations irréductibles de Virasoro. Pour le modèle WZW sur le groupe $\text{SU}(2)$ au niveau $k = 1$ ceci est vrai, mais dans le cas général ce n'est plus vrai [24].

Un point important à remarquer dans les deux exemples précédents c'est la localité des champs de l'algèbre de symétrie complète. C'est pour cela qu'elle est aussi appelée algèbre chirale maximale. Le formalisme des algèbres de vertex ou de $\mathcal{W}$ -algèbres donne à la théorie conforme un sens mathématiquement précis de représentation de l'algèbre maximale chirale [79].

Dans les deux chapitres suivants, les seuls modèles sigma conformes du tab. 2.1 qu'on va traiter sont les modèles sigma sur les supersphères et sur les superspaces projectifs. Considérons la formulation (2.11) du modèle sigma sur la supersphère

$$S^{2S+1|2S} \simeq \frac{\text{OSp}(2S+2|2S)}{\text{OSp}(2S+1|2S)}$$

et la formulation (2.13) du modèle sigma sur le superspace projectif

$$\mathbb{C}P^{N-1|N} \simeq \frac{\text{SU}(N|N)}{\text{U}(N-1|N)}.$$

Si on impose des conditions de bord doublement périodiques, alors les modèles sigma sur $S^{2S+1|2S}$ et $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ possèdent en plus de la symétrie conforme $\mathcal{V}(1) \times \bar{\mathcal{V}}(1)$ et, respectivement, $\mathcal{V}(-2) \times \bar{\mathcal{V}}(-2)$ une symétrie globale $\mathfrak{osp}(2S+2|2S)$ et, respectivement, $\mathfrak{gl}(N|N)$. Montrons que dans la limite $g_{\sigma} \rightarrow 0$, au sens de la sec. 2.3.1, l'algèbre de symétrie

$$\mathfrak{g} \times \mathcal{V}(c) \times \bar{\mathcal{V}}(c) \tag{2.93}$$

n'est pas complète, où $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{osp}(2S+2|2S)$ ou $\mathfrak{gl}(N|N)$ et $c = 1$ ou, respectivement, $c = -2$. Pour cela il suffit de montrer que les champs scalaires de poids nul par rapport à $\bar{L}_0$ ne sont pas en bijection avec les états de la représentation irréductible $M(0,1)$ de plus haut poids $h = 0$ de l'algèbre de Virasoro $\mathcal{V}(c)$.

En effet, si $n^i(x)$ sont les champs fondamentaux du modèle sigma (2.11) sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$ alors les champs scalaires avec plus de trois dérivées holomorphes ∂ ne sont plus en bijection avec les états du $M(0,1)$ de poids $h \geq 4$

$$\begin{array}{ll}
\langle n, n \rangle = 1 & |0\rangle \\
\langle n, \partial n \rangle = 0 & L_{-1}|0\rangle = 0 \\
\langle \partial n, \partial n \rangle & L_{-2}|0\rangle \\
\langle \partial n, \partial^2 n \rangle & L_{-3}|0\rangle \\
\langle \partial n, \partial^3 n \rangle, \langle \partial^2 n, \partial^2 n \rangle, \langle \partial n, \partial n \rangle^2 & L_{-2}^2|0\rangle, L_4|0\rangle.
\end{array}$$

De la même façon, si $z^i(x)$ sont les champs fondamentaux du modèle sigma (2.13) sur $\mathbb{CP}^{N-1|N}$ alors les champs scalaires avec plus de deux dérivées holomorphes ∂ ne sont plus en bijection avec les états du $M(0, 1)$ de poids $h \geq 2$

$$\begin{array}{ll}
z^\dagger \cdot z = 1 & |0\rangle \\
z^\dagger \cdot Dz = Dz^\dagger \cdot z = 0 & L_{-1}|0\rangle = 0 \\
Dz^\dagger \cdot Dz, Dz^\dagger \wedge Dz & L_{-2}|0\rangle,
\end{array}$$

où D est la dérivée covariante holomorphe calculée de façon standard à partir de l'expression (2.15) pour la dérivée covariante D_μ dans la jauge fixe (2.16). Il est clair que si l'algèbre de symétrie (2.93) n'est pas complète dans la limite $g_\sigma \rightarrow 0$, alors elle n'est pas complète pour tout g_σ fini.

Une première stratégie possible pour intégrer les modèles sigma sur $S^{2S+1|2S}$ ou $\mathbb{CP}^{N-1|N}$, dans l'esprit traditionnel des théories conformes, consiste à identifier leurs algèbre de symétrie complète. C'est la stratégie qu'on va adopter dans cette thèse.

Les calculs perturbatifs de la sec. 3.2.2, dont le formalisme s'applique à tous les modèles sigma, suggèrent fortement que l'algèbre de symétrie complète du modèle sigma sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$ est

$$\mathfrak{osp}(2S + 2|2S) \times B_\infty \times \bar{B}_\infty, \quad (2.94)$$

où B_∞ et $\bar{B}_\infty$ sont les algèbres engendrées par les produits d'opérateurs des champs invariants sous $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$ construits à partir de $\partial^k n^i(x)$ et, respectivement, $\bar{\partial}^k n^i(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$. On peut prendre en tant que générateurs de B_∞ les champs

$$: \langle \partial^i n(x), \partial^j n(x) \rangle : \quad i, j \in \mathbb{N} \quad (2.95)$$

et en tant que générateurs de $\bar{B}_\infty$ les champs

$$: \langle \bar{\partial}^i n(x), \bar{\partial}^j n(x) \rangle : \quad i, j \in \mathbb{N}. \quad (2.96)$$

Notons que les champs $\langle n(x), \partial^i n(x) \rangle$ et $\langle n(x), \bar{\partial}^i n(x) \rangle$ peuvent être exprimés en terme des champs (2.95, 2.96) par la contrainte $\langle n(x), n(x) \rangle = 1$.

Comme l'algèbre des produits d'opérateurs des champs chiraux (2.95, 2.96) ne dépend pas de la constante de couplage $g_\sigma \rightarrow 0$, ses constantes de structure peuvent être calculées dans la représentation de champs libres (2.82). Une stratégie possible pour résoudre exactement la théorie conforme du modèle sigma est alors l'étude de la théorie des représentations des algèbres chirales (2.94).

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre on a rappelé le flot du groupe de renormalisation pour le modèle sigma avec action métrique standard sur un espace symétrique

$\mathcal{M} = G/H$ compact ou non-compact. On a vu qu'il ne reste conforme après la quantification que si G est un groupe abélien et, donc, que si le modèle sigma est une théorie des champs libres. Si G est non-abélien alors le modèle sigma est soit strictement en régime d'interaction forte, lorsque $\mathcal{M}$ est compact, soit strictement en régime d'interaction faible, lorsque $\mathcal{M}$ est non-compact. L'origine de ce comportement est la positivité stricte de la valeur propre du Casimir des algèbres de Lie simples dans les représentations non-triviales.

Lorsque $\mathcal{M}$ est irréductible, les conditions de bord sont telles que l'espace-temps Σ est compact et que le modèle sigma admet un terme de WZW, alors il existe un certain choix, nécessairement quantifié, de la constante de couplage g_σ^2 tel que le modèle sigma reste conforme au niveau quantique si on le déforme en rajoutant ce terme de WZW à l'action métrique standard.

Pour les superalgèbres de Lie classiques basiques le Casimir n'est plus nécessairement défini positif dans les représentations non-triviales. Ceci rend possible l'existence des modèles sigma avec action métrique standard invariants conformes au niveau quantique. Après avoir discuté quelques particularités des superspaces symétriques, on a classifié tous les modèles sigma avec action métrique standard invariants conformes sur ces espaces.¹⁴ Ces modèles sigma conformes possèdent une symétrie globale de supergroupe qui est soit de type $GL(N|N)$ soit de type $OSp(2S+2|2S)$. Les deux supergroupes mentionnés se distinguent par l'annulation du Casimir de la représentation adjointe de leur superalgèbre de Lie. Une propriété très intrigante des théories conformes des modèles sigma avec action métrique standard invariants conformes est l'existence d'une ligne de points critiques, car la constante de couplage g_σ^2 n'est pas contrainte à prendre des valeurs quantifiées.

En plus de la classification on a proposé une stratégie dans l'esprit de la théorie des représentations pour résoudre ces modèles sigma en interaction hautement non-linéaire.

¹⁴On n'a pas cité la réf. [1], car on s'est rendu compte de son existence seulement après ce que ce chapitre a été écrit.

CHAÎNES QUANTIQUES AVEC SYMÉTRIE $OSP(2S+2 | 2S)$

SOMMAIRE

3.1	GÉOMÉTRIE DE LA SUPERSPHERE	83
3.2	PROPRIÉTÉS DU MODÈLE DISCRET	86
3.2.1	Emboîtement des spectres	86
3.2.2	Champs chiraux	88
3.3	MODÈLE DISCRET	89
3.3.1	Algèbre de Brauer	90
3.3.2	Gaz de boucles sur le réseau diagonal	95
3.3.3	Chaîne ouverte	97
3.4	SYMÉTRIES DE LA CHAÎNE OUVERTE $OSP(4 2)$	98
3.5	CONSÉQUENCES SUR LA THÉORIE CONFORME AVEC BORD	99
	CONCLUSION	104

CE chapitre est une revue des idées et outils qui ont servi à la publication de deux articles attachés dans l'annexe.

On commence par une introduction rapide à la géométrie de la supersphère sans entrer dans les détails qui la définissent précisément en tant que supervariété. Dans la section 2 on utilise des méthodes perturbatives et non-perturbatives pour révéler quelques propriétés nécessaires d'un modèle discret dans la même classe d'universalité que le modèle sigma. Dans la section 3 on propose un tel modèle et on vérifie que toutes les contraintes discutées dans la deuxième section sont satisfaites. Dans la section 4 on étudie en grands détails l'algèbre de symétrie complète du modèle discret associé au modèle sigma sur la supersphère $S^{3|2}$. Dans la section 5 on utilise cette analyse pour élucider quelques aspects non-perturbatifs de la théorie conforme du modèle sigma $S^{3|2}$ et on propose une généralisation à tous les modèles sigma $S^{2S+1|2S}$.

3.1 GÉOMÉTRIE DE LA SUPERSPHÈRE

La supersphère $S^{2S+1|2S}$ peut être définie comme l'ensemble de solutions de l'équation

$$\sum_{i=0}^{2S+1} (x^i)^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^S \bar{\eta}^\alpha \eta^\alpha = R^2 \quad (3.1)$$

dans un algèbre de Grassmann B à un nombre suffisamment grand de générateurs. Dans les notations sur l'algèbre de Grassmann B de la sec. 1.2.1, les variables de l'éq. (3.1) sont du type

$$x^i \in B_{\bar{0}}, \quad \bar{\eta}^\alpha, \eta^\alpha \in B_{\bar{1}}$$

et R est un nombre réel positif appelé le rayon de la supersphère. On va noter par $|\cdot|$ la gradation de tous les modules $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gradés.

Soit $V \simeq V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un espace vectoriel gradé sur $\mathbb{C}$ avec une base

$$e_0 < \dots < e_{4S+1}, \quad (3.2)$$

telle que $e_0, \dots, e_{2S+1}$ est une base de $V_{\bar{0}}$. Ensuite, soit $U \simeq U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}$ le module fondamental de $\text{OSp}(2S+2|2S)$

$$U = B \otimes_{\mathbb{C}} V$$

dont la gradation est définie par $|b \otimes v| = |b| + |v|$, et $X \in U_{\bar{0}}$ un vecteur avec les composantes $X^i = x^i$ pour $i = 0, \dots, 2S+1$ et $X^{2S+1+\alpha} = \eta^\alpha$ pour $\alpha = 1, \dots, 2S$, où $\bar{\eta}^\alpha = \eta^{S+\alpha}$. En introduisant la forme bi-linéaire supersymétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont les éléments de matrice dans la base (3.2) sont

$$J_{pq} = \begin{pmatrix} \text{id}_{2S+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{id}_S \\ 0 & \text{id}_S & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

l'éq. (3.1) prend la forme

$$\langle X, X \rangle = 1, \quad (3.4)$$

pour une sphère de rayon $R = 1$.

Il n'est pas difficile de vérifier, à partir des définitions de la sec. 1.2.1, que le sous-groupe qui laisse invariant le vecteur $X = e_0$ est exactement $\text{OSp}(2S+1|2S)$. On voit, donc, que la supersphère peut être vue comme un espace homogène

$$S^{2S+1|2S} = \text{OSp}(2S+2|2S) / \text{OSp}(2S+1|2S).$$

La métrique euclidienne du superspace euclidien $E^{2S+2|2S} = U$

$$ds^2 = \langle dX, dX \rangle$$

induit une métrique riemannienne sur la supersphère. En effet, si $\tilde{g}_{ij}$ est le tenseur métrique de la sphère S^{2S+1} et si on choisit de paramétrer les solutions de l'éq. (3.1) comme

$$X^i = rn^i, \quad r = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (3.5)$$

pour $i = 0, \dots, 2S + 1$, où

$$\sum_{i=0}^{2S+1} (n^i)^2 = 1$$

et

$$\eta^2 = \eta^\alpha J_{\alpha\beta} \eta^\beta,$$

alors le tenseur métrique g_{pq} sur la supersphère devient

$$g_{ij} = r^2 \tilde{g}_{ij}, \quad g_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta} - \frac{\eta_\alpha \eta_\beta}{r^2},$$

où on a introduit l'isomorphisme naturel entre U et U^* donné par la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$X_p = X^q J_{pq}.$$

Par exemple, le paramétrage de Hopf pour la sphère S^3

$$\begin{aligned} n^0 &= \cos \mu \cos \tilde{\zeta}_1 \\ n^1 &= \cos \mu \sin \tilde{\zeta}_1 \\ n^2 &= \sin \mu \cos \tilde{\zeta}_2 \\ n^3 &= \sin \mu \sin \tilde{\zeta}_2, \end{aligned}$$

avec

$$0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \tilde{\zeta}_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \tilde{\zeta}_2 < 2\pi,$$

induit, à travers (3.5), une métrique sur la supersphère $S^{3|2}$ dont les composantes non-nulles sont

$$g_{11} = r^2, \quad g_{22} = r^2 \cos^2 \mu, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \mu, \quad g_{45} = -r, \quad g_{54} = r, \quad (3.6)$$

où

$$r = 1 - \eta^1 \eta^2.$$

Dans l'éq. (3.6), les composantes du tenseur métrique ont été écrites dans la base ordonnée

$$d\mu < d\tilde{\zeta}_1 < d\tilde{\zeta}_2 < d\eta^1 < d\eta^2$$

de l'espace tangent.

Toutes les notions de géométrie riemannienne peuvent être généralisées pour la supersphère [13]. Le laplacien peut être calculé soit par la formule

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \phi^r} g^{sr} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \phi^s},$$

où les ϕ^p sont les coordonnées locales de la supersphère et $g = \text{sdet } g_{pq}$, soit extrait comme la partie radiale du laplacien dans le superspace euclidien $E^{2S+2|2S}$

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial X^p} J^{qp} \frac{\partial}{\partial X^q} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + s \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \hat{\Delta},$$

où $s = (2S + 1) - 2S = 1$ est la superdimension de la supersphère. Il peut être obtenu également de l'expression du Casimir de $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ dans la représentation fondamentale.

La supersphère est évidemment un superespace compact, car la sous-variété de base S^{2S+1} est compacte. La mesure invariante d'intégration diffère par un facteur $\sqrt{g}$ de la mesure plate du superespace euclidien. Par exemple, dans le cas de la supersphère $S^{3|2}$ et le paramétrage (3.6) elle est

$$(1 - 2\eta^1\eta^2) \sin^2 \mu \cos^2 \mu d\mu d\zeta^1 d\zeta^2 d\eta^1 d\eta^2. \quad (3.7)$$

On pourrait se poser la question sur la nature des fermions η^1, η^2 , c'est-à-dire est-ce qu'ils sont réels ou complexes? En fait cette question survient à cause des mauvaises notations utilisées. En effet, les propriétés de l'intégrale des variables fermioniques montrent qu'elle n'est rien d'autre qu'une dérivation. La façon correcte d'écrire l'éq. (3.7) est, en fait, sous forme d'un *opérateur différentiel* qui transforme une fonction sur la supersphère $S^{3|2}$ en une forme sur la sphère $S^{3|2}$

$$\sin^2 \mu \cos^2 \mu d\mu d\zeta^1 d\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^1 \partial \eta^2} (1 - 2\eta^1\eta^2).$$

Dans ces notations, la question de réalité des coordonnées fermioniques apparaît comme mal posée. Par exemple, le volume de la supersphère $S^{3|2}$ est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \sin^2 \mu \cos^2 \mu \int_0^{2\pi} d\zeta^1 \int_0^{2\pi} d\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^1 \partial \eta^2} (1 - 2\eta^1\eta^2) \cdot 1 = \frac{\pi^3}{2}$$

Regardons maintenant quelques aspects topologiques de la supersphère. Le même raisonnement que celui de la sec. 1.2.2 peut être appliqué pour montrer que la supersphère $S^{2S+1|2S}$ est équivalente par homotopie à la sphère S^{2S+1} . En effet, le paramétrage (3.5) montre que les coordonnées fermioniques ne sont soumises à aucune contrainte. L'opérateur $D(\lambda)$ qui agit par changement d'échelle seulement sur les coordonnées fermioniques

$$D(\lambda)n^i = n^i, \quad D(\lambda)\eta^i = (1 - \lambda)\eta^i, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

satisfait toutes les conditions d'une équivalence par homotopie

$$D(0) = \text{id}, \quad D(1) \cdot S^{2S+1|2S} \subset S^{2S+1}, \quad D(\lambda)|_{S^{2S+1}} = \text{id}_{S^{2S+1}},$$

où la sphère S^{2S+1} est vue naturellement comme sous-variété (de base) de $S^{2S+1|2S}$. Ceci veut dire

$$\pi_n(S^{2S+1|2S}) = \pi_n(S^{2S+1})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit donc, qu'il n'y a pas d'instancions dans les modèles sigma sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$, car le deuxième groupe d'homotopie est toujours trivial. Pourtant, pour $S = 0$ la supersphère $S^{1|0} = S^1$, c'est-à-dire le cercle, a un groupe fondamental non trivial $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Plus généralement on a le résultat suivant

$$\pi_n(S^{2S+1|2S}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2S + 1 \\ 0, & n \neq 2S + 1 \end{cases}.$$

3.2 PROPRIÉTÉS DU MODÈLE DISCRET

3.2.1 Emboîtement des spectres

Dans cette section on exploite quelques résultats élémentaires sur la théorie conforme du modèle sigma sur la supersphère pour mettre en évidence quelles doivent être les propriétés nécessaires d'un modèle discret pour qu'il soit dans la même classe d'universalité que le modèle sigma.

Si on regarde la supersphère $S^{2S+1|2S}$ en tant que sous-espace du superespace euclidien $E^{2S+2|2S}$ défini par la contrainte (3.4), alors l'action du modèle sigma sur $S^{2S+1|2S}$ prend la forme

$$S[\Phi] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma d^2x \langle \partial_\mu \Phi(x), \partial_\mu \Phi(x) \rangle, \quad (3.8)$$

où les champs $\Phi(x) \in E^{2S+2|2S}$ sont soumis à la contrainte

$$\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = 1. \quad (3.9)$$

Lorsqu'on impose les mêmes conditions de bord $\mathcal{B}$ pour toutes les composantes du champ $\Phi(x)$, alors la fonction de partition du modèle sigma

$$Z_{\mathcal{B}}^{(S)}(g_\sigma) = \int \mathcal{D}[\Phi] e^{-S[\Phi]},$$

où la mesure de l'intégrale fonctionnelle est définie par

$$\mathcal{D}[\Phi] = \prod_{x \in \Sigma} d\Phi^0(x) \dots d\Phi^{4S+1}(x) \delta(\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle - 1),$$

peut être calculée exactement pour toute valeur de la constante de couplage g_σ . En effet, on introduit d'abord un champ de masse imaginaire $im(x)$ pour enlever la contrainte (3.9)

$$Z_{\mathcal{B}}^{(S)}(g_\sigma) = \int \mathcal{D}_E(\Phi) \int \mathcal{D}[m] e^{-S[\Phi] + i \int d^2x m(x) (\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle - 1)},$$

où $\mathcal{D}_E[\Phi]$ est la mesure d'intégration plate du superespace euclidien $E^{2S+2|2S}$. En commutant l'ordre de l'intégration fonctionnelle on obtient

$$Z_{\mathcal{B}}^{(S)}(g_\sigma) = \int \mathcal{D}[m] Z_{\mathcal{B}, g_\sigma}^2[m],$$

où $Z_{\mathcal{B}, g_\sigma}[m]$ est la fonction de partition d'un seul boson dans un champ de masse imaginaire $im(x)$ avec des conditions de bord $\mathcal{B}$. En réintroduisant la contrainte (3.9) on obtient

$$Z_{\mathcal{B}}^{(S)}(g_\sigma) = Z_{\mathcal{B}}^{(0)}(g_\sigma), \quad (3.10)$$

où $Z_{\mathcal{B}}^{(0)}(g_\sigma)$ est la fonction de partition du modèle sigma $O(2)$ qui, dans le paramétrage angulaire

$$\Phi^1(x) = \cos \phi(x), \quad \Phi^2(x) = \sin \phi(x) \quad (3.11)$$

n'est rien d'autre que celle du boson libre compact.

En tenant compte du fait que la charge centrale d'une théorie conforme ne dépend pas des conditions de bord, la conséquence immédiate de l'éq. (3.10) est sa valeur

$$c = 1$$

pour tous les modèles sigma $S^{2S+1|2S}$ et pour toute valeur de la constante de couplage g_σ . Ceci est en accord avec l'argument plus général, mais de nature perturbative, de la sec. 2.3.1.

Par la même logique on démontre que si on impose la même condition de bord $\mathcal{B}$ sur les composantes bosoniques Φ^{2i-1} , Φ^{2i} et fermioniques Φ^{2S+1+i} , Φ^{3S+1+i} pour $i = S' + 1, \dots, S$, alors

$$Z_{\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}}^{(S)}(g_\sigma) = Z_{\mathcal{B}'}^{(S')}(g_\sigma),$$

où $\mathcal{B}'$ dénote l'ensemble des conditions de bord pour le reste des composantes du champs $\Phi(x)$.

Le même argument s'emploie aux fonctions de corrélations restreintes seulement aux composantes Φ^{2i-1} , Φ^{2i} , Φ^{2S+1+i} et Φ^{3S+1+i} pour $i = 1, \dots, S'$. Par exemple, si les conditions de bord pour les champs $\Phi^i(x)$, $i = 3, \dots, 4S + 1$ sont telles qu'elles ne contribuent pas à la fonction de partition, alors les composantes

$$\langle \Phi^i(x) \Phi^j(y) \rangle, \quad i = 0, 1$$

du propagateur du modèle sigma $S^{2S+1|2S}$ s'expriment comme des fonctions de corrélation entre les opérateurs de vertex (3.11). En supposant que les conditions de bord ne brisent pas la symétrie $\text{OSp}(2S + 2|2S)$, alors ceci détermine entièrement le propagateur du champ vectoriel $\Phi(x)$.

On voit donc que le spectre *complet* du modèle sigma sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$, tenant compte de dégénérescences aussi, peut être lu dans la fonction de partition en imposant, par exemple, des conditions de bord périodiques pour les composantes bosoniques du champ $\Phi(x)$ et des conditions de bord anti-périodiques pour les composantes fermioniques. Notons le spectre complet dans ces conditions de bords par Σ_S . De plus, soit $\mathcal{B}_k$ l'ensemble de conditions de bord telles que tous les bosons et $2k$ fermions sont périodiques et le reste de $2S - 2k$ fermions — antipériodiques. Alors, on obtient une propriété fondamentale d'emboîtement

$$\Sigma_S = \Sigma_S(\mathcal{B}_0) \supset \Sigma_{S-1} = \Sigma_S(\mathcal{B}_1) \supset \dots \supset \Sigma_0 = \Sigma_S(\mathcal{B}_S), \quad (3.12)$$

entre les spectres complets des modèles sigma sur les supersphères $S^1, S^{3|2}, \dots, S^{2S+1|2S}$. On a noté par $\Sigma_S(\mathcal{B})$ le spectre du modèle sigma sur $S^{2S+1|2S}$ avec les conditions de bord $\mathcal{B}$.

On obtient donc une contrainte très forte sur la discrétisation recherchée du modèle sigma. En effet, les poids des vertex d'interaction dans les modèles discrets ne peuvent pas dépendre de S , car le paramètre S intervient seulement à travers les conditions de bord. Ceci veut dire qu'il doit exister un modèle discret *universel* qui est identique localement, c'est-à-dire la matrice de transfert est la même, pour tous les modèles sigma $S^{2S+1|2S}$. Le modèle discret universel s'associe à un modèle sigma $S^{2S+1|2S}$ particulier seulement par une prescription, qui dépend de S , qui indique comment calculer la fonction de partition à partir des puissances de la matrice de transfert.

3.2.2 Champs chiraux

Dans cette section je montre comment on a exploité quelques arguments de nature perturbative pour identifier des champs chiraux, c'est-à-dire des champs dont : i) le spin est égal à la dimension conforme et ii) la dimension conforme ne dépend pas de la constante de couplage g_σ .

Les calculs perturbatifs dans le modèle sigma sur la supersphère se font dans la limite de couplage faible $g_\sigma \rightarrow 0$ dans le formalisme du champ de fond constant.

Soit $\phi^a(x)$ un ensemble de coordonnées locales de la supersphère. La configuration des champs constants dans l'espace-temps $\phi^a(x) = \bar{\phi}^a$ est une solution des équations de mouvement classiques

$$D_\mu \partial_\mu \phi^a(x) = 0.$$

où D_μ est la dérivée covariante le long du vecteur $\partial_\mu \phi^a(x)$. Pour faire des calculs perturbatifs dans le formalisme du champ de fond constant il faut développer les fluctuations quantiques $\phi^a(x)$, autour de la solution classique $\bar{\phi}^a$, dans les puissances du vecteur $\zeta^a(x)$ tangent au point $\bar{\phi}^a$

$$\zeta^a(x) = \left. \frac{d\phi^a(x, s)}{ds} \right|_{s=0} = \zeta^a(x, s)|_{s=0}$$

à la géodésique

$$\frac{d^2 \phi^a(x, s)}{ds^2} + \frac{d\phi^b(x, s)}{ds} \Gamma_{bc}^a(\phi(x, s)) \frac{d\phi^c(x, s)}{ds} = 0$$

qui passe par les points $\bar{\phi}^a$ et $\phi^a(x)$

$$\phi^a(x, 0) = \bar{\phi}^a, \quad \phi^a(x, g_\sigma) = \phi^a(x).$$

Notons par $D(s)$ la dérivée covariante le long du vecteur $\zeta^a(x, s)$ et par $D, \bar{D}$ la composante holomorphe et, respectivement, anti-holomorphe de la dérivée covariante D_μ . Les expressions

$$D(s) \partial_\mu \phi^a(x, s) = D_\mu \zeta^a(x, s), \quad D(s) \zeta^a(x, s) = 0, \quad (3.13)$$

sont fréquemment utilisées dans les calculs perturbatifs. On note aussi la relation

$$[D(s), D_\mu] V^a(x, s) = V^b(x, s) R_{bcd}^a(\phi(x, s)) \zeta^c(x, s) \partial_\mu \phi^d(x, s), \quad (3.14)$$

valide pour tout vecteur $V^a(x, s)$ de l'espace tangent dans le point $\phi^a(x, s)$ de la supersphère. Les éqs (3.13, 3.14) permettent d'obtenir la forme suivante

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_\Sigma d^2x \partial_\mu \zeta^a \bar{g}_{ab} \partial_\mu \zeta^b + \frac{g_\sigma^2}{6} \int_\Sigma d^2x \bar{R}_{abcd} \zeta^b \zeta^c \partial_\mu \zeta^d \partial_\mu \zeta^a + \dots$$

pour l'action du modèle sigma à l'ordre g_σ^2 , où on a utilisé

$$\bar{D}_\mu \zeta^a(x) = \partial_\mu \zeta^a(x).$$

Les corrections d'ordre plus élevé s'expriment seulement en terme du tenseur de courbure de Riemann $\bar{R}_{abcd}$.

Montrons que la fonction à deux points de tous les scalaires du type

$$D^n \partial \phi^a(x) g_{ab} D^m \partial \phi^b(x) \quad (3.15)$$

ne reçoit pas de correction à l'ordre g_σ^2 . En effet, le développement du champ scalaire (3.15), autour du point $\bar{\phi}^a$ à l'ordre g_σ^2 , est de la forme

$$g_\sigma^2 \partial^{n+1} \zeta^a \bar{g}_{ab} \partial^{m+1} \zeta^b + g_\sigma^4 \bar{R}_{abcd} V^{abcd},$$

où V^{abcd} est un tenseur contravariant de rang 4 construit seulement à partir du vecteur ζ^a et de ses dérivées holomorphes $\partial^k \zeta^a$, dont la forme explicite n'a pas d'importance. En utilisant le développement du produit d'opérateur entre les champs $\zeta^a(x)$ à $g_\sigma \rightarrow 0$

$$\zeta^a(x) \zeta^b(y) = \bar{\zeta}^a \bar{\zeta}^b - \frac{\bar{g}^{ab}}{4\pi} \log |x - y|^2, \quad (3.16)$$

une définition du vide par dualité comme expliqué dans la sec. 2.1.2 et le fait que, selon la sec. 2.3.1, le tenseur de Ricci s'annule on voit que toutes les corrections s'annulent à l'ordre g_σ^2 sans effectuer d'intégration.

Il est possible de généraliser cet argument pour tous les champs scalaires de la théorie construits à partir des champs $\phi^a(x)$ et que des dérivées holomorphes $\partial \phi^a(x), D \partial \phi^a(x), \dots$ ou que des dérivées anti-holomorphes $\bar{\partial} \phi^a(x), \bar{D} \bar{\partial} \phi^a(x), \dots$. L'annulation de la dimension anormale, à l'ordre g_σ^2 , pour les champs scalaires construits à partir des champs $\phi^a(x)$ et que des dérivées holomorphes $\partial \phi^a(x), D \partial \phi^a(x), \dots$ ou que des dérivées anti-holomorphes $\bar{\partial} \phi^a(x), \bar{D} \bar{\partial} \phi^a(x), \dots$ est en accord avec les calculs perturbatifs de Wegner [77] pour les modèles sigma sphériques S^{N-1} à $N = 2$.¹ On vient, donc, d'identifier un grand ensemble de champs chiraux, parmi lesquels on retrouve aussi le tenseur d'énergie-impulsion

$$T(z) \propto \frac{1}{2} \partial \phi^a g_{ab}(\phi) \partial \phi^b = \frac{1}{2} \partial \zeta^a \bar{g}_{ab} \partial \zeta^b + \frac{g_\sigma^2}{6} \bar{R}_{abcd} \zeta^b \zeta^c \partial \zeta^d \partial \zeta^a + \dots$$

Plus généralement, l'algèbre des produits d'opérateurs des champs chiraux ne dépend pas de la constante de couplage $g_\sigma \rightarrow 0$ et, donc, peut être calculée dans la représentation de champs libres (3.16). Il est tentant d'utiliser cette remarque pour essayer de résoudre exactement la théorie conforme du modèle sigma en développant la théorie des représentations des algèbres chirales identifiées.

En conclusion on voit que le modèle discret doit être choisi de telle façon que les champs chiraux et invariants sous les transformations globales de la symétrie $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ à $g_\sigma \rightarrow 0$ restent chiraux pour tout g_σ fini.

3.3 MODÈLE DISCRET

On a conclu à la fin de la sec. 3.2.1 que l'emboîtement des spectres (3.12) implique l'existence d'une discrétisation universelle pour tous les modèles

¹Le spectre de dimensions anormales calculé en [77] est beaucoup plus grand que le spectre des opérateurs du modèle sigma S^1 . Ceci s'explique par le fait que les opérateurs qui correspondent, par une construction introduite en [77], à des dimensions anormales absentes dans le spectre du modèle sigma S^1 s'annulent identiquement.

sigma (3.8) sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$. Pour le moment, par la propriété d'universalité on comprend le fait que la matrice de transfert du modèle discret ne dépend pas du paramètre S . Plus tard, on va relier cette propriété de la matrice de transfert à la notion mathématique d'universalité.

Pour résoudre la contrainte d'universalité il suffit de remarquer que tous les supergroupes $\text{OSp}(2S+2|2S)$ ont la même algèbre d'invariants — l'algèbre de Brauer $B_L(2)$. Dans la première sous-section 3.3.1 on introduit l'algèbre $B_L(2)$. Dans la sous-section suivante 3.3.2 on étudie une discrétisation particulière du modèle sigma sur le cercle $S^{1|0}$, c'est-à-dire du boson libre compact. On identifie un modèle statistique dont la matrice de transfert est un élément de l'algèbre de Brauer et qui, donc, possède la propriété d'universalité désirée. En plus, ce modèle statistique contient le spectre du boson compacte au sens de l'éq. (3.12). Enfin, dans la dernière sous-section 3.3.3 on propose une description du modèle statistique par une chaîne qui est plus pratique dans les calculs numériques.

3.3.1 Algèbre de Brauer

Soit U le module fondamental (1.33)

$$U = B \otimes_{\mathbb{C}} V$$

du supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$, où B est une algèbre de Grassmann avec un nombre suffisamment grand de générateurs et $V \simeq V_0 \oplus V_1$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec base

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_{R+2S},$$

telle que $e_1, \dots, e_R$ est une base de V_0 . De plus, soit $e^1, \dots, e^{R+2S}$ la base duale par rapport à la forme symétrique consistante et invariante $\langle \ , \ \rangle$ de $\text{OSp}(R|2S)$.

On est intéressé par les endomorphismes pairs du module tensoriel $U^{\otimes L}$ qui commutent avec l'action du supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$, c'est-à-dire par le commutant du module $U^{\otimes L}$ de $\text{OSp}(R|2S)$. On va noter le commutant par $\mathcal{Z}_L(R, S) = (\text{End}_{\text{OSp}(R|2S)} U^{\otimes L})_{\bar{0}}$. Les éléments de $\mathcal{Z}_L(R, S)$ forment une algèbre sur l'anneau B_0 sous la multiplication des endomorphismes. Cette algèbre est appelée algèbre des invariants du supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$ à cause de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{End}_{\text{OSp}(R|2S)} U^{\otimes L} &\simeq (U^{\otimes L} \otimes (U^{\otimes L})^*)^{\text{OSp}(R|2S)} \simeq \\ &(U^{\otimes L} \otimes U^{*\otimes L})^{\text{OSp}(R|2S)} \simeq (U^{\otimes 2L})^{\text{OSp}(R|2S)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où on a utilisé l'isomorphisme naturel (1.7) et l'auto-dualité du module fondamental U fournie naturellement par la forme invariante $\langle \ , \ \rangle$. On cherche à donner une description explicite de l'algèbre $\mathcal{Z}_L(R, S)$.

Calculons $\mathcal{Z}_1(R, S)$ et $\mathcal{Z}_2(R, S)$. Comme le module fondamental U est irréductible, tous les endomorphismes de $\mathcal{Z}_1(R, S)$ sont proportionnels à l'endomorphisme identité id . Par l'isomorphisme (3.17), l'identité id correspond au seul invariant du module tensoriel $U \otimes_B U$

$$\sum_{p,q} \langle e^q, e^p \rangle \cdot e_p \otimes e_q.$$

Le commutant du module tensoriel $U \otimes_B U$ est plus compliqué. En effet, il existe exactement trois endomorphismes linéairement indépendants qui commutent avec l'action de $\text{OSp}(R|2S)$:

- i) l'identité I
- ii) la composition

$$E = \text{in} \circ \text{pr}$$

de la projection sur la représentation triviale

$$\text{pr}(v \otimes w) = \langle v, w \rangle$$

avec l'injection de la représentation triviale dans $U \otimes_B U$

$$\text{in } b = b \sum_{p,q} \langle e^q, e^p \rangle \cdot e_p \otimes e_q, \quad b \in B,$$

- iii) la transposition graduée

$$P(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

Alternativement on peut prendre en tant que base de $\mathcal{Z}_2(R, S)$ l'ensemble des idempotents primitifs orthonormaux

$$\pi_{\square\square} = \frac{I+P}{2} - \frac{E}{N}, \quad \pi_{\square} = \frac{I-P}{2}, \quad \pi_{\emptyset} = \frac{E}{N}, \quad (3.18)$$

où $N = R - 2S$ et on suppose que $N \neq 0$. Lors de la vérification de l'orthonormalité des endomorphismes (3.18) les relations

$$E^2 = NE, \quad PE = EP = E, \quad P^2 = I \quad (3.19)$$

sont utiles.

Le fait qu'il y a autant d'idempotents primitifs que d'éléments linéairement indépendants dans $\mathcal{Z}_L(R, S)$ montre que le module $U \otimes_B U$ se décompose dans une somme directe de trois représentations irréductibles. Il n'est pas difficile de vérifier que $\pi_{\square}$ projette sur la représentation adjointe, qui est un tenseur super-anti-symétrique de rang deux, et que $\pi_{\square\square}$ projette sur la représentation irréductible qui correspond au tenseur super-symétrique de rang deux.

Notons que les paramètres R, S , qui caractérisent le supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$, n'entrent dans les eqs (3.19) que par la combinaison $N = R - 2S$. Ceci permet d'interpréter le commutant $\mathcal{Z}_2(R, S)$ comme une représentation particulière d'une certaine algèbre $B_2(N)$, définie abstraitement comme une algèbre avec identité I et deux générateurs E et P soumis aux relations (3.19). Évidemment, toutes les représentations $\mathcal{Z}_2(R, S)$ sont des représentations fidèles de l'algèbre abstraite $B_2(N)$.

Montrons maintenant comment construire un grand ensemble d'éléments du commutant $\mathcal{Z}_L(R, S)$ pour L générique. Pour tout $1 \leq i < j \leq L$ définissons l'endomorphisme $\text{pr}_{i,j} : U^{\otimes L} \rightarrow U^{\otimes(L-2)}$, qui commute avec l'action de $\text{OSp}(R|2S)$, dont l'action est

$$\begin{aligned} \text{pr}_{i,j}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_L) = & \sigma \cdot \langle u_i, u_j \rangle \cdot u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \\ & \cdots \otimes u_{j-1} \otimes u_{j+1} \otimes \cdots \otimes u_L, \end{aligned} \quad (3.20)$$

où σ est un facteur de signe

$$\sigma = (-1)^{(|u_{i+1}|+\dots+|u_{j-1}|)|u_j|}$$

calculé en tenant compte de la consistance du produit scalaire

$$\langle u, w \rangle \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u| = |w|.$$

Ensuite, pour tout $1 \leq i < j \leq L$ on définit l'endomorphisme $\text{in}_{i,j} : U^{\otimes(L-2)} \rightarrow U^{\otimes L}$, qui commute avec l'action de $\text{OSp}(R|2S)$, dont l'action est

$$\begin{aligned} \text{in}_{i,j}(u_1 \otimes \dots \otimes u_{L-2}) &= \sigma \sum_{pq} \langle e^q, e^p \rangle \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_{i-1} \otimes e_p \otimes u_i \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes u_{j-1} \otimes e_q \otimes u_j \otimes \dots \otimes u_{L-2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où σ est un facteur de signe

$$\sigma = (-1)^{(|u_i|+\dots+|u_{j-1}|)|q|}.$$

Comme $\text{pr}_{i,j}$ et $\text{in}_{i,j}$ commute avec l'action de $\text{OSp}(R|2S)$, alors

$$E_{i,j} = \text{in}_{i,j} \circ \text{pr}_{i,j}$$

appartient aux commutant $\mathcal{Z}_L(R, S)$.

Enfin, comme c'est le cas pour tout module qui est une puissance tensorielle, il existe une action centrale du groupe symétrique $\text{Sym}(L)$ sur $U^{\otimes L}$. Cette action est engendrée par les transpositions $P_{i,j} : U^{\otimes L} \rightarrow U^{\otimes L}$, qui commutent avec l'action du supergroupe $\text{OSp}(R|2S)$, dont l'action explicite est

$$P_{i,j}(u_1 \otimes \dots \otimes u_i \otimes \dots \otimes u_j \otimes \dots \otimes u_L) = \sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_j \otimes \dots \otimes u_i \otimes \dots \otimes u_L \quad (3.22)$$

avec un facteur de signe

$$\sigma = (-1)^{|u_i||u_j|+(|u_i|+|u_j|)(|u_{i+1}|+\dots+|u_{j-1}|)}.$$

Les compositions multiples des projections (3.20), des injections (3.21) et des transpositions (3.22), telles qu'elles appartiennent au commutant $\mathcal{Z}_L(R, S)$, engendrent une sous-algèbre $\mathcal{Z}'_L(R, S)$. La sous-algèbre $\mathcal{Z}'_L(R, S)$ peut être présentée comme engendrée librement par la composition des générateurs

$$P_i = P_{i,i+1}, \quad E_i = E_{i,i+1}. \quad (3.23)$$

On vérifie, directement à partir de la définition des opérateurs E_i , P_i , que les relations suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} P_i^2 &= I, \quad E_i^2 = NE_i, \quad E_i P_i = P_i E_i = E_i, \\ P_i P_j &= P_j P_i, \quad E_i E_j = E_j E_i, \quad E_i P_j = E_j P_i, \\ P_i P_{i\pm 1} P_i &= P_{i\pm 1} P_i P_{i\pm 1}, \quad E_i E_{i\pm 1} E_i = E_i, \\ P_i E_{i\pm 1} E_i &= P_{i\pm 1} E_i, \quad E_i E_{i\pm 1} P_i = E_i P_{i\pm 1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $|i - j| > 1$.

Le premier théorème fondamental de la théorie des invariants des groupes de Lie $O(R)$ et $Sp(2S)$, prouvé par Weyl dans [35], dit que

$$\mathcal{Z}_L(R, 0) = \mathcal{Z}'_L(R, 0), \quad \mathcal{Z}_L(0, 2S) = \mathcal{Z}'_L(0, 2S).$$

Une conséquence de cette égalité est la dualité de Schur-Weyl, selon laquelle le commutant de l'action de $\mathcal{Z}_L(R, 0)$ ou $\mathcal{Z}_L(0, 2S)$ sur la chaîne $U^{\otimes L}$ est exactement l'action tensorielle du groupe de Lie $O(R)$ et, respectivement, $Sp(2S)$.

Dans le premier article attaché dans l'annexe on montre que

$$\dim \mathcal{Z}'_L(4, 1) = \dim \mathcal{Z}_L(4, 1). \quad (3.25)$$

Par ailleurs, des généralisations de la théorie des invariants pour les supergroupes $GL(M|N)$ existent aussi [73]. Il est, donc, très probable que le théorème fondamental de la théorie des invariants et la dualité de Schur-Weyl se généralise à tous les supergroupes $OSp(R|2S)$ et, en particulier, à la série $OSp(2S + 2|2S)$. On va supposer pour la suite que la généralisation est en effet possible et, donc, on identifie $\mathcal{Z}'_L(R, S)$ à $\mathcal{Z}_L(R, S)$.

On voit que les paramètres R et S n'interviennent pas séparément dans les éqs (3.24), mais seulement à travers la combinaison $N = R - 2S$. Ceci permet d'interpréter le commutant $\mathcal{Z}_L(R, S)$ comme une représentation particulière d'une algèbre $B_L(N)$ engendrée librement par un ensemble de générateurs e_i, p_i soumis *seulement* aux contraintes (3.19). Les générateurs E_i, P_i du commutant $\mathcal{Z}_L(R, S)$ sont alors une représentation particulière des générateurs e_i, p_i de l'algèbre $B_L(N)$. L'algèbre $B_L(N)$ s'appelle une algèbre de Brauer. Pourtant, pour L arbitraire il n'est plus vrai que les représentations $\mathcal{Z}_L(R, S)$ sont des représentations fidèles de l'algèbre de Brauer. Ceci devient clair sur l'exemple de $\mathcal{Z}_3(2, 0)$, où il existe une relation supplémentaire entre les générateurs du groupe symétrique $Sym(3)$ où on a la condition

$$P_1 P_2 P_1 + P_1 + P_2 = I + P_1 P_2 + P_2 P_1$$

qui vient du fait que le projecteur sur le tenseur antisymétrique de rang trois s'annule identiquement.

On se restreint maintenant au cas $N = 2$. Posons

$$\mathcal{Z}_L(S) = \mathcal{Z}_L(2S + 2, S).$$

En général, toutes les algèbres $\mathcal{Z}_L(S)$ peuvent être vues en tant que quotients $B_L(2)/I_L(S)$ de l'algèbre de Brauer, où $I_L(S)$ est l'idéal engendré par les relations satisfaites entre les générateurs $P_i = e_i + I_L(S)$, $E_i = e_i + I_L(S)$ en plus des éqs. (3.24). On retrouve, donc, la propriété d'universalité de l'algèbre de Brauer en tant qu'algèbre d'invariants des supergroupes $OSp(2S + 2|2S)$, c'est-à-dire pour tout commutant $\mathcal{Z}_L(S)$ il existe un homomorphisme surjectif

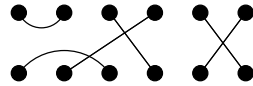
$$\pi_L(S) : B_L(2) \twoheadrightarrow \mathcal{Z}_L(S). \quad (3.26)$$

On voit, donc, que l'étude des représentations du commutant $\mathcal{Z}_L(S)$ peut être faite en deux étapes : i) l'étude des représentations de l'algèbre de

Brauer $B_L(2)$ et ii) l'étude de l'annulateur du module $U^{\otimes L}$ de l'algèbre $B_L(2)$ où, en d'autres termes, du noyau $\ker \pi_L(S)$.

L'algèbre de Brauer $B_L(2)$ est non-semi-simple, c'est-à-dire elle contient un idéal nilpotent. L'étude de cet idéal, appelé *radical de Jacobson* et noté par $\mathrm{rad} B_L(2)$, est un sujet compliqué qui nécessite l'emploi des techniques d'algèbre homologique [21].

L'algèbre de Brauer admet une représentation diagrammatique. Les mots de l'algèbre $B_L(2)$ sont des graphes sur $2L$ vertex de degré 1 — L en haut et L en bas.² Par exemple, le diagramme



est un mot de l'algèbre $B_6(2)$. Comme il y a $(2L - 1)!!$ façon de connecter par paires les $2L$ vertex on a

$$\dim B_L(2) = (2L - 1)!!$$

Il reste à spécifier comment multiplier les mots. Soit w_1 et w_2 deux mots représentés par des diagrammes. Le diagramme produit $w_1 \cdot w_2$ se calcule en deux étapes. On construit d'abord le graphe $w_1 * w_2$ qui est obtenu en mettant le mot w_1 au dessus du mot w_2 et en identifiant les vertex d'en bas du mot w_1 avec les vertex d'en haut du diagramme w_2 . Le mot produit $w_1 \cdot w_2$ est obtenu du graphe $w_1 * w_2$ si toute boucle est identifiée à l'entier 2. L'algèbre $B_L(2)$ est alors appelée algèbre de Brauer sur L brins et fugacité de boucles 2. Les générateurs de l'algèbre de Brauer sont représentés par les diagrammes de la fig. 3.1 Pour se familiariser avec le calcul diagrammatique il est instructif de vérifier que les relations (3.24) sont en effet satisfaites.

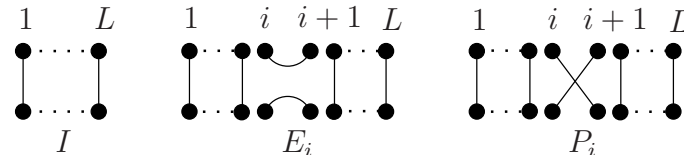


FIG. 3.1 – Représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$.

L'étude des représentations standard de l'algèbre de Brauer à travers l'analyse de ses idéaux a été exposée dans le premier article attaché dans l'annexe.

Au final, mentionnons que l'algèbre de Brauer $B_L(2)$ sur le corps $\mathbb{C}$ au lieu de l'anneau B_0 aurait pu être obtenue en étudiant le commutant τ -réel de l'action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{osp}(2S + 2|2S))$ sur le module tensoriel $V^{\otimes L}$, où V est le module fondamental de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$ sur $\mathbb{C}$. Ici τ est l'automorphisme extérieur de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$ qui induit la réflexion de Weyl

$$w_\tau \cdot \epsilon_{S+1} = \epsilon_S, \quad w_\tau \cdot \epsilon_S = \epsilon_{S+1}.$$

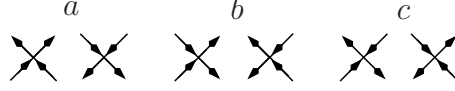
dans l'espace des poids (1.20) de $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$. Si la condition de τ -réalité est relaxée alors $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{osp}(2S+2|2S))} V^{\otimes L}$ n'est pas une représentation de l'algèbre de Brauer.

²Un vertex dans un graphe a un degré k s'il est le bord d'exactly k arêtes du graphe.

3.3.2 Gaz de boucles sur le réseau diagonal

Il est bien connu, voir par exemple [2], que les excitations de basse énergie au dessus du fondamental du modèle intégrable à six-vertex sont décrites dans la limite continue par la théorie conforme du boson compact.

Considérons le modèle à six-vertex



sur un réseau diagonal de largeur L comme indiqué dans la fig. 3.2. Les

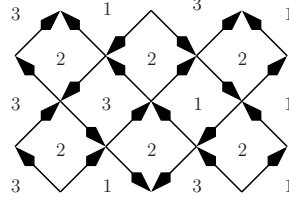


FIG. 3.2 – Exemple de configuration du modèle à six-vertex sur un réseau diagonal 6×4 avec bords spatiaux réfléchissants à gauche et à droite et direction temporelle périodique verticale. Les hauteurs sur le réseau dual correspondent à la discrétisation du boson compact.

vertex de poids 1



spécifient les conditions de bord. Si on impose des conditions de bord périodiques dans la direction temporelle après un temps T , alors la limite continue de ce modèle discret est, en passant par la description de la fig. 3.2 d'un champ de hauteurs $\propto \varphi$ sur le réseau dual, le boson compact

$$S[\varphi] = \frac{g}{4\pi} \int_A d^2x \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) \quad (3.27)$$

avec condition de type Dirichlet aux bords spatiaux de l'anneau A de largeur L et longueur T . La relation entre la constante de couplage g et les poids a, b, c est donnée par la solution exacte du modèle à six-vertex

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \pi g.$$

On se restreint à des poids $a = b$. La ligne critique du modèle à six-vertex peut être alors paramétrée par $\frac{a}{c}$.

La décomposition

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} + \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} + \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array} + \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array} \end{aligned}$$

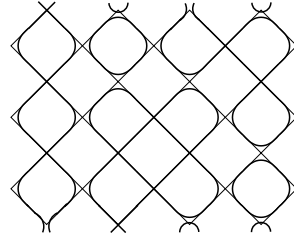


FIG. 3.3 – Gaz de boucle denses qui s'interectent sur un réseau diagonal.

permet de reformuler le modèle à six-vertex en tant qu'un gaz de boucles dirigées qui couvrent tous les arêtes du réseau diagonal. Ensuite on admet une symétrie par renversement des flèches des poids des vertex du gaz de boucles dirigées et on somme sur les directions des boucles. Finalement, on arrive à reformuler le modèle à six-vertex en tant que gaz de boucles denses 3.3 avec trois vertex d'interaction

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & w \\ \rangle \langle & \rangle \langle & \times \end{array}$$

et fugacité 2 pour les boucles, où le poids des intersections w est déterminé par

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{1+w}{2}.$$

En d'autres termes, la matrice de transfert locale, qui décrit le vertex d'interaction entre les segments des boucles qui passent par les sites avec les coordonnées i et $i+1$ dans la direction spatiale, est un élément

$$t_{i,i+1} = I + e_i + w p_i \quad (3.28)$$

de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$ dans la représentation diagrammatique de la sec. 3.3.1. La matrice de transfert totale

$$t = \prod_{i=1}^{[L/2]} t_{2i-1} \prod_{i=1}^{[(L-1)/2]} t_{2i} \quad (3.29)$$

est elle aussi un élément de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$.

Notons que le passage du modèle à six-vertex au gaz de boucles n'est pas du tout une équivalence. Ceci est particulièrement bien illustré par le fait que la dimension de la matrice de transfert du modèle à six-vertex est 2^L , tandis que celle du gaz de boucles est $(2L-1)!!$. Ceci n'est pas une mauvaise nouvelle. Au contraire, on a réussi à identifier un modèle discret universel, qui contient l'information complète sur tous les modèles sigma $S^{2S+1|2S}$ à la fois.

Notons que si on impose des conditions de bord périodiques dans la direction temporelle, alors la fugacité des boucles non-contractibles n'est pas fixée par le gaz de boucles. Dans le premier article attaché dans l'annexe on montre que le gaz de boucles denses satisfait toutes les contraintes imposées à la fin de la sec. 3.2.1. En particulier, la spécification de la fugacité des boucles non-contractibles correspond à la prescription de la sec. 3.2.1 qui permet d'associer un modèle sigma $S^{2S+1|2S}$ particulier

au modèle discret universel. Par exemple, le spectre complet Σ_S de la sec. 3.2.1 s'obtient en choisissant une fugacité $4S + 2$ pour les boucles non-contractibles qui s'auto-intersectent un nombre pair de fois et une fugacité 2 pour les boucles non-contractibles qui s'auto-intersectent un nombre impair de fois.

Le modèle discret universel peut être décrit alternativement par un hamiltonien

$$H_\Delta = -\frac{1+\Delta}{2} \sum_{i=1}^{L-1} (I + p_i) - \frac{1-\Delta}{2} \sum_{i=1}^{L-1} e_i, \quad (3.30)$$

qui agit sur les mots de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$. L'hamiltonien (3.30) est déterminé uniquement par les deux conditions : i) il ne contient que des interactions homogènes entre les plus-proches voisins et ii) l'image de H_Δ par la projection $\pi_L(0)$ de l'éq. (3.26) est l'hamiltonien intégrable de la chaîne XXZ ouverte

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} (\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \otimes \sigma_{i+1}^z),$$

à une constante additive près. La deuxième condition garantit que le spectre de l'hamiltonien (3.30) contient toutes les valeurs propres à des dégénérescences près de l'hamiltonien H_{XXZ} et que dans la limite $L \rightarrow \infty$ le spectre de H_Δ contient tous les exposants à des dégénérescences près de la théorie conforme avec bord du boson libre compact (3.27). La vérification de la deuxième condition est faite soigneusement dans le premier article attaché dans l'annexe.

3.3.3 Chaîne ouverte

Le seul désavantage de la description du modèle sigma par un gaz de boucles (3.28, 3.29) ou un hamiltonien algébrique (3.30) est l'impossibilité de calculer les dégénérescences des exposants du modèle sigma $S^{2S+1|2S}$. En effet, les supergroupes $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ ne disposent pas d'une action sur l'espace de base de la représentation diagrammatique de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$.

Au contraire, la chaîne $U^{\otimes L}$, où U est le module fondamental de $\text{OSp}(2S + 2|2S)$, fournit en même temps une action du supergroupe $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ et une représentation de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$, par le commutant $\mathcal{Z}_L(S)$ de la sec. 3.3.1. On dit que $U^{\otimes L}$ est un bi-module de $\text{OSp}(2S + 2|2S) - B_L(2)$. On peut voir la chaîne $U^{\otimes L}$ comme une représentation particulière du modèle discret universel, c'est-à-dire du gaz de boucles (3.28, 3.29), obtenue par la projection (3.26). Dans cette perspective, il n'y a plus d'ambiguïté sur les poids des boucles non-contractibles, car la fonction de partition est déterminée par

$$Z_L(D) = \text{str}_{U^{\otimes L}} D^{\otimes L} T^\beta, \quad (3.31)$$

où la matrice de transfert est l'image

$$T = \pi_L(S)(t)$$

de (3.29) et $D^{\otimes L}$ est la représentation tensorielle de l'action de $D \in \text{OSp}(2S + 2|2S)$ sur la chaîne.

La matrice D peut être vue en tant que label de conditions de bord périodiques généralisées dans la direction temporelle compatibles avec la symétrie $\text{OSp}(2S+2|2S)$. Dans le premier article attaché dans l'annexe on montre que le choix d'une matrice D identité id_U correspond aux conditions de bord périodiques pour toutes les composantes du champ vectoriel $\Phi(x)$ de la sec. 3.2.1 du modèle sigma, tandis que le choix $D = \text{id}_{U_0} - \text{id}_{U_1}$ correspond aux conditions de bord périodique pour les composantes bosoniques et anti-périodiques pour les composantes fermioniques. En particulier, si $D = \text{id}_U$ alors la fonction de partition est, dans la limite continue, exactement celle du boson libre compact avec des conditions de bord périodiques dans la direction temporelle et Dirichlet-Dirichlet dans la direction spatiale.

L'avantage, du point de vue numérique, de la description du modèle sigma par un gaz de boucles (3.28, 3.29) ou un hamiltonien algébrique (3.30) est maintenant évident. Pour S suffisamment grand, on a toujours

$$(4S+2)^L = \dim T \gg \dim t = (2L-1)!!.$$

Le mieux est de combiner les deux formalismes par la relation

$$Z_L(D) = \sum_{\mu} sc_{\mu}(D) \chi_{\mu}(t^{\beta}), \quad (3.32)$$

où la somme μ est sur toutes les partitions de $L-2k$, $k=0,1,\dots$, $sc_{\mu}(D)$ sont les fonctions symétriques généralisées définies par récurrence

$$sc_{\mu}(D) = \frac{1}{2} \det \left(sc_{\mu_j-i-j+2}(D) + sc_{\mu_j+i-j}(D) \right), \quad (3.33)$$

à partir des fonctions symétriques élémentaires

$$sc_n(D) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^{n-1}} \right) \frac{1}{\text{sdet}(1-zD)}, \quad (3.34)$$

et χ_{μ} sont les caractères des représentations standard $\Delta_L(\mu)$. L'origine de cette relation est expliquée dans le premier article attaché dans l'annexe.

Les caractères $\chi_{\mu}(t^{\beta})$ sont connus une fois qu'on sait calculer, même si seulement numériquement, les valeurs propres de la matrice de transfert t dans le formalisme du gaz de boucles (3.28, 3.29). La formule (3.32) permet ensuite de calculer aussi les dégénérescences "physiques" de ces valeurs propres.

3.4 SYMÉTRIES DE LA CHAÎNE OUVERTE $\text{OSP}(4|2)$

Même si la formule (3.32) est très utile en pratique, elle possède un défaut important. L'éq. (3.32) n'admet pas d'interprétation en termes de somme de caractères des représentations indécomposables qui apparaissent dans la décomposition de la chaîne $U^{\otimes L}$ en tant que bi-module $\text{OSp}(2S+2|2S) - B_L(2)$. Ceci est dû au fait que les fonctions symétriques généralisées (3.33) ne sont pas toutes linéairement indépendantes. La procédure qui permet d'obtenir une base de fonctions symétriques généralisées est connue sous le nom de *règles de modifications*.

Dans la section principale du premier article attaché dans l'annexe on a montré, en choisissant une base pour les fonctions symétriques généralisées (3.33) et en regardant la structure des modules standards indécomposables $\Delta_L(\mu)$, que beaucoup de termes dans la fonction de partition (3.32) à $S = 1$ se compensent et, donc, ne contribuent pas à l'expression finale. L'étude de la fonction de partition (3.32) réduite a été l'ingrédient principal qui a conduit à la confirmation (3.25) de la dualité de Schur-Weyl pour le bi-module $U^{\otimes L}$ de $\text{OSp}(4|2) - B_L(2)$.

Le résultat principal du premier article attaché dans l'annexe est la preuve de la décomposition suivante du module $U^{\otimes L}$ de $\text{OSp}(4|2)$

$$U^{\otimes L} \simeq \bigoplus_k D_L(k)G(\lambda_{k,0}) \oplus \bigoplus_{k,l} d_L(k,l)\mathcal{P}G(\lambda_{k,l}) \oplus \bigoplus_{\lambda \text{ typ}} d_L(\lambda)G(\lambda). \quad (3.35)$$

Dans l'éq. (3.35) $k = 0^*, 0, 1, \dots$ est un label des blocs de $\text{OSp}(4|2)$ de degré d'atypie 1, au sens de la sec. 1.1.9, $\lambda_{k,l}$ est le $(l+1)$ -ème plus haut poids dans le bloc k , $G(\lambda_{k,l})$ sont des représentations irréductibles, $\mathcal{P}G(\lambda_{k,l})$ est leur couverture projective au sens de la sec. 1.1.11, $G(\lambda)$ sont des représentations irréductibles de plus haut poids λ typique et, enfin, $D_L(k)$, $d_L(k,l)$ et $d_L(\lambda)$ sont les dimensions des représentations irréductibles de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$.

Le fait que les multiplicités des représentations indécomposables de $\text{OSp}(4|2)$, qui entrent dans la décomposition (3.35) de la chaîne $U^{\otimes L}$, soient des dimensions des représentations irréductibles de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$ est une preuve de la dualité de Schur-Weyl.

Les représentations irréductibles de $\text{OSp}(2S+2|2S)$ et de $B_L(2)$, qui apparaissent dans la décomposition de la chaîne $U^{\otimes L}$, peuvent être labellées par le même ensemble d'étiquettes ou de plus haut poids. Dans l'appendice du premier article attaché dans l'annexe on montre que les blocs de $\text{OSp}(2S+2|2S)$ et de $B_L(2)$ coïncident. Les représentations irréductibles des blocs $\mathcal{B}$ de $\text{OSp}(2S+2|2S)$ se combinent avec les représentations irréductibles du bloc $\mathcal{B}$ de $B_L(2)$ dans une seule représentation indécomposable sous l'action combinée de $\text{OSp}(2S+2|2S) - B_L(2)$.

On peut représenter l'action combinée de $\text{OSp}(4|2) - B_L(2)$ sur tous les blocs non triviaux $k = 0^*, 0, 1, \dots$ par le même diagramme qui est représenté dans la fig. 3.4.

3.5 CONSÉQUENCES SUR LA THÉORIE CONFORME AVEC BORD

La discussion des sections 3.2 et 3.3 suggère fortement que la limite continue de la chaîne ouverte $U^{\otimes L}$ de l'éq. (3.31), où U est le module fondamental du supergroupe $\text{OSp}(2S+2|S)$, est le modèle sigma (3.8) sur un anneau avec espace cible la supersphère $S^{2S+1|2S}$. Une confirmation numérique, présentée dans le deuxième article attaché dans l'annexe, qui soutient fortement la correspondance entre les modèles discret et continu est la chiralité du spectre pour les états scalaires de la chaîne. Ceci est en accord avec les contraintes imposées sur le modèle discret à la fin de la sec. 3.2.2.

Pour que l'affirmation sur la correspondance entre le modèle discret et le modèle continu soit complète, il reste encore à spécifier à quelles

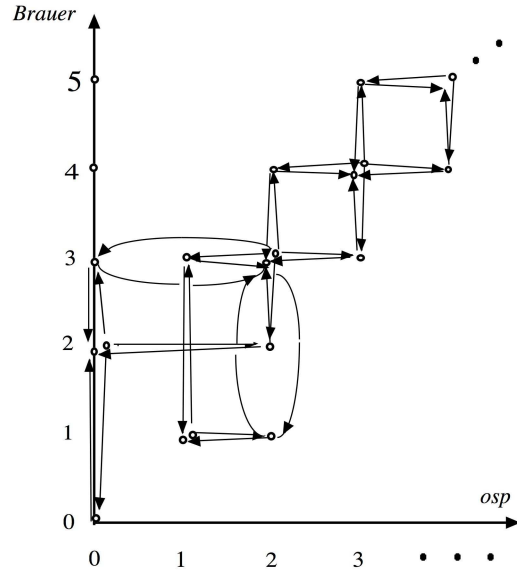


FIG. 3.4 – Sur l'axe horizontal sont indiquées les représentations irréductibles $G(\lambda_{k,l})$ de $\text{OSp}(4|2)$, sur l'axe vertical — les représentations irréductibles $B_L(\lambda_{k,l})$ de $B_L(2)$. Les flèches verticales représentent des homomorphismes nilpotents entre les modules de $\text{OSp}(4|2)$, réalisés par l'action de $B_L(2)$. Les flèches horizontales représentent des homomorphismes nilpotents entre les modules de $B_L(2)$, réalisés par l'action de $\text{OSp}(4|2)$.

conditions sur les bords de l'anneau A pour les composantes du champ vectoriel $\Phi(x)$ de l'éq. (3.8) correspondent les conditions “réfléchissantes” aux deux bords de la chaîne. Pour répondre à cette question il est utile de remarquer que dans la procédure de construction des modèles discrets de la sec. 3.3 les conditions de bord ne brisent pas la symétrie $\text{OSp}(2S + 2|2S)$. Ainsi, les conditions de bord du modèle sigma, non plus, ne doivent pas briser la symétrie globale $\text{OSp}(2S + 2|2S)$. Après une transformation conforme du ruban dans le semi-plan complexe $\text{Im } z \geq 0$

$$z = e^{\tau + \frac{i\pi\sigma}{L}},$$

telle que les bords $\sigma = 0$ et $\sigma = L$ de l'anneau A , de largeur $0 \leq \sigma \leq L$ et période $\tau \equiv \tau + T$, deviennent les deux rayons $\text{Arg } z = 0$ et $\text{Arg } z = \pi$ qui sortent de l'origine du plan complexe, les deux conditions de bord les plus générales qui satisfont cette contrainte peuvent être écrites dans la forme

$$M \cdot \partial\Phi(z, \bar{z}) + N \cdot \bar{\partial}\Phi(z, \bar{z}) = 0, \quad z = \bar{z}, \quad (3.36)$$

où M et N sont des matrices inversibles qui, à priori, peuvent dépendre de $z = \bar{z}$. On peut écrire l'éq. (3.36) dans la forme

$$\partial\Phi(z, \bar{z}) + B \cdot \bar{\partial}\Phi(z, \bar{z}) = 0, \quad z = \bar{z}, \quad (3.37)$$

En tenant compte de la forme du tenseur énergie-impulsion (non normalisé)

$$T(z) = \langle \partial\Phi(z, \bar{z}), \partial\Phi(z, \bar{z}) \rangle, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \langle \bar{\partial}\Phi(z, \bar{z}), \bar{\partial}\Phi(z, \bar{z}) \rangle,$$

de la contrainte de Cardy

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \quad z = \bar{z}$$

et de la relation

$$\langle \Phi(z, \bar{z}), \partial \Phi(z, \bar{z}) \rangle = 0$$

on obtient de l'éq (3.37)

$$\langle \bar{\partial} \Phi(z, \bar{z}), \bar{\partial} \Phi(z, \bar{z}) \rangle = \langle B \cdot \bar{\partial} \Phi(z, \bar{z}), B \cdot \bar{\partial} \Phi(z, \bar{z}) \rangle, \quad \langle \Phi(z, \bar{z}), B \cdot \bar{\partial} \Phi(z, \bar{z}) \rangle = 0$$

et donc

$$B \in \text{OSp}(2S + 1|2S).$$

En conclusion, les conditions les plus générales du modèle sigma sur les bords de l'anneau, qui ne brisent pas la symétrie $\text{OSp}(2S + 2|2S)$, sont paramétrées par une matrice $B \in \text{OSp}(2S + 1|2S)$. Évidemment, les conditions les plus générales le long du cycle de l'anneau, qui ne brisent pas la symétrie $\text{OSp}(2S + 2|2S)$, sont paramétrées par une matrice $D \in \text{OSp}(2S + 2|2S)$

$$\Phi(\tau + T, \sigma) = D \cdot \Phi(\tau, \sigma)$$

exactement comme dans la fonction de partition de la chaîne (3.31). On ne connaît pas à quelle matrice $B \in \text{OSp}(2S + 1|2S)$ correspondent les conditions de bord réfléchissantes du gaz de boucles de la sec. 3.30.

Exploitions maintenant le résultat (3.35) sur la décomposition de la chaîne en tant que module de $\text{OSp}(4|2)$. Comme la symétrie globale $\text{OSp}(4|2)$ est préservée quantiquement, les champs du modèle sigma qui sont connectés par l'action du supergroupe ont la même dimension conforme. On peut les regrouper dans des multiplets qui fournissent des représentations indécomposables $\mathcal{IG}$ de $\text{OSp}(4|2)$. L'ensemble de représentations indécomposables possibles est le même que celui qui apparaît dans la décomposition (3.35). Dans la théorie conforme du modèle sigma il y a une infinité de multiplets qui se transforment dans une certaine représentation indécomposable $\mathcal{IG}$ donnée. Ils se distinguent, au moins, par leur dimension conforme classique. Dans l'éq. (3.35) *toutes* les représentations indécomposables du type $\mathcal{IG}$ sont reliées par l'action de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$.

Selon la sec. (3.3.1), surtout l'éq. (3.17), l'algèbre de Brauer est l'algèbre des invariants de $\text{OSp}(4|2)$. En même temps, on a vu dans la sec. (3.2.2) que les champs du modèle sigma qui sont chiraux à $g_\sigma \rightarrow 0$ et invariants sous la symétrie globale $\text{OSp}(4|2)$ restent chiraux à tout g_σ fini. On arrive à conclure, par la chiralité de tous les champs de bord invariants sous la symétrie globale $\text{OSp}(4|2)$, que les multiplets qui se transforment dans une représentation indécomposable $\mathcal{IG}$ donnée ont la même dimension conforme *anormale*. Plus que cela, l'action de l'algèbre de Brauer $B_L(2)$ sur la chaîne (3.35) relie non seulement les multiplets qui se transforment dans la même représentation indécomposable $\mathcal{IG}$, mais aussi les multiplets qui se transforment dans des représentations indécomposables $G(\lambda_{k,0})$, $\mathcal{PG}(\lambda_{k,l})$ différentes, mais qui se trouvent dans le même bloc. Ceci a été représenté dans la fig. 3.4.

On voit, donc, que les dimensions anormales sont constantes dans les blocs de $\text{OSp}(4|2)$. Les dimensions classiques peuvent être calculées dans la limite de couplage faible $g_\sigma \rightarrow 0$ par un simple comptage de dérivées ∂_x le long du bord. Rappelons que, selon la sec. 1.1.9, la propriété de

définition des caractères est leur constance sur les blocs. Cela veut dire que les dimensions anormales doivent être les valeurs propres d'un opérateur central de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{osp}(4|2))$. L'analyse harmonique et les calculs numériques du deuxième article attaché dans l'annexe suggèrent fortement que cet opérateur central est simplement le Casimir de $\mathfrak{osp}(4|2)$.

On conjecture l'expression suivante pour les dimensions anormales des champs du modèle sigma

$$\delta h(\lambda) = \frac{g_\sigma^2 \mathrm{Cas}(\lambda)}{8\pi}. \quad (3.38)$$

Pour obtenir des expressions explicites pour la fonction de partition du modèle sigma $S^{2S+1|2S}$, on se repose sur la forme de la fonction de partition (3.32) pour la chaîne. Dans la limite continue elle devient

$$Z(D, q) = \sum_{\mu} sc_{\mu}(D) \chi_{\mu}(q), \quad (3.39)$$

où $q = e^{2\pi i \tau}$ et $\tau = \frac{iT}{2L}$ caractérisent l'anneau A et $\chi_{\mu}(q)$ dénote le caractère de la matrice de transfert dans la représentation standard $\Delta_L(\mu)$ lorsque $L \rightarrow \infty$.

Dans le premier article attaché dans l'annexe on explique que, pour les groupes $O(R)$ et $\mathrm{Sp}(2S)$, l'espace vectoriel des tenseurs de trace nulle de forme (symétrie de Young) μ est un quotient *irréductible* du module standard $\Delta_L(\mu)$ de $B_L(R)$ ou, respectivement, $B_L(-2S)$. La généralisation du calcul tensoriel pour les supergroupes est un sujet délicat, car les traces des tenseurs ne peuvent pas être toujours soustraites. Ceci est déjà visible pour le tenseur super-symétrique de rang deux de $\mathrm{OSp}(2S|2S)$, car le projecteur $\pi_{\emptyset}$ de l'éq. (3.18) n'est pas bien défini. On voit, sur cet exemple, que l'impossibilité de soustraire toutes les traces de tous les tenseurs est due à l'apparition des représentations indécomposables dans les produits tensoriels. En fait, la classification des poids μ par bloc aurait pu être obtenue par une analyse des tenseurs et de leurs traces qui n'admettent pas de soustraction. La trace d'un tenseur de forme μ , qui n'admet pas de soustraction, est elle même un tenseur λ . Si on définit une relation d'équivalence $\mu \simeq \lambda$ et on l'étend au maximum par transitivité on obtient le bloc $[\mu]$. Le passage entre les plus hauts poids de $\mathfrak{osp}(2S+2|2S)$ et les partitions est expliqué dans le premier article attaché dans l'annexe.

Soit $\delta_L(\mu)$ l'espace vectoriel des tenseurs de $\mathrm{OSp}(2S+2|2S)$ de forme μ avec le maximum de traces soustraites qui apparaissent dans la décomposition de la chaîne $U^{\otimes L}$. On explique, dans le premier article attaché dans l'annexe, que $\delta_L(\mu)$ est encore un quotient, mais généralement *indécomposable*, de la représentation standard $\Delta_L(\mu)$ de $B_L(2)$. Ceci généralise le résultat annoncé précédemment pour les groupes classiques $O(R)$ et $\mathrm{Sp}(2S)$.

Soit S fixe et μ une partition avec un nombre de boîtes $|\mu|$ suffisamment grand. Les fonctions symétriques généralisées $sc_{\mu}(D)$ (qui ne sont pas des caractères) peuvent alors être exprimées, à l'aide des règles appelées des "règles de modifications des caractères" [18], par des combinaisons linéaires sur $\mathbb{Z}$ des fonctions symétriques $sc_{\lambda}(D)$ avec $|\lambda| < |\mu|$. La possibilité de coefficients négatifs dans ces combinaisons linéaires confirme

le fait que les représentations tensorielles $\delta_L(\mu)$ sont des quotients des représentations standards $\Delta_L(\mu)$.

L'analyse qu'on vient de faire sur l'éq. (3.39) suggère une façon astucieuse de la calculer. Il faut interpréter *formellement* $sc_\mu(D)\chi_\mu(q)$ comme la contribution à la fonction de partition de tous les champs tensoriels du modèle sigma de forme μ avec un maximum de trace soustraites. Le fait que pour certains μ ces champs tensoriels n'existent même pas est pris en compte par les propriétés énoncées des fonctions symétriques généralisées $sc_\mu(D)$. Une analyse systématique des dimensions classiques des champs du modèle sigma permet d'obtenir des expressions explicites de la forme

$$\chi_\lambda(q) = z_\emptyset(q) q^{\delta h(\lambda)} \sum_{Y \text{ forme } \lambda} q^Y. \quad (3.40)$$

Dans la formule (3.40), $z_\emptyset(q)$ est la contribution à la fonction de partition des champs chiraux scalaires. La somme est sur les tenseurs de forme arbitraire λ construits à partir des vecteurs $\partial_x^{n_T(\epsilon)} \Phi$, où ϵ est une boîte du diagramme de la partition λ . Les entiers $n_T(\epsilon)$ remplissent un tableau de Young Y de forme λ de façon qu'ils soient croissants dans les lignes et strictement croissants dans les colonnes.

La fonction $z_\emptyset(q)$ peut être calculée explicitement. On remarque qu'il y a exactement $\left[\frac{n}{2}\right]$ champs linéairement indépendants de la forme

$$\langle \partial_x^i \Phi, \partial_x^{n-i} \Phi \rangle \quad (3.41)$$

au niveau n . En faisant des produits d'ordre l entre les champs de la forme (3.41) on obtient $C_{l+\left[\frac{n}{2}\right]-1}^l$ champs linéairement indépendants au niveau ln . Selon la généralisation supposée dans la sec. 3.3.1 du théorème fondamental de la théorie des invariants, *tous* les champs scalaires peuvent être construits comme des produits arbitraires de termes

$$\langle \partial_x^r \Phi, \partial_x^s \Phi \rangle.$$

Ils peuvent être alors indexés par des partitions infinies $2^{l_2} 3^{l_3} \dots$, dans la notations par cycles, et, donc,

$$z_\emptyset(q) = \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{l+\left[\frac{n}{2}\right]-1}^{\infty} C_{l+\left[\frac{n}{2}\right]-1}^l q^{ln} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}. \quad (3.42)$$

La fonction (3.42) mesure de combien l'algèbre des champs scalaires chiraux est plus grande que l'algèbre de Virasoro dans la limite $S \rightarrow \infty$.

Les fonctions

$$s_\lambda(q) = \sum_{Y \text{ forme } \lambda} q^Y \quad (3.43)$$

peuvent être exprimées par récurrence par des q -fonctions symétriques élémentaires

$$s_n(q) = \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n} q^{k_1 + \dots + k_n} = \frac{1}{(1-q^n)!} \quad (3.44)$$

comme des déterminants de matrices infinies

$$s_\lambda(q) = \det \|s_{\lambda_j + i - j}(q)\|. \quad (3.45)$$

Dans l'éq. (3.44) on a introduit la notation

$$(1 - q^n)! = (1 - q) \dots (1 - q^n).$$

Notons la similitude entre les éqs (3.44, 3.45) et les éqs (3.34, 3.33). Les q -fonctions symétriques (3.45) peuvent être vues comme la limite

$$s_\lambda(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_\lambda(q, q^2, \dots, q^n)$$

des fonctions symétriques de Schur $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$. L'équation (3.45) est une conséquence de l'interprétation combinatoire [37] de l'éq. (3.43) en tant que caractère de $\text{GL}(n)$ dans la limite $n \rightarrow \infty$.

Au final, notons que les auteurs [51] ont réussi à calculer la contribution à la fonction de partition du modèle sigma $S^{3|2}$ des champs dans une représentation donnée par des méthodes différentes.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre on a expliqué comment on a utilisé un modèle discret universel de gaz de boucles et une chaîne avec les mêmes symétries que le modèle sigma quantique sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$ pour élucider quelques aspects non-perturbatifs de sa théorie conforme. Pour mieux maîtriser techniquement la connexion entre le modèle discret et le modèle continu on a considéré la chaîne ouverte avec bords réfléchissants et des conditions de bord du type (3.37) pour le modèle sigma.

L'analyse détaillée de l'action de la symétrie globale $\text{OSp}(2S+2|2S)$ et de l'algèbre des invariants $B_L(2)$ sur les états de la chaîne, l'analyse harmonique de la supersphère et l'analyse numérique du spectre de l'hamiltonien de la chaîne sur toute la ligne critique nous amènent à conjecturer le spectre exact (3.38) de la théorie conforme avec bord et de donner une expression explicite pour la fonction de partition (3.39, 3.40, 3.43, 3.45) de la théorie conforme avec bord.

CHAÎNES QUANTIQUES AVEC SYMÉTRIE $GL(N|N)$

SOMMAIRE

4.1	MODÈLES SIGMA SUR LES SUPERESPACES PROJECTIFS	107
4.2	MODÈLE DISCRET	108
4.2.1	Algèbre de Brauer avec paroi	109
4.2.2	Modèle de boucles et chaînes quantiques	111
4.2.3	Les fermions symplectiques	113
4.3	EXPOSANTS DU MODÈLE DE BOUCLES	118
	CONCLUSION	125

CE chapitre commence par une brève introduction à la géométrie des superespaces projectifs $CP^{N-1|N}$. Il continue dans la deuxième section par l'introduction d'un modèle de boucles et d'une chaîne quantique dont les symétries suggèrent qu'ils sont des discrétisations du modèle sigma superprojectif $CP^{N-1|N}$. Dans la dernière section on présente des calculs numériques et analytiques qui confirment cette hypothèse.

4.1 MODÈLES SIGMA SUR LES SUPERESPACES PROJECTIFS

On a besoin d'une conjugaison complexe dans l'algèbre de Grassmann B qui satisfait

$$|\bar{a}| = |a|, \quad \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}, \quad \bar{\bar{a}} = a \quad (4.1)$$

pour tout $a, b \in B$.

Pour définir les superspaces projectifs on généralise l'application de Hopf

$$0 \rightarrow U(1) \rightarrow S^{2N-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{N-1} \rightarrow 0.$$

Soit

$$Z^i = z^i \in B_0, \quad Z^{N+\alpha} = \zeta^\alpha \in B_{\bar{1}}, \quad i, \alpha = 1, \dots, N$$

les coordonnées d'un point Z sur la supersphère $S^{2N-1|2N}$

$$Z^\dagger \cdot Z = \sum_{i=1}^N \bar{z}^i z^i + \sum_{\alpha=1}^N \bar{\zeta}^\alpha \zeta^\alpha = 1 \quad (4.2)$$

de rayon $R = 1$, où † est la transposée conjuguée. L'espace projectif $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ est l'ensemble de classes d'équivalence $[Z]$ des points sur la supersphère qui diffèrent par une phase

$$[Z] = Ze^{i\mathbb{R}}.$$

De façon équivalente, on peut définir le superspace projectif $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ comme un superspace homogène.

Soit $U(N|N)$ le supergroupe unitaire, c'est-à-dire le sous-groupe de $GL(N|N)$ composé de matrices M qui satisfont $M^\dagger = \bar{M}^t = M^{-1}$, où t est la transposition habituelle des matrices $2N \times 2N$. Le supergroupe $U(N|N)$ est compact, car sa sous-variété de base $U(N) \times U(N)$ est compacte.

Soit $V \simeq V_0 \oplus V_{\bar{1}}$ le module fondamental de $\mathfrak{gl}(N|N)$ avec base

$$e_1 < \dots < e_{2N}$$

et $U = B \otimes_{\mathbb{C}} V$ le module fondamental de $U(N|N)$. On vérifie facilement que le sous-groupe de $U(N|N)$ qui laisse invariant le point $[Z_0] = e^{i\mathbb{R}}e_0$ est $U(1) \times U(N-1|N)$. Tous les points de $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ peuvent être obtenus par l'action de $U(N|N)$ sur $[Z_0]$. En effet, la condition $M^\dagger M = 1$ implique que les éléments de la première colonne d'une matrice arbitraire M de $U(N|N)$ sont les coordonnées $Z^p = M^p_0$ d'un point sur la supersphère (4.2). On a ainsi

$$\mathbb{C}P^{N-1|N} \simeq \frac{U(N|N)}{U(1) \times U(N-1|N)}.$$

La métrique sur $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ est la généralisation de la métrique de Fubini-Study sur les espaces projectifs

$$ds^2 = DZ^\dagger \cdot DZ, \quad (4.3)$$

où

$$DZ = dZ - (Z^\dagger \cdot dZ)Z.$$

Le superspace projectif $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ est riemannien et compact, car sa sous-variété de base $\mathbb{C}P^{N-1}$ est riemannienne et compacte. De plus, c'est un

superespace symétrique, car $U(1) \times U(N-1|N)$ est le sous-groupe laissé invariant par l'automorphisme induit par la transformation d'équivalence $e_0 \rightarrow e_0, e_1 \rightarrow -e_1, \dots, e_{2N} \rightarrow -e_{2N}$.

Le modèle sigma sur $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ est alors défini par l'action

$$S[Z(x)] = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_\Sigma d^2x D_\mu^\dagger Z(x) \cdot D_\mu Z(x), \quad (4.4)$$

où les champs $Z(x)$ sont soumis à la contrainte

$$Z^\dagger(x) \cdot Z(x) = 1, \quad x \in \Sigma.$$

Alternativement, on aurait pu procéder comme dans la sec. 2.2.1, c'est-à-dire introduire une dérivée covariante D_μ , définie par une connexion non-dynamique $A_\mu(x)$, telle que l'action (4.4) soit invariante par les transformations locales $U(1) \times U(N-1|N)$ et les transformations globales $U(N|N)$.

On a mentionné à plusieurs reprises, qu'une supervariété est homotopiquement équivalente à sa sous-variété de base. On voit, donc, qu'un point essentiel qui distingue les superspaces projectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ des supersphères $S^{2S+1|2S}$ est la non-trivialité du deuxième groupe d'homotopie. Une application importante de ce fait aux modèles sigma sur les superspaces projectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ est l'existence d'un terme topologique

$$I_2[Z(x)] = \int_\Sigma d^2x \partial_\mu Z^\dagger \cdot \partial_\nu Z \varepsilon_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

dont l'évaluation sur les configurations classiques $Z(x)$ donne leur charge instantonique.

Notons que le représentant le plus simple des modèles sigma superprojectifs, c'est-à-dire le modèle sigma sur $\mathbb{C}P^{0|1}$, est la paire de fermions symplectiques. En effet, on vérifie par un calcul direct que la métrique (4.3) se réduit à

$$ds^2 = d\bar{\eta}d\eta$$

lorsque $N = 1$. Pourtant, dans ce cas le terme topologique (4.5) est identiquement zéro. Ceci est en accord avec le fait que la sous-“variété” de base de $\mathbb{C}P^{0|1}$ est un point.

4.2 MODÈLE DISCRET

Les arguments de la sec. 3.2 peuvent être généralisés aux modèles sigma (4.4). La généralisation de l'emboîtement des spectres (3.12) implique l'existence d'une discrétisation universelle des modèles sigma superprojectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

- ★ les poids des vertex d'interaction ne dépendent pas de N
- ★ seulement les conditions de bords dépendent de N (mais pas seulement de N).

Pour résoudre la contrainte d'universalité, on remarque que tous les supergroupes $GL(N|N)$ ont la même algèbre des invariants — l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{m,n}(0)$. Dans la première sous-section on introduit l'algèbre $B_{m,n}(0)$.

Dans la deuxième sous-section on propose un modèle discret universel, dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre de Brauer avec paroi. Ce modèle universel est un modèle de boucles de fugacité zéro qui peuvent s'intersecter. La liberté d'intersection des boucles rend le modèle discret universel non-local. Pour qu'il puisse décrire dans la limite continue le modèle sigma superprojectif $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ les poids des boucles non-contractibles doivent être choisis de façon très particulière, qui dépend de N . Une fois que N est fixé et on s'est restreint à l'ensemble de poids des boucles non-contractibles qui lui correspondent, le modèle de boucles universel admet une reformulation locale par une chaîne quantique avec symétrie $GL(N|N)$. Par l'universalité du modèle discret, l'algèbre des matrices de transfert de la chaîne quantique est un quotient de l'algèbre de Brauer avec paroi.

Dans la troisième section on dérive la limite continue de la chaîne quantique pour $N = 1$. Celle-ci correspond, au sens des emboîtements des spectres, au sous-secteur le plus petit des modèles sigma superprojectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$.

4.2.1 Algèbre de Brauer avec paroi

On a mentionné dans la sec. 3.3.1 que l'algèbre de Brauer $B_L(2)$ aurait pu être obtenue par l'analyse du commutant τ -réel du module $V^{\otimes L}$ de la superalgèbre $\mathfrak{osp}(2S + 2|2S)$. Dans cette section, on va introduire l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{m,n}(Q)$ par l'analyse des commutants de certains modules tensoriels de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(M|N)$, où $Q = M - N$.

Soit $V \simeq V_0 \oplus V_1$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec base

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{M+N},$$

telle que $e_1, \dots, e_M$ est une base de V_0 . L'espace vectoriel V est un module de $\mathfrak{gl}(M|N)$ par l'action définie dans la sec. 1.1.4. Soit $e^1, \dots, e^{M+N}$ la base de V^* duale à la base de V . L'espace vectoriel V^* est un module de $\mathfrak{gl}(M|N)$ dual à V par l'action (1.5).

On s'intéresse aux endomorphismes pairs du module tensoriel $V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n}$ qui commutent avec l'action de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$, c'est-à-dire au commutant

$$\mathcal{Z}_{m,n}(M, N) = (\text{End}_{\mathfrak{gl}(M|N)} V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n})_{\bar{0}}.$$

Les éléments de $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ forment une algèbre sur $\mathbb{C}$ sous la multiplication des endomorphismes. Cette algèbre est appelée algèbre des invariants de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(M|N)$ à cause de l'isomorphisme

$$\text{End}_{\mathfrak{gl}(M|N)} V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n} \simeq (V^{\otimes(m+n)} \otimes V^{*\otimes(m+n)})^{\mathfrak{gl}(M|N)} \quad (4.6)$$

où on a utilisé l'isomorphisme naturel (1.7). On cherche à donner une description explicite de l'algèbre $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$.

Une sous-algèbre de $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ correspond à l'action du groupe $\text{Sym}(m) \times \text{Sym}(n)$. Cette action est engendrée par les $m - 1$ transpositions

$$P_i \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes \omega_n = (-1)^{|v_i||v_{i+1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \dots \otimes \omega_n$$

des indices contravariants et les $n - 1$ transpositions

$$\bar{P}_i \cdot v_1 \otimes \cdots \omega_i \otimes \omega_{i+1} \cdots \otimes \omega_n = (-1)^{|\omega_i||\omega_{i+1}|} v_1 \otimes \cdots \omega_{i+1} \otimes \omega_i \cdots \otimes \omega_n$$

des indices covariants du tenseur, où $v_1, \dots, v_m \in V$ et $\omega_1, \dots, \omega_n \in V^*$.

À part les permutations, $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ contient des éléments qui peuvent être construits par la composition des homomorphismes de projection $\text{pr}_{i,j} : V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n} \rightarrow V^{\otimes(m-1)} \otimes V^{*\otimes(n-1)}$, définis par

$$\text{pr}_{i,j} \cdot v_1 \otimes \cdots v_i \cdots \omega_j \cdots \otimes \omega_n = \sigma \omega_j(v_i) \cdot v_1 \otimes \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{\omega}_j \cdots \otimes \omega_n,$$

où le chapeau dénote l'absence dans le tenseur du vecteur ou de la forme et σ est un facteur de signe

$$\sigma = (-1)^{|\omega_j|(|v_i| + \cdots + |v_m| + |\omega_1| + \cdots + |\omega_{j-1}|)},$$

avec des homomorphismes d'injection $\text{in}_{k,l} : V^{\otimes(m-1)} \otimes V^{*(n-1)} \rightarrow V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n}$, définis par

$$\begin{aligned} \text{in}_{i,j} \cdot v_1 \otimes \cdots v_{i-1} \otimes v_{i+1} \cdots \omega_{j-1} \otimes \omega_{j+1} \cdots \otimes \omega_n = \\ = \sigma \sum_{k=1}^{M+N} v_1 \otimes \cdots v_{i-1} \otimes e_k \otimes v_{i+1} \cdots \omega_{j-1} \otimes e^k \otimes \omega_{j+1} \cdots \otimes \omega_n, \end{aligned}$$

où σ est un facteur de signe

$$\sigma = (-1)^{|e_k|(|v_{i+1}| + \cdots + |v_m| + |\omega_1| + \cdots + |\omega_{j-1}|)}.$$

La sous-algèbre $\mathcal{Z}'_{m,n}(M, N) \subset \mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ est engendrée par les transpositions graduées $P_i, \bar{P}_i$ et les endomorphismes

$$E_{i,j} = \text{in}_{i,j} \circ \text{pr}_{i,j},$$

qui sont idempotents à cause de la relation

$$\text{pr}_{i,j} \circ \text{in}_{i,j} = Q \text{id},$$

où $Q = M - N$.

Sergeev a montré dans [73] qu'en fait

$$\mathcal{Z}'_{m,n}(M, N) = \mathcal{Z}_{m,n}(M, N), \quad (4.7)$$

en généralisant un résultat classique pour les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(N)$. Plus précisément, il a montré que $\mathcal{Z}_{m+n,0}(M, N)$ est engendré par l'action de $\text{Sym}(m+n)$, ce qui suffit pour montrer l'isomorphisme naturel des espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathfrak{gl}(M|N)} V^{\otimes(m+n)} &\simeq (V^{\otimes(m+n)} \otimes V^{*\otimes(m+n)})^{\mathfrak{gl}(M|N)} \simeq \\ &\simeq \text{End}_{\mathfrak{gl}(M|N)} V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n}, \end{aligned}$$

où on a utilisé encore une fois l'isomorphisme naturel (1.7).

De la même façon que dans la sec. 3.3.1 on peut voir la série des commutants $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ avec m, n et $Q = M - N$ fixé comme des représentations différentes de la même algèbre — l'algèbre de Brauer avec

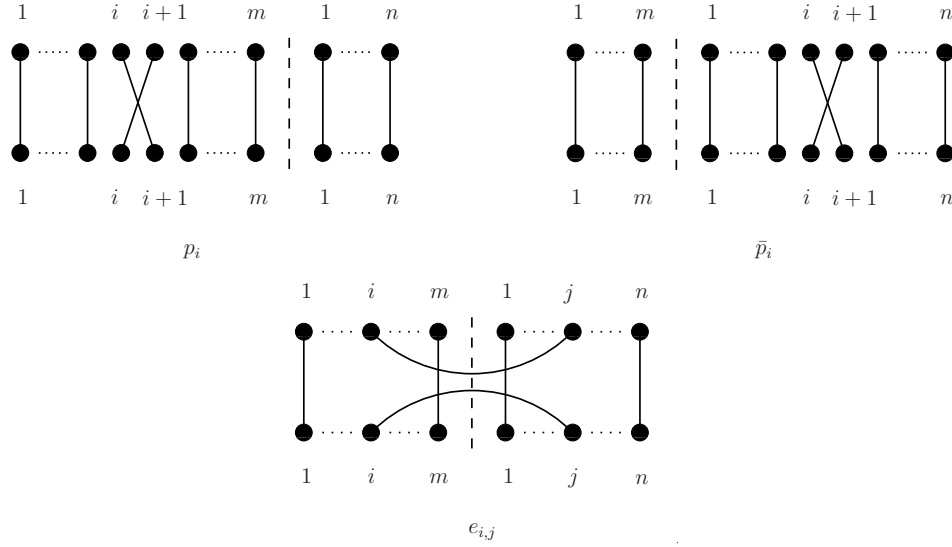


FIG. 4.1 – Représentation graphique des générateurs de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{m,n}(Q)$. La ligne verticale entre les $2m$ vertex à gauche et les $2n$ vertex à droite représente la paroi.

paroi $B_{m,n}(Q)$. Cette algèbre est une sous-algèbre de l'algèbre de Brauer $B_{m+n}(Q)$ composée des diagrammes tels que si on dessine une paroi verticale entre les $2m$ vertex à gauche et les $2n$ vertex à droite alors les arêtes horizontales peuvent traverser la paroi, tandis que les arêtes verticales ne la traversent pas. L'algèbre $B_{m,n}(Q)$ est engendrée par les générateurs p_i , $\bar{p}_i$ et $e_{i,j}$ représentés dans la fig. 4.1.

Les générateurs P_i , $\bar{P}_i$ et $E_{i,j}$ des commutants $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ sont alors des représentations des générateurs p_i , $\bar{p}_i$ et $e_{i,j}$. Exactement comme dans le cas des commutants de $\text{OSp}(R|2S)$ de la sec. 3.3.1, les représentations $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ ne sont pas généralement des représentations fidèles de $B_{m,n}(Q)$, car les générateurs P_i , $\bar{P}_i$, $E_{i,j}$ peuvent satisfaire des relations qui ne sont pas satisfaites par les p_i , $\bar{p}_i$ et les $e_{i,j}$ et qui dépendent de M et de N séparément. Ceci veut dire que chaque commutant $\mathcal{Z}_{m,n}(M, N)$ est un quotient de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{m,n}(M - N)$, d'où l'universalité de $B_{m,n}(M - N)$ en tant qu'algèbre des invariants de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(M|N)$.

Au final, mentionnons que l'ordre des V et V^* dans le produit tensoriel $V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n}$ n'est pas relevant du tout à cause de l'isomorphisme naturel

$$U \otimes W \simeq W \otimes U,$$

où U, W sont des modules arbitraires de $\mathfrak{gl}(M|N)$.

4.2.2 Modèle de boucles et chaînes quantiques

Il y a beaucoup de façons de construire des modèles de boucles dont l'algèbre des matrices de transfert est $B_{m,n}(0)$. On peut imaginer, par exemple, un modèle de boucles sur le réseau diagonal comme représenté dans la fig. 4.2. Malgré cela, aucun d'entre eux n'a de vertex d'interaction homogènes sur le réseau carré. L'homogénéité des interactions devient possible sur le réseau triangulaire si on passe à une représentation graphique sans paroi des mots de l'algèbre de Brauer avec paroi.

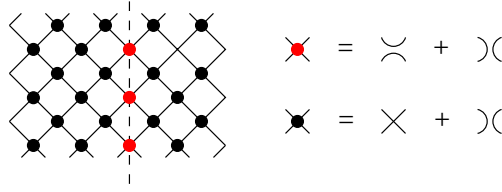


FIG. 4.2 – Un modèle de boucles dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre $B_{5,4}(0)$. La paroi de $B_{5,4}(0)$ est représentée par une ligne pointillée verticale.

Au lieu de représenter les diagrammes de $B_{L,L}(0)$ par $2L$ vertex à gauche d'une paroi et $2L$ vertex à droite on peut assigner des labels impairs $1, 3, \dots, 2L - 1$ aux L vertex en haut et L vertex en bas à gauche et des labels pairs $2, 4, \dots, 2L$ aux L vertex en haut et L vertex en bas à droite et ensuite réordonner les vertex en haut et, respectivement, en bas dans l'ordre croissant des labels. Un exemple de passage d'une représentation à l'autre est représenté dans la fig. 4.3.

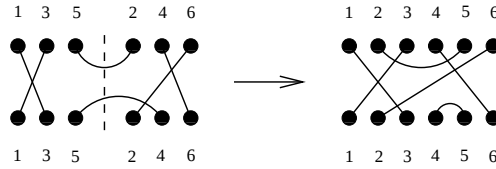


FIG. 4.3 – Élimination de la paroi dans un diagramme de $B_{3,3}(0)$.

La même construction s'applique à $B_{L+1,L}(0)$ et à $B_{L,L+1}(0)$. Notons par Π_i , $\bar{\Pi}_i$ et $Q_{i,j}$ les générateurs de la fig. 4.1 dans cette nouvelle représentation graphique. Si on regarde l'algèbre $B_{L,L}(0)$, $B_{L,L+1}(0)$ ou $B_{L+1,L}(0)$ comme sous-algèbre de l'algèbre de Brauer alors ses générateurs s'écrivent comme

$$\begin{aligned} Q_{i,i} &= e_{2i-1}, & Q_{i+1,i} &= e_{2i}, \\ \Pi_i &= p_{2i-1,2i+1} = p_{2i-1}p_{2i}p_{2i-1}, & \bar{\Pi}_i &= p_{2i,2i+2} = p_{2i}p_{2i+1}p_{2i}, \end{aligned}$$

où p_i et e_i sont les générateurs de l'algèbre de Brauer de la fig. 3.1. Les vertex homogènes d'interaction du modèle de boucles sur les réseau triangulaire sont alors représentés dans la fig. 4.4, où la numérotation des

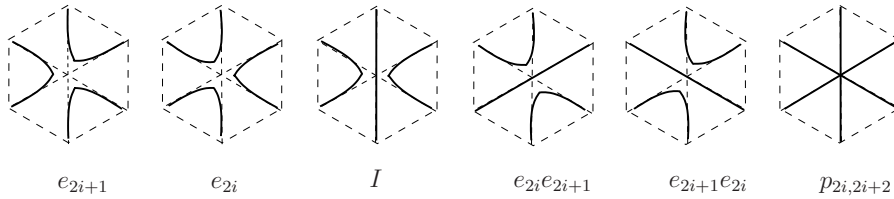


FIG. 4.4 – Les vertex homogènes d'interaction de la matrice des transfert locale sur le réseau triangulaire. La direction de transfert est verticale.

arêtes transversales à la direction de transfert est indiquée dans la fig. 4.5.

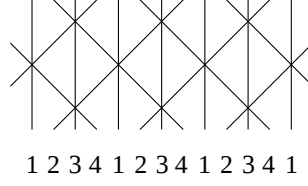


FIG. 4.5 – Numérotation modulo 4 des arêtes du réseau triangulaire.

On voit bien que l'algèbre des matrices de transfert du modèle de boucles dans la fig. 4.4 est une sous-algèbre de l'algèbre de Brauer avec paroi, qui est $B_{L,L}(0)$ (périodique) dans des conditions de bord périodiques et $B_{L,L+1}(0)$ ou $B_{L+1,L}(0)$ dans des conditions de bord ouvertes, car les intersections entre les boucles avec indice impair ne sont pas possibles. Une façon simple de corriger ce défaut est de définir le modèle de boucles par un hamiltonien

$$H = \sum e_i + wp_{i-1,i+1}; \quad (4.8)$$

qui est une somme homogène d'interactions locales à deux plus proches voisins. En plus du fait que la symétrie du hamiltonien est $B_{L,L}(0)$, pour des conditions de bord périodiques, et $B_{L,L+1}(0)$ ou $B_{L+1,L}(0)$, pour des conditions de bord ouvertes, il est souvent plus adapté aux calculs numériques. Notons que le signe devant l'hamiltonien n'est pas relevant, car l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{L,L}(0)$ possède un automorphisme

$$P_{i-1,i+1} \rightarrow -P_{i-1,i+1}, \quad E_i \rightarrow -E_i.$$

On s'attend que le spectre du hamiltonien (4.8) décrit, dans la limite continue, le spectre de tous les modèles sigma superprojectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$ à des dégénérescences près. Pour calculer les dégénérescences il faut se restreindre à une représentation particulière de l'algèbre de Brauer avec paroi fournie par le commutant des chaînes quantiques $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$, dans des conditions de bord périodiques, et $(V \otimes V^*)^{\otimes L}, (V \otimes V^*)^{\otimes L} \otimes V, V^* \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes L}$, dans des conditions de bord ouvertes.

Même si on ne l'a pas fait, il est certainement possible de trouver une relation analogue à l'éq. (3.32) qui permet d'extraire du spectre du modèle de boucles universel (4.8) le spectre, avec les dégénérescences incluses, des chaînes quantiques $(V \otimes V^*)^{\otimes L}, (V \otimes V^*)^{\otimes L} \otimes V, V^* \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes L}$ avec symétrie $\mathfrak{gl}(N|N)$.

4.2.3 Les fermions symplectiques

Dans cette sous-section on va dériver la limite continue du hamiltonien (4.8) dans la représentation fournie par le commutant de $\mathfrak{gl}(1|1)$.

La superalgèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(1|1)$ a deux générateurs bosoniques E, N , deux générateurs fermioniques $F, \bar{F}$ et un crochet

$$[H, F] = 2F, \quad [H, \bar{F}] = -2\bar{F}, \quad \{F, \bar{F}\} = E, \quad [E, H] = [E, F] = [E, \bar{F}] = 0.$$

La représentation adjointe $\text{ad } \mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple. Sa filtration par radicaux peut être représentée par

$$\text{ad } \mathfrak{g} : \quad \mathbb{C}H \rightarrow \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}\bar{F} \rightarrow \mathbb{C}E. \quad (4.9)$$

On a déjà mentionné que tous les modules de $\mathfrak{g}$ doivent avoir un poids zéro par rapport à E pour qu'ils soient des modules de $\mathfrak{psl}(1|1)$. Avec cette restriction, tous les modules de $\mathfrak{g}$ sont de dimension un et peuvent être indexés par leur poids n par rapport à H . On va les noter par $[n]$. Évidemment, les générateurs $F, \bar{F}$ agissent trivialement sur $[n]$ et $[n]$ est une représentation de $\mathfrak{g}_0$ par restriction. Ainsi l'éq. (4.9) peut être réécrite comme

$$\text{ad } \mathfrak{g} : [0] \rightarrow [2] \oplus [-2] \rightarrow [0].$$

Selon la sec. 1.1.11, les modules induits

$$\mathcal{P}(n) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}_0} [n]$$

sont nécessairement projectifs. On montre facilement que $\mathcal{P}(n)$ est indécomposable avec une filtration par radicaux

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) : 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes_{\mathfrak{g}_0} [n] &\rightarrow F \otimes_{\mathfrak{g}_0} [n] \oplus \bar{F} \otimes_{\mathfrak{g}_0} [n] \rightarrow F\bar{F} \otimes_{\mathfrak{g}_0} [n] \simeq \\ &[n] \rightarrow [n+2] \oplus [n-2] \rightarrow [n]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Soit $V = \mathbb{C}|0\rangle \oplus \mathbb{C}|1\rangle$ la représentation fondamentale de $\mathfrak{g}$ graduée comme $||0\rangle| = \bar{0}$ et $||1\rangle| = \bar{1}$. Dans la représentation fondamentale, les générateurs de $\mathfrak{g}$ prennent la forme

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{f} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Selon (1.5), leur forme dans la base duale $\langle 0|, \langle 1|$ est

$$f^* = \bar{f}, \quad \bar{f}^* = -f, \quad n^* = -n, \quad e^* = -e.$$

Il est maintenant facile de voir que $\mathcal{P}(0) \simeq \text{ad}(\mathfrak{g}) \simeq V \otimes V^*$. Ceci, combiné avec

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(0) \simeq \mathcal{P}(n-2) \oplus 2\mathcal{P}(n) \oplus \mathcal{P}(n+2),$$

fournit, par itération, la solution de la décomposition de la chaîne quantique

$$(V \otimes V^*)^{\otimes L} \simeq \mathcal{P}(0)^{\otimes L} \simeq \bigoplus_{n=1-L}^{L-1} \binom{2L-2}{L-1-n} \mathcal{P}(2n) \quad (4.12)$$

vue comme module de $\mathfrak{g}$. Remarquons que la superalgèbre de Lie $\mathfrak{psl}(1|1)$ ne contient pas de générateur H . Ainsi, tous les modules $\mathcal{P}(n)$ sont des modules isomorphes de $\mathfrak{psl}(1|1)$.

Les dégénérescences dans la décomposition (4.12) doivent être interprétées comme des dimensions des représentations irréductibles de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{L,L}(0)$, selon le théorème (4.7). En plus, l'équivalence de Schur-Weyl requiert que toutes ces représentations de $B_{L,L}(0)$ soient dans le même bloc – le bloc des invariants $\mathfrak{gl}(1|1)$. Inversement, toutes les représentations irréductibles $[2n]$ de $\mathfrak{g}$ se trouvent dans le bloc de la représentation triviale $[0]$. Assez curieusement, si on calcule par les techniques de [29] la décomposition de la chaîne $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$ modulo des facteurs projectifs, où cette fois-ci V est la représentation fondamentale de

$\mathfrak{gl}(2|2)$ et V^* est sa duale, alors on obtient une décomposition similaire à l'éq. (4.12). Les multiplicités des représentations indécomposables, qui sont des modules de Kac, et les filtrations par radicaux sont les mêmes, sauf que le rôle des représentations irréductibles unidimensionnelles $[2n]$ est joué par les représentations atypiques de $\mathfrak{pgl}(2|2)$. Ce comportement rappelle celui des représentations "de type $O(2)$ " dans la décomposition (3.35).

Il est plus confortable de travailler avec une base qui s'obtient par une transformation de similarité

$$S = \bigotimes_{i=1}^{2L} S_i, \quad S_{2i-1} = \sigma_z^{i-1}, \quad S_{2i} = \sigma_z^i \sigma_x$$

sur la base tensorielle standard de $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$, qui correspond à la base $|0\rangle, |1\rangle$ de V et $\langle 0|, \langle 1|$ de V^* . Introduisons les matrices

$$\begin{aligned} \varphi_i &:= n^{\otimes(i-1)} \otimes f \otimes e^{\otimes(2L-i)} \\ \bar{\varphi}_i &:= n^{\otimes(i-1)} \otimes \bar{f} \otimes e^{\otimes(2L-i)}, \end{aligned}$$

qui satisfont les relations d'anti-commutation fermioniques

$$\{\bar{\varphi}_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0.$$

Dans ces notations, la représentation de l'action des générateurs de $\mathfrak{g}$ sur la nouvelle base de $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$ prend la forme

$$\begin{aligned} R(F) &= \sum_{i=1}^{2L} \varphi_i, & R(\bar{F}) &= \sum_{i=1}^{2L} (-1)^{i+1} \bar{\varphi}_i, \\ R(H) &= \sum_{i=1}^{2L} (\varphi_i \bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_i \varphi_i), & R(E) &= 0, \end{aligned}$$

tandis que les générateurs

$$\begin{aligned} E_j &= (-1)^j (\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_{j+1})(\varphi_j + \varphi_{j+1}) \\ P_{j-1,j+1} &= (-1)^j [1 - (\bar{\varphi}_{j-1} - \bar{\varphi}_{j+1})(\varphi_{j-1} - \varphi_{j+1})] \end{aligned} \quad (4.13)$$

fournissent une représentation de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{L,L}(0)$. Plus que cela, si les indices j dans l'éq. (4.13) prennent des valeurs modulo $2L$ alors on obtient une représentation de l'algèbre de Brauer avec paroi *périodique*.

L'hamiltonien périodique le plus général qui a une symétrie $\mathfrak{g}$ et une densité homogène des interactions à deux plus proches voisins est

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^L \varepsilon_1 E_{2i-1} + \varepsilon_2 E_{2i} + \pi_1 P_{2i-1,2i+1} + \pi_2 P_{2i,2i+2} \\ &\quad + \alpha E_{2i-1} E_{2i} + \beta E_{2i} E_{2i-1} + \gamma E_{2i} E_{2i+1} + \delta E_{2i+1} E_{2i}. \end{aligned}$$

Néanmoins, l'hamiltonien plus simple

$$H_0 = - \sum_{i=1}^{2L} E_i + w P_{i-1,i+1} \quad (4.14)$$

possède déjà la symétrie générique $B_{L,L}(0)$. On va, donc, se restreindre à l'hamiltonien (4.14) pour dériver la limite continue.

Dans les modes de Fourier

$$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{j=1}^{2L} e^{-ipj} \varphi_j, \quad \bar{\varphi}_p = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{j=1}^{2L} e^{-ipj} \bar{\varphi}_j, \quad p = \frac{\pi}{L}, \dots, \frac{\pi k}{L}, \dots, 2\pi$$

l'hamiltonien H_0 devient

$$H_0 = 4\varphi_0\bar{\varphi}_\pi + 4 \sum'_p \left[\left(\sin^2 \frac{p}{2} + w \sin^2 p \right) \bar{\varphi}_p \varphi_{\pi-p} + \left(\cos^2 \frac{p}{2} + w \sin^2 p \right) \bar{\varphi}_{\pi+p} \varphi_{-p} \right], \quad (4.15)$$

où $\sum'_p$ signifie la somme avec bords ouverts $0 < p < \pi$. Le deuxième terme dans l'éq. (4.15) est diagonal

$$H_0 = 4\varphi_0\bar{\varphi}_\pi + \sum'_p \epsilon(p) (\eta_p^\dagger \eta_p - \chi_p \chi_p^\dagger) \quad (4.16)$$

dans les modes

$$\begin{aligned} \chi_p^\dagger &= \bar{a}(p) \varphi_{\pi-p} + \bar{b}(p) \varphi_{-p}, & \eta_p^\dagger &= \bar{b}(p) \bar{\varphi}_{\pi+p} - \bar{a}(p) \bar{\varphi}_p \\ \chi_p &= b(p) \bar{\varphi}_{\pi+p} + a(p) \bar{\varphi}_p, & \eta_p &= a(p) \varphi_{\pi-p} - b(p) \varphi_{-p} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec les amplitudes

$$\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{\sqrt{v_s^2 \sin^2 p + 4w^2 \sin^4 p}}{2(\sin^2 \frac{p}{2} + w \sin^2 p)}, \quad a(p)\bar{a}(p) = \frac{\sin^2 \frac{p}{2} + w \sin^2 p}{\sqrt{v_s^2 \sin^2 p + 4w^2 \sin^4 p}}.$$

L'hamiltonien (4.16) n'est pas diagonalisable à cause du terme $\varphi_0\bar{\varphi}_\pi$. L'énergie d'excitation des deux fermions χ, η

$$\epsilon(p) = 2 \sin p \sqrt{1 + 4w + 4w^2 \sin^2 p} \approx v_s \sin p, \quad p \rightarrow 0, \pi,$$

montre que le système est conforme. Pour extraire la charge centrale $c = -2$ on calcule les corrections de taille finie à l'énergie libre par site

$$\frac{E_0}{2L} = - \sum'_p \frac{\epsilon(p)}{2L} \approx - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dp \sin p \sqrt{1 + 4w + 4w^2 \sin^2 p} + \frac{\pi v_s}{12L^2}$$

et on utilise la formule de Cardy.

L'hamiltonien normalement ordonné prend, dans la limite continue, la forme

$$: H := E_0 + 4\varphi_0\bar{\varphi}_\pi + v_s \sum_{p>0} p \left(\chi_p^\dagger \chi_p + \eta_p^\dagger \eta_p + \bar{\chi}_p \bar{\chi}_p + \bar{\eta}_p^\dagger \bar{\eta}_p \right), \quad (4.18)$$

où χ_p, η_p sont les excitations de gauche et $\bar{\chi}_p = \chi_{\pi-p}, \bar{\eta}_p = \eta_{\pi-p}$ sont les excitations de droite.

Regardons en plus de détails quelle est la structure du vide. En plus d'être annihilé par les modes d'annihilation χ_p, η_p et $\bar{\chi}_p, \bar{\eta}_p$, il doit fournir

une représentation de la symétrie globale $\mathfrak{g}$ de la chaîne (4.15). La décomposition (4.12) suggère que cette représentation est projective. Pour voir laquelle on a besoin de la forme précise des générateurs de $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{H}_L}(F) &= \sqrt{2L}\varphi_0, R_{\mathcal{H}_L}(\bar{F}) = -\sqrt{2L}\bar{\varphi}_\pi, \\ R_{\mathcal{H}_L}(H) &= 2(\varphi_\pi\bar{\varphi}_\pi - \bar{\varphi}_0\varphi_0) + 2\sum_p' \chi_p^\dagger\chi_p - \eta_p^\dagger\eta_p. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Notons par Ω le sous-module trivial du vide

$$\varphi_0\Omega = 0, \quad \bar{\varphi}_\pi\Omega = 0.$$

On voit tout de suite de l'éq. (4.19) que $\Omega \simeq [0]$, ce qui veut dire que le vide est le module projectif $\mathcal{P}(0)$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur le vide peut être représentée par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_\pi\Omega & & \\ & \nearrow F & & \nwarrow \bar{F} & \\ \text{vide : } & \bar{\varphi}_0\varphi_\pi\Omega & \xrightarrow{C} & \Omega & \\ & \searrow \bar{F} & & \nearrow F & \\ & & \bar{\varphi}_0\Omega & & \end{array}$$

La double flèche représente l'action du Casimir de $\mathfrak{g}$

$$C = F\bar{F} + (N-1)E, \quad R(C) \propto \bar{\varphi}_\pi\varphi_0,$$

ce qui correspond exactement au premier terme qui apparaît dans l'hamiltonien (4.15).

Les modes zéro n'interagissent pas avec les modes non-zéro. On voit, donc, que tous les vecteurs propres *généralisés* de l'hamiltonien (4.15) ont une multiplicité 4.

On peut rendre la connexion avec les fermions symplectiques encore plus explicite et exprimer les modes (2.3) en termes des opérateurs de création et d'annihilation $\chi_p, \bar{\chi}_p, \chi_p^\dagger, \bar{\chi}_p^\dagger$. Soit σ la coordonnée de l'espace compactifié sur un rayon L/π et τ le temps imaginaire. On a donc $z = e^{\pi(\tau-i\sigma)/L}$ et $\bar{z} = e^{\pi(\tau+i\sigma)/L}$. Le même poids 2 par rapport à H des modes $\chi_p^\dagger, \eta_p, \bar{\chi}_p^\dagger, \bar{\eta}_p, \varphi_0, \varphi_\pi$ suggère qu'ils doivent être associés avec un champ local $\phi^2(z, \bar{z})$, tandis que les modes $\chi_p, \eta_p^\dagger, \bar{\chi}_p, \bar{\eta}_p^\dagger, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_\pi$ seront associés à un autre champ $\phi^1(z, \bar{z})$ de poids -2 . Si on met

$$\begin{aligned} \psi_k^1 &= \sqrt{k}\chi_p, & \psi_k^2 &= \sqrt{k}\eta_p \\ \psi_{-k}^1 &= -\sqrt{k}\eta_p^\dagger, & \psi_{-k}^2 &= \sqrt{k}\chi_p^\dagger \end{aligned}$$

on obtient les relations de commutations

$$\{\psi_{-k}^2, \psi_{k'}^1\} = k\delta_{k,k'}.$$

Les modes de gauche $\bar{\psi}_{\pm k}^{1,2}$ sont définis de la même façon si on remplace les χ avec $\bar{\chi}$, η avec $\bar{\eta}$, etc. Quant aux modes zéro on met

$$\begin{aligned} \psi_0^1 &= \bar{\psi}_0^1 \propto \bar{\varphi}_\pi, & \psi_0^2 &= \bar{\psi}_0^2 \propto \varphi_0 \\ \phi_0^1 &\propto \bar{\varphi}_0, & \phi_0^2 &\propto \varphi_\pi \end{aligned}$$

et on choisit les constantes de proportionnalité pour que les relations

$$\{\phi_0^1, \psi_0^2\} = -\{\phi_0^2, \psi_0^1\} = 1.$$

soient satisfaites. On définit alors les champs des fermions symplectiques

$$\phi^\alpha(z, \bar{z}) := \phi_0^\alpha - \psi_0^\alpha \log(z\bar{z}) + \sum_{k \neq 0} \frac{\psi_k^\alpha}{k} z^{-k} + \frac{\bar{\psi}_k^\alpha}{k} \bar{z}^{-k}$$

et on ramène le hamiltonien (4.18) à la forme

$$\begin{aligned} : H : &= E_0 + \frac{\pi v_s}{L} \psi_0^2 \psi_0^1 + \frac{\pi v_s}{L} \sum_{k > 0} (\psi_{-k}^2 \psi_k^1 - \psi_{-k}^1 \psi_k^2 + \bar{\psi}_{-k}^2 \bar{\psi}_k^1 - \bar{\psi}_{-k}^1 \bar{\psi}_k^2) = \\ &= E_0 + \frac{\pi v_s}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_{-k}^2 \psi_k^1 + \bar{\psi}_{-k}^2 \bar{\psi}_k^1 : \end{aligned}$$

qui fait apparaître les modes zéro $\frac{\pi v_s}{L}(L_0 + \bar{L}_0)$ de la composante holomorphe du tenseur énergie-impulsion des fermions symplectiques

$$T(z) = - : \partial \phi^1(z, \bar{z}) \partial \phi^2(z, \bar{z}) :,$$

et de son partenaire anti-holomorphe.

On vient de démontrer que la limite continue de la chaîne (4.15) est décrite par la théorie conforme des fermions symplectiques. On voit clairement, que dans ce cas le couplage w des intersections est redondant, car il ne change que la vitesse de Fermi. On se demande, naturellement, si les intersections restent redondantes pour toutes les chaînes quantiques $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$ avec symétrie $gl(N|N)$. On va répondre à cette question dans la section suivante.

On remarque à la fin de cette section que les calculs effectués sur la représentation la plus simple du hamiltonien (4.8) décrivent aussi, par la propriété de l'emboîtement des spectres, le vide de toutes les chaînes quantiques $(V \otimes V)^{\otimes L}$ avec symétrie $gl(N|N)$. Plus que cela, ils décrivent tous les autres états qui se trouvent dans le même bloc que le vide.

4.3 EXPOSANTS DU MODÈLE DE BOUCLES

Dans cette section on présente les calculs numériques pour certains exposants du modèle de boucles défini par l'hamiltonien (4.8). Notons que dans le troisième article attaché dans l'annexe on présente les calculs numériques pour le modèle de boucles sur le réseau triangulaire dans des conditions de bord ouvertes. Cette section peut, donc, servir pour compléter l'étude numérique du troisième article.

Évidemment, il n'est pas très économique de diagonaliser le hamiltonien (4.8) dans la représentation adjointe de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{L,L}(0)$. On peut procéder comme dans le cas du modèle de boucle du chapitre 3, c'est-à-dire utiliser les représentations standard $\Delta_{L,L}(\lambda, \mu)$, introduites en [16], pour calculer les valeurs propres sélectivement. Cette approche n'est pas seulement pratique, du point de vue numérique, mais aussi nécessaire si on veut comprendre à quelles représentations de $gl(N|N)$ peuvent correspondre les valeurs propres du hamiltonien (4.8).

On ne va pas entrer dans les détails, mais juste mentionner que, par analogie à la sec. 3.5, on peut définir dans l'espace vectoriel des tenseurs de $\mathfrak{gl}(N|N)$ une action de l'algèbre de Brauer avec paroi $B_{L,L}(0)$ de façon que l'on obtient des représentations tensorielles qui sont des quotients de représentations standards. Plus précisément, le quotient de $\Delta_{L,L}(\lambda, \mu)$ peut être réalisé sur l'espace vectoriel des tenseurs qui apparaissent dans la décomposition de la chaîne $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$, qui ont un nombre maximal de traces soustraites, qui sont de rang $|\mu|$ -contravariant et $|\lambda|$ -covariant, et dont la symétrie des indices covariants correspond à un tableau de Young de la forme μ et, finalement, la symétrie des indices contravariants correspond à un tableau de Young de la forme λ .

On va se contenter de regarder seulement les valeurs propres les plus basses de l'hamiltonien (4.8) dans les représentations $\Delta_{L,L}(\lambda, \mu)$ qui correspondent à des partitions $\lambda = \mu = k$ d'une seule ligne de longueur k . Ceux-ci sont appelés les exposants à $2k$ -pattes des polymères, c'est-à-dire des boucles avec fugacité zéro. Sur une chaîne quantique $(V \otimes V^*)^{\otimes L}$ ces exposants doivent correspondre aux tenseurs symétriques de rang k -covariant et k -contravariant.

Les représentations $\Delta_{L,L}(k, k)$ sont construites de la façon suivante. Considérons l'espace vectoriel $B_{L,L}^{L,L}$ de diagrammes réduits qui sont des graphes à $2L$ vertex arrangés horizontalement. Chaque vertex peut avoir un degré zéro ou un. Les arêtes du graphes connectent les vertex pairs avec des vertex pairs et les vertex impairs avec des vertex impairs. Les vertex de degré zéro sont appelés des points libres. Un exemple d'un diagramme réduit est représenté dans la fig. 4.6. Si on définit l'action d'un



FIG. 4.6 – Exemple de diagramme réduit dans $B_{4,4}^{2,2}$.

diagramme de $B_{L,L}(0)$ sur un diagramme réduit de la même façon que sur un diagramme de $B_{L,L}(0)$, alors $B_{L,L}^{L,L}$ acquiert une structure de module. Évidemment, le sous-espace vectoriel $B_{L,L}^{k,k} \subset B_{L,L}^{L,L}$ des diagrammes réduits d'au plus $2k$ points libre est un sous-module. On pose alors

$$\Delta_{L,L}(k, k) = B_{L,L}^{k,k} / B_{L,L}^{k-1,k-1}.$$

Pour des conditions de bord périodiques, les exposants à $2k$ -pattes de l'hamiltonien (4.8) à $w = 0$ sont bien connus [4]

$$h_0 = 0, \quad h_k = \frac{k^2 - 1}{8}, \quad k \geq 1.$$

Notons la dégénérescence de l'exposant à 2-pattes avec le vide. Ceci est en accord avec le fait que $\Delta_{L,L}(0, 0)$ est un quotient $\Delta_{L,L}(1, 1)$. L'homomorphisme surjectif $\Delta_{L,L}(1, 1) \rightarrow \Delta_{L,L}(0, 0)$ consiste simplement à relier les deux points libres des diagrammes réduits de $\Delta_{L,L}(1, 1)$.

Les figures 4.7 montre la dépendance des exposants à 4, 6 et 8-pattes du poids d'intersection $w \geq 0$ de boucles. On voit clairement que ces exposants tendent vers zéro dans la limite $w \rightarrow \infty$. Si la limite continue

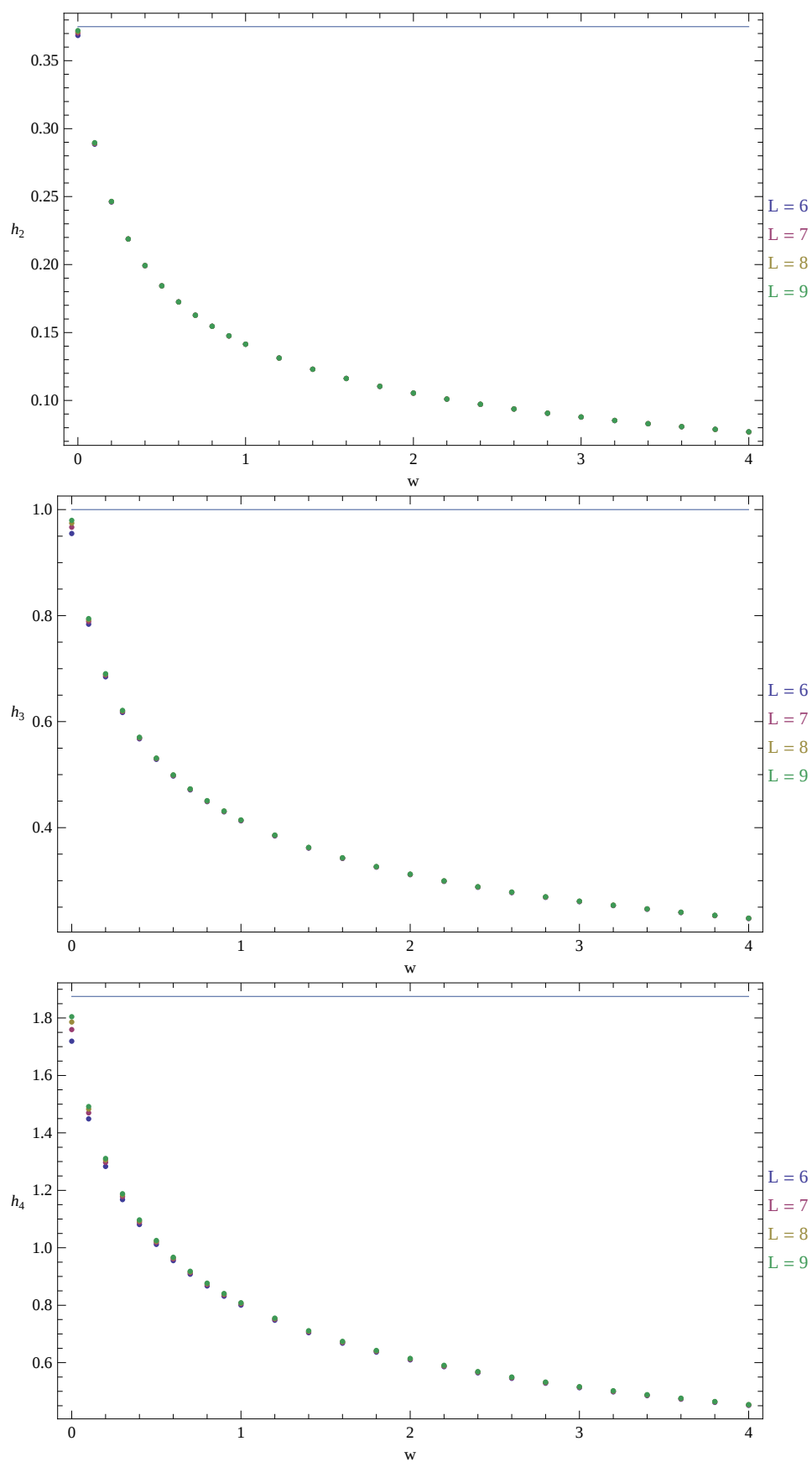
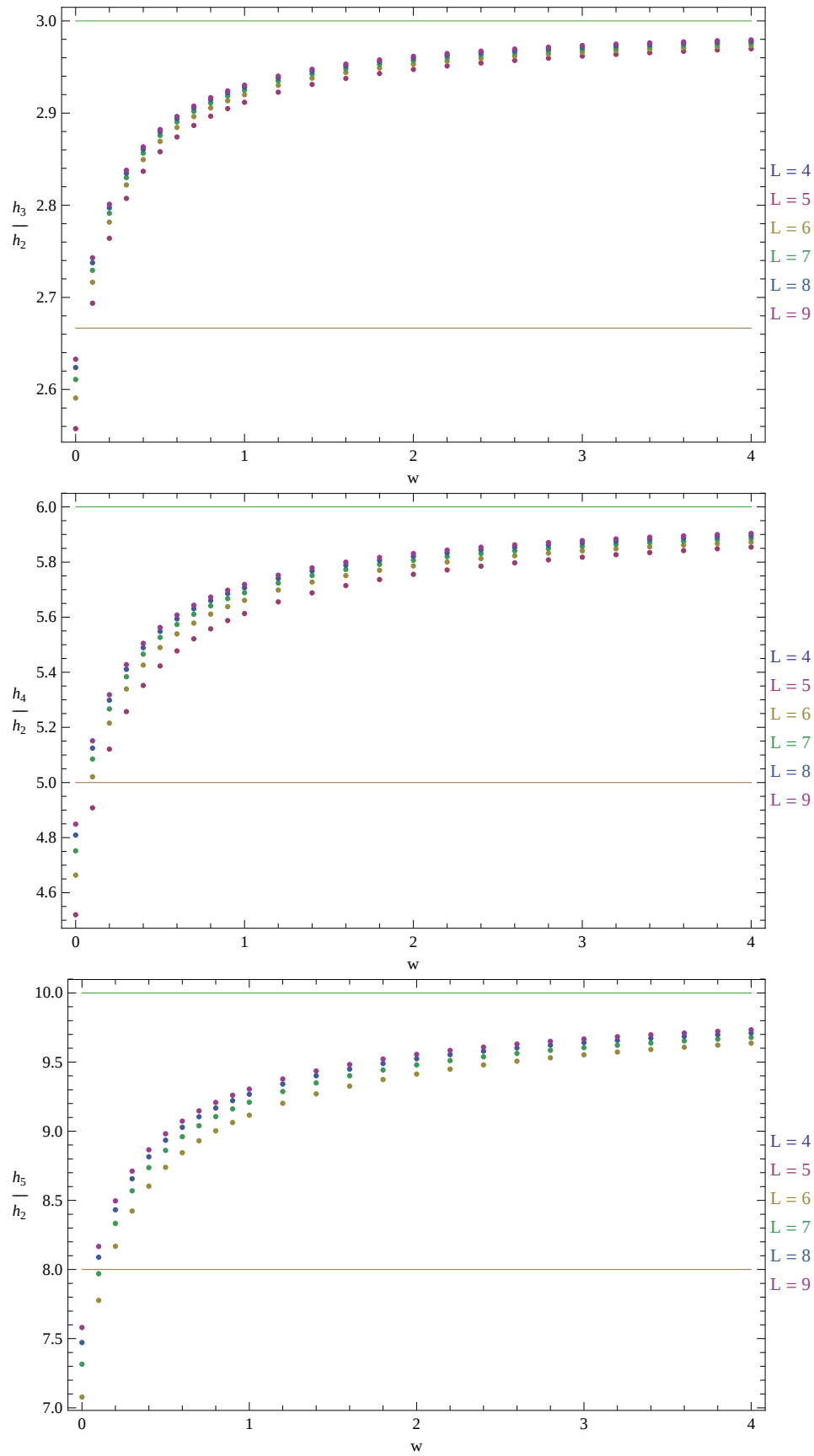


FIG. 4.7 – Les exposants à 4, 6 et 8 pattes pour des conditions de bord périodiques.

FIG. 4.8 – Rapport des exposants à $2k$ -pattes pour des conditions de bord périodiques.

du modèle de boucles décrit la théorie conformes des modèles sigma superprojectifs, alors la limite $w \rightarrow \infty$ doit correspondre dans le modèle sigma à la limite de couplage faible $g_\sigma \rightarrow 0$, où les dimensions anormales s'annulent. Quant à elle, la limite de couplage faible pour les exposants qui s'annulent correspond à l'approximation de "mini-superspace" qui, en gros, prédit que les exposants doivent être proportionnels aux Casimirs des représentations. Dans notre cas, ces représentations sont les tenseurs de $gl(N|N)$ qui sont k fois covariants et k fois contravariants et avec un nombre maximal de traces soustraites. Dans les conventions des sec. 1.1.6 et 1.1.7, le plus haut poids de ces tenseurs est

$$\Lambda_{k,k} = \begin{cases} \delta_1 + \cdots + \delta_k - k\epsilon_N, & k \leq N \\ \delta_1 + \cdots + \delta_N + (N-k)\epsilon_1 - k\epsilon_N, & k > N \end{cases}.$$

Leurs Casimirs ne dépendent pas de N

$$C_{k,k} = 2k(k-1). \quad (4.20)$$

Les figures 4.8 représentent les rapports des exposants h_3/h_2 , h_4/h_2 et h_5/h_2 . On voit que dans la limite $w \rightarrow \infty$ les rapports des exposants tendent vers les valeurs des rapports des Casimirs (4.20)! On n'est pas sûr si la variation des rapports avec les poids des intersections w doit être interprétée par le fait que l'approximation de "mini-superspace" n'est pas exacte ou, plutôt, comme un effet de taille finie à $w > 0$.

Pour des conditions de bord ouvertes, les exposants à $w = 0$ sont connus exactement [4, 62] et on remarque qu'ils peuvent être interprétés comme des Casimirs

$$h_k = \frac{C_{k,k}}{4}.$$

On s'attend, donc, que l'approximation de "mini-superspace" soit exacte dans des conditions de bord ouvertes

$$h_k(g_\sigma) = \frac{g(w)C_{k,k}}{4}, \quad (4.21)$$

où $g(0) = 1$ et $g(w) \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow \infty$. En effet, on vérifie numériquement, dans la fig. 4.9, que les exposants à $2k$ -pattes dans des conditions de bord ouvertes tendent vers zéro lorsque $w \rightarrow \infty$. Les rapports des exposants représentés dans les figures 4.10 suggèrent fortement que l'expression (4.21) est exacte et coïncide avec les prédictions de "mini-superspace" pour les modèles sigma superprojectifs $CP^{N-1|N}$. Ceci est le résultat principal de ce chapitre, qui soutient l'hypothèse que la limite continue du modèle de boucles (4.8) est décrite par les modèles sigma superprojectifs $CP^{N-1|N}$.

Pour bien juger de la qualité de la convergence des calculs numériques 4.9 et 4.10, on a représenté la charge centrale pour des conditions de bord ouvertes dans la fig. 4.11. Dans l'extrapolation de la charge centrale on a utilisé la valeur exacte de l'énergie libre calculée dans la sec. 4.2.3.

Notons que dans le troisième article attaché dans l'annexe on utilise le modèle de boucles sur le réseau triangulaire de la fig. 4.4 pour calculer les exposants à un nombre impair de pattes dans des conditions de bord ouvertes. Dans ce cas, les exposants à $(2k+1)$ -pattes correspondent

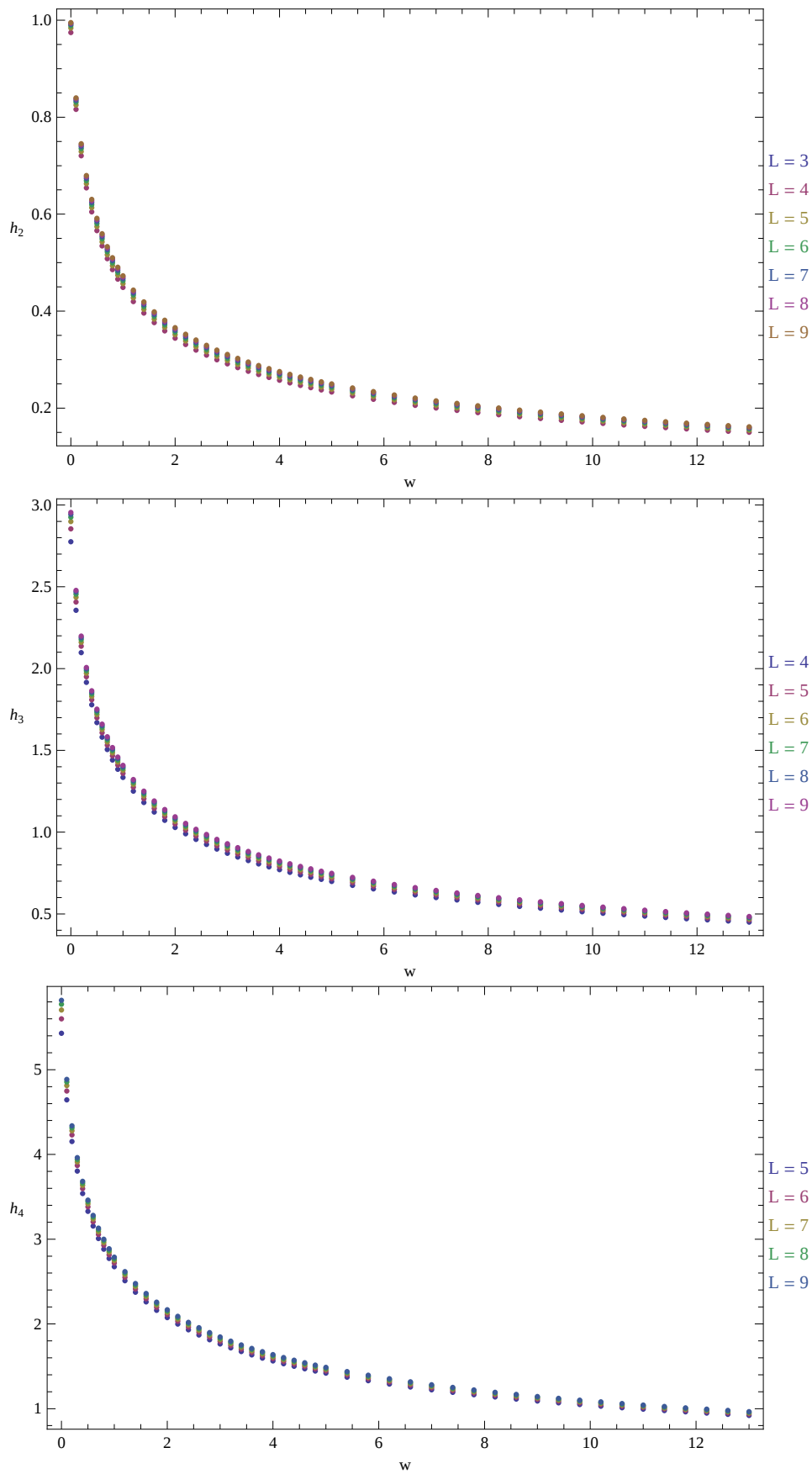
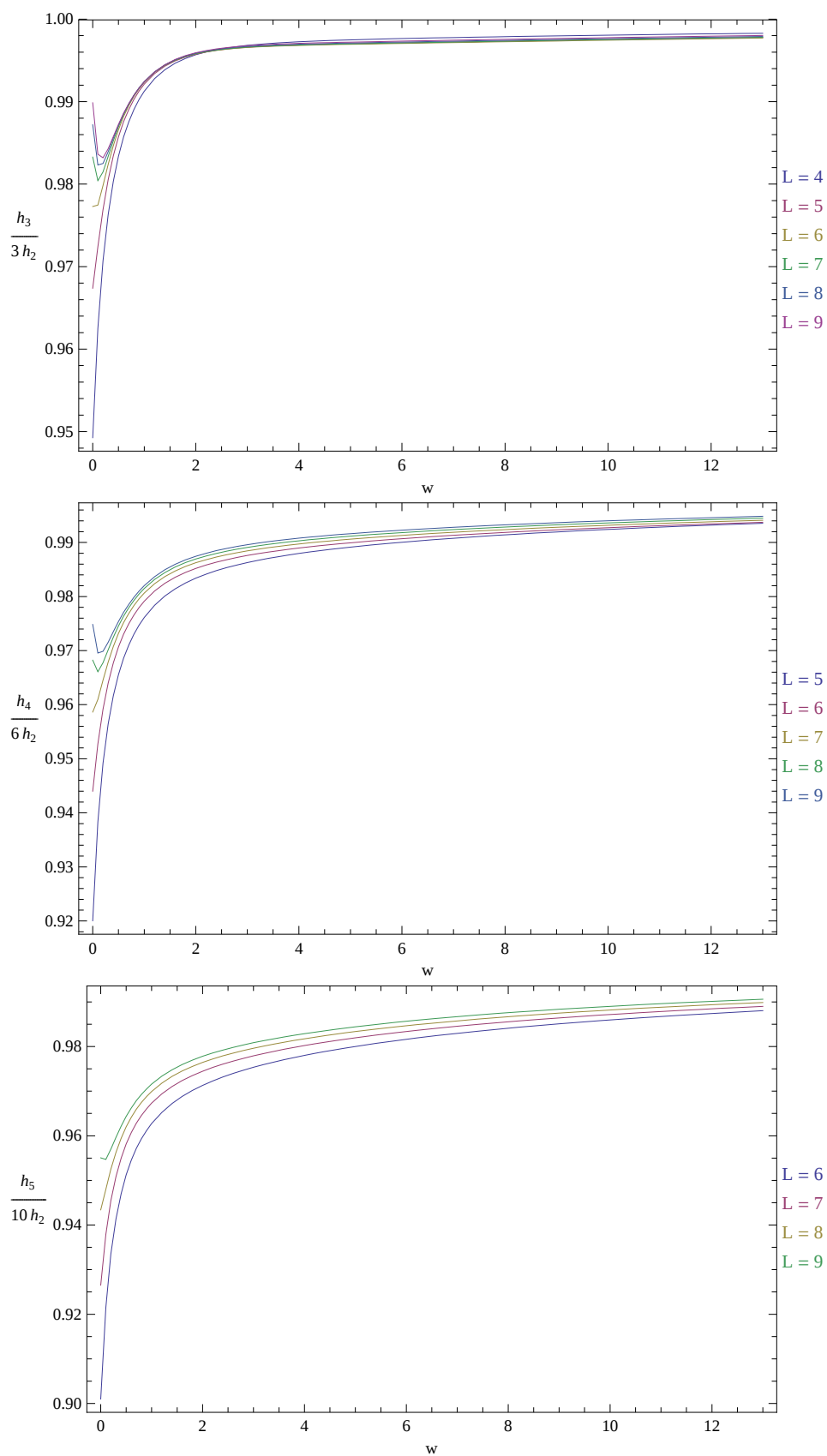


FIG. 4.9 – Les exposants à 4, 6 et 8 pattes dans des conditions de bord ouvertes.

FIG. 4.10 – Rapport des exposants à $2k$ -pattes pour des conditions de bord ouvertes.

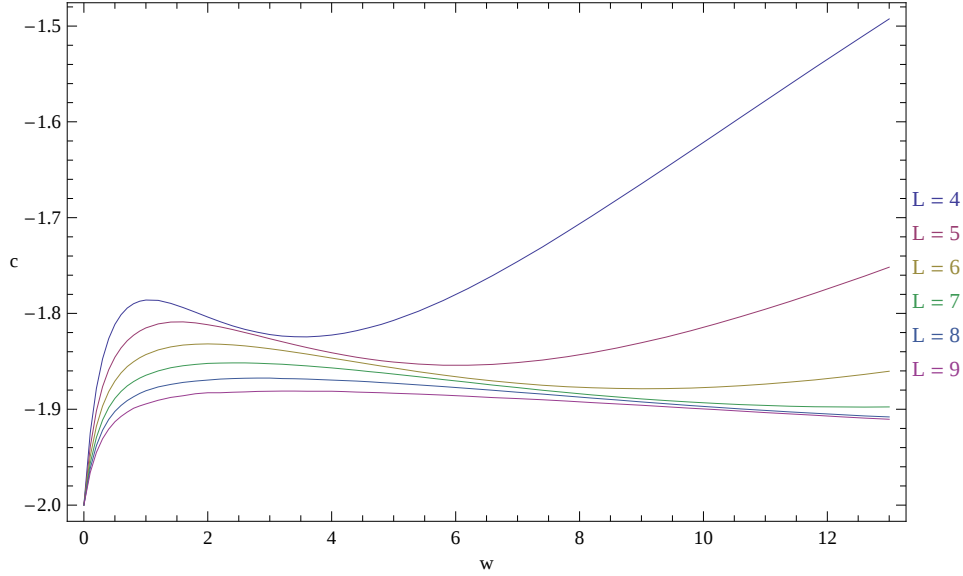


FIG. 4.11 – Convergence de la charge centrale dans des conditions de bord périodiques.

à des tenseurs de rang k -covariant et $(k+1)$ -contravariant. Leur plus hauts poids sont

$$\Lambda_{k,k+1} = \begin{cases} \delta_1 + \cdots + \delta_k - (k+1)\epsilon_N + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + \delta_i), & k \leq N \\ \delta_1 + \cdots + \delta_N + (N-k)\epsilon_1 - (k+1)\epsilon_N + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + \delta_i), & k > N \end{cases}.$$

Les calculs numériques montrent que les exposants à $(2k+1)$ -pattes Δh_k , définis par rapport à l'état fondamental du modèle de boucles sur le réseau triangulaire dans des conditions de bord ouvertes, s'annulent dans la limite du poids des intersections $w \rightarrow \infty$. Leur valeur exacte à $w = 0$ est donné par

$$\Delta h_k = \frac{C_{k,k+1}}{4},$$

autour d'un vide effectif de charge centrale $c_{eff} = 1$, où le Casimir est

$$C_{k,k+1} = 2k^2.$$

On voit que le vide du modèle de boucles sur le réseau triangulaire dans des conditions de bord ouvertes a une dimension conforme $-1/8$.

Les rapports des exposants à $(2k+1)$ -pattes, représentés dans le troisième article attaché dans l'annexe, sont en accord avec l'hypothèse d'une forme exacte

$$\Delta h_k = \frac{g'(w)C_{k,k+1}}{4},$$

où $g'(0) = 1$ et $g'(w) \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow \infty$.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre on a introduit l'algèbre de Brauer avec paroi et on a proposé un modèle de boucles, dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre de Brauer avec paroi, pour discrétiser les modèles sigma superprojectifs. On a montré que la représentation la plus simple du modèle de

boucles est décrite, dans la limite continue, par la théorie conforme des fermions symplectiques, qui est le premier $N = 1$ représentant de la série des modèles sigma superprojectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$. Le résultat principal est la découverte d'une ligne de points critiques à $c = -2$ pour le modèle de boucles et une évidence numérique qui suggère fortement que sa limite continue est décrite par les modèles sigma superprojectifs $\mathbb{C}P^{N-1|N}$, pour lequel l'approximation du "mini-superspace" est exacte en conditions de bord ouvertes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

RÉSUMÉ

Au cours de ce mémoire, nous avons expliqué les nouvelles méthodes qu'on a développées pour s'attaquer à la recherche de la solution exacte d'une série de modèles sigma invariants conformes. Ces modèles sigma sont caractérisés par une symétrie globale de supergroupe $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ ou $\mathrm{GL}(N|N)$ et par l'absence d'une symétrie d'algèbre de courant. De plus, ils admettent une description en tant que limite continue de certains modèles discrets qui, dans des formalismes différents, peuvent être vus soit comme gaz de boucles denses qui s'intersectent soit comme chaînes quantiques. Dans les deux cas, l'algèbre des matrices de transfert du modèle discret admet une interprétation en tant qu'algèbre des invariants du supergroupe correspondant.

La correspondance entre l'algèbre de symétrie du modèle discret et continu est mieux maîtrisée techniquement lorsque les conditions de bord sont ouvertes et ne brisent pas la symétrie de supergroupe. L'analyse détaillée de l'action de la symétrie globale $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ et de l'algèbre des invariants sur les états de la chaîne quantique, l'analyse harmonique de la supersphère $S^{2S+1|2S}$ et l'analyse numérique du spectre de l'hamiltonien de la chaîne sur toute la ligne critique nous amènent à conjecturer le spectre exact (3.38) de la théorie conforme avec bord du modèle sigma sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$ et de proposer une expression explicite pour sa fonction de partition (3.39, 3.40, 3.43, 3.45).

Dans l'effort de calculer la fonction de partition exacte du modèle sigma sur la supersphère $S^{2S+1|2S}$ une connexion avec les modèles de Gross-Neveu avec symétrie $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ a été découverte. Cette connexion s'exprime par une égalité entre la fonction de partition conjecturée du modèle sigma $S^{3|2}$ à couplage fort et la fonction de partition du modèle de Gross-Neveu $\mathrm{OSp}(4|2)$ dans la limite de couplage faible. Dans un formalisme différent, cette égalité a été démontrée récemment pour tout S dans [51]. La connexion entre les deux modèles n'est comprise que pour des conditions de bord ouvertes.

On a introduit un modèle de boucles, dont l'algèbre des matrices de transfert est l'algèbre de Brauer avec paroi, pour discrétiser les modèles sigma superprojectifs. On a montré que la représentation la plus simple du modèle de boucles est décrite, dans la limite continue, par la théorie conforme des fermions symplectiques, qui est le premier $N = 1$ représentant de la série des modèles sigma superprojectifs $\mathbb{CP}^{N-1|N}$. Le résultat principal est la découverte d'une ligne de points critiques à $c = -2$ pour le modèle de boucles et une évidence numérique qui suggère fortement que sa limite continue est décrite par les modèles sigma superprojectifs

$CP^{N-1|N}$. Les études numériques ont montré que les exposants à l -pattes du modèle de boucles se comportent de façon différente dans des conditions de bord ouvertes et périodiques.

PERSPECTIVES

Au delà de l'intérêt "anecdotique" d'exhiber de nouvelles classes d'universalité - en particulier dans le cas des polymères denses où il y a potentiellement des applications physiques intéressantes - notre approche a permis de mettre en place une façon systématique d'attaquer les symétries des modèles sigma invariants conformes à partir de la théorie des représentations des algèbres sur le réseau. Nous espérons qu'à terme, cela conduira à une compréhension complète des symétries à la limite continue. Il est juste de mentionner ici que l'idée d'utiliser les modèles sur réseau pour comprendre les théories logarithmiques est poursuivie dans le contexte des modèles minimaux logarithmiques [39, 53, 62].

Dans l'immédiat, les perspectives de recherche sont les suivantes.

Conditions de bord différentes

Une direction importante à aborder dans la continuation directe de ce travail de thèse est l'étude des modèles discrets pour des conditions de bord différentes et, notamment, périodiques. Il n'est pas du tout clair à ce stade quels sont les deux types d'invariants dans la chaîne quantique de la sec. 3.3.3 qui correspondent aux algèbres chirales à gauche et à droite de la sec. 3.2.2.

Théorie des représentations

Au cours de ce travail de thèse on a vu que l'algèbre des invariants des chaînes quantiques ouvertes considérées admet, dans la limite continue, une interprétation d'algèbre chirale du modèle sigma sur l'anneau. Cette algèbre chirale conserve sa structure sur toute la ligne critique. Elle peut, donc, être élucidée dans la limite de couplage faible. Il est tentant d'espérer que le développement de la théorie des représentations de cette algèbre chirale permettra d'intégrer exactement les théories conformes des modèles sigma. Ceci était le cas des modèles sigma de Wess-Zumino-Witten, où la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody joue un rôle essentiel ou, encore, des modèles minimaux, où la connaissance de la théorie des représentations de l'algèbre de Virasoro suffit pour calculer toutes les fonctions de corrélations.

On peut commencer la recherche dans cette direction par l'étude de la forme la plus générale des invariants chiraux à $g_\sigma \rightarrow 0$, où la limite est définie comme dans la sec. 3.2.2. Ceci permettra de construire un ansatz pour évaluer le développement à tous les ordres du tenseur énergie impulsion dans les champs libres à $g_\sigma \rightarrow 0$.

Dualité avec les modèles de Gross-Neveu

On est naturellement intéressé à approfondir la connexion entre les modèles sigma sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$ et les modèles de Gross-Neveu avec symétrie $\mathrm{OSp}(2S + 2|2S)$ au delà des conditions de bord ouvertes et, notamment pour des conditions de bord périodiques. La recherche dans cette direction s'annonce difficile, car le modèle de Gross-Neveu est non-compact, par contraste avec le modèle sigma. En plus, dans des conditions de bord périodiques la symétrie globale du modèle de Gross-Neveu au point libre est chirale, c'est à dire il existe une action globale à gauche et à droite. Cet effort vaut pourtant la peine, car la récompense s'annonce une description du modèle sigma à couplage fort par un modèle de Gross-Neveu à couplage faible et inversement, un exemple de dualité qui peut jouer un rôle crucial dans la conjecture AdS/CFT [51].

Théories conformes avec instantons

Le cercle a un groupe d'homotopie fondamental non-trivial. La conséquence est l'existence des instantons dans la théorie conforme du boson compact. Dans des termes plus adaptés au boson compact, le spectre contient des opérateurs de vertex avec charge magnétique. La charge magnétique mesure la discontinuité du boson compact engendrée par une rotation dans le plan complexe autour de l'insertion de l'opérateur de vertex. Par contraste, le groupe fondamental des supersphères avec $S > 0$ est trivial ! Il est important de comprendre mieux comment les opérateurs magnétiques du boson sous-jacent sont stabilisés malgré tout dans le modèle sigma sur la supersphère.

Les charges instantoniques sont définies dans les modèles sigma sur les espaces projectifs $\mathbb{CP}^{n-1}$ par la même logique [75]. Soit $z(x)$ une solution classique de (2.14) pour des conditions de bord telles que $\lim_{r \rightarrow \infty} |z(r, \phi)|$ existe, où r, ϕ sont les coordonnées polaires du plan complexe. La charge instantonique m de la solution classique est définie par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z(r, \phi) = e^{im\phi} z_0,$$

où z_0 est une constante. Les modèles sigma sur des superspace projectifs $\mathbb{CP}^{N-1|N}$ sont des exemples nouveaux de théories conformes avec instantons. Le rôle du terme topologique dans ces théories n'est pas encore très bien compris.

Intégrabilité généralisée

Une autre direction de recherche possible est la généralisation des méthodes de la théorie des modèles intégrables en deux dimensions aux cas non-unitaires. Pour mettre en évidence le rôle de l'unitarité rappelons quelle est la définition d'une chaîne quantique intégrable définie par une matrice de transfert. Celle-ci est, généralement, une fonction d'un certain nombre de poids. Supposons que l'ensemble des valeurs que les poids peuvent prendre est une variété $\mathcal{W}$. La chaîne est dite intégrable s'il existe une sous-variété $\Lambda \subset \mathcal{W}$, appelée sous-variété spectrale, telle que les vecteurs propres de la matrice de transfert restreinte à la sous-variété spec-

trale sont tous constants. On appelle paramètre spectral une paramétrisation de Λ . En d'autres mots, la chaîne quantique est dite intégrable si et seulement si il existe un paramètre spectral tel que les vecteurs propres de la matrice de transfert n'en dépendent pas. Cette définition garantit l'existence d'une infinité de charges conservées dans la limite thermodynamique.

La remarque qu'on voulait faire est la suivante. Si la chaîne quantique est unitaire alors les matrices de transfert sont diagonalisables. La condition d'intégrabilité est alors équivalente à la commutativité des matrices de transfert lorsqu'elles sont restreintes à la sous-variété spectrale. En particulier, tous les systèmes intégrables construits par l'Ansatz de Bethe algébrique satisfont ce critère. Evidemment, ce dernier ne s'applique pas à toutes les chaînes intégrables non-unitaires, où les matrices de transfert ne sont pas diagonalisables. Ceci veut dire que l'Ansatz de Bethe algébrique est une méthode d'intégrabilité trop contraignante pour les systèmes quantiques non-unitaires. Un premier effort dans cette direction de recherche est de répondre à la question si les modèles de boucles avec intersections considérées dans cette thèse sont intégrables au sens généralisé qu'on vient de donner.

ANNEXES

A

A lattice approach to the conformal $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ supercoset sigma model

Part I: Algebraic structures in the spin chain. The Brauer algebra.

Constantin Candu⁽¹⁾ and Hubert Saleur^(1,2)

*Service de Physique Théorique, CEA Saclay,
Gif Sur Yvette, 91191, France⁽¹⁾*

*Department of Physics and Astronomy, University of Southern California
Los Angeles, CA 90089, USA⁽²⁾*

Abstract

We define and study a lattice model which we argue is in the universality class of the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ supercoset sigma model for a large range of values of the coupling constant g_σ^2 . In this first paper, we analyze in details the symmetries of this lattice model, in particular the decomposition of the space of the quantum spin chain $V^{\otimes L}$ as a bimodule over $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ and its commutant, the Brauer algebra $B_L(2)$. It turns out that $V^{\otimes L}$ is a nonsemisimple module for both $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ and $B_L(2)$. The results are used in the companion paper to elucidate the structure of the (boundary) conformal field theory.

1 Introduction

The solution of the $AdS_5 \times S^5$ worldsheet string theory is one of the cornerstones of the AdS/CFT duality program. Despite continuous effort and progress on classical aspects in particular [1], and the generally accepted presence of both integrability and conformal invariance symmetries, most aspects of the quantum theory remain elusive.

It is natural to try to understand some aspects of this quantum theory by first tackling simpler models with similar properties. The so called $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ coset model - specifically, a sigma model on the supersphere $\text{OSp}(2S + 2|2S)/\text{OSp}(2S + 1|2S)$ - is a very attractive candidate for such an exercise: like the $AdS_5 \times S^5$ worldsheet theory it is conformal invariant and its target space is a supergroup coset. Of course, it lacks other aspects such as the BRST structure of the string theory.

Apart from the string theory motivation, models such as the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ coset model are extremely interesting from the pure conformal field theory point of view. Indeed, they are sigma models which are massless without any kind of topological term, and for a large range of values of the coupling constant g_σ^2 . To make things more precise let us briefly remind the reader of some generalities. Supersphere sigma models have target super space the supersphere $S^{R-1,2S} := \text{OSp}(R|2S)/\text{OSp}(R-1|2S)$ and can be viewed as a “supersymmetric” extension of the nonlinear $O(N)$ sigma models (which differs of course from the usual $O(N)$ “supersymmetric” models). Use as coordinates a real scalar field

$$\phi := (\phi^1, \dots, \phi^{R+2S})$$

where the first R components are bosons, the last $2S$ ones fermions, and the invariant bilinear form

$$\phi \cdot \phi' = \sum J_{ij} \phi^i \phi'^j$$

where J is the orthosymplectic metric

$$J = \begin{pmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_S \\ 0 & I_S & 0 \end{pmatrix}$$

I denoting the identity. The unit supersphere is defined by the constraint

$$\phi \cdot \phi = 1$$

The action of the sigma model (conventions are that the Boltzmann weight is e^{-S}) reads

$$S = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2x \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi$$

The perturbative β function depends only on $R - 2S$ to all orders (see, e.g., Ref [2]), and is the same as the one of the $O(N)$ model with $N := R - 2S$. Physics can be reliably understood from the first order beta function

$$\beta(g_\sigma^2) = (R - 2S - 2)g_\sigma^4 + O(g_\sigma^6)$$

The model for g_σ^2 positive flows to strong coupling for $R - 2S > 2$. Like in the ordinary sigma models case, the symmetry is restored at large length scales, and the field theory is massive. For $R - 2S < 2$ meanwhile, the model flows to weak coupling, and the symmetry is spontaneously broken. One expects this scenario to work for g_σ^2 small enough, and the corresponding Goldstone phase to be separated from a non perturbative strong coupling phase by a critical point.

The case we are interested in here is $R - 2S = 2$, where the β function vanishes to all orders in perturbation theory, and the model is expected to be conformal invariant, at least for g_σ^2 small enough, the Goldstone phase being replaced by a phase with continuously varying exponents not unlike the low temperature Kosterlitz Thouless phase. How the group symmetry combines with the (logarithmic) conformal symmetry in such models is largely unknown. It is an essential question to be solved before any serious attempts to understanding universality classes in non interacting disordered 2D electronic systems can be contemplated [3].

The $OSp(2S + 2|2S)$ coset model was considered in particular in two papers by Mann and Polchinski using the massless scattering and Bethe ansatz approaches. This is indeed a natural idea, since supersphere sigma models are in general integrable, and, when massive (ie $R - 2S > 2$) can be described by a scattering theory involving particles in the fundamental representation of the group. The S matrix is well known

$$\check{S}(\theta) = \sigma_1(\theta)E + \sigma_2(\theta)P + \sigma_3(\theta)I$$

Here, I is the identity, P is the graded permutation operator, and E is proportional to the projector on the identity representation. For R, S arbitrary, factorizability requires that

$$\begin{aligned}\sigma_1(\theta) &= -\frac{2i\pi}{(N-2)(i\pi-\theta)}\sigma_2(\theta) \\ \sigma_3(\theta) &= -\frac{2i\pi}{(N-2)\theta}\sigma_2(\theta)\end{aligned}$$

where $N = R - 2S$, while σ_2 itself is determined, up to CDD factors, by crossing symmetry and unitarity. One immediately observes that when $N = 2$, the amplitude σ_2 cancels out, leaving a scattering matrix with a simpler tensorial structure, since the P operator disappears. This corresponds to a particular point [4] on the sigma model critical line (where, among other things, the symmetry is enhanced to $SU(2S + 2|2S)$), the rest of which is not directly accessible by this construction.¹ The idea used in [5] is to consider an analytical continuation to R, S real, and an approach to $R - 2S = 2$ with proper scaling of the mass. Though interesting results were obtained, the emphasis in these papers was not on conformal properties.

Another line of attack, more suited to the conformal aspects, was launched by Read and Saleur in 2001 [4], who proposed to use a lattice regularization to control the integrable features of the model. They obtained in this way the spectrum of critical exponents for several related sigma models on super target spaces, including the $OSp(2S + 2|2S)$ coset one at a particular (critical) value of the coupling g_σ^2 . The results exhibited several mysterious features, including a pattern of large degeneracies, and a set of values of the exponents covering (modulo integers) all the rationals. In two subsequent papers [6, 7], it was argued further that many algebraic properties of the conformal field theory could be obtained at the lattice level already. These include fusion, and the structure of conformal “towers” (see below for further details).

The work we present in this paper and its companion is an attempt at understanding the conformal field theoretic description of the $OSp(2S + 2|2S)$ model for all values of the coupling by using a lattice regularization. Foremost in the lattice approach is the understanding of the algebraic structure of the lattice model - the algebra defined by the local transfer matrices and its commutant. While in the cases discussed in [7] most necessary results were already available in the mathematical literature, the situation here is much more complicated: in a few words, we have to deal, instead of the Temperley Lieb algebra, with the *Brauer algebra* whose representation theory, in the non semi-simple case, is far from fully understood. An important part of our work has consisted in filling up the necessary gaps of the literature, sometimes rigorously, but sometimes at the price of some

¹The case $R = 2, S = 0$ is special and allows for an extension of the S matrix to the whole $O(2)$ critical line.

conjectures. This algebraic work is the subject of the first paper, which we realize might be a bit hard to read for a physics reader. We capitalize on the algebraic effort in the companion paper, where the boundary conformal field theory for the coset sigma model is analyzed thoroughly.

In the second section of this paper we discuss generalities about lattice regularizations of $O(N)$ sigma models in 2 dimensions and define the model we shall be interested in. In section 3, the transfer matrix, the loop reformulation and the associated Brauer algebra are introduced and discussed. Section 4 is the main section, where the full decomposition of the Hilbert space of the lattice model under the action of $OSp(2S + 2|2S)$ and $B_L(2)$ is obtained. Our main result can be found in eqs. (4.36) and (4.37). Section 5 discusses aspects of the hamiltonian limit and section 6 contains conclusions. Technical aspects of representation theory are discussed further in the appendices.

For the reader's convenience, we provide here a list of notations used throughout the paper:

- $osp(R|2S)$ is the Lie superalgebra of the supergroup $OSp(R|2S)$
- $B_L(N)$ is the Brauer algebra on L strings with fugacity for loops $N = R - 2S$
- $V_{R|2S} = \mathbb{C}^{R|2S}$ is the mod 2 graded vector space $\mathbb{C}^R \oplus \mathbb{C}^{2S}$ with even part $V_0 = \mathbb{C}^R$ and odd part $V_1 = \mathbb{C}^{2S}$. We shall often drop the indices $R, 2S$ in $V_{R|2S}$.
- $V^{\otimes L}$ is considered as a left $osp(R|2S)$ and right $B_L(N)$ bimodule
- $\lambda \vdash L$ stands for “ λ is a partition of L ” and λ' is the partition λ transposed
- $Sym(L)$ and $\mathbb{C} Sym(L)$ are the symmetric group on L objects and its group algebra
- $T_L(q)$ is the Temperley Lieb algebra with fugacity for loops $q + q^{-1}$
- d and D are generic elements of $B_L(N)$ and $OSp(R|2S)$
- $X_L = \{\mu \vdash L - 2k \mid k = 0, \dots, [L/2]\}$ is the set of partitions labeling the weights of $B_L(N)$. $X_L(S) \subset X_L$ selects those of them which do realize on $V^{\otimes L}$
- Associate weights λ, λ^* are labels of $OSp(R|2S)$ irreps which are nonequivalent(identical) and become(split into two) isomorphic(nonequivalent) irreps under the restriction to the proper subgroup $OSp^+(R|2S)$ of supermatrices with $sdet D = +1$
- $H_L(S) = \{\lambda \in X_L(S) \mid \lambda_{r+1} \leq S\}$ is the set of hook shape partitions labeling the weights of $osp(R|2S)$ irreps appearing in $V^{\otimes L}$ and $Y_L(S) = H_L(S) \cup H_L(S)^*$
- $\Delta_L(\mu)$ are standard or generically irreducible representations of $B_L(N)$
- $S(\lambda), g(\lambda), G(\mu), B_L(\mu), D_L(j)$ are irreducible representations of $\mathbb{C} Sym(L), osp(R|2S), OSp(R|2S), B_L(N)$ and $T_L(q)$ respectively.
- $Ig(\lambda), IG(\mu), IB_L(\mu)$ are direct summands of $V^{\otimes L}$ as a $osp(R|2S), OSp(R|2S)$ and $B_L(N)$ module
- sc_λ are the supersymmetric generalization of $O(N)$ symmetric functions
- $\chi'_\mu(d), \chi_\mu(d), sch_\lambda(D)$ are characters of $\Delta_L(\mu), B_L(\mu)$ and $G(\lambda)$.

2 The $OSp(R|2S)$ lattice models and their loop reformulations

In this section we discuss standard lattice discretizations of $O(N)$ field theories in 2 dimensions. We then propose a straightforward generalization to the case of orthosymplectic supergroups. We also discuss a loop reformulation whose first advantage is to provide some intuition into the physical properties of the model, as well as the role of supergroup symmetry.

Lattice discretizations of $O(N)$ sigma models have had a long history. The simplest way to go is obviously to introduce spins taking values in the target manifold - the sphere $O(N)/O(N-1)$ - on the sites of a discrete

lattice, with an interaction energy of the Heisenberg type $E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ (where $\cdot$ stands for the bilinear $O(N)$ -invariant quadratic form). This is however difficult to study technically, as the number of degrees of freedom on each site is infinite. A possible way to go is to discretize the target space, leading to various types of “cubic models” [8]. Another way which has proved especially fruitful in two dimensions has been to reformulate the problem of calculating the partition or correlation functions geometrically by using the techniques of high or low temperature expansions, thus obtaining graphs with complicated interaction rules and weights determined by properties of the underlying groups. The simplest of these formulations appeared in [9] where the authors studied the $O(N)$ model on the honeycomb lattice in two dimensions, and replaced moreover the term $\prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}$ by its considerably simpler high temperature approximation $\prod_{\langle ij \rangle} (1 + K \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)$, $K = \beta J$ [10]. Expanding the brackets, in say the calculation of the partition function, one can draw graphs by putting a bond between neighboring sites i and j whenever the term $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ is picked up. The integral over spin variables leaves only loops, with a fugacity equal to N as there are N colors one can contract. Note that because of the very low coordination number of the honeycomb lattice, only self-avoiding loops are obtained. This leads to the well known self-avoiding loop gas partition function:

$$Z_{SAL} = \sum_{\mathcal{G}} K^E N^L \quad (2.1)$$

where the sum is taken over all configurations $\mathcal{G}$ of self avoiding, mutually avoiding closed loops in number L , covering a total of E edges. Note that once an expression such as (2.1) is written down, it is possible to analytically continue the definition of the model for N an arbitrary real number. Barring the use of superalgebras, only N integer greater or equal to one has a well defined meaning as a spin model (the case $N = 1$ coincides with the Ising model²). In two dimensions, the Mermin Wagner theorem prevents spontaneous symmetry breaking, so for N integer, critical behavior can only occur for $N = 1, 2$. Analysis of the same beta function suggests however that lattice models defined by suitable analytic continuation should have a Goldstone low temperature phase for all $N < 2$, though it says nothing about whether this phase might end by a second or first order phase transition.

Model (2.1) lacks interaction terms which would appear with less drastic choices of the lattice and the interactions: these are the terms where the loops intersect, either by going over the same edge, or over the same vertex, maybe many times. It has often been argued that such terms are irrelevant for the study of the critical points of the $O(N)$ models in two dimensions. Most of the interest has focused on such critical points for $N \in [-2, 2]$, which have geometrical applications - in particular the case $N = 0$ is related with the physics of self-avoiding walks. It turns out however that intersection terms are crucial for the understanding of low temperature phases. Indeed, the model (2.1) *does have* a sort of Goldstone phase for $N \in [-2, 2]$ called the dense phase, but its properties are not generic, and destroyed by the introduction of a small amount of intersections. A simple way to see that the dense phase is not generic is that the exponents at $N = 2$ are always those of the Kosterlitz Thouless transition point: model (2.1) does not allow one to enter the low temperature phase of the XY model. Also, model (2.1) has a first order transition for $N < -2$, which is not the behavior expected from the sigma model analysis.

It was suggested in [11] that model (2.1) can be repaired by allowing for some intersections. The minimal scenario one can imagine is to define a similar model on the square lattice, and allow for self intersections at vertices only, so either none, one or two loops go through the same vertex. The resulting objects are often called trails. This gives the new partition function

$$Z_T = \sum_{\mathcal{G}'} K^E N^L w^I$$

where the sum is taken over all configurations $\mathcal{G}'$ of closed loops, which visit edges of the lattice at most once, in number L , covering a total of E edges, with I intersections.

The phase diagram of this model has not been entirely investigated. It is expected that at least for w small enough, the critical behavior obtained with $K = K_c$, $w = 0$ is not changed (though K_c is), while the low temperature behavior $K > K_c$ will be.

In [11] a yet slightly different version was considered corresponding, roughly, to the limit of very large K , where all the edges of the lattice are covered. The partition function of this fully packed trails model then

²The group $O(2)$ is different from $SO(2) \simeq U(1)$ because of the additional $\mathbb{Z}_2$ freedom in choosing the sign of the determinant.

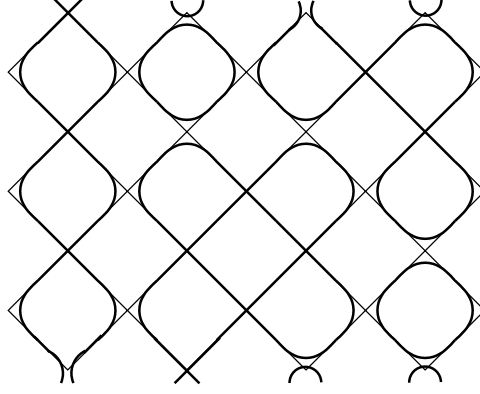


Figure 1: Dense intersecting loop covering of a lattice with annulus boundary conditions. Illustration of bulk (B), contractible (C), even (E) and odd (O) loops. Periodic imaginary time runs vertically

depends on only two parameters:

$$Z_{FPT} = \sum_{\mathcal{G}''} N^L w^I \quad (2.2)$$

and an example of allowed configuration is given in figure 2. Numerical and analytical arguments suggest strongly that this model has all the generic properties of the $O(N)$ sigma model in the spontaneously broken symmetry phase (such that one might derive from analytic continuation in N of the RG equations), for all $N \leq 2$.

Note that expression (2.2) can be obtained very naturally if instead of putting the degrees of freedom on the vertices, one puts them on the edges of the lattice. In this case, the minimal form of interaction involves two edges crossing at one vertex. Invariance under the $O(N)$ group allows for three invariant tensors as illustrated on the figure 8, while isotropy and invariance under an overall scale change of the Boltzmann weights leaves one with a single free parameter, the crossing weight w . Graphical representation of the contractions on the invariant tensors reproduces eq. (2.2), as will be discussed below.

For $N < 2$, model (2.2) flows to weak coupling in the IR, and therefore it is expected that the critical properties of the corresponding low temperature (Goldstone) phase do not depend on w , a fact checked numerically in [11]. The case $N = 2$ is expected to be different: as mentioned already in the introduction, the beta function of the corresponding sigma model is exactly zero so the coupling constant does not renormalize. It is indeed easy to see that the loop model (2.2) with $N = 2$ is equivalent to the 6 vertex model with $a = b = 1 + w$, $c = 1$. Consider the vertices of the 6 vertex model as represented on figure 2. We chose isotropic weights $a = b, c$. We can decide to split the vertices of a configuration into pieces of oriented loops as represented on figure 3. For each vertex, there are two possible splittings, and we assume that they are chosen with equal probability. The loops obtained by connecting all the pieces together provide a dense covering of the lattice, and come with two possible orientations, hence a fugacity of two once the orientations are summed over. The loops can intersect, with a weight w given from the obvious correspondence:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{1 + w}{2}$$

and thus

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - \frac{2}{(1 + w)^2}$$

We note that there are indeed *three* invariant tensors for the case of $O(2)$. The corresponding projectors are E , $\frac{1}{2}(I - P)$, $\frac{1}{2}(I - E + P)$. They project respectively on two one dimensional representations, and on a single two dimensional one.

The parameter Δ covers the interval $[-1, 1]$ as $w \in [0, \infty]$. Changing Δ is well known to change the exponents of 6 vertex model, and therefore eq. (2.2) for $N = 2$ exhibits a critical line, which is in fact in the universality class of the continuous XY ($O(2)$) model in the low temperature (Kosterlitz Thouless) phase.

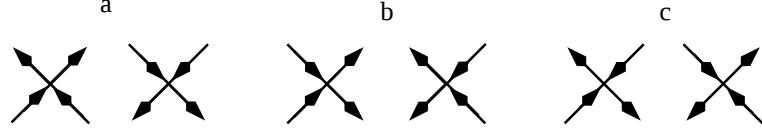


Figure 2: Vertices of the $\mathbb{Z}_2$ symmetric six vertex model

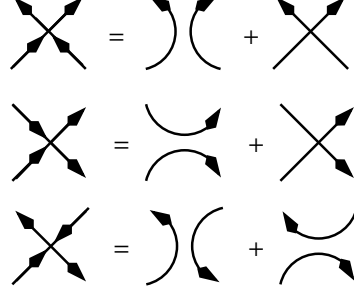


Figure 3: The mapping of the six vertex model onto the oriented loops

All what was said so far can be easily generalized to the case of spins taking values on a supersphere $\text{OSp}(R|2S)/\text{OSp}(R-1|2S)$. The fugacity of loops is now equal to $R-2S$: this combination is the number of bosonic minus the number of fermionic coordinates, and follows from the usual fact that when contracting fermions along a loop, a minus sign is generated³, see sec. 3.3. The loop model formulation therefore provides a convenient graphical representation of the discrete supersphere sigma models for all $R-2S$, in particular $R-2S \leq 2$ where interesting physics is expected to occur. This physics was explored in [11], and the expected results were obtained for $R-2S < 2$. The purpose of this paper is to explore the more challenging $R-2S = 2$ case.

Of course, at the naive level of partition functions and without worrying about boundary conditions, it looks as if there is no difference between the $O(N)$ spin model and its supersphere cousins provided $R-2S = N$. The point is that the *observables* of the models are different or, at the very least, come with different multiplicities. Indeed, consider for instance correlation functions of spin variables. In the $O(2)$ case, the spin has only two components S^1, S^2 , so one cannot build a totally antisymmetric tensor on three indices. This means that the corresponding operator (which has a nice geometrical interpretation to be given in the next paper) will not be present in this case, though it will be in the $\text{OSp}(2S+2|2S)$ model when $S > 0$. Note that in general, correlators involving spins within the first R bosonic and the first $2S$ fermionic labels will be the same for *any* choice of group $\text{OSp}(R'|2S')$ with $R'-2S' = R-2S$ and $R' \geq R$.⁴ This is immediately proved by performing a graphical expansion of the correlator: variables outside of the set of the first R bosonic and the first $2S$ fermionic labels are not getting contracted with the spins in the correlators, and cancel against each other in the loop contractions.

A standard trick to extract the full operator content of a model is to study the partition function with different boundary conditions. Consider for instance the spin model on an annulus with some symmetry preserving boundary conditions in the space direction. With what we will call periodic boundary conditions (corresponding to taking the supertrace of the evolution operator) in the time direction, representations of $\text{OSp}(2S+2|2S)$ will always be counted with their superdimension, and the partition function will be identical with the one of the $O(2)$ case. But if we take antiperiodic boundary conditions, we will get a modified partition function (in the sense of [4]) which is a *trace* over the Hilbert space instead of a supertrace, counts all observables with the multiplicities (not supermultiplicities), and will turn out to be a very complex object.

A good algebraic understanding of the lattice model will be essential to make further progress, and, since the area is largely unexplored, this will occupy us for most of the rest of this first paper.

³The generalization of results for $O(N)$ models to the case of orthosymplectic groups dates back to the work of Parisi and Sourlas [12].

⁴Provided, of course, that the boundary conditions imposed on the R' bosonic and $2S'$ fermionic degrees of freedom are the same in both cases.

3 Transfer matrices and algebra

We show in this section how the loop reformulation gives rise to a very natural connection with the Brauer algebra. This allows a clean description of the Hilbert space in terms of representations of the (super) group and its commutant, leads to a drastic reduction of the size of transfer matrices in numerical studies, and to a transparent interpretation of the fermion boundary conditions.

3.1 Transfer matrices

As discussed briefly in the introduction, the $\text{OSp}(R|2S)$ spin model we consider is most easily defined on a square lattice with degrees of freedom (states) on the edges and interactions taking place at vertices. The set of states on every edge is a copy of the base space V of the fundamental $\text{OSp}(R|2S)$ representation. Interactions at a vertex can be encoded in a local transfer matrix t acting on $V^{\otimes 2}$ and commuting with the $\text{OSp}(R|2S)$ supergroup action. We call t an intertwiner and write $t \in \text{End}_{\text{OSp}(R|2S)} V^{\otimes 2}$.

The Boltzmann weights of the model are components of the transfer matrix along a basis of intertwiners. A natural choice of basis are the projectors onto $\text{OSp}(R|2S)$ irreducible representations appearing in the decomposition of the tensor product of two fundamental $\text{OSp}(R|2S)$ representations. To find them one can apply the same (anti)symmetrization and trace subtraction techniques used for reducing $O(N)$ tensor representations. If $e_1, \dots, e_{R+2S}$ is a mod 2 graded set of basis vectors in V with grading g , the decomposition of $V^{\otimes 2}$ will read

$$\begin{aligned} e_i \otimes e_j = & \frac{1}{2} \left(e_i \otimes e_j + (-1)^{g(i)g(j)} e_j \otimes e_i - \frac{2J_{ij}}{R-2S} \sum_{k,l} J^{kl} e_k \otimes e_l \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(e_i \otimes e_j - (-1)^{g(i)g(j)} e_j \otimes e_i \right) + \frac{J_{ij}}{R-2S} \sum_{k,l} J^{kl} e_k \otimes e_l. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Here J_{ij} is the $\text{OSp}(R|2S)$ invariant tensor, $J^{ij} = (J^{-1})_{ij}$, and $g(i) = 1$ (resp. $g(i) = 0$) if i is fermionic (resp. bosonic). Each of the three terms on the l.h.s. of (3.1) transforms according to an irreps of $\text{OSp}(R|2S)$, or, in other words, belongs to a simple $\text{OSp}(R|2S)$ module.

Introduce the identity I , the graded permutation operator P (also known as braid operator), and E the Temperley Lieb operator (proportional to the projector on the trivial representation),

$$I_{ij}^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l, \quad P_{ij}^{kl} = (-1)^{g(i)g(j)} \delta_i^k \delta_j^l, \quad E_{ij}^{kl} = J^{kl} J_{ij}. \quad (3.2)$$

In terms of projectors onto irreducible $\text{OSp}(R|2S)$ modules, eq. (3.1) may be written in a more elegant way as

$$I = \frac{1}{2} \left(I + P - \frac{2}{R-2S} E \right) + \frac{1}{2} (I - P) + \frac{1}{R-2S} E.$$

Let P denote as usual the inversion of space, T the inversion of time and C the charge conjugation with the matrix J . One can check directly from definition (3.2) that P is C_{12} , P and T_{12} invariant, while E is P_{12} and $C_{12}T_{12}$ invariant. Moreover, E and I transform into each other under the $\pi/2$ rotation of the lattice R , while E and P are related by the crossing symmetry C_1T_1

$$\begin{aligned} R : E_{ij}^{kl} & \longrightarrow J_{jj'} E_{k'i}^{lj'} J^{k'k} = I_{ij}^{kl} \\ C_1T_1 : E_{ij}^{kl} & \longrightarrow J_{ii'} E_{k'j}^{i'l} J^{k'k} = P_{ij}^{kl}. \end{aligned}$$

Take I , E and P as basis of intertwiners in $\text{End}_{\text{OSp}(R|2S)} V^{\otimes 2}$. The local transfer matrix generally depends on three independent weights w_I , w_E and w_P . However, on a homogeneous and isotropic lattice one can normalize $w_I = w_E = 1$ and leave only the weight $w = w_P$. Finally, the local transfer matrix takes the form

$$t(w) = I + wP + E. \quad (3.3)$$

On a diagonal lattice with open boundaries represented in fig. 4 choose the time in vertical direction. The notation of sites at a fixed time is such that the left edge i and right edge $i+1$ meet at vertex i . Let $t_i(w) \in$

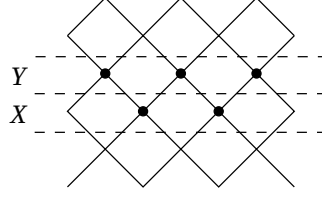


Figure 4: The one layer transfer matrices X and Y represented on a diagonal lattice of width 6.

$\text{End}_{\text{osp}(R|2S)} V^{\otimes L}$ denote a transfer matrix acting nontrivially only at vertex i according to eq. (3.3). From the figure it is clear that odd and even times are inequivalent. The transfer matrix T , propagating one step forward at equivalent times, may be written as a product $T = YX$ of one layer transfer matrices

$$X = \prod_{i=1}^{[(L-1)/2]} t_{2i}, \quad Y = \prod_{i=1}^{[L/2]} t_{2i-1}, \quad (3.4)$$

schematically shown in fig. 4.

The simplest way to define a partition function that depends on the whole spectrum of the transfer matrix T is by taking the *trace* of T at a certain power β . Selecting other boundary conditions with some nontrivial symmetry generally amounts to restricting the whole space of states of the model to a subspace compatible with the symmetry of chosen boundary conditions. What exactly we mean by “symmetry of boundary conditions” will be explained later in sec. 3.3. For the moment let us just say that it is convenient to consider a more general class of boundary conditions, called quasiperiodic, in which T^β is “twisted” by the action of an element D of the supergroup. Define the quasiperiodic partition function to be

$$Z_D = \text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} T^\beta. \quad (3.5)$$

We must take the *supertrace* in eq. (3.5) if we want the quasiperiodic partition function to be well defined. For instance, when $D = J^2$ we get the usual trace partition function and when D equals to the identity matrix we get the supertrace partition function.

Note that because D is a supermatrix, the tensor product in $D^{\otimes L}$ has to be graded, that is

$$D^{\otimes 2} \cdot \eta \otimes \xi = D \cdot \eta \otimes D \cdot \xi \quad \Rightarrow \quad (D^{\otimes 2})_{kl}^{ij} = (-1)^{g(k)(g(j)+g(l))} D_k^i D_l^j$$

After inserting the local transfer matrix from eq. (3.3) in eq. (3.4) and expanding the transfer matrix T , the quasiperiodic partition function reads as a sum of weighted products of E_i ’s and P_i ’s. Such linearly independent products must be considered as words of a *transfer matrix algebra*, while intertwiners E_i and P_i are *generators* of this algebra. In the next section we identify this algebra as a representation of the Brauer algebra.

3.2 The Brauer algebra

For an abstract introduction to the Brauer algebra see ref. [13, 14] while in the context of $\text{osp}(R|2S)$ centralizer algebra see ref. [15]. We collect in this section some well known facts about the Brauer algebra we shall use in the next sections.

Let E_i and P_i , $i = 1, \dots, L$ act nontrivially as E and P in eq. (3.2) only at the sites $V_i \otimes V_{i+1}$ of $V^{\otimes L}$. One can check that for P_i and E_i so defined the following relations hold:

$$\begin{aligned} P_i^2 &= 1, & E_i^2 &= N E_i, & E_i P_i &= P_i E_i = E_i, \\ P_i P_j &= P_j P_i, & E_i E_j &= E_j E_i, & E_i P_j &= E_j P_i, \\ P_i P_{i\pm 1} P_i &= P_{i\pm 1} P_i P_{i\pm 1}, & E_i E_{i\pm 1} E_i &= E_i, \\ P_i E_{i\pm 1} E_i &= P_{i\pm 1} E_i, & E_i E_{i\pm 1} P_i &= E_i P_{i\pm 1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

In the second line of these relations i and j are supposed to be nonadjacent sites.

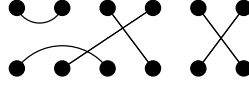


Figure 5: The graphical representation of the word $P_5P_3E_1P_2$ in $B_6(N)$.

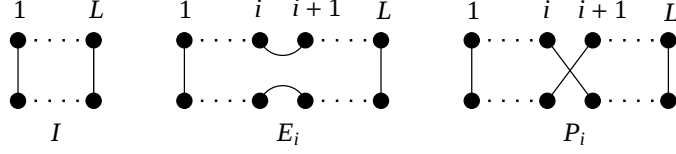


Figure 6: Graphical representation of generators I , E_i and P_i .

Relations (3.6) (is one of the many ways to) define the $B_L(N)$ Brauer algebra (also denoted sometimes by the names of braid-monoid algebra or degenerate Birman-Wenzel-Murakami algebra [16, 17, 18]). Note that this algebra depends on a single, generally complex, parameter N , and contains the maybe more familiar Temperley Lieb algebra, generated by E_i 's alone, and the symmetric group algebra, generated by P_i alone.

For N fixed and L big enough, the $\text{OSp}(R|2S)$ spin models provide highly unfaithful representations of the Brauer algebra $B_L(N)$. This is because, in $V^{\otimes L}$, the generators P_i and E_i satisfy additional higher order relations $\mathcal{R}$ on top of (3.6).⁵ For a simple example, consider the $\text{O}(2)$ spin model on a lattice of width 3. The projector onto the antisymmetric tensor of rank 3 is zero, thus, $\mathcal{R}$ contains the additional relation $1 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2 + P_1P_2P_1$. Our spin models in general provide representations of the quotient algebras $B_L(N)/\mathcal{R}$. The set of relations $\mathcal{R}$ can be explicitly described for $S = 0$, see [19, 20] and references therein, and we have little to say about the case $S > 0$.

The first step in understanding the spectrum of the transfer matrix T brings up the question of $B_L(N)$ irreducible representations, and of their multiplicities in T for a particular choice of R and S . This leads us to discussing some results about the representation theory of the Brauer algebra.

The most natural representation to begin with is the *adjoint representation*. It admits a diagrammatic representation in terms of graphs on $2L$ points in which every vertex has degree 1. Usually one orders the $2L$ points on two horizontal parallel lines as shown in fig. 5. Let B_L denote the vector space spanned on the $(2L-1)!!$ such diagrams.

The product $d_1 * d_2$ of two diagrams d_1 and d_2 is performed by putting d_1 on top of d_2 and replacing each of the loops in the resulting diagram with N . Define diagrammatically the identity I and the generators E_i , P_i as represented in fig. 6. One can check that the graphical representation of generators with the multiplication $*$ of diagrams satisfy all of the eqs. (3.6). The left action of generators on B_L via the multiplication $*$ of diagrams provide the adjoint representation of $B_L(N)$.

From the graphical representation we see that B_L has a series of invariant subspaces $B_L = B_L^L \supset B_L^{L-2} \supset \dots \supset B_L^r$, where B_L^m is spanned on diagrams with fewer than m vertical lines and $\tau = L \bmod 2$. The vector space spanned on diagrams with exactly m vertical lines may be defined as a $B_L(N)$ module by the coset $B_L'^m = B_L^m/B_L^{m-2}$. The left action of $B_L(N)$ on this modules may be seen as a modified multiplication $*_m$ of diagrams

$$d_1 *_m d_2 = \begin{cases} d_1 * d_2, & \text{if it has } m \text{ vertical lines} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Under the left action of the algebra the position of horizontal lines in the bottom of a diagram does not change. For a given configuration of the horizontal lines in the top of a diagram and a given pattern of intersections of vertical lines there are $(L-m-1)!!C_L^m$ possibilities of choosing the configuration of horizontal lines in the bottom of the diagram. This simply means that $B_L'^m$ decomposes into a direct sum of $(L-m-1)!!C_L^m$ equivalent modules. The coset representative $B_L'^m$ of these equivalent left modules is spanned on $m!(L-m-1)!!C_L^m$ graphs on L points with every vertex having degree 0 or 1 and a labeling with numbers $1, \dots, m$ of free vertices.

⁵This situation is similar to what happens for models with $\text{SL}(N)$ symmetry in the fundamental representation, and corresponding quotients of the Hecke algebra.

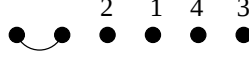


Figure 7: The top of the diagram represented in fig. 5. The labeling permutation is (2, 1, 4, 3).

An example of such a labeled graph is shown in fig. 7. If the labellings are omitted the resulting graph is called a partial diagram.

The labeling of the m free points of a labeled graph is a permutation π in the symmetric group $\text{Sym}(m)$. The labeled graphs will provide a representation of the Brauer algebra, which is irreducible for generic values of N , if we take the labellings π in an irreducible representation of $\text{Sym}(m)$. We call such representations generically irreducible. Let μ be a partition of m , which we write as $\mu \vdash m$. In a more algebraic language the definition of generically irreducible left modules translates to

$$\Delta_L(\mu) := B_L'^m \otimes_{\text{Sym}(m)} S(\mu), \quad \mu \vdash m, \quad (3.7)$$

where $S(\mu)$ is an irreducible $\text{Sym}(m)$ module. In view of later numerical analysis we give below a basis in $\Delta_L(\mu)$ and describe the action of $B_L(N)$ on this basis.

Let $p \otimes \pi$ denote the labeling of a partial diagram p with the permutation π , $v_1, \dots, v_{f_\mu}$ be a set of basis vectors in $S(\mu)$ and $\rho_\mu(\sigma)$ be the matrix of the permutation σ in the representation ρ_μ . A natural basis in $\Delta_L(\mu)$ is given by all pairs $p \otimes v_i$. The action of a diagram $d \in B_L(N)$ on a basis vector is

$$d \cdot p \otimes v_i = \begin{cases} d *_m p \otimes \rho_\mu(\sigma^{-1})v_i, & \text{if } d *_m p \text{ has } m \text{ free points} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.8)$$

where σ is the labeling of $d *_m g$ and g is the partial diagram p labeled with the identity permutation. The dimensions d_μ of $\Delta_L(\mu)$ is $f_\mu(L - m - 1)!! C_L^m$.

In simple words, a generically irreducible module is a span on graphs on L points, obtained by choosing m points among L , pairing all the others (this gives the multiplicity $(L - m - 1)!!$ since intersections are allowed), choosing for the m unpaired ones a representation of the permutation group and setting to zero the action of any Brauer diagram that reduces the number m of unpaired points.

The generically irreducible representations labeled by $\mu \vdash L - 2k$, $k = 0, \dots, [L/2]$ appear in the decomposition of the adjoint representation with multiplicity given by their dimension d_μ when $B_L(N)$ is semisimple.

Let us conclude with a few words about the reducibility of generically irreducible modules $\Delta_L(\mu)$. For integer N and a number of strings $L > N$ the Brauer algebra is not semisimple and, as a consequence, certain of the modules $\Delta_L(\mu)$ become reducible, though they remain *indecomposable*.⁶ The irreducible components appearing in such reducible modules $\Delta_L(\mu)$ are far from being understood (the situation is much worse than in the case of the nonsemisimple Temperley Lieb algebra [21, 22]). Numerical computations based on the diagonalization of the transfer matrix in the diagrammatic representation of $B_L(N)$ restricted to $\Delta_L(\mu)$ decreases in efficiency very fast with increasing L , compared to the ideal case where the transfer matrix is restricted to an irreps of $B_L(N)$. This is because for big L and μ fixed the number of irreducible components in $\Delta_L(\mu)$ “goes wild” and there are a lot of “accidental degeneracies” in the spectrum of the transfer matrix restricted to $\Delta_L(\mu)$.

However, a significant progress in this direction has been recently made in [23, 24]. Let us note that, as described in [23], the content of (at least some) $\Delta_L(\mu)$ ’s can be computed by repeated applications of Frobenius reciprocity applied to the short exact sequence of [14] describing the structure of the induced modules $B_{L+1}(N) \otimes_{B_L(N)} \Delta_L(\mu)$.

In the end we recall the basic results for the Temperley Lieb algebra, to allow a quick comparison with Brauer. Temperley Lieb algebra diagrams are a subset of Brauer algebra diagrams subject to the constraint that no intersections between edges are allowed. The dimension of the algebra is given by the Catalan numbers $(2L)!/L!(L+1)!$. The main line of reasoning for finding generically irreducible modules follows the same way, except there is no available action of the symmetric group on vertical lines. Therefore, the analogue of the labeled graphs will be the partial diagrams, in which no free points may be trapped inside an edge. The number

⁶We adopt here the physicist’s habit of calling indecomposable a module which is reducible though not fully reducible. Therefore the set of indecomposables does not contain the irreducibles, unlike in most of the math literature.

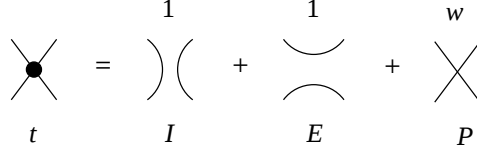


Figure 8: Possible vertex of interactions in the loop model.

of such graphs is $C_{L-1}^n - C_{L-1}^{n-2}$, where $n = (L - m)/2$ is the number of edges. The generically irreducible modules $D_L(m)$ are parametrized by the number $m = L, L - 2, \dots$ of free points in the graphs.

The presented facts about the Brauer algebra should be enough to understand the loop gas reformulation of $\text{OSp}(R|2S)$ spin model, which we give in the next section.

3.3 Loop reformulation of $\text{OSp}(R|2S)$ spin models: the algebraic point of view

The emergence of dense intersecting loops becomes transparent if we take the local transfer matrices in the adjoint representation of the Brauer algebra. This simply amounts to replacing in eq. (3.3) the generators I, E_i and P_i defined by eq. (3.2) with the diagrams in fig. 6. The adjoint local transfer matrix is represented in fig. 8.

We now define a loop model on a diagonal lattice represented in fig. 4, with reflecting boundaries on the left and right (ie, free boundary conditions in the space direction) and identified boundaries on the top and bottom (quasiperiodic boundary conditions in the time direction.) The states of this model are coverings of the lattice with dense *intersecting* loops. Dense means that every edge on the lattice necessarily belongs to a loop. Avoiding loop vertices have weight 1 and intersections come with weight w . There are two possible ways for a line to close in a loop. The first one comes from the graphical representation of the relation $E^2 = NE$ in fig. 9. We call such loops *bulk* loops. Clearly the fugacity of bulk loops is fixed to N by the Brauer algebra. The second possibility is that the ends of the line close in the identified points of the top and bottom boundaries of the lattice. We call such loops *cycles*. The boundary condition we consider have an annulus geometry and, thus, a cycle can be either *contractible* or *uncontractible*. The fugacity of cycles is not fixed by the algebra. In fact, as we explain below, this is exactly the degree of freedom allowing for multiple mappings from the $\text{OSp}(R|2S)$ spin models with $R - 2S = N$ fixed and the dense intersecting loop model with fugacity N for loops.

We start by evaluating the trace $\text{tr}_{V^{\otimes L}} d$ of a diagram d in the spin representation and then we generalize the result for quasiperiodic boundary conditions given by $\text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} d$. We follow the same line of reasoning as in [13].

A cycle in a diagram d is the subgraph on the set of points belonging to a loop if we identify its top and bottom vertices. By an abuse of language we call the corresponding loop also cycle. If we put a diagram d_1 to the left of a diagram d_2 we get a new diagram which we denote $d_1 \otimes d_2$. Let $c_1, \dots, c_l$ be the cycles in d . We can separate them by permuting the top and bottom vertices of d with the same permutation π

$$\pi * d * \pi^{-1} = c_1 \otimes \dots \otimes c_l.$$

Thus the trace of a diagram depends only on the weights of cycles

$$\text{tr}_{V^{\otimes L}} d = \text{tr } c_1 \dots \text{tr } c_l.$$

More than that, the weight of a cycle depends only on how many times it winds the annulus.

Indeed, if a cycle on $2m$ points has no horizontal lines, then, by applying the same permutation to the top and bottom vertices we can bring it to the cycle $P_1 \dots P_{m-1}$. This is because permutations with one cycle are conjugate in $\text{Sym}(m)$.

If a cycle c has a horizontal edge between the first and the second vertex in the top then it has the same weight as a certain cycle c' on four points less than c

$$\text{tr } c = \frac{1}{N} \text{tr } E_1 * c = \frac{1}{N} \text{tr } c * E_1 = \frac{1}{N} \text{tr } E_1 \otimes c' = \text{tr } c'. \quad (3.9)$$

If we compare the c on the left with c' on the right it is clear that, in the end of the iterative application of

$$- \text{---} \bigcirc \text{---} = N \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Figure 9: Emergence of bulk loops.

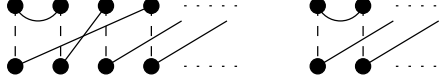


Figure 10: Contraction of a cycle on an annulus. The broken vertical lines connect the dots “behind” the annulus.

eq. (3.9), the final cycle can be interpreted as being the initial cycle c maximally contracted on the annulus as represented in fig. 3.3

In the end, the only weights we need to compute explicitly are that of the cycles E and $P_1 \dots P_{m-1}$

$$\text{tr}_{V^{\otimes 2}} E = J_{i_1 i_2} J^{i_1 i_2} = N$$

$$\text{tr}_{V^{\otimes m}} P_1 \dots P_{m-1} = (-1)^{g(i_1)(g(i_2)+\dots+g(i_m))} \delta_{i_1=\dots=i_m} = R + (-1)^{m+1} 2S.$$

For boundary conditions twisted by the matrix $D \in \text{OSp}(R|2S)$ the generalized weights are computed to be

$$\begin{aligned} \text{str}_{V^{\otimes 2}} D^{\otimes 2} E &= N \\ \text{str}_{V^{\otimes m}} D^{\otimes m} P_1 \dots P_{m-1} &= \text{str } D^m. \end{aligned} \quad (3.10)$$

In the fundamental representation, every supermatrix D is diagonalizable. The diagonal form of $D \in \text{OSp}^+(R|2S)$ in the fundamental representation is determined by exponentiating elementary weights ϵ_i and δ_j introduced in sec. A.1. Thus, D restricted to V_0 has eigenvalues $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}, (x_{r+1} = 1)$ and restricted to V_1 has eigenvalues $y_1, y_1^{-1}, \dots, y_S, y_S^{-1}$. The braces in (x_{r+1}) mean that x_{r+1} appears for odd R only. Eq. (3.10) can now be rewritten

$$\text{str } D^m = \sum_{i=1}^r (x_i^m + x_i^{-m}) + (1) - \sum_{j=1}^S (y_j^m + y_j^{-m}). \quad (3.11)$$

For $D \in \text{OSp}^-(R|2S)$ only the eigenvalues in V_0 change with respect to the previous case. There are of the form $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}, x_{r+1} = -1$ for R odd, while for R even $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_{r-1}, x_{r-1}^{-1}$ and $x_r = 1, x'_r = -1$. Instead of eq. (3.11) one has now

$$\begin{aligned} \text{str } D^m &= \sum_{i=1}^r (x_i^m + x_i^{-m}) + (-1)^m - \sum_{j=1}^S (y_j^m + y_j^{-m}), & R \text{ odd} \\ \text{str } D^m &= \sum_{i=1}^{r-1} (x_i^m + x_i^{-m}) + 1 + (-1)^m - \sum_{j=1}^S (y_j^m + y_j^{-m}), & R \text{ even.} \end{aligned}$$

To summarize the basic results in this section, let $\mathcal{G}$ be a dense loop covering of the lattice, I be the number of intersections, B be the number of bulk loops, C be the number of contractible loops (cycles) and $E(O)$ be the number of loops winding the annulus an even(odd) number of times.

On the annulus the trace partition function (which would correspond to antiperiodic boundary conditions in the (imaginary) time direction) of the $\text{OSp}(R|2S)$ spin model may be reformulated as a dense intersecting loop model in the following way

$$Z = \sum_{\mathcal{G}} w^I N^{B+C+E} (R + 2S)^O. \quad (3.12)$$

We see that it does depend on R, S separately and not only on N .

Meanwhile the supertrace partition function (which would correspond to periodic couplings) reads

$$Z = \sum_{\mathcal{G}} w^I N^L,$$

where $L = B + C + E + O$ is the total number of “loops” and, since it depends on N only, is the same as for the $O(N)$ model. One can say that taking the supertrace in the partition function is equivalent to restricting the $OSp(R|2S)$ supersymmetry of the spin model to a, smaller, $O(N)$ symmetry.

Denote the spectrum of the transfer matrix of the $OSp(R|2S)$ spin model by $\Sigma_S(N)$. We have the following important inclusion property

$$\Sigma_0(N) \subset \Sigma_1(N) \subset \Sigma_2(N) \subset \dots \quad (3.13)$$

The only difference between the $OSp(R|2S)$ and $OSp(R-2|2S-2)$ quasiperiodic partition functions is the weight of uncontractible cycles. For $D \in OSp(R|2S)$ a matrix with eigenvalues $x_i = 1$ and $y_j = -1$, except $y_1 = 1$, the weight of uncontractible cycles is, according to eq. (3.11) either N or $R + 2S - 4$. Notice that these are exactly the weights of uncontractible cycles in the trace partition function for the $OSp(R-2|2S-2)$ spin model, which proves eq. (3.13).

We will use the inclusion property (3.13) in the next section to derive some information about the indecomposable representations of $OSp(R|2S)$ appearing in the decomposition of $V^{\otimes L}$.

4 Decomposition of $V^{\otimes L}$

The general idea advocated in [7] is that there is a deep relationship between the decomposition of the lattice Hilbert space in terms of representations of the symmetry (here an orthosymplectic Lie algebra) and its commutant (here the Brauer algebra), and the corresponding decomposition in the continuum limit. In this limit, the commutant algebra is expected to become the chiral algebra of the conformal field theory. A detailed analysis of how the representations of this commutant algebra in the lattice model mix due to indecomposability gives precious indications of the way representations of the chiral algebra mix in the logarithmic conformal field theory. The discussion below offers such an analysis, which is used extensively in the next paper. The reader interested only in the result can go directly to the summary at the end of the last subsection.

Another interesting question in dealing with supergroups is how the different possibilities afforded by supersymmetry (that is, with the same difference between the number of bosons and fermions) give rise to different theories when the number of bosons increases. While this increase obviously adds observables, there seems to be a clear pattern to the kind of representations these observables live in - roughly, into projectives. This more technical aspect is also discussed below and in the conclusion (but can be skipped at first reading).

4.1 General results

Assume the transfer matrix be a generic element of $B_L(N)$. The action of $B_L(N)$ on the tensor space $V^{\otimes L}$ was defined in the beginning of sec. 3.2. The complete picture of the reducibility of the transfer matrix can be conveniently encoded in the decomposition of $V^{\otimes L}$ into a direct sum of $B_L(N)$ indecomposable modules

$$V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_{\lambda \in Y_L(S)} m_\lambda \mathcal{I}B_L(\lambda), \quad (4.1)$$

where m_λ denotes the multiplicity of isomorphic indecomposable $B_L(N)$ modules $\mathcal{I}B_L(\lambda)$ (it does not depend on L), and the set $Y_L(S)$ is defined implicitly by the formula, and will be defined explicitly below. We remind the reader that $V^{\otimes L}$ is not necessarily a semisimple $B_L(N)$ module if $L > N$, so the modules $\mathcal{I}B_L(\lambda)$ appearing on the rhs of eq. (4.1) can be reducible.

The question of computing degeneracies of eigenvalues of the spin transfer matrix is easier to treat by looking at the centralizer $Z := \text{End}_{B_L(N)} V^{\otimes L}$, which acts on $V^{\otimes L}$ from the left if one consider $B_L(N)$ acting from the right. The dimension of indecomposable modules $IG(\mu)$ in the decomposition of $V^{\otimes L}$ as a Z -module

$$V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_{\mu \in X_L(S)} n_L^\mu IG(\mu) \quad (4.2)$$

will give the desired degeneracies. This is due to the fact that n_L^μ are dimensions of simple $B_L(N)$ modules $B_L(\mu)$ appearing as constituents of $\mathcal{I}B_L(\lambda)$ in eq. (4.1), while m_λ are dimensions of simple G modules $G(\lambda)$ appearing as constituents of $IG(\mu)$ in eq. (4.2). Taking the character of both eqs. (4.1,4.2) one can see that the number

$b(\lambda, \mu)$ of irreducible components $B_L(\mu)$ in $IB_L(\lambda)$ is equal to the number $g(\mu, \lambda)$ of irreducible components $G(\lambda)$ in $IG(\mu)$.

Because the action of $\text{osp}(R|2S)$ commutes with $B_L(N)$ we have that $\text{osp}(R|2S) \subset Z$. However, when $V^{\otimes L}$ is semisimple it follows from the Wedderburn decomposition theorem that $Z \simeq \mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(R|2S)$. In the following we suppose that there is still a Schur duality between $\text{osp}(R|2S)$ and the quotient of $B_L(N)$ faithfully represented on $V^{\otimes L}$. This allows us to give an algorithm to compute the lhs of eqs. (4.1,4.2) for small tensor powers L and get some intuition about the general structure of $IB_L(\lambda)$ and $IG(\mu)$.

The set of partitions $X_L = \{\mu \vdash L - 2k \mid k = 0, \dots, [L/2]\}$ labels $B_L(N)$ irreps, while $X_L(S) \subset X_L$ selects those of them which do realize on the tensor space $V^{\otimes L}$. Denote by $J(S) \subset B_L(N)$ the double sided ideal defined by $V^{\otimes L} \cdot J(S) = 0$. The annihilator $J(0)$ is diagrammatically described in [20]. Under the homomorphism $\rho : B_L(N) \rightarrow B_L(N)/J(S)$, the indecomposable modules $\Delta_L(\mu)$ give rise to induced modules $\delta_L(\mu) = \Delta_L(\mu)/J(S) \cdot \Delta_L(\mu)$. Clearly, $\delta_L(\mu)$ is a tensor representation and can be generated by trace subtraction and symmetrization as

$$V^{\otimes L} \mathcal{T}_{L-2k} e_\mu E_{L-2k} \dots E_{L-1}, \quad (4.3)$$

where $\mu \vdash L - 2k$, $\mathcal{T}_{L-2k} \in B_L(N)$ extracts all the traces from the tensor space $V^{\otimes L-2k}$ and e_μ acts nontrivially only on $V^{\otimes L-2k}$ as a Young symmetrizer. The double sided ideal $J(S)$ is completely characterized by the set of weights $X_L(S) = \{\mu \in X_L \mid J(S) \cdot B_L(\mu) = 0\}$. Note that $X_L(S) \subset X_{L+2k}(S)$, $k \geq 1$. The surviving indecomposable tensor modules $\delta_L(\mu)$ are given by $\Delta_L(\mu)$ with irreducible components $B_L(\nu)$, $\nu \notin X_L(S)$ removed. The quotient $B_L(N)/J(S)$ can be carried out by imposing the vanishing of all words $W_\mu := \mathcal{T}_{L-2k} e_\mu \in B_L(N)$ with $\mu \in X_L/X_L(S)$. It is useful to notice that not all of these conditions are independent and as one can see from eq. (4.3) $W_\mu = 0 \Rightarrow W_\nu = 0$ if $\mu \subset \lambda$.

As discussed in sec. A.1 and A.2, the $\text{osp}(R|2S)$ irreducible components of $IG(\mu)$ are indexed (up to an equivalence under the action of the outer automorphism τ induced by the symmetry of the Dynkin diagram of $\text{osp}(R|2S)$ when R even) by the set $H_L(S) = \{\lambda \in X_L(S) \mid \lambda_{r+1} \leq S\}$ of hook shape partitions. Representing the supergroup as a semidirect product $\text{OSp}(R|2S) = \mathbb{Z}_2 \times \text{OSp}^+(R|2S)$, the elements of $Y_L(S)$ naturally acquire the structure of a couple of the form $1 \times \lambda$ or $\varepsilon \times \lambda$ if $\lambda_S < r$ and $\tau \times \lambda$ if $\lambda_S \geq r$, where $1, \varepsilon, \tau$ are the trivial, alternating (superdeterminant) and two dimensional representations of $\mathbb{Z}_2 = \text{OSp}(R|2S)/\text{OSp}^+(R|2S)$. Thus, every $\lambda \in H_L(S)$ gives rise to two $\text{OSp}(R|2S)$ inequivalent irreps with highest weights $\lambda := 1 \times \lambda$ and the associate $\lambda^* := \varepsilon \times \lambda$ if $\lambda_S < r$ and a single self-associate irreps of highest weight $\lambda = \lambda^* := \tau \times \lambda$ if $\lambda_S \geq r$. For typical $\lambda \in H_L(S)$, one can realize the $\text{OSp}(R|2S)$ irreps λ, λ^* on tensors $T_L(\lambda), T_L(\lambda^*)$ and describe their symmetry by some Young tableaux. As discussed in details in sec. B, the Young tableau corresponding to $T_L(\lambda^*)$ can be constructed by adding a border strip to the Young tableau of shape λ corresponding to $T_L(\lambda)$. Ultimately, this is justified by the fact that eq. (4.5,4.6) gives the right characters for $T_L(\lambda), T_L(\lambda^*)$ and that they coincide up to $\text{sdet} D$. Although atypical representations cannot be realized as tensor representations we represent the associate weight λ^* of an atypical weight λ by a Young tableau such that λ^*/λ is a skew partition described in sec. B and sec. C.

The idea is to exploit the fact that the characters of indecomposable modules $\Delta_L(\mu)$, given in [13], do not depend on the semisimplicity of $B_L(N)$. This and some properties of generalized Schur functions, which are summarized in [15], can be used to prove that

$$\text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} d = \sum_{\mu \in X_L} sc_\mu(D) \chi'_\mu(d), \quad (4.4)$$

is true even for all L . Here $\chi'_\mu(d)$ is the character of $d \in B_L(N)$ in the representation provided by $\Delta_L(\mu)$. The functions $sc_\mu(D)$ are polynomials in the eigenvalues of $D \in \text{OSp}(R|2S)$, which were introduced for the first time by Bars in [25] in an early attempt to describe the supercharacters of $\text{OSp}(R|2S)$. They can be defined recursively as

$$sc_n(D) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^{n-1}} \right) \frac{1}{\text{sdet}(1 - zD)}, \quad (4.5)$$

and

$$sc_\mu(D) = \frac{1}{2} \det \left(sc_{\mu_j - i - j + 2}(D) + sc_{\mu_j + i - j}(D) \right). \quad (4.6)$$

For $L \leq N$ the Brauer algebra $B_L(N)$ is semisimple and $J = 0$. Consequently, $\Delta_L(\mu)$ are irreducible and $X_L = X_L(S)$. Because of the commuting actions of $\text{OSp}(R|2S)$ and $B_L(N)$ one can naturally consider $V^{\otimes L}$ as a

$\text{OSp}(R|2S)$ - $B_L(N)$ -bimodule, with $\text{OSp}(R|2S)$ acting from the left and $B_L(N)$ from the right. Then, eq. (4.4) can be understood as a consequence of the decomposition

$$V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_{\mu \in X_L} G(\mu) \otimes \Delta_L(\mu), \quad L \leq N \quad (4.7)$$

with sc_μ being actual characters of tensor irreducible modules $G(\mu)$ as shown in [15].

For R, S such that $L > N$, the polynomials sc_μ cannot generally be interpreted as the character of some $\text{OSp}(R|2S)$ representation. As we have seen in sec. 3.3, $\text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} d$ can be brought to the form $N^h \prod_m \text{str}_V D^m$ and eq. (4.4) is not more than a simple equality between two polynomials in eigenvalues of D . Moreover, the two eqs. (4.2, 4.4) are still compatible, even if there are much more elements in X_L than in $X_L(S)$. This is possible because sc_μ are not functionally independent when $L > N$. Then, for $\mu \notin Y_L(S)$ the polynomials sc_μ can be written in terms of functionally independent sc_λ with $\lambda \in Y_L(S)$ by means of modification rules for characters

$$sc_\mu = \sum_{\lambda \in Y_L(S)} a(\mu, \lambda) sc_\lambda \quad (4.8)$$

given in [26] and discussed in details in sec. C.

The fundamental eq. (4.4) is useful for small widths L , when it is possible to compute the number $b'(\mu, \nu)$ of irreducible components $B_L(\nu)$ in $\Delta_L(\mu)$ either by repeated applications Frobenius reciprocity, as explained in [23], or by numerically diagonalizing the transfer matrix of sec. (3.1) in the adjoint representation of $B_L(N)$ and detecting the “accidental degeneracies” in its spectrum. Indeed, from the explicit definition (3.7) it is clear how to restrict the adjoint transfer matrix to indecomposable modules $\Delta_L(\mu)$. After we described in details the action of generators on the basis of $\Delta_L(\mu)$ in sec. 3.2, the algorithm of a numerical diagonalization is straightforward.

The information about the structure of $\Delta_L(\mu)$ and the modification rules in eq. (4.8) can now be used to bring eq. (4.4) to the form

$$\text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} d = \sum_{\substack{\mu, \nu \in X_L \\ \lambda \in Y_L(S)}} a(\nu, \lambda) b'(\nu, \mu) sc_\lambda(D) \chi_\mu(d). \quad (4.9)$$

We see that $\mu \in X_L(S)$ iff⁷ there is at least one $\lambda \in Y_L(S)$ such that $\sum_\nu a(\nu, \lambda) b(\nu, \mu) \neq 0$. To determine $g(\mu, \lambda)$ one has to decompose the factor of χ_μ in eq. (4.9) as a sum of $\text{OSp}(R|2S)$ irreducible characters, which are explicitly known, as far as we know, only for $\text{OSp}(3|2)$ and $\text{OSp}(4|2)$. Given the huge order of the set of weights X_L , it may seem that calculations according to eq. (4.9) are extremely cumbersome already for small L . The simplifying point is that $a(\nu, \lambda)$ (or $b'(\nu, \mu)$) is non zero only if both weights are in the same equivalence class of $Y_L(S)$ (or $X_L(S)$). The splitting of $Y_L(S)$ (or $X_L(S)$) into equivalence classes, called *blocks* and described in details in sec. B, is with respect to an equivalence relation between irreducible components of indecomposable $\text{OSp}(R|2S)$ (or $B_L(N)$) modules.

An important consequence of the fact that $\text{OSp}(R|2S)$ supertrace partition functions depends only on the $O(N)$ part of the spectrum is the vanishing of the superdimension $\text{sdim } IG(\mu) = 0$ for all indecomposable modules with $\mu \notin X_L(0)$. A more restrictive criterion for $IG(\mu)$ supercharacters deriving from the full inclusion sequence in eq. (3.13) can be derived by taking a matrix D with eigenvalues $x_1 = y_1$ and $x_i \neq y_j$ for $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, S$. Then, it can be seen from eqs. (3.11, 3.12) or eqs. (4.5, 4.6, 4.4) that any $\text{OSp}(R|2S)$ quasiperiodic partition function will also be an $\text{OSp}(R - 2|2S - 2)$ quasiperiodic partition function. As a consequence $X_L(0) \subset X_L(1) \subset \dots \subset X_L(S)$ and the supercharacters of $IG(\mu)$ vanish when $\mu \in X_L(S)/X_L(S-1)$ and D can be embedded in $\text{OSp}(R - 2|2S - 2)$.

For $S = 0$ the modules $V^{\otimes L}$ is semisimple. Therefore $\text{rad } B_L(L) \subset J(0)$. On the other hand, if S is big enough $J(S) = 0$. It could be interesting to understand the relation between the sequence $J(0) \supset J(1) \supset \dots \supset J(S) = 0$ and the filtration of $B_L(N)$ by its radical $\text{rad } B_L(N) \supset \text{rad}^2 B_L(N) \supset \dots \supset 0$.

Observe that a filtration similar to that of $X_L(S)$ is available on $Y_L(S)$ by the degree of atypicality of its elements. In fact, we explain in sec. B of the appendix how the weights in a block of $X_L(S)$ or $Y_L(S)$ can be organized by the number of *removable balanced continuous border strips* in the corresponding Young tableau. This number can be interpreted as the degree of atypicality when the corresponding partition represents an $\text{OSp}(R|2S)$ weight.

⁷Although $sc_\lambda, \lambda \in H_L(S)$ are not irreducible $\text{osp}(R|2S)$ characters, one can still use them as a basis for representing the character of any representation.

4.2 O(2) spin model

Let V be a two dimensional vector space endowed with an action of $O(2, \mathbb{R})$. The action of $O(2)$ on the tensor space $V^{\otimes L}$ is

$$D \cdot V^{\otimes L} = \underbrace{DV \otimes \cdots \otimes DV}_L, \quad D \in O(2).$$

$B_L(2)$ acts according to the following definition of generators E_i, P_i

$$\begin{aligned} E_i &= \underbrace{1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2}_{i-1} \otimes E \otimes 1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2 \\ P_i &= \underbrace{1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2}_{i-1} \otimes P \otimes 1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2, \end{aligned}$$

where P, E have the following representation on $V^{\otimes 2}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

(note that E differs in some essential way from the projection operator onto the singlet representation in the usual $SU(2)$ basis). The decomposition of $V^{\otimes L}$ as a $O(2)$ - $B_L(2)$ -bimodule is simply

$$V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_{\mu \in X_L(0)} G(\mu) \otimes B_L(\mu). \quad (4.11)$$

Here

$X_L(0)$ is composed of partitions $\mu_0 = \emptyset, \mu_{0^*} = 1^2$, and $\mu_k = k, k \geq 1$.

The tensor representations $G(\mu_k)$ are irreducible with dimensions $\dim G(\mu_k) = 1, k = 0, 0^*$ and $\dim G(\mu_k) = 2, k \geq 2$. The representation $G(\mu_0)$ is the trivial one and $G(\mu_{0^*})$ is the associate one dimensional $\det D$ representation. At the restriction to $SO(2) \simeq U(1)$ the representations $G(\mu_0)$ and $G(\mu_{0^*})$ become equivalent, while $G(\mu_k), k \geq 1$ splits into two nonequivalent one dimensional representations $e^{\pm ik\phi}$ where ϕ is the $U(1)$ angle. The $B_L(2)$ representations $B_L(\mu)$ are irreducible as well and are constructed by acting with $B_L(2)$ on the tensor module in eq. (4.3). The dimensions of simple modules $B_L(\mu_k)$ are easily computed by looking at the first row of C^L , where C is the fusion matrix

$$G(\mu_k) \otimes V \simeq \bigoplus C_{k,l} G(\mu_l) \quad (4.12)$$

described by a D_L type Dynkin diagram with labeling of the nodes shown in fig. 11. It is not hard to solve the recurrence relations satisfied by $d(L, k) := \dim B_L(\mu_k)$

$$\begin{aligned} d(L+1, 0) &= d(L+1, 0^*) = d(L, 1), \\ d(L+1, 1) &= 2d(L, 0) + d(L, 2), \\ d(L+1, k) &= d(L, k+1) + d(L, k-1), \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

and get that $d(L, k) = C_L^{[L/2]+k}$ except the case when L is even and $k = 0$ for which $d(L, 0) = d(L, 0^*) = C_L^{L/2}/2$. These are, as expected, the number of eigenvalues of the transfer matrix for the 6 vertex model in the sector of spin $s_z = k/2$.

We are interested in giving an algebraic description of the 6 vertex model transfer matrix algebra. In other words we want to identify the Brauer algebra annihilator $J := J(0)$ of $V^{\otimes L}$ and carry out the quotient $B_L(2)/J$.

All the $B_L(2)$ weights $\lambda \in X_L$ such that $\mu_k \subset \lambda$ satisfy either $\nu_0 = 1^3 \subseteq \lambda$ or $\nu_1 = 21 \subseteq \lambda$. Thus, it is enough to consider $L = 3$ and impose the vanishing of the double sided ideal of the word $W_0, W_1 \in B_L(2)$ projecting onto $\Delta_3(\nu_i), i = 0, 1$. As explained in the beginning of the previous section $W_i = \mathcal{T}_3 e_{\nu_i}$, where $\mathcal{T}_3$ extracts all the traces from $V^{\otimes 3}$ and e_{ν_i} are the Young symmetrizers corresponding to ν_i .

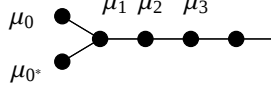


Figure 11: Edges in the graph represents nonzero elements of the fusion matrix C .

The projector $\mathcal{T}_3$ can be found by looking at the form of an arbitrary tensor G_{ijk} after extracting all of its traces

$$G_{ijk} - \frac{\delta_{ij}}{4} (3G_{..k} - G_{k..} - G_{.k.}) - \frac{\delta_{ik}}{4} (3G_{.j.} - G_{j..} - G_{..j}) - \frac{\delta_{jk}}{4} (3G_{i..} - G_{.i.} - G_{..i}),$$

which gives

$$\mathcal{T}_3 = 1 - \frac{1}{4} (3E_1 - E_2E_1 - P_2E_1) - \frac{1}{4} (3P_1E_2P_1 - E_1P_2 - E_2P_1) - \frac{1}{4} (3E_2 - E_1E_2 - P_1E_2)$$

and clearly $\mathcal{T}_3E_1 = \mathcal{T}_3E_2 = \mathcal{T}_3P_1E_2P_1 = 0$.

The Young symmetrizer e_{v_0} is

$$e_{v_0} = \frac{1}{6} (1 + P_1P_2 + P_2P_1 - P_1 - P_2 - P_1P_2P_1)$$

and $e_{v_1} = e_{T_1} + e_{T_2}$, where

$$e_{T_1} = \frac{1}{3} (1 - P_1P_2P_1) (1 + P_1)$$

$$e_{T_2} = \frac{1}{3} (1 - P_1) (1 + P_1P_2P_1)$$

are the projectors onto the *standard* Young tableau $T_1 = [12, 3]$ and $T_2 = [13, 2]$. The two orthogonal projectors e_{T_1} and e_{T_2} are independent only if we restrict to the right $B_L(2)$ action. In fact, the left ideal of the word $W_1 = 0$ is the same as the double sided ideal of the word $\mathcal{T}_3e_{T_1} = 0$.

The condition $W_0 = 0$ gives the following restriction

$$1 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2 + P_1P_2P_1 \quad (4.13)$$

on generators P_1, P_2 . Putting $P_i = 1 - Q_i, i = 1, 2$ one can see that eq. (4.13) implies that Q_i are Temperley Lieb operators with $Q_i^2 = 2Q_i$. There are no more restrictions that can be drawn from the conditions $W_0 = 0$, because W_0 is a one dimensional projector.

Before exploring the next vanishing condition let us revise the the defining relations of $B_L(2)$ given in eq. (3.6)

$$E_iP_i = P_iE_i = E_i \quad \Rightarrow \quad Q_iE_i = E_iQ_i = 0 \quad (4.14)$$

$$P_iP_{i+1}E_i = E_{i+1}E_i \quad \Rightarrow \quad Q_iQ_{i+1}E_i = E_{i+1}E_i + Q_{i+1}E_i - E_i \quad (4.15)$$

$$E_{i+1}P_iP_{i+1} = E_{i+1}E_i \quad \Rightarrow \quad E_{i+1}Q_iQ_{i+1} = E_{i+1}E_i + E_{i+1}Q_i - E_{i+1}, \quad (4.16)$$

which imply

$$E_iQ_{i\pm 1}E_i = E_i \quad (4.17)$$

$$Q_iQ_{i+1}E_i = Q_iE_{i+1}E_i \quad (4.18)$$

Observe that although the algebra has now two Temperley Lieb operators their role is not symmetric yet at this stage.

Next, the condition $\mathcal{T}_3e_{T_1} = 0$ implies

$$1 + P_1 - P_1P_2P_1 - P_1P_2 = 2E_1 + E_2 - E_1E_2 - 2E_2E_1 - E_1P_2 + E_2P_1$$

which after inserting $P_i = 1 - Q_i$ with the help of eqs. (4.15,4.18) becomes

$$Q_1 + 2Q_2 - Q_2Q_1 - 2Q_1Q_2 = E_1 + 2E_2 - 2E_2E_1 - E_1E_2 + E_1Q_2 - E_2Q_1. \quad (4.19)$$

Multiplying eq. (4.19) by Q_2 on the right we get:

$$E_2Q_1Q_2 = E_2E_1 + E_2Q_1 - E_2 = E_1Q_2 + Q_1Q_2 - Q_2 = E_2E_1Q_2. \quad (4.20)$$

which can be used to rewrite eq. (4.19) as

$$Q_1Q_2 + Q_2Q_1 - Q_1 - Q_2 = E_1E_2 + E_2E_1 - E_2 - E_1. \quad (4.21)$$

Multiplying by E_i, Q_i on the left and on the right of eq. (4.21) and using only the relations between Q_i , the relations between E_i and eq. (4.14) one can get all the eqs. (4.15–4.20) and also

$$\begin{aligned} Q_1E_2E_1 &= Q_1Q_2 + Q_1E_2 - Q_1 = E_2E_1 + Q_2E_1 - E_1 = Q_1Q_2E_1 \\ Q_1E_2Q_1 &= Q_1 \end{aligned}$$

which establish a complete symmetry between E_i and Q_i .

The double sided ideal of $\mathcal{T}_3\mathcal{C}_{T_1} = 0$ is composed of four linearly independent words — two generated by the left action and other two generated by the right action of $B_L(2)$. It is useful to note that after taking the quotient of $B_3(2)$ we are left with 10 independent words instead of 15, which is exactly what we need for the 6 vertex local transfer matrix.

We give the following abstract definition to the 6 vertex model transfer matrix algebra $\mathcal{V}_L := \text{End}_{\mathcal{O}(2)} V^{\otimes L}$ in term of generators E_i, Q_i

$$E_i^2 = 2E_i, \quad E_iE_{i\pm 1}E_i = E_i, \quad Q_i^2 = 2Q_i, \quad Q_iQ_{i\pm 1}Q_i = Q_i \quad (4.22)$$

$$E_iQ_i = Q_iE_i = 0 \quad (4.23)$$

$$Q_iQ_{i+1} + Q_{i+1}Q_i - Q_i - Q_{i+1} = E_iE_{i+1} + E_{i+1}E_i - E_i - E_{i+1} \quad (4.24)$$

$$E_iE_j = E_jE_i, \quad Q_iQ_j = Q_jQ_i, \quad E_iQ_j = Q_jE_i$$

$$|i - j| > 1, \quad i, j = 1, \dots, L - 1$$

The defining relations are symmetric under the transposition T , which changes the multiplication order, under the reflection $R : E_i \rightarrow E_{L-i}$ and under the involution $E^* = Q$. Thus, if $W = 0$ then $W^T = 0$, $W^R = 0$ and $W^* = 0$ is also true for any word $W \in \mathcal{V}_L$.

Introducing the operators $S_i = 1 - E_i - Q_i$, with the property $S_i^2 = 1$, one can rewrite eq. (4.20) as

$$Q_{i+1} = S_iE_{i+1}S_i.$$

Thus, one can eliminate all of the generators $Q_i, i \geq 2$ and leave only Q_1 subject to satisfy

$$\begin{aligned} Q_1E_1 &= E_1Q_1 = 0, \quad Q_1^2 = 2Q_1 \\ Q_1E_2Q_1 &= Q_1, \quad E_2Q_1E_2 = E_2 \\ Q_1E_j &= E_jQ_1, \quad j \geq 3. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Denote by d_L the extension of the ordinary Temperley Lieb algebra, generated by E_i , with the additional generator Q_1 satisfying eqs. (4.25). We see that d_L and $\mathcal{V}_L$ are isomorphic algebras. The graphical interpretation for the reduced words (products of generators of minimum length) of d_L and its relation to the blob algebra and the Temperley Lieb algebra of type D is discussed [27]. The generators E_i are diagrammatically represented as usual, whereas Q_1 is represented as E_1 with each of its horizontal edges marked by an *involution* blob as shown in fig. 12. An unblobbed loop is identified with 2, while a blobbed loop with 0. Thus, we see that d_L is a subalgebra of the blob algebra composed of all planar diagrams on $2L$ points with an *even* number of blobbed edges. The dimension of d_L is, as explained in [27], half the dimension of the blob algebra, that is $C_{2L}^L/2$.

There are several important consequences arising from the isomorphism between $\mathcal{V}_L$ and d_L from the point of view of integrability. First of all, we check that indeed the solution to the Yang-Baxter equation

$$R_1(u)R_2(u+v)R_1(v) = R_2(v)R_1(u+v)R_2(u) \quad (4.26)$$

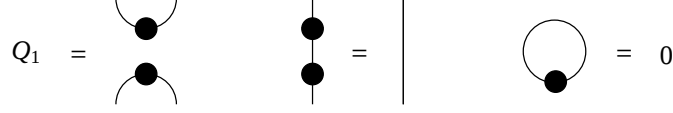


Figure 12: The generator Q_1 is represented as E_1 with its horizontal edges marked by a blobbed. The conditions satisfied by the blob are represented on the right.

provided by the algebra $\mathcal{V}_3$ coincides with the well known XXZ spin chain R -matrix.

For that, consider the ansatz $R(u) = I + f(u)Q + g(u)E$ and plug it in eq. (4.26). Choosing as basis set in $\mathcal{V}_3$ the 10 words $1, E_1, E_2, E_1E_2, E_2E_1, Q_1E_2, E_2Q_1, Q_1E_2E_1, E_1E_2Q_1$ we get two independent functional equations

$$E_1 : F(f, g) - F(g, f) = g'f - gf' + fg'' - f''g \quad (4.27)$$

$$E_2 : F(f, g) + F(g, f) = (f''g' + f'g'')(f + g), \quad (4.28)$$

where $F(f, g) = f'' + f' - f + f'f''(2 + f + g)$. The primed functions are evaluated in u , the unprimed in $u + v$ and the double primed in v . All other words provide the same third equation, which is a consequence of eqs. (4.27, 4.28). The solution to the system of eqs. (4.27, 4.28) is

$$f(u) = \frac{\sin \lambda - \sin u}{2 \sin(\lambda - u)} - \frac{1}{2} \quad (4.29)$$

$$g(u) = \frac{\sin \lambda + \sin u}{2 \sin(\lambda - u)} - \frac{1}{2}, \quad (4.30)$$

with an arbitrary constant λ . Taking Q and E in the representation provided by the eq. (4.10) we find the famous XXZ spin chain R -matrix

$$R_{XXZ}(u) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda - u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda & \sin u & 0 \\ 0 & \sin u & \sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\lambda - u) \end{pmatrix}, \quad \Delta = -\cos \lambda \quad (4.31)$$

as expected.

Clearly, an integrable system in $\mathcal{V}_L$ has to be related to an integrable system in d_L because of the isomorphism of these two algebras. However, the ansatz $R(u) = 1 + g(u)E$ plugged into the eq. (4.26) gives only the isotropic point ($\Delta = \pm 1$) solution $g(u) = u/(1 - u)$. The only possibility to give a richer content to the integrability in d_L is by introducing nontrivial boundary conditions. This means that the anisotropy of the XXZ spin chain can be generated by introducing nontrivial boundary conditions at the isotropic points, an observation made earlier from a slightly different perspective in [28].

4.3 OSp(4|2) spin model

The representation theory of the superalgebra $\mathfrak{osp}(4|2)$ is summarized in [29]. As we have already mentioned, all of $\mathfrak{osp}(4|2)$ irreducible characters have been computed and indecomposable representations classified. We give a brief reminder of these results in sec. A.3 and make some remarks, based on the general discussion in sec. A.2, on the difference between the representation theory of the supergroup $\text{OSp}(4|2)$ and its Lie superalgebra.

The tensor space $V^{\otimes L}$, seen as a $\text{OSp}(4|2)$ module, can be represented as a direct sum $V^{\otimes L} = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$ of a part “lifted” from $\text{O}(2)$

$$V^{(0)} = \bigoplus_{\lambda \in Y_L(0)} n_L^\lambda G(\lambda) \quad (4.32)$$

and a projective part

$$V^{(1)} = \bigoplus_{\lambda \in Y_L(1)/Y_L(0)} n_L^\lambda \mathcal{P}G(\lambda), \quad (4.33)$$

where $\mathcal{P}G(\lambda)$ is the projective cover of $G(\lambda)$. This decomposition can be proved by induction on L using two facts:

- The tensor product between atypical irreducible representations with highest weights labeled by one row partitions (see below) and V decomposes to ⁸

$$G(k) \otimes V \simeq G(k+1) \oplus G(k) \oplus G(k-1).$$

This is proved by counting the dimensions on the right/left hand sides and, then, observing that $G(k)$ is typical and $G(k \pm 1)$, being in different blocks, cannot give rise to indecomposables.

- The tensor product of a projective module with any other module is projective, thus, decomposing to a direct sum of projectives.

In the following we use the fundamental eqs. (4.4,4.9) to decompose $V^{\otimes L}$ as a $Z = \text{End}_{B_L(2)} V^{\otimes L}$ module and verify the assumption that $Z = \mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)$ by comparing the result to eqs. (4.32,4.33).

The conditions of atypicality for a $\text{osp}(4|2)$ weight λ are given in sec. A.3. In the partition notation we adopt, these are equivalent to

$$\lambda'_1 = 1 \text{ or } \lambda_1 + 1 = \lambda'_1 \text{ or } \lambda_2 = \lambda'_1.$$

Typical weights satisfy none of atypicality conditions listed above. Note that typical representations are irreducible, have vanishing superdimension, and are simultaneously projective and injective. This means they cannot be a constituents of any other $\text{osp}(4|2)$ representations without being a direct summand. One can say they are “their own blocks”.

The supercharacters of associate $\text{OSp}(4|2)$ irreps λ, λ^* satisfy $\text{sch}_{\lambda^*}(D) = \text{sdet } D \text{sch}_{\lambda}(D)$. For typical weights, the polynomials sc_{λ} give the right $\text{OSp}(4|2)$ irreducible character. Because of the modification rules, see sec. C, it is possible to define a partition λ_{mod} such that $sc_{\lambda_{\text{mod}}}(D) = \text{sdet}(D)sc_{\lambda}(D)$. Therefore, it is convenient to identify the associate weight $\lambda^* = \varepsilon \times \lambda$ with the partition λ_{mod} . The Young tableau of λ^* can be constructed by replacing the orthogonal part of the Young tableau of λ by its associate, that is by putting $(\lambda^*)_2' = 4 - \lambda_2'$ and leaving all other columns unchanged. For instance $(1^4)^* = 2^4$. Exceptions are the typical weights λ such that $\lambda_1' < 4 - \lambda_2'$. The only such weights are $\lambda = 1^3, 21$ or $l1, l \geq 3$ and we put $(1^3)^* = 32^3, (21)^* = 3^2 21$ and $(l1)^* = l32, l \geq 3$.

The atypical $\text{OSp}(4|2)$ weights can be labeled by two integers k and l , where k denotes the isomorphism class, also called block.

In the partition notation, the block $k = 0$ is composed of weights $\lambda_{0,0} = \emptyset, \lambda_{0,1} = (1^2)^* := 3^2 2^2$ and $\lambda_{0,l} = (l1^l)^* := l2^2 1^{l-1}, l \geq 2$. The associate block $k = 0^*$ is composed of weights $\lambda_{0^*,0} = 1^2$ and $\lambda_{0^*,1} = (\emptyset)^* := 3^4, \lambda_{0^*,l} = \lambda_{0,l}^* = l1^l, l \geq 2$.

The self associate blocks $k \geq 1$ are composed of weights $\lambda_{k,0} = k, \lambda_{k,1} = k^* := k3^2$ ($3^3 2$ for $k = 1$ and $3^3 1$ for $k = 2$), $\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}^* = kl1^{l-2}$ for $2 \leq l \leq k$ and $\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}^* = l(k+1)1^{l-1}$ for $l \geq k+1$.

With the given notation for associate weights one can check with the help of [29] the following decomposition of polynomials $sc_{\lambda_{k,l}}$ as a sum of $\text{OSp}(4|2)$ supercharacters sch

$$\begin{aligned} sc_{\lambda_{k,0}} &= \text{sch}_{\lambda_{k,0}}, \quad sc_{\lambda_{k,1}} = -\text{sch}_{\lambda_{k,3}} + \text{sch}_{\lambda_{k,1}}, \quad sc_{\lambda_{k,2}} = \text{sch}_{\lambda_{k,2}} + \text{sch}_{\lambda_{k,0}}, \\ sc_{\lambda_{k,l}} &= \text{sch}_{\lambda_{k,l}} + \text{sch}_{\lambda_{k,l-1}} + (-1)^{l-1} \text{sch}_{\lambda_{k,1}}, \quad l \geq 2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

This is done in two steps. First one show that eqs. (4.34) hold for a supermatrix D with $\text{sdet } D = 1$.⁹ At this step is yet impossible to distinguish between associate representations. In order to do so, one has to explicitly construct the elements of the enveloping Lie superalgebra connecting the maximal vectors of irreducible components of indecomposable highest weight modules and, then, look at their symmetry under the outer automorphism τ . See sec. A.3 for details.

We have just listed all the elements of $Y_L(1)$. Eq. (4.34) is a bijection between sch_{λ} and sc_{λ} . As a consequence, $\text{OSp}(4|2)$ and $B_L(2)$ weights can be labeled by the same set $Y_L(1) = X_L(1)$ in the partition notation we have adopted. This is supporting the assumption that there is some sort of exact equivalence between the category of $\text{OSp}(4|2)$ and $B_L(2)$ modules on $V^{\otimes L}$. Below all the weights are partitions and, to avoid confusion, we write $\lambda \in Y_L(1)$ if λ is considered as a $\text{OSp}(4|2)$ weight and $\lambda \in X_L(1)$ if it is considered as a $B_L(2)$ weight.

⁸Modulo irreps labeled by $\lambda \notin Y_L(0)$, this decomposition provides the same fusion matrix as eq. 4.12. Thus, $Y_L(0)$ multiplicities in $V_{4|2}^{\otimes L}$ are the same as those in $V_{2|0}^{\otimes L}$. Rather then a coincidence, this is a direct manifestation of the algebra inclusion $\text{End}_{\text{OSp}(4|2)} V_{4|2}^{\otimes L} \supset \text{End}_{\text{O}(2)} V_{2|0}^{\otimes L}$ at the level of dimensions of irreps.

⁹To compare with [29] one has to take the eigenvalues of D of the form $e^{\pm \epsilon_1}, e^{\pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3}$

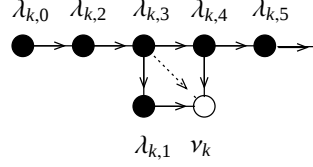


Figure 13: Two weights $\lambda_{k,l}$ and $\lambda_{k,l' \neq l}$ are connected by a continuous line iff $\lambda_{k,l} \subset \lambda_{k,l'}$ and there is no other weight between them. The weight $\lambda_{k,l}$ is connected to $\lambda_{k,l'}$ by a dotted arrow iff $\Delta_L(\lambda_{k,l})$ has an irreducible component $B(\lambda_{k,l'})$. Its multiplicity is always one.

Let us show that the terms in eq. (4.4) with $\lambda \notin Y_L(1)$ do not actually contribute to $\text{str}_{V^{\otimes L}} D^{\otimes L} d$. First note that if χ_λ cancels out from eq. (4.4) then certainly $\delta_L(\lambda)$ in eq. (4.3) is a trivial module. Therefore any module $\delta_L(\nu)$ will also be trivial if $\lambda \subset \nu$. Second, if χ_λ does not contribute to eq. (4.4) when $\lambda \vdash L$ then it does not contribute to it for any L . Thus, it is enough to prove for every k that the weights just greater (by inclusion) then $\lambda_{k,l}$ do not contribute to eq. (4.4) when they are allowed for the first time to appear.

Let $\lambda \in Y_L(1)$ be a typical (associate) weight. Then, as we show in sec. B, $\lambda \in X_L(1)$ is a minimal partition (with respect to the inclusion in its block). There will be a unique weight $\nu \notin Y_L(1)$ just greater than λ and, *a priori*, sc_ν can modify to $\pm sc_\lambda$. It is proved by induction in sec. C that a positive sign would imply atypicality conditions on λ and, thus, $sc_\nu = -sc_\lambda$. Moreover, from [23] we know that $\Delta_L(\lambda)$ has one composition factor $B_L(\nu)$. Taking $L = |\nu|$, we see that the contribution to eq. (4.4) of χ_ν from $\Delta_L(\lambda)$ cancels out with the one from $\Delta_L(\nu)$.

Before proceeding to nontrivial blocks we need to know the number of irreducible components $B_L(\lambda_{k,l'})$ in $\Delta_L(\lambda_{k,l})$. According to [23], the graph representing the partial ordering (by inclusion) of weights in a block k determines the *required information* about the content of modules $\Delta_L(\lambda_{k,l})$. The ordering graph is represented in fig. 13.

Now, let $\lambda_{k,l} \in Y_L(1)$ be an atypical (associate) weight. Then, any weight $\nu \notin X_L(1)$ such that $\lambda_{k,l} \subset \nu$ satisfies $\nu_k \subseteq \nu$, with ν_k represented by a white dot in fig. 13. The explicit form of ν_k is $\nu_0 = 432^2 1, \nu_{0^*} = 43^3 1, \nu_1 = 43^2 21, \nu_2 = 43^2 1^2, \nu_3 = 4^2 31^2$ and $\nu_k = k431, k \geq 4$. Next, one can check with the help of modification rules that

$$sc_{\nu_k} + sc_{\lambda_{k,1}} + sc_{\lambda_{k,3}} + sc_{\lambda_{k,4}} = 0 \quad (4.35)$$

vanishes identically. Further, from fig. 13 each of the modules $\Delta_L(\lambda_{k,l}), l = 1, 3, 4$ has a single irreducible component $B_L(\nu_k)$. Finally, taking $L = |\nu_k|$ one can see from eq. (4.35) that the contribution of χ_{ν_k} to eq. (4.4) cancels out.

Let us introduce the compact notations $B_{k,l} := B_L(\lambda_{k,l})$ and $G_{k,l} := G(\lambda_{k,l})$. Then, putting together eq. (4.34) and fig. 13 we get from eq. (4.4) the following content of indecomposable modules $IG_{k,l}$ appearing in eq. (4.2)

$B_{k,0}$	$B_{k,2}$	$B_{k,1}$	$B_{k,3}$	$B_{k,l+1}$	
	$G_{k,0}$	$G_{k,1}$	$G_{k,2}$	$G_{k,l}$	
$G_{k,0}$	$G_{k,2}$	$G_{k,2}$	$G_{k,0} G_{k,1} G_{k,3}$	$G_{k,l-1} G_{k,l+1},$	(4.36)
	$G_{k,0}$	$G_{k,1}$	$G_{k,2}$	$G_{k,l}$	

where $l = 3, \dots, m$ and $\lambda_{k,m} \vdash L$. The indecomposable modules $IG_{k,l}$ are represented below $B_{k,l}$ and it should be understood that they get “paired up” in the decomposition of $V^{\otimes L}$ as a $\text{OSp}(4|2) \times B_L(2)$ bimodule.¹⁰ Alternative, maybe more intuitive physically, representations of the blocks will be given in the next paper.

The structure of modules $IG_{k,l}$ is in perfect agreement with eq. (4.32, 4.33). We recognize in the first term $IG_{k,0} = G_{k,0}$ of eq. (4.36) the contribution to $V^{(0)}$, while the rest of the terms are exactly the projective modules appearing in $V^{(1)}$, that is $IG_{k,2} = \mathcal{P}G_{k,0}, IG_{k,1} = \mathcal{P}G_{k,1}$ and $IG_{k,l} = \mathcal{P}G_{k,l-1}, l \geq 2$.

For typical $\lambda \in Y_L(1)$, the modules $IG(\lambda) = G(\lambda)$ are irreducible and get paired up with $B_L(\lambda)$ in the decomposition of $V^{\otimes L}$ as a $\text{OSp}(4|2)$ - $B_L(2)$ -bimodule.

¹⁰In pedantic terms, the pairing $B_{k,l}, IG_{k,l}$ can be represented by the mapping $B_{k,l} \rightarrow V^{\otimes L} \otimes_{B_L(2)} B_{k,l}$ sending $B_L(2)$ left modules to $\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)$ left modules.

Observe that, as expected, only the modules $B_{k,0}$ (which coincide with $B_L(\lambda_k)$ in eq. (4.11)) contribute to the supertrace $\text{str}_{V^{\otimes L}} d$. Indeed, typical modules $G(\lambda)$ have superdimension 0. The same is true for projective modules. One can explicitly check from eq. (4.36) that $\text{sdim } \mathcal{P}G_{k,l} = 0$ if we take into account that only $\text{osp}(4|2)$ fermionic generators connect irreducible components of indecomposable modules. For instance, $\text{sdim } \mathcal{P}G_{0,0} = \text{sdim } G_{0,0} - \text{sdim } G_{2,0} + \text{sdim } G_{0,0} = 1 - 2 + 1 = 0$.

As we have explained at the beginning of sec. 4.1, the degeneracies of the eigenvalues of the $\text{OSp}(4|2)$ spin transfer matrix are given by $\dim \mathcal{I}G(\lambda)$. We compute them in app. A.3.

Thus, in conclusion we see that $B_L(2)/J(1) = \text{End}_{\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)} V^{\otimes L}$ and, because $V^{\otimes L}$ is by definition a faithful $B_L(2)/J(1)$ module we also have $\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2) = \text{End}_{B_L(2)/J(1)} V^{\otimes L}$. In other words, the two algebras $B_L(2)/J(1)$ and $\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)$ are the full centralizers of each other on $V^{\otimes L}$.

This results allows us to relate the decomposition of $V^{\otimes L}$ as a $\text{OSp}(4|2)$ left module to the decomposition of $V^{\otimes L}$ as a $B_L(2)$ right module.

Collecting in a single indecomposable module $\mathcal{I}B_{k,l}$ all factors $B_{k,l'}$ in eq. (4.36) which correspond to (happen to be above) an irreducible component $G_{k,l}$ we get ¹¹

$$\begin{array}{cccccc}
G_{k,0} & G_{k,1} & G_{k,2} & G_{k,l-1} & G_{k,m-1} & G_{k,m} \\
B_{k,2} & B_{k,1} & B_{k,3} & B_{k,l} & B_{k,m} & \\
B_{k,0} \ B_{k,3} & B_{k,3} & B_{k,2} \ B_{k,1} \ B_{k,4} & B_{k,l-1} \ B_{k,l+1} & B_{k,m-1} & B_{k,m}, \\
B_{k,2} & B_{k,1} & B_{k,3} & B_{k,l} & B_{k,m} &
\end{array} \quad (4.37)$$

where $l = 4, \dots, m-1$ and the content of $\mathcal{I}B_{k,l}$ is represented below $G_{k,l}$.

Apart the last irreducible module $\mathcal{I}B_{k,m} = B_{k,m}$, we recognize in the terms of eq. (4.37) the projective representations of the quiver E_∞ in fig. 13, which describes the homomorphisms between the $B_L(2)$ tensor modules $\delta_L(\lambda)$ realized on $V^{\otimes L}$.

We can summarize this difficult section by discussing again one of our main result, which is the decomposition of the Hilbert space $V^{\otimes L}$ under the action of $\text{OSp}(4|2)$ as

$$\text{OSp}(4|2) V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_k D_L(k) G_{k,0} \oplus \bigoplus_{k,l} d_L(k,l) \mathcal{P}G_{k,l} \oplus \bigoplus_{\lambda \text{ typ}} d_L(\lambda) G(\lambda), \quad (4.38)$$

where $k = 0^*, 0, 1, \dots$ is a label of the block $\mathcal{B}_k$ of $\text{OSp}(4|2)$, $l = 0, 1, \dots$ is a label of the l th greatest weight in $\mathcal{B}_k$, $D_L(k)$, $d_L(k,l)$, $d_L(\lambda)$ are degeneracies, $G_{k,l}$ are atypical irreducible, $G(\lambda)$ are typical irreducible and $\mathcal{P}G_{k,l}$ are reducible projective covers of $G_{k,l}$ atypical $\text{OSp}(4|2)$ representations.

The $G_{k,0}$ are simple representations indexed by the same Young tableau as those of $\text{O}(2)$ (for a list, see after eq. (4.11)). The $G(\lambda)$ are typical; their superdimension is zero, and they behave similarly, although more simply, than the projectives $\mathcal{P}G_{k,l}$. The latter come in blocks indexed by k , which means they are related with each other by the dual action of the $\text{OSp}(4|2)$ algebra (thus implying eigenvalue degeneracies). It is convenient to put the Brauer and OSp information in a single diagram such as in fig. 14 below. Vertical arrows mean action of the Brauer algebra, horizontal ones action of the OSp symmetry. The bottom node is all there would be in the pure $\text{O}(2)$ case. The ladder of representations is what gets added when this is extended to $\text{OSp}(4|2)$. In the next paper, we will argue that all states belonging to a block have same conformal weight up to integers.

The figure is a graphical interpretation of formula (4.37) as well as formula (4.36), depending on whether one looks at it as it stands, of after a $\frac{\pi}{2}$ rotation.

5 Special cases

In this section we first write down the hamiltonian limit for the OSp loop model. Of course the general decomposition of the Hilbert space discussed in the previous section applies in this spin chain case as well. We then discuss two limits where the symmetry is enhanced to $\text{SU}(2S + 2|2S)$.

¹¹ Again this “collecting” can be represented by the functor $G_{k,l} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)}(V^{\otimes L}, G_{k,l})$ sending $\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(4|2)$ left modules to $B_L(2)$ left modules.

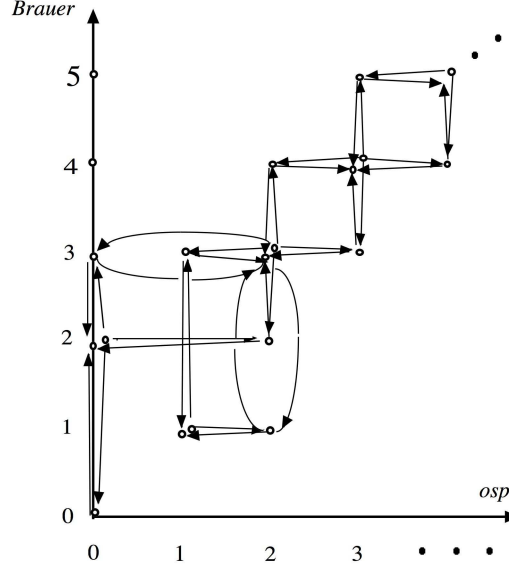


Figure 14: In the OSp lattice model case, representations within a block are all connected through combined action of Brauer and OSp

5.1 The hamiltonian

It will turn out in our forthcoming analysis of conformal properties to be easier to study numerically the hamiltonian

$$H_{\Delta} = -\frac{1+\Delta}{2} \sum_{i=1}^{L-1} (I + P_i) - \frac{1-\Delta}{2} \sum_{i=1}^{L-1} E_i.$$

The expectation — which we will confirm in great details — is that this hamiltonian will be in the same universality class as the spin model we had started with.

The hamiltonian H_{Δ} is obviously local and has only nearest neighbour interactions if the E 's and P 's are taken in the spin representation provided by eq. (3.2). However, this is no longer true if we think of H_{Δ} as an element of the adjoint representation of $B_L(2)$.

The lowest eigenvalue of H_{Δ} belongs to the $B_L(2)$ irreducible representation labeled by $\mu = L \bmod 2$.

For generic Δ it is nondegenerate if L is even and has degeneracy $\dim V = 4S + 2$ if L is odd. On the other hand, the highest eigenvalue belongs to the completely antisymmetric representation labeled by $\mu = 1^L$. In this representation the P 's act as -1 and the E 's as 0.

The hamiltonian H_{Δ} is determined up to an arbitrary additive constant and multiplicative factor. For numerical diagonalization it is convenient to fix the additive constant such that the maximal eigenvalue of H_{Δ} be zero. The multiplicative factor is fixed by requiring

$$H_{\Delta} \Big|_{S=0} = H_{XXZ} + \text{cst}$$

with I, E, P as in eq. (3.2), J as in app. A.1 and H_{XXZ} being the XXZ spin chain hamiltonian in its usual form

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \otimes \sigma_{i+1}^z \right).$$

The fact that the eigenvalues of the 6 vertex model appear as a subset of the eigenvalues of the transfer matrix for the $\text{OSp}(2S+2|2S)$ model and $S \geq 1$ carries over to a similar result for the hamiltonians. The velocity of sound for the massless excitations can thus be derived from its value for the XXZ subset, which is well known from [30] to be

$$v_s = \frac{\pi \sin \lambda}{\lambda}, \quad \Delta = -\cos \lambda. \quad (5.1)$$

The hamiltonian H_Δ is diagonalized numerically in the adjoint representation of the Brauer algebra by studying its action on the diagrams just like for the transfer matrices. Next, once the structure of indecomposable modules $\Delta_L(\mu)$ is known, eq. (4.4) can be used as explained in sec. 4.1 to select the part of the spectrum which does indeed appear for a fixed S spin model.

However, in the two special cases $\Delta = \pm 1$ the hamiltonian H_Δ greatly simplifies. In the following two subsections we discuss the behaviour of the spectrum of H_Δ in the two limits $\Delta \rightarrow \pm 1^\mp$.

5.2 The limit $\Delta = 1$

When $\Delta = 1$ the Temperley Lieb operators E_i do not contribute to H_Δ and, thus, the hamiltonian is no longer a generic element of the Brauer algebra $B_L(2)$, but belongs instead to the subalgebra $\mathbb{C} \text{Sym}(L) \subset B_L(2)$. This will translate to additional degeneracies in the spectrum of H_Δ at the point $\Delta = 1$ compared to other points in the range $-1 \leq \Delta < 1$.

Hamiltonians of type $-\sum P_i$, with P 's in the representation provided by eq. (3.2), are integrable and have been studied in [31] and [32]. Although the continuum limit of such spin chains is a gapless field theory, it fails to be conformal, because excitations have a L^{-2} scaling law in the thermodynamic limit. This can readily be seen from the vanishing of the sound velocity in eq. (5.1). We will not enter into the details here, but just mention that the different systems of Bethe ansatz equations are indexed by $(2S + 2, 2S)$ -hook shape partitions $\lambda \vdash L$. This is exactly the label of irreducible representations of the group algebra $\mathbb{C} \text{Sym}(L)$ realizing in the centralizer of the spin chain $V^{\otimes L}$, with V being the fundamental representation of $\text{SU}(2S + 2|2S)$. We see that the symmetry of our spin model $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ jumps to $\text{SU}(2S + 2|2S)$ at the point $\Delta = 1$.

The additional degeneracies in the spectrum of the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ spin model at the point $\Delta = 1$ can be understood by looking at the decomposition of $B_L(2)$ modules $\Delta_L(\mu)$, into a direct sum of $\mathbb{C} \text{Sym}(L)$ irreducible modules $S(\lambda)$. Let $\mu \vdash L - 2k$ and $\lambda \vdash L$, then it was shown in [33] that the multiplicity of $S(\lambda)$ in the decomposition of $\Delta_L(\mu)$ is

$$m(\mu, \lambda) = \sum_{\substack{\eta \vdash 2k \\ \eta \text{ even}}} c_{\mu\eta}^\lambda, \quad (5.2)$$

where $c_{\mu\eta}^\lambda$ are Littlewood-Richardson coefficients. Alternatively, $m(\mu, \lambda)$ is the number of tensors of rank $L - 2k$, with index symmetry of some fixed standard Young supertableau of shape μ , that can be obtained from a tensor of rank L , with index symmetry of some standard Young supertableau of shape λ , by contracting $2k$ indices in all the possible ways.

One can apply eq. (5.2) to understand the degeneracy of the lowest level of H_Δ at $\Delta = 1$. First, observe that $-\sum P_i$ is minimized in the sector $\lambda = L$ (where P 's acts as 1). The *only* μ such that $m(\mu, \lambda) \neq 0$ are one row partitions. Thus, the lowest eigenvalues of H_Δ restricted to $\Delta_L(L - 2k)$ for $k = 0, \dots, [L/2]$ become all degenerate at $\Delta = 1$.

Arguments of this kind can be used to derive information about the critical exponents of the spin model in the limit $\Delta \rightarrow 1^-$.

5.3 The limit $\Delta = -1$

The same reasoning can be applied to the point $\Delta = -1$. At this point, the hamiltonian H_Δ belongs to the Temperley Lieb subalgebra $T_L(1) \subset B_L(2)$ and the model can be considered as a spin chain $(V \otimes \bar{V})^{\otimes \frac{L}{2}}$ where $V, \bar{V}$ are the fundamental representation of $\text{SU}(2S + 2|2S)$ and its conjugate. Additional degeneracies can be understood by looking at the decomposition of $B_L(2)$ modules $\Delta_L(\mu)$ as a direct sum of standard irreducible $T_L(1)$ modules $D_L(j)$.

Let us compute the multiplicity $n_L(\mu, j)$ of irreducible modules $D_L(j)$ in the decomposition of $\Delta_L(\mu)$ with $\mu \vdash L - 2k$.

As explained in sec. 3.2, $\Delta_L(\mu)$ has a natural basis composed of all possible pairings $p \otimes v_i$ of partial diagrams p with $m = L - 2k$ free points and basis vectors $v_1, \dots, v_{f_\mu}$ of $S(\mu)$. We say that a horizontal line of a partial diagram p is *intersected* either if it intersects another horizontal line or if there is a free point in p between the two ends of the horizontal line. Let us associate to each partial diagram p the number of intersected horizontal lines l in p . It is not hard to see that the span on the basis vectors $p \otimes v_i$, with p 's having at most l horizontal

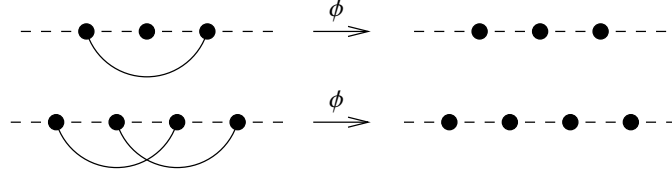


Figure 15: Illustration of the nontrivial local action of the map ϕ .

intersected lines, is a $T_L(1)$ submodule in $\Delta_L(\mu)$. If we denote this submodule by $\Delta_L^l(\mu)$ there is an obvious filtration $\Delta_L(\mu) = \Delta_L^k(\mu) \supset \dots \supset \Delta_L^0(\mu) \supset \Delta_L^{-1}(\mu) = 0$ of $\Delta_L(\mu)$.

Consider the natural action of $T_L(1)$ on the quotient modules $Q_L^l(\mu) = \Delta_L^l(\mu) / \Delta_L^{l-1}(\mu)$. Observe that the action of $T_L(1)$ changes the labeling $\pi \in \text{Sym}(m)$ of free points in a labeled graph $p \otimes \pi$ if and only if it also reduces the number of horizontal intersected lines. Therefore, $Q_L^l(\mu)$ is isomorphic to a direct sum of f_μ modules $Q_L^l(m)$. Obviously $Q_L^0(m) \simeq D_L(m)$ and, therefore, we get $n_L(\mu, j) = 0$ for $j < m$, $n_L(\mu, j) = f_\mu n_L(m, j)$ for $m \leq j \leq L$ and finally $n_L(m, m) = 1$.

Thus, our problem effectively reduces to understanding the action of $T_L(1)$ on the module $\Delta_L(m)$, which is composed of partial diagrams p on L points with m unlabeled free points.

At a closer look, one can see that the action of $T_L(1)$ on partial diagrams keeps the reciprocal configuration of intersected lines and free points intact. In other words, if ψ is a map that eliminates all the nonintersected horizontal lines from a partial diagram and acts as identity otherwise, then ψ defines an invariant of $T_L(1)$, that is

$$\psi(E_i \cdot p) = \psi(p), \quad i = 1, \dots, L.$$

To understand the meaning of this invariant let us define a local map ϕ between partial diagrams which sends intersected horizontal lines to free points as depicted in fig. 15 and acts as identity otherwise. The local map ϕ is applied repeatedly until there are no more horizontal intersected lines left. It is not hard to see that ϕ extends to a homomorphism of $T_L(1)$ modules

$$\phi : Q_L^l(m) \rightarrow D_L(2l + m).$$

In fact, the role of the map ϕ is to show that $Q_L^l(m)$ is composed of a direct sum of isomorphic $D_L(2l + m)$ modules, while that of the map ψ is to distinguish between these modules. The set of partial diagrams p in $Q_L^l(m)$ splits into subsets of constant $\psi(p)$ and each of these subsets is isomorphic to $D_L(2l + m)$ as a $T_L(1)$ module.

According to what was said before, we get that $n_L(m, j)$ equals to the number of graphs on $j = m + 2l$ vertices and l intersected edges. It follows that $n_L(m, j)$ does not actually depend on L and we drop the index L in the following. This fact allows, in principle, for an iterative computation of $n(m, j)$ by simply computing the dimensions of the left and right hand sides of the decomposition formula

$$\Delta_L(m) \simeq \bigoplus_{l=0}^k n(m, m + 2l) D_L(m + 2l),$$

that is

$$(2k - 1)!! C_L^{2k} = \sum_{l=0}^k n(m, m + 2l) (C_{L-1}^{k-l} - C_{L-1}^{k-l-2}) \quad (5.3)$$

successively for $L = 0, 2, \dots$ or $L = 1, 3, \dots$. One can give an explicit expression for $n(m, j)$ with a little more combinatorial work.

We call a horizontal line an *empty cup* if its ends are adjacent and simply a *cup* if there are separated by free points. Observe that all the lines in a partial diagram are intersected if and only if there is at least one free point in each cup. Thus, if the partial diagram has p cups with only one free point inside and a total of l edges then the remaining $m - p$ free points can be added to the diagram in C_{m-p+2l}^{2l} different ways in such a way that the resulting diagram has only intersected edges. Moreover, the number of diagrams on $2l$ points with p empty cups and a total of l edges is again $n(p, 2l - p)$. This is because the condition of no cups in the connection of the

remaining $l - p$ edges is similar to the condition of composing a graph with p free points and $l - p$ intersected edges. Putting everything together we get a new recurrence formula

$$n(m, m + 2l) = \sum_{p=0}^l C_{m-p+2l}^{2l} n(p, 2l - p) \quad (5.4)$$

reducing the problem to the computation of $n(j) := n(0, 2j)$.

Next, we want to find a recurrence relation for $n(j)$ by looking at the connectivity of the first point in the partial diagrams on $2j$ points with j intersected edges. The leftmost vertex in the partial diagram has to be connected to some other vertex at position k . The connectivity of the $2j - 1$ points to the left of the point at position 1 is equivalent to that in a partial diagram with $j - 1$ intersected edges and a free point except for the case where $k = 2$. Therefore we have that

$$n(j) = n(1, 2j - 1) - n(j - 1). \quad (5.5)$$

Now, eq. (5.4) yields $n(1, 2j - 1) = (2j - 1)n(j - 1) + n(1, 2j - 3)$. Using again eq. (5.5) for $j - 1$ we finally get that

$$n(j) = (2j - 1)n(j - 1) + n(j - 2). \quad (5.6)$$

The solution of the recurrence eq. (5.6) with the initial conditions $n(1) = 0$ and $n(2) = 1$ is

$$n(j) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \frac{(j+k)!}{2^k (j-k)! k!}$$

and coincides with the absolute value of Bessel polynomials $y_j(x)$

$$y_j(x) = \sum_{k=0}^j \frac{(j+k)!}{(j-k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

evaluated at $x = -1$.

6 Conclusion

Besides the careful definition of the spin model and its sectors, the main point of this first paper is the algebraic set up necessary to analyze its symmetries. This is a non trivial task since we are dealing with non semi-simple algebras, and that the action of $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ and $B_L(2)$ are meshed through a complex structure of indecomposable representations. The main results are the decomposition formulas (4.36, 4.37) for $V_{4|2}^{\otimes L}$ viewed as a $\text{OSp}(4|2)$ and a $B_L(2)$ module. The decomposition in eq. (4.36) has been computed in two essentially different ways: first, by decomposing tensor products between $\text{OSp}(4|2)$ representations and V without knowing anything about the Brauer algebra and, second, starting from eq. (4.4) with the assumption that the representations of $\text{OSp}(4|2)$ and $B_L(2)$ on $V^{\otimes L}$ generate the full centralizers of each other (Schur duality). The fact that we arrive at the same result using both methods highly suggests that our assumption about the Schur duality between $\text{OSp}(4|2)$ and $B_L(2)$ on $V^{\otimes L}$ is correct.

When the question of decomposing $V^{\otimes L}$ is addressed in sec. 4.3, the notion of block appears to be a particularly useful concept for organizing indecomposable representations.¹² These results will be applied to educated conjectures about the conformal field theory in the next paper.

Although there are many things left unclear about the representation theory of $\text{osp}(2S + 2|2S)$, $S > 1$, it is very tempting to speculate the form of the decomposition of $V_{2S+2|2S}^{\otimes L}$. Before making the guess, observe that as a $\text{OSp}(4|2)$ module $V_{4|2}^{\otimes L} \simeq T \oplus P$, where P is a direct sum of projectives organized in blocks, while T is a direct sum of simples indexed by the same Young tableau (in the partition notation for dominant weights) as the irreps of $O(2)$. More than that, they appear with the same multiplicities as their partners in $V_{2|0}^{\otimes L}$.¹³ Therefore, T and $V_{2|0}^{\otimes L}$

¹²Let us note that the blocks appear already in the representation theory of *simple* Lie algebras if infinite dimensional representations are allowed. They are precisely the orbits of the shifted action of the Weyl group on the weight lattice.

¹³In is not hard to prove employing the methods we used in this paper and the results of [29] for $\text{osp}(3|2)$ that the same phenomenon occurs for $V_{3|2}^{\otimes L}$. In this case T is the trivial representation.

are similar in all but the internal structure of their simple summands. The similarity between the two modules has to be understood in terms of their centralizers, because these are precisely the objects that do not “see” the internal structure of simples.¹⁴ In conclusion, one should have $\text{End}_{\text{O}(2)} V_{2|0}^{\otimes L} \simeq \text{End}_{\text{osp}(4|2)} T$, which is quite natural once there is a Schur duality between $\text{OSp}(4|2)$ and $B_L(2)$ on $V_{2S+2|2S}^{\otimes L}$. It is tantalizing to speculate that as a $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ module $V^{\otimes L} \simeq T \oplus P$, with P projective and $\text{End}_{\text{OSp}(2S+2|2S)} T \simeq \text{End}_{\text{OSp}(2S|2S-2)} V_{2S|2S-2}^{\otimes L} \simeq B_L(2)/J(S-1)$. Thus, the problem of the decomposition of $V_{2S+2|2S}^{\otimes L}$ as a $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ module is reduced to understanding the projective representations of the supergroup, i.e. to finding the quiver diagram for each block. It has been suggested in [34] that the quiver diagram of blocks does not depend on S provided the degree of atypicality k and the action of the outer automorphism τ are fixed.¹⁵ The discussion of sec. A.3 suggests that the two types of quivers for a block of $\text{osp}(2S + 2|2S)$ and a fixed k will give rise to the same quiver for the induced blocks in $\text{OSp}(2S + 2|2S)$.

We also succeeded in computing the multiplicity of Temperley Lieb representations in a standard $B_L(2)$ -module $\Delta_L(\mu)$. Finally, we gave a combinatorial description of $B_L(N)$ blocks as the set of minimal partitions dressed by balanced removable border strips and have shown that there is a similar description for $\text{osp}(R|2S)$ blocks.

Acknowledgments: This work was supported by the Agence National Pour la Recherche under a Programme Blanc 2006 INT-AdS/CFT. We would like to thank J. Germoni for fruitful correspondence, and J. Jacobsen and P. Martin for useful discussions.

References

- [1] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Phys. Rev. D 69 (2004) 046002, hep-th/0305116.
- [2] F. Wegner, Nucl. Phys. B316 (1989) 663.
- [3] M. Zirnbaue, “Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition”, hep-th/9905054.
- [4] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B613 (2001) 409.
- [5] N. Mann and J. Polchinski, Phys. Rev. D72 (2005) 086002 and N. Mann and J. Polchinski; hep-th/0508232.
- [6] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B 777, 263 (2007).
- [7] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B 777, 316 (2007).
- [8] B. Nienhuis, E. K. Riedel and M. Schick, Phys. Rev. B27, 5625.
- [9] E. Domany, D. Mukamel, B. Nienhuis and A. Schwimmer, Nucl. Phys. B190 (1981) 279.
- [10] B. Nienhuis, J. Stat. Phys. 34 (1984) 731.
- [11] J. L. Jacobsen, N. Read and H. Saleur, Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 090601; cond-mat/0205033.
- [12] G. Parisi and N. Surlas, J. Physique Lett. (Paris) 41 (1980) L403.
- [13] A. Ram, Pac. J. Math. 169 (1995) 173.
- [14] W. F. Doran, D. B. Wales and P. J. Hanlon, J. Algebra 211 (1999) 647.
- [15] G. Benkart, C. L. Shader and A. Ram, J. Pure Appl. Algebra 130 (1998) 1.
- [16] J. Birman and H. Wenzl, Trans. Am. Math. Soc. 313 (1989) 249.
- [17] J. Murakami, Osaka J. Math. 24 (1987) 745.
- [18] M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu, Phys. Rep. 180 (1989) 249.

¹⁴By a corollary of the Schur lemma, if S is a simple module for the algebra A then $\text{End}_A S \simeq \mathbb{C}$.

¹⁵ τ can act in two ways: either leave invariant all the weights in the block or pairwise transform some of them.

- [19] H. Weyl, "The classical groups", Princeton University Press (1946).
- [20] F. Gavarini, "On the radical of Brauer algebras", math.RT/0606501 (2006).
- [21] F. Goodman, P. de la Harpe and V. Jones, "Coxeter graphs and towers of algebras", MSRI Publications 14, Springer, Berlin 1989.
- [22] P.P. Martin, "Potts models and related problems in Statistical Mechanics", World Scientific, Singapore (1991).
- [23] A. Cox, M. De Visscher and P. Martin, "The blocks of the Brauer algebra in characteristic zero", math.RT/0601387.
- [24] A. Cox, M. De Visscher and P. Martin, "A geometric characterization of the blocks of the Brauer algebra", math.RT/0612584.
- [25] A. Balantekin and I. Bars, J. Math. Phys. 22 (1981) 1149.
- [26] C. J. Cummins and R. C. King, J. Phys. A 20 (1987) 3103.
- [27] R. Green, JKTR 7 (1998) 155.
- [28] D. Levy, Int. J. Mod. Phys. A6 (1991) 5127.
- [29] J. Germoni, Boletin de la Academia Nacional de Ciencias 65 (2000) 147
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00002750/fr/>.
- [30] C. Hamer, J. Phys. A 19 (1986) 3335.
- [31] B. Sutherland, Phys. Rev. B 12 (1975) 3795.
- [32] H. Saleur, Nucl.Phys. B578 (2000) 552.
- [33] P. Hanlon and D. Wales, Math. Comp. 54 (1990) 771.
- [34] V. Serganova Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1998.
- [35] V. Kac, Adv. Math. 26 (1977) 8.
- [36] B. Morel, A. Sciarrino, P. Sorba, J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985) 1597.
- [37] J. P. Hurni, J. Phys. A 20 (1987) 5755.
- [38] R. Farmer, P. Jarvis, J. Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) 2365.
- [39] V. Kac, Lecture Notes in Math. 676 (1978) 597.
- [40] V. Kac, Commun. Algebra 5 (1977) 889.
- [41] J. Van der Jeugt, J. Math. Phys. 26 (1985) 913.
- [42] I. MacDonald, "Symmetric functions and Hall polynomials", Clarendon Press, Oxford (1979), 10

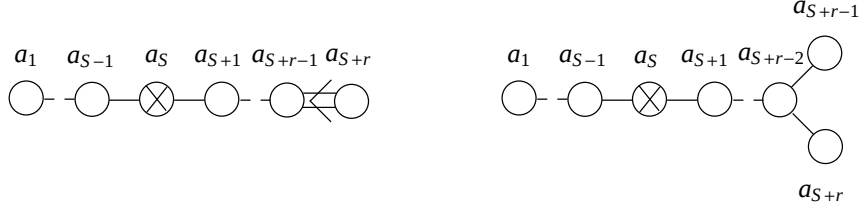


Figure 16: Distinguished Dynkin diagram for the Lie superalgebra $\text{osp}(2r+1|2S)$ on the left and $\text{osp}(2r|2S)$ on the right.

A Appendix

A.1 $\text{osp}(R|2S)$ Lie superalgebra

In this section we recall standard facts about the $\text{osp}(R|2S)$ Lie superalgebra mainly following the pioneering work of Kac [35]. For more details on $\text{osp}(R|2S)$ Young supertableaux see [36, 37, 38].

Let V be a vector space with an additive $\mathbb{Z}_2$ grading $\mathbf{g}$, that is $V = V_0 \oplus V_1$ and $v \in V_\gamma \Rightarrow \mathbf{g}(v) = \gamma$. Let $\dim V_0 = R$, $\dim V_1 = 2S$ and $r = \lfloor R/2 \rfloor$. Choose in V a basis $B = B_0 \cup B_1$ with $B_0 = \{v_i, v_i^* \in V_0, (v_{r+1} = v_{r+1}^*) \mid i = 1, \dots, r\}$ and $B_1 = \{u_i, u_i^* \in V_1 \mid i = 1, \dots, 2S\}$. We take the vector v_{r+1} in brackets because it appears for odd R only.

The grading of V induces a grading on $\mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$, that is $\mathfrak{gl}_0(V, \mathbb{C})$ preserves the degree of $v \in V_\gamma$ and $\mathfrak{gl}_1(V, \mathbb{C})$ changes it. Define the supertranspose of a matrix $T \in \mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$ by

$$T = \begin{pmatrix} A_{R \times R} & B_{R \times 2S} \\ C_{2S \times R} & D_{2S \times 2S} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{\text{st}} = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ -B^t & D^t \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Let J denote the matrix with the only nonzero components

$$J_{vv^*} = 1, \quad J_{v^*v} = 1, \quad J_{uu^*} = -1, \quad J_{u^*u} = 1. \quad (\text{A.2})$$

The Lie superalgebra $\text{osp}(R|2S)$ is realized as a subset of $\mathfrak{gl}(V, \mathbb{C})$ with elements T satisfying

$$T^{\text{st}} J + J T = 0. \quad (\text{A.3})$$

In terms of elementary matrices $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$ the generators of $\text{osp}(R|2S)$ read

$$T_{ij} = e_{ij} - e_{i^*j^*}^{\text{st}} \quad (\text{A.4})$$

$$T_{ij^*} = e_{ij^*} - (-1)^{\mathbf{g}(j)} e_{i^*j}^{\text{st}} \quad (\text{A.5})$$

$$T_{i^*j} = e_{i^*j} - (-1)^{\mathbf{g}(i)} e_{ij^*}^{\text{st}}, \quad (\text{A.6})$$

The generators $h_i = T_{ii}$ span the Cartan subalgebra $\mathcal{H}$. Denote by ε_i the basis in $\mathcal{H}^*$ dual to h_i . It can be easily checked that generators in eq. (A.4) correspond to roots of the type $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, generators in eq. (A.5) correspond to roots of the type $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ and generators in eq. (A.6) correspond to roots of the type $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$. The bilinear invariant form $-\frac{1}{2} \text{str}(h_i h_j)$ induces a scalar product on $\mathcal{H}^*$.

The standard basis is recovered by putting $\epsilon_i = \varepsilon_i$ for $i = 1, \dots, r$ and $\delta_i = \varepsilon_{r+i}$ for $i = 1, \dots, S$. Elementary weights δ_i, ϵ_j are orthogonal in $\mathcal{H}^*$ and $\delta_i^2 = -\epsilon_i^2 = 1$. The first $r + S - 1$ simple roots are chosen to be $\alpha_i = \delta_i - \delta_{i+1}$, $\alpha_S = \delta_r - \epsilon_1$, $\alpha_{S+j} = \epsilon_j - \epsilon_{j+1}$ for $i = 1, \dots, S$ and $j = 1, \dots, r - 1$. The last simple root is $\alpha_{r+S} = \epsilon_r$ for odd R and $\alpha_{r+S} = \epsilon_{r-1} + \epsilon_r$. The roots $\pm \delta_i \pm \epsilon_j$ are called odd and the rest — even.

The component of a weight Λ along the hidden simple $\mathfrak{sp}(2S)$ root $2\delta_S$ is

$$R \text{ odd : } b = a_S - a_{S+1} - \dots - a_{S+r-1} - a_{S+r}/2 \quad (\text{A.7})$$

$$R \text{ even : } b = a_S - a_{S+1} - \dots - a_{S+r-2} - (a_{S+r-1} + a_{S+r})/2. \quad (\text{A.8})$$

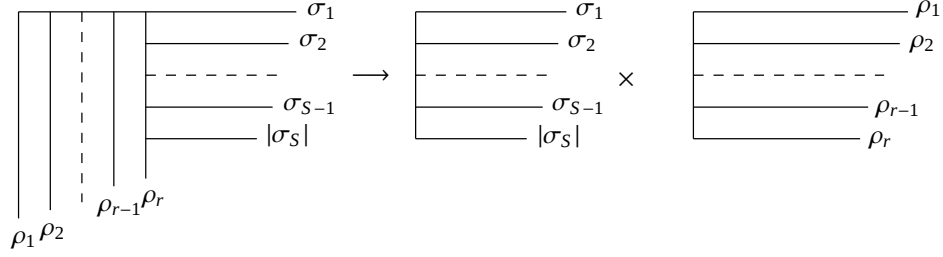


Figure 17: The $\mathfrak{so}(R) \times \mathfrak{sp}(2S)$ representation to which belongs the highest weight state of a $\mathfrak{osp}(R|2S)$ representation.

According to [35], an $\mathfrak{osp}(R|2S)$ highest weight is dominant iff it has integer Dinkyn labels $a_{i \neq S}$ and integer b satisfying the following consistency conditions

$$R \text{ odd : } b \leq r - 1 \Rightarrow a_{S+b+1} = \dots = a_{S+r} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$R \text{ even : } b \leq r - 2 \Rightarrow a_{S+b+1} = \dots = a_{S+r} = 0, \quad b = r - 1 \Rightarrow a_{S+r-1} = a_{S+r} = 0.$$

All irreducible finite dimensional representations are indexed by dominant weights Λ . Given a dominant weight $\Lambda = \sum \rho_i \delta_i + \sum \sigma_j \epsilon_j$ in the standard basis, the first $r + S - 1$ Dynkin labels are $a_i = \rho_i - \rho_{i+1}$ for $i = 1, \dots, S$, $a_{S+i} = \sigma_i - \sigma_{i+1}$ for $i = 1, \dots, r - 1$. The last Dynkin label is $a_{S+r} = 2\sigma_r$ for R odd and $a_{S+r} = \sigma_{r-1} + \sigma_r$ for R even. From eq. (A.7) we also get $b = \rho_S$.

The set of numbers ρ_i, σ_j define a partition, shown in fig. 17, provided that consistency conditions (A.9) plus some additional constraints depending on R are satisfied. These additional constraints require $a_{S+r-1} < a_{S+r}$ and $a_{S+r-1} + a_{S+r}$ to be even if R is even, and a_{S+r} to be even if R is odd. The last two conditions define tensorial weights.

Partitions λ such that $\lambda_{r+1} \leq S$ are called hook shape. Let τ denote the outer automorphism induced by the symmetry of the $\mathfrak{osp}(2r|2S)$ Dynkin diagram under the exchange of the last two roots in fig. 16. This automorphism is extremely important in understanding the difference between the representation theory of the supergroup $\text{OSp}(R|2S)$ and its Lie superalgebra. Note that τ can be explicitly realized through the discrete transformation ρ exchanging the last two basis vectors in B_0 . Indeed, $\rho(\epsilon_j) = \epsilon_j$ for $j = 1, \dots, r - 1$ and $\rho(\epsilon_r) = -\epsilon_r$ because ϵ_j are the duals of $e_{jj} - e_{j^*j^*}$. Therefore $\rho(a_{S+r}) = \rho(\epsilon_{r-1} + \epsilon_r) = \epsilon_{r-1} - \epsilon_r = a_{S+r-1}$.

In the case of R odd, there is a bijective correspondence between hook shape partitions λ and dominant weights Λ . The same holds for R even, except for λ with $\sigma_r > 0$ when λ represents both Λ and $\tau \cdot \Lambda$.

If there is a pair (i, j) such that at least one of the conditions below are satisfied

$$\rho_j + \sigma_i + S + 1 - i - j = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\rho_j - \sigma_i + S - R + 1 - j + i = 0, \quad (\text{A.11})$$

the weight λ is called *atypical*.¹⁶ See [39] for the origin of these conditions and note ref. [38], where these have been presented in the form (A.10,A.11). If none of these conditions is satisfied, the weight is called *typical* and, according to [39], the associated Kac module $\bar{V}(\Lambda)$ (which is a finite dimensional quotient of the corresponding highest weight module) is irreducible, its (super)character is given by the Weyl-Kac formula [40] and, in particular, its superdimension is zero.

A.2 $\text{OSp}(R|2S)$ supergroup

Let $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ be a Grassman algebra. The supergroup $\text{OSp}(R|2S)$ may be realized as a subset of even supermatrices

$$M = \begin{pmatrix} A_{R \times R} & B_{R \times 2S} \\ C_{2S \times R} & D_{2S \times 2S} \end{pmatrix},$$

¹⁶For $b \leq r - 1$ the highest weight Λ is always atypical.

with entries in A and D belonging to Γ_0 , and entries in B and C belonging to Γ_1 , which satisfies

$$M^{\text{st}} J M = J. \quad (\text{A.12})$$

Equivalently, $\text{OSp}(R|2S)$ can be seen as the set of linear transformations leaving invariant the graded symmetric form

$$\eta_1 \cdot \eta_2 := \eta_1^t J \eta_2 = \sum_{i=1}^r b_1^{i*} b_2^i + b_1^i b_2^{i*} + (b_{r+1}^2) + \sum_{j=1}^S f_1^{j*} f_2^j - f_1^j f_2^{j*}, \quad (\text{A.13})$$

where η_α are arbitrary points in a superspace parametrized by coordinates $b_\alpha^i, b_\alpha^{i*} \in \Gamma_0$ and $f_\alpha^j, f_\alpha^{j*} \in \Gamma_1$ and $\alpha = 1, 2$.

Representing $M = I + \sum_a \alpha_a T_a$ with infinitesimal $\alpha_a \in \Gamma_0, \Gamma_1$ and expanding eq. (A.12) one gets the definition (A.3) of the superalgebra $\text{osp}(R|2S)$. Thus, the subgroup of $\text{OSp}(R|2S)$ connected to identity is an exponential of $\text{osp}(R|2S)$. The representation theory of both is the same as long as we restrict to tensor representations which are the only ones appearing in the tensor space $V^{\otimes L}$.

From the definition (A.12) any matrix $M \in \text{OSp}(R|2S)$ has superdeterminant $\text{sdet } M = \pm 1$. The supergroup has two disconnected parts $\text{OSp}^\pm(R|2S)$, which correspond to the value of the superdeterminant of its elements, that is $\text{OSp}(R|2S)/\text{OSp}^+(R|2S) = \mathbb{Z}_2$.

To see this, one can repeat the same reasoning typical of $\text{O}(N)$ groups. Elementary transformations susceptible to change the sign of the superdeterminant belong to the discrete symmetry group W of the $\text{OSp}(R|2S)$ invariant form (A.13). The generators of W are read out from eq. (A.13) to be “reflections” $\rho_i : (b_i, b_i^*) \mapsto (b_i^*, b_i)$ and $\rho'_j : (f_j, f_j^*) \mapsto (-f_j^*, f_j)$, and permutations $\pi_i : (b_i, b_i^*) \leftrightarrow (b_{i+1}, b_{i+1}^*)$ and $\pi'_j : (f_j, f_j^*) \leftrightarrow (f_{j+1}, f_{j+1}^*)$. For odd R there is also the reflection $\rho_{r+1} : b_r \mapsto -b_r$. The subgroup W is in fact the Weyl group of the root system of $\text{so}(R) \times \text{sp}(2S)$. Denote by $W^\pm$ the set of elements of W embedded in $\text{OSp}^\pm(R|2S)$. It is easy to see that all elements of W^- are conjugate in W^+ to a single reflection ρ , which one can take ρ_r if R is even and ρ_{r+1} if R is odd. Therefore, we see that indeed $W/W^+ = \mathbb{Z}_2$.

Let $v_{\Lambda'} \in g(\Lambda)$ be a vector of weight $\Lambda' \leq \Lambda$. Then, as seen in sec. A.1, there is an action of ρ on $g(\Lambda)$ provided by $\rho \cdot v_{\Lambda'} = v_{\tau \cdot \Lambda'}$. In the case of $\text{osp}(4|2)$ the outer automorphism τ exchanges ϵ_2 with ϵ_3 . The representations induced from $\text{osp}(R|2S)$ to $\text{OSp}(R|2S)$ are of the form

$$\text{OSp}(R|2S) \otimes_{\text{OSp}^+(R|2S)} g(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes_\rho g(\Lambda). \quad (\text{A.14})$$

There are two possible cases now: i) either $\rho \cdot g(\Lambda) = g(\Lambda) \Leftrightarrow \tau \cdot \Lambda = \Lambda$ and then obviously $\mathbb{Z}_2 \otimes_\rho g(\Lambda) = 1 \otimes_\rho g(\Lambda) \oplus \varepsilon \otimes_\rho g(\Lambda)$ with $\rho \cdot 1 = 1$ and $\rho \cdot \varepsilon = -\varepsilon$ or ii) $\rho \cdot g(\Lambda) \neq g(\Lambda) \Leftrightarrow \tau \cdot \Lambda \neq \Lambda$ and the induced module in eq. (A.14) is irreducible.

Two representations $R(\rho), R^*(\rho) = -R(\rho)$ of $\mathbb{Z}_2$ are called *associate*. The modules $G(1 \times \lambda) := 1 \otimes_\rho g(\Lambda)$ and $G(\varepsilon \times \lambda) := \varepsilon \otimes_\rho g(\Lambda)$ are also called associate. In contrast, $G(\tau \times \lambda) := \mathbb{Z}_2 \otimes_\rho g(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes_\rho g(\tau \cdot \Lambda)$ is isomorphic to its associate because there is an equivalence transformation between $R(\rho)$ and $R^*(\rho)$ through the change of sign of basis vectors in the subspace $\rho \otimes g(\Lambda)$. Therefore $G(\tau \times \lambda)$ is called *selfassociate*.

A direct implication following from the definitions of (self) associate modules is $\text{sch}_\mu(D) = \text{sdet } D \text{sch}_{\mu^*}(D)$, where μ, μ^* are (self)associate weights of $\text{OSp}(R|2S)$. For a selfassociate weight μ this equality implies $\text{sch}_\mu(D) = 0$ if $\text{sdet } D = -1$.

Note that the centralizer of $B_L(N)$ on $V^{\otimes L}$ is the direct product algebra $\mathbb{Z}_2 \times \text{osp}(R|2S)$ rather than $\text{osp}(R|2S)$. This algebra has the same tensor irreducible representations as the supergroup $\text{OSp}(R|2S)$.

A.3 $\text{osp}(4|2)$ Lie superalgebra and $\text{OSp}(4|2)$ supergroup

This is a compact resumé of the results presented in [29] plus some additional remarks on the representation theory of $\text{OSp}(4|2)$.

The superalgebra $\text{osp}(4|2)$ has minor differences with respect to the general context of $\text{osp}(R|2S)$ superalgebras, because of the isomorphism $\text{so}(4) \simeq \text{sl}(2) \times \text{sl}(2)$. The even part of the superalgebra is $\text{so}(4) \times \text{sp}(2) \simeq \text{sl}(2) \times \text{sl}(2) \times \text{sl}(2)$. The odd part is a representation of the even part of dimension $2 \times 2 \times 2$.

The standard basis vectors $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ of $\mathcal{H}^*$ are normalized as $\epsilon_1^2 = -1, \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = 1/2$. The even and the odd positive root systems are $\Delta_0^+ = \{2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 2\epsilon_3\}$ and $\Delta_1^+ = \{\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$. The simple roots are traditionally chosen as $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \alpha_2 = 2\epsilon_2, \alpha_3 = 2\epsilon_3$. The hidden root will then be $2\epsilon_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

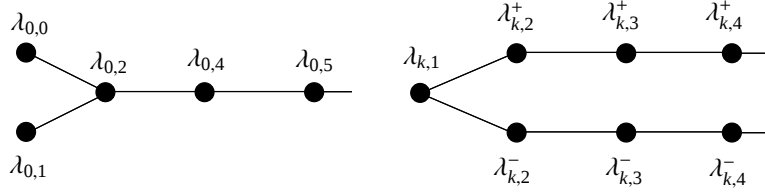


Figure 18: The quiver diagrams of type D_∞ and A_∞^∞ for the blocks of $\text{osp}(4|2)$.

Consistency conditions (A.9) for a dominant weight $\Lambda = b\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_3$, require $b = 0 \Rightarrow a_2 = a_3 = 0$ and $b = 1 \Rightarrow a_2 = a_3$. We associate to Λ a hook shape partition λ with symplectic part $\rho_1 = b$ and orthogonal part $\sigma_1 = (a_2 + a_3)/2$, $\sigma_2 = |a_2 - a_3|/2$. To make the correspondence $\Lambda \rightarrow \lambda$ bijective we mark the partition λ by $\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_2)$ when $\lambda_2 > 1$.¹⁷

Atypicality conditions (A.10,A.11) take the form

$$\begin{aligned} \rho_1 + \sigma_1 &= 0, & \rho_1 + \sigma_2 - 1 &= 0 \\ \rho_1 - \sigma_1 - 2 &= 0, & \rho_1 - \sigma_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

The solutions can be parametrized by two integers k and l . For $k = 0$ these are $\lambda_{0,l} = l1^l$, $l \geq 0$, while for $k > 0$, $\lambda_{k,1} = k$, $\lambda_{k,l} = kl1^{l-2}$, $2 \leq l \leq k$ and $\lambda_{k,l} = l(k+1)1^{l-1}$, $k+1 \leq l$.

Denote by $g(\lambda)$ the $\text{osp}(4|2)$ simple modules. For λ typical $g(\lambda) \simeq \bar{V}(\lambda)$ and $\dim V(\lambda)$ can be computed by decomposing $\bar{V}(\lambda)$ into (at most 16) representations of $\text{sl}(2)^{\times 3}$

$$\dim g(\lambda) = 16(b-1)(a_2+1)(a_3+1).$$

The dimensions of $g_{k,l} := g(\lambda_{k,l})$ can be computed with the help of character formulas given in [29].

For $k = 0$ we get $\dim g_{0,0} = \text{sdim } g_{0,0} = 1$, $\dim g_{0,1} = 17$, $\text{sdim } g_{0,1} = 1$ and $\dim g_{0,l} = D_l^3 - 3D_l$, $\text{sdim } g_{0,l} = 2$, $l \geq 2$, where $D_j = 2j + 1$.

For $k > 0$ we get $\dim g_{k,1} = 4k^2 + 2$, $\dim g_{k,l}^\pm = D_k D_{k-1} D_{l-1} - D_{l-1}^2 D_{l-2} - 2D_{l-1} D_{l-2}$, $2 \leq l \leq k$ and $\dim g_{k,l}^\pm = D_l^2 D_{l-1} + 2D_l D_{l-1} - D_k D_{k-1} D_l$, $l \geq k+1$, and $\text{sdim } g_{k,0} = 2$, $\text{sdim } g_{k,l}^\pm = 2$, $l \geq 1$.

The set of weights $\lambda_{k,l}$ with k fixed belong to the same block of $\text{osp}(4|2)$. To (at least partially) see this one has to check that the second order Casimir invariant takes the same value k^2 on the whole block k .¹⁸ The actual construction of the set of indecomposable modules providing the equivalence relation of sec. B between the weights of a block is done in [29].

The quiver diagram representing the structure of $\text{osp}(4|2)$ projective modules in a block is represented in fig. 18. The projective covers $\mathcal{P}g_{k,l}$ of the modules $g_{k,l}$ in the block $k = 0$ have the submodule structure

$$\begin{array}{ccccccc} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & g_{0,l} & & & \\ g_{0,2} & g_{0,2} & g_{0,0} \ g_{0,1} \ g_{0,3} & g_{0,l-1} \ g_{0,l+1} & l \geq 3, & & (A.15) \\ g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & g_{0,l} & & & \end{array}$$

while in the block $k > 0$ their submodule structure is

$$\begin{array}{ccccccc} g_{k,l}^- & g_{k,1} & g_{k,l}^+ & & & & \\ g_{k,l-1}^- \ g_{k,l+1}^- & g_{k,2}^- \ g_{k,2}^+ & g_{k,l-1}^+ \ g_{k,l+1}^+ & l \geq 2. & & & (A.16) \\ g_{k,l}^- & g_{k,1} & g_{k,l}^+ & & & & \end{array}$$

The dimensions of projective modules in the block $k = 0$ are $\dim \mathcal{P}g_{0,0} = 112$, $\dim \mathcal{P}g_{0,l} = 16(2l+1)(1+l+l^2)$, $l \geq 1$, while in the block $k > 0$ there are $\dim \mathcal{P}g_{k,1} = 32(k^2 - 1)$, $\dim \mathcal{P}g_{k,l} = 16(2l-1)(k^2 - 1 + l - l^2)$, $l \leq$

¹⁷Any $\text{so}(4) = \text{sl}(2) \oplus \text{sl}(2)$ irreps can be written as a couple (j_1, j_2) of $\text{sl}(2)$ irreps. The sign attached to λ distinguishes between (j_1, j_2) and (j_2, j_1) when $j_1 \neq j_2$.

¹⁸The second order Casimir is a central element of the enveloping superalgebra. The eigenvalues of central elements on $g(\lambda)$ define the central character of $g(\lambda)$. If two weights λ, λ' are in the same block then $g(\lambda), g(\lambda')$ have the same central characters. This is a consequence of the extension of the Schur lemma (in the form known to physicists) to indecomposable representations.

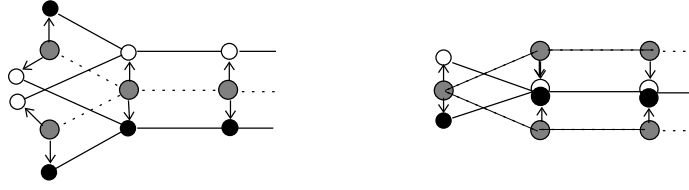


Figure 19: Schematic picture showing how the induction procedure (vertical arrows) sends the quiver diagrams of type D_∞ and A_∞ (grey dots and dotted lines) for $\mathfrak{osp}(4|2)$ blocks, represented in fig. 18, into quiver diagrams of type D_∞ for $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$ blocks. White and black dots represent weights of the type $1 \times \lambda$ and $\varepsilon \times \lambda$ respectively. Double circles represent selfassociate weights $\tau \times \lambda$.

$k-1, \dim \mathcal{P}g_{k,k} = 32(1+2k^2), \dim \mathcal{P}g_{k,l} = 16(2l+1)(1-k^2+l+l^2), l \geq k+1$. The superdimension of projective (including typical) modules vanishes.

Let us apply the general discussion of sec. A.2 to the supergroup $\mathcal{OSp}(4|2)$. The outer automorphism τ acts on $\mathcal{H}^*$ by exchanging ϵ_2 with ϵ_3 . Consequently, $\rho \cdot g_{k,l} = g_{k,l}$ for $k=0$ or $l=0$ and $\rho \cdot g_{k,l}^\pm = g_{k,l}^\mp$ otherwise.

We claim that the quiver diagram of type D_∞ for the block $k=0$ of $\mathfrak{osp}(4|2)$ will give rise to two quiver diagrams of type D_∞ , as shown in fig. 19, and, consequently, to two associate blocks for the algebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$, which we call $k=0, 0^*$. As we shall see below, the weights in the block $k=0$ are $1 \times \lambda_{0,0}, \varepsilon \times \lambda_{0,l}, l \geq 1$, while the weights in the block $k=0^*$ are $\varepsilon \times \lambda_{0,0}, 1 \times \lambda_{0,l}, l \geq 1$.

We also claim that the quiver diagram of type A_∞ for the block $k \neq 0$ of $\mathfrak{osp}(4|2)$ will give rise to a single quiver diagram of type D_∞ , as shown in fig. 19, and a selfassociate block for the algebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$, which we label also by k . As we shall see below, the weights in the block $k \neq 0, 0^*$ are $1 \times \lambda_{k,0}, \varepsilon \times \lambda_{k,0}, \tau \times \lambda_{k,l}, l \geq 1$.

Our claim follows from the analysis of shift operators $A^{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = \pm$ introduced in [41]. These operators are very practical for decomposing Kac modules $\bar{V}(\lambda)$ into $\mathfrak{sl}(2)^{\times 3}$ irreps.¹⁹ To be more specific, let $v_\mu \in \bar{V}(\lambda)$ be a vector of weight μ maximal for the algebra $\mathfrak{sl}(2)^{\times 3}$. Then, $A^{-\beta\gamma}v_\mu \neq 0$ is again a maximal vector of weight $\mu - \epsilon_1 + \beta\epsilon_2 + \gamma\epsilon_3$ for $\mathfrak{sl}(2)^{\times 3}$. To identify $\mathfrak{osp}(4|2)$ irreducible components in $\bar{V}(\lambda)$ one has to search for $\mathfrak{sl}(2)^{\times 3}$ maximal vectors with dominant weights μ in the same block as λ .

Consider first the block $k=0$ of $\mathfrak{osp}(4|2)$. Then $\bar{V}(\lambda_{0,l}), l \geq 2$ has a $\mathfrak{sl}(2)^{\times 3}$ maximal vector $A^{---}v_{\lambda_{0,l}}$ and one can check that all positive odd generators annihilate it. Therefore $A^{---}v_{\lambda_{0,l}}$ is a maximal vector for $\mathfrak{osp}(4|2)$ and $\bar{V}(\lambda_{0,l})$ contains at least $g_{0,l}$ and $g_{0,l-1}$. In fact, these are the only two irreducible factors of $\bar{V}(\lambda_{0,l}), l \geq 3$ because, using the Weyl-Kac formula for characters and the results of sec. A.3, one can check that $\dim \bar{V}(\lambda_{0,l}) = \dim g_{0,l} + \dim g_{0,l-1}$. In the case $l=2$ one has that $\dim \bar{V}(\lambda_{0,2}) - \dim g_{0,2} - \dim g_{0,1} = 1$ and, therefore, $\bar{V}(\lambda_{0,2})$ contains also the trivial representation.

In order to see how the four weights $1 \times \lambda_{0,l}, 1 \times \lambda_{0,l-1}, \varepsilon \times \lambda_{0,l}, \varepsilon \times \lambda_{0,l-1}$ split into two different blocks of $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$ one has to check out how A^{---} transforms under the action of ρ . From the explicit expression of shift operators in [41] it follows that $\rho A^{\alpha\beta\gamma} \rho = A^{\alpha\gamma\beta}$ and, consequently, $1 \times \lambda_{0,l}, 1 \times \lambda_{0,l-1}$ are in the same block and $\varepsilon \times \lambda_{0,l}, \varepsilon \times \lambda_{0,l-1}$ are in an other same block of $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$.

The module $\bar{V}(\lambda_{0,2})$ has a maximal vector $A^{---}A^{++-}A^{--+}v_{\lambda_{0,2}}$, of weight zero, corresponding to the trivial representation $g_{0,0}$. With the help of relations in appendix [41] for the shift operator products of type $(1, 0, 0)$, one can show that $\rho A^{---}A^{++-}A^{--+}v_{\lambda_{0,2}} = A^{---}A^{++-}A^{--+}v_{\lambda_{0,2}} = -A^{++-}A^{--+}A^{---}v_{\lambda_{0,2}}$ and, therefore, $g_{0,0}$ belongs to the block $k=0$ of $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$ as claimed.

Consider now the block $k > 0$ of $\mathfrak{osp}(4|2)$. Then $\bar{V}(\lambda_{k,l}^\pm)$ will have a single $\mathfrak{osp}(4|2)$ maximal vector (besides $v_{\lambda_{k,l}^\pm}$) corresponding to the irrep $g_{k,l-1}^\pm$ given by $A^{---}v_{\lambda_{k,l}^\pm}$ if $l > k+1$, $A^{---}A^{-\mp\pm}v_{\lambda_{k,k+1}^\pm}$ if $l = k+1$ and $A^{-\mp\pm}v_{\lambda_{k,l}^\pm}$ if $2 \leq l \leq k$. The induced module $\mathbb{Z}_2 \otimes_\rho \bar{V}(\lambda_{k,l}^\pm), l \geq 2$ will be the sum of $\bar{V}(\lambda_{k,l}^\pm)$ glued together by the action of ρ . Finally, the induced module $\mathbb{Z}_2 \otimes_\rho \bar{V}(\lambda_{k,2}^\pm)$ has two irreducible components $1 \otimes g_{k,0}$ and $\varepsilon \otimes g_{k,0}$ with $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{osp}(4|2)$ maximal vectors $(1 \pm \rho) \otimes A^{---}v_{\lambda_{k,2}^\pm}$.

¹⁹The fact choose Kac modules in order to understand the transformation properties under ρ of arrows in the quiver diagram of a block is irrelevant for the following. One can take instead of $\bar{V}(\lambda)$ the standard modules $\mathcal{L}_0(\lambda)$ as well, which are defined by cohomological induction in [29].

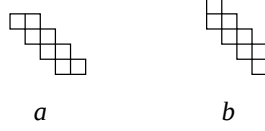


Figure 20: Two possible configurations of boxes with content $1 - N/2, -N/2$.

B Blocks, minimality and atypicality

In this section we explain carefully the notion of block appearing in the representation theory of nonsemisimple algebras. We also look in details at the similarity between the blocks of $\text{osp}(R|2S)$ and $B_L(N)$.

In the representation theory of non semisimple algebras the block is an essential notion. The *blocks* are conjugacy classes of irreps with respect to the equivalence relation $\equiv$ defined as follows. Let $\mathcal{I}$ be the category of indecomposable modules of the algebra. Write $S_1 \equiv S_2$ if there is an indecomposable module in $\mathcal{I}$ with simple summands S_1, S_2 . Extend the relation $\equiv$ by transitivity in order to get an equivalence. In a semisimple algebra the notion of block is irrelevant because indecomposable representation are irreducible and the congruence $\equiv$ becomes an equality.

A relevant example is the Temperley Lieb algebra, with fugacity for loops N in its adjoint/diagrammatic representation. For generic values of N the algebra is semisimple and, thus, has only completely reducible representation. Restricting to subsets of planar diagrams, with the number of vertical lines fixed to m , and treating all the other diagrams as zero, we get all irreps, which are parametrized by m . However, at special points $N = 2 \cos \pi r' / r''$ with coprime integers r', r'' , the algebra becomes nonsemisimple, irreps labeled by m become reducible and m becomes a label for a whole block of the algebra, see [22].

The irreducible components $B_L(\lambda)$ of indecomposable modules $\Delta_L(\mu)$, when the Brauer algebra $B_L(N)$ is nonsemisimple, were first studied by mathematicians Hanlon *et al* in [14]. Recently Martin *et al* gave a complete description for the blocks of the Brauer algebra in [23].

We introduce the same notation as in [23] to formulate their block result for $B_L(N)$. If the box ϵ is in the row i and column j of the Young tableau of a partition μ , then its content is $c(\epsilon) = j - i$. Two boxes $\epsilon, \epsilon' \in \lambda$ are called balanced if $c(\epsilon) + c(\epsilon') = 1 - N$. For two partitions $\mu \subset \lambda$, the skew partition λ/μ is called balanced if it is composed of balanced pairs of boxes.

The necessary condition for $\Delta_L(\mu)$ to contain $B_L(\lambda)$ is: i) $\mu \subset \lambda$ and λ/μ is balanced; ii) If N is even and the boxes of content $1 - N/2, -N/2$ in λ/μ are configured as shown in case *a* fig. 20, then the number of columns in this configuration is even.

The given necessary criterion has the structure of a partial ordering. If $\mu \subset \lambda$ satisfy i) and ii) we write $\mu \leq \lambda$. The splitting of the set of weights X_L into posets with respect to $\leq$ gives the blocks of $B_L(N)$. As shown in [23], there is a unique minimal partition in a block, which can serve as a label.

A sufficient criterion for the module $\Delta_L(\mu)$ to contain $B_L(\lambda)$ was derived in [23] and requires λ to be the least weight $\lambda \geq \mu$.

We want to give a combinatorial description of the weights in a block. Consider the Young tableau of a partition λ in the block of the minimal partition μ . Let ϵ_1 (ϵ'_1) be the box with the highest (lowest) content in the skew partition λ/μ . Let ϵ_2 (ϵ'_2) denote the box bellow (on the left of) ϵ_1 (ϵ'_1), if there is one, and the box on the left of (above) ϵ_1 (ϵ'_1) otherwise. Define by recurrence the balanced pairs ϵ_i, ϵ'_i until $c(\epsilon_i) = -N/2 + 1, c(\epsilon'_i) = -N/2$ if N is even or $\epsilon_i = \epsilon'_i, c(\epsilon_i) = (1 - N)/2$ if N is odd. By construction, the set of boxes $\{\epsilon_i, \epsilon'_i\}_1^l$ belongs to a balanced removable border strip of width one or, simply, a *balanced strip*. One can repeat the same reasoning with the Young tableau of $\lambda/\{\epsilon_i, \epsilon'_i\}_1^l$ (which is not necessarily in the same block as μ because of ii)).

Thus, we clearly see that partitions λ in the same block can be constructed by dressing up with balanced strips a certain partition μ with no removable balanced strips. Denote by η the balanced strip of smallest length addable to μ . If N is odd denote by $\bar{\mu}$ the minimal partition $\bar{\mu}/\mu = \eta$. If N is even denote by $\bar{\mu}$ the minimal partition $\bar{\mu}/\mu = \eta$ only if the two boxes with content $-N/2, 1 - N/2$ in η are disposed horizontally and $\bar{\mu} = \mu$ otherwise. Partitions which are of the form μ dressed up with an even (odd) number of balanced strips are in the same block as μ ($\bar{\mu}$). Note that it is irrelevant in what order the strips are dressed on μ . Also, there cannot be two balanced strips of the same length. Thus, a partition λ in the block μ ($\bar{\mu}$) is unambiguously specified by the length of balanced strips in the skew partition λ/μ .

We claim now and show below that a block of $\text{osp}(R|2S)$ is composed, in the partition notation of sec. A.1, of hook shaped partitions built up by dressing with balanced strips an atypical partition with no removable balanced strips.²⁰ For that we need to reformulate the original block result [34] for $\text{osp}(R|2S)$.

Let the *degree of atypicality* k of a dominant weight Λ , be the dimension of the subspace $\mathcal{A}$ of the root lattice orthogonal to $\Lambda + \rho$, where ρ is the Weyl vector of $\text{osp}(R|2S)$. Each atypicality condition in eq. (A.10,A.11) is, in fact, an orthogonality condition between an odd root $\delta_i \pm \epsilon_j$, $\epsilon_j \neq 0$ and $\Lambda + \rho$. Therefore, k is the number of odd roots orthogonal to each other and to $\Lambda + \rho$ or, equivalently, the number of atypicality conditions labeled by couples (i, j) with distinct i and j . From the definition of the highest weight module $V(\Lambda)$ it is clear that irreducible finite dimensional components of $V(\Lambda)$ must have dominant weights of the form $\Lambda - \sum \mathbb{N}\alpha$, where the sum is over all odd positive roots α spanning $\mathcal{A}$.

Consider a $\text{osp}(R|2S)$ weight λ , which, in the notation of app. A.1, has symplectic part ρ and orthogonal part σ . Suppose ρ_{n+1}, ρ_{m+1} are the first columns of λ satisfying $\rho_{n+1} \leq r - S + n$ and $\rho_{m+1} \leq m + R - S - \rho_S - 1$. Then, one can find rows i_j , such that $\lambda_{i_j} < S$ and the pairs (i_j, j) satisfy the atypicality condition (A.11) for $m < j < n$ if R is odd and $m < j \leq n$ if R is even and the atypicality condition (A.10) for $n \leq j$. Indeed, from eq. (A.11) with $\sigma_i = 0$ the condition $m < j$ implies $i_j > \rho_S$ and thus $\lambda_{i_j} < S$, while $i_j \leq r$ implies $j \leq n$ if R is even and $j < n$ if R is odd. From eq. (A.10) with $\sigma_i = 0$ the condition $n \leq j$ implies $i_j \leq r$ while $i_j > \rho_S$ follows directly from $\rho_j \geq \rho_S$.

Conversely, if ρ_j , $m < j$ satisfies an atypicality condition with $\sigma_i = 0$, then $\lambda_i < S$. As shown in fig. 21, n is the width of the foot of the narrowest hook with arm width $r - S + n$ in which the Young tableau of λ can be drawn in.

Two atypicality conditions (i, j) and (i', j') are called independent if $i \neq i'$ and $j \neq j'$. Clearly, conditions (i_j, j) are pairwise independent for $m + 1 \leq j < n$ and for $n \leq j$. Let us show that an atypicality condition (i_j, j) , $m + 1 \leq j < n$ is independent of conditions $(i'_{j'}, j')$, $n \leq j'$ iff there is a row shorter than S such that the box ϵ at the end of this row and the box ϵ'_j at the end of column j are balanced.

In order to do that it is useful to imagine the partition λ drawn on an infinite square lattice, as in fig. 21, with each square having its content written inside. The following cases are possible

- Suppose first that there is no box with at the end of the row j . From $j < n$ follows $j \leq S - r$. Observe that the column $1 + S - r \leq j' = 1 + S - i_j$ is also empty. Therefore $i'_j = i_j$ and the atypicality conditions (i_j, j) and (i'_j, j') are not independent.
- Let $\rho_j \neq 0$ and let ϵ_j be the box at the end of column j . No suppose that λ has a rightmost box ω with content $c = 2 - N - c(\epsilon'_j)$ and let j' be the column of that box. Condition $\rho_j \leq m + R - S - \rho_S - 1$ gives $c \leq c(\epsilon'_S) + 1 + m - j$. The equality sign cannot hold because otherwise $j = j' = S$ which contradicts $j < n$. Thus $1 + S - r \leq c = 1 + S - i_j < c(\epsilon_S)$ and therefore $S - r \leq n \leq j' < S$. If $j' - \rho_{j'} < c$ then there is a box ϵ below ω , which is balanced with ϵ'_j and has no box to the right, thus it is the end of a row shorter than S . If $j' - \rho_{j'} = c$ then comparing the i 's from the two atypicality conditions we get $i_j = i'_j$ and the two atypicality conditions are not independent.
- Finally, if there is no box with content c then the column $j' = c$ gives an atypicality condition $(i'_{j'}, j')$ with $i_j = i'_{j'}$.

Next, by the definition of m , a column $j \leq m$ can satisfy an atypicality condition only with a row $\lambda_i \geq S$. After inserting $\sigma_i = \lambda_i - S$ in eqs. (A.10,A.11) we get

$$\lambda'_j + \lambda_i + 1 - i - j = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$(j - \lambda'_j) + (\lambda_i - i) = 1 - N. \quad (\text{B.2})$$

The lhs in eq. (B.1) is the hook length of the box in the row i and column j of λ , thus, always positive. On the other hand, eq. (B.2) requires the box ϵ'_j at the foot of column j be balanced with the box ϵ_i at the end of row i .

In the end, we see that there are two sources for *independent* atypicality conditions satisfied by a weight λ . First, if n is the width of the foot of the narrowest hook with arm width $r - S + n$, in which the Young tableau of

²⁰This means that condition ii) is relaxed when partitions are viewed as $\text{osp}(R|2S)$ weights. In particular the minimal partitions $\mu, \bar{\mu}$ discussed above are in the same block of $\text{osp}(R|2S)$ if there are hook shaped and atypical. Condition ii) is clearly related to the $\mathbb{Z}_2$ we neglect by looking at the representation theory of $\text{osp}(R|2S)$ instead of $\text{OSp}(R|2S)$.

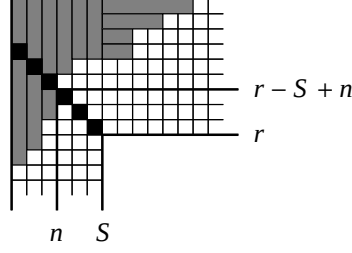


Figure 21: A partition λ drawn on a hook shaped square lattice and fitting exactly inside a hook with foot width n and arm width $r - S + n$. The black boxes represent the diagonal of squares with content $c = S - r$.

λ can be drawn in, then there are $p := S - n$ atypicality conditions satisfied by the weight and we call them of type 1. Second, to each balanced pair of boxes ϵ, ϵ' , such that ϵ is a box at the end of a row and ϵ' is a box at the end of a column, corresponds an atypicality condition of type 2. If λ satisfies q atypicality condition of type 2 then the degree of atypicality of the weight is $k = p + q$.

Let $\{\epsilon_{i_j}, \epsilon'_{j_q}\}_1^q, j_1 < \dots < j_q$ be the set of balanced pairs satisfying atypicality conditions of type 2. Applying the iterative construction explained above to the boxes $\epsilon_{i_q}, \epsilon'_{j_q}$ one can see that there is a removable balanced strip η_{j_q} in $\lambda_q := \lambda$, with its ends in $\epsilon_{j_q}, \epsilon'_{j_q}$. Clearly, by the same reasoning, one can identify a new balanced strip $\eta_{j_{q-1}}$ removable in $\lambda_{q-1} := \lambda_q / \eta_{j_q}$. The end λ_0 of this iterative procedure has no more removable balanced strips. Note that λ_0 satisfies k atypicality conditions all of type 1 and the sequence of weights $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ has the same degree of atypicality k .

In order to complete the proof of the claim it remains to notice two things. First, if α_i^1 is an odd root generating an atypicality condition of type 1, then $\Lambda - \sum_{i=1}^p \mathbb{N} \alpha_i^1$ is not dominant. Second, if $\alpha^2 = \delta_j + \epsilon_j$ is an odd root generating an atypicality condition of type 2, then Λ has a removable strip with its ends in the last box ϵ_i of row i and ϵ'_j of column j and $\Lambda - \alpha_i^2$ is dominant and can be represented by a partition of the form $\lambda / \{\epsilon_i, \epsilon'_j\}$, where λ is the Young tableau of Λ .

C Modification rules and $\text{OSp}(R|2S)$ associate weights

The explicit form of the characters of classical groups is easier derived in the limit of infinite rank of the corresponding Lie algebra. The inverse limit exists and is given by the *modification rules* for characters. The concepts of infinite rank and inverse limit are rigorously defined for the case of Schur symmetric functions, connected to the irreducible characters of $\text{GL}(N)$, in [42]. Let us clarify this point.

The characters of classical groups, evaluated on a group element, are polynomials in the eigenvalues of that element in the defining representation for the group. The infinite rank limit corresponds to considering polynomials depending on an infinite number of such variables. Irreducible characters are polynomials with a very specific symmetry, which is not obscured by the restriction of finite number of variables in the infinite rank limit.²¹ These objects are known as *symmetric functions*. When the number of variables is set finite most symmetric functions become functionally dependent. Once an algebraically independent subset of symmetric functions is chosen, which is the actual set of characters in the case of classical groups, the modification rules “for characters” represent arbitrary symmetric functions along this basis.

One can introduce generalized symmetric functions sc_μ for the supergroup $\text{OSp}(R|2S)$ according to eqs. (4.5, 4.6), see [25], [15]. The major difference with respect to classical groups is that functionally independent generalized symmetric functions are no longer irreducible characters of the supergroup. However, modification rules for sc_μ exist and have been derived in [26]. We bring them below in the form of eq. (4.8) with the notations of our paper.

Suppose that λ is a typical $\text{osp}(R|2S)$ weight. Then, according to [26], only sc_μ with μ of the form λ dressed by balanced strips $\eta_1, \dots, \eta_m$ modify to sc_λ

$$sc_\mu = \varepsilon^m w(\mu/\lambda) sc_\lambda, \quad (\text{C.1})$$

²¹For instance, in the case of Schur symmetric functions this specific symmetry is the Littlewood-Richardson rule.

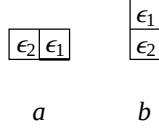


Figure 22: Configuration of lowest boxes ϵ_1, ϵ_2 in λ with content $1 - N/2, -N/2$ when N is even. Thick lines represent the border of the Young tableau of λ .

here ε is the superdeterminant representation. We have also introduced the weight function $w(\mu/\lambda) = \prod_{i=1}^m (-1)^{c_i-1}$ defined on skew partitions composed of balanced strips and c_i is the number of columns in η_i .

Consider now, the $\text{osp}(R|2S)$ block labeled by the weight ν with degree of atypicality k and no removable balanced strips. Then, any weight λ in the block B_μ of μ is of the form ν dressed up by $q_\lambda \leq k$ balanced strips. Then, according to [26], sc_μ with μ of the form ν dressed up by $m \geq k + 1$ balanced strips modifies to

$$sc_\mu = \sum_{\lambda \in B_\nu} C_{m-k-1}^{m-q_\lambda-1} w(\mu/\lambda) (-1)^{k-q_\lambda} \varepsilon^{m-q_\lambda} sc_\lambda. \quad (\text{C.2})$$

For a typical weight λ we put λ^* equal to λ dressed up by the balanced strip of minimal length η_1 if $\lambda'_S < r$. In order to prove that $sc_{\lambda^*} = \varepsilon sc_\lambda$ one has to show that η_1 runs over an odd number of columns.

Let us prove that η_1 runs over an odd number of columns c_1 if $\lambda'_S < r$ and an odd (even) number of columns if $\lambda'_S = r$ and R is odd (even).

Indeed, each box in η_1 belongs either to a horizontal or a vertical part of the strip, except for the boxes at the corners of η_1 , which belong to both. We say the balanced pair $\epsilon, \epsilon' \in \eta_1$ has an allowable configuration if both boxes belong either to horizontal or vertical parts of η_1 , otherwise ϵ, ϵ' has a non allowable configuration. As discussed in app. B, to every non allowable configurations of ϵ, ϵ' with content c, c' corresponds a removable balanced strip in λ with its ends in the border boxes with content $c - 1, c' + 1$ or $c + 1, c' - 1$ depending on whether ϵ is on a horizontal or a vertical part of η . Because λ is a $\text{osp}(R|2S)$ typical weight and, thus, has no removable balanced strips, there are only allowable configuration of balanced pairs in η_1 . Thus, a balanced pair in η_1 , which is not in the same column, indexes either two different columns or none. There is at most one column containing the whole balanced pair and it appears always if N is odd and only for $\lambda'_S < r$ if N is even, as shown in fig. 22. Thus, c_1 is always odd for R odd and even only if $\lambda'_S = r$ for R even.

Let η_i denote the i th lowest length strip addable to λ and c_i the number of columns in it. One can prove by the same method that η_{i+1}/η_i has an even number of columns, one of which is already in η_i and, consequently, $c_{i+1} - c_i$ is odd.

Again by the same method it is possible to prove that $\eta_1 + \eta_2$ has an even number of columns. This is because η_2 contains a substrip η'_1 which can be obtained by moving down along the diagonal the strip η_1 . Applying what was said above about η_{i+1}/η_i to η_2/η'_1 we see that $w(\eta_1 + \eta_2) = -1$.

If λ is typical and $\lambda'_S < r$ then $\mu = \lambda + \eta_1 + \eta_2$ is the next partition in the block of λ , while if $\lambda'_S = r$ then $\mu = \lambda + \eta_1$ is the next partition in the bloc of λ . Therefore we have just shown, as claimed in sec. 4.3 that $sc_\mu = -sc_\lambda$.

Thus, the two cases in eq. (C.1) corresponding to the parity of m can be simply written as $sc_\mu = w(\mu/\lambda) sc_\lambda$ if $\lambda \leq \mu$ and $sc_\mu = w(\mu/\lambda^*) sc_{\lambda^*}$ if $\lambda^* \leq \mu$ because $w(\mu/\lambda) = w(\mu/\lambda^*)$.

We do not know how to explicitly define the associates of atypical weights for general $\text{osp}(R|2S)$.

A lattice approach to the conformal $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ supercoset sigma model. Part II: The boundary spectrum.

Constantin Candu⁽¹⁾ and Hubert Saleur^(1,2)

*Service de Physique Théorique, CEA Saclay,
Gif Sur Yvette, 91191, France⁽¹⁾*

*Department of Physics and Astronomy, University of Southern California
Los Angeles, CA 90089, USA⁽²⁾*

Abstract

We consider the partition function of the boundary $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ coset sigma model on an annulus, based on the lattice regularization introduced in the companion paper. Using results for the action of $\text{OSp}(2S+2|2S)$ and $B_L(2)$ on the corresponding spin chain, as well as mini-superspace and small g_σ^2 calculations, we conjecture the full spectrum and set of degeneracies on the entire critical line. Potential relationship with the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ Gross-Neveu model is also discussed.

1 Introduction

This paper relies heavily on the results of its companion [1]. In the latter work, we have defined a lattice model which, we argued, is in the universality class of the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ coset sigma model, and carefully studied the decomposition of the Hilbert space of the corresponding quantum spin chain $V^{\otimes L}$ under the action of the supergroup $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ and its non-semisimple commutant $B_L(2)$. We shall now use these results to obtain information on the boundary spectrum of the model.

The paper is organized as follows. In section 2, various easily obtained results in the continuum limit are collected. Section 3 deals with the weak coupling limit in the bulk. Subsection 3.1 tackles the minisuperspace analysis, subsection 3.2 defines and studies the small coupling expansion around $g_\sigma^2 = 0$, subsection 3.3 discusses the exact structure of the theory as $g_\sigma^2 \rightarrow 0$ and subsection 3.4 compares our perturbative approach with the one of Wegner formally extended to the OSp case. Section 4 exploits the algebraic structures of the lattice model elucidated in the first paper to formulate two essential conjectures about the boundary spectrum. Section 5 presents thorough numerical checks of these conjectures. Section 6 discusses potential relationship with the OSp Gross Neveu models and our third conjecture. Section 7 contains our conclusions.

All notations are consistent with those in [1]. In addition, some of the new notations introduced in what follows are:

- $2\pi g = g_\sigma^2$, coupling constant of the sigma model
- Vir_B the chiral algebra obtained from the Brauer algebra in the continuum limit

2 Some immediate results for boundary partition functions in the continuum limit

2.1 The periodic partition function

As discussed at the end of section 2 in [1], the periodic partition function of the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ model on the annulus is obtained by calculating the supertrace of the appropriate power of the transfer matrix, which translates geometrically by giving to all non contractible loops a weight two. This partition function is thus *identical* with the one of the 6 vertex model. The continuum limit is well known to be described by a free compactified boson with Dirichlet boundary conditions on either sides of the annulus. This bosonic degree of freedom comes from the interpretation of the 6 vertex model as

a solid on solid model with height variables dual to the arrows. It is traditional to write the action for this boson $\tilde{\varphi}$ as:

$$S = \frac{g}{4\pi} \int d^2x (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 \quad (2.1)$$

with $\tilde{\varphi}$ quantized on a circle of circumference 2π . Standard results show the relation between the coupling constant g and the anisotropy parameter of the lattice model:

$$\Delta = \cos \pi g \quad (2.2)$$

so the case $\Delta = -1$ corresponds $g = 1$ and $\Delta \rightarrow 1$ to $g \rightarrow 0$. The continuum limit of the partition function is then

$$\tilde{Z}_{DD} = \frac{1}{\eta} \sum_j q^{gj^2} \quad (2.3)$$

where j is integer for a lattice of even width, and j is half an odd integer for a lattice of odd width. We have introduced the modular parameter $q = e^{2\pi i\tau}$ to describe the annulus where $\tau = \frac{iT}{2L}$, L is the transverse length (so the hamiltonian or transfer matrix act on the space $V^{\otimes L}$) and $1/T$ is the length in imaginary time (this T must not be confused with the transfer matrix, also denoted by the same letter in what follows). η is the usual Dedekind function

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.4)$$

We note however that the loop partition function for the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ model coincides with Neumann boundary conditions in terms of the orthosymplectic vector field (Dirichlet boundary conditions would turn into loops having open ends on the boundary). Therefore, the correspondence with the sigma model is best understood by turning to the dual of the field $\tilde{\varphi}$ whose action is

$$S = \frac{1}{4\pi g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2 \quad (2.5)$$

The partition function (2.3) can then be reinterpreted as the partition function with Neumann boundary conditions

$$Z_{NN} = \frac{1}{\eta} \sum_j q^{gj^2} \quad (2.6)$$

The identity of the partition function of the $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ model and of the free boson in this case can of course be directly demonstrated at the level of the field theory. Indeed, the functional integral over the fundamental $\text{OSp}(2S + 2|2S)$ fields $\phi^i(\tau, \sigma)$ can be formally evaluated by using an integral representation for the constraint $\delta(J_{ij}\phi^i\phi^j - 1)$. This leaves one with $2S + 2$ identical bosonic, and $2S$ identical fermionic integrals, which cancel against each other, leaving two bosonic integrals. The constraint can then be reintegrated, leading to the action

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi^1)^2 + (\partial_\mu \phi^2)^2], \quad (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = 1 \quad (2.7)$$

From this we identify the Coulomb gas coupling

$$2\pi g = g_\sigma^2 \quad (2.8)$$

and $\phi^1 = \cos \varphi$, $\phi^2 = \sin \varphi$.

2.2 The twisted partition function

In sec. 3.1 of [1] we have defined for the spin chain $V^{\otimes L}$ a, so called, quasiperiodic partition function depending on a supermatrix $D \in \text{OSp}(2S + 2|2S)$ encoding the set of all possible boundary conditions.

Let us call *twisted* the subset of boundary conditions such that $\text{sdet } D = -1$. The simplest twisted boundary condition is of the form

$$\phi^1(\tau, \sigma + r) = \phi^2(\tau, \sigma), \quad \phi^2(\tau, \sigma + r) = \phi^1(\tau, \sigma), \quad \phi^i(\tau, \sigma + r) = \phi^i(\tau, \sigma), \quad i \neq 1, 2 \quad (2.9)$$

and the supermatrix D encoding it is in fact the reflection ρ described in [1].

The twisted boundary condition in eq. (2.9) defines a twisted partition function Z^{tw} which can be easily computed in the path integral formalism. This, again leads to the cancellation of $2S$ bosonic integrals against the fermionic ones leaving the fields $\phi^{1,2}$. After a simple rotation by $\pi/2$ in the space $\phi^{1,2}$ one can see that the twisted boundary conditions in eq. (2.9) are equivalent to antiperiodic boundary conditions for the field φ itself. The partition function for the compactified boson φ is therefore:

$$Z^{\text{tw}} = [\det (-\Delta_{DA})]^{-1/2}$$

where Δ_{DA} is the Laplacian with Dirichlet boundary conditions in space and antiperiodic boundary conditions in (imaginary) time direction:

$$Z^{\text{tw}} = \sqrt{\frac{2\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)}} = \frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)} = q^{-1/24} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)} = q^{-1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}). \quad (2.10)$$

Note that this partition function is independent of w , ie of the weight of the intersections.

The fermionic fields in eq. (2.9) are periodic. One can as well consider antiperiodic boundary conditions for fermions. Therefore we shall distinguish between the periodic and antiperiodic twisted partition functions, the one in eq. (2.10) being periodic.

In the discrete loop model picture, imposing either periodic or antiperiodic twisted boundary conditions amounts to giving a weight 0 to the loops winding the annulus an odd number of times. The difference resides in choosing 2 or $\tilde{N} := 4S + 2$ for the loops winding the annulus an even (nonzero) number of times.

2.3 The case $w = 0$

In the case $w = 0$, loops do not intersect and the partition function can be easily computed. Noncontractible loops can wind only once around the system and get a weight $\tilde{N}$ for (anti)periodic boundary conditions for bosons(fermions). The partition function can be written as

$$Z = \sum_{j=0}^{\infty} D_j \frac{q^{j^2} - q^{(j+1)^2}}{\eta(\tau)} \quad (2.11)$$

for an even lattice, while for an odd lattice, the sum runs j half an odd integer (and thus adding odd and even widths gives the same sum for j half integer). Here,

$$D_j = \frac{\sinh(2j+1)\alpha}{\sinh \alpha} \quad (2.12)$$

and α is determined through $D_{1/2} = \tilde{N}$ ($= 4S + 2$), the dimension of the fundamental. We then find the number of $(1,0)$ fields to be $D_1 = 1 + 2 \cosh 2\alpha = \tilde{N}^2 - 1$, a result indicating the underlying $\text{SU}(2S + 2|2S)$ symmetry. Note that $D_1 = D_{\text{adj}} + \frac{\tilde{N}^2}{2}$. The total number of $h = 1$ fields in the open boundary partition function is thus the sum of the number of currents and $\frac{\tilde{N}^2}{2}$ additional primary fields in the rank 2 symmetric $\text{SU}(2S + 2|2S)$ tensor.

Note that the partition function for even lattice can also be written as

$$Z = \sum_{j=0}^{\infty} (D_j - D_{j-1}) \frac{q^{j^2}}{\eta(\tau)} \quad (2.13)$$

with $D_{-1} := 0$. Evaluating the difference of the two dimensions leads to the simple formula:

$$Z = \frac{1}{\eta(\tau)} \theta_3 \left(\frac{i\alpha}{\pi}, 2\tau \right). \quad (2.14)$$

The modular transform immediately follows:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{(n+i\alpha/\pi)^2/4} \quad (2.15)$$

where $\tilde{q} = e^{-2\pi i \frac{1}{\tau}}$ and exhibits complex exponents. These complex exponents can be traced back to the complex electric charges in the free boson theory (2.7) necessary to give non contractible loops a weight greater than two. It is not clear of course that the modular transform of the modified partition function should have a useful meaning in the sigma model CFT: antiperiodic boundary conditions for fermions in the space direction do not have to be included for consistency of the model (unlike say, for the Majorana fermions of the Ising model).

There is yet another way of obtaining the partition function in eq. (2.11) at $w = 0$ if one knows: i) the trace of the transfer matrix restricted to an irrep of the Temperley Lieb algebra and ii) the decomposition of representations of $B_L(2)$ into irreps of the Temperley Lieb algebra. According to sec. 4.1 of [1], the partition function with most general boundary conditions (encoded in the matrix D) can be written in the form

$$Z_D = \text{str}_{V^{\otimes L}} T^\beta D^{\otimes L} = \sum_{\lambda} sc_{\lambda}(D) \chi'_{\lambda}(T^\beta),$$

where $\lambda \vdash L - 2k$, $k = 0, 1, \dots$, $sc_{\lambda}(D)$ are $\text{OSp}(4|2)$ generalized symmetric functions and χ'_{λ} is the character of the standard $B_L(2)$ representation $\Delta_L(\lambda)$. On the other hand, according to the discussion in sec. 5.2 of [1], the standard module $\Delta_L(\lambda)$, $\lambda \vdash m = L - 2k$ decomposes into a direct sum of irreps $D_L(m + 2l)$ of the Temperley Lieb algebra as

$$\Delta_L(\lambda) \simeq \bigoplus_{l=0}^k f_{\lambda} n(m, m + 2l) D_L(m + 2l)$$

where f_{λ} is the number of standard Young tableaux of shape λ and $n(m, l)$ are multiplicities. If c_j is the character of the Temperley Lieb irrep $D_L(2j)$ in the limit $L \rightarrow \infty$, then according to [3] (this is discussed in more details below)

$$c_j(T^\beta(w = 0)) = \frac{q^{j^2} - q^{(j+1)^2}}{\eta(\tau)}$$

and, therefore, in the continuum limit the partition function of the dense intersecting loop model at $w = 0$ becomes

$$Z(D) = \sum_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \left[\sum_{m=2j, 2j-2, \dots} \left(\sum_{\lambda \vdash m} f_{\lambda} sc_{\lambda}(D) \right) n(m, 2j) \right] \frac{q^{j^2} - q^{(j+1)^2}}{\eta(\tau)}. \quad (2.16)$$

In simple terms, huge degeneracies appear at this point. Indeed, since loop crossings are not allowed ($w = 0$), different operators corresponding to different symmetries of the non contractible lines now become identical.

3 Weak coupling results for the bulk theory

3.1 Minisuperspace on the superphere $\text{OSp}(2S + 2|2S)/\text{OSp}(2S + 1|2S)$

The limit where $g_{\sigma} \rightarrow 0$ of the bulk spectrum can be analyzed using a minisuperspace approximation. Such a strategy has proved extremely successful in recent analysis of WZW models on supergroups in particular [4, 5].

Indeed, consider the sigma model on a cylinder of circumference r or, equivalently, at temperature $T = \frac{1}{r}$. Doing a Wick rotation transforms the space into a basic circle $\sigma \equiv \sigma + r$, while the imaginary time runs to infinity along the axis of the cylinder. At small r - ie large temperature - it is reasonable to neglect the fluctuations of the fields in the transverse direction, and replace the fields $\phi^i(\sigma, \tau)$ by $\phi^i(\tau)$.

To be more precise, let us describe the problem in a hamiltonian formalism. In general, one has to deal with wave functions Ψ which are functions of the field configuration at a given time (or imaginary time), $\Psi[\phi^i(\sigma)]$. In the minisuperspace limit, these become functions of the σ independent approximation of the fields, ie *functions on the target space itself*. If the sigma model of interest is a model on a (super)group, the wavefunctions become functions on that (super)group. The hamiltonian becomes a differential operator on these functions.

To see how this works and fix notations, consider briefly the O(2) action

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi^1)^2 + (\partial_\mu \phi^2)^2] = \frac{1}{4\pi g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2 \quad (3.1)$$

with φ the angle of the vector ϕ , quantized on a circle of circumference 2π . The minisuperspace approximation should be valid in the limit of g large. This corresponds to small temperatures in the XY model, ie the limit where the free floating vortex operators are strongly irrelevant.

So, in the minisuperspace approximation, the action in eq. (3.1)

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d\tau \dot{\varphi}^2$$

yields the quantised hamiltonian

$$H = \frac{g_\sigma^2 T}{2} \Pi^2 = -\frac{g_\sigma^2 T}{2} \hat{\Delta}_1.$$

Here Π is the canonical momentum associated with φ , the equal time commutator is $[\Pi, \varphi] = 1/i$ and $\hat{\Delta}_1 = d^2/d\varphi^2$ is the Laplacian on the circle. The hamiltonian H has eigenfunctions $\Psi_n(\phi) = e^{ni\varphi}$ with eigenenergies $E_n = g_\sigma^2 T n^2/2$. Again, this approximation should become good when g_σ^2 is large, so these dimensions are small and accumulate near the ground state.

On the other hand, H reads, in the Virasoro formalism

$$H = 2\pi T \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right).$$

The spectrum is thus, from the exact solution,

$$E = 2\pi T \left(\frac{e^2 g_\sigma^2}{4\pi} + \frac{\pi}{g_\sigma^2} m^2 - \frac{1}{12} \right) \quad (3.2)$$

and coincides in the limit g_σ^2 small with the one obtained in the minisuperspace limit indeed. Note that the central charge being a contribution of order $O(1)$ to the spectrum should not be visible in the minisuperspace approximation.

Let us now apply these ideas to the simplest non trivial model of our series, namely the supersphere $S^{3|2}$. We shall not dwell here on the subtleties related to rigorous definition of the supersphere as a supermanifold in the sense of mathematicians. Instead, we prefer to define it directly as the coset space $S^{3|2} := \text{OSp}(4|2)/\text{OSp}(3|2)$.

To be more specific let us fix some notations. Let B_L be some Grassman algebra with a large enough number of generators L . Consider the linear space $\mathbb{C}^{4|2}$ over B composed of points X , which can be parametrized by four even coordinates $X^i = x^i \in B$, $i = 0, 1, 2, 3$ and two odd coordinates $X^\alpha = \eta^\alpha \in B$, $\alpha = 1', 2'$.

$\mathbb{C}^{4|2}$ becomes a supereuclidian linear space $E^{4|2}$ if we endow it with a scalar product which is defined as follows: for two points $X, Y \in \mathbb{C}^{4|2}$ with coordinates x^i, η^α and, respectively, y^i, ξ^α put

$$X \cdot Y = X^p J_{pq} Y^q = x^i J_{ij} y^j + \eta^\alpha J_{\alpha\beta} \xi^\beta = \sum_{i=0}^3 x^i y^i + \eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1,$$

where $p, q = 0, 1, 2, 3, 1', 2'$. To distinguish between even and odd components we introduce the grading function $|\cdot|$ which is zero evaluated on even indices and one on the odd ones, e.g. $|i| = 0, |\alpha| = 1$.

It is then natural to associate to each $X \in E^{4|2}$ a point X^* in the dual space by the usual index lowering procedure $X_p = X^q J_{qp}$ in such a way that the scalar product $X \cdot Y$ becomes $X^*(Y) = X_p Y^p$ and to each endomorphism M of $E^{4|2}$ the dual(transpose) M^* by the correspondence $Y = MX \Rightarrow Y^* = X^* M^*$. In matrix components $(M^*)_q^p = M_q^p (-1)^{|q||p|}$.

An element of $\text{OSp}(4|2)$ is an element of $\text{End } E^{4|2}$ orthogonal with respect to the scalar product in eq. (3.1), that is in matrix notations

$$M^* M = I. \quad (3.3)$$

Note that, so defined, the supergroup $\text{OSp}(4|2)$ is noncompact because it contains as a subgroup the group $\text{Sp}(2) \simeq \text{SL}(2)$ of transformation of η^α only.

The supergroup $\text{OSp}(3|2)$ is then realized as the subgroup of $\text{OSp}(4|2)$ stabilizing the line x^0 . Therefore, a point on $S^{3|2}$ has coordinates of the form $X^p = M_0^p$ for some $M \in \text{OSp}(4|2)$. One can see from eq. (3.3) that the coordinates of the points $X \in S^{3|2}$ satisfy the equation

$$X_p X^p = \sum_{i=0}^3 (x^i)^2 + 2\eta^1 \eta^2 = 1, \quad (3.4)$$

giving the embedding of $S^{3|2}$ into $E^{4|2}$. The solutions of eq. (3.4) can be parametrized as follows

$$x^i = n^i (1 - \eta^1 \eta^2) \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=0}^3 (n^i)^2 = 1. \quad (3.6)$$

Note that one can introduce the spherical or Euler angles to parametrize the n^i 's in the same way as for the embedding of S^3 into $\mathbb{R}^3$. However, when the body of some component n^i vanishes, that is $b(n^i) = 0$, only the square of the soul of n^i is fixed by eq. (3.6), which is not enough to uniquely determine the soul itself. Therefore, the parametrisation with spherical or Euler angles does not give the full set of solutions when $b(n^i) = 0$ for some i .

The infinitesimal distance element is obviously

$$dX_p dX^p = 2(1 - \eta^1 \eta^2) d\eta_1 d\eta_2 + (1 - 2\eta_1 \eta_2) \sum_{i=0}^3 (dn^i)^2.$$

Solving the constraints for n^i , one can extract the metric tensor g_{ab} on $S^{3|2}$.

Then, in terms of fields n^i, η^α , the $S^{3|2}$ sigma model field theory action

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2 x \left(\sum_{i=0}^3 (\partial_\mu x^i)^2 + 2\partial_\mu \eta^1 \partial_\mu \eta^2 \right) \quad (3.7)$$

becomes

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2 x \left(2(1 - \eta^1 \eta^2) \partial_\mu \eta^1 \partial_\mu \eta^2 + (1 - 2\eta^1 \eta^2) \sum_{i=0}^3 (\partial_\mu n^i)^2 \right). \quad (3.8)$$

The square root of $g = \text{sdet } g_{ab}$ fixes the invariant measure on the supersphere $dS^{3|2} = [(1 - 2\eta_1 \eta_2) d\eta_1 d\eta_2] dS^3$ in the path integral formalism, where dS^3 denotes the invariant measure on the target space S^3 for the fields n^i .

We shall use the isomorphism $f : S^3 \rightarrow SU(2)$ to give a parametrization of (almost) all the sphere S^3 . Thus, if n^i are the coordinates of a point on S^3 , then the corresponding element of $SU(2)$ is $G = f(n^0, n^1, n^2, n^3) = n^0 + \sum_{a=1}^3 \sigma^a n^a$, where σ^a are Pauli matrices.

Next, recall that there is an isomorphism $g : \text{SO}(4) \rightarrow SU(2) \otimes SU(2) / \mathbb{Z}_2$. Thus, if $g(R) = G_L \otimes G_R$ then the action of R on n^i 's can be represented as $f(Rn) = G_L f(n) G_R^\dagger$, where on the right hand side we have a matrix multiplication.

In what follows we shall use the Hopf parametrisation of $SU(2)$, which shall prove more comfortable than the usual parametrisation with Euler angles

$$G = \begin{pmatrix} e^{i\xi_1} \cos \mu & e^{i\xi_2} \sin \mu \\ -e^{-i\xi_2} \sin \mu & e^{-i\xi_1} \cos \mu \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

with $0 \leq b(\mu) \leq \pi/2$ and $0 \leq b(\xi_1), b(\xi_2) < 2\pi$, where $b : B_L \rightarrow \mathbb{R}$ denotes the body map. According to the remark made before, the points $b(\mu), b(\xi_1), b(\xi_2) = \pi\mathbb{Z}/2$ are singular for the parametrization in eq. (3.9).

Using the Hopf parametrisation of S^3 we get

$$\sum_{i=0}^3 (\partial_\mu n^i)^2 = \frac{1}{2} \text{tr} (\partial G^\dagger \partial G) = (\partial\mu)^2 + \cos^2 \mu (\partial\xi_1)^2 + \sin^2 \mu (\partial\xi_2)^2.$$

The classical minisuperspace hamiltonian provided by eq. (3.8) is then

$$H = \frac{g_\sigma^2 T}{2} \left[2(1 + \eta^1 \eta^2) \Pi_{\eta^1} \Pi_{\eta^2} + (1 + 2\eta^1 \eta^2) \left(\Pi_\mu^2 + \frac{1}{\cos^2 \mu} \Pi_{\xi_1}^2 + \frac{1}{\sin^2 \mu} \Pi_{\xi_2}^2 \right) \right]. \quad (3.10)$$

To quantize this hamiltonian one has to write the evolution operator in the path integral formalism and then derive the Schrodinger equation it satisfies by propagating the wave function for an infinitesimal amount of time. A shortcut to the correct final result is the ordering prescription for coordinate and canonical momenta yielding an invariant second order differential operator, that is the Laplace operator on $S^{3|2}$

$$g^{ba} \Pi_a \Pi_b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\Pi}_a g^{ba} \sqrt{g} \hat{\Pi}_b. \quad (3.11)$$

For the parametrisation in eq. (3.9) the nonvanishing components of the metric tensor g_{ab} are

$$g_{\mu\mu} = 1 - 2\eta^1 \eta^2, \quad g_{\xi_1 \xi_1} = (1 - 2\eta^1 \eta^2) \cos^2 \mu, \quad g_{\xi_2 \xi_2} = (1 - 2\eta^1 \eta^2) \sin^2 \mu, \quad g_{\eta^1 \eta^2} = (1 - \eta^1 \eta^2). \quad (3.12)$$

According to eqs. (3.11) and (3.12) the quantized hamiltonian becomes ¹

$$\hat{H} = -\frac{T g_\sigma^2}{2} \hat{\Delta}_{3|2} = T g_\sigma^2 \left[-(1 + \eta^1 \eta^2) \partial_{\eta^1} \partial_{\eta^2} + \frac{1}{2} \eta^1 \partial_{\eta^1} + \frac{1}{2} \eta^2 \partial_{\eta^2} + 2(1 + 2\eta^1 \eta^2) \Delta_{SU(2)} \right], \quad (3.13)$$

where $\Delta_{SU(2)}$ is the Laplace operator on $SU(2)$ normalized to have eigenvalues $j(j+1)$ with j integer or half integer

$$\Delta_{SU(2)} := \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + 2 \cot 2\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\cos^2 \mu} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \mu} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}. \quad (3.14)$$

Note that one can get the same quantum hamiltonian starting from the Laplace operator in $E^{4|2}$

$$\Delta_{4|2} := J^{qp} \frac{\partial}{\partial X^p} \frac{\partial}{\partial X^q} \quad (3.15)$$

by first making the change of coordinates

$$X^i = R x^i, \quad X^\alpha = R \eta^\alpha,$$

where $R = \sqrt{X_p X^p}$ and x^i, η^α are as in eq. (3.5,3.6), and then subtracting the radial part

$$\hat{\Delta}_{3|2} = R^2 \left(\Delta_{4|2} - \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial}{\partial R} \right).$$

The operator $\hat{\Delta}_{3|2}$ is also the second order Casimir in the regular representation of $\text{OSp}(4|2)$ in the space of functions on $S^{3|2}$.

¹As it is typical for quantum mechanics, this hamiltonian is defined up to an arbitrary constant. This constant has its origin in the arbitrariness of the measure of the regularized path integral.

It is easy to diagonalize $\hat{H}$ by hand. One finds the eigenvalues

$$E_n = 2Tg_\sigma^2 j^2 = \frac{Tg_\sigma^2}{2} n^2 \quad (3.16)$$

where j is the $SU(2)$ spin, $n = 2j$ is the $SU(2)$ Dynkin label.

The eigenfunctions are of four types:

$$(1 - n\eta^1\eta^2)f_{mm'}^j; \quad (1 + n\eta^1\eta^2)f_{mm'}^{j-1}; \quad \eta^1 f_{mm'}^{j-1/2}; \quad \eta^2 f_{mm'}^{j-1/2} \quad (3.17)$$

where the $f_{mm'}^j$ are the $(2j+1)^2$ eigenfunctions of $\Delta_{SU(2)}$ with eigenvalue $j(j+1)$. They form a basis of the left or right regular representation of $SU(2)$.

The dimension of the eigenvalue space is, for $j \geq 1/2$, thus made of $[2(j-1)+1]^2 + (2j+1)^2$ bosons and $2 \times [2(j-1/2)+1]^2$ fermions, leading to a superdimension 2 independent of j , and a dimension of $4n^2 + 2$, $j \geq 1$. In the $j = 0$ case there is only one eigenfunction which is a constant, while in the $j = 1/2$ case there are two fermionic eigenfunctions η^1, η^2 and four bosonic eigenfunctions $(1 - \eta^1\eta^2)G^{ij}$, where G^{ij} are the matrix elements of the $SU(2)$ matrix in eq. (3.9).

The conformal weights in the minisuperspace approximation can be computed by identifying the quantum evolution operator per unit of time $e^{-\hat{H}}$ for a particle moving on $S^{3|2}$ with the transfer matrix $q^{L_0 - \frac{1}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{24}}$ of the field theory sigma model. From eq. (3.16) and the identification $E_n = 4\pi T h_n$ the conformal weights in the minisuperspace approximation will be

$$h_n = \frac{g_\sigma^2 n^2}{8\pi} = \frac{gn^2}{4}.$$

These are exactly the XY conformal weights in eq. (3.2) in the limit $g_\sigma \rightarrow 0$.

Let us point in the end how a similar minisuperspace analysis can be carried out in the case of all supergroups $OSp(2S+2|2S)$. The supereuclidian space $E^{2S+2|2S}$ is defined as follows. For the sake of notation, a point in $\mathbb{C}^{2S+2|2S}$ is parametrized by the set of even coordinates $X^i = x^i$, $i = 1, \dots, 2S+2$ and odd coordinates $X^\alpha = \eta^\alpha$, $X^{S'+\alpha} = \bar{\eta}^\alpha$, $\alpha = 1', \dots, S'$. The scalar product between two points $X, Y \in E^{2S+2|2S}$ with coordinates $x^i, \eta^\alpha, \bar{\eta}^\alpha$ and, respectively, $y^i, \xi^\alpha, \bar{\xi}^\alpha$ is set to

$$X \cdot Y = X^p J_{pq} Y^q = x^i J_{ij} y^i + \eta^\alpha J_{\alpha\beta} \xi^\beta = \sum_{i=1}^{2S+2} x^i y^i + \sum_{\alpha=1}^S (\bar{\eta}^\alpha \xi^\alpha - \eta^\alpha \bar{\xi}^\alpha).$$

The Laplacian in $E^{2S+2|2S}$ is defined as in eq. (3.15) and the remarks made above remain valid for the Laplacian $\hat{\Delta}_{2S+1|2S}$ on the superphere $S^{2S+1|2S}$.

The quantised hamiltonian will be $\hat{H} = -\frac{Tg_\sigma^2}{2} \hat{\Delta}_{2S+1|2S}$ and

$$\hat{\Delta}_{2S+1|2S} = \frac{1}{1-\eta^2} \hat{\Delta}_{2S+1|0} + \Delta_{0|2S} - D_\eta^2, \quad (3.18)$$

where $\eta^2 := J_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta$, $\Delta_{0|2S} := J^{\alpha\beta} \partial_{\eta^\beta} \partial_{\eta^\alpha}$ and $D_\eta := \eta^\alpha \partial_{\eta^\alpha}$.

We shall search for eigenfunction of the hamiltonian in the functional space $L_2(S^{2S+12S}) := L_2(S^{2S+1}) \otimes \Lambda(\eta)$, where $\Lambda(\eta)$ is the Grassman algebra in the generators $\eta^\alpha, \bar{\eta}^\alpha$.

Let $S(x)$ denote the polynomial algebra in the variables x^i and consider the natural filtration of $S(x)$, seen as a vector space, by the homogeneous degree of its elements

$$S(x) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(x).$$

Counting all monomials of homogeneous degree n is not hard to see that $\dim S^n(x) = C_{2S+1+n}^n$. Clearly the vector space $S^n(x)$ provides a $SO(2S+2)$ representation which is equivalent to a totally symmetric tensor of rank n . Let $\mathfrak{H}^n(x) \subset S^n(x)$ denote the vector subspace of harmonic polynomials. We shall

need the following well known facts

$$\mathfrak{H}^n(x) \simeq \mathcal{S}^n(x)/x^2 \mathcal{S}^{n-2}(x) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} h_0(n) &:= \dim \mathfrak{H}_{2S+2|0}^n = C_{2S+1+n}^n - C_{2S-1+n}^{n-2} \\ L_2(\mathcal{S}^{2S+1}) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{H}^n(x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\hat{\Delta}_{2S+1|0} b_n(x) = -n(n+2S)b_n(x), \quad b_n(x) \in \mathfrak{H}^n(x), \quad X^2 = 1,$$

see [6]. Note that $\hat{\Delta}_{2S+2|0}$ has the same eigenvalues as the $\text{SO}(2S+2)$ second order Casimir evaluated on a traceless symmetric tensor or rank n , while $h_0(n)$ is the number of its independent components. Therefore the $\text{SO}(2S+2)$ representation provided by the vector space $\mathfrak{H}^n(x)$ is equivalent to a traceless symmetric tensor of rank n .

In order to generalize these results for the odd case consider the decomposition

$$\bigwedge(\eta) \simeq \bigoplus_{m=0}^{2S} \bigwedge^m(\eta). \quad (3.21)$$

It is most useful to exploit the fact that $\bigwedge^m(\eta)$ provide a $\text{Sp}(2S)$ representation equivalent to a totally antisymmetric tensor of rank m . It is well known that the representations provided by the action of $\text{Sp}(2S)$ on antisymmetric tensors of rank m and $2S-m$ are equivalent for $m = 0, \dots, S$, see [7]. This observation is at the origin of the following isomorphism of vector spaces ²

$$\bigwedge^{2S-m}(\eta) \simeq \eta^{2(S-m)} \bigwedge^m(\eta). \quad (3.22)$$

In particular this means that

$$\dim \eta^{2p} \bigwedge^m(\eta) = \dim \bigwedge^m(\eta) = C_{2S}^m, \quad p = 1, \dots, S-m. \quad (3.23)$$

Let $\mathfrak{H}^m(\eta)$ denote the vector space of harmonic polynomials (with respect to the Laplacian $\Delta_{0|2S}$) of homogeneous degree $m \leq S$. Then, using $\dim \eta^2 \bigwedge^{m-2}(\eta) = \dim \bigwedge^{m-2}(\eta)$, $m \leq S$ one can prove exactly as in the case of eq. (3.19) the isomorphism

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^m(\eta) &\simeq \bigwedge^m(\eta) / \eta^2 \bigwedge^{m-2}(\eta) \\ h_1(m) &:= \dim \mathfrak{H}^m(\eta) = C_{2S}^m - C_{2S}^{m-2}. \end{aligned}$$

Note that $h_1(m)$ is the number of components of a traceless antisymmetric $\text{Sp}(2S)$ tensor of rank m . Therefore $\mathfrak{H}^m(\eta)$ is an irreducible $\text{Sp}(2S)$ representation. The decomposition of $\text{Sp}(2S)$ antisymmetric tensors into irreps is reflected by the following relation derived from eq. (3.23)

$$\bigwedge^m(\eta) \simeq \mathfrak{H}^m(\eta) \oplus \eta^2 \mathfrak{H}^{m-2}(\eta) \oplus \dots, \quad m \leq S \quad (3.24)$$

Using eqs. (3.21,3.23,3.24) one finally arrives at the analog of eq. (3.20)

$$\bigwedge(\eta) \simeq \bigoplus_{m=0}^S \left(\mathfrak{H}^m(\eta) \oplus \eta^2 \mathfrak{H}^m(\eta) \oplus \dots \oplus \eta^{2(S-m)} \mathfrak{H}^m(\eta) \right) \simeq \sum_{m=0}^S \mathbb{C}[\eta^2] / \eta^{2(S-m)} \otimes \mathfrak{H}^m(\eta), \quad (3.25)$$

where $\mathbb{C}[t]$ is the polynomial algebra over $\mathbb{C}$ in one indeterminate t . The $\text{Sp}(2S)$ second order Casimir in $\bigwedge(\eta)$ regular representation is $\hat{\Delta}_{0|2S} := \eta^2 \Delta_{0|2S} + 2(S+1)D_\eta - D_\eta^2$. One can check that all $\eta^{2p} \mathfrak{H}^m(\eta)$ belong to the same eigenspace of $\hat{\Delta}_{0|2S}$ corresponding to the eigenvalue $-m(m-2S-2)$ and that indeed $\sum_{m=0}^S (S-m+1)(C_{2S}^m - C_{2S}^{m-2}) = 2^{2S}$.

²This is more than an isomorphism of vector spaces, it is actually an isomorphism of $\text{Sp}(2S)$ modules.

Now we are ready to search for the whole set of eigenfunction of $\hat{H}$. From the remark made above, the Laplacian $\hat{\Delta}_{2S+1|2S}$ is the second order Casimir in the left (or right) regular representation in $L_2(S^{2S+1|2S})$. Therefore, it commutes with the action of $\text{OSp}(2S+2|2S)$. This means that, for an eigenvalue λ of $\hat{\Delta}_{2S+1|2S}$, the eigenvalue subspace $L_\lambda \in L_2(S^{2S+1|2S})$ is $\text{OSp}(2S+2|2S)$ invariant and, consequently, admits a $\text{SO}(2S+2) \times \text{Sp}(2S)$ invariant decomposition of the form ³

$$L_\lambda \simeq \bigoplus_{p,m,n} d_{mn} \mathbb{C}[\eta^2]/\eta^{2(S-m+1)} \otimes \mathfrak{H}^m(\eta) \otimes \mathfrak{H}^n(x), \quad (3.26)$$

where d_{mn} are multiplicities. This being said, the most appropriate ansatz for the eigenfunction of $\hat{\Delta}_{2S+1|2S}$ is

$$F(X) = g(\eta^2) f_m(\eta) b_n(x), \quad f_m(\eta) \in \mathfrak{H}^m(\eta), \quad b_n(x) \in \mathfrak{H}^n(x), \quad X^2 = 1, \quad (3.27)$$

where $g(\eta^2) = \sum_{k=0}^{S-m} g_k \eta^{2k}$. Plugging the ansatz (3.27) into $\hat{\Delta}_{2S+1|2S} F(X) = \lambda F(x)$ one gets a recurrence relation

$$-4(k+1)(S-m-k)g_{k+1} = [(2k+m)^2 + \lambda]g_k + n(n+2S) \sum_{l=0}^k g_l$$

which ends with a polynomial equation of degree $S-m+1$ in λ

$$[(2S-m)^2 + \lambda]g_{S-m} + n(n+2S) \sum_{k=0}^{S-m} g_k = 0$$

with the solutions

$$\lambda_{mn}^p = -(m+n+2p)^2, \quad p = 0, \dots, S-m+1. \quad (3.28)$$

If $p \neq p'$ then $\lambda_{mn}^p \neq \lambda_{mn}^{p'}$. This means that there are no multiplicities in eq. (3.26), that is all $d_{mn} = 1$. We have not succeeded to arrive at a compact analytical form for the coefficients g_k . However, by replacing η^2 with a complex indeterminate t , it is not hard to see that the eigenvalue problem for $g(\eta^2)$ is closely related to a, somewhat more familiar, eigenvalue problem

$$4t(1-t)h''(t) - 4[(m+1)t + S-m]h'(t) - \left[m^2 + \frac{n(n+2S)}{1-t} \right] h(t) = \lambda h(t),$$

which has the same solution for eigenvalues and $h_k = g_k$, $k = 0, \dots, S-m$ if $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k$.

It is interesting to see how the eigenfunctions $F_{mn}^p(X) = g_{mn}^p(\eta^2) f_m(\eta) b_n(x)$, $X^2 = 1$ corresponding to the same eigenvalue $\lambda = \lambda_{mn}^p$ organize into a $\text{OSp}(2S+2|2S)$ representation. Suppose first that $\lambda = -(S+n)^2$. Then the decomposition (3.26) can be nicely represented in the form bellow

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & F_{S,n}^0 & & \\ & & & & & & \\ & & & F_{S-1,n+1}^0 & & F_{S-1,n-1}^1 & \\ & & F_{S-2,n+2}^0 & & F_{S-2,n}^1 & & F_{S-2,n-2}^2 \\ F_{S-3,n+3}^0 & & & F_{S-3,n+1}^1 & & F_{S-3,n-1}^2 & & F_{S-3,n-3}^3 \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \end{array}$$

The eigenfunctions in the same row(column) have the same $\text{Sp}(2S)$ ($\text{SO}(2S+2)$) highest weight, which decreases from top to bottom(left to right).

The eigenfunction $F_{S,n}^0$ at the top has the unique $\text{OSp}(2S+2|2S)$ highest weight in L_λ . In the notations of our previous paper [1] this highest weight is $\Lambda = \delta_1 + \dots + \delta_S + n\epsilon_1$ and is represented by a one row Young tableaux of width $S+n$. The explicit form of the highest weight vector of L_λ is $F_{S,n}^0(X) = \eta^1 \dots \eta^S H[(x^1)^n]$, where $H: S^n(x) \rightarrow \mathfrak{H}^n(x)$ is the canonical projection map ⁴. Even more explicitly $H[(x^1)^n] = |x|^n C_n^S(x^1/|x|)$, where C_n^S are Gegenbauer polynomials. Moreover, the value of the second order Casimir in the $\text{OSp}(2S+2|2S)$ irreps $g(\Lambda)$ with highest weight Λ is also $-(n+S)^2$.

³Eqs. (3.20,3.25) are, in fact, module isomorphisms.

⁴We have adopted the convention that $\eta^\alpha(\bar{\eta}^\alpha)$ have weight $\delta_\alpha(-\delta_\alpha)$ and x^1 has the highest $\text{SO}(2S+2)$ weight.

Given that all other $\text{OSp}(2S+2|2S)$ irreps with the same value $-(n+S)^2$ of the Casimir have higher highest weights, we have proved that L_λ is equivalent to $g(\Lambda)$.

When $\lambda = -m^2$, $m \leq S$ the structure of L_λ is the same as in the tableau above, except that the highest weight vector is $F_{m0}^0 = \eta^1 \cdots \eta^m$.

The dimension of L_λ can be computed as follows

$$\begin{aligned} \dim L_\lambda &= \sum_{p=0}^S \sum_q h_1(S-p-2q)[h_0(n+p) + h_0(n-p)] \\ &= \sum_{p=0}^{2S} C_{2S}^p h_0(l-p) = \sum_{p=0}^{2S} C_{2S}^p [C_{2S+1+l-p}^{l-p} - C_{2S-1+l-p}^{l-p-2}] \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \sum_{p=0}^{2S} \sum_{q=0}^{\infty} C_{2S}^p z^p C_{2S+1+q}^q z^q \left(\frac{1}{z^{l+1}} - \frac{1}{z^{l-1}} \right) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{(1+z)^{2S}}{(1-z)^{2S+2}} \left(\frac{1}{z^{l+1}} - \frac{1}{z^{l-1}} \right) = sc_l(\tilde{I}), \end{aligned}$$

where we have supposed again that $\lambda = -l^2$, $l = n + S$ and $\tilde{I}$ is an even supermatrix which is identity in the $\text{SO}(2S+2)$ sector and minus identity in the $\text{Sp}(2S)$ sector. So, according to the discussion in our previous paper [1] on the generalized $\text{OSp}(2S+2|2S)$ Schur functions sc_μ , we see that $\dim L_\lambda$ is equal to the number of components of a supersymmetric tensor of rank l .

The superdimension of L_λ can be computed in essentially the same way

$$\begin{aligned} \text{sdim } L_\lambda &= \sum_{p=0}^S \sum_q (-1)^{S-p-2q} h_1(S-p-2q)[h_0(n+p) + h_0(n-p)] = \sum_{p=0}^{2S} (-1)^l C_{2S}^p h_0(l-p) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{(1-z)^{2S}}{(1-z)^{2S+2}} \left(\frac{1}{z^{l+1}} - \frac{1}{z^{l-1}} \right) = 2. \end{aligned}$$

Let us end this section with an illustration of how the $\text{OSp}(4|2)$ supersymmetric tensors break down into fields of the form (3.17). This is obvious in the case of the tensor of rank 1. The components of the rank two traceless supersymmetric tensor are

$$\Sigma^{pq} = X^p X^q - \frac{1}{2} J^{pq}.$$

The eight fields $\eta^\alpha f_{m,m'}^{1/2}$ in eq. (3.17) correspond to the fermionic components $\Sigma^{\alpha i} = \eta^\alpha n^i$. The bosonic components Σ^{ij} can also be written in a manifest $\text{SO}(4) \times \text{Sp}(2)$ invariant form

$$\Sigma^{ij} = (1 - 2\eta^1 \eta^2) n^i n^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} = (1 - 2\eta^1 \eta^2) \left(n^i n^j - \frac{1}{4} \delta^{ij} \right) - \frac{1}{4} (1 + 2\eta^1 \eta^2) \delta^{ij}.$$

The remaining component $\Sigma^{\alpha\beta} = J^{\beta\alpha} (1 + 2\eta^1 \eta^2)/2$ is not independent because of the vanishing trace condition. The same argument can be repeated in the case of tensors of higher rank. For instance the traceless supersymmetric tensor of rank 3 is of the form

$$\Sigma^{pqr} = X^p X^q X^r - \frac{1}{4} (X^p J^{qr} + (-1)^{|p||q|} X^q J^{pr} + X^r J^{pq}).$$

After some combinatorics one can prove that the nonzero components of the supersymmetric tensor of rank $l = 2j$ can be written in an $\text{SO}(4) \times \text{Sp}(2)$ manifestly invariant way as follows

$$\begin{aligned} \Sigma^{i_1 \dots i_{l-2} i_{l-1} i_l} &= (1 - l\eta^1 \eta^2) S^{i_1 \dots i_{l-2} i_{l-1} i_l} - \frac{1 + l\eta^1 \eta^2}{2l(l-1)} (S^{i_1 \dots i_{l-2} i_{l-1} i_l} + \dots) \\ \Sigma^{i_1 \dots i_{l-1} \alpha} &= S^{i_1 \dots i_{l-1} \alpha} \eta^\alpha, \quad \Sigma^{i_1 \dots i_{l-2} \alpha \beta} = -\frac{1 + l\eta^1 \eta^2}{2(l-1)} S^{i_1 \dots i_{l-2} \alpha \beta} J^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

where $S^{i_1, \dots, i_l}$ are the traceless $\text{SO}(4)$ tensors of rank l , that is the tensor form of the functions $f_{mm'}^j$.

In conclusion, for all $\text{OSp}(2S+2|2S)$ cases the minisuperspace analysis gives the same spectrum (3.1) with the same supermultiplicities and multiplicities corresponding to totally symmetric tensors.

Unfortunately, in the coset sigma model, there are many interesting fields whose dimensions tend to integers as $g_\sigma \rightarrow 0$. They are not captured by the minisuperspace approximation on the supersphere, which appears thus less useful than in the WZW case. To proceed, we will consider the $g_\sigma \rightarrow 0$ limit from a slightly different point of view.

3.2 Perturbation theory in the $\text{OSp}(4|2)$ sigma model

It is now most useful to recover the minisuperspace result of the previous section from a different point of view, using standard conformal perturbation theory in the limit of small g_σ (for a very useful discussion of perturbation theory in the $\text{O}(2)$ case, see [8]).

To regularize the IR and UV divergences of the theory we use a square lattice of width L , spacing a and a total number of sites $\mathcal{N}$. Then, one can exponentiate the term coming from the measure and absorb it into the action to get

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int d^2 x \left\{ 2(1 - \eta^1 \eta^2) \partial \eta^1 \partial \eta^2 + (1 - 2\eta^1 \eta^2) [(\partial \mu)^2 + \cos^2 \mu (\partial \xi_1)^2 + \sin^2 \mu (\partial \xi_2)^2] \right. \\ \left. + \frac{2g_\sigma^2}{a^2} [2\eta^1 \eta^2 - \log(\sin \mu \cos \mu)] \right\}. \quad (3.29)$$

The role of the measure term in the effective action is to cancel the tadpole divergences of the theory.

The perturbation theory is performed correctly by rescaling the nonzero modes of the fields

$$\eta^\alpha(x) = \bar{\eta}^\alpha + g_\sigma \hat{\eta}^\alpha(x), \quad \mu(x) = \bar{\mu} + g_\sigma \hat{\mu}(x), \quad \xi_\alpha(x) = \bar{\xi}_\alpha + g_\sigma \hat{\xi}_\alpha(x). \quad (3.30)$$

We shall treat the zero modes nonperturbatively.

In the limit $g_\sigma \rightarrow 0$ all the fields decouple, and we get an action with a pair of symplectic fermions and three bosons

$$A_0 = \frac{1}{2} \int d^2 x \left\{ 2(1 - \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \partial \hat{\eta}^1 \partial \hat{\eta}^2 + (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) [(\partial \hat{\mu})^2 + \cos^2 \bar{\mu} (\partial \hat{\xi}_1)^2 + \sin^2 \bar{\mu} (\partial \hat{\xi}_2)^2] \right\} \\ + 2\mathcal{N} \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 - \mathcal{N} \log(\sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu}) \quad (3.31)$$

coupled to the zero modes $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2$ and $\bar{\mu}$. In the following we separate the zero modes contribution to the path integral measure $[d\eta^1 d\eta^2 d\mu d\xi_1 d\xi_2] = g_\sigma [d\hat{\eta}^1 d\hat{\eta}^2 d\hat{\mu} d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2] d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 d\bar{\mu} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2$. Note that one can rescale the dynamical fields

$$\tilde{\eta}^\alpha = \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2\right) \hat{\eta}^\alpha, \quad \tilde{\mu} = (1 - \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \hat{\mu}, \quad \tilde{\xi}_1 = \cos \bar{\mu} (1 - \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \hat{\xi}_1, \quad \tilde{\xi}_2 = \sin \bar{\mu} (1 - \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \hat{\xi}_2$$

to eliminate all but one of the terms proportional to $\mathcal{N}$ in A_0 coming from the measure. This is because leaving the zero modes nonintegrated is equivalent, in the lattice regularization picture, to fixing the fields in one site of the lattice.

Let us call *partial* the correlation functions computed without integrating the zero modes. For instance the partial propagators are

$$\begin{aligned} \langle \hat{\eta}^1(x) \hat{\eta}^2(y) \rangle_* &= (1 + \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G(x, y) \\ \langle \hat{\mu}(x) \hat{\mu}(y) \rangle_* &= -(1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G(x, y) \\ \langle \hat{\xi}_1(x) \hat{\xi}_1(y) \rangle_* &= -\frac{1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2}{\cos^2 \bar{\mu}} G(x, y) \\ \langle \hat{\xi}_2(x) \hat{\xi}_2(y) \rangle_* &= -\frac{1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2}{\sin^2 \bar{\mu}} G(x, y), \end{aligned} \quad (3.32)$$

where

$$G(x, y) = -\frac{1}{V} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ik(x-y)}}{4 - 2 \cos k_1 - 2 \cos k_2} \approx -\frac{1}{V} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2} \approx \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{\pi|x-y|}{L} + \gamma \right). \quad (3.33)$$

Here the sum is over all the quantized modes $k \neq 0$ in a box of volume $V = L^2$. We have also used the lattice regularization for

$$\square G(x, y) \underset{x \rightarrow y}{=} -\frac{1}{V} \sum_{k \neq 0} 1 = \frac{1}{V} - \frac{1}{a^2}$$

resulting from eq. (3.33), where $\square = -\partial_\mu \partial_\mu$.

Rescaling the fields as mentioned above one gets the partial partition function

$$Z_*(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, \bar{\mu}) \propto g_\sigma (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu} \det'^{-1/2} \square \quad (3.34)$$

up to an arbitrary factor coming from the normalization of the path integral measure $[d\hat{\eta}^1 d\hat{\eta}^2 d\hat{\mu} d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2]$. Here $\det' \square$ is the regularized determinant of the Laplacian with periodic boundary conditions in both directions. Note the $\text{OSp}(4|2)$ invariant integration measure on $S^{3|2}$ appearing in eq. (3.34). One can choose the arbitrary constant in eq. (3.34) so that the full partition function

$$Z_0 \propto g_\sigma |S^{3|2}| \det'^{-1/2} \square \quad (3.35)$$

is equal to the partition function of a single compactified boson in the limit $g_\sigma \rightarrow 0$. Here $|S^{3|2}| = 4\pi^2$ is the volume of the supersphere $S^{3|2}$. The correlation functions are then computed perturbatively according to the formula

$$\langle O \rangle = \frac{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 d\bar{\mu} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu} \langle O e^{-A_{\text{int}}} \rangle_*}{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 d\bar{\mu} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu} \langle e^{-A_{\text{int}}} \rangle_*} \quad (3.36)$$

by developping in powers of g_σ the term $e^{-A_{\text{int}}}$.

Let us see how these conventions work on the example of the full two point correlation function $\langle \eta^1(x) \eta^2(y) \rangle_0$ in the free field theory with the action A_0 . The eqs. (3.32, 3.34, 3.35) give

$$\langle \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \rangle_0 = \frac{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2}{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2)} = -\frac{1}{2}$$

and

$$\langle \hat{\eta}^1(x) \hat{\eta}^2(y) \rangle_0 = \frac{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) (1 + \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G(x, y)}{\int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 (1 - 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2)} = \frac{1}{2} G(x, y).$$

Therefore

$$\langle \eta^1(x) \eta^2(y) \rangle_0 = \langle \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \rangle_0 + g_\sigma^2 \langle \hat{\eta}^1(x) \hat{\eta}^2(y) \rangle_0 = -\frac{1}{2} \left(1 - g_\sigma^2 G(x, y) \right). \quad (3.37)$$

Higher order partial correlation functions can be computed according to the general rule

$$\begin{aligned} \langle \eta^1(x_1) \dots \eta^1(x_n) \eta^2(y_1) \dots \eta^2(y_n) \rangle_* &= -g^{n-1} \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \det \| \ln \eta_{j,j+1}^{i,i+1} \| \\ &+ g^n (1 + n \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \sum_{\pi \in \text{Sym}(n)} \varepsilon(\pi) G(x_1, y_{\pi(1)}) \dots G(x_n, y_{\pi(n)}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

where we have set $\eta_{kl}^{ij} = \frac{r_{ik} r_{jl}}{r_{il} r_{jk}}$ and $r_{ij} = |x_i - y_j|$. The lowest order term in eq. (3.38) is typical of symplectic fermions [9, 10] while the second is the usual Wick rule for the dynamical components.

All correlation functions which might be of interest are between products of fundamental fields X^p in different points. Therefore, in partial correlation functions the fields ξ_a , $a = 1, 2$ will always appear in the form

$$\left\langle e^{i\alpha_1 \xi_a(x_1)} \dots e^{i\alpha_n \xi_a(x_n)} \right\rangle_* = e^{i\beta \bar{\xi}_a} \exp \left(\frac{g_\sigma^2}{2 \cos^2 \bar{\mu}} (1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) \sum_{k,l} \alpha_k \alpha_l G(x_k, x_l) \right) \quad (3.39)$$

where all α 's are integers and by $G(x_k, x_k)$ we mean $G(x_k, x_k + a)$. The integration along the zero mode $\tilde{\xi}_a$ imposes the classical “zero charge” constraint $\beta = \sum \alpha_k = 0$ for the nonvanishing full correlation function. An immediate consequence of the zero charge condition is the dependence of eq. (3.39) only on the regularized propagator $G_{\text{reg}}(x, y) = G(x, y) - G(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x-y|}{a}$ independent of the IR cut-off L . Finally, although one has to perform a nontrivial integration for the zero modes $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, \bar{\mu}$, the two point function of vertex operators is as usual

$$\left\langle e^{i\alpha\xi_a(x)} e^{-i\alpha\xi_a(y)} \right\rangle_0 = \left| \frac{x-y}{a} \right|^{-g\alpha^2}. \quad (3.40)$$

Indeed, let $c = g_\sigma^2(1 + 2\bar{\eta}^1\bar{\eta}^2)G_{\text{reg}}(x, y)$. Then, making the change of variables $u = 1 + \tan^2 \bar{\mu}$ and integrating by parts one can bring the correlator in eq. (3.40) to the form

$$\frac{1}{2} \int d\bar{\eta}^1 d\bar{\eta}^2 (1 - 2\bar{\eta}^1\bar{\eta}^2) (e^{-c} - c\Gamma(0, c)),$$

where $\Gamma(0, c)$ is the partial gamma function. In order to integrate the fermionic zero modes we develop $\Gamma(0, c)$ around the body of c . Then $c\Gamma(0, b(c))$ shall not contribute to the final result and we are left only with exponentials.

On the other hand the field μ behaves quite differently. The main reason is the fact that μ lives on a segment $0 < b(\bar{\mu}) < \pi/2$ rather than on a circle. The integration of the zero mode $\bar{\mu}$ in the correlation function of multiple vertex operators in μ will generate a factor

$$I(\beta) = \int_{b(0)}^{b(\pi/2)} d\bar{\mu} \sin(2\bar{\mu}) e^{i\beta\bar{\mu}} = \frac{2}{4 - \beta^2} (1 + e^{i\frac{\pi}{2}\beta}).$$

which is zero only for $\beta \in 4\mathbb{Z} + 2$, $\beta \neq \pm 2$. Therefore, there is no zero charge condition for the correlation functions of vertex operators in the field μ . Moreover, the two point function of a vertex operator is also different from eq. (3.40)

$$\left\langle e^{i\alpha\mu(x)} e^{-i\alpha\mu(y)} \right\rangle_0 = \left(1 + g\alpha^2 \log \frac{|x-y|}{a} \right) \left| \frac{x-y}{a} \right|^{-g\alpha^2},$$

Now, let us perturbate the free action A_0 by the first order

$$\begin{aligned} A_1 = -g_\sigma \int d^2x \Big\{ & (\bar{\eta}^1\hat{\eta}^2 + \hat{\eta}^1\bar{\eta}^2) \left[\partial\hat{\eta}^1\partial\hat{\eta}^2 + (\partial\hat{\mu})^2 + \cos^2 \bar{\mu}(\partial\hat{\xi}_1)^2 + \sin^2 \bar{\mu}(\partial\hat{\xi}_2)^2 - \frac{2}{a^2} \right] \\ & + (1 - 2\bar{\eta}^1\bar{\eta}^2) \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu} \hat{\mu} [(\partial\hat{\xi}_1)^2 - (\partial\hat{\xi}_2)^2] + \frac{2}{a^2} \cot(2\bar{\mu}) \hat{\mu} \Big\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

and second order

$$\begin{aligned} A_2 = -g_\sigma^2 \int d^2x \Big\{ & \hat{\eta}^1\hat{\eta}^2 \left[\partial\hat{\eta}^1\partial\hat{\eta}^2 + (\partial\hat{\mu})^2 + \cos^2 \bar{\mu}(\partial\hat{\xi}_1)^2 + \sin^2 \bar{\mu}(\partial\hat{\xi}_2)^2 - \frac{2}{a^2} \right] \\ & - \sin(2\bar{\mu}) (\bar{\eta}^1\hat{\eta}^2 + \hat{\eta}^1\bar{\eta}^2) \hat{\mu} [(\partial\hat{\xi}_1)^2 - (\partial\hat{\xi}_2)^2] \\ & + \frac{1}{2} (1 - 2\bar{\eta}^1\bar{\eta}^2) \cos(2\bar{\mu}) \hat{\mu}^2 [(\partial\hat{\xi}_1)^2 - (\partial\hat{\xi}_2)^2] \\ & - \frac{2}{a^2 \sin^2(2\bar{\mu})} \hat{\mu}^2 \Big\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

interaction term in the action (3.29).

Because the way we compute correlation functions in eq. (3.36) is quite different from the usual approach, it is no use in normal ordering $\exp(-A_{\text{int}})$ in the numerator in order to cancel the perturbative corrections in the denominator. Therefore, we need the corrections to the partition function Z_0 in order to compute perturbatively correlation functions. There is no partial correction to Z_0 to the first order in g_σ , that is $\langle A_1 \rangle_* = 0$. The second order correction is $Z_2 = Z_0 \langle \frac{1}{2} A_1^2 - A_2 \rangle_0$. In view of eq. (3.34), it

is not hard to see that only the first lines in eq. (3.41) and eq. (3.42) contribute to the full correction after the integration of the zero modes $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2$. Using integrals of the form (3.52)

$$\frac{1}{2} \langle A_1^2 \rangle_0 = \langle A_2 \rangle_0 = \frac{5\mathcal{N} - 3}{2} g_\sigma^2 G(0, 0)$$

and therefore $Z_2 = 0$.

We now have all the necessary ingredients to rederive perturbatively the minisuperspace result of sec. 3.1 and go further in the research of new primary operators and their scaling dimensions.

Let us first illustrate how to perturbatively compute the scaling dimension of the six dimensional $\text{OSp}(4|2)$ multiplet. From eq. (3.37), we see that already in the free field theory A_0 the fields η^α have the right scaling dimension $g/4$. We expect the correction to the order g_σ^2

$$-g_\sigma \langle (\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2(y) + \hat{\eta}^1(x) \bar{\eta}^2) A_1 \rangle_0 + g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \left\langle \frac{1}{2} A_1^2 - A_2 \right\rangle_0 \quad (3.43)$$

to be some constant proportional to $G(0, 0)$. This is indeed the case because the first term in eq. (3.43) vanishes and the two contributions

$$\bar{\eta}^2 \bar{\eta}^2 \left\langle \frac{1}{2} A_1^2 \right\rangle_* = -\frac{1}{4} g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \sin^2(2\bar{\mu}) \left(\frac{1}{\cos^4 \bar{\mu}} + \frac{1}{\sin^4 \bar{\mu}} \right) \left(N - \frac{1}{2} \right) G(0, 0) \quad (3.44)$$

$$\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \langle -A_2 \rangle_* = 2g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \left(-1 + (\mathcal{N} - 1) \cot^2(2\bar{\mu}) + \frac{\mathcal{N}}{\sin^2(2\bar{\mu})} \right) G(0, 0) \quad (3.45)$$

add up to give $-g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 G(0, 0)$ and we finally get

$$\langle \eta^1(x) \eta^2(y) \rangle = -\frac{1}{2} (1 - g_\sigma^2 G_{\text{reg}}) + g_\sigma^2 G_0.$$

Let us compute perturbatively the scaling dimension $h = g(l + \frac{1}{2})^2$, for the highest weight component $\eta^1 f_{ll}^l$ of the $\text{OSp}(4|2)$ representation of highest weight $(1, 2l, 2l)$ described in the minisuperspace approach in sec. 3.1. From the property of the tensor product it is clear that

$$f_{\pm l, \pm l}^l(\mu, \xi_1, \xi_2) = f_{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu, \xi_1, \xi_2)^{2l} = e^{\pm i 2l \xi_1} \cos^{2l} \mu.$$

Separating the zero modes one has

$$\begin{aligned} \langle f_{ll}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](x) f_{-l, -l}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](y) \rangle_* &= \exp \left(-\frac{4l^2 g_\sigma^2}{\cos^2 \bar{\mu}} (1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G_{\text{reg}} \right) \times \\ &\times \sum_{r,s=0}^{2l} \binom{2l}{r} \binom{2l}{s} (-1)^{r+s} \cos^{r+s} \bar{\mu} \sin^{4l-r-s} \bar{\mu} \langle \cos^r g_\sigma \hat{\mu} \sin^{2l-r} g_\sigma \hat{\mu} \cos^s g_\sigma \hat{\mu}' \sin^{2l-s} g_\sigma \hat{\mu}' \rangle_*, \end{aligned}$$

where we have introduced the notations $\hat{\mu}, \hat{\mu}'$ for $\hat{\mu}(x), \hat{\mu}(y)$ and G_{reg}, G_0, G for $G_{\text{reg}}(x, y), G(0, 0), G(x, y)$. The remaining correlator can be computed perturbatively by developing in powers of $\hat{\mu}$

$$\begin{aligned} \langle f_{ll}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](x) f_{-l, -l}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](y) \rangle_* &= \exp \left(-\frac{4l^2 g_\sigma^2}{\cos^2 \bar{\mu}} (1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G_{\text{reg}} \right) \times \\ &\times \left\{ \cos^{4l} \bar{\mu} [1 + 2l g_\sigma^2 (1 + 2\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2) G_0] - g_\sigma^2 (1 + 2\bar{\eta}^2 \bar{\eta}^2) \cos^{4l-2} \bar{\mu} \sin^2 \bar{\mu} [2l(2l-1)G_0 + 4l^2 G] \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

To integrate the zero mode $\bar{\mu}$ one has to evaluate to the order a integrals of the type

$$2 \int_0^{\pi/2} d\bar{\mu} \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu} \sin^m \bar{\mu} \cos^n \bar{\mu} \exp \left(-\frac{a}{\cos^2 \bar{\mu}} \right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(\frac{m}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m+n}{2} + 2)} \left[1 - \frac{m+n+2}{n} a \right] + O(a^2) \quad (3.47)$$

which are easily computed by making the change of variables $u = \tan^2 \bar{\mu} + 1$ and then developping in Taylor series. Putting everything together we finally get

$$\langle \eta^1(x) \eta^2(y) f_{ll}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](x) f_{-l, -l}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](y) \rangle_0 = -\frac{1}{2(2l+1)} [1 - 2lg_\sigma^2 G_0 - g_\sigma^2(2l+1)^2 G_{\text{reg}}], \quad l \geq \frac{1}{2}.$$

Thus, we get the required scaling dimension already in the free theory.

The interaction terms will contribute to the partial correlation function with the term

$$\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \left\langle \frac{A_1^2}{2} - A_2 \right\rangle_* \cos^{4l} \bar{\mu}$$

which gives after the integration of the zero modes the final result for $l \geq \frac{1}{2}$

$$\langle \eta^1(x) \eta^2(y) f_{ll}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](x) f_{-l, -l}^l[\mu, \xi_1, \xi_2](y) \rangle = -\frac{1}{2(2l+1)} [1 - g_\sigma^2(2l+1)^2 G_{\text{reg}} - g_\sigma^2(2l+1) G_0]. \quad (3.48)$$

Repeating the same reasoning one can get the following result

$$\begin{aligned} \left\langle [1 \mp 2j\eta^1(x)\eta^2(x)] [1 \mp 2j\eta^1(y)\eta^2(y)] f_{l\pm\frac{1}{2}, l\pm\frac{1}{2}}^{l\pm\frac{1}{2}}(x) f_{-l\mp\frac{1}{2}, -l\mp\frac{1}{2}}^{l\pm\frac{1}{2}}(y) \right\rangle = \\ \pm [1 - g_\sigma^2(2l+1)^2 G_{\text{reg}} - (2l+1)g_\sigma^2 G_0] \end{aligned} \quad (3.49)$$

for the correlation functions between the highest and lowest weight components of the remaining $\text{SO}(4) \times \text{SL}(2)$ multiplets of the $\text{OSp}(4|2)$ representation of highest weight $(1, 2l, 2l)$. When $j = 1$ and the choice of the sign in eq. (3.49) is minus, the factor 2 of $g_\sigma^2 G_0$ has to be corrected to 4 because of the singularity in the gamma functions in eq. (3.47).

The perturbation theory in this section applies also to correlation functions between fields with derivatives. We give below two examples of such computations, which will be used later in sec. 3.4 where we conjecture the scaling dimension of the most general fields.

Let us compute first the anomalous dimension of the field

$$\eta^1 D_1 \hat{\eta}^1 \dots D_m \hat{\eta}^1 \bar{D}_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 \quad (3.50)$$

where $D_i, \bar{D}_j$ are holomorphic and antiholomorphic derivations of arbitrary order. Although we switched to holomorphic and antiholomorphic coordinates we do not consider the fundamental fields to be either purely holomorphic or purely antiholomorphic. The field in eq. (3.50) is clearly a highest weight state for a $\text{OSp}(4|2)$ irrep of highest weight $\lambda = 1^{m+n+1}$ appearing in the fusion of the (super)antisymmetric tensor of shape λ .

In the free theory, the partial two point correlation function for the field in eq. (3.50) is

$$\langle \eta^1 D_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 \eta^2 ' D_1 \hat{\eta}^2 ' \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^2 ' \rangle_* = (-1)^{n+m} \left(\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 + g_\sigma^2 [1 + (n+m+1) \bar{\eta}^2 \bar{\eta}^2] G \right) \Gamma_0 \quad (3.51)$$

where $\Gamma_0 := \langle D_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 D_1 \hat{\eta}^2 ' \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^2 ' \rangle$. With the help of integrals of the type

$$\int_x \partial_\mu G(x_1, x) \partial_\mu G(x_2, x) G(x_3, x) = \frac{1}{2} (G_{13} G_{23} - G_{12} G_{23} - G_{12} G_{13}) + \frac{1}{32\pi^3} \quad (3.52)$$

it is possible to show that the correction to the 2-point function

$$-g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \int_x \langle D_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 D_1 \hat{\eta}^2 ' \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^2 ' (\hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2(x) + \hat{\eta}^1(x) \hat{\eta}^2 ') : \partial_\mu \hat{\eta}^1(x) \partial_\mu \hat{\eta}^2(x) : \rangle_*$$

coming from the perturbation $-A_1$ and susceptible to generate terms proportional to G , in fact, does not. Obviously neither does $\frac{A_1^2}{2}$. On the other hand, the perturbation $-A_2$ induces a correction

$$g_\sigma^2 (-1)^{n+m} \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \int_x \langle D_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 D_1 \hat{\eta}^2 ' \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^2 ' : \hat{\eta}^1(x) \hat{\eta}^2(x) \partial_\mu \hat{\eta}^1(x) \partial_\mu \hat{\eta}^2(x) : \rangle_* \quad (3.53)$$

which with the help of integrals of the type

$$\int_x \partial G(x_1, x) \bar{\partial} G(x_1, x) \partial G(x_2, x) \bar{\partial} G(x_2, x) = \frac{1}{(4\pi)^3 r_{12}^2} \log \frac{r_{12}^2}{2a^2}, \quad a \ll r_{12}$$

is shown to yield the only relevant contribution

$$2nm g_\sigma^2 G(-1)^{n+m} \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 \Gamma_0. \quad (3.54)$$

It is very important to notice that this contribution exists only if we consider both holomorphic and antiholomorphic derivatives in eq. (3.50). Adding up eqs. (3.51, 3.54) we get an anomalous dimension

$$-\frac{g}{4}(2nm + n + m - 1) \quad (3.55)$$

for the field in eq. (3.50). It is somewhat disturbing to observe that this expression is not the Casimir of the $\text{OSp}(4|2)$ antisymmetric representation $\lambda = 1^{n+m+1}$ except $m = n = 0$ and $m = 0, n = 1$ or $m = 1, n = 0$.

It is not difficult to generalize the above calculus to find the anomalous dimension of the more general field

$$\eta^1 D_1 \hat{\eta}^1 \dots D_m \hat{\eta}^1 \bar{D}_1 \hat{\eta}^1 \dots \bar{D}_n \hat{\eta}^1 P_l(\cos 2\mu), \quad l \in \mathbb{N} \quad (3.56)$$

which is a components of the $\text{OSp}(4|2)$ irrep $\lambda = (2l+1)1^{m+n}$ appearing in the fusion of the tensor of shape λ . In order to eliminate the problem of computing complicate integrals with factors $\exp \frac{-a}{\cos^2 \bar{\mu}}$, generated by the fields ξ_1, ξ_2 , we have chosen the component $f_{00}^l[\cos \mu, \xi_1, \xi_2] = P_l(\cos 2\mu)$, where $P_l(\cos 2\mu)$ are the Legendre polynomials. The latter obey the composition formula

$$P_l[\cos(\theta_1 + \theta_2)] = \sum_{k=-l}^l P_l^k(\cos \theta_1) P_l^{-k}(\cos \theta_2),$$

with associate Legendre functions $P_l^k(\cos \theta)$, see [6]. It can be used to get

$$P_l(\cos 2\mu) = P_l(\cos 2\bar{\mu}) + 2g_\sigma P_l^1(\cos 2\bar{\mu}) \hat{\mu} + \mathcal{O}(g_\sigma^2 \hat{\mu}^2).$$

useful in computing the partial 2-point function for the field in eq. (3.56) in the free theory

$$(-1)^{n+m} \left(\bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 P_l(\cos 2\bar{\mu})^2 + g_\sigma^2 [1 + (n+m+1) \bar{\eta}^2 \bar{\eta}^2] P_l(\cos 2\bar{\mu})^2 G - 4g_\sigma^2 \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 P_l^1(\cos 2\bar{\mu})^2 G \right) \Gamma_0. \quad (3.57)$$

With the help of the calculations leading to eq. (3.54), we easily get

$$2nm g_\sigma^2 G(-1)^{n+m} \bar{\eta}^1 \bar{\eta}^2 P_l(\cos 2\bar{\mu})^2 \Gamma_0 \quad (3.58)$$

for the perturbative correction containing terms proportional to G . Finally, adding up eq. (3.57, 3.58) we get, after the integration of the zero modes, the anomalous dimension

$$\frac{g}{4} [4l(l+1) + 1 - 2nm - n - m]. \quad (3.59)$$

for the field in eq. (3.56). Notice that for $m = n = 0$ eq. (3.59) gives, as required, the scaling dimension for symmetric tensors.

3.3 The structure of the theory as $g_\sigma^2 \rightarrow 0$

The content of the theory as $g_\sigma^2 \rightarrow 0$ can easily be found: a similar discussion was carried out years ago in the context of sigma models in dimension $2 < d < 4$ by Lang and Rühl in particular [11]. It is most convenient for this to think of a lattice regularization of the sigma model. The basic field $\phi^i(x)$ is in the vector representation and has dimension zero in the limit $g_\sigma^2 \rightarrow 0$. Composite fields are obtained by

inserting basic fields at neighbouring points on the lattice and sending the cut-off to zero, generating in this way combinations of derivatives contracted into various ways. If one wishes to avoid derivatives (and thus obtain fields with vanishing weight as $g_\sigma^2 \rightarrow 0$), one can only build totally symmetric tensors: this is the content of the minisuperspace result. Any kind of antisymmetrization requires, to obtain a non vanishing field, to take a derivative and gives rise to a conformal weight of the form $\mathbb{N} + O(g_\sigma^2)$, and thus an integer as $g_\sigma^2 \rightarrow 0$. For instance, for the 1^2 representation, one needs to consider quantities such as $\phi^i(x)\phi^j(y) - \phi^j(x)\phi^i(y)$. Of course, as $x \rightarrow y$, these combinations all disappear to leading order. A non zero contribution is obtained by considering derivatives, ie $\phi^i\partial_\mu\phi^j - \phi^j\partial_\mu\phi^i$ (in this case, a component of the current), whose dimensions do not vanish in the limit $g_\sigma \rightarrow 0$. To zero order in g_σ^2 , the dimensions of the other fields are obtained by elementary algebra. For instance, *lowest* dimensional highest weight field in the totally antisymmetric representations 1^p is of the form $\bar{\eta}^1\partial\bar{\eta}^1\bar{\partial}\bar{\eta}^1\ldots\partial^{l-1}\bar{\eta}^1\bar{\partial}^{l-1}\bar{\eta}^1$ if $p = 2l - 1$ and has an extra $\partial^l\bar{\eta}^1$ or $\bar{\partial}^l\bar{\eta}^1$ if $p = 2l$. Thus, its dimension is $h_{1^p} = \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$, where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the integer part. In general, to the Young diagram λ we can associate a traceless tensor composed of Young symmetrized products of ϕ^i in distinct points. After fusion the components of this tensor become fields of dimension

$$h_\lambda(g_\sigma^2 = 0) = \sum_{i=1}^{\lambda_1} \left\lfloor \frac{\lambda_i'^2}{4} \right\rfloor,$$

where λ_i' is the length of column i of λ . If the Young diagram λ represents the $\text{osp}(4|2)$ highest weight $\Lambda = b\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_3$ then

$$h_\Lambda^{\min}(g_\sigma^2 = 0) = \left\lfloor \frac{b^2}{4} \right\rfloor + \frac{|a_2 - a_3|}{2} \quad (3.60)$$

will be the lowest possible dimension of a field in the $\text{osp}(4|2)$ irrep Λ .

Obviously, given the same Young diagram λ , one can either use the derivatives of ϕ^i in order to build $\text{OSp}(4|2)$ tensor fields of higher dimension or one can multiply the previous fields with $\text{OSp}(4|2)$ scalars, e.g. $\partial_\mu\phi \cdot \partial_\mu\phi$. In this way the energy momentum tensor is a $\text{OSp}(4|2)$ scalar field based on the Young tableau $\emptyset$, the $\text{OSp}(4|2)$ currents - on 1^2 etc.

In order to enumerate all the fields in a given $\text{OSp}(4|2)$ irreps λ , with the above tensor technique, one has to know what are the irreducible summands of tensor representations. We shall be able to bypass this problem in sec. 4.2 using the generalized symmetric function sc_λ introduced in [1].

3.4 Perturbation theory revisited

Using tensor techniques to carefully organize the space of states of the $\text{OSp}(4|2)$ sigma model, it is certainly possible to extend the perturbative approach of sec. 3.2 to compute the anomalous dimension, at order g_σ^2 , of arbitrary scaling fields.

However, instead of doing so it is most inspiring at this stage to recall the calculations made years ago in the context of $O(N)$ sphere sigma models. Most of these calculations have been done using renormalisation group techniques after the regularization of the theory in $2 + \epsilon$ dimensions. For instance, the dimensions of symmetric tensors (which we obtained through the minisuperspace or perturbation theory) can be extracted from a paper of Brézin, Zinn-Justin and Le Guillou [12]. Their calculation was extended to the most general case of fields involving derivatives in a seminal work by Wegner [13]. In the latter reference, the most general fields are written in the form

$$T_{\{i\}\{k\}\{m\}\{u\},\{j\}\{l\}\{n\}\{v\}}^{\{p\}} = t_{i_1\ldots i_{r_+}, j_1\ldots j_{r_-}}^{p_1\ldots p_r} \prod_{\alpha=1}^{s_0} (\partial^{k_\alpha}\phi \cdot \bar{\partial}^{l_\alpha}\phi) \prod_{\alpha=1}^{s_+} (\partial^{m_\alpha}\phi \cdot \partial^{n_\alpha}\phi) \prod_{\alpha=1}^{s_-} (\bar{\partial}^{u_\alpha}\phi \cdot \bar{\partial}^{v_\alpha}\phi). \quad (3.61)$$

Here $t_{i_1\ldots i_{r_+}, j_1\ldots j_{r_-}}^{p_1\ldots p_r}$ is a *traceless* tensor of rank $r = r_0 + r_+ + r_-$ with r_0 underived fields ϕ^{p_β} , r_+ derived fields $\partial^{i_\alpha}\phi^{p_\beta}$ and r_- derived fields $\bar{\partial}^{j_\alpha}\phi^{p_\beta}$. In [13] Wegner claims that the tensor in eq. (3.61) has a well defined scaling dimension if it is of shape $\lambda \vdash r$ with respect to the indices $\{p\}$, of shape $\mu \vdash s_0 + r_+$ with respect to $\{i, k\}$ and of shape $\nu \vdash s_0 + r_-$ with respect to $\{j, l\}$. Its anomalous dimension is then

$$\frac{g}{4} [(N-1)r + 2(N-2)(s_+ + s_-) + 2\xi(\lambda) - 2\xi(\mu) - 2\xi(\nu)], \quad (3.62)$$

where ξ is a function defined on partitions equal to

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (\lambda_i - 2i + 1).$$

Eq. (3.62) applies to arbitrary partitions λ, μ, ν and has a nontrivial content even when the corresponding $O(N)$ scaling fields in eq. (3.61) vanish identically, that is $\lambda'_1 + \lambda'_2 > N$. Given that both $O(N)$ and $OSp(R|2S)$ groups leave invariant a certain symmetric scalar product, which plays a similar role in their representation theory, and that this product defines the action of both sigma models it is natural to expect that Wegner's construction (3.61) of scaling fields and computation of scaling dimensions applies to $OSp(R|2S)$ sigma models if we let $N = R - 2S$ in eq. (3.62).

Let now $N = 2$ and consider $\lambda = (2l + 1)1^{m+n}$, $\mu = 1^m$, $\nu = 1^n$, $s_+ = s_- = 0$. Clearly there are no $O(2)$ tensors characterized by such $\lambda, \mu, \nu, s_+, s_-$ if $m + n > 1$ and $l > 0$ or $m + n > 2$ and $l = 0$. Nonetheless, the construction (3.61) yields a nonvanishing $OSp(4|2)$ tensor for the specified values of $\lambda, \mu, \nu, s_+, s_-$ and its anomalous dimension (3.59) is indeed in agreement with eq. (3.62). It is hard to believe that the previous example is a mere coincidence and very tempting to conjecture that all nonvanishing $OSp(4|2)$ tensor scaling fields are of the form (3.61) and that their anomalous dimensions are given by Wegner's formula with $N = 2$. However, we believe that eq. (3.62) cannot *always* be right, even in the case of $O(N)$ models. For instance, if $N = 2$, $s_0 = s_+ = s_- = 0$ and $t_{\dots}$ is a traceless symmetric tensor of rank $l > 0$ then clearly this field is a descendant of the vertex operators $e^{\pm i l \varphi}$ of dimension $h = gl^2/4$, which is different from eq. (3.62). It may be that the reason why eq. (3.62) is not always correct originates in the fact that zero modes of transversal coordinates $\pi_\alpha, \alpha = 1, \dots, N - 1$ are neglected when considering a $O(N)$ sigma model action of the form

$$A = \frac{1}{2g_\sigma^2} \int_x \partial \pi_\alpha \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\pi_\alpha \pi_\beta}{1 - \pi_\gamma \pi_\gamma} \right) \partial \pi_\beta, \quad \phi = (\pi^1, \dots, \pi^{N-1}, \sigma = \sqrt{1 - \pi_\alpha \pi_\alpha})$$

and using the free propagator $\langle \pi_\alpha(x) \pi_\beta(y) \rangle_0 = -g_\sigma^2 G(x, y)$ in perturbation theory. The deficiency of such an approach is already obvious when comparing the propagator $\langle \phi^a(x) \phi^b(y) \rangle$ at the critical point either in $2 + \epsilon$ dimensions and arbitrary N or in two dimensions and $N = 2$, to the canonical form it must have in a conformal field theory. The correct way to proceed would be to make a separation of the zero modes in $\pi^\alpha(x)$ and then a rescaling of dynamical components as in eq. (3.30). However, it is easy to understand that this error does not affect the computation of $O(N)$ scalar correlation functions and, therefore, the computation of anomalous dimensions for the scalar fields. For instance $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = 1 - g_\sigma^2 (N - 1) G(x, y) + \dots$ in the approach above.

Thus, the result of [13] referring to the locality of $O(N)$ scalars

$$(\partial^m \phi \cdot \partial^n \phi), \quad (\bar{\partial}^u \phi \cdot \bar{\partial}^v \phi) \quad (3.63)$$

when $N = 2$ must be correct. In eq. (3.62) we see that multiplication by such factors do not change the anomalous dimension of a field. On the other hand, $O(N)$ scalars mixing $\partial, \bar{\partial}$

$$\prod_\alpha (\partial^{k_\alpha} \phi \cdot \partial^{l_\alpha} \phi) \quad (3.64)$$

might have, according to [13], nonvanishing anomalous dimension when $N = 2$. The simplest of nonlocal scalar fields is of dimension $h = 4 - g$ and has the form

$$N(\partial \phi \cdot \bar{\partial} \phi)^2 - 2(\partial \phi \cdot \partial \phi)(\bar{\partial} \phi \cdot \bar{\partial} \phi). \quad (3.65)$$

It vanishes identically when $N = 2$, as expected, because all scalar fields in the $O(2)$ sigma model are local. In fact, in the $O(2)$ sigma model all the descendants of a vertex operator are created by taking derivatives of it and multiplying with scalars of the type eqs. (3.63, 3.64). For the $OSp(4|2)$ sigma model, the field in eq. (3.65) does no longer vanish. Therefore, the way descendants fields are created in the conformal field theory of the $OSp(4|2)$ sigma model might be quite different. In particular the anomalous dimension of a field would not depend only on the Casimir.

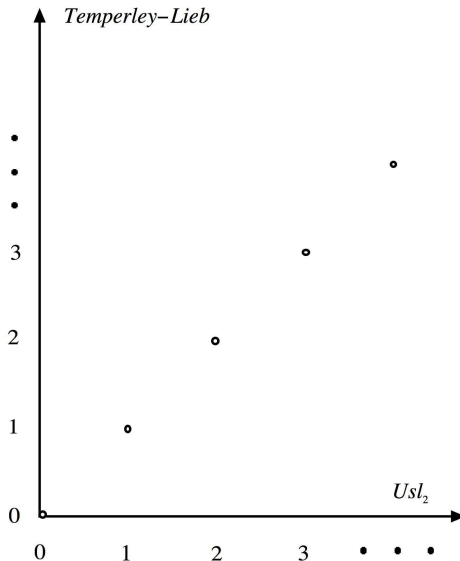


Figure 1: In the XXX case the decomposition of the spin chain in terms of representations of $SU(2)$ and its commutant leads to a series of unconnected dots.

Without discussing this much further, it is time to stress that while we have been so far discussing corrections to the bulk spectrum, what we are really interested in is the spectrum of the boundary theory. It is likely that the boundary conditions corresponding to our lattice model are Neumann boundary conditions in *all* directions. Note that this is a different situation from the case of WZW models where the WZW term prevents, in string theory terms, the existence of branes that fill the entire background [14, 15]. Here, we have one set of branes that seems to fill the whole coset - more work devoted to boundary conditions in conformal sigma models would be required to clarify this situation entirely. It is in particular not clear at this stage how to use bulk formulas for anomalous dimensions in the boundary case, apart from the case of symmetric representations: couplings of ∂ and $\bar{\partial}$ derivatives might have to be considered. We will leave this approach here and rely instead on the lattice analysis.

4 Lattice approach to boundary $OSp(4|2)$ sigma model

4.1 Block structure

We remind the reader of the most important conclusion in the first paper: the space $V^{\otimes L}$ on which the quantum hamiltonian acts can be decomposed, for any L , into a series of blocks. To understand, in more physical terms the meaning of these blocks, imagine first to study instead the XXX spin chain. The space $[\mathbb{C}^2]^{\otimes L}$ decomposes then as a sum of irreducible $SU(2)$ representations times irreducible representations of the Temperley Lieb algebra $T_L(1)$. These representations can be indexed by a single label, the spin j which we will take integer, corresponding to L even. A graphical representation of the space decomposition is given in figure 1.

In the scaling limit, each representation of $T_L(q)$ is argued in [3] to give rise to an irreducible representation of the Virasoro algebra. Though this statement is not proved at the level of the full action of the algebras, it is well established at least for the trace of q^{L_0} . The trace over the $T_L(q)$ irreps $D_L(2j)$ reads thus

$$\text{Tr}_{D_L(2j)} q^{L_0 - c/24} = \frac{q^{j^2} - q^{(j+1)^2}}{\eta(\tau)}$$

Meanwhile, in the continuum limit, modes of the current algebra connect the different $D_L(2j)$ repre-

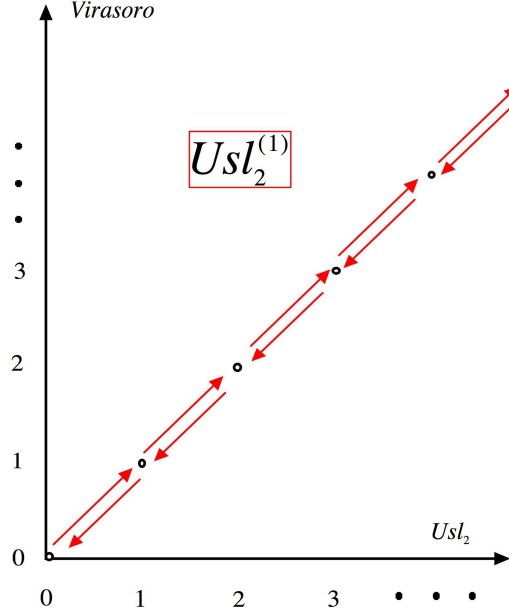


Figure 2: In the *XXX* case the dots from figure 1 get connected through action of the KM algebra.

sentations, giving the Kac Moody character at level one:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Tr}_{D_L(2j)} q^{L_0 - c/24} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{\eta(\tau)}$$

This is illustrated as well on figure 2.

The two important things to stress here are that the spin chain decomposes as a direct sum of irreducibles of $SU(2)$ and its commutant, and that in the continuum limit a Kac Moody symmetry arises.

Now for models such as ours, no Kac Moody symmetry is expected. The Noether theorem holds, currents are conserved (at least in the bulk), and must give rise to a multiplet in the adjoint with conformal weights $(h, \bar{h}) = (1, 0)$ and another one with $(0, 1)$. But the detailed OPE's of the currents cannot obey the usual current algebra relations, as this would imply the presence of a Kac Moody symmetry in the spectrum, which can be excluded here (at least for general values of g_{σ}^2) from a detailed study of the degeneracies in the spectrum and comparison with predictions based on Kac Moody symmetry. Presumably, the OPEs of the currents are plagued with logarithms, though few examples of such OPEs are in fact known.

In any case, the absence of the KM symmetry is a major inconvenient in analyzing the $OSp(4|2)$ supercoset sigma model. On the other hand, the source of this complication might turn out to be our salvation as well. Indeed, the spin chain in our case decomposes in a much more complicated way than for the *XXX* case. Representations come into blocks, that is there are large (infinite in the scaling limit) structures made of indecomposable representations of $OSp(4|2)$ and of Brauer, which are intertwined by the action of the two algebras. The situation is similar to the ones discussed in [3] for the theories at $c = -2$ and $c = 0$ there: following equations (4.36) and (4.37) in our first paper, blocks associated with atypical representations have the shape shown in figure 3.

This shape has the nice feature (indicative of an underlying cellular structure) that it is conserved when the length of the chain is increased: only more nodes are added in the northeast direction, until an infinite ladder is obtained in the scaling limit. To compare further with [3]: in the case $c = -2$ they found only one block, while in the case $c = 0$ they found one block, plus an infinity of irreducible

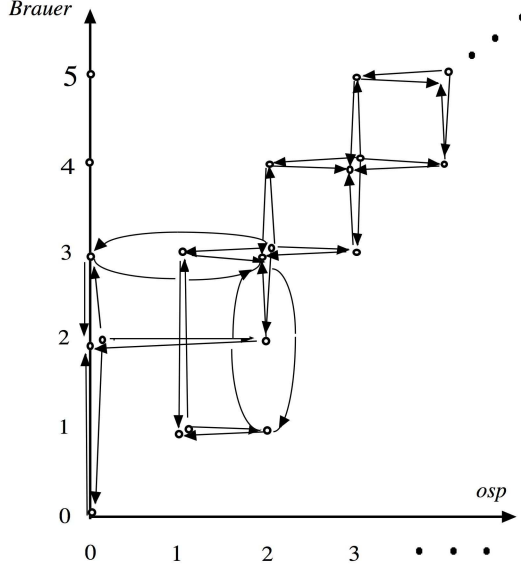


Figure 3: In the OSp lattice model case, representations within a block are all connected through combined action of Brauer and OSp

representations not connected to the block. In the present case, for every value of k , we have a block similar to the one in [3]. On top of these blocks, we have many typical representations which, like in [3] (see figure 8 there) are isolated, and would be represented by single dots.

Now the crucial point is that chains such as the one we are interested in have the same algebraic structure for arbitrary choices of the couplings (including the running coupling constant w), provided they can be expressed in terms of the lattice algebra (here the Brauer algebra). Moreover, the objects E , P being local must correspond in the scaling limit to local operators - and a particular combination thereof to the stress energy tensor, which is clearly $\text{OSp}(4|2)$ invariant. Hence one expects in the continuum limit that representations of the lattice algebra become (for a detailed discussion of the idea see [16]) representations of an extended chiral algebra (recall that a (“fully extended”) chiral algebra in CFT is a maximal algebra of integer⁵ -conformal-spin holomorphic fields that have abelian monodromy and fusion rules) commuting with the global $\text{OSp}(4|2)$ group symmetry and containing the Virasoro algebra as a subalgebra. We will refer to this algebra as Vir_B , and discover some of its features as we go along.

This leads us to the following two conjectures.

4.2 The two conjectures

It was shown in [1] sec. 4.3 that the spin chain $V^{\otimes L}$ decomposes under the action of $\text{OSp}(4|2)$ as

$$\text{OSp}(4|2)V^{\otimes L} \simeq \bigoplus_k D_L(k)G_{k,0} \oplus \bigoplus_{k,l} d_L(k,l)\mathcal{P}G_{k,l} \oplus \bigoplus_{\lambda \text{ typ}} d_L(\lambda)G(\lambda), \quad (4.1)$$

where $k = 0^*, 0, 1, \dots$ is a label of the block $\mathcal{B}_k$ of $\text{OSp}(4|2)$, $l = 0, 1, \dots$ is a label of the l th greatest weight in $\mathcal{B}_k$, $D_L(k)$, $d_L(k,l)$, $d_L(\lambda)$ are degeneracies, $G_{k,l}$ are atypical irreducible, $G(\lambda)$ are typical irreducible and $\mathcal{P}G_{k,l}$ are projective reducible $\text{OSp}(4|2)$ representations.

⁵We pause here to recall that, like the ordinary Virasoro algebra appears in correspondence with the Temperley Lieb algebra, “fractional supersymmetric” Virasoro algebras (containing generators with spin $1/k$) appear in correspondence with representations of the Birman Wenzl and related algebras in integrable models based on $\mathfrak{sl}(2)$ spin $k = 2s$ systems. In the present case however, the identification of the $g_\sigma^2 = 0$ limit guarantees that only fields with integer dimensions can appear.

We assume that the space of states of the sigma model decomposes under the action of the global $\text{OSp}(4|2)$ symmetry in the same way as the spin chain $_{\text{OSp}(4|2)}V^{\otimes L}$ decomposes in the limit $L \rightarrow \infty$. This means that, *a priori*, multiple Virasoro primary operators organize into $\text{OSp}(4|2)$ representations⁶ that are either irreducibles $G_{k,0}$ or projective covers $\mathcal{P}G_{k,l}$ and typicals. Moreover, all states within a block $\mathcal{B}_k$ give rise, in the scaling limit, to eigenvalues of the Virasoro generator L_0 that *differ by integers*, since they can all be connected through the action of Vir_B and OSp arrows. Hence the conjecture

$$\text{Conjecture 1: } \text{Tr}_{\mathcal{B}_k} q^{L_0 - c/24} = q^{h_k(g_\sigma^2)} \sum_{n=0}^{\infty} D_{k,n} q^n \quad (4.2)$$

with unspecified multiplicities $D_{k,n}$. Put loosely, two representations within the same block must have conformal weights that differ by integers or, equivalently, conformal weights come into towers of the form: exponent of the base depending on g_σ^2 plus integers.

Of course, apart from these towers, we have the typical representations, which define blocks by themselves. One can argue by the same argument that different Virasoro operators in the same typical representation have highest weights that differ by integers.

The structure of the theory in the limit $g_\sigma^2 = 0$ can be carried out exactly as in sec. 3.3 with the only difference that $\partial\phi$ and $\bar{\partial}\phi$ are no longer independent on the border. Therefore, for a tensor field Φ of shape λ the classical dimension is

$$h_\Phi(g_\sigma^2 = 0) = \sum_i \frac{\lambda'_i(\lambda'_i - 1)}{2}. \quad (4.3)$$

In order to find out more about the scaling dimensions of the fields at the base of blocks it is useful to notice the following. The necessary condition for two irreps to be in the same block $\mathcal{B}$ of $\text{OSp}(4|2)$, requiring the eigenvalues of the Casimir to be the same, is also sufficient. Based on the numerical analysis of sec. 5 and the exactness of the small coupling expansion for symmetric representations, it is therefore tantalizing to suggest our second conjecture, which is stronger than the first and of course compatible with it

$$\text{Conjecture 2: } h_\Phi(g_\sigma^2) = h_\Phi(g_\sigma^2 = 0) + \frac{g_\sigma^2}{8\pi} C(\mathcal{B}), \quad \Phi \in \mathcal{B}. \quad (4.4)$$

In other words, we suggest that the anomalous dimension of *any boundary* field Φ in the block $\mathcal{B}$ of $\text{osp}(4|2)$ is exactly $gC(\mathcal{B})/4$.

The two conjectures can be put together to obtain a nice form for the partition function of the sigma model. To fix some notations let $J_i^0, J_i^\pm$ be the generators corresponding to the even roots $2\epsilon_i$, $i = 1, 2, 3$ of $\text{osp}(4|2)$ normalized so that $[J_i^0, J_i^\pm] = \pm 2J_i^\pm$, $[J_i^+, J_i^-] = J_i^0$. Then, the generalized untwisted partition function is according to eqs. (4.2, 4.4) of the form

$$\begin{aligned} Z_g(q, u, v, w) = \text{tr} e^{2\pi i(uJ_1^0 + vJ_2^0 + wJ_3^0)} q^{L_0 - c/24} &= \sum_k q^{gk^2/4} b_k(q) ch_k(u, v, w) \\ &+ \sum_{k,l} q^{gk^2/4} a_{k,l}(q) ch_{\mathcal{P}G_{k,l}}(u, v, w) + \sum_{\lambda \text{ typ}} q^{gC(\lambda)/4} a_\lambda(q) ch_\lambda(u, v, w). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Here $ch(u, v, w)$ are characters of $\text{OSp}(4|2)$ representations and $b_k(q)$, $a_{k,l}(q)$, $a_\lambda(q)$ denote entire functions in q we will call branching functions. Under the change of sign $u \rightarrow u + 1/2$ the characters in eq. (4.5) become supercharacters. According to the discussion in sec. (2.1, 2.2) and the fact that the superdimension of projective and typical representations is 0 one has

$$Z_g(q, 1/2, 0, 0) = Z_{NN}(q), \quad (4.6)$$

⁶Scaling fields with associate $\text{OSp}(4|2)$ highest weights certainly belong to different Virasoro representations. This is because the Virasoro algebra is, in the scaling limit, a subalgebra of the lattice algebra which is $\text{OSp}(4|2)$ invariant.

where Z_{NN} is defined in (2.6). Let ρ be the outer automorphism of $\mathfrak{osp}(4|2)$. The generalized twisted partition function defined with an insertion of ρ into the trace

$$Z_g^{\text{tw}}(q, u, v, w) = \text{tr } e^{2\pi i(uJ_1^0 + vJ_2^0 + wJ_3^0)} q^{L_0 - c/24} \rho \quad (4.7)$$

and has the same expansion as in eq. (4.5) except that $\text{OSp}(4|2)$ characters are evaluated on $D(u, v, w)\rho$, where $D(u, v, w)$ is $\text{OSp}(4|2)$ supermatrix with eigenvalues $e^{\pm 2\pi i u}, e^{\pm 2\pi i(v+w)}, e^{\pm 2\pi i(v-w)}$. From the discussion in sec. 4.1 of [1] it is clear that supercharacters of $\text{OSp}(4|2)$ projective representations vanish on ρ and therefore

$$Z_g^{\text{tw}}(q, 1/2, 0, 0) = Z^{\text{tw}}(q). \quad (4.8)$$

Equalities (4.6, 4.8) yield

$$b_\emptyset(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n^2}}{\eta(q)}, \quad b_{1^2}(q) = 1 - b_\emptyset(q) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{q^{n^2}}{\eta(q)}, \quad b_k(q) = \frac{1}{\eta(q)}, \quad k \geq 1.$$

In order to find the explicit form of branching functions $a_{\mathcal{P}}(q)$ and $a_{\Lambda}(q)$ from a lattice point of view one would have to understand how irreps of the Brauer algebra decompose, in the continuum limit, into sums of Virasoro irreps. Otherwise according to eq. 4.4 of [1]

$$Z_g(q, u, v, w) = \sum_{\lambda} sc_{\lambda}(D) \chi'_{\lambda}(q), \quad (4.9)$$

where $\chi'_{\lambda}(q)$ is the contribution of the standard representation of the Brauer algebra $\Delta_L(\lambda)$ to the partition function in the continuous limit. If we recall that $\Delta_L(\lambda)$ was constructed by trace subtraction and Young symmetrization then $sc_{\lambda}(D) \chi'_{\lambda}(q)$ is the contribution to the partition function of all tensors of shape λ . Taking into account the two conjectures and the fact that tensor fields of typical shape λ are $\text{OSp}(4|2)$ irreps, while tensor fields of atypical shape λ contain only $\text{OSp}(4|2)$ atypical representations from the same block, we expect that

$$\chi'_{\lambda}(q) = z_\emptyset(q) q^{gC(\lambda)/4} \sum_{T \text{ shape } \lambda} q^T. \quad (4.10)$$

Here $z_\emptyset(q)$ is the trace of $q^{L_0 - c/24}$ evaluated on the space of $\text{OSp}(4|2)$ invariant states constructed from products of scalars $(\partial^n \phi \partial^m \phi)$, T is a standard Young tableau of shape λ with entries $n_T(\epsilon) \in \mathbb{N}$ in every box $\epsilon \in \lambda$ and $q^T := \prod_{\epsilon \in \lambda} q^{n_T(\epsilon)}$. The entries of T denote the order of the derivatives of fields ϕ from which the tensor of shape λ was constructed.

In preparation for a discussion to come in section 5 and to illustrate (4.10), let us compute finally the partition function at the (formal) value $g = 2$ to the order q^6 . The relevance of this exercise will become clear in sec. 6. To the order q^6 we have

$$z_\emptyset(q) = q^{-1/24} (1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 7q^6 + \dots). \quad (4.11)$$

Indeed, there is no linear term in $z_\emptyset$ because the only possible field at level 1 vanishes $(\phi \partial \phi) \equiv 0$. At level 2 and 3 there is only one linearly independent field because of the constraint $(\phi \partial^2 \phi) + (\partial \phi \partial \phi) = 0$ and of its derivative, etc. The typical

$$1^3, \dots, 1^{12}, 21, 21^3, \dots, 21^8, 2^2 1^2, 2^2 1^3, 2^2 1^4, 31, 31^2$$

and atypical weights

$$\{\emptyset, 2^3\}_0, \{1^2, 21^2, 31^3\}_{0^*}, \{1, 2^2 1\}_1, \{2, 2^2\}_2, \{3\}_3$$

are the only ones with $h_\lambda(g = 2) \leq 6$. It is not hard to compute using def. (4.10) that

$$\begin{aligned} \chi'_{r1^s}(q) &= z_\emptyset(q) \frac{q^{(r^2+s)/2}}{(1-q^s)!(1-q^{r-1})!(1-q^{r+s})} \\ \chi'_{2^2s}(q) &= z_\emptyset(q) \frac{q^{4+s/2}(1-q^{s+1})}{(1-q^2)!(1-q^{s+3})!}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

where we have introduced the notation $(1-q^k)! := (1-q) \dots (1-q^k)$. Putting together eqs. (4.9,4.11,4.12) and $\chi'_{23}(q) = q^6 + \dots$ we get

$$Z_{g=2} = q^{-1/24} (1 + 6q^{\frac{1}{2}} + 17q + 38q^{\frac{3}{2}} + 84q^2 + 172q^{\frac{5}{2}} + 325q^3 + 594q^{\frac{7}{2}} + 1049q^4 + 1796q^{\frac{9}{2}} + 3005q^5 + 4912q^{\frac{11}{2}} + 7877q^6 + \dots). \quad (4.13)$$

5 Numerical analysis

We have investigated the validity of our two conjectures (4.2,4.4) numerically by a detailed study of the hamiltonian H_Δ defined in eq. (5.1) of our first paper.

It is useful to recall that H_Δ was defined in the diagrammatic representation of the Brauer algebra. In sec. 3.2 of [1] we have explained how to construct the standard representations $\Delta_L(\mu)$, $\mu \vdash L-2k$, $k = 0, 1, \dots$ of the Brauer algebra $B_L(2)$ and have explicitly given the action of $B_L(2)$ on a basis of $\Delta_L(\mu)$. We have implemented this construction numerically, thus, reducing the problem of finding the spectrum of H_Δ to its diagonalization in each of the standard modules $\Delta_L(\mu)$. Once this is done, the results have to be carefully interpreted, because only a subset of these eigenvalues actually appear in the representation of H_Δ provided by the $\text{OSp}(4|2)$ spin chain. These can be found among the eigenvalues of H_Δ , restricted to the standard modules $\Delta_L(\mu)$, which contain simple summands $B_L(\mu)$ allowed to appear on $V^{\otimes L}$ and enumerated in sec. 4.3 of [1].

According to eq. (4.4), the anomalous dimension of two multiplets of fields assembled in two projective representations, that are associate to each other, is the same. To test numerically this aspect of the conjecture it is useful know the decomposition of $V^{\otimes L}$ also as an $\text{osp}(4|2)$ module. In order to do so one has to modify eq. 4.36 of [1] by i) identifying associate representations and ii) decomposing the self associate ones.

The scaling dimensions for the $\text{osp}(4|2)$ fields in the symmetric representations being well known from the 6 vertex model, we concentrate on projective representations only.

So, let i) $\mathcal{P}(\lambda) \neq \mathcal{P}(\lambda^*)$ be associate projective direct summands of $_{\text{OSp}(4|2)}V^{\otimes L}$ paired up with the $B_L(2)$ irreps $B_L(\lambda)$ and $B_L(\lambda^*)$ respectively. Here $\lambda \neq \lambda^*$ are $\text{OSp}(4|2)$ associate highest weights induced from the $\text{osp}(4|2)$ highest weight $\Lambda = \tau \cdot \Lambda$ invariant under the action of the $\text{osp}(4|2)$ outer automorphism τ . The Young tableau notation for the highest weights of $\text{OSp}(4|2)$ was introduced in sec. 4.3 of [1]. Thus, the $_{\text{osp}(4|2)}V^{\otimes L}$ direct summands $\mathcal{P}(\lambda) \neq \mathcal{P}(\lambda^*)$ are isomorphic to $\mathcal{P}(\Lambda)$ and the latter has to be paired up with $B_L(\lambda) \oplus B_L(\lambda^*)$ in the decomposition of $_{\text{osp}(4|2)}V^{\otimes L}$.

Now let ii) $\mathcal{P}(\lambda)$ be a selfassociate projective direct summand of $_{\text{OSp}(4|2)}V^{\otimes L}$ paired up with the $B_L(2)$ irrep $B_L(\lambda)$. Here $\lambda = \lambda^*$ is a $\text{OSp}(4|2)$ highest weight induced from the distinct $\text{osp}(4|2)$ highest weights $\Lambda, \tau \cdot \Lambda$. Then, under the restriction to the proper subgroup of $\text{OSp}(4|2)$, $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{P}(\Lambda) \oplus \mathcal{P}(\tau \cdot \Lambda)$. Therefore, both $_{\text{osp}(4|2)}V^{\otimes L}$ direct summands $\mathcal{P}(\Lambda)$ and $\mathcal{P}(\tau \cdot \Lambda)$ are paired up with $B_L(\lambda)$ in the decomposition of $_{\text{osp}(4|2)}V^{\otimes L}$.

To test the second conjecture numerically for a multiplet of fields assembled in a $\text{osp}(4|2)$ representation $\mathcal{P}(\Lambda)$ we compute the lowest eigenvalues $E_\lambda(L), E_{\lambda^*}(L)$ of H_Δ in $\Delta_L(\lambda), \Delta_L(\lambda^*)$ and then we compare

$$h_{\lambda, \lambda^*}(L) = \frac{L}{\pi v_s} \left(E_{\lambda, \lambda^*}(L) - E_0(L) \right), \quad v_s = \frac{\sin \pi g}{1 - g}$$

to eq. (4.4) with $C(\lambda) = C(\lambda^*) = C(\Lambda)$.

The efficiency of our program is such that H_Δ could be diagonalized only in the representation spaces $\Delta_L(\mu)$'s with $L \leq 12$. In this range, the quantities $h_\lambda(L)$ tend to be strongly affected by finite size corrections. This is obvious in the limit $g \rightarrow 0$ due to the vanishing of v_s and, perhaps, less obvious in the opposite limit $g \rightarrow 1$, where the finite size corrections (at least to the 6 vertex scaling dimensions) are extremely slowly converging because of their logarithmic nature, see [17].

To extrapolate the functions $h_\lambda(L)$ at $L = \infty$ we have used the following form for the finite size corrections

$$h_\lambda(L) = h_\lambda(\infty) + \begin{cases} \frac{a}{L^2}, & C(\lambda) = 0 \\ \frac{a+b \log L}{L^2}, & C(\lambda) \neq 0 \end{cases}.$$

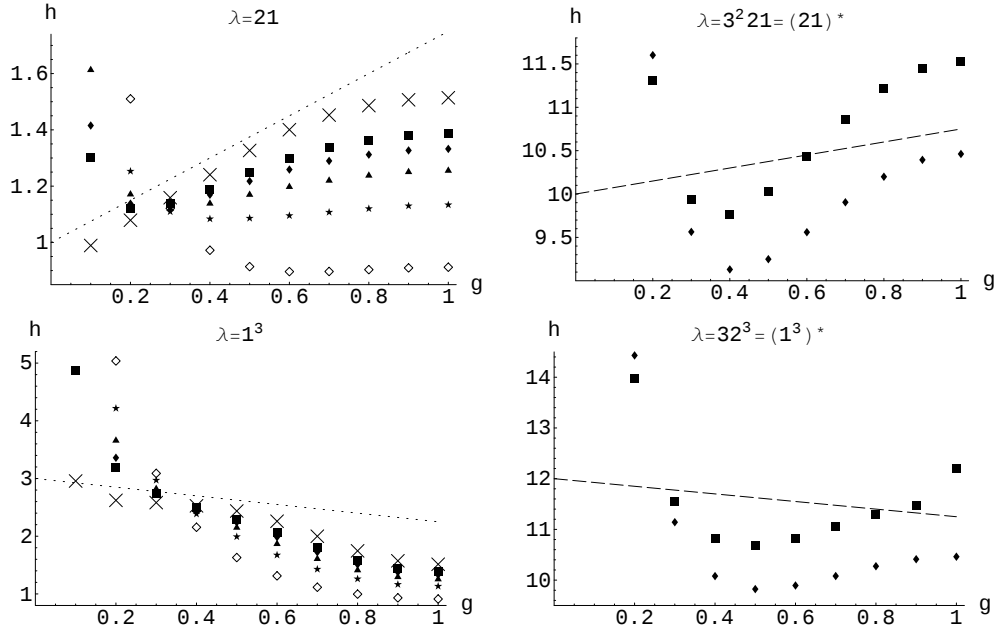


Figure 4: Empty rhombus, stars, triangles, full rhombus and boxes represent the raw values of the critical exponents $h_\lambda(L)$ for $L = 3, 5, 7, 9$ and 11 respectively; the cross corresponds to extrapolated values $h_\lambda(\infty)$; the line represents the conjectured exponents.

Here we have implicitly assumed that least irrelevant operators in H_Δ have scaling dimensions $2 + \mathcal{O}(g)$. As will be seen from the figures, for the fields with $C(\lambda) = 0$, the extrapolation “works better” if we drop the logarithm.

Using various symbols, we have represented in the figures below the values of $h_\lambda(L)$ for every available width $L \leq 12$ and $g = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$.⁷ To determine $h_\lambda(\infty)$ we used a least squares fit. These values are represented in the figures by a cross. We also draw the conjectured dependence of $h_\lambda(\infty)$ on g by a line.

Let us start our analysis with the two simplest typical $\text{OSp}(4|2)$ Young diagrams, that is 21 and 1^3 . These are non self associate diagrams and, according to [1] sec. 4.3 their associate partners are $(21)^* = 3^2 21$ and $(1^3)^* = 32^3$. The convergence of raw values $h_\lambda(L)$, the quality of the extrapolation $h_\lambda(\infty)$ and the conjectured exponents are exposed in fig. 4. There are no extrapolated exponents in the graph on the right in fig. 4 because there are only two available widths for the associate partitions. Although the agreement with the second conjecture does not appear to be so impressive at the first sight, it is worth keeping in mind that compared to Bethe ansatz calculations, the widths we use are far smaller. On the other hand, the classical dimension are in very good agreement with eq. (4.3). As shall be seen in the following, this is the case with all the graphs we present.

From our analysis of many typical Young diagrams of up to 8 boxes, which we do not present here, we have made two interesting observations: i) $h_\lambda(L)$ converges faster for larger partitions and ii) the larger $C(\lambda)$ is, the faster the convergence seems to be. We illustrate the observation i) and ii) in the graphs on the left and, respectively, on the right in fig. 5.

We turn now to the analysis of nontrivial blocks of $\text{OSp}(4|2)$ or, equivalently, $B_L(2)$. First let us look at the trivial block composed of fields with vanishing Casimir. In order to keep the graphs in fig. 6 clear, we have restricted to the partitions 1^2 , 21^2 , 31^3 and $(21^2)^* = 2^3$, $(31^3)^* = 321^2$. As one can see from fig. 6, the raw exponents $h_\lambda(L)$ have a negligible dependence on g , as expected. The agglomeration of points around $h = 6$ might be a little bit confusing because of the degeneracy $h_{2^3}(g_\sigma^2) = h_{31^3}(g_\sigma^2)$.

⁷In the vicinity of $g = 0$ some $h_\lambda(L)$ are not visible in the figures because they are too far from $h_\lambda(\infty)$.

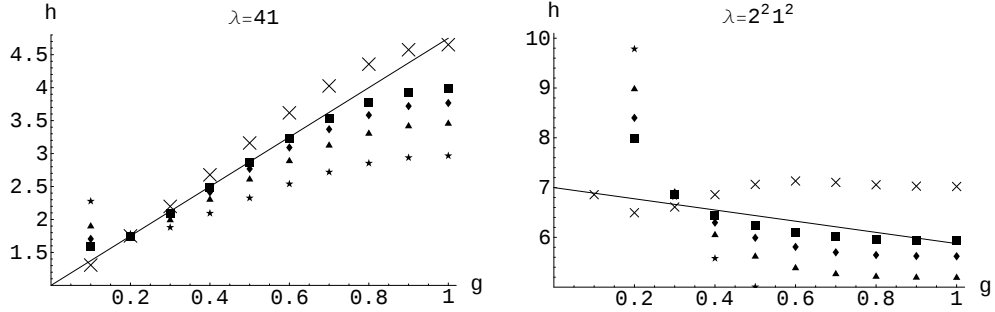


Figure 5: The symbols we use to represent points on the left graph have the same meaning as in fig. 4. On the right, empty rhombus, stars, triangles, full rhombus and boxes correspond to $h_\lambda(L)$ for $L = 4, 6, 8, 10$ and 12 respectively. The cross and the line have the same meaning as on the left.

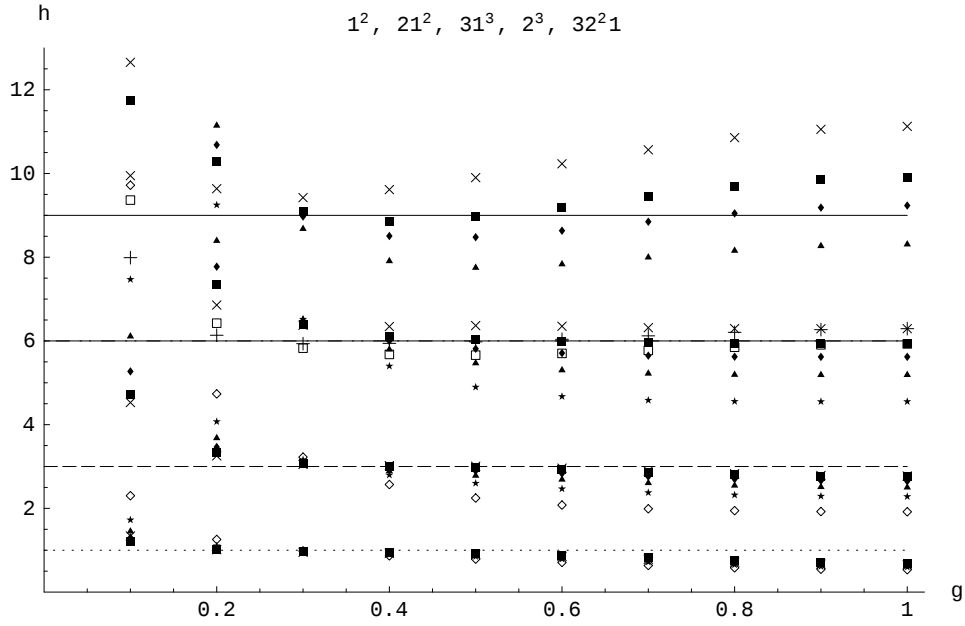


Figure 6: In order to avoid the confusing agglomeration of points around $h = 6$ we have represented for the partition 2^3 only $h_{2^3}(12)$ (empty box) and $h_{2^3}(\infty)$ (untwisted cross). Other symbols keep the same meaning as in fig. 5 right.

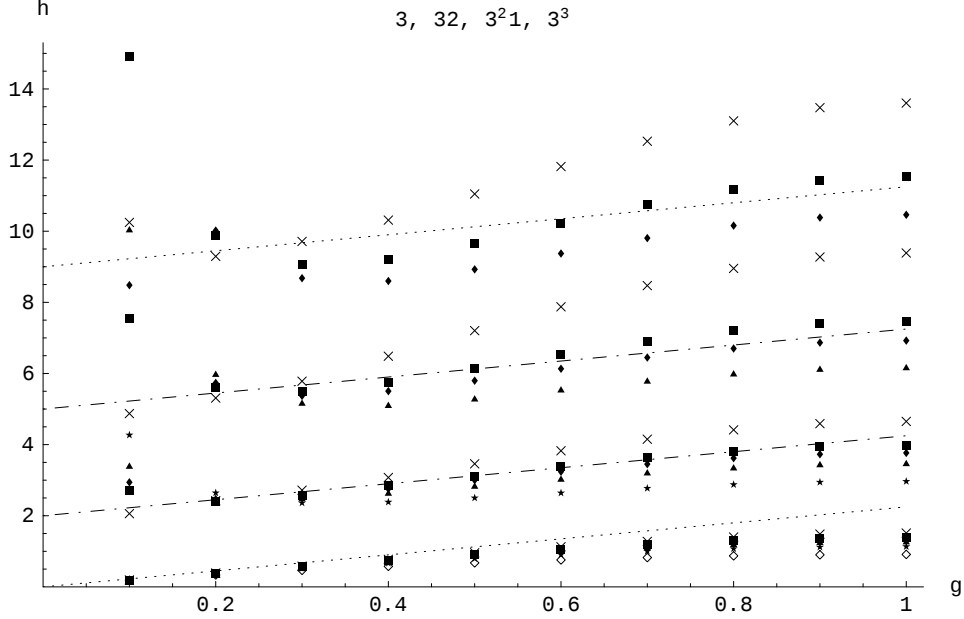


Figure 7: The symbols keep the same meaning as in fig. 4.

To conclude our numerical analysis we show the scaling dimension for the first four partitions $3, 32, 3^2 1$ and $(3)^* = 3^3$ in a block with exponents depending on g .

Agreement with the two conjectures is clearly quite satisfactory in figure 4 to excellent in figures 5, 6 and 7 for g neither too close to 0 nor to 1. It is also perfectly clear that eq. (3.59) cannot explain the numerical results for $\lambda = 2^2 1^2, 21^2, 31^3, 2^3, 32^2 1, 3^2 1, 3^3$.

We finally come to the point $g = 1$. Things appear satisfactory at first sight. The conjecture predicts only integer exponents for even sizes and exponents of the form $\mathbb{N} + 1/4$ for odd sizes, in agreement with the known result. The conjecture also predicts exponents $h_{1^p}(g = 1) = \frac{p^2}{4}$, which can be established directly at $g = 1$. Nevertheless, more subtle details do not match. For instance, the exponent of $\lambda = 21^2$ appears to have in fig. 6 a constant value $h_{21^2} = 3$ on the whole critical line, which is in agreement with the second conjecture. On the other hand, as was explained in sec. 2.3 there is an exact degeneracy $h_\lambda(L)$ at $g = 1$ for all $\lambda \vdash m$. Given that for a one row partition λ we know for certain that $h_m(\infty) = m^2/4$ one would expect, in particular, $h_{21^2}(g = 1)$ to be equal to 4, which is not the case: for any $g < 1$, $h_{21^2}(L)$ appears to convergence toward 3 in fig. 6.

A closer look shows that requiring continuity of the spectrum of exponents at $g = 1$ requires giving up both conjecture 1 and conjecture 2. The numerical results and the internal consistency of the approach suggest rather that the point $g = 1$ is in some sense singular, and that some of its exponents (roughly, those of mixed tableaux) are discontinuous at this point - that is, limits $w \rightarrow 0$ and $L \rightarrow \infty$ do not commute in the lattice model (this is suggested by the bare numerical data as well). Note this is exactly what happens at $g = 0$ ($w = \infty$) where the lattice model is entirely frozen and all critical exponents - when formally defined through finite size scaling say - vanish, but the limit $g \rightarrow 0$ is well defined, and different.

The presence of a singularity at $g = 1$ may not be so surprising if we notice that in the lattice model, the point $w = 0$ (as well as the point $w = \infty$) corresponds to a larger symmetry (OSp enhanced to SU, where the spectrum is organized according to representations of the Temperley Lieb algebra, unlike the full Brauer algebra which appears generically. In dense intersecting loop models where the fugacity of loops is $N < 2$, a similar singularity also occurs at the point $w = 0$. In that case however, the $w > 0$ phase has less interesting features than for the case $N = 2$, while the operator coupled to w is relevant. Here, the value $g = 1$ corresponds to some operators becoming marginal.

6 Relation with the GN model and another look at the conjecture

The value $g = 1$ plays for the 6 vertex model a role similar to the Kosterlitz Thouless point for the $O(2)$ model; beyond the value $w = 0$, the 6 vertex model enters a massive phase, and has no longer a continuum limit of interest. We can however perfectly well continue our formula beyond $g = 1$.⁸ In the case of the free boson, the result still describes the partition function of a well defined theory, which would be obtained as the continuum limit of a lattice model where “the bare fugacity of vortices is turned to zero”. Similarly, it is natural to expect that the OSp coset sigma model can be defined for any g (note that for $S > 0$ the supersphere has trivial homotopy). We observe now that if we set $g = 2$ or $g_\sigma^2 = 4\pi$ in our conjectured formula, we obtain, parametrizing now the Young diagram by the lengths n_1, n_2 of the first two rows and b for the first column

$$\begin{aligned} h(g=2) &= \frac{n_1^2}{2} + \frac{n_2^2}{2} + \frac{b-2}{2}, \quad b \geq 2 \\ h(g=2) &= \frac{n_1^2}{2}, \quad b = 0, 1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

This formula has an appealing physical interpretation. Indeed, consider now the $OSp(4|2)$ GN model

$$S = \int \frac{d^2x}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^4 \psi_L^i \partial \psi_L^i + \psi_R^i \bar{\partial} \psi_R^i + 2\beta_L \partial \gamma_L + 2\beta_R \bar{\partial} \gamma_R + g_{GN} (\psi_L^i \psi_R^i + \beta_L \gamma_R - \gamma_L \beta_R)^2 \right]. \quad (6.2)$$

The central charge of this model is of course $c = 1$ (with a contribution of 2 from the fermionic sector and -1 from the bosonic one). Its beta function vanishes identically, just like in the case of the coset sigma model.

Consider now the free point $g_{GN} = 0$ where the theory reduces to four Majorana fermions and a $\beta\gamma$ system. The $O(4)$ acts on the fermions here, and the $Sp(2)$ on the bosons, in contrast with the supersphere sigma model where the $O(4)$ acts on the bosons and the $Sp(2)$ on the (symplectic) fermions.

In the free theory, the basic fields ψ^i, β, γ all have dimension $h = \frac{1}{2}$, and they live in the fundamental representation. It is easy to organize all the fields of the theory in terms of representations of the global $OSp(4|2)$ symmetry by means of Young diagrams.⁹ Consider a Young diagram of shape λ . To build a tensor corresponding to λ one has to proceed as in the case of the sigma model, that is to super(anti)symmetrize indices¹⁰ in a row(column). In this case, however, even indices correspond to fermionic fields ψ^i (in different points), while odd indices correspond to bosonic fields β, γ . Therefore, the components of a tensor of hook shape $\lambda = n_1 n_2 1^{b-2}$, $n_1 = (a_2 + a_3)/2 + 1$, $n_2 = |a_2 - a_3|/2 + 1$ corresponding to an $osp(4|2)$ highest weight $\Lambda = b\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_3$ acquire, after the fusion, the dimension

$$\frac{1}{2} \times (b + n_1 + n_2 - 2) + \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}$$

which is exactly eq. (6.1). This is, of course, the lowest possible dimension for a multiplet of $osp(4|2)$ fields in a highest weight representation Λ . All other fields with the same symmetry Λ have dimensions that differ by the previous one by integers. They can be constructed in two ways: i) instead of taking the fundamental fields themselves in order to build tensor one can take as well their derivatives ii) one can also multiplying the previously considered fields with $osp(4|2)$ scalars, e.g. $\psi^i \partial \psi^i + \beta \partial \gamma - \gamma \partial \beta$.

Thus we propose that the continuation of the sigma model to $g = 2$ coincides with the GN model at $g_{GN} = 0$, which is nothing but the $OSp(4|2)$ WZW model at level $k = -1/2$.¹¹

⁸In the approach of [18] this continuation seems possible as well.

⁹We do not pretend that traceless tensors correspond to $OSp(4|2)$ irreps. We only use the fact that a (traceless) tensor of shape λ necessarily contains the $OSp(4|2)$ irreps of highest weight λ and, if λ is atypical, it might also contains irreps representation of highest weight $\mu < \lambda$.

¹⁰The indices correspond to the basis vectors ψ^i, β, γ of the fundamental representation of $OSp(4|2)$.

¹¹The fermionic fields ψ^i in eq. (6.2) clearly provide a free field representation for $so(4)_1 \simeq sl(2)_1 \oplus sl(2)_1$. The level of the $sl(2)$ free field representation provided by the fields β, γ can be derived from the normalization of the $osp(4|2)$ even roots: $(2\epsilon_1)^2 = -4$, $(2\epsilon_2)^2 = (2\epsilon_3)^2 = 2$.

To check this further, let us observe that the full organization of the fields in the WZW can be obtained more explicitly by analyzing the characters of the current algebra in this theory. One finds two representations $\{0\}, \{1\}$ for the affine superalgebra based on the trivial and fundamental representations of $\text{osp}(4|2)$, with characters $\chi_{\{0\},\{1\}}(\tau, u, v, w) = \text{tr}_{\{0\},\{1\}} q^{L_0 - c/24} e^{2\pi i(uJ_1^0 + vJ_2^0 + wJ_3^0)}$

$$\begin{aligned}\chi_{\{0\}}(\tau, u, v, w) &= \chi_0^{-1/2}(\tau, u) \chi_0^1(\tau, v) \chi_0^1(\tau, w) + \chi_1^{-1/2}(\tau, u) \chi_1^1(\tau, v) \chi_1^1(\tau, w) \\ \chi_{\{1\}}(\tau, u, v, w) &= \chi_0^{-1/2}(\tau, u) \chi_1^1(\tau, v) \chi_1^1(\tau, w) + \chi_1^{-1/2}(\tau, u) \chi_0^1(\tau, v) \chi_0^1(\tau, w).\end{aligned}\quad (6.3)$$

Here the $\chi_{0,1}^k$ are affine characters of $\text{sl}(2)_k$:

$$\begin{aligned}\chi_0^{-1/2}(\tau, u) &= \frac{\eta(\tau)}{2} \left[\frac{1}{\theta_4(\tau, u/2)} + \frac{1}{\theta_3(\tau, u/2)} \right] \\ \chi_1^{-1/2}(\tau, u) &= \frac{\eta(\tau)}{2} \left[\frac{1}{\theta_4(\tau, u/2)} - \frac{1}{\theta_3(\tau, u/2)} \right] \\ \chi_0^1(\tau, u) &= \frac{\theta_3(2\tau, u)}{\eta(\tau)} \\ \chi_1^1(\tau, u) &= \frac{\theta_2(2\tau, u)}{\eta(\tau)}\end{aligned}\quad (6.4)$$

In order to compute the supercharacters one has to insert $(-1)^{J_1^0}$ into the trace, that is formally make the shift $u \rightarrow u + 1/2$. Imposing periodic boundary conditions for both fermions and bosons yields a supertrace partition function. Evaluating the characters in eq. (6.3) with $u = 1/2, v = w = 0$ we get, as expected from sec. 2.1, the partition function of the compactified boson at $g = 2$.

Moreover, let ρ be the outer automorphism of $\text{osp}(4|2)$. Then one can define twisted characters via

$$\chi_{\{0\},\{1\}}^{\text{tw}}(\tau, u, v, w) = \text{tr}_{\{0\},\{1\}} q^{L_0 - c/24} e^{2\pi i(uJ_1^0 + vJ_2^0 + wJ_3^0)} \rho \quad (6.5)$$

Noticing that ρ acts only on the $\text{so}(4)$ Dynkin labels it is not hard to prove that the $\text{osp}(4|2)_{-1/2}$ twisted characters in eq. (6.5) are given by the same formulas (6.3) except the $\text{so}(4)_1$ characters are now replaced by their twisted versions

$$\chi_0^1(\tau, v) \chi_0^1(\tau, w) \rightarrow \frac{\theta_3(4\tau, v + w)}{\eta(2\tau)}, \quad \chi_1^1(\tau, v) \chi_1^1(\tau, w) \rightarrow \frac{\theta_2(4\tau, v + w)}{\eta(2\tau)}.$$

Here again, evaluating the $\text{osp}(4|2)_{-1/2}$ twisted characters at $u = 1/2, v = w = 0$ we get, as expected from sec. 2.2, the twisted characters of the compactified boson $\chi_{\{0\}}^{\text{tw}}(\tau, 1/2, 0, 0) = \eta(\tau)/\eta(2\tau)$ and $\chi_{\{1\}}^{\text{tw}}(\tau, 1/2, 0, 0) \equiv 0$.

Adding up the two affine characters in eq. (6.3) and developing in powers of q in the point $u = v = w = 0$ we get the partition function

$$\begin{aligned}Z_{g=2} &= q^{-1/24} (1 + 6q^{\frac{1}{2}} + 17q + 38q^{\frac{3}{2}} + 84q^2 + 172q^{\frac{5}{2}} + 325q^3 + 594q^{\frac{7}{2}} + 1049q^4 + 1796q^{\frac{9}{2}} \\ &\quad + 3005q^5 + 4912q^{\frac{11}{2}} + 7877q^6 + \dots),\end{aligned}\quad (6.6)$$

which is in agreement with eq. (4.13), and weighs strongly in favor of our identification of the point $g = 2$. This in turn provides another look at the conjectures. Indeed, instead of thinking of the critical line as a supersphere sigma model with running coupling constant g_σ^2 , we may think of it as a GN model with running coupling constant g_{GN} . The deformation of this model away from the WZW (free) point is a current current perturbation, for which methods of conformal perturbation theory can be applied somewhat more comfortably than in the sigma model case.

We start by writing generally the current algebra as

$$J^\alpha(z) J^\beta(0) = \frac{k}{z^2} \eta^{\alpha\beta} + f_\gamma^{\alpha\beta} \frac{J^\gamma(0)}{z} \quad (6.7)$$

where the Greek labels take values in the adjoint. The η 's and the f 's characterize the algebra, and one has the usual relations

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha\beta} &= (-)^{[\alpha][\beta]} \eta^{\beta\alpha} \\ f_{\gamma}^{\alpha\beta} &= -(-)^{[\alpha][\beta]} f_{\gamma}^{\beta\alpha} \\ f^{\alpha\beta\gamma} &= f_{\delta}^{\alpha\beta} \eta^{\delta\gamma} \\ \eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\gamma} &= \delta_{\alpha}^{\gamma}.\end{aligned}\tag{6.8}$$

A crucial property of $\text{OSp}(2S+2|2S)$ is that the Casimir in the adjoint vanishes:

$$\eta_{\mu\nu} f_{\sigma}^{\nu\rho} f_{\tau}^{\mu\sigma} = f_{\mu\sigma}^{\rho} f_{\tau}^{\mu\sigma} = f^{\mu\sigma\rho} f_{\mu\sigma\tau} = C_{adj} \delta_{\tau}^{\rho} = 0.\tag{6.9}$$

This can also be used in the form $f_{\mu\sigma\rho} f_{\tau}^{\mu\sigma} = \eta_{\rho\tau} C_{adj} = 0$. Another crucial property is that in $\text{OSp}(2S+2|2S)$ there is only one invariant rank three tensor, the structure constants $f^{\mu\nu\rho}$ (in other words, every invariant in the 3-fold tensor product of the adjoint is proportional to f). Using these features, it seems possible to argue that, exactly like in the case of the $\text{PSL}(2|2)$ sigma model [21, 22, 23, 24], the perturbation theory away from the WZW point is abelian, and leads to corrections to the exponents proportional, to all orders, to $g-2$ times the Casimir. In other words, we expect for the GN model that

$$h_{\Phi}(g_{\sigma}^2) = h_{\Phi}(g_{\sigma}^2 = 2) + \frac{g_{\sigma}^2 - 4\pi}{8\pi} C(\Phi)\tag{6.10}$$

which is identical with our second conjecture. This leads us to our third conjecture

$$\begin{aligned}\text{Conjecture 3: The spectrum of the boundary } \text{OSp}(4|2) \text{ sigma model coincides} \\ \text{with the spectrum of the boundary Gross Neveu model (6.10).}\end{aligned}\tag{6.11}$$

Finally, note that, while for $g \leq 2$ then the identity field $(\phi\phi) = 1$ has the lowest scaling dimension $h_{\emptyset} = 0$ among all allowable states of the theory, in contrast, as soon as $g > 2$ the scaling dimension of tensor fields of shape 1^p get arbitrarily large and negative for p big enough, and the model presumably becomes unstable. Therefore, the point $g = 2$ has to be the end of the critical line of the sigma model.

7 Conclusion

This work can be summarized in our three conjectures (4.2, 4.4, 6.11). For each of these, we have given a more or less complete list of arguments and verifications - including numerical ones. Going beyond this, at the present stage, entails considerable difficulties, which we postpone for future work. One of the most obvious questions to tackle would be the nature of the boundary conditions inherited from the lattice discretization, the full lowest order calculation of the anomalous dimensions, and the control of higher order calculations, which, according to our analysis should vanish for all representations, and not only the fully symmetric ones. Another very important question that requires further understanding is the nature of the algebra we have called Vir_B , which appears as the natural continuum limit of the Brauer algebra.

An interesting output of our work and our first conjecture is that the boundary spectrum is determined by the Casimir decomposition of the spectrum at the $g = 0$ (or, if the third conjecture is correct, at the WZW point $g = 2$). This points to a special role played by the Casimir algebra in the continuum limit, which is not obvious from the consideration of conserved quantities in the continuum action of the model [21], but, as we have explained, quite natural from the lattice model point of view.¹² It seems natural to expect that further progress will come from investigating this question more thoroughly.

¹²Recall that the Casimir algebra is the algebra which commutes with the horizontal part g of the affine Lie algebra $\hat{g}$ in usual WZW models. It contains the (enveloping algebra of the) Virasoro algebra, but is much bigger in WZW models, since it also contains for instance the modes from the higher order singlet fields under g built out of the currents [19]. This is very similar to the observations made in [24]. The characters of this algebra appear in general as branching functions in expansions of characters of the affine algebra $\hat{g}$ into characters of g . They are not the same as the characters of the algebra generated by the Casimir fields, though the two are related in an involved way [20].

Acknowledgments: we thank J. L. Jacobsen and V. Schomerus for many useful discussions. We especially thank V. Schomerus for sharing with us the results from [24] before publication. This work was supported by the Agence National Pour la Recherche under a Programme Blanc 2006 INT-AdS/CFT.

References

- [1] C. Candu and H. Saleur, “A lattice approach to the conformal $\text{OSp}(2S+2|2S)$ supercoset sigma model. Part I: Algebraic structures in the spin chain. The Brauer algebra”, 0801.0430.
- [2] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B613 (2001) 409.
- [3] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B 777, 316 (2007).
- [4] V. Schomerus, Phys.Rept. 431 (2006) 39-86.
- [5] T. Quella and V. Schomerus, JHEP 0709 (2007) 085
- [6] N. Vilenkin, “Special functions and the theory of group representations”, Translation of Mathematical Monographs Vol. 22, American Mathematical Society
- [7] M. Hamermesh, “Group Theory and Its Application to Physical Problems”. New York: Dover, 1989.
- [8] Notes by C. Mudry,
http://people.web.psi.ch/mudry/LECTURES_NOTES/SPRING06/lecture11.pdf
- [9] H.G. Kausch, Nucl.Phys. B583 (2000) 513.
- [10] E.V. Ivashkevich, J. Phys. A32 (1999) 1691-1699
- [11] K. Lang and W. Rühl, Nucl. Phys. B402 (1993) 573; and “Critical vector non linear sigma models: a resume of their field structure”, hep-th/9311046, unpublished.
- [12] E. Brézin, J. Zinn-Justin and J.C. Le Guillou, Phys. Rev. B14 (1976) 4976, equation (2).
- [13] F. Wegner, Z. Phys. B 78 (1990) 33.
- [14] A. Y. Alekseev and V. Schomerus, Phys.Rev. D60 (1999) 061901.
- [15] T. Quella and V. Schomerus, “New boundary conditions for the $c = -2$ ghost system”, hep-th/06120404.
- [16] N. Read and H. Saleur, B 777, 263 (2007)
- [17] F.C. Alcaraz, M.N. Barber and M.T. Batchelor, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 771.
- [18] N. Mann and J. Polchinski, Phys. Rev. D72 (2005) 086002
- [19] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, Nucl. Phys. B304 (1988) 348.
- [20] P. Bouwknegt and K. Schoutens, Phys. Rep. 223 (1993) 183.
- [21] M. Bershadsky, S. Zhukov and A. Vaintrob, Nucl. Phys. B559 (1999) 205.
- [22] A. Babichenko, “Conformal invariance and quantum integrability of sigma models on symmetric superspaces”, hep-th/0611214
- [23] G. Götze, T. Quella and V. Schomerus, “The WZNW model on $\text{PSU}(1,1|2)$ ”, hep-th/0610070
- [24] T. T. Quella V. Schomerus and T. Creutzig, “Boundary spectra in superspace σ -models”, 0712.3549.

New universality classes of dense polymers and conformal sigma models

Constantin Candu,¹ Jesper Lykke Jacobsen,^{1,2} Nick Read,³ and Hubert Saleur^{1,4}

¹*Institut de Physique Théorique CEA, IPhT, CNRS, URA 2306, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

²*Laboratoire de Physique Théorique, Ecole Normale Supérieure, Paris, France*

³*Physics Department, Yale University, New Haven, USA*

⁴*Department of Physics and Astronomy, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-0484*

(Dated: September 21, 2008)

We identify a new line of conformal field theories in the dense polymer problem where 6 legs crossings are allowed. This line has $c = -2$ and is described in the long distance limit by conformal sigma models of the type $U(n+1|n)/U(n|n) \times U(1)$ (here n is an integer depending on the observables under study in the SUSY formulation). Our identification leads to the proposal of an exact formula for the $\mathcal{L}$ legs boundary polymer exponents, $h_{\mathcal{L}} = \frac{(\mathcal{L}(\mathcal{L}-2)}{8g_{\sigma}^2}$, g_{σ}^2 the sigma model coupling (which depends on the weight w of intersections), and opens the way to tackling the sigma model using lattice techniques.

PACS numbers: 03.65.Vf, 03.67.-a, 64.70.Tg, 24.10.Cn

The relationship between conformal field theory and geometrical critical problems in 2 dimensions has a long and extremely fruitful history. Starting with the exact calculation of critical exponents for wide classes of problems such as percolation and polymers in the mid eighties, it culminated recently with the determination of full probability distributions and the uncovering of SLE structures, which gave birth to an entire new field of mathematics [1, 2].

The key ingredients in all these developments center around loop models, that is, typically, grand canonical ensembles of self avoiding mutually avoiding loops where fugacities are assigned to edges and loops. The relation with conformal field theory can then be understood through the reinterpretation of the loops as walls in a solid on solid interface model [3], which is closely related with the Dotsenko Fateev Coulomb gas [4]. The relation with SLE and probability theory comes through the reinterpretation of loops as interfaces [1, 2].

In both reinterpretations, the self avoiding constraint is of course crucial. This gives rise to the question of what might happen in more general models where loops can have some amount of intersections and overlaps.

In the so called dilute case - a typical example of which is self avoiding walks - it is well known in fact that allowing intersections (hence obtaining what is called self avoiding trails) does not change the long distance properties [5]. In the so called dense case - a typical example of which is dense polymers, to which we will get back soon - it was realized a few years back that allowing intersections had a very drastic effect, taking the models to different universality classes [6]. The latter however share many features of ordinary Brownian motion, and do not seem to exhibit new families of critical exponents.

From a different perspective, the field of conformal field theory entered a new phase in the last few years with the development of the AdS/CFT conjecture. Crucial to this conjecture are the properties of strings propagating in some specific backgrounds, which, once reinterpreted as world sheet field theories, give rise to sigma models on supertargets. The aspect most important for the present work is that, once super

group targets are allowed, new kinds of conformal field theories are obtained, which exhibit continuous symmetry, but not Kac Moody symmetry [7, 8]. An archetypal example is the principal chiral model on the supergroup $PSL(2|2)$, which is expected to be massless for a large range of values of the coupling constant g_{σ}^2 . Recall that for ordinary groups such as $SU(2)$, the PCM exhibits asymptotic freedom and spontaneous mass generation. It can be made massless by the introduction of a topological term, and then flows to the $SU(2)_k$ Wess Zumino Witten theories [9].

While for WZW theories the presence of a current algebra makes the model easily solvable, no such algebra is known to exist in the $PSL(2|2)$ and similar other cases. Compounding this with the lack of unitarity (the central charge here would be $c = -2$) and logarithmic features makes the model a very difficult CFT to solve indeed [10].

Interestingly this situation is not unlike what is was in the early nineties when logarithmic CFTs were discovered. In this case, the study of so called symplectic fermions, which led to the understanding of many crucial features such as the emergence of indecomposable representations of the Virasoro algebra etc, was spurred by attempts to describe the properties of dense polymers [11].

We will show in this paper that allowing crossings in dense polymers does in fact give rise to close cousins of the $PSL(n|n)$ models, here the sigma models on the superprojective spaces $U(n|n)/U(n-1|n) \times U(1)$. This identification has several crucial consequences. It gives access to properties of the sigma models both numerically, and, potentially, analytically using the techniques developed in [26]. It also unravels a new line of conformal field theories at $c = -2$, with continuously varying exponents for the geometrical problem.

The universality class of dense polymers is generically obtained when one forces a finite number of self avoiding loops or walks to fill up a non vanishing fraction of space. When that fraction is exactly equal to unity for finite systems, one obtains objects such as hamiltonian walks etc, which are often referred to as fully packed loop models. In this special case, there is such a strong dependence on the underlying lat

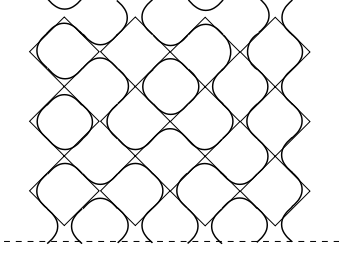


FIG. 1: An example of configuration for non intersecting dense loops. Here boundary conditions are free in the horizontal (space) direction and periodic in the vertical (imaginary time) direction.

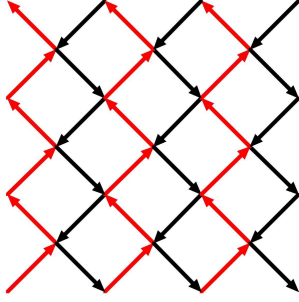


FIG. 2: The alternating $\square, \bar{\square}$ representations can be interpreted in terms of a lattice orientation.

tice, that universality is not guaranteed [13]. Nevertheless it is known that if one considers loops filling up the square lattice and avoiding each other at vertices - such as represented on figure - their properties are within the generic dense polymer universality class.

The field theory of dense polymers is well known, and we will have opportunity to recall it shortly. In particular, the central charge is $c = -2$. It was discovered a few years back [6] that if one allows four legs crossings the model flows to a different universality class with $c = -1$, and trivial geometrical exponents. There is a simple reason to expect that four leg crossings play a crucial role here: the two possible splittings at every vertex are equivalent to considering that the lattice is oriented as represented on figure . Configurations with four legs crossings render this orientation impossible, indicating that a crucial symmetry is broken.

To identify this symmetry we need to get into a bit of algebra [25]. We consider a transfer matrix propagating vertically. The edges each carry a $\mathbb{Z}_2$ -graded vector space of dimensions $m + n$ for the even (bosonic), n for the odd (fermionic), subspace ($n \geq 0$ is an integer). This space is chosen to be the fundamental of the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m+n|n)$ for i even (arrow going up), and its dual for i odd (arrow going down). The transfer matrix acts on a space which is the graded tensor product of these V_i . We label edges from $i = 0, \dots, 2L - 1$ for a system of width $2L$. For i even we have boson operators $b_i^a, b_{ia}^\dagger, [b_i^a, b_{jb}^\dagger] = \delta_{ij}\delta_b^a$ ($a, b = 1, \dots, n + m$),

and fermion operators $f_i^\alpha, f_{i\alpha}^\dagger, \{f_i^\alpha, f_{j\beta}^\dagger\} = \delta_{ij}\delta_\beta^\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$). For i odd, we have similarly boson operators $\bar{b}_{ia}, \bar{b}_i^{a\dagger}, [\bar{b}_{ia}, \bar{b}_j^{b\dagger}] = \delta_{ij}\delta_a^b$ ($a, b = 1, \dots, n + m$), and fermion operators $\bar{f}_{i\alpha}, \bar{f}_i^{\alpha\dagger}, \{\bar{f}_{i\alpha}, \bar{f}_j^{\beta\dagger}\} = -\delta_{ij}\delta_\alpha^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$). Notice the minus sign in the last anticommutator; since our convention is that the $\dagger$ stands for the adjoint, this minus sign implies that the norms of any two states that are mapped onto each other by the action of a single $\bar{f}_{i\alpha}$ or $\bar{f}_i^{\alpha\dagger}$ have opposite signs, and the ‘‘Hilbert’’ space has an indefinite inner product.

The supersymmetry generators are the bilinear forms $b_{ia}^\dagger b_i^b, f_{i\alpha}^\dagger f_i^\beta, b_{ia}^\dagger f_i^\beta, f_{i\alpha}^\dagger b_i^b$ for i even, and correspondingly $-\bar{b}_i^{b\dagger} \bar{b}_{ia}, \bar{f}_i^{\beta\dagger} \bar{f}_{i\alpha}, \bar{f}_i^{\beta\dagger} \bar{b}_{ia}, \bar{b}_i^{b\dagger} \bar{f}_{i\alpha}$ for i odd, which for each i have the same (anti-)commutators as those for i even. Under the transformations generated by these operators, $b_{ia}^\dagger, f_{i\alpha}^\dagger$ (i even) transform as the fundamental (defining) representation V of $\mathfrak{gl}(n + m|n)$, $\bar{b}_i^{a\dagger}, \bar{f}_i^{\alpha\dagger}$ (i odd) as the dual fundamental V^* (which differs from the conjugate of the fundamental, due to the negative norms). We always work in the subspace of states that obey the constraints

$$b_{ia}^\dagger b_i^a + f_{i\alpha}^\dagger f_i^\alpha = 1 \quad (i \text{ even}), \quad (1)$$

$$\bar{b}_i^{a\dagger} \bar{b}_{ia} - \bar{f}_i^{\alpha\dagger} \bar{f}_{i\alpha} = 1 \quad (i \text{ odd}) \quad (2)$$

(we use the summation convention for repeated indices of types a or α). These specify that there is just one particle, either a boson or a fermion, at each site, and so we have the graded tensor product of alternating irreducible representations V, V^* as desired. In the spaces V^* on the odd sites, the odd states (those with fermion number $-\bar{f}_i^{\alpha\dagger} \bar{f}_{i\alpha}$ equal to one) have negative norm.

The transfer matrix describing dense polymers at criticality is constructed as follows. First we note that for any two sites i (even), j (odd), the combinations

$$b_i^a \bar{b}_{ja} + f_i^\alpha \bar{f}_{j\alpha}, \quad \bar{b}_j^{a\dagger} b_{ia}^\dagger + \bar{f}_j^{\alpha\dagger} f_{i\alpha}^\dagger \quad (3)$$

are invariant under $\mathfrak{gl}(n + m|n)$, thanks to our use of the dual V^* of V . Then the transfer matrix acting on sites $i, i + 1$ with i even is

$$T_i = 1 + x(\bar{b}_{i+1}^{a\dagger} b_{ia}^\dagger + \bar{f}_{i+1}^{\alpha\dagger} f_{i\alpha}^\dagger) \times (b_i^a \bar{b}_{i+1,a} + f_i^\alpha \bar{f}_{i+1,\alpha}), \quad (4)$$

while for i odd

$$T_i = 1 + x(\bar{b}_i^{a\dagger} b_{i+1,a}^\dagger + \bar{f}_i^{\alpha\dagger} f_{i+1,\alpha}^\dagger) \times (b_{i+1}^a \bar{b}_{ia} + f_{i+1}^\alpha \bar{f}_{i\alpha}). \quad (5)$$

where x measures the anisotropy between horizontal and vertical splittings on the critical line. The complete transfer matrix is $T \equiv T_1 T_3 \cdots T_{2L-1} T_0 T_2 \cdots T_{2L-2}$. By taking either of the two terms in T_i for each vertex in the graph, the expansion in space-filling loops mentioned above is obtained with the appropriate factor for each vertex, and a factor

$(n + m) - m = \text{str } 1 = m$ for each loop. The latter is equal to the supertrace in the fundamental representation (denoted str), of 1, because the evaluation of contributions for each loop can be viewed in terms of states in V flowing around the loop. This holds true for topologically nontrivial loops as well as for loops homotopic to a point. The case of isotropic dense polymers corresponds now to $m = 0$ and $x = 1$.

Letting the variable $x \rightarrow 0$ allows one to extract the hamiltonian limit. In this limit, the spin chain is a product of alternating fundamental representation and its dual $(\square \times \bar{\square})^{\otimes L}$ and the interaction is simply the invariant quadratic coupling (Casimir), so the chain is the most natural generalization of the Heisenberg chain to the $gl(n + m|n)$ case.

For such models, there is a corresponding continuum quantum field theory, which is a nonlinear sigma model with target space the symmetry supergroup [here $U(n + m|n)$], modulo the isotropy supergroup of the highest weight state (see e.g. Refs. [14, 15] for related, but non-supersymmetric, examples, and Refs. [16, 17] for supersymmetric examples in random fermion problems). For the present cases we obtain $U(n + m|n)/U(1) \times U(n + m - 1|n) \cong \mathbf{CP}^{n+m-1|n}$, a supersymmetric version of complex projective space. Moreover, the details of the mapping show that this model has a topological angle $\theta = \pi$.

Let us now make things concrete: the fields can be represented by complex components z^a ($a = 1, \dots, n + m$), ζ^α ($\alpha = 1, \dots, n$), where z^a is commuting, ζ^α is anticommuting. In these coordinates, at each point in spacetime, the solutions to the constraint $z_a^\dagger z^a + \zeta_\alpha^\dagger \zeta^\alpha = 1$ (we use the conjugation $\dagger$ that obeys $(\eta\xi)^\dagger = \xi^\dagger \eta^\dagger$ for any η, ξ), modulo $U(1)$ phase transformations $z^a \mapsto e^{iB} z^a$, $\zeta^\alpha \mapsto e^{iB} \zeta^\alpha$, parametrize $\mathbf{CP}^{n+m-1|n}$. The Lagrangian density in two-dimensional Euclidean spacetime is

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2g_\sigma^2} [(\partial_\mu - ia_\mu)z_a^\dagger(\partial_\mu + ia_\mu)z^a \\ & + (\partial_\mu - ia_\mu)\zeta_\alpha^\dagger(\partial_\mu + ia_\mu)\zeta^\alpha] \\ & + \frac{i\theta}{2\pi}(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu), \end{aligned} \quad (6)$$

where a_μ ($\mu = 1, 2$) stands for the combination $a_\mu = \frac{i}{2}[z_a^\dagger \partial_\mu z^a + \zeta_\alpha^\dagger \partial_\mu \zeta^\alpha - (\partial_\mu z_a^\dagger)z^a - (\partial_\mu \zeta_\alpha^\dagger)\zeta^\alpha]$. The fields are subject to the constraint, and under the $U(1)$ gauge invariance, a_μ transforms as a gauge potential; a gauge must be fixed in any calculation. This set-up is similar to the nonsupersymmetric $\mathbf{CP}^{m-1}$ model in Refs. [18, 19]. The coupling constants are g_σ^2 , the usual sigma model coupling (there is only one such coupling, because the target supermanifold is a supersymmetric space, and hence the metric on the target space is unique up to a constant factor), and θ , the coefficient of the topological term, so θ is defined modulo 2π .

First we note a well-known important point about the supersymmetric models: the physics is the same for all n , in the following sense. For example, in the present model, correlation functions of operators that are local functions (possibly including derivatives) of components $a \leq n_1 + m$, $\alpha \leq n_1$,

exist for $n = n_1$, say, and are equal to those of the same operators for any other value $n > n_1$, due to cancellation of the “unused” even and odd index values. This can be seen in perturbation theory because the “unused” index values appear only in summations in closed loops, and their contributions cancel, but is also true nonperturbatively (it can be shown in the lattice constructions we discuss below). In particular, the renormalization group (RG) flow of the coupling g_σ^2 is the same as for $n = 0$, a non-supersymmetric sigma model. For the case of $\mathbf{CP}^{n+m-1|n}$, the perturbative beta function is the same as for $\mathbf{CP}^{m-1}$, namely (we will not be precise about the normalization of g_σ^2)

$$\frac{dg_\sigma^2}{dl} = \beta(g_\sigma^2) = mg_\sigma^4 + O(g_\sigma^6) \quad (7)$$

where $l = \ln L$, the logarithm of the length scale at which the coupling is defined [see e.g. Ref. [20], eq. (3.4)]. (The beta function for θ is zero in perturbation theory, and that for g_σ^2 is independent of θ .) For $m > 0$, if the coupling is weak at short length scales, then it flows to larger values at larger length scales. For $\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$, the coupling becomes large, the $U(n + m|n)$ symmetry is restored, and the theory is massive. However, a transition is expected at $\theta = \pi \pmod{2\pi}$. For $m > 2$, this transition is believed to be first order, while it is second order for $m \leq 2$ [14]. In the latter case, the system with $\theta = \pi$ flows to a conformally-invariant fixed-point theory. At the fixed point, a change in θ is a relevant perturbation that makes the theory massive.

For $m = 0$ the perturbative beta function vanishes identically. This can be seen either from direct calculations, which have been done to at least four-loop order [20], or from an argument similar to that in Ref. [7]: for $n = 1$, the sigma model reduces to the massless free fermion theory [11] $\mathcal{L} \propto \frac{1}{2g_\sigma^2} \partial_\mu \zeta^\dagger \partial_\mu \zeta$ and further the theta term becomes trivial in this case. Thus, for all sigma model couplings $g_\sigma^2 > 0$, the theory for $n = 1$ is non-interacting. The free-fermion theory is conformal, with Virasoro central charge $c = -2$; θ is clearly a redundant perturbation in this case, as it does not appear in the action (a similar argument appeared in Ref. [21]). By the same argument as before, the conformal invariance with $c = -2$ should hold for all n , and also for all g_σ^2 and θ , though the action is no longer non-interacting in general. Thus the beta function is also identically zero non-perturbatively. In general, the scaling dimensions will vary with the coupling g_σ^2 , so changing g_σ^2 is an exactly marginal perturbation, though for $n = 1$ the coupling can be scaled away, so there is no dependence on the coupling in the exponents related to those multiplets of operators that survive at $n = 1$. Hence for $n = 1$, the exactly-marginal perturbation that changes g_σ^2 is redundant. The dense-polymer problem apparently corresponds to only one special value of g_σ^2 . We also expect that, at the special value of g_σ^2 , θ remains redundant for all n , because the vertex model remains critical when staggering is present, as we know from the $n = 1$ case, so staggering does not change any scaling dimensions even for $n > 1$. It is likely that θ is redundant for all g_σ^2 and all n .

A note on the superalgebras is in order (these remarks are well-known, and can also be found in e.g. Ref. [8]). The above bilinears generate the superalgebra $\mathfrak{gl}(n+m|n)$ in the defining representation V ; they span the Hermitian matrices on V . One generator, denoted $\mathcal{E}$, and given by $\mathcal{E} = b_{ia}^\dagger b_i^a + f_{i\alpha}^\dagger f_i^\alpha$ (or the identity matrix) in the defining representation, commutes with the others. The generators which correspond to the Hermitian matrices with vanishing supertrace (in V), form a subsuperalgebra, denoted $\mathfrak{sl}(n+m|n)$. For $m \neq 0$, $\mathcal{E}$ has nonzero supertrace, and is eliminated by restricting to $\mathfrak{sl}(n+m|n)$. In these cases, $\mathfrak{sl}(n+m|n)$ is a simple superalgebra. But for $m = 0$, $\mathcal{E}$ has supertrace 0, and generates an ideal in $\mathfrak{sl}(n|n)$. The quotient superalgebra, denoted $\mathfrak{psl}(n|n)$, can be obtained by taking the quotient of $\mathfrak{sl}(n|n)$ by the ideal. For $n > 1$, $\mathfrak{psl}(n|n)$ is simple. The spaces V , V^* are, strictly speaking, not representations of $\mathfrak{psl}(n|n)$ because $\mathcal{E}$ is nonzero in these spaces ($\mathcal{E} = +1$ in V , -1 in V^*), but the tensor products of equal numbers of factors V and V^* , as we use in our models, are.

For $n = 1$, (??) thus does not exhibit very interesting physics. It also describes very few observables in the dense polymer problem. Indeed, the underlying algebra $\mathfrak{psl}(1|1)$ does not admit any non trivial invariant tensor, so none of the watermelon operators with $\mathcal{L}$ legs but the ones with $\mathcal{L} = 0, 2$ are present, and they are moreover degenerate - and part of an indecomposable block. These observables are expected to be present in all theories with $n > 1$ as well, and to not depend on the coupling constant g_σ^2 . However, for $n > 1$, more observables are possible. As soon as $n > 1$ for instance, all watermelon operators are allowed, and correspond to fully symmetric invariant tensors of $\mathfrak{psl}(n|n)$; there is no reason why the corresponding conformal dimensions should not depend on g_σ^2 , and indeed we will shortly see that they do.

For this, we need to be able to tune g_σ^2 in the lattice model. We propose doing so by allowing not four legs but six legs crossings. This can be described most conveniently by going to the hamiltonian formalism. First, it is easy to see that the factors of x in formulas for the elementary transfer matrices T_i obey the Temperley Lieb algebra relations $E_i^2 = mE_i$, $[E_i, E_j] = 0$, $|i-j| > 2$, $E_i E_{i\pm 1} E_i = E_i$ (and here $m = 0$). The corresponding hamiltonian can then be written as $H \propto -\sum_i E_i$ and correspond to a particular value of g_σ^2 . We now generalize this hamiltonian by adding interactions that preserve the symmetry. Four legs crossings would then translate into a perturbation of the type $P_{i,i+1}$ which exchanges spaces at position i and $i+1$. Since by construction our chain has alternating representations this is not possible within $\mathfrak{gl}(n+m|n)$ symmetry, so forcing such crossings breaks the symmetry down to the orthosymplectic subgroup. On the other hand, six leg crossings correspond to exchanging representations at position $i, i+2$ while the one at $i+1$ just goes through, and is perfectly compatible with the symmetry. In the hamiltonian language this corresponds to

$$H \propto -\sum E_i + w P_{i,i+2} \quad (8)$$

We note that this can be realized in a more pleasant isotropic

fashion by going to the triangular lattice.

Our main claim is that the continuum limit of hamiltonian (8) is described by the superprojective sigma model $CP^{n-1|n}$ with a coupling constant $g_\sigma^2(g)$, for which the θ variable is redundant.

The first thing to check is what happens when $n = 1$. In this case, it is possible to reformulate everything in terms of ordinary fermions [26] $\psi_i, \bar{\psi}_i$ obeying $\{\bar{\psi}_i, \psi_j\} = \delta_{ij}$, $\{\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j\} = \{\psi_i, \psi_j\} = 0$ through $E_i = (-1)^i (\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_{i+1}) (\psi_i + \psi_{i+1})$, $P_{i,i+2} = (-1)^i [1 - (\bar{\psi}_{i-1} - \bar{\psi}_{i+1}) (\psi_{i-1} - \psi_{i+1})]$. Since both are quadratic it is an easy exercise to show that the continuum limit is not affected indeed, with g only affecting the sound velocity and the fine structure of the Jordan blocks.

Since it can easily be argued that the ground state energy is the same for the $n = 1$ and $n > 1$ models, it follows from this exercise that the central charge remains $c = -2$ for all values of g . It is also easy to see that the two leg polymer exponent remains equal to zero.

Numerical study of the $\mathcal{L} > 2$ watermelon exponents then clearly shows a non trivial dependence in g , with in particular exponents getting smaller and smaller as g increases. To discuss this some more we place ourselves in the simplest case of free boundary conditions. The exponents at the special point $g = 0$ are well known to be $h_{\mathcal{L}}^0 = h_{1,1+\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}-2)}{8}$. We next assume that the limit $w \rightarrow \infty$ corresponds to the weak coupling limit of the sigma model $g_\sigma^2 \rightarrow 0$. This is qualitatively very reasonable: in the limit of large w , the system almost splits into two subsystems with $\mathfrak{gl}(n|n)$ symmetry involving only the fundamental or only its dual, with in both cases a simple interaction of the type $P_{i,i+1}$. Such models are well known to be integrable, and their physics to be described by a weak coupling limit not unlike the $\Delta \rightarrow 1$ limit of the XXZ antiferro spin chain. In such a limit, we can analyze the spectrum using the minisuperspace approach, that is, by analyzing quantum mechanics on the target manifold. The spectrum of the Laplacian on the ordinary projective space $CP^m = U(m+1)/U(m) \times U(1)$ is well known to be of the form $E_l \propto 4l(l+m)$, so, setting $m = -1$, we find that [23] $h_l^{wc} = \frac{l(l-1)}{2g_\sigma^2}$. Here l is an integer, which we can identify using $\mathfrak{psl}(n|n)$ representation theory with $\mathcal{L}/2$, $\mathcal{L}$ the number of lines in the watermelon operator. Remarkably, this formula coincides with the known result at $w = 0$ if we identify $g_\sigma^2 = 1$ for the case $w = 0$, ie ordinary dense polymers.

Now, there are strong arguments why for models such as the ones we are interested, the conformal dimensions are given by very simple formulas, and are simply linear in the Casimir of the associated representation of $\mathfrak{psl}(n|n)$ [22]; this all comes about due to the special structure of the perturbation theory where the dual Coxeter number - the Casimir in the adjoint - plays a special role, and here simply vanishes. It thus looks reasonable to conjecture that the minisuperspace approximation is exact for our model, whose exponents should be given

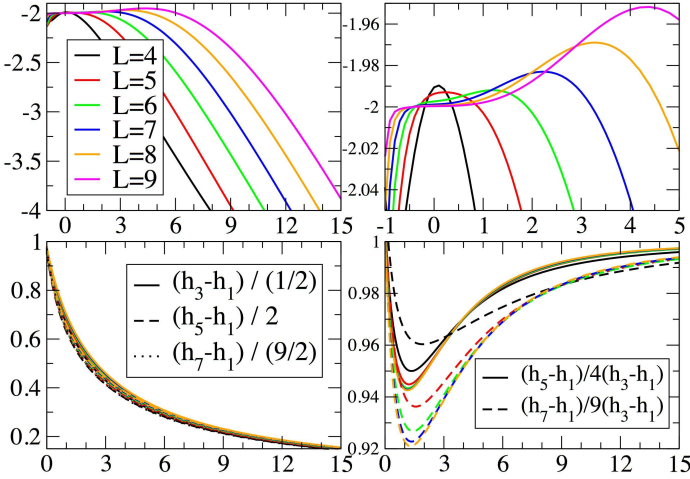


FIG. 3: The first two figures represent the central charge as a function of the intersection weight w for different sizes. It can be shown analytically that $c = -2$ always (see the text). The third figure represents the effective coupling constant g_σ^2 extracted from different sizes and values of $\mathcal{L}$. The collapse on a single curve is quite striking. The last figure shows details of the exponents, in particular the region close to $w = 0$ where convergence appears actually less good than on the previous curves.

therefore by

$$h_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L} - 2)}{8g_\sigma^2} \quad (9)$$

where g_σ^2 is a function of w , equal to unity when $w = 0$, and vanishing at large w .

This conjecture is compared with the results of exact diagonalizations on figures. On these figures, ratios of exponents for different values of $\mathcal{L}$ are represented as a function of the lattice coupling g . The sound velocity for the hamiltonian is determined by using the analytical results for the $n = 1$ case. Agreement is clearly good, although it is not perfect. There is a small chance that the formula might not be exact in a small region of couplings around $w = 0$, but it is not clear at the present time why this should be the case; we note that in similar problems, convergence can indeed be quite poor in some regions of the parameter space due to logarithmic corrections.

Although the $\text{psl}(n|n)$ algebra allows only observables with $\mathcal{L}$ even, it is perfectly possible to consider exponents for odd values of $\mathcal{L}$, by considering models on lattices with an odd number of sites. Results at $w = 0$ as well as a variant of the minisuperspace analysis still follow the same formula, and numerics indicate overall a totally similar behaviour.

Similar results are obtained by doing calculations on the triangular lattice. For technical reasons, only odd values of $\mathcal{L}$ have been studied.

We note that one can more generally study the spectrum of the hamiltonian $H \propto -\sum E_i + wP_{i,i+2} +$

$w_2(E_i E_{i+1} + E_{i+1} E_i)$. The symmetries are generically the same as before, and one expects the continuum limit to be described by the same sigma model, with now $g_\sigma^2(w, w_2)$. This is confirmed by numerical calculations.

We note that in the case of periodic boundary conditions, the known values of the polymer exponents are $h_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}^2 - 4}{32} = \frac{\mathcal{L}^2 - 1}{8}$, and thus do not have the minisuperspace form. Meanwhile, at large w , one can argue that the minisuperspace form remains valid, and indeed this is confirmed numerically. It seems therefore that in the periodic case, the arguments that the minisuperspace should be exact fails, which agrees with the expectations in [22]. More work is needed to clarify this point.

We also note that, within numerical accuracy, the effect of staggering is redundant, just as it is for the $n = 1$ case.

In conclusion, we have identified a new line of conformal field theories in the dense polymer problem where 6 legs crossings are allowed. This line has $c = -2$ and is described in the long distance limit by a conformal sigma model. Our identification leads to the proposal of an exact formula for the $\mathcal{L}$ legs polymer exponents in the boundary case, and opens the way to tackling the sigma model using lattice techniques.

Acknowledgments: HS was supported by the ESF Network INSTANS.

-
- [1] J. Cardy, *Annals Phys.* **318**, 81 (2005)
 - [2] W. Werner, arXiv:math/0007042
 - [3] B. Nienhuis, *J. Stat. Phys.* **34**, 731 (1984)
 - [4] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, “Conformal Field Theory”, Springer Verlag.
 - [5] A.J. Guttman, *J. Phys. A* **18**, 567 (1985)
 - [6] J. L. Jacobsen, N. Read and H. Saleur, *cond-mat/0205033*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003), 090601.
 - [7] N. Berkovits, C. Vafa, and E. Witten, *JHEP* **9903**, 018 (1999); *hep-th/9902098*.
 - [8] M. Bershadsky, S. Zhukov, and A. Vaintrob, *Nucl. Phys. B* **559**, 205 (1999); *hep-th/9902180*.
 - [9] A. Zamolodchikov, A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **379**, 602 (1992).
 - [10] G. Gotz, T. Quella and V. Schomerus, *JHEP* **0703**, 003 (2007).
 - [11] H. G. Kausch, “Curiosities at $c = -2$ ”, *hep-th/9510149*.
 - [12] N. Read and H. Saleur, *Nucl. Phys. B* **777**, 316 (2007).
 - [13] J.L. Jacobsen, J. Kondev, *Nucl. Phys. B* **532**, 635 (1998).
 - [14] I. Affleck, *Nucl. Phys. B* **257**, 397 (1985).
 - [15] N. Read and S. Sachdev, *Nucl. Phys. B* **316**, 609 (1989)
 - [16] M.R. Zirnbauer, *Ann. Physik (Berlin)* **3**, 513 (1994).
 - [17] I.A. Gruzberg, N. Read, and A.W.W. Ludwig, *Phys. Rev. B* **63**, 104422 (2001).
 - [18] A. D’Adda, M. Lüscher, and P. Di Vecchia, *Nucl. Phys. B* **146**, 63 (1978).
 - [19] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **149**, 285 (1979).
 - [20] F. Wegner, *Nucl. Phys. B* **316**, 663 (1989).
 - [21] M. Bocquet, D. Serban, and M.R. Zirnbauer, *Nucl. Phys. B* **578**, 628 (2000).
 - [22] T. Quella, V. Schomerus and T. Creutzig, “Boundary Spectra in Superspace sigma-models”, arXiv:0712.3549

- [23] R.B. Zhang and Y.M. Zou, J. Math. Phys. 46, 043513 (2005).
- [24] G. Parisi and N. Sourlas, J. Phys. Lett. (Paris) **41**, L403 (1980).
- [25] N. Read and H. Saleur, hep-th/0106124, *Nucl. Phys.* **B613** (2001), 409.
- [26] N. Read and H. Saleur, hep-th/0701259, *Nucl. Phys.* **B 777** (2007) 263.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Babichenko. Conformal invariance and quantum integrability of sigma models on symmetric superspaces. *Nucl. Phys.*, 648 :254–261, 2007. (Cité pages 3 et 80.)
- [2] Francisco C. Alcaraz, Michael N. Barber, and Murray T. Batchelor. Conformal Invariance, the XXZ Chain and the Operator Content of Two-Dimensional Critical Systems. *Annals of Physics*, 182 :280–343, 1988. (Cité page 95.)
- [3] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1 : Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society Student Texts, 2006. (Cité pages 28 et 29.)
- [4] B. Duplantier and H. Saleur. Exact critical properties of two-dimensional dense self-avoiding walks. *Nucl. Phys.*, B290 :291–326, 1987. (Cité pages 1, 119 et 122.)
- [5] B. Nienhuis. Exact Critical Point and Critical Exponents of $O(n)$ Models in Two Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1062–1065, 1982. (Cité page 1.)
- [6] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241 :333–380, 1984. (Cité pages 1 et 53.)
- [7] D. J. Benson. *Representations and Cohomology : Volume 1, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30. Cambridge University Press, New York, 1991. (Cité page 29.)
- [8] Denis Bernard. (Perturbed) Conformal Field Theory Applied To 2D Disordered Systems : An Introduction. *hep-th/9509137*, 1995. (Cité page 39.)
- [9] M. Bershadsky, Slava Zhukov, and Arkady Vaintrob. $PSL(n|n)$ sigma model as a conformal field theory. *Nucl. Phys.*, B559 :205–234, 1999. (Cité page 3.)
- [10] David G. Boulware and Lowell S. Brown. Symmetric Space Scalar Field Theory. *Ann. Phys.*, 138 :392–433, 1982. (Cité pages 54 et 59.)
- [11] Eric Braaten, Thomas L. Curtright, and Cosmas K. Zachos. Torsion and Geometrostasis in Nonlinear Sigma Models. *Nucl. Phys.*, B260 :630–688, 1985. (Cité pages 54 et 63.)

- [12] Jonathan Brundan. Tilting Modules for Lie Superalgebras 1. *Communications in Algebra*, 32 :2251–2268, 2007. (Cité page 31.)
- [13] Bryce DeWitt. *Supermanifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1992. (Cité page 84.)
- [14] Daniel Bump. *Lie Groups*. Springer, 2004. (Cité page 27.)
- [15] J. Cardy. Continuously varying exponents and the value of the central charge. *J. Phys.*, A20 :L891, 1987. (Cité page 74.)
- [16] Anton Cox, Maud de Visscher, Stephen Doty, and Paul Martin. On the blocks of the walled Brauer algebra. *arXiv:0709.0851*, 2007. (Cité page 118.)
- [17] Anton Cox, Maud de Visscher, and Paul Martin. The blocks of the Brauer algebra in characteristic zero. *arXiv:0601387*, 2006. (Cité page 3.)
- [18] C. J. Cummins and R. C. King. Young diagrams, supercharacters of $OSp(M|N)$ and modification rules. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 20 :3103–3120, 1987. (Cité page 102.)
- [19] D. Levy. Lattice algebras and the hidden symmetry of the 2D Ising model in a magnetical field. *Int. J. Mod. Phys.*, A6 :5127–5153, 1991. (Cité page 3.)
- [20] W. F. Doran, D. B. Wales, and P. J. Hanlon. On the semisimplicity of Brauer centralizer algebras. *J. Algebra*, 123 :165–199, 1998. (Cité page 3.)
- [21] Fabio Gavarini. On the radical of Brauer algebras. *math/0606501*, 2006. (Cité page 94.)
- [22] Michael Flohr. Operator product expansion in logarithmic conformal field theory. *Nucl. Phys.*, B634 :511–545, 2002. (Cité page 43.)
- [23] P. Di Francesco, H. Saleur, and J. B. Zuber. Critical Ising correlation functions in the plane and on the torus. *Nucl. Phys.*, B290 :527–581, 1987. (Cité page 1.)
- [24] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer, 1997. (Cité pages 53, 76, 77 et 78.)
- [25] D. Friedan. Nonlinear models in $2 + \epsilon$ dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :1057–1060, 1980. (Cité page 55.)
- [26] J. Germoni. Indecomposable representations of special linear Lie superalgebras. *J. Alg.*, 209 :367–401, 1998. (Cité page 26.)
- [27] Jérôme Germoni. *Représentations indécomposables des superalgèbres de Lie spéciales linéaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 1996. (Cité page 29.)
- [28] Y. Y. Goldschmidt and E. Witten. Conservation laws in some two-dimensional models. *Phys. Lett.*, B91 :392–396, 1980. (Cité page 52.)

- [29] Gerhard Gotz, Thomas Quella, and Volker Schomerus. The WZNW model on $PSU(1,1|2)$. *JHEP*, 03 :003, 2007. (Cité pages 28 et 114.)
- [30] S. J. Graham. Three-loop β -function for the bosonic non-linear sigma model. *Phys. Let. B*, 197 :543–547, 1987. (Cité page 67.)
- [31] V. Gurarie. Logarithmic Operators in Conformal Filed Theory. *Nucl. Phys.*, B410 :535–549, 1993. (Cité page 41.)
- [32] F. D. M. Haldane. Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnetic identification with the $O(3)$ nonlinear sigma model. *Phys. Lett.*, A93 :464–468, 1983. (Cité page 62.)
- [33] F. D. M. Haldane. Nonlinear field theory of large spin Heisenberg antiferromagnets. Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy Axis Neel state. *Phys. Rev. Lett.*, 50 :1153–1156, 1983. (Cité page 62.)
- [34] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1979. (Cité page 47.)
- [35] Hermann Weyl. *The Classical Groups. Their Invariants and Representation Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946. (Cité page 93.)
- [36] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1994. (Cité pages 11 et 22.)
- [37] I. G. MacDonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 1998. (Cité page 104.)
- [38] D. R. T. Jones I. Jack and N. Mohammadi. A four-loop calculation of the metric β -function for the bosonic σ -model and the string effective action. *Nucl. Phys*, B322 :431–470, 1989. (Cité page 67.)
- [39] E. V. Ivashkevich. Correlation functions of dense polymers and $c = -2$ conformal field theory. *J. Phys.*, A32 :1691–1699, 1999. (Cité pages 42 et 128.)
- [40] J. L. Cardy. Critical percolation in finite geometries. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 25 :L201, 1992. (Cité page 1.)
- [41] J. M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :231–252, 1998. (Cité page 2.)
- [42] J. L. Jacobsen, N. Read, and H. Saleur. Dense loops, supersymmetry, and Goldstone phases in two-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :090601, 2003. (Cité pages 2 et 3.)
- [43] Jesper Lykke Jacobsen and Jane Kondev. Continuous Melting of Compact Polymers. *Nucl. Phys.*, B532 :635–688, 1998. (Cité page 1.)

- [44] Jesper Lykke Jacobsen and Jane Kondev. Field theory of compact polymers on the square lattice. *Nucl. Phys.*, B532 :635–688, 1998. (Cité page 1.)
- [45] John Cardy. SLE for theoretical physicist. *Annals Phys.*, 318 :81–118, 2005. (Cité page 1.)
- [46] V. G. Kac. Lie Superalgebras. *Adv. Math.*, 26 :8–96, 1977. (Cité pages 14 et 20.)
- [47] V. G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. In *Differential geometrical methods in mathematical physics, Proceedings, 1977*, pages 597–626. Springer-Verlag, 1978. (Cité page 24.)
- [48] A. U. Klimyk, V. F. Molchanov, N. Ya. Vilenkin, and A. A. Kirillov. *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis II : Homogeneous Spaces, Representations and Special Functions*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, 2004. (Cité page 27.)
- [49] B. Konstant. *Differential geometric methods in mathematics physics*. Lecture notes in Mathematics 570. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977. (Cité page 35.)
- [50] M. Luscher and G. Mack. Global Conformal Invariance in Quantum Field Theory. *Commun. Math. Phys.*, 41 :203–234, 1975. (Cité page 53.)
- [51] Vladimir Mitev, Thomas Quella, and Volker Schomerus. Principal Chiral Model on Superspheres. [arXiv:0809.1046](https://arxiv.org/abs/0809.1046), 2008. (Cité pages 104, 127 et 129.)
- [52] V. Pasquier and H. Saleur. Common Structures Between Finite Systems and Conformal Field Theories Through Quantum Groups. *Nucl. Phys.*, B330 :523–556, 1990. (Cité page 1.)
- [53] Paul A. Pearce, Jorgen Rasmussen, and Jean-Bernard Zuber. Logarithmic minimal models. *J. Stat. Mech.*, P11017, 2006. (Cité page 128.)
- [54] I. Penkov. Generic representations of classical Lie superalgebras and their localization. *Monatsh. Math.*, 118 :267–313, 1994. (Cité page 25.)
- [55] R. F. Picken. Supergroups have no extra topology. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 16 :3457–3462, 1983. (Cité page 34.)
- [56] Joseph Polchinski. *String Theory Volume I : An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 1998. (Cité page 2.)
- [57] Thomas Quella and Volker Schomerus. Free fermion resolution of supergroup WZNW models. *JHEP*, 09 :085, 2007. (Cité page 28.)
- [58] R. Brauer. On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. *Ann. of Math.*, 38 :857–872, 1937. (Cité page 3.)
- [59] R. R. Matsuiev and A. A. Tseytlin. Type IIB superstring action in $AdS_5 \times S^5$ background. *Nucl. Phys.*, 533 :109–126, 1998. (Cité page 2.)

- [60] Jeffrey M. Rabin. Supermanifold Cohomology and the Wess-Zumino Term of the Covariant Superstring Action. *Commun. Math. Phys.*, 108 :375–389, 1983. (Cité page 35.)
- [61] Nick Read and Hubert Saleur. Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimension. *Nucl. Phys.*, B613 :409–444, 2001. (Cité pages 1 et 2.)
- [62] Nick Read and Hubert Saleur. Associative-algebraic approach to logarithmic conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B777 :316–351, 2007. (Cité pages 122 et 128.)
- [63] Nick Read and Hubert Saleur. Extended symmetry algebras of spin chains, loop models, and S -matrices. *Nucl. Phys.*, B777 :263–315, 2007. (Cité pages 1 et 2.)
- [64] Falk Rohsiepe. On reducible but indecomposable representations of the Virasoro algebra. *hep-th/9611160*, 1996. (Cité pages 41 et 43.)
- [65] L. Rozansky and H. Saleur. Quantum field theory for the multivariable Alexander-Conway polynomial. *Nucl. Phys.*, B376 :461–509, 1992. (Cité page 41.)
- [66] L. Rozansky and H. Saleur. S and T matrices for the super $U(1,1)$ WZW model : Application to surgery and three manifolds invariants based on the Alexander-Conway polynomial. *Nucl. Phys.*, B389 :365–423, 1993. (Cité page 41.)
- [67] H. Saleur. Polymers and percolation in two dimensions and twisted $N = 2$ supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B382 :486–531, 1992. (Cité pages 41 et 42.)
- [68] C. Santos. Foncteurs de Zuckerman pour les super algèbres de Lie. *J. of Lie Theory*, 9 :69–112, 1999. (Cité pages 27 et 32.)
- [69] M. Scheunert. *The Theory of Lie Superalgebras*. Lecture notes in Mathematics 716. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979. (Cité page 17.)
- [70] M. Scheunert and R. B. Zhang. The general linear supergroup and its Hopf superalgebra of regular functions. *J. Algebra*, 254 :44–83, 2002. (Cité page 34.)
- [71] Volker Schomerus and Hubert Saleur. The $GL(1|1)$ WZW-model : From supergeometry to logarithmic CFT. *Nucl. Phys.*, B734 :221–245, 2006. (Cité page 28.)
- [72] A. Sergeev. *Enveloping algebra centre for Lie superalgebras GL and Q* . PhD thesis, Moscow State University, Moscow, 1987. (Cité page 25.)
- [73] A. N. Sergeev. An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras. I, II. *Mich. Math. J.*, 49 :113–168, 2001. (Cité pages 93 et 110.)

- [74] Vl. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models. *Nucl. Phys.*, B240 :312–348, 1984. (Cité page 1.)
- [75] W. J. Zakrzewski. *Low dimensional sigma models*. Adam Higler, Bristol and Philadelphia, 1989. (Cité page 129.)
- [76] F. Wegner. Four loop order beta function of nonlinear sigma models in symmetric spaces. *Nucl. Phys.*, B316 :663–678, 1989. (Cité page 67.)
- [77] F. Wegner. Anomalous dimensions of high-gradient operators in the n -vector model in $2 + \epsilon$ dimensions. *Z. Phys.*, B78 :33, 1990. (Cité page 89.)
- [78] Wendelin Werner. Critical exponents, conformal invariance and planar Brownian motion. *arXiv:math/0007042*, 2000. (Cité page 1.)
- [79] Eholzer Wolfgang and Nils-Peter Skoruppa. Modular invariance and uniqueness of conformal characters. *Commun. Math. Phys.*, 174 :117–136, 1995. (Cité page 78.)
- [80] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models. *Annals Phys.*, 120 :253–291, 1979. (Cité page 52.)
- [81] R. B. Zhang and Y. M. Zou. Spherical functions on homogeneous superspaces. *J. Math. Phys.*, 46 :043513, 2005. (Cité pages 27 et 34.)
- [82] Martin R. Zirnbauer. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random matrix theory. *J. Math. Phys.*, 37 :4986, 1996. (Cité pages 28, 50 et 66.)
- [83] Martin R. Zirnbauer. Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition. *hep-th/9905054*, 1999. (Cité page 39.)

Titre Discrétisation des modèles sigma invariants conformes sur des supersphères et superspaces projectifs

Résumé Le but de cette thèse a été l'étude de quelques représentants des modèles sigma en deux dimensions invariants conformes et avec symétrie continue qui sortent du cadre traditionnel, établie par la recherche des dernières décennies dans le domaine des théories conformes, des modèles sigma de Wess-Zumino-Witten ou des modèles gaussiens. Les modèles sigma sur des superspaces symétriques, définis par une action métrique standard, offrent de tels exemples. La difficulté de résoudre ces modèles sigma est relié au fait qu'ils ne possèdent pas de symétrie de Kac-Moody, qui est normalement nécessaire pour intégrer les théories conformes non-gaussiennes avec symétrie continue. Dans cette thèse on considère les modèles sigma sur les supersphères $S^{2S+1|2S}$ et sur les superspaces projectifs $\mathbb{CP}^{N-1|N}$. Les deux modèles continus admettent une discrétisation par un gaz de boucles denses qui s'intersectent et dont l'algèbre des matrices de transfert est une algèbre de type Brauer. La stratégie principale qu'on a adoptée dans la recherche des résultats exacts sur ces modèles sigma est l'étude détaillée des symétries de la théorie continue, d'un côté, et du modèle discret, de l'autre. Cette analyse permet de faire le pont entre le comportement du modèle discret et la théorie continue. L'analyse détaillée des symétries discrètes - en particulier la structure des blocs de l'algèbre de Brauer - combinée à des calculs perturbatifs donne lieu à une proposition pour, selon les cas, le spectre partiel ou complet de la théorie conforme. Une dualité exacte est également conjecturée dans les cas des modèles sigma sur les supersphères.

Mots-clés modèle sigma, théorie conforme des champs, ligne critique, gaz de boucles, chaîne quantique, superspace symétrique, supergroupe, superalgèbre de Lie, algèbre de Brauer, algèbre de Brauer avec paroi

Title Discretisation of conformal sigma models on superspheres and projective superspaces

Abstract The goal of this thesis was to study several representatives of conformal sigma models in two-dimensions which possess a continuous symmetry and go beyond the traditional framework, established by the research of last decades in the domain of conformal field theories, of Wess-Zumino-Witten sigma models and of Gaussian models. The sigma models on symmetric superspaces, defined by the standard metric action, provide such examples. The difficulty to solve these sigma models is related to the absence of a Kac-Moody symmetry, which is normally required to integrate non-Gaussian conformal field theories with continuous symmetry. We consider the sigma models on superspheres $S^{2S+1|2S}$ and projective superspaces $\mathbb{CP}^{N-1|N}$. We proceed by studying a lattice regularization for these sigma models in term of fully packed intersecting loop models. Their transfer matrix algebra is a Brauer type algebra. The main strategy we employed in the research of exact results for these sigma models is the detailed study of the symmetries of the continuous theory, on one hand, and of

the symmetries of the discretized model, on the other hand. This analysis provides a bridge between the behaviour of the discrete model and continuous theory. A detailed analysis of discrete symmetries - in particular the structure of the Brauer algebra blocks- combined with perturbative calculations gives rise to a proposal, as appropriate, to the partial or complete spectrum of the conformal field theory. An exact duality is also conjectured in the case of the sigma models on superspheres.

Keywords sigma model, conformal field theory, critical line, loop gaz, quantum chain, symmetric superspace, supergroup, Lie superalgebra, Brauer algebra, walled Brauer algebra

