



# Modélisation multi-échelle du comportement magnéto-mécanique des matériaux ferromagnétiques texturés

Laurent Daniel

## ► To cite this version:

Laurent Daniel. Modélisation multi-échelle du comportement magnéto-mécanique des matériaux ferromagnétiques texturés. Matériaux. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2003. Français. NNT: . tel-00004619

**HAL Id: tel-00004619**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004619>**

Submitted on 10 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan  
par

Laurent DANIEL

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Sujet de la thèse :  
**Modélisation multi-échelle du comportement  
magnéto-mécanique des matériaux ferromagnétiques  
texturés**

Thèse soutenue le 8 septembre 2003 devant le jury composé de :

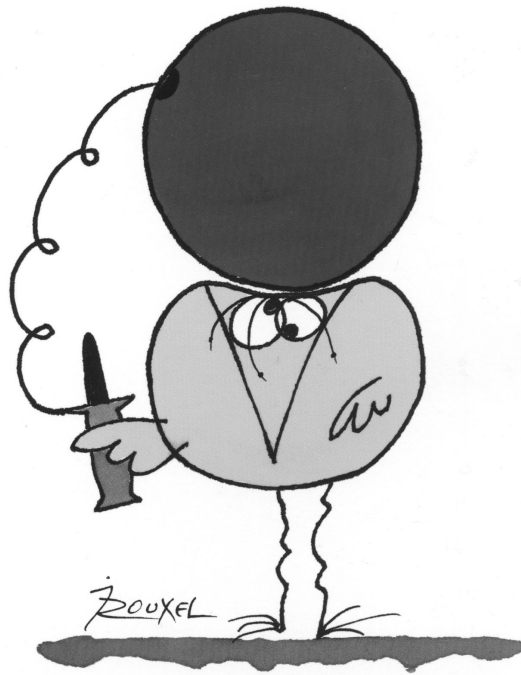
|                         |            |
|-------------------------|------------|
| GÉRARD MAUGIN           | Rapporteur |
| PAUL VAN HOUTTE         | Rapporteur |
| RENÉ BILLARDON          | Examineur  |
| JACQUES DEGAUQUE        | Examineur  |
| OLIVIER HUBERT          | Examineur  |
| YVES-PATRICK PELLEGRINI | Examineur  |
| PIERRE SUQUET           | Examineur  |
| ANDRÉ PINEAU            | Président  |

---

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex (France)



## Les devises Shadok



EN ESSAYANT CONTINUUELLEMENT  
ON FINIT PAR RÉUSSIR. DONC:  
PLUS ÇA RATE, PLUS ON A  
DE CHANCES QUE ÇA MARCHE.

"Qu'il prenne garde à ces échelles qu'on jette horizontalement sur les avenues  
et qui sont faites de tous les « Arrêtez-le! »."  
A. Breton et P. Soupault, *Les Champs magnétiques*.



# Remerciements

Le temps est venu de mettre un point final à cette aventure de trois ans, en rendant hommage à tous ceux dont la présence a influé sur la trajectoire de mes travaux. Afin d'éviter tout dérapage lacrymo-sentimental, je me suis fixé la contrainte de faire tenir dans une seule page le contenu de ce difficile exercice. Que ceux qui ne s'y retrouvent pas, et qui trouvent l'argument (de longueur) un peu court, me pardonnent et se reportent à la dernière page de ce document.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à M. André Pineau qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi qu'à messieurs Gérard Maugin et Paul Van Houtte, qui ont accepté la lourde tâche de rédaction du rapport sur mon mémoire malgré leurs emplois du temps chargés. Je remercie également messieurs Jacques Degauque, Yves-Patrick Pellegrini et Pierre Suquet pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

René Billardon m'a accueilli dans son équipe de recherche. Il m'a fait bénéficier de son expérience, je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée et pour la liberté qu'il a su me laisser.

Cette thèse m'a permis de travailler étroitement avec Olivier Hubert. Il m'a beaucoup appris, et j'ai pu profiter de son oreille attentive, de ses précieux conseils et de son enthousiasme communicatif. Je tiens à lui témoigner ma profonde reconnaissance et mon amitié sincère.

Mon travail s'intègre dans le thème de recherche de l'équipe "couplages multiphysiques", et s'est nourri des nombreuses discussions avec les participants de nos mythiques réunions magnétisme.

Pierre Gilormini a très gentiment accepté de relire certains passages de ce mémoire. Ses remarques, à cette occasion comme à d'autres, m'ont été très utiles.

La soutenance de thèse s'est déroulée sans trop de bégaiements et autres "euh..." grâce notamment au travail préparatoire réalisé avec mes répétiteurs, Delphine B., Pierre F., Julien J., Pierre-Alain B., François H. et l'infatigable Laure...

Le personnel du LMT sait entretenir une ambiance chaleureuse, et je salue plus particulièrement tous ceux avec qui j'ai partagé des discussions animées au cours de mes (nombreuses) pauses-café. L'ambiance conviviale, quasi-familiale, du secteur "Mécanique et Matériaux" m'a également été très agréable.

La vie au laboratoire ne serait pas ce qu'elle est sans la présence de tous ses doctorants, parmi lesquels je compte beaucoup de camarades. Je leur dois beaucoup et de peur d'en oublier, je préfère - lâchement - les remercier collectivement.

L'exercice est incomplet, il le serait bien davantage s'il ne mentionnait pas celle dont la place dans cette page est bien petite devant celle qu'elle tient dans ma vie. Si j'avais dû ne citer qu'un nom, j'aurais choisi celui de ma petite Laurette, pour sa patience inaltérable et son soutien indéfectible, pour son amour.

---

# Table des matières

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                    | <b>xv</b> |
| <b>Introduction</b>                                                 | <b>1</b>  |
| <b>1 Introduction au comportement magnéto-élastique</b>             | <b>5</b>  |
| 1.1 Cadre de l'étude . . . . .                                      | 6         |
| 1.2 Aspects macroscopiques . . . . .                                | 7         |
| 1.2.1 Comportement mécanique . . . . .                              | 7         |
| 1.2.2 Comportement magnétique . . . . .                             | 7         |
| 1.2.3 Phénomènes de couplage magnéto-mécanique . . . . .            | 8         |
| 1.3 Aspects microscopiques . . . . .                                | 10        |
| 1.3.1 Comportement mécanique . . . . .                              | 10        |
| 1.3.2 Comportement magnétique . . . . .                             | 10        |
| 1.3.3 Phénomènes de couplage magnéto-élastique . . . . .            | 15        |
| 1.4 Notion de comportement macroscopique anhystérétique . . . . .   | 15        |
| 1.5 Différentes échelles d'observation et de modélisation . . . . . | 17        |
| <b>2 Transitions d'échelles en magnéto-élasticité</b>               | <b>19</b> |
| 2.1 Échelle du domaine magnétique . . . . .                         | 20        |
| 2.1.1 Énergie libre d'un domaine magnétique . . . . .               | 20        |
| 2.1.2 Choix et calcul des variables d'état . . . . .                | 21        |
| 2.2 Échelle du monocristal . . . . .                                | 23        |
| 2.2.1 Modélisation schématique . . . . .                            | 23        |
| 2.2.2 Choix des variables d'état . . . . .                          | 28        |
| 2.2.3 Modèle microscopique . . . . .                                | 28        |
| 2.2.4 Conclusion . . . . .                                          | 31        |
| 2.3 Échelle du polycristal . . . . .                                | 31        |
| 2.3.1 Comportement mécanique . . . . .                              | 32        |
| 2.3.2 Comportement magnétique . . . . .                             | 37        |
| 2.3.3 Effets couplés . . . . .                                      | 42        |
| 2.3.4 Conclusion . . . . .                                          | 43        |
| 2.4 Effets macroscopiques . . . . .                                 | 43        |
| 2.4.1 Effet de surface . . . . .                                    | 44        |
| 2.4.2 Effets liés au procédé de fabrication . . . . .               | 44        |
| 2.4.3 Effets de géométrie . . . . .                                 | 44        |
| 2.5 Conclusion . . . . .                                            | 45        |

|          |                                                                                 |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3</b> | <b>Identification des paramètres du modèle et premiers essais de validation</b> | <b>47</b>  |
| 3.1      | Propriétés du monocristal . . . . .                                             | 49         |
| 3.1.1    | Données bibliographiques . . . . .                                              | 49         |
| 3.1.2    | Identification des coefficients élastiques . . . . .                            | 49         |
| 3.2      | Identification du paramètre $A_s$ . . . . .                                     | 56         |
| 3.2.1    | Cas du monocristal . . . . .                                                    | 56         |
| 3.2.2    | Cas du polycristal . . . . .                                                    | 60         |
| 3.3      | Propriétés du polycristal . . . . .                                             | 64         |
| 3.4      | Mise au point d'essais de validation macroscopiques . . . . .                   | 67         |
| 3.4.1    | Caractérisation des propriétés mécaniques . . . . .                             | 67         |
| 3.4.2    | Caractérisation des propriétés magnétiques . . . . .                            | 70         |
| 3.4.3    | Caractérisation des propriétés magnéto-élastiques . . . . .                     | 73         |
| 3.5      | Premières comparaisons modèle-essais . . . . .                                  | 82         |
| 3.5.1    | Comportement mécanique . . . . .                                                | 82         |
| 3.5.2    | Comportement magnétique . . . . .                                               | 83         |
| 3.5.3    | Comportement magnéto-élastique . . . . .                                        | 87         |
| 3.6      | Conclusion . . . . .                                                            | 89         |
| <b>4</b> | <b>Autres sources d'anisotropie</b>                                             | <b>91</b>  |
| 4.1      | Champ démagnétisant . . . . .                                                   | 92         |
| 4.1.1    | Principe . . . . .                                                              | 93         |
| 4.1.2    | Résultats . . . . .                                                             | 93         |
| 4.2      | Effet de surface . . . . .                                                      | 95         |
| 4.2.1    | Principe . . . . .                                                              | 95         |
| 4.2.2    | Application au monocristal de fer . . . . .                                     | 96         |
| 4.2.3    | Application au polycristal . . . . .                                            | 102        |
| 4.3      | Effet des contraintes résiduelles . . . . .                                     | 105        |
| 4.3.1    | Comportement sous contraintes du monocristal . . . . .                          | 105        |
| 4.3.2    | Passage au polycristal . . . . .                                                | 110        |
| 4.4      | Conclusion . . . . .                                                            | 116        |
| <b>5</b> | <b>Quelques applications</b>                                                    | <b>117</b> |
| 5.1      | Application du modèle multi-échelle à d'autres aciers électriques . . .         | 118        |
| 5.1.1    | Comportement des tôles à grains orientés . . . . .                              | 118        |
| 5.1.2    | Comparaison de trois nuances d'aciers électriques NO . . . . .                  | 123        |
| 5.2      | Effet de la multiaxialité de l'état de contraintes . . . . .                    | 127        |
| 5.2.1    | Comportement magnétique sous sollicitations biaxiales . . . . .                 | 127        |
| 5.2.2    | Différentes propositions de contraintes équivalentes . . . . .                  | 129        |
| 5.2.3    | Conclusion . . . . .                                                            | 134        |
| 5.3      | Influence de la plasticité sur le comportement magnétique . . . . .             | 136        |
| 5.3.1    | Modélisation de la plasticité . . . . .                                         | 137        |
| 5.3.2    | Application au Fe-3%Si . . . . .                                                | 139        |
| 5.3.3    | Modélisation du comportement magnétique . . . . .                               | 141        |
| 5.3.4    | Modélisation du comportement magnéto-élastique . . . . .                        | 141        |
| 5.3.5    | Conclusion . . . . .                                                            | 143        |

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Conclusion - Perspectives</b>                                                            | <b>145</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                        | <b>151</b> |
| <b>Annexes</b>                                                                              | <b>157</b> |
| <b>A Détermination du tenseur d'Eshelby dans le cas d'un milieu de référence orthotrope</b> | <b>159</b> |
| A.1 Introduction . . . . .                                                                  | 160        |
| A.2 Opérateur de Green . . . . .                                                            | 160        |
| A.3 Tenseur d'Eshelby . . . . .                                                             | 167        |
| <b>B Cas particulier du polycristal isotrope de fer pur</b>                                 | <b>169</b> |
| B.1 Introduction . . . . .                                                                  | 170        |
| B.2 Quelques solutions analytiques dans le cas isotrope . . . . .                           | 171        |
| B.2.1 Comportement élastique macroscopique . . . . .                                        | 171        |
| B.2.2 Déformation de magnétostriction à saturation . . . . .                                | 175        |
| B.2.3 Déformation de magnétostriction maximale . . . . .                                    | 179        |
| B.3 Définition d'une texture isotrope . . . . .                                             | 180        |
| B.3.1 Tirage aléatoire des orientations cristallographiques . . . . .                       | 180        |
| B.3.2 Discrétisation des orientations cristallographiques . . . . .                         | 182        |
| B.4 Application du modèle dans le cas isotrope . . . . .                                    | 183        |
| B.4.1 Comportement élastique macroscopique . . . . .                                        | 183        |
| B.4.2 Déformation de magnétostriction à saturation . . . . .                                | 184        |
| B.4.3 Comportements magnétique et magnétostrictif . . . . .                                 | 184        |
| <b>C Algorithme de calcul et sensibilité du modèle aux données d'entrée</b>                 | <b>187</b> |
| C.1 Algorithme de calcul . . . . .                                                          | 188        |
| C.1.1 Données d'entrée . . . . .                                                            | 188        |
| C.1.2 Définition des propriétés élastiques . . . . .                                        | 189        |
| C.1.3 Modélisation multi-échelle . . . . .                                                  | 189        |
| C.1.4 Critère de convergence . . . . .                                                      | 191        |
| C.1.5 Temps de calcul . . . . .                                                             | 191        |
| C.2 Etude paramétrique . . . . .                                                            | 192        |
| C.2.1 Caractéristiques du monocristal . . . . .                                             | 192        |
| C.2.2 Paramètre $A_s$ . . . . .                                                             | 198        |
| C.2.3 Énergie de surface maximale $N_s$ . . . . .                                           | 200        |
| C.2.4 Nombre de grains . . . . .                                                            | 200        |



# Table des figures

|      |                                                                                                                                             |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | Différentes échelles d'observation . . . . .                                                                                                | 3  |
| 1.1  | Illustration de l'effet $\Delta E$ . . . . .                                                                                                | 9  |
| 1.2  | Effet des contraintes sur l'aimantation d'un polycristal de fer . . . . .                                                                   | 9  |
| 1.3  | Mise en évidence des domaines magnétiques dans des cristaux de fer-silicium . . . . .                                                       | 11 |
| 1.4  | Représentation spatiale de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline . . . . .                                                             | 12 |
| 1.5  | Principe du processus d'aimantation dans un monocristal . . . . .                                                                           | 14 |
| 1.6  | Comportement magnétique et mécanismes microscopiques . . . . .                                                                              | 15 |
| 1.7  | Courbe d'aimantation . . . . .                                                                                                              | 16 |
| 2.1  | Définition de la direction de l'aimantation dans un domaine magnétique . . . . .                                                            | 22 |
| 2.2  | Configuration magnétique . . . . .                                                                                                          | 24 |
| 2.3  | Configuration magnétique (schématique) de référence à l'état désaimanté . . . . .                                                           | 24 |
| 2.4  | Configuration magnétique (schématique) pour un champ magnétique dans la direction $\vec{h}$ . . . . .                                       | 25 |
| 2.5  | Configuration magnétique (schématique) pour une contrainte de traction uniaxiale dans la direction $\vec{s}$ . . . . .                      | 26 |
| 2.6  | Configuration magnétique (schématique) pour une contrainte de compression uniaxiale dans la direction $\vec{s}$ . . . . .                   | 27 |
| 2.7  | Comportement du monocristal de fer pur - Résultats de simulations microscopiques (traits pleins) et micromagnétiques (pointillés) . . . . . | 30 |
| 2.8  | Comportement du monocristal de fer pur . . . . .                                                                                            | 31 |
| 2.9  | Problème d'Eshelby . . . . .                                                                                                                | 33 |
| 2.10 | Modélisation par éléments finis . . . . .                                                                                                   | 36 |
| 2.11 | Comparaison de différentes modélisations pour le comportement élastique du polycristal . . . . .                                            | 37 |
| 2.12 | Problème d'inclusion magnétique . . . . .                                                                                                   | 38 |
| 3.1  | Apparence d'une tôle GO après décapage . . . . .                                                                                            | 50 |
| 3.2  | Eprouvette GO à gros grains . . . . .                                                                                                       | 52 |
| 3.3  | Mesures par jauges d'extensométrie . . . . .                                                                                                | 52 |
| 3.4  | Figure de Kikuchi obtenue sur un échantillon de fer-silicium . . . . .                                                                      | 53 |
| 3.5  | Définition des angles d'Euler en notation de Bunge . . . . .                                                                                | 54 |
| 3.6  | Figure de pôles pour l'éprouvette 2 . . . . .                                                                                               | 54 |
| 3.7  | Anisotropie élastique du monocristal de Fe-3%Si . . . . .                                                                                   | 55 |
| 3.8  | Coordonnées du champ magnétique $\vec{H}^I$ dans le repère du monocristal . . . . .                                                         | 57 |

|      |                                                                                                                                                            |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.9  | Modélisation simplifiée du comportement magnétique du monocristal de fer . . . . .                                                                         | 60 |
| 3.10 | Système de coordonnées sphériques . . . . .                                                                                                                | 61 |
| 3.11 | Modélisation simplifiée du comportement magnétique pour un polycristal isotrope . . . . .                                                                  | 63 |
| 3.12 | Caractérisation du Fe-3%Si NO . . . . .                                                                                                                    | 64 |
| 3.13 | Repérage des directions dans le plan de tôle . . . . .                                                                                                     | 65 |
| 3.14 | Projection des directions $\langle 100 \rangle$ suivant les directions du plan de tôle . . . . .                                                           | 65 |
| 3.15 | Mesures de texture à différentes profondeurs . . . . .                                                                                                     | 66 |
| 3.16 | Coefficients élastiques dans le plan de tôle . . . . .                                                                                                     | 67 |
| 3.17 | Texture du Fe-3%Si NO . . . . .                                                                                                                            | 67 |
| 3.18 | Mesures des coefficients élastiques suivant différentes directions du plan de tôle - FeSi 3% NO . . . . .                                                  | 68 |
| 3.19 | Banc de mesure magnétique . . . . .                                                                                                                        | 70 |
| 3.20 | Principe de mesure du comportement anhystérétique . . . . .                                                                                                | 71 |
| 3.21 | Mesures magnétiques - résultats expérimentaux . . . . .                                                                                                    | 72 |
| 3.22 | Mesures de déformation de magnétostriction - FeSi 3% NO . . . . .                                                                                          | 74 |
| 3.23 | Dispositif de mesures magnétiques . . . . .                                                                                                                | 76 |
| 3.24 | Influence d'une contrainte de traction sur le comportement magnétique dans la direction DL . . . . .                                                       | 76 |
| 3.25 | Influence d'une contrainte de traction sur le comportement magnétique dans la direction DT . . . . .                                                       | 77 |
| 3.26 | Influence d'une contrainte de traction sur la susceptibilité magnétique . . . . .                                                                          | 77 |
| 3.27 | Influence d'une contrainte de traction sur la mesure de la déformation d'origine magnétique . . . . .                                                      | 79 |
| 3.28 | Présentation schématique d'un montage de mesures magnétiques sous contrainte uniaxiale . . . . .                                                           | 80 |
| 3.29 | Mise en évidence expérimentale de l'effet $\Delta E$ . . . . .                                                                                             | 81 |
| 3.30 | Coefficients élastiques - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - FeSi 3% NO . . . . .                                                     | 82 |
| 3.31 | Courbes d'aimantation anhystérétique - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - Fe-3%Si NO . . . . .                                        | 83 |
| 3.32 | Anisotropie magnétique dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - Fe-3%Si NO . . . . .                                 | 84 |
| 3.33 | Courbes d'aimantation anhystérétique (en représentation semi-logarithmique) - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - Fe-3%Si NO . . . . . | 84 |
| 3.34 | Désorientations angulaires entre $\vec{M}$ , $\vec{B}$ et $\vec{H}$ dans le cas d'un comportement magnétique anisotrope . . . . .                          | 85 |
| 3.35 | Désorientations angulaires entre $\vec{M}$ et $\vec{H}$ - Résultats de calcul - Fe-3%Si . . . . .                                                          | 86 |
| 3.36 | Désorientations angulaires entre $\vec{M}$ et $\vec{H}$ pour une contrainte non nulle - Résultats de calcul - Fe-3%Si . . . . .                            | 87 |
| 3.37 | Courbes de magnétostriction anhystérétique - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - Fe-3%Si NO . . . . .                                  | 87 |
| 3.38 | Anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques - Fe-3%Si NO . . . . .                           | 88 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1  | Définition du champ démagnétisant à différentes échelles . . . . .                                                                                                                                                                 | 92  |
| 4.2  | Comportement anhystérétique - résultats de calcul avec et sans prise en compte du champ démagnétisant - Fe-3%Si NO . . . . .                                                                                                       | 94  |
| 4.3  | Distribution par grains de la norme de l'aimantation et du champ magnétique dans le matériau - $\ \vec{H}_{\text{ext}}\  = 150$ A/m - Résultats de calcul avec prise en compte du champ démagnétisant . . . . .                    | 94  |
| 4.4  | Distribution par grains de la norme de l'aimantation et du champ magnétique dans le matériau - $\ \vec{H}_{\text{ext}}\  = 500$ A/m - Résultats de calcul avec prise en compte du champ démagnétisant . . . . .                    | 95  |
| 4.5  | Résultats pour la configuration 1 . . . . .                                                                                                                                                                                        | 97  |
| 4.6  | Résultats pour la configuration 2 . . . . .                                                                                                                                                                                        | 98  |
| 4.7  | Résultats pour la configuration 3 . . . . .                                                                                                                                                                                        | 99  |
| 4.8  | Résultats pour la configuration 4 . . . . .                                                                                                                                                                                        | 100 |
| 4.9  | Figures de pôles pour l'agrégat de quatre grains . . . . .                                                                                                                                                                         | 101 |
| 4.10 | Effet de surface : résultats de principe pour un agrégat de 4 grains . .                                                                                                                                                           | 101 |
| 4.11 | Courbes d'aimantation anhystérétique à bas champ avec prise en compte d'un effet de surface - Fe-3%Si NO . . . . .                                                                                                                 | 103 |
| 4.12 | Courbes de magnétostriction du polycristal de fer à 3% de silicium - influence de la proportion de grains de surface . . . . .                                                                                                     | 103 |
| 4.13 | Courbes de magnétostriction du polycristal de fer à 3% de silicium - $N_s = 1000$ J/m <sup>3</sup> . . . . .                                                                                                                       | 104 |
| 4.14 | Anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques avec prise en compte d'un effet de surface - Fe-3%Si NO . . . . .                                                        | 104 |
| 4.15 | Effet d'une contrainte uniaxiale sur la déformation de magnétostriction - Monocristal de fer pur . . . . .                                                                                                                         | 106 |
| 4.16 | Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction $\langle 100 \rangle$ du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif .                                                                            | 108 |
| 4.17 | Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction $\langle 110 \rangle$ du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif .                                                                            | 108 |
| 4.18 | Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction $\langle 111 \rangle$ du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif .                                                                            | 109 |
| 4.19 | Définition schématique des contraintes résiduelles d'ordre 1 et d'ordre 2 dans un matériau polycristallin . . . . .                                                                                                                | 111 |
| 4.20 | Distribution des contraintes résiduelles - $\sigma_{ij}$ tiré aléatoirement dans une distribution normale - Moyenne $\bar{\sigma}_{ij} = 0$ , écart-type $S_\sigma = 8$ MPa - 396 grains . . . . .                                 | 112 |
| 4.21 | Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.20) sur la courbe d'aimantation anhystérétique et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . .                 | 112 |
| 4.22 | Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.20) sur la déformation de magnétostriction anhystérétique et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO                | 113 |
| 4.23 | Distribution des contraintes résiduelles - $\sigma_{ij}$ tiré aléatoirement dans une distribution normale - Moyenne $\bar{\sigma}_{ij} = 0$ sauf $\bar{\sigma}_{11} = 5$ MPa, écart-type $S_\sigma = 8$ MPa - 396 grains . . . . . | 114 |

|      |                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.24 | Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.23) sur le comportement magnéto-élastique et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . . | 114 |
| 4.25 | Comparaison des courbes de magnétostriction avec et sans contraintes résiduelles - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . .                                                                                | 115 |
| 5.1  | Figures de pôles $\langle 100 \rangle$ , $\langle 110 \rangle$ et $\langle 111 \rangle$ pour le fer-silicium à grains orientés . . . . .                                                                      | 118 |
| 5.2  | Anisotropie élastique dans le plan d'une tôle GO - Résultats de calcul                                                                                                                                        | 119 |
| 5.3  | Comportement magnétique d'une tôle GO - Résultats de calcul . . .                                                                                                                                             | 120 |
| 5.4  | Comportement magnétique d'une tôle GO à bas champ - Résultats de calcul . . . . .                                                                                                                             | 120 |
| 5.5  | Observation de domaines magnétiques à la surface d'une tôle GO . .                                                                                                                                            | 121 |
| 5.6  | Evolution des fractions volumiques en fonction du champ magnétique appliqué dans le cas d'une tôle GO - $N_s = 0$ (pointillés) et $N_s = 2$ kJ/m <sup>3</sup> (traits pleins) . . . . .                       | 121 |
| 5.7  | Comportement magnétostrictif d'une tôle GO - Résultats de calcul . .                                                                                                                                          | 122 |
| 5.8  | Influence de l'effet de surface sur la prévision du comportement magnétostrictif des tôles GO - Résultats de calcul . . . . .                                                                                 | 123 |
| 5.9  | Figures de pôles pour trois nuances de fer-silicium NO . . . . .                                                                                                                                              | 124 |
| 5.10 | Comportement élastique comparé des trois matériaux d'étude - Résultats de calcul . . . . .                                                                                                                    | 125 |
| 5.11 | Comportement magnétique comparé des trois matériaux d'étude . . .                                                                                                                                             | 126 |
| 5.12 | Isovaleurs de la susceptibilité sécante pour différents cas de charge-ments biaxiaux - $\ \vec{H}\  = 150$ A/m - Résultats de calcul . . . . .                                                                | 128 |
| 5.13 | Isovaleurs de la susceptibilité sécante pour différents cas de charge-ments biaxiaux - $\ \vec{H}\  = 500$ A/m - Résultats de calcul . . . . .                                                                | 128 |
| 5.14 | Isovaleurs de la susceptibilité sécante pour différents cas de charge-ments biaxiaux - $\ \vec{H}\  = 5000$ A/m - Résultats de calcul . . . . .                                                               | 129 |
| 5.15 | Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Kashiwaya . . . . .                                                                                                     | 130 |
| 5.16 | Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Kashiwaya - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul . . . . .                                                                      | 131 |
| 5.17 | Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Schneider et Richardson . . . . .                                                                                       | 132 |
| 5.18 | Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Schneider et Richardson - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul                                                                  | 132 |
| 5.19 | Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Sablik et al. . . . .                                                                                                   | 133 |
| 5.20 | Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Sablik et al. - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul . . . . .                                                                  | 133 |
| 5.21 | Schéma de principe pour les isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, d'une contrainte équivalente pour les propriétés magnétiques . . . . .                                                      | 134 |
| 5.22 | Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, d'une contrainte équivalente pour les propriétés magnétiques . . . . .                                                                                  | 135 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.23 | Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul . . . . .                                                                                                                                                                                       | 135 |
| 5.24 | Distribution des contraintes résiduelles après une charge-décharge de 285 MPa en traction suivant DL - $E_{11}^p \simeq 1,2.10^{-4}$ - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . .                                                                                                                                | 140 |
| 5.25 | Influence d'un état de contraintes résiduelles d'origine plastique ( $E_{11}^p \simeq 1,2.10^{-4}$ ) sur la courbe d'aimantation anhystérétique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . .            | 141 |
| 5.26 | Influence d'un état de contraintes résiduelles d'origine plastique ( $E_{11}^p \simeq 1,2.10^{-4}$ ) sur la déformation de magnétostriction anhystérétique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . . | 142 |
| 5.27 | Comparaison des courbes de magnétostriction avec et sans contraintes résiduelles d'origine plastique - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO . . . . .                                                                                                                                                                | 142 |
| B.1  | Différentes estimations du comportement effectif en fonction de l'anisotropie du monocristal . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 175 |
| B.2  | Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation en fonction de l'anisotropie élastique du monocristal . . . . .                                                                                                                                                                      | 178 |
| B.3  | Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation en fonction de l'anisotropie magnétostrictive du monocristal . . . . .                                                                                                                                                               | 179 |
| B.4  | Dispersion obtenue - pour 200 tirages aléatoires de la FDO - sur la valeur du module d'Young (estimation de Voigt) en fonction du nombre de grains définissant cette FDO . . . . .                                                                                                                                | 181 |
| B.5  | Dispersion obtenue - pour 200 tirages aléatoires de la FDO - sur la valeur de la déformation de magnétostriction à saturation (estimation de Reuss) en fonction du nombre de grains définissant cette FDO . . . . .                                                                                               | 182 |
| B.6  | Figures de pôles pour le polycristal isotrope . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 182 |
| B.7  | Effet de l'application d'une contrainte uniaxiale sur la courbe d'aimantation . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 185 |
| B.8  | Effet de l'application d'une contrainte uniaxiale sur la courbe de magnétostriction . . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 185 |
| C.1  | Algorithme de calcul . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 189 |
| C.2  | Influence d'une variation des modules élastiques du monocristal sur la prévision du module d'Young et du coefficient de Poisson du polycristal - Traction dans le sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                                                                                                                   | 192 |
| C.3  | Influence d'une variation des modules élastiques du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                                                                                                                                   | 193 |
| C.4  | Courbes d'aimantation obtenues pour 4 valeurs particulières de la constante d'anisotropie magnétocristalline $K_1$ du monocristal - Agrégat de 4 grains . . . . .                                                                                                                                                 | 194 |
| C.5  | Influence d'une variation de la constante d'anisotropie magnétocristalline $K_1$ du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                                                                                                  | 194 |

|      |                                                                                                                                                                                                                             |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.6  | Influence d'une variation de la constante d'anisotropie magnétocristalline $K_1$ du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .     | 195 |
| C.7  | Influence d'une variation du coefficient magnétostrictif $\lambda_{100}$ du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                    | 196 |
| C.8  | Influence d'une variation du coefficient magnétostrictif $\lambda_{100}$ du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) sous contrainte uniaxiale du polycristal à 500 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .  | 196 |
| C.9  | Influence d'une variation du coefficient magnétostrictif $\lambda_{100}$ ou $\lambda_{111}$ du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . . | 197 |
| C.10 | Influence d'une variation du coefficient magnétostrictif $\lambda_{100}$ du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction à H=500 A/m du polycristal sous traction uniaxiale - sens DL - Fe3%Si NO . . | 198 |
| C.11 | Courbes d'aimantation obtenues pour 5 valeurs particulières du paramètre $A_s$ - Agrégat de 4 grains . . . . .                                                                                                              | 198 |
| C.12 | Influence d'une variation du paramètre $A_s$ sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                                                               | 199 |
| C.13 | Influence d'une variation du paramètre $A_s$ sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO . . . . .                                                        | 199 |
| C.14 | Influence du paramètre $N_s$ sur la définition de la déformation de magnétostriction à l'état désaimanté - Composantes suivant DL et DT - Fe3%Si NO . . . . .                                                               | 200 |
| C.15 | Figures de pôles $\langle 100 \rangle$ pour le M330 - Influence de la taille de la FDO                                                                                                                                      | 201 |
| C.16 | Propriétés élastiques du M330 - Influence de la taille de la FDO . . .                                                                                                                                                      | 201 |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                                                           |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Caractéristiques du monocristal de fer pur - Données bibliographiques                                                     | 30  |
| 3.1 | Caractéristiques du monocristal de fer à 3% de silicium - Données bibliographiques . . . . .                              | 49  |
| 3.2 | Inventaire des éprouvettes de traction utiles . . . . .                                                                   | 52  |
| 3.3 | Résultat des essais de traction . . . . .                                                                                 | 53  |
| 3.4 | Angles d'Euler mesurés sur la zone utile des éprouvettes de traction .                                                    | 54  |
| 3.5 | Caractéristiques du monocristal de Fe-3%Si . . . . .                                                                      | 56  |
| 5.1 | Caractéristiques monocristallines pour les trois matériaux étudiés . .                                                    | 125 |
| B.1 | Différentes estimations pour les modules effectifs du polycristal isotrope de fer pur . . . . .                           | 174 |
| B.2 | Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation du polycristal isotrope de fer pur . . . . . | 178 |
| B.3 | Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction maximale du polycristal isotrope de fer pur . . . . .     | 180 |



# Notations

|                               |                                                                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{H}$                     | Champ magnétique.                                                                   |
| $\vec{M}$                     | Aimantation.                                                                        |
| $\vec{B}$                     | Induction magnétique.                                                               |
| $\vec{H}_d$                   | Champ démagnétisant.                                                                |
| $\Sigma, \sigma$              | Tenseur des contraintes.                                                            |
| $\mathbb{E}, \varepsilon$     | Tenseur des déformations.                                                           |
| $\mathbb{E}^e, \varepsilon^e$ | Tenseur des déformations élastiques.                                                |
| $\varepsilon^{\mathbf{L}}$    | Déformation libre.                                                                  |
| $\varepsilon^{\mu}$           | Déformation de magnétostriction.                                                    |
| $\varepsilon_{//}^{\mu}$      | Déformation de magnétostriction mesurée parallèlement<br>au champ magnétique.       |
| $\varepsilon_{\perp}^{\mu}$   | Déformation de magnétostriction mesurée perpendiculairement<br>au champ magnétique. |
| $\chi$                        | Susceptibilité magnétique.                                                          |
| $\mu$                         | Perméabilité magnétique.                                                            |
| $\mathbf{C}$                  | Tenseur des modules élastiques.                                                     |
| $\mathbf{S}$                  | Tenseur des souplesses ( $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ ).                          |
| $\mathbf{C}^{\text{AC}}$      | Estimation autocohérente pour le tenseur des modules.                               |
| $\mathbf{C}_{\text{V}}$       | Estimation de Voigt pour le tenseur des modules.                                    |
| $\mathbf{C}_{\text{R}}$       | Estimation de Reuss pour le tenseur des modules.                                    |
| $\mathbf{S}^{\text{E}}$       | Tenseur d'Eshelby.                                                                  |
| $\mathbf{C}^*$                | Tenseur d'influence de Hill.                                                        |
| $\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$     | Tenseur de localisation des déformations.                                           |
| $\mathbf{B}^{\mathbf{I}}$     | Tenseur de concentration de contraintes.                                            |
| $\mathbb{I}$                  | Identité d'ordre 2.                                                                 |
| $\mathbb{O}$                  | Tenseur nul d'ordre 2.                                                              |
| $\mathbf{I}$                  | Identité d'ordre 4.                                                                 |

## Echelle du VER

|                           |                                               |
|---------------------------|-----------------------------------------------|
| $\vec{H}_{\text{ext}}$    | Champ magnétique appliqué.                    |
| $\vec{M}_{\text{m}}$      | Aimantation moyenne.                          |
| $\vec{B}_{\text{m}}$      | Induction moyenne.                            |
| $\Sigma$                  | Tenseur des contraintes.                      |
| $\mathbb{E}$              | Tenseur des déformations.                     |
| $\mathbb{E}^e$            | Tenseur des déformations élastiques.          |
| $\mathbb{E}^\mu$          | Tenseur des déformations de magnétostriction. |
| $\mathbb{E}^p$            | Tenseur des déformations plastiques.          |
| $\chi^{\text{eff}}$       | Susceptibilité effective.                     |
| $\mathbf{C}^{\text{eff}}$ | Tenseur des modules effectifs.                |
| $\mathbf{S}^{\text{eff}}$ | Tenseur des souplesses effectives.            |

## Echelle du monocristal ou du grain

|                         |                                               |
|-------------------------|-----------------------------------------------|
| $\vec{H}^{\text{I}}$    | Champ magnétique.                             |
| $\vec{H}_d^{\text{I}}$  | Champ démagnétisant.                          |
| $\vec{M}^{\text{I}}$    | Aimantation.                                  |
| $\vec{B}^{\text{I}}$    | Induction magnétique.                         |
| $\sigma^I$              | Tenseur des contraintes.                      |
| $\varepsilon^I$         | Tenseur des déformations totales.             |
| $\varepsilon_I^e$       | Tenseur des déformations élastiques.          |
| $\varepsilon_I^\mu$     | Tenseur des déformations de magnétostriction. |
| $\varepsilon_I^p$       | Tenseur des déformations plastiques.          |
| $\chi^{\text{I}}$       | Susceptibilité magnétique.                    |
| $\mathbf{C}^{\text{I}}$ | Tenseur des modules élastiques                |

---

## Echelle du domaine magnétique

|                          |                                                                                                  |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{H}_\alpha$         | Champ magnétique.                                                                                |
| $\vec{M}_\alpha$         | Aimantation.                                                                                     |
| $\vec{\gamma}^\alpha$    | Direction de l'aimantation.                                                                      |
| $\gamma$                 | $\vec{\gamma}^\alpha \otimes \vec{\gamma}^\alpha$ .                                              |
| $W^\alpha$               | Energie libre.                                                                                   |
| $W_{ech}^\alpha$         | Energie d'échange.                                                                               |
| $W_{an}^\alpha$          | Energie d'anisotropie magnétocristalline.                                                        |
| $W_{mag}^\alpha$         | Energie magnétostatique.                                                                         |
| $W_\sigma^\alpha$        | Energie magnéto-élastique.                                                                       |
| $\sigma_\alpha$          | Tenseur des contraintes.                                                                         |
| $\varepsilon_\alpha$     | Tenseur des déformations.                                                                        |
| $\varepsilon_\alpha^\mu$ | Tenseur des déformations de magnétostriction.                                                    |
| $\varepsilon_\alpha^e$   | Tenseur des déformations élastiques.                                                             |
| $f_\alpha$               | Fraction volumique de la famille de domaines $\alpha$ .                                          |
| $\theta_\alpha$          | Angle formé entre l'aimantation $\vec{M}_\alpha$ et la direction de facile aimantation associée. |

## Convention de notation pour les tenseurs symétriques

On utilise dans ce document les notations présentées dans [Bornert et al., 2001b], et rappelées brièvement ci-dessous :

|                           |                      |                                                                                    |
|---------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>Tenseurs d'ordre 2</u> | Notation tensorielle | $\varepsilon : \varepsilon_{ij}, (i,j) \in \mathcal{A}^2, \mathcal{A} = \{1,2,3\}$ |
|                           | Notation vectorielle | $\hat{\varepsilon} : \varepsilon_i, i \in \mathcal{B}, \mathcal{B} = \{1,...,6\}$  |

$$\text{avec } \hat{\varepsilon} = {}^T[\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \ \sqrt{2}\varepsilon_{12}]$$

|                           |                      |                                                                                 |
|---------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <u>Tenseurs d'ordre 4</u> | Notation tensorielle | $\mathbf{C} : C_{ijkl}, (i,j,k,l) \in \mathcal{A}^4, \mathcal{A} = \{1,2,3\}$   |
|                           | Notation vectorielle | $\hat{\mathbf{C}} : C_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B}^2, \mathcal{B} = \{1,...,6\}$ |

$$\text{avec } \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{pmatrix}$$

On introduit également les tenseurs d'ordre 4  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  ( $\delta_{ij}$  est le symbole de Krönecker) :

$$\begin{aligned} J_{ijkl} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \Lambda_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{I} - \mathbf{J} \\ \mathbf{K}^a &= \mathbf{\Lambda} - \mathbf{J} \\ \mathbf{K}^b &= \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

## Abréviations

|        |                                                                         |
|--------|-------------------------------------------------------------------------|
| NO     | Tôles à grains non orientés.                                            |
| GO     | Tôles à grains orientés.                                                |
| DL     | Direction du laminage.                                                  |
| DT     | Direction transverse.                                                   |
| FDO    | Fonction de distribution des orientations cristallographiques.          |
| EBSD   | Electron Back Scattering Diffraction.                                   |
| MEB    | Microscope électronique à balayage.                                     |
| MHE    | Milieu homogène équivalent.                                             |
| LEDEPP | Laboratoire d'étude et développement des produits plats, Florange (57). |
| LEG    | Laboratoire d'électrotechnique de Grenoble (38).                        |
| LMT    | Laboratoire de mécanique et technologie, Cachan (94).                   |
| UTC    | Université de Technologie de Compiègne (60).                            |

# Introduction

Les machines électriques ont été utilisées de façon de plus en plus intensive au cours du vingtième siècle, et cette tendance semble loin de s'inverser. Leur domaine d'application est extrêmement vaste, puisqu'elles permettent la génération, la transmission et l'utilisation de l'énergie électrique. La quantité et la diversité de ces applications, associées à des besoins énergétiques en forte augmentation à travers le monde, expliquent l'intérêt suscité par les machines électriques.

A la demande toujours croissante en énergie (qui est une autre problématique), viennent s'ajouter d'autres préoccupations. La première est la maîtrise des pertes d'énergie dans les machines électriques (qui influe directement sur les dépenses d'énergie). La seconde concerne la réduction de la masse des matériels électriques. En effet, une telle réduction contribuerait à en diminuer les coûts de fabrication (en réduisant le volume de matières premières nécessaires), à réduire les dépenses énergétiques nécessaire à leur transport, et à limiter la quantité de déchets générés. Ces deux préoccupations sont directement reliées à l'optimisation du rendement des machines électriques. Elles prennent une place importante dans le cas des machines embarquées, dans le domaine aéronautique et de plus en plus dans le domaine automobile. Un dernier point d'intérêt, plus récent, s'attache aux nuisances liées aux appareils électriques, et en particulier aux bruits émis lors de leur fonctionnement.

Pour tenter d'apporter quelques réponses sur les points évoqués, il semble naturel (entre autres démarches), de s'intéresser aux matériaux utilisés dans la fabrication de ces machines afin d'optimiser leurs propriétés vis à vis des critères précités (rendement, bruit).

Les matériaux ferromagnétiques doux sont les principaux éléments constitutifs des circuits magnétiques de machines électriques. Les éléments ferromagnétiques sont le fer, le cobalt, le nickel et quelques terres rares. En raison des coûts comparés de ces éléments, et en dehors d'applications assez spécifiques, les alliages de fer sont de loin les plus utilisés.

La problématique de cette étude porte sur deux points du comportement des matériaux ferromagnétiques. Le premier est l'effet de l'application d'une sollicitation mécanique sur le comportement magnétique. On sait en effet que l'application d'une

contrainte conduit à une modification des propriétés magnétiques, souvent associée à une baisse du rendement. Or les sources potentielles de l'apparition de contraintes sont nombreuses, de l'élaboration des matériaux à leur mise en service, en passant par le transport, le stockage et l'assemblage des machines. On cherche donc d'une part à connaître les contraintes subies par le matériau, et d'autre part à en identifier les effets, afin de les limiter ou de les exploiter. Le second point est l'étude de la déformation de magnétostriction que l'on sait être l'une des sources du bruit émis par les machines électriques et en particulier les transformateurs. Cette déformation est la déformation spontanée induite dans les matériaux ferromagnétiques par la présence d'un champ magnétique. On souhaite être capable de la quantifier en fonction des sollicitations extérieures.

L'étude présentée ici concerne donc les couplages magnéto-élastiques, que ce soit l'effet des contraintes sur le comportement magnétique ou l'effet du champ magnétique sur l'état de déformation. On verra d'ailleurs que ces deux points conduisent finalement à l'étude du même problème. L'objectif consiste à établir un modèle magnéto-élastique capable de rendre compte de ces effets de couplage. Il convient de noter que ce modèle, initialement développé pour le fer et ses alliages, peut-être étendu à d'autres matériaux et utilisé pour d'autres applications, comme la modélisation de systèmes actifs utilisant les propriétés des matériaux à magnétostriction géante ou l'étude de l'effet des contraintes sur le comportement magnétique des matériaux ferrimagnétiques à haute fréquence (quelques MHz ou GHz).

Les difficultés associées à la résolution de ce problème sont de plusieurs natures.

Il s'agit tout d'abord d'un problème multi-physique. Outre les difficultés liées au recoupement de champs disciplinaires habituellement distincts, le problème du couplage ajoute des éléments supplémentaires. Tout d'abord, les effets de couplage sont des effets de deuxième ordre, qui sont souvent masqués par les effets non couplés (la déformation dépend en effet principalement de la contrainte, et l'aimantation du champ appliqué). Ils sont donc en général assez difficiles à observer, et les mécanismes qui en sont à l'origine ont été moins étudiés, ce qui rend plus difficile la modélisation. Une autre difficulté est associée aux conditions aux limites des problèmes étudiés. Ainsi, dans le cas des couplages magnéto-mécaniques, les limites du problème mécanique sont en général définies par les limites du solide étudié, alors que l'équilibre magnétique se fait sur tout l'espace. En effet, si l'air ne peut transmettre de contrainte, il peut en revanche être parcouru par un champ magnétique. En particulier, le concept de milieu infini, utile dans la résolution des problèmes mécaniques, est d'un usage plus délicat dans le cadre du magnétisme.

Il s'agit ensuite d'un problème anisotrope. Le procédé d'élaboration des matériaux qui constituent les machines électriques introduit en général une anisotropie dans leur comportement. Ceci est valable pour les comportements mécanique et magnétique. Les mécanismes de couplage magnéto-élastique se font à une échelle encore inférieure et sont eux aussi fondamentalement anisotropes - en pratique beaucoup plus que les mécanismes responsables des comportement élastique et mécanique. A la difficulté de décrire un phénomène couplé s'ajoute donc celle de distinguer les réponses du matériau dans différentes directions. L'identification de ces effets d'anisotropie exige des développements expérimentaux minutieux, et introduit des

---

difficultés techniques dans la modélisation.

Il s'agit également d'un problème non-linéaire. La réponse magnétique d'un matériau est en effet fortement non-linéaire en fonction du champ magnétique appliqué, et cette non-linéarité du comportement découplé implique également une non-linéarité du comportement couplé. Une conséquence est notamment que les conditions d'utilisation d'un certain nombre d'outils de modélisation développés dans le cadre linéaire ne seront pas remplies.

Il s'agit enfin d'un problème multi-échelle. Dans le cas des couplages magnéto-mécaniques, l'échelle d'observation pertinente n'est pas nécessairement la même pour le comportement magnétique et pour le comportement mécanique. Les mécanismes mis en jeu ne s'expliquent en effet pas à la même échelle. Il en résulte qu'un modèle couplé devra faire dialoguer (au moins) ces deux échelles. Dans le cas d'un polycristal ferromagnétique, nous avons identifié a priori quatre échelles d'observation des mécanismes intervenant dans les phénomènes magnéto-mécaniques (voir figure 1).

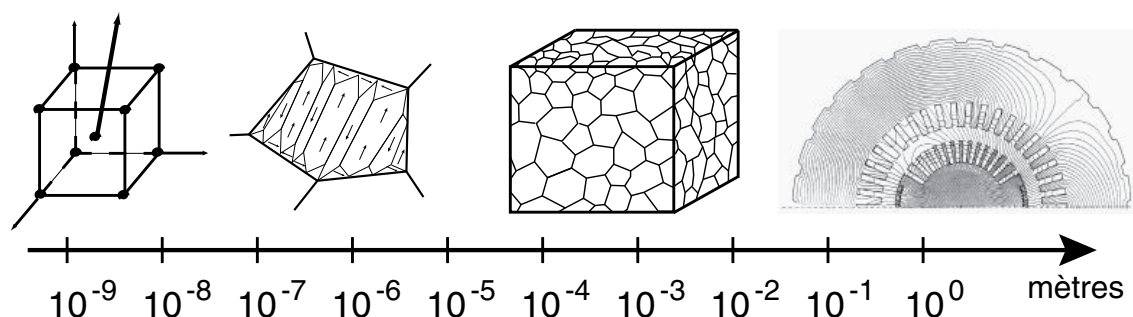


Figure 1 – *Différentes échelles d'observation*

L'échelle d'observation la plus basse est l'échelle de l'atome ou du groupement d'atomes. C'est souvent à cette échelle que l'on définit, de façon fondamentale, les mécanismes physiques du comportement. Vient ensuite l'échelle du grain, soit l'échelle du micromètre dans les matériaux polycristallins que nous étudions. L'échelle suivante est celle qui définit un volume élémentaire représentatif (VER), soit l'échelle du millimètre. La mécanique des matériaux s'intéresse à la définition du comportement de ces VER. Vient enfin l'échelle de la structure, qui est l'échelle qui intéresse in fine les utilisateurs de machines électriques dans la plupart des cas. Une modélisation capable de rendre compte des phénomènes magnéto-élastiques de l'échelle de l'atome à celle de la machine électrique ne paraissant pas envisageable, nous essayons de mettre au point des passerelles entre des modélisations à différentes échelles. La description du comportement magnéto-élastique peut ainsi être enrichie par une observation à une échelle inférieure.

La complexité du problème posé rend nécessaire le recours à certaines hypothèses simplificatrices. Elles amenuisent la rigueur de la démarche, mais permettent d'obtenir des prévisions macroscopiques que l'on peut confronter à l'expérience sans avoir recours à des dispositifs expérimentaux particulièrement sophistiqués. Il convient de noter que la démarche suivie ici a toujours été de rendre possible l'application aux matériaux industriels standards.

Ce document se découpe en cinq chapitres.

Le premier présente tout d'abord le cadre de l'étude et les restrictions envisagées pour la modélisation. Une brève description du comportement magnéto-élastique est ensuite faite, du point de vue macroscopique, et d'un point de vue plus microscopique.

Le deuxième est consacré à la description d'une modélisation magnéto-élastique couplée qui fait intervenir trois échelles : celle du domaine magnétique, celle du monocristal, et celle du polycristal. Quelques effets de structure sont également évoqués.

Le troisième chapitre concerne la mise en œuvre de ce modèle. Il s'agit tout d'abord d'identifier les paramètres du modèle. Des résultats expérimentaux sont présentés et les premières comparaisons modèle-essais mettent en évidence certaines faiblesses dans la modélisation, que nous tentons d'expliquer.

Dans le quatrième, on intègre dans la modélisation certains aspects négligés précédemment, et jugés influents sur le comportement macroscopique. Un effet "déamagnétisant" est introduit, et la prise en compte de l'existence de surfaces libres ou de contraintes résiduelles est mise en œuvre.

Certaines applications ou extensions de la modélisation proposée font l'objet du dernier chapitre. Ces applications concernent la modélisation du comportement magnétique des tôles de fer-silicium à grains orientés (GO) et de différentes nuances d'aciers électriques à grains non-orientés (NO). On s'intéresse ensuite aux effets d'une contrainte multiaxiale sur les propriétés magnétiques. L'effet de la plasticité est également abordé.

# Chapitre 1

## Introduction au comportement magnéto-élastique

### Sommaire

---

|            |                                                                      |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Cadre de l'étude . . . . .</b>                                    | <b>6</b>  |
| <b>1.2</b> | <b>Aspects macroscopiques . . . . .</b>                              | <b>7</b>  |
| 1.2.1      | Comportement mécanique . . . . .                                     | 7         |
| 1.2.2      | Comportement magnétique . . . . .                                    | 7         |
| 1.2.3      | Phénomènes de couplage magnéto-mécanique . . . . .                   | 8         |
| <b>1.3</b> | <b>Aspects microscopiques . . . . .</b>                              | <b>10</b> |
| 1.3.1      | Comportement mécanique . . . . .                                     | 10        |
| 1.3.2      | Comportement magnétique . . . . .                                    | 10        |
| 1.3.3      | Phénomènes de couplage magnéto-élastique . . . . .                   | 15        |
| <b>1.4</b> | <b>Notion de comportement macroscopique anhystérétique . .</b>       | <b>15</b> |
| <b>1.5</b> | <b>Différentes échelles d'observation et de modélisation . . . .</b> | <b>17</b> |

---

Ce chapitre introductif vise tout d'abord à préciser le cadre dans lequel s'inscrit ce travail, et les restrictions qui y sont associées. Les phénomènes magnéto-élastiques sont ensuite présentés, d'un point de vue macroscopique puis microscopique. Après avoir introduit la notion de comportement anhystérétique, différentes échelles pour la description du comportement magnéto-élastique sont envisagées.

### 1.1 Cadre de l'étude

L'objet de ce document est le comportement magnéto-élastique des matériaux ferromagnétiques employés dans le domaine du génie électrique.

Cette étude est donc limitée aux matériaux ferromagnétiques, c'est à dire les matériaux capables de s'aimanter en présence d'un champ magnétique. Cela restreint donc a priori le champ de l'étude à certains matériaux contenant du fer, du nickel, du cobalt, ou à certaines terres rares.

Parmi ces matériaux, notre attention se portera plus particulièrement sur les matériaux cristallins, c'est à dire les matériaux dont les atomes sont ordonnés en un réseau donné. Cela exclut donc les matériaux magnétiques amorphes ou semi-cristallins, même si certaines extensions peuvent être envisagées.

Le cadre des sollicitations considérées doit également être défini. Dans le cas des sollicitations magnétiques, aucune restriction particulière n'est faite. Cependant, l'influence de la fréquence d'excitation sur le comportement magnétique, très importante par ailleurs, ne sera pas abordée dans ce document. Il convient de noter que ce phénomène est essentiellement lié à un couplage électro-magnétique et non magnéto-mécanique. On se limitera au comportement anhystérétique dont la définition sera explicitée au paragraphe 1.4. Concernant les sollicitations mécaniques, on se limitera à l'hypothèse de petites perturbations en régime statique, ce qui permettra de se placer dans un cadre classique.

L'accent sera mis sur le caractère hétérogène de ces matériaux, que cette hétérogénéité soit structurale ou induite par les sollicitations extérieures.

Dans ce contexte, la notion de volume élémentaire représentatif (VER) est très importante. Elle définit l'échelle que nous appellerons macroscopique. Ce volume doit être suffisamment grand pour que son comportement définisse le comportement du matériau. Dans notre cas, la taille du VER (de l'ordre du  $\text{mm}^3$ ) sera directement reliée au nombre de grains considérés. Ce nombre est principalement limité en pratique par les temps de calcul. Les résultats présentés dans ce document décrivent le plus souvent un polycristal avec 400 orientations cristallographiques distinctes. Ce nombre semble cependant un peu faible (avec les méthodes employées) pour décrire la sensibilité à la texture du comportement magnétostrictif.

Un autre point important est la notion de séparation d'échelles. Les modèles de changement d'échelle exigent en général que les différentes échelles considérées soient clairement séparées, c'est à dire que les dimensions caractéristiques de l'une soient très petites devant les dimensions caractéristiques de l'autre. Nous supposons toujours que cette condition est respectée, même si cela est parfois discutable, notamment dans le cas des tôles à grains orientés.

## 1.2 Aspects macroscopiques

Une fois ainsi défini le cadre de cette étude, nous présentons une rapide description phénoménologique du comportement magnéto-élastique des matériaux ferromagnétiques standards.

### 1.2.1 Comportement mécanique

Lorsqu'on applique une contrainte sur un matériau, il se déforme. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état mécanique sont la contrainte  $\Sigma$  et la déformation  $\mathbb{E}$ , qui sont des tenseurs d'ordre 2. La loi de comportement qui relie ces deux variables d'état peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma = \mathbf{C}^{\text{eff}} : \mathbb{E} \quad (1.1)$$

Cette relation est en général non-linéaire : le tenseur d'ordre 4  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  peut dépendre de la déformation, ou de la vitesse de déformation. Dans le cadre de l'élasticité linéaire,  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  est une constante. La gamme des déformations envisagées dans ce document étant en général très petite (de l'ordre de  $10^{-3}$ ), la restriction à l'hypothèse de petites perturbations semble largement justifiée. Dans le cas où les sollicitations mécaniques se situeraient dans une gamme plus large, des lois de comportement mécanique plus élaborées deviennent nécessaires (voir par exemple [Lemaitre et Chaboche, 1985]). Ce point ne sera que brièvement discuté au chapitre 5.

### 1.2.2 Comportement magnétique

Quand on soumet un matériau ferromagnétique à un champ magnétique, il s'aimante. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état magnétique sont le champ magnétique  $\vec{H}$ , l'induction magnétique  $\vec{B}$  et l'aimantation  $\vec{M}$ . Ces trois grandeurs sont reliées par la relation (1.2) :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.2)$$

où  $\mu_0$  désigne la perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m.

La relation de comportement peut donc s'exprimer comme la relation entre le champ magnétique et l'induction :

$$\vec{B} = \boldsymbol{\mu} \vec{H} \quad \text{où la perméabilité } \boldsymbol{\mu} \text{ est un tenseur d'ordre 2,} \quad (1.3)$$

ou de façon équivalente par la relation :

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad \text{où la susceptibilité } \chi \text{ est un tenseur d'ordre 2,} \quad (1.4)$$

perméabilité et susceptibilité étant reliées par la relation :

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 (\mathbb{I} + \chi) \quad (1.5)$$

Les grandeurs  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont en général des fonctions non-linéaires du champ. La définition de  $\boldsymbol{\mu}$  ou  $\chi$  est complexe, et dépend de  $\vec{H}$ . A la différence du comportement mécanique, les niveaux de champ étudiés impliquent la nécessité de prendre

en compte cette non-linéarité. Ceci peut se faire en prenant exemple sur les modèles thermodynamiques développés dans le cadre de la mécanique non-linéaire des matériaux ([Lemaitre et Chaboche, 1985], [Gourdin, 1998], [Gourdin et al., 1998b], [Lemaitre, 2001]).

### 1.2.3 Phénomènes de couplage magnéto-mécanique

On ne s'est intéressé ci-dessus aux comportements magnétique et mécanique que de façon découplée. Les phénomènes de couplage magnéto-mécanique ont deux manifestations principales : la déformation de magnétostriction (dite de Joule) et l'effet des contraintes sur l'aimantation.

#### 1.2.3.1 Déformation de magnétostriction

Quand un matériau ferromagnétique est soumis à un champ magnétique, il se déforme. Cette déformation est associée à deux phénomènes distincts :

- Les forces d'origine magnétique, provoquées par un gradient d'aimantation, provoquent une déformation purement élastique. Ces forces apparaissent sur les surfaces libres de l'échantillon, mais aussi en volume. Elles sont directement reliées à la géométrie de l'échantillon et provoquent un "effet de forme" sur les mesures de magnétostriction ([du Trémolet de Lacheisserie, 1993], [Hirsinger, 1994], [Billardon et Hirsinger, 1995]). Il s'agit d'un couplage global (ou de structure) n'impliquant pas un phénomène de couplage local (ou de matériau). Le niveau en général faible (quelques MPa) de ces forces ne remet pas en cause l'hypothèse de petites perturbations.
- Une déformation "spontanée", intrinsèque au matériau apparaît également (déformation de Joule [Joule, 1847a], [Joule, 1847b]). Cette déformation ne dépend que de l'état magnétique du matériau ([du Trémolet de Lacheisserie, 1993], [Brissonneau, 1997]). Elle correspond à un couplage local d'état. Il est donc possible de lui associer une loi de comportement.

C'est ce deuxième phénomène qui sera appelé magnétostriction dans la suite de ce document. Le comportement magnétostrictif, comme le comportement magnétique est fortement non-linéaire.

L'exploitation des propriétés magnétostrictives de certains matériaux dits à magnétostriction géante permet la fabrication de capteurs et d'actionneurs magnétostrictifs. L'ordre de grandeur de la déformation de magnétostriction pour ces matériaux (par exemple le Terfenol-D) est de  $10^{-3}$  [Claeyssen et al., 1997].

La déformation de magnétostriction est également à l'origine des effets INVAR et ELINVAR pour certaines nuances d'alliages de nickel [Guillaume, 1897], dont certaines caractéristiques (déformation, modules élastiques) ne dépendent pas de la température (voir par exemple [Béranger et al., 1996] pour plus de détails).

L'existence de la déformation de magnétostriction permet également d'expliquer l'effet  $\Delta E$ , qui correspond à une apparente perte de linéarité dans le comportement

élastique des échantillons magnétiques désaimantés [Bozorth, 1951], [Carr, 1969]. Cet effet s'explique par la superposition de la déformation de magnétostriction (qui dépend de la contrainte) à la déformation élastique lors de l'acquisition des déformations au cours d'un essai mécanique (voir figure 1.1). On retrouve un comportement linéaire quand la contrainte appliquée devient suffisamment élevée.

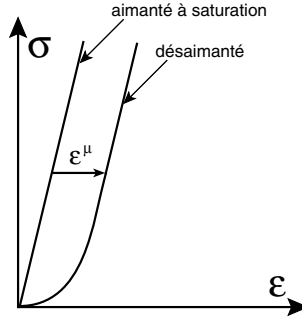


Figure 1.1 – *Illustration de l'effet  $\Delta E$*

Enfin, la déformation de magnétostriction est une des sources - avec l'effet des forces magnétiques - du bruit émis par les machines électriques ([Brissonneau, 1997], [Weiser et al., 2000]).

### 1.2.3.2 Effet d'une contrainte sur le comportement magnétique

Le phénomène symétrique de la déformation de magnétostriction est l'effet des contraintes sur le comportement magnétique. En effet, l'application d'une contrainte modifie considérablement le comportement magnétique. Ainsi, dans le cas du Nickel, une contrainte de compression uniaxiale de 70 MPa multiplie par deux la perméabilité initiale (pente à l'origine de la courbe  $\vec{B}(\vec{H})$ ) et une traction uniaxiale du même niveau la divise par 10 ([Cullity, 1972]). L'effet d'une contrainte uniaxiale est inverse dans le cas du permalloy-68 (68%Ni-Fe). Le comportement du fer est plus complexe (voir figure 1.2).

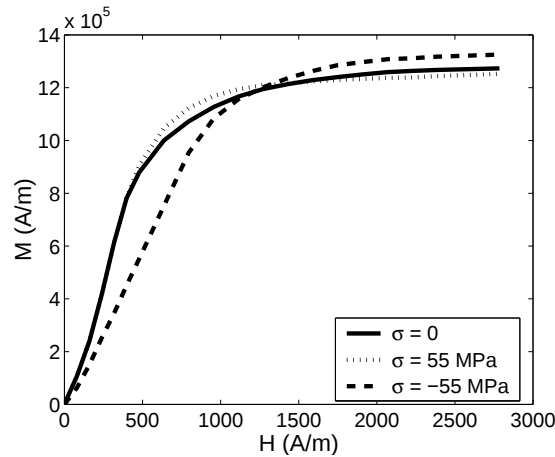


Figure 1.2 – *Effet des contraintes sur l'aimantation d'un polycristal de fer, d'après [Cullity, 1972]*

Une contrainte de traction entraîne une augmentation de la perméabilité pour des champs magnétiques faibles, mais une chute pour des niveaux de champ magnétique plus élevés. Ce phénomène est appelé effet Villari. Une contrainte de compression conduit en revanche généralement à une chute de la perméabilité. Dans tous les cas, l'influence sur le comportement magnétique de l'application d'une contrainte n'est pas symétrique en traction et compression.

L'apparition de plasticité conduit à une dégradation encore plus nette des propriétés magnétiques ([Bozorth, 1951], [Degauque, 1985], [Hubert, 1998]).

### 1.3 Aspects microscopiques

La connaissance de la loi de comportement macroscopique ne suffit pas à définir l'état mécanique en un point donné du matériau. La plupart des matériaux sont en effet de nature hétérogène, ce qui conduit à une hétérogénéité des propriétés, de l'état de contrainte, de déformation, d'aimantation et de champ. Il peut donc dans ce cas être utile de définir le comportement du matériau à une échelle plus fine, qui correspond ici à l'échelle microscopique.

#### 1.3.1 Comportement mécanique

Dans le cas des propriétés mécaniques, il est possible de définir des zones du matériau où l'hétérogénéité des propriétés mécaniques est beaucoup plus faible que pour le matériau dans son ensemble. Il s'agit par exemple des grains dans un polycristal. Dans ces zones, la relation de comportement est supposée uniforme et peut s'écrire :

$$\sigma^I = \mathbf{C}^I : \varepsilon^I \quad (1.6)$$

En raison des orientations cristallographiques variables d'un grain à l'autre du polycristal, le tenseur  $\mathbf{C}^I$  est différent d'un grain à l'autre.

L'un des objectifs de l'homogénéisation consiste, à partir de la relation (1.6) et d'hypothèses sur la microstructure, à définir le milieu homogène équivalent (MHE), c'est à dire le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  qui vérifie la relation (1.1), en l'absence de sollicitations autres que mécaniques.

#### 1.3.2 Comportement magnétique

De la même façon que pour le comportement mécanique, les grandeurs magnétiques au sein d'un matériau sont elles aussi hétérogènes.

L'observation assez fine d'un matériau magnétique permet de mettre en évidence l'existence de régions où l'aimantation est uniforme : ce sont les domaines magnétiques ([Hubert et Schäfer, 1998], [Brissonneau, 1997]) ou domaines de Weiss (figure 1.3).

Chacun de ces domaines présente une aimantation uniforme, de norme  $M_s$ , caractéristique du matériau. D'un domaine à l'autre, la norme de l'aimantation ne varie pas, mais sa direction en revanche change. Les zones de transition entre deux

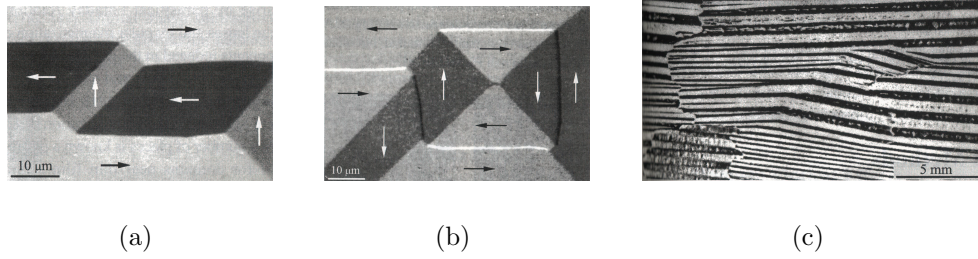


Figure 1.3 – Mise en évidence des domaines magnétiques dans des cristaux de fer-silicium, d'après [Hubert et Schäfer, 1998]

domaines, où la direction de l'aimantation varie progressivement sur quelques dizaines de distances interatomiques sont appelées parois magnétiques. En général, la différence d'orientations cristallographiques entre deux grains adjacents est telle que les parois magnétiques ne peuvent traverser les joints de grain. La structure en domaines magnétiques est alors une sous-structure de la structure en grains, et la séparation d'échelles entre ces deux structures est souvent assez nette. Cependant, dans le cas de matériaux très fortement texturés, où les désorientations de grains à grains sont très faibles, il arrive qu'une paroi magnétique traverse un joint de grain - cas des tôles dites à grains orientés (GO). La distinction des échelles mises en jeu est alors beaucoup plus contestable.

A l'échelle du groupement d'atomes, l'état d'équilibre magnétique peut s'expliquer par la compétition de différents termes énergétiques. A cette échelle, l'énergie libre peut s'écrire ([Hubert et Schäfer, 1998]) :

$$W = W_{ech} + W_{an} + W_{mag} + W_{\sigma} \quad (1.7)$$

- $W_{ech}$  désigne l'énergie d'échange.
- $W_{an}$  désigne l'énergie d'anisotropie magnétocristalline.
- $W_{mag}$  désigne l'énergie magnétostatique.
- $W_{\sigma}$  désigne l'énergie magnéto-élastique.

### 1.3.2.1 Énergie d'échange

L'énergie d'échange correspond à l'effet de couplage ferromagnétique entre atomes voisins qui tend à rendre uniforme l'aimantation. Elle s'écrit ([Hubert et Schäfer, 1998]) :

$$W_{ech} = A (\text{grad} \vec{\gamma})^2 \quad (1.8)$$

où  $A$  est la constante d'échange, caractéristique du matériau, et  $\vec{\gamma}$  un vecteur unitaire dans la direction de l'aimantation :

$$\vec{M} = M_s \vec{\gamma} = M_s {}^t[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3], \quad \text{avec } \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (1.9)$$

L'énergie d'échange est minimale quand les variations spatiales de la direction de l'aimantation sont faibles.

### 1.3.2.2 Énergie d'anisotropie magnétocristalline

L'énergie d'anisotropie magnétocristalline tend à aligner l'aimantation suivant certaines directions particulières dites directions de facile aimantation. Ces directions faciles sont principalement liées à la structure cristallographique. Dans le cas d'un matériau à structure cristallographique cubique, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline peut s'écrire ([Hubert et Schäfer, 1998]) :

$$W_{an} = K_1(\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2) + K_2(\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2) \quad (1.10)$$

où  $K_1$  et  $K_2$  désignent les constantes d'anisotropie magnétocristalline, caractéristiques du matériau. Dans le cas du fer, de structure cubique centrée, l'aimantation s'alignera sur un axe  $\langle 100 \rangle$  du cristal ( $K_1 > 0$ ). Dans le cas du nickel, de structure cubique à faces centrées, les directions faciles sont les directions  $\langle 111 \rangle$  ( $K_1 < 0$ ).

L'énergie magnétocristalline est minimale quand  $\vec{\gamma}$  est aligné avec un axe de facile aimantation.

La figure 1.4 donne la représentation spatiale de cette énergie pour le fer et le nickel. Il convient de noter les signes opposés de  $W_{an}$  pour ces deux matériaux et les variations beaucoup plus importantes dans le cas du fer que dans celui du nickel.

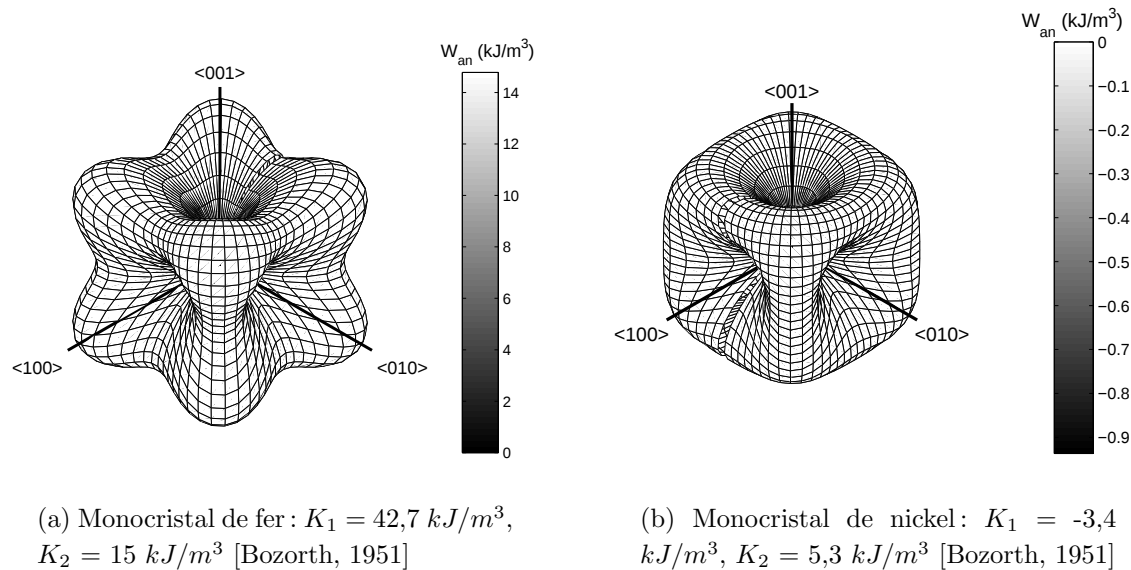


Figure 1.4 – Représentation spatiale de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline

### 1.3.2.3 Énergie magnétostatique

L'énergie magnétostatique se divise en deux contributions [Hubert et Schäfer, 1998].

L'énergie associée au champ magnétique appliqué  $\vec{H}^0$ , ou énergie de Zeeman s'écrit :

$$W_z = -\mu_0 \vec{H}^0 \cdot \vec{M} \quad (1.11)$$

Ce terme énergétique tend à aligner la direction de l'aimantation avec celle du champ appliqué. Il est minimum quand l'aimantation est parallèle à  $\vec{H}^0$  et de même sens.

Par ailleurs, les variations spatiales d'aimantation provoquent un champ dit démagnétisant  $\vec{H}_d$  auquel est associée une énergie qui s'écrit :

$$W_d = -\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}_d \cdot \vec{M} \quad (1.12)$$

Ce champ démagnétisant s'oppose à l'effet du champ magnétique appliqué  $\vec{H}^0$  et vérifie :

$$\text{div}\vec{H}_d = -\text{div}\vec{M} \quad (1.13)$$

L'énergie magnétostatique s'écrit donc :

$$W_{mag} = -\mu_0\vec{H}^0 \cdot \vec{M} - \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}_d \cdot \vec{M} = -\mu_0\vec{H}^{\text{eff}} \cdot \vec{M} \quad (1.14)$$

avec :

$$\vec{H}^{\text{eff}} = \vec{H}^0 + \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}_d \quad (1.15)$$

#### 1.3.2.4 Énergie magnéto-élastique

L'énergie magnéto-élastique permet de traduire les effets couplés entre phénomènes magnétiques et mécaniques. On peut également la diviser en deux contributions :

$$W_\sigma = -\sigma^0 : \varepsilon^\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{incomp}}^e : \mathbf{C}^{\text{I}} : \varepsilon_{\text{incomp}}^e \quad (1.16)$$

Le premier terme traduit l'effet de la contrainte appliquée  $\sigma^0$ .  $\varepsilon^\mu$  désigne la déformation de magnétostriction "libre", c'est à dire la déformation de magnétostriction qu'on observerait si le matériau pouvait se déformer librement, sans apparition d'incompatibilités.

Le deuxième terme traduit l'effet des incompatibilités de déformation qui apparaissent en raison de l'hétérogénéité du matériau et du caractère généralement non compatible de  $\varepsilon^\mu$ .  $\varepsilon_{\text{incomp}}^e$  désigne la déformation élastique qui compense l'incompatibilité de  $\varepsilon^\mu$  et  $\mathbf{C}^{\text{I}}$  désigne le tenseur de rigidité local.

Dans le cas d'un matériau à symétrie cubique, trois paramètres suffisent à décrire la déformation de magnétostriction. En admettant de plus l'hypothèse de déformation isochore [Hubert et Schäfer, 1998], on réduit à deux le nombre de ces paramètres. Ainsi, la déformation de magnétostriction s'écrit (dans le repère cristallographique  $RC$  ( $[100], [010], [001]$ )) :

$$\varepsilon^\mu = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{100}(\gamma_1^2 - \frac{1}{3}) & \lambda_{111}\gamma_1\gamma_2 & \lambda_{111}\gamma_1\gamma_3 \\ \lambda_{111}\gamma_1\gamma_2 & \lambda_{100}(\gamma_2^2 - \frac{1}{3}) & \lambda_{111}\gamma_2\gamma_3 \\ \lambda_{111}\gamma_1\gamma_3 & \lambda_{111}\gamma_2\gamma_3 & \lambda_{100}(\gamma_3^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix}_{RC} \quad (1.17)$$

où  $\lambda_{100}$  et  $\lambda_{111}$  désignent les deux constantes magnétostrictives,  $\lambda_{100}$  (resp.  $\lambda_{111}$ ) étant égal à la déformation de magnétostriction mesurée dans la direction  $\langle 100 \rangle$

(resp.  $\langle 111 \rangle$ ) d'un monocristal lorsqu'il est aimanté à saturation suivant cette direction.

Cette expression peut s'écrire sous la forme tensorielle :

$$\varepsilon^\mu = \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\gamma} = \vec{\gamma} \otimes \vec{\gamma} \quad (1.18)$$

ou sous la forme vectorielle :

$$\hat{\varepsilon}^\mu = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.19)$$

en définissant :

$$\hat{\varepsilon} = {}^T[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \sqrt{2}\varepsilon_{31}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}] \quad (1.20)$$

$$\hat{\mathbf{K}}^a = \frac{1}{3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{RC} \quad (1.21)$$

$$\hat{\mathbf{K}}^b = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{RC} \quad (1.22)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{3}{2} \left( \lambda_{100} \hat{\mathbf{K}}^a + \lambda_{111} \hat{\mathbf{K}}^b \right) \quad (1.23)$$

### 1.3.2.5 Processus d'aimantation

En l'absence de champ magnétique, l'aimantation s'aligne spontanément suivant les directions de facile aimantation. L'existence de plusieurs directions faciles explique la formation de structures en domaines.

Lorsqu'on applique un champ magnétique, deux mécanismes d'aimantation distincts apparaissent : l'équilibre magnétique est modifié par mouvement des parois magnétiques, c'est à dire par changement de taille des domaines, et par rotation de l'aimantation à l'intérieur des domaines (voir figure 1.5). Dans le cas des matériaux à forte anisotropie magnétocristalline, les mouvements de parois sont prédominants pour les champs faibles et les rotations d'aimantation dans les domaines apparaissent pour des champs magnétiques plus intenses.

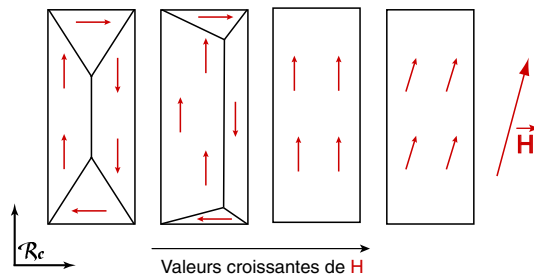


Figure 1.5 – Principe du processus d'aimantation dans un monocristal

L'état désaimanté désigne une configuration pour laquelle, en l'absence de champ extérieur, l'aimantation macroscopique est nulle, c'est à dire que la distribution d'aimantation dans le matériau est telle que la moyenne des aimantations est nulle. C'est la situation représentée sur le premier schéma de la figure 1.5 (avec dans chaque domaine une aimantation uniforme de norme  $M_s$ ).

Il est possible de mettre schématiquement en parallèle les mécanismes locaux de mouvements de parois et de rotations avec le processus d'aimantation vu à l'échelle macroscopique. C'est ce qu'illustre la figure 1.6 dans le cas des matériaux à forte anisotropie magnétocristalline.

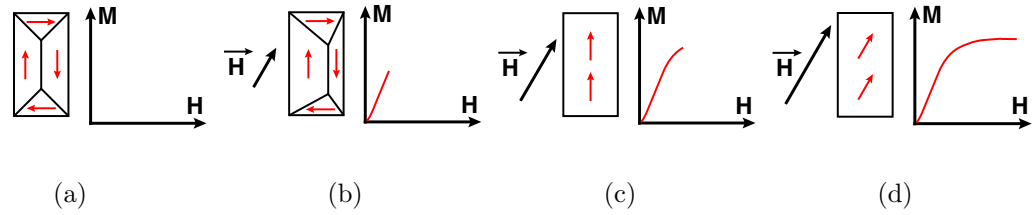


Figure 1.6 – *Comportement magnétique et mécanismes microscopiques*

Pour les matériaux à forte anisotropie magnétocristalline, le début de la courbe d'aimantation, approximativement linéaire, est principalement dominé par des mécanismes de mouvement de parois. Le "coude" de la courbe d'aimantation annonce le début de la rotation de l'aimantation dans les domaines. Cette zone où les deux mécanismes d'aimantation sont superposés est la plus délicate à modéliser, notamment en raison de sa forte non-linéarité. C'est également la zone la plus intéressante d'un point de vue pratique, puisqu'on peut y obtenir une aimantation très forte sans toutefois avoir recours à des champs magnétiques trop intenses. Le point de fonctionnement des machines électriques se trouve souvent dans ce coude où les deux mécanismes d'aimantation se superposent.

### 1.3.3 Phénomènes de couplage magnéto-élastique

Les phénomènes de couplage magnéto-élastique sont introduits naturellement par l'énergie magnéto-élastique dans la relation (1.7). La déformation de magnétostriction est définie par la relation (1.18) et l'effet des contraintes apparaît dans la définition de l'énergie magnéto-élastique (équation (1.16)). L'échelle microscopique est donc a priori une échelle pertinente pour la description des phénomènes de couplage magnéto-élastique.

## 1.4 Notion de comportement macroscopique anhystérique

Le comportement magnétique macroscopique des matériaux ferromagnétiques est fondamentalement irréversible. Pour des faibles vitesses d'excitation magnétique,

cette irréversibilité est essentiellement liée à l'accrochage des parois des domaines magnétiques sur les défauts du matériau. Pour des vitesses d'excitation magnétique plus élevées, les courants de Foucault induits par les variations de champ magnétique constituent une source supplémentaire de dissipation et donc d'hystérésis.

Le matériau initialement désaimanté s'aimante suivant la courbe dite de première aimantation. Aux champs très faibles, dans le domaine dit de Rayleigh, le mécanisme d'aimantation correspond à un "gonflement" des parois<sup>1</sup> ancrées sur des défauts (joints de grain, inclusions). Le déplacement d'ensemble de ces parois intervient ensuite, et pour des champs plus intenses, le mécanisme de rotation apparaît. L'apparition de ces mécanismes correspond à des points d'inflexion sur la courbe de première aimantation. Si l'on diminue l'intensité du champ, le matériau se désaimante, mais suivant un autre chemin. Il se forme un cycle d'hystérésis. La valeur de l'aimantation dans un matériau pour une valeur de champ dépend donc de son histoire. Ce cycle d'hystérésis dépend également de la vitesse d'excitation magnétique. On peut imaginer une sollicitation quasi-statique et un matériau idéal dont la configuration d'équilibre serait atteinte en dépassant les obstacles énergétiques que constituent les défauts. La courbe d'aimantation d'un tel matériau, non linéaire mais réversible, est appelée courbe anhystérétique (figure 1.7).

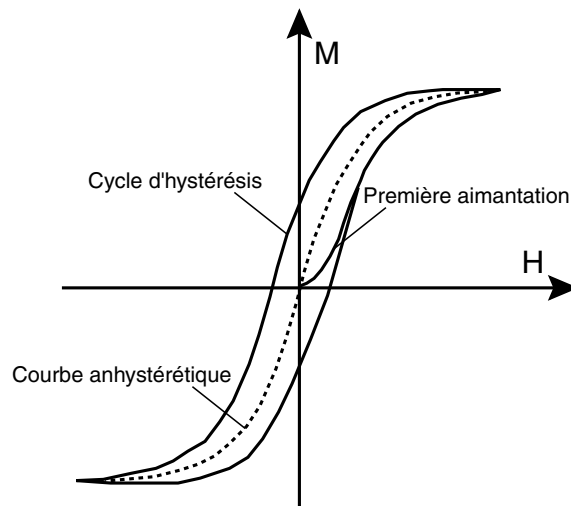


Figure 1.7 – *Courbe d'aimantation*

Il est possible de reconstruire un comportement hystérétique à partir de cette courbe idéale, en introduisant l'histoire du chargement et des variables internes représentatives de l'effet des défauts, et éventuellement des courants de Foucault ([Jiles et Atherton, 1986], [Lemaitre, 2001]).

Le comportement magnétostrictif est fondamentalement réversible à l'échelle microscopique (voir paragraphe 1.2.3.1). Cependant, à l'échelle macroscopique, il apparaît hystérétique. Il est possible de définir de la même façon un comportement anhystérétique qui décrira l'équilibre du matériau idéal sans effet de la vitesse de

---

1. Ce même mécanisme explique également la formation des cycles dits mineurs obtenus en faisant légèrement varier l'intensité du champ magnétique autour d'une valeur fixée.

sollicitation et dans lequel les défauts ne sont pas des obstacles à la mobilité des parois.

Le trajet décrit par les courbes anhystrétiques n'est pas possible à suivre en continu dans la pratique, parce qu'il supposerait l'absence complète de phénomènes dissipatifs. Il est cependant possible d'en faire une acquisition expérimentale point par point, comme on le verra au paragraphe 3.4.2 du chapitre 3.

Le travail présenté dans ce document se limite à l'étude du comportement anhystrétique, c'est à dire réversible, des matériaux ferromagnétiques.

## 1.5 Différentes échelles d'observation et de modélisation

Si on reprend l'équation (1.7), mais en s'intéressant maintenant à un élément de volume  $V$ , l'énergie libre totale s'écrit :

$$W = \frac{1}{V} \int_V (W_{ech} + W_{an} + W_{mag} + W_{\sigma}) dV \quad (1.24)$$

La résolution d'un problème de magnéto-élasticité passe en général par la minimisation de cette énergie libre pour l'échantillon considéré. C'est ce qui constitue la base des approches micromagnétiques. Le terme de champ démagnétisant présent dans le terme  $W_{mag}$  est obtenu en exploitant les équations d'équilibre de Maxwell.

Les grandeurs macroscopiques sont définies en faisant la moyenne sur le volume des grandeurs locales :

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma^I dV = \langle \sigma^I \rangle \quad (1.25)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon^I dV = \langle \varepsilon^I \rangle \quad (1.26)$$

$$\vec{M}_m = \frac{1}{V} \int_V \vec{M} dV = \langle \vec{M} \rangle \quad (1.27)$$

$$\vec{H}_{ext} = \frac{1}{V} \int_V \vec{H} dV = \langle \vec{H} \rangle \quad (1.28)$$

Cependant, s'il s'agit in fine de définir le comportement d'un volume élémentaire représentatif au sens de la mécanique des milieux continus, une modélisation de ce type conduirait à des temps de calcul qui ne semblent pas raisonnables aujourd'hui.

L'objectif est donc ici d'adopter des hypothèses simplificatrices qui permettent d'accéder plus rapidement - mais sans doute moins sûrement - à une estimation du comportement magnétique. Différentes échelles peuvent être choisies pour la modélisation de ce comportement magnéto-élastique.

La première échelle est celle de l'atome ou du groupement d'atomes. A cette échelle, on peut de façon rigoureuse faire une hypothèse d'homogénéité des grandeurs magnétiques et mécaniques.

Une autre échelle d'étude possible est l'échelle des domaines magnétiques, zones où l'aimantation peut raisonnablement être considérée comme homogène.

L'échelle suivante est celle de la phase mécanique, zone où on peut considérer que les propriétés élastiques sont homogènes. Cette échelle est celle du monocristal, ou d'un grain dans un polycristal.

Vient ensuite l'échelle du VER. La zone d'étude est alors suffisamment grande pour que le comportement du VER soit représentatif du comportement du matériau. Il n'est pas possible de définir précisément cette échelle, qui dépend du matériau étudié. Dans les cas présentés ici, l'échelle du VER va du dixième de millimètre au centimètre.

La dernière échelle enfin, est l'échelle de la structure, où les effets de géométrie doivent être pris en compte.

# Chapitre 2

## Transitions d'échelles en magnéto-élasticité

### Sommaire

---

|            |                                                 |           |
|------------|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Échelle du domaine magnétique . . . . .</b>  | <b>20</b> |
| 2.1.1      | Énergie libre d'un domaine magnétique . . . . . | 20        |
| 2.1.2      | Choix et calcul des variables d'état . . . . .  | 21        |
| <b>2.2</b> | <b>Échelle du monocristal . . . . .</b>         | <b>23</b> |
| 2.2.1      | Modélisation schématique . . . . .              | 23        |
| 2.2.2      | Choix des variables d'état . . . . .            | 28        |
| 2.2.3      | Modèle microscopique . . . . .                  | 28        |
| 2.2.4      | Conclusion . . . . .                            | 31        |
| <b>2.3</b> | <b>Échelle du polycristal . . . . .</b>         | <b>31</b> |
| 2.3.1      | Comportement mécanique . . . . .                | 32        |
| 2.3.2      | Comportement magnétique . . . . .               | 37        |
| 2.3.3      | Effets couplés . . . . .                        | 42        |
| 2.3.4      | Conclusion . . . . .                            | 43        |
| <b>2.4</b> | <b>Effets macroscopiques . . . . .</b>          | <b>43</b> |
| 2.4.1      | Effet de surface . . . . .                      | 44        |
| 2.4.2      | Effets liés au procédé de fabrication . . . . . | 44        |
| 2.4.3      | Effets de géométrie . . . . .                   | 44        |
| <b>2.5</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                     | <b>45</b> |

---

La modélisation multi-échelle qui est présentée dans ce chapitre s'appuie sur trois échelles différentes et leurs relations de passages associées. Le comportement des domaines est tout d'abord étudié. Un changement d'échelle permet ensuite de définir le comportement à l'échelle du monocristal (ou du grain). Un deuxième changement d'échelle permet de définir le comportement d'un VER. Quelques effets macroscopiques, enfin, sont abordés.

### 2.1 Échelle du domaine magnétique

La première échelle d'étude des phénomènes magnétiques, après l'échelle atomique, est celle du domaine magnétique. Le domaine magnétique est en effet une zone où l'aimantation est supposée uniforme. La donnée de la direction  $\vec{\gamma}$  de l'aimantation suffit à définir l'état magnétique du domaine. On peut donc définir des modèles plus simples, tirant parti de cette uniformité de l'aimantation. Le modèle présenté ci-après, inspiré du modèle des phases de Néel [Néel, 1944], reprend les travaux de thèse de Nicolas Buiron [Buiron, 2000].

#### 2.1.1 Énergie libre d'un domaine magnétique

On reprend ici la définition de l'énergie libre donnée par la relation (1.24), en essayant d'y apporter des simplifications associées à l'uniformité de l'aimantation.

##### 2.1.1.1 Énergie d'échange

Dans un domaine, si les variations d'aimantation sont inexistantes, l'énergie d'échange est nulle. Elle n'interviendra pas dans la définition de l'état d'équilibre du domaine.

##### 2.1.1.2 Énergie d'anisotropie magnétocristalline

L'aimantation étant uniforme dans le domaine, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline l'est aussi, et l'intégration sur le volume devient aisée. Aucune modification n'est apportée à la définition donnée par la relation (1.10). On introduit simplement ici une notation plus condensée.

Si l'on note:

$$\beta = \mathbf{K}^b : \gamma, \quad (2.1)$$

l'énergie d'anisotropie magnétocristalline peut s'écrire:

$$W_{an}^\alpha = \frac{K_1}{2} \beta : \beta + K_2 \cdot \det(\gamma - \beta) \quad (2.2)$$

##### 2.1.1.3 Énergie magnétostatique

Afin de simplifier la définition de l'énergie magnétostatique, on introduit ici une hypothèse forte: le champ démagnétisant dans un domaine est considéré uniforme

et parallèle (de sens opposé) à l'aimantation. L'expression de l'énergie de champ démagnétisant devient alors :

$$W_d^\alpha = -\frac{1}{2}k\vec{M}^2 = \text{Cte} \quad (2.3)$$

Ce terme est indépendant de la direction de l'aimantation. Il ne participe pas à l'équilibre énergétique du domaine.

Par ailleurs, le champ magnétique étant également supposé uniforme dans le domaine, l'énergie magnétostatique l'est aussi et s'écrit :

$$W_{mag}^\alpha = -\mu_0 \vec{M}_\alpha \cdot \vec{H}_\alpha \quad (2.4)$$

$\vec{H}_\alpha$  est le champ magnétique appliqué au domaine.  $\vec{M}_\alpha$  est l'aimantation dans le domaine, définie par l'équation (2.5).

$$\vec{M}_\alpha = M_s \vec{\gamma}^\alpha = M_s {}^t[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3], \quad \text{avec } \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (2.5)$$

#### 2.1.1.4 Énergie magnéto-élastique

On suppose ici qu'un domaine est une sous-structure d'une zone dont les propriétés élastiques sont homogènes (en l'occurrence un monocristal ou un grain). La déformation de magnétostriction est également homogène dans le domaine. On choisit de négliger les déformations élastiques d'incompatibilité à la frontière de deux domaines, ce qui revient à faire une hypothèse de contraintes homogènes. Le deuxième terme de l'énergie magnéto-élastique disparaît. L'énergie magnéto-élastique est également uniforme dans le domaine et s'écrit alors :

$$W_\sigma = -\sigma_\alpha : \varepsilon_\alpha^\mu = -\sigma_\alpha : \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma} \quad (2.6)$$

$\sigma_\alpha$  et  $\varepsilon_\alpha^\mu$  sont respectivement la contrainte et la déformation de magnétostriction dans le domaine magnétique.

#### 2.1.1.5 Énergie libre totale d'un domaine magnétique

En conclusion, l'énergie libre totale d'un domaine magnétique, définie par la relation (1.24), est choisie sous la forme de l'équation (2.7) :

$$W^\alpha = -\mu_0 \vec{M}_\alpha \cdot \vec{H}_\alpha - \sigma_\alpha : \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma} + \frac{K_1}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} + K_2 \det(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}) \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Choix et calcul des variables d'état

Il suffit de connaître la direction  $\vec{\gamma}^\alpha$  de l'aimantation  $\vec{M}_\alpha$  pour décrire l'état magnétique d'un domaine. Cette direction est définie dans le repère cristallographique par deux angles  $\theta_\alpha$  et  $\delta_\alpha$  (voir figure 2.1(a)).

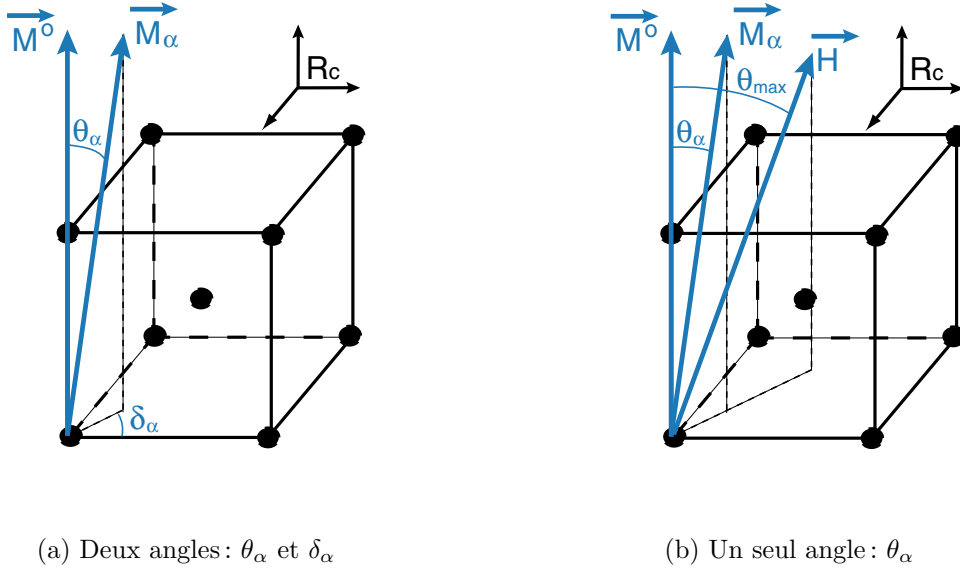


Figure 2.1 – Définition de la direction de l'aimantation dans un domaine magnétique

Ces deux angles peuvent être déterminés par minimisation de l'énergie libre (2.7). Dans un souci de simplification, on peut rajouter une hypothèse supplémentaire : l'aimantation  $\vec{M}_\alpha$  reste toujours dans le plan formé par la direction de facile aimantation initiale  $\vec{\gamma}_0^\alpha$  (support de  $\vec{M}^0$ ) et le champ magnétique  $\vec{H}_\alpha$ , de sorte qu'un seul angle ( $\theta_\alpha$ ) suffit à définir  $\vec{\gamma}$ . L'angle  $\theta_\alpha$  désigne l'angle entre la direction facile du domaine considéré  $\vec{\gamma}_0^\alpha$  et la direction actuelle  $\vec{\gamma}^\alpha$  de l'aimantation  $\vec{M}_\alpha$  du domaine (voir figure 2.1(b)).

Le champ magnétique et le champ de contraintes étant supposés connus, suivant l'hypothèse faite, les variables  $\theta_\alpha$  et  $\delta_\alpha$  ou la variable  $\theta_\alpha$  sont obtenues par minimisation de l'énergie libre du domaine :

$$W_\alpha(\theta_\alpha, \delta_\alpha) = \min(W_\alpha) \quad (2.8)$$

ou :

$$W_\alpha(\theta_\alpha) = \min(W_\alpha), \quad \theta_\alpha \in [0, \theta_{\max}] \quad (2.9)$$

avec

$$\theta_{\max} = \text{Arccos} \left( \frac{\vec{\gamma}_0^\alpha \cdot \vec{H}_\alpha}{\|\vec{H}_\alpha\|} \right) \quad (2.10)$$

## 2.2 Échelle du monocristal

Lorsqu'on souhaite déterminer le comportement d'un monocristal, les hypothèses énoncées dans le cas du domaine magnétique ne peuvent être maintenues. Il est par exemple difficile de considérer que l'aimantation dans un monocristal est uniforme. L'énergie d'échange prend alors une part importante dans la définition de l'équilibre. Une solution pourrait être de définir l'énergie libre d'un monocristal comme la somme de l'énergie des domaines qui le constituent et d'une énergie de parois, associée aux zones de transition entre domaines :

$$W^{\text{monoc}} = \int_{V_d} W^\alpha dV + \int_{V_p} W^p dV \quad (2.11)$$

$V_d$  désignant le volume occupé par les domaines et  $V_p$  celui occupé par les parois magnétiques ( $V_d + V_p = V$ ).

Cette écriture reste cependant formelle, dans la mesure où la définition du terme  $W^p$  est assez délicate. Toute la complexité du comportement magnétique s'y trouve en effet projetée. Ainsi, dans une paroi, la direction de l'aimantation varie très rapidement, ce qui complique la définition de tous les termes énergétiques définis au paragraphe 1.3.2. C'est également dans ces zones de parois que se concentrent les incompatibilités entre domaines, qui jouent vraisemblablement un grand rôle dans la configuration à l'équilibre. La complexité et la variété des structures en domaines observées laissent entrevoir la difficulté que représente une définition simple de cette énergie de parois  $W^p$ .

Une autre difficulté réside dans la définition du volume  $V_p$ , qui nécessite de différencier parois et domaines. On peut pour cela s'appuyer sur le principe suivant : l'aimantation est homogène dans un domaine et ne l'est pas dans une paroi. On voit bien cependant que cette définition n'est pas objective, et qu'elle requiert la prise en compte d'un seuil d'homogénéité de l'aimantation permettant de définir une frontière parois/domaines. La détermination de ce volume de parois, qu'on peut relier à la notion d'épaisseur de parois et de densité volumique de parois, est donc également assez délicate.

Une formulation telle que celle de l'équation (2.11), si elle est séduisante du point de vue formel, s'avère difficile à mettre en œuvre si on ne souhaite pas remonter à des formulations du type de celles utilisées dans les modèles micromagnétiques. La démarche de minimisation de l'énergie libre est ici difficile à mettre en pratique, au moins pour des problèmes de taille importante.

Cependant, l'étude du comportement des domaines magnétiques, sans faire intervenir l'énergie de parois, peut permettre d'appréhender de manière simplifiée le comportement du monocristal. C'est ce que nous montrons de façon schématique pour le monocristal de fer dans le paragraphe suivant.

### 2.2.1 Modélisation schématique

Considérons un monocristal de fer. Le champ magnétique et la contrainte sont supposés connus. Le champ magnétique est appliqué suivant la direction  $\vec{h}$  et la contrainte est une contrainte uniaxiale suivant la direction  $\vec{s}$ . On suppose que seules

six familles (ou variants) de domaines magnétiques peuvent coexister, associées chacune à une direction de facile aimantation. On ne s'intéresse pas ici aux configurations en domaines, mais seulement à leurs proportions relatives. Un monocristal peut donc être représenté schématiquement de la manière proposée sur la figure 2.2.

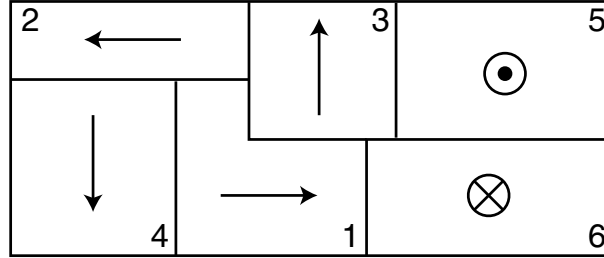


Figure 2.2 – *Configuration magnétique schématisée dans une situation quelconque, en l'absence de rotations*

Les familles de domaines 1, 2, 3, 4, 5 et 6 désignent les familles de domaines dont les directions d'aimantation facile sont respectivement les directions  $[100]$ ,  $[\bar{1}00]$ ,  $[010]$ ,  $[0\bar{1}0]$ ,  $[001]$  et  $[00\bar{1}]$ .

L'énergie associée à chacune des familles de domaines ainsi définies s'écrit d'après la relation (2.7), et fait intervenir l'énergie magnétostatique  $W_{mag}$ , l'énergie magnéto-cristalline  $W_{an}$  et l'énergie magnéto-élastique  $W_{\sigma}$ .

### 2.2.1.1 Etat désaimanté

En l'absence de champ magnétique,  $W_{mag} = 0$ . L'aimantation étant portée dans chaque domaine par une direction facile,  $W_{an} = 0$ . Enfin, en l'absence de contraintes,  $W_{\sigma} = 0$ . Toutes les familles de domaines ont la même énergie libre, et toutes sont donc a priori équiprobables. L'état désaimanté de référence correspond donc à la figure 2.3.

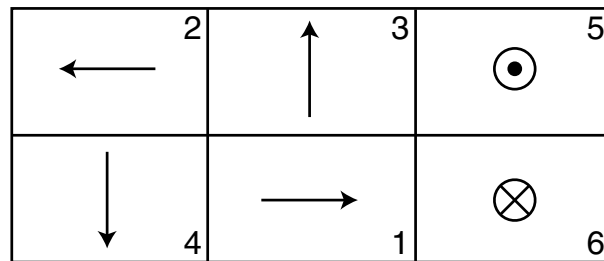


Figure 2.3 – *Configuration magnétique (schématisée) de référence à l'état désaimanté*

Dans ces conditions, on a :

$$f_{\alpha} = \frac{1}{6} \quad \forall \alpha \quad (2.12)$$

On en déduit facilement, d'après les équations (1.9) et (1.17) :

$$\begin{cases} \langle \vec{M}_\alpha \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \vec{M}_\alpha = \vec{0} \\ \langle \varepsilon_\alpha^\mu \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \varepsilon_\alpha^\mu = \mathbb{O} \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.2.1.2 Application d'un champ magnétique

Si on applique maintenant un champ magnétique suivant la direction  $[100]$ , ce champ magnétique modifie l'énergie magnétostatique. On montre, d'après la définition de  $W_{mag}$  que :

$$W_{mag}^1 < 0, \quad W_{mag}^2 > 0 \quad \text{et} \quad W_{mag}^3 = W_{mag}^4 = W_{mag}^5 = W_{mag}^6 = 0 \quad (2.14)$$

Les autres termes énergétiques sont en première approximation supposés inchangés. Les domaines les plus représentés étant les domaines présentant l'énergie la plus basse, on déduit :

$$f_1 > f_3 = f_4 = f_5 = f_6 > f_2 \quad (2.15)$$

Une configuration de ce type est représentée sur la figure 2.4.

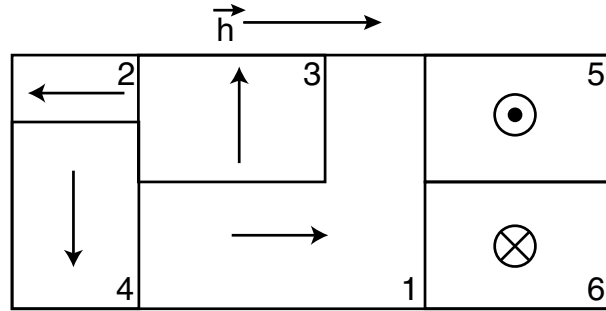


Figure 2.4 – Configuration magnétique (schématique) pour un champ magnétique dans la direction  $\vec{h}$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} \langle \vec{M}_\alpha \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \vec{M}_\alpha \neq \vec{0}, \quad \text{avec} \quad \langle \vec{M}_\alpha \rangle // \vec{h} \\ \langle \varepsilon_\alpha^\mu \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \varepsilon_\alpha^\mu \neq \mathbb{O} \end{cases} \quad (2.16)$$

Si le champ magnétique est appliqué suivant la direction  $-\vec{h}$ , la situation est exactement semblable, en permutant les indices 1 et 2. L'aimantation est alors la même, mais suivant  $-\vec{h}$ , et la déformation de magnétostriction est inchangée. Cette approche simplifiée est en accord avec le fait que l'aimantation est une fonction impaire du champ magnétique (en l'absence de contraintes), et la magnétostriction une fonction paire.

### 2.2.1.3 Application d'une contrainte

Retournons maintenant à la situation à champ nul, mais en imposant cette fois une contrainte de traction  $\sigma$  suivant la direction  $[100]$ . Par rapport à la situation de référence, seule l'énergie magnéto-élastique est modifiée.

D'après la définition de  $W_\sigma$ , on en déduit (en supposant, pour fixer les idées, que  $\lambda_{100} > 0$ ) :

$$\begin{cases} W_{mag}^1 = W_{mag}^2 = -\lambda_{100} \sigma < 0 \\ W_{mag}^3 = W_{mag}^4 = W_{mag}^5 = W_{mag}^6 = \frac{1}{2}\lambda_{100} \sigma > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

On en déduit :

$$f_1 = f_2 > f_3 = f_4 = f_5 = f_6 \quad (2.18)$$

Cette situation correspond à une configuration du type de celle représentée sur la figure 2.5.

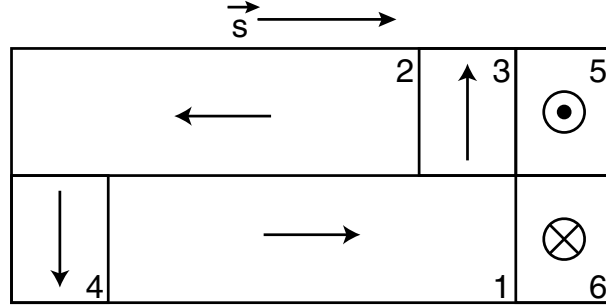


Figure 2.5 – Configuration magnétique (schématique) pour une contrainte de traction uniaxiale dans la direction  $\vec{s}$

Les fractions volumiques des familles de domaines d'aimantation opposées étant égales, l'aimantation moyenne est toujours nulle. En revanche, la moyenne des déformations de magnétostriction n'est pas nulle :

$$\begin{cases} \langle \vec{M}_\alpha \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \vec{M}_\alpha = \vec{0} \\ \langle \varepsilon_\alpha^\mu \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \varepsilon_\alpha^\mu = (f_1 - f_3) \lambda_{100} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{RC} \neq \mathbb{O} \end{cases} \quad (2.19)$$

Remplaçons maintenant la contrainte appliquée par une contrainte de compression ( $\sigma < 0$ ). L'énergie magnéto-élastique pour chaque famille de domaine s'écrit :

$$\begin{cases} W_{mag}^1 = W_{mag}^2 = -\lambda_{100} \sigma > 0 \\ W_{mag}^3 = W_{mag}^4 = W_{mag}^5 = W_{mag}^6 = \frac{1}{2}\lambda_{100} \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

On en déduit :

$$f_1 = f_2 < f_3 = f_4 = f_5 = f_6 \quad (2.21)$$

Cette situation correspond à la configuration présentée sur la figure 2.6.

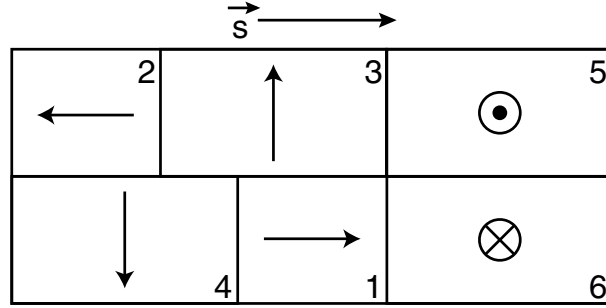


Figure 2.6 – Configuration magnétique (schématique) pour une contrainte de compression uniaxiale dans la direction  $\vec{s}$

La moyenne de l'aimantation et la moyenne de la déformation de magnétostriction sont définies formellement de la même façon qu'en traction (équation (2.19)). Cependant, rien n'indique que  $(f_1 - f_3)_{\text{traction}} = -(f_1 - f_3)_{\text{compression}}$ , la moyenne de la déformation de magnétostriction en compression est donc (sauf cas particuliers) différente de l'opposé de la déformation de magnétostriction en traction.

En résumé, cette approche simplifiée permet, sans avoir recours à l'énergie de parois, d'expliquer et de comprendre qualitativement quelques aspects du comportement magnéto-élastique :

- Un état désaimanté de référence peut être défini en considérant que toutes les familles de domaines sont en proportions égales. La déformation de magnétostriction associée (valeur de référence) est alors nulle.
- L'application d'un champ magnétique favorise les domaines pour lesquels la direction de l'aimantation est proche du champ magnétique appliqué au détriment des autres.
- L'application d'une contrainte ne permet pas d'aimanter un matériau initialement désaimanté.
- Une contrainte de traction (dans le cas où  $\lambda_{100} > 0$  (matériaux dits à magnétostriction positive)) favorise les domaines pour lesquels la direction de l'aimantation est proche de la direction de traction, au détriment des autres, provoquant une elongation positive.
- Une contrainte de compression (dans le cas où  $\lambda_{100} > 0$ ) favorise les domaines pour lesquels la direction de l'aimantation est perpendiculaire à la direction de compression, au détriment des autres, provoquant une elongation négative.
- L'effet d'une contrainte uniaxiale sur la déformation de magnétostriction est en général dissymétrique et dépend du signe de  $\lambda_{100}$ . Il est à noter qu'un raisonnement en deux dimensions, c'est à dire en ne considérant que quatre familles de domaines possibles, n'aurait pas permis de mettre en évidence cette dissy-

métrie traction/compression (puisque'il y a alors deux familles pour lesquelles l'aimantation est parallèle à la direction de traction face à deux familles pour lesquelles elle est perpendiculaire).

S'appuyant sur ce type de raisonnement, une solution de modélisation consiste en la définition d'une loi de changement d'échelle phénoménologique, qui permette de définir le comportement du monocristal simplement à partir du comportement des domaines qui le constituent et d'une variable scalaire d'ajustement, permettant de contourner la définition de  $W^p$  (équation (2.11)). C'est le modèle proposé par Buiron [Buiron, 2000], et présenté ci-dessous.

### 2.2.2 Choix des variables d'état

Le monocristal est divisé en un ensemble de domaines. L'aimantation dans ces domaines, en l'absence de sollicitation extérieure, est dirigée suivant un axe de facile aimantation. Ces axes faciles sont en nombre fini. On définit, comme on l'a déjà vu, des familles de domaines magnétiques ( $\alpha$ ) associées chacune à une direction de facile aimantation ( $\vec{\gamma}_0^\alpha$ ).

Les variables d'état choisies sont définies pour chaque famille de domaines  $\alpha$  et se divisent en deux catégories :

- l'angle de désorientation  $\theta_\alpha$  défini au paragraphe 2.1.2.
- la fraction volumique  $f_\alpha$  de la famille de domaines  $\alpha$  dans le monocristal.

### 2.2.3 Modèle microscopique

#### 2.2.3.1 Ecriture énergétique

L'énergie libre de chaque domaine (équation (2.7)) est écrite en supposant que le champ magnétique  $\vec{H}^I$  et le tenseur des contraintes  $\sigma^I$  sont uniformes dans le monocristal. L'énergie d'un domaine s'écrit donc :

$$W^\alpha = -\mu_0 \vec{M}_\alpha \cdot \vec{H}^I - \sigma^I : \mathbf{D} : \gamma + \frac{K_1}{2} \beta : \beta + K_2 \det(\gamma - \beta) \quad (2.22)$$

#### 2.2.3.2 Calcul des variables d'état

Connaissant l'énergie libre de chaque domaine, on peut déterminer - par minimisation de  $W^\alpha$  - l'orientation de l'aimantation dans ces domaines, c'est à dire les variables  $\theta_\alpha$ .

Les variables  $f_\alpha$  sont obtenues en utilisant la relation explicite de type Boltzman proposée par Buiron [Buiron, 2000] :

$$f_\alpha = \frac{\exp(-A_s \cdot W_\alpha)}{\sum_{\alpha} \exp(-A_s \cdot W_\alpha)} \quad (2.23)$$

où  $A_s$  est un paramètre d'ajustement qui permet d'introduire phénoménologiquement les effets ignorés par la modélisation, c'est à dire l'effet des parois et de

la non-homogénéité de l'énergie d'échange, du champ magnétique et du champ de contraintes dans le monocristal.

Par ailleurs, on vérifie bien :

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} = 1 \quad (2.24)$$

### 2.2.3.3 Définition du comportement du monocristal

Une fois les variables d'état calculées pour chaque famille de domaines  $\alpha$ , on peut définir l'aimantation moyenne dans le cristal :

$$\vec{M}^I = \langle \vec{M}_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} \quad (2.25)$$

On peut de la même façon définir la déformation de magnétostriction moyenne dans le monocristal (en supposant les contraintes homogènes dans le monocristal) :

$$\varepsilon_I^{\mu} = \langle \varepsilon_{\alpha}^{\mu} \rangle = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}^{\mu} \quad (2.26)$$

### 2.2.3.4 Comparaison avec un modèle micromagnétique

Les modèles dits "micromagnétiques" sont les modèles magnétiques qui se placent, pour décrire le comportement magnétique, à l'échelle de l'atome ou plus souvent, à l'échelle de groupements de quelques centaines ou milliers d'atomes.

Le problème est discrétisé en un ensemble de groupements d'atomes. Chacun de ces groupements y est vu comme un ensemble où l'aimantation, le champ, la contrainte et la déformation sont uniformes. La solution du problème magnétique est obtenue en résolvant les équations d'équilibre de Maxwell (cf e.g. [Bernadou et al., 2002], [DeSimone et al., 2002]). Cette stratégie de modélisation (en général bi-dimensionnelle), qui fait souvent appel à des calculs par éléments finis, conduit, pour des volumes identiques, à des temps de calcul extrêmement longs comparés à ceux du modèle microscopique présenté. La représentation de la configuration en domaines est en revanche beaucoup plus riche pour les modèles micromagnétiques, et permet notamment de faire apparaître les parois magnétiques.

Les résultats des modèles proposés par Buiron [Buiron, 2000] et He [He, 1999] ont été comparés pour des configurations compatibles [Buiron et al., 2001]. Ces résultats montrent un assez bon accord entre les deux modèles, comme l'illustre la figure 2.7.

On y compare les résultats des deux modèles sur une configuration à deux dimensions pour un monocristal de fer. Le modèle microscopique considère un carré monocristallin avec quatre directions de facile aimantation dans le plan. Le modèle microscopique considère aussi quatre familles de domaines, et suppose le champ démagnétisant homogène et sous la forme  $\vec{H}_d = -n\vec{M}$ . Le champ magnétique est appliqué dans la direction [100]. Les fractions volumiques des domaines dont la direction facile est celle du champ magnétique appliqué vont augmenter rapidement avec le champ. Les autres domaines vont voir leur proportion baisser, la famille la plus défavorisée étant celle dont la direction de facile aimantation est opposée au champ magnétique. Les deux modèles décrivent ce phénomène de façon similaire.

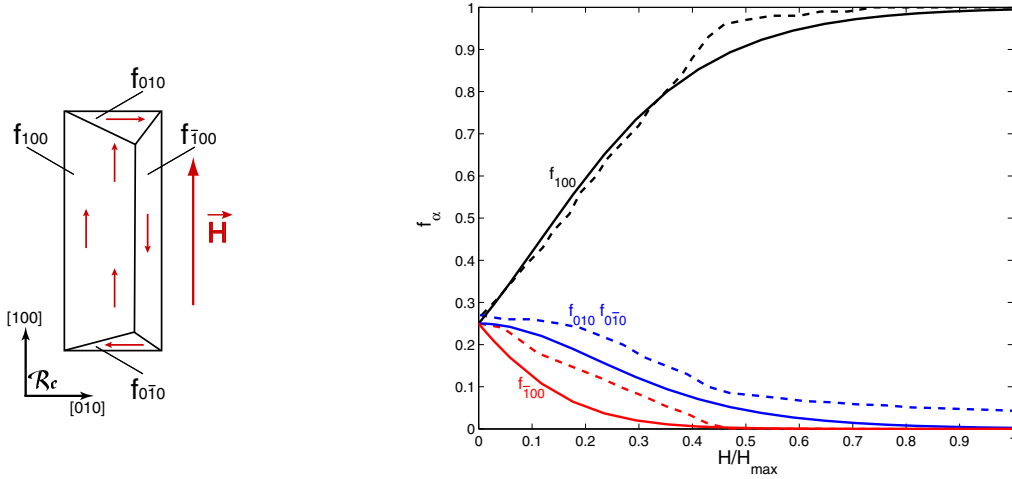


Figure 2.7 – Comportement du monocristal de fer pur - Résultats de simulations microscopiques (traits pleins) et micromagnétiques (pointillés)

### 2.2.3.5 Comparaison avec des résultats expérimentaux

Des mesures magnétiques et magnétostrictives sur un monocristal de fer pur ont été réalisées par Webster ([Webster, 1925b]). Il est possible de les comparer avec les résultats fournis par le modèle.

Le fer pur présente une structure cubique centrée. Les directions de facile aimantation pour ce cristal étant les directions  $\langle 100 \rangle$ , six familles de domaines seront envisagées.

Les constantes matériaux utilisées sont les suivantes :

| Constante                        | Valeur                        | Référence                                       |
|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------|
| $M_s$                            | $1,71 \cdot 10^6$ A/m         | [Bozorth, 1951], [Cullity, 1972], [Jiles, 1991] |
| $(K_1; K_2)$                     | $(42,7;15)$ kJ/m <sup>3</sup> | [Bozorth, 1951]                                 |
| $(\lambda_{100}; \lambda_{111})$ | $(21; -21) 10^{-6}$           | [Cullity, 1972], [Jiles, 1991]                  |
| $(C_{11}, C_{12}, C_{44})$       | $(238; 142; 232)$ GPa         | [McClintock et Argon, 1966]                     |

Tableau 2.1 – Caractéristiques du monocristal de fer pur - Données bibliographiques

Le paramètre  $A_s$  est ici fixé à la valeur  $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ J}^{-1}$  (voir chapitre 3, paragraphe 3.2).

La figure 2.8 permet de constater un bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux, tant pour la courbe d'aimantation que pour la courbe de magnétostriction. Ce constat est cependant à considérer avec précaution, les mesures de Webster étant en réalité des courbes de première aimantation, et non des courbes anhystérétiques.

La figure 2.8(a) (resp. 2.8(b)) représente l'aimantation (resp. la magnétostriction) mesurée parallèlement au champ magnétique, lorsqu'on applique ce champ suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  ou  $\langle 111 \rangle$  du monocristal.

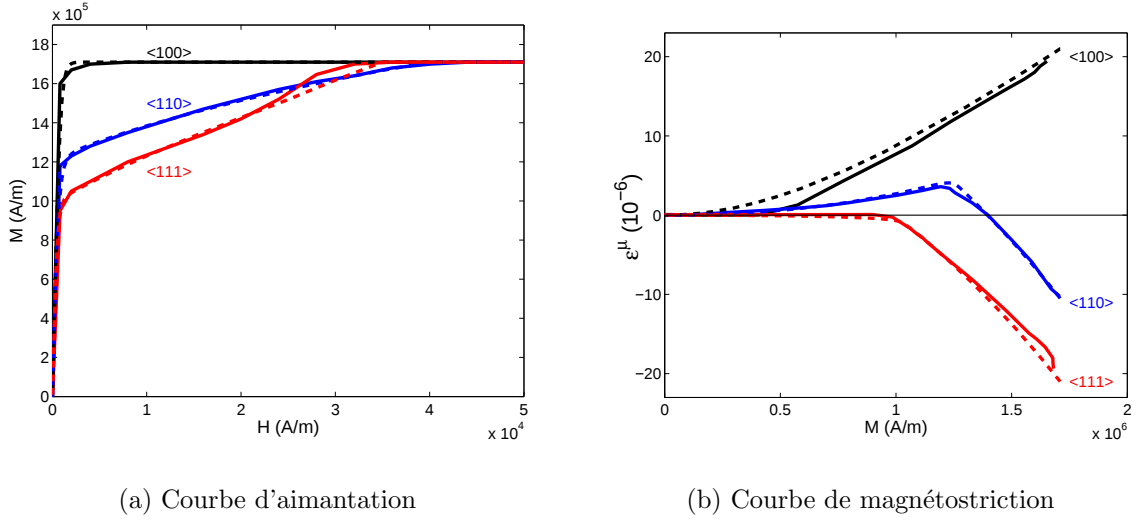


Figure 2.8 – *Comportement du monocristal de fer pur. Données expérimentales d'après [Webster, 1925b] (traits pleins) et résultats numériques (pointillés)*

On remarque que les comportements magnétique et magnétostrictif sont non-linéaires, et surtout extrêmement anisotropes. Par exemple, lorsqu'on applique le champ suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ , l'échantillon de fer s'allonge, et si l'on applique le champ suivant une direction  $\langle 111 \rangle$ , il se contracte.

## 2.2.4 Conclusion

L'approche proposée permet, connaissant le chargement mécanique et magnétique appliqué à un monocristal, d'estimer avec rapidité son comportement. Le modèle s'appuie sur l'écriture de l'énergie libre des familles de domaines associée à une loi de changement d'échelle, du domaine vers le grain.

Cependant, cette approche contourne, avec l'utilisation d'une variable d'ajustement phénoménologique, certains aspects de la complexité du comportement magnéto-élastique. En particulier, le problème des interactions de domaine à domaine n'est pas pris en compte. De la même façon, la participation des parois dans les mécanismes étudiés n'est traitée que de manière globale, et le modèle ne fournit aucune information sur la distribution des domaines dans le matériau.

La comparaison des résultats de ce modèle avec un modèle micromagnétique (paragraphe 2.2.3.4) nous incite cependant à utiliser le modèle microscopique comme outil de définition rapide du comportement magnétique du monocristal. Les temps de calcul nécessaires rendent ainsi envisageable le passage à l'échelle macroscopique (l'échelle du VER), qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 2.3 Échelle du polycristal

On a vu que le comportement magnétique d'un monocristal était hétérogène. Pour un matériau polyphasé, une nouvelle source d'hétérogénéité vient s'ajouter en

raison de la non-uniformité des propriétés mécaniques.

Dans le cas d'un polycristal, l'orientation cristallographique différente entre deux grains adjacents provoque des hétérogénéités de contraintes et de déformations. La distribution des orientations cristallographiques, la texture, est alors une donnée importante pour modéliser ces hétérogénéités.

Une approche de type micro-macro peut permettre, connaissant le chargement macroscopique et la texture, et sous certaines hypothèses concernant la microstructure de déduire le chargement appliqué à chaque grain (étape dite de localisation). Les lois de comportement obtenues à l'échelle du grain peuvent ainsi être appliquées, et le comportement moyen de chaque phase est ainsi obtenu. La dernière étape peut consister, si les grandeurs utiles sont macroscopiques, en une étape d'homogénéisation pour revenir à l'échelle du VER.

### 2.3.1 Comportement mécanique

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un matériau polycristallin dont la texture est connue. Les propriétés du monocristal sont connues<sup>1</sup>.

L'objectif est de trouver l'opérateur  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  qui relie la déformation macroscopique à la contrainte macroscopique :

$$\Sigma = \mathbf{C}^{\text{eff}} : \mathbb{E} \quad (2.27)$$

#### 2.3.1.1 Hypothèses de Voigt et Reuss

Les approximations de Voigt et Reuss constituent une première approche du comportement effectif.

Pour l'approximation de Voigt, on considère que les déformations sont uniformes dans le matériau ( $\varepsilon^I = \mathbb{E}$ ). La contrainte macroscopique s'écrit :

$$\Sigma = \langle \sigma^I \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}} : \varepsilon^I \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}} : \mathbb{E} \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}} \rangle : \mathbb{E} \quad (2.28)$$

Il en résulte que le tenseur effectif s'écrit, en fonction des modules des constituants  $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$  :

$$\mathbf{C}_+^{\text{eff}} = \mathbf{C}_V = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}} \rangle \quad (2.29)$$

$\mathbf{C}_V$  constitue une borne supérieure pour le tenseur des modules [Bornert et al., 2001a].

L'approximation de Reuss consiste à supposer que les contraintes sont uniformes dans le matériau ( $\sigma^I = \Sigma$ ). La déformation macroscopique s'écrit :

$$\mathbb{E} = \langle \varepsilon^I \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}} : \sigma^I \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}} : \Sigma \rangle = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}} \rangle : \Sigma \quad (2.30)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{C}_-^{\text{eff}} = \mathbf{C}_R = \langle \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}} \rangle^{-1} \quad (2.31)$$

$\mathbf{C}_R$  constitue une borne inférieure pour le tenseur des modules [Bornert et al., 2001a].

---

1. Ces propriétés sont par exemple celles détaillées dans le tableau 2.1

### 2.3.1.2 Problème d'inclusion et tenseur de Hill

La solution du problème d'inclusion d'Eshelby [Eshelby, 1957] constitue la base de la modélisation qui va être présentée (figure 2.9).

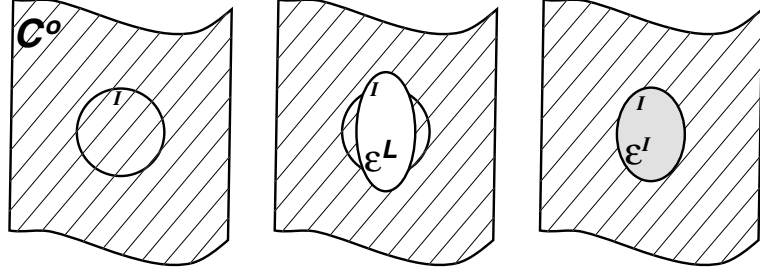


Figure 2.9 – Problème d'Eshelby

On considère un milieu infini homogène - la matrice - de modules  $\mathbf{C}^o$ , non chargée. Une région  $I$  de ce milieu - l'inclusion - est soumise à une déformation libre  $\varepsilon^L$ . Cette déformation libre est définie comme la déformation que subirait le matériau en l'absence de la résistance exercée par la matrice. La déformation totale  $\varepsilon^I$  dans l'inclusion peut-être reliée à la déformation libre à l'aide du tenseur d'Eshelby  $\mathbf{S}^E$  :

$$\varepsilon^I = \mathbf{S}^E : \varepsilon^L \quad (2.32)$$

La contrainte dans l'inclusion s'écrit :

$$\sigma^I = \mathbf{C}^o : \varepsilon_I^e = \mathbf{C}^o : (\varepsilon^I - \varepsilon^L) = \mathbf{C}^o : (\mathbf{S}^E - \mathbf{I}) : \varepsilon^L \quad (2.33)$$

Le tenseur  $\mathbf{S}^E$  ne dépend que des modules élastiques de la matrice et de la forme choisie pour l'inclusion. Des éléments de calcul, dans le cas d'une inclusion sphérique et d'un milieu orthotrope sont donnés en annexe A.

On peut montrer [François et al., 1995] que le problème de l'hétérogénéité élastique (de modules  $\mathbf{C}^I$ ) dans une matrice de modules  $\mathbf{C}^o$  peut se ramener au problème de l'inclusion. On définit pour cela une déformation libre fictive équivalente  $\varepsilon^{L*}$  dans la matrice, qui conduirait au même état de contrainte et de déformation dans l'inclusion. Le chargement macroscopique est défini par la contrainte  $\Sigma$  et la déformation  $\mathbb{E}$ . La contrainte et la déformation dans l'inclusion sont données par les relations (2.34) et (2.35).

$$\sigma^I = \Sigma + \mathbf{C}^o : (\mathbf{S}^E - \mathbf{I}) : \varepsilon^{L*} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon^I = \mathbb{E} + \mathbf{S}^E : \varepsilon^{L*} \quad (2.35)$$

soit :

$$\varepsilon^{L*} = \mathbf{S}^{E^{-1}} : (\varepsilon^I - \mathbb{E}) \quad (2.36)$$

En réinjectant ceci dans l'équation (2.34), on obtient :

$$\sigma^I = \Sigma + \mathbf{C}^* : (\mathbb{E} - \varepsilon^I) \quad (2.37)$$

en notant  $\mathbf{C}^*$  le tenseur d'influence de Hill défini par la relation (2.38) :

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^o : (\mathbf{S}^{E^{-1}} - \mathbf{I}) \quad (2.38)$$

### 2.3.1.3 Comportement effectif

Si on se ramène maintenant au problème de l'hétérogénéité élastique<sup>2</sup>, le comportement vérifie :

$$\sigma^I = \mathbf{C}^I : \varepsilon_I^e = \mathbf{C}^I : \varepsilon^I \quad (2.39)$$

Le comportement macroscopique vérifie :

$$\Sigma = \mathbf{C}^{\text{eff}} : \mathbb{E} \quad (2.40)$$

De l'équation (2.37), on tire :

$$\mathbf{C}^I : \varepsilon^I = \mathbf{C}^{\text{eff}} : \mathbb{E} + \mathbf{C}^* : (\mathbb{E} - \varepsilon^I) \quad (2.41)$$

soit :

$$\varepsilon^I = (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) : \mathbb{E} \quad (2.42)$$

qui peut également s'écrire, en utilisant l'équation (2.39) :

$$\sigma^I = \mathbf{C}^I : (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) : \mathbb{E} \quad (2.43)$$

Comme  $\langle \varepsilon^I \rangle = \mathbb{E}$ , l'équation (2.42) impose :

$$\langle (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) \rangle = \mathbf{I} \quad (2.44)$$

soit encore :

$$(\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*)^{-1} = \langle (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} \rangle \quad (2.45)$$

Cette approche permet également de définir deux opérateurs d'ordre 4 :

- Le tenseur de localisation des déformations  $\mathbf{A}^I$ , déduit de l'équation (2.42) :

$$\mathbf{A}^I = (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) \quad (2.46)$$

Cet opérateur permet de relier une déformation macroscopique à la déformation associée dans le grain de modules  $\mathbf{C}^I$  :

$$\varepsilon^I = \mathbf{A}^I : \mathbb{E} \quad (2.47)$$

N.B.: Dans le cas de l'approximation de Voigt :  $\mathbf{A}^I_{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$ .

- Le tenseur de concentration de contrainte  $\mathbf{B}^I$ , qui se déduit des équations (2.39), (2.40) et (2.47) :

$$\mathbf{B}^I = \mathbf{C}^I : \mathbf{A}^I : \mathbf{C}^{\text{eff}-1} \quad (2.48)$$

Cet opérateur permet de relier une contrainte macroscopique à la contrainte associée dans le grain de modules  $\mathbf{C}^I$  :

$$\sigma^I = \mathbf{B}^I : \Sigma \quad (2.49)$$

N.B.: Dans le cas de l'approximation de Reuss :  $\mathbf{B}^I_{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$ .

En fonction du milieu de référence  $\mathbf{C}^o$  choisi pour le calcul du tenseur de Hill (équation (2.38)), il est possible de calculer, à partir de la relation (2.45), différentes estimations du comportement effectif du polycristal.

---

2. La déformation considérée est purement élastique :  $\varepsilon_I^e = \varepsilon^I$ .

#### 2.3.1.4 Estimations de Hashin et Shtrikman

L'estimation supérieure de Hashin et Shtrikman s'obtient en utilisant pour milieu de référence un milieu isotrope dont le module de cisaillement est le module de cisaillement maximal du monocristal.

L'estimation inférieure s'obtient en choisissant un milieu isotrope dont le module de cisaillement est le module de cisaillement minimal.

Ces estimations constituent un encadrement du comportement effectif du polycristal [Bornert et al., 2001a].

#### 2.3.1.5 Modèle auto-cohérent

Une modélisation auto-cohérente, bien adaptée à la microstructure des matériaux polycristallins, est présentée ici.

On recherche le milieu homogène équivalent (MHE) au matériau hétérogène étudié, c'est à dire le milieu homogène qui se comporte macroscopiquement de la même façon. Le modèle auto-cohérent consiste à considérer chaque phase du matériau comme une hétérogénéité élastique dans le MHE. On choisit alors comme milieu de référence, pour le calcul du tenseur de Hill, le MHE lui-même :

$$\mathbf{C}^o = \mathbf{C}^{\text{eff}} \quad (2.50)$$

La contrainte macroscopique s'écrit alors (en utilisant l'équation (2.43)) :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \sigma^I \rangle \\ &= \langle \mathbf{C}^I : (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) : \mathbb{E} \rangle \\ &= \langle \mathbf{C}^I : (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) \rangle : \mathbb{E} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Le tenseur des modules effectifs du matériau homogène équivalent au polycristal vérifie donc la relation (2.52), qui est une autre écriture de l'équation (2.45) :

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = \langle \mathbf{C}^I : (\mathbf{C}^I + \mathbf{C}^*)^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*) \rangle \quad (2.52)$$

Il est à noter que cette équation est implicite ( $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  figure dans la définition de  $\mathbf{C}^*$ ) et que sa résolution nécessite dans le cas général le recours à un processus itératif.

Dans le cas où le comportement macroscopique est isotrope (absence de texture), des simplifications importantes apparaissent dans la définition du comportement effectif. Il est alors possible de traiter le problème de façon analytique ou semi-analytique. Ce cas particulier est détaillé en annexe B.

#### 2.3.1.6 Modélisation par éléments finis

Une modélisation polycristalline par éléments finis a également été développée sous le logiciel CASTEM<sup>©</sup> [Daniel et al., 2001]. Chaque grain est représenté par un tétrakaidécaèdre (polyèdre dont les faces sont huit hexagones et six carrés). Un grain est constitué de 72 éléments tétraédriques à 4 nœuds (figure 2.10(a)). Le maillage est

ensuite constitué de l'assemblage de ces grains dans les trois directions de l'espace (voir figure 2.10(b)).

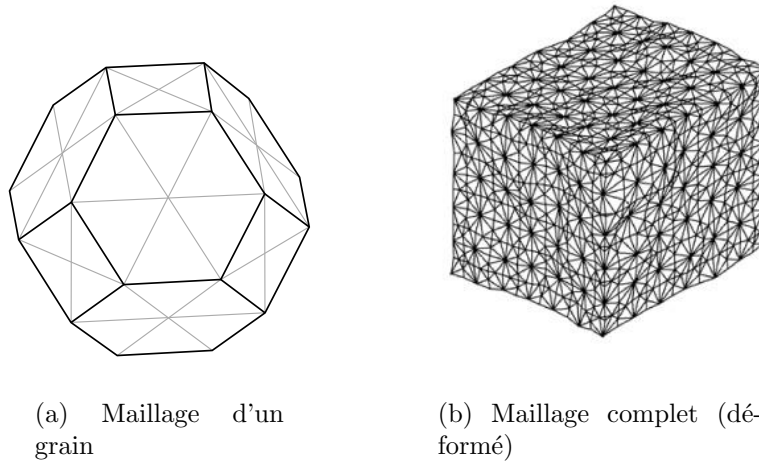


Figure 2.10 – *Modélisation par éléments finis*

Les conditions aux limites appliquées au maillage complet sont des conditions périodiques sur les faces en vis à vis. Afin de modéliser le comportement d'une tôle, il est possible de relâcher les conditions périodiques sur les faces perpendiculaires à l'axe vertical, et de les maintenir sur les autres faces.

Ce modèle permet, connaissant les propriétés élastiques de chaque grain, c'est à dire le tenseur de rigidité du monocristal et la texture, de remonter au comportement effectif du VER.

### 2.3.1.7 Comparaison des différentes modélisations

Les différentes méthodes exposées ci-dessus ont été comparées, sur une texture particulière (FDO à 396 grains) dont la figure de pôles est donnée par la figure 3.17. Les paramètres matériau choisis sont ceux du monocristal de fer pur donnés au tableau 2.1. La modélisation par éléments finis correspond à une tôle (deux surfaces opposées du VER sont libres) avec cinq grains dans l'épaisseur.

On constate tout d'abord sur la figure 2.11 que les estimations de Voigt et Reuss, comme c'est souvent le cas, sont assez éloignées. Elles ne permettent pas de définir de façon très précise le comportement effectif. Les estimations de Hashin et Shtrikman, autocohérente et par éléments finis sont en revanche assez proches. La méthode par éléments finis ne sera pas utilisée dans la suite de ce document en raison des temps de calcul importants qui lui sont associés. Les temps de calculs associés aux autres méthodes sont en revanche très raisonnables, un peu plus longs dans le cas de la méthode autocohérente en raison de la nécessité de recourir à un processus itératif. La méthode autocohérente, réputée bien adaptée à la description du comportement des polycristaux, sera souvent privilégiée dans la suite de ce document. Elle est en effet compatible avec la microstructure des matériaux polycristallins - y compris

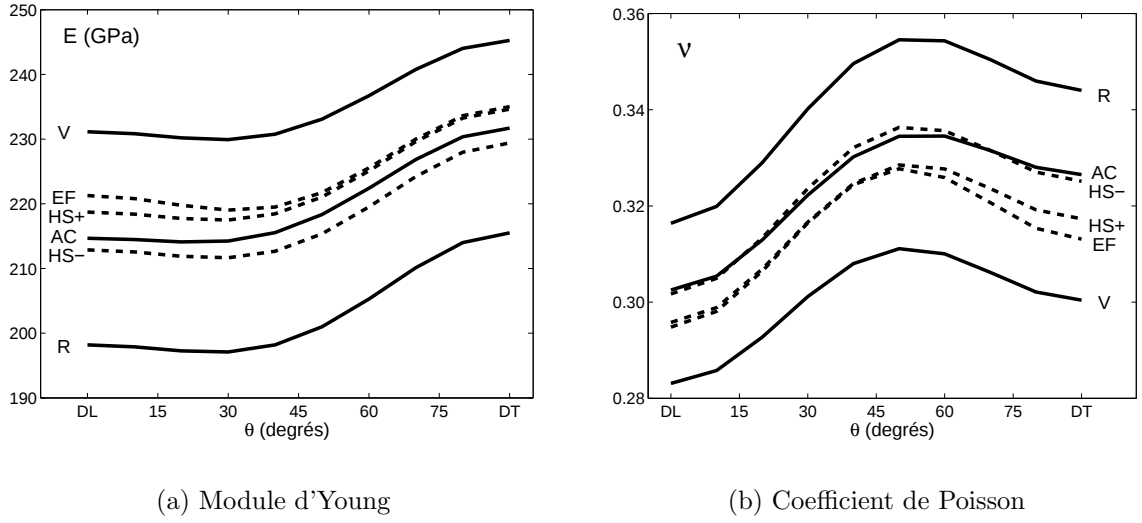


Figure 2.11 – Comparaison de différentes modélisations : Voigt (V), Reuss (R), Hashin et Shtrikman supérieure et inférieure (HS+ et HS-), autocohérent (AC) et éléments finis (EF)

texturés - considérés dans ce document, avec des grains en première approximation équiaxes et dont l'orientation cristalline est spatialement décorrélée.

### 2.3.2 Comportement magnétique

Comme pour le comportement mécanique, l'objectif est de trouver un opérateur  $\chi^{\text{eff}}$  qui relie le champ magnétique extérieur à l'aimantation du matériau :

$$\vec{M}_m = \chi^{\text{eff}} \vec{H}_{\text{ext}} \quad (2.53)$$

#### 2.3.2.1 Comportement linéaire

Dans le cas d'un comportement magnétique linéaire, il est possible de procéder de façon analogue à ce qui a été vu pour le comportement élastique. Les premiers résultats concernant l'homogénéisation du comportement magnétique sont d'ailleurs intervenus antérieurement aux développements correspondants en élasticité. Ainsi, les bornes de Hashin et Shtrikman ont été développées pour déterminer la perméabilité effective des matériaux magnétiques<sup>3</sup> ([Hashin et Shtrikman, 1961], [Hashin et Shtrikman, 1962b]), avant d'être étendues au cas de l'élasticité ([Hashin et Shtrikman, 1962a], [Hashin et Shtrikman, 1962c]). On peut également développer des modèles de type autocohérent<sup>4</sup> ([Bruggeman, 1935], [Stroud, 1975] (pour les milieux diélectriques), [Vinogradov et al., 1989], [Rousselle et al., 1993], [Bariou et al., 2001]). La définition du problème est moins complexe dans le cas du comportement magnétique dans la mesure où les variables d'état sont des vecteurs (au lieu de tenseurs d'ordre 2 en mécanique). Les tenseurs d'ordre 4 intervenant dans la définition

3. le raisonnement pouvant s'appliquer à d'autres comportements régis par le même type d'équations (diffusion, conduction électrique, thermique, ...).

4. en général désignés par EMA : Effective Medium Approximation.

des lois de comportement mécanique sont donc remplacés en magnétisme par des tenseurs d'ordre 2.

On peut ici aussi établir des bornes de type Voigt et Reuss (dites bornes de Wiener supérieure et inférieure [Wiener, 1912]). Pour la première, on suppose que le champ magnétique est homogène dans le matériau ( $\vec{H}^I = \vec{H}_{\text{ext}}$ ). On a alors :

$$\vec{M}_{\text{m}} = \langle \vec{M}^I \rangle = \langle \chi^I \vec{H}^I \rangle = \langle \chi^I \vec{H}_{\text{ext}} \rangle = \langle \chi^I \rangle \vec{H}_{\text{ext}} \quad (2.54)$$

On définit donc :

$$\chi_+^{\text{eff}} = \langle \chi^I \rangle \quad (2.55)$$

Pour établir une borne inférieure, on suppose que l'aimantation est homogène dans le matériau ( $\vec{M}^I = \vec{M}_{\text{m}}$ ). On écrit alors :

$$\vec{H}_{\text{ext}} = \langle \vec{H}^I \rangle = \langle \chi^{I-1} \vec{M}^I \rangle = \langle \chi^{I-1} \vec{M}_{\text{m}} \rangle = \langle \chi^{I-1} \rangle \vec{M}_{\text{m}} \quad (2.56)$$

On définit donc :

$$\chi_-^{\text{eff}} = \langle \chi^{I-1} \rangle^{-1} \quad (2.57)$$

Afin d'établir des estimations de type Hashin et Shtrikman ou autocohérente, on peut ici aussi s'intéresser au problème de l'inclusion (figure 2.12). Nous nous limiterons ici à un comportement magnétique isotrope macroscopiquement.

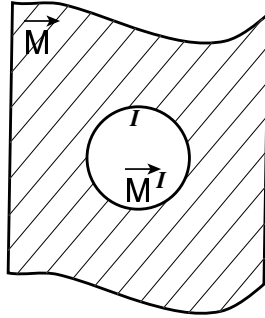


Figure 2.12 – Problème d'inclusion magnétique

On considère une sphère magnétique d'aimantation uniforme  $\vec{M}^I$  et de susceptibilité  $\chi^I$  placée dans un milieu isotrope infini de susceptibilité  $\chi^o$ . On cherche à définir le champ local  $\vec{H}^I$  dans l'inclusion, différent du champ magnétique appliqué  $\vec{H}_{\text{ext}}$ . On divise classiquement  $\vec{H}^I$  en deux contributions : le champ extérieur  $\vec{H}_{\text{ext}}$  qui constitue le chargement magnétique, et le champ démagnétisant  $\vec{H}_d^I$  provoqué par les variations spatiales de l'aimantation :

$$\vec{H}^I = \vec{H}_{\text{ext}} + \vec{H}_d^I \quad (2.58)$$

Cette relation est analogue à la relation (2.34) obtenue pour le comportement élastique. Comme  $\vec{H}_{\text{ext}} = \langle \vec{H}^I \rangle$ , on a :

$$\langle \vec{H}_d^I \rangle = \vec{0} \quad (2.59)$$

La relation de comportement de l'inclusion s'écrit :

$$\vec{M}^I = \chi^I \vec{H}^I \quad (2.60)$$

Si le comportement est isotrope, la relation de comportement de la matrice s'écrit :

$$\vec{M}^{\circ} = \chi^{\circ} \vec{H}_{\text{ext}}, \quad \chi^{\circ} \in \mathbb{R} \quad (2.61)$$

La résolution du problème de magnétostatique indique que le champ magnétique dans la sphère s'écrit :

$$\vec{H}^{\text{I}} = \vec{H}_{\text{ext}} + \frac{1}{3 + 2\chi^{\circ}} (\vec{M}^{\circ} - \vec{M}^{\text{I}}) \quad (2.62)$$

En utilisant les définitions (2.60) et (2.61), l'équation (2.62) peut s'écrire :

$$\vec{H}^{\text{I}} = 3(1 + \chi^{\circ}) \left( (3 + 2\chi^{\circ})\mathbb{I} + \chi^{\text{I}} \right)^{-1} \vec{H}_{\text{ext}} \quad (2.63)$$

Dans le cas où le comportement de l'inclusion est également isotrope ( $\chi^{\text{I}} = \chi^{\text{I}}\mathbb{I}$ ), cette relation s'écrit aussi :

$$\vec{H}^{\text{I}} = \frac{3 + 3\chi^{\circ}}{3 + \chi^{\text{I}} + 2\chi^{\circ}} \vec{H}_{\text{ext}} \quad (2.64)$$

Le comportement effectif d'un polycristal peut être défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{m}} &= \langle \vec{M}^{\text{I}} \rangle \\ &= \langle \chi^{\text{I}} \vec{H}^{\text{I}} \rangle \\ &= \langle 3\chi^{\text{I}}(1 + \chi^{\circ}) \left( (3 + 2\chi^{\circ})\mathbb{I} + \chi^{\text{I}} \right)^{-1} \vec{H}_{\text{ext}} \rangle \\ &= \langle 3\chi^{\text{I}}(1 + \chi^{\circ}) \left( (3 + 2\chi^{\circ})\mathbb{I} + \chi^{\text{I}} \right)^{-1} \rangle \vec{H}_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

On définit ainsi :

$$\chi^{\text{eff}} = 3(1 + \chi^{\circ}) \langle \chi^{\text{I}} \left( (3 + 2\chi^{\circ})\mathbb{I} + \chi^{\text{I}} \right)^{-1} \rangle \quad (2.66)$$

Il est possible de construire différentes estimations du comportement d'un polycristal suivant le milieu de référence choisi, c'est à dire suivant la susceptibilité  $\chi^{\circ}$  de la matrice.

Des bornes de type Hashin et Shtrikman peuvent être obtenues en choisissant successivement pour milieu de référence :

$$\begin{cases} \chi_{+}^{\circ} = \sup \left( \frac{\|\chi^{\text{I}} \vec{H}\|}{\|\vec{H}\|} \right) \\ \chi_{-}^{\circ} = \inf \left( \frac{\|\chi^{\text{I}} \vec{H}\|}{\|\vec{H}\|} \right) \end{cases} \quad (2.67)$$

Les matériaux polycristallins considérés ici sont en première approximation constitués de grains équiaxes avec un effet de voisinage supposé négligeable sur les orientations cristallines de grains connexes. L'approche autocohérente, alors bien adaptée consiste à supposer que chaque phase du matériau se comporte comme une sphère

magnétique dans le milieu infini homogène équivalent au polycristal. On définit alors (d'après l'équation (2.66)):

$$\chi^{\text{eff}} = 3(1 + \chi^{\text{eff}}) \cdot \chi^{\text{I}} \left( (3 + 2\chi^{\text{eff}})\mathbb{I} + \chi^{\text{I}} \right)^{-1} > \quad (2.68)$$

Si le comportement magnétique de chaque inclusion est de plus isotrope, on trouve la relation (2.69) :

$$\chi^{\text{eff}} = \chi^{\text{I}} \frac{3 + 3\chi^{\text{eff}}}{3 + \chi^{\text{I}} + 2\chi^{\text{eff}}} > \quad (2.69)$$

Cette relation classique est en général écrite pour la perméabilité  $\mu^{\text{eff}}$  : on la retrouve facilement en remplaçant  $\chi$  par  $(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)$ .

Les équations (2.68) comme (2.69) sont des équations implicites et nécessitent en général le recours à un processus itératif pour déterminer la susceptibilité équivalente. Ces deux relations, en raison des hypothèses faites, définissent un milieu effectif isotrope.

On peut cependant remarquer que le cadre linéaire est rapidement limité lorsqu'il s'agit de modéliser le comportement magnétique anisotrope de polycristaux. En effet, la symétrie cubique se réduit, concernant la susceptibilité magnétique, à l'isotropie. Dans le cas général, le tenseur de susceptibilité présente 9 composantes :

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Exprimons ce tenseur, dans le cas du monocristal, dans le repère cristallographique. Les directions [100], [010] et [001] sont magnétiquement équivalentes, ce qui impose  $\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33}$ . Ces trois directions sont des axes de symétrie. Quand le champ magnétique est appliqué suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ , l'aimantation lui est donc parallèle. Cette condition impose  $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{21} = \chi_{23} = \chi_{31} = \chi_{32} = 0$ . La symétrie cubique se réduit donc à l'isotropie<sup>5</sup>, puisque le comportement magnétique du monocristal est défini par une constante scalaire. Dans ces conditions, l'hétérogénéité du problème d'homogénéisation posé disparaît, puisqu'on définit un polycristal comme un ensemble de cristaux isotropes ayant tous la même susceptibilité. Le comportement magnétique effectif est donc indépendant de la texture et est identique au comportement du monocristal. La définition de l'anisotropie d'un monocristal cubique, et ses conséquences sur l'anisotropie macroscopique du polycristal, passe donc par la définition d'un tenseur de susceptibilité dont les composantes dépendent de la direction du champ (en raison de la non linéarité des courbes d'aimantation dans une direction donnée, elles dépendent également de sa norme), c'est à dire par l'écriture d'un comportement non-linéaire :

$$\vec{M} = \chi(\vec{H}) \vec{H} \quad (2.71)$$

---

5. La susceptibilité magnétique est en cela analogue au module de compressibilité en élasticité.

### 2.3.2.2 Comportement non-linéaire

Dans le cas de comportements non-linéaires, la définition du comportement effectif devient beaucoup plus difficile et reste encore un sujet relativement ouvert.

La première idée est de développer des approches tangentes ou sécantes, par exemple inspirées de celles développées pour les comportements mécaniques non-linéaires ([Kröner, 1961],[Hill, 1965], [Berveiller et Zaoui, 1978]). Ces approches sont dites approches en champ moyen [Bornert et al., 2001b]. On tente alors de se ramener à un problème linéaire en choisissant, pour la résolution du problème de l'inclusion, une matrice ayant un comportement linéaire. Le choix des modules de la matrice permet de construire différentes estimations du comportement effectif. Cependant, les progrès récents dans les techniques d'homogénéisation des comportements non linéaires ont permis de montrer certaines limites de ces approches. Notamment, il arrive dans certaines conditions que le comportement prédit viole certaines bornes pour le comportement effectif [Gilormini, 1995].

Ces bornes sont obtenues par une autre approche, dite approche par les potentiels [Bornert et al., 2001b]. Elle consiste, par l'application de procédures variationnelles, à dériver l'écriture d'un potentiel macroscopique pour le matériau à partir de l'écriture d'un potentiel thermodynamique à l'échelle locale ([Ponte-Castañeda, 1992a], [Ponte-Castañeda, 1992b], [Suquet et Ponte-Castañeda, 1993]). On utilise ensuite différents milieux linéaires de comparaison (en général hétérogènes) qui permettent d'établir des estimations ou des bornes pour le comportement non linéaire effectif. On cherche ici aussi à transformer le problème non-linéaire en problème(s) linéaire(s). Ces approches par les potentiels ont été notamment appliquées par Ponte-Castañeda et al. ([Ponte-Castañeda et al., 1992] [Ponte-Castañeda et Kailasam, 1997]) ou Pellegrini [Pellegrini, 2001] pour la prévision de la conductivité électrique de matériaux composites non linéaires. Ces applications, encore récentes, se limitent souvent au cas de constituants isotropes, dont le comportement dérive d'un potentiel relativement simple (souvent en loi puissance). L'extension au cas anisotrope, possible formellement sans développements supplémentaires, conduit souvent dans la pratique à une augmentation sensible de la complexité des calculs (comme c'est déjà le cas pour le comportement linéaire). De façon plus fondamentale, la pertinence des résultats obtenus est directement reliée au choix du potentiel qui régit le comportement du matériau, et à sa capacité à décrire les mécanismes physiques mis en jeu.

Dans l'application qui nous intéresse ici, la difficulté réside principalement dans l'écriture d'un potentiel pertinent pour le comportement magnéto-élastique. Ce potentiel doit en effet rendre compte à la fois de la très forte anisotropie du comportement local, et surtout de l'effet d'une contrainte sur la perméabilité, c'est à dire intégrer naturellement les phénomènes de couplages magnéto-élastiques. En l'absence - pour le moment - d'un tel potentiel, les développements dans ce sens n'ont pas été poursuivis. On peut cependant penser que l'application de ces principes variationnels aux problèmes magnéto-élastiques conduirait à une amélioration sensible, d'un point de vue quantitatif, de la description du comportement macroscopique.

Nous nous limiterons ici à une vision plus rudimentaire du problème non-linéaire en considérant dans un premier temps que le champ magnétique est homogène dans le matériau, ce qui correspond à l'hypothèse de Voigt. Nous développerons ensuite,

au chapitre 4, une approche qui reprend les résultats obtenus dans le cas linéaire pour les transposer au cas non-linéaire à travers une approche autocohérente sécante.

### 2.3.3 Effets couplés

La description des phénomènes magnéto-élastiques couplés nécessite l'utilisation combinée des modélisations mécanique et magnétique.

Afin d'appliquer le modèle microscopique détaillé au paragraphe 2.2.3, il est tout d'abord nécessaire de définir, à partir du chargement macroscopique ( $\mathbb{\Sigma}$  et  $\vec{H}_{\text{ext}}$ ) le chargement local vu par un grain ( $\sigma^I$  et  $\vec{H}^I$ ) (étape de localisation).

Concernant la contrainte, on définit :

$$\sigma^I = \mathbf{B}^I : \mathbb{\Sigma} + \mathbf{C}^I : (\mathbf{S}^E - \mathbf{I}) : \varepsilon_I^\mu \quad (2.72)$$

Le premier terme du second membre de la relation (2.72) est associé à l'effet d'un chargement mécanique macroscopique  $\mathbb{\Sigma}$ , et correspond à la solution du problème purement élastique défini par l'équation (2.49). Le deuxième terme est la contrainte liée aux incompatibilités de déformations associées à la déformation de magnétostriction moyenne dans le grain. Elle est directement reliée à la déformation élastique d'accommodation dans l'inclusion :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{incomp}} &= \mathbf{C}^I : \varepsilon_{\text{incomp}}^e \\ &= \mathbf{C}^I : (\mathbf{S}^E - \mathbf{I}) : \varepsilon_I^\mu \end{aligned} \quad (2.73)$$

De la même façon, on définit le champ magnétique local avec une équation du type :

$$\vec{H}^I = \vec{H}_{\text{ext}} + \vec{H}_d^I \quad (2.74)$$

Une fois le chargement magnétique local connu ( $\sigma^I$ ,  $\vec{H}^I$ ), on peut appliquer le modèle microscopique afin de définir la réponse locale ( $\varepsilon^I$ ,  $\vec{M}^I$ ). On écrit pour la déformation locale la partition suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_I^e + \varepsilon_I^\mu \\ &= \mathbf{C}^{I-1} : (\mathbf{B}^I : \mathbb{\Sigma}) + \varepsilon_{\text{incomp}}^e + \varepsilon_I^\mu \\ &= \mathbf{C}^{I-1} : (\mathbf{B}^I : \mathbb{\Sigma}) + \mathbf{S}^E : \varepsilon_I^\mu \end{aligned} \quad (2.75)$$

Il ne reste plus alors qu'à définir la réponse macroscopique du matériau. On définit tout d'abord l'aimantation macroscopique  $\vec{M}_{\mathbf{m}}$  :

$$\vec{M}_{\mathbf{m}} = \frac{1}{V} \int_{\text{VER}} \vec{M} dV = \langle \vec{M}^I \rangle \quad (2.76)$$

On définit également la déformation macroscopique :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{V} \int_{\text{VER}} \varepsilon dV = \langle \varepsilon^I \rangle \quad (2.77)$$

pour laquelle on réalise la partition suivante, qui superpose l'effet de l'application d'une contrainte macroscopique  $\Sigma$  et l'effet de la déformation de magnétostriction [François et al., 1995] :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \mathbb{E}^e + \mathbb{E}^\mu \\ &= \mathbf{C}^{\text{eff}^{-1}} : \Sigma + \langle {}^T \mathbf{B}^{\mathbf{I}} : \varepsilon_I^\mu \rangle\end{aligned}\tag{2.78}$$

La déformation de magnétostriction  $\mathbb{E}^\mu$  est ainsi obtenue, et l'effet des contraintes sur l'aimantation est naturellement pris en compte dans le modèle microscopique à travers l'énergie magnéto-élastique (équation (2.6)).

La solution du problème couplé nécessite aussi le recours à un processus itératif puisque la contrainte locale dépend de la déformation de magnétostriction, qui dépend elle-même de l'état de contraintes.

### 2.3.4 Conclusion

Cette deuxième étape permet donc de réaliser la deuxième transition d'échelles entre celle du grain et celle du polycristal. Notons que durant cette phase, les hétérogénéités au sein d'un grain sont ignorées. Seules les grandeurs moyennes par grain ( $\vec{H}^{\mathbf{I}}, \sigma^{\mathbf{I}}, \vec{M}^{\mathbf{I}}, \varepsilon_I^\mu$ ) contribuent à définir le comportement macroscopique. Il est cependant possible de remonter aux hétérogénéités intra-granulaires en utilisant les résultats du modèle microscopique, même si ces résultats ne sont que partiels (orientation de l'aimantation dans les familles de domaines et proportions relatives de ces domaines).

Les équations à résoudre pour obtenir le comportement macroscopique sont implicites. Il est donc en général nécessaire d'avoir recours à un schéma itératif pour en obtenir les solutions. Dans le cas d'un polycristal macroscopiquement isotrope du point de vue mécanique, de nombreuses simplifications apparaissent et il est possible de dégager dans certaines conditions d'aimantation des solutions analytiques. Ce cas particulier est présenté en annexe B. L'algorithme de calcul utilisé dans le cas général est présenté en annexe C

## 2.4 Effets macroscopiques

Une fois le comportement du VER caractérisé, la dernière échelle à atteindre est celle de la structure. A cette échelle, la géométrie des pièces prend une place fondamentale dans la résolution des équations d'équilibre. On rappelle qu'on ne s'intéresse pas ici aux caractéristiques de structures de géométries particulières, mais aux propriétés intrinsèques des matériaux. Cependant, les matériaux ferromagnétiques utilisés dans le domaine du génie électrique se présentent le plus souvent sous forme de tôles. Ceci introduit un effet de structure systématique - l'existence de deux surfaces libres - qu'il pourra être intéressant d'introduire directement dans la loi de comportement.

### 2.4.1 Effet de surface

L'utilisation de matériaux sous forme de tôles introduit un effet de structure dont l'échelle est très proche de l'échelle de la microstructure.

Si l'on note  $\phi$  la taille de grain moyenne d'un polycristal, et  $e$  l'épaisseur de la tôle considérée, le rapport  $\frac{e}{\phi}$  définit le nombre moyen de grains dans l'épaisseur de la tôle. Si ce nombre est faible, un effet de surface peut avoir une forte importance sur le comportement du matériau. Le comportement magnétique est en effet affecté par l'existence de surfaces libres. En particulier, certaines directions de facile aimantation peuvent être rendues difficiles en raison de la présence d'une surface libre.

De plus, toujours en fonction de la valeur du rapport  $\frac{e}{\phi}$ , la séparation d'échelles entre l'échelle du VER et l'échelle de la structure n'est pas forcément très nette. Dans certains cas, on ne compte que quelques grains dans l'épaisseur de la tôle, voire même toute l'épaisseur de la tôle ne sera constituée que d'un seul grain - c'est le cas pour les tôles GO.

Une proposition de modélisation de l'effet de surface sera présentée au chapitre 4.

### 2.4.2 Effets liés au procédé de fabrication

Par ailleurs, le procédé de fabrication des tôles (laminage) a une influence directe sur la texture des matériaux élaborés. Là aussi, un effet de surface peut apparaître. Les conditions aux limites appliquées au matériau ne sont pas uniformes à travers l'épaisseur de la tôle. En particulier, les surfaces libres, en contact avec les cylindres de laminage, ne voient pas le même chargement mécanique que les "zones en volume". Ceci introduit un gradient de texture à travers l'épaisseur de la tôle qui sera mis en évidence expérimentalement au chapitre 3.

### 2.4.3 Effets de géométrie

Enfin, le dernier effet macroscopique à signaler, est quant à lui un réel effet de structure lié à la géométrie des pièces étudiées. Si ce point a peu d'importance dans la définition d'une loi de comportement pour le matériau, il est important lorsqu'il s'agit de comparer les résultats expérimentaux et numériques. La géométrie des éprouvettes employées revêt alors une grande importance.

A l'effet de forme sur les mesures de magnétostriction évoqué au paragraphe 1.2.3.1, il faut ajouter l'effet d'un champ démagnétisant macroscopique qui affecte également les mesures magnétiques.

Considérons un solénoïde de longueur  $L$  suivant une direction  $\vec{x}$ , formé de  $N$  spires, et parcouru par un courant  $I$ , le champ magnétique créé au centre de ce solénoïde, s'écrit, en vertu du théorème d'Ampère :

$$\vec{H}_0 = \frac{N \cdot I}{L} \vec{x} \quad (2.79)$$

Si on place maintenant un échantillon ferromagnétique dans ce solénoïde, le champ  $\vec{H}_{\text{ext}}$  vu par le matériau (qui est la valeur moyenne du champ magnétique

au sein du matériau) est différent de  $\vec{H}_0$  en raison de l'apparition d'un champ démagnétisant macroscopique, lié à la géométrie de l'échantillon. Celui-ci a tendance à s'opposer à  $\vec{H}_0$ . Lors du dépouillement d'essais magnétiques ou magnétostrictifs, il faut donc être vigilant à la définition du chargement magnétique macroscopique  $\vec{H}_{\text{ext}}$ . Le dispositif expérimental présenté au chapitre 4 est calibré de manière à s'affranchir de ce phénomène [Gourdin, 1998] (à l'aide de mesures directes de  $\vec{H}_{\text{ext}}$  dans l'air).

## 2.5 Conclusion

On a cherché à expliciter dans ce chapitre les différents mécanismes et les différentes échelles prenant part à la définition du comportement magnéto-élastique des matériaux ferromagnétiques. Une approche multi-échelle de modélisation de ce comportement a été proposée. Le comportement est tout d'abord décrit à l'échelle des domaines magnétiques, par la définition de l'énergie libre d'un domaine magnétique. Le comportement à l'échelle du monocristal est décrit à l'aide du modèle microscopique proposé par [Buiron, 2000]. Une stratégie de changement d'échelle est ensuite proposée pour en déduire le comportement macroscopique.

L'étape suivante consiste à identifier les paramètres de la modélisation sur des matériaux réels. Une fois ce travail d'identification effectué, des essais de validation macroscopiques sont nécessaires pour évaluer les aptitudes et les limites de la modélisation proposée.

Ces étapes réclament des développements expérimentaux qui font l'objet du prochain chapitre. On s'intéressera plus particulièrement aux tôles dites à grains non-orientés (NO), largement utilisées en construction électrique.



# Chapitre 3

## Identification des paramètres du modèle et premiers essais de validation

### Sommaire

---

|            |                                                                      |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Propriétés du monocristal . . . . .</b>                           | <b>49</b> |
| 3.1.1      | Données bibliographiques . . . . .                                   | 49        |
| 3.1.2      | Identification des coefficients élastiques . . . . .                 | 49        |
| <b>3.2</b> | <b>Identification du paramètre <math>A_s</math> . . . . .</b>        | <b>56</b> |
| 3.2.1      | Cas du monocristal . . . . .                                         | 56        |
| 3.2.2      | Cas du polycristal . . . . .                                         | 60        |
| <b>3.3</b> | <b>Propriétés du polycristal . . . . .</b>                           | <b>64</b> |
| <b>3.4</b> | <b>Mise au point d'essais de validation macroscopiques . . . . .</b> | <b>67</b> |
| 3.4.1      | Caractérisation des propriétés mécaniques . . . . .                  | 67        |
| 3.4.2      | Caractérisation des propriétés magnétiques . . . . .                 | 70        |
| 3.4.3      | Caractérisation des propriétés magnéto-élastiques . . . . .          | 73        |
| <b>3.5</b> | <b>Premières comparaisons modèle-essais . . . . .</b>                | <b>82</b> |
| 3.5.1      | Comportement mécanique . . . . .                                     | 82        |
| 3.5.2      | Comportement magnétique . . . . .                                    | 83        |
| 3.5.3      | Comportement magnéto-élastique . . . . .                             | 87        |
| <b>3.6</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                                          | <b>89</b> |

---

On se concentre ici sur les alliages de fer-silicium dits à grains non-orientés (NO). Ces alliages sont utilisés dans la construction de machines électriques de moyenne et haute puissance. Ils se présentent sous forme de tôles minces (d'épaisseur en général inférieure au millimètre). Les alliages étudiés dans ce chapitre contiennent 3% de Silicium. Cet ajout de silicium a plusieurs effets sur les propriétés du matériau [Hubert, 1998] :

- Augmentation de la résistivité électrique, qui entraîne une diminution de l'intensité des courants de Foucault et des pertes d'énergie dynamiques. C'est un effet recherché.
- Diminution de la constante d'anisotropie magnétocristalline  $K_1$ .
- Modification des coefficients magnéto-élastiques  $\lambda_{100}$  et  $\lambda_{111}$ .
- Formation de précipités, qui tendent à piéger les impuretés.
- Amélioration de l'aptitude à la découpe.

D'autres éléments d'alliages ou impuretés, comme l'aluminium, le carbone, le soufre ou le manganèse, sont également présents, mais en quantité moindre.

Ces matériaux sont obtenus par une succession de laminages et de recuits. C'est au cours de ce procédé de fabrication qu'apparaît la texture cristallographique. Toutes les orientations cristallographiques ne sont pas équiprobables, et certaines orientations du réseau cristallin sont en quantité plus importante que d'autres au sein du matériau. Ces propriétés de texture, qui expliquent l'anisotropie du comportement macroscopique, ont une grande influence sur le comportement magnéto-élastique.

Afin de modéliser ce comportement à l'aide du modèle présenté au chapitre précédent, il est nécessaire de connaître les paramètres nécessaires au calcul multi-échelle. Ces paramètres sont de trois types :

- les caractéristiques magnéto-élastiques du monocristal de fer à 3% de silicium, a priori différentes de celles du fer pur en raison des différences de composition. Les paramètres à connaître sont l'aimantation à saturation  $M_s$ , les constantes d'anisotropie magnétocristalline  $K_1$  et  $K_2$ , les constantes magnétostrictives  $\lambda_{100}$  et  $\lambda_{111}$ , et les coefficients élastiques  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{44}$  (cristal à symétrie cubique).
- la variable d'ajustement  $A_s$  (voir paragraphe 2.2.3).
- les caractéristiques macroscopiques, ici la texture, c'est à dire la fonction de distribution des orientations cristallographiques (FDO).

Une fois les ingrédients du modèle connus, il est nécessaire de réaliser des essais de validation. Il s'agit de confronter des résultats macroscopiques obtenus sur des essais aux prévisions du modèle.

## 3.1 Propriétés du monocristal

### 3.1.1 Données bibliographiques

Dans le cas du monocristal fer pur, les constantes physiques ont déjà été évaluées ou mesurées par de nombreux auteurs (voir tableau 2.1). En revanche, le monocristal de fer à 3% de Silicium, que nous essayons ici de caractériser, a été beaucoup moins étudié, en particulier par la communauté mécanicienne. L'importance du fer-silicium dans le domaine des machines électriques a conduit la communauté du magnétisme à l'étudier davantage. C'est donc dans les ouvrages traitant de magnétisme que l'on trouve l'essentiel des informations sur le monocristal de fer-silicium.

Différentes données, recueillies dans la littérature sont présentées dans le tableau 3.1.

| Constante                        | Valeur                                                   | Référence                                         |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $M_s$                            | $1,61.10^6$ A/m<br>$1,59.10^6$ A/m                       | [Bozorth, 1951]<br>[Cullity, 1972], [Jiles, 1991] |
| $(K_1; K_2)$                     | $(35;0)$ kJ/m <sup>3</sup><br>$(38;0)$ kJ/m <sup>3</sup> | [Bozorth, 1951], [Cullity, 1972]<br>[Jiles, 1991] |
| $(\lambda_{100}; \lambda_{111})$ | $(27; -5).10^{-6}$<br>$(23; -4,5).10^{-6}$               | [Bozorth, 1951]<br>[Jiles, 1991]                  |
| $(E_{100}, E_{110}, E_{111})$    | $(131,207,283)$ GPa<br>$(117,197,255)$ GPa               | [Astbury et DeBarr, 1948]<br>[Benford, 1946]      |

Tableau 3.1 – *Caractéristiques du monocristal de fer à 3% de silicium - Données bibliographiques*

Les données ainsi trouvées concernant le comportement élastique ( $E_{100}, E_{110}, E_{111}$ ) sont les modules d'Young suivant les directions cristallographiques  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$ . Ces trois grandeurs ne sont pas indépendantes et sont donc insuffisantes pour décrire le comportement du monocristal de fer-silicium (symétrie cubique).

Ce constat nous a conduit à mettre au point une procédure expérimentale d'identification des constantes élastiques du monocristal à partir d'essais de traction standard sur des échantillons multi-cristallins à gros grains.

### 3.1.2 Identification des coefficients élastiques

Dans le cas du Fer-Silicium, il existe des tôles fortement texturées dites à grains orientés (GO), avec un seul grain dans l'épaisseur de la tôle. Certaines de ces tôles présentent des tailles de grain de l'ordre du centimètre.

#### 3.1.2.1 Préparation des éprouvettes

Le matériau utilisé est une tôle de faible épaisseur (environ 0,29 mm), à gros grains, contenant 3,2% de silicium, et utilisé dans le cadre des travaux présentés

dans [Buvat, 2000].

Afin de révéler la position et la taille des grains, on procède à une attaque chimique. Les échantillons sont alternativement plongés dans un bain d'acide fluorhydrique et dans un bain d'acide chlorhydrique. Les grains apparaissent ainsi, visibles à l'œil nu (voir figure 3.1).

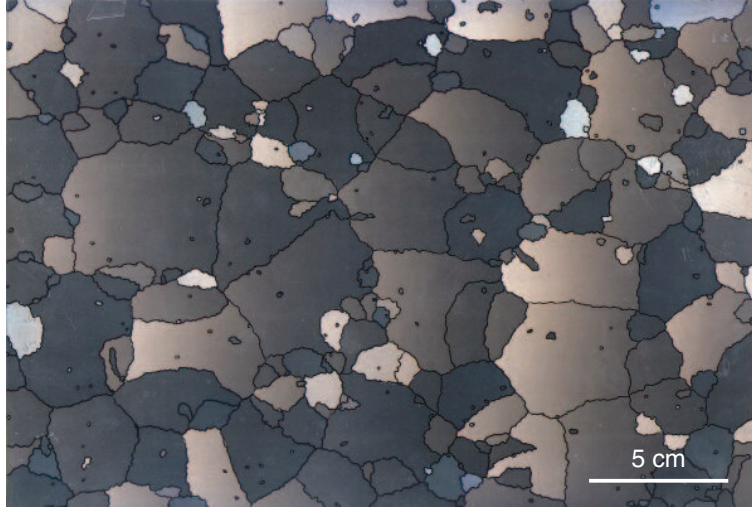


Figure 3.1 – Apparence d'une tôle GO après décapage [Buvat, 2000]

Il est possible de tailler des éprouvettes de manière à placer en leur centre un grain qui traverse toute la largeur et qui soit long de un ou deux centimètres. Ainsi, on trouve au centre de l'éprouvette une zone dont l'état mécanique est homogène. Lors d'un essai de traction, à l'aide d'une mesure des déformations dans la zone monocristalline, et d'une détermination a posteriori de l'orientation du cristal dans le repère de l'éprouvette (par exemple par mesure EBSD), il est possible de remonter aux propriétés élastiques du monocristal. Le principe de l'identification des coefficients élastiques est le suivant :

- Au cours d'un essai de traction (dans le domaine élastique), on déduit de mesures faites par jauges d'extensométrie les déformations ( $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ) dans le plan de tôle ("1" étant la direction de traction) et on déduit la contrainte  $\sigma$  ( $= \sigma_{11}$ ) de la mesure de la force. Certains termes du tenseur des souplesses apparent, dans le repère de la tôle, peuvent ainsi être déterminés :

$$\varepsilon = \mathbf{S} : \sigma \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} S_{11}^{\text{app}} = \frac{d\varepsilon_{11}}{d\sigma} \\ S_{12}^{\text{app}} = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\sigma} \\ S_{16}^{\text{app}} = \frac{d\varepsilon_{12}}{d\sigma} \end{cases} \quad (3.2)$$

où on utilise la convention de notation précisée au chapitre Notations au début de ce document.

- Le centre de l'éprouvette est ensuite découpé afin de pouvoir être introduit la chambre d'un Microscope Electronique à Balayage (MEB). L'orientation cristallographique du grain étudié est obtenue par mesure EBSD sous forme de ses 3 angles d'Euler ( $\varphi_1, \psi, \varphi_2$ ).
- Ces angles d'Euler permettent de déterminer la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  qui caractérise l'application  $\mathbf{R}$  permettant de passer du repère cristallographique au repère de l'éprouvette. On obtient ainsi une définition formelle des coefficients élastiques du monocristal dans le repère de l'éprouvette :

$$S_{ij}^o = \mathbf{R} [(s_{11}^o, s_{12}^o, s_{44}^o)], \quad (i,j) \in \mathcal{B}^2, \quad \mathcal{B} = \{1, \dots, 6\} \quad (3.3)$$

où  $S_{ij}^o$  désigne les composantes de la matrice des souplesses du monocristal exprimée dans le repère de l'éprouvette, et  $s_{ij}^o$  les composantes de cette matrice exprimée dans le repère cristallin ( $s_{11}^o, s_{12}^o$  et  $s_{44}^o$  sont les trois composantes indépendantes de  $\hat{\mathbf{s}}^o$ ).

- Les caractéristiques élastiques du monocristal sont théoriquement solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} S_{11}^{\text{app}} - S_{11}^o = 0 \\ S_{12}^{\text{app}} - S_{12}^o = 0 \\ S_{16}^{\text{app}} - S_{16}^o = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

- La réalisation de cette démarche pour plusieurs éprouvettes conduit à un système surdéterminé. Une procédure numérique d'optimisation permet ensuite de déterminer le jeu de coefficients élastiques qui respecte au mieux, au sens des moindres carrés, ce système.

A partir de trois tôles, dix éprouvettes de longueur 200 mm et de largeur 12,5 mm ont été découpées par électro-érosion (ce mode de découpe est adapté pour des tôles de cette épaisseur et permet de limiter les contraintes résiduelles induites par la découpe). Ces éprouvettes ont été prélevées dans le sens du laminage (DL), dans le sens transverse (DT), ou à  $45^\circ$ . L'inventaire des éprouvettes utiles et leurs caractéristiques sont présentés dans le tableau 3.2. Les largeurs ont été mesurées au pied à coulisse avec une précision de l'ordre du centième de millimètre.

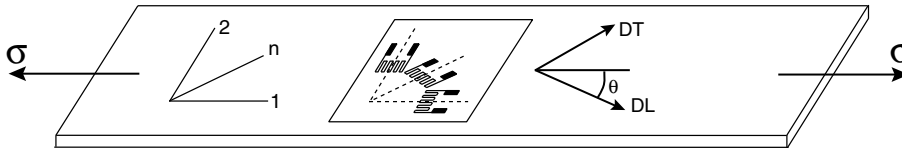
Afin de connaître précisément l'épaisseur de la tôle, un échantillon a été découpé et placé au microscope électronique à balayage. L'épaisseur de la tôle est estimée à  $e = 287 \mu\text{m}$  avec une précision de l'ordre du demi micron.

| Éprouvette | Direction de prélèvement | Largeur (mm) |
|------------|--------------------------|--------------|
| 1          | DL                       | 12,53        |
| 2          | DL                       | 12,54        |
| 3          | DL                       | 12,56        |
| 4          | DT                       | 12,41        |
| 5          | 45°                      | 12,54        |
| 6          | DT                       | 12,54        |

Tableau 3.2 – *Inventaire des éprouvettes de traction utiles*

### 3.1.2.2 Mesures par jauges d'extensométrie

Les éprouvettes sont instrumentées avec des jauges d'extensométrie triples (rosettes à 0, 45 et 90°) (voir figures 3.2 et 3.3).


Figure 3.2 – *Éprouvette GO à gros grains - largeur 12,4 mm*

Figure 3.3 – *Mesures par jauges d'extensométrie*

On réalise ensuite un essai de traction classique ("1" étant la direction de traction), comprenant plusieurs charges et décharges élastiques. On procède à l'acquisition des déformations  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{nn}$  et  $\varepsilon_{22}$  dans le plan de la tôle, dont on déduit les déformations  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  et  $\varepsilon_{22}$  ( $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{nn} - 0,5(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ ). Ces mesures permettent de remonter à une estimation des coefficients  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  et  $S_{61}$  de la matrice de souplesse  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ ) exprimée dans le repère de l'échantillon. Leurs valeurs sont données dans le tableau 3.3. On donne également les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson (apparents) auxquels correspondent ces valeurs. Ces résultats sont également liés au repère de l'éprouvette.

$$E^{\text{app}} = \frac{1}{S_{11}^{\text{app}}} \quad \text{et} \quad \nu^{\text{app}} = -\frac{S_{12}^{\text{app}}}{S_{11}^{\text{app}}} \quad (3.5)$$

En première approximation, compte-tenu des incertitudes de mesures sur les déformations, la force et les dimensions de l'éprouvette, les incertitudes sont estimées à 5% sur le module d'Young et 8% sur le coefficient de Poisson. Les données expérimentales sur le terme  $S_{61}^{\text{app}}$  ne sont pas exploitées. Elles ont en effet été obtenues à partir de jauges placées à 45° qui ont mesuré des déformations extrêmement faibles. Ces données sont donc considérées comme non fiables.

Il reste, pour remonter aux propriétés du monocristal à déterminer l'orientation du cristal dans chacune des éprouvettes testées.

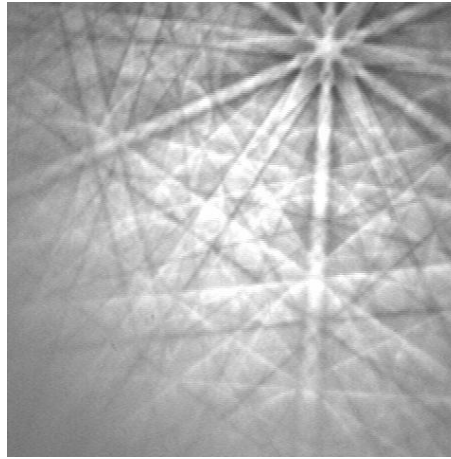
| Éprouvette | $S_{11}^{\text{app}}$ (MPa <sup>-1</sup> ) | $S_{12}^{\text{app}}$ (MPa <sup>-1</sup> ) | $S_{61}^{\text{app}}$ (MPa <sup>-1</sup> ) | $E^{\text{app}}$ (GPa) | $\nu^{\text{app}}$ |
|------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------|--------------------|
| 1          | $8,78.10^{-6}$                             | $-3,25.10^{-6}$                            | $5,16.10^{-6}$                             | 114                    | 0,37               |
| 2          | $8,97.10^{-6}$                             | $-3,25.10^{-6}$                            | $5,16.10^{-6}$                             | 112                    | 0,36               |
| 3          | x                                          | $-3,18.10^{-6}$                            | $5,34.10^{-6}$                             | x                      | x                  |
| 4          | $4,65.10^{-6}$                             | $-3,31.10^{-6}$                            | $0,94.10^{-6}$                             | 215                    | 0,71               |
| 5          | $3,80.10^{-6}$                             | x                                          | x                                          | 263                    | x                  |
| 6          | $5,03.10^{-6}$                             | $-3,38.10^{-6}$                            | $1,03.10^{-6}$                             | 199                    | 0,67               |

Tableau 3.3 – *Résultat des essais de traction*

### 3.1.2.3 Identification des orientations cristallographiques

Cette identification est rendue possible par l'utilisation d'un dispositif EBSD (Electron Back Scattering Diffraction) installé dans un microscope électronique à balayage (MEB)<sup>1</sup>.

Le faisceau incident interagit avec le matériau et provoque l'émission (divergente) d'électrons rétrodiffusés. La probabilité de remplir la condition de Bragg (voir par exemple [Cullity, 1978]) pour chacun des plans cristallographiques du cristal impacté est donc très forte. Pour chaque plan cristallographique, la diffraction des électrons rétrodiffusés donne naissance à deux cônes de diffraction. En plaçant un écran de phosphore de manière à intercepter ces cônes, on obtient deux sections de cônes qui apparaissent comme une paire de droites parallèles, en raison de la taille de ces cônes. La figure formée est appelée figure de Kikuchi (figure 3.4), et peut-être vue comme une carte des relations angulaires entre les plans atomiques du cristal.

Figure 3.4 – *Exemple de figure de Kikuchi obtenue sur un échantillon de fer-silicium*

Sur une figure de Kikuchi, chaque paire de lignes est représentative d'un plan cristallographique. L'espacement entre ces lignes est inversement proportionnel à la distance inter-réticulaire pour le plan considéré. L'intersection de deux lignes de Kikuchi représente l'intersection entre deux plans, c'est à dire une direction cristallographique.

1. Les mesures EBSD présentées dans ce document ont été réalisées au laboratoire Roberval de l'Université de Technologie de Compiègne (60).

Quand la structure cristalline de l'échantillon observé est connue, la comparaison de la figure de Kikuchi à des figures simulées permet de remonter à l'orientation du cristal dans le repère de l'éprouvette. Cette orientation est exprimée par ses angles d'Euler ( $\phi_1$ ,  $\psi$ ,  $\phi_2$ ), dont la représentation, en notation de Bunge, est donnée sur la figure 3.5.

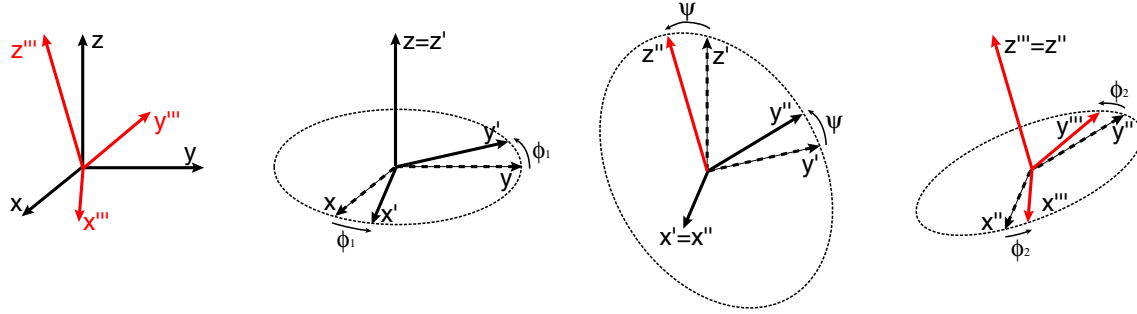


Figure 3.5 – Définition des angles d'Euler en notation de Bunge

Un exemple de résultat obtenu (sous forme de projection stéréographique) est présenté sur la figure 3.6. Ce résultat est issu de la mesure d'une vingtaine de points sur une surface d'environ 25 mm<sup>2</sup>.

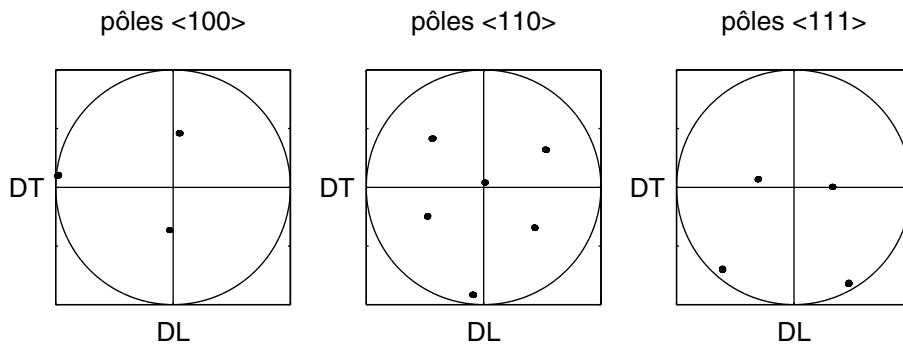


Figure 3.6 – Figure de pôles pour l'éprouvette 2 - projection stéréographique

L'ensemble des résultats est présenté dans le tableau 3.4.

| Éprouvette | $\phi_1$ | $\psi$ | $\phi_2$ |
|------------|----------|--------|----------|
| 1          | 4,1°     | 43,0°  | 172,1°   |
| 2          | 5,1°     | 40,3°  | 181,0°   |
| 3          | -3,5°    | 49,9°  | 175,7°   |
| 4          | 81,4°    | 49,3°  | 94,5°    |
| 5          | 45,0°    | 48,1°  | 94,6°    |
| 6          | 90,3°    | 46,5°  | 90,0°    |

Tableau 3.4 – Angles d'Euler mesurés sur la zone utile des éprouvettes de traction

La principale source d'incertitude sur les valeurs obtenues est liée au positionnement de l'échantillon dans la chambre du MEB. On estime ici que cette incertitude n'excède pas 2°.

### 3.1.2.4 Résultats

Le tenseur d'élasticité cubique qui correspond le mieux aux essais est déterminé à l'aide d'une procédure d'optimisation sous le logiciel MATLAB®.

Les résultats finalement obtenus correspondent aux trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} C_{11} = 202 \text{ GPa} \\ C_{12} = 122 \text{ GPa} \\ C_{44} = 229 \text{ GPa} \end{cases} \quad (3.6)$$

Les modules identifiés permettent de décrire l'anisotropie élastique du monocristal. Une illustration en est donnée par la figure 3.7(a), qui décrit les variations du module d'Young dans l'espace. Sur la figure 3.7(b), on réalise une projection dans un plan  $\{011\}$  du cristal (plan qui contient une direction  $\langle 100 \rangle$ , une direction  $\langle 111 \rangle$  et une direction  $\langle 110 \rangle$ ). Les résultats de la littérature ([Benford, 1946], [Astbury et DeBarr, 1948], tableau 3.1) et les constantes du monocristal de fer pur (tableau 2.1) ont pu ainsi être reportés.

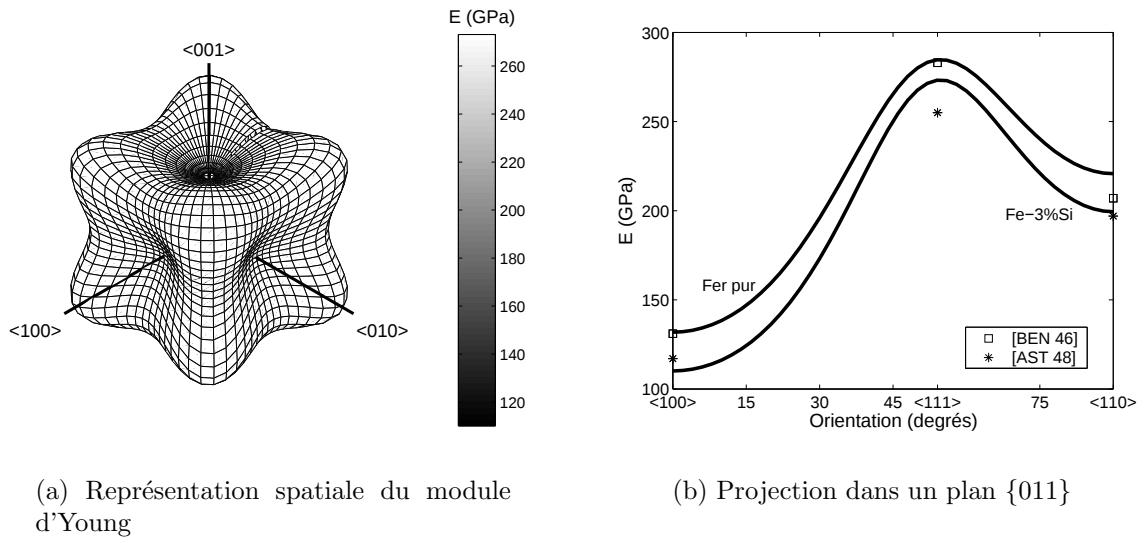


Figure 3.7 – Anisotropie élastique du monocristal de  $Fe-3\%Si$

Le comportement identifié pour le monocristal de fer-silicium est un peu moins raide que celui du fer pur, et correspond mieux aux données issues de la bibliographie. Cette différence est cependant mince et l'anisotropie observée est du même type.

Le tableau 3.5 dresse finalement la liste des constantes qui sont utilisées dans la suite de ce document pour le monocristal de fer à 3% de silicium.

| Constante                        | Valeur                |
|----------------------------------|-----------------------|
| $M_s$                            | $1,61.10^6$ A/m       |
| $(K_1; K_2)$                     | $(38;0)$ kJ/ $m^3$    |
| $(\lambda_{100}; \lambda_{111})$ | $(23; -4,5).10^{-6}$  |
| $(C_{11}, C_{12}, C_{44})$       | $(202, 122, 229)$ GPa |

Tableau 3.5 – *Caractéristiques du monocristal de Fe-3%Si*

## 3.2 Identification du paramètre $A_s$

On décrit dans ce paragraphe une proposition d'identification du paramètre  $A_s$  du modèle multi-échelle. On s'intéresse tout d'abord au monocristal, puis on étend le raisonnement au polycristal.

### 3.2.1 Cas du monocristal

#### 3.2.1.1 Modélisation simplifiée de la courbe d'aimantation

Soit un monocristal de fer. Supposons que le processus d'aimantation de ce monocristal ne soit décrit que par des mouvements de parois, les rotations d'aimantation hors des axes faciles étant négligées. On s'intéresse donc au comportement magnétique à très bas champ. L'effet des contraintes sur l'aimantation est également négligé et le champ magnétique est supposé homogène dans le monocristal. Dans ces conditions extrêmement simplifiées, l'énergie libre d'un domaine magnétique s'écrit (voir relation (2.7)) :

$$W^\alpha = -\mu_0 \vec{M}_\alpha \cdot \vec{H}^{\mathbf{I}} \quad (3.7)$$

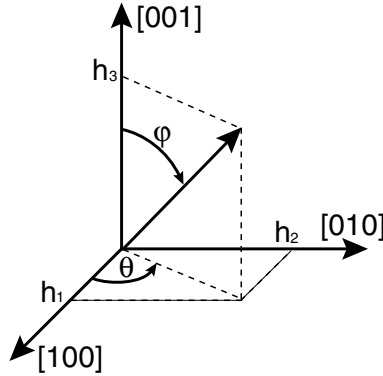
La fraction volumique de chacune des six familles de domaines est définie par la relation :

$$f_\alpha = \frac{\exp(-A_s \cdot W_\alpha)}{\sum_{\alpha} \exp(-A_s \cdot W_\alpha)} \quad (3.8)$$

On note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_\alpha = M_s \vec{\gamma}^\alpha, \\ H = \|\vec{H}^{\mathbf{I}}\|, \\ S = \sum_{\alpha} \exp(-A_s \cdot W_\alpha), \\ K = A_s \mu_0 H M_s. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

On se place dans le repère associé au monocristal (figure 3.8). Le champ magnétique, en coordonnées sphériques, s'écrit :



$$\vec{H}^{\mathbf{I}} = H \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Figure 3.8 – Coordonnées du champ magnétique  $\vec{H}^{\mathbf{I}}$  dans le repère du monocristal

L'énergie libre de chacune des six familles de domaines s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} W_{100} &= -\mu_0 H M_s \sin \varphi \cos \theta & W_{\bar{1}00} &= \mu_0 H M_s \sin \varphi \cos \theta \\ W_{010} &= -\mu_0 H M_s \sin \varphi \sin \theta & W_{0\bar{1}0} &= \mu_0 H M_s \sin \varphi \sin \theta \\ W_{001} &= -\mu_0 H M_s \cos \varphi & W_{00\bar{1}} &= \mu_0 H M_s \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.10)$$

On en déduit :

$$S = 2 (\cosh(K \sin \varphi \cos \theta) + \cosh(K \sin \varphi \sin \theta) + \cosh(K \cos \varphi)) \quad (3.11)$$

qui permet de définir, d'après l'équation (3.8) :

$$\begin{aligned} f_{100} &= \frac{1}{S} \exp(K \sin \varphi \cos \theta) & f_{\bar{1}00} &= \frac{1}{S} \exp(-K \sin \varphi \cos \theta) \\ f_{010} &= \frac{1}{S} \exp(K \sin \varphi \sin \theta) & f_{0\bar{1}0} &= \frac{1}{S} \exp(-K \sin \varphi \sin \theta) \\ f_{001} &= \frac{1}{S} \exp(K \cos \varphi) & f_{00\bar{1}} &= \frac{1}{S} \exp(-K \cos \varphi) \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'aimantation du monocristal s'écrit :

$$\vec{M}^{\mathbf{I}} = M_s \begin{vmatrix} f_{100} - f_{\bar{1}00} \\ f_{010} - f_{0\bar{1}0} \\ f_{001} - f_{00\bar{1}} \end{vmatrix} = \frac{2M_s}{S} \begin{vmatrix} \sinh(K \sin \varphi \cos \theta) \\ \sinh(K \sin \varphi \sin \theta) \\ \sinh(K \cos \varphi) \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

Cette relation fournit une modélisation simplifiée pour l'aimantation d'un monocristal en fonction du champ magnétique appliqué. Ce modèle est anisotrope, puisqu'il fait intervenir les coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\phi$ , et pas seulement l'intensité  $H$  du champ. Son domaine de validité est cependant très limité puisqu'il ne tient pas compte des mécanismes de rotation de l'aimantation ni de l'effet d'un état de contraintes.

### 3.2.1.2 Définition de la susceptibilité initiale

Les hypothèses utilisées dans les paragraphes précédents supposent que l'on se place à très bas champ magnétique. Les données pertinentes que peut fournir ce modèle se trouvent donc au voisinage d'un champ nul. On peut par exemple s'intéresser à l'évolution de l'aimantation en calculant sa dérivée par rapport à  $H$ . On obtient, après calcul :

$$\frac{\partial \vec{M}^I}{\partial H} = \frac{2\mu_0 A_s M_s^2}{S^2} \begin{vmatrix} (S \sin \varphi \cos \theta - 2G) \cosh(K \sin \varphi \cos \theta) \\ (S \sin \varphi \sin \theta - 2G) \cosh(K \sin \varphi \sin \theta) \\ (S \cos \varphi - 2G) \cosh(K \cos \varphi) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

en utilisant le fait que :

$$\frac{\partial S}{\partial H} = 2\mu_0 A_s M_s G \quad (3.15)$$

et en notant :

$$G = \sin \varphi \cos \theta \sinh(K \sin \varphi \cos \theta) + \sin \varphi \sin \theta \sinh(K \sin \varphi \sin \theta) + \cos \varphi \sinh(K \cos \varphi) \quad (3.16)$$

En  $H = 0$ , on remarque facilement que :

$$K(H = 0) = 0, \quad S(H = 0) = 6, \quad \text{et} \quad G(H = 0) = 0 \quad (3.17)$$

On obtient alors :

$$\left. \frac{\partial \vec{M}^I}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{\mu_0 A_s M_s^2}{3} \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 A_s M_s^2}{3} \frac{\vec{H}}{H} \quad (3.18)$$

Au voisinage de l'origine, l'aimantation augmente donc en restant parallèle au champ magnétique appliqué. La susceptibilité initiale du matériau, définie comme la pente à l'origine de la courbe  $M(H)$ , s'écrit donc, quelque soit la direction considérée :

$$\chi^0 = \frac{1}{3} A_s \mu_0 M_s^2 \quad (3.19)$$

Il est donc possible d'identifier  $A_s$  à partir de l'une des courbes d'aimantation du monocristal, et plus précisément à partir de sa susceptibilité initiale :

$$A_s = \frac{3\chi^0}{\mu_0 M_s^2} \quad (3.20)$$

On notera au passage que la modélisation simplifiée est isotrope à l'origine, puisque les susceptibilités initiales sont identiques dans toutes les directions, et que l'aimantation s'oriente initialement suivant le champ magnétique appliqué. L'anisotropie n'apparaît que lorsqu'on s'éloigne de l'origine. On notera également que cette modélisation simplifiée du comportement magnétique au voisinage de l'origine est associée à une hypothèse d'équiprobabilité de répartition des différentes familles de domaines magnétiques, associées chacune à une direction de facile aimantation (six dans le cas du fer). Cela signifie qu'à l'état désaimanté, toutes les familles de domaines sont en proportions égales.

### 3.2.1.3 Identification du paramètre $A_s$

Les mesures effectuées par Webster ([Webster, 1925a],[Webster, 1925b]) nous fournissent les données nécessaires à cette identification dans le cas du monocristal de fer pur. La susceptibilité initiale du monocristal est approximativement estimée à partir de la courbe d'aimantation dans la direction  $\langle 100 \rangle$  :

$$\chi_{\text{exp}}^0 \simeq 2000 \quad (3.21)$$

Ce qui conduit à :

$$A_s = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ J}^{-1} \quad (3.22)$$

Ce résultat découle cependant d'une approximation puisqu'il est fondé sur le comportement magnétique dans la seule direction  $\langle 100 \rangle$ . Les données expérimentales semblent indiquer que la susceptibilité dans les autres directions est légèrement plus faible. Ceci pourrait s'expliquer par un état initial non parfaitement standard<sup>2</sup> du matériau étudié.

### 3.2.1.4 Application

Ces calculs simplifiés permettent de représenter le comportement magnétique du monocristal. On s'intéresse à trois directions particulières du champ magnétique :  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$ .

- Champ magnétique parallèle à une direction  $\langle 100 \rangle$  ( $\theta = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

On obtient, d'après la relation (3.11) :

$$S = 2(2 + \cosh K) \quad (3.23)$$

L'aimantation du monocristal s'écrit (en remplaçant dans l'équation (3.13)) :

$$\vec{M}_{100}^{\text{I}} = \frac{M_s \sinh K}{2 + \cosh K} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

- Champ magnétique parallèle à une direction  $\langle 110 \rangle$  ( $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

On obtient :

$$S = 2 \left( 1 + 2 \cosh \left( K \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \quad (3.25)$$

L'aimantation du monocristal s'écrit :

$$\vec{M}_{110}^{\text{I}} = \frac{M_s \sinh \left( K \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{1 + 2 \cosh \left( K \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

---

2. L'état initial standard ou de référence définit la configuration magnétique à l'état désaimanté telle que toutes les familles de domaines soient en égales proportions :  $f_\alpha = \frac{1}{k} \quad \forall \alpha$ , où  $k$  désigne le nombre de directions de facile aimantation possibles.

- Champ magnétique parallèle à une direction  $\langle 111 \rangle$  ( $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\varphi = \text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ )

On obtient :

$$S = 6 \cosh(K \frac{\sqrt{3}}{3}) \quad (3.27)$$

L'aimantation du monocristal s'écrit donc :

$$\vec{M}_{111}^{\mathbf{I}} = \frac{M_s \sinh(K \frac{\sqrt{3}}{3})}{3 \cosh(K \frac{\sqrt{3}}{3})} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} M_s \tanh(K \frac{\sqrt{3}}{3}) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

Les résultats sont présentés sur la figure 3.9. On a également reporté les points expérimentaux obtenus par Webster. Il est rappelé que ce modèle ne prend pas en compte le phénomène de rotation de l'aimantation hors des axes faciles, ce qui rend impossible la saturation du matériau si le champ magnétique est dirigé suivant une direction  $\langle 110 \rangle$  ou  $\langle 111 \rangle$ , ou plus généralement suivant une direction qui n'est pas une direction de facile aimantation. Ceci était prévisible dans la mesure où le phénomène de rotation de l'aimantation est ignoré ici. En revanche, cette approche simplifiée permet de décrire le comportement pour de faibles niveaux de champs, en l'absence de contraintes.

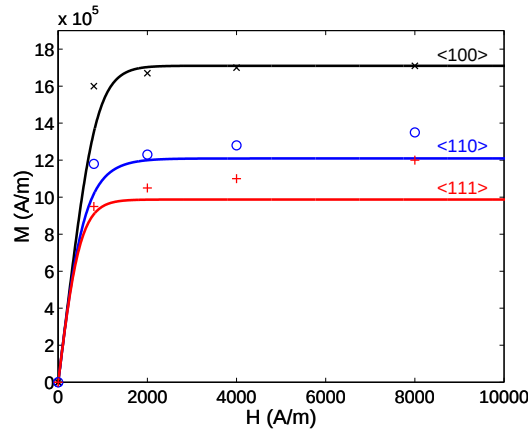


Figure 3.9 – *Modélisation simplifiée du comportement magnétique du monocristal de fer*

## 3.2.2 Cas du polycristal

Nous allons développer une approche simplifiée du même type dans le cas d'un polycristal isotrope.

### 3.2.2.1 Modélisation simplifiée de la courbe d'aimantation

Nous allons dans un premier temps définir les hypothèses associées à cette modélisation simplifiée.

La microstructure du polycristal est vue comme un ensemble de domaines, chacun étant caractérisé par sa direction de facile aimantation. Toutes les orientations

de l'espace sont équiprobables, et distribuées aléatoirement dans le matériau. Le comportement macroscopique est ainsi isotrope.

Nous allons estimer le comportement du polycristal en le considérant comme un monocristal dont toutes les directions de l'espace seraient des directions de facile aimantation possibles. De la même façon que précédemment, on néglige l'énergie magnéto-élastique et l'énergie d'anisotropie, pour ne prendre en compte que l'énergie de champ.

Dans chaque domaine  $\alpha$ , on a :

$$\vec{M}_\alpha = M_s \vec{\gamma}_\alpha \quad (3.29)$$

L'énergie libre de ce domaine s'écrit (compte-tenu des hypothèses adoptées) :

$$W_\alpha = -\mu_0 M_s \vec{\gamma}_\alpha \cdot \vec{H} \quad (3.30)$$

La grandeur  $S$ , définie à l'équation (3.9) peut se ré-écrire :

$$S = \int_\alpha \exp(-A_s W_\alpha) = \int_\alpha \exp(A_s \mu_0 M_s \vec{\gamma}_\alpha \cdot \vec{H}) \quad (3.31)$$

En passant à un système de coordonnées sphériques (figure 3.10), on pose :

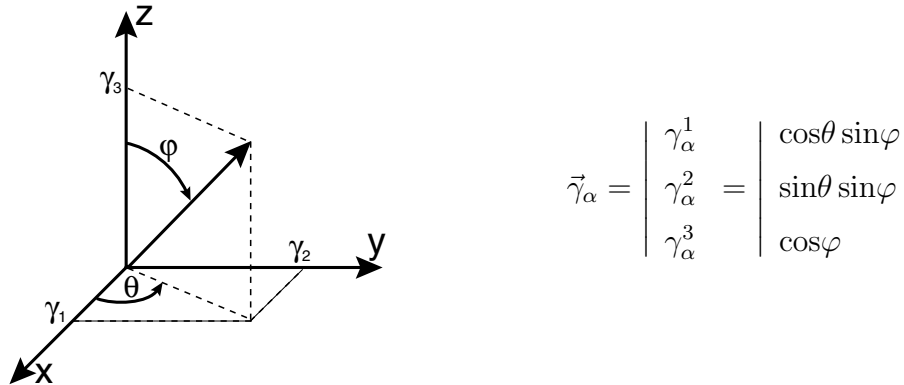


Figure 3.10 – *Système de coordonnées sphériques*

Si on suppose par exemple que le champ magnétique est dirigé suivant la direction  $\vec{z}$  ( $\vec{H} = H^T[0 \ 0 \ 1]$ , soit  $\varphi_H = 0$ ), et en utilisant les notations données en (3.9), l'équation (3.31) devient :

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp(K \cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (3.32)$$

Le calcul de cette intégrale, conduit à :

$$S = 2\pi \left[ \frac{-\exp(K \cos\varphi)}{K} \right]_0^\pi \quad (3.33)$$

Soit :

$$S = \frac{4\pi \sinh K}{K} \quad (3.34)$$

La fraction volumique associée à un domaine  $\alpha$  s'écrit :

$$f_\alpha = \frac{1}{S} \exp(K \cos \varphi) \quad (3.35)$$

L'aimantation s'écrit alors :

$$\vec{M} = M_s \int_\alpha f_\alpha \vec{\gamma}_\alpha \quad (3.36)$$

La composante parallèle au champ, i.e.  $M_z$ , s'écrit (les autres composantes sont nulles en raison des conditions d'isotropie) :

$$M_z = M_s \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{S} \exp(K \cos \varphi) \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (3.37)$$

Une intégration par parties, (en posant  $u = \cos \varphi$  et  $v' = \sin \varphi \exp(K \cos \varphi)$ ), conduit à :

$$M_z = \frac{4\pi M_s}{S K} \left( \cosh(K) - \frac{\sinh(K)}{K} \right) \quad (3.38)$$

Soit :

$$M_z = M_s \frac{K \cosh(K) - \sinh(K)}{K \sinh(K)} \quad (3.39)$$

### 3.2.2.2 Définition de la susceptibilité initiale

De la même manière que pour le monocristal, et compte-tenu de l'isotropie du comportement, on définit :

$$\chi^0 = \left. \frac{\partial M_z}{\partial H} \right|_{H=0} \quad (3.40)$$

Dans le cas du polycristal :

$$\frac{\partial M_z}{\partial H} = A_s \mu_0 M_s^2 \frac{\sinh^2(K) - K^2}{K^2 \sinh^2(K)} \quad (3.41)$$

ce qui conduit, pour  $K = 0$  à :

$$\chi^0 = \frac{1}{3} A_s \mu_0 M_s^2 \quad (3.42)$$

On aboutit dans le cas du polycristal à la même définition de  $\chi^0$  que celle obtenue dans le cas du monocristal. Il est donc possible d'identifier  $A_s$  à partir d'une courbe d'aimantation, et plus précisément à partir de la susceptibilité initiale du polycristal :

$$A_s = \frac{3\chi^0}{\mu_0 M_s^2} \quad (3.43)$$

### 3.2.2.3 Identification du paramètre $A_s$

- Dans le cas du polycristal isotrope de fer pur, on peut estimer la susceptibilité initiale à partir des résultats de Kuruzar ([Kuruzar et Cullity, 1971], [Cullity, 1972]). On obtient :

$$\underline{A_s = 2.10^{-3} \text{ m}^3 \text{ J}^{-1}} \quad (3.44)$$

Le modèle simplifié ainsi défini permet de simuler le comportement magnétique d'un polycristal isotrope. Comme précédemment pour le monocristal, ce modèle n'a de sens que pour les faibles valeurs de champ magnétique, et en l'absence de contraintes (voir figure 3.11). La comparaison avec les résultats expérimentaux est cependant à considérer avec beaucoup de prudence dans la mesure où le comportement mesuré par Kuruzar et al. est la courbe de première aimantation, et non la courbe anhystérétique. Cela signifie que la susceptibilité initiale issue du modèle doit être comparée à la susceptibilité mesurée expérimentalement au delà du domaine de Rayleigh<sup>3</sup>, autrement dit au delà du voisinage immédiat de l'origine. Par ailleurs, le matériau utilisé par Kuruzar et al. est supposé isotrope, mais sa texture n'est pas connue<sup>4</sup>.

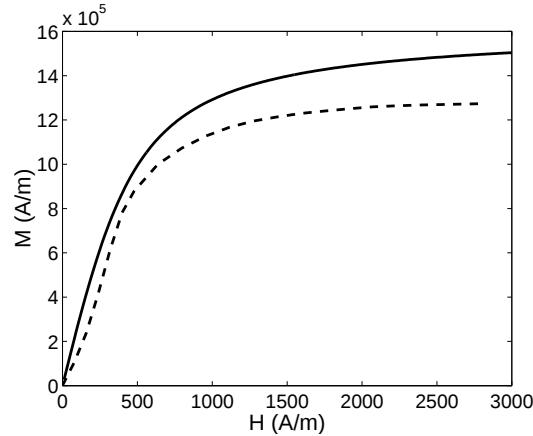


Figure 3.11 – *Modélisation simplifiée du comportement magnétique pour un polycristal isotrope (sans prise en compte des rotations d'aimantation) (traits pleins) et comparaison avec des résultats expérimentaux d'après [Kuruzar et Cullity, 1971] (pointillés)*

L'écart entre le comportement simulé et les résultats expérimentaux à partir de 500 A/m s'explique sans doute par la non-prise en compte du phénomène de rotation.

- Dans le cas des essais réalisés sur notre alliage de Fe-3%Si à grains non-orientés (voir paragraphe suivant), la susceptibilité anhystérétique initiale a été estimée

3. Il est rappelé que le domaine de Rayleigh est associé à la zone où le mécanisme d'aimantation correspond à un gonflement des parois ancrées sur des défauts, et non à un déplacement d'ensemble des parois.

4. Des comparaisons entre ces mesures et les résultats du modèle multi-échelle sont cependant présentées en fin d'annexe B.

de l'ordre de :

$$(\chi_{100}^0)_{\text{exp}} \simeq 25000 \quad (3.45)$$

On en déduit donc :

$$A_s = 2.10^{-2} m^3 J^{-1} \quad (3.46)$$

Le modèle simplifié ainsi défini, s'il est trop restrictif pour définir le comportement magnéto-élastique, permet de donner une signification au paramètre phénoménologique  $A_s$  du modèle microscopique, et simplifie son identification. Ce paramètre est ensuite intégré dans le modèle multi-échelle, dont la gamme d'application est plus large puisque le phénomène de rotation et l'effet des contraintes sont alors pris en compte.

### 3.3 Propriétés du polycristal

Nous cherchons ici à connaître quelques propriétés macroscopiques du matériau étudié. Les échantillons dont nous disposons sont des tôles NO, d'épaisseur 0,5 mm. Le procédé d'obtention a pour conséquence de générer une texture de la tôle. Cette texture est cependant faible, ce qui explique l'appellation NO, par opposition aux tôles GO (Grains Orientés), fortement texturées.

L'observation du matériau au microscope optique - après attaque chimique - permet de révéler sa structure en grains (figure 3.12(a)). Ces grains sont - en première approximation - équiaxes, et leur diamètre moyen vaut environ 70  $\mu m$ .

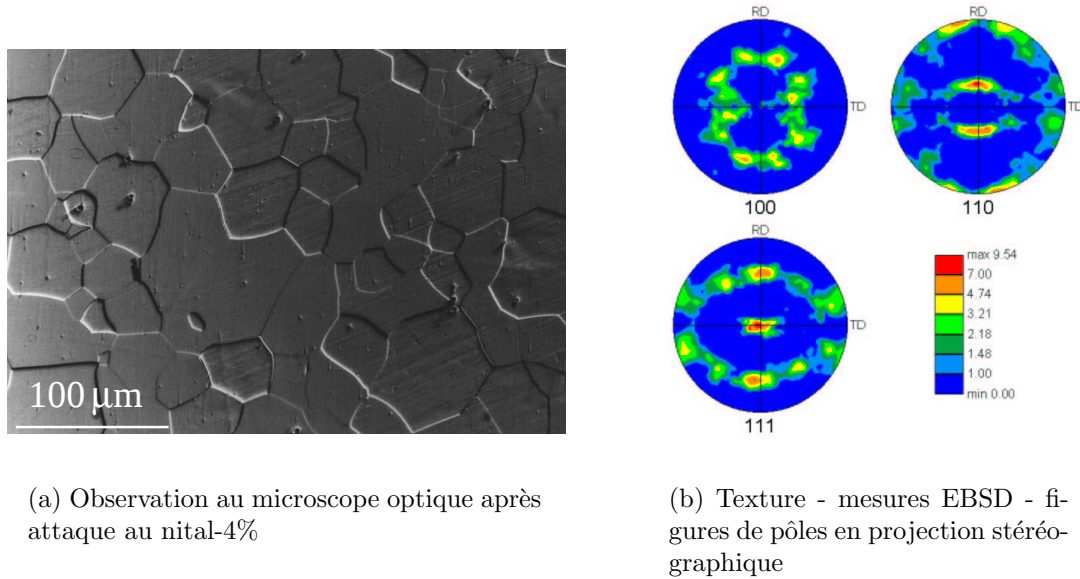


Figure 3.12 – Caractérisation du *Fe-3%Si NO*

Des mesures EBSD ont également été effectuées pour avoir accès, à travers un fichier de distribution des orientations cristallographiques, aux données de texture (voir figure 3.12(b)).

Les mesures EBSD font apparaître une légère texture. En particulier, le matériau n'est pas isotrope transverse, les différentes directions dans le plan de tôle ne sont pas équivalentes. On notera DL ou  $0^\circ$  la direction du laminage et DT ou  $90^\circ$  la direction transverse. Chaque direction du plan de tôle sera définie par son angle  $\theta$  avec la direction du laminage (figure 3.13).

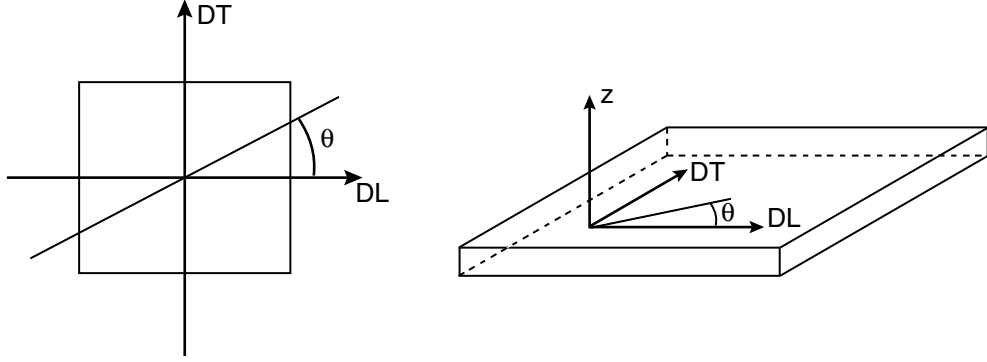


Figure 3.13 – Repérage des directions dans le plan de tôle

La figure 3.14 permet de rendre compte de l'anisotropie de texture dans le plan de tôle. Elle représente, en moyenne, sur tous les grains considérés la valeur maximale de la projection des directions  $\langle 100 \rangle$  (il y en a six par cristal) suivant différentes directions dans le plan de tôle :

$$P_{\langle 100 \rangle}(\theta) = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} (\max_{\alpha} (\vec{n}_{\theta}^{\alpha} \cdot \vec{n}_{\langle 100 \rangle}^i)) , \quad \alpha \in \{1, \dots, 6\} \quad (3.47)$$

$N_g$  est le nombre de grains considérés,  $\vec{n}_{\langle 100 \rangle}^i$  est une direction  $\langle 100 \rangle$  associée au grain  $i$ , et  $\vec{n}_{\theta}^{\alpha}$  est la direction macroscopique considérée dans le plan de tôle. La barre d'erreur a une largeur de deux fois l'écart-type observé.

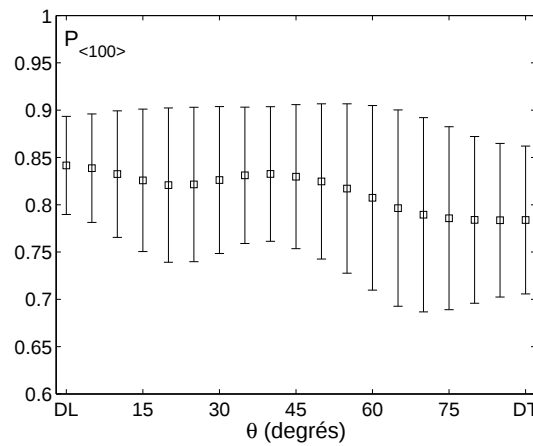


Figure 3.14 – Projection des directions  $\langle 100 \rangle$  suivant les directions du plan de tôle

On constate que les grains du matériau ont plus souvent une direction  $\langle 100 \rangle$  proche de la direction DL que de la direction DT. On observe également une "bosse"

à  $45^\circ$ . Cette légère anisotropie sera suffisante, on le verra par la suite, pour avoir une influence non négligeable, en particulier sur le comportement magnétostrictif.

Par ailleurs, des mesures par diffraction des rayons X ont été réalisées au LEDEPP (Laboratoire d'étude et développement des produits plats, Arcelor) à Florange (57) à différentes profondeurs dans une tôle de fer-silicium. Les échantillons sont tout d'abord électro-polis avant la première mesure RX. Leur surface est ensuite attaquée, de façon à atteindre la profondeur  $\frac{e}{4}$ ,  $e$  étant l'épaisseur totale de la tôle. Une nouvelle mesure est effectuée. La dernière mesure est effectuée à mi-épaisseur de tôle. Les figures de pôles obtenues sont ensuite traitées à l'aide d'une procédure spécifique de reconstruction de FDO. Ce travail a été effectué par O. Cayla et X. Lemoine, du LEDEPP. Les résultats mettent en évidence une légère évolution de texture entre la surface et le reste du matériau (figure 3.15).

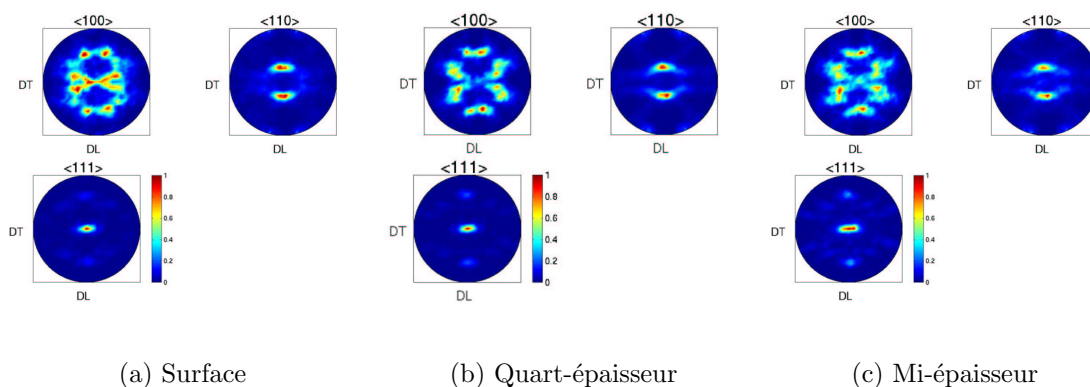


Figure 3.15 – Mesures de texture à différentes profondeurs d'une tôle de Fe-3%Si NO

Introduites dans le modèle auto-cohérent élastique présenté au paragraphe 2.3.1, ces FDO conduisent à des comportements élastiques assez différents.

La figure 3.16 met en évidence une différence de comportement entre la surface de l'échantillon et le cœur.

Dans un premier temps, ce gradient de texture ne sera pas pris en compte et nous nous contenterons d'une texture obtenue à cœur de tôle. Les figures de pôles de la FDO qui est utilisée dans les calculs sont présentées sur la figure 3.17. Leur allure est conforme à celle communément admise pour les tôles NO.

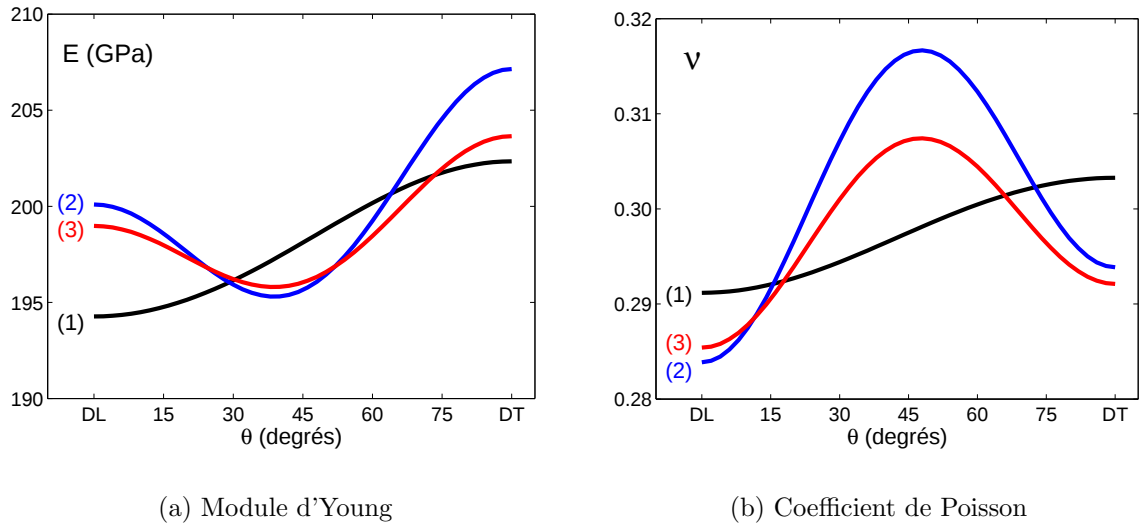


Figure 3.16 – Coefficients élastiques dans le plan de tôle pour les textures de surface (1), de quart-épaisseur (2) et de mi-épaisseur (3)

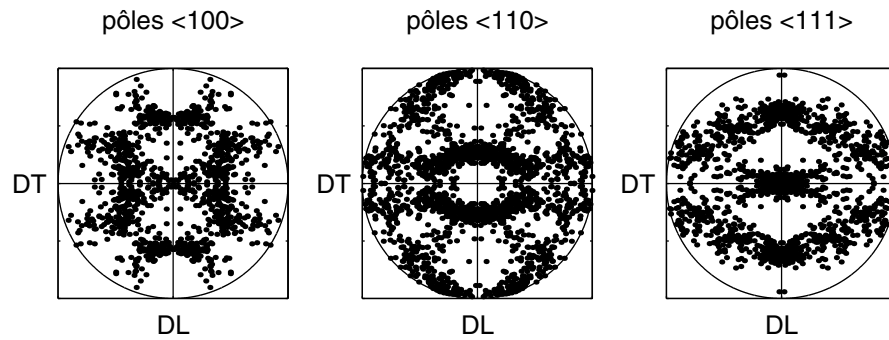


Figure 3.17 – Texture - mesures EBSD - figures de pôles en projection stéréographique - Fe-3%Si NO - 396 grains

## 3.4 Mise au point d'essais de validation macroscopiques

Une fois identifiés les paramètres nécessaires au fonctionnement du modèle, des essais de validation doivent être mis en place afin d'évaluer le modèle.

### 3.4.1 Caractérisation des propriétés mécaniques

Des échantillons - de dimension  $200 \times 12,5 \text{ mm}^2$  - ont été prélevés dans différentes directions du plan de la tôle.

Des essais de traction en élasticité (contrainte maximale appliquée de 150 MPa pour une limite d'élasticité macroscopique de l'ordre de 360 MPa) ont permis de mesurer les coefficients d'élasticité de la tôle en fonction de l'orientation de prélèvement des éprouvettes (figure 3.18).

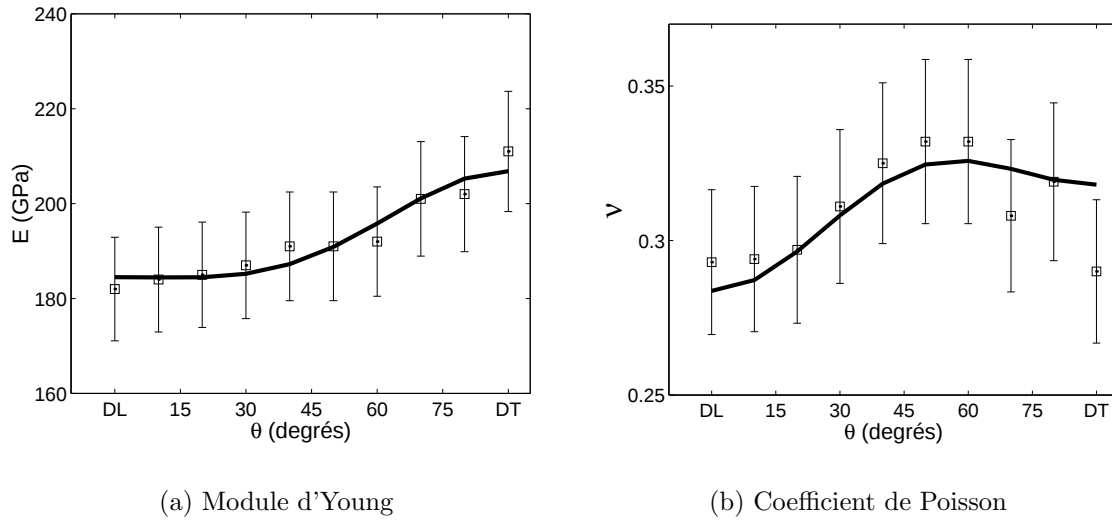


Figure 3.18 – Mesures des coefficients élastiques suivant différentes directions du plan de tôle - FeSi 3% NO

Sur les figures 3.18(a) et 3.18(b), les points représentent les mesures effectuées, la barre d'erreur ayant été estimée à partir d'un calcul d'incertitude sur l'appareillage de mesure. La ligne reproduit le comportement du matériau orthotrope qui correspond le mieux aux points expérimentaux. Le tenseur des souplesses de ce matériau a été obtenu à l'aide d'une procédure d'optimisation expliquée ci-dessous.

Lors d'un essai de traction d'amplitude  $\sigma$  dans une direction  $\vec{u}_\theta$  du plan de tôle, le tenseur des contraintes, exprimé dans le repère (DL,DT,z) (voir figure 3.13) s'écrit :

$$\sigma = \sigma \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

La déformation s'écrit (en notation tensorielle) :

$$\varepsilon = \mathbf{S} : \sigma \quad (3.49)$$

où  $\mathbf{S}$  représente le tenseur des souplesses du matériau. Ce matériau est orthotrope et ses axes de symétrie correspondent au repère (DL,DT,z). Les seules composantes non nulles du tenseur  $\mathbf{S}$  exprimé dans ce repère sont au nombre de 9 :  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  et  $S_{66}$ .

Les déformations dans le plan de tôle s'écrivent donc (dans le repère associé à DL et DT) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} &= \sigma (S_{11} \cos^2 \theta + S_{12} \sin^2 \theta) \\ \varepsilon_{22} &= \sigma (S_{22} \sin^2 \theta + S_{12} \cos^2 \theta) \\ \varepsilon_{12} &= \sigma S_{66} \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.50)$$

Seules les quatre composantes  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  et  $S_{66}$  sont sollicitées par un essai de traction dans le plan de tôle, et seules ces trois composantes pourront donc être identifiées à l'aide des essais. La contrainte est appliquée suivant la direction  $\vec{u}_\theta$  :

$$\vec{u}_\theta = {}^T [\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0] \quad (3.51)$$

La déformation calculée parallèlement à  $\vec{u}_\theta$  s'écrit :

$$\varepsilon_{//\theta} = {}^t \vec{u}_\theta \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{u}_\theta \quad (3.52)$$

soit :

$$\varepsilon_{//\theta} = \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta + 2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sin \theta \quad (3.53)$$

De la même façon, la déformation mesurée perpendiculairement à la direction de la contrainte s'écrit :

$$\varepsilon_{\perp\theta} = {}^t \vec{v}_\theta \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{v}_\theta \quad (3.54)$$

en prenant :

$$\vec{v}_\theta = {}^T [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0] \quad (3.55)$$

La déformation  $\varepsilon_{\perp\theta}$  s'écrit alors :

$$\varepsilon_{\perp\theta} = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta - 2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sin \theta \quad (3.56)$$

D'un point de vue expérimental, les déformations mesurées parallèlement et perpendiculairement à la contrainte s'écrivent :

$$\varepsilon_{//\theta}^{\text{exp}} = \frac{\sigma}{E_\theta^{\text{exp}}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\perp\theta}^{\text{exp}} = \frac{-\nu^{\text{exp}}}{E_\theta^{\text{exp}}} \sigma \quad (3.57)$$

Les composantes  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  et  $S_{66}$  optimales sont obtenues par minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$f(S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{66}) = \sum_{\theta^{\text{exp}}} \left( (\varepsilon_{//\theta}^{\text{exp}} - \varepsilon_{//\theta})^2 + (\varepsilon_{\perp\theta}^{\text{exp}} - \varepsilon_{\perp\theta})^2 \right) \quad (3.58)$$

Cette procédure d'optimisation a été implantée sous MATLAB<sup>®</sup>, et conduit au résultat suivant :

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{opt}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5,4 & -1,5 & \times & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 4,8 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,0 \end{array} \right) 10^{-6} \text{ GPa}^{-1} \quad (3.59)$$

L'anisotropie élastique dans le plan de tôle est faible, mais existe en raison d'une texture qui s'écarte de l'isotropie transverse. L'anisotropie relative dans le plan de

tôle<sup>5</sup> n'excède cependant pas 15%, pour le module d'Young comme pour le coefficient de Poisson.

Le matériau est légèrement plus raide dans la direction transverse que dans la direction du laminage. Ce résultat est conforme à ce que l'on pouvait attendre au regard de la figure de pôles : la direction  $\langle 100 \rangle$  du monocristal étant la direction la plus "molle", on s'attend à ce que la direction de la tôle qui contient "le plus" de directions  $\langle 100 \rangle$  soit la direction macroscopique la plus "molle". Cette direction est la direction du laminage d'après la figure 3.14.

#### 3.4.2 Caractérisation des propriétés magnétiques

Un banc de mesure non standard, développé par Cédric Gourdin dans le cadre de ses travaux de thèse [Gourdin, 1998] a été employé afin de caractériser le comportement magnétique. Un schéma du dispositif est présenté sur la figure 3.19.

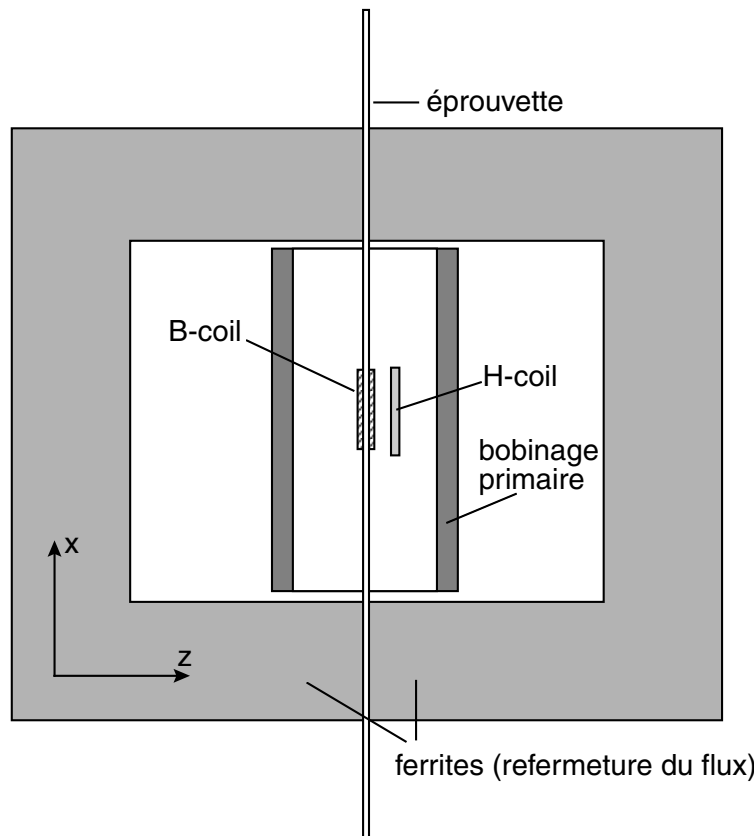


Figure 3.19 – Banc de mesure magnétique

Ce banc est conçu de manière à accueillir des éprouvettes du type de celles utilisées pour les essais de traction. Le dispositif de mesure magnétique peut être amarré sur le bâti d'une machine de traction. On peut ainsi réaliser des mesures de courbes anhystériques sous contraintes uniaxiales.

---

5. définie comme  $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\text{moy}}}$ .

L'éprouvette est placée entre deux "U" en ferrite qui permettent de refermer le flux magnétique. Il est ainsi possible d'aimanter l'éprouvette sans avoir recours à des courants d'intensité trop forte. Le champ d'excitation est obtenu à l'aide d'une bobine d'excitation, ou bobinage primaire. Cette bobine est formée de 211 spires et est parcourue par un courant dont l'intensité peut atteindre 10 A. Le champ magnétique créé dans l'air par cette bobine peut-être évalué par le théorème d'Ampère. Cependant, lorsque l'on place l'échantillon à l'intérieur de cette bobine, un champ démagnétisant apparaît, et le champ magnétique vu par l'éprouvette est plus faible que celui obtenu par application du théorème d'Ampère. Ce champ démagnétisant a été évalué à l'aide d'une bobine de mesure de champ ou H-coil placée dans l'air au voisinage de l'échantillon. On obtient ainsi une loi empirique du champ magnétique créé en fonction du courant traversant la bobine primaire (ce qui permet par la suite de se passer de la H-coil). La mesure du flux magnétique dans l'éprouvette se fait à l'aide d'une bobine de mesure de flux ou B-Coil. Le flux est estimé par intégration de la tension induite aux bornes de la B-coil. La bobine utilisée comprend 100 spires. La connaissance du flux magnétique permet de déterminer l'induction  $\vec{B}$  dans la tôle, et l'aimantation  $\vec{M}$  peut alors être déduite ( $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ ). Il faut cependant remarquer que les mesures magnétiques réalisées ici sont uniaxiales, c'est à dire qu'on n'a accès qu'aux composantes de  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  parallèles à l'axe long de l'éprouvette (noté x sur la figure 3.19).

On ne s'est intéressé dans ce travail qu'à l'aspect anhystérétique du comportement magnétique (voir figure 3.20).

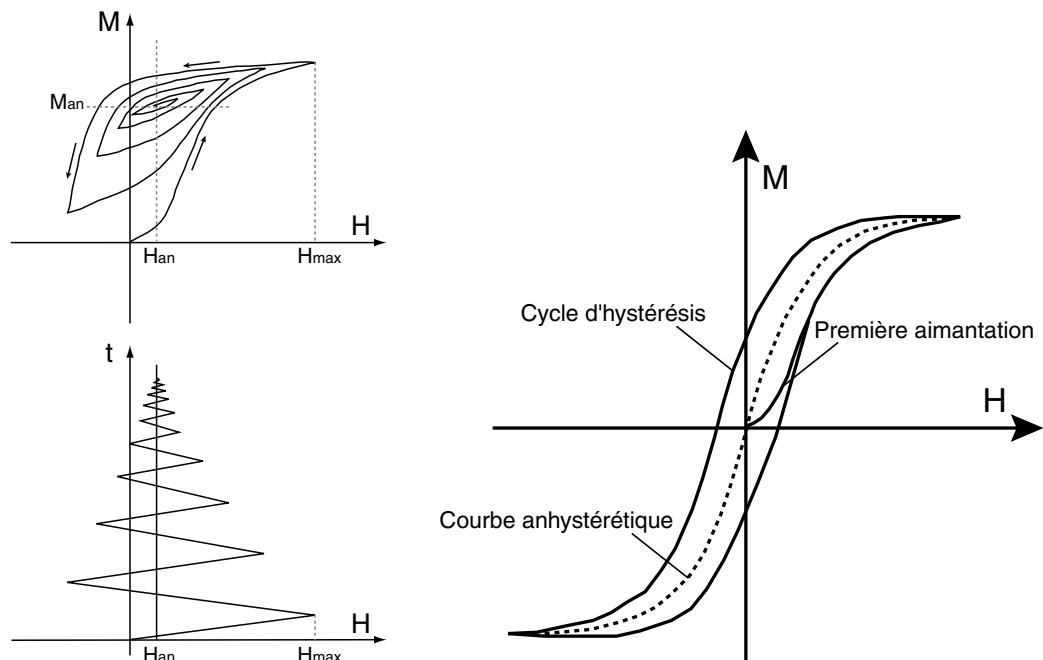


Figure 3.20 – Principe de mesure du comportement anhystérétique

Afin de s'affranchir des effets qui induisent l'hystérésis, on souhaite isoler, pour un champ extérieur donné, la valeur de l'aimantation anhystérétique. On fait pour

cela osciller le champ magnétique  $\vec{H}_{\text{ext}}$  en amplitude décroissante autour de la valeur visée, on atteint ainsi une valeur stabilisée de l'aimantation.

En répétant cette opération pour plusieurs valeurs du champ d'excitation, on obtient point par point une caractéristique  $M(H)$  dite anhystérétique.

Les mesures ont été réalisées sur des éprouvettes du même type que celles utilisées pour les essais de traction. Les résultats sont présentés sur la figure 3.21, en représentation logarithmique pour le champ magnétique.

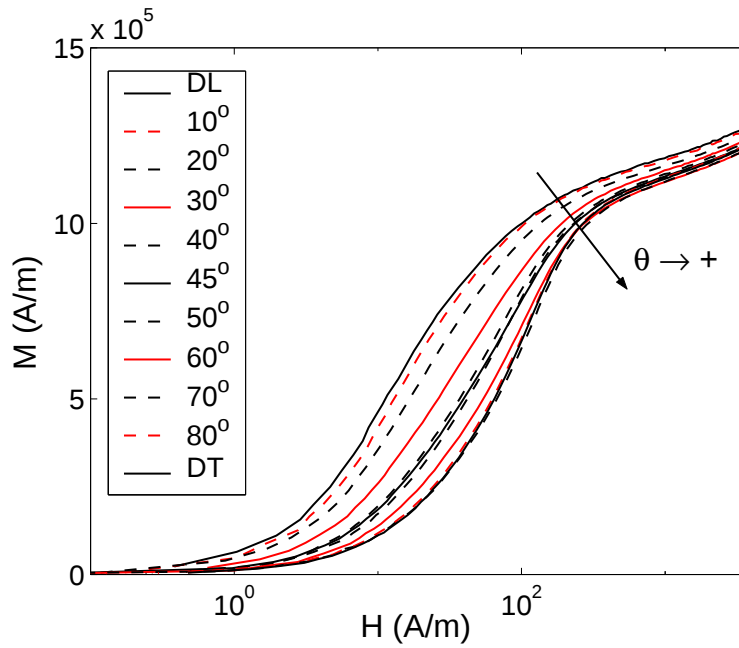


Figure 3.21 – Mesures magnétiques - Echelle semi-logarithmique - résultats expérimentaux

Ces mesures mettent en évidence une très forte anisotropie du comportement magnétique pour les faibles valeurs de champ d'excitation ( $||\vec{H}_{\text{ext}}|| < 300$  A/m). A plus haut champ, en revanche, cette anisotropie est moins sensible. L'écart relatif, à champ extérieur fixé, entre les valeurs de l'aimantation obtenues pour les éprouvettes découpées suivant différentes directions de la tôle ne dépasse pas 10%.

La susceptibilité magnétique est plus forte dans la direction du laminage que dans la direction transverse. Ce résultat est conforme à ce qu'on pouvait imaginer au regard de la figure 3.14. La direction  $\langle 100 \rangle$  étant la direction du monocristal qui présente la plus forte susceptibilité magnétique, la direction macroscopique qui contient "le plus" de directions  $\langle 100 \rangle$  présente logiquement la plus forte susceptibilité.

### 3.4.3 Caractérisation des propriétés magnéto-élastiques

Nous n'avons présenté jusqu'à présent que les propriétés magnétiques et mécaniques découplées de notre matériau. L'objet de ce paragraphe est de mettre en évidence expérimentalement les effets de couplage magnéto-élastique.

#### 3.4.3.1 Déformation de magnétostriction

Lors des mesures magnétiques, les éprouvettes sont instrumentées chacune avec deux jauges d'extensométrie (sens long et sens travers), de manière à avoir accès à une déformation d'origine magnétique. On a vu (paragraphe 1.2.3) que cette déformation a deux origines possibles : l'effet des forces magnétiques et la magnétostriction. Seule cette dernière nous intéresse, et il convient d'évaluer la déformation associée aux efforts magnétiques, afin de la retrancher des mesures effectuées.

Dans ce but, le dispositif expérimental a été modélisé par une méthode des éléments finis sous CASTEM<sup>®</sup>. Un calcul magnétique est tout d'abord effectué (par analogie avec un calcul thermique ([Hirsinger, 1994], [Buvat, 2000])). Pour chaque valeur du champ extérieur, l'aimantation dans l'éprouvette est déterminée localement en chaque point du maillage. La loi de comportement utilisée ici est une loi anhystérétique isotrope non-linéaire. Il apparaît après calcul que l'aimantation au centre de l'éprouvette (qui correspond à la zone de mesure expérimentale) est quasi-homogène. Ce n'est en revanche pas du tout le cas aux abords des ferrites. Les forces associées au champ d'induction obtenu sont estimées en utilisant la formulation proposée par Eringen et Maugin ([Maugin, 1988], [Eringen et Maugin, 1990], [Hirsinger, 1994], [Daniel et al., 2003])). Les efforts d'origine magnétique sont séparés en deux catégories :

- Les forces de volume sont associées à un gradient de l'induction  $\vec{B}$  dans l'échantillon. Leur expression est donnée par la relation (3.60).

$$f_v^\mu = {}^T(grad\vec{B}).\vec{M} \quad (3.60)$$

- Les forces de surface sont associées à la brutale transition de la valeur de l'aimantation entre l'échantillon et l'air environnant (où l'aimantation est nulle). On les écrit :

$$f_s^\mu = \left[ -\vec{B} \otimes \vec{M} + \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu_0} - \left( \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} - \vec{M} \cdot \vec{B} \right) \mathbb{I} \right] \cdot \vec{n} \quad (3.61)$$

$\vec{n}$  est un vecteur unitaire qui décrit la normale à la surface de l'échantillon.

$\vec{B}$  et  $\vec{M}$  sont respectivement l'induction et l'aimantation. On rappelle que ces grandeurs sont liées au champ magnétique par la relation (1.2).

La correction en déformation est obtenue après un calcul par éléments finis en élasticité. Les efforts obtenus à l'étape précédente sont introduits comme efforts aux nœuds dans le maillage du dispositif expérimental. Il apparaît après calcul que ces efforts sont quasiment uniformes dans la zone où a été faite la mesure de déformation. De plus, la contrainte associée aux efforts d'origine magnétique est bien décrite, en

première approximation, par la contrainte de compression hydrostatique donnée par la relation (3.62) :

$$\Sigma_{\text{mag}}^e \simeq -\frac{1}{2}\mu_0\|\vec{M}\|^2\mathbb{I} \quad (3.62)$$

Ce résultat correspond au résultat obtenu analytiquement en considérant  $\vec{B}$  uniforme et  $\vec{H}$  négligeable devant  $\vec{M}$  dans le matériau. L'état de contraintes lié aux forces d'origine magnétique au centre de l'éprouvette (à niveau d'aimantation moyenne fixé) semble donc peu sensible aux fluctuations d'aimantations loin de cette zone centrale. L'amplitude des contraintes obtenues est très faible, de l'ordre de 1 MPa.

La déformation de magnétostriction est déduite (suivant un principe de superposition) des mesures effectuées de la façon suivante :

$$\mathbb{E}^\mu = \mathbb{E}_{\text{mes}} - \mathbf{C}^{\text{eff}^{-1}} : \Sigma_{\text{mag}}^e \quad (3.63)$$

Les mesures de magnétostriction corrigées de l'effet des forces sont présentées sur la figure 3.22. Cette correction n'apporte pas de modification qualitative aux résultats obtenus. La déformation de magnétostriction obtenue correspond à la déformation de magnétostriction sous une contrainte  $\Sigma_{\text{mag}}^e$ , et non à l'état libre de contraintes. Ceci sera pris en compte dans les calculs associés à ces mesures, mais l'effet de cette contrainte, en raison de sa très faible amplitude, est minime dans cette configuration.

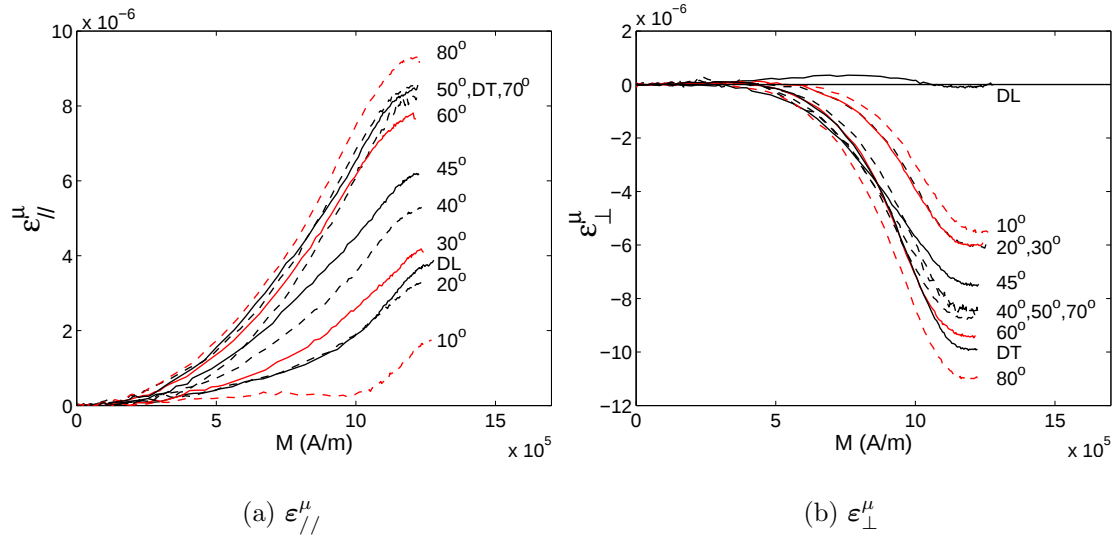


Figure 3.22 – Mesure de la déformation de magnétostriction pour un champ magnétique appliqué suivant différentes directions du plan de tôle - FeSi 3% NO - [Hubert et al., 2002]

La première chose qui apparaît ici est la très forte anisotropie du comportement magnétostrictif, beaucoup plus forte que celle des comportements mécanique et magnétique découplés. Cette très forte anisotropie était d'ailleurs suggérée par la très forte anisotropie du comportement magnétostrictif du monocristal (figure 2.8). Les

déformations (parallèlement au champ magnétique appliqué) les plus grandes sont mesurées pour des champs magnétiques dont la direction est proche de la direction transverse, et les plus faibles pour des champs suivant une direction proche de la direction du laminage. Les écarts relatifs, pour une valeur de champ magnétique fixé, peuvent atteindre plus de 60%.

Les mesures effectuées mettent également en évidence l'aspect non linéaire du comportement magnétostrictif en fonction de l'aimantation.

On peut constater dès maintenant que le comportement magnéto-élastique couplé est beaucoup plus complexe que les comportements découplés. Les raisonnements simples présentés sur les projections des directions  $\langle 100 \rangle$  dans le plan de tôle conduisent ici à des conclusions non compatibles avec les résultats expérimentaux. En effet, La direction  $\langle 100 \rangle$  étant la direction qui présente la déformation de magnétostriction de plus grande amplitude dans un monocristal, on pourrait s'attendre d'un point de vue macroscopique à ce que la direction DL, qui contient plus de directions  $\langle 100 \rangle$  que la direction DT, présente une déformation de magnétostriction plus grande. En réalité, les plus grandes déformations mesurées sont obtenues dans des directions proches de la direction transverse.

### 3.4.3.2 Comportement magnétique sous contraintes

L'effet des contraintes sur le comportement magnétique est sans doute l'effet magnéto-élastique le plus étudié, en raison notamment de son importance dans l'industrie électrique.

Le montage de mesures magnétiques présenté au paragraphe 3.4.2 peut être installé sur une machine de traction uniaxiale (figure 3.23).

Il est ainsi possible d'avoir accès au comportement magnétique sous contrainte de traction. Ce point a déjà fait l'objet de travaux au LMT-Cachan ([Gourdin, 1998], [Gourdin et al., 1998a], [Iordache et al., 2003]). Ces travaux s'intéressent le plus souvent au comportement magnétique hystérétique (à l'exception de [Gourdin et al., 1998a] où des courbes d'aimantation anhystérétiques sous contraintes sont présentées pour le nickel). Lorsqu'on souhaite s'intéresser au comportement anhystérétique, la durée de mesure pose un problème important : si le temps d'acquisition d'un cycle d'hystérésis est de l'ordre de la seconde, celui d'une courbe anhystérétique est plutôt de l'ordre de l'heure, en raison des nombreuses aimantation-désaimantation successives qui sont nécessaires. L'asservissement hydraulique des machines du laboratoire ne permet pas de garantir une stabilité suffisamment satisfaisante sur l'effort appliqué. Nous présentons donc ici quelques résultats de mesures hystérétiques sur le fer-silicium NO. Ces mesures permettent de rendre compte, au moins qualitativement, de l'effet d'une contrainte uniaxiale de traction sur la courbe d'aimantation.

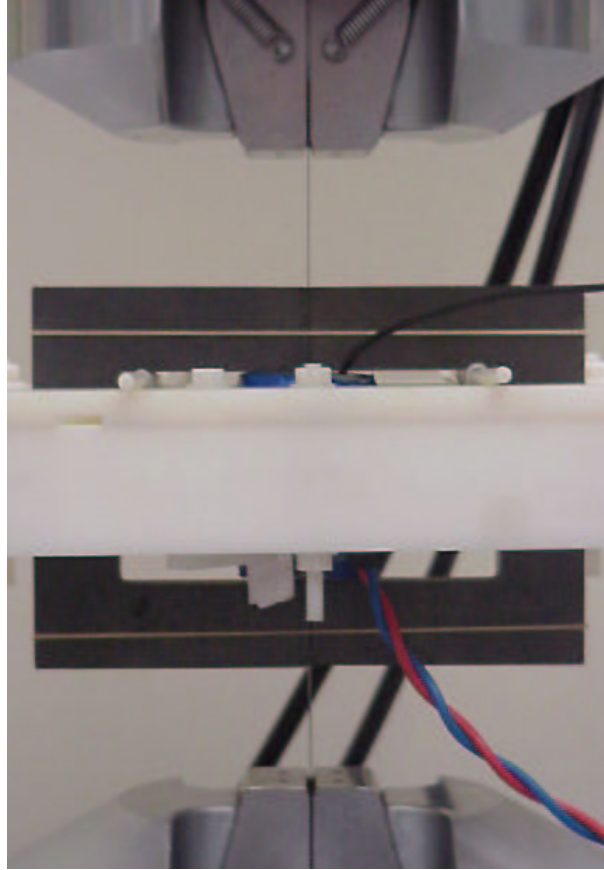


Figure 3.23 – Photo du dispositif de mesures magnétiques installé sur une machine de traction

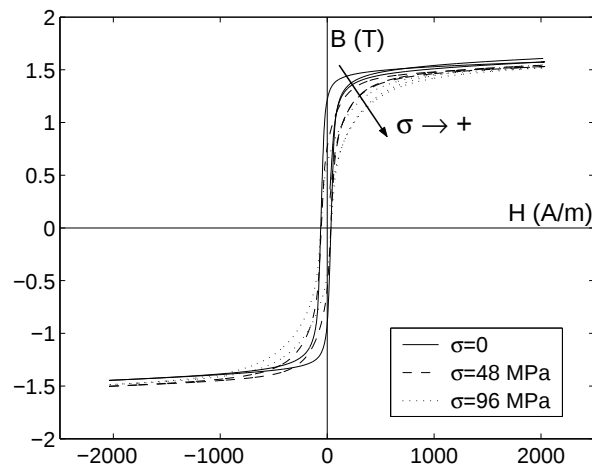


Figure 3.24 – Influence d'une contrainte de traction sur le comportement magnétique dans la direction DL -  $\sigma = 0, 48$  et  $96$  MPa - FeSi 3% NO

On voit ainsi sur la figure 3.24 qu'une contrainte uniaxiale de traction dans la direction du laminage a plutôt tendance à dégrader le comportement magnétique dans cette direction puisque la perméabilité diminue au fur et à mesure que l'intensité de la contrainte augmente. Dans le cas du comportement suivant la direction

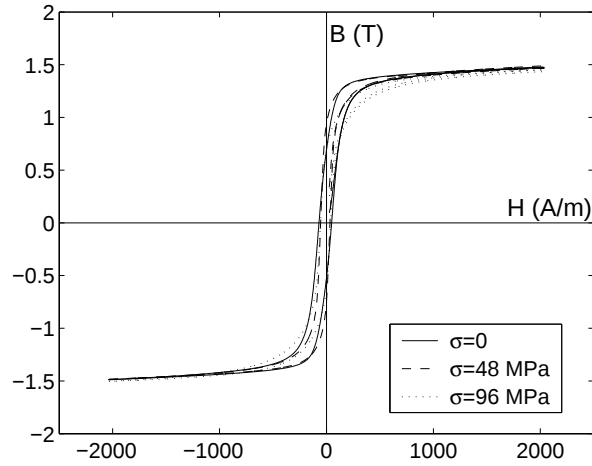


Figure 3.25 – Influence d'une contrainte de traction sur le comportement magnétique dans la direction DT -  $\sigma = 0, 48$  et  $96$  MPa - FeSi 3% NO

transverse (figure 3.25), les tendances sont plus complexes. Le comportement magnétique est d'abord amélioré puis détérioré. On retrouve, pour les niveaux supérieurs de contrainte une dégradation du même type que celle observée suivant DL.

L'effet d'une contrainte est donc un effet anisotrope. C'est ce qu'illustre la figure 3.26 sur laquelle, pour un niveau particulier du champ magnétique (environ 650 A/m), on a tracé la susceptibilité (normée) du matériau<sup>6</sup> en fonction de la contrainte appliquée (normée). Les points représentent les points de mesures et les deux lignes les polynômes de degré 2 qui passent au mieux des points de mesures pour chacun des sens DL et DT.

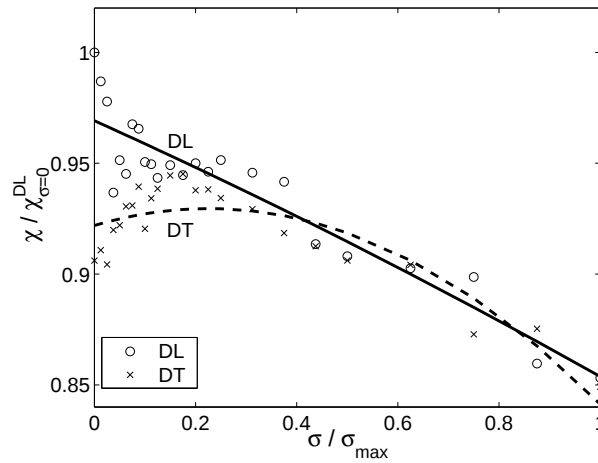


Figure 3.26 – Influence d'une contrainte de traction sur la susceptibilité magnétique - sens DL et DT - pour des contraintes allant de 0 à 130 MPa ( $\sigma_{max} = 130$  MPa)

Le choix d'un polynôme de degré 2 pour interpoler les données expérimentales n'a aucune justification physique, mais permet de rendre compte d'une différence de

6. Il s'agit ici de la susceptibilité sécante, définie comme le rapport des normes de l'aimantation et du champ magnétique appliqué.

tendance très claire entre les comportements DL et DT. En l'absence de contrainte, la susceptibilité est plus forte dans le sens DL que dans le sens DT. Lorsqu'on applique une faible contrainte de traction, le comportement suivant DL se détériore tandis qu'il s'améliore suivant DT. Pour un niveau de contraintes de l'ordre de 65 MPa, les comportements suivant DL et DT sont sensiblement les mêmes. Pour des contraintes plus élevées, les comportements DL et DT restent équivalents, et se dégradent au fur et à mesure que la contrainte augmente.

Par ailleurs, la multiaxialité de l'état de contraintes est assez rarement introduite dans les modèles, et peu d'expérimentateurs ont essayé en laboratoire de soumettre un échantillon magnétique à une sollicitation mécanique multiaxiale. Parmi les quelques études menées, on cite celle de Vincent Maurel [Maurel, 2002], réalisée au LMT-Cachan sur le même matériau que celui étudié ici. Les mesures effectuées dans ce cadre - et pour les mêmes raisons que précédemment - concernent la caractérisation du comportement hystérétique. Ces travaux soulignent la complexité de l'effet des contraintes sur le comportement magnétique. En particulier, les propositions de contrainte uniaxiale équivalente à une sollicitation biaxiale proposées dans la littérature ([Kashiwaya, 1991], [Schneider et Richardson, 1982], [Sablik et al., 1994], [Pearson et al., 2000]) présentent toutes des faiblesses concernant la prise en compte d'une sollicitation de traction ou de compression équi-biaxiale. De plus, elles ne permettent pas de définir l'effet d'une contrainte sur l'aimantation si la direction du champ magnétique n'est pas colinéaire à un axe principal du tenseur des contraintes. La recherche d'une contrainte équivalente à une sollicitation uniaxiale est donc une voie encore largement ouverte. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

#### 3.4.3.3 Déformation de magnétostriction sous contraintes

La mesure de déformation de magnétostriction sous contraintes est un exercice très délicat. Il est tout d'abord nécessaire d'imposer un effort constant dans le temps. En effet, les déformations de magnétostriction étant ici de l'ordre de  $10^{-6}$ , les déformations d'autre nature doivent être constantes au cours de l'essai. En particulier, les déformations élastiques associées au chargement mécanique macroscopique, et les déformations d'origine thermique, du même ordre de grandeur que la déformation de magnétostriction, doivent être maîtrisées. Ces conditions de stabilité sont plus difficiles à remplir dans le cas d'une mesure anhystérétique, dont la durée est de l'ordre de l'heure. Les machines disponibles au laboratoire ne permettent pas d'effectuer ce type de mesures. Le manque de stabilité dans le temps de l'effort appliqué (dont la fluctuation a une amplitude d'environ 20 N) conduit à la présence d'une déformation élastique variable dans le temps. Son ordre de grandeur similaire à celui de la déformation de magnétostriction rend illusoire une mesure quantitative.

Par ailleurs, il paraît nécessaire pour mesurer une déformation de magnétostriction sous contraintes de disposer d'un pilotage en effort, indépendamment de la valeur du champ magnétique. Un pilotage en déplacement conduit en effet à confondre la part de déplacement associée à la contrainte et celle associée aux déformations d'origine magnétique. On est ainsi amené à asservir le déplacement du vérin en fonction de la déformation de magnétostriction, qui dépend elle-même du champ

appliqué. La contrainte appliquée dépend alors du niveau de champ magnétique au cours d'un cycle, et la stabilité du chargement mécanique au cours du temps est une fois encore problématique.

Dans le cas du comportement hystérétique, le temps de mesure est beaucoup plus court, et ces problèmes de stabilité du chargement dans le temps sont plus masqués. Des mesures de déformations d'origine magnétique sous contraintes sont alors envisageables. Quelques résultats de mesure sont présentés sur la figure 3.27(a) (resp. figure 3.27(b)) pour une contrainte et champ magnétique suivant la direction DL (resp. DT). On trace la déformation mesurée en fonction de l'aimantation<sup>7</sup> pour différents niveaux de la contrainte appliquée. Les mesures, assez bruitées, ont été lissées (moyenne mobile par groupe de cinq valeurs sur la déformation de magnétostriction). La correction de l'effet des forces n'a pas été effectuée ici, les mesures n'étant interprétées que de façon qualitative.

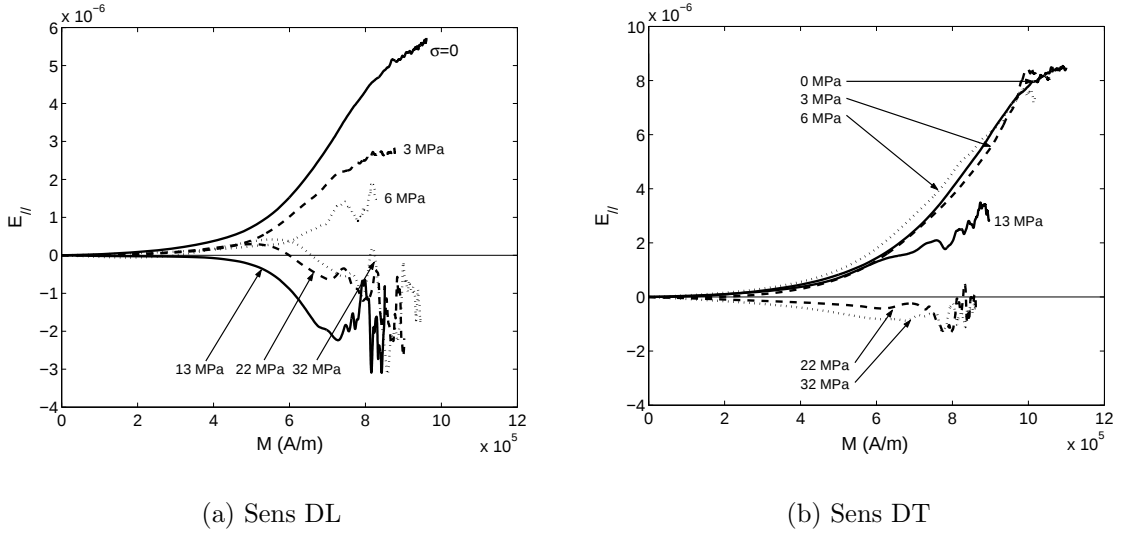


Figure 3.27 – Influence d'une contrainte de traction sur la mesure de la déformation d'origine magnétique

Comme dans le cas des courbes d'aimantation, l'effet d'une contrainte est dépendant de la direction de prélèvement de l'éprouvette. Ainsi, l'application d'une contrainte diminue l'amplitude de la déformation si le champ magnétique et la contrainte sont dirigés suivant la direction du laminage. En revanche, dans la direction DT, une modification sensible de la déformation n'apparaît que pour des niveaux de contraintes dépassant 10 MPa. En deçà, la déformation d'origine magnétique semble insensible à l'application d'une contrainte. Au delà, les effets sont du même type de ceux observés dans la direction DL.

On notera également que les déformations d'origine magnétique sont très sensibles aux très faibles niveaux de contraintes. L'effet de la contrainte sature très rapidement, et pour des valeurs supérieures à 20 MPa environ, les déformations mesurées sont toutes similaires, pour toutes les directions considérées. Comme on l'avait déjà remarqué au paragraphe 3.4.3.1, les déformations les plus fortes sont obtenues

7. On se limite à la courbe de première aimantation.

dans la direction transverse, et les plus faibles dans la direction du laminage.

Pour les fortes contraintes, on peut penser que la déformation mesurée n'est associée qu'à l'effet des forces d'origine magnétique, la déformation de magnétostriction ayant atteint une valeur à saturation. Effectuer des mesures de déformation sous champ magnétique sur des échantillons dont la magnétostriction est saturée par application d'une contrainte serait d'ailleurs une méthode de mesure intéressante des forces d'origine magnétique.

Le dispositif utilisé ne permet cependant pas de tirer de conclusions quantitatives sur l'effet d'une contrainte sur le comportement magnétostrictif. C'est pourquoi nous développons actuellement un nouveau banc de mesures. Une description schématique de ce montage est donnée sur la figure 3.28.

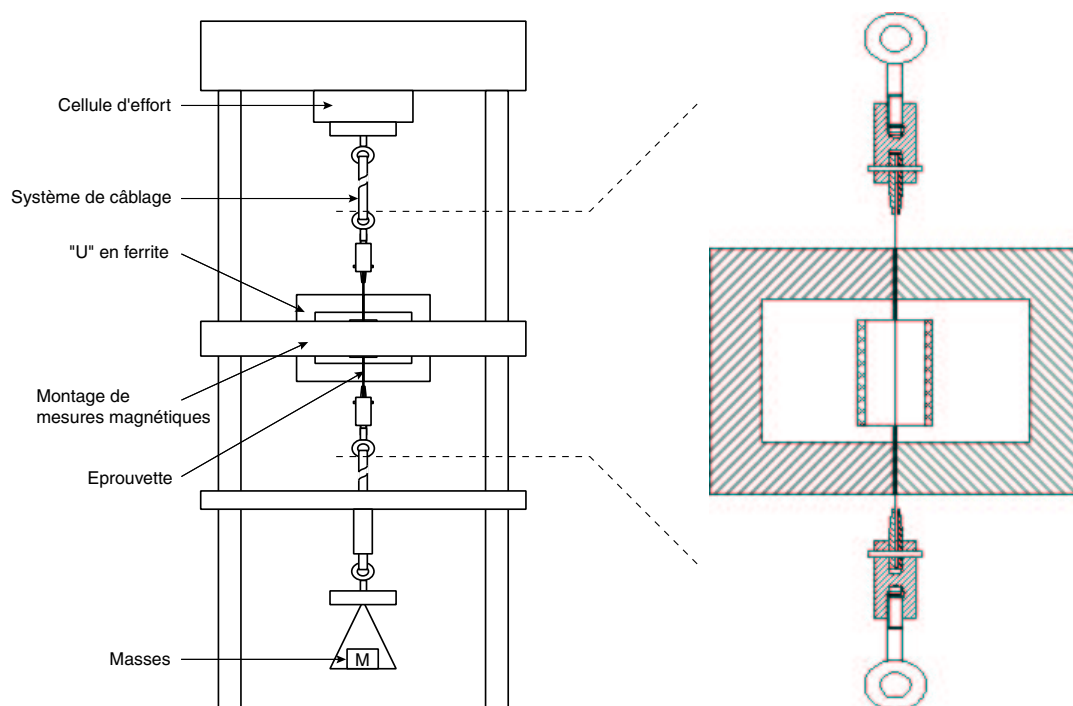


Figure 3.28 – *Présentation schématique d'un montage de mesures magnétiques sous contrainte uniaxiale*

Le principe consiste à adapter sur le banc de mesure magnétique présenté au paragraphe 3.4.2 un système de chargement par masses pesantes. Le montage magnétique est installé sur une ossature de machine de traction. L'éprouvette est collée sur des mors plats reliés à l'aide d'une liaison pivot à une bielle de chaque côté. L'ensemble est ensuite relié à la traverse supérieure grâce à un système de câbles. L'autre extrémité est reliée à des masses pesantes par un second câble guidé verticalement. Le chargement est ainsi défini par le poids de ces masses. La stabilité du chargement mécanique, à la fois en fonction du temps et du champ magnétique appliqué, est ainsi assurée (une fois dépassé le régime transitoire lié à l'installation des masses). Il devient ainsi raisonnable de procéder à des mesures anhystérétiques sous contraintes. Le dispositif est équipé d'une cellule d'effort haute sensibilité. Ce

montage est actuellement en cours de développement et les premiers résultats sont prévus pour la fin de l'année 2003.

#### 3.4.3.4 Effet $\Delta E$

Une façon originale de mettre en évidence l'effet d'une contrainte sur la déformation de magnétostriction consiste à observer l'effet  $\Delta E$ . Quand on effectue un essai de traction sur un échantillon ferromagnétique désaimanté, la courbe contrainte-déformation présente, aux abords de l'origine, une perte de linéarité. A la déformation élastique vient en effet se superposer la déformation de magnétostriction, dont la variation en fonction de la contrainte est non-linéaire. L'effet  $\Delta E$  a été mis en évidence pour un échantillon de fer-silicium NO. La figure 3.29 présente les résultats pour une traction appliquée suivant la direction du laminage.

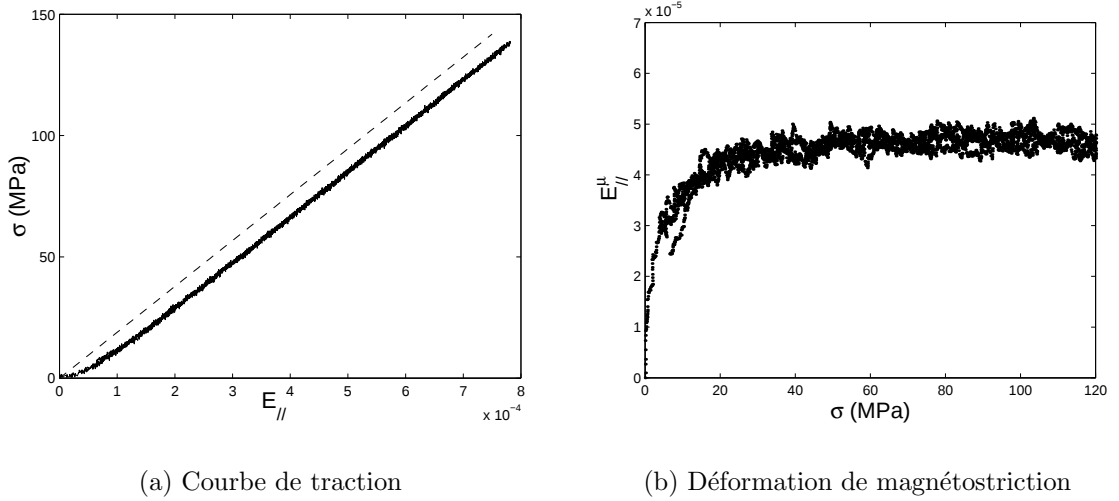


Figure 3.29 – Mise en évidence de l'effet  $\Delta E$  sur un échantillon de Fe-3%Si NO - Traction suivant DL

La courbe de traction obtenue est donnée sur la figure 3.29(a). Le module d'Young  $Y^{\text{exp}}$  est déduit à l'aide d'une régression linéaire dans la zone linéaire (entre 65 MPa et 120 MPa). Le comportement linéaire attendu a été reporté. Il est donc possible de déduire de la déformation totale mesurée une estimation de la part élastique :

$$E_{//}^{\mu} = E_{//}^{\text{mes}} - \frac{\sigma}{Y^{\text{exp}}} \quad (3.64)$$

La déformation de magnétostriction ainsi obtenue, lissée par moyenne mobile afin d'atténuer le bruit, est représentée sur la figure 3.29(b). Les niveaux obtenus pour la déformation de magnétostriction varient selon le choix fait pour le zéro (en force et en déplacement) au début de la mesure. Nous n'avons pas cherché ici à régler précisément ce zéro, les résultats présentés n'ont donc qu'une valeur qualitative. Le niveau obtenu pour la déformation de magnétostriction à saturation (de l'ordre de  $4,5 \cdot 10^{-5}$ ) est ainsi deux fois supérieur à celui attendu (de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5}$ ). On observe une déformation de magnétostriction a priori positive, qui atteint son niveau maximal pour de très faibles contraintes, et qui s'y maintient

ensuite quand on augmente la contrainte. Ceci explique que les effets observés sur figure 3.27 atteignent très rapidement un stade de saturation. Le dispositif de mise sous chargement mécanique en cours de développement devrait là aussi permettre d'obtenir des résultats intéressants concernant l'effet  $\Delta E$ .

## 3.5 Premières comparaisons modèle-essais

On établit dans ce paragraphe les résultats numériques qui permettront de confronter le modèle multi-échelle à l'expérience. Les données de texture utilisées sont celles obtenues au paragraphe 3.3 (figure 3.17), et les caractéristiques du monocristal sont données par le tableau 3.5.

### 3.5.1 Comportement mécanique

Les résultats expérimentaux ont été comparés aux prévisions du modèle autocohérent (voir figures 3.30(a) et 3.30(b)).

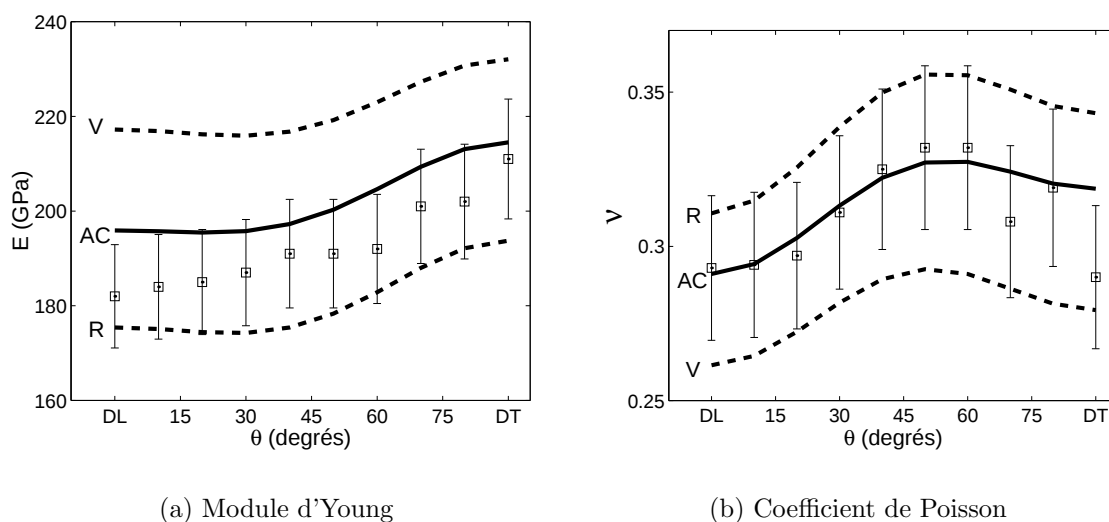


Figure 3.30 – Coefficients élastiques suivant différentes directions du plan de tôle - FeSi 3% NO - Expérience (points) et estimations de Voigt (V), Reuss (R) et autocohérente (AC)

Les valeurs obtenues pour les coefficients élastiques concordent entre expérience et calcul. L'anisotropie élastique du matériau est correctement décrite par le modèle autocohérent utilisé. Les valeurs obtenues pour le module d'Young par le calcul autocohérent surestiment d'environ 5% les données expérimentales.

### 3.5.2 Comportement magnétique

La constante  $A_s$  a été fixée à  $2.10^{-2} m^3/J$  (voir paragraphe 3.2.2).

La comparaison entre résultats numériques et expérimentaux est présentée sur la figure 3.31.

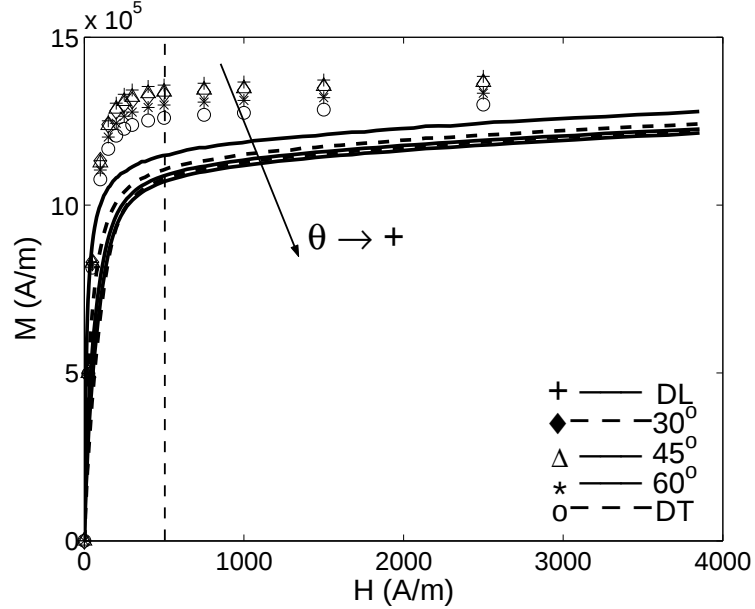


Figure 3.31 – Courbes d'aimantation anhystérétique - comparaison des résultats expérimentaux (lignes) et numériques (points) - Fe-3%Si NO

Il apparaît tout d'abord que l'allure et le niveau général de la courbe d'aimantation sont correctement représentés par le modèle. Le modèle a cependant tendance à surestimer le comportement magnétique. Cette surestimation de l'aimantation est peut-être liée aux hypothèses faites sur le champ magnétique au sein du matériau. Le champ magnétique est en effet supposé homogène, ce qui signifie que le champ démagnétisant est négligé. Le champ magnétique est donc surestimé, et en conséquence, l'aimantation l'est aussi. Ce problème pourrait vraisemblablement être traité en utilisant des règles d'homogénéisation plus sophistiquées, faisant intervenir le champ démagnétisant.

Afin d'observer l'anisotropie du comportement magnétique, une coupe de la figure 3.31 a été réalisée pour une valeur de champ  $||\vec{H}_{\text{ext}}|| = 500 \text{ A/m}$ . Les valeurs obtenues pour l'aimantation - expérimentalement et numériquement - sont représentées sur la figure 3.32.

Cette représentation confirme que le comportement magnétique est surestimé, mais l'anisotropie relative dans le plan de tôle est correctement décrite. La "bosse" observée à  $45^\circ$  correspond à celle observée sur la figure 3.14 (projection des directions  $\langle 100 \rangle$  dans le plan de tôle)

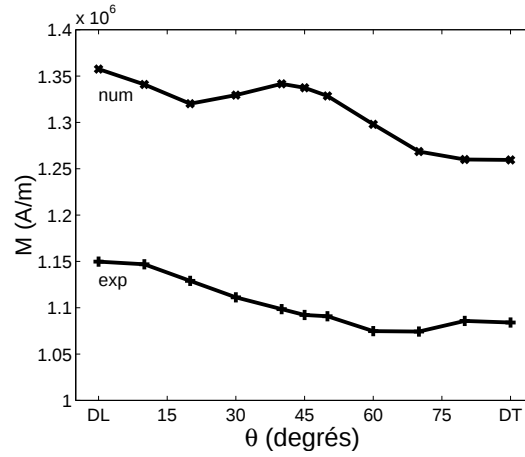


Figure 3.32 – Anisotropie magnétique dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques -  $\|\vec{H}_{\text{ext}}\| = 500 \text{ A/m}$  - Fe-3%Si NO

Afin de mettre en relief le comportement pour les faibles valeurs de champ, les mêmes résultats sont représentés sur la figure 3.33 en échelle logarithmique pour les abscisses.

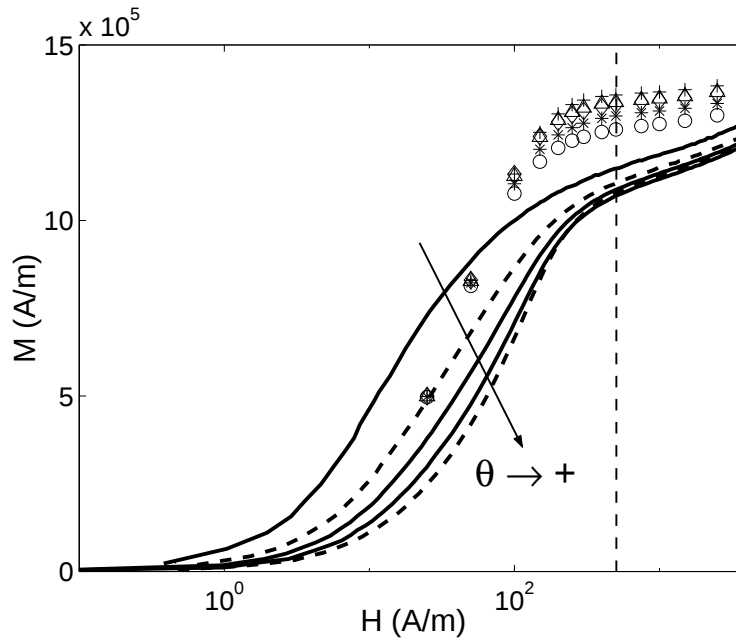


Figure 3.33 – Courbes d'aimantation anhystérétique en représentation semi-logarithmique - comparaison des résultats expérimentaux (lignes) et numériques (points) - Fe-3%Si NO

Le modèle prévoit un comportement magnétique quasiment isotrope à bas champ. Il s'agit en réalité de la zone où l'anisotropie magnétique observée expérimentalement est la plus forte. Ce défaut du modèle est à relier à l'utilisation d'une constante unique  $A_s$  dans le modèle microscopique. La valeur de cette constante est en effet directement associée à la pente à l'origine de la courbe anhystérétique. En choisissant

$A_s$  constant, on accepte implicitement que les courbes d'aimantation anhystérétiques présentent des susceptibilités initiales très proches. Une solution pourrait consister à faire dépendre cette constante  $A_s$  de l'orientation du cristal considéré par rapport au champ appliqué, ou bien, plus macroscopiquement, de faire dépendre  $A_s$  de la direction du champ appliqué. Les recherches dans cette voie n'ont pas été poursuivies davantage dans la mesure où elles conduiraient à une définition complexe du paramètre  $A_s$ , qui est le paramètre de la modélisation dont le sens physique est le plus flou. Cela reviendrait une nouvelle fois à rejeter dans ce paramètre d'ajustement les mécanismes physiques inconnus.

On constate également sur la figure 3.33 que le comportement magnétique anhystérétique à bas champ est surestimé. Ceci est directement lié à la susceptibilité initiale, et donc au paramètre  $A_s$ . Choisir une valeur plus faible pour  $A_s$  conduirait à une meilleure estimation quantitative du comportement moyen à bas champ.

Le perfectionnement du modèle pour les faibles niveaux de champ n'a pas été poursuivi davantage. En effet, cette zone n'est pas ici la préoccupation principale, d'une part parce qu'il s'agit de la zone linéaire pour laquelle des outils plus simples semblent mieux adaptés, et d'autre part parce que le point de fonctionnement des machines électriques se trouve plutôt dans la région du coude de la courbe d'aimantation.

Une autre façon de mettre en évidence l'anisotropie du comportement magnétique consiste à évaluer la désorientation angulaire entre la direction de l'aimantation et la direction du champ magnétique appliqué. Dans le cas d'un comportement isotrope, l'aimantation s'aligne systématiquement sur la direction du champ magnétique appliqué, afin de respecter les symétries matérielles. Ce n'est plus le cas si le comportement est anisotrope, et la direction de  $\vec{M}$  peut être décalée vis à vis de la direction de  $\vec{H}$  lorsque ce dernier n'est pas appliqué suivant un axe de symétrie du matériau (voir figure 3.34).

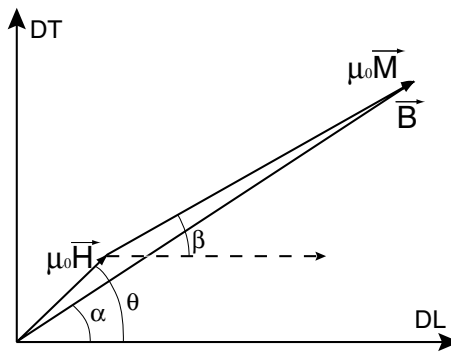


Figure 3.34 – Désorientations angulaires entre  $\vec{M}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans le cas d'un comportement magnétique anisotrope

Le modèle multi-échelle permet de rendre compte de ces effets d'anisotropie. La figure 3.35 montre les désorientations angulaires obtenues entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  en fonction du champ magnétique appliqué pour le fer à 3% de silicium.

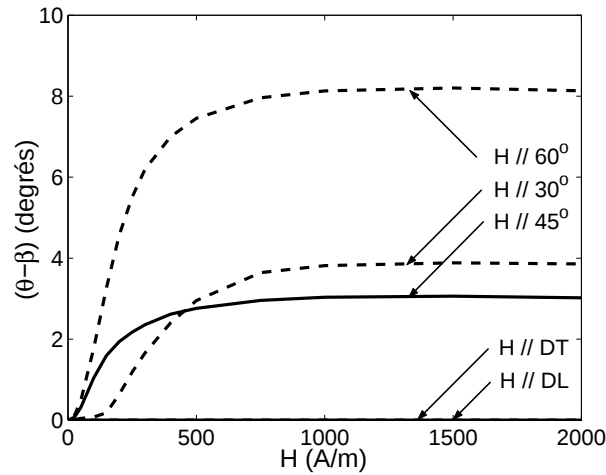


Figure 3.35 – Désorientations angulaires entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  - Résultats de calcul - Fe-3%Si

La direction de l'aimantation ne s'éloigne de la direction du champ magnétique que pour les faibles valeurs du champ d'excitation. Lorsque le champ augmente, le phénomène de rotation de l'aimantation dans les domaines tend à rapprocher progressivement la direction de l'aimantation moyenne de celle du champ magnétique, jusqu'à les aligner. A bas champ en revanche, la désorientation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  peut dépasser  $8^\circ$  en fonction de la direction du champ appliqué.  $\vec{H}$  étant très faible, en norme, devant  $\vec{M}$ , les angles  $(\theta - \alpha)$  - désorientation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  - et  $(\theta - \beta)$  - désorientation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  - sont quasiment égaux. Si le champ magnétique est appliqué suivant un axe de symétrie matérielle (c'est à dire DL ou DT, le matériau étant orthotrope), l'aimantation s'aligne sur le champ magnétique. Si on applique le champ magnétique suivant une autre direction, une désorientation apparaît et atteint son maximum pour un champ magnétique compris entre 500 et 1000 A/m. La plus forte désorientation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  est observée pour un champ magnétique appliqué à  $60^\circ$  par rapport à la direction du laminage.

La mise en évidence expérimentale de cet effet d'anisotropie nécessite une mesure magnétique bi-dimensionnelle, afin de connaître les deux composantes de l'aimantation dans le plan de tôle. Le banc magnétique utilisé actuellement au LMT-Cachan ne permet pas de telles mesures. Des mesures de ce type ont été réalisées sur le fer-silicium NO par M. Delage dans le cadre de ses travaux de thèse [Delage, 1997], à partir d'un banc de mesures spécifique. La désorientation angulaire entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$ , lorsque le champ magnétique est dirigé suivant un axe autre qu'un axe de symétrie, y est mise en évidence. Les mesures ont été effectuées à très bas champ ( $\|\vec{H}\| < 400 \text{ A/m}$ ) et les désorientations obtenues peuvent aller jusqu'à  $12^\circ$ . Elles sont un peu plus élevées, mais du même ordre de grandeur, que celles prédites par le modèle multi-échelle. Ces travaux mettent également en évidence que l'application d'une contrainte amplifie ces effets d'anisotropie. Une contrainte de traction de 10 MPa peut conduire à une désorientation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  de  $20^\circ$ , et une contrainte de 55 MPa à une désorientation allant jusqu'à  $35^\circ$ . Le modèle multi-échelle semble en mesure de décrire ce genre de phénomènes (figure 3.36). La désorientation angulaire est cette fois surestimée par rapport aux résultats expérimentaux de [Delage, 1997].

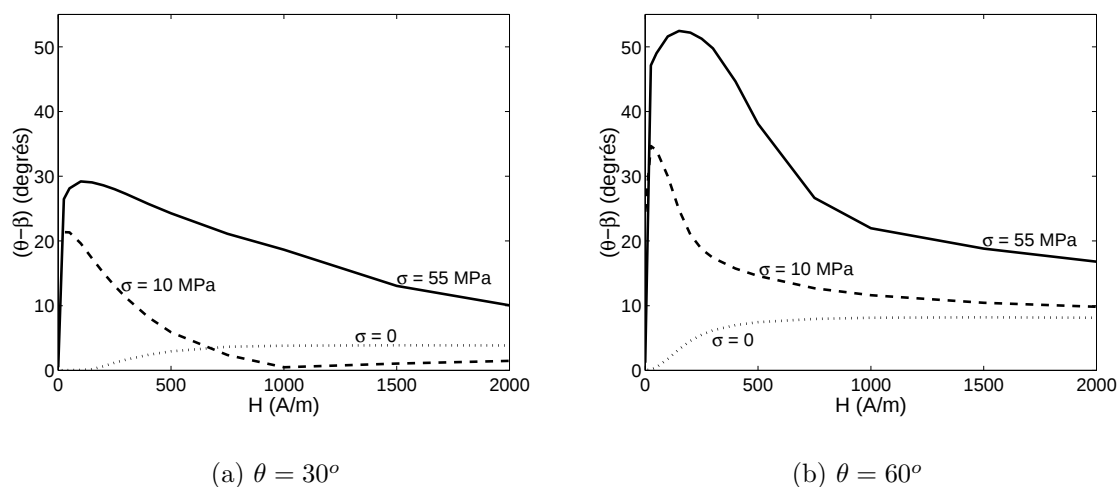


Figure 3.36 – Désorientations angulaires entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  pour une contrainte non nulle - Résultats de calcul - Fe-3%Si

### 3.5.3 Comportement magnéto-élastique

Concernant la déformation de magnétostriction, les résultats expérimentaux ont également été comparés aux prévisions du modèle. La figure 3.37 présente ces comparaisons pour cinq directions du champ magnétique appliqué.

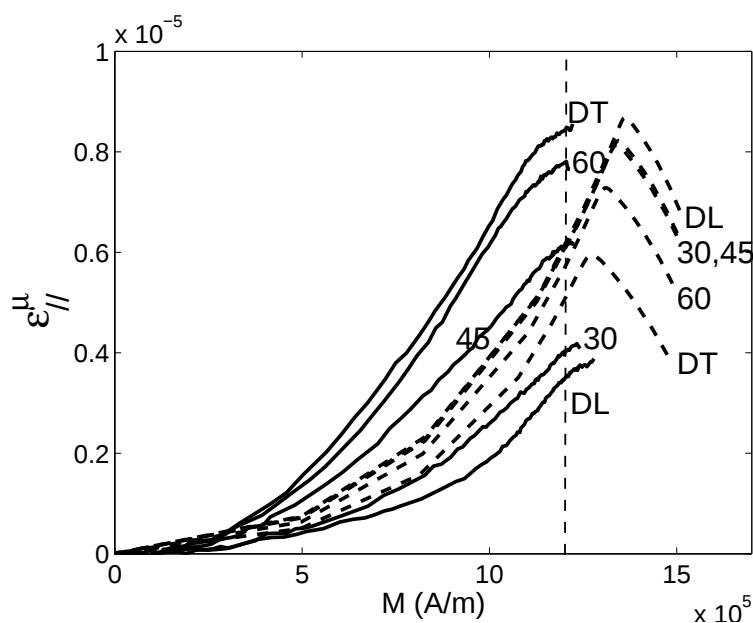


Figure 3.37 – Courbes de magnétostriction anhystérétique - comparaison des résultats expérimentaux (lignes) et numériques (pointillés) - Fe-3%Si NO

Le niveau moyen de la déformation de magnétostriction est décrit de façon correcte. L'inversion du sens de variation de la déformation de magnétostriction prévue par le modèle pour les forts niveaux d'aimantation correspond à un stade où l'état magnétique devient essentiellement piloté par la rotation de l'aimantation dans les domaines. Cette inversion du sens de variation apparaît aussi expérimentalement si on réalise les mesures pour des champs magnétiques plus intenses [Yamasaki et al., 1996].

Afin d'observer plus facilement l'anisotropie du comportement magnétique, une coupe de la figure 3.37 (trait pointillé vertical) a été réalisée pour une valeur d'aimantation  $||\vec{M}_m|| = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ . Les valeurs obtenues pour la déformation de magnétostriction - expérimentalement et numériquement - sont représentées sur la figure 3.38.

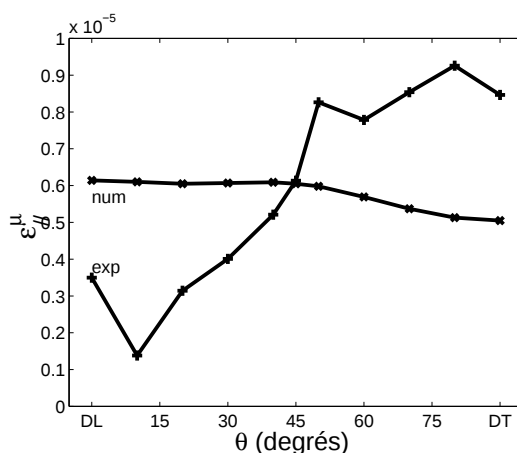


Figure 3.38 – Anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques -  $||\vec{M}_m|| = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A/m}$  - Fe-3%Si NO

On constate que l'anisotropie prévue par le modèle est inversée par rapport aux observations expérimentales. De plus, le modèle prévoit un comportement assez proche de l'isotropie alors que l'expérience révèle une très forte anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle.

Cette inversion de l'anisotropie magnétostrictive pourrait être liée à un effet de surface. On a vu en effet que l'existence de surfaces libres modifie le comportement magnétique. On montrera au chapitre suivant que cet effet de surface a un impact direct sur la configuration en domaines à l'état désaimanté, et donc sur la déformation de magnétostriction. Un éventuel état de contraintes résiduelles, ignoré jusqu'ici, peut également avoir une forte influence sur le comportement initial.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les paramètres nécessaires au fonctionnement du modèle ont été identifiés.

Des essais de validation ont ensuite été menés sur un alliage de fer à 3% de silicium dit à grains non-orientés (NO). Les comportements élastique, magnétique et magnétostrictif ont ainsi été caractérisés.

Les premières comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques font apparaître certains écarts. En particulier, le modèle multi-échelle ne semble pas en mesure de prédire convenablement l'anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle. L'anisotropie macroscopique ne découle pas simplement des effets de texture, et d'autres sources d'anisotropie supplémentaires sont à envisager. Ce point fait l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 4

## Autres sources d'anisotropie

### Sommaire

---

|            |                                              |            |
|------------|----------------------------------------------|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Champ démagnétisant</b>                   | <b>92</b>  |
| 4.1.1      | Principe                                     | 93         |
| 4.1.2      | Résultats                                    | 93         |
| <b>4.2</b> | <b>Effet de surface</b>                      | <b>95</b>  |
| 4.2.1      | Principe                                     | 95         |
| 4.2.2      | Application au monocristal de fer            | 96         |
| 4.2.3      | Application au polycristal                   | 102        |
| <b>4.3</b> | <b>Effet des contraintes résiduelles</b>     | <b>105</b> |
| 4.3.1      | Comportement sous contraintes du monocristal | 105        |
| 4.3.2      | Passage au polycristal                       | 110        |
| <b>4.4</b> | <b>Conclusion</b>                            | <b>116</b> |

---

Le chapitre précédent a permis de dégager certaines faiblesses de la modélisation multi-échelle proposée. Ces faiblesses concernent principalement la description de l'anisotropie magnétostrictive du polycristal. L'anisotropie macroscopique prédite résulte en effet uniquement de la combinaison de l'anisotropie monocristalline et de la texture cristallographique. Ces sources d'anisotropie sont prépondérantes et permettent de décrire correctement l'anisotropie du comportement magnétique observée expérimentalement. Elles semblent cependant insuffisantes pour expliquer les effets d'anisotropie plus complexes observés pour la déformation de magnétostriction. On cherche à identifier dans ce chapitre d'autres sources potentielles d'anisotropie magnétostrictive, qui pourraient permettre d'expliquer les observations expérimentales du chapitre précédent.

## 4.1 Champ démagnétisant

L'une des insuffisances du modèle réside dans l'absence de prise en compte du champ démagnétisant au sein du matériau. On peut séparer les effets de champ démagnétisant en trois contributions distinctes (figure 4.1) :

- un champ démagnétisant macroscopique lié à la géométrie des échantillons étudiés. Ce champ est déjà pris en compte dans la définition de  $\vec{H}_{\text{ext}}$  et n'intervient donc pas dans la modélisation. Les résultats de mesure présentent intègrent cet effet démagnétisant.
- un champ démagnétisant à l'échelle du grain. L'existence de ce champ, dans un grain, est liée à la présence autour de lui de grains dont l'aimantation est différente, créant ainsi une hétérogénéité du champ d'aimantation, source de champ démagnétisant. C'est le calcul de ce terme qui fait l'objet de ce paragraphe.
- un champ démagnétisant de domaine à domaine, provoqué également par une non-uniformité de l'aimantation mais cette fois à l'intérieur du grain. Ce terme n'est pas calculé dans la modélisation proposée. Son rôle est supposé pris en compte à travers le paramètre  $A_s$ , introduit au paragraphe 2.2.3.

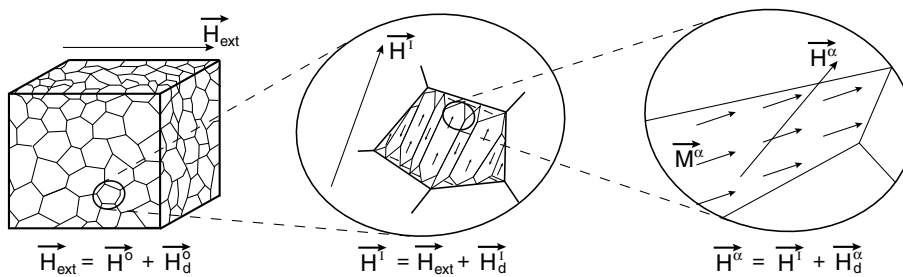


Figure 4.1 – Définition du champ démagnétisant à différentes échelles - Echelle du VER, du grain, et du domaine magnétique

On s'attache donc ici à la définition d'un terme de champ démagnétisant par grain, que l'on note  $\vec{H}_d^{\mathbf{I}}$ .

#### 4.1.1 Principe

Le champ démagnétisant de grain à grain est donné dans le cas d'un comportement magnétique isotrope linéaire et pour une modélisation autocohérente par la relation (2.62), rappelée ici :

$$\vec{H}^{\mathbf{I}} = \vec{H}_{\text{ext}} + \frac{1}{3 + 2\chi_{\mathbf{m}}}(\vec{M}_{\mathbf{m}} - \vec{M}^{\mathbf{I}}) \quad (4.1)$$

Nous choisissons d'étendre cette définition au cas non-linéaire en utilisant pour  $\chi_{\mathbf{m}}$  une estimation de la susceptibilité sécante du polycristal. On définit donc le champ démagnétisant sous la forme :

$$\vec{H}_d^{\mathbf{I}} = N_d(\vec{M}_{\mathbf{m}} - \vec{M}^{\mathbf{I}}) \quad (4.2)$$

en notant :

$$N_d = \frac{1}{3 + 2\chi_{\mathbf{m}}} \quad (4.3)$$

$\chi_{\mathbf{m}}$  est définie par :

$$\chi_{\mathbf{m}} = \frac{\|\vec{M}_{\mathbf{m}}\|}{\|\vec{H}_{\text{ext}}\|} \quad (4.4)$$

Les valeurs utilisées pour  $\vec{M}_{\mathbf{m}}$  et  $\vec{M}^{\mathbf{I}}$  seront également les estimations fournies par le modèle. Ce schéma de modélisation a donc nécessairement recours à un processus itératif pour déterminer le comportement magnétique. L'effet du couplage magnéto-mécanique apparaît dans la relation (4.1) à travers son effet dans la définition de l'aimantation.

#### 4.1.2 Résultats

Le comportement des tôles de fer à 3% de silicium a été modélisé en utilisant les mêmes données qu'au paragraphe 3.5. Les résultats comparés du modèle avec et sans prise en compte du champ démagnétisant sont présentés sur la figure 4.2.

La prise en compte du champ démagnétisant (de la façon présentée) n'a qu'une influence modérée sur la courbe d'aimantation anhystérétique prévue (figure 4.2(a)). Elle tend à réduire l'aimantation du matériau pour une valeur de champ donnée, c'est à dire à freiner l'aimantation (c'était le résultat attendu). Cette influence présente des amplitudes du même ordre de grandeur dans les directions DL et DT. Elle ne semble donc pas introduire d'anisotropie supplémentaire. L'effet du champ démagnétisant est négligeable à bas champ. Son importance est maximale dans le coude de la courbe d'aimantation. Cette situation correspond à une forte hétérogénéité de l'aimantation, et donc du champ magnétique. Son amplitude diminue ensuite au fur et à mesure que le champ magnétique appliqué augmente, accompagné par une harmonisation progressive des valeurs de l'aimantation d'un grain à l'autre du polycristal.

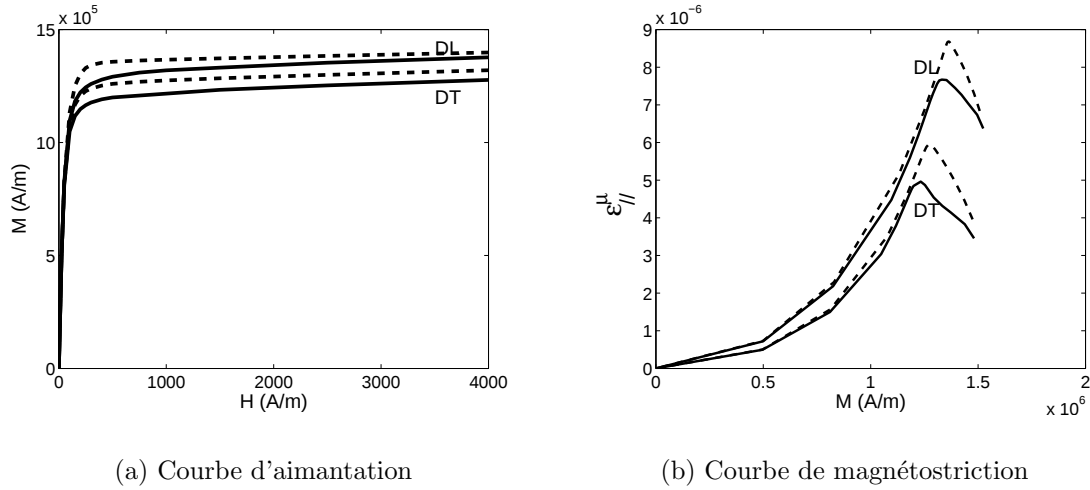


Figure 4.2 – *Comportement anhystérétique dans les directions DL et DT - Résultats de calcul avec (lignes) et sans (pointillés) prise en compte du champ démagnétisant - Fe-3%Si NO*

L'effet du champ démagnétisant sur le comportement magnétostrictif se traduit par une diminution de l'amplitude de la déformation de magnétostriction mesurée parallèlement au champ appliqué (figure 4.2(b)). Aucune anisotropie supplémentaire ne semble apparaître puisque les variations sont comparables dans les directions DL et DT. L'effet démagnétisant est maximal pour un niveau d'aimantation correspondant au coude de saturation.

L'introduction d'un terme démagnétisant permet de mettre en avant l'hétérogénéité du champ magnétique au sein du matériau, ce qu'illustrent les figures 4.3 et 4.4.

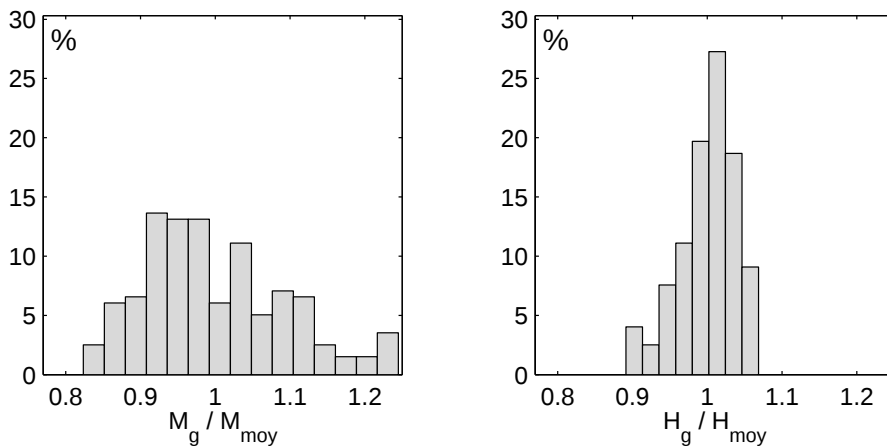


Figure 4.3 – *Distribution par grains de la norme de l'aimantation et du champ magnétique dans le matériau -  $\|\vec{H}_{\text{ext}}\| = 150$  A/m - Résultats de calcul avec prise en compte du champ démagnétisant*

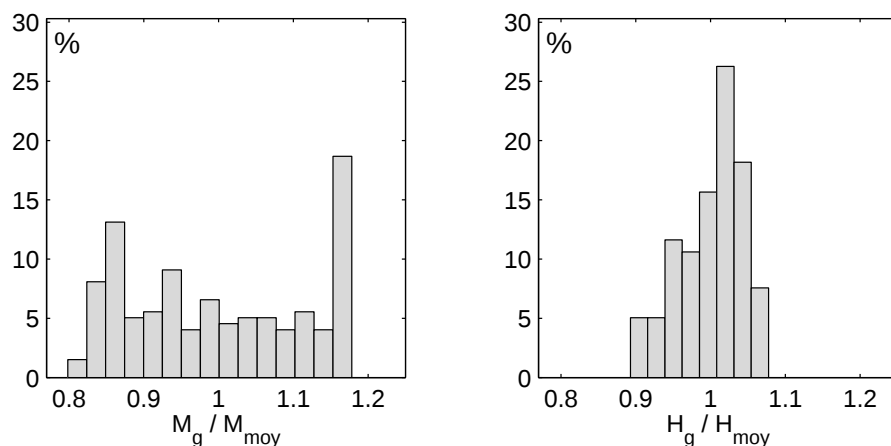


Figure 4.4 – *Distribution par grains de la norme de l'aimantation et du champ magnétique dans le matériau -  $\|\vec{H}_{\text{ext}}\| = 500 \text{ A/m}$  - Résultats de calcul avec prise en compte du champ démagnétisant*

On a représenté sur ces figures, pour un niveau de champ macroscopique donné, la distribution de la norme de l'aimantation et de la norme du champ magnétique par grain dans le cas d'un calcul avec prise en compte du champ démagnétisant. On constate en particulier que la distribution de l'aimantation au sein du matériau est très hétérogène. Le champ magnétique est lui moins hétérogène, mais ceci est directement lié à la méthode de modélisation choisie.

Des solutions à la surestimation du comportement magnétique se trouvent sans doute dans le développement de modèles variationnels du type de ceux proposés par Ponte-Castañeda [Ponte-Castañeda, 1992a]. Ces méthodes nécessitent l'écriture d'un potentiel thermodynamique pour la description du comportement magnétique du monocristal. Cette écriture pose encore de nombreux problèmes théoriques compte-tenu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu.

Les effets démagnétisants considérés dans ce chapitre ne semblent pas introduire d'anisotropie supplémentaire, et ne permettent donc pas d'expliquer les désaccords qualitatifs entre les mesures et les simulations (pour la déformation de magnétostriction) observés au chapitre précédent.

## 4.2 Effet de surface

Une seconde faiblesse du modèle est l'hypothèse sous-jacente de milieu infini, qui ignore la faible épaisseur des tôles employées comparée à la taille des grains (typiquement quelques grains dans l'épaisseur). L'idée proposée ici est d'introduire cet effet de surface directement à travers la loi de comportement.

### 4.2.1 Principe

La présence d'une surface libre se traduit concrètement par une transition brutale de la valeur de l'aimantation entre l'intérieur du matériau et l'air. Dans ces

conditions, un champ démagnétisant de surface tend à maintenir l'aimantation dans le plan de tôle. Ceci peut-être introduit dans le modèle en rendant extrêmement défavorable l'existence d'une composante de l'aimantation normale à la surface, pour les grains situés en surface. On transforme ainsi l'effet de structure en effet d'anisotropie.

Un terme énergétique est donc ajouté à l'expression de l'énergie interne d'un domaine, donnée par l'équation (2.7). On choisit pour ce terme, appelé énergie de surface, l'expression donnée par la relation (4.5) :

$$W_s^\alpha = N_s (\vec{\gamma}^\alpha \cdot \vec{n}_0)^2 \quad (4.5)$$

où  $\vec{n}_0$  désigne la direction normale à la surface libre,  $\vec{\gamma}^\alpha$  la direction de l'aimantation dans le domaine considéré, et  $N_s$  une constante qui définit la valeur maximale de l'énergie de surface.

Plus la direction de l'aimantation dans un domaine est proche de la normale, plus  $W_s^\alpha$  est grand, et plus l'existence de ce domaine est pénalisée. En revanche un domaine dont l'aimantation est parallèle à la surface libre ne voit pas son énergie libre modifiée.

Afin de tester l'effet de cette composante énergétique, on l'applique tout d'abord au monocristal, dans des configurations simples.

### 4.2.2 Application au monocristal de fer

On utilise les constantes matériaux relatives au monocristal de fer pur (voir tableau 2.1). On compare ci-après les résultats obtenus pour les comportements magnétique et magnétostrictif avec et sans introduction de l'énergie de surface. Dans toutes les configurations étudiées, le champ  $\vec{H}_{\text{ext}}$  est parallèle à la direction macroscopique  $\vec{X}$ , et la normale à la surface est suivant la direction macroscopique  $\vec{Z}$ . On fait varier l'orientation du monocristal dans le repère macroscopique. Cette orientation est exprimée par les angles d'Euler  $(\phi_1, \psi, \phi_2)$ . La valeur de  $N_s$  est fixée à 1000 J/m<sup>3</sup>.

#### 4.2.2.1 Configuration 1

Les angles d'Euler sont (0,0,0) (figure 4.5(a)). Le champ est donc appliqué dans une direction  $\langle 100 \rangle$  du monocristal, et la normale à la surface est parallèle à une autre direction  $\langle 100 \rangle$ . La figure 4.5 montre les courbes d'aimantation et de magnétostriction obtenues.

L'application de l'effet de surface conduit à une augmentation de la susceptibilité prédite (figure 4.5(b)). Les domaines défavorisés par l'effet de surface sont des domaines dont l'aimantation a une direction très différente de celle du champ appliqué, et qui avaient tendance à freiner l'aimantation.

Lorsqu'on applique l'effet de surface, la déformation de magnétostriction calculée à aimantation nulle n'est plus nulle (figure 4.5(c)). La configuration initiale (à aimantation nulle) n'est pas telle que chaque famille de domaines soit également représentée dans le monocristal. C'est ce qu'illustre la figure 4.5(d). Les fractions volumiques de chaque famille de domaine ne valent pas  $\frac{1}{6}$  à aimantation nulle, contrairement à l'hypothèse intrinsèque au modèle en l'absence d'effet de surface. L'effet de surface

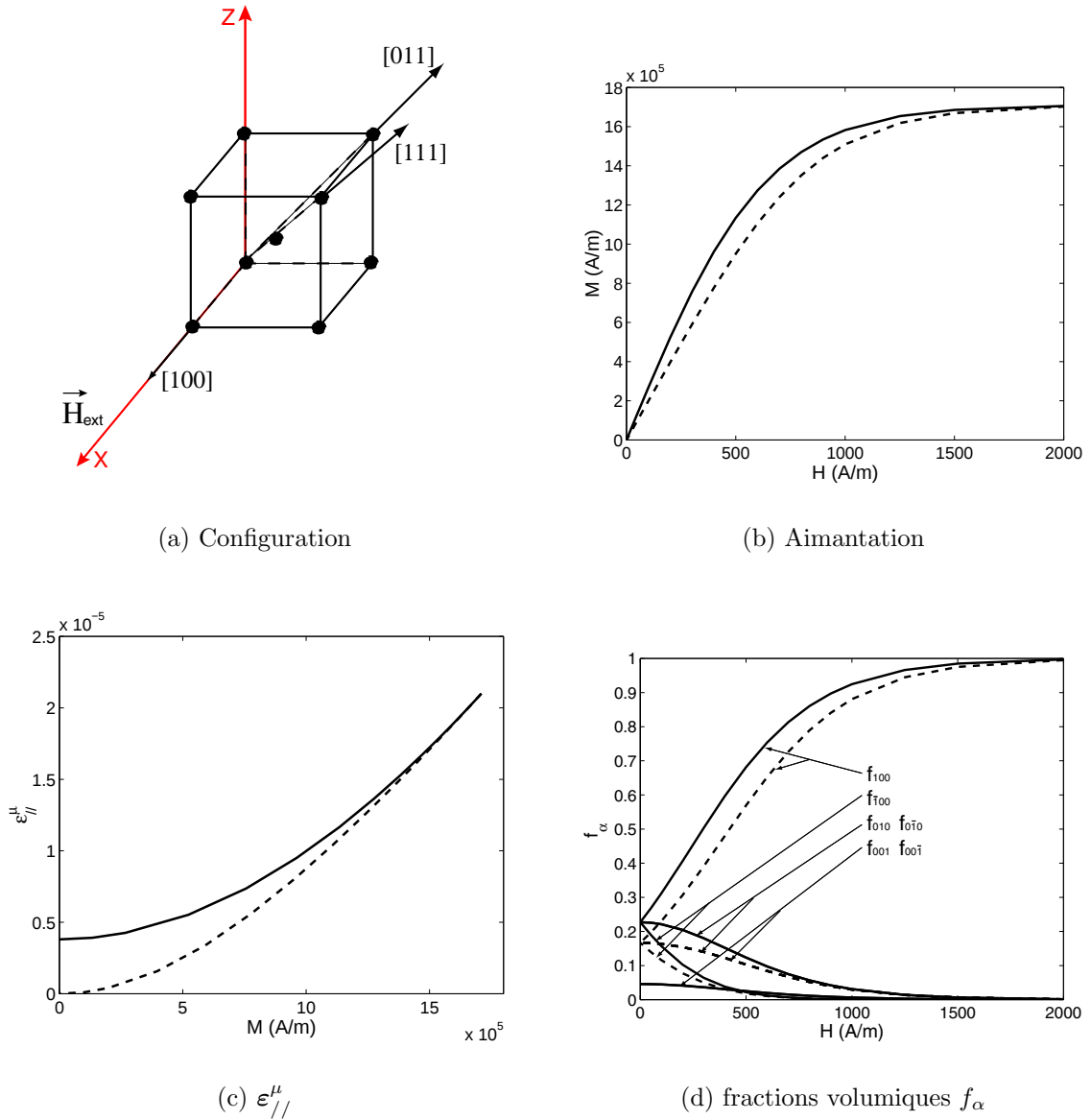


Figure 4.5 – Résultats pour la configuration 1 - Calculs avec (lignes) et sans (pointillés) prise en compte de l'effet de surface

pénalise les domaines dont la direction de facile aimantation initiale présente une forte composante perpendiculaire à la surface libre, et, en conséquence, favorise les autres. On crée ainsi un état initial différent de celui décrit dans la modélisation schématisée présentée au paragraphe 2.2.1 du chapitre 2 (voir figure 2.3). Pour les fortes valeurs de champ magnétique, les prévisions avec et sans effet de surface se rejoignent, car l'énergie de surface devient négligeable devant les variations de l'énergie de champ.

### 4.2.2.2 Configuration 2

Les angles d'Euler sont  $(45^\circ, 0, 0)$  (figure 4.6(a)). Le champ est appliqué dans une direction  $\langle 110 \rangle$  du monocristal, et la normale à la surface est parallèle à une direction  $\langle 100 \rangle$ . La figure 4.6 montre les courbes d'aimantation et de magnétostriction obtenues.

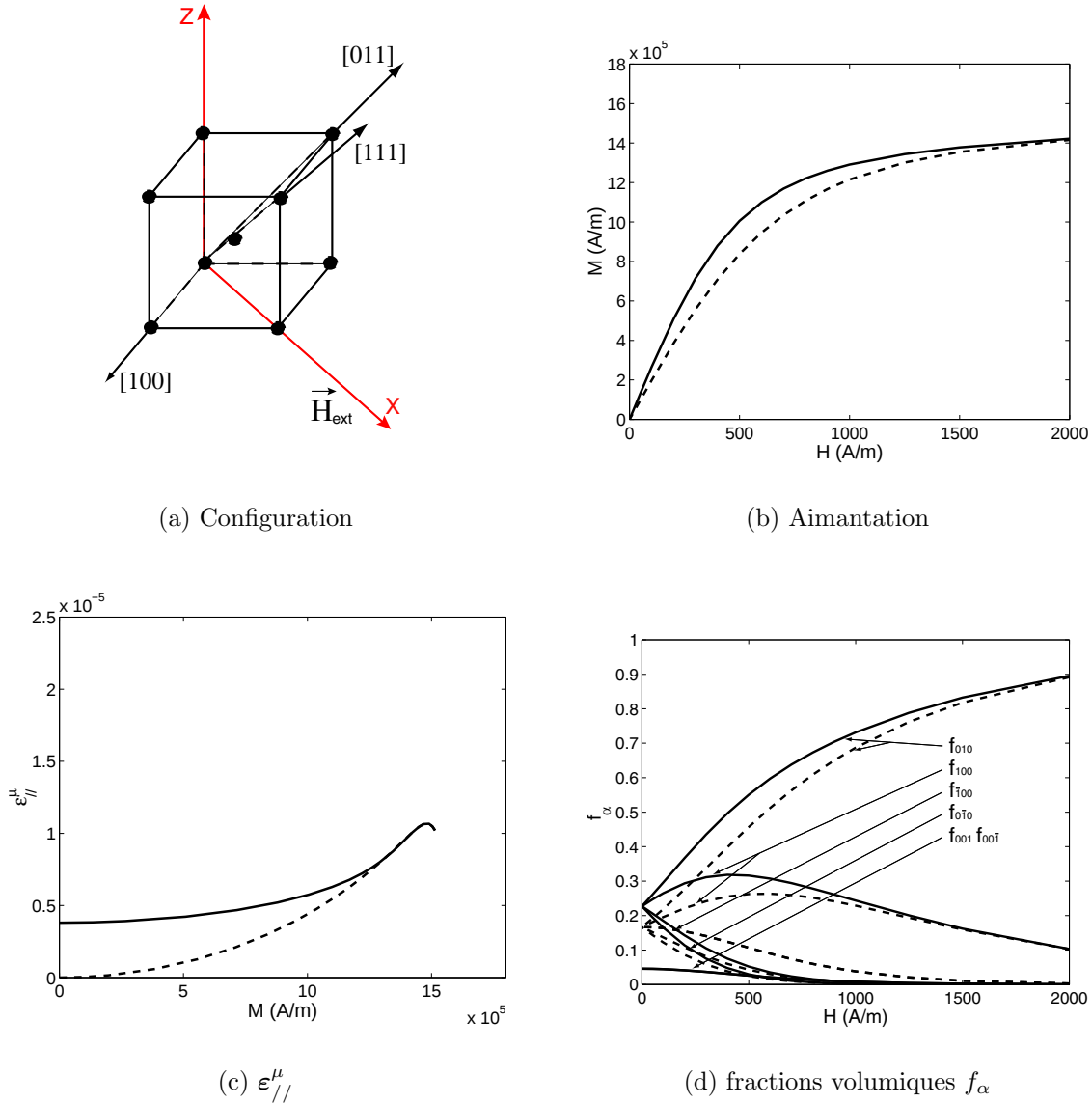


Figure 4.6 – Résultats pour la configuration 2 - Calculs avec (lignes) et sans (pointillés) prise en compte de l'effet de surface

Les conséquences de l'application d'un effet de surface sont qualitativement les mêmes que dans la configuration 1. La susceptibilité est augmentée (figure 4.6(b)), et une déformation de magnétostriction positive - par rapport à l'état de référence où les six familles de domaines sont également représentées - est prédite à aimantation nulle (figure 4.6(c)). Une configuration initiale différente de l'état de référence (figure

4.6(d)) explique ce résultat.

#### 4.2.2.3 Configuration 3

Les angles d'Euler sont  $(0,45^\circ,0)$ . Le champ est appliqué dans une direction  $\langle 100 \rangle$  du monocristal, et la normale à la surface est parallèle à une direction  $\langle 110 \rangle$ . La figure 4.7 montre les courbes d'aimantation et de magnétostriction obtenues.

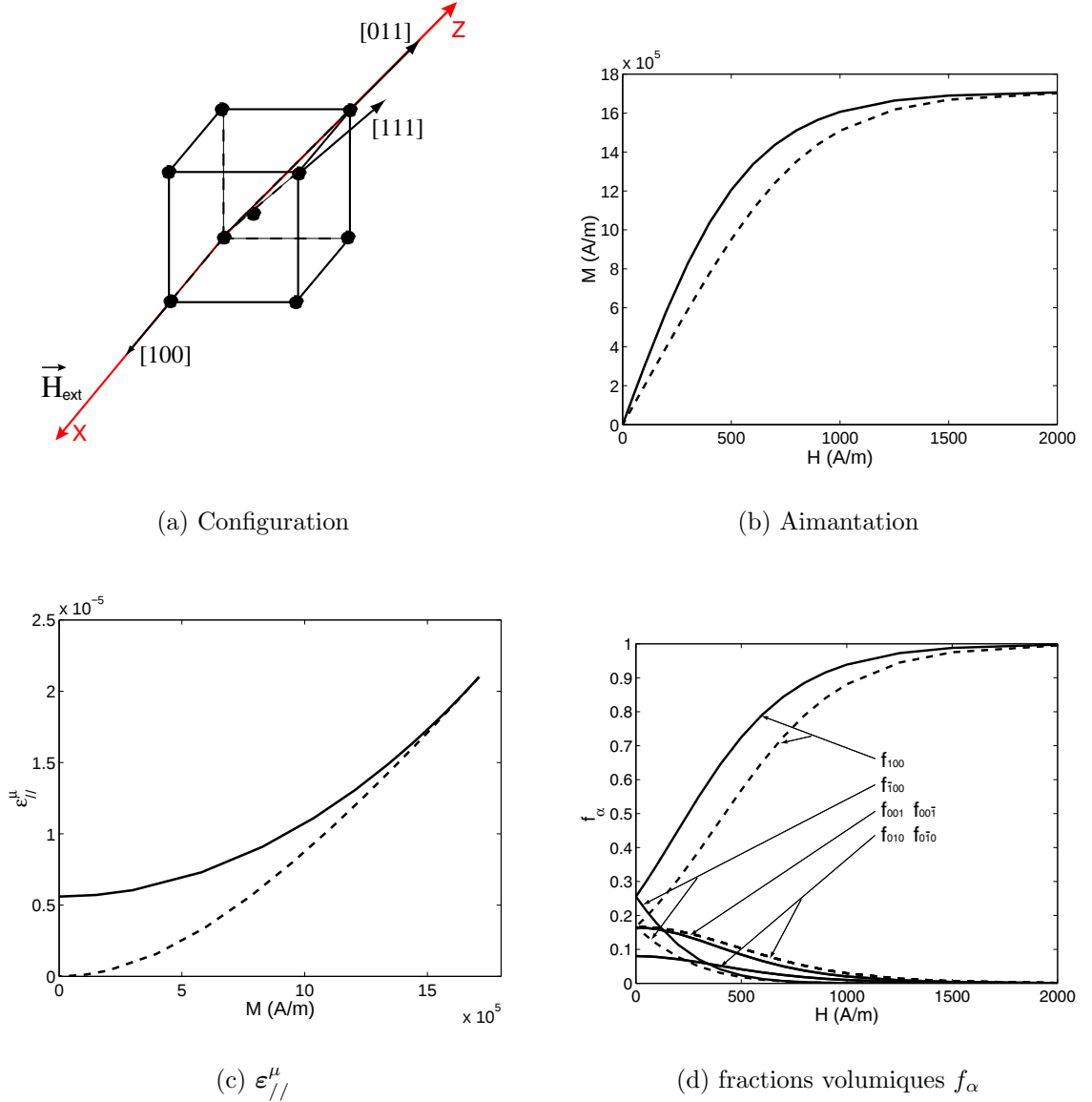


Figure 4.7 – Résultats pour la configuration 3 - Calculs avec (lignes) et sans (pointillés) prise en compte de l'effet de surface

Des effets similaires aux deux configurations précédentes sont observés, ayant pour origine une configuration en domaines à l'état désaimanté profondément modifiée.

#### 4.2.2.4 Configuration 4

Les angles d'Euler choisis sont  $(-90^\circ; 54,73^\circ; 45^\circ)$ . Le champ est appliqué dans une direction  $\langle 110 \rangle$  du monocristal, et la normale à la surface est parallèle à une direction  $\langle 111 \rangle$ . Les courbes d'aimantation et de magnétostriction sont données sur la figure 4.8.

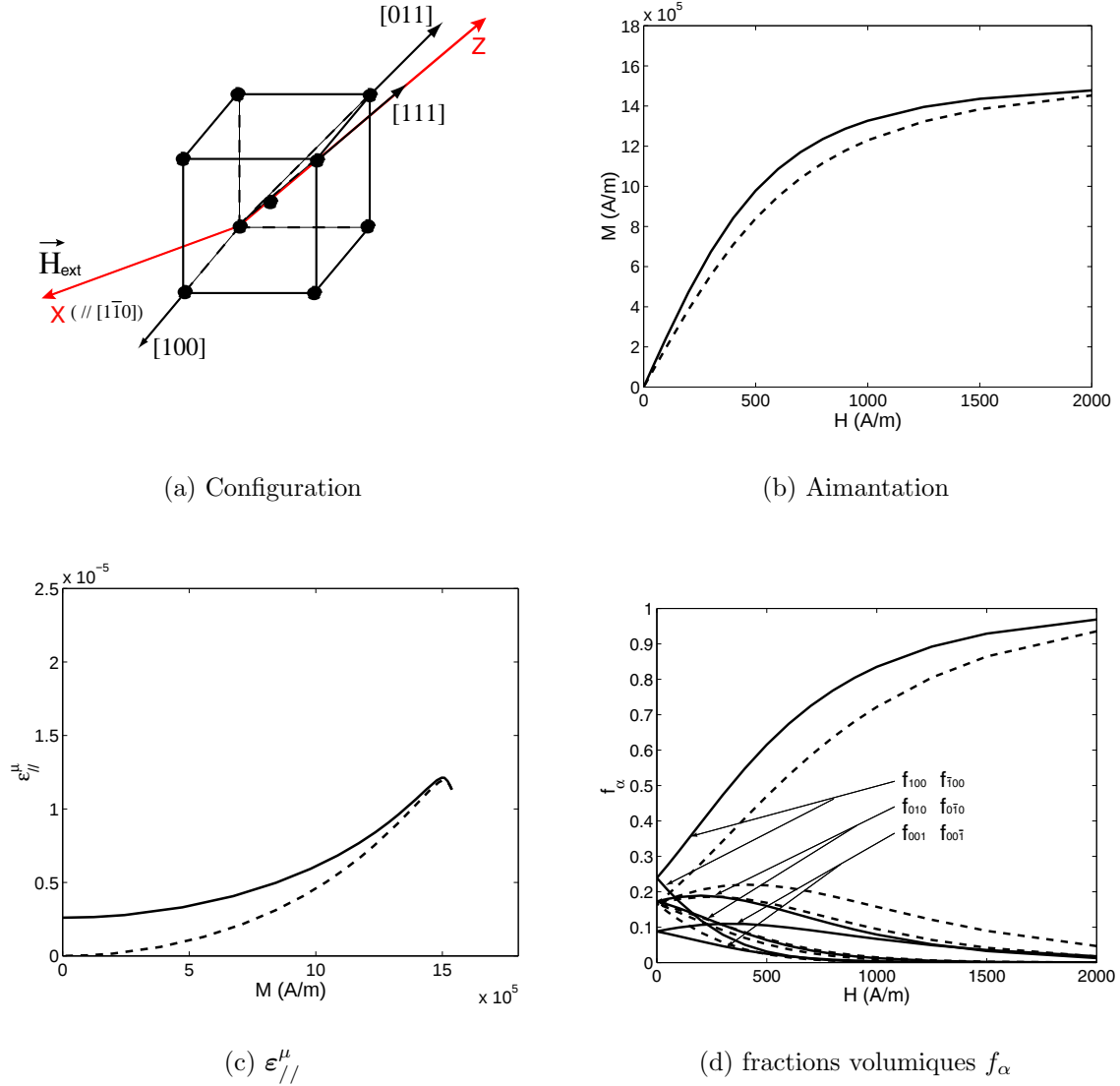


Figure 4.8 – Résultats pour la configuration 4 - Calculs avec (lignes) et sans (pointillés) prise en compte de l'effet de surface

On peut tirer le même type de conclusions, seuls les aspects quantitatifs sont variables d'une configuration à l'autre, l'aspect qualitatif étant conservé.

L'introduction de ce terme énergétique de surface met en relief l'importance de la configuration initiale dans la définition du comportement magnétostrictif. Si on

ramène à l'origine le premier point de la courbe de magnétostriction de la figure 4.8(c) (ce que l'on fait lorsqu'on réalise une mesure expérimentale), on s'aperçoit que le niveau de la déformation maximale prédite sera sensiblement différent avec et sans effet de surface. Ainsi, la valeur maximale prédite est fortement dépendante de l'effet de surface, et plus généralement de l'état initial.

Ce constat est directement lié à la non-unicité de la configuration en domaines à aimantation nulle. L'étendue des configurations possibles, et leur influence sur le comportement magnétostrictif, rend complexe la prévision de la déformation de magnétostriction. L'application d'un effet de surface permet de définir sans doute de façon plus réaliste la structure en domaines initiale et donc le comportement magnétostrictif apparent.

La sensibilité de la prévision à cet effet de surface peut permettre de fournir une explication à la description inversée de l'anisotropie des tôles de fer-silicium constatée au chapitre 3. Nous proposons une explication de principe en raisonnant sur un agrégat de quatre grains. Cet agrégat est orthotrope (trois grains étant obtenus par symétrie du premier, choisi au hasard). La figure 4.9 fournit les figures de pôle de l'agrégat ainsi défini.

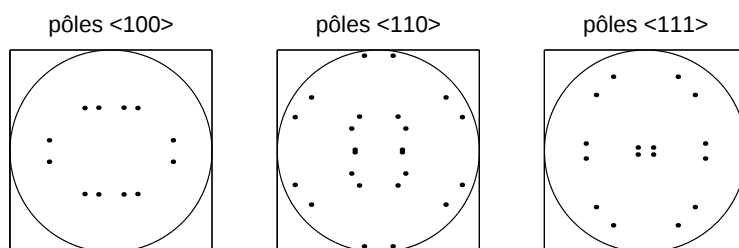


Figure 4.9 – Figures de pôles pour l'agrégat de quatre grains

On choisit arbitrairement deux directions orthogonales, notées (1) et (2), dans le plan de la surface libre. On calcule la déformation de magnétostriction parallèle à la direction du champ magnétique quand celui-ci est appliqué successivement dans les directions (1) et (2). Les résultats sont présentés sur la figure 4.10(a).

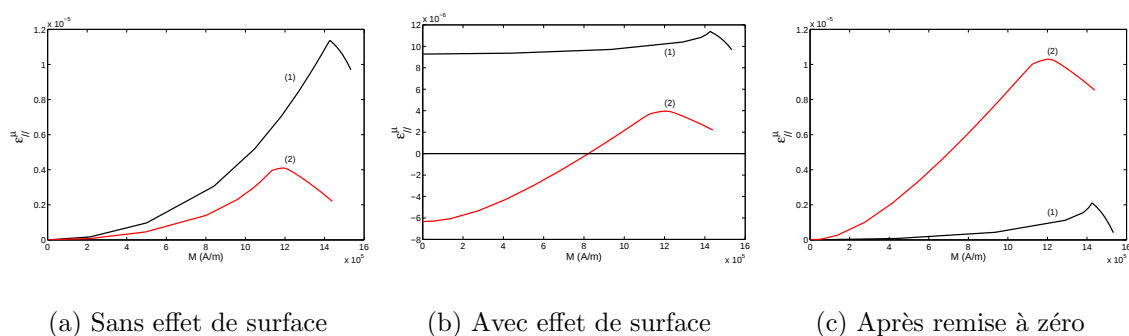


Figure 4.10 – Effet de surface : résultats de principe pour un agrégat de 4 grains

On effectue le même calcul après application de l'effet de surface (en définissant la normale  $\vec{n}_0$  perpendiculaire à (1) et (2)). Les résultats sont présentés sur la figure 4.10(b). La figure 4.10(c) montre les mêmes résultats une fois l'ordonnée à l'origine ramenée à zéro.

On constate que l'effet de surface peut conduire à l'inversion de l'anisotropie relative prédite par le modèle (figures 4.10(a) et 4.10(c)). Nous allons donc appliquer cette méthode au matériau d'étude.

### 4.2.3 Application au polycristal

On utilise les données de texture des tôles de fer à 3% de silicium NO (voir paragraphe 3.3, et les caractéristiques du monocristal données au tableau 3.5. La constante  $A_s$  a été fixée à  $2.10^{-2} m^3/J$  et le coefficient  $N_s$  définissant le niveau maximal de l'énergie de surface à  $1000 J/m^3$ . Cette dernière valeur a été choisie de façon à être du même ordre de grandeur que l'énergie d'anisotropie magnétocristalline. On montre en annexe C que les résultats du modèle, dans le cas des tôles de fer-silicium NO, sont assez peu sensibles à une variation du paramètre  $N_s$ .

Il est possible de fixer une proportion de grains de surface, c'est à dire une proportion de grains affectés par l'effet de surface. Si on considère que seuls les grains adjacents à une surface libre sont affectés, la proportion de grains de surface peut-être approximativement définie par :

$$p_{gs} = 2 * \frac{\phi}{e} \quad (4.6)$$

en considérant 2 surfaces libres pour une tôle d'épaisseur  $e$  et de diamètre de grains moyen  $\phi$ . Dans le cas des tôles de fer-silicium étudiées, on estime :  $p_{gs} \simeq 33\%$ . Ceci permet éventuellement d'intégrer assez facilement dans la modélisation le gradient de texture observé au paragraphe 3.3 du chapitre 3, puisque seule la texture de "surface" est alors affectée par l'effet de surface.

L'introduction du terme de surface n'apporte pas de modification vraiment perceptible sur les courbes d'aimantation anhystérétique du polycristal de fer-silicium pour les forts niveaux de champ. On observe à bas champ une légère augmentation de la susceptibilité prédite. Les fractions volumiques de chaque famille de domaines ne sont que légèrement modifiées par l'application d'un effet de surface. La description de l'anisotropie aux faibles champs magnétiques est cependant améliorée par l'effet de surface comme l'illustre la figure 4.11 (à comparer avec la figure 3.33).

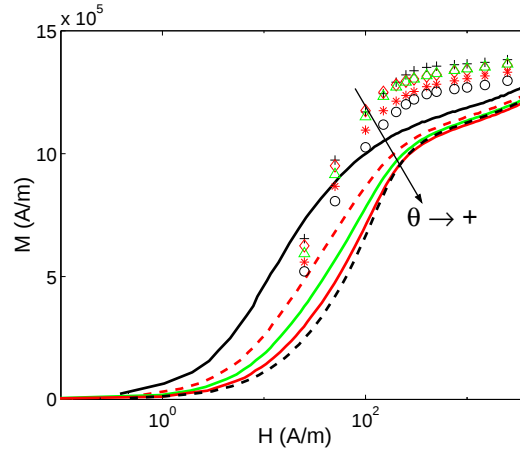


Figure 4.11 – Courbes d'aimantation anhystérétique à bas champ avec prise en compte d'un effet de surface - comparaison des résultats expérimentaux (lignes) et numériques (points) - Echelle logarithmique pour le champ magnétique - Fe-3%Si NO

Le comportement magnétostrictif est plus sensible à l'effet de surface (figure 4.12).

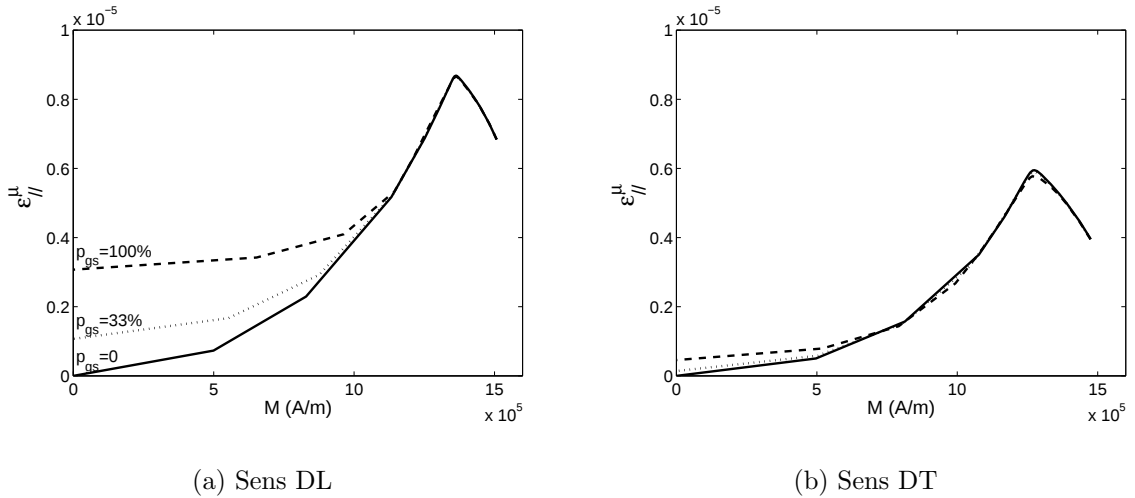


Figure 4.12 – Courbes de magnétostriction du polycristal de fer à 3% de silicium - influence de la proportion de grains de surface - résultats pour 33 et 100% -  $N_s = 1000 \text{ J/m}^3$

L'influence sur la déformation de magnétostriction est importante quand le champ magnétique est appliqué suivant la direction du laminage (figure 4.12(a)). Elle est en revanche négligeable lorsque le champ est suivant la direction transverse (figure 4.12(b)). La déformation de magnétostriction initiale positive dans le sens DL, et quasiment nulle dans le sens DT va bien dans le sens d'une inversion de l'anisotropie relative.

#### 4. Autres sources d'anisotropie

Les résultats obtenus dans différentes directions du plan de tôle sont présentés sur la figure 4.13.

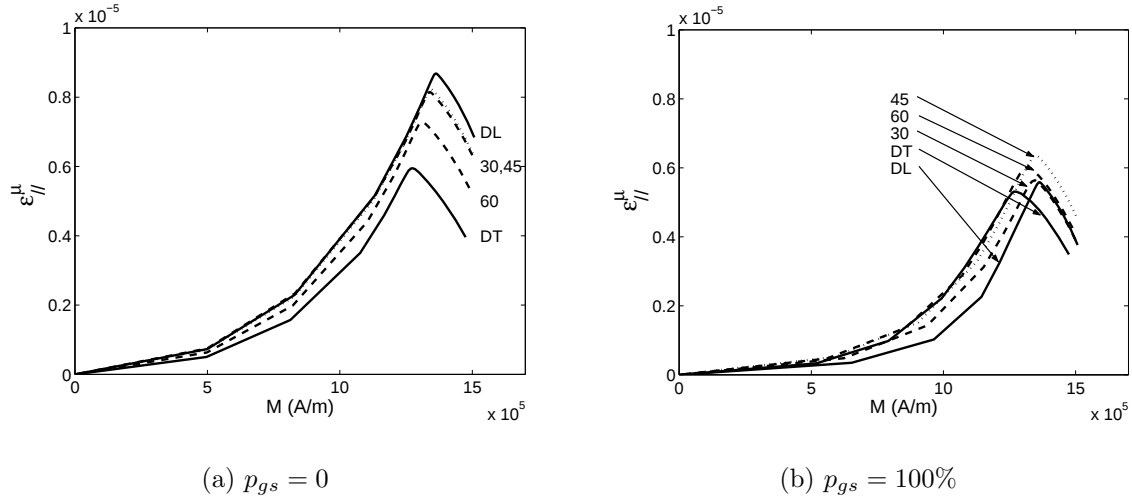


Figure 4.13 – *Courbes de magnétostriction du polycristal de fer à 3% de silicium -  $N_s = 1000 \text{ J/m}^3$*

L'anisotropie magnétostrictive est effectivement modifiée grâce à l'addition de l'énergie de surface. Il ne s'agit cependant pas d'une inversion franche de l'anisotropie (voir figure 4.14).

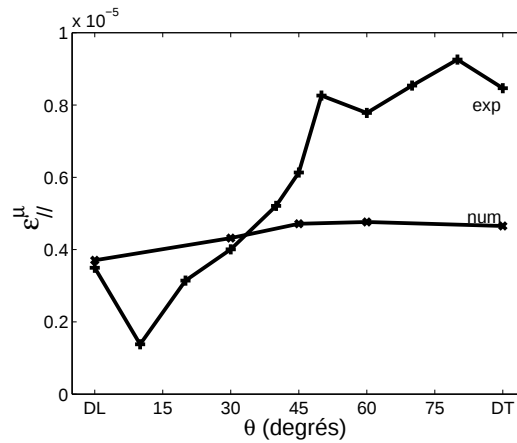


Figure 4.14 – *Anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle - comparaison des résultats expérimentaux et numériques avec prise en compte d'un effet de surface -  $\|\vec{M}_m\| = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A/m}$  - Fe-3%Si NO*

L'anisotropie relative, dans le plan de la tôle dépend désormais du niveau de champ magnétique (donc du niveau d'aimantation). Pour une aimantation moyenne de  $1,2 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ , on trouve bien une déformation de plus forte amplitude (mesurée parallèlement au champ magnétique appliqué) lorsque le champ magnétique est appliqué suivant la direction transverse que lorsqu'il est appliqué suivant la direction

du laminage. Les résultats numériques sont donc qualitativement en accord avec les observations expérimentales (aux niveaux de champ magnétique étudiés). L'anisotropie magnétostrictive obtenue est cependant en deçà de ce qui a été observé expérimentalement (figure 4.14 à comparer à la figure 3.38).

La déformation de magnétostriction à l'état désaimanté étant positive, l'effet de surface diminue l'amplitude de la déformation prédite.

L'introduction d'un effet de surface libre dans la définition du comportement magnéto-élastique permet donc d'expliquer qualitativement le sens de l'anisotropie observée dans le plan des tôles. On voit ainsi que l'anisotropie liée à la texture cristallographique, combinée à l'anisotropie magnétocristalline, ne suffit pas à expliquer l'anisotropie magnétostrictive. L'existence de surfaces libres constitue une source d'anisotropie supplémentaire qu'il peut être intéressant d'introduire directement dans la loi de comportement du matériau, par le truchement d'un terme d'énergie de surface.

Dans le cas du fer-silicium NO, le paramètre  $N_s$  ne permet cependant pas "d'ajuster" cette anisotropie dans le plan de tôle. Les prédictions du modèle sont à peine modifiées si on multiplie  $N_s$  par 2. Ce point est évoqué en annexe C. L'effet de surface ne semble pas suffisant pour expliquer l'anisotropie magnétostrictive mesurée, et d'autres sources potentielles d'anisotropie doivent être envisagées. On s'intéresse dans le paragraphe suivant à l'effet des contraintes résiduelles.

## 4.3 Effet des contraintes résiduelles

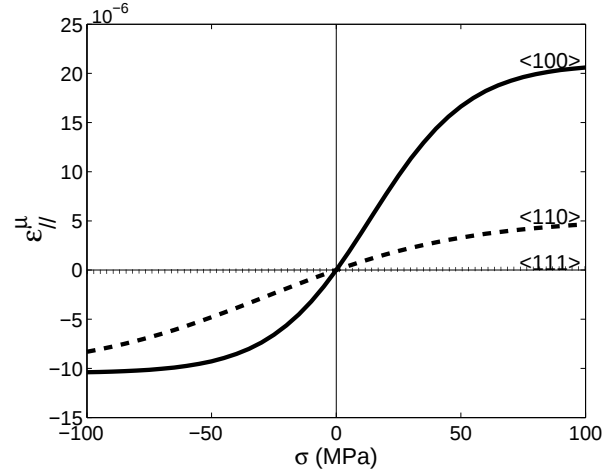
L'existence d'une contrainte, comme on l'a vu au paragraphe 2.2.1, est susceptible de modifier la configuration magnétique à l'état désaimanté. Même dans le cas où aucune sollicitation macroscopique n'est appliquée, la présence d'un champ de contraintes résiduelles dans le matériau peut avoir une influence sur la déformation de magnétostriction, et en particulier sur l'anisotropie dans le plan de tôle. C'est ce que nous mettons en évidence dans ce paragraphe.

### 4.3.1 Comportement magnéto-élastique sous contraintes du monocristal

Afin de mieux cerner les mécanismes concernés, on s'intéresse ici, comme on l'avait fait au paragraphe précédent, au comportement du monocristal.

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous limitons au cas d'une sollicitation de traction-compression uniaxiale, mais le modèle présenté permet tout à fait d'intégrer des sollicitations multiaxiales. On utilise ici les caractéristiques matériau du monocristal de fer pur. On souhaite tout d'abord isoler l'effet d'une contrainte sur la déformation de magnétostriction. On effectue donc - pour différents niveaux et directions de la contrainte - un calcul de magnétostriction sur un monocristal désaimanté, supposé constitué, en proportions égales, de six familles de domaines magnétiques associée chacune à une direction de facile aimantation  $\langle 100 \rangle$  ( $f_\alpha = \frac{1}{6}, \forall \alpha$ ). La figure

4.15 indique la déformation de magnétostriction calculée dans la direction parallèle à la contrainte lorsque cette dernière est appliquée suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  ou  $\langle 111 \rangle$  du monocristal.



(a)

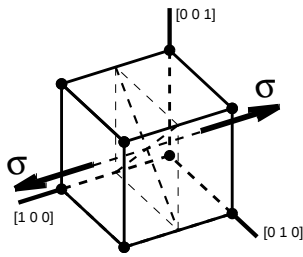
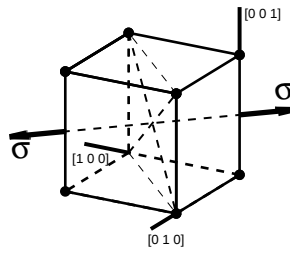
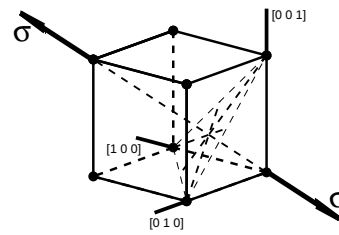

(b)  $\langle 100 \rangle$ 

(c)  $\langle 110 \rangle$ 

(d)  $\langle 111 \rangle$ 

Figure 4.15 – Effet d'une contrainte uniaxiale sur la déformation de magnétostriction (mesurée parallèlement à la contrainte appliquée)- Résultats de calcul - Monocristal de fer pur

L'effet de la contrainte est beaucoup plus marqué lorsque la contrainte est appliquée suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ . Une contrainte appliquée suivant une direction  $\langle 111 \rangle$  n'a pas d'effet sur la déformation de magnétostriction mesurée dans cette direction. Ceci peut s'expliquer de façon schématisée. Lorsqu'une contrainte est appliquée suivant une direction  $\langle 100 \rangle$ , elle favorise les domaines dont la direction de facile aimantation est parallèle à la direction de traction. Ces domaines ont une déformation de magnétostriction  $\epsilon_{||}^{\mu}$  maximale : elle vaut  $\lambda_{100}$ . La déformation macroscopique est donc augmentée, les autres domaines ayant une déformation dans cette direction toujours plus faible, et étant en proportion moindre. Une sollicitation de compression inverse le raisonnement, et on retrouve une déformation de magnétostriction négative. Lorsque la sollicitation mécanique est appliquée suivant une autre

direction, les mêmes effets se retrouvent, avec une amplitude plus faible ( $\epsilon_{//}^{\mu}$  des domaines favorisés est d'une amplitude inférieure à  $\lambda_{100}$ ). Dans le cas où la contrainte est appliquée suivant une direction  $\langle 111 \rangle$ , elle n'a en principe pas d'effet sur la magnétostriction. Elle conduit en effet à favoriser énergétiquement trois familles de domaines équivalentes du point de vue de  $\epsilon_{//}^{\mu}$ , au détriment de trois autres familles, dont les directions faciles sont opposées à celles des trois premières. La déformation de magnétostriction mesurée parallèlement à la direction  $\langle 111 \rangle$  n'est donc pas modifiée par l'application de cette contrainte.

Si un champ magnétique est appliqué, ou plus généralement si la configuration en domaines initiale n'est pas celle décrite un peu plus haut, la situation est plus complexe. En particulier, si l'aimantation dans les domaines sort des axes faciles (mécanisme de rotation), la déformation  $\epsilon_{//}^{\mu}$  peut être négative (puisque  $\lambda_{111}$  est négatif). Une contrainte de traction peut alors faire chuter la magnétostriction, et une contrainte de compression l'augmenter.

Par ailleurs, le modèle rend bien compte d'un effet dissymétrique en traction et compression, conformément à ce que permettait de conclure la modélisation schématique présentée au paragraphe 2.2.1 du chapitre 2.

L'effet des contraintes sur la courbe d'aimantation intervient dans le modèle à travers l'énergie magnéto-élastique, qui dépend de la contrainte et de la déformation de magnétostriction (équation (2.6)). Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 indiquent pour trois directions particulières de sollicitations, l'influence d'une contrainte uniaxiale sur la courbe d'aimantation mesurée parallèlement à la direction de sollicitation mécanique. Les résultats correspondant pour la déformation de magnétostriction mesurée parallèlement au champ magnétique sont aussi présentés. La déformation calculée à champ nul est non nulle lorsqu'une contrainte est appliquée. En revanche la déformation de magnétostriction à saturation est la même (dans une direction donnée) quelle que soit la contrainte appliquée. Pour faciliter le parallèle avec des résultats expérimentaux, l'origine des courbes de magnétostriction a été remise à zéro. On peut toutefois aisément retrouver la valeur calculée à champ nul en faisant coïncider la valeur à saturation de toutes les courbes avec la valeur obtenue à contrainte nulle.

Le comportement dans la direction  $\langle 100 \rangle$  est fortement modifié par l'application d'une contrainte (figure 4.16). Une contrainte de compression de 100 MPa dégrade de façon très significative le comportement magnétique (la susceptibilité à 1000 A/m est divisée par 10) et multiplie presque par 2 la déformation de magnétostriction à saturation par rapport à l'état libre de contraintes. La présence d'une contrainte de traction améliore en revanche le comportement magnétique et diminue l'amplitude de la déformation de magnétostriction. Une traction de 100MPa rend nulle la déformation de magnétostriction quelle que soit la valeur du champ magnétique, ce qui signifie en fait que la déformation de magnétostriction à champ nul a déjà atteint sa valeur à saturation (ce qui était indiqué par la figure 4.15).

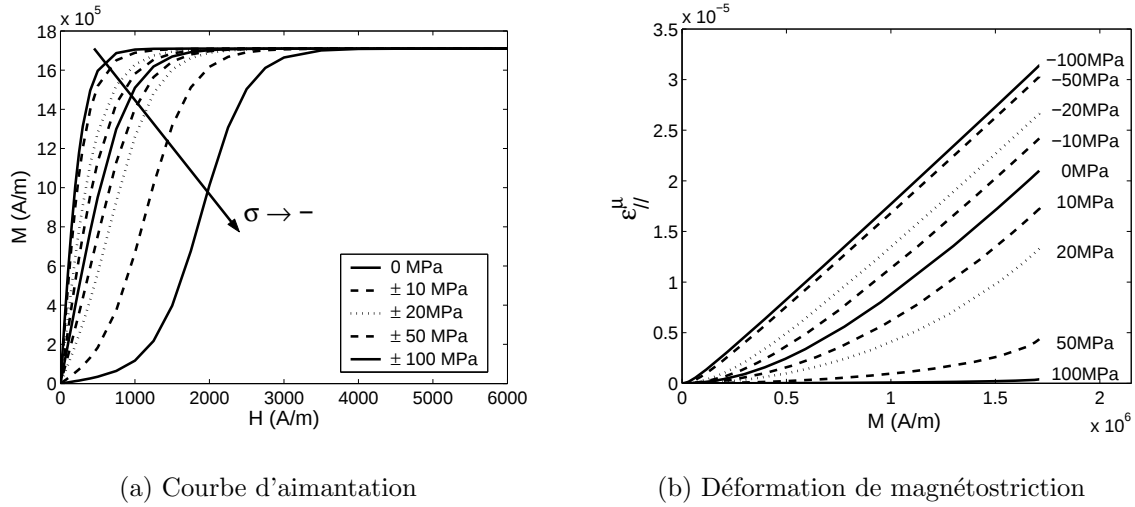


Figure 4.16 – Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction  $\langle 100 \rangle$  du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif dans cette direction - Résultats de calcul - monocristal de fer -  $\sigma = -100, -50, -20, -10, 0, 10, 20, 50$  et  $100$  MPa

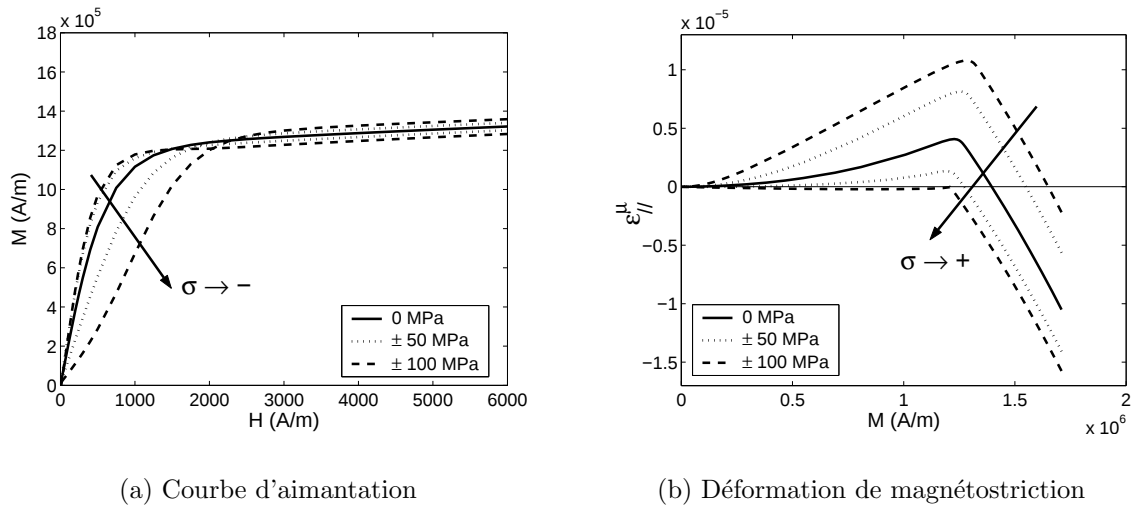


Figure 4.17 – Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction  $\langle 110 \rangle$  du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif dans cette direction - Résultats de calcul - monocristal de fer -  $\sigma = -100, -50, 0, 50$  et  $100$  MPa

L'effet d'une contrainte dans la direction  $\langle 110 \rangle$  (figure 4.17) est moins sensible que pour la direction  $\langle 100 \rangle$ , comme le suggérait aussi la figure 4.15. En revanche, on observe ici l'effet Villari qui fait se croiser les courbes d'aimantation. Le mécanisme de rotation est nécessaire pour provoquer ce croisement, puisque lui seul permet d'inverser le sens de variation de la magnétostriction avec le champ magnétique appliqué. L'effet n'est pas visible sur les courbes de comportement dans la direction  $\langle 100 \rangle$  puisque le mécanisme de rotation de l'aimantation n'est alors pas sollicité

(le champ magnétique est appliqué suivant une direction de facile aimantation).

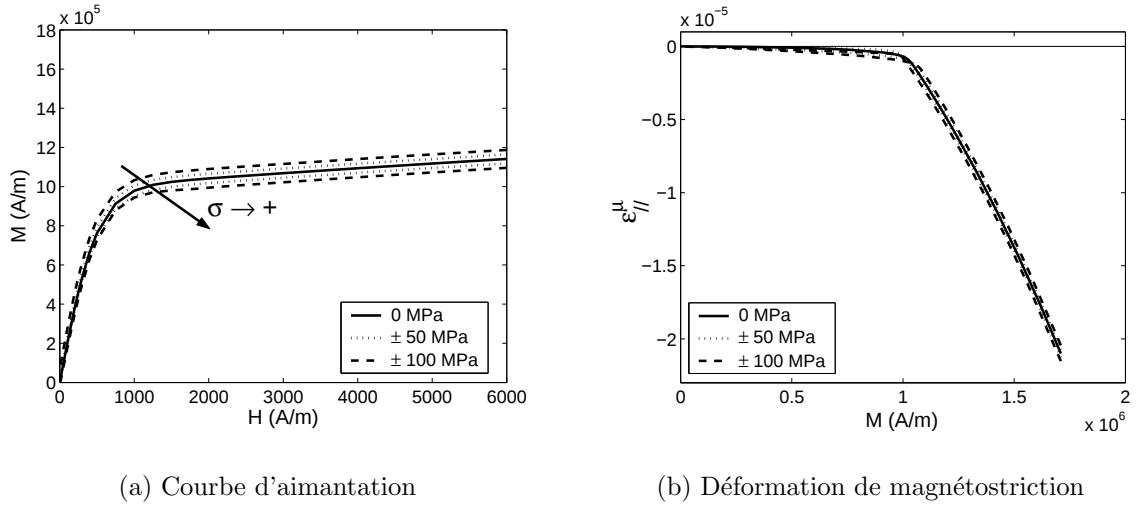


Figure 4.18 – *Effet d'une contrainte uniaxiale appliquée dans une direction  $\langle 111 \rangle$  du monocristal sur son comportement magnétique et magnétostrictif dans cette direction - Résultats de calcul - monocristal de fer -  $\sigma = -100, -50, 0, 50$  et  $100$  MPa*

L'application d'une contrainte uniaxiale n'a aucun effet si elle est dirigée suivant une direction  $\langle 111 \rangle$  (figure 4.18) tant que le mécanisme de rotation n'apparaît pas puisque chaque paire de familles de domaines de directions faciles  $\{\vec{\gamma}_\alpha, -\vec{\gamma}_\alpha\}$  joue alors un rôle analogue à celui joué par chacune des deux autres paires de familles. La contrainte n'a une influence que lorsque cette symétrie est rompue par rotation de l'aimantation dans les domaines.

Ces trois exemples montrent la complexité de l'effet d'une contrainte sur le comportement magnéto-élastique. En fonction de la valeur du champ magnétique, de la déformation de magnétostriction, et de l'orientation du cristal, une contrainte uniaxiale de traction peut améliorer ou détériorer le comportement magnétique, modifier voire annuler, ou n'avoir quasiment aucun effet sur la déformation de magnétostriction. On remarque aussi que les effets observés peuvent être très importants pour de très faibles niveaux de contraintes. Ce constat conduit naturellement à s'interroger sur l'état de contraintes résiduelles dans les matériaux étudiés, ces contraintes, même de faible amplitude, ayant une influence considérable sur les propriétés magnéto-élastiques.

### 4.3.2 Passage au polycristal

L'influence d'une contrainte macroscopique sur le comportement magnétostrictif du polycristal isotrope de fer pur est présentée en annexe B (paragraphe B.4.3). On s'intéresse plutôt ici à l'effet non pas d'une contrainte macroscopique appliquée, mais d'un état de contraintes résiduelles au sein d'un matériau. L'état de contraintes local dans un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique, même à contrainte macroscopique nulle, n'est en effet pas nul, ne serait-ce qu'à cause des incompatibilités de déformation liées à la déformation de magnétostriction, hétérogène au sein du matériau. Ces incompatibilités de déformation d'origine magnétostrictive sont naturellement prises en compte par le modèle multi-échelle (équation (2.72)). Mais d'autres sources de contraintes résiduelles peuvent être envisagées.

Les contraintes résiduelles d'origine thermique ont été négligées. Un calcul thermo-élastique (analogue à ce qui a été fait en magnéto-élasticité en remplaçant  $\varepsilon^\mu$  par une déformation thermique  $\varepsilon^\theta$ , indépendante cette fois de la contrainte) montre en effet qu'un refroidissement de  $800^\circ$  (qui peut correspondre au refroidissement après recuit) conduit, si le matériau est libre de se déformer macroscopiquement, à des contraintes résiduelles dont l'amplitude - en valeur absolue - ne dépasse pas 0,1 MPa. Cette amplitude est beaucoup trop faible (voir figure 4.15) pour avoir une influence sensible sur le comportement magnétostrictif. Les variations de température au cours d'une mesure magnéto-élastique, ont également été jugées trop faibles (la durée des essais étant relativement courte et les conditions thermiques suffisamment stables) pour avoir une influence sur le comportement magnéto-élastique.

La dernière source de contraintes résiduelles identifiée est liée aux sollicitations mécaniques subies par le matériau entre le recuit de détente et l'essai magnéto-élastique. Ces sollicitations sont normalement de faible amplitude, leur effet dévastateur sur les propriétés magnétiques étant un fait bien connu [Bozorth, 1951]. Elles peuvent toutefois conduire, localement, à la plastification de certains grains. Cette plasticité, même si elle concerne une proportion vraisemblablement très faible du volume du matériau, provoque l'apparition de déformations élastiques d'incompatibilité (les déformations plastiques étant en général non compatibles), donc l'apparition d'une contrainte. Ces contraintes résiduelles, quant à elles, concernent l'ensemble du matériau, puisque même les grains non plastifiés se déforment pour accommoder la déformation plastique des grains plastifiés. Les contraintes résiduelles d'ordre 1 (voir figure 4.19), ou macroscopiques, dont la moyenne est nulle à l'échelle de la structure mais pas à l'échelle du VER (de l'ordre du  $\text{mm}^3$ ), peuvent être estimées à partir d'un calcul de structure. On les introduit ensuite dans le modèle comme une contrainte macroscopique ( $\Sigma$ ). Aucune adaptation spécifique du modèle n'est donc nécessaire. L'estimation des contraintes résiduelles d'ordre 2, ou intergranulaires, dont la moyenne est nulle à l'échelle du VER mais pas à l'échelle du grain, réclame l'utilisation d'une démarche micro-macro encore en cours de développement. Les premiers résultats sont présentés au chapitre 5.

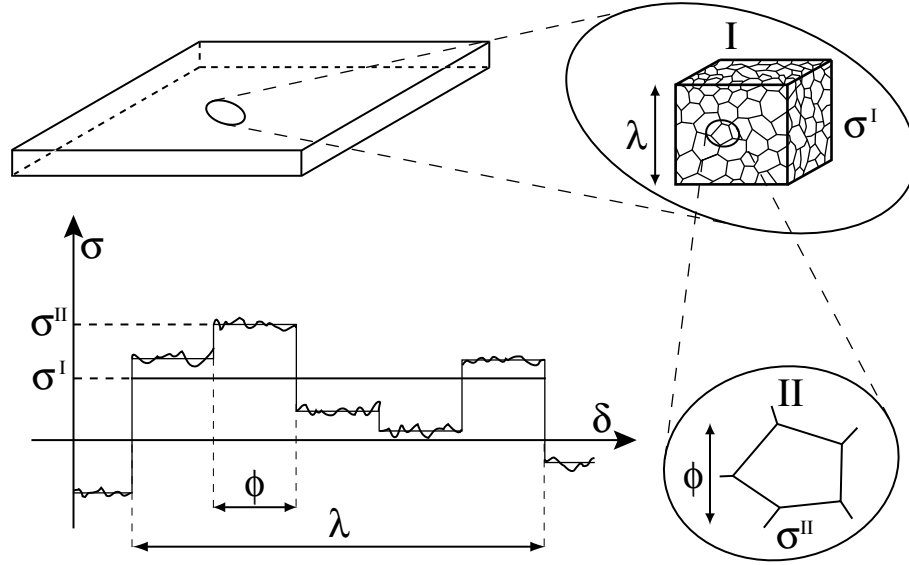


Figure 4.19 – Définition schématique des contraintes résiduelles d'ordre 1 ( $\sigma^I$ ) et d'ordre 2 ( $\sigma^{II}$ ) dans un matériau polycristallin -  $\lambda$  désigne la longueur caractéristique du VER et  $\phi$  la taille moyenne des grains

#### 4.3.2.1 Choix d'un champ de contraintes résiduelles

L'une des difficultés majeures pour évaluer l'effet des contraintes résiduelles sur le comportement magnéto-élastique réside dans la définition quantitative de ces contraintes résiduelles. Nous avons tenté d'estimer les contraintes résiduelles par grain à l'aide de mesures par diffraction des rayons X. La taille des grains (environ  $70 \mu m$  en moyenne) s'est avérée trop petite pour permettre une mesure locale. De plus, les précisions obtenues par ce type de méthode paraissent insuffisantes au regard de la sensibilité très forte du comportement au niveau de contraintes.

L'alternative à l'approche expérimentale consiste à estimer par le calcul le niveau des contraintes résiduelles associées aux sollicitations passées subies par le matériau. La difficulté est cette fois liée au fait que ces sollicitations passées sont souvent très largement méconnues. A ce problème s'ajoute celui du choix d'un modèle micro-macro adapté. Une application sera présentée au paragraphe 5.3.

On se contente ici d'illustrer l'effet des contraintes résiduelles d'ordre 2 sur le comportement magnéto-élastique en tirant au hasard dans une distribution normale un champ de contraintes résiduelles dont la moyenne sur le VER est nulle. La figure 4.20 présente le champ de contraintes résiduelles obtenu de cette manière en utilisant pour chaque composante de la contrainte un écart-type de 8 MPa.

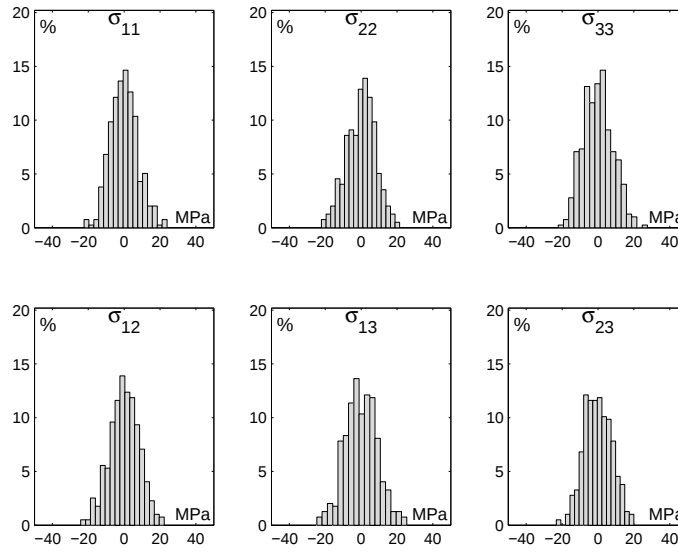


Figure 4.20 – Distribution des contraintes résiduelles -  $\sigma_{ij}$  tiré aléatoirement dans une distribution normale - Moyenne  $\bar{\sigma}_{ij} = 0$ , écart-type  $S_\sigma = 8$  MPa - 396 grains

#### 4.3.2.2 Influence sur le comportement magnéto-élastique

L'introduction de ce champ de contraintes résiduelles, pourtant très faible, dans le modèle multi-échelle conduit à une modification sensible des courbes d'aimantation anhystérétique (figure 4.21).

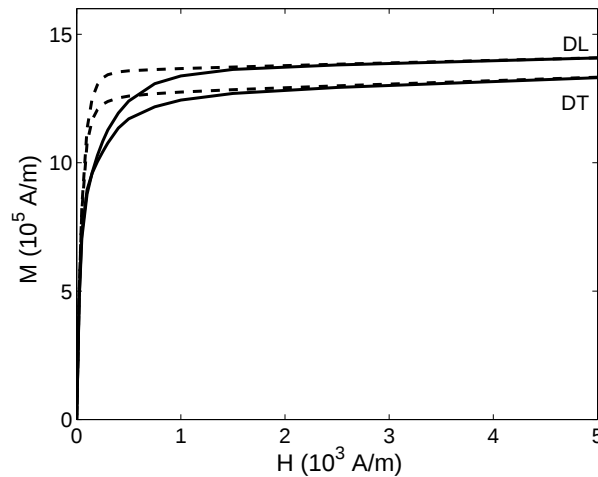


Figure 4.21 – Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.20) sur la courbe d'aimantation anhystérétique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO

L'existence de ces contraintes résiduelles entraîne une chute de la perméabilité, particulièrement dans la zone du coude de la courbe d'aimantation, dans laquelle se trouve souvent le point de fonctionnement. L'effet est sensible aussi bien dans la

direction du laminage que dans la direction transverse, et présente des amplitudes similaires. Le champ de contraintes utilisé, vraisemblablement en raison des symétries qu'il respecte, n'introduit pas d'anisotropie supplémentaire.

La présence d'un champ de contraintes résiduelles a également une influence sur les courbes de magnétostriction (figure 4.22).

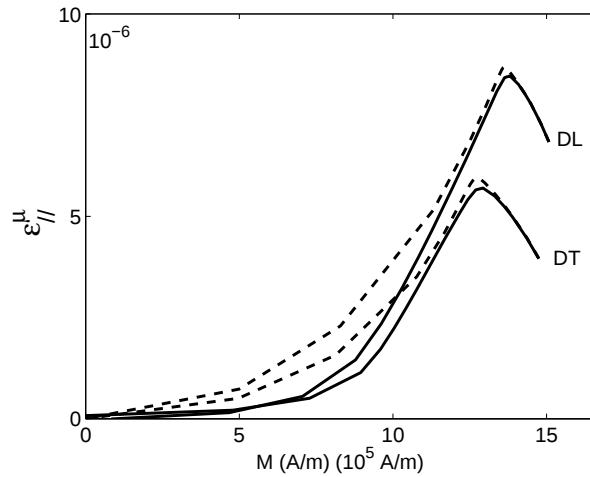


Figure 4.22 – Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.20) sur la déformation de magnétostriction anhystérétique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO

L'amplitude de la déformation de magnétostriction est diminuée par l'existence de contraintes résiduelles. Comme pour les courbes d'aimantation, l'effet observé est analogue dans la direction du laminage et dans la direction transverse. Le champ de contraintes utilisé ne conduit donc pas à une inversion de l'anisotropie relative dans le plan de la tôle par rapport à l'état libre de contraintes. Il ne permet donc pas d'expliquer le désaccord signalé au paragraphe 3.5.3, entre les résultats expérimentaux et les prévisions du modèle.

Cependant, le champ de contraintes résiduelles utilisé présente de très fortes symétries, puisque chaque composante du tenseur des contraintes a été tiré suivant la même distribution. Si on détermine un champ de contraintes résiduelles de la même manière, mais en attribuant une moyenne non nulle à la composante  $\sigma_{11}$ , les résultats sont un peu différents. La figure 4.23 présente un champ de contraintes obtenu de cette façon en choisissant pour  $\sigma_{11}$  une valeur moyenne de 5 MPa.

Ce champ de contraintes n'est plus auto-équilibré à l'échelle du VER<sup>1</sup>, et correspond à une légère traction. L'effet sur la courbe d'aimantation (figure 4.24(a)) est très similaire à ce qui a été observé précédemment. Les conclusions concernant la déformation de magnétostriction sont un peu différentes (figure 4.25).

1. Il peut correspondre à une contrainte résiduelle d'ordre 1.

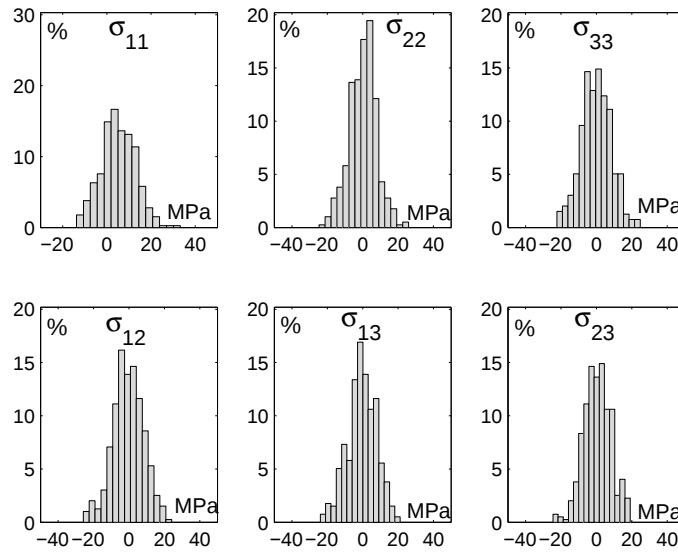


Figure 4.23 – *Distribution des contraintes résiduelles -  $\sigma_{ij}$  tiré aléatoirement dans une distribution normale - Moyenne  $\bar{\sigma}_{ij} = 0$  sauf  $\bar{\sigma}_{11} = 5$  MPa, écart-type  $S_\sigma = 8$  MPa - 396 grains*

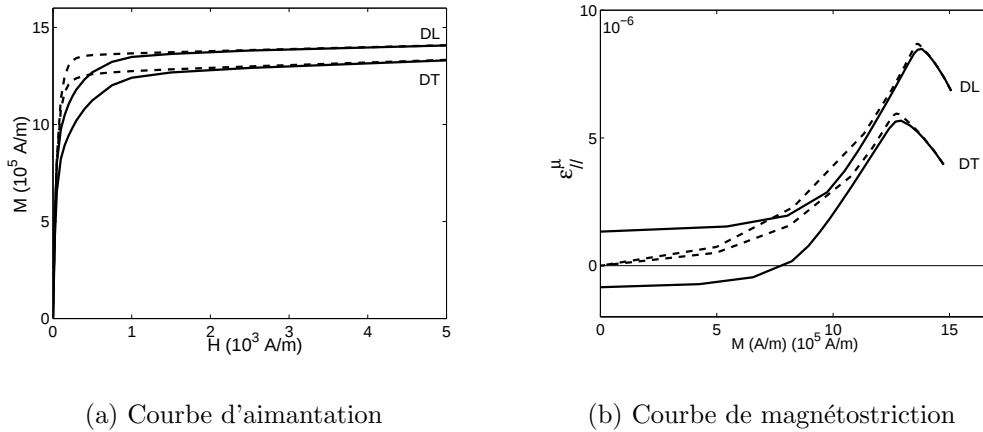


Figure 4.24 – *Influence d'un état de contraintes résiduelles (figure 4.23) sur le comportement magnéto-élastique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Courbe d'aimantation anhystérétique (a) et courbe de magnétostriction (b) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO*

L'existence d'une légère contrainte de traction conduit à une modification de la configuration en domaines à l'état désaimanté. On obtient ainsi une déformation positive suivant la direction du laminage et négative suivant la direction transverse. Lorsqu'on déplace le point de départ de ces courbes à l'origine, afin de comparer avec des résultats expérimentaux où la déformation initiale est prise comme définition du zéro, on constate cette fois, aux faibles niveaux d'aimantation, une inversion de l'ordre des déformations suivant DL et DT (figure 4.25).

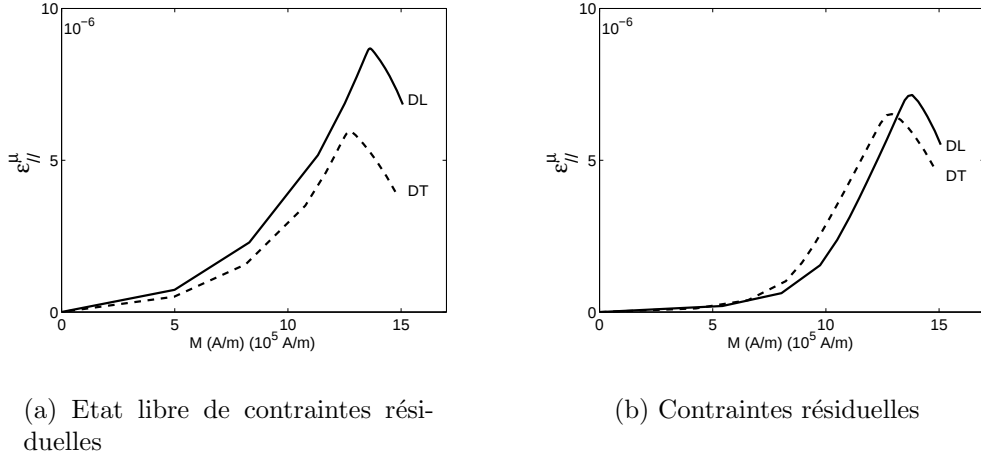


Figure 4.25 – *Comparaison des courbes de magnétostriction avec et sans contraintes résiduelles - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO*

Ces simulations illustrent donc l'anisotropie induite par la contrainte. Cette anisotropie est visible dans le cas où un champ de contraintes macroscopiques (à l'échelle du VER), même très faibles, est appliqué. On verra aussi, au chapitre suivant, qu'une anisotropie magnétostrictive peut être introduite par un champ de contraintes résiduelles (auto-équilibré) si la distribution des composantes du tenseur des contraintes n'est pas symétrique par rapport à la valeur nulle, comme c'est le cas pour les champs de contraintes résiduelles associés à la plasticité. On note une fois encore que les effets couplés sont beaucoup plus sensibles à la contrainte que les comportements découplés. Ainsi, une contrainte macroscopique de traction de 5 MPa a très peu d'influence sur le comportement magnétique alors qu'elle modifie sensiblement les courbes de magnétostriction. Dans ce cadre, la définition précise de l'état de contraintes vu par le matériau est un enjeu important pour la prédiction de la déformation de magnétostriction, en particulier si on s'intéresse à des effets d'anisotropie. Malheureusement, la définition de l'état de contraintes résiduelles dans un matériau reste un exercice très délicat, tant du point de vue expérimental que de la modélisation. Dans les cas où cet état est connu, le modèle multi-échelle permet de l'intégrer naturellement dans un calcul magnéto-élastique.

### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a tenté de remédier à certaines faiblesses du modèle multi-échelle. Ces faiblesses sont associées à une description insuffisante des effets d'anisotropie. L'anisotropie du monocristal, combinée à la texture cristallographique ne permet pas à elle seule d'expliquer l'anisotropie du comportement magnétostrictif, et d'autres sources d'anisotropie peuvent intervenir.

Une description plus fine des effets de champ démagnétisant de grain à grain ne semble pas permettre de répondre à ce problème. Les effets démagnétisants observés semblent en effet d'amplitude comparable dans toutes les directions du plan de tôle. L'échec de ces développements concernant la description des effets d'anisotropie ne remet cependant pas en cause leur utilité dans l'optique d'une prédiction quantitative du comportement magnétique.

Les développements concernant l'effet des surfaces libres et l'effet des contraintes semblent en revanche fournir des explications à l'anisotropie du comportement magnétostrictif observé expérimentalement. L'évolution de la déformation de magnétostriction en fonction du champ magnétique est en effet extrêmement sensible à l'état initial du matériau, c'est à dire à sa configuration en domaines à l'état désaimanté. L'effet de surface, comme l'état de contraintes ont un effet direct sur cet état initial, et donc sur la définition de la déformation à aimantation nulle. Cet effet est anisotrope, les modifications auxquelles il conduit sont fonction de la direction considérée dans le plan de la tôle. L'état initial est donc un paramètre essentiel dans la description de l'anisotropie du comportement magnéto-élastique. Une fois encore, une grande difficulté réside dans la définition pertinente de cet état initial. Nous définissons ici l'état initial comme une fonction de la géométrie (surfaces libres) et de l'état de contraintes.

Cependant, si la définition de la déformation de magnétostriction est très sensible à cet état initial, le comportement magnétique semble en dépendre de façon moins marquée. Le modèle multi-échelle - dans son état de développement actuel - peut ainsi être un outil de prédiction du comportement magnétique susceptible de fournir des informations intéressantes sur l'anisotropie du comportement magnéto-élastique ou l'effet des contraintes sur le comportement magnétique. Quelques illustrations sont données dans le dernier chapitre.

# Chapitre 5

## Quelques applications

### Sommaire

---

|            |                                                                                    |            |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Application du modèle multi-échelle à d'autres aciers électriques . . . . .</b> | <b>118</b> |
| 5.1.1      | Comportement des tôles à grains orientés . . . . .                                 | 118        |
| 5.1.2      | Comparaison de trois nuances d'aciers électriques NO . . . .                       | 123        |
| <b>5.2</b> | <b>Effet de la multiaxialité de l'état de contraintes . . . . .</b>                | <b>127</b> |
| 5.2.1      | Comportement magnétique sous sollicitations biaxiales . . . .                      | 127        |
| 5.2.2      | Différentes propositions de contraintes équivalentes . . . . .                     | 129        |
| 5.2.3      | Conclusion . . . . .                                                               | 134        |
| <b>5.3</b> | <b>Influence de la plasticité sur le comportement magnétique</b>                   | <b>136</b> |
| 5.3.1      | Modélisation de la plasticité . . . . .                                            | 137        |
| 5.3.2      | Application au Fe-3%Si . . . . .                                                   | 139        |
| 5.3.3      | Modélisation du comportement magnétique . . . . .                                  | 141        |
| 5.3.4      | Modélisation du comportement magnéto-élastique . . . . .                           | 141        |
| 5.3.5      | Conclusion . . . . .                                                               | 143        |

---

Le modèle multi-échelle présenté dans ce document permet de prédire le comportement magnéto-élastique couplé des matériaux ferromagnétiques. On propose dans ce chapitre d'utiliser ce modèle pour prévoir le comportement de plusieurs nuances d'aciers électriques. Ceci permet notamment de mettre en avant le rôle important joué par la texture dans la définition du comportement macroscopique. On s'intéresse ensuite à différents critères de contrainte équivalente pour les chargements mécaniques multiaxiaux. Le modèle multi-échelle constitue un mode possible d'évaluation de ces critères. On termine enfin par une extension du modèle pour la prise en compte des effets d'une déformation plastique de faible amplitude sur le comportement magnétique. Certains des travaux présentés ici sont en cours de développement.

## 5.1 Application du modèle multi-échelle à d'autres nuances d'aciers électriques

Les résultats présentés jusqu'à présent concernent une nuance particulière de fer-silicium (présentée au chapitre 3). On applique ici le modèle multi-échelle à d'autres nuances d'aciers électriques. On s'intéresse tout d'abord aux tôles dites à grains orientés (GO), puis à des nuances d'alliages NO, proches de celle étudiée au chapitre 3, mais se distinguant par une texture ou une composition chimique différente.

### 5.1.1 Comportement des tôles à grains orientés

Les tôles de fer silicium GO sont utilisées pour les transformateurs de haute puissance en raison de leurs très bonnes propriétés magnétiques dans la direction du laminage. On les utilise, dans les machines où la direction du champ magnétique n'est pas variable, en les plaçant de façon à ce que le flux magnétique soit dans le sens DL. Elles présentent une texture  $\{110\} \langle 100 \rangle$ . Les figures de pôles  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$  associées à cette texture (dite texture de Goss) sont données par la figure 5.1.

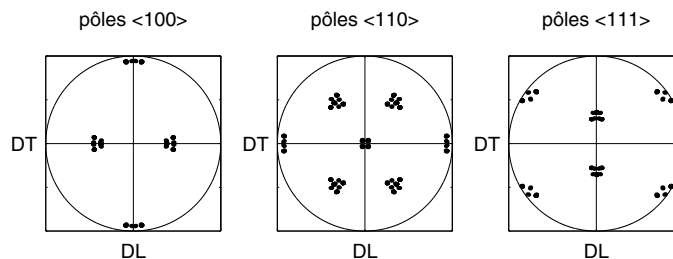


Figure 5.1 – *Figures de pôles  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$  pour le fer-silicium à grains orientés*

Cette texture est beaucoup plus marquée que celle des tôles NO. Le nombre d'orientations cristallographiques nécessaire à sa description est donc plus faible. Nous avons adopté ici une représentation à 60 orientations cristallographiques.

Les tôles GO présentent en outre une taille moyenne de grains très élevée, de

1 mm à 5 cm (tôles HiB). Dans ces conditions, on ne trouve qu'un seul grain traversant toute l'épaisseur pour des tôles dont l'épaisseur vaut environ 0,3 mm. Ce sont ces tôles à "gros grains" qui ont permis l'identification des coefficients élastiques du monocristal de fer-silicium présentée au chapitre 3. Les données monocristallines utilisées sont donc celles identifiées à cette occasion.

On se propose de reproduire à l'aide du modèle multi-échelle le comportement magnéto-élastique de ces tôles.

La particularité associée à la modélisation du comportement des tôles GO, outre une texture très marquée, réside dans l'importance vraisemblable de l'effet de surface<sup>1</sup> dans la définition de l'état d'équilibre magnétique. Tous les grains ont une surface libre comme frontière, et l'effet de surface libre les affecte donc a priori tous. On s'attache à comparer les résultats numériques obtenus avec et sans prise en compte de l'énergie de surface dans la modélisation magnéto-élastique.

Concernant le comportement élastique, les résultats obtenus pour le module d'Young et le coefficient de Poisson sont présentés sur la figure 5.2.

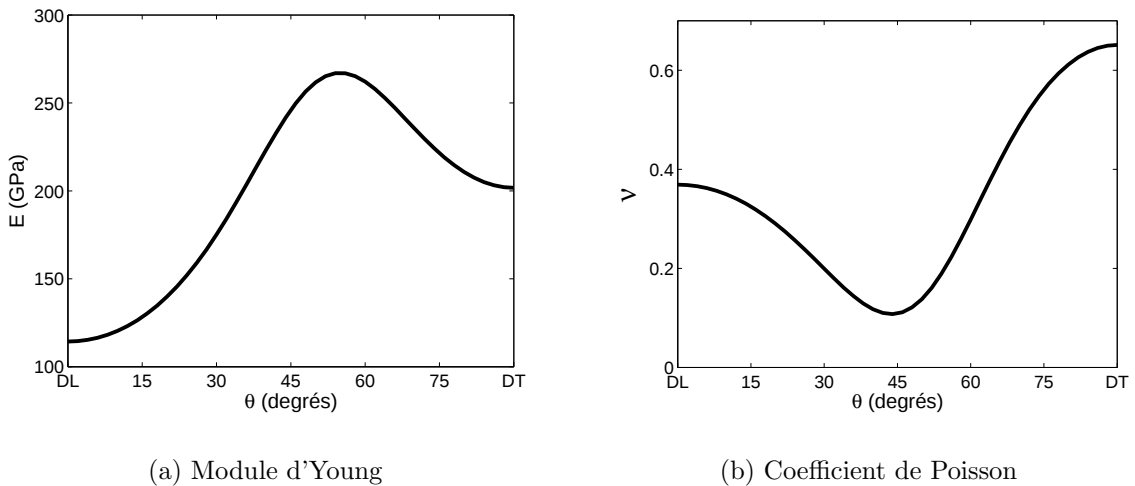


Figure 5.2 – Anisotropie élastique dans le plan d'une tôle GO - Résultats de calcul

On obtient un module d'Young d'environ 114 GPa dans la direction DL contre 202 GPa dans la direction DT. Le coefficient de Poisson, pour une traction suivant DL vaut environ 0,37, et 0,65 pour une traction suivant DT. Ces résultats sont proches de ceux couramment utilisés pour ce type de matériau ( $E_{DL} = 115$  GPa,  $E_{DT} = 220$  GPa et  $\nu_{DL} = 0,33$  dans [Buvat, 2000]).

Les résultats pour la prévision du comportement magnétique sont présentés sur la figure 5.3. La texture des tôles GO est quasiment monocristalline. Les orientations cristallographiques sont distribuées de telle façon que la direction DL (suivant laquelle est appliqué le champ magnétique) est proche d'une direction  $\langle 100 \rangle$ , et la normale à la surface de la tôle est proche d'une direction  $\langle 110 \rangle$ . Cette situation correspond à la configuration 3 présentée au paragraphe 4.2 (figure 4.7).

1. voir paragraphe 4.2.

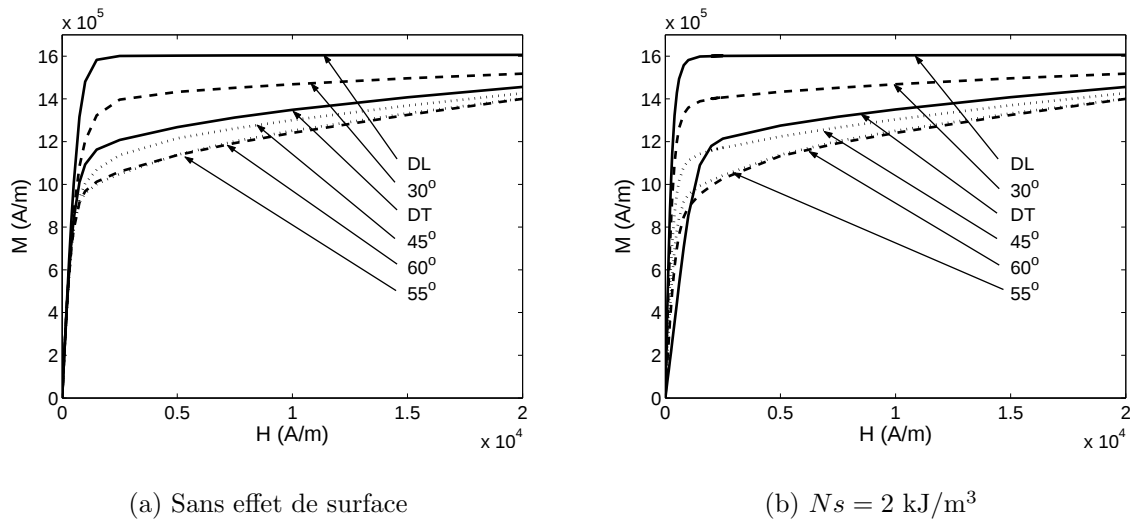


Figure 5.3 – Comportement magnétique d'une tôle GO pour un champ magnétique appliqué dans différentes directions du plan de tôle - Résultats de calcul

Comme on l'avait déjà remarqué pour les tôles NO, l'introduction d'un effet de surface n'a pas un effet très marqué sur les courbes d'aimantation prédites pour les forts champs magnétiques (supérieurs à 2500 A/m). A bas champ en revanche, la prédiction du comportement magnétique est modifiée par l'effet de surface, de façon beaucoup plus marquée que dans le cas des tôles NO (figure 5.4).

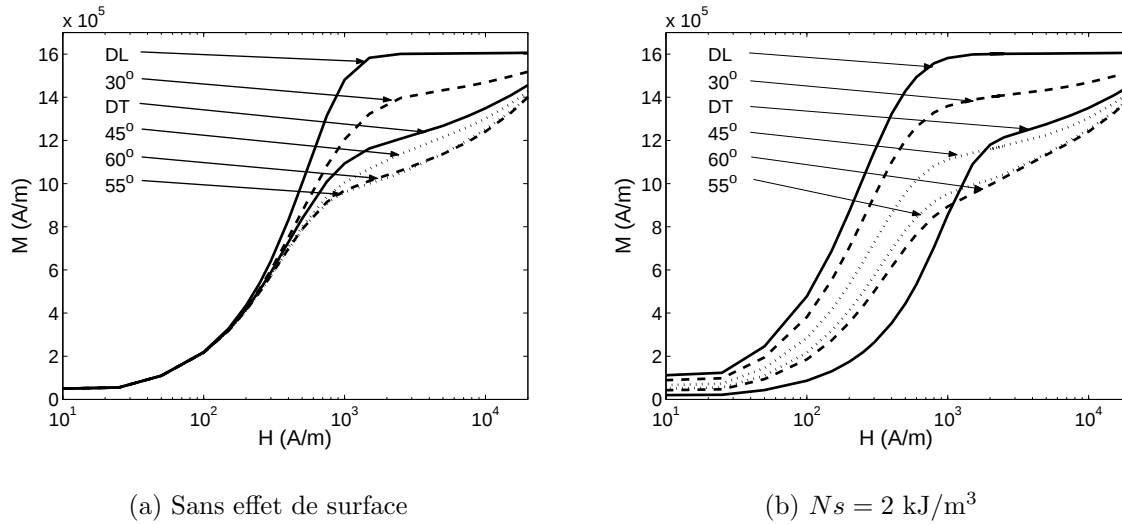


Figure 5.4 – Comportement magnétique d'une tôle GO pour un champ magnétique appliqué dans différentes directions du plan de tôle - Représentation semi-logarithmique - Résultats de calcul

Le comportement prédit est en accord avec les observations expérimentales effectuées sur ce type de matériau. On retrouve notamment une direction de difficile aimantation macroscopique à  $55^\circ$  de la direction du laminage. La solution obtenue en

appliquant l'effet de surface correspond à une configuration qui semble plus réaliste. Les observations de domaines effectuées sur les tôles GO indiquent que la configuration en domaines à l'état désaimanté est très déséquilibrée. On observe ainsi de longs domaines principaux (de type I [Hug, 1995]), traversant le grain entier, voire traversant un joint de grain (figure 5.5). Ces domaines présentent des aimantations opposées. Deux familles de domaines sont ainsi en proportion largement supérieure à celle des autres familles de domaines, qui se partagent de petites surfaces (domaines de fermeture).

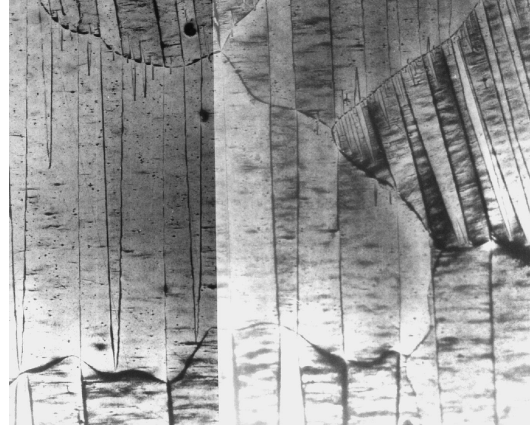


Figure 5.5 – Observation de domaines magnétiques à la surface d'une tôle GO, d'après [Hug, 1995]

L'application de l'effet de surface permet de rendre compte de cette configuration initiale. La texture des tôles GO est telle que les orientations cristallographiques les plus probables sont du type de la configuration 3 présentée au chapitre 4, et rappelée par la figure 5.6.

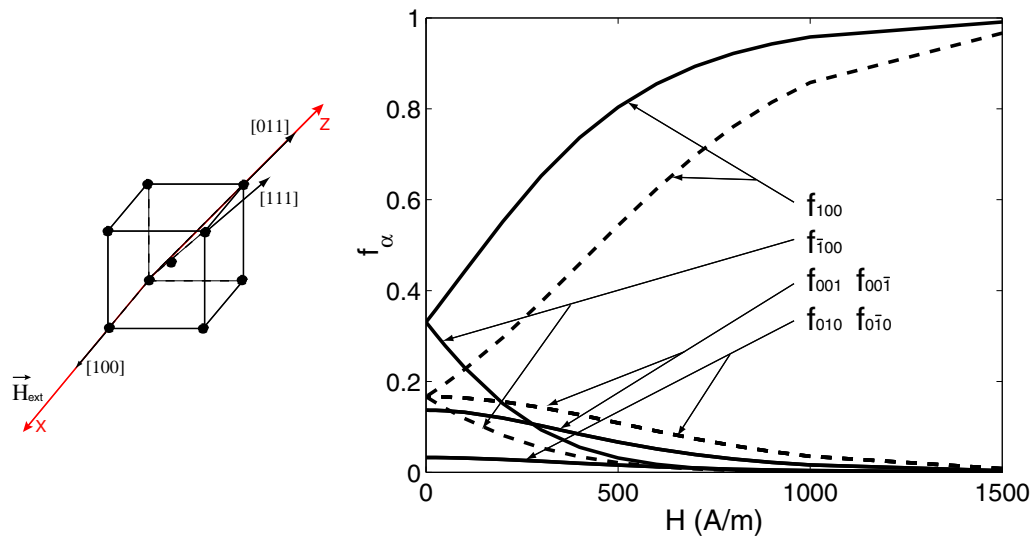


Figure 5.6 – Evolution des fractions volumiques en fonction du champ magnétique appliqué dans le cas d'une tôle GO -  $N_s = 0$  (pointillés) et  $N_s = 2 \text{ kJ/m}^3$  (traits pleins)

On retrouve des résultats similaires à ceux présentés sur la figure 4.7, avec une amplitude plus forte puisqu'on a choisi ici une valeur plus élevée pour  $N_s$  ( $2 \text{ kJ/m}^3$ )<sup>2</sup>. A l'état initial, les fractions volumiques des 6 familles de domaines ne sont pas égales. Les domaines dont la direction de facile aimantation est dans le plan de tôle, c'est à dire majoritairement suivant la direction du laminage, sont fortement favorisés par rapport à ceux dont la direction de facile aimantation présente une forte composante normale à la tôle. Ainsi, les deux familles de domaines dont l'aimantation est parallèle au plan de tôle ont une fraction volumique initiale de l'ordre de 0,35 alors que les domaines les plus défavorisés sont quasiment inexistant à l'état désaimanté. Cet état initial affecte le comportement magnétique de façon marquée pour les faibles valeurs de champ. L'influence de l'état initial sur le comportement magnétostrictif est encore plus importante, comme l'illustre la figure 5.7.

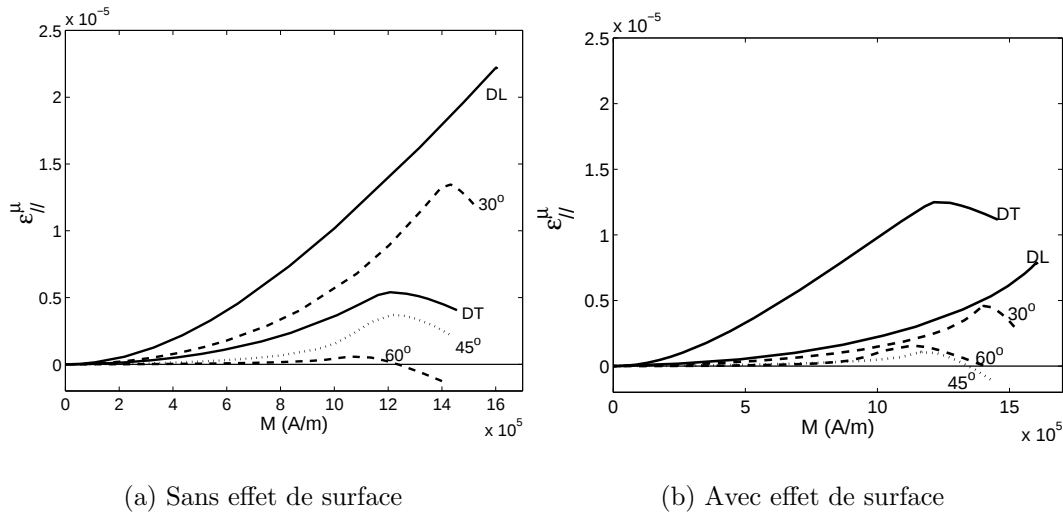


Figure 5.7 – Comportement magnétostrictif d'une tôle GO pour un champ magnétique appliqué dans différentes directions du plan de tôle - Résultats de calcul

Si on néglige l'effet de surface, la déformation de plus forte amplitude est prévue dans la direction du laminage. Cette déformation est fortement diminuée si on prend en compte l'existence de la surface libre. A l'état initial, les domaines dont la direction de facile aimantation est suivant DL sont en plus grand nombre. Ces domaines ont une elongation de magnétostriction positive suivant DL. L'elongation à l'état initial est donc non nulle, et positive. Le trajet pour atteindre la déformation à saturation est plus court, si on aimante dans la direction du laminage. La déformation de magnétostriction apparente sera alors de moins forte amplitude. A l'inverse, le trajet pour atteindre la déformation à saturation si l'on aimante suivant la direction DT est plus long, et la déformation apparente est alors de plus forte amplitude.

La prévision du comportement magnétostrictif des tôles GO est assez sensible à la valeur de  $N_s$ , ce qu'illustre la figure 5.8.

Une valeur de  $N_s$  supérieure à  $5 \text{ kJ/m}^3$  conduit à saturer la déformation dans

2. On rappelle que  $N_s$  fixe la valeur maximum de l'énergie de surface.

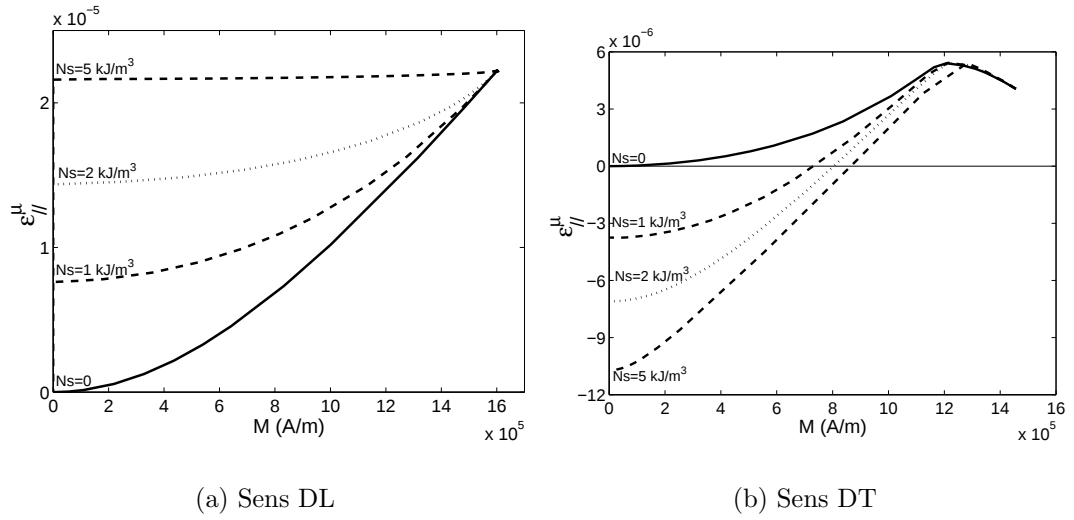


Figure 5.8 – Influence de l'effet de surface sur la prévision du comportement magnétostrictif des tôles GO - Résultats de calcul

la direction du laminage. La déformation de magnétostriction apparente pour un champ magnétique parallèle à DL est alors nulle. La valeur optimale de  $N_s$  n'a pas été recherchée. On pourrait l'obtenir en ajustant la courbe de déformation de magnétostriction numérique dans une direction du plan de tôle sur un résultat expérimental.

La prise en compte d'une énergie de surface dans la définition de l'équilibre des domaines magnétiques affecte donc très fortement la prévision du comportement magnétostrictif des tôles GO. L'absence de base expérimentale suffisante pour la déformation de magnétostriction ne permet pas de conclure sur la validité des résultats du modèle. En revanche, les observations expérimentales ([Hug, 1993], [Hug, 1995]) concernant les courbes d'aimantation semblent confirmer l'importance de cet effet de surface. La configuration initiale prévue lorsqu'on prend en compte l'effet de surface semble également plus en accord avec les observations expérimentales de configuration en domaines sur les tôles GO. Des mesures de magnétostriction dans différentes directions du plan de tôle pour des éprouvettes de fer-silicium GO sont actuellement en cours. Ces mesures sont rendues difficiles par la faible épaisseur des tôles. Cette faible épaisseur conduit à des effets de flexion qui induisent un problème de répétabilité des mesures. Ces difficultés expérimentales devraient être résolues assez rapidement.

### 5.1.2 Comparaison de trois nuances d'aciers électriques NO

Le modèle multi-échelle permet de comparer différentes textures vis à vis du comportement magnétique. Dans le cadre d'une collaboration contractuelle entre le LEDEPP (Laboratoire d'étude et développement des produits plats, Florange (57), société Arcelor), le LEG (Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (38)) et le LMT-Cachan, le comportement magnéto-élastique comparé de 3 nuances d'aciers

électriques NO a été étudié. Ce travail a également fait l'objet du stage de DEA de Noureddine Jendly [Jendly, 2002].

### 5.1.2.1 Matériaux d'étude

Le premier alliage d'étude est un fer à 3% de silicium, noté M330, très proche du matériau étudié au chapitre 3. On observe 5 à 7 grains dans l'épaisseur de la tôle. Leur diamètre moyen est de l'ordre de  $70 \mu m$ .

Les deux autres nuances ont très peu d'éléments d'alliage (le silicium n'excède pas 0,5%). Ils présentent une microstructure plus fine que le M330. Le M940 présente un diamètre de grains moyen de l'ordre d'une dizaine de microns. Le M530 présente la même composition que le M940, mais sa taille de grains est deux fois supérieure.

La texture de ces matériaux a été mesurée par diffraction des rayons X puis discrétisée en un fichier d'orientations cristallographiques par Xavier Lemoine (LE-DEPP). Les résultats pour chacun des trois alliages sont présentés sur la figure 5.9.

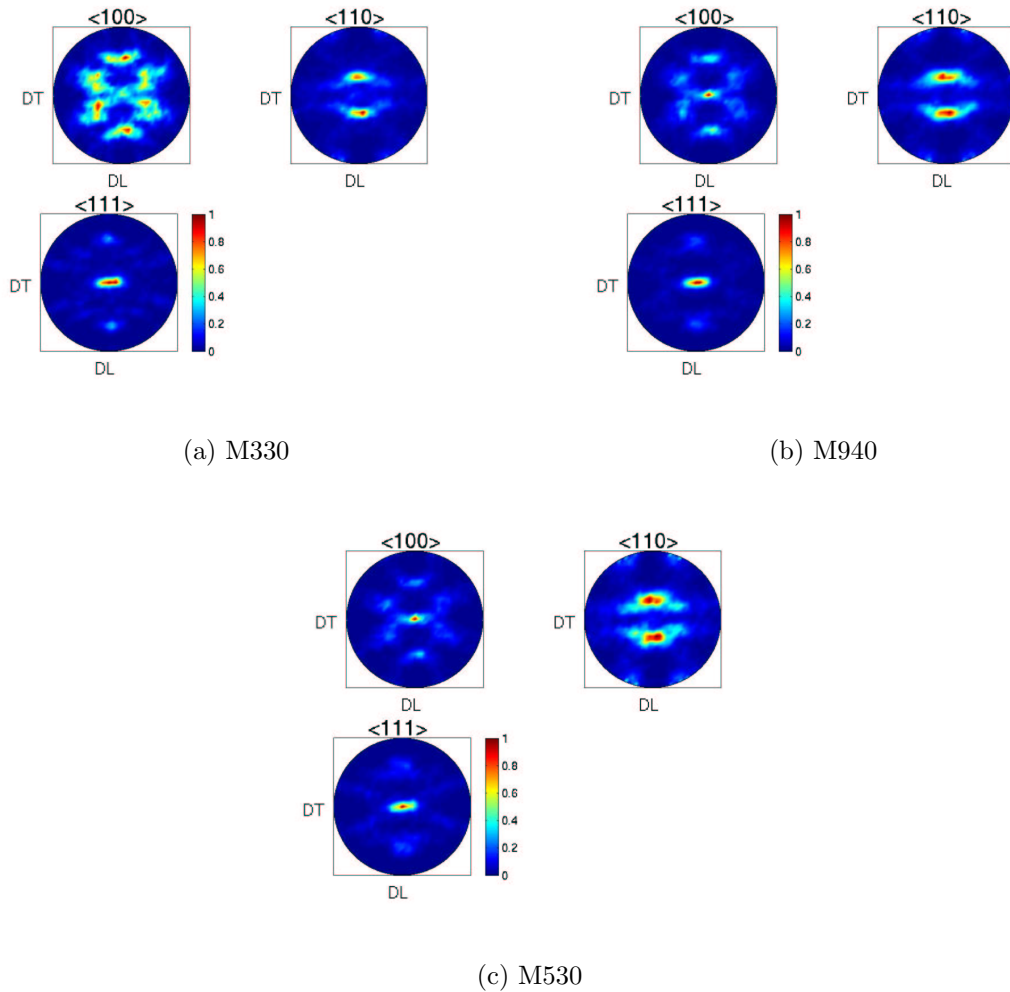


Figure 5.9 – *Figures de pôles pour trois nuances de fer-silicium NO*

Les données monocristallines utilisées dans les calculs sont listées dans le tableau

5.1. On a considéré que les grains du M330 sont composés de fer à 3% de silicium (tableau 3.5), et ceux du M940 et du M530 de fer pur (tableau 2.1).

| Caractéristique               | M330 | M940 | M530 |
|-------------------------------|------|------|------|
| $M_s$ ( $10^6$ A/m)           | 1,61 | 1,71 | 1,71 |
| $K_1$ (kJ/m <sup>3</sup> )    | 38   | 42,7 | 42,7 |
| $K_2$ (kJ/m <sup>3</sup> )    | 0    | 15   | 15   |
| $\lambda_{100}$ ( $10^{-6}$ ) | 23   | 21   | 21   |
| $\lambda_{111}$ ( $10^{-6}$ ) | -4,5 | -21  | -21  |
| $C_{11}$ (GPa)                | 202  | 238  | 238  |
| $C_{12}$ (GPa)                | 122  | 142  | 142  |
| $C_{44}$ (GPa)                | 229  | 232  | 232  |

Tableau 5.1 – *Caractéristiques monocristallines pour les trois matériaux étudiés*

Le modèle multi-échelle permet de décrire les variations de comportement associées à cette variation de texture ou de composition chimique. La figure 5.10 présente le module d'Young et le coefficient de Poisson dans le plan de tôle pour les trois matériaux.

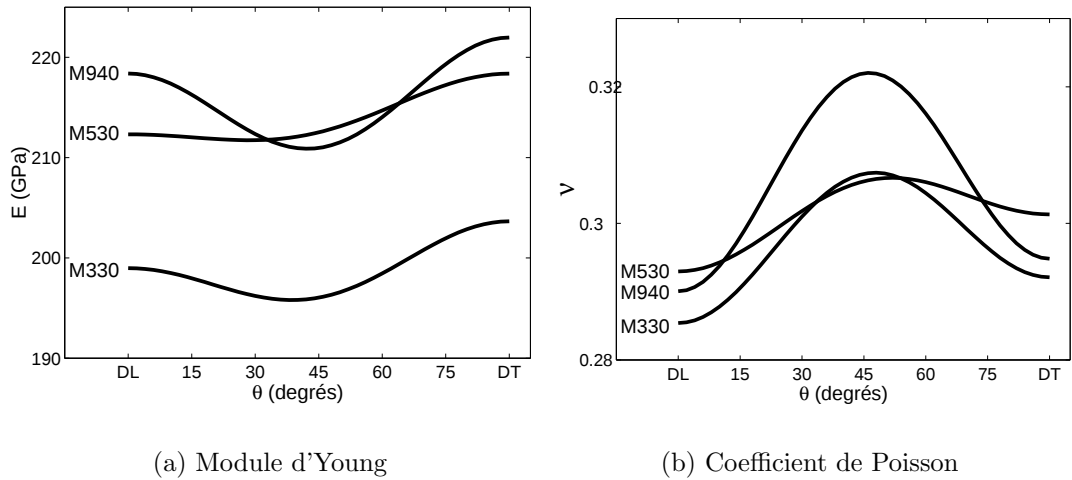


Figure 5.10 – *Comportement élastique comparé des trois matériaux d'étude - M330, M530 et M940 - Résultats de calcul*

Le M530 et le M940 présentent des compositions chimiques similaires. La différence de comportement élastique entre les deux nuances est uniquement associée à un effet de texture. Le M530 et le M940, composés de fer quasiment pur présentent un module d'Young plus élevé que le M330, qui contient du silicium en proportions non négligeables. Pour les trois matériaux, l'anisotropie élastique dans le plan de tôle reste assez faible.

Le modèle multi-échelle permet également de distinguer le comportement magnétique des trois matériaux (figure 5.11).

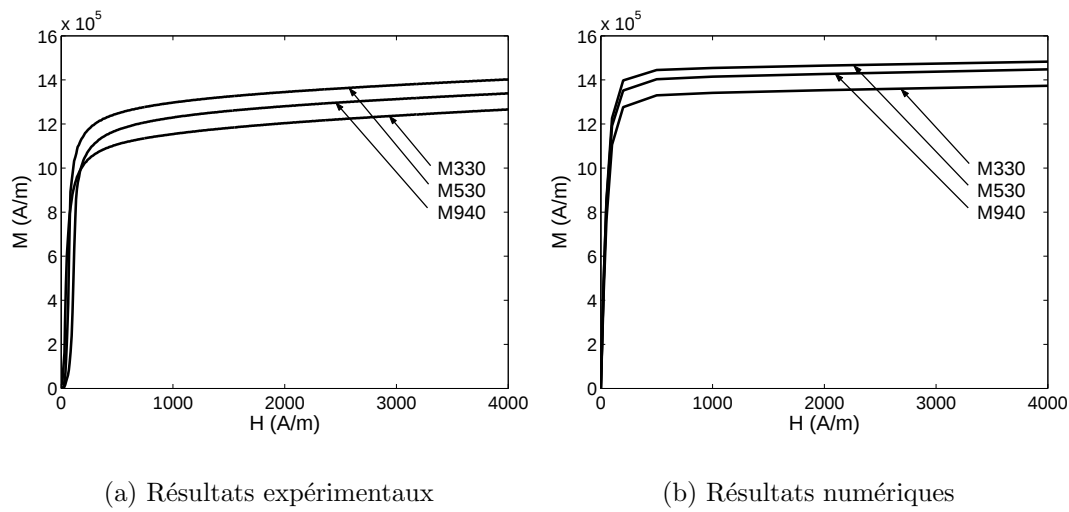


Figure 5.11 – *Comportement magnétique comparé des trois matériaux d'étude - M330, M530 et M940 - Résultats expérimentaux et numériques*

On met à nouveau en évidence une différence de comportement entre les trois matériaux. Entre le M530 et le M940, cette différence est liée à la texture. La susceptibilité magnétique plus faible pour le M330 s'explique par la présence du silicium (qui diminue l'aimantation à saturation). Les résultats du modèle surestiment la susceptibilité magnétique, mais sont en accord qualitatif avec les mesures expérimentales<sup>3</sup>. Des mesures magnétiques et magnétostrictives dans différentes directions du plan de tôle, actuellement en cours, doivent permettre d'affiner la comparaison des trois matériaux.

L'utilisation du modèle comme un outil numérique de prévision du comportement magnéto-élastique permet donc la comparaison de différents matériaux. Le modèle multi-échelle peut ainsi jouer un rôle prospectif dans l'élaboration de nouveaux matériaux. Il peut par exemple permettre la comparaison des propriétés magnétiques associées à différentes textures.

---

3. obtenues à l'aide du dispositif de mesures magnétiques présenté au chapitre 3.

## 5.2 Effet de la multiaxialité de l'état de contraintes sur le comportement magnétique

Peu de modèles magnétiques tiennent compte de la multiaxialité de l'état de contraintes. Cela est notamment dû au fait que la mesure du comportement magnétique sous sollicitations multiaxiales est assez difficile à mettre en pratique. Les mesures sous contraintes uniaxiales sont en revanche plus classiques. Plusieurs auteurs proposent de définir une contrainte scalaire équivalente à un chargement macroscopique multiaxial, telle que le comportement magnétique sous un état de contraintes  $\sigma$  quelconque puisse être modélisé par une relation du type :

$$\vec{M}(\vec{H}, \sigma) = \chi(\vec{H}, \sigma_{eq}) \vec{H} \quad (5.1)$$

où la susceptibilité  $\chi$  est une fonction non linéaire du champ magnétique appliqué et de la contrainte (magnétiquement) équivalente. Ces modèles sont macroscopiques et ne tiennent pas compte des hétérogénéités au sein du matériau. L'utilisation des matériaux ferromagnétiques sous forme de tôles conduit généralement à ne considérer que des sollicitations biaxiales, dans le plan de tôle. Ces propositions de contrainte équivalente conduisent à des résultats contradictoires dans le cas de chargement multiaxiaux. Vincent Maurel, dans ses travaux de thèse [Maurel, 2002], propose d'estimer leur validité ou leur domaine de validité par une approche expérimentale. Nous reprenons ici sa démarche, cette fois par une approche numérique, en étudiant les résultats du modèle multi-échelle à travers le prisme des critères de la littérature. L'utilisation du modèle multi-échelle comme une "machine d'essais numériques" suppose toutefois que les résultats produits, au moins d'un point de vue qualitatif, soient en accord avec le comportement observé expérimentalement. En l'absence de validation expérimentale suffisamment complète, c'est l'hypothèse qui est faite.

### 5.2.1 Comportement magnétique sous sollicitations biaxiales

Le modèle multi-échelle a été appliqué au fer-silicium NO pour différentes sollicitations biaxiales. La contrainte appliquée est définie par ses contraintes principales  $\sigma_{DL}$  et  $\sigma_{DT}$  dirigées respectivement suivant les directions DL et DT de la tôle (le repère principal est confondu avec celui de l'éprouvette). Les états de contraintes choisis réalisent un pavage régulier du plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$ . Les contraintes s'étendent de -100 MPa à +100 MPa avec un pas de 20MPa (soit 121 configurations pour l'état de contraintes).

Le champ magnétique est appliqué suivant la direction DL ou DT. On note  $\chi_{DL}$  (resp.  $\chi_{DT}$ ) la susceptibilité sécante obtenue quand le champ magnétique est dirigé suivant la direction DL (resp. DT). Les résultats obtenus, pour trois valeurs de champ magnétique sont présentés sur les figures 5.12, 5.13 et 5.14.

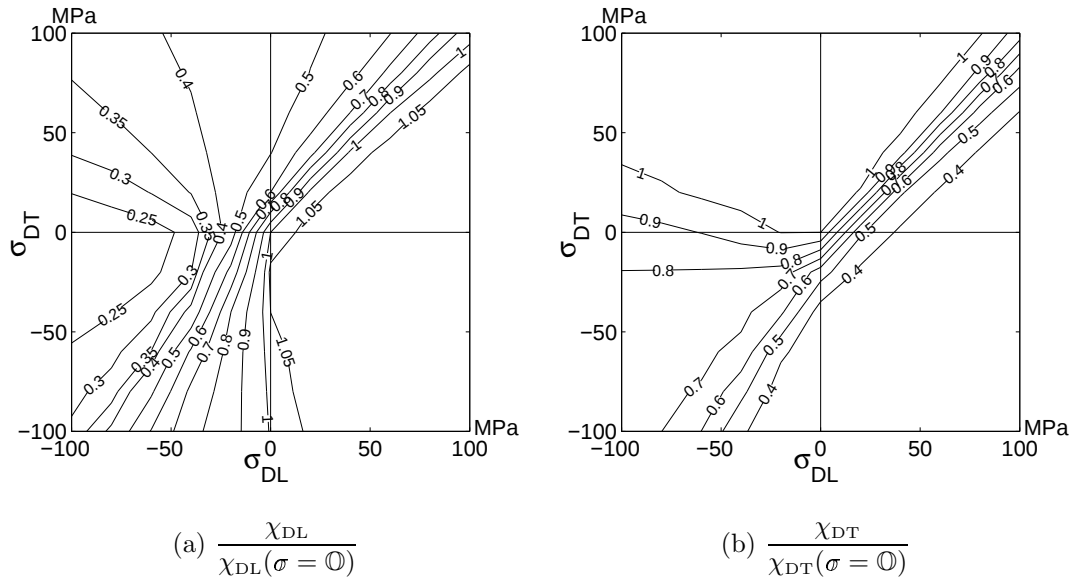


Figure 5.12 – Isovaleurs de la susceptibilité sécante pour différents cas de charge-ments biaxiaux -  $\|\vec{H}\| = 150 \text{ A/m}$  - Résultats de calcul

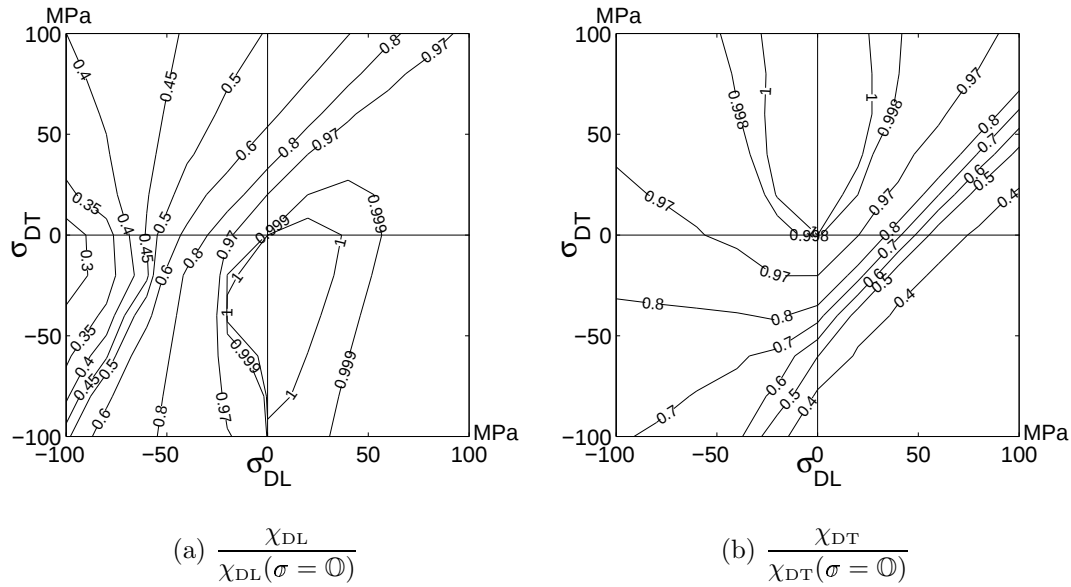
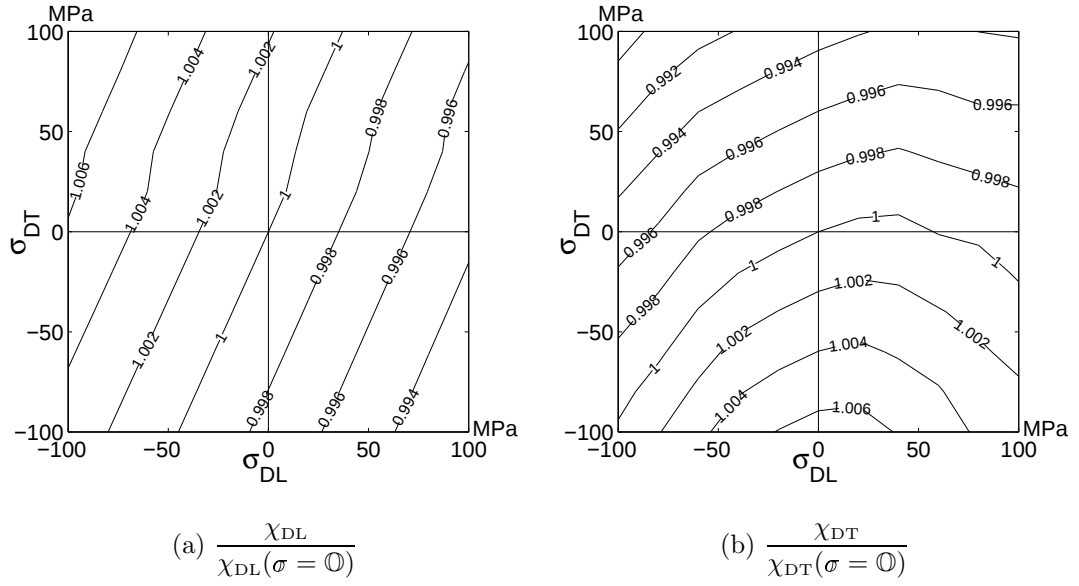


Figure 5.13 – Isovaleurs de la susceptibilité sécante pour différents cas de charge-ments biaxiaux -  $\|\vec{H}\| = 500 \text{ A/m}$  - Résultats de calcul

On constate tout d'abord que les effets de la contrainte ne sont pas analogues dans les directions DL et DT (la figure 5.13(b) n'est pas une simple rotation-symétrie de la figure 5.13(a)). Ceci confirme l'existence de l'anisotropie induite par les contraintes. On retrouve cependant dans les deux cas certaines grandes tendances.

L'effet de dissymétrie traction-compression est très perceptible aux faibles valeurs de champ. Dans le cas d'un champ magnétique dirigé suivant DL, une sollicitation



isovaleurs pour cette contrainte équivalente, dans le plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$ , sont données sur la figure 5.15 dans le cas d'un champ magnétique appliqué suivant DL (et en prenant  $K = 1$ ).

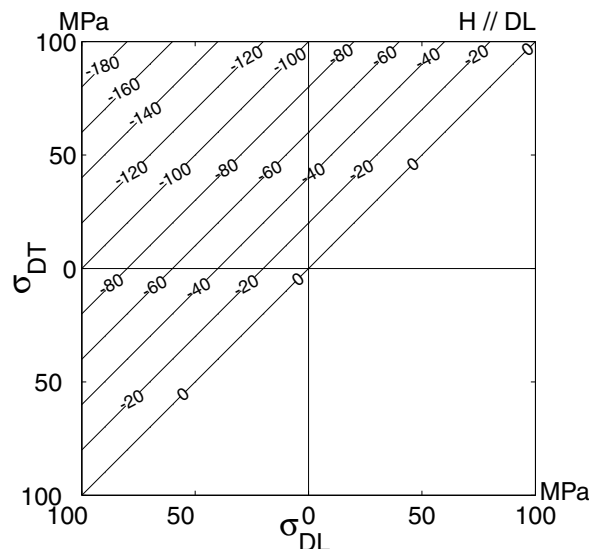


Figure 5.15 – Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Kashiwaya

La contrainte équivalente de Kashiwaya est toujours négative ou nulle. Les isovaleurs sont des droites parallèles, qui donnent un rôle symétrique aux directions DL et DT : sur la figure 5.15, une traction suivant DT est équivalente à une compression de même amplitude suivant DL. Si le champ magnétique est appliqué suivant la direction de la contrainte principale maximale, la contrainte équivalente est nulle. Le comportement magnétique est alors supposé identique à celui obtenu en l'absence de contraintes. Ainsi, une sollicitation de traction ou de compression équi-biaxiale est supposée sans effet sur le comportement magnétique.

La figure 5.16 présente l'intégralité des résultats obtenus au paragraphe 5.2.1, vue à travers le critère de Kashiwaya. On trace les susceptibilités magnétiques relatives obtenues par le calcul (pour chaque état de contraintes envisagé) en fonction de la contrainte équivalente de Kashiwaya correspondante.

Cette figure met en évidence le principal défaut de cette proposition, qui définit une contrainte équivalente nulle dans tous les cas où la contrainte principale maximale est dans la direction du champ magnétique. Le modèle multi-échelle prévoit lui une influence très importante sur le comportement magnétique dans certains de ces cas de chargement. C'est ce qui explique la forte dispersion sur la figure 5.16, pour la valeur  $\sigma_{eq} = 0$ , et plus généralement pour les faibles valeurs de  $\sigma_{eq}$ .

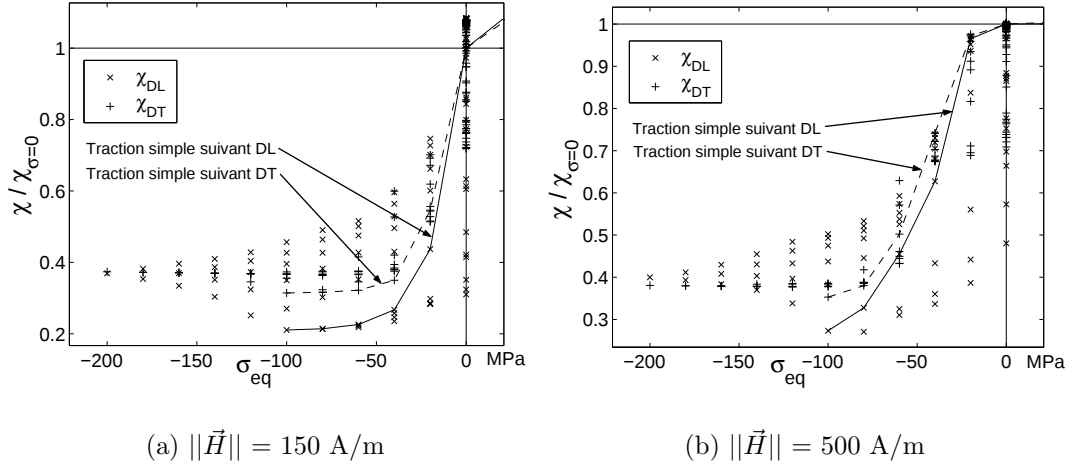


Figure 5.16 – *Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Kashiwaya - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul*

### 5.2.2.2 Modèle de Schneider et Richardson [Schneider et Richardson, 1982]

Schneider et Richardson proposent la définition suivante :

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (5.3)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales dans le plan de tôle,  $\sigma_1$  étant parallèle à la direction d'excitation magnétique. Ce modèle ne s'applique donc que si le champ magnétique est dirigé parallèlement à la direction d'une contrainte principale. Les isovalues pour cette contrainte équivalente, dans le plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$ , sont données sur la figure 5.17 dans le cas d'un champ magnétique appliqué suivant DL.

Le réseau d'isovaleurs prend aussi la forme de droites parallèles. Certaines régions du plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$  définissent cette fois une contrainte équivalente positive. Une contrainte principale maximale dirigée suivant la direction d'application du champ magnétique ne conduit plus à une contrainte équivalente nulle. Certaines caractéristiques du modèle de Kashiwaya sont conservées, comme le rôle symétrique donné aux directions DL et DT. Là encore, une sollicitation équi-biaxiale est supposée sans effet sur le comportement magnétique.

La figure 5.18 présente les susceptibilités magnétiques relatives obtenues par le calcul en fonction de la contrainte équivalente de Schneider et Richardson correspondante.

Le problème de dispersion autour de la valeur  $\sigma_{eq} = 0$  est toujours présent, malgré la définition de contraintes équivalentes positives. Cette dispersion est essentiellement due au désaccord entre le modèle multi-échelle et la proposition de Schneider et Richardson concernant les sollicitations équi-biaxiales.

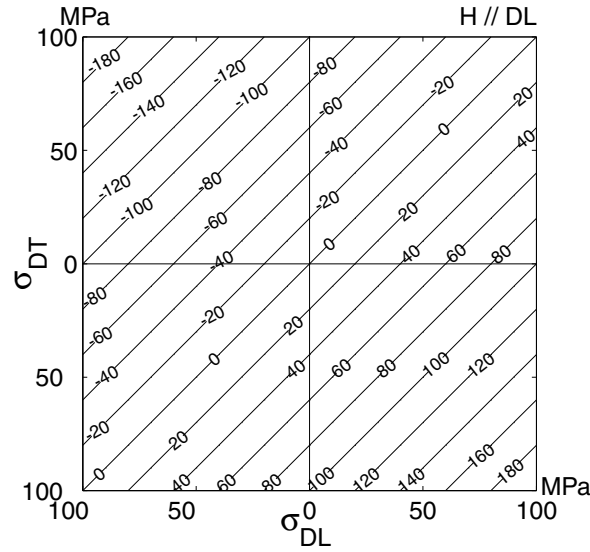


Figure 5.17 – Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Schneider et Richardson

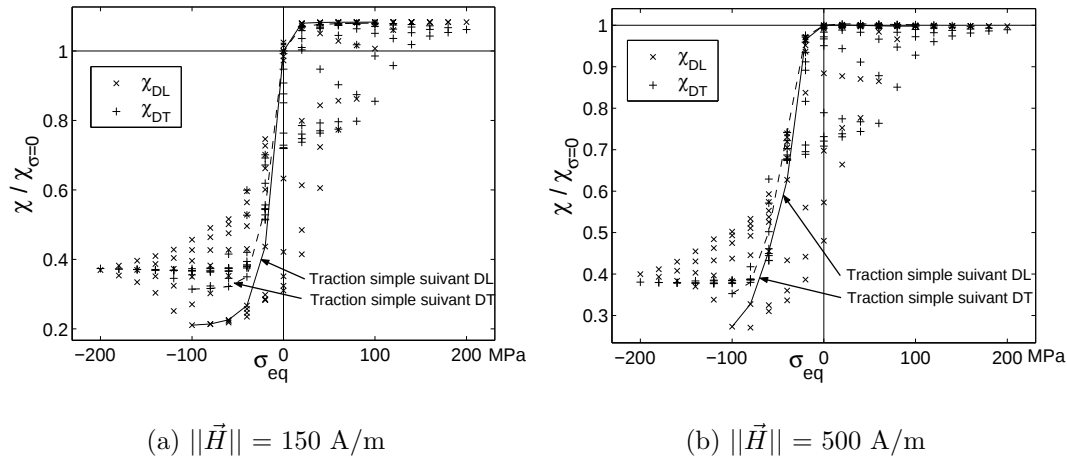


Figure 5.18 – Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Schneider et Richardson - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul

### 5.2.2.3 Modèle de Sablik et al. [Sablik et al., 1994]

Sablik et al. proposent la définition suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{eq} = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2) & \text{pour } \sigma_1 < 0 \\ \sigma_{eq} = \frac{1}{3}(\sigma_1 - 2\sigma_2) & \text{pour } \sigma_1 \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$  gardent les mêmes définitions qu'au paragraphe précédent. Les isovaleurs pour cette contrainte équivalente, dans le plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$ , sont données sur la figure 5.19 dans le cas d'un champ magnétique appliqué suivant DL.

Les isovaleurs prennent cette fois une forme un peu plus complexe, sous forme de segments de droites parallèles. Ce modèle présente l'inconvénient d'être discontinu

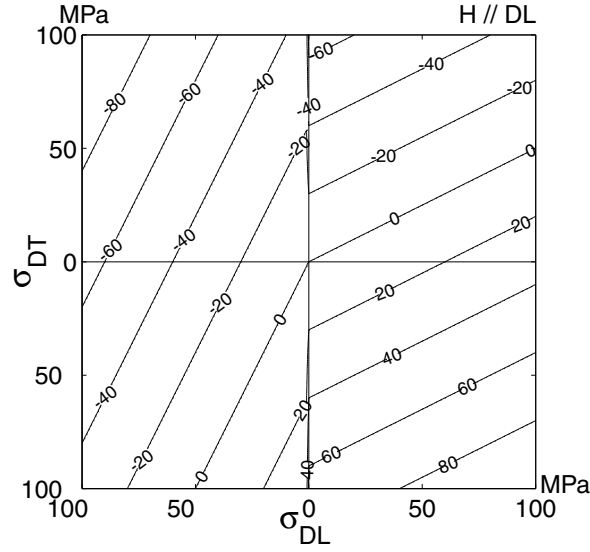


Figure 5.19 – Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, de la contrainte équivalente de Sablik et al.

en  $\sigma_1 = 0$ . Par ailleurs, dans le cas d'une sollicitation uniaxiale, la contrainte équivalente n'est pas égale à la contrainte appliquée, ce qui peut paraître surprenant. En revanche, si une équi-bitraction est supposée sans effet, une équi-bicompression fait chuter la susceptibilité magnétique (puisqu'elle est équivalente à une contrainte uniaxiale de compression).

La comparaison des résultats du modèle multi-échelle avec ce modèle (figure 5.20) conduit à des résultats un peu moins dispersés que dans les deux cas précédents.

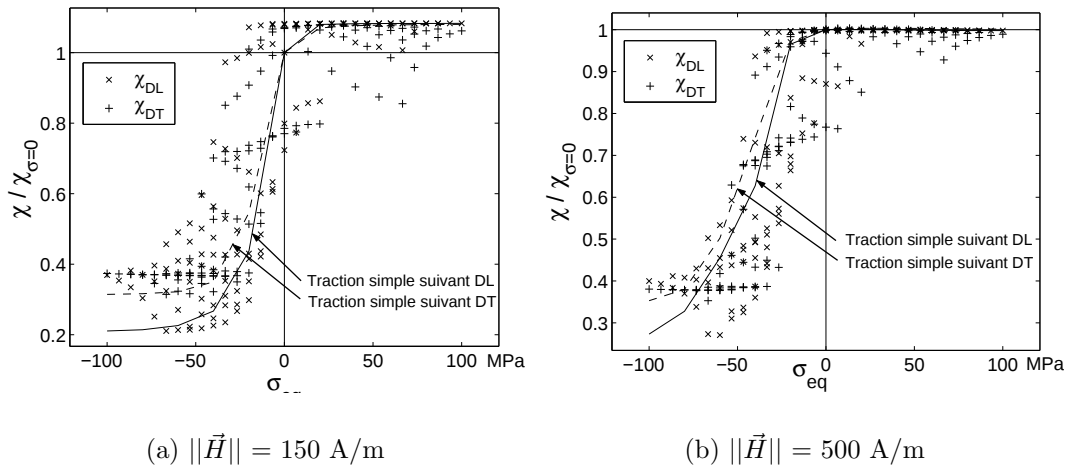


Figure 5.20 – Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente de Sablik et al. - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul

Cette dispersion reste cependant relativement importante. De plus, la symétrie traction suivant DL - compression suivant DT semble peu en accord avec les observations expérimentales [Maurel, 2002] et les résultats du modèle multi-échelle. Par

exemple, lorsque le champ magnétique est appliqué suivant DL, il faut, pour observer des effets similaires à ceux d'une compression suivant DL, atteindre des niveaux de traction beaucoup plus importants suivant DT.

#### 5.2.2.4 Modèle de Pearson et al. [Pearson et al., 2000]

Pearson et al. proposent une définition de la contrainte équivalente sous la forme :

$$\sigma_{eq} = k\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \sum_{n=1}^6 a_n(f\sigma_1 - \sigma_2)^n + b\sigma_1 \quad (5.5)$$

Les neuf paramètres nécessaires à la définition de ce critère dépendent de l'échantillon et du champ magnétique appliqué. L'absence de référence pour ces paramètres, et la complexité de leur identification nous empêchent d'étudier davantage cette proposition.

### 5.2.3 Conclusion

La définition d'une contrainte équivalente est donc un exercice délicat. Le modèle multi-échelle peut donner des pistes d'investigation. On peut ainsi, au regard des résultats de calcul, tenter de définir l'allure que devrait prendre la carte d'isovaleurs dans le plan  $(\sigma_{DL}, \sigma_{DT})$ . Une illustration schématique en est donnée sur la figure 5.21.

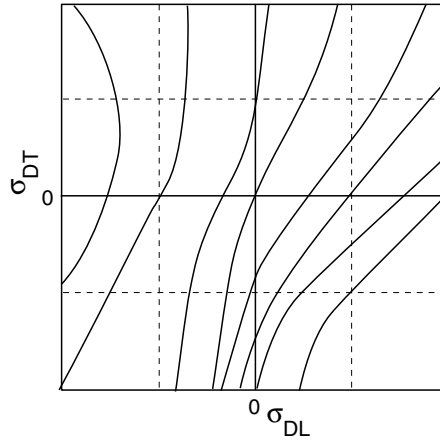


Figure 5.21 – Schéma de principe pour les isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, d'une contrainte équivalente pour les propriétés magnétiques

La difficulté réside dans la définition d'une fonction de  $\sigma_{DL}$  et  $\sigma_{DT}$  qui permette de définir une telle carte.

On peut tout du moins tenter, en suivant les idées proposées par Pearson et al. [Pearson et al., 2000], de trouver une fonction polynômiale de  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ , combinée à un terme faisant intervenir l'effet d'une contrainte équi-biaxiale. On peut penser à une contrainte équivalente sous la forme :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^3}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right] \quad (5.6)$$

La carte des isovaleurs correspondantes pour cette contrainte équivalente est donnée sur la figure 5.22.

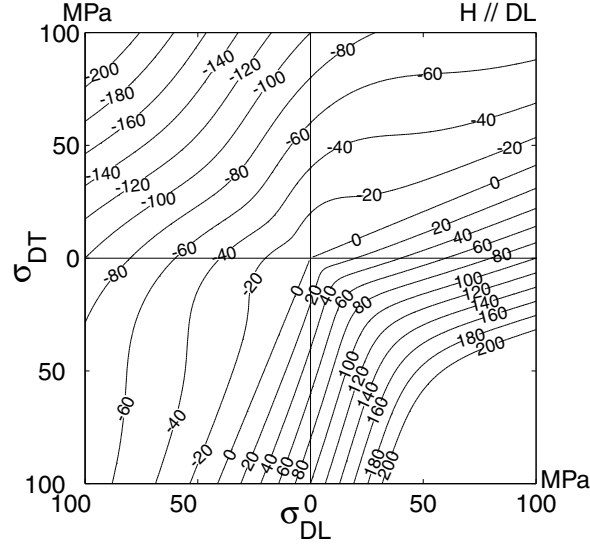


Figure 5.22 – Isovaleurs, dans le plan des contraintes principales, d'une contrainte équivalente pour les propriétés magnétiques

Cette carte est encore assez lointaine de celle recherchée. Elle présente elle aussi l'inconvénient de considérer qu'une contrainte de traction suivant DT est équivalente à une compression de même amplitude. Ce défaut pourrait être compensé en remplaçant le premier terme  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  par  $(\sigma_1 - k\sigma_2)$  dans l'équation (5.6). Le coefficient  $k$  peut-être pris de l'ordre de 0,3 (c'est à dire de l'ordre du coefficient de Poisson). Dans ce qui suit, on conserve l'expression donnée par la relation (5.6).

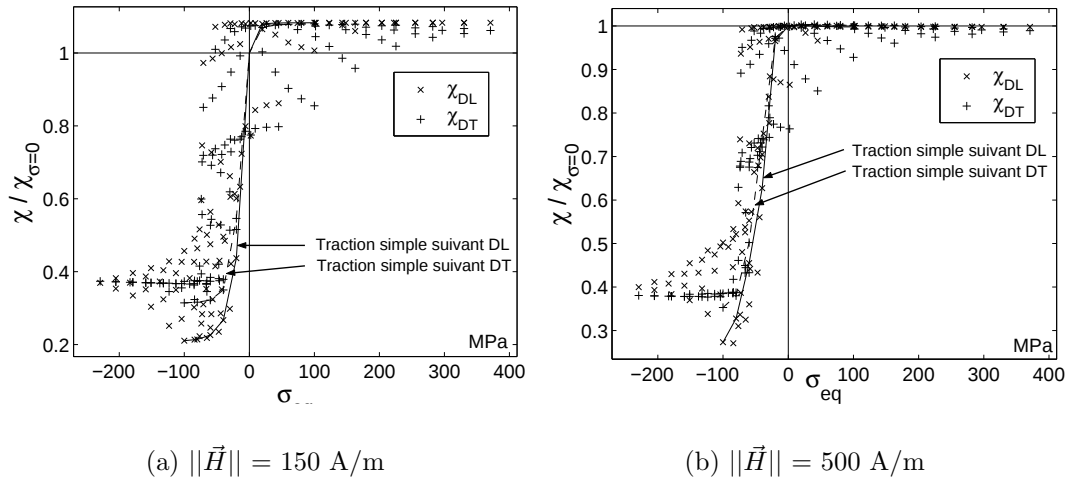


Figure 5.23 – Susceptibilités magnétiques relatives en fonction de la contrainte équivalente - Fe-3%Si NO - Résultats de calcul

Cette contrainte équivalente, confrontée aux résultats du modèle multi-échelle fait apparaître elle aussi de fortes dispersions (voir figure 5.23), un peu plus faibles

tout de même que celles associées aux autres critères étudiés.

On voit que la définition d'une contrainte équivalente est un problème complexe. Une idée consiste à déterminer une fonction des invariants du tenseur des contraintes capable de fournir une carte du type de celle de la figure 5.21. La forme à donner à cette carte doit être mise au point plus précisément, par l'utilisation combinée du dispositif de mesure proposé par Vincent Maurel [Maurel, 2002] et du modèle multi-échelle. Cet objectif constitue une des perspectives (déjà engagée) de ce travail.

Par ailleurs, il convient de noter que le modèle multi-échelle permet de définir le comportement magnétique dans toutes les directions de l'espace, et n'est pas limité aux axes de symétrie. Cela signifie qu'il permet d'identifier les composantes non diagonales du tenseur de susceptibilité :

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{DL} & \chi_{DL/DT} & \chi_{DL/Z} \\ \chi_{DL/DT} & \chi_{DT} & \chi_{DT/Z} \\ \chi_{DL/Z} & \chi_{DT/Z} & \chi_Z \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

où chaque composante du tenseur  $\chi$  est une fonction non-linéaire du champ et de la contrainte. Le comportement magnétique sous contraintes est ainsi défini même dans le cas où la direction du champ appliqué n'est pas une direction principale pour les contraintes.

### 5.3 Influence de la plasticité sur le comportement magnétique

Les propriétés d'une tôle magnétique en fonctionnement sont en général inférieures aux propriétés nominales. Cette dégradation des caractéristiques magnétiques est liée aux sollicitations mécaniques subies par le matériau entre son élaboration et son utilisation finale. En particulier, l'apparition de déformations plastiques conduit à une chute très sensible de la perméabilité magnétique [Hubert, 1998]. Ces déformations plastiques ont plusieurs origines. On montre par exemple que le bobinage-débobinage des tôles magnétiques, qui rend possible le transport de grandes quantités de tôles introduit de la plasticité [Jendly, 2002]. La découpe des tôles conduit également à des dégradations importantes [Hubert et Hug, 1995]. Enfin, lors de la dernière étape de fabrication des machines électriques, les tôles magnétiques sont assemblées entre elles, par exemple par clinchage. Cette opération peut elle aussi conduire à des dégradations des propriétés magnétiques. La modélisation des effets de la plasticité sur les propriétés magnétiques est donc un enjeu industriel important. Elle se limite souvent à l'application d'un coefficient correctif macroscopique sur la susceptibilité prédite. On propose ici une approche micro-macro qui décrit les effets de la plasticité à l'échelle du grain. Cette approche se limite pour l'instant aux faibles niveaux de déformations plastiques ( $\varepsilon_{11}^p < 1\%$ ), mais son extension aux plus fortes amplitudes est un travail en cours.

Pour les alliages de fer-silicium, et pour ces niveaux de déformations, O. Hubert a montré que la plasticité est principalement associée à une augmentation de la

densité de dislocations isolées dans la matrice du matériau et par une chute de la limite d'écoulement liée au décrochement des dislocations initialement ancrées [Hubert, 1998]. Ce phénomène est à l'origine d'une contrainte interne intergranulaire, contrôlée essentiellement par les incompatibilités de déformation aux joints de grains. Ainsi, l'effet de la plasticité peut être décrit à travers les contraintes résiduelles d'ordre 2 associées. Son influence sur le comportement magnétique s'intègre ainsi naturellement dans le modèle multi-échelle.

### 5.3.1 Modélisation de la plasticité

La plasticité est modélisée ici par une approche micro-macro autocohérente suivant la méthode proposée par Kröner [Kröner, 1961] et Hill [Hill, 1965], c'est à dire en traitant la déformation plastique comme une déformation libre dans un milieu élastique. La méthode a été étendue au cas d'un comportement élastique anisotrope. Cette approche est réputée trop "raide" [Gilormini, 1995], c'est à dire surestimant le niveau de contraintes, mais elle semble suffisante ici, car les déformations restent très faibles. L'implantation numérique de ce modèle a été réalisée par O. Hubert sous MATLAB<sup>®</sup>. On en reprend brièvement les étapes principales.

Les données de base du calcul sont les suivantes :

- les orientations des grains à travers un fichier de distribution des orientations cristallographiques,
- le tenseur de rigidité élastique du monocristal,
- la liste des systèmes de glissement potentiellement activés dans un grain,
- la cission critique sur chacun des systèmes de glissement,
- une loi microcristalline permettant de définir l'amplitude du glissement plastique en fonction de la contrainte.

On calcule de façon préliminaire les coefficients élastiques du polycristal à partir de sa FDO et des coefficients élastiques du monocristal. Les modules élastiques macroscopiques sont considérés comme constants, c'est à dire qu'on ne prend en compte aucun phénomène d'endommagement ou de rotation du réseau cristallin.

La modélisation de la plasticité suit ensuite les étapes suivantes :

Etape 1 : On impose un état de contraintes macroscopique  $\Sigma$ .

Etape 2 : On effectue la localisation de la contrainte macroscopique en utilisant le schéma autocohérent anisotrope présenté au chapitre 2. La contrainte locale  $\sigma^I$  est exprimée dans le repère cristallographique d'après la relation (2.37) rappelée ci-dessous :

$$\sigma^I = \Sigma + \mathbf{C}^* : (\mathbb{E} - \varepsilon^I) \quad (5.8)$$

En réalisant la partition des déformations totales en déformations élastiques et déformations plastiques, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbb{E} &= \mathbb{E}^e + \mathbb{E}^p &= \mathbf{C}^{\text{eff}^{-1}} : \Sigma + \mathbb{E}^p \\ \varepsilon^I &= \varepsilon_I^e + \varepsilon_I^p &= \mathbf{C}^{I^{-1}} : \sigma^I + \varepsilon_I^p \end{cases} \quad (5.9)$$

qui conduit à la relation suivante :

$$\sigma^I = (\mathbf{I} + \mathbf{C}^* \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}})^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^* \mathbf{C}^{\text{eff}^{-1}}) : \Sigma + (\mathbf{I} + \mathbf{C}^* \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{-1}})^{-1} \mathbf{C}^* : (\mathbb{E}^p - \varepsilon_I^p) \quad (5.10)$$

L'approche de Hill consiste alors à choisir pour  $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$  et  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  les coefficients élastiques initiaux du matériau. Si on se limite de plus au cas de l'élasticité isotrope, la relation (5.10) se simplifie alors sous la forme classique :

$$\sigma^I = \Sigma + 2\mu(1 - \beta) (\mathbb{E}^p - \varepsilon_I^p) \quad (5.11)$$

où  $\mu$  désigne le module de cisaillement du matériau et où  $\beta$  peut s'exprimer en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} \quad (5.12)$$

Dans cette approche, l'accommodation du matériau à la déformation plastique est purement élastique, ce qui limite sa validité au cas où peu de grains sont plastifiés. Il est cependant possible "d'assouplir" la réaction de la matrice par l'utilisation d'un module sécant ou tangent pour les modules d'élasticité du milieu de référence dans le problème de l'inclusion. Dans le cas de l'élasticité isotrope, on écrit [Berveiller et Zaoui, 1978] :

$$\sigma^I = \Sigma + 2\alpha\mu(1 - \beta) (\mathbb{E}^p - \varepsilon_I^p) \quad (5.13)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\mu \frac{E^p}{\Sigma}} \quad (5.14)$$

où on utilise pour  $E^p$  et  $\Sigma$  la déformation et la contrainte équivalente au sens de Von Mises.

La modélisation élastique autocohérente présentée au paragraphe 2.3.1 permet d'étendre ces deux approches au cas de l'élasticité anisotrope. C'est ce qui est fait dans la suite. Les équations qui définissent la contrainte locale sont implicites puisque  $\mathbb{E}^p$  y figure. Le calcul est donc itératif.

Etape 3 : On détermine, pour chaque système de glissement  $s$ , la cission associée :

$$\tau_s = \sigma^I : \mathfrak{g}_s \quad (5.15)$$

où  $\mathfrak{g}_s$  désigne le tenseur d'orientation du glissement dans le plan de normale  $\vec{n}_s$  et de direction  $\vec{t}_s$  (colinéaire au vecteur de Burgers) :

$$\mathfrak{g}_s = \vec{n}_s \otimes \vec{t}_s \quad (5.16)$$

On compare ensuite cette cission à la cission critique  $\tau_s^c$  sur le système considéré, de telle manière que le système  $s$  est activé si  $\tau_s > \tau_s^c$ .

Etape 4 : Pour tous les grains pour lesquels un système de glissement est activé<sup>4</sup>, on détermine l'amplitude  $\gamma_s^p$  de la déformation plastique sur chaque système de glissement par la relation suivante :

$$\gamma_s^p = H_{rs}^{-1} (\tau_s - \tau_s^c) \quad (5.17)$$

La matrice  $H_{rs}$  définit l'écoulement plastique dans le grain. On déduit ensuite le tenseur de déformation plastique dans chaque grain plastifié :

$$\varepsilon_I^p = \frac{1}{2} \sum_s (\mathbf{g}_s + {}^t\mathbf{g}_s) \gamma_s^p \quad (5.18)$$

Etape 5 : La déformation plastique est maintenant vue comme une déformation libre. Un traitement similaire à ce qui a été fait pour la déformation de magnétostriction au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2 permet de définir la déformation plastique macroscopique  $\mathbb{E}^p$  :

$$\mathbb{E}^p = \langle {}^T\mathbf{B}^I : \varepsilon_I^p \rangle \quad (5.19)$$

On reprend ensuite le calcul à l'étape 2, en redéfinissant la contrainte locale.

Etape 6 : Une fois la solution obtenue, on définit la contrainte résiduelle après décharge dans tous les grains :

$$\sigma^{Ir} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{C}^* \mathbf{C}^{I^{-1}} \right)^{-1} \mathbf{C}^* : (\mathbb{E}^p - \varepsilon_I^p) \quad (5.20)$$

ce qui correspond simplement à  $\Sigma = \mathbb{O}$  dans la relation (5.10) en supposant que la décharge est purement élastique.

On obtient ainsi un champ de contraintes résiduelles associées à la plasticité qu'il est possible d'introduire dans un calcul magnétique multi-échelle, afin de déterminer leur effet sur le comportement magnétique. Cette démarche a été appliquée sur le fer à 3% de silicium NO.

### 5.3.2 Application au Fe-3%Si

Les données monocristallines utilisées dans les calculs sont données dans le tableau 3.5. Le comportement plastique du monocristal de fer-silicium, de structure cubique centrée, est défini par 24 systèmes de glissement. Les glissements ont lieu dans un plan  $\{110\}$  et suivant une direction  $\langle 111 \rangle$ . On définit un comportement plastique très simple en choisissant une matrice  $H_{rs}$  (12x12) diagonale. Aucune interaction entre les différents systèmes de glissement activés n'est donc prise en compte. Ceci ne semble raisonnable que pour les petites déformations plastiques, où on ne retrouve effectivement qu'un seul système activé par grains. On utilise  $H_{rs}(i,i) = 200$  MPa pour tous les systèmes.

---

4. Si aucun système de glissement n'est activé dans un grain, sa déformation plastique est nulle.

### 5.3.2.1 Contraintes résiduelles associées à la plasticité

Le schéma de calcul présenté au paragraphe 5.3.1 a été appliqué. On applique une contrainte de traction de 285 MPa. Cette contrainte se trouve en deçà de la limite d'élasticité macroscopique (qui vaut environ 360 MPa dans la direction du laminage), mais suffit pour déclencher des glissements plastiques dans certains grains (phénomène de micro-plasticité).

Les contraintes résiduelles associées à cette plasticité, dans le cas où DL est la direction de traction, sont présentées sur la figure 5.24. Les calculs ont été effectués en utilisant une méthode de localisation de type Hill ou une méthode de type Berveiller-Zaoui. Les deux méthodes donnent des résultats identiques au niveau de contrainte envisagé. Ceci s'explique par le fait que la déformation plastique est très faible, de sorte que la perte de linéarité de la courbe de traction est minimale. Le module sécant est donc très proche du module élastique et les deux méthodes sont quasiment équivalentes.

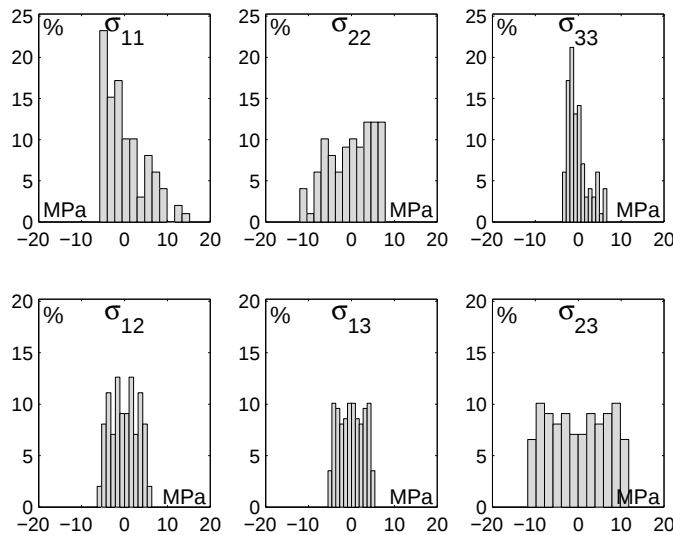


Figure 5.24 – *Distribution des contraintes résiduelles après une charge-décharge de 285 MPa en traction suivant DL -  $E_{11}^p \simeq 1,2 \cdot 10^{-4}$  - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO*

Ce champ de contraintes est tel que la distribution des composantes diagonales du tenseur des contraintes n'est pas symétrique par rapport à zéro. On ne retrouve pas une configuration équivalente à celle présentée au chapitre précédent. L'effet sur le comportement magnétique est assez important.

### 5.3.3 Modélisation du comportement magnétique

Le comportement magnétique associé à ces contraintes résiduelles est présenté sur la figure 5.25.

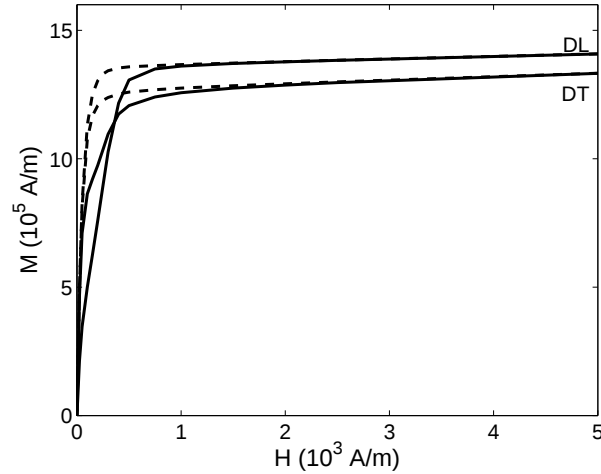


Figure 5.25 – Influence d'un état de contraintes résiduelles d'origine plastique ( $E_{11}^p \simeq 1,2 \cdot 10^{-4}$ ) sur la courbe d'aimantation anhystérique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO

L'effet est extrêmement marqué. La direction DL est la plus fortement affectée par cet état de contraintes résiduelles. Aux faibles champs magnétiques, on obtient même une susceptibilité anhystérique plus forte dans la direction DT que dans la direction DL. On retrouve ces tendances dans les observations expérimentales de [Hubert, 1998].

### 5.3.4 Modélisation du comportement magnéto-élastique

L'effet des contraintes résiduelles d'origine plastique est encore plus marqué sur la déformation de magnétostriction (figure 5.26).

La déformation de magnétostriction quand le champ magnétique est dirigé suivant DT n'est quasiment pas modifiée par cet état de contraintes résiduelles. En revanche, si le champ magnétique est dirigé suivant DL, l'amplitude de la déformation de magnétostriction est doublée. Ce champ de contraintes résiduelles, auto-équilibré mais non symétrique, a une forte influence sur la prévision de l'anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle (figure 5.27).

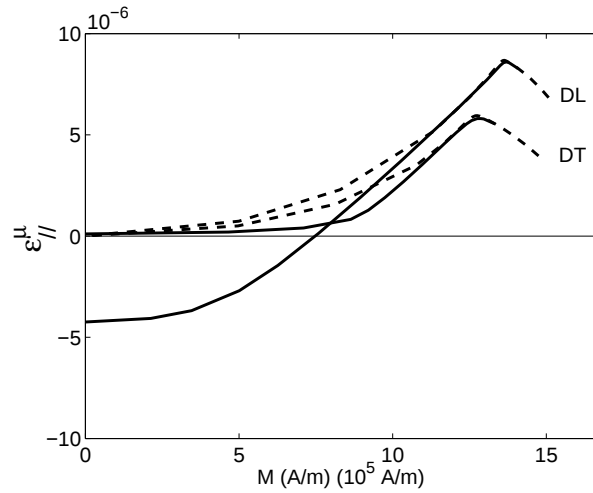


Figure 5.26 – Influence d'un état de contraintes résiduelles d'origine plastique ( $\varepsilon_{11}^p \simeq 1,2 \cdot 10^{-4}$ ) sur la déformation de magnétostriction anhystérétique (lignes) et comparaison avec un état libre de contraintes résiduelles (pointillés) - Directions DL et DT - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO

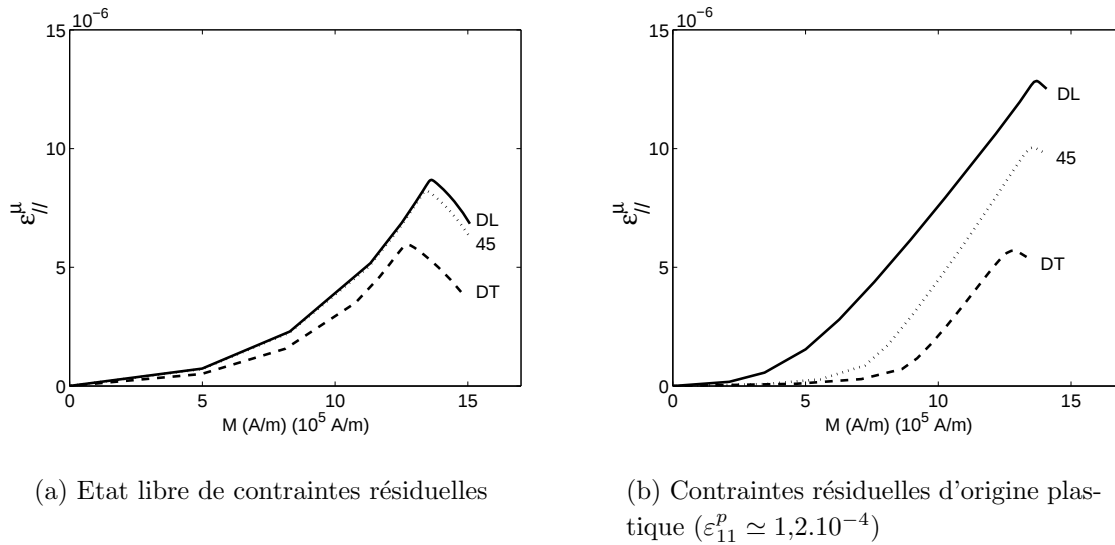


Figure 5.27 – Comparaison des courbes de magnétostriction avec et sans contraintes résiduelles d'origine plastique - Résultats de calcul - Fe-3% Si NO

Les contraintes résiduelles d'origine plastique, consécutives à une traction suivant DL, conduisent à une augmentation de l'amplitude de la déformation de magnétostriction prédite dans cette direction. A l'inverse, une contrainte de traction suivant DT aurait conduit à une augmentation de la déformation prédite dans le sens DT, et éventuellement à une inversion de l'anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle.

L'effet de la plasticité après une sollicitation de traction est analogue à l'effet d'une compression élastique dans la même direction. Cette tendance est tout à fait en accord avec les observations expérimentales présentées et discutées dans [Kuruzar et Cullity, 1971] et [Cullity, 1972].

#### 5.3.5 Conclusion

Les premiers résultats concernant la modélisation par une approche micro-macro des effets de la plasticité sur le comportement magnétique sont donc prometteurs. Le modèle multi-échelle fournit des résultats en accord qualitatif avec les observations expérimentales sur matériaux légèrement plastifiés. Des développements sont en cours pour étendre la démarche à des niveaux de déformation plastique plus élevés. Ces développements devraient permettre de mettre en évidence (par le calcul) les effets d'anisotropie magnéto-plastique, c'est à dire l'anisotropie sur le comportement magnétique induite par la plasticité.

Par ailleurs, en raison de la sensibilité très forte du comportement magnétique aux très faibles déformations plastiques, on peut imaginer de détecter le seuil de microplasticité des matériaux magnétiques par des mesures de susceptibilité. La dégradation brutale des propriétés magnétiques indique en effet, dès les faibles déformations plastiques, le déclenchement de la plasticité. Il serait à ce sujet intéressant de comparer les limites d'élasticité issues de mesures magnétiques à celles (normalement proches) obtenues par d'autres méthodes (mesures thermiques ou mesure de coefficient de Lankford).



# Conclusion - Perspectives

La modélisation du comportement magnéto-élastique des matériaux ferromagnétiques reste un domaine de recherche ouvert. Une telle modélisation est par exemple indispensable lorsqu'il est question de décrire l'effet des contraintes sur le comportement magnétique. Cette modélisation peut dériver de l'écriture d'un potentiel thermodynamique macroscopique [Lemaitre, 2001], incorporant un terme de couplage, c'est à dire sous la forme :

$$\Psi(\vec{H}, \sigma) = \Psi_{\mu}(\vec{H}) + \Psi_{\mu\sigma}(\vec{H}, \sigma) + \Psi_{\sigma}(\sigma)$$

Les termes  $\Psi_{\mu}$  et  $\Psi_{\sigma}$  désignent les potentiels qui définissent les comportements magnétique et mécanique découplés et  $\Psi_{\mu\sigma}$  désigne un terme de couplage qui fait intervenir à la fois le champ magnétique et la contrainte. L'écriture de ce potentiel magnéto-élastique pose de nombreux problèmes. En effet les phénomènes de couplage magnéto-élastique peuvent s'interpréter en faisant intervenir la déformation de magnétostriction. Cette déformation n'est définie rigoureusement qu'à l'échelle du domaine magnétique, est très hétérogène et dépend intimement de la configuration en domaines au sein du matériau. Or cette configuration en domaines ne peut pas être déduite simplement d'une information macroscopique. C'est pourquoi les modèles macroscopiques pour la déformation de magnétostriction n'ont jusqu'ici donné que peu de résultats.

En revanche, l'écriture d'un potentiel thermodynamique à l'échelle du domaine magnétique est plus naturelle. Il est donc séduisant, pour décrire le comportement magnéto-mécanique couplé, d'adopter une stratégie multi-échelle pour la prévision du comportement macroscopique. Cette stratégie permettra éventuellement de mieux définir la forme à donner à un potentiel macroscopique.

L'application d'une telle démarche fait l'objet de ce document. On y a présenté une modélisation tri-dimensionnelle pour le comportement anhystérétique magnéto-élastique couplé. Elle s'appuie sur une description du comportement à trois échelles distinctes. L'équilibre magnéto-mécanique est tout d'abord considéré à l'échelle du domaine magnétique, où l'aimantation est supposée uniforme. On déduit la situation d'équilibre par minimisation de l'énergie libre. Des règles de localisation et d'homogénéisation (encore assez rudimentaires) permettent de réaliser le passage entre l'échelle du domaine magnétique et celle du monocristal ou du grain, où les propriétés élastiques sont supposées uniformes. Une deuxième transition d'échelle, intégrant les effets de texture, permet ensuite de définir l'aimantation et la déformation à l'échelle du volume élémentaire représentatif, pour lequel on souhaite établir

une loi de comportement. Des règles de localisation et d'homogénéisation sont également associées à ce changement d'échelle.

Une attention particulière a été portée sur les effets d'anisotropie. On a ainsi montré que l'anisotropie du monocristal combinée à une texture cristallographique (introduite dans le modèle), si elle constitue bien la source principale d'anisotropie macroscopique, ne permet cependant pas d'expliquer l'anisotropie observée expérimentalement pour les comportements couplés. Deux autres sources d'anisotropie ont été identifiées. L'existence de surfaces libres ainsi que l'état de contraintes au sein du matériau participent non seulement de façon quantitative, mais aussi qualitative à la définition du comportement magnéto-élastique. La prise en compte de ces deux sources d'anisotropie supplémentaire permet ainsi de prédire correctement l'anisotropie magnétostrictive observée dans le plan de la tôle. On a pu constater que la définition de l'état magnétique, c'est à dire des configurations en domaines, à l'état désaimanté constitue un paramètre essentiel dans la définition du comportement macroscopique, en particulier lorsque les effets d'anisotropie sont étudiés. L'hypothèse répandue qui consiste à supposer que toutes les familles de domaines sont équiprobables dans chaque grain à l'état désaimanté semble peu justifiée. Le nombre de configurations possibles (qui conduisent toutes à une aimantation macroscopique nulle) est infini. Le choix d'une configuration particulière est délicat, et affecte sensiblement la prédiction des effets d'anisotropie. L'introduction d'un effet de surface libre et l'analyse de l'état de contraintes résiduelles permettent de définir de façon plus réaliste cet état initial.

Une autre caractéristique de ce modèle est d'être non-linéaire. Si les règles de passage de l'échelle du grain à celle du volume élémentaire représentatif sont écrites dans le contexte des comportements linéaires, le modèle microscopique est en revanche fortement non linéaire. Cette non linéarité se transmet donc à l'échelle macroscopique.

Ces travaux ont conduit à des développements expérimentaux pour la caractérisation des propriétés magnéto-élastiques des tôles magnétiques. On dispose ainsi d'une base expérimentale concernant le fer-silicium NO. Cette base expérimentale est constituée des courbes d'aimantation et de magnétostriction du matériau dans un grand nombre de directions du plan de tôle. Une méthode de correction de l'effet des forces magnétiques a été mise en œuvre.

Les premiers jalons ont été posés pour la mesure du comportement magnétique et surtout magnétostrictif sous contrainte uniaxiale. La mesure expérimentale des forces d'origine magnétique est alors possible, en effectuant des mesures de déformations en fonction du champ magnétique sur des échantillons dont la magnétostriction a été saturée par application d'une contrainte. Une telle mesure permettrait notamment de valider la modélisation choisie pour la correction de l'effet des forces. Ces points constituent la poursuite expérimentale naturelle de ce travail.

L'outil de modélisation développé permet de rendre compte des effets d'anisotropie liés à la texture. Il rend donc possible la comparaison de différentes textures vis à vis des propriétés magnéto-élastiques. On peut ainsi envisager d'optimiser certains

---

paramètres du procédé de fabrication des tôles, afin d'obtenir des textures conduisant à un comportement magnétique acceptable et, par exemple, à un comportement magnétique moins sensible à l'effet des contraintes, ou à une déformation de magnétostriction de plus faible amplitude.

Le modèle multi-échelle permet également de définir l'effet des contraintes sur le comportement magnétique. On peut ainsi s'en servir pour fournir les courbes de comportement magnétique sous contraintes, intégrées ensuite dans les calculs de structure. Si on souhaite intégrer l'effet de la multiaxialité des contraintes dans un calcul de structure, il devient indispensable de développer une notion de contrainte scalaire équivalente à une sollicitation multiaxiale. Le modèle multi-échelle, comme on l'a montré dans ce document, peut être utilisé pour définir une contrainte équivalente. La définition d'une telle contrainte ne faisant intervenir que l'état de contraintes macroscopique semble une première étape raisonnable. On voit déjà qu'une telle approche, qui définit une contrainte équivalente indépendamment du niveau de champ magnétique et des contraintes résiduelles, présente intrinsèquement certaines limites. Elle pourrait cependant fournir une bonne approximation. Sa mise au point nécessite un travail mixte, expérimental par l'utilisation du dispositif de mesure du comportement magnétique sous contraintes biaxiales, et numérique par l'exploitation du modèle multi-échelle.

Le modèle multi-échelle peut également être un élément intéressant pour développer des dispositifs d'estimation de contraintes résiduelles par mesures magnétiques ou magnétostrictives. La combinaison de mesures de susceptibilité dans différentes directions peut être considérée comme caractéristique de l'état de contraintes, et ainsi permettre de l'identifier. Ceci suppose tout de même d'adopter quelques hypothèses sur la forme du tenseur des contraintes. Le modèle multi-échelle fournit pour un chargement donné, la susceptibilité du matériau. La définition du chargement, connaissant la susceptibilité n'est pas un problème trivial. L'utilisation d'une contrainte équivalente peut permettre de simplifier ce problème. Cette contrainte, combinaison des composantes du tenseur des contraintes, si elle est identifiée dans différentes directions du matériau, fournit ainsi un système d'équation à résoudre. La résolution de ce système fournit les composantes du tenseur des contraintes. Rien n'indique cependant, pour un comportement magnétique donné, que l'état de contraintes associé est unique. On peut construire sur le même principe des estimations de contraintes résiduelles à partir de mesures magnétostrictives. La très forte sensibilité du comportement magnétostrictif à l'état de contraintes conduirait sans doute à des estimations plus précises que celles basées sur le comportement magnétique. Cette méthode n'est cependant applicable que pour détecter des contraintes de faible amplitude (inférieures à 50 MPa), au delà desquelles le comportement magnétostrictif est très peu sensible à une variation du chargement. Les progrès récents dans la mesure de champs de déformations par corrélation d'images ouvrent des perspectives intéressantes pour l'estimation de champ de contraintes dans les matériaux ferromagnétiques. La résolution de ces méthodes doit cependant être améliorée pour s'appliquer aux matériaux standards, dont la déformation de magnétostriction est de très faible amplitude.

Le développement d'une démarche micro-macro, dans le même esprit que le modèle multi-échelle, doit permettre de décrire les effets de la plasticité sur le comportement magnétique, en utilisant une approche par les contraintes résiduelles. On considère alors que la modification du comportement magnétique n'est pas lié directement à la plasticité, mais plutôt aux contraintes résiduelles auxquelles elle conduit. Cette approche se limite encore au cas où les déformations plastiques sont de faible amplitude. Les contraintes résiduelles générées sont alors essentiellement intergranulaires, et s'intègrent simplement dans le calcul magnéto-élastique. Les phénomènes mis en jeu dans le cas de déformations plastiques plus importantes sont plus complexes. Ils introduisent en particulier de fortes hétérogénéités intraphases, liées par exemple à la formation de murs de dislocations, dont il serait nécessaire de tenir compte dans la définition du comportement magnétique [Degauque, 1985]. Si une approche par les contraintes résiduelles semble toujours possible, la description sommaire de la microstructure adoptée dans ce travail ne permet pas aujourd'hui d'introduire de façon précise ces effets sur le comportement macroscopique.

La description de la microstructure magnétique est plus précise. La microstructure mécanique (la distribution des phases du matériau) est considérée figée, la configuration en domaines ne l'est pas. Limitée aux fractions volumiques et à la direction de l'aimantation dans les domaines, elle montre cependant certaines limites. En particulier, on a montré que l'utilisation d'une constante phénoménologique  $A_s$  pour définir les fractions volumiques interdit toute anisotropie magnétique initiale (au voisinage de l'état désaimanté) pour le monocristal. Une meilleure description de la microstructure magnétique permettrait certainement d'apporter des réponses à ce problème. Les fractions volumiques des familles de domaines étant connues, la donnée manquante est la distribution des domaines au sein d'un monocristal ou d'un grain. L'introduction de la densité de parois magnétiques donnerait une information exploitable (bien qu'encore incomplète) sur cette distribution. Il reste bien sûr à définir la façon dont cette densité de parois dépend du chargement, ce qui constitue le nœud du problème. Les deux principaux paramètres dans la définition de la configuration en domaines sont a priori la distribution du champ démagnétisant et celle de l'énergie magnéto-élastique. Ce sont en effet les deux seules contributions énergétiques qui s'opposent à l'uniformité du champ magnétique dans un monocristal.

Une description plus fine de la microstructure et de son évolution avec le chargement appliqué ouvre ainsi de nouvelles perspectives.

Une définition plus précise de la configuration en domaines permettrait d'adopter une démarche moins phénoménologique dans la définition du comportement du monocristal. Les effets d'anisotropie et la contribution de l'énergie magnéto-élastique à l'équilibre magnétique seraient ainsi mieux décrits.

Une définition plus précise de la microstructure mécanique permettrait de pousser plus loin l'interprétation des effets de la plasticité à travers les contraintes résiduelles. La détermination des contraintes résiduelles d'ordre 2 (intergranulaires) associées à la plasticité constitue une première étape. Des travaux en ce sens sont actuellement en cours. Si on souhaite introduire des taux de déformation plastique plus importants, les hétérogénéités intraphases semblent jouer un rôle non négligeable. Il est alors nécessaire d'avoir recours à des modélisations plus complexes donnant accès à

---

ces hétérogénéités intraphases, et donc aux contraintes résiduelles d'ordre 3 (intragranulaires). Cette approche nécessite au préalable les développements déjà évoqués sur le modèle magnétique, pour une meilleure description de la structure en domaines, afin de pouvoir intégrer les effets de ces contraintes résiduelles d'ordre 3. On peut également imaginer une approche plus phénoménologique qui ferait dépendre la configuration d'équilibre de paramètres tels que la densité de dislocations et la structure associée.

Le dernier point concerne l'évolution de la microstructure métallurgique. Certains matériaux subissent en effet, sous l'action d'un chargement magnétique ou mécanique, une transformation de phase, qui conduit à une modification des propriétés mécaniques et magnétiques. C'est le cas notamment des aciers dits TRIP (TRAnsformation Induced Plasticity). Ces aciers sont des biphasés austénite-martensite. Sous l'action d'une contrainte, le glissement (associé à la plasticité) des plans cristallins conduit à la transformation de l'austénite en martensite. L'austénite est amagnétique alors que la martensite est ferromagnétique. On peut donc envisager de faire un suivi de transformation de phase par mesures magnétiques. L'exploration de ce sujet, envisagé notamment dans [Scholz, 2002], fait l'objet du mémoire de DEA de Sylvain Dossin [Dossin, 2003]. La susceptibilité magnétique des aciers TRIP croît avec la proportion de martensite transformée. Le modèle multi-échelle, associé à une modélisation de la transformation martensitique peut fournir des informations concernant la mise au point d'un tel suivi.

De façon plus générale, les mesures magnétiques constituent un outil expérimental puissant en tant qu'indicateur de l'état et de l'évolution de la microstructure des matériaux magnétiques. Les mesures magnétiques peuvent ainsi être envisagées pour l'estimation de contraintes résiduelles, pour la détection de seuil de plasticité, ou encore pour le suivi de transformation de phase. La mise au point de tels dispositifs expérimentaux nécessite l'utilisation d'outils de modélisation élaborés. Dans ce contexte, les modélisations de type micro-macro, intégrant les processus physiques associés au comportement magnétique, semblent fournir des informations pertinentes à l'échelle macroscopique. Cette voie prometteuse est donc largement ouverte, et ne demande qu'à être empruntée.



# Bibliographie

- [Astbury et DeBarr, 1948] N.F. Astbury et A.E. DeBarr (1948). Anisotropy in steel sheet and strip. *Sheet Metal Ind.*, 25:911.
- [Bariou et al., 2001] D. Bariou, P. Qu  ff  lec, P. Gelin, et M. Le Floc’h (2001). Extension of the effective medium approximation for determination of the permeability tensor of unsaturated polycrystalline ferrites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(6):3885–3891.
- [Benford, 1946] F.G. Benford (1946). Elastic anisotropy in electrical strip steel. *Metals Progress*, 46:94.
- [Bernadou et al., 2002] M. Bernadou, S. Depeyre, S. He, et P. Meiland (2002). Numerical simulation of magnetic microstructure based on energy minimization. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 242-245:1018–1020.
- [Berveiller et Zaoui, 1978] M. Berveiller et A. Zaoui (1978). An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 26:325–344.
- [Billardon et Hirsinger, 1995] R. Billardon et L. Hirsinger (1995). Magnetostriction and so-called form effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 140-144:2199–2200.
- [Bornert et al., 2001a] M. Bornert, T. Bretheau, et P. Gilormini (2001a). *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermès Science.
- [Bornert et al., 2001b] M. Bornert, T. Bretheau, et P. Gilormini (2001b). *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome 2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Hermès Science.
- [Bozorth, 1951] R.M. Bozorth (1951). *Ferromagnetism*. Van Nostrand.
- [Béranger et al., 1996] G. Béranger, F. Duffaut, J. Morlet, et J.F. Tiers (1996). *Les alliages de fer et de nickel*. Technique & Documentation, Lavoisier, Paris.
- [Brissonneau, 1997] P. Brissonneau (1997). *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l’  lectrotechnique*. Hermès.
- [Bruggeman, 1935] D.A.G. Bruggeman (1935). Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. *Annalen der Physik*, 5(24):636–664.
- [Buiro, 2000] N. Buiro (2000). *Modélisation multi-échelle du comportement magnéto-élastique couplé des matériaux ferromagnétiques doux*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Buiro et al., 2001] N. Buiro, S. He, L. Hirsinger, S. Depeyre, M. Bernadou, et R. Billardon (2001). From micromagnetic to multiscale modeling of the coupled magnetoelastic behavior of ferromagnetic materials. *Physica B*, 306:33–37.

- [Buvat, 2000] C. Buvat (2000). *Etude de l'anisotropie et de l'hétérogénéité des comportements magnétique et mécanique d'un alliage de fer-silicium à grains orientés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Carr, 1969] W.J. Carr (1969). *Magnetism & Metallurgy*. Academic Press, New York & London.
- [Claeyssen et al., 1997] F. Claeyssen, N. Lhermet, R. Le Letty, et P. Bouchilloux (1997). Actuators, transducers and motors based on giant magnetostrictive materials. *Journal of Alloys and Compounds*, 258:61–73.
- [Cullity, 1972] B.D. Cullity (1972). *Introduction to magnetic Materials*. Addison-Wesley Publishing Company, London.
- [Cullity, 1978] B.D. Cullity (1978). *Elements of X-ray diffraction*. Addison-Wesley Publishing Company, London.
- [Daniel et al., 2001] L. Daniel, O. Hubert, N. Buiro, et R. Billardon (2001). Description par éléments finis d'un polycristal anisotrope. *15<sup>ème</sup> Congrès Français de mécanique, Nancy, France*.
- [Daniel et al., 2003] L. Daniel, O. Hubert, F. Ossart, et R. Billardon (2003). Experimental analysis and multiscale modelling of the anisotropic mechanical and magnetostrictive behaviours of electrical steels. *J. Phys. IV*, 105:247–253.
- [Degauque, 1985] J. Degauque (1985). Les pertes d'énergie dans les ferromagnétiques métalliques doux : origines physiques. *Mémoires et Etudes Scientifiques Revue de Métallurgie*, (1):5706–5708.
- [Delage, 1997] M. Delage (1997). *Contribution à l'étude du comportement magnéto-mécanique des tôles de fer-silicium à grains non-orientés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [DeSimone et al., 2002] A. DeSimone, R.V. Kohn, S. Müller, F. Otto, et R. Schäfer (2002). Low energy domain patterns in soft ferromagnetic films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 242-245:1047–1051.
- [Dossin, 2003] S. Dossin (2003). *Suivi de transformation de phase par mesures magnétiques dans l'acier TRIP 301. Aspects expérimentaux et numériques*. Mémoire de DEA Solide, Structures et Systèmes Mécaniques.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1993] E. du Trémolet de Lacheisserie (1993). *Magnetostriction - Theory and applications of magnetoelasticity*. CRC Press.
- [Eringen et Maugin, 1990] A.C. Eringen et G.A. Maugin (1990). *Electrodynamics of continua - I: Foundations and solid media*. Springer Verlag, New York.
- [Eshelby, 1957] J.D. Eshelby (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, A421:376.
- [François et al., 1998] M. François, G. Geymonat, et Y. Berthaud (1998). Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : application to acoustic measurements. *Int. J. of Sol. and Struc.*, 35(31-32):4091–4106.
- [François et al., 1995] D. François, A. Pineau, et A. Zaoui (1995). *Comportement mécanique des matériaux - Tome 1 : Elasticité et plasticité*. Hermès.
- [Gilormini, 1995] P. Gilormini (1995). Insuffisance de l'extension classique du modèle autocohérent au comportement non linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 320:115–122.

- [Gourdin, 1998] C. Gourdin (1998). *Identification et modélisation du comportement électromagnétoélastique de structures ferromagnétiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Gourdin et al., 1998a] C. Gourdin, L. Hirsinger, G. Barbier, et R. Billardon (1998a). Experimental identification of the coupling between the anhysteretic magnetic and magnetostrictive behaviours. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 177-181:201–202.
- [Gourdin et al., 1998b] C. Gourdin, L. Hirsinger, et R. Billardon (1998b). Finite element implementation of an internal variable magneto-elastic hysteresis model. *IOS Press*, pages 625–628.
- [Guillaume, 1897] C.E. Guillaume (1897). Recherches sur les aciers au nickel. dilatations aux températures élevées; résistance électrique. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 125:235–238.
- [Hashin et Shtrikman, 1961] Z. Hashin et S. Shtrikman (1961). Note on the effective constants of composite materials. *Journal of the Franklin institute*, pages 423–426.
- [Hashin et Shtrikman, 1962a] Z. Hashin et S. Shtrikman (1962a). On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:335–342.
- [Hashin et Shtrikman, 1962b] Z. Hashin et S. Shtrikman (1962b). A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 33(10):3125–3131.
- [Hashin et Shtrikman, 1962c] Z. Hashin et S. Shtrikman (1962c). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:343–352.
- [He, 1999] S. He (1999). *Modélisation et simulation numérique de matériaux magnétostrictifs*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Hill, 1965] R. Hill (1965). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:89–101.
- [Hirsinger, 1994] L. Hirsinger (1994). *Etude des déformations magnéto-élastiques dans les matériaux ferromagnétiques doux. Application à l'étude des déformations d'une structure de machine électrique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Hubert, 1998] O. Hubert (1998). *Influence des contraintes internes et de la structure des dislocations sur les couplages magnéto-mécaniques dans les alliages Fe-3%Si à grains non orientés*. Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, France.
- [Hubert et al., 2002] O. Hubert, L. Daniel, et R. Billardon (2002). Experimental analysis of the magnetoelastic anisotropy of a non-oriented silicon iron alloy. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255C:352–354.
- [Hubert et Hug, 1995] O. Hubert et E. Hug (1995). Influence of plastic strain on magnetic behaviour of non-oriented fe-3si and application to manufacturing test by punching. *Materials Science and Technology*, 11:482–487.
- [Hubert et Schäfer, 1998] A. Hubert et R. Schäfer (1998). *Magnetic domains*. Springer.

- [Hug, 1993] E. Hug (1993). *Etude des dégradations des propriétés magnétiques d'alliages Fe-3%Si avec les déformations plastiques. Application à la mise en œuvre des tôles utilisées dans la conception des moteurs électriques*. Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, France.
- [Hug, 1995] E. Hug (1995). Evolution of the magnetic domain structure of oriented 3% sife sheets with plastic strain. *J. Materials Science*, 30:4417.
- [Iordache et al., 2003] V.E. Iordache, F. Ossart, et E. Hug (2003). Magnetic characterisation of elastically and plastically tensile strained non-oriented fe-3.2%si steel. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255:57–59.
- [Jendly, 2002] N. Jendly (2002). *Plasticité et microplasticité des alliages fer-silicium lors de sollicitations de traction et de flexion pure*. Mémoire de DEA Solide, Structures et Systèmes Mécaniques.
- [Jiles, 1991] D.C. Jiles (1991). *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*. Chapman & Hall, London.
- [Jiles et Atherton, 1986] D.C. Jiles et D.L. Atherton (1986). Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 61:48–60.
- [Joule, 1847a] J.P. Joule (1847a). On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars. *Philosophical Magazine, sér. 3*, 30(199):76–87.
- [Joule, 1847b] J.P. Joule (1847b). On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars. *Philosophical Magazine, sér. 3*, 30(201):225–241.
- [Kashiwaya, 1991] K. Kashiwaya (1991). Fundamentals of nondestructive measurement of biaxial stress in steel utilizing magnetoelastic effect under low magnetic field. *Japanese Journal of Applied Physics*, 11A:2932–2942.
- [Kröner, 1961] E. Kröner (1961). Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metallurgica*, 9:155–161.
- [Kuruzar et Cullity, 1971] M.E. Kuruzar et B.D. Cullity (1971). The magnetostriction of iron under tensile and compressive tests. *Inter. J. Magnetism*, 1:323–325.
- [Lemaitre, 2001] J. Lemaitre (2001). *Handbook of Materials Behavior Models - volume 3: Multiphysics behaviors*. Academic Press.
- [Lemaitre et Chaboche, 1985] J. Lemaitre et J.L. Chaboche (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- [Maugin, 1988] G.A. Maugin (1988). *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Elsevier.
- [Maurel, 2002] V. Maurel (2002). *Influence de l'état mécanique multiaxial induit par la découpe sur les propriétés d'usage des tôles magnétiques*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [McClintock et Argon, 1966] F.A. McClintock et A.S. Argon (1966). *Mechanical behavior of materials*. Addison-Wesley.
- [Mura, 1982] T. Mura (1982). *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers.
- [Néel, 1944] L. Néel (1944). Les lois de l'aimantation et de la subdivision en domaines élémentaires d'un monocristal de fer. *J. Phys. Radiat.*, 5:241–251.
- [Pearson et al., 2000] J. Pearson, P. Squire, M. Maylin, et J. Gore (2000). Biaxial stress effects on the magnetic properties of pure iron. *IEEE Transactions on Magnetism*, 36(5):3251–3253.

- 
- [Pellegrini, 2001] Y.P. Pellegrini (2001). Self-consistent effective-medium approximation for strongly nonlinear media. *Physical Review B*, 64:134211:1–11.
- [Ponte-Castañeda, 1992a] P. Ponte-Castañeda (1992a). A new variational principle and its application to nonlinear heterogeneous systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(5):1321–1341.
- [Ponte-Castañeda, 1992b] P. Ponte-Castañeda (1992b). New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(8):1757–1788.
- [Ponte-Castañeda et al., 1992] P. Ponte-Castañeda, G. deBotton, et G. Li (1992). Effective properties of nonlinear inhomogeneous dielectrics. *Physical Review B*, 46(8):4387–4394.
- [Ponte-Castañeda et Kailasam, 1997] P. Ponte-Castañeda et M. Kailasam (1997). Nonlinear electrical conductivity in heterogeneous media. *Proc. R. Soc. Lond.*, A453:793–816.
- [Rousselle et al., 1993] D. Rousselle, A. Berthault, O. Acher, J.P. Bouchaud, et P.G. Zérah (1993). Effective medium at finite frequency : theory and experiment. *Journal of Applied Physics*, 74(1):475–479.
- [Sablik et al., 1994] M. Sablik, L. Riley, G. Burkhardt, H. Kwun, P. Cannell, K. Watts, et R. Langman (1994). Micromagnetic model for biaxial stress effects on magnetic properties. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 132.
- [Schneider et Richardson, 1982] C. Schneider et J. Richardson (1982). Biaxial magnetoelasticity in steels. *Journal of Applied Physics*, 53:8136–8138.
- [Scholz, 2002] J. Scholz (2002). *Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique d'un acier inoxydable austénitique instable*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Stroud, 1975] D. Stroud (1975). Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material. *Physical Review B*, 12(8):3368–3373.
- [Suquet et Ponte-Castañeda, 1993] P. Suquet et P. Ponte-Castañeda (1993). Small-contrast perturbation expansions for the effective properties of nonlinear composites. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 317:1515–1522.
- [Van Houtte et Aernoudt, 1976] P. Van Houtte et E. Aernoudt (1976). Considerations on the crystal and the strain symmetry in the calculation of deformation textures with the Taylor theory. *Materials Science and Engineering*, 23:11–22.
- [Vinogradov et al., 1989] A.P. Vinogradov, L.V. Panina, et A.K. Sarychev (1989). Method for calculating the dielectric constant and magnetic permeability in percolating systems. *Sov. Phys. Dokl.*, 34(6):530–532.
- [Webster, 1925a] W.L. Webster (1925a). The magnetic properties of iron crystals. *Proc. R. Soc. Lond.*, 107A:496–509.
- [Webster, 1925b] W.L. Webster (1925b). Magnetostriction in iron crystals. *Proc. R. Soc. Lond.*, 109A:570–584.
- [Weiser et al., 2000] B. Weiser, H. Pfützner, et J. Anger (2000). Relevance of magnetostriction and forces for the generation of audible noise of transformer cores. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(5):3759–3777.
- [Wiener, 1912] P. Wiener (1912). *Abh. Math. Phys. Kl. Konigl. Sach.*, 32:509.
-

- [Yamasaki et al., 1996] T. Yamasaki, S. Yamamoto, et M. Hirao (1996). Effect of applied stresses on magnetostriction of low carbon steel. *NDT & E International*, 29(5):263–268.

---

## Annexes



# Annexe A

## Détermination du tenseur d'Eshelby dans le cas d'un milieu de référence orthotrope

### Sommaire

---

|     |                              |     |
|-----|------------------------------|-----|
| A.1 | Introduction . . . . .       | 160 |
| A.2 | Opérateur de Green . . . . . | 160 |
| A.3 | Tenseur d'Eshelby . . . . .  | 167 |

---

## A.1 Introduction

Toshio Mura [Mura, 1982] donne les éléments permettant de déterminer l'opérateur de Green associé à une inclusion sphérique dans un milieu infini linéaire anisotrope de modules  $\mathbf{C}$ . Il est ainsi possible d'obtenir une solution analytique pour cet opérateur. Cette annexe présente les résultats de calcul obtenus à l'aide du logiciel MATHEMATICA<sup>®</sup>, pour un tenseur  $\mathbf{C}$  orthotrope. Ces résultats sont ensuite intégrés au modèle multi-échelle (sous MATLAB<sup>®</sup>) dans lequel une intégration numérique permet de définir le tenseur d'Eshelby associé au milieu de modules  $\mathbf{C}$ .

## A.2 Opérateur de Green

$$G_{ijkl}(\vec{x}) = \frac{x_k \cdot x_l \cdot N_{ij}(\vec{x})}{D(\vec{x})} \quad (\text{A.1})$$

avec (en utilisant la convention de sommation d'Einstein):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = {}^t [x_1, x_2, x_3] \\ N_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K_{km} K_{ln} \\ D(\vec{x}) = \epsilon_{mnl} K_{m1} K_{n2} K_{l3} \\ K_{ik}(\vec{x}) = C_{ijkl} x_j x_l \\ \epsilon_{mnl} = 0 \quad \text{sauf} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas d'un milieu de référence orthotrope, le tenseur des modules se réduit à neuf constantes indépendantes et peut s'écrire :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{11} = C_{1313} z^2 - C_{1111}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \\ K_{12} = K_{21} = -(C_{1122} + C_{1212})(-1 + z^2) \cos \theta \sin \theta \\ K_{13} = K_{31} = (C_{1133} + C_{1313}) z \sqrt{1 - z^2} \cos \theta \\ K_{22} = C_{2323} z^2 - C_{1212}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \\ K_{23} = K_{32} = (C_{2233} + C_{2323}) z \sqrt{1 - z^2} \sin \theta \\ K_{33} = C_{3333} z^2 - C_{1313}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2323}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} N_{11} = & (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1 + z^2) \sin^2 \theta + \\ & \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \\ & \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2323}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} N_{12} = N_{21} = & (-1 + z^2) \cos \theta \sin \theta \times \\ & \left[ - \left( (C_{1133} + C_{1313})(C_{2233} + C_{2323}) - (C_{1122} + C_{1212}) C_{3333} \right) z^2 - \right. \\ & \left. (C_{1122} + C_{1212})(-1 + z^2)(C_{1313} \cos^2 \theta + C_{2323} \sin^2 \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} N_{13} = N_{31} = & z \sqrt{1 - z^2} \cos \theta \left[ - (C_{1133} + C_{1313}) C_{2323} z^2 + \right. \\ & (-1 + z^2) \left( C_{1212} (C_{1133} + C_{1313}) \cos^2 \theta + \right. \\ & \left. \left. \left( (C_{1133} + C_{1313}) C_{2222} - (C_{1122} + C_{1212})(C_{2233} + C_{2323}) \right) \sin^2 \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} N_{22} = & (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1 + z^2) \cos^2 \theta + \\ & \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \\ & \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313}(-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2323}(-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
N_{23} = N_{32} = z\sqrt{1-z^2}\sin\theta & \left[ -C_{1313}(C_{2233} + C_{2323})z^2 + \right. \\
& (-1+z^2) \left( - \left( (C_{1122} + C_{1212})(C_{1133} + C_{1313}) - C_{1111}(C_{2233} + C_{2323}) \right) \cos^2\theta + \right. \\
& \left. \left. C_{1212}(C_{2233} + C_{2323})\sin^2\theta \right) \right] \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{33} = -(C_{1122} + C_{1212})^2(-1+z^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta + \\
\left[ C_{1313}z^2 - C_{1111}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{1212}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \times \\
\left[ C_{2323}z^2 - C_{1212}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2222}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \quad (A.9)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D = 2(C_{1122} + C_{1212})(C_{1133} + C_{1313})(C_{2233} + C_{2323})z^2(-1+z^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta - \\
(C_{2233} + C_{2323})^2z^2(1-z^2)\sin^2\theta \left( C_{1313}z^2 - C_{1111}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{1212}(-1+z^2)\sin^2\theta \right) - \\
(C_{1133} + C_{1313})^2z^2(1-z^2)\cos^2\theta \left( C_{2323}z^2 - C_{1212}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2222}(-1+z^2)\sin^2\theta \right) - \\
(C_{1122} + C_{1212})^2(-1+z^2)^2\cos^2\theta\sin^2\theta \left( C_{3333}z^2 - C_{1313}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2323}(-1+z^2)\sin^2\theta \right) + \\
\left[ C_{1313}z^2 - C_{1111}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{1212}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \times \\
\left[ C_{2323}z^2 - C_{1212}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2222}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \times \\
\left[ C_{3333}z^2 - C_{1313}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2323}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \quad (A.10)
\end{aligned}$$

L'opérateur de Green s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
G_{1111} = \frac{(1-z^2)\cos^2\theta}{D} & \left( (C_{2233} + C_{2323})^2z^2(-1+z^2)\sin^2\theta \right. \\
& + \left[ C_{2323}z^2 - C_{1212}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2222}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \times \\
& \left. \left[ C_{3333}z^2 - C_{1313}(-1+z^2)\cos^2\theta - C_{2323}(-1+z^2)\sin^2\theta \right] \right) \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1122} = G_{2211} = & \frac{(1-z^2)\sin^2\theta}{D} \left( (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1+z^2) \sin^2\theta \right. \\
 & + \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2222} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\
 & \left. \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1133} = G_{3311} = & \frac{z^2}{D} \left( (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1+z^2) \sin^2\theta + \right. \\
 & \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2222} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\
 & \left. \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1123} = G_{1132} = G_{2311} = G_{3211} = & \frac{z\sqrt{1-z^2}\sin\theta}{D} \left( (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1+z^2) \sin^2\theta + \right. \\
 & \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2222} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\
 & \left. \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1113} = G_{1131} = G_{1311} = G_{3111} = & \frac{z\sqrt{1-z^2}\cos\theta}{D} \left( (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1+z^2) \sin^2\theta + \right. \\
 & \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2222} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\
 & \left. \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1112} = G_{1121} = G_{1211} = G_{2111} = & \frac{(1-z^2)\cos\theta\sin\theta}{D} \left( (C_{2233} + C_{2323})^2 z^2 (-1+z^2) \sin^2\theta + \right. \\
 & \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2222} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\
 & \left. \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

$$G_{2222} = \frac{(1-z^2)\sin^2\theta}{D} \left( (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1+z^2) \cos^2\theta + \right. \\ \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{1212} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\ \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.17})$$

$$G_{2233} = G_{3322} = \frac{z^2}{D} \left( (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1+z^2) \cos^2\theta + \right. \\ \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{1212} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\ \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.18})$$

$$G_{2223} = G_{2232} = G_{2322} = G_{3222} = \frac{z\sqrt{1-z^2}\sin\theta}{D} \left( (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1+z^2) \cos^2\theta + \right. \\ \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{1212} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\ \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.19})$$

$$G_{2213} = G_{2231} = G_{1322} = G_{3122} = \frac{z\sqrt{1-z^2}\cos\theta}{D} \left( (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1+z^2) \cos^2\theta + \right. \\ \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{1212} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\ \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.20})$$

$$G_{2221} = G_{2212} = G_{2122} = G_{1222} = \frac{(1-z^2)\cos\theta\sin\theta}{D} \left( (C_{1133} + C_{1313})^2 z^2 (-1+z^2) \cos^2\theta + \right. \\ \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{1212} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \times \\ \left[ C_{3333} z^2 - C_{1313} (-1+z^2) \cos^2\theta - C_{2323} (-1+z^2) \sin^2\theta \right] \right) \quad (\text{A.21})$$

$$G_{3333} = \frac{z^2}{D} \left( - (C_{1122} + C_{1212})^2 (-1 + z^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\ \left. \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \right. \\ \left. \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \right) \quad (\text{A.22})$$

$$G_{3323} = G_{3332} = G_{2333} = G_{3233} = \frac{z \sqrt{1 - z^2} \sin \theta}{D} \left( - (C_{1122} + C_{1212})^2 (-1 + z^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\ \left. \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \right. \\ \left. \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \right) \quad (\text{A.23})$$

$$G_{3313} = G_{3331} = G_{1333} = G_{3133} = \frac{z \sqrt{1 - z^2} \cos \theta}{D} \left( - (C_{1122} + C_{1212})^2 (-1 + z^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\ \left. \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \right. \\ \left. \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \right) \quad (\text{A.24})$$

$$G_{3321} = G_{3312} = G_{2133} = G_{1233} = \frac{(1 - z^2) \cos \theta \sin \theta}{D} \left( - (C_{1122} + C_{1212})^2 (-1 + z^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\ \left. \left[ C_{1313} z^2 - C_{1111} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{1212} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \times \right. \\ \left. \left[ C_{2323} z^2 - C_{1212} (-1 + z^2) \cos^2 \theta - C_{2222} (-1 + z^2) \sin^2 \theta \right] \right) \quad (\text{A.25})$$

$$G_{2323} = G_{2332} = G_{3223} = G_{3232} = \frac{z^2 (1 - z^2) \sin^2 \theta}{D} \left( - (C_{1313} (C_{2233} + C_{2323}) z^2) + \right. \\ \left. (-1 + z^2) \left[ - ((C_{1122} + C_{1212}) (C_{1133} + C_{1313}) - C_{1111} (C_{2233} + C_{2323})) \cos^2 \theta + \right. \right. \\ \left. \left. C_{1212} (C_{2233} + C_{2323}) \sin^2 \theta \right] \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
G_{2313} = G_{2331} = G_{3213} = G_{3231} = G_{1323} = G_{3123} = G_{1332} = G_{3132} = \\
\frac{z^2(1-z^2)\cos\theta\sin\theta}{D} \left( - (C_{1313}(C_{2233} + C_{2323})z^2) + \right. \\
(-1+z^2) \left[ - (((C_{1122} + C_{1212})(C_{1133} + C_{1313}) - C_{1111}(C_{2233} + C_{2323}))\cos^2\theta) + \right. \\
\left. \left. C_{1212}(C_{2233} + C_{2323})\sin^2\theta \right] \right) \quad (A.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2312} = G_{2321} = G_{3212} = G_{3221} = G_{1223} = G_{2123} = G_{1232} = G_{2132} = \\
\frac{z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin^2\theta}{D} \left( - (C_{1313}(C_{2233} + C_{2323})z^2) + \right. \\
(-1+z^2) \left[ - (((C_{1122} + C_{1212})(C_{1133} + C_{1313}) - C_{1111}(C_{2233} + C_{2323}))\cos^2\theta) + \right. \\
\left. \left. C_{1212}(C_{2233} + C_{2323})\sin^2\theta \right] \right) \quad (A.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{1313} = G_{1331} = G_{3113} = G_{3131} = \frac{z^2(1-z^2)\cos^2\theta}{D} \left( - ((C_{1133} + C_{1313})C_{2323}z^2) + \right. \\
(-1+z^2) \left[ C_{1212}(C_{1133} + C_{1313})\cos^2\theta + \right. \\
\left. \left. ((C_{1133} + C_{1313})C_{2222} - (C_{1122} + C_{1212})(C_{2233} + C_{2323}))\sin^2\theta \right] \right) \quad (A.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{1312} = G_{1321} = G_{3112} = G_{3121} = G_{1213} = G_{2113} = G_{1231} = G_{2131} = \\
\frac{z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\cos^2\theta\sin\theta}{D} \left( - ((C_{1133} + C_{1313})C_{2323}z^2) + \right. \\
(-1+z^2) \left[ C_{1212}(C_{1133} + C_{1313})\cos^2\theta + \right. \\
\left. \left. ((C_{1133} + C_{1313})C_{2222} - (C_{1122} + C_{1212})(C_{2233} + C_{2323}))\sin^2\theta \right] \right) \quad (A.30)
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
G_{1212} = G_{1221} = G_{2121} = G_{2112} = \\
\frac{(1-z^2)(-1+z^2)\cos^2\theta\sin^2\theta}{D} \left( -(((C_{1133}+C_{1313})(C_{2233}+C_{2323})-(C_{1122}+C_{1212})C_{3333})z^2) - \right. \\
\left. (C_{1122}+C_{1212})(-1+z)(1+z)(C_{1313}\cos^2\theta+C_{2323}\sin^2\theta) \right) \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

### A.3 Tenseur d'Eshelby

Le tenseur d'Eshelby  $\mathbf{S}^E$  s'obtient ensuite par intégration de l'opérateur de Green :

$$S_{ijmn}^E = \frac{1}{8\pi} C_{pqmn} \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} \left( G_{ipjq}(\vec{x}) + G_{jpqi}(\vec{x}) \right) d\theta \quad (\text{A.32})$$

en prenant (pour une sphère):

$$\begin{cases} \overline{x_1} = \sqrt{1-z^2} \cos\theta \\ \overline{x_2} = \sqrt{1-z^2} \sin\theta \\ \overline{x_3} = z \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

On définit ainsi le tenseur d'Eshelby associé au milieu infini de modules  $\mathbf{C}$  (orthotrope).



# Annexe B

## Cas particulier du polycristal isotrope de fer pur

### Sommaire

---

|            |                                                                      |            |
|------------|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>B.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                                        | <b>170</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Quelques solutions analytiques dans le cas isotrope . . . . .</b> | <b>171</b> |
| B.2.1      | Comportement élastique macroscopique . . . . .                       | 171        |
| B.2.2      | Déformation de magnétostriction à saturation . . . . .               | 175        |
| B.2.3      | Déformation de magnétostriction maximale . . . . .                   | 179        |
| <b>B.3</b> | <b>Définition d'une texture isotrope . . . . .</b>                   | <b>180</b> |
| B.3.1      | Tirage aléatoire des orientations cristallographiques . . . . .      | 180        |
| B.3.2      | Discrétisation des orientations cristallographiques . . . . .        | 182        |
| <b>B.4</b> | <b>Application du modèle dans le cas isotrope . . . . .</b>          | <b>183</b> |
| B.4.1      | Comportement élastique macroscopique . . . . .                       | 183        |
| B.4.2      | Déformation de magnétostriction à saturation . . . . .               | 184        |
| B.4.3      | Comportements magnétique et magnétostrictif . . . . .                | 184        |

---

Le cas particulier du polycristal isotrope est intéressant car il permet de dégager dans certaines conditions des solutions analytiques aux problèmes d'homogénéisation posés. L'étude d'une telle configuration peut ainsi permettre de tester le modèle sur des résultats connus.

Le matériau modèle étudié est un polycristal isotrope de fer. Chaque grain présente la symétrie cubique de la maille de fer  $\alpha$ . Toutes les orientations cristallographiques des grains, réparties de façon aléatoire, sont équiprobables en volume et les grains sont équiaxes, de sorte que le comportement macroscopique est isotrope.

Certains des résultats analytiques donnés dans cette annexe sont détaillés dans la partie exercices de [Bornert et al., 2001a].

## B.1 Introduction

Un tenseur isotrope d'ordre 4 est défini par deux constantes et peut se décomposer sur une base orthonormée de l'espace des tenseurs isotropes de la façon suivante :

$$\mathbf{T} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{J} \quad (\text{B.1})$$

Un tenseur cubique d'ordre 4 est défini par trois constantes et peut se décomposer sur une base orthonormée des tenseurs de symétrie cubique (liée aux axes de symétrie) de la façon suivante :

$$\mathbf{T} = \alpha^a \mathbf{K}^a + \alpha^b \mathbf{K}^b + \beta \mathbf{J} \quad (\text{B.2})$$

Les tenseurs de base sont définis de la façon suivante dans le repère cristallographique :

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{RC} \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{\mathbf{K}}^a = \frac{1}{3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{RC} \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{\mathbf{K}}^b = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{RC} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^a + \mathbf{K}^b \quad (\text{B.6})$$

Ces tenseurs vérifient les relations suivantes :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{J} : \mathbf{J} = \mathbf{J} & \mathbf{K} : \mathbf{K} = \mathbf{K} & \mathbf{K}^a : \mathbf{K}^a = \mathbf{K}^a & \mathbf{K}^b : \mathbf{K}^b = \mathbf{K}^b \\ \mathbf{J} : \mathbf{K}^a = 0 & \mathbf{J} : \mathbf{K}^b = 0 & \mathbf{K}^a : \mathbf{K}^b = 0 & \end{array} \quad (\text{B.7})$$

L'inverse d'un tenseur d'ordre 4 de symétrie cubique s'écrit :

$$[\alpha^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + \alpha^{\mathbf{b}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}} + \beta\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{\alpha^{\mathbf{a}}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + \frac{1}{\alpha^{\mathbf{b}}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}} + \frac{1}{\beta}\mathbf{J} \quad (\text{B.8})$$

Il sera nécessaire par la suite de réaliser la moyenne de ces tenseurs sur le volume du polycristal. En utilisant le fait que les orientations cristallographiques sont tirées aléatoirement dans une distribution uniforme, on remarque qu'une moyenne sur le volume est équivalente à une moyenne sur toutes les orientations cristallographiques. On peut montrer [Bornert et al., 2001a] :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{J} \\ \langle \mathbf{K}^{\mathbf{a}} \rangle = \frac{2}{5}\mathbf{K} \\ \langle \mathbf{K}^{\mathbf{b}} \rangle = \frac{3}{5}\mathbf{K} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Quelques solutions analytiques dans le cas isotrope

### B.2.1 Comportement élastique macroscopique

Dans le cas d'un milieu isotrope, le tenseur d'élasticité est défini par deux constantes. On peut choisir par exemple le module de cisaillement  $\mu^o$  et le module de compressibilité  $k^o$ , le tenseur d'élasticité s'écrit alors :

$$\mathbf{C}^o = 2\mu^o\mathbf{K} + 3k^o\mathbf{J} \quad (\text{B.10})$$

Le tenseur d'élasticité du monocristal, de symétrie cubique, peut s'écrire :

$$\mathbf{C}^{\mathbf{I}} = 2\mu_a^{\mathbf{I}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + 2\mu_b^{\mathbf{I}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}} + 3k^{\mathbf{I}}\mathbf{J} \quad (\text{B.11})$$

Les modules de cisaillement et de compressibilité sont définis par :

$$\begin{cases} \mu = \mu_a + \mu_b \\ \mu_a = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \\ \mu_b = \frac{1}{2}C_{44} \\ k = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12}) \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Les notations utilisées sont telles que :

$$\begin{cases} C_{11} = c_{1111} \\ C_{12} = c_{1122} \\ C_{44} = 2c_{2323} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

**B.2.1.1 Estimations de Voigt et Reuss**

L'estimation de Voigt s'écrit (équation (2.29)) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_V &= \langle \mathbf{C}^I \rangle \\
&= \langle 2\mu_a^I \mathbf{K}^a + 2\mu_b^I \mathbf{K}^b + 3k^I \mathbf{J} \rangle \\
&= 2\mu_a^I \langle \mathbf{K}^a \rangle + 2\mu_b^I \langle \mathbf{K}^b \rangle + 3k^I \langle \mathbf{J} \rangle \\
&= 2\mu_a^I \frac{2}{5} \mathbf{K} + 2\mu_b^I \frac{3}{5} \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \\
&= \frac{2}{5} (2\mu_a^I + 3\mu_b^I) \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Soit :

$$\begin{cases} \mu^V &= \frac{2\mu_a^I + 3\mu_b^I}{5} \\ k^V &= k^I \end{cases} \tag{B.15}$$

L'estimation de Reuss s'écrit (équation (2.31)) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_R &= \langle \mathbf{C}^{I^{-1}} \rangle^{-1} \\
&= \langle \frac{1}{2\mu_a^I} \mathbf{K}^a + \frac{1}{2\mu_b^I} \mathbf{K}^b + \frac{1}{3k^I} \mathbf{J} \rangle^{-1} \\
&= \left[ \frac{1}{2\mu_a^I} \frac{2}{5} \mathbf{K} + \frac{1}{2\mu_b^I} \frac{3}{5} \mathbf{K} + \frac{1}{3k^I} \mathbf{J} \right]^{-1} \\
&= 10 \left( \frac{2}{\mu_a^I} + \frac{3}{\mu_b^I} \right)^{-1} \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \\
&= \frac{10\mu_a^I \mu_b^I}{3\mu_a^I + 2\mu_b^I} \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Soit :

$$\begin{cases} \mu^R &= \frac{5\mu_a^I \mu_b^I}{3\mu_a^I + 2\mu_b^I} \\ k^R &= k^I \end{cases} \tag{B.17}$$

**B.2.1.2 Tenseur de Hill et modules effectifs**

Si le milieu de référence ( $\mathbf{C}^o$ ) est isotrope, et pour une forme sphérique d'inclusion, le tenseur d'influence de Hill est également isotrope et s'écrit [Bornert et al., 2001a] :

$$\mathbf{C}^* = 2\mu^* \mathbf{K} + 3k^* \mathbf{J} \tag{B.18}$$

avec :

$$\begin{cases} 2\mu^* &= \frac{\mu^o(9k^o + 8\mu^o)}{3(k^o + 2\mu^o)} \\ 3k^* &= 4\mu^o \end{cases} \tag{B.19}$$

Reprenons l'équation (2.45) du chapitre 2 :

$$(\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*)^{-1} = < (\mathbf{C}^{\text{I}} + \mathbf{C}^*)^{-1} > \quad (\text{B.20})$$

En remplaçant  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{\text{I}}$  par leurs expressions dans la base des tenseurs (cubiques ou isotropes), on obtient :

pour le premier terme :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^{\text{eff}} + \mathbf{C}^*]^{-1} &= [3(k^{\text{eff}} + k^*)\mathbf{J} + 2(\mu^{\text{eff}} + \mu^*)\mathbf{K}]^{-1} \\ &= \frac{1}{3(k^{\text{eff}} + k^*)}\mathbf{J} + \frac{1}{2(\mu^{\text{eff}} + \mu^*)}\mathbf{K} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

et pour le second :

$$\begin{aligned} < (\mathbf{C}^{\text{I}} + \mathbf{C}^*)^{-1} > &= < [2\mu_a^I \mathbf{K}^{\text{a}} + 2\mu_b^I \mathbf{K}^{\text{b}} + 3k^I \mathbf{J} + 2\mu^*(\mathbf{K}^{\text{a}} + \mathbf{K}^{\text{b}}) + 3k^* \mathbf{J}]^{-1} > \\ &= < \frac{1}{3(k^I + k^*)}\mathbf{J} + \frac{1}{2(\mu_a^I + \mu^*)}\mathbf{K}^{\text{a}} + \frac{1}{2(\mu_b^I + \mu^*)}\mathbf{K}^{\text{b}} > \\ &= \frac{1}{3(k^I + k^*)} < \mathbf{J} > + \frac{1}{2(\mu_a^I + \mu^*)} < \mathbf{K}^{\text{a}} > + \frac{1}{2(\mu_b^I + \mu^*)} < \mathbf{K}^{\text{b}} > \\ &= \frac{1}{3(k^I + k^*)}\mathbf{J} + \frac{1}{2(\mu_a^I + \mu^*)}\left(\frac{2}{5}\mathbf{K}\right) + \frac{1}{2(\mu_b^I + \mu^*)}\left(\frac{3}{5}\mathbf{K}\right) \\ &= \frac{1}{3(k^I + k^*)}\mathbf{J} + \left(\frac{1}{5(\mu_a^I + \mu^*)} + \frac{3}{10(\mu_b^I + \mu^*)}\right)\mathbf{K} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

En reprenant l'équation (B.20), on déduit :

$$\begin{cases} \frac{1}{3(k^{\text{eff}} + k^*)} = \frac{1}{3(k^I + k^*)} \\ \frac{1}{2(\mu^{\text{eff}} + \mu^*)} = \frac{1}{5(\mu_a^I + \mu^*)} + \frac{3}{10(\mu_b^I + \mu^*)} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} k^{\text{eff}} = k^I \\ \mu^{\text{eff}} = \frac{5(\mu_a^I + \mu^*)(\mu_b^I + \mu^*)}{3\mu_a^I + 2\mu_b^I + 5\mu^*} - \mu^* \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

### B.2.1.3 Estimations de Hashin et Shtrikman

Les estimations de Hashin et Shtrikman s'obtiennent en choisissant pour le milieu de référence ( $\mathbf{C}^o$ ) deux définitions qui conduisent à deux bornes supérieure et inférieure pour les modules effectifs, plus restrictives que les bornes de Voigt et Reuss [Bornert et al., 2001a] :

La borne supérieure est obtenue en choisissant pour milieu de référence :

$$\mathbf{C}^o = 2 \sup(\mu_a^I, \mu_b^I) \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \quad (\text{B.25})$$

$\mu^{\text{HS}+}$  est alors donné par la relation (B.24) en utilisant  $\mu^*$  défini par la relation (B.19). Dans le cas où  $\mu_a^I < \mu_b^I$  (cas du fer notamment), on obtient après calculs :

$$\mu^{\text{HS}+} = \frac{\mu_b^I (3k^I (16\mu_a^I + 9\mu_b^I) + 4\mu_b^I (19\mu_a^I + 6\mu_b^I))}{\mu_b^I (57k^I + 64\mu_b^I) + 18\mu_a^I (k^I + 2\mu_b^I)} \quad (\text{B.26})$$

La borne inférieure est obtenue en choisissant pour milieu de référence :

$$\mathbf{C}^o = 2 \inf(\mu_a^I, \mu_b^I) \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \quad (\text{B.27})$$

$\mu^{\text{HS}-}$  est alors donné par la relation (B.24) en utilisant  $\mu^*$  défini par la relation (B.19). Si  $\mu_a^I < \mu_b^I$ , les calculs conduisent à :

$$\mu^{\text{HS}-} = \frac{\mu_a^I (3k^I (6\mu_a^I + 19\mu_b^I) + 4\mu_a^I (4\mu_a^I + 21\mu_b^I))}{\mu_a^I (63k^I + 76\mu_a^I) + 12\mu_b^I (k^I + 2\mu_a^I)} \quad (\text{B.28})$$

#### B.2.1.4 Estimation autocohérente

Dans le cadre du modèle autocohérent, on choisit pour milieu de référence le MHE au polycristal, soit  $\mathbf{C}^o = \mathbf{C}^{\text{eff}}$ .

Le deuxième terme de l'équation (B.24) s'écrit alors (après quelques calculs) :

$$8\mu^{\text{eff}3} + (9k^I + 4\mu_a^I)\mu^{\text{eff}2} - (12\mu_a^I\mu_b^I + 3k^I\mu_b^I)\mu^{\text{eff}} - 6k^I\mu_a^I\mu_b^I = 0 \quad (\text{B.29})$$

Le module de cisaillement effectif s'obtient donc en résolvant cette équation du troisième degré.

#### B.2.1.5 Applications numériques

Dans le cas du fer pur, on a :

$$\mu_a^I = 48 \text{ GPa}, \quad \mu_b^I = 116 \text{ GPa}, \quad \text{et} \quad k^I = 174 \text{ GPa} \quad (\text{B.30})$$

Les résultats correspondants pour le polycristal isotrope de fer pur sont présentés dans le tableau B.1. On y présente les valeurs obtenues en utilisant les différents schémas d'homogénéisation présentés, pour le module de compressibilité, le module de cisaillement, le module d'Young et le coefficient de Poisson effectifs.

| Constante          | Reuss    | HS-      | Autocohérent | HS +     | Voigt    |
|--------------------|----------|----------|--------------|----------|----------|
| $k^{\text{eff}}$   | 174 GPa  | 174 GPa  | 174 GPa      | 174 GPa  | 174 GPa  |
| $\mu^{\text{eff}}$ | 74,0 GPa | 80,4 GPa | 82,1 GPa     | 83,1 GPa | 88,8 GPa |
| $E^{\text{eff}}$   | 194 GPa  | 209 GPa  | 213 GPa      | 215 GPa  | 228 GPa  |
| $\nu^{\text{eff}}$ | 0,314    | 0,300    | 0,296        | 0,294    | 0,282    |

Tableau B.1 – *Différentes estimations pour les modules effectifs du polycristal isotrope de fer pur*

La figure B.1 présente la sensibilité du résultat obtenu pour le module de cisaillement effectif en fonction de l'anisotropie du monocristal.

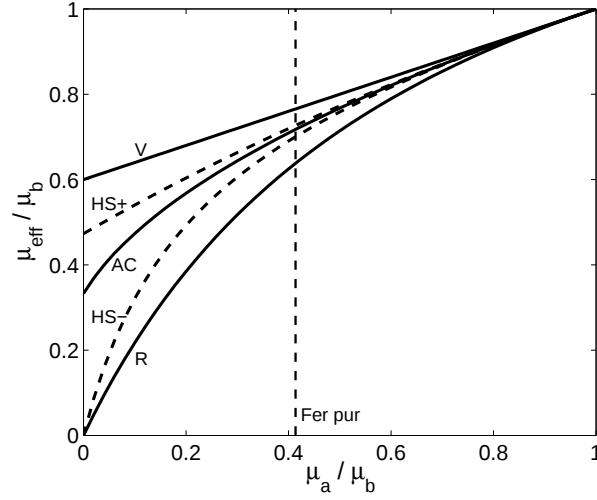


Figure B.1 – Différentes estimations du comportement effectif en fonction de l'anisotropie du monocristal - Estimations de Voigt (V) et Reuss (R), de Hashin et Shtrikman (HS+ et HS-) et autocohérente (AC)

On constate, comme on s'y attend, que plus l'anisotropie du monocristal est forte, plus les différentes estimations s'éloignent les unes des autres. Elles sont bien sûr équivalentes lorsque le monocristal est isotrope, puisqu'il n'y a plus alors d'hétérogénéité. Le cas du fer pur - pour lequel le rapport  $\frac{\mu_a}{\mu_b}$  vaut environ 0,41 - correspond à une situation où les estimations de Hashin et Shtrikman et autocohérente sont encore assez proches.

### B.2.2 Déformation de magnétostriction à saturation

Le cas de la saturation rend possible le calcul analytique de la déformation de magnétostriction. En effet, le matériau étant aimanté à saturation, l'aimantation dans le matériau est uniforme. Elle a la même direction que le champ magnétique appliqué, et sa norme vaut  $M_s$ . Dans ces conditions, la déformation de magnétostriction dans chaque grain est connue et vaut (équation (1.18)) :

$$\varepsilon^\mu = \mathbf{D} : \gamma \quad (\text{B.31})$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \frac{3}{2} (\lambda_{100} \mathbf{K}^a + \lambda_{111} \mathbf{K}^b) \\ \gamma = \vec{\gamma} \otimes \vec{\gamma} \\ \vec{\gamma} = {}^T[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3] \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

D'un point de vue macroscopique, la déformation de magnétostriction s'écrit (équation (2.78)):

$$\mathbb{E}^\mu = \langle {}^T \mathbf{B}^{\mathbf{I}} : \varepsilon_I^\mu \rangle \quad (\text{B.33})$$

L'expression de  $\mathbf{B}^{\mathbf{I}}$  est donnée par l'équation (2.48). Le développement de cette expression en exploitant la symétrie des différents tenseurs conduit à :

$$\mathbf{B}^{\mathbf{I}} = k^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + k^{\mathbf{b}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}} + j\mathbf{J} \quad (\text{B.34})$$

avec :

$$\begin{cases} k^{\mathbf{a}} = \frac{\mu_a^I(\mu^{\text{eff}} + \mu^*)}{\mu^{\text{eff}}(\mu_a^I + \mu^*)} \\ k^{\mathbf{b}} = \frac{\mu_b^I(\mu^{\text{eff}} + \mu^*)}{\mu^{\text{eff}}(\mu_b^I + \mu^*)} \\ j = \frac{k^I(k^{\text{eff}} + k^*)}{k^{\text{eff}}(k^I + k^*)} \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

L'équation (B.33) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mu &= \langle {}^T\mathbf{B}^{\mathbf{I}} : \mathcal{E}_I^\mu \rangle \\ &= \langle \frac{3}{2} (k^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + k^{\mathbf{b}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}} + j\mathbf{J}) : (\lambda_{100}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + \lambda_{111}\mathbf{K}^{\mathbf{b}}) : \boldsymbol{\gamma} \rangle \\ &= \frac{3}{2} \langle (\lambda_{100}k^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + \lambda_{111}k^{\mathbf{b}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}}) : \boldsymbol{\gamma} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Si les orientations cristallographiques sont aléatoires, la direction de l'aimantation est fixe, on peut donc extraire  $\boldsymbol{\gamma}$  de la relation (B.37) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mu &= \frac{3}{2} \langle (\lambda_{100}k^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{a}} + \lambda_{111}k^{\mathbf{b}}\mathbf{K}^{\mathbf{b}}) \rangle : \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{3}{2} (\lambda_{100}k^{\mathbf{a}} \langle \mathbf{K}^{\mathbf{a}} \rangle + \lambda_{111}k^{\mathbf{b}} \langle \mathbf{K}^{\mathbf{b}} \rangle) : \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{3}{2} \left( \lambda_{100}k^{\mathbf{a}} \frac{2}{5} \mathbf{K} + \lambda_{111}k^{\mathbf{b}} \frac{3}{5} \mathbf{K} \right) : \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{3}{10} (2\lambda_{100}k^{\mathbf{a}} + 3\lambda_{111}k^{\mathbf{b}}) \mathbf{K} : \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

La composante de la déformation de magnétostriction parallèle à l'aimantation (dont la direction est uniforme à travers le matériau) s'écrit :

$$\mathbb{E}_{//}^\mu = {}^T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mathbb{E}^\mu \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \quad (\text{B.38})$$

Comme

$${}^T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{K} : \boldsymbol{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{2}{3}, \quad (\text{B.39})$$

on obtient :

$$\mathbb{E}_{//}^\mu = \frac{2}{5} \lambda_{100} k^{\mathbf{a}} + \frac{3}{5} \lambda_{111} k^{\mathbf{b}} \quad (\text{B.40})$$

Différentes estimations peuvent donc être construites pour la déformation de magnétostriction à saturation, en jouant sur le milieu de référence utilisé pour obtenir le tenseur de Hill. Le choix du milieu de référence aura une influence directe sur  $k^{\mathbf{a}}$  et  $k^{\mathbf{b}}$  (équation (B.35)), et donc sur l'estimation correspondante de  $\mathbb{E}_{//}^\mu$ .

### B.2.2.1 Estimations de Voigt et Reuss

L'estimation de Voigt peut s'obtenir en utilisant pour les modules effectifs l'estimation de Voigt donnée par l'équation (B.15) et en prenant comme milieu de référence un milieu infiniment rigide ( $\mu^o = \infty$ ). L'équation (B.35) nous donne :

$$\begin{cases} k^{\mathbf{a}} = \frac{\mu_a^I}{\mu^{\text{eff}}} \\ k^{\mathbf{b}} = \frac{\mu_b^I}{\mu^{\text{eff}}} \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (B.40), on obtient :

$$\mathbb{E}_{//}^{\mu} \mathbf{v} = \frac{2\mu_a^I \lambda_{100} + 3\mu_b^I \lambda_{111}}{2\mu_a^I + 3\mu_b^I} \quad (\text{B.42})$$

L'estimation de Reuss peut s'obtenir en prenant comme milieu de référence un milieu infiniment souple ( $\mu^o = 0$ ). L'équation (B.35) nous donne :

$$k^{\mathbf{a}} = k^{\mathbf{b}} = 1 \quad (\text{B.43})$$

L'équation (B.40) nous donne ensuite :

$$\mathbb{E}_{//}^{\mu} \mathbf{R} = \frac{2\lambda_{100} + 3\lambda_{111}}{5} \quad (\text{B.44})$$

### B.2.2.2 Estimations de Hashin et Shtrikman

Les estimations inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman, s'obtiennent en utilisant successivement comme milieu de référence :

$$\mathbf{C}^o = 2 \inf(\mu_a^I, \mu_b^I) \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^o = 2 \sup(\mu_a^I, \mu_b^I) \mathbf{K} + 3k^I \mathbf{J} \quad (\text{B.45})$$

### B.2.2.3 Estimation autocohérente

L'estimation autocohérente s'obtient en utilisant comme milieu de référence le milieu effectif lui-même :

$$\mathbf{C}^o = \mathbf{C}^{\text{eff}} \quad (\text{B.46})$$

### B.2.2.4 Applications numériques

Dans le cas du fer pur, les coefficients élastiques du monocristal sont donnés par la relation (B.30) et les coefficients de magnétostriction valent :

$$\begin{cases} \lambda_{100} = 21.10^{-6} \\ \lambda_{111} = -21.10^{-6} \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

Les résultats correspondants aux différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation parallèlement au champ magnétique appliqué sont présentés dans le tableau B.2.

|                         | Reuss           | HS-             | Autocohérent    | HS +            | Voigt           |
|-------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\mathbb{E}_{//}^{\mu}$ | $-4,20.10^{-6}$ | $-7,90.10^{-6}$ | $-8,75.10^{-6}$ | $-9,25.10^{-6}$ | $-11,9.10^{-6}$ |

Tableau B.2 – Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation du polycristal isotrope de fer pur

Il est intéressant ici aussi d'estimer la sensibilité des résultats obtenus à l'anisotropie du monocristal. La figure B.2 présente la déformation de magnétostriction à saturation obtenue à partir des estimations présentées en fonction de l'anisotropie élastique du monocristal.

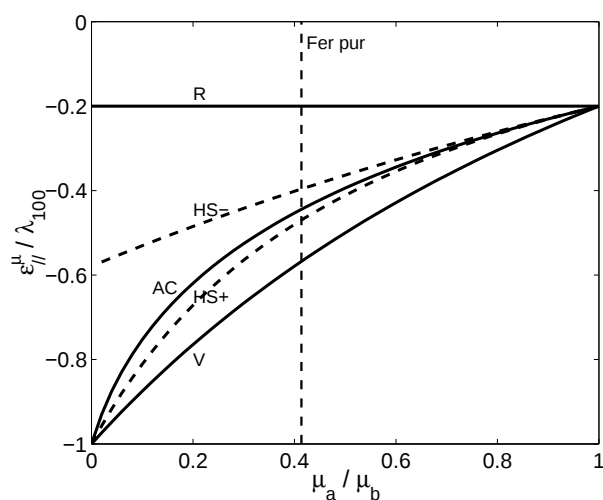


Figure B.2 – Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation en fonction de l'anisotropie élastique du monocristal - Estimations de Voigt (V) et Reuss (R), de Hashin et Shtrikman (HS+ et HS-) et autocohérente (AC)

Lorsque le monocristal est élastiquement isotrope, toutes les estimations sont équivalentes. Le cas du fer pur correspond à une situation où les différentes estimations sont déjà relativement éloignées.

La figure B.3 présente la déformation de magnétostriction à saturation obtenue à partir des mêmes estimations mais cette fois en fonction de l'anisotropie magnétostrictive (relative) du monocristal.

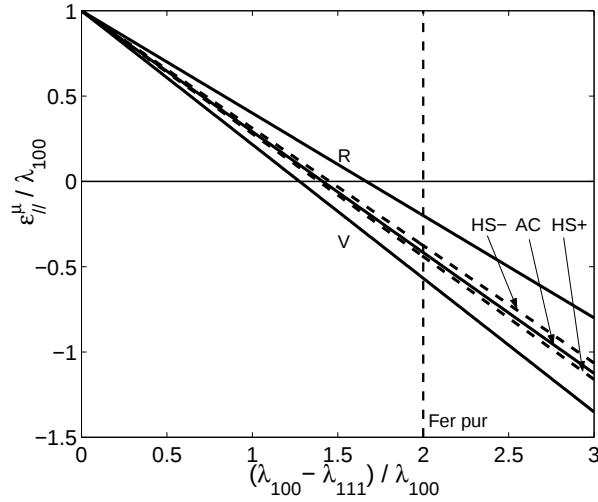


Figure B.3 – Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction à saturation en fonction de l'anisotropie magnétostrictive du monocristal - Estimations de Voigt (V) et Reuss (R), de Hashin et Shtrikman (HS+ et HS-) et autocohérente (AC)

Lorsque le monocristal est élastiquement isotrope, toutes les estimations sont équivalentes. Mais ces estimations deviennent assez rapidement très différentes. En particulier, pour certains niveaux d'anisotropie magnétostrictive, le signe de la déformation estimée dépend du modèle choisi. Les caractéristiques du fer pur conduisent également à des résultats assez différents.

Une situation d'isotropie élastique ou d'isotropie magnétostrictive conduit à de grandes simplifications, puisque la déformation de magnétostriction peut alors être estimée de façon rigoureuse (les bornes supérieures et inférieures se confondent). C'est donc bien la combinaison de l'anisotropie élastique et de l'anisotropie magnétostrictive qui est responsable de la difficulté à prédire la déformation de magnétostriction à saturation d'un polycristal.

### B.2.3 Déformation de magnétostriction maximale

La déformation maximale est obtenue lorsque les mouvements de parois sont stabilisés et que la rotation de l'aimantation dans les domaines magnétiques n'est pas entamée (on supposera ici  $\lambda_{100} < \lambda_{111}$ ). En supposant que ces deux mécanismes d'aimantation sont consécutifs (et non simultanés comme c'est en réalité le cas), on peut considérer que la déformation de magnétostriction maximale s'obtient en interdisant les rotations d'aimantation dans la modélisation, c'est à dire en donnant aux constantes d'anisotropie une valeur très élevée. Du point de vue de la déformation de magnétostriction calculée analytiquement, ceci est équivalent à poser  $\lambda_{111} = 0$  dans l'équation (B.40).

En supposant que les relations établies dans le cas de déformation de magnétostriction à saturation s'appliquent toujours (même si l'aimantation n'est plus uniforme dans le matériau), on peut établir de la même façon que précédemment des

estimations pour la déformation de magnétostriction maximale. Les résultats sont présentés dans le tableau B.3 :

|                         | Reuss          | HS-            | Autocohérent   | HS +           | Voigt          |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\mathbb{E}_{//}^{\mu}$ | $8,40.10^{-6}$ | $6,55.10^{-6}$ | $6,13.10^{-6}$ | $5,87.10^{-6}$ | $4,54.10^{-6}$ |

Tableau B.3 – *Différentes estimations pour la déformation de magnétostriction maximale du polycristal isotrope de fer pur*

Une fois établies ces solutions analytiques, il est intéressant de calculer les résultats du modèle multi-échelle pour ces configurations de référence.

## B.3 Définition d’une texture isotrope

Le modèle multi-échelle fonctionnant avec une représentation discrète de la fonction de distribution des orientations cristallographiques, il convient tout d’abord de définir, de façon discrète, une ”texture isotrope”.

### B.3.1 Tirage aléatoire des orientations cristallographiques

La première idée qui vient à l’esprit est de réaliser un tirage aléatoire des orientations cristallographiques dans une distribution uniforme. Les angles d’Euler ( $\phi_1$ ,  $\psi$ ,  $\phi_2$ ) associés à l’orientation de chacun des grains sont alors choisis au hasard.  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont pris aléatoirement dans l’intervalle  $[0\ 2\pi]$  et  $\cos\psi$  dans l’intervalle  $[0\ 1]$ .

Se pose alors la question du nombre d’orientations cristallographiques à connaître, c’est à dire du nombre de grains à considérer, pour obtenir une information pertinente.

Nous avons essayé de répondre à cette question en effectuant plusieurs séries de tirages aléatoires. On fixe tout d’abord un nombre de grains  $N_g$ . On tire aléatoirement  $N_g$  orientations cristallographiques. On peut ensuite déterminer assez facilement l’estimation de Voigt pour le module d’Young et l’estimation de Reuss pour la déformation de magnétostriction à saturation. Ce calcul a été effectué un grand nombre de fois (200 fois par valeur de  $N_g$ ) pour différentes valeurs de  $N_g$ . La figure B.4 présente les résultats obtenus pour le module d’Young (estimation de Voigt).

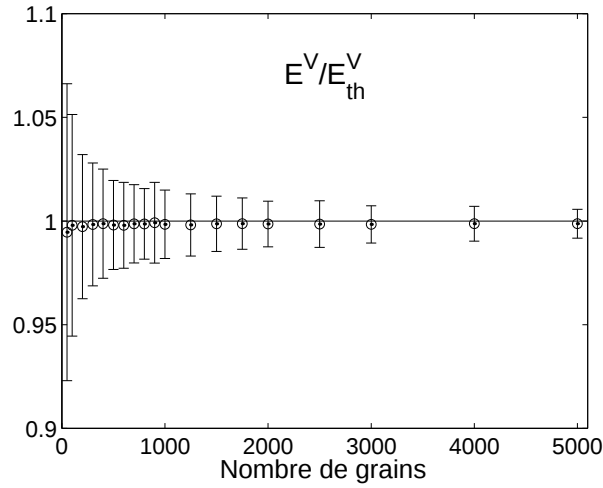


Figure B.4 – Dispersion obtenue - pour 200 tirages aléatoires de la FDO - sur la valeur du module d'Young (estimation de Voigt) en fonction du nombre de grains définissant cette FDO

Les valeurs moyennes obtenues sur les 200 tirages aléatoires, quel que soit le nombre de grains utilisés sont très proches de la valeur théorique attendue. On constate - sans surprise - que plus le nombre de grains utilisés est grand, plus la dispersion sur la valeur obtenue pour le module d'Young (sur un grand nombre de tirages aléatoires) sera faible. La diminution de cette dispersion (représentée sur la figure B.4 par une bande de largeur 6 fois l'écart-type calculé ( $6\sigma$ )) avec le nombre de grains est cependant très lente. La sensibilité du calcul à la texture utilisée reste malgré tout assez faible, puisque dès 100 grains, les valeurs calculées se trouvent dans une fourchette de moins de 10% autour de la valeur obtenue analytiquement. Cette sensibilité à la texture est directement relié à l'anisotropie du monocristal : plus l'anisotropie du monocristal sera forte, plus un grand nombre de grains sera nécessaire pour reconstruire un polycristal isotrope.

Dans le cas de la déformation de magnétostriction à saturation, on a évalué l'estimation de Reuss. La sensibilité à la texture est beaucoup plus significative (figure B.5), en raison du fort contraste entre  $\lambda_{100}$  et  $\lambda_{111}$ .

Les valeurs moyennes obtenues sur les 200 tirages aléatoires, quel que soit le nombre de grains utilisés coïncident ici aussi approximativement avec la valeur théorique attendue.

Pour un tirage aléatoire de 100 orientations cristallographiques, la valeur calculée se trouve dans une bande de plus de 150% autour de la valeur théorique. La décroissance de cette dispersion (représentée par une bande de largeur  $6\sigma$ ) en fonction du nombre de grains est très lente. Le tirage d'une FDO de 1000 grains, ne permet pas de calculer la déformation de magnétostriction à moins de 50% près, et un tirage de 5000 grains à moins de 20% près.

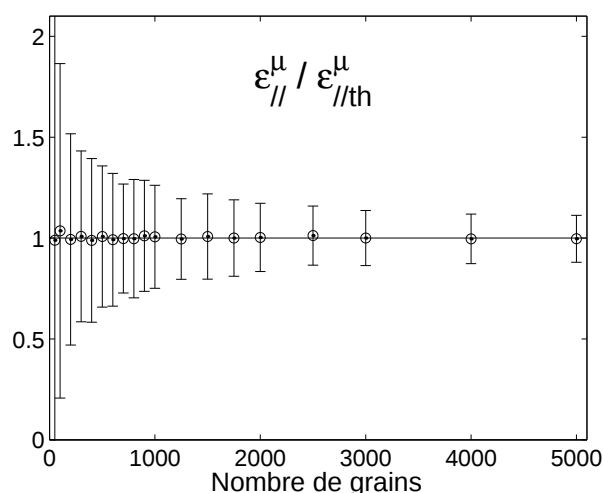


Figure B.5 – *Dispersion obtenue - pour 200 tirages aléatoires de la FDO - sur la valeur de la déformation de magnétostriction à saturation (estimation de Reuss) en fonction du nombre de grains définissant cette FDO*

Une solution pour diminuer les dispersions obtenues consisterait à réaliser plusieurs tirages aléatoires, et à faire une moyenne sur les résultats obtenus. Cette solution est cependant coûteuse en nombre de simulations à effectuer, et donc en temps de calcul lorsqu'il s'agit d'utiliser le modèle multi-échelle.

### B.3.2 Discrétisation des orientations cristallographiques

Nous avons opté pour un autre choix de modélisation qui consiste à utiliser un découpage des orientations cristallographiques de l'espace. Un tel découpage est déjà utilisé dans [Buiron, 2000]. L'intervalle de variations de chaque angle d'Euler est découpé en un nombre donné de valeurs particulières. Ainsi, pour  $\phi_1$ , on choisit 13 valeurs régulièrement espacées dans l'intervalle  $[0 \ 2\pi]$ , pour  $\cos\psi$ , 7 valeurs dans l'intervalle  $[0 \ 1]$ , et pour  $\phi_2$ , 6 valeurs dans l'intervalle  $[0 \ 2\pi]$ . On construit de cette façon un polycristal à 546 grains dont les figures de pôles sont données sur la figure B.6.

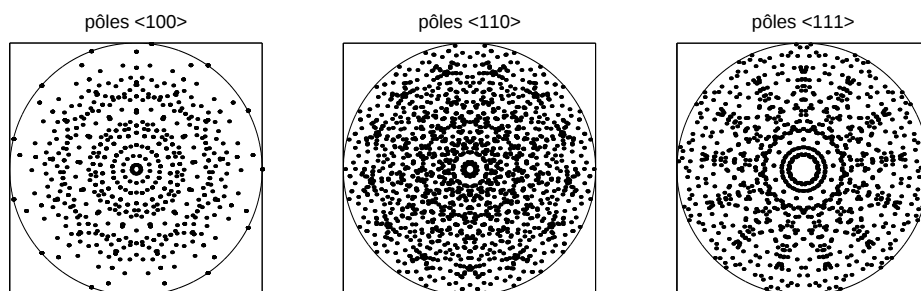


Figure B.6 – *Figures de pôles pour le polycristal isotrope obtenu par découpage régulier des orientations cristallographiques de l'espace*

Le calcul de l'estimation de Voigt pour le module d'Young conduit à :

$$E_V^{546} = 228 \text{ GPa} \quad (\text{B.48})$$

Si on ne cherche pas à avoir davantage de chiffres significatifs, l'estimation de Voigt pour ce polycristal correspond exactement à l'estimation analytique du tableau B.1.

Le calcul de l'estimation de Reuss pour la déformation de magnétostriction à saturation conduit à :

$$\mathbb{E}_{//\mathbf{R}}^{\mu 546} = -4,41.10^{-6} \quad (\text{B.49})$$

Cette estimation est également en accord avec la valeur analytique du tableau B.2, mais cet accord est ici moins précis. Ceci s'explique encore une fois par la très forte anisotropie magnétostrictive du monocristal, qui rend le comportement macroscopique très sensible aux effets de texture.

Le bon accord observé entre les résultats obtenus avec cette texture et les résultats analytiques dans le cas isotrope nous conduit à utiliser cette texture à 546 grains comme texture "isotrope" pour les calculs polycristallins.

## B.4 Application du modèle dans le cas isotrope

Le modèle multi-échelle présenté au chapitre 2 a été appliqué à cette texture "isotrope" de 546 grains.

### B.4.1 Comportement élastique macroscopique

Le calcul par la méthode autocohérente du tenseur des modules  $\mathbf{C}^{546}$  associé à cette texture donne le résultat suivant :

$$\hat{\mathbf{C}}^{546} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 283,6 & 119,3 & 119,1 & 0 & 0 & 0 \\ 119,3 & 283,6 & 119,1 & 0 & 0 & 0 \\ 119,1 & 119,1 & 283,9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 163,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 163,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 164,3 \end{array} \right) \text{ GPa} \quad (\text{B.50})$$

Ce tenseur est quasiment isotrope. Le tenseur isotrope le plus proche  $\mathbf{C}_{\text{is}}^{546}$  est déterminé à l'aide de la méthode proposée par François et al. [François et al., 1998]. La distance  $d_{\text{is}}$  au tenseur isotrope le plus proche vaut  $d_{\text{is}} = 0,137\%$ .

$$\hat{C}_{\text{is}}^{546} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 283,4 & 119,3 & 119,3 & 0 & 0 & 0 \\ 119,3 & 283,4 & 119,3 & 0 & 0 & 0 \\ 119,3 & 119,3 & 283,4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 164,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 164,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 164,2 \end{array} \right) \text{ GPa} \quad (\text{B.51})$$

ce qui correspond à :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\text{is}}^{546} \simeq 174 \text{ GPa} \\ \mu_{\text{is}}^{546} \simeq 82,1 \text{ GPa} \\ E_{\text{is}}^{546} \simeq 213 \text{ GPa} \\ \nu_{\text{is}}^{546} \simeq 0,296 \end{array} \right. \quad (\text{B.52})$$

Si on ne cherche pas à connaître davantage de chiffres significatifs, les résultats fournis par le modèle multi-échelle pour cette texture correspondent exactement au résultat analytique autocohérent dans le cas isotrope (tableau B.1).

### B.4.2 Déformation de magnétostriction à saturation

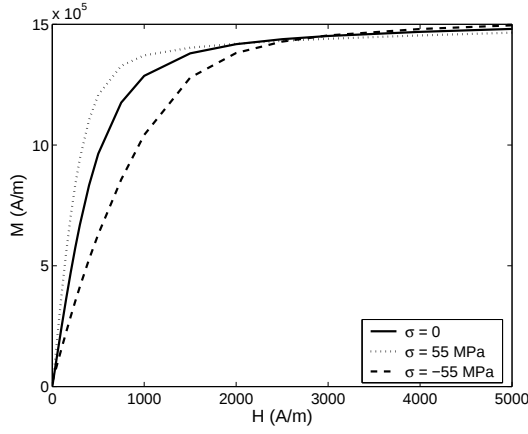
La déformation de magnétostriction à saturation est obtenue en faisant un calcul pour un champ magnétique très intense, et en portant les constantes d'anisotropie à zéro, afin de faciliter le phénomène de rotation et d'atteindre ainsi sûrement l'état saturé. On obtient :

$$\mathbb{E}_{//\text{AC}}^{\mu 546} = -8,95.10^{-6} \quad (\text{B.53})$$

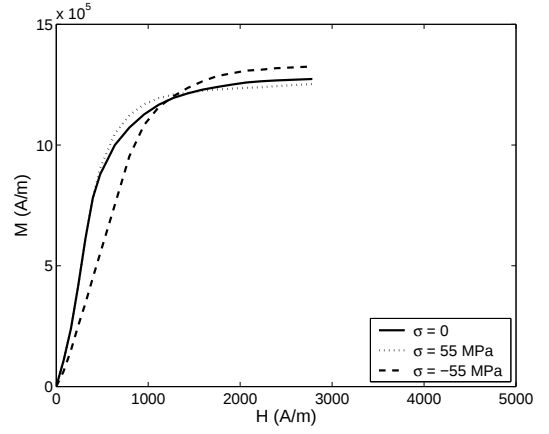
Ce résultat est également assez proche de la solution analytique du modèle autocohérent. L'accord est moins bon que dans le cas des propriétés élastiques, ce qui était déjà le cas pour l'estimation de Reuss.

### B.4.3 Comportements magnétique et magnétostrictif

Le comportement magnétique pour différentes valeurs du champ magnétique peut être estimé à l'aide du modèle multi-échelle. La déformation de magnétostriction associée est également évaluée. Il n'existe en revanche pas de solution analytique de référence, puisque les hypothèses de linéarité du comportement et d'homogénéité de l'aimantation ne sont plus vérifiées. Les résultats pour la courbe d'aimantation anhystérétique et la courbe de magnétostriction anhystérétique obtenus à l'aide du modèle multi-échelle sont présentées respectivement sur les figures B.7(a) et B.8(a) pour différent niveaux de la contrainte appliquée. Les figures B.7(b) et B.8(b) présentent les résultats expérimentaux obtenus par Kuruzar et Cullity [Kuruzar et Cullity, 1971].

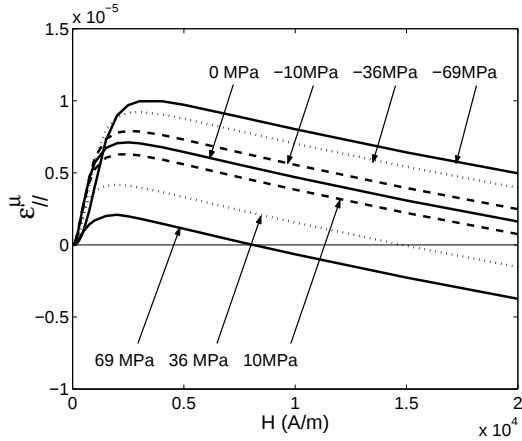


(a) Résultats numériques

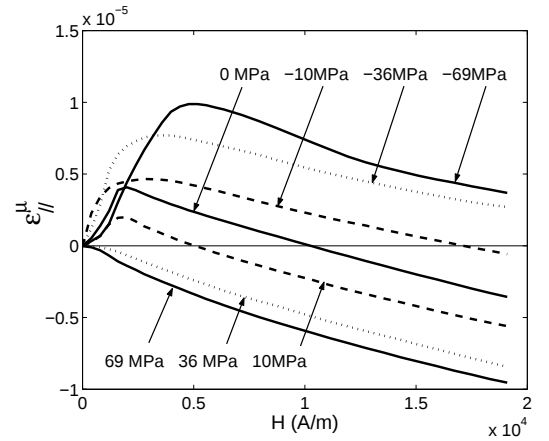


(b) Résultats expérimentaux [Kuruzar et Cullity, 1971]

Figure B.7 – Effet de l'application d'une contrainte uniaxiale sur la courbe d'aimantation



(a) Résultats numériques



(b) Résultats expérimentaux [Kuruzar et Cullity, 1971]

Figure B.8 – Effet de l'application d'une contrainte uniaxiale sur la courbe de magnétostriction

La comparaison qualitative des résultats expérimentaux et numériques montre que le modèle multi-échelle semble décrire convenablement l'effet de l'application d'une contrainte uniaxiale. Pour les faibles niveaux de champ magnétique, une contrainte de traction améliore le comportement magnétique alors qu'une contrainte de compression le dégrade (et de manière plus marquée). Cet effet s'inverse pour les fortes valeurs de champ magnétique : il s'agit de l'effet Villari, que le modèle semble décrire de façon convenable, au moins qualitativement. Le croisement des courbes d'aimantations s'explique par l'inversion du sens de variation de la déformation de magnétostriction en fonction du champ, qui conduit à une inversion du sens de va-

riation de l'énergie magnéto-élastique. Ceci est à mettre en relation directe avec l'apparition du phénomène de rotation de l'aimantation à l'intérieur des domaines. A nouveau, le modèle semble toutefois surestimer le comportement magnétique, et le croisement des courbes d'aimantation, comme le passage par zéro de la déformation de magnétostriction sont prévues pour des valeurs de champ magnétique plus élevées que celles obtenues expérimentalement. Une comparaison quantitative est cependant difficile dans la mesure où les résultats expérimentaux de Kuruzar sont en réalité des courbes de première aimantation, et non des courbes anhystérétiques. En particulier, augmenter la valeur de  $A_s$  conduirait à surestimer davantage le comportement magnétique (mais il s'agit d'une courbe anhystérétique, toujours plus "raide" qu'une courbe de première aimantation), mais réduirait la valeur de champ pour laquelle les courbes d'aimantation se croisent, et pour laquelle le sens de variation des courbes de magnétostriction s'inverse.

# Annexe C

## Algorithme de calcul et sensibilité du modèle aux données d'entrée

### Sommaire

---

|            |                                      |            |
|------------|--------------------------------------|------------|
| <b>C.1</b> | <b>Algorithme de calcul</b>          | <b>188</b> |
| C.1.1      | Données d'entrée                     | 188        |
| C.1.2      | Définition des propriétés élastiques | 189        |
| C.1.3      | Modélisation multi-échelle           | 189        |
| C.1.4      | Critère de convergence               | 191        |
| C.1.5      | Temps de calcul                      | 191        |
| <b>C.2</b> | <b>Etude paramétrique</b>            | <b>192</b> |
| C.2.1      | Caractéristiques du monocristal      | 192        |
| C.2.2      | Paramètre $A_s$                      | 198        |
| C.2.3      | Énergie de surface maximale $N_s$    | 200        |
| C.2.4      | Nombre de grains                     | 200        |

---

On se propose ici de faire un bilan sur la méthode utilisée pour le calcul de prévision du comportement magnéto-élastique, et d'étudier la sensibilité des calculs effectués aux paramètres d'entrée.

## C.1 Algorithme de calcul

### C.1.1 Données d'entrée

Les paramètres nécessaires au calcul sont de plusieurs types :

- Les caractéristiques du monocristal définissent son comportement magnétique, élastique et magnétostrictif. Elles sont par exemple énoncées pour le fer à 3 % de silicium dans le tableau 3.5. Ces caractéristiques sont en général disponible dans la littérature.
- Les données de texture permettent de définir les règles de passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Ces données sont fournies à l'aide d'un fichier de distribution d'orientations cristallographiques représentatif de la texture étudiée. Il est possible d'avoir accès à un tel fichier à l'aide d'un dispositif de mesure EBSD. La connaissance des angles d'Euler associés à chaque grain permettra de définir la matrice de rotation du repère macroscopique vers le repère cristallin.
- Les paramètres d'ajustement numérique sont au nombre de trois :
  - le paramètre  $A_s$ , qui définit la susceptibilité initiale du matériau, c'est à dire la pente à l'origine de la courbe d'aimantation anhystérétique.
  - le paramètre  $N_s$ , qui définit le niveau maximal de l'énergie de surface associée à chaque domaine magnétique. L'identification de ce paramètre est assez délicate, elle a été fixée ici grossièrement de façon à avoir une énergie de surface du même ordre de grandeur que l'énergie d'anisotropie.
  - le paramètre  $p_{gs}$ , qui est la proportion de grains affectés par la présence d'une surface libre. On peut proposer de le choisir égal au double du rapport de la taille de grains moyenne par l'épaisseur de la tôle (dans le cas où le nombre moyen de grains dans l'épaisseur est supérieur à 2). Nous nous sommes limités aux deux cas extrêmes, en choisissant les valeurs 0 ou 1.
- Le chargement macroscopique appliqué au VER étudié. Ce chargement macroscopique est défini par le champ magnétique macroscopique appliqué  $\vec{H}_{\text{ext}}$  et par la contrainte appliquée  $\Sigma$  (on pourrait également appliquer une déformation macroscopique).

### C.1.2 Définition des propriétés élastiques

Il est possible, indépendamment de toute modélisation magnétique, de définir les propriétés élastiques macroscopiques du polycristal, à partir des données de texture et des caractéristiques élastiques du monocristal (voir équation (2.52)). C'est ce qui est fait dans un premier temps. On définit ainsi, à l'aide du modèle autocohérent, le tenseur des modules effectifs  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$ , et par la même occasion les tenseurs de localisation des déformations  $\mathbf{A}^{\text{I}}$  et de concentration de contraintes  $\mathbf{B}^{\text{I}}$ .

### C.1.3 Modélisation multi-échelle

Nous passons ici à la boucle de calcul proprement dite. Le schéma de principe du modèle multi-échelle est présenté sur la figure C.1.

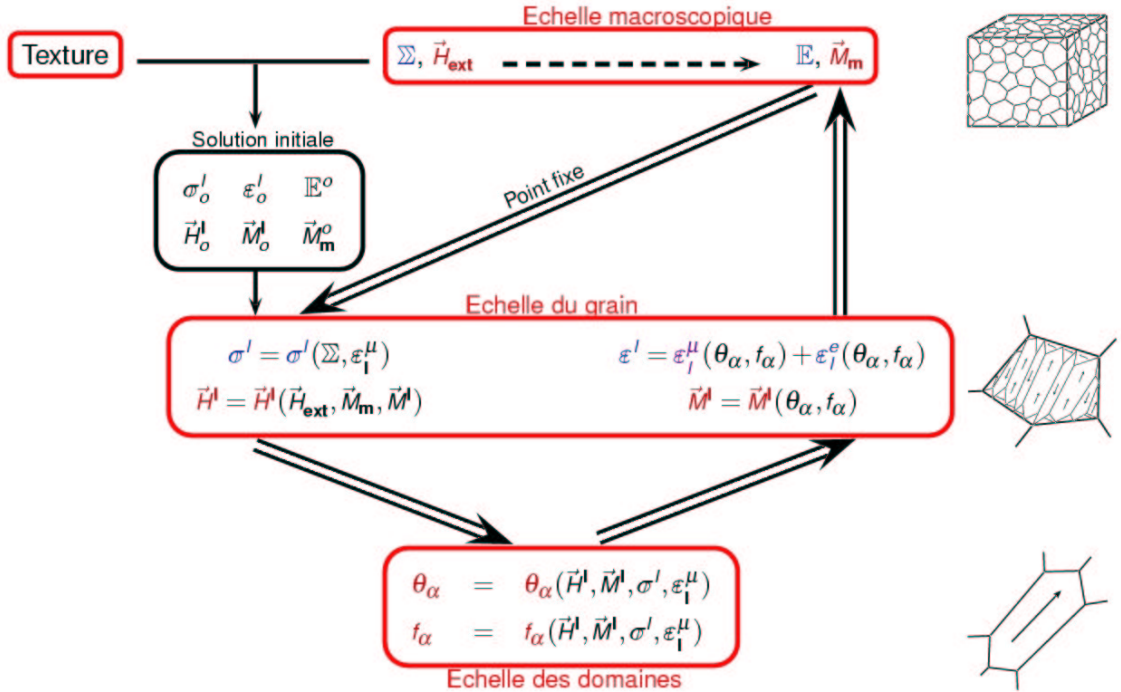


Figure C.1 – Algorithme de calcul

#### C.1.3.1 Définition d'une solution initiale

S'agissant d'un schéma itératif, il est tout d'abord nécessaire de définir un point de départ pour l'algorithme. Ce point de départ est défini par la connaissance complète de l'état magnétique et mécanique pour chaque grain du VER. Le choix de cette solution est déterminant pour la suite du calcul. Un mauvais choix - c'est à dire un choix trop éloigné de la solution finale - conduit à des temps de calcul élevés, voire à la divergence de l'algorithme.

Nous avons utilisé ici la définition suivante pour le point de départ :

- La contrainte d'incompatibilité associée à la déformation de magnétostriction dans un grain est négligée. La contrainte locale est donc définie par la solution d'un problème purement élastique :  $\sigma_o^I = \mathbf{B}^I : \mathbb{E}$ .
- Le champ magnétique est supposé homogène dans le matériau. On définit donc  $\vec{H}_o^I = \vec{H}_{\text{ext}}^I$  (ou encore  $\vec{H}_d^I = \vec{0}$ ).
- La déformation de magnétostriction est négligée dans un premier temps, la déformation locale est donc définie par  $\varepsilon_o^I = \mathbf{C}^{I-1} : \sigma_o^I$ .

L'utilisation d'un point de départ plus complexe est parfois rendue nécessaire par la divergence des calculs. Tous les moyens sont alors permis pour parvenir à la définition d'une solution initiale plus pertinente. Le recours à ces moyens n'a pas été nécessaire pour les calculs présentés dans ce document.

### C.1.3.2 Ecriture énergétique à l'échelle des domaines magnétiques

La contrainte locale et le champ local étant connus, l'écriture de l'énergie libre d'un domaine magnétique (équation (2.7)) ne dépend que de la direction de l'aimantation  $\vec{\gamma}$ . La minimisation de cette énergie (équation (2.9)) nous donne l'aimantation dans chaque domaine.

A l'échelle du grain, les fractions volumiques de chaque famille de domaines sont fournies par l'application de la relation (2.23).

### C.1.3.3 Etape d'homogénéisation vers l'échelle du grain

L'aimantation moyenne du grain et la déformation moyenne dans le grain sont déduites des résultats obtenus par familles de domaines (équation (2.25) et (2.26)).

### C.1.3.4 Etape d'homogénéisation vers l'échelle du VER

L'étape d'homogénéisation vers l'échelle macroscopique se fait également par une opération de moyenne. La déformation macroscopique est définie par la relation (2.78), et l'aimantation moyenne par la relation (2.76).

La réintroduction de ces valeurs dans le calcul comme définition de l'état magnéto-élastique macroscopique conduit à des variations beaucoup trop brutales de la solution d'une itération sur l'autre, ce qui conduit souvent à la divergence du calcul. Nous avons donc choisi d'appliquer une méthode de relaxation qui pondère chaque nouvelle solution trouvée par la solution qui a permis de l'obtenir.

### C.1.3.5 Etape de localisation vers l'échelle du grain

Cette première étape de localisation consiste à définir le chargement local à partir des données macroscopiques, définies précédemment. On définit ainsi la contrainte dans le grain par la relation (2.72) et le champ magnétique local par la relation (2.58), où  $\vec{H}_d^I$  est par exemple défini par la relation (4.2).

### C.1.3.6 Etape de localisation vers l'échelle des domaines

La dernière étape de localisation consiste à définir le chargement vu par chaque famille de domaines (la contrainte et le champ magnétique), connaissant ces grandeurs dans le grain. Les choix effectués ici sont extrêmement rudimentaires, puisqu'on suppose que l'on peut écrire l'énergie libre d'une famille de domaines en utilisant les valeurs moyennes du champ magnétique et de la contrainte dans le grain. Ceci revient à considérer que la contrainte comme le champ magnétique sont homogènes dans le grain (même si cette remarque est pondérée par la suite par l'utilisation du paramètre  $A_s$ ).

### C.1.3.7 Processus itératif

La boucle est désormais fermée, et le calcul reprend à partir de l'étape C.1.3.2. Ce schéma itératif est poursuivi jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit atteint.

## C.1.4 Critère de convergence

Le critère de convergence du calcul est défini de la façon suivante. Le calcul est stoppé lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\|\vec{M}_{\mathbf{m}}^i - \vec{M}_{\mathbf{m}}^{i-1}\|}{\|\vec{M}_{\mathbf{m}}^{i-1}\|} \leq d_{\text{rel}}^M \\ \frac{\|\mathbb{E}^{\mu i} - \mathbb{E}^{\mu i-1}\|}{\|\mathbb{E}^{\mu i-1}\|} \leq d_{\text{rel}}^\varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Dans le cas des calculs présentés dans ce document, nous avons utilisé  $d_{\text{rel}}^M = 0,5\%$  et  $d_{\text{rel}}^\varepsilon = 2\%$ .

lorsque les valeurs recherchées sont proches d'une zone où elles s'annulent (en particulier pour la déformation de magnétostriction), ces critères deviennent difficiles à remplir alors que les valeurs obtenues sont vraisemblablement assez proches des solutions recherchées. On ajoute donc un critère alternatif (qui ne sert en pratique qu'aux très faibles valeurs de champ magnétique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{M}_{\mathbf{m}}^i - \vec{M}_{\mathbf{m}}^{i-1}\| \leq d_{\text{abs}}^M \\ \|\mathbb{E}^{\mu i} - \mathbb{E}^{\mu i-1}\| \leq d_{\text{abs}}^\varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

On a fixé ici  $d_{\text{abs}}^M = 500A/m$  et  $d_{\text{abs}}^\varepsilon = 10^{-8}$ .

## C.1.5 Temps de calcul

Les temps de calcul mis en jeu par cette approche sont assez importants. Il faut compter approximativement une vingtaine d'heures (sur un PC récent) pour établir le comportement d'un polycristal de 400 grains dans une direction donnée. La zone la plus consommatrice en temps de calcul est le coude de la courbe d'aimantation, où la convergence réclame souvent plus d'itérations. L'étape de minimisation de l'énergie libre des familles de domaines - qui permet de déterminer les variables  $\theta_\alpha$  - est de loin l'étape la plus pénalisante concernant le temps de calcul.

## C.2 Etude paramétrique

Afin de déterminer les paramètres les plus influents du modèle, il est intéressant d'évaluer la sensibilité des résultats à une variation des données d'entrée. Ceci pourra notamment permettre de savoir sur l'identification de quels paramètres se concentrer plus particulièrement, en raison de leur forte influence. Cela pourra également permettre d'identifier les points les plus sensibles du modèle et de mettre en relief les sources de défaillances vraisemblables.

On essaie donc ici d'isoler chacun des paramètres du modèle multi-échelle, et de déterminer l'influence qu'il a sur les prévisions obtenues. On se concentre sur les résultats obtenus pour l'alliage de fer-silicium NO présenté au chapitre 3.

### C.2.1 Caractéristiques du monocristal

#### C.2.1.1 Coefficients élastiques

Une illustration de la sensibilité des résultats du modèle aux caractéristiques élastiques du monocristal a déjà été donnée en annexe B dans le cas d'un polycristal isotrope. Ces illustrations concernent la dépendance du module de cisaillement effectif (figure B.1) et de la déformation de magnétostriction à saturation (figure B.2) à l'anisotropie monocristalline.

On a représenté ici l'influence des modules d'élasticité du monocristal, et en particulier d'une variation autour de la valeur utilisée pour le monocristal de fer-silicium<sup>1</sup>, sur les coefficients élastiques macroscopiques calculés. La figure C.2 présente les résultats pour le module d'Young dans la direction du laminage et le coefficient de Poisson dans la direction transverse.

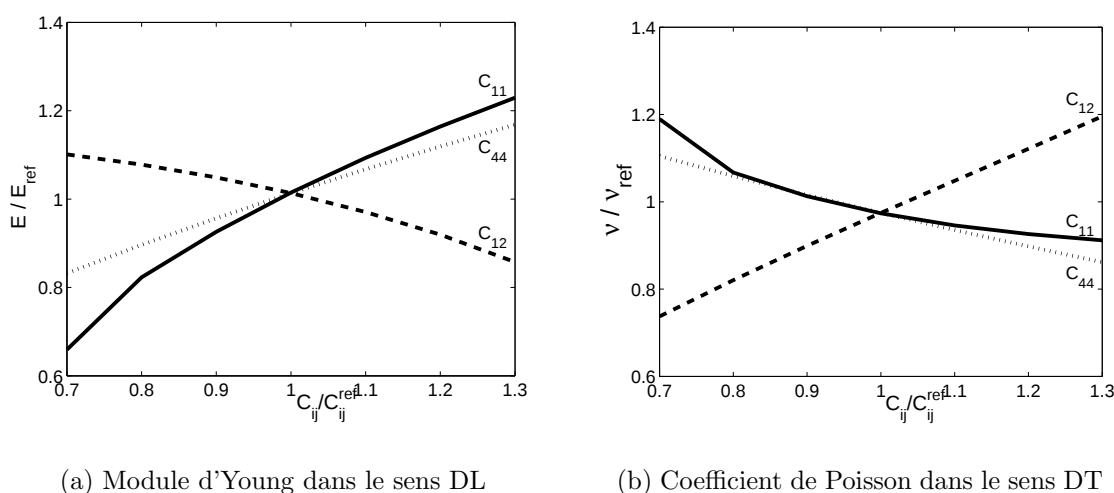


Figure C.2 – Influence d'une variation des modules élastiques du monocristal sur la prévision du module d'Young et du coefficient de Poisson du polycristal - Traction dans le sens DL - Fe3%Si NO

1. Les caractéristiques élastiques, magnétiques et magnétostrictives utilisées pour le monocristal de fer à 3% de silicium sont données par le tableau 3.5, chapitre 3.

On constate qu'une erreur sur la définition des modules monocristallins se répercute, dans des proportions un peu moindre en raison de l'effet de moyenne liée à la texture presque isotrope, sur les coefficients élastiques macroscopiques. Le coefficient élastique monocristallin le plus influent sur la valeur du module d'Young est  $C_{11}$ , et  $C_{12}$  pour la valeur du coefficient de Poisson.

L'influence d'une méconnaissance relative des coefficients élastiques monocristallins est en revanche beaucoup plus visible sur les résultats obtenus pour la magnétostriction, comme l'illustre sur un cas particulier ( $H=500$  A/m) la figure C.3.

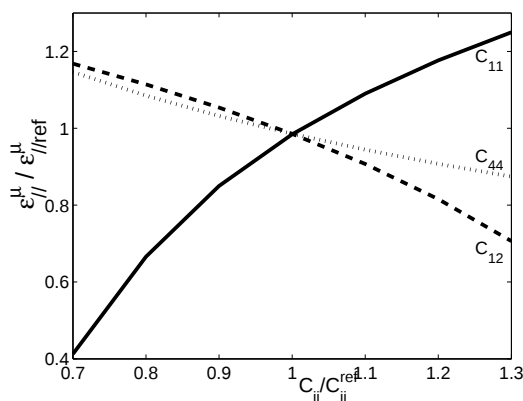


Figure C.3 – Influence d'une variation des modules élastiques du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

Sous-estimer de 30% la valeur de  $C_{11}$ , conduit dans ce cas particulier (pas spécialement défavorable) à sous-estimer de 60% la déformation de magnétostriction parallèle au champ magnétique appliqué.

On pressent donc ici que la connaissance précise des coefficients élastiques est très importante si l'on souhaite obtenir des résultats quantitatifs avec le modèle multi-échelle. Une forte incertitude sur ces coefficients, si elle a relativement peu d'effet sur la définition des propriétés élastiques macroscopiques, conduit en revanche à une très forte incertitude sur la déformation de magnétostriction, et en conséquence sur la définition du comportement magnétique sous contraintes. C'est ce constat qui a justifié le développement d'une mesure expérimentale des coefficients élastiques du monocristal de fer à 3% de silicium (chapitre 3).

### C.2.1.2 Caractéristiques magnétiques

La valeur de l'aimantation à saturation  $M_s$  du monocristal est égale à l'aimantation à saturation du polycristal (puisque cette caractéristique est homogène dans tout le matériau). Une modification de sa valeur affecte donc directement l'aimantation à saturation du polycristal, dans des proportions identiques.

Les constantes d'anisotropie magnétocristalline rendent plus ou moins facile dans les domaines la rotation de l'aimantation hors des axes de facile aimantation. Une incertitude dans la connaissance de cette constante n'a donc que très peu d'effet

à bas champ, où les mécanismes de rotation sont peu présents, comme l'illustre la figure C.4 sur une configuration simplifiée à quatre grains<sup>2</sup>. A plus fort niveau de champ, sous-estimer la constante d'anisotropie magnétocristalline conduit à surestimer l'aimantation, puisque la rotation de l'aimantation dans les domaines est rendue plus facile.

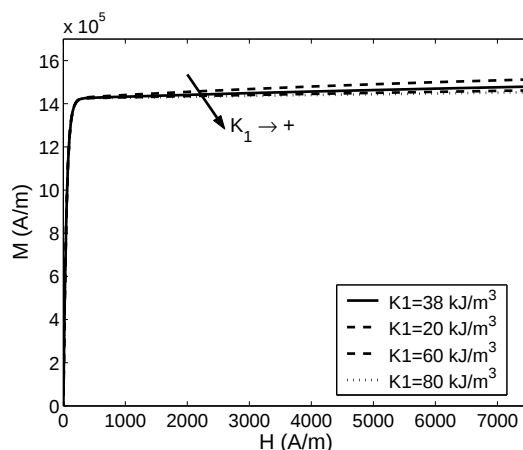


Figure C.4 – Courbes d'aimantation obtenues pour 4 valeurs particulières de la constante d'anisotropie magnétocristalline  $K_1$  du monocristal -  $K_1 = 20, 38, 60$  et  $80 \text{ kJ/m}^3$  - Agrégat de 4 grains

Une autre façon de représenter l'influence de  $K_1$  sur le comportement magnétique du polycristal est d'évaluer, en fonction de l'écart entre  $K_1$  et sa valeur de référence, la susceptibilité sécante obtenue pour le polycristal. La figure C.5 présente les résultats obtenus pour deux valeurs particulières du champ magnétique.

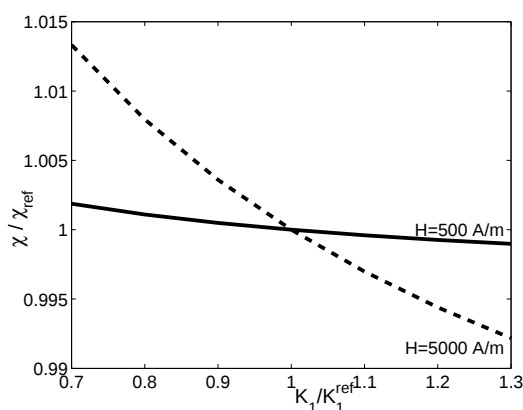


Figure C.5 – Influence d'une variation de la constante d'anisotropie magnétocristalline  $K_1$  du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

2. Les figures de pôles associées sont données par la figure 4.9.

On retrouve les mêmes tendances que pour la figure précédente : une diminution de la constante d'anisotropie magnétocristalline conduit à une augmentation de l'aimantation prédite pour un niveau de champ donné. La sensibilité du modèle magnétique à une incertitude sur  $K_1$  est très faible.

L'influence d'une incertitude sur la valeur de  $K_1$  conduit à une incertitude un peu plus marquée, mais toujours assez faible, sur la définition de la déformation de magnétostriction comme l'illustre, sur les deux mêmes cas particuliers, la figure C.6.

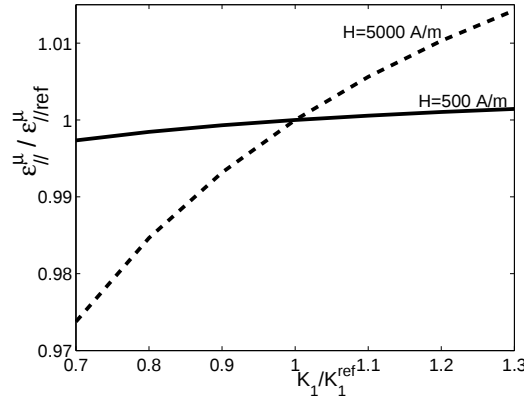


Figure C.6 – Influence d'une variation de la constante d'anisotropie magnétocristalline  $K_1$  du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

Ici aussi, la sensibilité du modèle est la plus forte pour les valeurs de champ médianes, dans la zone du coude de la courbe d'aimantation. Un champ très fort (conduisant à une situation proche de la saturation) ou un champ faible (pour lequel le phénomène de rotation est peu présent) sont des cas où une incertitude sur la constante d'anisotropie magnétocristalline a peu d'effet. Les valeurs de champ pour lesquels le phénomène de rotation est prépondérant dans le processus d'aimantation conduisent à une sensibilité du modèle au paramètre  $K_1$  plus forte.

### C.2.1.3 Coefficients magnétostrictifs

L'influence de l'anisotropie magnétostrictive monocristalline sur la déformation d'un polycristal isotrope de fer pur a été montrée en annexe B (figure B.3). On s'intéresse ici à l'effet d'une connaissance imprécise des coefficients magnétostrictifs du monocristal sur la prévision du comportement du polycristal.

La figure C.7 illustre l'incertitude sur la susceptibilité sécante calculée (pour deux valeurs particulières du champ magnétique appliqué) consécutive à une incertitude sur le coefficient  $\lambda_{100}$ .

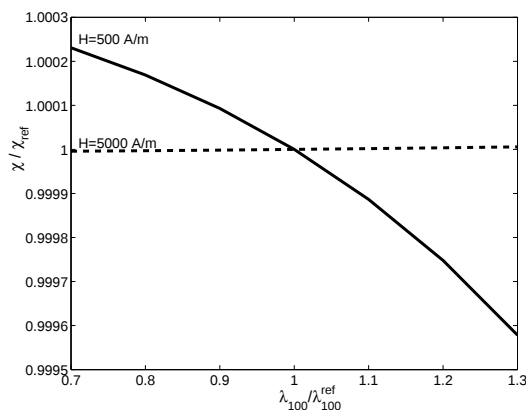


Figure C.7 – Influence d’une variation du coefficient magnétostrictif  $\lambda_{100}$  du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

L’effet observé sur la susceptibilité sécante est assez faible. Ceci peut s’expliquer par le fait que, en l’absence de contrainte appliquée, les contraintes d’incompatibilités dans le matériau ne sont liées<sup>3</sup> qu’à la déformation de magnétostriction. L’énergie magnéto-élastique est donc assez faible et a peu d’influence sur le comportement magnétique, piloté alors essentiellement par l’énergie de champ et l’énergie magnéto-cristalline.

L’effet d’une incertitude sur le coefficient  $\lambda_{111}$  est quant à elle quasiment sans effet sur la susceptibilité du polycristal, le mécanisme de rotation dans les domaines, pour les deux niveaux de champ magnétique présentés, étant presque inexistant.

Si on applique une contrainte, la contribution de l’énergie magnéto-élastique à la définition du comportement magnétique devient beaucoup plus importante, et la connaissance précise des coefficients magnétostrictifs devient essentielle.

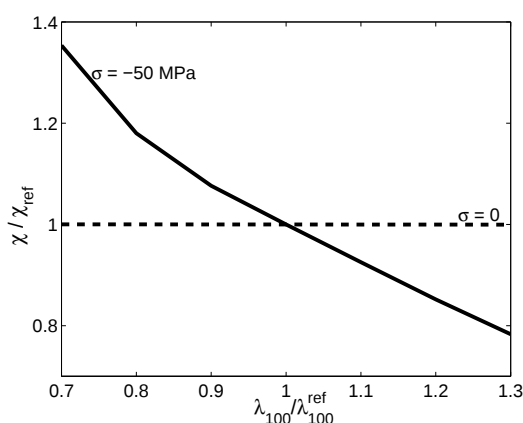


Figure C.8 – Influence d’une variation du coefficient magnétostrictif  $\lambda_{100}$  du monocristal sur la prévision de la susceptibilité (sécante) sous contrainte uniaxiale du polycristal à 500 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

3. Les calculs présentés dans cette annexe ne tiennent pas compte d’un éventuel état de contraintes résiduelles dans le matériau, par exemple lié à la plasticité.



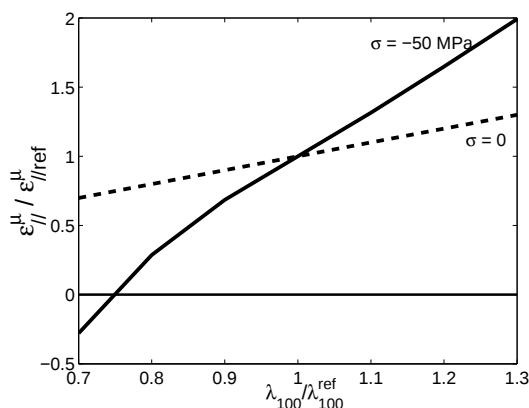


Figure C.10 – Influence d'une variation du coefficient magnétostrictif  $\lambda_{100}$  du monocristal sur la prévision de la déformation de magnétostriction à  $H=500$  A/m du polycristal sous traction uniaxiale - sens DL - Fe3%Si NO

Une connaissance précise des caractéristiques monocristallines est donc indispensable à une définition quantitative du comportement macroscopique. Si l'étude des comportements élastiques et magnétiques découplés peut laisser penser qu'une incertitude sur ces caractéristiques a une influence modérée - c'est à dire d'amplitude moindre - sur la définition du comportement macroscopique, cette idée est contredite par l'étude du comportement couplé. Ainsi une incertitude sur les paramètres monocristallins se traduit par une incertitude de plus forte amplitude sur le comportement magnétique sous contrainte ou sur la déformation de magnétostriction.

### C.2.2 Paramètre $A_s$

Le paramètre  $A_s$  est la variable d'ajustement numérique du modèle qui permet de "régler" la susceptibilité initiale prédite.

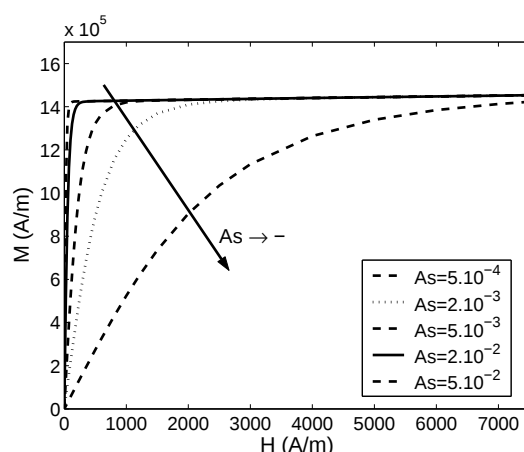


Figure C.11 – Courbes d'aimantation obtenues pour 5 valeurs particulières du paramètre  $A_s$  - Agrégat de 4 grains

On a vu au chapitre 3, dans certains cas particuliers que la susceptibilité initiale  $\chi^o$  et le paramètre  $A_s$  sont proportionnels (relations (3.20) et (3.43)). On s'attend

donc, comme l'illustre la figure C.11 sur une configuration à quatre grains, à ce qu'une modification du paramètre  $A_s$  influe directement sur la pente à l'origine de la courbe d'aimantation.

Plus le paramètre  $A_s$  est élevé plus la courbe d'aimantation est raide. Diminuer ce paramètre revient à "étirer" l'axe des abscisses, et à ajuster ainsi un effet démagnétisant macroscopique. Pour un niveau de champ donné, la susceptibilité sécante sera d'autant plus forte que  $A_s$  est élevé (figure C.12).

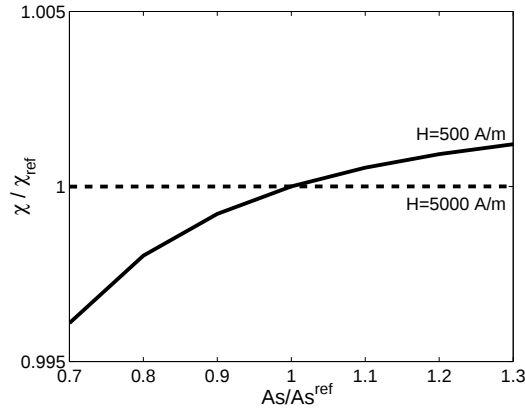


Figure C.12 – Influence d'une variation du paramètre  $A_s$  sur la prévision de la susceptibilité (sécante) du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

La susceptibilité prédite par le modèle est sensible au paramètre  $A_s$  pour les faibles valeurs de champ. Cette sensibilité est de plus en plus faible au fur et à mesure que le champ augmente. Elle devient inexistante lorsque l'on s'approche de la saturation.

L'effet d'une variation de  $A_s$  sur la déformation de magnétostriction est présenté sur la figure C.13.

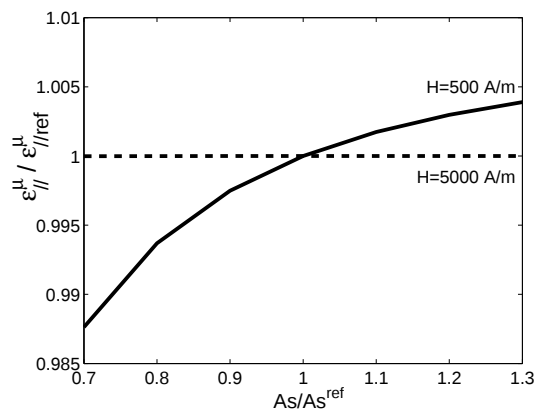


Figure C.13 – Influence d'une variation du paramètre  $A_s$  sur la prévision de la déformation de magnétostriction du polycristal à 500 et 5000 A/m - sens DL - Fe3%Si NO

L'effet observé n'est que la répercussion de l'effet sur la courbe d'aimantation. Si on trace l'évolution de la magnétostriction en fonction de l'aimantation - et non

du champ magnétique - on s'aperçoit qu'une modification du paramètre  $A_s$  n'a aucun effet sur la courbe de magnétostriction. Ceci confirme qu'une diminution de  $A_s$  conduit essentiellement à une dilatation de l'axe des abscisses sur les courbes d'aimantation.

### C.2.3 Énergie de surface maximale $N_s$

L'énergie de surface maximale  $N_s$  définit la valeur de l'énergie de surface. Cette énergie de surface (relation (4.5)) défavorise, dans le cas de tôles, la présence de domaines dont l'aimantation présente une direction proche de la normale à la surface de la tôle. Comme cela a déjà été indiqué au chapitre 4 (paragraphe 4.2.3),  $N_s$  a très peu d'influence sur la prédiction de la courbe d'aimantation dans le cas du fer-silicium à grains non orientés - on observe en fait une très légère amélioration du comportement prédit, c'est à dire une augmentation de la susceptibilité sécante. Ce paramètre a en revanche beaucoup d'influence sur la déformation de magnétostriction. Il influe en fait principalement sur la définition de la déformation initiale, à l'état désaimanté. La figure C.14 illustre cet effet.

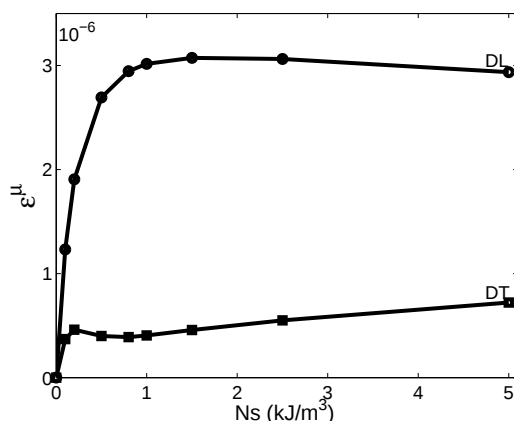


Figure C.14 – Influence du paramètre  $N_s$  sur la définition de la déformation de magnétostriction à l'état désaimanté - Composantes suivant DL et DT - Fe3%Si NO

Pour des valeurs de  $N_s$  supérieures à 500 J/m³, la déformation de magnétostriction à l'état désaimanté sature, et les résultats du modèle deviennent très peu sensibles à l'augmentation de sa valeur. Il n'est donc pas possible d'ajuster la valeur de  $N_s$  de façon à "régler" l'anisotropie magnétostrictive dans le plan de tôle. Pour  $N_s > 500$  J/m³, l'énergie de surface s'avère être une contribution binaire (surface / absence de surface) et très peu ajustable, ce qui nous dispense de la recherche d'une valeur optimale.

### C.2.4 Nombre de grains

Une question importante lorsqu'il s'agit de discrétiser une texture est le nombre d'orientations à prendre en considération. Ce nombre d'orientations doit être relié à l'anisotropie de la texture considérée : plus la texture décrite sera marquée, moins

le nombre d'orientations nécessaires à sa description sera élevé. A défaut de définir précisément le nombre minimum de grains nécessaires, nous illustrons ici, l'effet du nombre  $N_g$  de grains utilisés sur les résultats obtenus pour le comportement élastique. Nous utilisons les résultats de textures obtenus sur le M330, présenté au paragraphe 5.1.2. Trois valeurs ont été testées pour le nombre de grains : 100, 1000 et 5000. Il faut cependant noter qu'il est possible de limiter le nombre d'orientations nécessaires à la description d'une texture, pour un chargement donné, en exploitant les symétries du chargement vis à vis des symétries de la texture [Van Houtte et Aernoudt, 1976]. Cette démarche n'a pas été appliquée ici. Le nombre de grains utilisés n'est donc sans doute pas optimal, mais les FDO utilisées s'appliquent quelque soit le chargement considéré.

Les données de texture ont une apparence différente suivant le nombre d'orientations cristallographiques considérées (figure C.15).

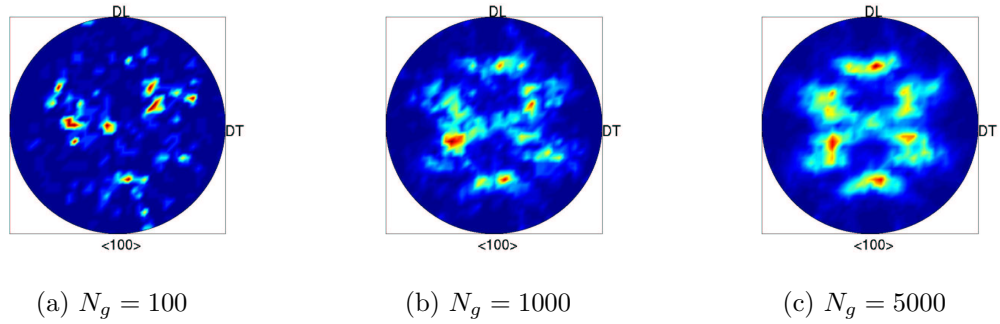


Figure C.15 – *Figures de pôles  $\langle 100 \rangle$  pour le M330 - Influence de la taille de la FDO*

Cette différence se répercute de façon directe sur la prévision du comportement élastique du polycristal (figure C.16).

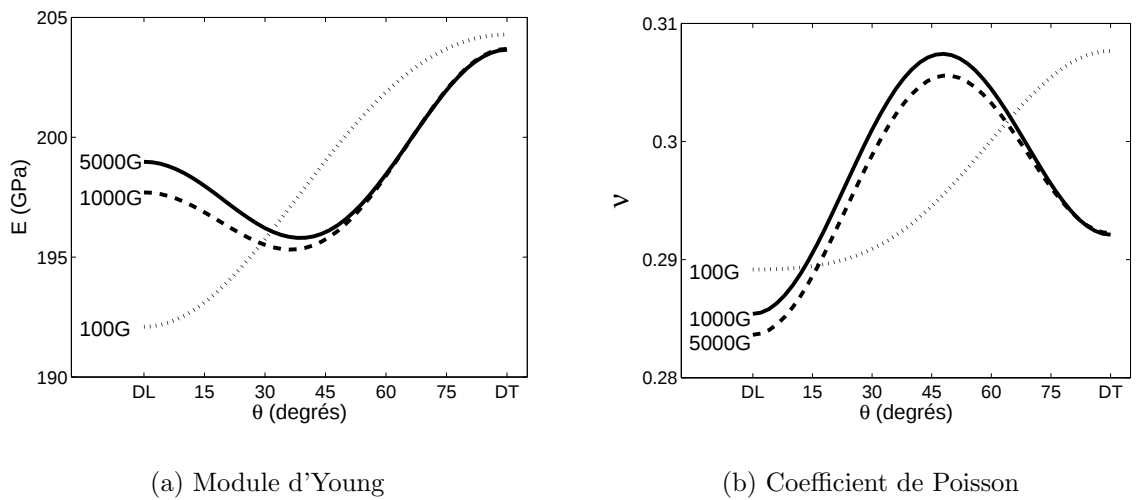


Figure C.16 – *Propriétés élastiques du M330 - Influence de la taille de la FDO*

Les comportements élastiques prévus par le modèle multi-échelle sont très différents si l'on utilise une FDO à 100 orientations ou une FDO à 1000 orientations. Il ne semble donc pas raisonnable d'utiliser seulement 100 orientations cristallographiques pour décrire la texture du M330. En revanche le passage de 1000 orientations à 5000 n'apporte pas de modification sensible aux prévisions du modèle multi-échelle. On peut penser que le nombre minimum d'orientations cristallographiques pour décrire la texture du M330 (et plus généralement du fer-silicium NO) se trouve donc entre 100 et 1000 grains.



"PARAPLUIE :

L'indulgence, père Robe de Chambre, est-il rien de plus beau que l'indulgence?

Rappelons-nous la physique amusante : une seule expérience réussit toujours,  
celle des rides qui se creusent et des cheveux qui blanchissent."

A. Breton et P. Soupault, *Vous m'oublierez*.

Cachan, le 8 octobre 2003.



## Résumé

Les phénomènes de couplages magnéto-mécaniques ont deux manifestations principales. La première est l'effet des contraintes sur le comportement magnétique, qui conduit souvent à une importante dégradation des propriétés magnétiques. La seconde est la déformation de magnétostriction, qui est une déformation spontanée induite par la présence d'un champ magnétique. Cette déformation constitue par exemple l'une des origines du bruit émis par les transformateurs électriques.

Quel que soit le phénomène considéré, la compréhension du phénomène de couplage nécessite la connaissance précise de l'état d'équilibre mécanique comme magnétique. La caractérisation de cet état d'équilibre magnéto-mécanique, tant du point de vue expérimental que de la modélisation, fait l'objet de ce travail. Un modèle multi-échelle, considérant successivement l'équilibre d'un domaine magnétique, d'un monocristal (ou grain), et d'un Volume Élémentaire Représentatif polycristallin est proposé. Ce modèle est appliqué à un alliage de fer-silicium dont on a préalablement caractérisé la texture cristallographique et le comportement magnéto-élastique. Les résultats obtenus montrent d'une part la très forte anisotropie du comportement couplé, et, d'autre part l'importance de l'état de contraintes et de la présence de surfaces libres sur la définition de la configuration magnétique à l'état désaimanté. Le comportement magnéto-élastique macroscopique étant très sensible à cette configuration initiale, ces effets sont intégrés dans la modélisation.

Quelques applications ou extensions du modèle sont enfin abordées. Elles concernent l'étude de différentes nuances d'aciers magnétiques, la modélisation de l'effet de la plasticité sur le comportement magnétique ou encore la détermination d'une contrainte uniaxiale équivalente pour le comportement magnétique sous sollicitations mécaniques multiaxiales.

**Mots-clefs :** couplages magnéto-élastiques, déformation de magnétostriction, anisotropie, texture, homogénéisation, polycristal, fer-silicium.

## Summary

Magneto-mechanical coupling effects can be highlighted by two major phenomena. The first one is the effect of an applied stress on the magnetic behaviour, that often leads to a significant decrease of the magnetic permeability. The second one is the magnetostriction strain that is a spontaneous magnetism induced strain. This strain is one of the sources of the noise emitted by electrical devices.

A precise knowledge of the magnetic as well as mechanical equilibrium state is required in order to understand these coupling effects. This work deals with the characterisation of this equilibrium state, from both an experimental and a numerical point of view. A multiscale model, considering successively, the energetic equilibrium of a magnetic domain, of a single crystal (or grain), and of a polycrystalline Representative Volume Element is written. This model is applied to a silicon-iron alloy, whose crystallographic texture and magneto-elastic behaviour have been characterised. It is shown that the coupled behaviour is highly anisotropic, and strongly sensitive to residual stresses and free surfaces. These effects are introduced in the model formulation.

Applications or extensions of the model are then presented. They deal with the influence of plastic strains on the magnetic behaviour, or with the definition of an uniaxial equivalent stress for magnetic behaviour under multiaxial mechanical loadings.

**Keywords:** magneto-elastic couplings, magnetostriction strain, anisotropy, texture, homogenisation, polycrystal, iron-silicon steel.

