

Table des matières

Table des acronymes	11
Table des notations	15
1 Introduction	19
1.1 Présentation générale	19
1.2 La commande à base de modèle des optiques adaptatives	23
1.3 Démarche choisie	24
1.4 Structure du document	26
2 Optique adaptive pour l'imagerie à travers la turbulence atmosphérique	27
2.1 Imagerie à travers la turbulence atmosphérique avec un télescope	28
2.1.1 Principe de formation d'images	28
2.1.2 Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique	29
2.2 Correction de la perturbation atmosphérique par optique adaptive	31
2.3 Critères de qualité d'image	34
2.4 Composants d'une boucle d'optique adaptive classique	35
2.4.1 Retards, chronogramme et schéma bloc	35
2.4.2 Analyseur de surface d'onde	36
2.4.3 Miroir déformable	38
2.4.4 Régulateurs standard	40
2.4.4.1 Le régulateur à action intégrale	40
2.4.4.2 Le régulateur Linéaire Quadratique Gaussien	41
2.5 Représentation de la phase turbulente	42
2.5.1 Base zonale	43
2.5.2 Base de Zernike	43
2.5.3 Base de Fourier	48
2.5.4 Base de Karhunen-Loève	50
3 Modélisation d'état pour la commande Linéaire Quadratique Gaussienne en optique adaptive classique	53
3.1 Modélisation en base de Zernike	54
3.1.1 Modèle Auto-Régressif d'ordre 1	54
3.1.2 Modèle Auto-Régressif d'ordre 2	55

3.1.3	Frozen LQG	56
3.1.4	LQG tiède	59
3.1.4.1	Calcul de la commande	60
3.1.5	Comparaison de performance des régulateurs en base de Zernike (cas type VLT NAOS)	60
3.2	Modèles spatialement invariants	64
3.2.1	Régulateur LQG-DKF	65
3.2.2	Régulateur LQG-DKF multicouche	67
3.2.3	Comparaison de performance des régulateurs LQG-DKF (cas type VLT NAOS)	68
3.3	Conclusion	70
4	Commande LQG : modèles localisés en base zonale sous hypothèse de Taylor multicouche	73
4.1	Introduction	73
4.2	Commande haute performance des systèmes d'optique adaptative basée sur des modèles zonaux, avec applications à l'astronomie et au suivi de satellites	74
4.3	Extensions de l'article : Étude de performance et de robustesse de régulateurs LQG avec une modélisation plus fine de la turbulence dans un cas de tracking de satellite en orbite basse.	92
4.4	Performance en fonction de l'élévation d'un satellite en orbite basse	100
4.5	Conclusion	102
5	Commande haute performance pour les ELT	105
5.1	Paramètres de simulation d'un système d'OA aux dimensions ELT	106
5.2	Les régulateurs zonaux face aux ELT	107
5.3	Modèles d'état en base de Karhunen-Loève	110
5.3.1	Identification à partir des densités spectrales de puissance	110
5.3.2	Identification avec les fonctions d'autocorrélation temporelles	112
5.4	Performances en dimensions ELT	114
5.4.1	Performances selon les méthodes d'identification	114
5.4.2	Comparaison de performance entre modèle en base de Karhunen-Loève et modèle zonal	116
5.5	Conclusion	117
6	Conclusion et perspectives	119
6.1	Conclusion	119
6.2	Perspectives	122
Liste des publications		125

Table des figures

1.1	Le télescope de 40 pieds de William Herschel	20
1.2	Image prise le 22 July 2020 par l'instrument SPHERE qui équipe le Very Large Telescope de l'ESO, montrant l'étoile TYC 8998-760-1 entourée des deux exoplanètes géantes TYC 8998-760-1b et TYC 8998-760-1c (indiquées par des flèches). © ESO.	20
1.3	Le Very Large Telescope Interferometer de l'ESO, situé à Cerro Paranal dans le désert d'Atacama, au Chili. © ESO.	21
1.4	Miroir primaire du télescope Keck à Hawaï, composé de 36 segments hexagonaux dont on peut voir les contours, et qui forment un miroir de 10 m de diamètre. © Jean-Baptiste Feldmann.	22
1.5	Vue d'artiste de l' <i>Extremely Large Telescope</i> , qui sera terminé en 2026 à Cerro Armazones au Chili, et dont le miroir primaire fait 39 m de diamètre, avec une occultation centrale de 11 m. © ESO	23
2.1	Fonction d'étalement de point théorique d'un télescope avec une pupille circulaire (tache d'Airy). Gauche : représentation bidimensionnelle. Droite : coupe radiale. Figures extraites de la thèse de Carlos Correia [Correia(2010)].	29
2.2	Dix exemples de profils de la constante de structure C_n^2 , extraits de l'article [Fusco et Costille(2010)], et mesurés à Cerro Paranal avec des ballons sondes. En rouge sont représentées les 9 couches infiniment fines de turbulence considérées par l'ESO pour représenter la turbulence à Paranal. L'échelle des abscisses est logarithmique.	32
2.3	A droite : principe de fonctionnement de l'optique adaptative en astronomie. A gauche : images simulées (crédit Onera).	33
2.4	Chronogramme des opérations réalisées lors de l'asservissement d'une boucle d'optique adaptative, extrait de la thèse de Gaetano Sivo [Sivo(2013)]. Le retard de boucle est ici de deux trames.	35
2.5	Schéma bloc d'une boucle d'optique adaptative classique, extrait de la thèse de Rémy Juvénal [Juvénal(2017)]. D et N représentent des opérateurs linéaires qui seront définis ci-après.	36
2.6	Principe de l'analyseur de surface d'onde Shack-Hartmann. La focale de la microlentille est f_{ml} et α_y est l'angle formé entre le front d'onde incident et l'axe (0y). Schéma extrait de la thèse de Gaetano Sivo [Sivo(2013)] . . .	37

2.7	Geométrie de Fried. En considérant l'ASO et le MD dans un même plan, les actionneurs sont positionnés au coin des microlentilles. Les croix vertes indiquent les positions des mesures de front d'onde, les points rouges les positions des actionneurs et les traits bleus pleins délimitent les bords des 4 microlentilles représentées.	39
2.8	Fonctions d'influence gaussiennes d'un miroir déformable à géométrie cartésienne, avec des valeurs du coefficients de couplage allant de 0,1 à 0,7. L'axe des abscisses est gradué en distance inter-actionneurs.	39
2.9	Écrans de phase turbulente dans la pupille, ici sans occultation centrale. Chaque échantillon de phase est au centre de chaque pixel. Quatre échantillonnages sont illustrés pour une largeur d'écran de 8 m : 15 points (haut-gauche), 57 points (haut-droite), 127 points (bas-gauche) et 225 points (bas-droite), exprimés linéairement.	43
2.10	Matrice de covariance de la turbulence atmosphérique pour une statistique type Von Kármán (voir equation 2.13), avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et une grande échelle L_0 de 25 m. Les points de phase pris en ordre lexicographique, ont ici pour support la pupille circulaire du télescope de 8 m de diamètre. L'échantillonnage de la pupille est de 57 points linéaire, et 2 561 points sont contenus dans la pupille du télescope. La dimension de la matrice est donc de 2 561 x 2 561.	44
2.11	21 premiers polynômes de Zernike et aberrations optiques associées (en rouge). Figure extraite de la thèse de Rémy Juvénal [Juvénal(2017)].	45
2.12	Matrice de covariance des 860 premiers modes de Zernike, pour une atmosphère type Von Kármán, avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, une grande échelle L_0 de 25 m, et un diamètre de pupille de 8 m. Pour la représentation les valeurs nulles sont affichées en blanc et les valeurs non nulles en échelle logarithmique.	47
2.13	Variance des 860 premiers coefficients de Zernike pour une atmosphère type Von Kármán, avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, une grande échelle L_0 de 25 m, et un diamètre de pupille de 8 m. L'échelle des ordonnées est logarithmique.	47
2.14	Variance des 9 premiers coefficients de Zernike pour des atmosphères type Von Kármán, avec des valeurs de grande échelle de 10 à 50 m, ou une atmosphère type Kolmogorov. Ces données ont été générées avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et un diamètre de pupille de 8 m. L'échelle des ordonnées est logarithmique.	48
2.15	Représentation spatiale de la partie réelle des modes de Fourier. Sur une base de 768 x 768 fréquences spatiales, quatre modes ont été représentés. Le mode en haut à gauche est le premier mode hors piston. L'échelle de couleur est arbitraire (max : jaune - min : bleu foncé)	49
2.16	Fonction de covariance de la turbulence atmosphérique exprimée dans une base de fréquences spatiales. Il s'agit également de la densité de fluctuation spatiale de la turbulence atmosphérique. Ces données ont été générées avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et pour quatre grandes échelles différentes. L'échelle est logarithmique.	50

2.17	Représentation spatiale des modes de Karhunen-Loève. Les modes ont été générés pour une configuration type VLT NAOS, soit un diamètre de pupille de 8 m avec une occultation centrale de 1 m, un miroir déformable avec 185 actionneurs valides dans la pupille. Notre base de Karhunen-Loève comporte donc 184 modes (le mode piston est retiré de la base). 12 modes ont été représentés, allant des premiers modes (1,2,3) jusqu'à des ordres très élevés (180). L'échelle de couleur est propre à chaque figure, mais reste dans les mêmes gammes de valeurs (comprise entre -5 et 5)	52
3.1	Décalage de la l'estimation fournie par le filtre de Kalman en base de Zernike, sous l'effet du vent, pendant 2 trames d'échantillonnage de la boucle d'OA (2T).	57
3.2	Variance de phase résiduelle à 1,65 μm , pour un système d'OA type VLT NAOS et 2 lois de commande différentes. À gauche : régulateur LQG-DKF [Massioni <i>et al.</i> (2011)] avec le modèle dynamique (3.39). À droite : régulateur LQG en base zonale avec le modèle localisé en base zonale $\phi_{k+1} = \alpha\phi_k + v_k$ et le même échantillonnage spatial (2 points linéaires par microlentille), sans hypothèse d'invariance spatiale. Les rapports de Strehl sont donnés à 1,65 μm : (1) en pleine pupille; (2) en «coeur» de pupille (loin des bords), dans la zone hachurée (une couronne de microlentilles supprimée autour de l'occultation centrale, et une couronne de 1,5 microlentille supprimée sur le bord externe). À gauche : (1) 47,3 %; (2) 48,4 %. À droite : (1) 52,5 %; (2) 53,2 %.	70
3.3	Gain d'un filtre de Kalman distribué (noyau de convolution). Il s'agit ici du gain à appliquer aux mesures suivant l'axe (O,x). En haut : représentation 2D ; en bas : représentation 3D.	71
4.1	Schéma d'un satellite en orbite autour de la Terre, illustrant la vitesse apparente d'un satellite pour un observateur sur le sol terrestre.	100
4.2	Performances de l'intégrateur et de 3 régulateurs LQG basés sur des modèles auto-régressifs d'ordre 2 : en base zonale (rouge), en base de Zernike (boiling, bleu), ou en base mixte avec le LQG tiède (vert), dans un cas de simulation de type suivi de satellite en orbite basse, pour différentes positions du satellite correspondant à 4 élévarions différentes.	103
5.1	Densité spectrale de puissance de 7 modes de Karhunen-Loève pour un système d'OA aux dimensions ELT, obtenue avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2.	111
5.2	Densités spectrale de puissance des séquences de turbulence simulées, du 50 ^e (à gauche) et 4 000 ^e (à droite) mode de Karhunen-Loève, obtenues avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2. Les DSP des modèles à temps continu et à temps discret de ces modes sont également présentées.	112

- 5.3 Fonctions d'autocorrélation temporelle des modes de Karhunen-Loève d'une turbulence simulée, obtenues avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2. Elles sont calculées avec une séquence de 60 000 occurrences temporelles générées à 500 Hz ; 7 modes sont représentés du 1^{er} au 4 000^e mode. Gauche : horizon de calcul de 2s. Droite : zoom sur les 0,04 premières secondes, avant les premières anté-corrélations du 4 000 ème mode. 113

Liste des tableaux

3.1	Paramètres des simulations bout-en-bout pour une configuration VLT NAOS	61
3.2	Configuration des atmosphères utilisées dans les simulations bout-en-bout, de pseudo-bouillonnante à <i>frozen flow</i> , avec des comportements intermédiaires. Sur les représentations graphiques, les flèches de couleur bleue correspondent à la première couche, les vertes à la deuxième, et les violettes à la troisième. Les profils sont générés avec trois couches turbulentes en translation, sauf dans le cas d'un pur <i>frozen flow</i> (une seule couche)	62
3.3	Performance des régulateurs LQG de la section 3.1 dont les modèles sont dans une base de 495 modes de Zernike, pour cinq comportements d'atmosphère, décrivant un bouillonnement de la turbulence atmosphérique, ou bien une translation pure, avec deux comportement intermédiaires.	63
3.4	Performance des régulateurs LQG-DKF et LQG-DKF multicouche de la section 4.1, pour une atmosphère pseudo-bouillonnante et un échantillonnage de la base zonale de 1 ou 2 points linéaires par microlentille	69
4.1	Paramètres de l'atmosphère de simulation pour un satellite en orbite basse au zénith.	101
5.1	Paramètres des simulations bout-en-bout pour une configuration de type HARMONI-ELT dans un mode de fonctionnement SCAO	107
5.2	Configuration des atmosphères utilisées dans les simulations bout-en-bout des systèmes d'OA aux dimensions ELT, avec un comportement pseudo-bouillonnant ou à tendance forte de <i>frozen flow</i>	108
5.3	Performances des régulateurs zonaux avec des modèles dynamiques de la phase résultante pour un système d'OA aux dimensions ELT, obtenues avec les turbulences pseudo-bouillonnante et à tendance forte <i>frozen flow</i> de la table 5.2. L'échantillonnage de la base zonale est de 1 ou 2 points linéaires par microlentille.	109
5.4	Comparaison des trois méthodes d'identification de modèles en base de Karhunen-Loève. La première est la méthode de fit sur les DSP empiriques de chaque mode. La deuxième méthode est la méthode <i>Prediction Error Minimization</i> (PEM). La dernière identifie les modes à partir des trajectoires d'autocorrélation temporelle de la turbulence atmosphérique.	115

5.5	Performance des régulateurs en base de Karhunen-Loève avec un modèle dynamique AR2 sur la phase résultante pour un système d'OA aux dimensions ELT. L'échantillonnage de la base zonale du régulateur 4 est de 2 points linéaires par microlentille.	116
5.6	Temps de calcul des matrices de la représentation d'état et du gain du filtre de Kalman pour les régulateurs 2 et 4 de la table 5.5.	117

Table des acronymes

Abréviations	Signification
ALTAIR	<i>ALTitude conjugate Adaptive optics for the InfraRed</i>
AO	<i>Adaptive Optics</i>
AR	Auto-Régressif
AR1	Auto-Régressif d'ordre 1
AR2	Auto-Régressif d'ordre 2
ASO	Analyseur de Surface d'onde
ASO SH	Analyseur de Surface d'Onde Shack-Hartmann
BOA	Banc d'Optique Adaptative
CANARY	Démonstrateur d'OA multi-objet au télescope W. Herschell (Îles Canaries)
DKF	<i>Distributed Kalman Filter</i>
DM	<i>Deformable Mirror</i>
DSP	Densité Spectrale de Puissance
Ec	Énergie cohérente
ELT	<i>Extremely Large Telescopes</i>
E-ELT	<i>European Extremely Large Telescopes</i>
ESO	<i>European Southern Observatory</i>
FEP	Fonction d'Étalement de Point
FTO	Fonction de Transfert Optique
GMT	<i>Giant Magellan Telescope</i>

GTC	<i>Gran Telescopio Canarias</i>
GPI	<i>Gemini Planet Imager</i>
HARMONI	<i>High Angular Resolution - Monolithic - Optical and Near-infrared - Integral field spectrograph</i>
HET	<i>Hobberly-Eberly Telescope</i>
HOMER	<i>Hartmann Oriented Multi-conjugate adaptive optics Experimental Ressource</i>
KL	Karhunen-Loève
LBT	<i>Large Binocular Telescope</i>
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>
LQG	Linéaire Quadratique Gaussien
LQG-DKF	Régulateur Linéaire Quadratique Gaussien construit sur un filtre de Kalman Distribué
LQG-KF	Régulateur Linéaire Quadratique Gaussien construit sur un filtre de Kalman
LIFT	Linearized Focal-plane Technique
LTAO	<i>Laser Tomography Adaptive Optics</i>
L2TI	Laboratoire de Traitement et Transport de l'Information
MAORY	<i>Multi-conjugate Adaptive Optics RelaY</i>
MAP	<i>Maximum a Posteriori</i>
MASS	<i>Multi-Aperture Scintillation Sensor</i>
MCAO	<i>Multi-Conjugated Adaptive Optics</i>
MD	Miroir Déformable
METIS	<i>Mid-infrared ElT Imager and Spectrograph</i>
MICADO	<i>Multi-ao Imaging CAmera for Deep Observations</i>
MOAO	<i>Multi-Object Adaptive Optics</i>
MVM	<i>Matrix Vector Multiplier</i>

NAOS	<i>Nasmyth Adaptive Optics System</i>
OA	Optique Adaptative
ONERA	Office National d'Études et de Recherche Aérospatiales
OOMAO	<i>Object Oriented Matlab Adaptive Optics</i>
POLC	<i>Pseudo Open Loop Control</i>
SA-LQG	<i>Spatio-Angular Linear Quadratic Gaussian</i>
SAXO	<i>Sphere Adaptive optics for eXoplanet Observation</i>
SCAO	<i>Single Conjugated Adaptive Optics</i>
SCIDAR	<i>SCIillation Detection And Ranging</i>
SH	Shack-Hartmann
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
SPHERE	<i>Spectro-Polarimetry High-contrast Exoplanet REsearch</i>
SR	<i>Strehl Ratio</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TMT	<i>Thirty Meter Telescope</i>
VLT	<i>Very Large Telescope</i>
VLTI	<i>Very Large Telescope Interferometer</i>
WFS	<i>Wave Front Sensor</i>
XAO	<i>eXtreme Adaptive Optics</i>

Table des notations

Notation	Signification
λ	Longueur d'onde d'observation
f	Focale du télescope
α	Vecteur de coordonnées angulaires en radians
r	Vecteur de coordonnées cartésiennes du plan pupille
ν	Vecteur de coordonnées de fréquence spatiale en m^{-1}
ρ	Distance entre deux points de phase en m
$C_\phi(\rho)$	Fonction de covariance spatiale de la turbulence atmosphérique
$D_\phi(\rho)$	Fonction de structure de phase de la turbulence atmosphérique
r_0	Paramètre de Fried
L_0	Grande échelle
γ	Angle zénithal en radians
$C_n^2(h)$	Constante de structure
FEP	Fonction d'étalement de point
E_c	Énergie cohérente
i_{halo}	Intensité du halo
SR	Rapport de Strehl
ψ	Fonction d'onde
$\Omega(\mathbf{r})$	Fonction pupillaire
FTO	Fonction de transfert optique
J_1	Fonction de Bessel d'ordre 1
f_{ml}	Distance focale des micro-lentilles en mètres

S	Surface de la microlentille
T	Période de la boucle D'optique adaptative
ϕ	Phase de perturbation
ϕ^{res}	Phase résiduelle
ϕ^{cor}	Phase de correction
y	Vecteurs de mesure ASO
w	Bruit de mesure
u	Vecteur de commande
u_i	Tension envoyée au i -ème actionneur
f_i	Fonctions d'influence du i -ème actionneur
N	Matrice d'influence du miroir déformable
M_{int}	Matrice d'interaction du système
M_{com}	Matrice de commande du système
g	Gain de l'intégrateur
P	Projecteur sur l'espace des commandes
$\hat{\phi}$	Phase estimée par le filtre de Kalman
X	vecteur d'état
v	Bruit formeur
Σ_v	Matrice de covariance du bruit formeur
Σ_w	Matrice de covariance du bruit de mesure
Σ_ϕ	Matrice de covariance de la phase turbulente
A	Matrice de transition
C_1	Matrice d'extraction de la première composante
C	Matrice du modèle de mesure
L_∞	Gain de Kalman
Σ_∞	Matrice de covariance d'erreur d'estimation asymptotique
$Z_j(r, \theta)$	j -ème polynôme de Zernike
n_{modes}	Nombre de modes de la base de Zernike

C_{ij}	Covariance entre le i -ème et j -ème mode de Zernike
\mathbf{F}_{nm}	Mode de Fourier associé au couple de fréquence spatiale ($\nu_x = \frac{n}{N_x} F_{ex}$, $\nu_y = \frac{m}{N_y} F_{ey}$)
$\tilde{C}_\phi(\boldsymbol{\nu})$	Densité des fluctuations spatiale de la turbulence atmosphérique
$\tilde{\Sigma}_\phi$	Matrice de covariance de la turbulence atmosphérique en base de fréquence spatiale
f_c^i	Fréquence de coupure du i -ème mode de Zernike
V	Vent moyen dans la pupille
n_i	Ordre radial du i -ème mode de Zernike
m_i	Ordre azimutal du i -ème mode de Zernike
β_l	Coefficient d'énergie normalisée de la l -ème couche turbulente du profil de C_n^2
V^l	Vent de la l -ème couche du profil
$P_{\text{zon} \rightarrow \text{zer}}$	Projecteur zonal vers Zernike
$P_{\text{zon} \rightarrow \text{KL}}$	Projecteur zonal vers Karhunen-Loève
$P_{\text{zer} \rightarrow \text{zon}}$	Projecteur Zernike vers zonal
$P_{\text{KL} \rightarrow \text{zon}}$	Projecteur Karhunen-Loève vers zonal
D_{aso}	Matrice du modèle de l'ASO géométrique en base zonale
H_∞	Gain d'estimation de Kalman
C_2	Matrice d'extraction de la deuxième composante
P_{crois}	Matrice d'extraction des points du croissant
P_{reste}	Matrice d'extraction des points de la pupille hormis croissant
A_{2T}	Matrice de translation dans le sens du vent d'un déplacement qui correspond à la distance parcourue pendant 2 trames de boucle d'OA
N^\dagger	Inverse moindre carré de N
β_{Bouil}	Coefficient d'énergie normalisée de la couche bouillonnante dans le modèle du LQG tiède

$P_{\text{tiède}}$	Projecteur du LQG tiède entre l'estimation du filtre de Kalman et les commandes
L_{∞}^x	Gain d'un filtre de Kalman distribué, qui est un noyau à convoluer à l'innovation des pentes en X
L_{∞}^y	Gain d'un filtre de Kalman distribué, qui est un noyau à convoluer à l'innovation des pentes en Y
D_x	Modèle de mesure du filtre de Kalman distribué pour le calcul des pentes en X
D_y	Modèle de mesure du filtre de Kalman distribué pour le calcul des pentes en Y
I_{int}	Matrice d'interpolation au plus proche voisin entre la grille d'estimation du filtre de Kalman et la grille d'échantillonnage des fonctions d'influence du miroir déformable
θ	Angle d'élévation du satellite
V^{app}	Vitesse apparente du satellite depuis un point d'observation sur Terre, vitesse orthoradiale
$V^{\text{zénith}}$	Vitesse du satellite au zénith
R_T	Rayon de la Terre
h_{sat}	Altitude du satellite
h_l	Altitude de la l -ème couche turbulente
d_l	Distance de la l -ème couche turbulente à l'observateur (télescope)
d	Taille d'une microlentille de l'ASO Shack-Hartmann dans le plan de la pupille du télescope
$C_{\phi^i}(n)$	Fonction d'autocorrélation temporelle à n pas du i -ème mode de Karhunen-Loève

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation générale

L'observation scientifique d'objets célestes depuis le sol terrestre avec une lunette astronomique a été initiée au début du 17^e siècle par Galilée. Le premier télescope à miroir a quant à lui été inventé par Newton en 1666 avec un réflecteur de 2,5 cm de diamètre. Les évolutions technologiques ont permis de passer du concept optique initial, consistant en un assemblage de lentilles réfractives, aux télescopes réflectifs puis catadioptriques, ce qui a permis de relâcher les contraintes de faisabilité et a donné la possibilité de construire des télescopes de plus en plus grands, avec lesquels on pouvait voir des objets de plus en plus petits dans le ciel. Citons ici quelques-uns de ceux qui ont marqué l'Histoire, comme le télescope de 40 pieds de William Herschel (figure 1.1) achevé en 1789, doté d'un réflecteur en bronze de 1,22 m de diamètre, ou l'observatoire du mont Wilson, avec son réflecteur de 2,54 m, qui a servi aux travaux d'Edwin Hubble dans les années 1920.

Faisons un saut d'environ 70 ans avec le *Very Large Telescope* situé au nord du Chili, dans le désert d'Atacama, avec un miroir primaire d'un diamètre de 8,2 m, et dont les premières observations scientifiques ont été faites à partir de 1998. Le VLT est équipé depuis 2014 (première lumière) de l'instrument de détection d'exoplanètes SPHERE [Beuzit *et al.*(2005)], et plusieurs exoplanètes en imagerie directe ont été découvertes à partir de 2017. C'est avec cet instrument qu'a également été obtenue la toute première image d'une jeune étoile de type Soleil accompagnée de deux exoplanètes géantes, située à quelque 300 années lumière de la Terre et baptisée TYC 8998-760-1 (les deux exoplanètes TYC 8998-760-1b et TYC 8998-760-1c sont visibles sur la figure 1.2). La course à la plus grande taille des miroirs primaires permet de collecter un nombre de photons proportionnel au carré du diamètre, ce qui rend possible d'imager des sources lumineuses de plus en plus faibles et de distinguer des objets avec une séparation angulaire de plus en plus faible dans le ciel. Ce télescope sera ensuite complété par trois autres similaires pour constituer en 2001 un complexe de 4 télescopes VLT identiques, qui ensemble forment le *Very Large Telescope Interferometer* (VLTI, figure 1.3), auquel entre 2004 et 2008 sont venus s'ajouter quatre télescopes auxiliaires de 1,8 m de diamètre. Ce dispositif permet d'avoir accès à certaines informations en combinant les signaux lumineux provenant de six des huit télescopes, que seul un télescope dont le miroir primaire ferait 200 m pourrait mesurer ! De fait, en combinant ces signaux lumineux, les astronomes sont en mesure de synthétiser un

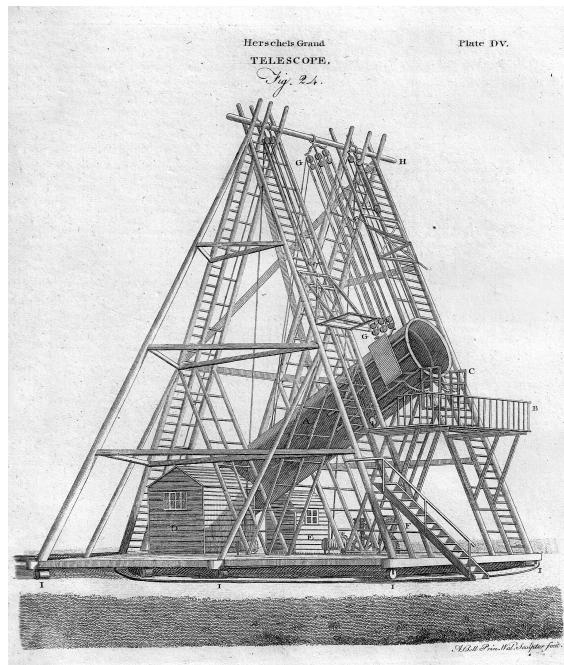


FIGURE 1.1 – Le télescope de 40 pieds de William Herschel

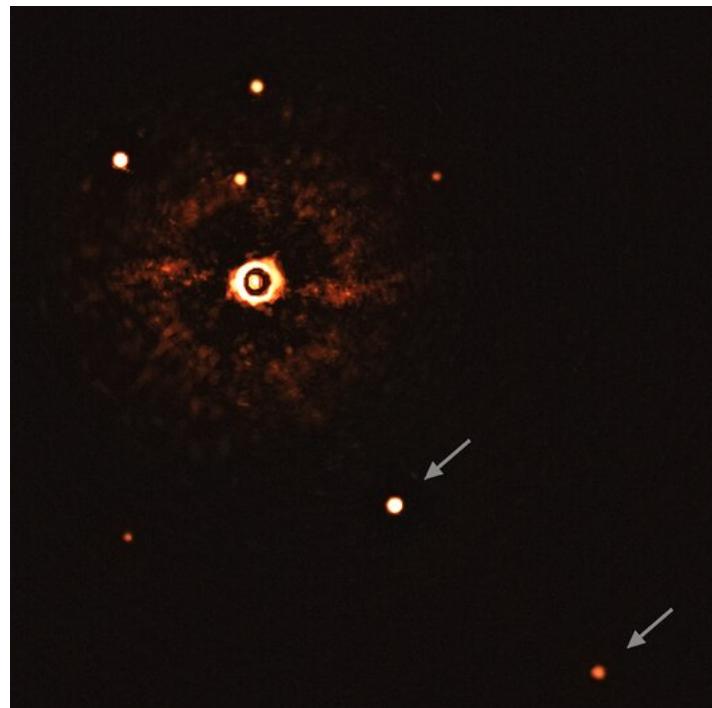


FIGURE 1.2 – Image prise le 22 July 2020 par l'instrument SPHERE qui équipe le Very Large Telescope de l'ESO, montrant l'étoile TYC 8998-760-1 entourée des deux exoplanètes géantes TYC 8998-760-1b et TYC 8998-760-1c (indiquées par des flèches). © ESO.



FIGURE 1.3 – Le Very Large Telescope Interferometer de l’ESO, situé à Cerro Paranal dans le désert d’Atacama, au Chili. © ESO.

interféromètre, c'est-à-dire un instrument virtuel dont la taille serait égale à l'écartement entre les télescopes réels.

Afin de pouvoir augmenter davantage les tailles des télescopes, les miroirs segmentés ont fait leur apparition au début des années 1990, permettant ainsi de se libérer des contraintes d'un miroir unique déjà difficile à produire pour des échelles VLT par exemple. Parmi les instruments utilisant des miroirs primaires segmentés, on peut citer les télescopes Keck [Nelson *et al.*(1985)] de l’observatoire William Myron Keck, dont le miroir primaire contient 36 segments hexagonaux (figure 1.4), le Hobby-Eberly Telescope (HET) [Krabbendam *et al.*(1998)] et le Gran Telescopio Canarias (GTC) [Castro *et al.*(2000)]. L’observatoire William Myron Keck, mis en service au Mauna Kea à Hawaï en 1993, est le premier télescope avec un miroir primaire segmenté d'un diamètre de 10 m, et fut pendant longtemps le plus grand du monde.

L’observation depuis le sol terrestre est cependant intrinsèquement limitée par la turbulence atmosphérique, qui réduit les performances en résolution angulaire des télescopes les plus grands du monde à celles de télescopes qui auraient un diamètre de l’ordre d'une dizaine de centimètres pour les images longue pose. La résolution angulaire est la capacité à distinguer 2 objets proches angulairement l'un de l'autre. Idéalement et dans le vide, la résolution serait inversement proportionnelle au diamètre du miroir primaire (limite de diffraction), mais en présence de l’atmosphère elle est inversement proportionnelle au paramètre de Fried r_0 . Ce paramètre illustre la force de la turbulence atmosphérique : plus il est faible, plus la turbulence est importante.

En effet, un front d’onde incident plan provenant de l’objet à imager (situé à l’infini) est déformé par sa traversée de l’atmosphère, ce qui induit une déformation de l’image. Lorsque l’on acquiert des images longue pose, ces déformations sont moyennées, avec au final une tache image de largeur bien supérieure à celle de l’objet que l’on verrait en limite de diffraction.

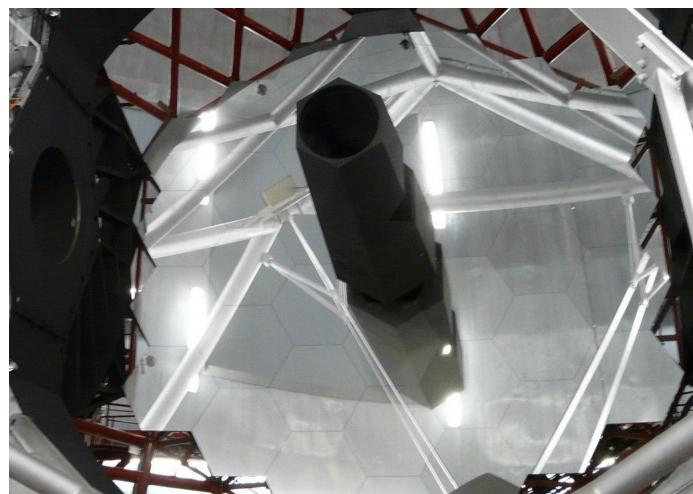


FIGURE 1.4 – Miroir primaire du télescope Keck à Hawaï, composé de 36 segments hexagonaux dont on peut voir les contours, et qui forment un miroir de 10 m de diamètre. © Jean-Baptiste Feldmann.

En 1953, Babcock a proposé un principe de correction des déformations induites par la turbulence atmosphérique, posant ainsi les bases de l’optique adaptative (OA) [Babcock(1953)]. L’optique adaptative permet de compenser les déformations induites par la traversée de l’atmosphère sur le front d’onde incident. Cette compensation est effectuée à l’aide d’un miroir déformable (MD), de manière à ce qu’après réflexion sur ce miroir le front d’onde soit le plus plan possible. La déformation de la surface du miroir est obtenue grâce à des actionneurs situés sous la fine surface réfléchissante. Elle est calculée à l’aide de mesures de front d’onde fournies par un analyseur de surface d’onde (ASO).

Ce n’est qu’en 1989 que les technologies disponibles permettront de mettre en œuvre ce principe, donnant lieu à la première observation approchant la limite de diffraction, avec la réalisation du premier instrument d’optique adaptative COME-ON [Rousset *et al.*(1990)] installé au foyer du télescope de 1,52 m de l’Observatoire de Haute Provence. Ces résultats ont encouragé le développement de l’optique adaptative pour les télescopes du monde entier, et cette nouvelle modalité d’instrumentation astronomique est apparue comme incontournable [Fontanella *et al.*(1991)]. Les télescopes Keck (I et II), Subaru et Gemini Nord à Hawaï, Gemini Sud et UT4 du *Very Large Telescope* au Chili, le *Large Binocular Telescope* en Arizona, le *Multiple Mirror Telescope* et le Lick en Californie font partie d’une liste croissante d’observatoires qui en sont équipés. Ces systèmes d’OA ont permis des avancées majeures en astronomie et astrophysique. On peut citer par exemple les observations sur le VLT équipé de l’OA *Nasmyth Adaptive Optics System* (NAOS) [Rousset *et al.*(2000)] ayant permis de confirmer la présence d’un trou noir supermassif au centre de notre galaxie [Schödel *et al.*(2002)]. Il existe également plusieurs types d’optique adaptative, le cas classique d’un miroir déformable et un analyseur de surface d’onde qui est pointé dans la direction de l’objet scientifique (*Single Conjugated Adaptive Optics* – SCAO), et les cas grand champ qui peuvent comporter plusieurs MD et plusieurs ASO ([Ellerbroek(1993), Rigaut(2002), Neichel *et al.*(2009), Vidal *et al.*(2010), Basden *et al.*(2016)]), l’ensemble permettant d’effectuer une correction sur un champ d’observation plus étendu. Dans ce manuscrit nous étudierons seulement le cas de la SCAO, pour chercher la meilleure

loi de commande à base de modèle pour résoudre le dilemme performance et complexité calculatoire.

Le développement de solutions pour l'optique adaptive conduit aujourd'hui à l'élaboration de programmes de recherche de pointe pour les futurs télescopes géants avec des miroirs segmentés, qui sont le *Thirty Meter Telescope* (TMT) [Simard *et al.*(2016)], le *Giant Magellan Telescope* (GMT) [Fanson *et al.*(2020)] ou l'*Extremely Large Telescope* (ELT) [Ramsay *et al.*(2020)], dont une vue d'artiste est présentée sur la figure 1.5. L'ELT sera équipé d'un miroir primaire de 39 m de diamètre, avec une occultation centrale due au miroir secondaire de 11 m de diamètre. Notons que le miroir primaire de l'ELT compor-

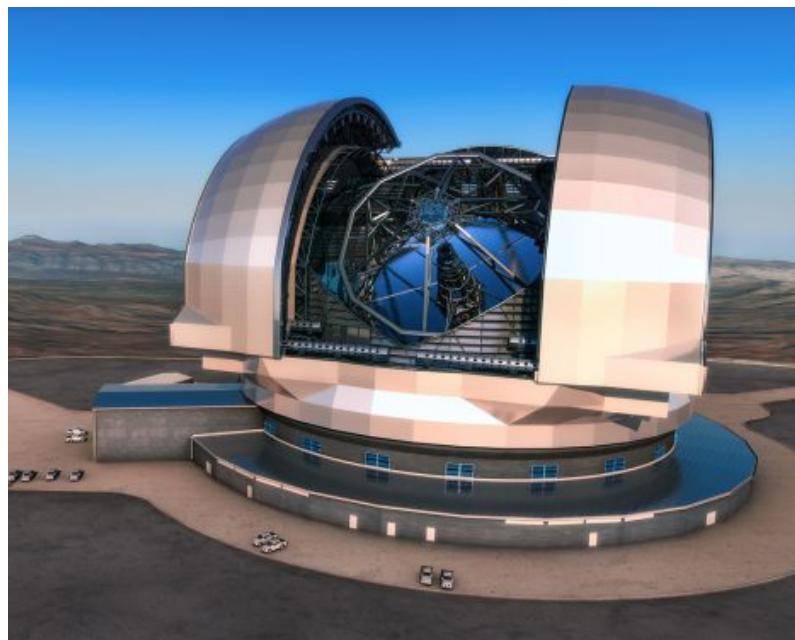


FIGURE 1.5 – Vue d'artiste de l'*Extremely Large Telescope*, qui sera terminé en 2026 à Cerro Armazones au Chili, et dont le miroir primaire fait 39 m de diamètre, avec une occultation centrale de 11 m. © ESO

tera 798 segments hexagonaux de 1,4 mètre de diamètre pour 5 centimètres d'épaisseur. Le respect de la forme parabolique du miroir complet est obtenu grâce une procédure de cophasage assurée par une optique active directement fixée sur la structure du miroir primaire.

1.2 La commande à base de modèle des optiques adaptatives

Les systèmes d'OA fonctionnent grâce à un calculateur temps réel à des cadences allant de quelques centaines de Hertz à plus de 1 kHz. Le correcteur est un algorithme intégré au calculateur temps réel et qui calcule la commande à appliquer aux actionneurs du miroir déformable. La commande à action intégrale a été utilisée sur le premier système d'OA COME-ON [Rousset *et al.*(1990)] et continue à l'être sur l'ensemble des systèmes d'OA construits depuis. C'est une commande qui se calcule de façon simple, en utilisant

peu d'informations sur le système. Les commandes à base de modèles sont basées sur des modèles d'évolution des perturbations. Le but est de prédire la turbulence grâce au modèle choisi, pour compenser autant que possible les retards inévitables présents dans le système d'OA. Une commande naturelle lorsque l'on dispose du modèle de turbulence est la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG), dont les premiers travaux ont été proposés par Paschall et Anderson avec une formulation LQG continue approximée [Paschall *et al.*(1991), Paschall et Anderson(1993)]. Ces méthodes ont une plus grande complexité calculatoire que le correcteur à action intégrale, mais elles tiennent compte de la dynamique de la perturbation.

La commande LQG est optimale au sens de la minimisation de la variance de phase résiduelle [Le Roux *et al.*(2004), Kulcsár *et al.*(2006)], et permet d'estimer et de prédire la phase turbulente dans une couche résultante ou dans le volume en utilisant un filtre de Kalman. Celui-ci est construit à partir d'*a priori* spatiaux et temporels intégrés dans une représentation d'état. La correction est ensuite appliquée à l'aide du MD, pour optimiser son effet dans une direction d'intérêt. La commande LQG permet de façon très commode de formuler et de résoudre, grâce au théorème de séparation, d'une part le problème d'estimation et d'autre part le problème de commande. La première démonstration expérimentale de ce concept de commande a été réalisée dans les laboratoires de l'ONERA, en collaboration avec le L2TI, sur le banc BOA [Petit *et al.*(2005)], et a été suivie par les premiers résultats de compensation de vibrations [Petit *et al.*(2008a)]. Les premières validations expérimentales d'une commande LQG grand champ ont ensuite été réalisées sur le banc HOMER [Costille(2009)]. Récemment, des expérimentations ciel ont montré le fort potentiel de ce type de loi de commande pour la compensation de la turbulence atmosphérique et de diverses perturbations, par exemple des vibrations mécaniques de la structure du télescope [Sivo *et al.*(2014), Sinquin *et al.*(2019), Sinquin *et al.*(2020)]. Cette stratégie d'ailleurs est implémentée pour la commande des bas ordres des instruments de détection et caractérisation d'exoplanètes SPHERE [Beuzit *et al.*(2005), Beuzit *et al.*(2008)] (modes tip-tilt) et GPI [Poyneer *et al.*(2007)] (modes tip-tilt-focus).

1.3 Démarche choisie

Pour obtenir une prédiction de la phase turbulente, le filtre de Kalman est bâti sur une représentation d'état du système, qui inclut un modèle dynamique stochastique de la perturbation et le modèle de mesure. Afin de construire des modèles susceptibles d'améliorer les performances de commande, nous avons fait le choix de prendre en compte dans la modélisation l'hypothèse de Taylor [Gendron et Léna(1996)], qui est largement adoptée en optique adaptative [Poyneer *et al.*(2007), Bharmal(2015)]. Cette hypothèse, également appelée *frozen flow*, considère que la dynamique des couches turbulentes est une translation pure, chaque couche ayant sa propre vitesse et direction de vent. La difficulté d'écrire des modèles de *frozen flow* dans une pupille, et donc d'avoir un modèle markovien pour nourrir le filtre de Kalman, a été abordée en particulier dans les travaux de [Gavel et Wiberg(2003)].

L'hypothèse de *frozen flow* a été utilisée dans plusieurs travaux. Des reconstructions en base de Fourier multicouche ont été proposées en SCAO dans [Poyneer *et al.*(2007)] pour obtenir en Fourier un modèle de translation très simple. Le modèle est rendu stable en multipliant le terme de transition de l'état par un coefficient inférieur à 1. Cepen-

dant, une transformée de Fourier des mesures doit être faite en tenant compte du support pupillaire, conduisant à un processus itératif. En optique adaptative grand champ, une base de splines et des décalages par interpolation sont proposés par [Piatrou et Roggemann(2007)] avec une version similaire en zonal [Cranneya *et al.*(2019)], et une base de Zernike [Correia *et al.*(2014)] ou zonale (points échantillonnés dans la pupille) [Correia *et al.*(2015)] utilise un modèle d'état où la matrice de transition correspond à l'estimation statique (par maximum *a posteriori*) de la phase décalée dans la direction d'intérêt. Dans les travaux de [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)], des modélisations zonales spatialement invariantes permettent d'alléger considérablement les calculs en utilisant un filtre de Kalman distribué (*Distributed Kalman Filter*). Enfin les travaux [Juvénal *et al.*(2016a), Juvénal(2017)] combinent un modèle en base de Zernike pour l'estimation multicouche de la phase sans prédition et une prédition en base zonale (LQG dit tiède).

En SCAO, la modélisation de la phase n'a pas nécessairement besoin d'être multicouche, et un modèle de phase résultante dans la pupille permet de réduire considérablement la dimension des modèles. Cette idée est déjà présente dans les travaux de [Correia *et al.*(2014), Correia *et al.*(2015)] et [Jackson *et al.*(2015)], où le modèle concerne la phase résultante uniquement dans la direction d'intérêt.

Dans ce manuscrit, nous avons pris le parti de privilégier des modélisations de phase résultante dans la pupille pour la commande LQG en utilisant l'hypothèse de *frozen flow* pour les raisons évoquées plus haut – augmenter les performances. Nous avons écarté la modélisation en Fourier pour éviter d'effectuer une transformée de Fourier des mesures à chaque itération de la boucle d'OA. Nous avons exploré plus avant les modélisations préliminaires de [Juvénal *et al.*(2016a), Juvénal(2017)] pour proposer un réglage théorique basé sur des *a priori* physiques, une modélisation qui fait le pont entre les modèles en base de Zernike comme ceux de [Sivo *et al.*(2014)] et le *frozen flow* sur une phase zonale. L'hypothèse d'invariance spatiale du *Distributed Kalman Filter* (DKF) est une candidate sérieuse que nous avons évaluée : un modèle simple pouvant potentiellement être amélioré, et une complexité calculatoire réduite. Une deuxième candidate séduisante qui a été retenue est la modélisation zonale localisée, qui a été privilégiée dans [Correia *et al.*(2015), Jackson *et al.*(2015)]. Les performances obtenues au regard de la complexité calculatoire nous ont incité à pousser plus loin cette logique et à proposer soit des modèles dont la représentation matricielle est plus creuse, soit des modèles plus complexes mais conduisant à de meilleures performances. Enfin, les performances en commande des nouvelles modélisations zonales ont été évaluées dans un contexte ELT. Pour ces très grandes dimensions (environ 4 400 actionneurs et 8 000 mesures), des modélisations originales de la dynamique turbulente en base de Karhunen-Loève sans hypothèse de *frozen flow* ont également été proposées. La structure de cette base est en effet bien adaptée aux systèmes d'OA à très grand nombre de degrés de liberté.

Les performances des régulateurs LQG basés sur nos nouvelles modélisations ont été évaluées dans trois cas d'applications : un cas VLT NAOS, un cas ELT, et un cas d'observation de satellite en orbite basse. Ces performances ont été comparées, en fonction des applications et des dimensions, au régulateur sans prise en compte des directions de vent testé avec succès sur le ciel par [Sivo *et al.*(2014)], ainsi qu'à d'autres régulateurs de la littérature comme [Juvénal *et al.*(2016a), Jackson *et al.*(2015)] ou comme [Piatrou et Roggemann(2007)] dans une version zonale.

1.4 Structure du document

Ce manuscrit est composé de 6 chapitres incluant cette introduction (chapitre 1) et les conclusions et perspectives au chapitre 6. Le chapitre 2 est consacré à la description de la turbulence atmosphérique ainsi qu'aux différentes notions sur l'imagerie en limite de diffraction. On y trouvera également la description d'une boucle d'optique adaptative, son fonctionnement, les régulateurs standard que sont l'intégrateur et la commande LQG, ainsi que les bases classiques de représentation de la phase turbulente. Le chapitre 3 développe la modélisation d'état pour la commande LQG, et introduit les modèles d'état en base de Zernike et les modélisations spatialement invariantes en base zonale. C'est l'occasion des premières évaluations de performance pour le LQG tiède et le DKF, et les résultats obtenus permettent d'orienter les développements proposés au chapitre suivant. Le chapitre 4 aborde ainsi les modélisations en base zonale, localisées dans la pupille, et leurs performances avec deux cas d'étude : un cas d'astronomie classique sur le VLT et un cas d'observation de satellite en orbite basse. Le chapitre 5 est consacré aux ELT, avec en particulier les modélisations en base de Karhunen-Loève. Une comparaison de performance pour un système de type HARMONI en mode SCAO est réalisée, incluant certains régulateurs LQG proposés dans le chapitre précédent. Le chapitre 6 conclut ce manuscrit et propose des perspectives pour les futurs développements de régulateurs LQG pour les systèmes d'OA satellitaires et pour les ELT.

Chapitre 2

Optique adaptative pour l'imagerie à travers la turbulence atmosphérique

Sommaire

2.1	Imagerie à travers la turbulence atmosphérique avec un télescope	28
2.1.1	Principe de formation d'images	28
2.1.2	Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique	29
2.2	Correction de la perturbation atmosphérique par optique adaptative	31
2.3	Critères de qualité d'image	34
2.4	Composants d'une boucle d'optique adaptative classique	35
2.4.1	Retards, chronogramme et schéma bloc	35
2.4.2	Analyseur de surface d'onde	36
2.4.3	Miroir déformable	38
2.4.4	Régulateurs standard	40
2.5	Représentation de la phase turbulente	42
2.5.1	Base zonale	43
2.5.2	Base de Zernike	43
2.5.3	Base de Fourier	48
2.5.4	Base de Karhunen-Loève	50

Ce chapitre explique les concepts et principes nécessaires à la compréhension des travaux effectués dans ce manuscrit. Pour les télescopes terrestres, les images acquises par les caméras scientifiques ont subi des dégradations dues à la turbulence lors de la traversée de l'atmosphère. Nous présentons donc dans la section 2.1 les principes généraux de la formation d'image, ainsi que la description statistique de la perturbation atmosphérique et la structure du volume turbulent. La section 2.2 explique le principe de l'optique adaptative et la section 2.3 les composants d'une boucle d'optique adaptative. Enfin la section 2.4 détaille les différentes bases de représentation de la perturbation atmosphérique et donne les statistiques turbulentes exprimées dans ces bases mathématiques.

2.1 Imagerie à travers la turbulence atmosphérique avec un télescope

2.1.1 Principe de formation d'images

La formation d'une image scientifique i au foyer d'un système optique en lumière spatialement incohérente peut être modélisée par le produit de convolution entre l'objet observé o et la réponse impulsionale h de l'instrument, qui pour une position (x, y) du plan image vaut :

$$i(x, y) = (h * o)(x, y) , \quad (2.1)$$

où $*$ représente le produit de convolution spatial 2D, qui pour deux fonctions u et v est défini dans un repère cartésien par

$$(u * v)(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha, \beta)v(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta . \quad (2.2)$$

La réponse impulsionale h est également appelée la fonction d'étalement de point (FEP), et est liée à l'amplitude complexe du champ scalaire Ψ incident dans la pupille Ω du système optique. La FEP est le module carré de l'amplitude complexe du champ électromagnétique diffracté par la pupille du système optique en imageant un objet o ponctuel et monochromatique [Goodman(2005)]. Elle est donc égale d'après la théorie de la diffraction à

$$h(x, y) = |\mathcal{F}(\Omega\Psi)|^2 \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) , \quad (2.3)$$

où λ est la longueur d'onde d'observation, \mathcal{F} est l'opérateur de la transformée de Fourier spatiale, f est la focale du télescope, et (x, y) des coordonnées dans le plan image. La pupille annulaire Ω de l'instrument est définie comme

$$\Omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{r}\| \in [D_2/2, D/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

où \mathbf{r} est un vecteur de coordonnées cartésiennes du plan pupille, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et D et D_2 sont les diamètres du miroir primaire et de l'occultation centrale du télescope, qui sera maintenant le système optique considéré. Le champ Ψ peut être décomposé comme

$$\Psi = A\Omega e^{i\phi} , \quad (2.5)$$

où ϕ est la phase incidente dans la pupille du télescope, et A est l'amplitude du champ Ψ , considéré comme étant homogène dans la pupille du télescope pour une source ponctuelle à l'infini et d'éclairement uniforme en négligeant les effets de scintillation.

Dans le cas d'un système optique parfait, on considère l'amplitude A unitaire et la phase ϕ nulle. Dans le cas d'un miroir primaire circulaire de diamètre de pupille D et sans occultation centrale, la FEP est une tache d'Airy [Airy(1835)], donnée par

$$Airy(\alpha) = \frac{\pi D^2}{4\lambda^2} \left| \frac{2J_1(\pi D\alpha/\lambda)}{\pi D\alpha/\lambda} \right|^2 , \quad (2.6)$$

où J_1 est une fonction de Bessel du 1^{er} ordre, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{x}{f} \\ \frac{y}{f} \end{pmatrix}$ et $\alpha = \|\boldsymbol{\alpha}\|$. Nous pouvons ré-écrire la convolution de l'équation (2.2) comme une multiplication dans le domaine des fréquences spatiales :

$$\tilde{i}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{h}(\boldsymbol{\nu})\tilde{o}(\boldsymbol{\nu}) , \quad (2.7)$$

où $\tilde{\cdot}$ représente l'opérateur transformée de Fourier spatiale 2D et $\tilde{h}(\boldsymbol{\nu})$ la fonction de transfert optique (FTO). La fréquence de coupure optique du télescope est

$$\nu_{tel} = \frac{D}{\lambda} . \quad (2.8)$$

La tache d'Airy située dans le plan focal image du télescope, représentée sur la figure 2.1, est une limite théorique de qualité d'image en l'absence d'aberration optique, et qui correspond à une résolution spatiale égale à l'inverse de la fréquence de coupure optique du télescope, soit

$$\alpha_{tel} = \frac{\lambda}{D} . \quad (2.9)$$

Cette résolution spatiale représente d'après le critère de Rayleigh [Roddier(1981)] l'angle théorique minimal entre deux objets séparables sur l'image scientifique.

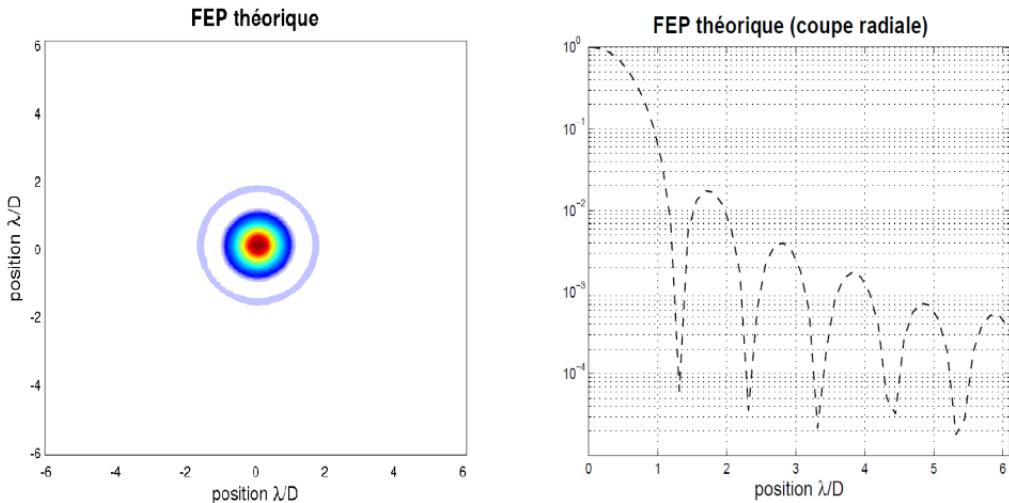


FIGURE 2.1 – Fonction d'étalement de point théorique d'un télescope avec une pupille circulaire (tache d'Airy). Gauche : représentation bidimensionnelle. Droite : coupe radiale. Figures extraites de la thèse de Carlos Correia [Correia(2010)].

2.1.2 Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique

L'atmosphère terrestre perturbe la qualité d'imagerie des télescopes au sol. Les perturbations internes de l'atmosphère créent des phénomènes turbulents qui se traduisent par des déformations du front d'onde incident évoluant dans le temps, et déformant la FEP.

Dans le cas d'une image courte pose (de l'ordre de quelques millisecondes) la FEP présentera des tavelures (*speckles* en anglais) de taille caractéristique λ/D dans une enveloppe de taille λ/r_0 où r_0 est le paramètre de Fried [Fried(1965)]. Ce paramètre r_0 peut être interprété comme le diamètre équivalent d'un télescope sans turbulence atmosphérique qui aurait la même résolution spatiale sur des images longues poses qu'un télescope de diamètre infini avec turbulence. Pour les images longue pose, l'intégration des tavelures donnera une tache image floue proche d'une gaussienne et de largeur λ/r_0 . Nous pouvons voir des images longue poses en figure 2.3. La grandeur λ/r_0 est appelé le *Seeing* et est exprimée à $0,5 \mu\text{m}$. La taille typique du paramètre de Fried est de l'ordre de la dizaine de centimètres dans le visible, ce qui explique qu'en astronomie, et surtout en particulier dans le cas des télescopes de grandes dimensions (VLT - ELT) où $D \gg r_0$, on se retrouve très rapidement limité par la turbulence atmosphérique et non pas par la diffraction.

Le mélange de différentes masses d'air à des températures hétérogènes dans le volume atmosphérique crée des mouvements de convection au sein de cellules turbulentes, qui provoquent des variations locales d'indice de réfraction. Ces fluctuations d'indice le long des trajets optiques déphasent les rayons entre eux et bossellent le front d'onde incident, initialement plan pour une source située à l'infinie. Ces déformations sont responsables de l'apparition des tavelures présentes sur les images scientifiques. La modélisation des écoulements et des phénomènes turbulents est à l'étude depuis plusieurs centaines d'années, évoqués par Leonardo da Vinci au XVI^e siècle puis par Bernoulli au XXVIII^e. La modélisation la plus générale a été proposée par Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v . \quad (2.10)$$

Dans cette équation, qui n'a toujours pas été résolue dans le cas général, ρ est la masse volumique du fluide, v représente son champ de vitesse, p le champ de pression et μ la viscosité du fluide. Au milieu du XX^e siècle, Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov propose un modèle stochastique de description de la turbulence atmosphérique en se basant sur la théorie de cascades d'énergie [Kolmogorov(1941a), Kolmogorov(1941b)]. Il la considère comme un processus isotrope et spatialement invariant. Cependant ces deux propriétés ne sont que des approximations du vrai phénomène turbulent. Théodor Von Kármán a proposé une reformulation des travaux de Kolmogorov en tenant compte d'une échelle minimale l_0 et d'une échelle maximale (appelé grande échelle) L_0 des cellules de convection, ce qui permet d'avoir un spectre turbulent qui ne diverge pas à la fréquence nulle [Von Karman(1948)]. Nous allons nous intéresser ici à la description statistique de la turbulence. La fonction de covariance spatiale de la phase turbulente ϕ est donnée par

$$C_\phi(\boldsymbol{\rho}) = E(\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})) , \quad (2.11)$$

et la fonction de structure $D_\phi(\boldsymbol{\rho})$ par

$$\begin{aligned} D_\phi(\boldsymbol{\rho}) &= E([\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})]^2) , \\ D_\phi(\boldsymbol{\rho}) &= 2(C_\phi(\mathbf{0}) - C_\phi(\boldsymbol{\rho})) . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les fonctions $C_\phi(\boldsymbol{\rho})$ et $D_\phi(\boldsymbol{\rho})$ dépendent simplement de la distance $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$ entre deux points de phase car la phase est un processus spatialement stationnaire au 2nd ordre

et isotrope. Dans le cas d'une atmosphère avec une statistique type Von Kármán, les solutions analytiques sont décrites dans [Conan(2000), Conan(2008)], et sont égales à

$$C_\phi(\rho) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \left[\left(\frac{24}{5}\right) \Gamma(6/5)\right]^{5/6} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6} \pi^{8/3}} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right), \quad (2.13)$$

$$D_\phi(\rho) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \left[\left(\frac{24}{5}\right) \Gamma(6/5)\right]^{5/6} \frac{2^{1/6} \Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}} \left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)\right]. \quad (2.14)$$

La fonction $K_{5/6}$ est une fonction de Bessel modifiée de 2^e type et d'ordre 5/6, Γ la fonction gamma d'Euler, et le paramètre de Fried r_0 est défini à la longueur d'onde λ par

$$r_0 = \left[0.42 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\cos\gamma} \int_0^{+\infty} C_n^2(h) dh\right]^{-\frac{3}{5}}, \quad (2.15)$$

où γ est l'angle zénithal du télescope, et $C_n^2(h)$ est la constante de structure à l'altitude h . La constante de structure peut être mesurée par différents instruments, comme par exemple un SCIDAR [Ochs *et al.*(1976), Avila *et al.*(1997), Avila *et al.*(1998), Klückers *et al.*(1998), Osborn *et al.*(2016)] ou MASS [Tokovinin et Kornilov(2002), Kornilov *et al.*(2003), Tokovinin *et al.*(2003)]. Elle caractérise l'intensité de la turbulence en fonction de l'altitude. Elle nous informe que la turbulence est essentiellement localisée dans une structure de couches à certaines altitudes, comme le montre la figure 2.2 pour les profils obtenus à Cerro Paranal, et également que la majeure partie de la turbulence est située dans les couches au sol.

De plus l'hypothèse de Taylor ou de *frozen flow* [Roddier(1981)], qui suppose que l'atmosphère est une superposition de couches fines en translation, est souvent vérifiée [Pioneer *et al.*(2009)]. D'autres perturbations qui affectent la qualité d'imagerie ne sont pas comprises dans ces mesures, comme le *windshake* (les vibrations de la structure du télescope sous l'effet du vent), les effets de coupole, ou d'autres encore comme par exemple les conséquences des fluctuations de température sur la structure du télescope. Ce manuscrit est centré sur la modélisation de la turbulence atmosphérique pour la commande, donc nous n'aborderons pas la modélisation de ces autres phénomènes mais il est cependant possible d'en tenir compte. La modélisation pour la commande des vibrations de structure a par exemple été abordée dans [Sivo *et al.*(2014), Sinquin *et al.*(2019)].

2.2 Correction de la perturbation atmosphérique par optique adaptative

Les télescopes terrestres sont tous affectés par les dégradations de la qualité d'imagerie liées à la présence de l'atmosphère. Les dimensions des grands télescopes actuels de classe 8-10 m et des futurs ELT de classe 30-40 m nécessitent une compensation par optique adaptative (OA) afin de ne pas perdre le bénéfice des grandes dimensions en terme de résolution des images. Initialement évoqué par Babcock en 1953 [Babcock(1953)], les premiers systèmes d'OA pour des applications civiles ont pu être réalisés en 1989 avec le

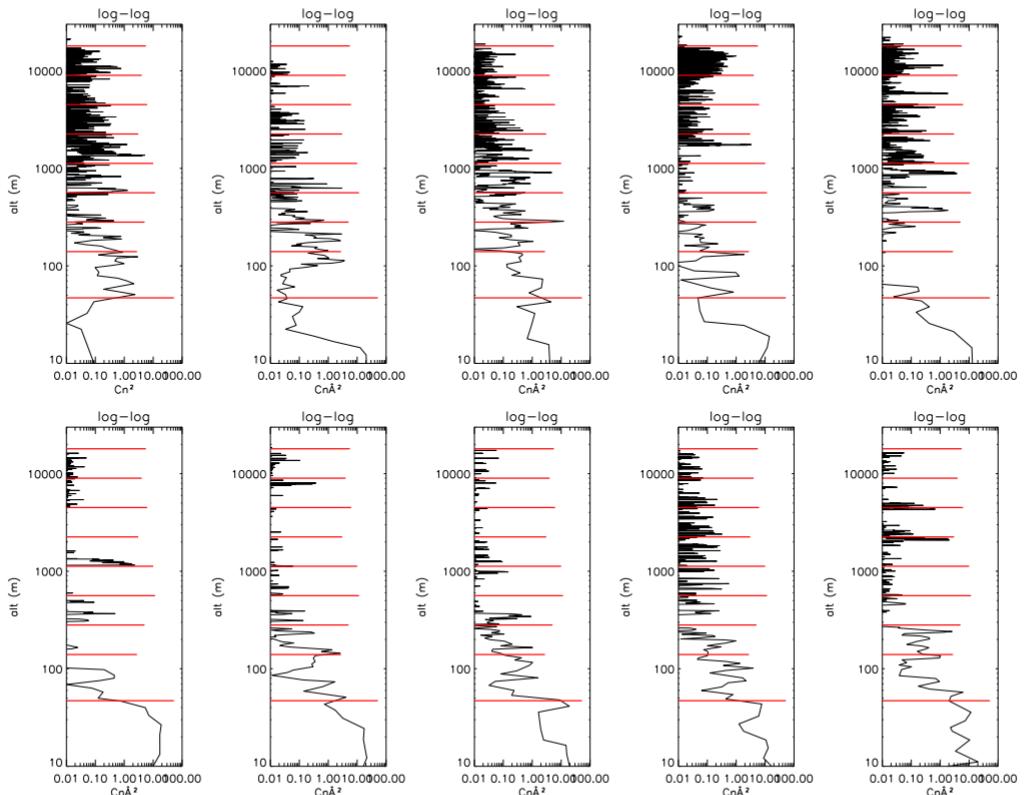


FIGURE 2.2 – Dix exemples de profils de la constante de structure C_n^2 , extraits de l'article [Fusco et Costille(2010)], et mesurés à Cerro Paranal avec des ballons sondes. En rouge sont représentées les 9 couches infiniment fines de turbulence considérées par l'ESO pour représenter la turbulence à Paranal. L'échelle des abscisses est logarithmique.

système COME-ON puis avec ses successeurs COME-ON+ en 1990 [Rousset *et al.*(1990)], ADONIS en 1994 [Beuzit *et al.*(1994)] et NAOS au VLT en 2000 [Rousset *et al.*(2000)].

L'OA permet de compenser en temps réel les déformations issues du front d'onde incident, en introduisant sur le chemin optique un modulateur de phase qui va générer, dans un cas idéal, l'opposé de ces déformations. Le front d'onde résiduel sera alors idéalement plan, et en pratique une bonne correction permet d'obtenir une qualité d'image se rapprochant de la limite de diffraction. Le modulateur de phase est en général un miroir déformable (MD). La figure 2.3 présente le schéma de principe de l'OA.

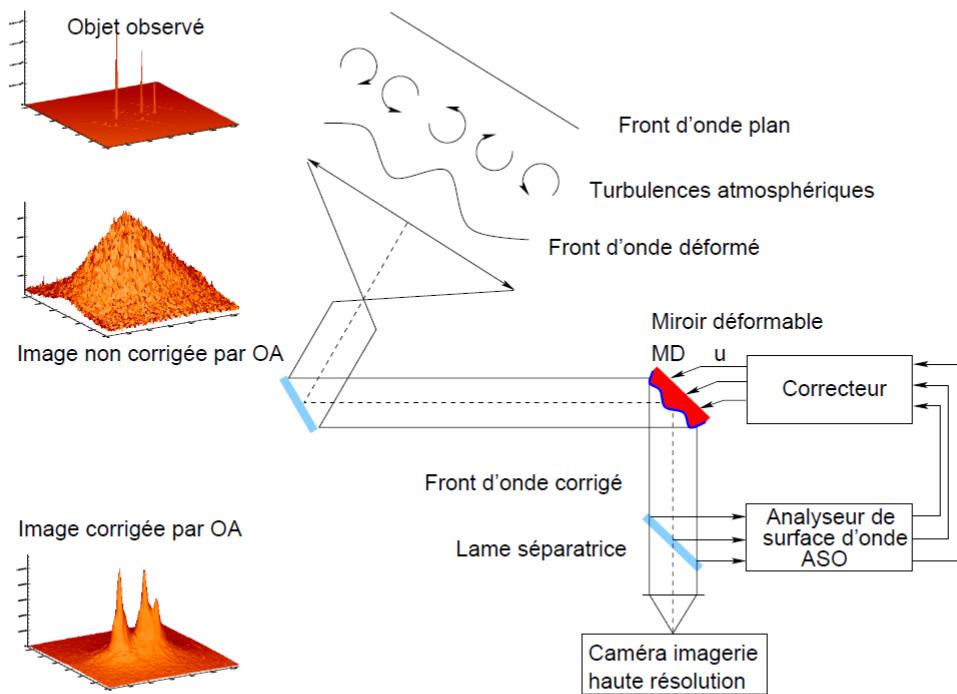


FIGURE 2.3 – A droite : principe de fonctionnement de l'optique adaptative en astronomie. A gauche : images simulées (crédit Onera).

Un analyseur de surface d'onde (ASO) produit des mesures du front d'onde utilisées par un calculateur temps réel pour calculer les commandes à appliquer aux actionneurs du (ou des) miroir(s) déformable(s) (MD). Pour réaliser l'analyse de front d'onde, une partie du flux provenant de l'étoile guide est prélevée à l'aide d'une lame séparatrice et envoyée à l'ASO. L'autre partie du flux va vers la voie d'imagerie. Les systèmes d'OA dits classiques fonctionnent généralement en boucle fermée comme illustrée figure 2.3. L'effet de la correction générée par le miroir déformable est alors visible sur la mesure qui correspond à une mesure de front d'onde résiduel. Dans le cas d'une observation grand champ, il peut y avoir plusieurs analyseurs de surface d'onde utilisant des étoiles naturelles ou des étoiles laser [Le Louarn(2000)], comme dans le cas de la LTAO (*Laser Tomography Adaptive Optics*) [Thatte *et al.*(2016)] par exemple, ou bien plusieurs miroirs déformables et analyseurs de surface d'onde comme en MCAO (*Multi Conjugated Adaptive Optics*) [Rigaut *et al.*(2014)]. Dans ces cas la direction d'analyse et la direction de correction peuvent être différentes et des calculs de dimension plus importante sont nécessaires pour la commande du miroir déformable. Dans notre étude nous nous focaliserons à un cas

SCAO (*Single Conjugated Adaptive Optics*) où la correction et l'analyse de surface d'onde sont faites dans la même direction, l'objet d'intérêt étant supposé être l'étoile guide ou un objet très proche de celle-ci (quelques secondes d'arc). La section suivante définit les critères standards de qualité d'image utilisés en optique adaptative.

2.3 Critères de qualité d'image

Il existe plusieurs critères pour caractériser la performance d'imagerie d'un système d'optique adaptative, et pour quantifier l'écart à la limite théorique de diffraction. Parmi les plus répandus nous pouvons citer la fonction de transfert de modulation du système optique, l'énergie encerclée dans un certain diamètre autour du centre optique (particulièrement adapté aux systèmes de couplage à des fibres optiques), la variance des écarts aberrants (largement utilisée pour quantifier l'importance d'aberrations résiduelles) ou encore le rapport de Strehl. Ce dernier s'est imposé comme l'indicateur de qualité d'imagerie en astronomie. Le rapport de Strehl, que nous noterons SR est défini par

$$SR = \frac{\text{FEP}(0)}{\text{FEP}_{\text{diffraction}}(0)} , \quad (2.16)$$

où $\text{FEP}(\alpha)$ désigne l'intensité de la FEP à la position angulaire α (le centre optique étant positionné en $\alpha = 0$) en présence de turbulence, et où $\text{FEP}_{\text{diffraction}}$ est la FEP du système équivalent idéal, en limite de diffraction. Le rapport de Strehl peut directement se mesurer sur les images astronomiques, et sa valeur se rapproche de 1 quand le système optique se rapproche de la limite de diffraction. La variance de phase résiduelle $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ est aussi un critère permettant de déterminer l'efficacité de la correction de l'OA [Roddier(1999)], et plusieurs travaux ont montré la possibilité de relier le rapport de Strehl et la variance de phase résiduelle [Maréchal(1948), Mahajan(1983), Fusco(2000), Rousset *et al.*(1992)], dont nous retiendrons

$$\begin{cases} E_c = e^{-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2} , \\ SR = i_{\text{halo}} + E_c , \end{cases} \quad (2.17)$$

où E_c est l'énergie cohérente, et i_{halo} l'intensité du halo lumineux au centre optique. Dans un cas où le rapport de Strehl est suffisamment important, le halo devient négligeable devant l'énergie cohérente et nous pouvons considérer l'approximation évoquée dans [Mahajan(1983)] de

$$SR = e^{-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2} . \quad (2.18)$$

On peut noter ici que la minimisation de la variance de phase résiduelle entraîne *de facto* l'augmentation du rapport de Strehl [Mahajan(1983)]. Dans le cas de nos simulations numériques, nous utiliserons (2.18) pour évaluer la performance des régulateurs de la boucle d'optique adaptative. La section suivante détaille le fonctionnement des composants de la boucle d'asservissement, et spécifie leurs modélisations pour la commande de la boucle d'optique adaptative.

2.4 Composants d'une boucle d'optique adaptative classique

Dans un premier temps nous étudierons le chronogramme d'une boucle d'OA, puis nous nous attèlerons au fonctionnement de l'analyseur de surface d'onde et à celui du miroir déformable. Nous terminerons ce paragraphe par les principes généraux des correcteurs standards en optique adaptative.

2.4.1 Retards, chronogramme et schéma bloc

La phase turbulente est un processus stochastique qui évolue de façon continue dans le temps. Cependant la commande de l'OA est appliquée de façon discrète à cause de la nature discrète du calculateur temps réel. Le chronogramme de la figure 2.4 détaille les opérations en amont de la commande appliquée à un instant nT , $\forall n \in \mathbb{N}$, où T est la période d'échantillonnage de la boucle d'OA. L'analyseur de surface d'onde intègre le flux

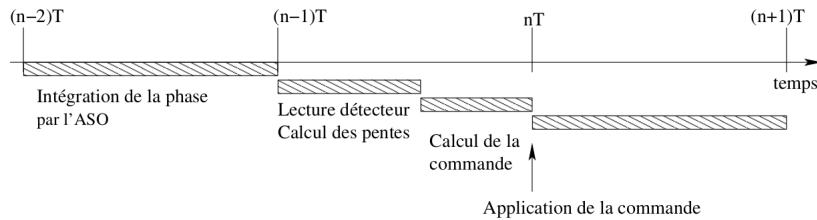


FIGURE 2.4 – Chronogramme des opérations réalisées lors de l'asservissement d'une boucle d'optique adaptative, extrait de la thèse de Gaetano Sivo [Sivo(2013)]. Le retard de boucle est ici de deux trames.

incident de manière à accumuler suffisamment de photons pour former sur sa caméra une image avec un rapport signal à bruit permettant le calcul des mesures de front d'onde. Ce temps d'intégration fixe la cadence de la boucle d'asservissement et introduit un retard pur d'une trame T . On considère généralement que le temps nécessaire au calcul des pentes et des commandes du miroir déformable correspond également à un retard pur additionnel d'une trame T , comme expliqué dans [Hardy(1998)]. Ce dernier retard inclut le retard lié à l'utilisation d'un bloqueur d'ordre 0 de période T . Le retard total dans la boucle est donc de 2 trames. La commande appliquée à l'instant discret k est notée u_k , et est définie par

$$u_k \triangleq u(kT), \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Dans le cas général d'une boucle d'OA, le retard peut être fractionnaire. Il est possible de modéliser ces retards fractionnaires dans le calcul de la commande avec un régulateur LQG (voir par exemple [Poyneer et Véran(2008), Kulcsár et al.(2017)]) mais pour des raisons de simplicité, on se limitera ici au cas où le retard est de deux trames dans la boucle. Cela ne remet pas en cause les développements de ce manuscrit qui pourront être facilement adaptés au cas fractionnaire comme expliqué dans [Kulcsár et al.(2017)]. Avec ces informations nous pouvons donner le schéma bloc à temps discret en figure 2.5 de la boucle d'optique adaptative. Dans cette représentation, toutes les variables discrètes correspondent à des moyennes temporelles sur une trame. Par exemple pour la phase

turbulente, la phase moyenne sur un intervalle $[(k-1)T, kT]$ est notée

$$\phi_k \triangleq \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} \phi(t) dt . \quad (2.20)$$

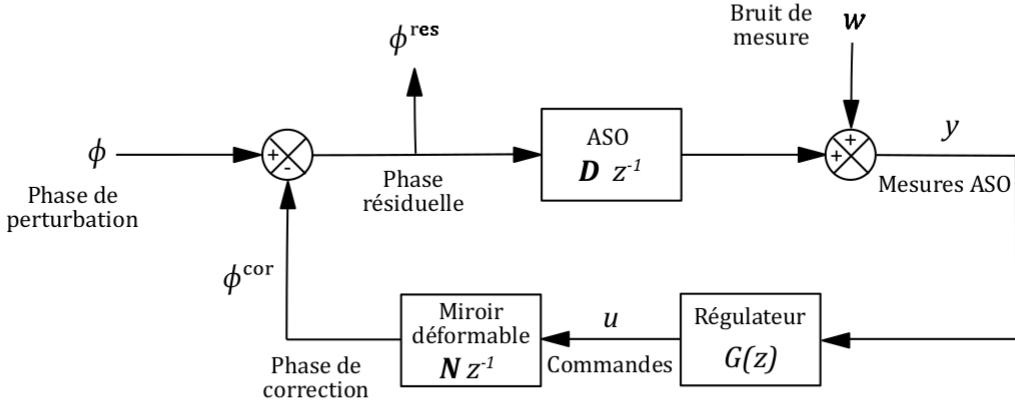


FIGURE 2.5 – Schéma bloc d'une boucle d'optique adaptative classique, extrait de la thèse de Rémy Juvénal [Juvénal(2017)]. D et N représentent des opérateurs linéaires qui seront définis ci-après.

2.4.2 Analyseur de surface d'onde

L'analyseur de surface d'onde (ASO) permet de mesurer des déformations du front d'onde turbulent, en utilisant une source lumineuse généralement ponctuelle et située à l'infini, appelée étoile guide. Différents types d'ASO existent, répartis en deux classes :

- les ASO de type « plan focal » qui utilisent plusieurs images obtenues au plan focal, comme la méthode de la diversité de phase [Gonsalves(1982)]. Cette méthode non linéaire utilise plusieurs images soumises aux mêmes aberrations optiques, mais séparées par l'introduction d'une aberration connue, par exemple une défocalisation bien définie.
- les ASO de type « plan pupille ». Le plus couramment utilisé est le Shack-Hartmann (SH) [Shack et Platt(1971)], qui offre une grande simplicité de mise en œuvre. Il est achromatique et présente donc une bande spectrale d'utilisation très large et une bonne sensibilité. L'ASO SH équipe la grande majorité des systèmes d'OA depuis COME-ON [Rousset et al.(1990)], jusqu'aux systèmes actuels comme NAOS [Rousset et al.(2000)] et SPHERE [Beuzit et al.(2008)] au VLT (*Very Large Telescope*), ou bien les futurs systèmes d'OA de l'ELT comme MICADO-MAORY dans son mode MCAO [Clénet et al.(2018)], ou bien l'instrument HARMONI dans son mode de fonctionnement LTAO [Neichel et al.(2016)] par exemple. Nous expliquerons son fonctionnement dans le prochain paragraphe. L'analyseur pyramide [Ragazzoni(1996), Esposito et al.(2005)] généralisant le principe du couteau de Foucault [Foucault(1859)] a une plus grande sensibilité, mais une plage de linéarité

plus faible que le Shack-Hartmann. Il permet donc d'obtenir une mesure de front d'onde pour des magnitudes d'étoiles guides plus faibles. Cet analyseur est déjà utilisé au LBT (*Large Binocular Telescope*) [Esposito *et al.*(2012)] et sera mis en œuvre pour les futurs systèmes d'OA de l'ELT, comme METIS [Stuik *et al.*(2016)], ou encore MICADO-MAORY [Clénet *et al.*(2016), Diolaiti *et al.*(2016)] et HARMONI [Neichel *et al.*(2016)] dans leur mode SCAO. Il existe également d'autres types d'ASO comme l'analyseur de courbure [Roddier(1988)] et l'analyseur à courbure non linéaire [Guyon *et al.*(2010)] utilisant une reconstruction de front d'onde de type *phase retrieval* [Gonsalves(1982)]. Cependant ces derniers sont bien moins répandus que l'ASO SH ou que l'ASO pyramide.

L'analyseur de surface d'onde Shack-Hartmann

L'ASO Shack-Hartmann échantillonne spatialement le front d'onde à l'aide d'une matrice de microlentilles conjuguée à la pupille du télescope. Dans ce manuscrit nous supposerons que les microlentilles sont disposées sur une grille à géométrie cartésienne (grille carrée). L'étoile guide, qui peut être une étoile naturelle ou une étoile laser, est imagée au foyer de chaque microlentille sur un détecteur. Les sources peuvent être cohérentes ou incohérentes en lumière blanche, ponctuelles (étoile naturelle) ou étendues (étoile laser). Le déplacement des imagettes sur la caméra par rapport à la position de référence qui serait celle d'un front d'onde non perturbé permet d'avoir une mesure de la dérivée locale du front d'onde en moyenne sur chaque sous-pupille. Différents algorithmes permettent d'estimer la position des imagettes, [Thomas *et al.*(2006)] par exemple. Les méthodes les plus utilisées sont le barycentre des imagettes ou pour les objets étendus l'intercorrélation entre les imagettes.

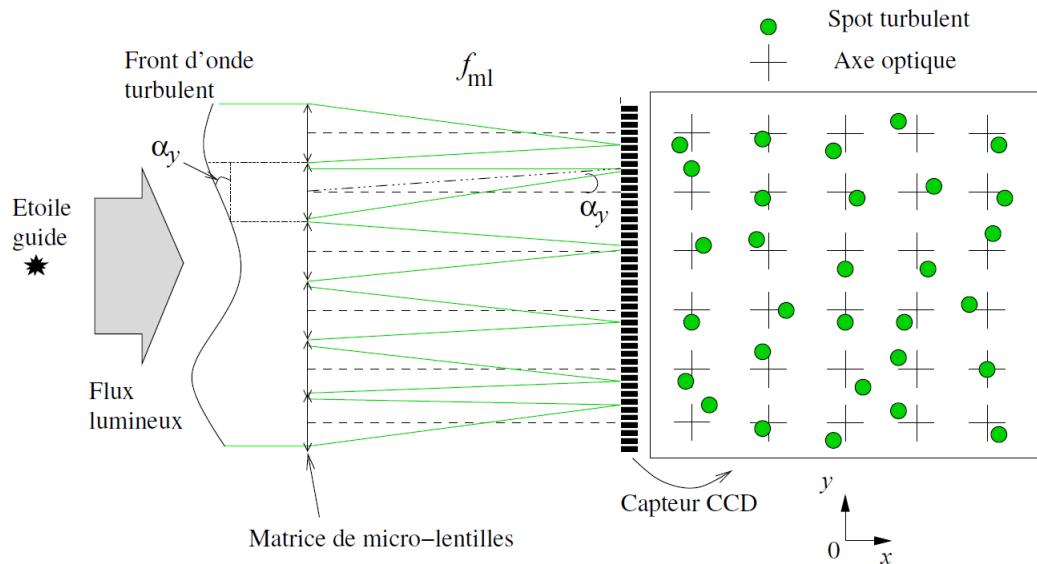


FIGURE 2.6 – Principe de l'analyseur de surface d'onde Shack-Hartmann. La focale de la microlentille est f_{ml} et α_y est l'angle formé entre le front d'onde incident et l'axe (0y). Schéma extrait de la thèse de Gaetano Sivo [Sivo(2013)]

La figure 2.6 illustre les déplacements des imagettes pour un front d'onde incident perturbé. La position (Δ_x, Δ_y) par rapport au centre optique de la microlentille et dans le plan focal des microlentilles est liée à la pente locale du front d'onde par

$$\begin{cases} \tan(\alpha_x) = \frac{\Delta_x}{f_{\text{ml}}} \\ \tan(\alpha_y) = \frac{\Delta_y}{f_{\text{ml}}} \end{cases} . \quad (2.21)$$

Sous l'hypothèse des petits angles, $\tan(\alpha) = \alpha$, et comme α_x est la pente moyenne sur l'axe $(0, x)$, elle est définie par

$$\alpha_x \triangleq \frac{\lambda}{2\pi S} \iint_S \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx dy . \quad (2.22)$$

De même

$$\alpha_y \triangleq \frac{\lambda}{2\pi S} \iint_S \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} dx dy , \quad (2.23)$$

où S est la surface de la microlentille. Les effets de scintillation sont ici négligés. L'ensemble des mesures y qui, si elles n'étaient pas bruitées, contiendrait les mesures α_x, α_y de chaque microlentille, nous renseigne sur la forme globale du front d'onde dans la pupille. La validité des microlentilles pour la participation à la mesure de front d'onde est fixée par un seuil sur l'éclairage de la surface de la microlentille, appelé ratio d'illumination, et souvent fixé à 50%. Les microlentilles en bord de pupille sont souvent partiellement occultées par la pupille et donc moins éclairées. Le seuil permet de ne pas tenir compte de certaines mesures qui seraient trop bruitées à cause d'une faible illumination. Finalement le vecteur y de mesures de pentes pour l'ASO Shack-Hartmann, peut s'écrire

$$y = D\phi^{\text{res}} + w , \quad (2.24)$$

où $\phi^{\text{res}} = \phi - \phi^{\text{cor}}$ est le vecteur contenant l'information de phase résiduelle (boucle fermée), et D la matrice ASO qui contient pour chaque ligne les calculs de gradient d'une microlentille. Le bruit de mesure w est principalement composé du bruit de photon, du bruit de lecture de la caméra de l'ASO [Rousset(1999)] qui dépend du détecteur, et de l'algorithme d'estimation de la position des imagettes. Le bruit de mesure $\{w\}$ est supposé blanc et gaussien, et dans le cas où il n'est pas corrélé entre les sous-pupilles et entre les directions x et y , sa matrice de covariance Σ_w est diagonale. Le retard d'une trame dû au temps d'intégration de la caméra de l'ASO (voir chronogramme figure 2.4) entre la phase résiduelle ϕ^{res} et la mesure de pentes du front d'onde y nous permet de compléter l'équation (2.24) en faisant apparaître les occurrences temporelles pour finalement obtenir :

$$y_k = D\phi_{k-1}^{\text{res}} + w_k . \quad (2.25)$$

2.4.3 Miroir déformable

Le modulateur de phase d'une boucle adaptative classique est un miroir déformable (MD) situé dans un plan conjugué de la pupille du télescope et donc également de l'ASO. De nombreuses technologies de MD existent et sont décrites dans [Madec(2012)], mais nous considérerons, pour la modélisation, des miroirs à géométrie cartésienne, et dont la

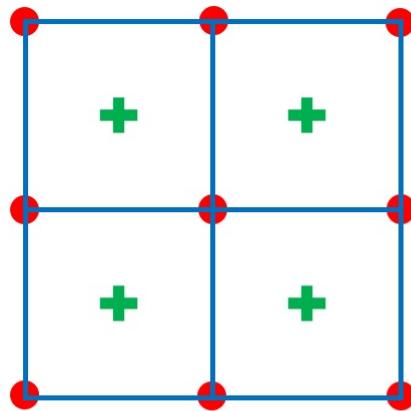


FIGURE 2.7 – Geométrie de Fried. En considérant l'ASO et le MD dans un même plan, les actionneurs sont positionnés au coin des microlentilles. Les croix vertes indiquent les positions des mesures de front d'onde, les points rouges les positions des actionneurs et les traits bleus pleins délimitent les bords des 4 microlentilles représentées.

position des actionneurs par rapport aux microlentilles est dite de Fried [Fried(1977)]. Cette géométrie, illustrée en figure 2.7, consiste à positionner les actionneurs aux coins des microlentilles (dans des plans conjugués). Un MD possède des caractéristiques spatiales comme la déformation de sa surface sous l'effet d'un actionneur caractérisée par sa fonction d'influence et son coefficient de couplage inter-actionneurs. La figure 2.8 représente plusieurs fonctions d'influence gaussiennes avec différents coefficients de couplage inter-actionneur. Les caractéristiques temporelles d'un MD sont sa réponse indicielle, son

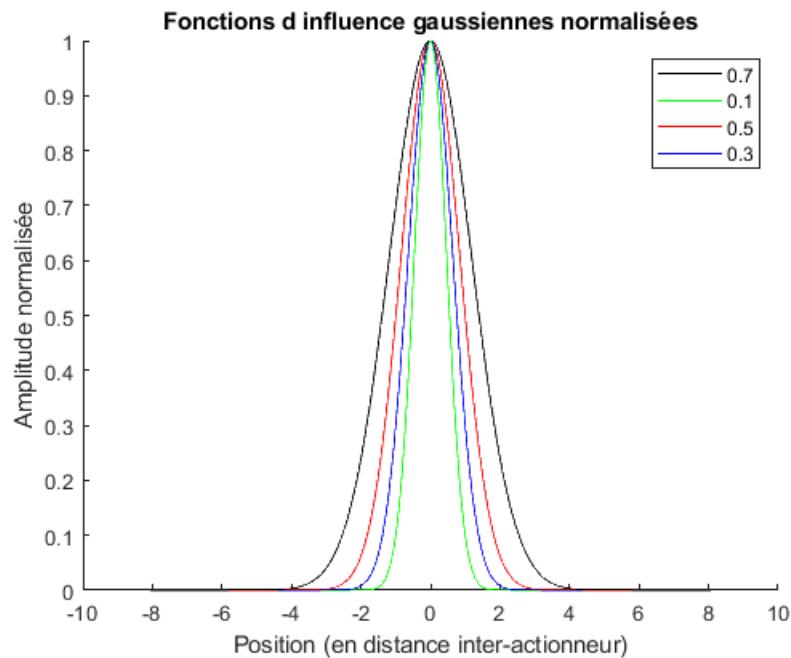


FIGURE 2.8 – Fonctions d'influence gaussiennes d'un miroir déformable à géométrie cartésienne, avec des valeurs du coefficients de couplage allant de 0,1 à 0,7. L'axe des abscisses est gradué en distance inter-actionneurs.

temps de réponse, son cycle hystérésis. Nous considérerons (hypothèse raisonnable) que le miroir

- n'aura pas d'hystérésis, car supposé négligeable (voir [Ma *et al.*(2018)])
- aura une réponse linéaire (voir [Petit *et al.*(2008b)]) et instantanée
- n'aura pas de dynamique. Elle peut cependant être traitée et compensée dans le calcul de la commande, en utilisant un formalisme LQG dont les modèles sont détaillés dans [Correia *et al.*(2008), Correia *et al.*(2010)]. Ce n'est donc pas une limitation pour l'évaluation de performance de l'optique adaptative.

L'application de commandes u aux bornes du MD génère une phase de correction qui, en régime linéaire, est la somme des contributions des réponses spatiales continues de chaque actionneur. La phase continue ϕ^{cor} générée par le miroir déformable se formalise donc comme

$$\phi^{\text{cor}} = \sum_{i=1}^{n_u} f_i u_i , \quad (2.26)$$

où u_i et f_i sont la commande et la fonction d'influence du i -ème actionneur, $\forall i \in \llbracket 1, n_u \rrbracket$ où n_u est le nombre d'actionneurs contrôlés. Nous réécrivons l'équation (2.26) en utilisant avec la relation linéaire suivante

$$\phi^{\text{cor}} = N u , \quad (2.27)$$

où N est la matrice d'influence du MD, dont chaque colonne représentant la fonction d'influence d'un actionneur exprimée dans la base de représentation de la phase turbulente. Nous avons vu que la génération de la phase de correction par le miroir déformable est faite avec une trame de retard par rapport à l'application de la commande (voir chronogramme figure 2.4), nous pouvons donc compléter l'équation (2.27) par :

$$\phi_k^{\text{cor}} = N u_{k-1} . \quad (2.28)$$

2.4.4 Régulateurs standard

2.4.4.1 Le régulateur à action intégrale

Le régulateur le plus largement utilisé aujourd'hui et depuis la 1^{ère} mise en œuvre d'un système d'OA est le correcteur à action intégrale (également appelé intégrateur) parce qu'il bénéficie en particulier d'une grande simplicité d'implémentation et d'une bonne rapidité d'exécution. La relation entre la commande calculée par le correcteur temps réel et les mesures issues de l'ASO peut s'exprimer à partir des équations (2.25) et (2.28), en négligeant le bruit de mesure, par :

$$y = M_{\text{int}} u , \quad (2.29)$$

où $M_{\text{int}} = DN$ est la matrice d'interaction du système. La mise à jour de la commande u est réalisée à partir de l'inversion de l'équation (2.29), mais comme M_{int} n'est pas inversible, la solution de cette inversion est la matrice de commande M_{com} obtenu par l'inverse généralisée de M_{int} :

$$M_{\text{com}} \triangleq M_{\text{int}}^\dagger = (M_{\text{int}}^T M_{\text{int}})^{-1} M_{\text{int}}^T , \quad (2.30)$$

En pratique la matrice $M_{\text{int}}^T M_{\text{int}}$ n'est pas bien conditionnée, donc nous effectuons une décomposition en valeur singulière (SVD) tronquée de cette matrice, où les valeurs singulières trop faibles sont mise à zéro lors de l'inversion. Finalement l'équation de récurrence de l'action intégrale est

$$u_k = u_{k-1} + g M_{\text{com}} y_k , \quad (2.31)$$

où $g > 0$ est un gain scalaire permettant de régler la performance de l'asservissement. Les conditions de stabilité imposent $g < 1$. Le vecteur y_k est la mesure disponible pour le calcul de la commande u_k .

2.4.4.2 Le régulateur Linéaire Quadratique Gaussien

Dans le contexte de l'optique adaptative, la commande optimale minimise la variance de phase résiduelle, et donc maximise le rapport de Strehl (2.18). Le critère de commande peut s'écrire sous forme d'un critère quadratique à temps discret [Kulcsár *et al.*(2006), Kulcsár *et al.*(2012b)] :

$$J_k^d(u_k) \triangleq \mathbb{E}(\|\phi_k^{\text{res}}\|^2 | \mathcal{I}_k) \triangleq \text{trace}(\text{Var}(\phi_k^{\text{res}} | \mathcal{I}_k)) , \quad (2.32)$$

où $\mathcal{I}_k = \{y_0, \dots, y_k, u_0, \dots, u_{k-1}\}$ représente l'information disponible à l'instant k et contenant les mesures jusqu'à l'itération k et les commandes jusqu'à l'itération $k-1$. Sous l'hypothèse irréaliste d'«information complète» (ic), où toutes les trajectoires de phase $\{\phi_n\}, \forall n \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$, sont supposées connues, la commande optimale u_k^{ic} est

$$u_k^{\text{ic}} = \arg \min_{u_k} \left\{ \|\phi_k - \phi_k^{\text{cor}}\|^2 \right\} = \arg \min_{u_k} \left\{ \|\phi_k - N u_{k-1}\|^2 \right\} . \quad (2.33)$$

La solution est la projection orthogonale de la phase turbulente future sur l'espace des commandes du miroir déformable :

$$u_k^{\text{ic}} = P \phi_{k+1} . \quad (2.34)$$

La matrice P est le projecteur sur l'espace des actionneurs. C'est l'inverse généralisée de la matrice d'influence N :

$$P \triangleq N^\dagger = (N^T N)^{-1} N^T . \quad (2.35)$$

Sous l'hypothèse réaliste d'information incomplète, où la phase turbulente n'est pas connue, le principe de séparation stochastique [Anderson et Moore(1990)] permet de résoudre le problème de minimisation du critère (2.32) en remplaçant dans (2.34) ϕ_{k+1} par la pré-diction $\hat{\phi}_{k+1|k}$ optimale au sens de la variance minimale de l'erreur de pré-diction. La pré-diction $\hat{\phi}_{k+1|k}$ est l'espérance conditionnelle de ϕ_{k+1} sachant \mathcal{I}_k :

$$\hat{\phi}_{k+1|k} = \mathbb{E}(\phi_{k+1} | \mathcal{I}_k) . \quad (2.36)$$

La commande optimale s'écrit donc simplement

$$u_k^{\text{opt}} = P \hat{\phi}_{k+1|k} . \quad (2.37)$$

Cette commande u_k^{opt} , optimale au sens de la variance minimale de phase résiduelle, peut sous certaines hypothèses se calculer avec un régulateur Linéaire Quadratique et Gaussien

(LQG) construit sur une représentation d'état de la boucle d'optique adaptative. Le critère (2.32) étant quadratique, il faut faire l'hypothèse que les modèles des composants de la boucle d'asservissement soient linéaires. On considère généralement que les systèmes d'OA fonctionnent en régime linéaire, voir par exemple [Petit(2006)]. Il faut également faire l'hypothèse que l'on dispose d'un modèle d'état linéaire stochastique avec des bruits gaussiens pour représenter le processus turbulent. La prédiction $\hat{\phi}_{k+1|k}$ est alors obtenue par un filtre de Kalman. Le filtre de Kalman s'appuie sur une représentation d'état linéaire de la boucle d'OA décrite par exemple par le système d'équation

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + \Gamma v_k , \\ \phi_k = C_1 X_k , \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} y_k = CX_k + w_k - M_{\text{int}} u_{k-2} , \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} y_k = CX_k + w_k - M_{\text{int}} u_{k-2} , \end{cases} \quad (2.40)$$

où A est la matrice d'état contenant les paramètres du modèle dynamique de la turbulence atmosphérique, C_1 est la matrice d'extraction de la phase turbulente ϕ_k à partir du vecteur d'état X_k , et C est la matrice d'observation représentant le comportement de l'ASO. Pour un exposé général sur la représentation d'état pour la commande, voir par exemple [De Larminat(2009)], et pour une application à l'optique adaptative voir par exemple [Kulcsár *et al.*(2012b)]. Le produit matriciel $M_{\text{int}} u_{k-2}$ est l'effet de la commande sur la mesure en boucle fermée y_k . Le bruit d'état $\{v\}$ et le bruit de mesure $\{w\}$ sont des bruits blancs gaussiens mutuellement indépendants, de matrices de covariance Σ_v et Σ_w supposées connues. La variable Γ permet d'avoir une dimension de vecteur de bruit d'état Γv_k cohérente avec celle du vecteur d'état X_k . Le filtre de Kalman minimise la variance de l'erreur de prédiction $\phi_{k+1} - \hat{\phi}_{k+1|k}$ où $\hat{\phi}_{k+1|k} = C_1 \hat{X}_{k+1|k}$. La prédiction du vecteur d'état $\hat{X}_{k+1|k} = \mathbb{E}(X_{k+1}|\mathcal{I}_k)$ est calculée par la forme prédiction du filtre de Kalman asymptotique

$$\hat{X}_{k+1|k} = (A - L_\infty C) \hat{X}_{k|k-1} + L_\infty (y_k + M_{\text{int}} u_{k-2}) , \quad (2.41)$$

et le gain asymptotique L_∞ est obtenu par

$$L_\infty = A \Sigma_\infty C^T (C \Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1} \quad (2.42)$$

et dépend de la matrice de covariance d'erreur d'estimation asymptotique Σ_∞ . Cette matrice se calcule en résolvant une équation de Riccati algébrique discrète [Kucera(1991)] :

$$\Sigma_\infty = A \Sigma_\infty A^T + \Gamma \Sigma_v \Gamma^T - A \Sigma_\infty C^T (C \Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1} C \Sigma_\infty A^T . \quad (2.43)$$

Nous utiliserons pour résoudre cette équation l'algorithme de doublage [Lainiotis *et al.*(1994), Chiang *et al.*(2010)] qui a fait preuve sur l'application à l'OA [Sivo *et al.*(2014), Sinquin *et al.*(2019), Sinquin *et al.*(2020)] d'une excellente stabilité numérique associée à une convergence rapide. Des régulateurs LQG sont utilisés sur des systèmes opérationnels d'instruments de détection d'exo-planètes : SPHERE avec la commande de deux modes de basculement [Petit *et al.*(2008c), Petit *et al.*(2008d)], et GPI pour la commande de trois modes [Poyneer *et al.*(2007)].

2.5 Représentation de la phase turbulente

Afin d'établir des modèles d'évolution temporelle de la phase turbulente, nous devons choisir une base de représentation. Les choix sont multiples mais nous allons aborder ici

les bases couramment utilisées en OA, que sont la base zonale et les bases modales de Zernike, de Fourier et de Karhunen-Loève.

2.5.1 Base zonale

La phase turbulente exprimée dans une base zonale est un échantillonnage spatial de celle-ci dans le plan de la pupille du télescope. L'échantillonnage est un paramètre de la base, et la résolution spatiale de la grille d'échantillonnage sera un paramètre déterminant dans la performance de prédiction des filtres de Kalman construits sur des modèles en base zonale. La figure 2.9 illustre un écran turbulent pour quatre échantillonnages différents.

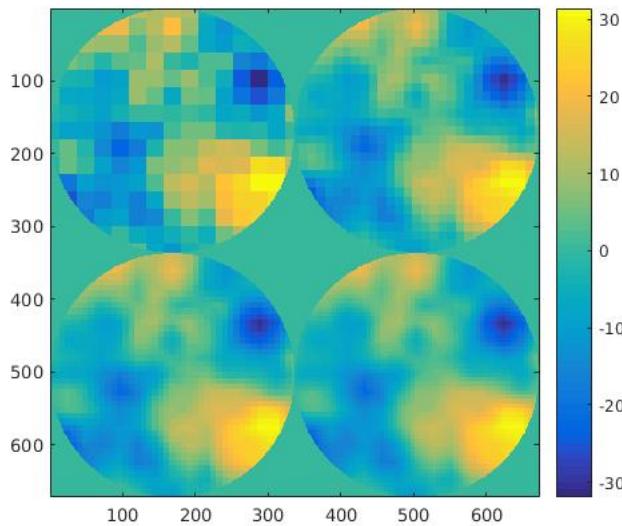


FIGURE 2.9 – Écrans de phase turbulente dans la pupille, ici sans occultation centrale. Chaque échantillon de phase est au centre de chaque pixel. Quatre échantillonnages sont illustrés pour une largeur d'écran de 8 m : 15 points (haut-gauche), 57 points (haut-droite), 127 points (bas-gauche) et 225 points (bas-droite), exprimés linéairement.

Les statistiques de la phase turbulente exprimées dans cette base correspondent à un échantillonnage spatial de la covariance spatiale (2.13) pour les valeurs $\rho = nd_{\text{pix}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et d_{pix} la taille d'un pixel (distance inter-échantillon). La matrice de covariance spatiale

$$\Sigma_{\phi} = \mathbb{E}(\phi\phi^T) . \quad (2.44)$$

est représentée en figure 2.10 pour une statistique type Von Kármán (2.13), et pour un vecteur de phase ϕ formé uniquement des points contenus dans la pupille circulaire du télescope. Les valeurs ne sont pas identiques sur chaque sous-diagonale, ce qui aurait été le cas pour une pupille carrée.

2.5.2 Base de Zernike

La base modale de Zernike est construite sur une pupille circulaire et a la particularité d'avoir les premiers modes qui correspondent aux aberrations optiques classiques,

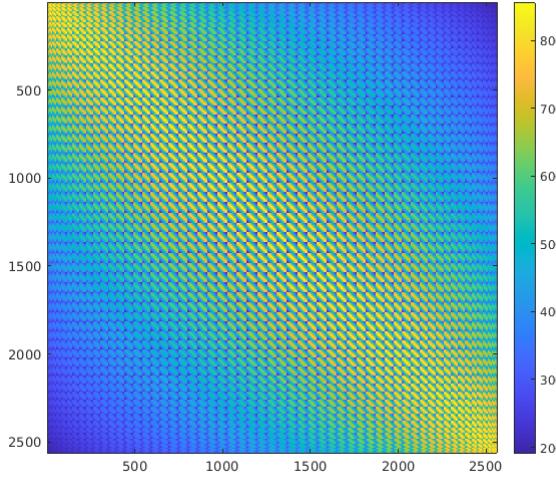


FIGURE 2.10 – Matrice de covariance de la turbulence atmosphérique pour une statistique type Von Kármán (voir equation 2.13), avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et une grande échelle L_0 de 25 m. Les points de phase pris en ordre lexicographique, ont ici pour support la pupille circulaire du télescope de 8 m de diamètre. L'échantillonnage de la pupille est de 57 points linéaire, et 2 561 points sont contenus dans la pupille du télescope. La dimension de la matrice est donc de 2 561 x 2 561.

représentées en figure 2.11. Cette base est orthonormée et a le grand avantage d'avoir une expression analytique. De plus l'énergie turbulente est majoritairement concentrée sur les premiers modes, ce qui permet d'obtenir des dimensions de vecteurs d'état réduites par rapport à une base zonale. Les polynômes de Zernike sont définis en coordonnées polaires $\forall r \in [0, 1]$ et $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ par :

$$Z_j(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\cos(m\theta) & \text{pour } m \neq 0 \text{ et } j \text{ pair ,} \\ \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\sin(m\theta) & \text{pour } m \neq 0 \text{ et } j \text{ impair ,} \\ \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2} & \text{pour } m = 0 , \end{cases} \quad (2.45)$$

où n est l'ordre radial et m l'ordre azimutal du j -ème polynôme de Zernike, où j , n , m sont définis par les conventions de Noll [Noll(1976)]. La fonction R_n^m est définie par :

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{n-m+2} \frac{(-1)^k(n-k)!}{k!(\frac{n+m}{2}-k)!(\frac{n+m}{2}+k)!} r^{n-2k} . \quad (2.46)$$

L'indexation de j , n et m est illustrée en figure 2.11 pour les 21 premiers modes. Comme pour toute base modale, la phase turbulente ϕ se décompose sous la forme

$$\phi(r_1, \theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j Z_j\left(\frac{2r_1}{D}, \theta\right) , \quad (2.47)$$

où $r_1 \in [0, D/2]$ et a_j est le coefficient du j -ème polynôme de Zernike Z_j de l'équation (2.45). Pour un nombre fini de modes $n_{\text{modes}} \in \mathbb{N}$, le vecteur de phase exprimé dans la

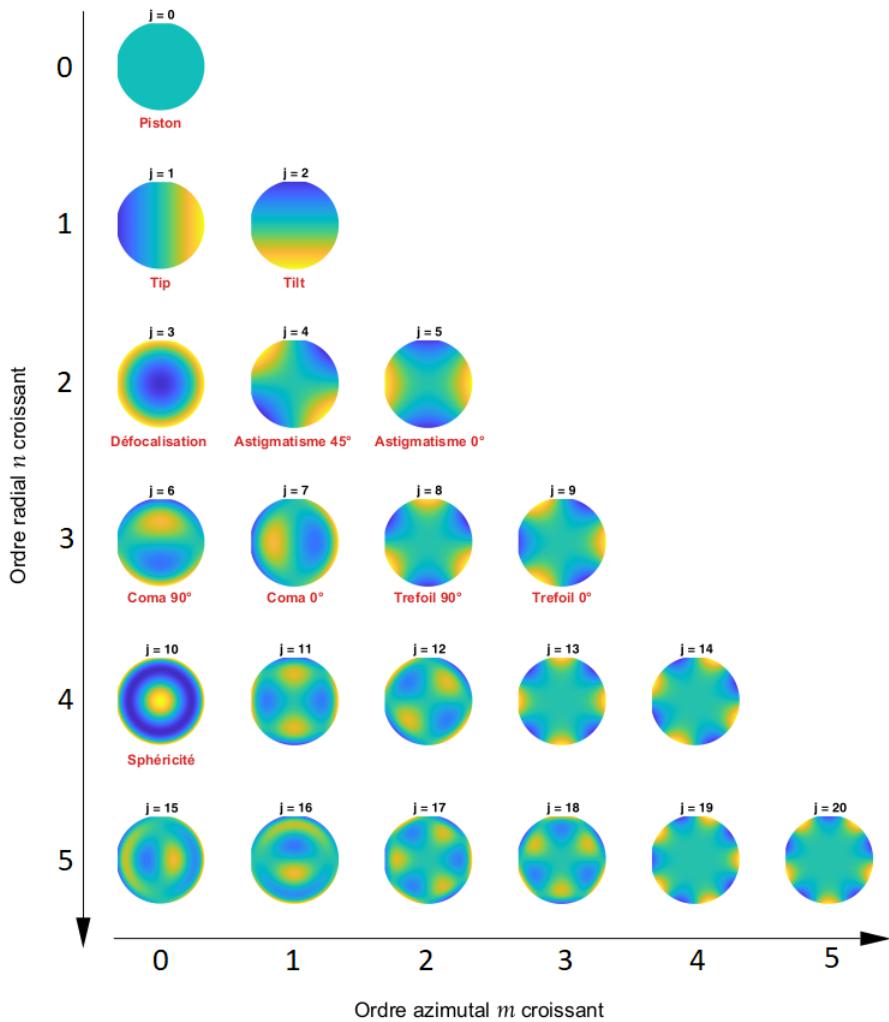


FIGURE 2.11 – 21 premiers polynômes de Zernike et aberrations optiques associées (en rouge). Figure extraite de la thèse de Rémy Juvénal [[Juvénal\(2017\)](#)].

base de Zernike sera de la forme

$$\phi^{\text{Zer}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_{\text{modes}}} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

La covariance entre deux coefficients de Zernike $C_{ij} = \text{E}(a_i a_j)$ définie dans [[Takato et Yamaguchi\(1995\)](#)] est calculée analytiquement pour une atmosphère type Von Kármán. Elle a été reformulée plus simplement dans [[Conan\(2000\)](#), [Conan\(2008\)](#)], dont l'expression

pour deux modes i et j , d'ordres radiaux et azimuthaux (n_i, m_i) et (n_j, m_j) est

$$\begin{aligned}
 C_{ij} = & \frac{2\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \sqrt{(n_i + 1)(n_j + 1)} (-1)^{(n_i + n_j - m_i - m_j)/2} \delta_{m_i m_j} \\
 & \times \left(\Gamma \left[\begin{matrix} \frac{3+n_i+n_j}{2} & 2 + \frac{n_i+n_j}{2} & 1 + \frac{n_i+n_j}{2} & \frac{5}{6} - \frac{n_i+n_j}{2} \\ 3 + n_i + n_j & 2 + n_i & 2 + n_j & \end{matrix} \right] \times (\pi \frac{D}{L_0})^{n_i+n_j-5/3} \right. \\
 & \times {}_3F_4 \left[\begin{matrix} \frac{3+n_i+n_j}{2} & 2 + \frac{n_i+n_j}{2} & 1 + \frac{n_i+n_j}{2} & |(\pi \frac{D}{L_0})^2| \\ 3 + n_i + n_j & 2 + n_i & 2 + n_j & \frac{1}{6} + \frac{n_i+n_j}{2} \end{matrix} \right] \\
 & + \Gamma \left[\begin{matrix} \frac{n_i+n_j}{2} - \frac{5}{6} & \frac{7}{3} & \frac{17}{6} & \frac{11}{6} \\ \frac{n_i+n_j}{2} + \frac{23}{6} & \frac{n_i-n_j}{2} + \frac{17}{6} & \frac{n_j-n_i}{2} + \frac{17}{6} & \end{matrix} \right] \\
 & \times {}_3F_4 \left[\begin{matrix} \frac{7}{3} & \frac{17}{6} & \frac{11}{6} & |(\pi \frac{D}{L_0})^2| \\ \frac{n_i+n_j}{2} + \frac{23}{6} & \frac{n_i-n_j}{2} + \frac{17}{6} & \frac{n_j-n_i}{2} + \frac{17}{6} & \frac{11}{6} - \frac{n_i+n_j}{2} \end{matrix} \right] \right) \\
 & \text{si } |i - j| \text{ est pair ou } m_i = m_j = 0, \\
 & = 0 \text{ si } |i - j| \text{ est impair.}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Cette expression complexe utilise les fonctions définies, entre autres, dans [Takato et Yamaguchi(1995)] :

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a_1 & \dots & a_p \\ b_1 & \dots & b_q \end{matrix} \right] = \Gamma \left[\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \right] = \frac{\prod_{n=1}^p \Gamma(a_n)}{\prod_{m=1}^q \Gamma(b_m)}. \tag{2.50}$$

On peut voir dans (2.49) que la covariance de deux modes de Zernike est la somme de deux fonctions hypergéométriques généralisées de forme (2.51) pondérées par les fonctions de forme (2.50)

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} (a) & |z \\ (b) \end{matrix} \right] = \Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (a) \end{matrix} \right] \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} (a) + k \\ (b) + k \end{matrix} \right] \frac{z^k}{k!}. \tag{2.51}$$

Cette matrice de covariance présente l'avantage d'être bien plus creuse que celle d'une phase décrite en base zonale (qui est complètement pleine, voir figure 2.10), comme nous pouvons le constater sur la figure 2.12 dont les valeurs nulles de la matrice sont affichées en blanc, la matrice ayant une densité de 1,61%. La diagonale de cette matrice donne la variance spatiale des coefficients de Zernike, et est représentée sur la figure 2.13. On peut constater la grande dominance des bas ordres dans la variance. Le mode piston a été retiré des calculs de matrice de covariance et des variances, car il n'est pas vu par l'ASO et n'a aucun effet sur l'imagerie scientifique. Les effets de grande échelle sont déjà visibles sur une pupilles de 8 m, comme le montre la figure 2.14, où l'énergie des premiers modes est très affectée par un changement de grande échelle L_0 [Winker(1991)].

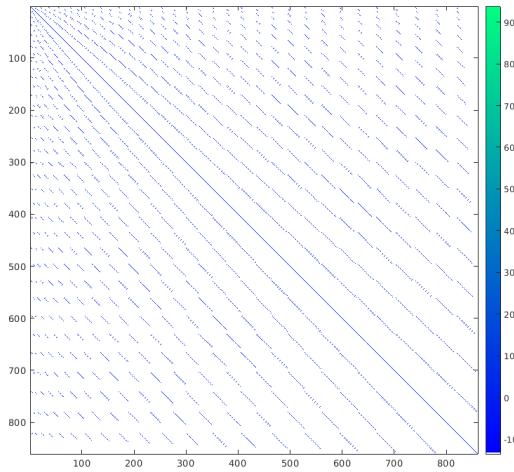


FIGURE 2.12 – Matrice de covariance des 860 premiers modes de Zernike, pour une atmosphère type Von Kármán, avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, une grande échelle L_0 de 25 m, et un diamètre de pupille de 8 m. Pour la représentation les valeurs nulles sont affichées en blanc et les valeurs non nulles en échelle logarithmique.

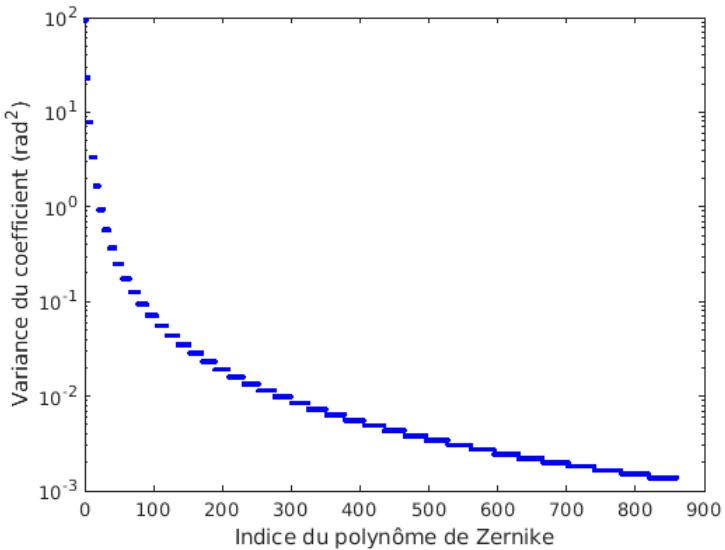


FIGURE 2.13 – Variance des 860 premiers coefficients de Zernike pour une atmosphère type Von Kármán, avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, une grande échelle L_0 de 25 m, et un diamètre de pupille de 8 m. L'échelle des ordonnées est logarithmique.

La phase turbulente est un phénomène continu, de bande passante infinie. Sa projection sur une base modale requiert une dimension infinie et cela n'est pas implémentable en pratique. Nous travaillerons donc avec un nombre fini de modes de Zernike, spatialement échantillonnés, et définis sur une pupille annulaire à cause de l'occultation centrale. Afin de conserver l'orthonormalité de la base de Zernike sur des supports numériques il faut réorthonormaliser la base par un procédé de Gram-Schmidt. L'écriture lexicographique de

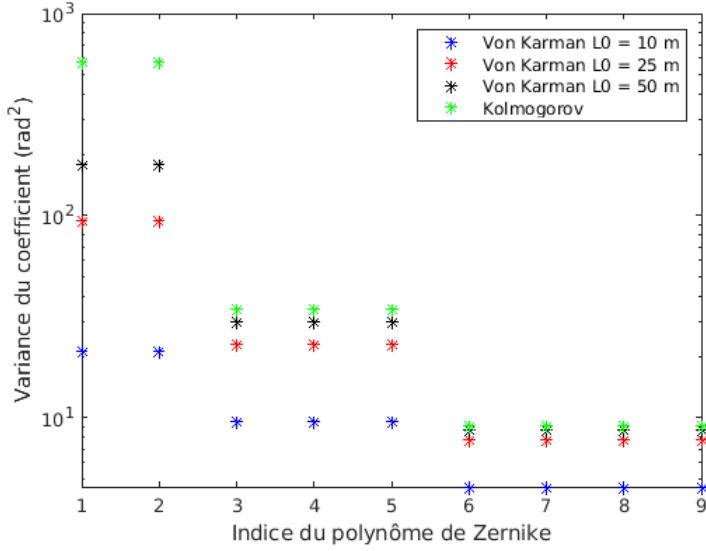


FIGURE 2.14 – Variance des 9 premiers coefficients de Zernike pour des atmosphères type Von Kármán, avec des valeurs de grande échelle de 10 à 50 m, ou une atmosphère type Kolmogorov. Ces données ont été générées avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et un diamètre de pupille de 8 m. L'échelle des ordonnées est logarithmique.

chaque polynôme sous forme de vecteur colonne permet d'obtenir une matrice de passage de la base de Zernike vers la base zonale, soit

$$P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_{\text{modes}}}) , \quad (2.52)$$

où n_{modes} est l'indice du dernier mode de la base. Ce changement sera utilisé dans le filtre de Kalman lors du calcul de la matrice P de l'équation (2.35) lorsque nous serons amenés à projeter une prédiction $\hat{\phi}_{k+1|k}$ effectuée en base de Zernike sur le miroir déformable. Au-delà de 900 modes (environ) il devient difficile de correctement échantillonner certains polynômes de Zernike (Shannon n'est plus respecté). Cette base n'est donc pas adaptée pour correctement représenter la phase dans le contexte des ELT, qui nécessiterait près de 5000 modes pour être bien représentée.

2.5.3 Base de Fourier

La base de Fourier utilisée pour représenter la phase turbulente est une base de fréquences spatiales discrètes et à support borné. Elle peut donc permettre de représenter une phase turbulente échantillonnée sur un support carré, grâce aux propriétés de la transformée de Fourier discrète [Morrison(1994)]. Une base de $N_x \times N_y$ modes de Fourier exprimés dans un repère cartésien (O, x, y) sur un support carré de largeur D , et échantillonnes avec une densité de $K_x \times K_y$ points, $(K_x, K_y) \in \mathbb{N}^2$ sont définis par

$$\mathbf{F}_{nm}(x, y) = e^{(2j\pi\nu_x x)} e^{(2j\pi\nu_y y)} , \quad (2.53)$$

où

$$\begin{cases} \nu_x = \frac{n}{N_x} F_{ex}, & \forall n \in \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket, N_x \geq K_x , \\ \nu_y = \frac{m}{N_y} F_{ey}, & \forall m \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket, N_y \geq K_y . \end{cases} \quad (2.54)$$

Les fréquences F_{e_x} et F_{e_y} sont les fréquences d'échantillonnage spatiale de la phase, définies telles que

$$\begin{cases} F_{e_x} = \frac{K_x}{D} , \\ F_{e_y} = \frac{K_y}{D} . \end{cases} \quad (2.55)$$

La figure 2.15 représente quelques-uns des premiers modes de Fourier. La phase turbulente

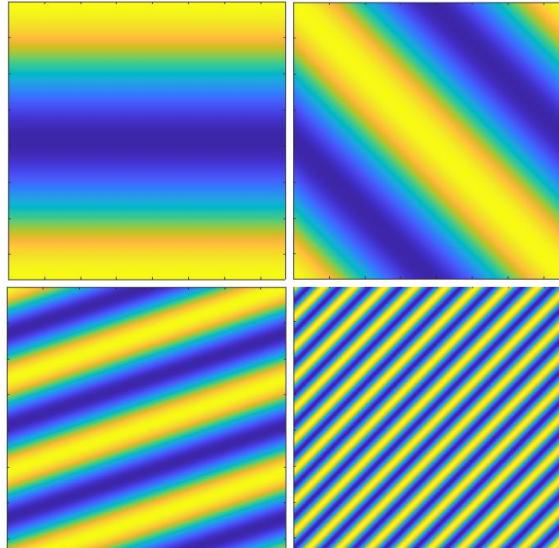


FIGURE 2.15 – Représentation spatiale de la partie réelle des modes de Fourier. Sur une base de 768 x 768 fréquences spatiales, quatre modes ont été représentés. Le mode en haut à gauche est le premier mode hors piston. L'échelle de couleur est arbitraire (max : jaune - min : bleu foncé)

se décompose alors comme

$$\phi = \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} a_{nm} \mathbf{F}_{nm} , \quad (2.56)$$

où a_{nm} est le coefficient du mode de Fourier \mathbf{F}_{nm} . La matrice de covariance $\tilde{\Sigma}_\phi$ en base de Fourier est diagonale [Roddier(1999)], et se calcule en fonction de la fréquence spatiale 2D ν , grâce à la fonction de covariance

$$\tilde{C}_\phi(\nu) = \left[\frac{24}{5} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right) \right]^{5/6} \frac{\Gamma(11/6)^2}{2\pi^{11/3}} \frac{1}{r_0^{5/3}} \left(\|\nu\|^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-11/6} , \quad (2.57)$$

avec $\|\nu\|^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2$. Elle est représentée pour plusieurs valeurs de grande échelle dans la figure 2.16.

Cette base particulière est bien adaptée pour les dimensions des ELT car elle permet d'obtenir une représentation de la statistique spatiale de la phase turbulente (2.57) plus creuse que les bases zonales et de Zernike que nous avons détaillées précédemment. Nous avons donc un régulateur LQG plus rapide à calculer, notamment pour des dimensions ELT [Poyneer *et al.*(2002), Poyneer *et al.*(2007), Massioni *et al.*(2011)]. En revanche le support carré des modes de Fourier pour représenter une phase dont les mesures sont

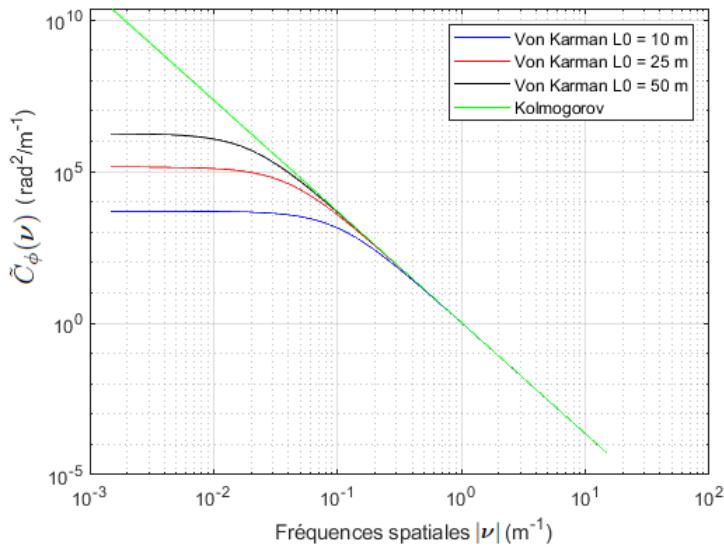


FIGURE 2.16 – Fonction de covariance de la turbulence atmosphérique exprimée dans une base de fréquences spatiales. Il s’agit également de la densité de fluctuation spatiale de la turbulence atmosphérique. Ces données ont été générées avec un paramètre de Fried $r_0 = 10$ cm, et pour quatre grandes échelles différentes. L’échelle est logarithmique.

dans la pupille annulaire du télescope pose des problèmes d'estimation en bord de pupille [Freischlad et Koliopoulos(1986)] dont il existe plusieurs solutions pour compenser partiellement ces dégradations [Poyneer *et al.*(2002), Poyneer(2003), Correia *et al.*(2007)].

2.5.4 Base de Karhunen-Loève

La base de Karhunen-Loève (KL) est une base très spécifique qui possède des modes statistiquement indépendants et géométriquement orthogonaux. Cette famille de modes n'a pas d'expression analytique et s'obtient uniquement par des procédures de calcul numérique. La décomposition en KL dans un espace de dimension finie est délicate car elle nécessite de calculer correctement la matrice de covariance de la famille de modes qui sert de base dans cet espace. Malgré les performances des calculateurs actuels ces procédures restent lourdes et passent par l'évaluation d'intégrales multiples [Wang et Markey(1978)]. Dans ce manuscrit nous considérerons des modes de KL qui seront compris dans l'espace miroir, afin de correctement représenter la phase que ce dernier peut compenser, ce qui est également l'hypothèse prise dans les travaux d'E. Gendron [Gendron(1995)]. Nous reprenons ici sa méthode, proposée dans [Gendron(1995)], page 78-79. La première étape est d'orthogonaliser géométriquement les fonctions d'influence du miroir déformable. En effet si Δ est une matrice symétrique réelle telle que $\Delta = N^T N$, nous pouvons la diagonaliser

$$M_1^T \Delta M_1 = D_1^2 \quad (2.58)$$

où D_1 est une matrice diagonale qui contient les racines des valeurs propres de Δ et M_1 est une matrice qui contient ses vecteurs propres. Nous divisons les vecteurs propres par la racine de leur valeur propre,

$$M = M_1 D_1^{-1}. \quad (2.59)$$

La deuxième étape est l'orthogonalisation statistique de la phase turbulente dans l'espace propre des commandes du miroir déformable. En perspective des ELT nous choisirons la base de Fourier spatiale pour exprimer la matrice de covariance $\tilde{\Sigma}_\phi$ de la phase turbulente car elle est diagonale et rapide d'implémentation, et nous utiliserons la matrice \tilde{N} dont chaque colonne contient la transformée de Fourier spatiale des fonctions d'influence (tronquées à la pupille), d'inverse généralisée \tilde{N}^\dagger . Ainsi, la covariance de la phase dans l'espace des commandes du miroir déformable se calcule par

$$\Sigma_u = \tilde{N}^\dagger \tilde{\Sigma}_\phi (\tilde{N}^\dagger)^T, \quad (2.60)$$

puis nous pouvons la projeter dans l'espace propre des commandes du miroir déformable grâce à la matrice M issue du calcul d'orthogonalisation géométrique des équations (2.58) et (2.59) par

$$\Sigma_{u^{\text{propre}}} = M^T \Sigma_u M. \quad (2.61)$$

Nous pouvons finalement diagonaliser la matrice $\Sigma_{u^{\text{propre}}}$ et faire l'orthogonalisation statistique de la phase turbulente

$$B^T \Sigma_{u^{\text{propre}}} B = \Sigma. \quad (2.62)$$

Les modes de Karhunen-Loëve sont obtenus dans les colonnes du projecteur

$$P_{\text{KL} \rightarrow \text{zon}} = N \times M \times B, \quad (2.63)$$

vers un espace zonal, dont quelques-uns sont présentés en figure 2.17.

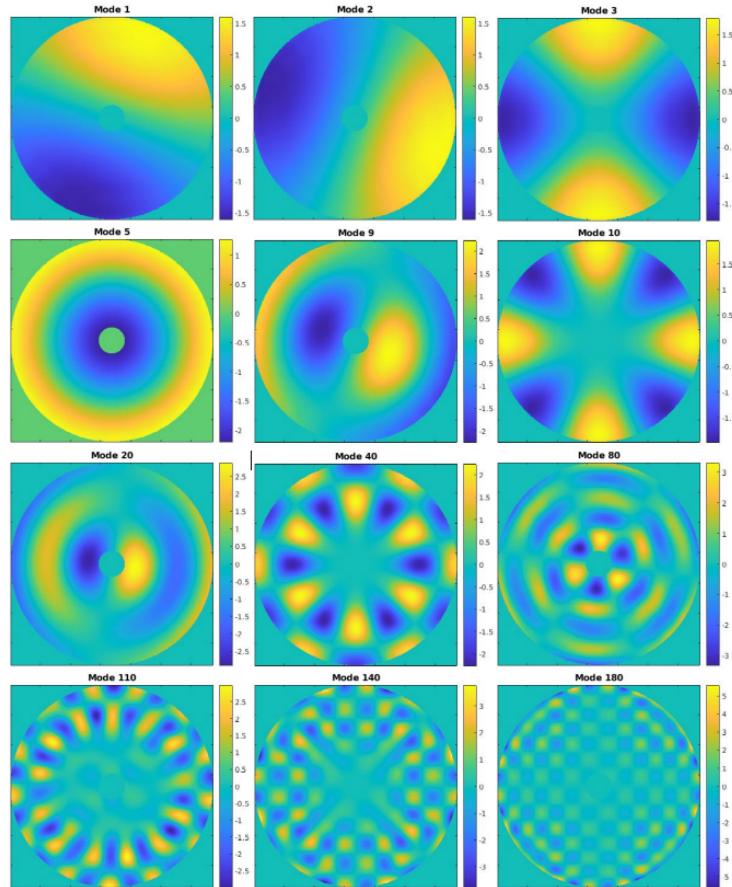


FIGURE 2.17 – Représentation spatiale des modes de Karhunen-Loève. Les modes ont été générés pour une configuration type VLT NAOS, soit un diamètre de pupille de 8 m avec une occultation centrale de 1 m, un miroir déformable avec 185 actionneurs valides dans la pupille. Notre base de Karhunen-Loève comporte donc 184 modes (le mode piston est retiré de la base). 12 modes ont été représentés, allant des premiers modes (1,2,3) jusqu'à des ordres très élevés (180). L'échelle de couleur est propre à chaque figure, mais reste dans les mêmes gammes de valeurs (comprise entre -5 et 5)

Chapitre 3

Modélisation d'état pour la commande Linéaire Quadratique Gaussienne en optique adaptative classique

Sommaire

3.1 Modélisation en base de Zernike	54
3.1.1 Modèle Auto-Régressif d'ordre 1	54
3.1.2 Modèle Auto-Régressif d'ordre 2	55
3.1.3 Frozen LQG	56
3.1.4 LQG tiède	59
3.1.5 Comparaison de performance des régulateurs en base de Zernike (cas type VLT NAOS)	60
3.2 Modèles spatialement invariants	64
3.2.1 Régulateur LQG-DKF	65
3.2.2 Régulateur LQG-DKF multicouche	67
3.2.3 Comparaison de performance des régulateurs LQG-DKF (cas type VLT NAOS)	68
3.3 Conclusion	70

Ce chapitre aborde la modélisation de la dynamique de la phase turbulente et de la mesure pour la commande prédictive LQG utilisant la base des modes de Zernike. La section 3.1 explore les différentes modélisations bouillonnantes, avec un modèle de type AR1, un de type AR2, un modèle multi-couches avec une hypothèse de *frozen flow* sur chaque couche pour le calcul de la prédiction, et un modèle résultant qualifié de «tiède» tenant compte d'une pondération des composantes *frozen flow* et bouillonnante du comportement turbulent. Enfin la section 3.1 se termine par une comparaison de performance en boucle fermée avec un simulateur numérique bout-en-bout paramétré comme un système d'OA historique (le VLT NAOS). La section 3.2 propose un état de l'art des modélisations en base zonale, où le gain du filtre de Kalman est calculé de façon spatialement invariante en base de Fourier. Le filtre est ensuite implémenté sous la forme d'un filtre de Kalman distribué (*Distributed Kalman Filter*) en base zonale. Des évaluations de performance sont également réalisées en comparaison avec un correcteur à action intégrale pour un système

d'OA type VLT NAOS. Ce chapitre aborde des modélisations zonales dont les versions localisées seront développées dans le chapitre 4.

3.1 Modélisation en base de Zernike

L'écriture de modèles en base de Zernike pour la compensation des perturbations atmosphérique ou des vibrations du télescope a fait l'objet de nombreux travaux. Les modèles les plus couramment utilisés en OA grand champ ou en SCAO sont des modèles auto-régressifs d'ordre 1 [Le Roux *et al.*(2004), Kulcsár *et al.*(2005), Petit *et al.*(2005), Petit *et al.*(2008b), Costille *et al.*(2011), Correia *et al.*(2014)] ou d'ordre 2 [Petit *et al.*(2008b), Correia *et al.*(2014), Sivo *et al.*(2014), Glück *et al.*(2018), Mocci *et al.*(2020)]. Nous allons aborder dans cette section des représentations d'état en base de Zernike permettant de compenser les effets de la turbulence atmosphérique avec des régulateurs LQG. Pour cela nous allons notamment présenter des représentations d'état dont les modèles dynamiques seront des modèles AR1 et AR2 en base de Zernike. Nous aborderons ensuite des modèles mixtes en base de Zernike et en base zonale, tels que le Frozen LQG [Juvénal *et al.*(2016a)] et le LQG tiède [Juvénal(2017)].

3.1.1 Modèle Auto-Régressif d'ordre 1

L'écriture de modèles dynamiques auto-régressifs d'ordre 1 (AR1) en base de Zernike a été abordée dans [Le Roux *et al.*(2004)] en utilisant les résultats de [Conan *et al.*(1995)] sur les statistiques temporelles des modes de Zernike de la turbulence atmosphérique. Ces modèles s'appuient sur les fréquences de coupure des modes sous hypothèse de *frozen flow* :

$$f_c^i = 0,3(n_i + 1) \frac{V}{D}, \quad (3.1)$$

où i est l'indice du i -ème mode de la base de Zernike, défini $\forall i \in \llbracket 1, n_{\text{modes}} \rrbracket$, et V est la vitesse de vent moyenne dans la pupille. L'indice n_i est l'ordre radial du i -ème mode de Zernike, et D le diamètre du télescope. Pour une atmosphère de n_l couches infiniment fines de profil de vent et de C_n^2 donnés, le vent moyen V est alors pris égal à

$$V = \left(\frac{\sum_{l=1}^{n_l} \beta_l (V^l)^{5/3}}{\sum_{l=1}^{n_l} \beta_l} \right)^{3/5}. \quad (3.2)$$

Les vitesses de vent V_l de chaque couche l sont supposées connues, et les coefficients de profil de C_n^2 normalisé β_l sont issus du profil de C_n^2 et définis par

$$\beta_l = \left(\frac{r_0^l}{r_0} \right)^{-5/3}, \quad (3.3)$$

où r_0^l est le paramètre de Fried de la l -ème couche turbulente et r_0 est le paramètre de Fried global. La représentation d'état du système incluant un modèle AR1 de la phase turbulente s'écrit alors

$$\begin{cases} \phi_k = A\phi_{k-1} + v_{k-1}, \\ y_k = C\phi_{k-1} - M_{\text{int}}u_{k-2} + w_k, \end{cases} \quad (3.4)$$

où ϕ contient les coefficients des modes de Zernike. L'équation de mesure correspond à (2.25), la matrice C étant définie ci-après. La matrice A est diagonale, et pour une période d'échantillonnage T de la boucle d'OA, chaque coefficient diagonal est pris égal à

$$A_{i,i} = a_i = e^{-f_c^i T} . \quad (3.5)$$

Le bruit excitateur v du filtre formeur est blanc et sa matrice de covariance spatiale est définie par

$$\Sigma_v = \Sigma_\phi - A \Sigma_\phi A^T , \quad (3.6)$$

où Σ_ϕ est la matrice de covariance de la turbulence atmosphérique en base de Zernike, de statistique Kolmogorov ou Von Kármán comme décrite dans (2.49). Ce modèle ne décrit pas une translation dans la pupille du télescope, mais plutôt un bouillonnement (évanescence et réapparition) des modes présents, et l'on peut donc le qualifier de modèle bouillonnant [Le Roux *et al.*(2004)]. Le modèle de mesure ASO pour un analyseur de type Shack-Hartmann correspond à un modèle géométrique. Si D_{aso} est la matrice ASO du modèle géométrique en base zonale, la matrice C dans (3.4) est obtenue par projection dans la base de Zernike :

$$C = D_{\text{aso}} \times P_{\text{zer} \rightarrow \text{zon}} . \quad (3.7)$$

Chacune des lignes de D_{aso} correspond à une mesure de pente d'une microlentille suivant l'axe (O,x) ou l'axe (O,y) d'un repère cartésien (O, x, y) du plan. Chaque microlentille, échantillonnée par une grille zonale de $n \times n$ points (pas de points sur les arêtes), produit deux mesures, effectuées par les stencils (masques 2D) de même dimension

$$w_x = \frac{1}{n} \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ | & | & & | & | \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad w_y = -w_x^T , \quad (3.8)$$

pour le calcul des pentes suivant les axes (O,x) et (O,y). L'échantillonnage de la grille zonale du modèle ASO est identique à celui des polynômes de Zernike (les colonnes de la matrice $P_{\text{zer} \rightarrow \text{zon}}$). Avec cette représentation, l'état se réduit à $X_k = \phi_{k-1}$. La sortie du filtre de Kalman sous forme prédicteur (2.41) à l'instant k est alors $\hat{\phi}_{k|k}$, de sorte que $\hat{\phi}_{k+1|k} = A\hat{\phi}_{k|k}$. Pour calculer la commande, il suffit de combiner cette étape de prédiction avec le changement de base et la projection dans l'espace miroir, ce qui donne finalement $u_k = P\hat{\phi}_{k|k}$, avec

$$P = (N^T N)^{-1} N^T P_{\text{zer} \rightarrow \text{zon}} A , \quad (3.9)$$

où N est la matrice d'influence zonale du MD.

3.1.2 Modèle Auto-Régressif d'ordre 2

Les travaux de [Sivo *et al.*(2014)] décrivent la première mise en œuvre sur le ciel d'un filtre auto-régressif d'ordre 2 (AR2) pour compenser la turbulence atmosphérique avec un

modèle dynamique bouillonnant. Le coefficient ϕ^i du i -ème mode de Zernike du vecteur ϕ qui stocke tout les $\phi^i, \forall i \in \llbracket 1, n_{\text{modes}} \rrbracket$, a pour modèle [Sivo *et al.*(2014)]

$$\phi_{k+1}^i = a_1^i \phi_k^i + a_2^i \phi_{k-1}^i + v_k, \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{cases} a_1^i = 2e^{-\xi w_0^i T} \cos(w_r^i T), \\ a_2^i = -e^{-2\xi w_0^i T}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Le coefficient d'amortissement ξ est un paramètre du filtre, qui est fixé à 0,9, et les pulsations w_r^i et w_0^i sont liées à la fréquence de coupure f_c^i (3.1) du i -ème mode de Zernike par

$$\begin{cases} w_0^i = 2\pi f_c^i, \\ w_r^i = w_0^i \sqrt{1 - \xi^2}. \end{cases} \quad (3.12)$$

La représentation d'état du système avec ce modèle de turbulence s'écrit alors

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} X_k + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} v_k, \\ y_k = CX_k - M_{\text{int}} u_{k-2} + w_k, \end{cases} \quad (3.13)$$

où 0 et I sont des matrices de zéros et la matrice identité, respectivement toutes deux de dimension $n_{\text{modes}} \times n_{\text{modes}}$. Le vecteur d'état stocke 2 occurrences temporelles de phase turbulente :

$$X_k = \begin{pmatrix} \phi_k \\ \phi_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Le modèle de mesure correspond à (2.25) et conduit à prendre $C = (0, D_{\text{aso}})$, où D_{aso} est la matrice de (3.7). Enfin, les matrices A_1 et A_2 sont diagonales, et leurs coefficients diagonaux sont les a_1^i et a_2^i dans (3.11). La matrice de covariance du bruit d'état Σ_v est calculée à partir de la matrice de covariance de la turbulence atmosphérique en base de Zernike, en résolvant une équation de Lyapunov. Enfin le projecteur P de (2.37) est pour ce modèle d'état égal à

$$P = (N^T N)^{-1} N^T P_{\text{zer} \rightarrow \text{zon}} C_1, \quad (3.15)$$

où $C_1 = (I, 0)$.

3.1.3 Frozen LQG

Le développement du Frozen LQG dans les travaux de Rémy Juvénal [Juvénal(2017), Juvénal *et al.*(2016b)] permet de décrire un comportement de translation dans une pupille avec un filtre de Kalman utilisant la base de Zernike, mais avec une prédiction en base zonale. C'est en effet un régulateur mixte zonal-Zernike, dont le modèle dynamique pour une seule couche est celui décrit dans (3.13), mais le filtre de Kalman n'est plus utilisé sous la forme prédiction de (2.41) mais sous la forme estimation :

$$\hat{X}_{k|k} = (I - H_\infty C) \hat{X}_{k|k-1} + H_\infty (y_k + M_{\text{int}} u_{k-2}), \quad (3.16)$$

où

$$\hat{X}_{k|k} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{k|k} \\ \hat{\phi}_{k-1|k} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Le gain d'estimation H_∞ du filtre de Kalman est lié au gain de prédiction L_∞ par :

$$L_\infty = AH_\infty. \quad (3.18)$$

L'estimée de la phase turbulente $\hat{\phi}_{k-1|k}$ en base de Zernike est extraite du vecteur d'état $\hat{X}_{k|k}$ via

$$\hat{\phi}_{k-1|k} = C_2 \hat{X}_{k|k}, \quad (3.19)$$

avec $C_2 = (0, I)$. Elle est ensuite projetée en base zonale grâce au projecteur $P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}$. Cette estimation en base zonale est finalement translatée dans le sens du vent d'un déplacement qui correspond à la distance parcourue pendant 2 trames de boucle d'OA, comme représenté sur la figure 3.1. Cette opération est transcrise par la matrice A_{2T} , qui encode un déplacement *a priori* non résolu exactement par la grille zonale pixélisée, en utilisant l'approximation du déplacement effectué par une interpolation bilinéaire.

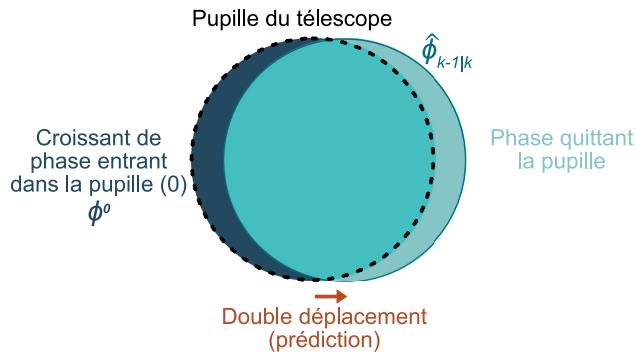


FIGURE 3.1 – Décalage de la l'estimation fournie par le filtre de Kalman en base de Zernike, sous l'effet du vent, pendant 2 trames d'échantillonnage de la boucle d'OA (2T).

Ce décalage laisse un croissant vide (ϕ^0 sur la figure 3.1) ou deux croissants dans le cas d'une pupille avec occultation centrale. Ces vides sont comblés par la prédiction $\hat{\phi}_{k+1|k}$ du filtre de Kalman (3.13), construit avec la matrice de modèle bouillonnant A , et projetée en base zonale. Cette façon de combler le croissant s'est avérée la plus performante pour un régulateur Frozen LQG [Juvénal(2017)], notamment comparativement à une méthode statique type maximum *a posteriori*. Nous avons donc deux prédictions pour les deux zones de la pupille : les points du croissant qui seront sélectionnés par la matrice P_{crois} , et les points du reste de la pupille qui seront sélectionnés par la matrice P_{reste} . Au final notre prédiction en base zonale $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{zon}}$ est reconstruite à partir de la sortie $\hat{X}_{k|k}$ du filtre de Kalman (3.16) par

$$\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{zon}} = (P_{\text{crois}} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_1 A + P_{\text{reste}} A_{2T} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_2) \hat{X}_{k|k}. \quad (3.20)$$

Cette prédiction est ensuite projetée sur les fonctions d'influence du MD. Les commandes sont finalement exprimées à partir de la sortie $\hat{X}_{k|k}$ du filtre de Kalman :

$$u_k = N^\dagger \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{zon}} = P \hat{X}_{k|k}, \quad (3.21)$$

où

$$P = (N^T N)^{-1} N^T (P_{\text{crois}} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_1 A + P_{\text{reste}} A_{2T} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_2) . \quad (3.22)$$

L'idée d'utiliser le filtre de Kalman pour estimer la phase, puis de la décaler lors de la projection sur l'espace du miroir déformable, avait déjà été proposée dans [Piatrou et Roggemann(2007)]. Le contexte était un système d'OA multiconjuguée avec une phase exprimée dans une base de fonctions spline, avec un modèle de type AR1. La formulation proposée consistait à prédire sous hypothèse de *frozen flow* en utilisant l'estimateur du maximum *a posteriori*, sans faire la distinction entre la partie croissant et le reste comme en (3.22).

Dans le cas d'une reconstruction de n_L couches turbulentes $\phi_k^l, l \in \llbracket 1, n_L \rrbracket$, le modèle d'état devient

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = \begin{pmatrix} \phi_{k+1}^1 \\ \phi_k^1 \\ \vdots \\ \phi_{k+1}^{n_L} \\ \phi_k^{n_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & A_1^{(n_L)} & A_2^{(n_L)} \\ 0 & & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_k^1 \\ \phi_{k-1}^1 \\ \vdots \\ \phi_k^{n_L} \\ \phi_{k-1}^{n_L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k^1 \\ 0 \\ \vdots \\ v_k^{n_L} \\ 0 \end{pmatrix} \\ y_k = (0, D_{\text{aso}}, \dots, 0, D_{\text{aso}}) X_k - M_{\text{int}} u_{k-2} + w_k , \end{array} \right. . \quad (3.23)$$

La matrice de transition de ce modèle est bloc diagonale, chaque bloc

$$A^{(l)} = \begin{pmatrix} A_1^{(l)} & A_2^{(l)} \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

étant la matrice du modèle dynamique AR2 et monocouche (3.13) calculée en utilisant le paramètre de Fried r_0^l de la l -ième couche turbulente, défini dans l'équation (3.3), au lieu du paramètre de Fried global r_0 . La mesure y_k correspond à la somme des contributions des différentes couches turbulentes. Les bruits d'état $\{v_k^l\}$ sont des bruits blancs gaussiens, dont les matrices de covariance Σ_v^l sont calculées en résolvant n_L équations de Lyapunov. Le projecteur de (3.22) devient alors

$$P = (P^{(1)}, 0, \dots, P^{(n_L)}, 0) , \quad (3.25)$$

où les matrices $P^{(l)}, l \in \llbracket 1, n_L \rrbracket$, sont définies pour les différentes couches par :

$$P^{(l)} = (N^T N)^{-1} N^T (P_{\text{crois}}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_1 A^{(l)} + P_{\text{reste}}^{(l)} A_{2T}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_2) . \quad (3.26)$$

Ceci est la transcription dans les différentes couches de l'expression (3.22), les matrices $P_{\text{crois}}^{(l)}, P_{\text{reste}}^{(l)}, A^{(l)}$ et $A_{2T}^{(l)}$ dépendant maintenant du vent dans la l -ième couche.

3.1.4 LQG tiède

Le LQG tiède, dont l'idée a été initialement suggérée dans [Juvénal(2017)], est une façon plus compacte que le Frozen LQG d'exprimer une translation dans la pupille du télescope. La phase modélisée n'est plus la phase dans chaque couche, mais uniquement la phase résultante dans la pupille du télescope. Le modèle d'état est donc identique à (3.13), le filtre de Kalman utilisé est de la forme estimation (3.16), et le calcul du projecteur est différent de celui du Frozen LQG (3.22, 3.25), car il est un compromis entre une prédition de type bouillonnante utilisant le modèle AR2 (3.13) et une prédition de type *frozen flow* monocouche.

Nous considérerons donc un modèle de phase turbulente en base zonale ϕ_{k+1}^{zon} , qui est la somme des deux termes

$$\phi_{k+1}^{\text{zon}} = \phi_{k+1}^{\text{Froz}} + \phi_{k+1}^{\text{Bouil}} , \quad (3.27)$$

où

$$\phi_{k+1}^{\text{Froz}} = \sum_{l=1}^{n_L} \phi_{k+1}^{\text{Froz},(l)} . \quad (3.28)$$

Le modèle de chaque couche $\phi_{k+1}^{\text{Froz},(l)}, l \in \llbracket 1, n_L \rrbracket$, est défini de façon similaire à (3.20) avec une hypothèse de Frozen Flow par couche. La complémentation des croissants de chaque couche (voir figure 3.1) s'effectue en utilisant la prédition fournie par le filtre de Kalman construit sur le modèle bouillonnant (3.13) :

$$\phi_{k+1}^{\text{Froz},(l)} = \left(P_{\text{crois}}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \phi_{k+1}^{(l)} + P_{\text{reste}}^{(l)} A_{2T}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \phi_{k-1}^{(l)} \right) . \quad (3.29)$$

Contrairement au Frozen LQG, le LQG tiède n'a pas vocation à estimer la phase dans chaque couche turbulente, ce qui permet de diminuer la complexité calculatoire par rapport à une reconstruction multicouche. Nous proposerons ici de modéliser $\phi_{k-1}^{(l)}$ et $\phi_{k+1}^{(l)}$ grâce à une reconstruction statique type MAP à partir des phases résultantes ϕ_{k-1} et ϕ_{k+1} :

$$\begin{cases} \phi_{k+1}^{(l)} = \text{Cov}(\phi_{k+1}^{(l)}, \phi_{k+1}) \text{Var}(\phi_{k+1})^{-1} \phi_{k+1} = \beta_l \phi_{k+1} , \\ \phi_{k-1}^{(l)} = \beta_l \phi_{k-1} . \end{cases} \quad (3.30)$$

Enfin, les deux phases résultantes ϕ_{k-1} et ϕ_{k+1} sont extraites du modèle bouillonnant (3.13) :

$$\begin{cases} \phi_{k+1} = C_1 A X_k , \\ \phi_{k-1} = C_2 X_k . \end{cases} \quad (3.31)$$

Ces approximations permettent de réduire la dimension du vecteur d'état d'un facteur n_L , et donc la complexité calculatoire de l'équation de Riccati d'un facteur n_L^3 . Finalement la première partie ϕ_{k+1}^{Froz} du modèle pourra s'exprimer en fonction du vecteur d'état X_k par :

$$\phi_{k+1}^{\text{Froz}} = \left(\sum_{l=1}^{n_L} \left(P_{\text{crois}}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \beta_l C_1 A + P_{\text{reste}}^{(l)} A_{2T}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \beta_l C_2 \right) \right) X_k . \quad (3.32)$$

La deuxième composante $\phi_{k+1}^{\text{Bouil}}$ de la prédition zonale ϕ_{k+1}^{zon} est donnée par

$$\phi_{k+1}^{\text{Bouil}} = \beta_{\text{Bouil}} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \phi_{k+1} = \beta_{\text{Bouil}} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_1 A X_k . \quad (3.33)$$

Le paramètre β_{Bouil} est défini par rapport aux coefficients du profil de C_n^2 normalisé β_l des couches considérées en *frozen flow* :

$$\beta_{\text{Bouil}} = 1 - \sum_{l=1}^{n_L} \beta_l. \quad (3.34)$$

3.1.4.1 Calcul de la commande

Ces développements peuvent être résumés par le calcul du projecteur tiède $P_{\text{tiède}}$ sous la forme

$$u_k = P_{\text{tiède}} X_k, \quad (3.35)$$

où

$$\begin{aligned} P_{\text{tiède}} = & \left(N^T N \right)^{-1} N^T \left(\left[1 - \sum_{l=1}^{n_L} \beta_l \right] P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_1 A \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{n_L} \left(P_{\text{crois}}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \beta_l C_1 A + P_{\text{reste}}^{(l)} A_{2T}^{(l)} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \beta_l C_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Cependant, dans la boucle d'optique adaptative nous n'aurons évidemment pas accès à l'état X_k . Nous prendrons donc l'estimation de cette quantité fournie par le filtre de Kalman sous la forme estimation (3.16), filtre construit à partir de la représentation d'état du modèle dynamique AR2 bouillonnant (3.13). Nous aurons finalement la commande

$$u_k = P_{\text{tiède}} X_{k|k}. \quad (3.37)$$

3.1.5 Comparaison de performance des régulateurs en base de Zernike (cas type VLT NAOS)

Afin de comparer des régulateurs LQG construits sur les modèles de la section 3.1, nous avons fait des simulations de performance avec le simulateur *Object Oriented Matlab Adaptive Optics* (OOMAO), très utilisé dans la communauté scientifique, dans une configuration type *Very Large Telescope Nasmyth Adaptive Optic System* (VLT NAOS) [Rousset *et al.*(2000)] décrite dans la table 3.1.

Nous avons exploré plusieurs configurations d'atmosphère, dont les phases turbulentes sont générées avec une statistique de Von Kármán et un paramètre de Fried de 10 cm à 0,55 µm. Les comportements vont de pseudo-bouillonnant (où la phase résultante n'évolue pas dans une direction privilégiée, mais présente des cellules de convection qui « bouillonnent ») jusqu'à des comportements de type *frozen flow*, avec une translation pure de la phase turbulente. Deux comportements de turbulence intermédiaires, à tendance bouillonnante et tendance *frozen flow*, ont été générés en utilisant une superposition de trois couches turbulentes en translation avec des directions et des intensités de vent différentes. Les paramètres de simulation de ces atmosphères sont détaillés dans la table 3.2 et seront les *a priori* sur la configuration de la turbulence atmosphérique pour l'identification des modèles des régulateurs de la table 3.3. Chaque couche turbulente est translatée en utilisant la méthode décrite dans [Assémat *et al.*(2006), Fried et Clark(2008)]

Diamètre	8 m
Occultation centrale	1 m
MD à géométrie cartésienne et de Fried	15 x 15 actionneurs avec 185 valides
Fonction d'influence gaussienne	Facteur de couplage de 0,3
Shack-Hartmann (grille de sous-ouvertures carrées)	14 x 14 sous-ouvertures avec 152 valides
Cadence de la boucle d'OA	500 Hz
λ_{wfs}	0,55 μm
λ_{science}	1,654 μm

TABLE 3.1 – Paramètres des simulations bout-en-bout pour une configuration VLT NAOS

bien adaptée pour simuler des écrans de phase turbulente en translation pour des télescopes de grandes dimensions. L'échantillonnage des écrans est de 336 points linéaires, soit 24 points linéaires par micro lentille de l'analyseur de surface d'onde, ce qui correspond à 4.2 pixels par r_0 à la longueur d'onde de l'ASO soit 0,55 μm .

Nous avons choisi un ASO de type Shack-Hartmann géométrique, qui calcule donc des gradients de phase à partir des écrans de phase turbulente générés par le simulateur. Le bruit de mesure est ensuite ajouté ces gradients de phase pour obtenir une variance σ_w^2 de 0.2 rad² à 0,55 μm .

Les régulateurs de la table 3.3 qui ont été testés pour ces cinq différentes atmosphères sont :

1. Le correcteur à action intégrale classique avec un gain $g = 0,6$ et 7 valeurs propres filtrées dans le calcul de la matrice de commande (valeurs qui ont été optimisées avec la performance).
2. Un régulateur LQG construit avec le modèle AR1 bouillonnant (3.4) et utilisant la forme prédictive du filtre de Kalman (2.41) dans une base de représentation de la phase turbulente de 495 modes de Zernike. Cette base comporte bien plus de modes que ce que peut générer le MD de NAOS (environ 230 modes).
3. Un régulateur LQG construit avec le modèle AR2 bouillonnant (3.13) et utilisant la forme prédictive du filtre de Kalman (2.41) et également une base de 495 modes de Zernike. Ce type de régulateur a été implémenté avec succès sur le démonstrateur CANARY [Sivo *et al.*(2014)].
4. Le Frozen LQG qui s'appuie sur la représentation d'état (3.23) et utilise la forme estimation (3.16) du filtre de Kalman.
5. Le LQG tiède qui combine la forme estimation (3.16) du filtre de Kalman construit sur le modèle (3.13) et la prédition tiède calculée à l'aide du projecteur (3.36). Le projecteur considérera uniquement la couche au sol pour la prédition *frozen flow*, le reste de l'énergie turbulente sera injecté dans la prédition bouillonnante.

Comportement d'atmosphère résultante	Pseudo bouillonnante (3 couches)	Tendance bouillonnante (3 couches)	Tendance <i>frozen flow</i> (3 couches)	<i>Frozen flow</i> (1 couche)	<i>Frozen flow</i> (1 couche)
Profil de C_n^2 (%)	[0.5, 0.2, 0.3]	[0.7, 0.1, 0.2]	[0.7, 0.1, 0.2]	1	1
Vitesse des vents (m/s)	[7.5, 12, 15]	[10, 7, 15]	[10, 7, 15]	10	20
Direction des vents (°)	[0, 120, 240]	[0, 120, 240]	[0, -60, 60]	0	0
Configuration de la turbulence					

TABLE 3.2 – Configuration des atmosphères utilisées dans les simulations bout-en-bout, de pseudo-bouillonnante à *frozen flow*, avec des comportements intermédiaires. Sur les représentations graphiques, les flèches de couleur bleue correspondent à la première couche, les vertes à la deuxième, et les violettes à la troisième. Les profils sont générés avec trois couches turbulentes en translation, sauf dans le cas d'un pur *frozen flow* (une seule couche).

6. Un régulateur LQG tiède où le projecteur tiède (3.36) est calculé en considérant que toutes les couches turbulentes sont de type *frozen flow*. Il n'y a donc pas de prédiction bouillonnante, représentée par le coefficient du profil de C_n^2 normalisée β_{bouil} (3.34), qui est ici nul.

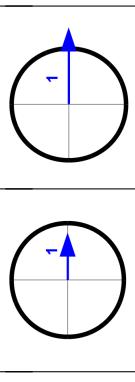
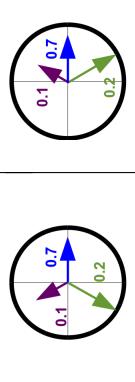
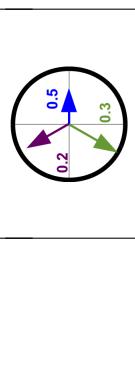
Correcteur	Taille du vecteur d'état	Atmosphère			
		Pseudo -bouillonnante	Tendance bouillonnante	Tendance frozen flow	frozen flow (10 m/s)
1. Intégrateur $g = 0,6$	185	50,5 %	50,6 %	50,3 %	50,7 %
2. LQG AR1 boiling de [Le Roux <i>et al.</i>(2004)]	495	51,9 %	51,9 %	51,7 %	52,2 %
3. LQG AR2 boiling de [Sivo <i>et al.</i>(2014)]	990	53,7 %	53,7 %	53,6 %	53,8 %
4. Frozen LQG de [JuvénaL <i>et al.</i>(2016a)]	2970 (multi-layer) 990 (frozen flow)	52,6 %	53,4 %	54,6 %	55,6 %
5. LQG tiède de [JuvénaL(2017)] Couche au sol en frozen flow	990	53,0 %	53,1 %	54,1 %	55,0 %
6. LQG tiède de [JuvénaL(2017)] Toutes couches en frozen flow	990	52,0 %	52,8 %	54,1 %	55,0 %
Configuration turbulente					

TABLE 3.3 – Performance des régulateurs LQG de la section 3.1 dont les modèles sont dans une base de 495 modes de Zernike, pour cinq comportements d'atmosphère, décrivant un bouillonnement de la turbulence atmosphérique, ou bien une translation pure, avec deux comportement intermédiaires.

Cette étude nous permet de déduire plusieurs conclusions sur l'apport de chaque modélisation pour la commande LQG :

- Nous constatons sans surprise que dans ce cas théorique où les vitesses de vent et le profil de C_n^2 sont connus et pris en compte dans le modèle d'une commande prédictive type LQG, nous obtenons sur un instrument de classe VLT de meilleures performances de commande qu'un simple régulateur à action intégrale qui n'effectue pas de prédition de la phase turbulente.
- L'ajout d'une complexité supplémentaire (modèle AR2) permet de gagner au moins 1,5 points de Strehl pour les atmosphères testées, ce qui justifie pleinement son intérêt et son utilisation sur ciel [[Sivo et al.\(2014\)](#),[Sinquin et al.\(2020\)](#)] par rapport à un LQG AR1 [[Le Roux et al.\(2004\)](#)].
- La prise en compte de la translation des couches turbulentes dans le Frozen LQG permet en effet d'améliorer la performance dans une atmosphère au moins à dominante *frozen flow* sinon pure *frozen flow*, mais la dégrade de façon importante pour des atmosphères à tendance bouillonnante. De plus c'est au prix d'une augmentation de complexité calculatoire conséquente par rapport au LQG AR2 boiling [[Sivo et al.\(2014\)](#)], surtout quand le nombre de couches à reconstruire est important.
- En revanche le LQG tiède qui reconstruit la couche dominante de *frozen flow*, et considère le reste de l'énergie turbulente comme évoluant avec un modèle de bouillonnement, est un bon compromis car il donne les mêmes performances que le Frozen LQG pour des atmosphères à tendance *frozen flow*, et de meilleures performances lorsque l'atmosphère est bouillonnante ou à tendance bouillonnante, ceci en gardant la même complexité calculatoire que le LQG AR2 bouillonnant [[Sivo et al.\(2014\)](#)]. En effet, le calcul du projecteur $P_{tiède}$ s'effectue hors ligne. Enfin, on remarque que reconstruire toutes les couches dans le projecteur du LQG tiède est contre-productif et dégrade les performances par rapport à une seule couche reconstruite. Ceci est probablement dû à l'étape intermédiaire de reconstruction (3.30) qui estime la phase dans les couches turbulentes à partir de la phase résultante. Il est clair que si le nombre de couches à estimer augmente, les erreurs sur chaque couche à reconstruire seront également plus importantes, ce qui se confirme en comparant les performances des régulateurs LQG tièdes 5 et 6.

Le meilleur compromis en termes de performance et complexité calculatoire pour un instrument de la dimension de NAOS, avec les configurations turbulentes testées, est donc un LQG tiède qui tient compte de l'hypothèse de *frozen flow* dans le calcul du projecteur uniquement pour la couche la plus énergétique – la couche au sol–, le reste de l'énergie étant supposé de type bouillonnant : c'est à dire le régulateur 5. La perspective de régulateurs pour des systèmes d'OA de plus grande dimension que le VLT NAOS demande des bases plus adaptées en termes de complexité calculatoire que la base de Zernike. Nous allons donc explorer des régulateurs construits sur des modèles spatialement invariants dans la prochaine section.

3.2 Modèles spatialement invariants

La possibilité d'écrire des modèles spatialement invariant a été abordée tout d'abord en base de Fourier dans les travaux de Lisa Poyneer [[Poyneer et al.\(2002\)](#),[Poyneer et al.\(2003\)](#),

Poyneer(2003)], et a été testée avec succès sur ciel pour l'estimation de plusieurs couches turbulentes [Poyneer *et al.*(2007)]. En effet, les reconstructeurs proposés en base de Fourier sont multicouches, avec une hypothèse de *frozen flow* sur chaque couche turbulente. Chaque fréquence spatiale 2D de la turbulence atmosphérique $\tilde{\phi}(\boldsymbol{\nu})$, avec $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$, évolue indépendamment des autres, conformément à l'hypothèse d'invariance spatiale. Nous pouvons donc exprimer le modèle pour la l -ième couche et pour chaque fréquence spatiale 2D $\boldsymbol{\nu}$. L'hypothèse de *frozen flow* peut se formaliser avec un modèle AR1 à coefficients complexes [Poyneer et Véran(2008)] :

$$\tilde{\phi}_{k+1}(\boldsymbol{\nu}) = \alpha e^{+2j\pi T(V_x \nu_x + V_y \nu_y)} \tilde{\phi}_k(\boldsymbol{\nu}) + v_k(\boldsymbol{\nu}) , \quad (3.38)$$

où (V_x, V_y) sont les coordonnées du vecteur de vitesse de vent et α un coefficient scalaire inférieur à et très proche de 1 assurant la stabilité du filtre. Le modèle de mesure utilisé par le filtre de Kalman est établi dans une base de fréquences spatiales, ce qui nécessite de faire une transformée de Fourier en temps réel des mesures fournies par l'ASO, avec les problèmes de bord liés au support pupillaire non carré de l'ASO inhérents à l'utilisation de la base de Fourier spatiale [Correia *et al.*(2007)]. Des méthodes de compensation itératives de ces dégradations de performance en bord de pupille ont cependant été proposées pour réduire leur impact [Poyneer *et al.*(2002), Poyneer(2003), Correia *et al.*(2007)].

Afin d'éviter d'avoir recours à un traitement itératif des mesures (qui doit être réalisé en temps réel), nécessaire pour tout régulateur en base de Fourier, nous privilégierons des régulateurs LQG basés sur des modèles spatialement invariants, où le filtre de Kalman est implémenté en base zonale et localisé dans la pupille [Massioni *et al.*(2011), Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)]. Ces filtres de Kalman dits distribués ont été développés en réécrivant les équations récursives en base zonale et sous forme convolutive [Massioni *et al.*(2011)].

L'idée de ces régulateurs est de résoudre l'équation de Riccati – et donc de calculer le gain de prédiction du filtre de Kalman (2.42,2.43) – en base de Fourier, ce qui présente l'avantage de pouvoir résoudre indépendamment une équation de Riccati en très petites dimensions pour chaque fréquence spatiale. En effet, on peut écrire un modèle d'état de petite dimension pour chaque fréquence spatiale $\boldsymbol{\nu}$. Un calcul de transformée de Fourier inverse permet d'obtenir ensuite les gains de Kalman sous forme de noyaux de convolution. Nous implémenterons deux filtres de Kalman distribués différents qui ont été développés pour des applications SCAO [Massioni *et al.*(2011)] et grand champ [Massioni *et al.*(2011), Gilles *et al.*(2013)].

3.2.1 Régulateur LQG-DKF

Le modèle dynamique du régulateur que nous appellerons LQG-DKF (*Distributed Kalman Filter*), et qui est décrit dans [Massioni *et al.*(2011)], reconstruit une phase résultante dans la pupille avec un modèle très simple, qui pour chaque coefficient de la phase turbulente $\tilde{\phi}$, s'écrit

$$\tilde{\phi}_{k+1}(\boldsymbol{\nu}) = \alpha \tilde{\phi}_k(\boldsymbol{\nu}) + v_k(\boldsymbol{\nu}) , \quad (3.39)$$

où α vérifie les mêmes conditions que dans (3.38). Les matrices de la représentation d'état (2.38), (2.39), (2.40) pour une mesure en boucle ouverte et pour la fréquence spatiale

turbulente $\boldsymbol{\nu}$ sont :

$$\begin{cases} A = \alpha \\ \Gamma = 1, \\ C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_{\boldsymbol{\nu}} Y_{\boldsymbol{\nu}} + X_{\boldsymbol{\nu}} - Y_{\boldsymbol{\nu}} - 1 \\ X_{\boldsymbol{\nu}} Y_{\boldsymbol{\nu}} + Y_{\boldsymbol{\nu}} - X_{\boldsymbol{\nu}} - 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.40)$$

où $X_{\boldsymbol{\nu}} = e^{+2j\pi \frac{\nu_x}{F_{e_x}}}$ et $Y_{\boldsymbol{\nu}} = e^{+2j\pi \frac{\nu_y}{F_{e_y}}}$, avec F_{e_x}, F_{e_y} définis dans (2.55). De plus, avec ce modèle dynamique simple (3.39), l'équation de Riccati algébrique discrète (2.41) devient scalaire :

$$\Sigma_{\infty}(\boldsymbol{\nu}) = \alpha^2 \Sigma_{\infty}(\boldsymbol{\nu}) + \Sigma_v(\boldsymbol{\nu}) - \alpha^2 \Sigma_{\infty}(\boldsymbol{\nu})^2 C^T (C \Sigma_{\infty}(\boldsymbol{\nu}) C^T + \sigma_w^2 I)^{-1} C, \quad (3.41)$$

où σ_w^2 est la variance du bruit de mesure et

$$\Sigma_v(\boldsymbol{\nu}) = (1 - \alpha^2) \tilde{C}_{\phi}(\boldsymbol{\nu}) \quad (3.42)$$

est la covariance du bruit d'état $\{v_k(\boldsymbol{\nu})\}$ de (3.39) et $\tilde{C}_{\phi}(\boldsymbol{\nu})$ est défini dans (2.57). Le gain de Kalman associé à la fréquence $\boldsymbol{\nu}$ est obtenu de façon identique à (2.42), mais il est ici de dimension 1×2 . Enfin, les gains de Kalman en base zonale L_{∞}^x et L_{∞}^y (qui seront associés aux pentes y^x suivant l'axe (O,x) et y^y suivant l'axe (O,y) fournies par l'ASO) sont obtenus par transformée de Fourier discrète inverse.

Comme nous travaillons sur un support fini, les noyaux de convolution des gains de Kalman sont tronqués, et ont une dimension de $2Z + 1 \times 2Z + 1$, avec $Z \in \mathbb{N}^*$. Nous choisirons dans nos études un Z tel que toutes les mesures de l'ASO sont toujours correctement prises en compte dans le calcul de l'innovation du filtre de Kalman, soit $Z = 13$ pour un cas VLT NAOS. Finalement, pour le jeu de coordonnées (x, y) de points contenus dans le support d'estimation, l'équation de prédiction du filtre de Kalman distribué défini dans [Massioni *et al.*(2011)] est :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{k+1|k}(x, y) = & \alpha \hat{\phi}_{k|k-1}(x, y) \\ & + \sum_{x'=-Z}^{x'=+Z} \sum_{y'=-Z}^{y'=+Z} L_{\infty}^x(x - x', y - y') \left(y_k^x(x', y') - \hat{y}_{k|k-1}^x(x', y') \right) \\ & + \sum_{x'=-Z}^{x'=+Z} \sum_{y'=-Z}^{y'=+Z} L_{\infty}^y(x - x', y - y') \left(y_k^y(x', y') - \hat{y}_{k|k-1}^y(x', y') \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

avec un modèle de mesure en boucle ouverte

$$\begin{cases} \hat{y}_{k|k-1}^x = D_x \hat{\phi}_{k|k-1}, \\ \hat{y}_{k|k-1}^y = D_y \hat{\phi}_{k|k-1}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Les matrices D_x et D_y représentent le modèle de mesure de l'ASO, qui est décrit pour chaque microlentille par les stencils

$$w_x = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad w_y = -w_x^T, \quad (3.45)$$

où d est la taille d'une microlentille dans le plan pupille. Un suréchantillonnage de la phase turbulente par rapport à la mesure est possible pour avoir une grille de phase plus fine. En revanche, à cause de l'hypothèse d'invariance spatiale, le modèle dynamique et le modèle de mesure doivent avoir la même résolution spatiale. Une interpolation des mesures y_k fournies par l'ASO est donc nécessaire pour que la phase estimée et les mesures prédictes $\hat{y}_{k|k-1}$ soient de même résolution. Le choix de l'interpolation des mesures s'est porté dans [Gilles *et al.*(2013)] et [Massioni *et al.*(2015)] sur une duplication (interpolation au plus proche voisin). Enfin, le projecteur P de l'équation (2.37) est donné par

$$P = (N^T N)^{-1} N^T I_{\text{int}} A, \quad (3.46)$$

où A est la matrice du modèle (3.40), qui dans le cas scalaire $A = \alpha$ est identique en base de Fourier ou en base zonale. L'opérateur N est la matrice d'influence du miroir déformable décrite avec un échantillonnage spatial très fin, et I_{int} est une matrice d'interpolation au plus proche voisin permettant de passer de l'échantillonnage des phases zonales reconstruites par le filtre de Kalman vers l'échantillonnage des fonctions d'influence.

3.2.2 Régulateur LQG-DKF multicouche

Le second régulateur utilisant un filtre de Kalman distribué, et que nous nommerons LQG-DKF multicouche, est un reconstructeur multicouche [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)], dont le modèle dynamique de chaque couche est identique à (3.38). Son modèle dynamique pour une reconstruction de n_L couches turbulentes en base de Fourier est pour la fréquence spatiale ν :

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{k+1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{k+1}^{n_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{+2j\pi T(V_x^1 \nu_x + V_y^1 \nu_y)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha e^{+2j\pi T(V_x^{n_L} \nu_x + V_y^{n_L} \nu_y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_k^1 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_k^{n_L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^{n_L} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

et la matrice du modèle de mesure est

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (X_\nu Y_\nu + X_\nu - Y_\nu - 1) & \cdots & (X_\nu Y_\nu + X_\nu - Y_\nu - 1) \\ (X_\nu Y_\nu + Y_\nu - X_\nu - 1) & \cdots & (X_\nu Y_\nu + Y_\nu - X_\nu - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

où (V_x^l, V_y^l) sont les composantes de vent de la l -ième couche turbulente du modèle. Chaque bruit v^l a pour matrice de covariance Σ_v^l calculée avec $\beta_l \tilde{C}_\phi(\nu)$, où $\tilde{C}_\phi(\nu)$ est défini dans (2.57).

3.2.3 Comparaison de performance des régulateurs LQG-DKF (cas type VLT NAOS)

Les comparaisons de performance de régulateurs LQG utilisant un filtre de Kalman distribué avec un correcteur à action intégrale n'ont pas été faites dans la littérature jusqu'à présent pour un cas SCAO. Nous allons réaliser ces comparaisons pour les régulateurs de la section 3.2, le LQG-DKF [Massioni *et al.*(2011)] et LQG-DKF multicouche [Gilles *et al.*(2013)] pour la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 3.2. Les modèles et échantillonnages utilisés sont décrits ci dessous :

1. Le correcteur à action intégrale classique, avec un gain $g = 0, 6$ et 7 valeurs propres filtrées dans le calcul de la matrice de commande (valeurs qui ont été optimisées avec la performance).
2. Un régulateur LQG-DKF [Massioni *et al.*(2011)] construit avec un modèle AR1 simple (3.39) dans une base zonale de 15×15 points, soit un échantillonnage linéaire de 1 point par microlentille. La phase reconstruite comporte 205 points dans le plan de la pupille du télescope.
3. Un régulateur LQG-DKF multicouche [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)] construit avec un modèle AR1 multicouche (3.38) dans une base zonale de 15×15 points, soit un échantillonnage linéaire de 1 point par microlentille. La phase reconstruite comporte 205 points dans chaque couche, soit 615 points au total (3 couches).
4. Un régulateur LQG-DKF [Massioni *et al.*(2011)] dans une base zonale de 29×29 points, soit un échantillonnage linéaire de 2 points par microlentille. La phase reconstruite comporte 773 points dans le plan de la pupille du télescope.
5. Un régulateur LQG-DKF multicouche [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)] dans une base zonale de 29×29 points, soit un échantillonnage linéaire de 2 points par microlentille. La phase reconstruite comporte 773 points dans chaque couche, soit 2 319 points au total (3 couches).
6. Un régulateur LQG-DKF [Massioni *et al.*(2011)] dans une base zonale de 57×57 points, soit un échantillonnage linéaire de 4 points par microlentille. La phase reconstruite comporte 2 977 points dans le plan de la pupille du télescope.
7. Un régulateur LQG-DKF multicouche [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)] dans une base zonale de 57×57 points, soit un échantillonnage linéaire de 2 points par microlentille. La phase reconstruite comporte 2 977 points dans chaque couche, soit 8 931 points au total (3 couches).

Nous constatons qu'aucun des régulateurs LQG-DKF testés n'apporte un gain de performance par rapport à un correcteur à action intégrale, et qu'un suréchantillonnage de la base zonale montre assez vite ses limites – avec une diminution de performance pour un échantillonnage de 4 points linéaires par microlentille par rapport à un échantillonnage de 2 points linéaires par microlentille. L'apport d'une estimation multicouche du LQG-DKF est faible devant l'ajout de complexité calculatoire par rapport au LQG-DKF avec modèle monocouche.

Ces résultats montrent que les régulateurs LQG-DKF sont peu performants dans un mode de fonctionnement SCAO, contrairement aux résultats qui avaient pu être obtenus en simulation dans des applications grand champ [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)].

Correcteur	Taille du vecteur d'état	Atmosphère
		Pseudo -bouillonnante
1. Intégrateur $g = 0,6$	185	50,5 %
2. LQG-DKF de [Massioni <i>et al.</i> (2011)], 15×15 points	205	41,8 %
3. LQG-DKF multicouche de [Gilles <i>et al.</i> (2013)], 15×15 points	615	42,8 %
4. LQG-DKF de [Massioni <i>et al.</i> (2011)], 29×29 points	773	47,3 %
5. LQG-DKF multicouche de [Gilles <i>et al.</i> (2013)], 29×29 points	2 319	48,2 %
6. LQG-DKF de [Massioni <i>et al.</i> (2011)], 57×57 points	2 977	46,8 %
7. LQG-DKF multicouche de [Gilles <i>et al.</i> (2013)], 57×57 points	8 931	47,6 %

TABLE 3.4 – Performance des régulateurs LQG-DKF et LQG-DKF multicouche de la section 4.1, pour une atmosphère pseudo-bouillonnante et un échantillonnage de la base zonale de 1 ou 2 points linéaires par microlentille

On peut en effet conjecturer que des ASO sondant des directions différentes permettraient d'obtenir des informations à une résolution plus fine que la grille de chacun des ASO, ceci grâce au recouvrement des volumes turbulents. Ce n'est pas le cas en SCAO, où les directions d'analyse et de correction sont les mêmes, et où un seul ASO est utilisé.

Une étude plus détaillée des dégradations de performance liées aux hypothèses d'invariance spatiale du DKF sera présentée dans le chapitre 4, ainsi que le développement de régulateurs LQG en base zonale sans hypothèse d'invariance spatiale. Mais nous pouvons déjà montrer la figure 3.2, qui illustre les dégradations en bord de pupille et la moins bonne interpolation des mesures pour un LQG-DKF en comparaison avec un LQG construit sans hypothèse d'invariance spatiale avec le même modèle dynamique en base zonale.

Nous pouvons en effet constater sur cette figure que la variance de phase résiduelle est plus importante en bord de pupille avec le LQG-DKF qu'avec le LQG construit sans l'hypothèse d'invariance spatiale. Ce phénomène semble principalement dû au fait que les noyaux de convolution des gains de Kalman ont une étendue spatiale assez importante, comme on peut le voir sur la figure 3.3. Cette perte de performance du DKF par rapport au filtre de Kalman standard a également été constatée par [Beghi *et al.*(2013)] dans un cas simplifié. Une amélioration a été proposée en tenant compte de la transformée

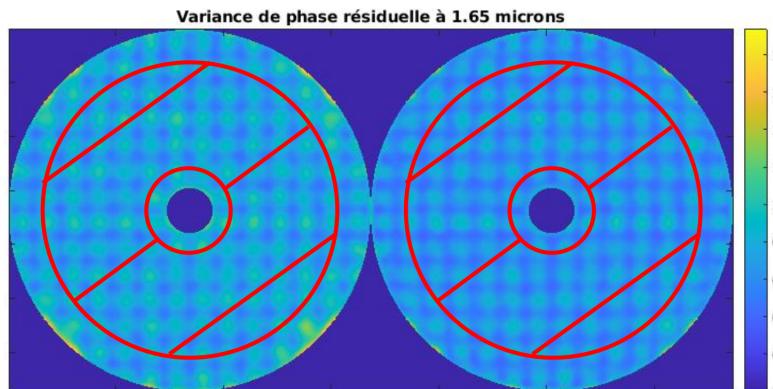


FIGURE 3.2 – Variance de phase résiduelle à $1,65 \mu\text{m}$, pour un système d’OA type VLT NAOS et 2 lois de commande différentes. À gauche : régulateur LQG-DKF [Massioni *et al.*(2011)] avec le modèle dynamique (3.39). À droite : régulateur LQG en base zonale avec le modèle localisé en base zonale $\phi_{k+1} = \alpha\phi_k + v_k$ et le même échantillonnage spatial (2 points linéaires par microlentille), sans hypothèse d’invariance spatiale. Les rapports de Strehl sont donnés à $1,65 \mu\text{m}$: (1) en pleine pupille ; (2) en « cœur » de pupille (loin des bords), dans la zone hachurée (une couronne de microlentilles supprimée autour de l’occultation centrale, et une couronne de 1,5 microlentille supprimée sur le bord externe). À gauche : (1) 47,3 % ; (2) 48,4 %. À droite : (1) 52,5 % ; (2) 53,2 %.

de Fourier de la fenêtre rectangulaire du noyau, c'est-à-dire en intégrant dans l'équation (3.43) des sinus cardinaux. Cette modification n'a pas été testée ici.

De plus, la variance résiduelle est plus importante entre 4 actionneurs, donc au centre des microlentilles, ce qui est également illustré par le calcul du rapport de Strehl en cœur de pupille. Ceci illustre donc la moins bonne interpolation effectuée par le DKF lors d'une phase reconstruite suréchantillonnée par rapport aux mesures de l'ASO, ce qui nécessite une interpolation des vraies mesures fournies par l'ASO.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exploré les différentes modélisations bouillonnantes en base de Zernike, avec également une prise en compte d'un comportement de *frozen flow* dans le Frozen LQG et le LQG tiède. Nous avons vu l'intérêt de ces régulateurs mixtes zonal et Zernike dans le cas où les atmosphères sont à dominante *frozen flow*. Cependant, dans la perspective de construire des régulateurs plus performants et surtout mieux adaptés à décrire des comportements de *frozen flow*, le chapitre 4 abordera les représentations d'état en base zonale avec prise en compte explicite du comportement *frozen flow*. Deux applications illustreront la performance des nouveaux régulateurs obtenus : un cas d'observation astronomique et un cas d'imagerie d'un satellite défilant en orbite basse.

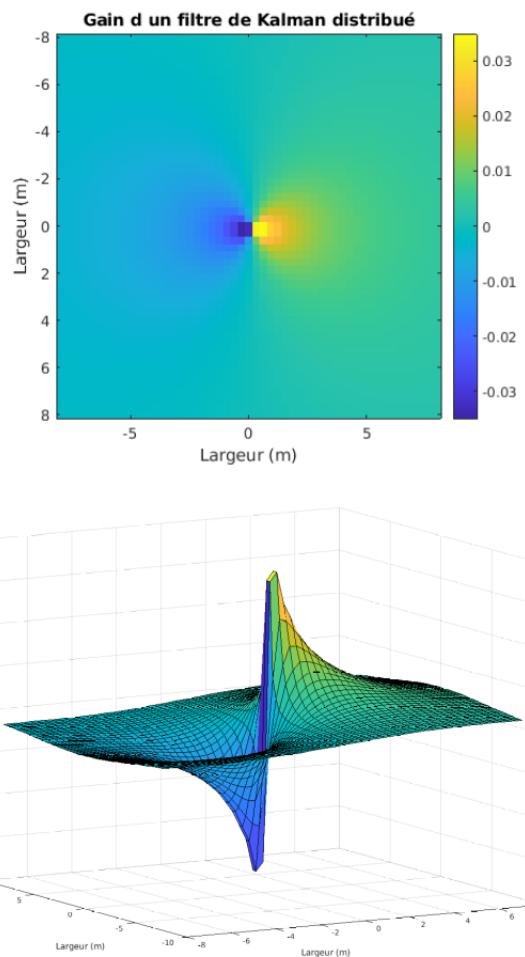


FIGURE 3.3 – Gain d'un filtre de Kalman distribué (noyau de convolution). Il s'agit ici du gain à appliquer aux mesures suivant l'axe (O,x). En haut : représentation 2D ; en bas : représentation 3D.

Chapitre 4

Commande LQG : modèles localisés en base zonale sous hypothèse de Taylor multicouche

Sommaire

4.1	Introduction	73
4.2	Commande haute performance des systèmes d'optique adaptative basée sur des modèles zonaux, avec applications à l'astronomie et au suivi de satellites	74
4.3	Extensions de l'article : Étude de performance et de robustesse de régulateurs LQG avec une modélisation plus fine de la turbulence dans un cas de tracking de satellite en orbite basse.	92
4.4	Performance en fonction de l'élévation d'un satellite en orbite basse	100
4.5	Conclusion	102

4.1 Introduction

Ce chapitre présente une étude de différents régulateurs LQG proposés dans la littérature pour la commande des systèmes d'optique adaptative, en particulier ceux pour lesquels une base zonale est utilisée [Piatrou et Roggemann(2007), Jackson *et al.*(2015), Juvénal *et al.*(2016a)], ou ceux qui sont de construction proche de nos développements mais en Zernike [Correia *et al.*(2015)] et enfin la modélisation en base de Zernike servant de référence car testée sur ciel [Sivo *et al.*(2014)]. Nous comparons les résultats à ceux obtenus grâce à nos nouvelles représentations de la turbulence atmosphérique en base zonale, s'appuyant sur des *a priori* de type *frozen flow* mais dont les modèles sont localisés dans la pupille et sont donc markoviens. Les modèles résultants ont des structures plus compactes que celles vues au chapitre précédent et conduisent à de meilleures performances de commande.

Tout d'abord, une approche multi-couches où chaque couche est en *frozen flow* est proposée pour des systèmes SCAO, en incluant une compensation en bord de pupille de type MAP très localisée, et avec une structure très creuse. Dans le but de réduire

la complexité calculatoire des régulateurs LQG en base zonale, de nouveaux modèles AR1 ou AR2 de la phase résultante dans la pupille sont proposés, identifiés à partir des fonctions d'autocorrélation spatio-temporelle de la turbulence. Des simulations de performance en boucle fermée montrent l'intérêt des régulateurs LQG construits sur ces nouveaux modèles compacts pour deux applications très différentes : en astronomie dans un mode de fonctionnement de type VLT SCAO, ainsi qu'en poursuite de satellite en orbite basse où ils démontrent un fort potentiel. En effet, dans cette deuxième application la turbulence atmosphérique apparente (compte-tenu de la poursuite du satellite par le télescope) présente un comportement de type *frozen flow* à très haute dynamique, pour lequel les régulateurs en base zonale avec modèles AR sont particulièrement performants tout en conservant une complexité calculatoire raisonnable et compatible avec les cadences rapides des systèmes d'OA dédiés à cette application.

Ces développements et résultats de simulation ont été présentés dans l'article [[Prengère et al.\(2020b\)](#)] de journal « *Zonal-based high-performance control in adaptive optics systems with application to astronomy and satellite tracking* » (Commande haute performance des systèmes d'optique adaptative basée sur des modèles zonaux, avec applications à l'astronomie et au suivi de satellites), qui est reproduit dans ce chapitre en section [4.2](#).

Des études complémentaires de performance et de robustesse, avec une modélisation plus fine de la turbulence atmosphérique et dans un cas d'observation de satellite en orbite basse, ont été présentées lors de la conférence OPTRO2020 qui s'est tenue en février 2020 à Paris ; l'article [[Prengère et al.\(2020a\)](#)] publié dans les actes de cette conférence est également reproduit dans ce chapitre en section [4.3](#). Ces études de robustesse tiennent compte d'erreurs sur les profils de vents naturels (par opposition aux vents apparents de défilement des couches turbulentes dus au déplacement du satellite). Les erreurs et profils sont inspirés des mesures Stereo-SCIDAR de J. Osborn [[Osborn et al.\(2013\)](#), [Osborn et al.\(2016\)](#)].

Enfin, une étude en fonction de l'élévation [[Prengere et al.\(2020\)](#)] a été présentée à la conférence OSA2020 en juin 2020 à Vancouver, avec l'évaluation de performance de plusieurs régulateurs pour différentes positions géographiques du satellite dans le ciel, ce qui permet d'appréhender de voir les cas où nos régulateurs seraient pertinents pour obtenir une bonne qualité d'image. Les calculs détaillés et les résultats sont présentés en section [4.4](#). Ces résultats de simulation restent cependant préliminaires, et devront être corroborés par des simulations plus complètes puis des expérimentations sur le ciel.

4.2 Commande haute performance des systèmes d'optique adaptative basée sur des modèles zonaux, avec applications à l'astronomie et au suivi de satellites



Zonal-based high-performance control in adaptive optics systems with application to astronomy and satellite tracking

LEONARD PRENGÈRE,* CAROLINE KULCSÁR, AND HENRI-FRANÇOIS RAYNAUD

Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Laboratoire Charles Fabry, 91127, Palaiseau, France

*Corresponding author: leonard.prengere@institutoptique.fr

Received 26 February 2020; revised 13 May 2020; accepted 14 May 2020; posted 15 May 2020 (Doc. ID 391484); published 16 June 2020

This paper presents a model-based approach to adaptive optics (AO) control based on a zonal (i.e., pixelized) representation of the incoming atmospheric turbulence. Describing the turbulence on a zonal basis enables the encapsulation of the standard frozen-flow assumption into a control-oriented model. A multilayer zonal model is proposed for single-conjugate AO (SCAO) systems. It includes an edge compensation mechanism involving limited support, which results in a sparser model structure. To further reduce the computational complexity, new resultant zonal models localized in the telescope pupil are proposed, with AR1 or AR2 structures, that match the spatial and temporal cross-correlations of the incoming turbulence. The global performance of the resulting linear quadratic Gaussian (LQG) regulator is evaluated using end-to-end simulations and compared to several existing controllers for two different configurations: a very large telescope SCAO and low earth orbit satellite tracking. The results show the high potential of the new approach and highlight possible trade-offs between the performance and complexity. © 2020 Optical Society of America

<https://doi.org/10.1364/JOSAA.391484>

1. INTRODUCTION

Atmospheric turbulence introduces wavefront distortions that degrade the images acquired by ground-based telescopes [1]. Adaptive optics (AO) systems can compensate for these nefarious effects in real time, using deformable mirrors (DMs) inserted in the optical path. Wavefront sensors (WFSs) provide discrete-time wavefront measurements used by a digital controller to compute the DM commands in a control loop. There are delays between the WFS measurements and the application of corresponding DM commands, and the turbulent phase evolves during the lag, limiting the efficiency of the phase correction. This phase evolution leads to a temporal error commonly named servo-lag error, which is a major limitation in high-performance AO systems such as the exoplanet detection instruments Gemini Planet Imager (GPI) [2] or SPHERE [3].

The most commonly used AO controller is the standard integrator (or integral action regulator), which was already operational on the first AO system in 1989, with COME-ON [4,5]. As the integrator is known to suffer from servo-lag error, predictive controllers have been proposed before the 2000s [6,7] and tested on the sky as early as 1999 [8]. Optimal (minimum variance) linear quadratic Gaussian (LQG) regulators made a step further with an explicit prediction of the phase, thanks to a Kalman filter based on a dynamic stochastic phase model [9–12]. This phase prediction capability allows for servo-lag

error reduction through the compensation of vibrations, wind-shake, and atmospheric turbulence. Several on-sky experiments have been realized with full [13,14] or low-order [15–18] LQG regulators. Two operational systems are currently equipped with LQG regulators: SPHERE-SAXO for tip-tilt correction [17] and GPI for the correction of three low-order modes (tip, tilt, and focus) [18].

Boiling turbulence models in Zernike basis using auto-regressive (AR) models of order 1 (AR1) [9,19] have been proposed for their low complexity. Turbulence AR Zernike models of order 2 (AR2) have been used successfully on the sky with LQG control on the CANARY demonstrator [14]. Frozen flow behaviors of turbulence layers are frequent and can contribute significantly to the controllable phase, specifically for high spatial frequency modes, as explained in [20]. This motivates modeling of the frozen flow behavior to benefit from a better phase prediction at short time scales, as in [21]. The zonal basis also allows a natural description of translations using simple nonlocalized operators, whereas it is less convenient for a modal-based description localized in the telescope pupil. A convenient Fourier domain frozen flow model has therefore been proposed by [22] for a fast wavefront reconstruction. However, measurements are needed in the Fourier domain at each iteration, and obtained through an iterative transformation using discrete Fourier transform. A Frozen LQG combining Zernike and

zonal basis has been proposed [23] to account for the frozen flow hypothesis while keeping a boiling-type turbulence model. To do so, phase prediction is performed in zonal basis by translating the phase screen estimated thanks to a Kalman filter in Zernike basis.

The zonal basis allows for a very simple description of the frozen flow, and several approaches have been proposed to derive Markovian quasi-frozen flow models. A zonal multilayer atmosphere model has been used to design an LQG regulator for multiconjugate AO (MCAO) in [24] or for multi-object AO in [25]. Under the spatially invariant and frozen flow hypothesis, an LQG regulator with a distributed Kalman filter (LQG-DKF) has been proposed for MCAO in [26,27]. The method, as shown later in this paper, suffers in SCAO from performance degradation due to approximations in the measurement model and to the finiteness of the telescope pupil.

In this article we revisit the works of [24,25,28,29] to propose new zonal models that account for a frozen flow behavior of the turbulence. A multilayer zonal-based model with frozen flow assumption, similar to the hypothesis in [24,25], is proposed for SCAO systems but with an edge compensation mechanism that involves limited support, inducing a sparser model structure compared to the literature. To further reduce the computational complexity that can be problematic for multilayer atmosphere models of AO systems, we also propose, in line with the spatio-angular LQG (SA-LQG) [25,29], new resultant (i.e., defined in the telescope pupil) models with AR1 and AR2 structures in a zonal basis. The resultant AR1 model features a sparser transition matrix, and the AR2 models take full advantage of spatial and temporal cross-correlations. (Note: They are not supposed to have diagonal matrix parameters.) All these quasi-frozen flow models depend on atmosphere priors, which can be estimated from AO telemetry [20,30] or SCIDAR measurements [31–33].

Global control performance of the corresponding zonal-based LQG regulators is evaluated, thanks to end-to-end simulations with the object-oriented MATLAB adaptive optics (OOMAO) [34] simulator. The use of priors naturally raises the question of robustness in performance to errors in particular with respect to the wind profile, which we also address. The many LQG regulators (eight in total) are compared in two quite different configurations: an astronomical case of the very large telescope Nasmyth adaptive optics system (VLT-NAOS) type, and a satellite tracking case with a low earth orbit (LEO) configuration similar to [35]. Our results show the high potential of the new regulators, with impressive results in the satellite case, and highlight the possible trade-offs between the performance and complexity.

The paper has seven sections. Section 2 introduces the multilayer frozen flow state space modeling for LQG regulators. A first control performance study is conducted in Section 3 for LQG regulators based on different models of disturbance and WFS, including the spatially invariant LQG-DKF, allowing us to give orientations for model choices and parameters. To reduce computational complexity, Section 4 presents the derivation of the resultant AR models of order 1 and 2. In Section 5, end-to-end simulations in the VLT-NAOS-like case are performed for different turbulence behaviors. Multilayer and resultant zonal-based LQG regulators are compared against a standard integral

action controller, LQG regulators based on Zernike AR2 boiling models similar to the ones tested on sky [14], and against the frozen LQG [23] adapted to a multilayer atmosphere model. The performance robustness to errors on the wind profile is also evaluated. In Section 6, a performance assessment in the LEO satellite tracking case is conducted, together with an evaluation of performance robustness to the wind parameters of the ground layer and an assessment of the control performance when the signal-to-noise ratio (SNR) decreases. Finally, conclusions and perspectives are presented in Section 7.

2. ZONAL LQG REGULATOR UNDER FROZEN FLOW HYPOTHESIS

AO systems include real-time controllers that compute discrete time commands to be applied to the DM through a zero-order hold. It has been shown in [11] that the optimal continuous time optimal minimum variance control problem could be solved equivalently using a discrete time formulation. Each discrete time quantity then corresponds to the average of its continuous time value over one sampling period T , where T is the AO loop sampling period. This optimal control can be obtained under the form of an LQG controller if one can build a linear state-space representation of the AO loop including the disturbance. After a short reminder of the LQG AO control principle and equations (in Section 2.A), we focus in Sections 2.B and 2.C on the design of an adequate state-space model of the disturbance. Section 2.D details the measurement model associated with the disturbance state-space representation.

A. LQG Regulator for SCAO Systems

A block diagram presenting the principle of an AO loop is given in Fig. 1. The LQG regulator minimizes the residual phase variance ϕ^{res} [11]. At time $t = kT$, the optimal control u_k^{opt} is obtained by minimizing the criterion,

$$J_k^{\text{d}}(u_k) \triangleq E(||\phi_k^{\text{res}}||^2 | \mathfrak{J}_k) \triangleq \text{trace}(\text{Var}(\phi_k^{\text{res}} | \mathfrak{J}_k)), \quad (1)$$

where $\phi^{\text{res}} = \phi^{\text{Tel}} - \phi^{\text{cor}}$ is the residual phase in the telescope pupil and $\mathfrak{J}_k = \{y_0, \dots, y_k, u_0, \dots, u_{k-1}\}$ represents all past information (WFS measurements y and DM commands u). The turbulent phase in the volume restricted to the telescope pupil footprints is denoted by ϕ^{Tel} , and ϕ^{cor} is the correction phase generated by the DM. The DM is considered here to have a settling time fast enough with respect to the AO loop sampling period so that its dynamics can be neglected. However, a DM with slower response and/or badly damped dynamics could be considered as well to compensate for possible performance degradation, as explained in [10,36].

As $\phi_k^{\text{cor}} = Nu_{k-1}$ and $\phi_k^{\text{res}} = \phi_k^{\text{Tel}} - \phi_k^{\text{cor}}$ (see Fig. 1), the optimal control is written as

$$u_k^{\text{opt}} \triangleq \arg \min_{u_k} \left(J_k^{\text{d}}(u_k) \right) = (N^T N)^{-1} N^T \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}}, \quad (2)$$

where $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}} = E(\phi_{k+1}^{\text{Tel}} | \mathfrak{J}_k)$ is the minimum variance estimate of ϕ_{k+1}^{Tel} knowing \mathfrak{J}_k . The prediction $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}}$ can be computed by a Kalman filter, assuming that a Markovian state-space representation can be provided, for example, under the form

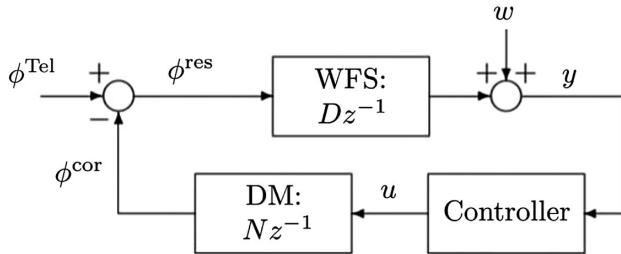


Fig. 1. Block diagram of an AO control loop. All blocks are linear and the total loop delay is supposed here to be two frames. The incoming (multilayer) turbulence above the telescope is denoted by ϕ^{Tel} .

$$X_{k+1} = AX_k + \Gamma v_k, \quad (3)$$

$$\phi_k^{\text{Tel}} = C_1 X_k, \quad (4)$$

$$y_k = CX_k + w_k - DN u_{k-2}, \quad (5)$$

where A , Γ and C_1 depend on the chosen disturbance model, C depends on the chosen measurement model, and $\{v\}$ and $\{w\}$ are mutually independent Gaussian white noises with known covariance matrices Σ_v and Σ_w , respectively. The matrix DN corresponds to the interaction matrix M_{int} , and appears in the measurement model in Eq. (5) because the WFS provides closed-loop measurements y (see Fig. 1). In this paper, the state vector X_k stores the turbulent phase temporal occurrences needed to describe the dynamical model. The predicted state $\hat{X}_{k+1|k}$ is recursively updated by the Kalman filter prediction equation,

$$\hat{X}_{k+1|k} = (A - L_\infty C) \hat{X}_{k|k-1} + L_\infty (y_k + M_{\text{int}} u_{k-2}), \quad (6)$$

where L_∞ is the asymptotic Kalman gain, computed offline from the solution of the discrete algebraic Riccati equation (see [37]),

$$L_\infty = A \Sigma_\infty C^T (C \Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1}, \quad (7)$$

$$\Sigma_\infty = A \Sigma_\infty A^T + \Gamma \Sigma_v \Gamma^T - A \Sigma_\infty C^T (C \Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1} C \Sigma_\infty A^T, \quad (8)$$

where Σ_∞ is the asymptotic estimation error covariance matrix. The prediction $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}}$ is obtained from $\hat{X}_{k+1|k}$ using Eq. (4), so

$$\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}} = C_1 \hat{X}_{k+1|k}. \quad (9)$$

The optimal control is readily obtained through Eqs. (9), (6), and (2) as soon as a state representation has been established. The purpose of the next two sections (2.B and 2.C) is to build a state-space representation in the form of Eqs. (3–5) under the hypothesis of a frozen flow atmospheric turbulence.

B. From Pure Frozen Flow to Localized Quasi-Frozen Flow Models

The frozen flow (or Taylor) hypothesis has been considered in several works for control-oriented atmospheric turbulence

modeling [23–27,38–41]. Each layer is moving according to a pure translation, and can therefore be expressed with a spatially invariant convolution equation,

$$\phi_{k+1} = h * \phi_k, \quad (10)$$

where h is the two-dimensional (2D) convolution kernel describing the translation, and ϕ_k is the infinite dimensional turbulent phase layer at time k . For a spatially sampled turbulence layer, ϕ can be represented by a 2D Gaussian stationary discrete random field with zero mean and spatial covariance C_ϕ . To design an optimal controller implementable in finite dimension, a finite-dimensional Markovian dynamical model of the atmospheric perturbation is needed, as explained in [38]. To update the portion ϕ^{Tel} of the turbulence located inside the telescope pupil \mathcal{P} , the convolution product from Eq. (10) uses points that are either inside \mathcal{P} , or in a finite area \mathcal{E} outside the telescope pupil. The phase points in \mathcal{E} shall be denoted by ϕ^{Edge} (see Fig. 2). The domain \mathcal{E} contains points needed to compute ϕ_{k+1}^{Tel} , so its size depends on the wind direction and norm (for each layer) and on the AO loop frequency. The convolution product in Eq. (10) for the phase points inside \mathcal{P} can also be expressed with matrix vector products as

$$\phi_{k+1}^{\text{Tel}} = A_{\text{Tel}} \phi_k^{\text{Tel}} + A_{\text{Edge}} \phi_k^{\text{Edge}}, \quad (11)$$

where A_{Tel} and A_{Edge} simply code the application of h to phase points in \mathcal{P} and \mathcal{E} , respectively. This model is not localized, as ϕ_k^{Edge} cannot be computed recursively from past values of ϕ^{Tel} and ϕ^{Edge} . To localize it in the telescope pupil, so that the phase evolution can be represented on a finite support, additional information on ϕ_k^{Edge} is needed. The simplest solution is to assume that we have no clues about points outside the telescope pupil, so we take $\phi_k^{\text{Edge}} = 0$. This assumption leads to the Markovian dynamical model,

$$\phi_{k+1}^{\text{Tel}} = A \phi_k^{\text{Tel}} + v_k, \quad (12)$$

where $A = A_{\text{Tel}}$ and $\{v\}$ is a Gaussian and temporally white noise that ensures adequate spatial statistics for ϕ through

$$\Sigma_v = E(v_k v_k^T) = \Sigma_\phi - A \Sigma_\phi A^T, \quad (13)$$

where $\Sigma_\phi \triangleq E(\phi^{\text{Tel}} (\phi^{\text{Tel}})^T) \triangleq \text{Var}(\phi^{\text{Tel}})$ is the covariance matrix of the sampled turbulent phase and is evaluated from the spatial covariance function C_ϕ . Due to stationarity, C_ϕ only depends on the distance ρ between two phase points [1]. Under von Kármán statistics, it is given by

$$C_\phi(\rho) = \left(\frac{L_0}{r_0} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{24}{5} \right) \Gamma(6/5) \right]^{5/6} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6} \pi^{8/3}} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0} \right)^{5/6} \times K_{5/6} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0} \right), \quad (14)$$

where Γ is Euler's Gamma function, $K_{5/6}$ is a modified Bessel function of the 2nd kind, with order $5/6$, and the Fried parameter r_0 and the outer scale L_0 are two macroscopic turbulent parameters [1]. For $\rho = 0$, we recover the theoretical variance σ_ϕ^2 of one phase point, so

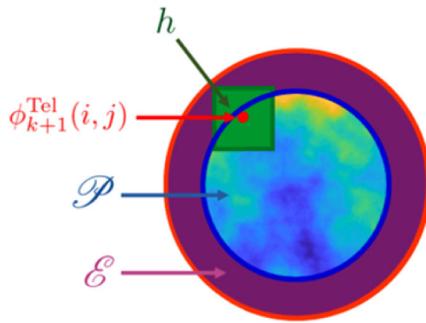


Fig. 2. Principle of the update step for the frozen flow dynamical model in Eq. (11). \mathcal{P} is the telescope pupil and \mathcal{E} is the set of points outside \mathcal{P} that are needed for the update of Eq. (11). As an example, the point $\phi_{k+1}^{\text{Tel}}(i, j)$ located at coordinates (i, j) has been updated with the convolution kernel h from Eq. (10) using points $\phi_k^{\text{Edge}} \in \mathcal{E}$ and $\phi_k^{\text{Tel}} \in \mathcal{P}$.

$$\sigma_\phi^2 = C_\phi(0) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \left[\left(\frac{24}{5}\right) \Gamma(6/5)\right]^{5/6} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6} \pi^{8/3}} \frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}}. \quad (15)$$

As A_{Tel} is nilpotent, the dynamical model in Eq. (12) is obviously stable. However, as pointed out by [23,29], this solution leads to poor performance and a maximum a posteriori (MAP) estimation of ϕ_k^{Edge} , knowing ϕ_k^{Tel} (i.e., a static minimum variance estimation) is known to give much better results [23–25,29,38].

C. Stochastic Dynamical Model with Edge Compensation

This MAP estimator requires only prior knowledge of the spatial covariance C_ϕ and can be written in compact form as

$$\hat{\phi}^{\text{Edge}} = \mathbb{E}(\phi^{\text{Edge}} | \phi^{\text{Tel}}) = M_{\text{MAP}} \phi^{\text{Tel}}, \quad (16)$$

where M_{MAP} is the MAP reconstruction matrix,

$$M_{\text{MAP}} = \text{Cov}(\phi^{\text{Edge}}, \phi^{\text{Tel}}) \Sigma_\phi^{-1}, \quad (17)$$

with $\text{Cov}(\phi^{\text{Edge}}, \phi^{\text{Tel}})$ the cross-covariance matrix of ϕ^{Edge} and ϕ^{Tel} . We then replace ϕ^{Edge} in Eq. (11) by $\hat{\phi}^{\text{Edge}}$ in Eq. (16) and define the dynamical stochastic model with edge compensation as

$$\phi_{k+1}^{\text{Tel}} = (A_{\text{Tel}} + A_{\text{Edge}} M_{\text{MAP}}) \phi_k^{\text{Tel}} + v_k, \quad (18)$$

where, as previously, the Gaussian white noise $\{v\}$ has a variance Σ_v chosen to ensure proper statistics:

$$\Sigma_v = \Sigma_\phi - (A_{\text{Tel}} + A_{\text{Edge}} M_{\text{MAP}}) \Sigma_\phi (A_{\text{Tel}} + A_{\text{Edge}} M_{\text{MAP}})^T. \quad (19)$$

From Eq. (14), it is clear that the matrix M_{MAP} defined in Eq. (17) is independent from r_0 and thus, also from the layers, and only depends on the global outer scale L_0 . As pointed out in previous works [42,43], to simulate very large turbulent and sampled phase screens, a static MAP estimation needs very few points inside the telescope pupil to deliver spatial statistics that

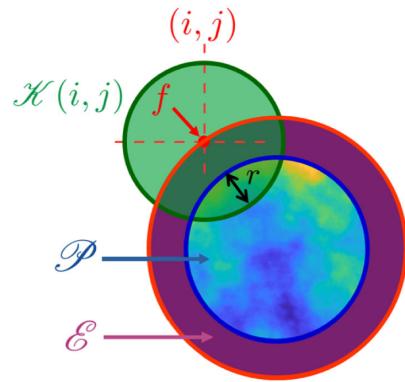


Fig. 3. Patch $\mathcal{K}(i, j)$ containing the subset of points used to estimate the phase point with coordinates (i, j) in \mathcal{E} . The width of the intersection between $\mathcal{K}(i, j)$ and \mathcal{P} is denoted by r . The point in \mathcal{E} located at the furthest distance from \mathcal{P} is denoted by f .

are consistent with theoretical values. We define the circular patch $\mathcal{K}(i, j)$ centered in (i, j) and containing the points of \mathcal{P} used in Eq. (16) to estimate the point in \mathcal{E} with coordinate (i, j) . This circular patch $\mathcal{K}(i, j)$ has an intersection with \mathcal{P} of width denoted by r , as illustrated in Fig. 3. The quality of the MAP reconstruction will thus depend on r .

To determine an appropriate value of r , we introduce the quality-of-reconstruction criterion,

$$Q_f(r) = 1 - \frac{\sigma_{\hat{f}}^{2,l}(r)}{\sigma_\phi^{2,l}}, \quad (20)$$

which represents a normalized estimation error variance. In this formula, $\sigma_{\hat{f}}^{2,l}(r)$ is the MAP estimator error variance of the furthest point f in \mathcal{E} for the turbulent layer l , and $\sigma_\phi^{2,l} = \beta_l \sigma_\phi^2$ is the turbulence variance for layer l , where the weights β_l are given by the C_n^2 normalized profile and satisfy

$$\sum_{l=1}^{n_L} \beta_l = 1. \quad (21)$$

This MAP estimation uses only points that belong to the intersection $\mathcal{K}(i, j) \cap \mathcal{P}$ of width r (see Fig. 3). As point f is the furthest point from \mathcal{P} , located on one of the main diagonals due to the pixelized square geometry of the convolution kernel h , it exhibits the slowest convergence of $Q_f(r)$ compared with other points in \mathcal{E} , when r increases.

Note that both $\sigma_\phi^{2,l}$ and $\sigma_{\hat{f}}^{2,l}$ depend linearly on β_l and $r_0^{-5/3}$, so that $Q_f(r)$ is independent from the turbulence C_n^2 profile. Therefore, the criterion $Q_f(r)$ does not depend on l , and can be rewritten as

$$Q_f(r) = \frac{1}{\sigma_\phi^2} \text{Cov}(\phi_f, \phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}}) \text{Var}(\phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}})^{-1} \text{Cov}(\phi_f, \phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}})^T, \quad (22)$$

where $\text{Cov}(\phi_f, \phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}})$ is the cross-covariance matrix of ϕ_f and $\phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}}$, and $\text{Var}(\phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}})$ is the variance matrix of $\phi^{\mathcal{P} \cap \mathcal{K}}$. As Q_f does not depend on the C_n^2 profile, it can be computed directly from C_ϕ and r for a given value of the outer scale L_0 . We choose to set the value of r according to

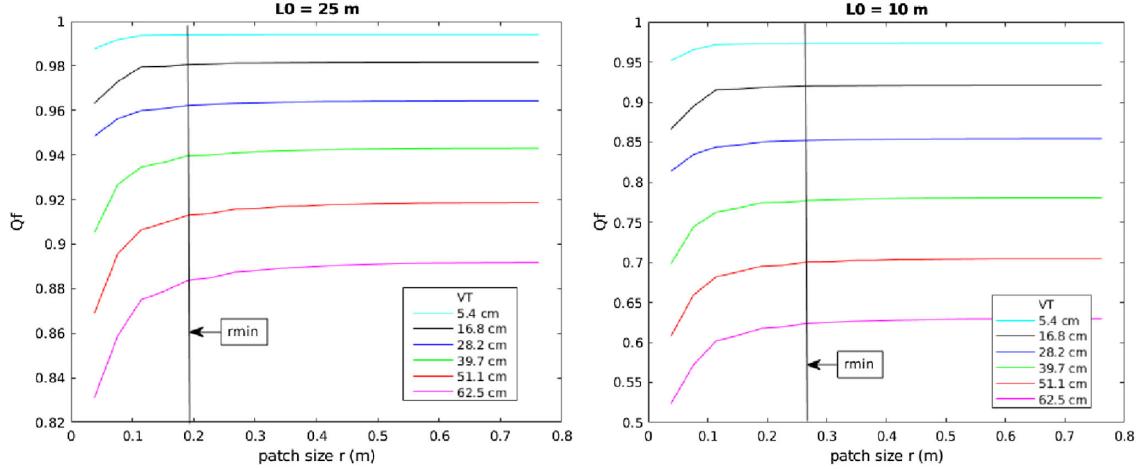


Fig. 4. Convergence of Q_f (and thus of the MAP estimator) for points estimated outside the telescope pupil, for two outer scales $L_0 = 25$ m (left) and $L_0 = 10$ m (right). Values of VT (phase translation norm for one AO frame) range from 5.4 cm to 62.5 cm. The worst value of r_{\min} is 19 cm for $L_0 = 25$ m and 26.7 cm for $L_0 = 10$ m.

$$r_{\min} = \{ \min(r) \mid Q_f(r) > 0.995 Q_f(D) \}, \quad (23)$$

with D the telescope diameter. This means that the maximum loss on criterion Q_f is of 0.5% with respect to taking all the points in D . Figure 4 illustrates the behavior of Q_f as a function of r for two outer scales ($L_0 = 25$ m and $L_0 = 10$ m) and different values of VT (wind speed times sampling period). The values chosen for VT represent the turbulent phase translation in one AO frame from astronomy cases (low values below 30 cm), to high altitude layers in LEO satellites tracking cases (high values close to 60 cm).

The estimation error variance $\sigma_{\tilde{f}}^{2,l}$ increases when L_0 decreases, so that Q_f decreases with L_0 . However, the variation of convergence speed of $Q_f(r)$ toward its final value $Q_f(D)$ is negligible. The MAP estimation can thus be forced to be spatially well localized, leading to a highly parallelizable structure. It can be compared to results obtained in [42] for phase screens generation, where the MAP estimation needed only two columns (25 cm) of the previous turbulent phase screen (8 m sampled by 64×64 pixels) to ensure spatial statistics consistent with theoretical values.

Matrices A_{Tel} and A_{Edge} in Eq. (18) depend on the wind direction through the kernel h [see Eqs. (10) and (11)]. The complete dynamical model, describing the n_L -layer turbulent volume $\phi_k^{\text{Tel}} = \sum_{l=1}^{n_L} \phi_k^{\text{Tel},l}$ is obtained by concatenation of all single layer models,

$$\begin{pmatrix} \phi_{k+1}^{\text{Tel},1} \\ \vdots \\ \phi_{k+1}^{\text{Tel},n_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A^{(n_L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_k^{\text{Tel},1} \\ \vdots \\ \phi_k^{\text{Tel},n_L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^{n_L} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

where the matrices $A^{(l)}$ have a covariance matrix defined according to the single layer model in Eq. (12) or Eq. (18); note that the superscript l indicates the layer number with v^l if v is a vector, and $M^{(l)}$ if M is a matrix. The mutually independent white

noises $\{v^l\}$ are defined similarly to Eq. (19), but they account for the layer dynamics through $A^{(l)}$ leading to

$$\Sigma_v^{(l)} = E(v_k^l (v_k^l)^T) = \beta_l \left(\Sigma_{\phi} - A^{(l)} \Sigma_{\phi} (A^{(l)})^T \right). \quad (25)$$

Note that in our formulation we consider a modified covariance matrix computed with a reduced number of points according to criterion in Eq. (20), instead of a MAP estimation based on the full telescope pupil. This approach differs from the optimal AR1 used in the SCAO mode in [38] and from the Explicit LQG in [25]. As for the multilayer model MCAO model in [24], the authors use a basis spline and the full pupil to compute the matrices $A^{(l)}$.

D. Measurement Models

Assuming a linear wavefront sensor and an integration time of one frame on the WFS camera (see Fig. 1), the closed-loop measurement equation would be

$$y_k = D\phi_{k-1}^{\text{res}} + w_k = D\phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k - M_{\text{int}}u_{k-2}, \quad (26)$$

where D is the WFS matrix, $\{w\}$ is a Gaussian white noise with a known covariance matrix Σ_w , and $\phi_k^{\text{res}} = \phi_k^{\text{Tel}} - Nu_{k-1}$. However, as the Kalman gain L_{∞} computation does not depend on the command values, we only need to describe the open-loop measurement model y_k^{OL} :

$$y_k^{\text{OL}} = D\phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k. \quad (27)$$

The matrix D must be adapted to the sampling grid chosen for the phase representation in the state-space model. As an example, the case of a Shack–Hartmann WFS with a phase sampling grid three times finer than the WFS grid is illustrated in Fig. 5.

The operations modeled by D simply consist of taking the difference of the average values along the subaperture edges using Simpson weights, based on a Fried geometry. It can be described using the stencils w_x and w_y for the x- or y-slopes:

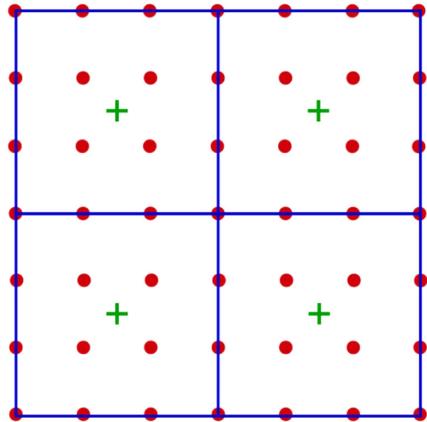


Fig. 5. Measurement model in the case of a Shack-Hartmann WFS where the phase sampling grid of the model is three times finer than the WFS resolution. Four subapertures are represented with blue lines. Phase points are indicated by red points, and slope measurements by green crosses. All 16 phase points of a subaperture are used to compute one measurement.

$$w_x = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad w_y = -w_x^T, \quad (28)$$

where d is the subaperture diameter. Matrix D is then built directly from the values given for w_x and w_y so that the matrix multiply corresponds to the stencil operation.

When a spatially invariant operator is used for perturbation and system modeling, as for example, for the distributed Kalman filter (DKF) in [44], phase samples and measurements must be at the same resolution. A convolution operator h_{wfs} is used instead of a matrix multiply, leading to the measurement model,

$$y_k^{\text{OL}} = h_{\text{wfs}} * \phi_{k-1} + w_k, \quad (29)$$

where $\phi_{k-1} = \sum_{l=1}^{n_L} \phi_{k-1}^l$. A measurement model with oversampled measurements and phases can then be written in the telescope pupil in matrix form, as

$$y_k^{\text{OS}} = D^{\text{OS}} \phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k, \quad (30)$$

where D^{OS} represents the operator that computes oversampled measurements from oversampled phases.

A model error analysis of LQG control design with dynamical and measurement models from Sections 2.B to 2.D will be studied in Section 3.C.

3. FIRST PERFORMANCE EVALUATION WITH ZONAL-BASED LQG REGULATORS

A. Simulation Parameters and Setup

Simulations are conducted with the object-oriented MATLAB adaptive optics (OOMAO) simulator in a VLT-NAOS-like case. We consider a science camera image wavelength at $\lambda_{\text{science}} = 1.654 \mu\text{m}$ and a WFS analysis wavelength at $\lambda_{\text{wfs}} = 0.55 \mu\text{m}$. The values are gathered in Table 1.

Table 1. VLT-NAOS-Like AO Parameters

Diameter	8 m
Central occultation	1 m
DM cartesian grid (Fried geometry)	15 × 15 actuators with 185 valid Gaussian influence function
	Coupling factor 0.3
Shack-Hartmann (squared subaperture grid)	14 × 14 sub-apertures with 152 valid
AO loop frequency	500 Hz
λ_{wfs}	0.55 μm
λ_{science}	1.654 μm

Table 2. Pseudo-Boiling Atmosphere Dynamical Parameters for End-to-End Simulations^a

Layer	3	1
Fractional C_n^2 energy	[0.5, 0.2, 0.3]	1
Wind speed (m/s)	[7.5, 12, 15]	10
Wind direction (°)	[0, 120, 240]	0
Turbulence configuration		

^aBlue corresponds to the first layer, green to the second layer, and purple to the third layer.

We select a middle range turbulence condition, with $r_0 = 10 \text{ cm}$ at 0.55 μm and an outer scale of $L_0 = 25 \text{ m}$. In this section, two turbulence configurations are considered: a pseudo-boiling resultant turbulence, and a frozen flow turbulence, with the parameters given in Table 2. Note that in all cases, each turbulent layer has a pure frozen flow behavior. For the pseudo-boiling case, we consider a three-layer atmosphere with wind profile, directions, and layers energy giving a resultant turbulent perturbation in the telescope pupil with a behavior very close to boiling. A graphical representation of each wind direction and speed is also proposed in Table 2, where the arrow lengths are proportional to the wind speed and represented on a 15 m/s circle radius, arrow directions are winds directions, and a fractional energy coefficient is written for each arrow.

In this paper, closed-loop performance is evaluated in terms of the Strehl ratio at the science camera wavelength, using the Maréchal approximation,

$$SR = \exp(-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2), \quad (31)$$

where $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ is the residual phase variance in the telescope pupil computed from 15000 phase occurrences of the AO loop. This ensures a numerical accuracy under 0.05 point of the Strehl ratio at the science camera wavelength.

B. Zonal Basis Sampling Choice

Zonal LQG regulators are, of course, affected by the spatial sampling of the turbulent phase model and by the phase interpolation needed when projecting the phase on the DM space to compute the commands through Eq. (2). The interpolation has been systematically done to correspond to the fine sampling

Table 3. Strehl Ratio at 1.654 μm of Zonal-Based LQG Regulator with a Boiling AR1 Dynamical Model, Using Different Sampling of the Zonal Basis

Linear sampling (points/actuator pitch)	1	2	3	4
LQG-KF AR1 boiling	42.2%	50.9%	51.7%	52.1%

of the influence functions. We have tested linear and nearest interpolation, which gave similar results, so we have chosen the nearest interpolation. As for the spatial sampling of the turbulent phase model, its effect on the closed-loop control performance can be studied with a simple dynamical model without edge effects: We use a simple dynamical model in the form $\phi_{k+1}^{\text{Tel}} = \alpha\phi_k^{\text{Tel}} + v_k$, where $\alpha < 1$ and associated with the standard measurement model in Eq. (27). This zonal LQG regulator will be called LQG-KF AR1 boiling. The spatial sampling ranges from one to four linear points estimated per actuator pitch (distance between two neighbored actuators); that is, from four to 16 points per subaperture.

As shown in Table 3, the performance increases very fast between one and two linear points per pitch, probably due to the ability of the model to represent a large part of the spatial frequencies that can be generated by the DM. We can deduce from that result that a sampling higher than two linear points per pitch mainly reduces the WFS aliasing, which is similar to LQG regulators when increasing the size of the Zernike modal basis (see [12,45]). We will thus select a minimum linear phase sampling of two points per pitch to analyze the closed-loop performance of zonal-based LQG regulators.

C. AO Model Impact on LQG Regulator Performance

The purpose of this section is to evaluate the performance of the DKF-based LQG regulator and the impact of edge errors for zonal models. To do so, we need to evaluate the impact of the different error sources, thanks to models that are built using different hypotheses. We thus consider several combinations of n_L -layer turbulence dynamical models and measurement models from Sections 2.B to 2.D for the LQG regulators summarized in Table 4. The oversampling is two linear points per actuator pitch, as proposed in the previous section. For the WFS model, the oversampling is done by measurement duplication, as in [26].

We study the three main sources of model errors identified hereafter. Table 5 gathers the performance of regulators [labeled (a)–(d) in the table] in terms of the Strehl ratio for a single frozen flow layer.

The first source of model error is the measurement model error when the measurement model resolution is higher than the real WFS. To evaluate this, (b) and (c) in Table 5 are compared as the only modification between them is that the WFS model is oversampled in (b). It is the main performance loss with 7.4 SR points. In SCAO, using oversampled LQG-DKF is therefore not a good solution. This result is contrary to the MCAO case [26], where measurements better span the telescope pupil.

The second source of model error is the phase model edge error, present with the spatially invariant dynamical model, but also present with the localized dynamical model such as Eq. (12)

Table 4. Zonal LQG Regulators According to Associated Models^{a,b}

Regulator Names	Associated Models
(a) LQG-DKF multilayer AR1	$\phi_{k+1}^l = \alpha\phi_k^l + v_k^l$ $y_k^{\text{OL}} = h_{\text{wfs}} * \phi_{k-1} + w_k$
(b) LQG-KF multilayer AR1 OS	$\phi_{k+1}^{\text{Tel},l} = A_{\text{Tel}}^{(l)}\phi_k^{\text{Tel},l} + v_k^l$ $y_k^{\text{OL}} = D^{\text{OS}}\phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k$
(c) LQG-KF multilayer AR1	$\phi_{k+1}^{\text{Tel},l} = A_{\text{Tel}}^{(l)}\phi_k^{\text{Tel},l} + v_k^l$ $y_k^{\text{OL}} = D\phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k$
(d) LQG-KF + MAP multilayer AR1	$\phi_{k+1}^{\text{Tel},l} = (A_{\text{Tel}}^{(l)} + A_{\text{Edge}}^{(l)}M_{\text{MAP}})\phi_k^{\text{Tel},l} + v_k^l$ $y_k^{\text{OL}} = D\phi_{k-1}^{\text{Tel}} + w_k$

^aAll turbulence models are of AR1 type in each layer, oversampling is two linear points per actuator.

^bTo ease reading of the table, here are a few short descriptions:

- (a): spatially invariant models based on convolution kernels (that is, the DKF case based on the infinite pupil hypothesis) where the coefficient $\alpha < 1$ insures stability;
- (b): same oversampling for phase and measurements in matrix form (finite pupil) and without edge compensation;
- (c): any sampling of the phase, but non-oversampled measurements, in matrix form (finite pupil) without edge compensation; and
- (d): any sampling of the phase, but non-oversampled measurements, in matrix form (finite pupil) with edge compensation using MAP estimation.

without MAP edge compensation. By comparing (a)–(c) to (d), we can see that a localized phase dynamical model without MAP compensation for the pupil edge leads to a loss greater or equal to 4.6 SR points.

The last source of model error is the measurement model edge error, when a spatially invariant measurement model is used, although WFS measurements are localized in the telescope pupil. The corresponding loss is evaluated by comparing (a) with (b), and the loss is only 1.2 SR points.

We can deduce from these results that a spatially invariant LQG-DKF regulator is not appropriate for AO systems of the VLT-NAOS type. Moreover, the best results are obtained with a localized measurement model at WFS resolution, and with MAP compensation in the localized dynamical phase model. It is therefore a regulator that will be considered in the rest of the article. This regulator features a multilayer reconstruction with priors on wind profile (speeds and directions) and on the C_n^2 profile. Although this kind of modeling has been shown to improve performance in wide field AO [24,40], computational complexity is an issue even in SCAO, especially when the number of reconstructed layers increases. Indeed, the offline computational complexity of the Riccati equation grows with $\mathcal{O}(n_L^3)$, where n_L is the number of reconstructed layers, and the online prediction equation of the Kalman filter in Eq. (6) grows with $\mathcal{O}(n_L^2)$. An appealing strategy to reduce computational complexity while controlling performance degradation is to design resultant dynamical models in the telescope pupil, which is the topic of the next section.

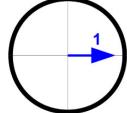
4. AUTO-REGRESSIVE RESULTANT DYNAMICAL MODELS

This section builds on the works of [24,25,29]. We propose zonal AR1 and AR2 models in SCAO instead of wide-field AO

Table 5. Strehl Ratio at 1.654 μm of Zonal-Based LQG Regulators with Spatially Invariant or Localized Dynamical and Measurement Models^a

Regulator Names	Measurement Model Edge Error	Measurement Model Interpolation Error	Dynamical Model Edge Error	Performance (Strehl Ratio)
(a) LQG-DKF multilayer AR1	YES	YES	YES	45.7%
(b) LQG-KF multilayer AR1 OS	NO	YES	YES	46.9%
(c) LQG-KF multilayer AR1	NO	NO	YES	54.3%
(d) LQG-KF + MAP multilayer AR1	NO	NO	FEW	58.9%

Turbulence configuration



^aWe evaluated the performance with one turbulent layer in frozen flow with a wind of 10 m/s on x-direction.

and propose an easy computation of the transition and covariance matrices. Stability is addressed in Section 4.C. The models are associated with the measurement model in Eq. (27) to obtain the state-space representations gathered in Section 4.D and used to design the LQG regulators. End-to-end performance is evaluated in Sections 5 and 6 through a comparison of many LQG regulators, in Zernike or zonal basis.

A. Resultant Auto-Regressive Model of Order 1 (Lazy SA-LQG)

The SA-LQG in [25,29] corresponds to a resultant AR1 dynamical model with MAP estimation of the points outside the telescope pupil based on all the points inside the telescope pupil, and resorts to bilinear interpolation to estimate the translated phase points. When resorting to bilinear interpolation, the one-step covariance matrix has a simple expression, leading to easy updates of the transition matrix and of the covariance matrix of the process noise v , as shown below.

We briefly present the SA-LQG principle in a SCAO configuration, which is a simplified case of the wide-field AO configuration proposed in [24,25]. The resultant phase in the telescope pupil, ϕ^{pup} , is obtained as the summation of n_L turbulent phases $\phi^{\text{Tel},l}$ in the telescope pupil,

$$\phi^{\text{pup}} = \sum_{l=1}^{n_L} \phi^{\text{Tel},l}. \quad (32)$$

The resultant AR1 dynamical model is

$$\phi_{k+1}^{\text{pup}} = A_{\text{pup}} \phi_k^{\text{pup}} + v_k, \quad (33)$$

where the process noise $\{v\}$ is a Gaussian white noise with the appropriate spatial covariance matrix Σ_v . The MAP estimation of ϕ^{pup} knowing ϕ^{Tel} in Section 2.C is applied here in the multilayer case with a given wind profile (speed and directions) and C_n^2 fractional energy distribution. It leads to

$$A_{\text{pup}} = C_{\phi}^{[1]} \Sigma_{\phi}^{-1}, \quad (34)$$

where the one-step temporal covariance matrix $C_{\phi}^{[1]} = E(\phi_{k+1}^{\text{pup}} (\phi_k^{\text{pup}})^T)$ of the resultant phase is evaluated with the multilayer model,

$$C_{\phi}^{[1]} = \sum_{l=1}^{n_L} \text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_k^{\text{Tel},l}). \quad (35)$$

Instead of computing $\text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_k^{\text{Tel},l})$ in an exact way using the theoretical spatial covariance matrix $C_{\phi}(\rho)$ in Eq. (14), this one-step temporal covariance matrix is computed from the dynamical model in Eq. (18):

$$\text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_k^{\text{Tel},l}) = \beta_l \left(A_{\text{Tel}}^{(l)} + A_{\text{Edge}}^{(l)} M_{\text{MAP}} \right) \Sigma_{\phi}, \quad (36)$$

where $A_{\text{Tel}}^{(l)}$ and $A_{\text{Edge}}^{(l)}$ are defined in Eq. (11) for each turbulent layer and M_{MAP} is defined in Eq. (17). It is immediately checked that $\text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_k^{\text{Tel},l})$ in Eq. (36) can be easily updated when turbulence and wind profiles change: $A_{\text{Tel}}^{(l)}$ and $A_{\text{Edge}}^{(l)}$ are modified according to the wind profile using bilinear interpolations, and the matrix M_{MAP} is modified according to the support defined by r_{\min} . From Eq. (36), the transition matrix in each layer is thus $A_{\text{pup}}^{(l)} = \beta_l (A_{\text{Tel}}^{(l)} + A_{\text{Edge}}^{(l)} M_{\text{MAP}})$, so that the resultant transition matrix becomes

$$A_{\text{pup}} = \sum_{l=1}^{n_L} \beta_l \left(A_{\text{Tel}}^{(l)} + A_{\text{Edge}}^{(l)} M_{\text{MAP}} \right), \quad (37)$$

where this expression benefits from the easy updates mentioned above, which is not the case of the global expression used generally under the form $A_{\text{pup}} = C_{\phi}^{[1]} \Sigma_{\phi}^{-1}$. Finally, the spatial statistics of $\{v\}$ are adapted to atmospheric turbulence priors through the covariance matrix $\Sigma_v = E(v_k v_k^T) = \Sigma_{\phi} - A_{\text{pup}} \Sigma_{\phi} A_{\text{pup}}^T$. The Lazy SA-LQG is the LQG regulator based on the AR1 resultant model defined by the transition matrix in Eq. (37) where the criterion in Eq. (23) is used to limit the number of phase points used for the MAP estimation.

To have a better idea of the sparsity of $A_{\text{pup}}^{(l)}$, sparse and non-sparse matrices are shown in Fig. 6 for one layer in the NAOS-like case used for the simulations in Section 5. The structure of the sparse matrix (Fig. 6, right) is clearly mainly diagonal, and its density (number of nonzero elements divided by total number of matrix elements) is 0.64%. It is less populated than the one shown in [29] (6, middle), where the density of 7.68% as more points are used for the MAP estimation.

As bilinear interpolation is used to compute the translation associated with the dynamical model in Eq. (18), this model will

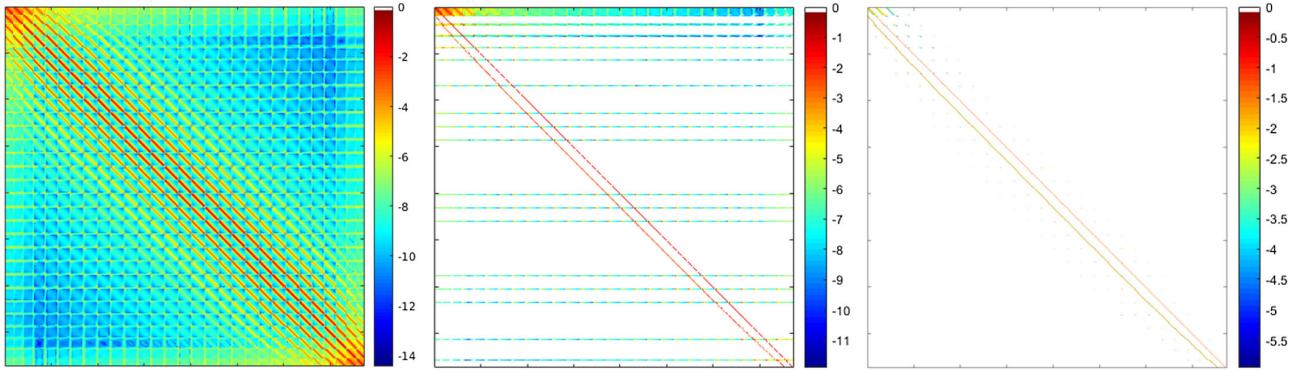


Fig. 6. A matrices in the case of a frozen flow atmosphere with a 10 m/s wind speed, $\frac{\pi}{4}$ wind direction, and a 500 Hz loop sampling frequency in logarithmic scale. Left: Matrix A for the AR1 model in Eq. (18) build with a MAP estimation on the full telescope pupil, like in the Explicit LQG from [25]. Middle: Corresponding model matrix A of the SA-LQG from [29] with a density of 7.68%. Right: Sparse matrix A_{pup} using a limited number of points according to (23); the density is 0.64%. White corresponds to null values.

be marginally stable in the case of an infinite telescope pupil. However, for a finite telescope pupil \mathcal{P} , the dynamical model at the telescope edges will affect the stability of Eq. (18) through the update of the phase points that lie inside \mathcal{P} . Since a frozen flow prediction using a MAP estimation based on all points in the telescope pupil (like in the Explicit LQG from [25]) is stable (i.e., its spectral radius is strictly less than 1), the modified transition matrix [(Eq. (37) with criterion from Eq. (22) and Eq. (23))] is also a stability matrix. Indeed, it also corresponds to a MAP estimation with respect to a smaller support, so the spectral radius of the corresponding operator is strictly less than 1 also, ensuring the stability of the dynamical model in Eq. (18).

B. Resultant Auto-Regressive Model of Order 2

It is well known that the phase temporal correlation is better represented with an AR2 model than with an AR1 model (see [29,46]). The AR2 model with diagonal matrices A_1 and A_2 has been proposed using either a Zernike basis, as in [14,28], or a zonal basis in [29]. In this section, we do not suppose the matrices to be diagonal anymore and derive from the Yule–Walker equations a fully resultant AR2 model in a SCAO configuration.

The model is defined in the pupil using the same priors (wind and turbulence profiles) as the AR1, and

$$\phi_{k+1}^{\text{pup}} = A_1 \phi_k^{\text{pup}} + A_2 \phi_{k-1}^{\text{pup}} + v_k, \quad (38)$$

where the process noise $\{v\}$ is a Gaussian white noise with the appropriate spatial covariance matrix Σ_v . From the above equation, the matrix-valued Yule–Walker equations are readily obtained as

$$\begin{cases} C_{\phi}^{[1]} = A_1 \Sigma_{\phi} + A_2 (C_{\phi}^{[1]})^T, \\ C_{\phi}^{[2]} = A_1 C_{\phi}^{[1]} + A_2 \Sigma_{\phi}. \end{cases} \quad (39)$$

The one- and two-step temporal covariance matrices of the resultant phase, respectively, $C_{\phi}^{[1]} = E(\phi_{k+1}^{\text{pup}}(\phi_k^{\text{pup}})^T)$ and $C_{\phi}^{[2]} = E(\phi_{k+1}^{\text{pup}}(\phi_{k-1}^{\text{pup}})^T)$, are computed from a multilayer frozen flow atmosphere model,

$$\begin{cases} C_{\phi}^{[1]} = \sum_{l=1}^{n_L} \text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_k^{\text{Tel},l}) = \sum_{l=1}^{n_L} \beta_l C_{\phi}(\rho - V^l T), \\ C_{\phi}^{[2]} = \sum_{l=1}^{n_L} \text{Cov}(\phi_{k+1}^{\text{Tel},l}, \phi_{k-1}^{\text{Tel},l}) = \sum_{l=1}^{n_L} \beta_l C_{\phi}(\rho - 2V^l T) \end{cases}, \quad (40)$$

with C_{ϕ} coming from Eq. (14). From Eqs. (39) and (40) we get

$$\begin{cases} A_1 = (C_{\phi}^{[1]} - C_{\phi}^{[2]} \Sigma_{\phi}^{-1} (C_{\phi}^{[1]})^T) (\Sigma_{\phi} - C_{\phi}^{[1]} \Sigma_{\phi}^{-1} (C_{\phi}^{[1]})^T)^{-1}, \\ A_2 = (C_{\phi}^{[2]} - A_1 C_{\phi}^{[1]}) \Sigma_{\phi}^{-1}. \end{cases} \quad (41)$$

Because Σ_{ϕ} and $C_{\phi}^{[1]} \Sigma_{\phi}^{-1} (C_{\phi}^{[1]})^T$ are close, their difference in Eq. (41) cannot be inverted using the approximated covariance matrix in Eq. (36) that was used in the AR1 case. The two matrices A_1 and A_2 will, therefore, be full.

We then choose Σ_v to ensure the proper value of Σ_{ϕ} :

$$\begin{aligned} \Sigma_v = & \Sigma_{\phi} - C_{\phi}^{[1]} A_1^T - C_{\phi}^{[2]} A_2^T - A_1 (C_{\phi}^{[1]})^T \\ & + A_1 \Sigma_{\phi} A_1^T + A_1 C_{\phi}^{[1]} A_2^T - A_2 (C_{\phi}^{[2]})^T \\ & + A_2 \Sigma_{\phi} A_2^T + A_2 (C_{\phi}^{[1]})^T A_1^T. \end{aligned} \quad (42)$$

Finally, the resultant AR2 model is put in state-space form by taking $X_k = (\phi_k^{\text{pup}} \ \phi_{k-1}^{\text{pup}})$, which leads to

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} X_k + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} v_k, \\ \phi_k^{\text{pup}} = C_1 X_k, \end{cases} \quad (43)$$

with $C_1 = (I, 0)$.

C. Stability of Resultant Auto-Regressive Dynamical Models

An important property of the resultant AR turbulence models is that they are necessarily stable. In the AR1 case, this stems directly from the fact that the model in Eq. (37) is a weighted sum [see Eq. (21)] of mono-layered and stable dynamical models. The resultant AR1 dynamical model (37) is then obviously stable.

Table 6. Zonal Models with Localized Resultant AR1 and AR2 Dynamical Models and Their Measurement Equation^{a,b}

Regulator Names	Associated Models
Lazy SA-LQG (resultant AR1)	$\phi_{k+1}^{\text{pup}} = A_{\text{pup}}\phi_k^{\text{pup}} + v_k$
LQG-KF + MAP (resultant AR2)	$y_k = D\phi_{k-1}^{\text{pup}} + w_k$ $\phi_{k+1}^{\text{pup}} = A_1\phi_k^{\text{pup}} + A_2\phi_k^{\text{pup}} + v_k$ $y_k = D\phi_{k-1}^{\text{pup}} + w_k$

^aThe spatial sampling of the zonal basis used for the turbulent phase model can be chosen independently of the WFS spatial resolution.

^bThe left column gives the labels used for the associated LQG regulators.

For the resultant AR2 model, the state matrix of the dynamical model in Eq. (43), namely,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

verifies a Lyapunov equation of the form $P = APA^T + Q$, with

$$P = \begin{pmatrix} \Sigma_\phi & C_\phi^{[1]} \\ (C_\phi^{[1]})^T & \Sigma_\phi \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \Sigma_v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

As Σ_ϕ is a covariance matrix with full rank, it is strictly definite positive. It is then immediately checked that, in this case, P is strictly definite positive, Q is semi-definite positive, and the pair $(A, Q^{1/2})$ is controllable. Taken together, these three conditions are sufficient to guarantee that A is a stability matrix, as explained in [47] (Chap. 11, pp. 456–457).

D. Associated Measurement Model

We have defined two new resultant zonal-based models: an easy updatable localized AR1 with a sparse structure and a simplified one-step covariance matrix, and a resultant AR2 dynamical model with a full structure that should hopefully deliver a better performance. They are associated with the measurement model in Eq. (27), where the WFS matrix D is naturally sparse in the zonal basis and easily adaptable to any sampling grid. Expressions are gathered in Table 6. The associated LQG regulators are then readily computed from the corresponding state-space formulations.

Table 7. Atmosphere Configurations Used in End-to-End Simulations, from Pseudo-Boiling to Frozen Flow Behavior^{a,b}

Atmosphere Resultant Behavior	Pseudo-Boiling (3 layers)	Mainly Boiling (3 layers)	Mainly Frozen Flow (3 layers)	Frozen Flow (1 layer)	Frozen Flow (1 layer)
Fractional C_n^2 (%)	[0.5, 0.2, 0.3]	[0.7, 0.1, 0.2]	[0.7, 0.1, 0.2]	1	1
Wind speed (m/s)	[7.5, 12, 15]	[7, 10, 15]	[7, 10, 15]	10	20
Wind direction (°)	[0, 120, 240]	[0, 120, 240]	[0]	0	0
Turbulence configuration					

^aOn the graphical representations, blue corresponds to the first layer, green to the second and purple to the third layer.

^bOnly one layer is considered in pure frozen flow configuration.

5. PERFORMANCE ASSESSMENT OF ZONAL LQG REGULATORS: ASTRONOMY CASE

A. Simulation Parameters and Controllers for a VLT-NAOS-Like System

We consider the same AO system configuration as in Section 3.A (Table 1), and we simulate five different turbulence configurations (see Table 7), ranging from a pseudo-boiling to a pure frozen flow turbulent behavior. These different behaviors allow the evaluation of control performance in various configurations of the resulting turbulence and also to discriminate between the candidate regulators.

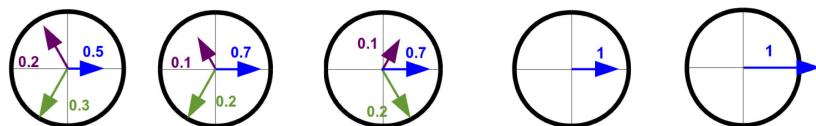
The multilayer and the AR1 and AR2 resultant LQG regulators developed in this article are built from a zonal model with a sampling of two linear points per actuator pitch (see regulators 7 to 9 in Table 8). It corresponds to a 29×29 Cartesian grid. Six other controllers that have been proposed previously in the literature are also evaluated:

1. The classical integral action controller with global gain $g = 0.6$.
2. A modal LQG regulator based on a boiling AR2 dynamical model, named LQG AR2 boiling, using 495 Zernike modes and similar to the controller that has been successfully implemented on the CANARY demonstrator [14].
3. The LQG AR2 boiling—large, same model as LQG AR2 boiling above, but with 779 Zernike modes.
4. The Frozen LQG multilayer regulator from [23], the first LQG regulator that combines pure frozen flow with a modal basis. The Frozen LQG multilayer includes an estimation step with the AR2 boiling dynamical model of point 2, and a prediction step in a zonal basis using frozen flow assumptions. It is implemented here for a multilayer reconstruction with the best edge compensation proposed in [23] (that is, a filling of the empty crescent with a prediction using the AR2 boiling model).
5. A zonal LQG regulator with a multilayer atmosphere model, tested for wide-field AO in [24] and in [25] where it is called Explicit LQG. The model corresponds to a MAP prediction in each layer using the entire pupil to estimate the predicted phase points. Note that this regulator in SCAO mode needs an additional scalar α coefficient close to 1 in the multilayer dynamical model,

Table 8. Strehl Ratio at 1.654 μm of Zonal Based LQG Regulators, Compared to a Standard Integral Action Regulator for Five Different Atmosphere Behaviors for a VLT NAOS-Like Case^a

Controller	State Vector Size	Atmosphere				
		Pseudo-Boiling	Mainly Boiling	Mainly Frozen Flow	Frozen Flow (10 m/s)	Frozen Flow (20 m/s)
1. Integral action $g = 0.6$	185	50.5%	50.6%	50.3%	50.7%	46.4%
2. LQG AR2 boiling from [14], 495 Zernike modes	990	53.7%	53.7%	53.6%	53.8%	51.8%
3. LQG AR2 boiling—large from [14], 779 Zernike modes	1558	54.6%	54.5%	54.4%	54.7%	52.5%
4. Frozen LQG multi-layer from [23], 495 Zernike modes	2970 (multi-layer) 990 (frozen flow)	52.6%	53.4%	54.6%	55.6%	55.6%
5. Explicit LQG from [24,25], 29 \times 29 points	2319 (multi-layer) 773 (frozen flow)	55.5%	55.8%	56.5%	58.9%	59.3%
6. SA-LQG from [25,29], 29 \times 29 points	773	52.5%	53.6%	55.3%	57.7%	57.4%
7. LQG-KF + MAP multi-layer AR1, Table 4, 29 \times 29 points	2319 (multi-layer) 773 (frozen flow)	55.6%	56.0%	56.4%	57.7%	57.4%
8. Lazy SA-LQG (resultant AR1), Table 6, 29 \times 29 points	773	52.5%	53.6%	55.3%	57.7%	57.4%
9. LQG-KF + MAP resultant AR2, Table 6, 29 \times 29 points	1546	53.8%	54.3%	55.9%	58.9%	59.5%

Turbulence configuration



^aThe numerical accuracy of the Strehl ratio calculations is under 0.05 point at the science camera wavelength.

$$\phi_{k+1}^{\text{Tel},l} = \alpha A^{(l)} \phi_k^{\text{Tel},l} + v_k^l, \quad (46)$$

where α is chosen between 0.9950 and 1 to ensure best performance, and must be tuned for each turbulence behavior.

6. A zonal LQG regulator with a resultant AR1 dynamical model, the SA-LQG, proposed in a wide-field AO in [25,29].

B. Control Performance Results

No less than a total of nine regulators have been evaluated exactly in the same conditions for the five turbulence configurations described in Table 7. The results are gathered in Table 8.

1. Performance Analysis

The worst performance for all atmosphere configurations is given by the integral action controller (1), which means that all the other regulators benefit from the Kalman filter phase prediction, whatever the model. The best performance is obtained, as expected, by the regulator that is built on the most informative model; that is, the Explicit LQG (5). Its turbulent phase dynamical model is indeed the closest one from the simulated turbulence, with all layers reconstructed using the complete knowledge of wind and turbulence profiles.

The two LQG AR2 boiling regulators (2 & 3) are well adapted to pseudo-boiling and mainly boiling atmosphere configurations, and the increase of Zernike modes in the model

(495 to 779) improves the overall performance as expected. However, their performance in the two frozen flow turbulence configurations (54.7% SR and 52.5% SR) is lower than all the LQG regulators (4–9) that are designed using frozen flow models.

As for the LQG regulators 4 and 7 that are based on a multilayer reconstruction, the Frozen LQG multilayer in Eq. (4) improves performance when the turbulence configuration tends to a frozen flow behavior, but is less interesting than the LQG-KF + MAP multilayer AR1 in Eq. (8), which gives slightly better results for less complexity. (See the state vector size and remember that the LQG-KF + MAP multilayer AR1 has a very sparse state matrix.)

Finally, we analyze the performance of the three LQG regulators based on the resultant models in the pupils 6, 8 and 9. The two SA-LQG regulators 6 and 8 give the worse performance in the pseudo-boiling configuration, with only a 52.5% SR. The approximations made to derive the very sparse model of the Lazy SA-LQG induce no visible performance degradation compared to the SA-LQG. The LQG-KF + MAP resultant AR2 in Eq. (9) gives good average performance in all three-layer turbulence configurations (pseudo-boiling, mainly boiling, and mainly frozen flow columns), and gives excellent performance in the two frozen flow configurations, with 58.9% SR and 59.5% SR. The increase of the model order (from AR1 to AR2) leads, as expected, to an improvement for all turbulence configurations because it allows for a better modeling of the resultant turbulence temporal correlation, as shown below.

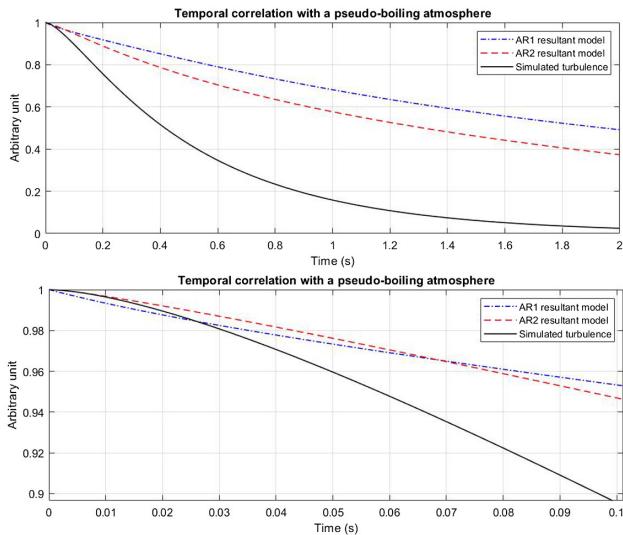


Fig. 7. Top: temporal correlation of one central pixel for AR1 (dotted-dashed) and AR2 (dashed) models compared with true turbulence (plain). Bottom: zoom on 0.1 s.

2. AR1 and AR2 Temporal Correlations

The temporal correlations are presented in Fig. 7 to appreciate the different behaviors between the AR1 and the AR2 resultant models.

Figure 7 (top) shows that the AR1 and AR2 models do not fit the true correlation (corresponding to the resultant three-layer turbulence). The zoom on the first 0.1 s in Fig. 7 (bottom) shows why the AR2 model gives better control results: The short-term correlation (time $< 0.01 = 5$ AO frames) is better represented with the AR2 model, which has a significant impact on the accuracy of the short-term phase prediction $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{Tel}}$ in Eq. (9) given by the Kalman filter.

3. Implementation

We have made all our calculations using MATLAB on a CPU-based computer featuring two processors Xeon E5-2699 V4 (22 cores each, 2.2 to 3.6 GHz, 35 Mb cache) and 512 Gb DDR4 ECC RAM.

For the most demanding regulator (the Frozen LQG multilayer with $n_x = 2070$ state components), less than 50 s were needed to compute the regulator given the C_n^2 and wind profiles (7 s to compute the state model and 40 s to compute the Kalman gain, which includes the resolution of the Riccati equation). For the regulator with best results (Explicit LQG with $n_x = 2319$), about 40 s are needed (5 + 35). The two resultant AR1 and AR2 regulators stay below 4 s and 13 s, respectively. There is, therefore, no problem for the update of such controllers regarding the evolution of atmospheric and wind profiles.

As for real-time implementation, it can be divided into two main parts: the command calculation, and the state and control term updates. The command calculation has exactly the same structure as an integrator equation: $u_k = u + M_1 y_k$, where M_1 is a matrix of dimensions $n_u \times n_y$, n_u being the number of actuators and n_y the number of measurements. This structure is obtained from the update of the regulator using Eqs. (2), (6),

and (9). The state and control term u updates can be separated in different parallel threads according to available memory and hardware, so we only give the number of matrix vector multipliers (MVMs) and their dimensions: There are four MVMs, corresponding to $n_x \times n_x$, $n_x \times n_y$, $n_x \times n_u$, and $n_u \times n_x$ operations. For the Explicit LQG with three layers and an upsampling of 2, $n_x = 2319$ roughly corresponds to 12 times the DM size. For the LQG-KF + MAP resultant AR2 and in the same configuration, $n_x = 1546$ is about eight times the DM size, whereas it is only four times for the Lazy SA-LQG ($n_x = 773$).

C. Performance Robustness of Resultant Models to Errors on Wind Profile

To analyze the robustness of the Lazy SA-LQG and LQG-KF + MAP resultant AR2, several tests have been done with a pseudo-boiling behavior and a mainly frozen flow behavior of the simulated multilayer atmosphere (see Table 7). We consider model errors consistent with wind profile measurements errors of the Stereo-SCIDAR [48] as indicated in [32]. We thus took two cases of wind profiles mismatch:

- weak errors, with a variation range of ± 2.5 m/s for the wind speed norm and $\pm 10^\circ$ for the wind direction; and
- strong errors, with a variation range of ± 5 m/s for the wind speed norm and $\pm 20^\circ$ for the wind direction.

The weak errors case corresponds to the Stereo-SCIDAR resolution on wind norms and directions for the slowest layers that are detected with nonzero speed, as described in [32].

We have applied the maximum error bounds described above to the true profiles (three simulated layers = 4^3 cases), for each weak or strong case in a pseudo-boiling or in a mainly frozen flow atmosphere, which makes $4^3 \times 4 = 256$ profiles combinations. These 256 different profiles have been used to compute the models of the Lazy SA-LQG and the LQG-KF + MAP resultant AR2, leading to 512 end-to-end simulations of 15000 samples each. The results are shown in Table 9 and Fig. 8.

From these results, we can see that the mean loss in performance due to wind profile mismatch is globally limited. We can thus expect a good performance robustness with respect to wind profile errors in various turbulence configurations. It also appears that, according to Table 9, the Lazy SA-LQG is more robust in performance than the LQG-KF + MAP resultant AR2, in particular with strong errors on the wind profile measurements and an atmosphere configuration with a dominant frozen flow behavior. However, better average and min–max results are obtained with the AR2 resultant model, except for the case with frozen flow atmosphere and strong errors on all wind profile values (see Table 9). In this case, a few simulations led to less than 52%, with a worse case at 48%. To limit performance variation, these model-based controllers could be complemented with a real-time characterization of the wind profile, as proposed in [32].

For other applications such as LEO satellite tracking in Section 6, turbulence dynamics are much faster and very high wind speeds due to satellite motion are known with good accuracy, as explained in next section.

Table 9. Performance of the Lazy SA-LQG and LQG-KF + MAP Resultant AR2 Regulators at 1.654 μm without Model Error, and with Weak and Strong Errors on Wind Profiles Priors Used for Model Computations^{a,b,c}

Regulator	Atmosphere	No Error	Weak Error \pm Std Dev	Strong Error \pm Std Dev
Lazy SA-LQG (resultant AR1)	Pseudo-Boiling	52.5%	52.4% \pm 0.1	52.0% \pm 0.2
LQG-KF + MAP (resultant AR2)	Mainly Frozen Flow	55.3%	55.0% \pm 0.2	54.5% \pm 0.4
	Pseudo-Boiling	53.8%	53.5% \pm 0.3	52.7% \pm 0.6
	Mainly Frozen Flow	55.9%	55.2% \pm 0.6	53.4% \pm 1.8

^aThe value of the standard deviation is also indicated. The numerical accuracy of the Strehl ratio is under 0.05 points at the science camera wavelength.

^bThe two different atmosphere configurations can be found in Table 7.

^cThe linear sampling of the zonal basis is two points per actuator pitch.

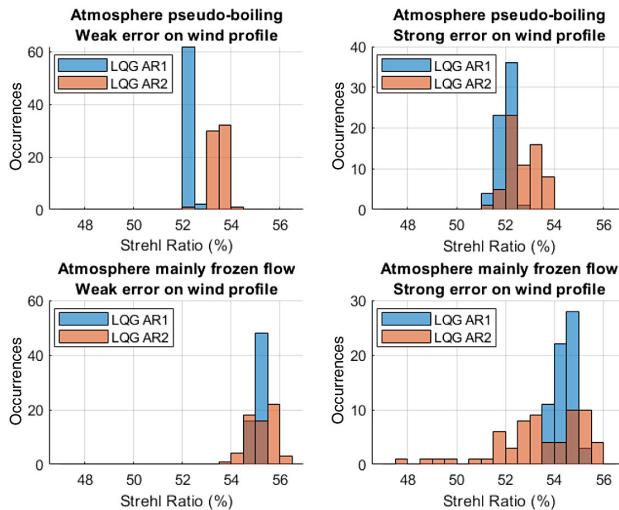


Fig. 8. Histogram of the performance results in four different cases (two different atmosphere and two wind profile error configurations), for AR1 and AR2 LQG regulators (see Table 6). Each bin width is 0.5 point of the Strehl ratio at 1.654 μm . The number of simulated trajectories in each of the four cases is 64.

6. PERFORMANCE ASSESSMENT OF ZONAL LQG REGULATORS: SATELLITE TRACKING CASE

A. Simulation Parameters

We consider here a low earth orbit observation, with a satellite at zenithal coordinates, an altitude of 765 km, and a speed of 7.5 km/s. We take the worst atmospheric condition proposed in [35], namely, a seeing condition of 2", equivalent to $r_0 = 5.67$ cm at 0.55 μm , and an outer scale of $L_0 = 25$ m. In this application the telescope is affected by both the natural behavior of the turbulence layers and the apparent layers translations due to the satellite motion above the telescope. For our end-to-end simulations, we consider a six-layer atmosphere with altitude and fractional energy distribution described in Table 10. The satellite speed induces very high values of the apparent wind norms in altitude and all with the same direction, as they correspond to the projection of the satellite speed on the layers. For the altitude layers (here from two to six), the atmospheric wind is comparatively very low and has been neglected. Only the ground layer keeps its natural atmospheric wind speed, with a 10 m/s norm and a different direction (see Table 10).

Table 10. Atmosphere Parameters for the LEO Satellite Tracking End-to-End Simulations^{a,b}

Layers	Fractional C_n^2 Energy (%)	Altitude (km)	Wind Speed (m/s)	Wind Direction (°)
1	0.45	0	10	60
2	0.1	2	19.60	0
3	0.125	5	49.02	0
4	0.125	7	68.63	0
5	0.15	10	98.04	0
6	0.05	12	117.64	0

^aThe C_n^2 profile is adapted from the six-layer atmosphere considered in [35].

^bLayers two to six have wind speeds that are the projection of the satellite speed on their altitudes.

We simulate a Shack–Hartmann WFS, with a 16×16 subaperture grid (204 valid), and with a measurement noise variance $\sigma_\phi^2 = 0.2 \text{ rad}^2$ at the edge of the subaperture, at 0.55 μm . The DM has a cartesian grid of 17×17 actuators in a Fried geometry, with 265 valid actuators. The AO loop rate is 2 kHz. The telescope diameter of the primary mirror is 1.8 m, with a central occultation of 20 cm. The WFS guide star is the satellite itself and a geometric Shack–Hartmann model is used for slopes computation. As we compare the performance of different controllers, we do not consider pointing errors of the tracking systems, and therefore assume that the science direction is fixed on the center of the satellite.

B. LQG Control Loop Settings

Closed-loop end-to-end simulations of the LEO satellite tracking case are performed on 15000 iterations, and the results are summarized in Table 11. The performance is evaluated at 800 nm. We keep the same numeration as Table 8, and description of the regulators is in Section 5.A.

The multilayer reconstruction with the LQG-KF + MAP multilayer AR1 from Table 4 has been evaluated with a reconstruction on all six layers or with a reconstruction on less than six layers, using for each resultant layer the modeling defined for the Lazy SA-LQG in Eq. (37) to reduce the computational complexity. The wind speed norm V_{eq} of a resultant layer is then computed according to

$$V_{\text{eq}} = \left(\frac{\sum_{l=n_1}^{n_l} \beta_l (V^l)^{5/3}}{\sum_{l=n_1}^{n_l} \beta_l} \right)^{3/5}, \quad (47)$$

Table 11. Strehl Ratio at 800 nm for Several LQG Regulators with Zonal or Modal Basis Dynamical Models Compared to a Standard Integral Action Regulator^a

Controller	State Vector Size	Strehl Ratio at 0.8 μm
1. Integral action $g = 0.55$	265	10.4%
8. Lazy SA-LQG (Table 6), 33 \times 33 points	989	27.2%
6. SA-LQG from [29], 33 \times 33 points	989	28.3%
2. LQG AR2 boiling from [14], 495 Zernike modes	990	29.0%
4. Frozen LQG multi-layer from [23], 495 Zernike modes	5940	39.5%
7. LQG-KF + MAP 2-layer AR1 (Table 4), 33 \times 33 points	1978	46.0%
9. LQG-KF + MAP resultant AR2 (Table 6), 33 \times 33 points	1978	50.1%
7. LQG-KF + MAP 4-layer AR1 (Table 4), 33 \times 33 points	3956	51.6%
7. LQG-KF + MAP 6-layer AR1 (Table 4), 33 \times 33 points	5934	51.9%
5. Explicit LQG from [24], 33 \times 33 points	5934	53.2%

^aThe LEO tracking atmosphere behavior is described in Table 10.

Table 12. Atmosphere Parameter for Zonal LQG Regulators with a Multilayer Reconstruction with a Reduced Number of Layers^a

Controller	Fractional C_n^2 Energy (%)	Wind Speed (m/s)	Wind Direction (°)
LQG-KF + MAP 2-layer AR1	[0.45, 0.55]	[10, 72.54]	[60, 0]
LQG-KF + MAP 4-layer AR1	[0.45, 0.1, 0.25, 0.2]	[10, 19.60, 59.37, 103.18]	[60, 0, 0, 0]

^aThe wind speeds and the C_n^2 profiles are computed with the atmosphere parameters from Table 10.

which is similar to the astronomy case [49], and where $\{n_1, \dots, n_l\}$ are the indexes of the layers with same wind direction to be concatenated in the model. We chose to take into account either two or four layers in the multilayer models to reduce the complexity with atmosphere parameters and wind profiles defined in Table 12.

C. Performance Results and Analysis

As expected, the multilayered zonal LQG regulators give very good performance. The Zernike LQG AR2 boiling regulator is close to a 30% Strehl ratio, giving much better results than the standard integral action controller. The latter performs poorly due to the bad seeing conditions and very fast dynamics of the perturbation. The Frozen LQG multilayer significantly improves the performance with respect to the LQG AR2 boiling in Zernike basis, but is much heavier in terms of computational complexity.

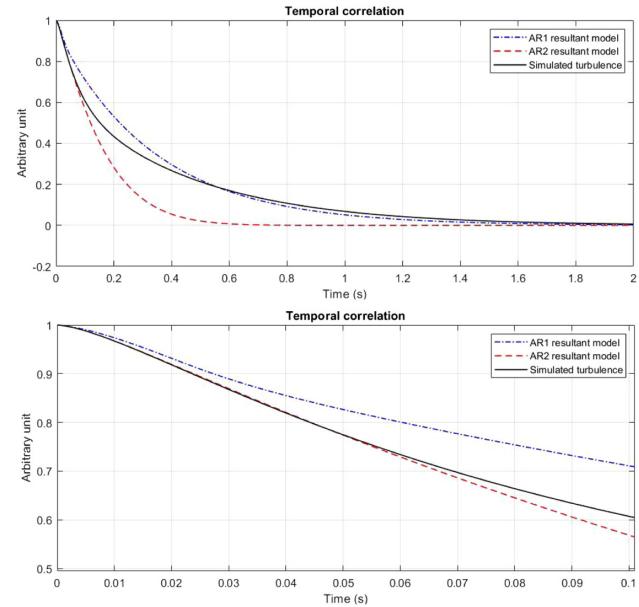


Fig. 9. Top: temporal correlation of one central pixel for AR1 (dotted-dashed) and AR2 (dashed) resultant models compared with true turbulence (plain). Bottom: zoom on 0.1 s.

From this point of view, the implementation of the 4, 5, and 7 regulators with a six-layer reconstruction and large state vectors may benefit from the latest developments in high-performance computing for tomographic AO (see, e.g., [50, 51]). It can be noted that the approximations in regulator 7 (the six-layer LQG-KF + MAP multilayer AR1 with truncated MAP estimation and bilinear interpolation) lead to limited performance loss when compared with Explicit LQG. The latter gives the best results with a 53.2% of Strehl ratio. It is also almost the most demanding one with $n_x = 5934$ state components, leading to approximately 316 s to compute the regulator (16 s for the state model and 300 s for the Kalman gain). Considering the discussion on complexity in Section 5.B.3, it would be interesting to further study its challenging real-time implementation at 2 kHz.

The Lazy SA-LQG, SA-LQG, and LQG AR2 boiling have similar performance, so that the LQG AR2 boiling stays very attractive with its low-size state vector (leading to less than 5 s for the offline calculations) and ease of use.

At last, the best compromise is obtained by the LQG-KF + MAP resultant AR2 with a 50.1% Strehl ratio and a limited state vector size of $n_x = 1978$, so that only 20 s are needed (6 s + 14 s) for the offline calculations. This regulator should not be too difficult to implement for real-time operations and thus seems perfectly adapted to this LEO satellite tracking application. Indeed, the priors used to compute its dynamical model are reliable because the value of the satellite speed is known with good accuracy. With such a level of performance, the hardware constraints could be relaxed to improve the SNR by lowering the frequency rate and thereby the measurement noise.

In terms of temporal covariance behavior, it can be seen that even though the AR1 model seems to give a correlation closer to the true average turbulence in Fig. 9 (top), it is clear in Fig. 9 (bottom) that the short-term correlation is much better

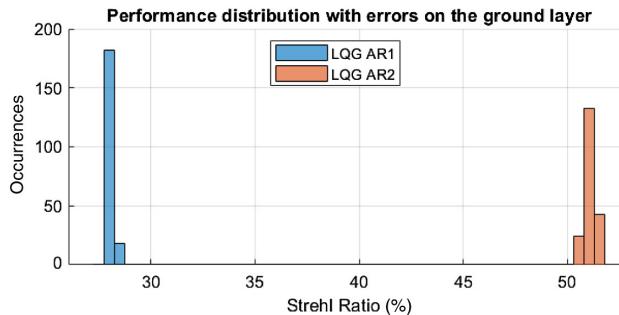


Fig. 10. Histogram of the performance results for the LQG regulators based on AR1 (Lazy SA-LQG) and AR2 (LQG-KF + MAP resultant AR2) resultant models (see Table 6). Each bin width is 0.5 point of Strehl ratio at 800 nm. The number of simulated trajectories for each model is 200.

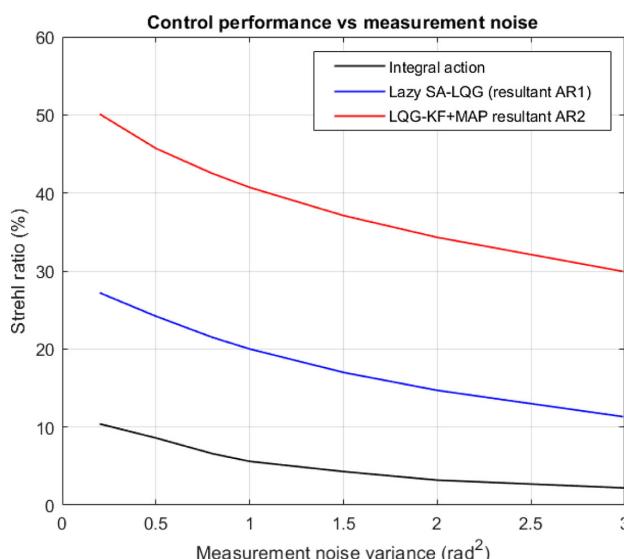


Fig. 11. Strehl ratio at 0.8 μm of Lazy SA-LQG and LQG-KF + MAP resultant AR2, compared with a standard integral action controller for seven different values of the WFS measurement noise variance. The numerical accuracy of the Strehl ratio calculations is under 0.05 point at the science camera wavelength.

represented with the AR2. This largely explains the significant performance improvement brought by the LQG-KF + MAP resultant AR2 over the Lazy SA-LQG and the SA-LQG (which behave similarly).

Performance histograms for the LQG regulators based on the AR1 and AR2 resultant models are shown in Fig. 10. Errors on wind speed and direction of the natural wind (first layer only) are taken uniformly over $[-2.5, 2.5]$ m/s and $[-10, 10]$ degrees, respectively. Results show a very good performance robustness with less than two points of Strehl ratio variation.

To further analyze the performance with different WFS measurement noise variances, simulations have been conducted with a range of variance values from 0.2 rad^2 to 3 rad^2 at the edge of the subaperture, at $0.55 \mu\text{m}$. The results are displayed in Fig. 11, which helps us appreciate the performance robustness with the increasing values of the measurement noise variance.

The gain of the integral action controller was not best-tuned because its performance is too poor. It stays below 10% of Strehl ratio for a measurement noise variance greater than 0.5 rad^2 . The Lazy SA-LQG stays roughly at 20 points under the LQG-KF + MAP resultant AR2. It therefore appears not as well adapted as the LQG-KF + MAP resultant AR2 regulator, which remains above 30% of Strehl ratio, even for a large measurement noise variance value of 3 rad^2 , and above 40% of Strehl ratio for a measurement noise variance of 1 rad^2 or less. Considering the high sampling AO loop rates usually used for space situational awareness (SSA) applications, the DM's dynamics may become non-negligible as the AO sampling frequency increases. As mentioned in Section 2.A, they can be accounted for in the design using standard control tools.

7. CONCLUSION

In this article we investigate LQG AO control with zonal turbulence models based on the frozen flow hypothesis for VLT-type systems in a SCAO configuration and for a LEO satellite tracking-type AO system. We propose a localized edge compensation mechanism consisting of an offline MAP estimation with reduced support, which leads to a sparser state matrix in the turbulence state models (a 0.64% density in our example). The support is defined by selecting a set of phase points so that less than 0.5% of the normalized estimation error variance is lost with respect to taking all the phase points inside the telescope pupil. We show that this change does not lead to any significant performance degradation. Based on a VLT-NAOS-type configuration, we first test the DKF [44] that appears to give disappointing performance results. To understand the reason for this low performance, we identify the impact of the different approximations affecting zonal-based regulators, from the spatially invariant DKF (infinite pupil hypothesis) to a multilayer dynamical model with finite pupil. We show that the DKF measurement model has a major impact on this performance degradation.

We then propose to design turbulence dynamical models that are resultant in the pupil, based on turbulence and wind profiles priors. This approach is similar to [24,25,29], where AR1 models are proposed for LQG regulators. Using the reduced support for MAP estimation and a simplification of the one-step covariance matrix calculation in the Yule–Walker equation resolution, we derive the Lazy SA-LQG, an AR1 model close to the zonal SA-LQG in [29]. A new AR2 resultant model (LQG-KF + MAP resultant AR2) is also proposed with full regression matrices. Note that these resultant regulators can be built using any number of layers without modifying their final dimensions.

No less than eight LQG regulators based on different modeling assumptions are then evaluated and compared with the integrator for an AO system in a VLT-NAOS-like case with an average seeing condition and good SNR. Performance results are compared, in particular with the regulator used on sky in [52], with the Explicit LQG in [25], and with the SA-LQG in [29]. Five different multilayer atmosphere configurations are simulated, from a quasi-boiling resultant atmosphere to a quasi-pure and pure frozen flow atmosphere. Among all the LQG regulators using resultant models, the LQG-KF + MAP resultant AR2 gives the best results, in particular when the

atmosphere is of the quasi-pure or pure frozen flow type. An analysis of model behavior through temporal covariances shows the AR2 resultant model is much more accurate for short-term covariance values, leading to a better phase prediction. As for robustness with respect to wind profile errors, we show that performance loss is globally limited, with a stronger robustness for AR1 models. Typical errors on wind profiles have been chosen from the Stereo-SCIDAR accuracy values in [32].

The LEO satellite tracking case starts with an integrator that gives about 10% of Strehl ratio. We show that a 50% Strehl ratio can be obtained with the LQG-KF + MAP resultant AR2, which exhibits the best compromise in terms of computational complexity. Similar to the astronomical case, model behaviors are analyzed through their temporal covariances, and a study with respect to wind value errors of the ground layer shows a good robustness of the control performance. In addition, performance assessment has been conducted under average or poor SNR conditions, showing that performance improvement stays high. It is clear that the predictive capabilities of these zonal LQG regulators take advantage of the quasi-pure frozen flow behavior of the altitude layers. Several simplifying hypothesis have been considered in our simulations. First, several layers close to the ground (and not only the ground layer) could have their own wind speed in addition to the apparent tracking speed due to the telescope motion. Second, interframe motion is not considered in our simulations, and the satellite motion during the WFS exposure time would probably lead to an increase in the measurement noise. Third, as the satellite is an extended source, the WFS measurement model should rely on intercorrelation of subaperture images, instead of using a natural guide star with a geometric WFS model. Finally, among the many additional sources of errors that could be accounted for when simulating a complete system, scintillation effects may strongly affect performance in the satellite case, as in [53], but is beyond the scope of this paper. However, considering the large performance gap between the regulators, accounting for these effects should still allow for a significant performance improvement. Implementation in a real system, besides being obviously of great interest, would probably also require some model adjustments. It is, for example, possible to mix boiling and frozen flow behaviors by combining several models, such as a boiling AR2 Zernike model with an AR2 resultant zonal model based on the frozen flow hypothesis. Real experimentation would allow even further development of the zonal models presented here, which would be a natural extension of this work.

Funding. H2020 Research Infrastructures (730890); Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0039-PALM).

Acknowledgment. Léonard Prengère's PhD grant is co-funded by the Direction Générale de l'Armement-Agence Innovation Défense (DGA-AID) and Université Paris-Saclay. L. Prengère is very grateful to Rémy Juvénal and Jesse Cranney for fruitful discussions. The authors wish to warmly thank Jean-Marc Conan for his careful reading of the paper, and are also grateful to Paolo Massioni for his help on the LQG-DKF and Carlos Correia for his help on OOMAO tools.

Disclosures. The authors declare no conflicts of interest.

REFERENCES

1. F. Roddier, *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge, 1999).
2. B. Macintosh, J. Graham, D. Palmer, R. Doyon, D. Gavel, J. Larkin, B. Oppenheimer, L. Saddlemyer, J. K. Wallace, B. Bauman, D. Erikson, L. Poyneer, A. Sivaramakrishnan, R. Soummer, and J.-P. Veran, "Adaptive optics for direct detection of extrasolar planets: the Gemini planet imager," *C. R. Phys.* **8**, 365–373 (2007).
3. T. Fusco, C. Petit, G. Rousset, J.-F. Sauvage, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, P. Baudoz, M. Kasper, E. Fedrigo, P. Rabou, P. Feautrier, M. Downing, P. Gigan, J.-M. Conan, J.-L. Beuzit, N. Hubin, F. Wildi, and P. Puget, "Design of the extreme AO system for SPHERE, the planet finder instrument of the VLT," *Proc. SPIE* **6272**, 62720K (2006).
4. P. Kern, P. Léna, P. Gigan, J.-C. Fontanella, G. Rousset, F. Merkle, and J.-P. Gaffard, "COME-ON: an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy," *Proc. SPIE* **1130**, 54–64 (1989).
5. G. Rousset, J. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, and F. Rigaut, "First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **230**, L29–L32 (1990).
6. R. N. Paschall and D. J. Anderson, "Linear quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements," *Appl. Opt.* **32**, 6347–6358 (1993).
7. C. Dessenne, P.-Y. Madec, and G. Rousset, "Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics," *Appl. Opt.* **37**, 4623–4633 (1998).
8. C. Dessenne, P.-Y. Madec, and G. Rousset, "Sky implementation of modal predictive control in adaptive optics," *Opt. Lett.* **24**, 339–341 (1999).
9. B. Le Roux, C. Kulcsár, L. M. Mugnier, T. Fusco, H.-F. Raynaud, and J.-M. Conan, "Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1261–1276 (2004).
10. D. P. Looze, "Linear-quadratic-Gaussian control for adaptive optics systems using a hybrid model," *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 1–9 (2009).
11. C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, and P. V. de Leseigno, "Optimal control, observers and integrators in adaptive optics," *Opt. Express* **14**, 7464–7476 (2006).
12. C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, and J.-M. Conan, "Minimum variance prediction and control for adaptive optics," *Automatica* **48**, 1939–1954 (2012).
13. G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, E. Gendron, A. Basden, F. Vidal, T. Morris, S. Meimon, C. Petit, D. Gratadour, O. Martin, Z. Hubert, G. Rousset, N. Dipper, G. Talbot, E. Younger, and R. Myers, "First on-sky validation of full LQG control with the CANARY MOAO pathfinder," in *AO4ELT3* (2013).
14. G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, E. Gendron, A. Basden, F. Vidal, T. Morris, S. Meimon, C. Petit, D. Gratadour, O. Martin, Z. Hubert, A. Sevin, D. Perret, F. Chemla, G. Rousset, N. Dipper, G. Talbot, E. Younger, R. Myers, D. Henry, S. Todd, D. Atkinson, C. Dickson, and A. Longmore, "First on-sky SCAO validation of full LQG control with vibration mitigation on the CANARY pathfinder," *Opt. Express* **22**, 23565–23591 (2014).
15. N. Doelman, R. Fraanje, and R. Den Breeje, "Optimal control of tip-tilt modes on-sky Adaptive Optics demonstration," in *AO4ELT2* (2011).
16. A. Guesalaga, B. Neichel, J. O'Neal, and D. Guzman, "Mitigation of vibrations in adaptive optics by minimization of closed-loop residuals," *Opt. Express* **21**, 10676–10696 (2013).
17. C. Petit, J.-F. Sauvage, T. Fusco, A. Sevin, M. Suarez, A. Costille, A. Vigan, C. Soenke, D. Perret, S. Rochat, A. Barrufolo, B. Salasnick, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, P. Puget, F. Wildi, M. Kasper, J.-M. Conan, C. Kulcsár, and H.-F. Raynaud, "SPHERE eXtreme AO control scheme: final performance assessment and on-sky validation of the first auto-tuned LQG based operational system," *Proc. SPIE* **9148**, 91480O (2014).
18. L. A. Poyneer, D. W. Palmer, B. Macintosh, D. Savransky, N. Sadakuni, S. Thomas, J.-P. Véran, K. B. Follette, A. Z. Greenbaum, S. M. Ammons, V. P. Bailey, B. Bauman, A. Cardwell, D. Dillon, D. Gavel, M. Hartung, P. Hibon, M. D. Perrin, F. T. Rantakyrö, A. Sivaramakrishnan, and J. J. Wang, "Performance of the Gemini

- planet imager's adaptive optics system," *Appl. Opt.* **55**, 323–340 (2016).
19. C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, and H.-F. Raynaud, "Linear quadratic Gaussian control for adaptive optics and multiconjugate adaptive optics: experimental and numerical analysis," *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 1307–1325 (2009).
 20. L. Poyneer, M. van Dam, and J.-P. Véran, "Experimental verification of the frozen flow atmospheric turbulence assumption with use of astronomical adaptive optics telemetry," *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 833–846 (2009).
 21. N. A. Bhamal, "Frozen flow or not? Investigating the predictability of the atmosphere," *J. Phys. Conf. Ser.* **595**, 012003 (2015).
 22. L. A. Poyneer, B. A. Macintosh, and J.-P. Véran, "Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 2645–2660 (2007).
 23. R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, and J.-M. Conan, "LQG adaptive optics control with wind-dependent turbulent models," *Proc. SPIE* **9909**, 99090M (2016).
 24. P. Piatrou and M. C. Roggemann, "Performance study of Kalman filter controller for multiconjugate adaptive optics," *Appl. Opt.* **46**, 1446–1455 (2007).
 25. C. M. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardière, and C. Bradley, "Spatio-angular minimum-variance tomographic controller for multi-object adaptive-optics systems," *Appl. Opt.* **54**, 5281–5290 (2015).
 26. L. Gilles, P. Massioni, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, and B. Ellerbroek, "Distributed Kalman filtering compared to Fourier domain preconditioned conjugate gradient for laser guide star tomography on extremely large telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **30**, 898–909 (2013).
 27. P. Massioni, L. Gilles, and B. Ellerbroek, "Adaptive distributed Kalman filtering with wind estimation for astronomical adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **32**, 2353–2364 (2015).
 28. C. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardière, and C. Bradley, "Static and predictive tomographic reconstruction for wide-field multi-object adaptive optics systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 101–113 (2014).
 29. K. Jackson, C. Correia, O. Lardière, D. Andersen, and C. Bradley, "Linear prediction of atmospheric wave-fronts for tomographic adaptive optics systems: modelling and robustness assessment," *Opt. Lett.* **40**, 143–146 (2015).
 30. E. Gendron and P. Léna, "Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations," *Astrophys. Space Sci.* **239**, 221–228 (1996).
 31. R. Avila, J. Vernin, and E. Masciadri, "Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized SCIDAR," *Appl. Opt.* **36**, 7898–7905 (1997).
 32. J. Osborn, T. Butterley, M. Townson, A. Reeves, T. Morris, and R. Wilson, "Turbulence velocity profiling for high sensitivity and vertical-resolution atmospheric characterization with Stereo-SCIDAR," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **464**, 3998–4007 (2016).
 33. G. Sivo, A. Turchi, E. Masciadri, A. Guesalaga, and B. Neichel, "Towards an automatic wind speed and direction profiler for wide field adaptive optics systems," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476**, 999–1009 (2018).
 34. R. Conan and C. Correia, "Object-oriented Matlab adaptive optics toolbox," *Proc. SPIE* **9148**, 91486C (2014).
 35. M. Copeland, F. Bennet, A. Zovaro, F. Rigaut, P. Piatrou, V. Korkiakoski, and C. Smith, "Adaptive optics for satellite and debris imaging in LEO and GEO," in *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference* (2016).
 36. C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, and J.-M. Conan, "On the optimal reconstruction and control of adaptive optical systems with mirror dynamics," *J. Opt. Soc. Am. A* **27**, 333–349 (2010).
 37. V. Kucera, *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems* (Prentice Hall, 1991).
 38. D. T. Gavel and D. Wiberg, "Toward Strehl-optimizing adaptive optics controllers," *Proc. SPIE* **4839**, 890–902 (2003).
 39. L. Poyneer and J.-P. Véran, "Predictive wavefront control for adaptive optics with arbitrary control loop delays," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1486–1496 (2008).
 40. S. M. Ammons, L. Poyneer, D. T. Gavel, R. Kupke, C. E. Max, and L. Johnson, "Evidence that wind prediction with multiple guide stars reduces tomographic errors and expands MOAO field of regard," *Proc. SPIE* **8447**, 84471U (2012).
 41. J. Cranney, J. De Dona, V. Korkiakoski, and F. Rigaut, "An integrated identification and predictive control strategy for high wind velocity adaptive optics applications," *Proc. SPIE* **10703**, 107034U (2018).
 42. F. Assémat, R. Wilson, and E. Gendron, "Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage," *Opt. Express* **14**, 988–999 (2006).
 43. D. L. Fried and T. Clark, "Extruding Kolmogorov-type phase screen ribbons," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 463–468 (2008).
 44. P. Massioni, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, and J.-M. Conan, "Fast computation of an optimal controller for large-scale adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 2298–2309 (2011).
 45. R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, and J.-M. Conan, "Linear controller error budget assessment for classical adaptive optics systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **35**, 1465–1476 (2018).
 46. C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, C. Correia, and C. Petit, "Control design and turbulent phase models in adaptive optics: a state-space interpretation," in *Adaptive Optics: Methods, Analysis and Applications* (Optical Society of America, 2009), paper AOWB1.
 47. M. S. Fadali and A. Visioli, *Digital Control Engineering: Analysis and Design*, 2nd ed. (Academic, 2012).
 48. H. Shepherd, J. Osborn, R. Wilson, T. Butterley, R. Avila, V. Dhillon, and T. Morris, "Stereo-SCIDAR: optical turbulence profiling with high sensitivity using a modified SCIDAR instrument," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **437**, 3568–3577 (2013).
 49. F. Roddier, J. Gilli, and G. Lund, "On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry," *J. Opt.* **13**, 263 (1982).
 50. H. Ltaief, A. Charara, D. Gratadour, N. Doucet, B. Hadri, E. Gendron, S. Feki, and D. Keyes, "Real-time massively distributed multi-object adaptive optics simulations for the European extremely large telescope," in *IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS)* (IEEE, 2018), pp. 75–84.
 51. F. Ferreira, A. Sevina, J. Bernarda, and D. Gratadour, "MICADO-MAORY SCAO RTC system prototyping: assessing the real-time capability of GPU," in *Proceedings of the AO4ELT6 conference* (2019).
 52. G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, É. Gendron, A. Basden, D. Gratadour, T. Morris, C. Petit, S. Meimon, G. Rousset, V. Garrel, N. Vincent, B. van Dam, M. Marcos, C. Eduardo, S. Rodrigo, R. Mischa, M. William, M. Cristian, H. Vanessa, K. Hardie, and C. Trujillo, "On-sky validation of an optimal LQG control with vibration mitigation: from the CANARY multi-object adaptive optics demonstrator to the Gemini multi-conjugated adaptive optics facility," in *American Astronomical Society Meeting Abstracts* (2015), vol. **225**.
 53. F. Bennet, I. Price, F. Rigaut, and M. Copeland, "Satellite imaging with adaptive optics on a 1 m telescope," in *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies (AMOS) Conference* (2016).

4.3 Extensions de l'article : Étude de performance et de robustesse de régulateurs LQG avec une modélisation plus fine de la turbulence dans un cas de tracking de satellite en orbite basse.

Des compléments aux travaux de l'article de la section 4.2 ont été proposés en ajoutant des simulations de robustesse et de performance des régulateurs LQG en base zonale plus complètes, car possédant non plus une seule couche ayant un vent naturel mais les 3 premières, dans un profil de 6 couches turbulentes. Les erreurs sur les profils naturels des vitesses de vents sont donc appliquées aux trois premières couches, et aucune erreur n'est considérée sur les vitesses de défilement liées au déplacement du satellite. Ces nouvelles évaluations ont été présentées dans l'article de la conférence OPTRO2020 à Paris en février 2020 [[Prengère *et al.*\(2020a\)](#)] inclus ci-après.

Predictive controllers for high dynamic atmospheric turbulence compensation. Application to Low-Earth Orbit satellite tracking

Léonard Prengère^{a,*}, Caroline Kulcsár^a, and Henri-François Raynaud^a

^a*Laboratoire Charles Fabry, Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS,
Laboratoire Charles Fabry, 91127, Palaiseau, France*

* Corresponding author: Léonard Prengère, e-mail: leonard.prengere@institutoptique.fr

January 23, 2020

Abstract

Satellite and debris imaging is nowadays an important topic of research, with several applications like space debris observation for space security, or ground-based satellite tracking systems for military purpose or for ground-to-space optical telecommunication. In order to improve the quality of images acquired on ground-based telescopes, these can be equipped with Adaptive Optics (AO) systems that compensate for the adverse effects of atmospheric turbulence in real time thanks to a Deformable Mirror (DM) inserted in the optical path. DM commands are calculated from WaveFront Sensor (WFS) measurements using a real-time computer.

These systems usually suffer from significant AO loop delays between the WFS measurements and the correction performed by the DM. Predictive controllers based on turbulence dynamical models and featuring an optimal prediction of the wavefront (a.k.a. LQG minimum variance control and Kalman filter) have been proposed to counteract the effect of delays. In Low Earth Orbit satellite tracking applications, the very fast dynamics of the disturbance is mainly due to the satellite motion and motivates the use of predictive controllers.

In this presentation we propose a LQG regulator with wavefront models expressed on a zonal basis (i.e. with spatial samples of the turbulent wavefront). In particular, we propose a prediction of the turbulence phase in the telescope pupil thanks to dynamical models that include information on wind and turbulence profiles. We compare its closed-loop performance with a standard integral action controller, and with another LQG regulator based on a turbulence model which only depends on wind intensity. Results are obtained with end-to-end simulations and performance is evaluated in terms of image quality.

We show that a performance improvement of more than 20 points of Strehl ratio can be obtained with this regulator with respect to the standard integral action controller and to the LQG controller which ignores information on wind directions, in bad seeing condition and with middle SNR. We also propose to evaluate performance robustness when model errors are present on the wind profile.

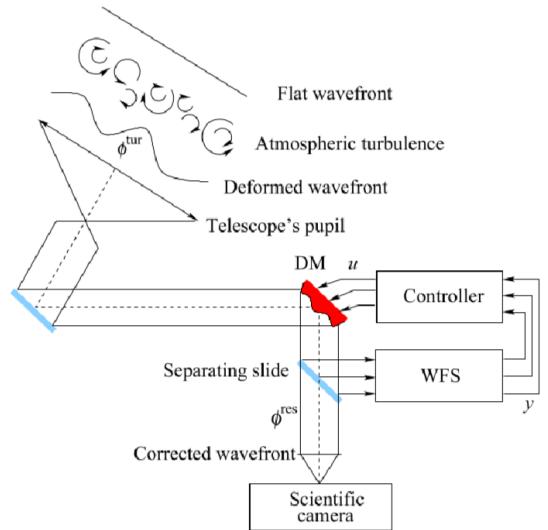


Figure 1: Principle of adaptive optics for ground-based telescopes

1 INTRODUCTION

The atmospheric turbulence introduces optical aberrations which degrades the images acquired on ground-based telescopes. Adaptive Optics (AO) systems compensate these wavefront distortions using Deformable Mirrors (DMs) inserted in the telescope optical path [1]. Wavefront sensors (WFSs) provide measurements used by a real-time controller to calculate the DM commands in a control loop (figure 1). Standard integral action regulators are currently used on most operational systems, and were already operational on the first AO system COME-ON [2,3] installed at the 1.52 m telescope of the Observatoire de Haute Provence. It provides thus a reliable baseline for AO performance comparison. As AO systems feature control loops with delays, high performance controllers that compensate for these delays, based on turbulence models and optimal prediction (a.k.a. Linear Quadratic Gaussian (LQG) control and Kalman filter) have been proposed [4,5] for astronomy observation. The LQG control, and particularly the choice of dynamic models and of the type and size of the basis for the phase description, is an active subject of research. Recently, works have shown the high potential of auto-regressive models in zonal ba-

sis (spatial sampling of the phase in the telescope pupil plane) [6] for LQG regulators with applications that face a very high dynamic of the atmospheric disturbance, like a Low Earth Orbit (LEO) satellite tracking system. Indeed, in this application the apparent speeds of high altitude turbulent layers due to the satellite motion are very fast compared to the actual wind velocity. In this article we explore the LQG regulator representation with an Auto-Regressive dynamic model of order 2 (AR2) identified in a zonal basis, with wind and turbulence profile assumptions. We propose a LEO satellite tracking simulation parameters similar to [7], with end-to-end simulations made with the Object Oriented Matlab Adaptive Optics (OOMAO) software package, commonly used by the scientific community. Closed-loop performance analysis with comparisons to regulators from the literature [2,8] and robustness tests are proposed in order to derive development directions for on-sky validations.

The paper is organized as follows. In section 2 we present optimal AO controllers, with AO control loop description in section 2.1, and LQG regulation in section 2.2. In section 3, we develop the models for the Kalman filter, with an AR2 dynamical model in zonal basis in section 3.1 and a measurement model in section 3.2. In section 4 we define and analyze the results of end-to-end simulations in a LEO satellite tracking application, with explanations of the 6-layer atmosphere parameters in section 4.1. Simulation results and performance comparisons are given in section 4.2, and performance robustness with model errors in section 4.3. Finally conclusion and perspectives are presented towards models improvement for on sky validation.

2 Optimal controllers

In this section, we present, similarly to OPTRO2018 [9], the basics of LQG AO control.

2.1 AO feedback loop

An AO system can be represented by a discrete-time block diagram (Figure 2) where all blocks are linear operators. The incoming perturbation is the turbulent phase ϕ^{tur} , ϕ^{cor} is the correction phase generated by the DM and ϕ^{res} is the residual phase. The WFS delivers noisy wavefront measurements y , where w is the noise measurement. The DM commands u are computed by the controller from wavefront measurements. In this control loop we have delays introduced by the control and measurement computations, and by the integration and read-out time of the WFS camera. We assume a total loop delay of two frames. The standard controller used on most operational systems

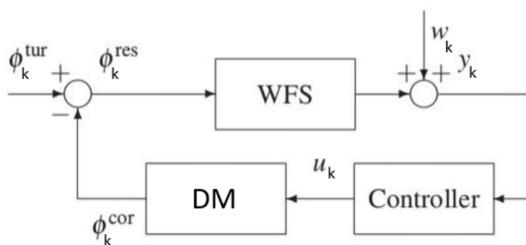


Figure 2: AO feedback loop block diagram

in SCAO mode is an integral action regulator in the form:

$$u_k = u_{k-1} + gM_{\text{com}}y_k, \quad (1)$$

where M_{com} is the command matrix, *i.e.* the generalized inverse of the DM to WFS interaction matrix DN (see below), and g is a scalar gain. In order to have a stable closed-loop system in this two-frame delay case, the gain g should satisfy $0 \leq g < 1$. Predictive control can be used to counteract the effect of delays. In the case of AO the optimal solution to the minimisation of the residual phase variance is obtained with LQG control, as soon as a linear stochastic dynamical model of the turbulent phase can be established, and if all noises are Gaussian [10]. LQG control is based on a Kalman filter that predicts the turbulent phase.

2.2 LQG regulation

2.2.1 Quadratic performance criterion

The LQG regulator is optimal in the sense of the residual phase variance $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ defined as

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\phi_k^{\text{res}}\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\phi_k^{\text{tur}} - \phi_k^{\text{cor}}\|^2. \quad (2)$$

If the DM has no temporal dynamics and a linear response, with influence matrix N , the correction phase at time k is given by:

$$\phi_k^{\text{cor}} = Nu_{k-1} \quad (3)$$

and the optimal control that minimizes $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$, under the unrealistic assumption that future values ϕ_{k+1}^{tur} of the turbulence are known (the so-called “complete information” hypothesis), would be

$$u_k = (N^t N)^{-1} N^t \phi_{k+1}^{\text{tur}}. \quad (4)$$

When the turbulent phase ϕ_{k+1}^{tur} is unknown (“incomplete information”), the stochastic separation theorem applies and the optimal control is simply obtained by replacing ϕ_{k+1}^{tur} in (2) by its optimal estimate, in the sense of minimum estimation error variance, $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}} = E(\phi_{k+1}^{\text{tur}} | \mathcal{I}_k)$, to finally get

$$u_k = (N^t N)^{-1} N^t \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}. \quad (5)$$

The set \mathcal{I}_k represents all the information available at time k . The predicted phase $\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}$ is obtained as the output of a Kalman filter (see [11] for more information on minimum variance control in AO).

2.2.2 Kalman filter

The Kalman filter is based on a stochastic model of the turbulent phase temporal evolution. For instance, in the case of an Auto-Regressive model of order 2 (AR2), we have

$$\phi_{k+1}^{\text{tur}} = A_1 \phi_k^{\text{tur}} + A_2 \phi_{k-1}^{\text{tur}} + v_k, \quad (6)$$

where A_1 and A_2 are matrix-valued coefficients, and v is a Gaussian white noise with known covariance matrix Σ_v . The state equation

$$x_{k+1} = Ax_k + V_k, \quad (7)$$

is equivalent to (6), with

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}, V_k = \begin{pmatrix} v_k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

and with the state vector x_k defined as

$$x_k = \begin{pmatrix} \phi_k^{\text{tur}} \\ \phi_{k-1}^{\text{tur}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Taking $C = (0 \ D)$, the measurement equation $y_k = D\phi_{k-1} + w_k - DNu_{k-2}$ becomes

$$y_k = Cx_k + w_k - DNu_{k-2}, \quad (10)$$

where D is the WFS matrix model, and w is a Gaussian white noise with known covariance matrix Σ_w . This state space representation leads to the asymptotic Kalman filter in prediction form

$$\hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_{k|k-1} + L_\infty(y_k - \hat{y}_{k|k-1}). \quad (11)$$

The filter update equation is computed in real-time, while the prediction Kalman gain L_∞ , defined as

$$L_\infty = A\Sigma_\infty C^t (C\Sigma_\infty C^t + \Sigma_w)^{-1}, \quad (12)$$

is computed off-line. The asymptotic estimation error covariance matrix Σ_∞ is obtained as the solution of the Discrete Algebraic Riccati Equation (DARE)

$$\Sigma_\infty = A\Sigma_\infty A^t + \Sigma_V - A\Sigma_\infty C^t (C\Sigma_\infty C^t + \Sigma_w)^{-1} C\Sigma_\infty A^t. \quad (13)$$

At last, $\hat{y}_{k|k-1} = E(y_k | \mathcal{I}_{k-1})$ is the predicted measurement and is obtained as

$$\hat{y}_{k|k-1} = C\hat{x}_{k|k-1} - DNu_{k-2}. \quad (14)$$

The predicted turbulent phase is finally obtained from the predicted state vector

$$\hat{\phi}_{k+1|k} = C_\phi \hat{x}_{k+1|k}, \quad (15)$$

where $C_\phi = (I \ 0)$. The predicted phase $\hat{\phi}_{k+1|k}$ can be expressed in different bases, e.g. a modal basis like the Zernike basis, or a zonal basis (spatial sampling of the phase in the telescope pupil plane). The control performance is impacted by the accuracy of the phase description: for instance, the number of modes in a modal basis [5] or the sampling for a zonal basis [12]. However an improvement of the phase description accuracy increases the computation time of the DARE (13), the Kalman gain L_∞ in (12), and of the real-time equations (11), (14), and (15). The basis dimension is a real question for AO systems with a large number of degree of freedoms like ELT-scaled AO systems, however in this paper we consider a system with 204 WFS measurements and 265 actuators, then with a lower computational complexity. The possibility to ensure a spatial resolution of the predicted phase $\hat{\phi}_{k+1|k}$ in the dynamical model finer than the WFS measurements is then compatible with this complexity.

3 Dynamical and measurement models for Kalman filter

3.1 Auto-regressive model of order 2 (AR2)

In this section we consider the AR2 model form from eq.(6), as explained in [6],

$$\phi_{k+1} = A_1\phi_k + A_2\phi_{k-1} + v_k, \quad (16)$$

used in the Kalman filter to estimate the resultant phase in the telescope pupil ϕ . The model matrices A_1 and A_2 are determined like in [6], by using informations on wind profile and turbulent layers energy, given for instance by Stereo-SCIDAR measurements [13]. Indeed we suppose that the atmosphere can be modeled by a superposition of infinitely thin layers, each of them being in translation (frozen flow hypothesis). We can then calculate the one- and two-step temporal correlation matrices of the resultant phase ϕ , respectively $C_\phi^{[1]} = E(\phi_{k+1}(\phi_k)^T)$ and $C_\phi^{[2]} = E(\phi_{k+1}(\phi_{k-1})^T)$, and identify the model matrices A_1 and A_2 from the matrix-valued version of the Yule-Walker equations:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(C_\phi^{[1]} - C_\phi^{[2]}\Sigma_\phi^{-1}(C_\phi^{[1]})^T \right) \left(\Sigma_\phi - C_\phi^{[1]}\Sigma_\phi^{-1}(C_\phi^{[1]})^T \right)^{-1}, \\ A_2 &= \left(C_\phi^{[2]} - A_1 C_\phi^{[1]} \right) \Sigma_\phi^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

where $\Sigma_\phi = E(\phi_k(\phi_k)^T)$ is the covariance matrix of the turbulent phase. A sampling of 2 linear points (see figure

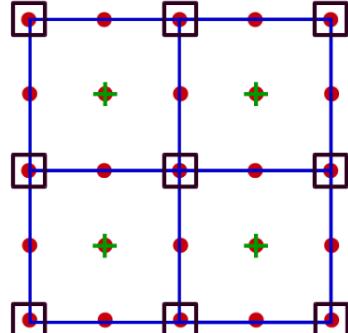


Figure 3: Phase and measurement models in the case of a Shack-Hartmann WFS where the phase grid of the model is 2 times finer than WFS resolution. Four subapertures are represented with blue lines. Red points indicate phase points, and green crosses the location of the measurements. The black squares indicate the actuators position at the edges of subapertures.

3) per actuator pitch will be considered for the zonal basis, because as explained in [6, 9], this sampling gives the ability to represent a large part of the spatial frequencies that can be generated by the DM. A higher sampling beyond two linear points per pitch mainly reduces the WFS aliasing, similarly to LQG regulator using a Zernike modal basis as explained with error budget assessments in [14].

3.2 Measurement model

Considering a geometric wavefront sensor and one frame delay on the WFS camera, the measurement model represented by matrix D in eq.(10) is the difference of average values along the subaperture edges using Simpson weights and a Fried geometry [15]. For the phase sampling of 2 linear points per actuator pitch and the phase representation of figure 3, the stencils w_x and w_y for x- or y-slopes computation are then

$$w_x = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad w_y = -w_x^T, \quad (18)$$

where d is the subaperture diameter.

4 Performance of LQG regulators in a LEO satellite tracking case

4.1 Simulation parameters

4.1.1 AO system

In this part we consider an AO system similar to the LEO satellite tracking system from [7]. We have a deformable mirror and a geometric Shack-Hartmann WFS with cartesian grids of microlens and actuators arranged in a Fried geometry. Their parameters and the telescope primary mirror are described in table 1. The AO frame rate is 2 kHz. Scientific images are acquired at $0.80 \mu\text{m}$ and the WFS provides measurements with a noise of 0.43 rad^2 at $0.55 \mu\text{m}$.

Telescope	Diameter: 1.8 m Central occultation: 20 cm
DM (Fried geometry)	17 x 17 with 265 valid actuators Gaussian influence function Coupling factor 0.3
Shack-Hartmann (supaberture grid)	16 x 16 with 204 valid subapertures
AO frame	2 kHz
λ_{wfs}	$0.55 \mu\text{m}$
λ_{science}	$0.80 \mu\text{m}$

Table 1: LEO satellite tracking AO system parameters for end-to-end simulations.

The image quality criteria will be the Strehl Ratio (SR) on the science camera, using the Marechal approximation in the telescope pupil plane:

$$\text{SR} = \exp(-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2), \quad (19)$$

where $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ is the residual phase variance at $0.80 \mu\text{m}$, the science camera wavelength.

4.1.2 Atmospheric turbulence

To define the LEO satellite tracking atmosphere behavior, we select a satellite speed of 7.5 km/s, an altitude of 765 km and an direction of observation from Earth with an elevation angle of 40° . The turbulent strength is quite

important, with a bad seeing condition of $2.35''$, and six turbulent layers in translation will be considered. The altitudes of the layers and their distances to the telescope taking account the curvature of the Earth at the 40° elevation, are indicated in table 2. In the LEO satellite tracking

Layers (index)	Altitude (km)	Distance to telescope (km) At 40° elevation
1	0	0
2	2	3.11
3	5	7.77
4	7	10.88
5	10	15.54
6	12	18.64

Table 2: Altitudes of the six turbulent layers and distances between the layers and the telescope in the direction of the satellite.

application the layers winds are combinations of natural wind speeds and the apparent speeds due to the satellite motion above the layers. Due to the important apparent speeds for high altitude layers, only the first three will be considered for the natural wind speeds of our simulation atmospheric turbulence, with values of 10, 10, 15 m/s, and orientations of 60° , 90° and -60° . All apparent speeds have an orientation of 0° . The apparent speed of the satellite in the direction of observation with 40° of elevation angle, taking account the curvature of the Earth, is 5.47 km/s. With projection on the layers altitude for the apparent speeds due to satellite motion and taking account the natural wind speed of the first three layers, the final wind speeds and directions are gathered in table 3 for the end-to-end simulations.

Layer (index)	Wind speeds (m/s)	Wind directions ($^\circ$)
1	10	60
2	22.4	24.2
3	64.4	-11.6
4	77.8	0
5	111.2	0
6	133.35	0

Table 3: Turbulent layers wind speeds and directions for end-to-end simulations.

4.2 Simulations results

In order to compare with regulators from the literature, the end-to-end simulations have been conducted for several controllers. First a standard integral action controller, used on most AO systems. The second is an LQG regulator similar to one already tested on sky in astronomy observation [8], based on boiling turbulence models in Zernike basis with 860 modes and using auto-regressive models of order 2 (AR2) [16]. The name Zernike LQG AR2 will be used for this regulator. Finally performance of the LQG regulator from section 3, named zonal LQG AR2, will be presented. Table 4 gathers the results from the end-to-end simulations, performed with 15000 AO frames, ensuring an accuracy of 0.05 point of Strehl Ratio at the science camera wavelength. The zonal LQG AR2 gives

Regulator	State vector size	Strehl Ratio
Integral action	265	1.9 %
Zernike LQG AR2 from [8]	1720	12.2 %
Zonal LQG AR2 from section 3	1978	34.8 %

Table 4: Strehl Ratio at $0.8 \mu\text{m}$ of a zonal based LQG regulator using an AR2 resultant dynamical model, compared with a standard integral action regulator and a Zernike LQG AR2 regulator with 860 modes. The LEO tracking atmosphere behavior is described in table 3.

impressive results compared with other controllers. It achieves a Strehl Ratio above 30 %, a performance level mentioned in [7], for a better atmospheric turbulence with a seeing limit of 2". It appears that the zonal basis is well adapted to describe a translation behavior, more than a modal representation like in the Zernike LQG AR2 from [8] with 860 Zernike modes. The zonal LQG AR2 dynamical model gives indeed a better representation of the very fast dynamics of the LEO satellite tracking atmosphere behavior, as shown on the temporal correlation from the models on figure 4.

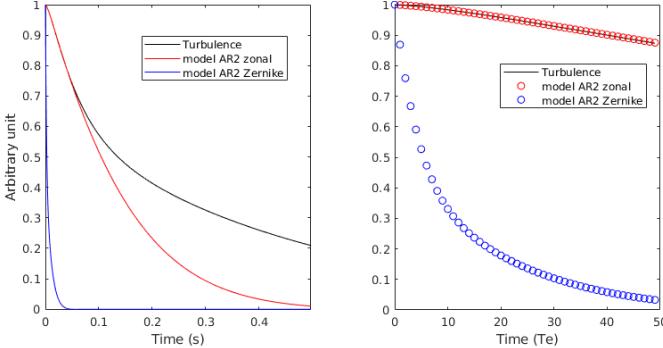


Figure 4: Temporal correlation of the AR2 zonal model from eq.(16, 17) (red), compared to an AR2 Zernike boiling model with 860 modes (blue) with model described in [8], and the atmospheric turbulence of the simulation (black). The correlations has been updated at the AO frame rate of 2 kHz. Left: on a 0.5 s scale. Right: on 50 AO sampling periods Te.

Moreover the computational complexities of the zonal and modal AR2 models are almost similar. Robustness tests are conducted in next section, in order to analyze performances with atmosphere models errors on the natural behavior on the first layers.

4.3 Performance robustness to errors on wind profile

In this section we assume no errors on the pointing direction, always considered to be in the center of the satellite. Then the apparent speeds due to the satellite motion is considered without errors too. We only suppose model errors on the first three layers with natural behavior. This is coherent with wind profile measurements in astronomy observation provided by a Stereo-SCIDAR, which gives wind speed estimations with an accuracy of $\pm 2.5 \text{ m/s}$ [13, 17].

The wind direction precision is wind speed dependent. For the slowest layers, the Stereo-SCIDAR measurements achieve a wind direction precision of $\pm 10^\circ$. Considering other errors like that the wind profile measurements are not provided at the AO loop rate, and that our dynamical models for the LQG regulation will not be updated for each frame, we will finally consider two errors on the wind profiles: a strong and a weak, both described in table 5. We tested the all $2^6 = 64$ possible error combinations for the zonal LQG AR2 regulator, with weak or strong errors so 128 end-to-end simulations. Each of them is performed with 15000 AO frames, ensuring an accuracy of 0.05 point of Strehl Ratio at the science camera wavelength. The histograms from figure 5 gather the results.

From this study it appears that the performances are

Model error on each layer	Weak	Strong
Wind norms	$\pm 2.5 \text{ m/s}$	$\pm 5 \text{ m/s}$
Wind directions	$\pm 10^\circ$	$\pm 20^\circ$

Table 5: Errors on wind profile assumption for the zonal LQG AR2 model matrices identification. The "weak" error corresponds to the Stereo-SCIDAR resolution on wind norms, and on wind directions for the slowest layers that can be detected with non-zero speed, as described in [13].

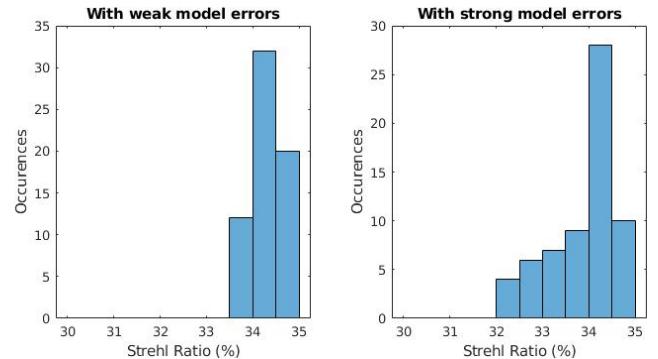


Figure 5: Histograms of the zonal LQG AR2 regulator from eq.(16, 17) with 2 model errors, defined in table 5, on the natural wind profile assumption of the first three layers. The bin width is 0.5 points of Strehl Ratio at the science camera wavelength.

always in a 2.5 points of Strehl Ratio range for a strong error on wind profile, and 1.5 points for a weak error, for the zonal LQG AR2 regulator. More advanced end-to-end simulations can be performed including realistic pointing direction errors in the atmosphere model of the Kalman filter, but we can expect a good performance robustness with respect to natural wind profile errors in the LEO satellite tracking turbulence configuration. However these simulation results have to be confirmed on sky.

5 CONCLUSION

In this article we investigate the performance of a Linear, Quadratic and Gaussian (LQG) regulator for AO systems, built on a turbulent phase model embedded in a zonal basis. An auto-regressive dynamical model of order 2 of the resultant phase in the telescope pupil is used for the

Kalman filter, based on a multi-layer and frozen flow assumptions of the atmospheric turbulence. This LQG regulator is tested in simulations for a LEO satellite tracking scenario. Indeed the very high dynamics of the turbulence is favorable to the use of the zonal basis for high performance control, as shown for AR2 models in figure 4 and in [6], with comparison to a Zernike modal basis. End-to-end simulations for performance assessments of an AO system are performed, and comparison are done with a standard integral action controller and with a modal LQG regulator using AR2 model with Zernike polynomials [8]. The results confirm the very high performance of the zonal based LQG regulator, with AR2 dynamical model (16, 17), for LEO satellite tracking systems, as suggested in [6], making it particularly suitable for this application. Robustness tests show that the zonal LQG AR2 regulator has reliable performance with model errors on the natural wind profile, typical from STEREO-SCIDAR turbulence profile measurements [13] in astronomy observation. However these results remain to be validated on sky, an improvement of this work should be to combine the zonal AR2 resultant model (16, 17), very efficient to reconstruct a frozen flow behavior, with low-order models identified from AO telemetry, that have demonstrated their capacity to effectively compensate for the cumulated effects of atmospheric disturbance, windshake and vibrations [8, 18, 19]. The concatenation of the models could give an LQG regulator with a better reconstruction of both boiling and frozen flow behaviors in the phase prediction, well adapted then for telescopes dedicated to astronomy observation.

6 ACKNOWLEDGEMENTS

This work has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under grant agreement No 730890. Léonard Prengère's PhD grant is co-funded by DGA and Université Paris-Saclay. Léonard Prengère is very grateful to Rémy Juvénal for fruitfull discussions, and to Jesse Cranney for his precious help on LEO satellite tracking simulations. The authors wish also to thank Carlos Correia for his help on OOMAO tools.

References

- [1] F. Roddier, *Adaptive optics in astronomy*, Cambridge University Press (1999).
- [2] P. Kern, P. Lena, P. Gigan, J.-C. Fontanella, G. Rousset, F. Merkle et J.-P. Gaffard, *COME-ON: an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy*, Dans *1989 Orlando Symposium*, pp. 54–64. International Society for Optics and Photonics (1989).
- [3] G. Rousset, J. Fontanella, P. Kern, P. Gigan et F. Rigaut, *First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics*, *Astronomy and Astrophysics*, 230, pp. L29–L32 (1990).
- [4] B. Le Roux, C. Kulcsár, L. M. Mugnier, T. Fusco, H.-F. Raynaud et J.-M. Conan, *Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics*, *JOSA A*, 21 (7), pp. 1261–1276 (2004).
- [5] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár et H.-F. Raynaud, *Linear quadratic Gaussian control for adaptive optics and multiconjugate adaptive optics: experimental and numerical analysis*, *J. Opt. Soc. Am. A*, 26 (6), pp. 1307–1325 (Jun 2009).
- [6] L. Prengère, C. Kulcsár et H.-F. Raynaud, *Zonal-based high performance control in adaptive optics systems with application to astronomy and satellite tracking*, Techn. Report n°2019.12.28 (2019).
- [7] M. Copeland, F. Bennet, A. Zovaro, F. Rigaut, P. Piatrou, V. Korkiakoski et C. Smith, *Adaptive optics for satellite and debris imaging in LEO and GEO*, Dans *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference* (2016).
- [8] G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, E. Gendron, A. Basden, F. Vidal, T. Morris, S. Meimon, C. Petit, D. Gratadour, O. Martin, Z. Hubert, A. Sevin, D. Perret, F. Chemla, G. Rousset, N. Dipper, G. Talbot, E. Younger, R. Myers, D. Henry, S. Todd, D. Atkinson, C. Dickson et A. Longmore, *First on-sky SCAO validation of full LQG control with vibration mitigation on the CANARY pathfinder*, *Optics Express*, 22, pp. 23565–23591 (2014).
- [9] L. Prengère, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud et J.-M. Conan, *High performance controllers towards ELT-sized adaptive optics systems*, Dans *8th International Symposium on Optronics In Defence And Security (OPTRO 2018)* (2018).
- [10] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan et P. V. de Leseigno, *Optimal control, observers and integrators in adaptive optics*, *Optics express*, 14 (17), pp. 7464–7476 (2006).
- [11] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit et J.-M. Conan, *Minimum variance prediction and control for adaptive optics*, *Automatica*, pp. 1939–1954 (septembre 2012).
- [12] L. Gilles, P. Massioni, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud et B. Ellerbroek, *Distributed Kalman filtering compared to Fourier domain preconditioned conjugate gradient for laser guide star tomography on extremely large telescopes*, *JOSA A*, 30 (5), pp. 898–909 (mai 2013).
- [13] J. Osborn, T. Butterley, M. Townson, A. Reeves, T. Morris et R. Wilson, *Turbulence velocity profiling for high sensitivity and vertical-resolution atmospheric characterisation with Stereo-SCIDAR*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, p. stw2685 (2016).
- [14] R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud et J.-M. Conan, *Linear controller error budget assessment for classical adaptive optics systems*, *JOSA A*, 35 (8), pp. 1465–1476 (2018).

- [15] C. M. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardiére et C. Bradley, *Spatio-angular minimum-variance tomographic controller for multi-object adaptive-optics systems*, Applied optics, 54 (17), pp. 5281–5290 (2015).
- [16] C. Petit, J.-F. Sauvage, T. Fusco, A. Sevin, M. Suarez, A. Costille, A. Vigan, C. Soenke, D. Perret, S. Rochat, A. Barrufolo, B. Salasnich, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, P. Puget, F. Wildi, M. Kasper, J.-M. Conan, C. Kulcsár et H.-F. Raynaud, *SPHERE eXtreme AO control scheme: final performance assessment and on-sky validation of the first auto-tuned LQG based operational system*, Vol. 9148, pp. 9148 – 9148 – 17 (2014).
- [17] H. Shepherd, J. Osborn, R. Wilson, T. Butterley, R. Avila, V. Dhillon et T. Morris, *Stereo-SCIDAR: optical turbulence profiling with high sensitivity using a modified SCIDAR instrument*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 437 (4), pp. 3568–3577 (2013).
- [18] S. Meimon, C. Petit, T. Fusco et C. Kulcsár, *Tip-tilt disturbance model identification for Kalman-based control scheme: application to XAO and ELT systems*, JOSA A, 27, pp. 122–132 (novembre 2010).
- [19] B. Sinquin, C. Kulcsár, L. Prengère, H.-F. Raynaud, E. Gendron, J. Osborn, A. Basden, J.-M. Conan, N. Bharmal, L. Staykov, T. Morris, T. Buey, F. Chemla et M. Cohen, *Data-based modelling of low-order modes for AO control: what do on-sky experiments tell us?*, Dans *Communications and Observations through Atmospheric Turbulence: characterization and mitigation* (2019).

4.4 Performance en fonction de l'élévation d'un satellite en orbite basse

Enfin nous avons présenté lors de la conférence OSA à Vancouver en juin 2020 de nouvelles études où différentes élévations sont prises en compte lors du calcul de performance de correction de la boucle d'optique adaptative, comme si nous suivions le satellite dans le ciel sur la sphère céleste. Les paramètres de la turbulence atmosphérique peuvent en effet s'exprimer en fonction de l'angle d'élévation θ (voir l'équation (4.1)). Le paramètre de Fried $r_0(\theta)$ pour le volume turbulent balayé par le faisceau observé avec un télescope imageant un objet à l'infini, peut s'écrire

$$r_0(\theta) = \left[0.42 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta} \int_0^{+\infty} C_n^2(h) dh \right]^{-\frac{3}{5}}. \quad (4.1)$$

Nous en déduisons une relation entre le r_0 au zénith noté $r_0^{\text{zénith}}$ obtenu pour $\theta = 90^\circ$, et un r_0 calculé pour un θ quelconque :

$$r_0(\theta) = r_0^{\text{zénith}} (\sin \theta)^{3/5}. \quad (4.2)$$

La vitesse apparente V^{app} du satellite, également appelée vitesse orthoradiale, est la vitesse du satellite projetée sur la direction orthogonale à l'axe observateur - satellite, comme illustré sur la figure 4.1. Elle dépend de l'angle d'élévation θ , et se relie à la vitesse du

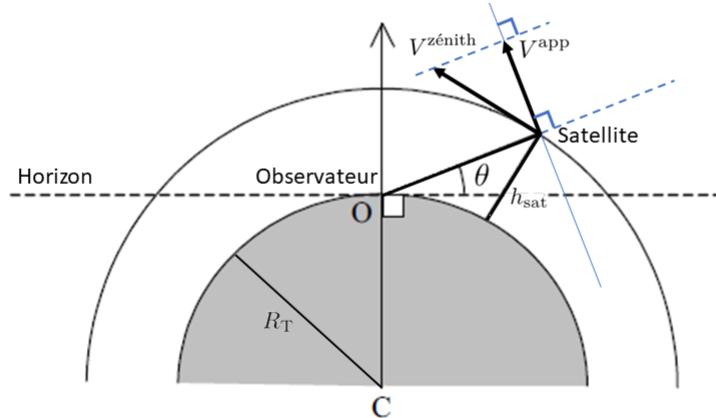


FIGURE 4.1 – Schéma d'un satellite en orbite autour de la Terre, illustrant la vitesse apparente d'un satellite pour un observateur sur le sol terrestre.

satellite au zénith $V^{\text{zénith}}$ par

$$V^{\text{app}} = V^{\text{zénith}} \sqrt{1 - \left(\frac{R_T}{R_T + h_{\text{sat}}} \cos \theta \right)^2} \quad (4.3)$$

où h_{sat} est l'altitude du satellite et R_T le rayon de la Terre. Les vitesses de défilement des couches turbulentes V_l dues au déplacement du satellite se déduisent de V^{app} par

$$V_l = \frac{h_l}{d_l} V^{\text{app}}, \quad (4.4)$$

où h_l est l'altitude de la l -ième couche, et d_l est la distance de la couche au télescope dans la direction d'observation, définie par

$$d_l = \sqrt{(R_T \sin \theta)^2 + (h_l)^2 + 2R_T h_l} - R_T \sin \theta . \quad (4.5)$$

Nous avons défini les paramètres la turbulence atmosphérique au zénith dans la table 4.1, correspondant à la somme vectorielle de la projection de la vitesse apparente $V^{\text{app}} = 7,5 \text{ km/s}$ d'un satellite en orbite basse à 765 km sur l'altitude des couches, avec les vitesses naturelles des vents sur chaque couche. Dans nos simulations seules les trois

Couches (index)	Altitude (km)	Vitesse (m/s)	Direction (°)	Profil de C_n^2 normalisé (β_l)
1	0	10	60	0,45
2	2	22,01	27,02	0,1
3	5	57,99	-12,94	0,125
4	7	68,63	0	0,125
5	10	98,04	0	0,15
6	12	117,65	0	0,05

TABLE 4.1 – Paramètres de l'atmosphère de simulation pour un satellite en orbite basse au zénith.

premières couches de la table 4.1 ont des vents naturels, de norme 10, 10 et 15 m/s, et de direction 60°, 90° et -60°, car pour les couches d'altitude supérieures les vents naturels sont négligeables devant les vitesses de défilement de celles-ci. Le paramètre de Fried au zénith vaut $r_0^{\text{zénith}} = 6,30 \text{ cm à } 0,55 \mu\text{m}$, soit un *seeing* de 1,8''. Enfin nous avons proposé une prise en compte de la dégradation du bruit de mesure liée à la dégradation de la turbulence atmosphérique lorsque l'angle d'élévation diminue (voir l'équation (4.2)). En s'appuyant sur les travaux de S. Thomas [Thomas *et al.*(2006)], nous avons tenu compte des changements de valeurs de bruit de mesure en présence d'un spot non gaussien sur les imagettes d'un ASO Shack-Hartmann échantillonné par les pixels de la caméra de l'ASO et surtout déformé par la perturbation atmosphérique. Cette effet se propage dans le calcul de pente de l'ASO Shack-Hartmann, que ce soit pour un calcul barycentrique ou une inter-corrélation entre les imagettes. Nous avons considéré que le bruit de photon était négligeable devant cette déformation car le satellite est un objet bien éclairé donc avec un flux important pour l'analyse de front d'onde, et donc un faible bruit de photon. L'article [Thomas *et al.*(2006)] propose une modélisation de cet effet qualifié de «bruit atmosphérique» :

$$\sigma_w^2(\text{rad}^2) = 0.5W \left(\frac{d}{r_0} \right)^{5/3} , \quad (4.6)$$

où W est le champ de vue d'une microlentille exprimé en nombre de largeurs à mi hauteur de la tache de diffraction dans la sous-ouverture. Le système d'OA utilisé pour le tracking de satellite en orbite basse dans l'article [Prengère *et al.*(2020b)] s'appuie sur [Copeland

et al.(2016)] et dans ce système nous avons fixé $W = 2,18$, avec les spécifications de 22" de champ de vue par microlentille de largeur $d = 11,25$ cm et 12 pixels linéaires de caméra pour échantillonner une microlentille, et un bruit de mesure défini à $0,55\mu\text{m}$. Avec les modélisations des équations (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), nous avons pu définir les profils turbulents et les bruits de mesure correspondant aux élévations de la figure 4.2, et obtenir les évaluations de performance pour les quatre régulateurs suivants :

1. Le correcteur à action intégrale classique avec un gain $g = 0,55$.
2. Le régulateur LQG AR2 boiling du chapitre 3, construit avec le modèle AR2 bouillonnant (3.13) et utilisant une base de 495 modes de Zernike.
3. Le LQG tiède du chapitre 3, dont la prédiction est calculée à l'aide du projecteur (3.33). Le projecteur aura une seule couche de *frozen flow*, qui sera la concaténation des couches 4 à 6 du profil de la table 4.1 qui ont la particularité d'avoir les mêmes directions, et une couche bouillonnante, qui est la concaténation des 3 premières couches ayant des directions différentes. Les calculs des normes et des directions des vitesses des 2 couches dans le projecteur sont effectués par des simples sommes pondérées par les coefficients β_l des normes et directions du profil de C_n^2 de la table 4.6. La base de Zernike utilisée contient 495 modes.
4. Le régulateur LQG AR2 zonal correspondant au LQG-KF+MAP AR2 résultant de l'article [*Prengère et al.(2020b)*] de la section 4.1, avec un échantillonnage linéaire de 2 points par microlentille, correspondant à un nombre de 989 points dans la pupille.

Ces résultats confirment ceux des articles de ce chapitre, qui montrent que le régulateur zonal LQG-KF+MAP AR2 est bien plus performant que les autres d'au moins 20 points de Strehl dans une application d'observation de satellite en orbite basse, et ce même avec un *seeing* très mauvais correspondant ici à une élévation de 40°. Sa complexité calculatoire environ deux fois plus importante que les régulateurs LQG en base de Zernike permet en effet d'avoir une base zonale naturellement bien adaptée pour décrire des comportements de translation et bien échantillonnée. Le modèle dynamique AR2 approxime très bien les dynamiques turbulentes comme illustré dans [*Prengère et al.(2020b)*] par les autocorrelations temporelles des modèles. Ce régulateur est sans conteste le mieux adapté par sa performance et sa taille qui reste modérée par rapport aux reconstructions zonales multicouches. Le correcteur à action intégrale est toujours à très faible performance et sans intérêt dans cette application si ce n'est pour servir de point de comparaison. Enfin nous voyons que le LQG tiède apporte un vrai gain de performance par rapport au LQG AR2 Zernike (boiling), d'environ 5 points, ce qui est intéressant vu ses très petites dimensions. Ce régulateur LQG tiède peut donc convenir pour des télescopes de taille conséquente et des systèmes d'optique adaptative à cadence de boucle élevée, là où le LQG zonal AR2 pourrait s'avérer être plus difficile à implémenter en temps réel.

4.5 Conclusion

Les régulateurs LQG zonaux sont très performants et particulièrement adaptés aux applications avec une dynamique turbulente très rapide comme l'observation de satellite

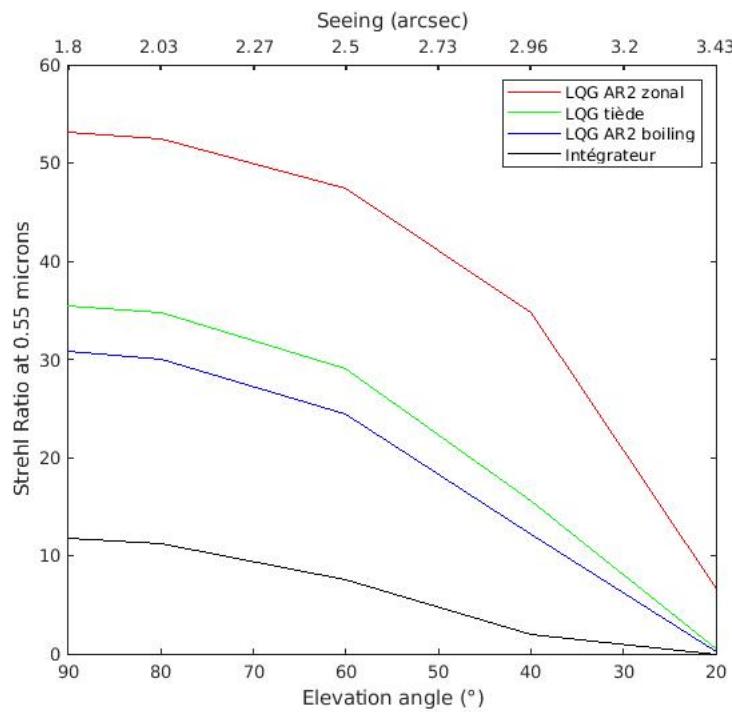


FIGURE 4.2 – Performances de l'intégrateur et de 3 régulateurs LQG basés sur des modèles auto-régressifs d'ordre 2 : en base zonale (rouge), en base de Zernike (boiling, bleu), ou en base mixte avec le LQG tiède (vert), dans un cas de simulation de type suivi de satellite en orbite basse, pour différentes positions du satellite correspondant à 4 élévations différentes.

en orbite basse. Cependant, une structure comme celle du régulateur LQG construit sur le modèle dynamique AR2 de la phase résultante avec un échantillonnage de la base zonale de 2 points par microlentille serait peut-être trop lourde pour des dimensions ELT. Le régulateur Lazy SA-LQG zonal résultant en revanche est plus simple et possède une structure de matrice creuse dont l'implémentation peut être massivement parallélisable. C'est donc un candidat naturel pour la commande haute performance des systèmes d'optique adaptative pour les ELT, qui est abordée au chapitre 5. Nous y conduisons des études de performance pour différents régulateurs zonaux dans le cas des ELT, et nous aborderons également la recherche de modèles plus compacts dans la base modale de Karhunen-Loève.

Chapitre 5

Commande haute performance pour les ELT

Sommaire

5.1	Paramètres de simulation d'un système d'OA aux dimensions ELT	106
5.2	Les régulateurs zonaux face aux ELT	107
5.3	Modèles d'état en base de Karhunen-Loève	110
5.3.1	Identification à partir des densités spectrales de puissance	110
5.3.2	Identification avec les fonctions d'autocorrélation temporelles	112
5.4	Performances en dimensions ELT	114
5.4.1	Performances selon les méthodes d'identification	114
5.4.2	Comparaison de performance entre modèle en base de Karhunen-Loève et modèle zonal	116
5.5	Conclusion	117

Les régulateurs LQG pour les ELT feront face à des dimensions bien supérieures à celles des systèmes d'OA actuels. Par exemple l'optique adaptative du système HAR-MONI de l'ELT comportera environ 4300 actionneurs dans la pupille, et environ 10000 mesures de front d'onde dans son mode de fonctionnement SCAO, alors que les systèmes d'OA actuels les plus importants tel que SAXO SPHERE [Fusco et Mawet(2014)] du VLT qui est un instrument d'OA extrême, comporte 1377 actionneurs dans la pupille, et un ASO Shack-Hartmann qui échantillonne le front d'onde turbulente avec une grille de 40 x 40 microlentilles. Des auteurs ont déjà proposé des implémentations de lois de commande simples à partir de GPU, que ce soit des lois de commande à action intégrale [Ferreira *et al.*(2019)] ou des reconstructions de front d'onde avec des mesures de pentes pseudo boucle ouverte pour des reconstructeurs tomographiques [Wang et Ellerbroek(2012), Bernard *et al.*(2017)]. Le développement de modèles spatialement invariants pour des régulateurs LQG (type LQG-DKF) bien adaptés pour ces dimensions ELT a été abordé pour une reconstruction de la phase résultante avec un modèle AR1 bouillonnant dans [Massioni *et al.*(2011)] et des reconstructions multicouches avec translation dans un modèle AR1 [Gilles *et al.*(2013), Gilles *et al.*(2015), Gilles et Ellerbroek(2013)] ; ces modèles, adaptés à la SCAO, ont été présentés dans le chapitre 3.

Nous présenterons donc ici des études de performance en dimension ELT pour le régulateur LQG-DKF déjà présenté dans le chapitre 3, ainsi que pour les régulateurs

Lazy SA-LQG et LQG-KF+MAP résultant AR2, définis dans le chapitre 4 et qui font une reconstruction de la phase résultante dans la pupille. Nous aborderons ensuite la commande pour l'OA en base de Karhunen-Loève, qui a été déjà évoquée dans plusieurs travaux, comme dans [Dessenne *et al.*(1997)] avec un régulateur modal prédictif dont les paramètres sont optimisés avec un algorithme de moindre carré récursif, ou pour le calcul de la matrice de commande filtrée de l'optique adaptative du « new Swedish solar telescope » [Scharmer *et al.*(2003)]. La base de Karhunen-Loève a également été utilisée dans une commande mixte régulateur LQG + intégrateur [Tesch *et al.*(2015)], avec le LQG pour la commande des bas ordres et l'intégrateur pour les hauts ordres. La matrice A de transition du modèle d'état du filtre de Kalman est identifiée avec les trajectoires temporelles des modes de KL grâce à une méthode de décomposition par sous-espaces. La base de KL est également utilisée comme base de représentation des fonctions d'influence, car l'énergie de la turbulence atmosphérique est mieux concentrée sur les premiers modes que les autres bases modales. Elle sera d'ailleurs utilisée en optique adaptative multiconjuguée pour l'instrument MAORY [Arcidiacono *et al.*(2014)]. Elle est également abordée dans [Dai(1996)] pour l'évaluation de l'erreur résiduelle en comparaison avec la base de Zernike, ce qui a permis de montrer le grand intérêt de la base de KL pour la correction de l'OA, car elle nécessite d'utiliser moins de modes qu'une base de Zernike.

Dans ce chapitre, nous ne présenterons pas de travaux sur l'implémentation des calculs en temps réel, mais des études de performance en dimensions ELT pour identifier, parmi les régulateurs présentés dans les chapitres précédents, ceux qui seraient les mieux adaptés et les plus performants. La section 5.1 présentera tout d'abord le choix des paramètres de simulation pour une optique adaptative classique en dimensions ELT. La section 5.2 montrera les performances des régulateurs décrits dans les chapitres précédents, et enfin nous explorerons des modèles et des méthodes d'identification en base de Karhunen-Loève dans la section 5.3, et leurs performances dans la section 5.4.

5.1 Paramètres de simulation d'un système d'OA aux dimensions ELT

Les paramètres de simulation que nous avons utilisés sous le simulateur OOMAO, ont été choisis pour être représentatifs d'un système d'OA de type HARMONI en mode SCAO [Fusco *et al.*(2010)], et sont donnés dans la table 5.1. L'échantillonnage des écrans de phase est de 592 points linéaires, soit 8 points linéaires par microlentille de l'ASO, ce qui correspond à 3,28 pixels par r_0 à la longueur d'onde de l'analyseur de surface d'onde soit 0,79 μm . Nous n'avons pas considéré dans ces travaux préliminaires la forme spécifique de la pupille de l'ELT (pupille hexagonale avec présence de « spiders ») mais une pupille annulaire, car nous cherchons à comparer les performances de plusieurs régulateurs en base de Karhunen-Loève ou en base zonale, et non pas à obtenir une performance de référence. La forme de la pupille ne devrait *a priori* pas changer le classement de ces régulateurs en termes de performance, car ils peuvent s'adapter à n'importe quelle forme de pupille, ce qui ne serait pas le cas si nous utilisions par exemple un régulateur en base de Zernike ou de Fourier. Les atmosphères de simulation sont détaillées dans la table 5.2, avec un paramètre de Fried valant $r_0 = 0,14 \text{ m}$ à $0,55 \mu\text{m}$ correspondant à des conditions d'observation standard, et une grande échelle de $L_0 = 25 \text{ m}$. Nous avons choisi un ASO de

type Shack-Hartmann géométrique, comme pour le reste de ce manuscrit, avec un bruit de mesure de variance $\sigma_w^2 = 0.2 \text{ rad}^2$ à $0,55 \mu\text{m}$.

Diamètre	38,542 m
Occultation centrale	11,067 m
MD à géométrie cartésienne et de Fried	75 x 75 actionneurs avec 4 436 valides
Fonction d'influence gaussienne	Facteur de couplage de 0,3
Shack-Hartmann (grille de sous-ouvertures carrées)	74 x 74 sous-ouvertures avec 3 944 valides
Cadence de la boucle d'OA	500 Hz
λ_{wfs}	$0,79 \mu\text{m}$
λ_{science}	$1,654 \mu\text{m}$

TABLE 5.1 – Paramètres des simulations bout-en-bout pour une configuration de type HARMONI-ELT dans un mode de fonctionnement SCAO

5.2 Les régulateurs zonaux face aux ELT

Comme pour les échelles VLT, les simulations bout-en-bout ont été effectuées sur 15 000 occurrences temporelles, de manière à garantir la convergence des évaluations de performance avec une dispersion de moins de 0,05 points de Strehl à $1,654 \mu\text{m}$. Les régulateurs LQG sont supposés avoir les profils de C_n^2 pour l'identification de leurs modèles dynamiques, et les régulateurs que nous avons testés sont les suivants :

1. Le correcteur à action intégrale classique, avec un gain $g = 0,5$ et 280 valeurs propres filtrées dans le calcul de la matrice de commande (valeurs qui ont été choisies pour optimiser la performance).
2. Le régulateur « Lazy SA-LQG » de l'article [Prengère *et al.*(2020b)] reproduit dans le chapitre 4, construit sur le modèle dynamique AR1 de la phase résultante en base zonale de l'équation (33) de l'article. L'échantillonnage de la base zonale est de 1 point linéaire par microlentille, correspondant à 4 392 points dans la pupille d'estimation.
3. Un autre régulateur « Lazy SA-LQG » avec un échantillonnage de la base zonale de 2 points linéaires par microlentille, soit 17 228 points dans la pupille.
4. Le régulateur « LQG-KF + MAP résultant AR2 » de l'article [Prengère *et al.*(2020b)] reproduit dans le chapitre 4, construit sur le modèle dynamique AR2 de la phase résultante en base zonale de l'équation (38) de l'article. L'échantillonnage de la base zonale est de 1 point linéaire par microlentille, correspondant à 4 392 points dans la pupille d'estimation.

Comportement de la turbulence résultante	Pseudo bouillonnante (3 couches)	Tendance forte <i>frozen flow</i> (4 couches)
Profil de C_n^2 (%)	[0,5 ; 0,2 ; 0,3]	[0,7 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1]
Vitesse des vents (m/s)	[7,5 ; 12 ; 15]	[13 ; 6 ; 6 ; 6]
Direction des vents (°)	[0 ; 120 ; 240]	[30 ; 0 ; 120 ; 240]
Configuration de la turbulence		

TABLE 5.2 – Configuration des atmosphères utilisées dans les simulations bout-en-bout des systèmes d’OA aux dimensions ELT, avec un comportement pseudo-bouillonnant ou à tendance forte de *frozen flow*.

5. Un autre régulateur « LQG-KF + MAP résultant AR2 » avec un échantillonnage de la base zonale de 2 points linéaires par microlentille, soit 17 228 points dans la pupille.
6. Un régulateur LQG-DKF construit sur la représentation d’état (3.40) (modèle AR1 bouillonnant), décrite dans [Massioni *et al.*(2011)], avec un échantillonnage de 1 point linéaire par microlentille.

Les performances de ces régulateurs sont décrites dans la table 5.3. Nous remarquons sans surprise que les régulateurs zonaux avec un échantillonnage de 1 point linéaire restent toujours moins performants qu’un intégrateur pour ces dimensions ELT. Il en va de même du LQG-DKF pour un échantillonnage de 1 point linéaire par microlentille, qui comme dans le cas VLT NAOS est très inférieur aux autres régulateurs.

Nous n’avons pas fourni ici les résultats du LQG-DKF avec un échantillonnage de 2 points linéaires par microlentille, car sa sensibilité au coefficient α (voir l’équation (3.39)) est trop importante – une fluctuation de ce coefficient de l’ordre de 10^{-4} suffit pour faire varier considérablement la performance. Une optimisation très fine de α pour chaque type de turbulence est donc indispensable. Cela n’aurait en conséquence pas de sens de le proposer comme un régulateur crédible pour une situation où les statistiques turbulentes changent rapidement, car le réglage ne sera pas robuste à des changements même faibles de la dynamique turbulente.

Nous remarquons que les écarts entre régulateurs ont diminué, notamment entre l’intégrateur et les régulateurs LQG. Ceci s’explique par le fait que la turbulence est moins forte que ce que nous avons pris pour les simulations en dimensions VLT. En effet, le paramètre de Fried est de 14 cm à $0,55 \mu\text{m}$, au lieu de 10 cm pour les simulations des chapitres 3 et 4 pour le cas VLT NAOS. Cette valeur a été choisie pour ne pas avoir

Correcteur	Taille du vecteur d'état	Atmosphère	
		Pseudo -bouillonnante	Tendance forte <i>frozen flow</i>
1. Intégrateur $g = 0,5$	4436	67,4 %	67,5 %
2. LQG-DKF de [Massioni <i>et al.</i> (2011)], 75×75 points	4 392	62,0 %	63,5 %
3. Lazy SA-LQG de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)], 75×75 points	4 392	63,3 %	64,9 %
4. Lazy SA-LQG de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)], 149×149 points	17 228	69,7 %	72,1 %
5. LQG-KF + MAP résultant AR2 de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)], 75×75 points	8 784	62,4 %	64,0 %
6. LQG-KF + MAP résultant AR2 de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)], 149×149 points	34 456	70,1 %	72,6 %

TABLE 5.3 – Performances des régulateurs zonaux avec des modèles dynamiques de la phase résultante pour un système d'OA aux dimensions ELT, obtenues avec les turbulences pseudo-bouillonnante et à tendance forte *frozen flow* de la table 5.2. L'échantillonnage de la base zonale est de 1 ou 2 points linéaires par microlentille.

besoin d'un échantillonnage trop fin de la phase turbulente (conduisant à des simulations plus lourdes), ce qui serait le cas avec un r_0 plus petit. Je rappelle que l'échantillonnage de l'écran turbulent est ici de 8 pixels linéaires par microlentille, soit 592 pixels dans le diamètre.

L'apport du modèle AR2 par rapport au Lazy SA-LQG (AR1 en base zonale) est ici très modéré au vu de la complexité calculatoire additionnelle nécessaire, d'autant plus qu'un calcul d'inversion matricielle est nécessaire pour identifier la matrice du modèle de l'AR2 (voir l'équation (41) de l'article [Prengère *et al.*(2020b)] du chapitre 4). Le régulateur « Lazy SA-LQG » inclut en revanche un modèle dynamique spatialement invariant en cœur de pupille et une compensation MAP en bord de pupille qui sont massivement parallélisables ; de plus, l'identification du modèle est très simple, sans aucune inversion de matrice (voir l'équation (37) de l'article [Prengère *et al.*(2020b)]). Il semble donc très bien adapté pour les ELT.

Voyons à présent dans la prochaine section si les modèles en base de Karhunen-Loève offrent de meilleures perspectives.

5.3 Modèles d'état en base de Karhunen-Loève

Les modes de KL sont statistiquement spatialement indépendants, ce qui se traduit par le fait que la matrice de covariance spatiale Σ_ϕ est diagonale dans la base de KL. En prenant comme hypothèse que chaque mode est également temporellement indépendant des autres, le modèle d'état global

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + V_k, \\ \phi_k &= C_1 X_k, \end{aligned} \quad (5.1)$$

correspondra à la concaténation des modèles d'état de chaque mode. La matrice A est alors diagonale par blocs et V_k est un bruit blanc.

Une fois que les coefficients de la matrice bloc-diagonale A sont connus, et comme en base de KL Σ_ϕ est diagonale, nous pouvons calculer la matrice de covariance du bruit formeur Σ_v^i en résolvant une équation de Lyapounov indépendamment pour chaque mode i . Contrairement à la base de Zernike, le calcul de Σ_v est très rapide en base de Karhunen-Loève, y compris pour des dimensions ELT car les modes sont découplés spatialement et temporellement.

La matrice du modèle de mesure se calcule par

$$C = D_{\text{aso}} \times P_{\text{KL} \rightarrow \text{zon}} C_1, \quad (5.2)$$

où $P_{\text{KL} \rightarrow \text{zon}}$ est la matrice de passage de la base de KL vers la base zonale, et D_{aso} est la matrice de l'ASO géométrique en base zonale finement échantillonnée. La matrice du bruit de mesure étant $\Sigma_w = \sigma_w^2 I$, où σ_w^2 est la variance du bruit de mesure de l'ASO géométrique, nous avons ainsi toutes les matrices du modèle (A , Σ_v , C , Σ_w) pour construire un filtre de Kalman (voir équations (2.41), (2.42) et (2.43)). Nous devons à présent estimer les coefficients A^i des sous-blocs de la matrice d'état A .

La base de Karhunen-Loève est une base construite numériquement, et la double orthogonalisation inhérente à sa construction ne nous permet pas de construire un modèle de façon analytique. Nous proposerons donc des méthodes numériques pour identifier la matrice d'état. Pour cela nous utiliserons tout d'abord dans la section 5.3.1 les densités spectrales de puissance (DSP) empiriques de la turbulence atmosphérique estimées à partir de trajectoires générées en simulation dans un cas type HARMONI SCAO. Dans la section 5.3.2, nous nous appuierons sur les fonctions d'autocorrélation temporelles de chaque mode pour l'identification des modèles. Nous présenterons les résultats de performance en 5.4, et en particulier les avantages et les inconvénients de ces méthodes dans la section 5.4.1, en comparaison avec la méthode *Prediction Error Minimization*, implémentée en optique adaptative dans des travaux précédents de l'équipe [Kulesár *et al.*(2012a), Juvénal *et al.*(2015)] et testée sur ciel avec succès [Sinquin *et al.*(2019), Sinquin *et al.*(2020)]. Nous présenterons ensuite des comparaisons de performance avec les régulateurs zonaux dans notre cas type HARMONI SCAO en section 5.4.2.

5.3.1 Identification à partir des densités spectrales de puissance

Nous allons ici utiliser des DSP empiriques pour identifier les coefficients de la matrice A . Ce type d'identification a déjà été utilisé en optique adaptative dans la compensation

de la turbulence atmosphérique ou des vibrations du télescope avec des régulateurs LQG [Petit *et al.*(2008a), Guesalaga *et al.*(2013), Sivo *et al.*(2014)]. Nous prendrons ici les DSP moyennées sur 20 points de fréquence et décimées en prenant 1 point sur 20, ce qui permet de limiter la variance de la DSP estimée. Ces DSP empiriques ont été calculées à l'aide des trajectoires temporelles des 4 435 modes (hors piston) de Karhunen-Loève à la fréquence d'échantillonnage de 500 Hz et sur une trame temporelle de 60 000 occurrences (voir tables 5.1 et 5.2), pour le cas type HARMONI SCAO. Elles sont affichées en figure 5.1.

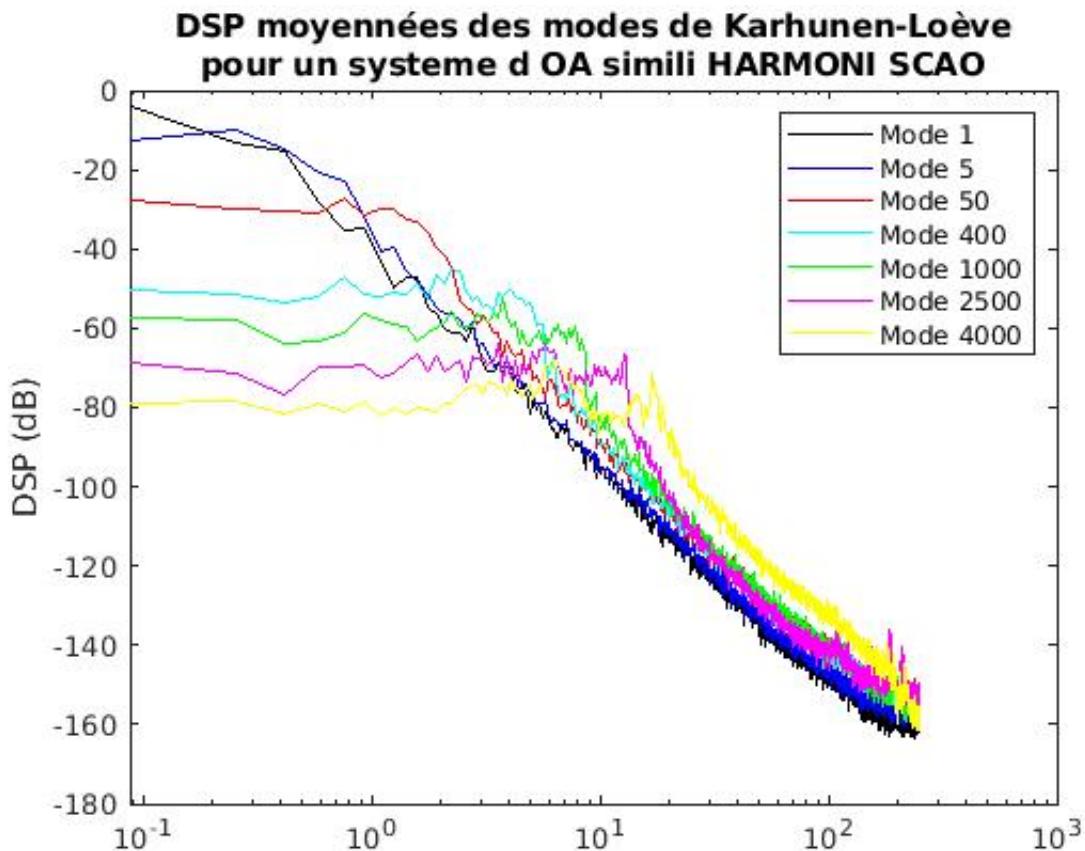


FIGURE 5.1 – Densité spectrale de puissance de 7 modes de Karhunen-Loève pour un système d'OA aux dimensions ELT, obtenue avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2.

Nous observons que les modes de hauts ordres semblent présenter deux résonances, alors que les bas ordres n'en présentent pas. De plus, les décroissances à haute fréquence semblent être de l'ordre de -50 dB/decade, soit un comportement intermédiaire entre un AR2 et un AR3. On peut dès lors conjecturer que les différences de formes entre les bas ordres et hauts ordres et la décroissance à hautes fréquences peuvent rendre délicate l'identification de modèles ayant des structures identiques. Avec les DSP des données de simulation, nous avons ajusté un modèle AR2 à temps continu avec une minimisation sous contrainte de stabilité sur le coefficient d'amortissement, à l'aide d'un critère LSQ sous MATLAB (fonction `lsqcurvefit`). Nous avons choisi un modèle continu, car la contrainte de stabilité du filtre sur le coefficient d'amortissement $\xi > 0$ était plus simple à satisfaire. Nous avons ensuite effectué une discrétisation exacte (fonction `c2d`) de cette représentation d'état, ce qui nous a permis d'obtenir les DSP ajustées de la figure 5.2.

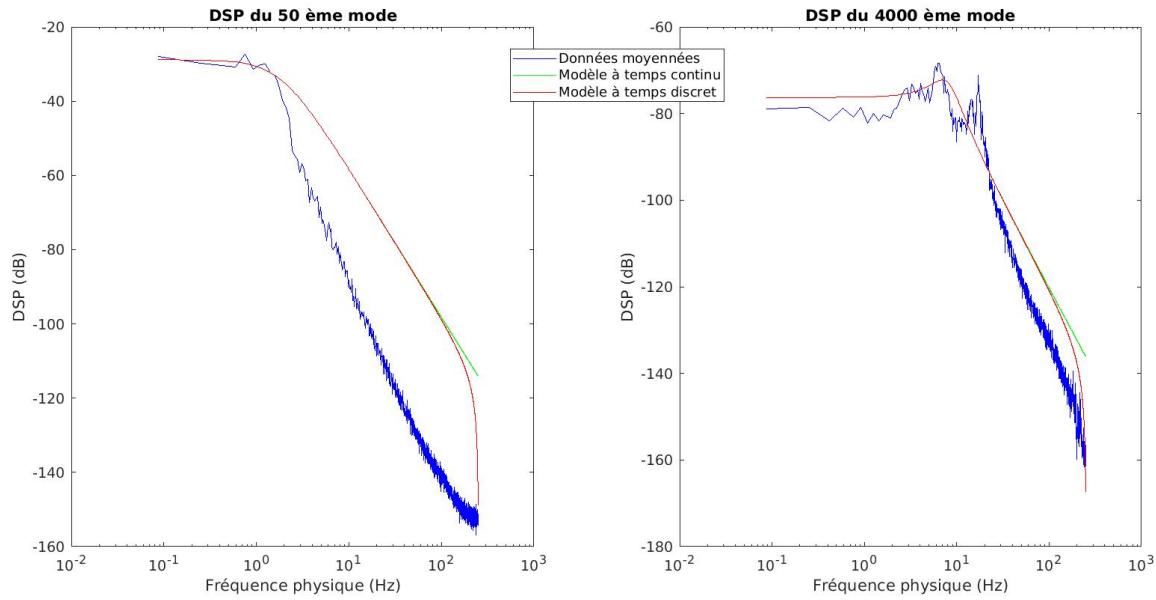


FIGURE 5.2 – Densités spectrales de puissance des séquences de turbulence simulées, du 50^e (à gauche) et 4 000^e (à droite) mode de Karhunen-Loève, obtenues avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2. Les DSP des modèles à temps continu et à temps discret de ces modes sont également présentées.

Nous pourrions utiliser un ordre plus élevé pour les modèles des hauts ordres, mais des simulations bout-en-bout ont montré que les meilleures performances en boucle fermée étaient obtenues avec un modèle de la phase turbulente AR2 pour tous les modes, et qu'il n'était pas utile voire néfaste pour la performance d'avoir un modèle autorégressif d'ordre plus élevé. De plus, la méthode d'identification est ici très dépendante des points d'initialisation des algorithmes d'ajustement sur les DSP. Les pulsations de coupure doivent être correctement initialisées pour obtenir un bon ajustement. Pour un cas réaliste, il faudrait avoir une bonne connaissance des paramètres de la turbulence, et c'est pourquoi nous nous intéresserons à une méthode qui demande moins de connaissances sur les *a priori* turbulents, et qui présente l'avantage d'être simple pour obtenir un modèle dynamique. La prochaine section abordera donc l'identification de modèles AR avec les fonctions d'autocorrélation temporelles.

5.3.2 Identification avec les fonctions d'autocorrélation temporelles

Contrairement aux méthodes d'identification du modèle AR2 en base zonale de l'article [Prengère *et al.*(2020b)] du chapitre 4 (voir équations (40) et (41)), nous n'avons pas accès ici aux fonctions d'autocorrélation temporelle théoriques en base de Karhunen-Loève. Nous disposons seulement d'estimations bruitées de ces quantités grâce aux trajectoires temporelles simulées des modes de Karhunen-Loève. Ces autocorrélations temporelles sont représentées sur la figure 5.3.

Considérons maintenant un mode $\phi_i, i \in \llbracket 1, n_{\text{modes}} \rrbracket$, dont la dynamique suit un modèle

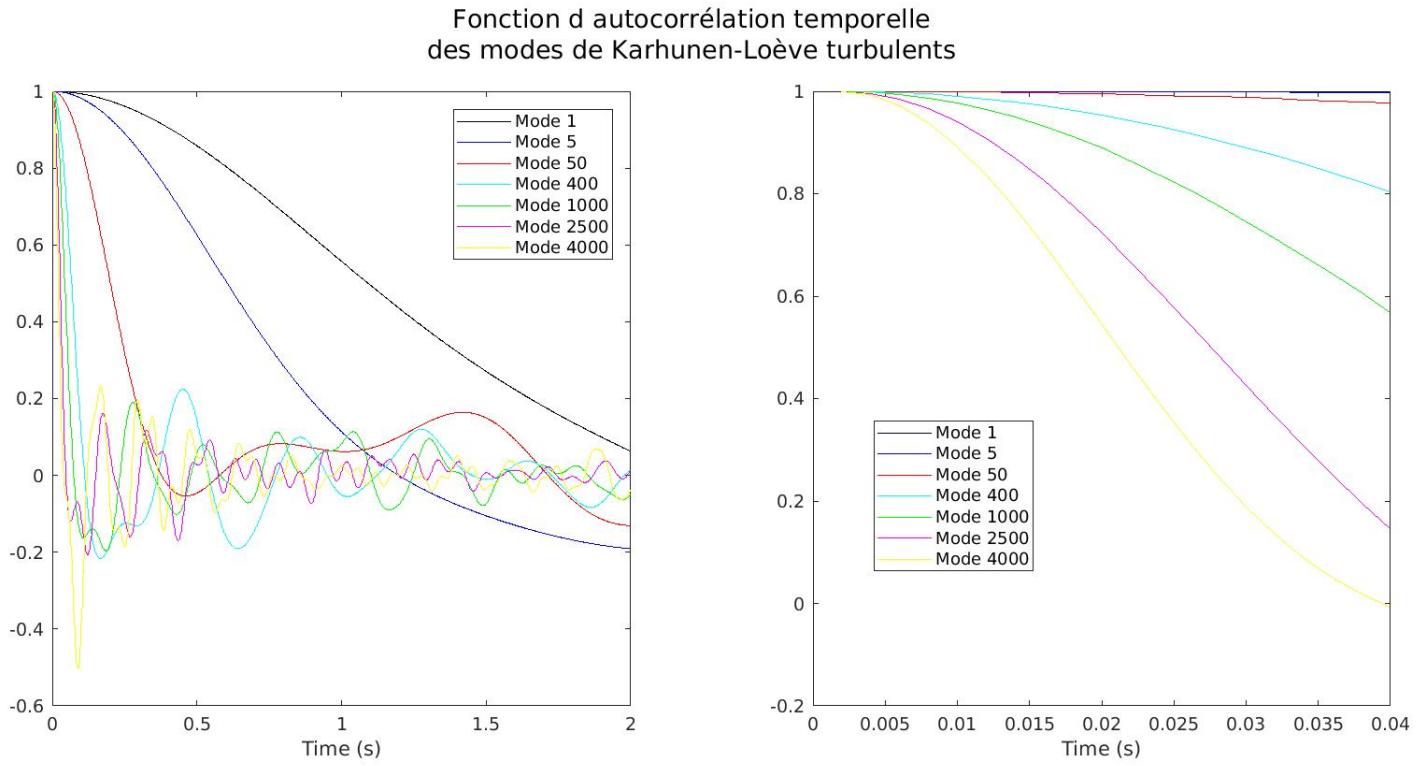


FIGURE 5.3 – Fonctions d'autocorrélation temporelle des modes de Karhunen-Loève d'une turbulence simulée, obtenues avec la turbulence pseudo-bouillonnante de la table 5.2. Elles sont calculées avec une séquence de 60 000 occurrences temporelles générées à 500 Hz ; 7 modes sont représentés du 1^{er} au 4 000^e mode. Gauche : horizon de calcul de 2s. Droite : zoom sur les 0,04 premières secondes, avant les premières anté-corrélations du 4 000 ème mode.

AR2 de coefficients a_1^i et a_2^i :

$$\begin{aligned}\phi_i(k+1) &= a_1^i \phi_i(k) + a_2^i \phi_i(k-1) + v(k), \\ &= (a_1^i, a_2^i) X_i(k) + v(k),\end{aligned}\tag{5.3}$$

où

$$X_i(k) = \begin{pmatrix} \phi_i(k) \\ \phi_i(k-1) \end{pmatrix}.\tag{5.4}$$

Nous pouvons écrire la relation entre les fonctions d'autocorrélations temporelles $C_{\phi_i}(n) = E(\phi_i(k+n)(\phi_i(k))^T)$ à n pas du mode ϕ_i . En considérant un modèle AR2, nous avons donc :

$$\text{Cov}(\phi_i(k+1), X_i(k)) = (a_1^i, a_2^i) \text{Cov}(X_i(k), X_i(k)),\tag{5.5}$$

ce qui conduit à l'équation de Yule-Walker

$$(a_1^i, a_2^i) = (C_{\phi_i}(1), C_{\phi_i}(2)) \begin{pmatrix} C_{\phi_i}(0) & C_{\phi_i}(1) \\ C_{\phi_i}(1)^T & C_{\phi_i}(0) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.6)$$

Nous avons pris ici seulement les premiers instants des fonctions d'autocorrélation temporelle en calculant $\text{Cov}(\phi_i(k+1), X_i(k))$ dans (5.5), mais nous pouvons prendre également les séquences suivantes en calculant $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Cov}(\phi_i(k+1), X_i(k-n))$. Ainsi, pour un modèle AR2, nous estimerons les coefficients $(\hat{a}_1^i, \hat{a}_2^i)$ à l'aide d'une moyenne de N_{batch} pas temporels sur les estimations des fonctions d'autocorrélation de l'équation (5.6) :

$$(\hat{a}_1^i, \hat{a}_2^i) = \frac{1}{N_{\text{batch}}} \sum_{k=2}^{N_{\text{batch}}+1} (\hat{C}_{\phi_i}(k), \hat{C}_{\phi_i}(k+1)) \begin{pmatrix} \hat{C}_{\phi_i}(k-1) & \hat{C}_{\phi_i}(k) \\ \hat{C}_{\phi_i}(k-2) & \hat{C}_{\phi_i}(k-1) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (5.7)$$

où les chapeaux indiquent que les quantités sont estimées à partir des données. Enfin, si nous souhaitons identifier un modèle AR d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons les coefficients $(\hat{a}_1^i, \dots, \hat{a}_n^i)$ de chaque mode i par

$$(\hat{a}_1^i, \dots, \hat{a}_n^i) = \frac{1}{N_{\text{batch}}} \sum_{k=n}^{N_{\text{batch}}+n-1} (\hat{C}_{\phi_i}(k), \dots, \hat{C}_{\phi_i}(k+n-1)) \begin{pmatrix} \hat{C}_{\phi_i}(k-1) & \dots & \hat{C}_{\phi_i}(k-2+n) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{C}_{\phi_i}(k-n) & \dots & \hat{C}_{\phi_i}(k-1) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.8)$$

Cette méthode permet d'identifier rapidement les modèles, même pour des ordres d'ordre 3 ou 4. En revanche elle ne garantit pas un filtre stable. Nous avons remarqué que lorsque nous prenons des batchs d'autocorrélation (N_{batch}) trop longs, et surtout qui font apparaître des anté-corrélations sur les fonctions d'autocorrélation temporelle, des instabilités apparaissent, qui se traduisent par des valeurs propres de la matrice de transition A légèrement supérieures à 1. La solution est alors de diminuer la valeur de N_{batch} jusqu'à atteindre la stabilité. En pratique, pour des dimensions ELT, une valeur $N_{\text{batch}} = 5$ donne des modèles stables pour les atmosphères de la table 5.2.

5.4 Performances en dimensions ELT

5.4.1 Performances selon les méthodes d'identification

Nous comparons dans cette section les performances des régulateurs construits sur les modèles obtenus par les méthodes d'identification présentées ci-dessus avec un modèle identifié par la méthode *Prediction Error Minimization* (PEM), qui utilise les séquences temporelles des modes de KL pour identifier les coefficients de la matrice A , ici avec 60 000 occurrences temporelles. L'identification par PEM en OA est décrite dans les travaux précédents de l'équipe [Kulcsár *et al.*(2012a), Juvénal *et al.*(2015)] et a été testée sur ciel avec succès [Tesch *et al.*(2015), Sinquin *et al.*(2020)]. Dans notre cas, nous utiliserons les trajectoires temporelles des modes de Karhunen-Loève pour identifier les modèles. Nous avons

pour cela simulé une séquence de 14 000 occurrences temporelles à 500 Hz. Cette méthode est stable par construction. La table 5.4 présente les avantages et les inconvénients de chaque méthode, une estimation du temps nécessaire pour calculer les coefficients des modèles de la représentation d'état avec chaque méthode pour une configuration type HARMONI ELT – avec une machine optimisée pour le calcul CPU possédant deux processeurs Xeon E5-2699 V4 (22 cœurs chacun, 2,2 à 3,6 GHz, 35 Mo de mémoire cache) et 512 Go DDR4 ECCRAM. Nous proposons ici d'évaluer simplement le temps de calcul des coefficients du modèle, afin de déterminer la méthode la plus rapide, sachant qu'ils sont calculés de façon complètement parallèle sur les 44 cœurs CPU. Enfin, une évaluation préliminaire de la performance obtenue en simulation pour un système d'OA du VLT NAOS avec une atmosphère de type pseudo-bouillonnante (voir table 5.2) nous permettra de voir quelle méthode est la plus pertinente au vu de l'ensemble des éléments présentés.

Méthode d'identification	Temps de calcul des coefficients	Performance à 1,654 μm	Avantage	Inconvénients
DSP	17 s	51,67%	Stable, très rapide et performant	Très dépendant des points d'initialisation
PEM	2 min 52 s	51,36%	Stable	Moins performant
autocorrélation temporelle	52 s	51,59%	Rapide et performant	Pas de garantie de stabilité

TABLE 5.4 – Comparaison des trois méthodes d'identification de modèles en base de Karhunen-Loève. La première est la méthode de fit sur les DSP empiriques de chaque mode. La deuxième méthode est la méthode *Prediction Error Minimization* (PEM). La dernière identifie les modes à partir des trajectoires d'autocorrélation temporelle de la turbulence atmosphérique.

Notons tout d'abord que les trois méthodes donnent des résultats de performance très similaires sur un VLT NAOS. Et bien que la méthode d'identification avec les DSP donne de bons résultats et soit très rapide, la qualité des ajustements est trop dépendante de l'initialisation de l'algorithme. C'est pourquoi nous utiliserons les trajectoires d'autocorrélation temporelle pour identifier les modèles AR2 en base de Karhunen-Loève pour les simulations de performances ELT. De plus, cette méthode ne requiert aucun *a priori* sur les paramètres de la turbulence atmosphérique et reste relativement rapide. L'absence de garantie de stabilité nous contraint à prendre une longueur de séquence N_{batch} suffisamment courte pour que les premières anté-corrélations des autocorrélations temporelles des hauts ordres, visibles sur la figure 5.3, ne soient pas prises en compte dans le calcul des équations (5.7) et (5.8). Nous avons également essayé d'identifier des modèles dynamiques d'ordre plus élevé, mais les performances de commande n'en sont pas améliorées, voire même parfois dégradées.

5.4.2 Comparaison de performance entre modèle en base de Karhunen-Loève et modèle zonal

La table 5.5 présente les résultats du régulateur en base de Karhunen-Loève dans le cas type HARMONI ELT en mode SCAO, en comparaison avec nos régulateurs en base zonale et un intégrateur. Les régulateurs 1, 3 et 4 sont décrits dans la section 5.2. Le régulateur 2 est élaboré dans une base de Karhunen-Loève de 4 435 modes (piston retiré de l'estimation), avec un modèle AR2 identifié sur les trajectoires d'autocorrélation temporelle des modes sur une séquence de 60 000 occurrences de phase turbulente générées à 500 Hz et sur un télescope aux dimensions de l'ELT (voir la table 5.1). Les coefficients du modèle sont calculés pour chaque mode par l'équation (5.7), et le nombre de pas N_{batch} des autocorrélations utilisées pour le calcul sera fixé à 5. Nous appellerons ce régulateur le « LQG-KL AR2 ».

Correcteur	Taille du vecteur d'état	Atmosphère	
		Pseudo-bouillonnante	Tendance forte <i>frozen flow</i>
1. Intégrateur $g = 0,5$	4 436	67,4 %	67,5 %
2. LQG-KL AR2 Base de 4 435 modes	8 870	69,1 %	67,8 %
4. Lazy SA-LQG de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)], 149 × 149 points	17 228	69,7 %	72,1 %

TABLE 5.5 – Performance des régulateurs en base de Karhunen-Loève avec un modèle dynamique AR2 sur la phase résultante pour un système d'OA aux dimensions ELT. L'échantillonnage de la base zonale du régulateur 4 est de 2 points linéaires par microlentille.

Nous obtenons des performances dans un cas pseudo-bouillonnant légèrement supérieures à celles de l'intégrateur, mais moins bonnes qu'avec le régulateur zonal Lazy SA-LQG. Cependant, l'importante réduction de la complexité calculatoire par rapport à ce dernier ouvre des perspectives intéressantes dans ce type de cas d'atmosphère sans dominante *frozen flow*. En revanche, pour un cas d'atmosphère à tendance forte de *frozen flow*, ce régulateur LQG-KL AR2 ne présente pas d'intérêt par rapport à un intégrateur, contrairement au Lazy SA-LQG avec un échantillonnage zonal de 2 points linéaires par microlentille. Afin d'affiner notre choix, les temps nécessaires pour résoudre l'équation de Riccati et calculer les matrices du modèle sont renseignés dans la table 5.5, entre le régulateur modal 2 en base de Karhunen-Loève et le régulateur zonal 4 de la table 5.6. Les calculs n'ont pas été optimisés en fonction de la structure, les valeurs sont donc indicatives, mais la différence entre les deux calculs illustre le gain d'une méthode par rapport à une autre. L'équation de Riccati a été résolue avec un algorithme de doublage dont le seuil de convergence a été fixé à 10^{-5} (évolution de la trace de la matrice de covariance d'erreur de prédiction d'une itération à l'autre), ce qui est également le cas pour le régulateur

zonal 4.

Correcteur	Temps pour calculer la représentation d'état	Temps de calcul du gain de Kalman
2. LQG-KL AR2 Base de 4 435 modes	2 min 16 s	10 min 11 s
4. Lazy SA-LQG de [Prengère <i>et al.</i> (2020b)] Échantillonnage de 149 × 149 points	10 min 53 s	1 h 07 min

TABLE 5.6 – Temps de calcul des matrices de la représentation d'état et du gain du filtre de Kalman pour les régulateurs 2 et 4 de la table 5.5.

Nous constatons une très grande différence entre les temps de calcul pour les modèles zonaux et les modèles en base de Karhunen-Loève, ce qui confirme le grand intérêt de la représentation en base de Karhunen-Loève pour une atmosphère de type pseudo-bouillonnante. En revanche, pour une dominante *frozen flow*, les performances sont légèrement supérieures à l'intégrateur. Dans ce type de configuration turbulente, il serait pertinent d'utiliser un projecteur tiède en base de Karhunen-Loève pour le calcul de la prédiction, de façon similaire à (3.36) en utilisant le filtre de Kalman construit avec le modèle AR2 en base de Karhunen-Loève pour l'estimation. Une autre alternative serait d'utiliser le Lazy SA-LQG en base zonale, car même si les temps de calculs sont moindres, ses performances sont bien meilleures pour des atmosphères à tendance *frozen flow*.

5.5 Conclusion

Nous avons testé dans ce chapitre trois méthodes d'identification de modèles en base de Karhunen-Loève, la première utilisant les densités spectrales de puissance empiriques des modes, la deuxième les trajectoires d'autocorrélation temporelle, et la troisième la méthode *Prediction Error Minimization*. La méthode des autocorrélations temporelles s'est révélée constituer un bon compromis entre performance et temps de calcul, et le temps d'identification des matrices des modèles d'état reste raisonnable en dimensions ELT. Les performances sont légèrement meilleures qu'un intégrateur, avec moins de 2 points de Strehl d'écart, ce qui motive trois perspectives de recherche afin de compléter et d'améliorer les performances avec un modèle en base de Karhunen-Loève.

La première est d'implémenter un projecteur tiède (3.36) pour le calcul de la prédiction du régulateur LQG-KL AR2 afin de gagner en performance dans le cas où les atmosphères sont à tendance *frozen flow*, de façon similaire au travail que nous avons fait dans le LQG tiède en base de Zernike dans la section 3.1.4 du chapitre 3.

La seconde est de prendre une base de Karhunen-Loève « étendue », qui contiendrait davantage de modes que le nombre d'actionneurs du miroir déformable. Ainsi notre base pourrait reconstruire des fréquences spatiales plus élevées et limiter le repliement spectral

de la mesure sur les bas ordres. Ceci peut être réalisé simplement soit en prenant un miroir déformable fictif qui contiendrait davantage d'actionneurs que le nombre d'actionneurs du miroir réel, soit en utilisant une base de Karhunen-Loève différente, et qui serait de dimension plus importante que le nombre d'actionneurs. Il pourrait s'agir d'une base de KL plus grande construite d'abord avec la base de KL du miroir que nous avons dans ce chapitre, en utilisant pour sa génération la matrice d'influence du miroir déformable, puis des modes d'ordre supérieur qui pourraient être par exemple les vecteurs du complémentaire orthogonal de cette base de KL du miroir dans un espace zonal finement échantillonné.

La troisième, plus simple, est de prendre une base de KL qui serait calculée à partir de l'opérateur de la matrice ASO au lieu de la matrice d'influence du miroir déformable. Comme il y a deux fois plus de mesures que de microlentilles, nous aurions alors une base de KL de dimension supérieure au nombre d'actionneurs, et surtout cette dernière amélioration devrait permettre de significativement réduire la complexité du calcul du gain de Kalman. En effet, nous ne pouvons en l'état pas calculer ce gain pour chaque mode, car la matrice C de la représentation d'état n'est pas diagonale par blocs et introduit donc un couplage entre modes lors de la résolution de l'équation de Riccati. Toutes les autres matrices de la représentation d'état sont en revanche diagonales par bloc dans la base de Karhunen-Loève. Avec une base de KL qui serait calculée avec la matrice ASO, la matrice du modèle C deviendrait elle aussi diagonale par blocs, et nous pourrions résoudre l'équation de Riccati pour chaque mode de façon complètement indépendante, avec des équations de très petites dimensions. En couplant ceci avec une base de Karhunen-Loève étendue, nous pourrions peut-être obtenir de meilleures performances avec un régulateur LQG-KL AR2. Ceci reste à être démontré et testé en simulation, mais ouvre des perspectives intéressantes pour la recherche de modèles et de bases adaptées aux ELT.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Conclusion

La construction imminente de l'*Extremely Large Telescope* (ELT) de classe 40 m et prévue pour 2026 projette l'astronomie dans une nouvelle ère, et repose sur la capacité de l'optique adaptative à réduire les effets de la turbulence atmosphérique sur l'imagerie d'objets célestes. De nombreux travaux en optique adaptative classique ou grand champ ont proposé des régulateurs LQG à variance minimale construits sur une représentation d'état de la boucle d'OA et permettant d'augmenter significativement la résolution spatiale, comme par exemple en OA extrême (XAO) pour la détection d'exoplanètes, ou pour augmenter le domaine de correction de l'OA en adaptative grand champ. La complexité calculatoire de ces lois de commandes est plus importante que celle d'un correcteur à action intégrale utilisé sur les télescopes du monde entier depuis 30 ans, mais elles peuvent apporter un gain important de performance. Elles se sont montrées particulièrement performantes pour la compensation des vibrations de structure des télescopes [Petit *et al.*(2008b), Sivo *et al.*(2014), Sinquin *et al.*(2019), Sinquin *et al.*(2020)] qui dégradent fortement la qualité de l'imagerie scientifique. Ces lois de commandes sont basées sur un filtre de Kalman qui prédit à court terme le comportement de la phase turbulente. Le filtre est construit sur une représentation d'état de la dynamique de la turbulence atmosphérique et de la mesure. La prédiction a pour but de compenser les retards présents dans la boucle et permet ainsi de réduire l'erreur temporelle.

Dans la perspective d'améliorer les performances d'imagerie, nous avons cherché à prendre explicitement en compte le *frozen flow* dans les modèles dynamiques des régulateurs LQG. En effet, des expérimentations sur le ciel utilisant les données de télémétrie de l'optique adaptative d'ALTAIR et de Keck, ou des études sur données, ont montré que la grande majorité des comportements de la turbulence atmosphérique était un comportement de type *frozen flow* [Poyneer *et al.*(2009), Bharmal(2015)]. Cependant il n'est pas possible de faire un modèle dynamique de phase turbulente avec une hypothèse de pur *frozen flow* qui soit markovien [Gavel et Wiberg(2003), Poyneer et Véran(2008)]. Toutefois, avec certaines approximations, il est possible d'avoir des modèles proches d'un *frozen flow*, qui soient markoviens et stables en base de Fourier (voir [Poyneer et Véran(2008)]), ou bien en base zonale [Piatrou et Roggemann(2007)] ou de Zernike [Juvénal *et al.*(2016a)]. Ces modèles paramétriques dépendent des conditions atmosphériques, et donc du pa-

ramètre de Fried r_0 , de la grande échelle L_0 , du profil de vent (norme et direction) et de C_n^2 , qui peuvent être par exemple fournis par des mesures de Stereo-Scidar [Osborn *et al.*(2016)] ou estimés à partir des données de télémétrie. Le modèle de mesure est un ASO de type Shack-Hartmann géométrique adapté à chaque base de représentation de la phase turbulente. Afin de se positionner par rapport aux résultats de la littérature et de l'état de l'art de la commande en optique adaptative, nous avons systématiquement comparé nos résultats à un correcteur à action intégrale bien réglé, et au régulateur LQG construit sur un modèle AR2 en base de Zernike, qui a fait ses preuves sur le ciel [Sivo *et al.*(2014)].

Dans le chapitre 3, après un passage par quelques régulateurs LQG en base de Zernike de la littérature, nous nous sommes intéressés aux régulateurs LQG utilisant des hypothèses de *frozen flow*. Le LQG tiède [Juvénal(2017)] a un modèle mixte Zernike-zonal de la phase résultante et intègre une somme pondérée d'un modèle de *frozen flow* et d'un modèle bouillonnant. Nous avons repris ces travaux préliminaires et avons développé une approche analytique pour proposer une expression théorique de la somme pondérée en utilisant le profil de C_n^2 . Des évaluations de performance en boucle fermée dans différentes configurations d'atmosphère ont montré le grand avantage du LQG tiède par rapport aux autres régulateurs LQG en base de Zernike pour un système d'OA de classe VLT (8-10 m) NAOS de par sa dimension réduite et sa bonne polyvalence pour les différents scénarios de dynamique turbulente.

La base de Zernike n'est pas transposable en dimension ELT, car elle induit des problèmes numériques au-delà de 900 modes environ. Ce nombre de modes est insuffisant pour correctement représenter le contenu spectral du miroir déformable de l'ELT. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des modélisations spatialement invariantes en base zonale, et donc massivement parallélisables et susceptibles d'être bien adaptées pour les régulateurs de l'ELT : les filtres de Kalman distribués. Deux modèles ont été testés avec ces filtres, un modèle très simple sur la phase résultante [Massioni *et al.*(2011)] qui n'avait jamais été comparé aux régulateurs standards de la littérature (comme un simple intégrateur), ou bien une modélisation multicouche *frozen flow* qui n'avait jamais été étudiée en SCAO. Pour un système d'OA type VLT NAOS, leurs performances sont toujours moins bonnes que celles d'un intégrateur, quelle que soit la finesse de l'échantillonnage spatial du modèle de phase. Ces régulateurs LQG construits sur des filtres de Kalman distribués ne présentent donc pas d'intérêt en SCAO sur ces dimensions VLT NAOS, et le chapitre 5 nous a également conduit aux mêmes conclusions dans des dimensions ELT. Il faut noter cependant que la reconstruction multicouche a montré son efficacité en simulation de grand champ [Gilles *et al.*(2013), Massioni *et al.*(2015)] pour le TMT, due à la configuration grand champ qui produit des mesures en plus grand nombre. La modélisation zonale permet une description naturelle et simple du *frozen flow*. Nous avons donc abandonné l'invariance spatiale du filtre de Kalman distribué, pour développer au chapitre 4 des modèles de *frozen flow* en base zonale et localisés dans la pupille.

Nous y avons notamment présenté deux nouvelles modélisations de la phase résultante en base zonale, l'une avec un modèle AR1 donnant le Lazy SA-LQG, qui a une structure très creuse et dont la construction est massivement parallélisable, l'autre avec un modèle AR2, le régulateur LQG-KF+MAP, qui a une structure pleine. Nous avons proposé des comparaisons de performance de ces modèles avec la littérature, et ces résultats ont été publiés dans [Prengère *et al.*(2020b)].

Nous avons présenté deux cas d'applications. Le cas classique d'astronomie, avec un système d'OA type VLT NAOS, a donné de bonnes performances – plusieurs points de Strehl au dessus de l'intégrateur pour une atmosphère à dominante *frozen flow*. Le cas d'un système d'OA pour de l'observation de satellites en orbite basse (*Low Earth Orbit*) a ensuite été étudié. La dynamique turbulente est beaucoup plus rapide qu'en astronomie à cause du défilement apparent du satellite. Nous avons considéré le satellite comme une source ponctuelle à l'infini et défilante dans le ciel pour la mesure de l'ASO. Plusieurs niveaux de bruits de mesure et différentes positions du satellite dans le ciel ont été considérés. Nous avons montré le très grand potentiel du LQG-KF+MAP AR2 résultant dans le cas de l'imagerie de satellite en orbite basse, où la différence de performance est très importante avec les autres régulateurs – un écart de plus de 10 points de Strehl par rapport aux autres régulateurs LQG et 40 points de plus que l'intégrateur pour les cas les plus favorables. Ce régulateur a également montré une très bonne robustesse à des erreurs sur les profils de vents naturels cohérentes avec la littérature [Osborn *et al.*(2016)]. Les paramètres de simulation du satellite en orbite basse sont assez simples, et des simulations plus réalistes pourraient être réalisées, notamment sur les conditions de la mesure.

Ces résultats, les premiers du genre, ouvrent des possibilités pour d'autres applications à très haute dynamique turbulente, comme le cas d'une liaison telecom sol-satellite en orbite basse, où d'autres paramétrages et effets propres au domaine des télécommunications optiques devront être étudiés (détection cohérente, choix de modulation des signaux telecom, calcul du *Bit error rate*...). Étant donné l'augmentation du nombre de transferts de données dans les réseaux télécom (très récemment la 5G), l'implémentation de modèles performants pour une liaison optique sol-espace stable en orbite basse pourrait être une avancée significative pour les réseaux de télécommunication. Ces résultats très prometteurs du LQG-KF+MAP AR2 doivent être validés dans un premier temps par des simulations plus réalistes qui pourraient prendre en compte les effets de scintillation et le calcul de la mesure faite sur le satellite avec une inter-corrélation entre les imagettes du Shack-Hartmann (objet étendu). Dans un second temps, ils pourront être validés par des expérimentations ciel avec un suivi de trajectoire d'un satellite dans le ciel pour de l'observation.

Le Lazy SA-LQG, avec sa structure très creuse, donne des performances moindres mais qui restent intéressantes, surtout dans un cas d'atmosphère à tendance *frozen flow*. Ce régulateur peut donc être pertinent pour les dimensions ELT. Nos régulateurs en base zonale étant paramétrés par les conditions turbulentes, nous pourrions, au lieu de considérer ces paramètres comme connus a priori, les estimer à partir des données de télémétrie, comme évoqué plus haut. Le paramètre de Fried r_0 et le profil de vent peuvent être déduits des mesures [Fusco *et al.*(2004), Sergeyev *et al.*(2010), Sergeyev et Roggemann(2011)]. La mise à jour de ces paramètres peut être faite à intervalles réguliers à l'aide d'un « batch » de données de télémétrie, ce qui permettrait d'avoir un modèle d'atmosphère périodiquement réactualisé. Les résultats obtenus par nos régulateurs zonaux en SCAO peuvent être généralisés à l'optique adaptative grand champ, et devraient être comparés avec les régulateurs standards que sont les reconstructeurs statique MAP, combinés à une étape de prédiction linéaire comme expliqué par exemple dans [Correia *et al.*(2014)].

Le chapitre 5 présente les performances de commande dans un cas de simulation ELT type HARMONI en mode de fonctionnement SCAO, pour des régulateurs LQG en base zonale et de Karhunen-Loève construits sur des modèles dynamiques AR2. Nous avons

proposé trois méthodes pour identifier les coefficients des modèles AR2 à partir des séquences de modes turbulents de simulation. Celle qui présente l'avantage d'être assez rapide, polyvalente pour les différents scénarios de turbulence et performante utilise les trajectoires d'autocorrélation temporelle des modes turbulents. Le régulateur LQG avec un modèle AR2 diagonal en base de Karhunen-Loève est très rapide à calculer par rapport au Lazy SA-LQG pour les dimensions d'un système d'OA simili HARMONI en mode SCAO. Il donne des résultats similaires au Lazy SA-LQG dans un scénario d'atmosphère bouillonnante, et est meilleur qu'un intégrateur. En revanche, les résultats pour les atmosphères à tendance *frozen flow* sont décevants et au niveau de ceux d'un intégrateur. Des solutions pour augmenter les performances de ce régulateur sont envisageables, comme l'implémentation d'un projecteur tiède similaire à ce qui a été proposé dans le cas VLT au chapitre 3, ce qui permettrait de prendre en compte le comportement d'une couche de *frozen flow* pour le calcul de la prédiction en utilisant l'estimation fournie par le filtre de Kalman.

6.2 Perspectives

Pour le passage aux dimensions ELT des régulateurs zonaux, la parallélisation des calculs pour l'implémentation temps réel qui sera utilisée par le RTC est un point qui n'a pas été abordé ici. La complexité calculatoire du filtre de Kalman peut être en tout état de cause réduite en prenant un échantillonnage de 1 point linéaire par microlentille. Cependant, nous savons que cela entraîne une forte dégradation des performances. On pourrait envisager une interpolation plus efficace de la grille zonale du filtre de Kalman pour faire la projection sur les fonctions d'influence du miroir déformable. Une interpolation stochastique de type *Maximum a Posteriori* pourrait être judicieuse, et bien que le calcul puisse être complexe il est à faire hors ligne. La réduction de l'échantillonnage de la grille zonale réduira la complexité de l'implémentation temps réel du filtre de Kalman, mais aussi celle de la résolution de l'équation de Riccati. Des évaluations fines de performance devront être réalisées pour valider cette possibilité. Enfin, des travaux sur de nouvelles formulations spatialement invariantes, différentes des travaux sur les filtres de Kalman distribués, ont été présentés [[Shatokhina et Ramlau\(2017\)](#), [Raynaud et Kulcsár\(2020\)](#)], et pourraient présenter de nouvelles possibilités pour les ELT afin de réduire la complexité calculatoire de façon significative.

L'étude d'une nouvelle base de Karhunen-Loève de dimension plus importante devrait permettre d'augmenter davantage les performances de commande, tout en bénéficiant de sa structure particulière qui permet de calculer rapidement la solution de l'équation de Riccati et le gain du filtre de Kalman. On peut en effet envisager de calculer la base de Karhunen-Loève grâce à l'opérateur de la matrice ASO au lieu de la matrice d'influence du miroir déformable. Le modèle de mesure du filtre de Kalman serait alors bloc diagonal, et permettrait de résoudre l'équation de Riccati pour chaque mode de façon indépendante. Cela réduirait considérablement le temps nécessaire au calcul du gain de Kalman. De plus, le nombre de modes de cette nouvelle base de Karhunen-Loève (ici égal à 2 fois le nombre de mesures) serait plus important (le nombre de modes est d'ordinaire égal au nombre d'actionneurs), et cela permettrait d'avoir une base d'estimation plus riche et limiterait davantage la propagation du bruit de mesure sur les bas ordres. Les perspectives proposées dans cette conclusion sont à développer et à évaluer avant une éventuelle validation

avec une expérimentation sur ciel. L'ensemble de nos modèles de turbulence devront être combinés avec les modèles de vibrations, en concaténant simplement les deux modèles dans un modèle unique de dimension supérieure, et ainsi d'avoir un filtre de Kalman qui reconstruise et compense les deux perturbations à la fois.

Liste des publications

Zonal-based high-performance control in adaptive optics systems with application to astronomy and satellite tracking.

Journal of the Optical Society of America A, A377, 1083–1099, 2020.

L. Prengère, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud.

High performance controllers towards ELT-sized adaptive optics system

8th International Symposium on Optronics In Defence And Security, OPTRO2018, Paris, France, 2018.

L. Prengère, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et J.-M. Conan.

Predictive controllers for high dynamic atmospheric turbulence compensation. Application to Low-Earth Orbit satellite tracking

9th International Symposium on Optronics In Defence And Security, OPTRO2020, Paris, France, 2020.

L. Prengère, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud.

Adaptive optics control with predictive controllers based on frozen-flow models for Low-Earth Orbit satellite tracking

Adaptive Optics : Analysis, Methods & Systems, JW4G-5, Optical Society of America, Vancouver, Canada, 2020.

L. Prengère, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud.

On-sky results for adaptive optics control with data-driven models on low-order modes

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 4983, 3228–3240, 2020.

B. Sinquin, L. Prengere, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, E. Gendron, J. Osborn, A. Basden, J.-M. Conan, N. Bharmal, L. Bardou, et al.

Bibliographie

- [Airy(1835)] G. B. Airy. On the diffraction of an object-glass with circular aperture. *TCAPS* **5**, 283, 1835.
- [Anderson et Moore(1990)] B. Anderson et J. Moore. Optimal Control : Linear Quadratic Methods. *Prentice Hall, N. J* **2**, 293–305, 1990.
- [Arcidiacono *et al.*(2014)] C. Arcidiacono, L. Schreiber, G. Bregoli, E. Diolaiti, I. Foppiani, G. Cosentino, M. Lombini, R. Butler, et P. Ciliegi. End to end numerical simulations of the MAORY multiconjugate adaptive optics system. Dans *Adaptive Optics Systems IV*, Volume 9148, p. 91486F, International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [Assémat *et al.*(2006)] F. Assémat, R. Wilson, et E. Gendron. Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage. *Optics express* **14** 3, 988–999, 2006.
- [Avila *et al.*(1998)] R. Avila, J. Vernin, et S. Cuevas. Turbulence profiles with generalized scidar at san pedro mártir observatory and isoplanatism studies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **110** 751, 1106, 1998.
- [Avila *et al.*(1997)] R. Avila, J. Vernin, et E. Masciadri. Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized scidar. *Applied Optics* **36** 30, 7898–7905, 1997.
- [Babcock(1953)] H. W. Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **65** 386, 229–236, 1953.
- [Basden *et al.*(2016)] A. G. Basden, D. Atkinson, N. A. Bharmal, U. Bitenc, M. Brangier, T. Buey, T. Butterley, D. Cano, F. Chemla, P. Clark, M. Cohen, J.-M. Conan, F. J. de Cos, C. Dickson, N. A. Dipper, C. N. Dunlop, P. Feautrier, T. Fusco, J. L. Gach, E. Gendron, D. Geng, S. J. Goodsell, D. Gratadour, A. H. Greenaway, A. Guesalaga, C. D. Guzman, D. Henry, D. Holck, Z. Hubert, J. M. Huet, A. Kellerer, C. Kulcsar, P. Laporte, B. Le Roux, N. Looker, A. J. Longmore, M. Marteaud, O. Martin, S. Meimon, C. Morel, T. J. Morris, R. M. Myers, J. Osborn, D. Perret, C. Petit, H. Raynaud, A. P. Reeves, G. Rousset, F. Sanchez Lasheras, M. Sanchez Rodriguez, J. D. Santos, A. Sevin, G. Sivo, E. Stadler, B. Stobie, G. Talbot, S. Todd, F. Vidal, et E. J. Younger. Experience with wavefront sensor and deformable mirror interfaces for wide-field adaptive optics systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **459**, 1350–1359, 2016.

- [Beghi *et al.*(2013)] A. Beghi, A. Cenedese, et A. Masiero. On the computation of Kalman gain in large adaptive optics systems. Dans *Control & Automation (MED), 2013 21st Mediterranean Conference on*, pp. 1374–1379, IEEE, 2013.
- [Bernard *et al.*(2017)] J. Bernard, D. Gratadour, M. Lainée, D. Perret, et A. Sevin. A GPU based RTC for E-ELT adaptive optics : Real time controller prototype. Dans *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes V (AO4ELT5)*, *This conf.(Oct. 2017)*, 2017.
- [Beuzit *et al.*(1994)] J.-L. Beuzit, N. N. Hubin, E. Gendron, L. Demainly, P. Gigan, F. Lacombe, F. Chazallet, D. Rabaud, et G. Rousset. ADONIS : a user-friendly adaptive optics system for the ESO 3.6-m telescope. Dans *Adaptive Optics in Astronomy*, Volume 2201, pp. 955–961, International Society for Optics and Photonics, 1994.
- [Beuzit *et al.*(2005)] J.-L. Beuzit, M. Feldt, D. Mouillet, C. Moutou, K. Dohlen, P. Puget, T. Fusco, P. Baudoz, A. Boccaletti, S. Udry, et al. A planet finder instrument for the VLT. *Proceedings of the International Astronomical Union* **1** C200, 317–322, 2005.
- [Beuzit *et al.*(2008)] J.-L. Beuzit, M. Feldt, K. Dohlen, D. Mouillet, P. Puget, F. Wildi, L. Abe, J. Antichi, A. Baruffolo, P. Baudoz, et al. SPHERE : a planet finder instrument for the VLT. Dans *Ground-based and airborne instrumentation for astronomy II*, Volume 7014, p. 701418, International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [Bharmal(2015)] N. A. Bharmal. Frozen flow or not ? Investigating the predictability of the atmosphere **595** 1, 012003, 2015.
- [Castro *et al.*(2000)] J. Castro, N. Devaney, L. Jochum, B. Ronquillo, et L. Cavaller-Marques. Status of the design and fabrication of the GTC mirrors. Dans *Optical Design, Materials, Fabrication, and Maintenance*, Volume 4003, pp. 24–33, International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [Chiang *et al.*(2010)] C.-Y. Chiang, H.-Y. Fan, W.-W. Lin, et al. STRUCTURED DOUBLING ALGORITHM FOR DISCRETE-TIME ALGEBRAIC RICCATI EQUATIONS WITH SINGULAR CONTROL WEIGHTING MATRICES. *Taiwanese Journal of Mathematics* **14** 3A, 933–954, 2010.
- [Clénet *et al.*(2016)] Y. Clénet, T. Buey, G. Rousset, E. Gendron, S. Esposito, Z. Hubert, L. Busoni, M. Cohen, A. Riccardi, F. Chapron, et al. Joint MICADO-MAORY SCAO mode : specifications, prototyping, simulations and preliminary design. Dans *Adaptive Optics Systems V*, Volume 9909, p. 99090A, International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [Clénet *et al.*(2018)] Y. Clénet, T. Buey, E. Gendron, Z. Hubert, F. Vidal, M. Cohen, F. Chapron, A. Sevin, P. Fédou, G. Barbary, et al. The MICADO first-light imager for the ELT : towards the preliminary design review of the MICADO-MAORY SCAO. Dans *Adaptive Optics Systems VI*, Volume 10703, p. 1070313, International Society for Optics and Photonics, 2018.
- [Conan *et al.*(1995)] J.-M. Conan, G. Rousset, et P.-Y. Madec. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *JOSA A* **12** 7, 1559–1570, 1995.
- [Conan(2000)] R. Conan. *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à haute résolution angulaire en astronomie* :

- application à l'optique adaptative, à l'interférométrie et aux très grands télescopes.* Thèse de doctorat, Nice, 2000.
- [Conan(2008)] R. Conan. Mean-square residual error of a wavefront after propagation through atmospheric turbulence and after correction with Zernike polynomials. *JOSA A* **25** 2, 526–536, 2008.
- [Copeland *et al.*(2016)] M. Copeland, F. Bennet, A. Zovaro, F. Rigaut, P. Piatrou, V. Korkiakoski, et C. Smith. Adaptive optics for satellite and debris imaging in LEO and GEO. Dans *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, 2016.
- [Correia(2010)] C. Correia. *Conception de lois de commande à hautes performances pour l'optique adaptative des grands/très grands télescopes.* Thèse de doctorat, Université Paris-Nord-Paris XIII, 2010.
- [Correia *et al.*(2007)] C. Correia, J. Conan, C. Kulcsár, H. Raynaud, C. Petit, et T. Fusco. Fourier-domain wave-front reconstruction for large adaptive optical systems. *Semaine Française d'Astronomie et d'Astrophysique* 2007.
- [Correia *et al.*(2014)] C. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardiére, et C. Bradley. Static and predictive tomographic reconstruction for wide-field multi-object adaptive optics systems. *JOSA A* **31** 1, 101–113, 2014.
- [Correia *et al.*(2008)] C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, et J.-M. Conan. Globally optimal minimum mean-square error control in adaptive optical systems with mirror dynamics. Dans *Adaptive Optics Systems*, Volume 7015, p. 70151F, International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [Correia *et al.*(2010)] C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, et J.-M. Conan. On the optimal reconstruction and control of adaptive optical systems with mirror dynamics. *J. Opt. Soc. Am. A* **27** 2, 333–349, 2010.
- [Correia *et al.*(2015)] C. M. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardiére, et C. Bradley. Spatio-angular minimum-variance tomographic controller for multi-object adaptive-optics systems. *Applied optics* **54** 17, 5281–5290, 2015.
- [Costille(2009)] A. Costille. *Les optiques adaptatives grand champ : stratégies de correction et validations expérimentales.* Thèse de doctorat, Université Paris VII, 2009.
- [Costille *et al.*(2011)] A. Costille, C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud. Linear quadratic gaussian control applied to WFAO systems : simulation and experimental results. *European Journal of Control* **17** 3, 302–315, 2011.
- [Cranneya *et al.*(2019)] J. Cranneya, J. De Donaa, F. Rigautb, et V. Korkiakoskib. Zonal Multi-Layer Predictive Control for Multi-Conjugate Adaptive Optics : MAVIS Simulations. Dans *AO4ELT6*, Adaptive Optics For Extremely Large Telescopes, 2019.
- [Dai(1996)] G.-M. Dai. Modal wave-front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions. *JOSA A* **13** 6, 1218–1225, 1996.
- [De Larminat(2009)] P. De Larminat. *Automatique appliquée.* Hermès, Paris, 2009.
- [Dessenne *et al.*(1997)] C. Dessenne, P.-Y. Madec, et G. Rousset. Modal prediction for closed-loop adaptive optics. *Optics letters* **22** 20, 1535–1537, 1997.
- [Diolaiti *et al.*(2016)] E. Diolaiti, P. Ciliegi, R. Abicca, G. Agapito, C. Arcidiacono, A. Baruffolo, M. Bellazzini, V. Biliotti, M. Bonaglia, G. Bregoli, et al. MAORY : adaptive

- optics module for the E-ELT. Dans *Adaptive Optics Systems V*, Volume 9909, p. 99092D, International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [Ellerbroek(1993)] B. L. Ellerbroek. Multi-Conjugate Adaptive Optics for Wide Field-of-View Atmospheric Turbulence Compensation. Dans *Real Time and Post Facto Solar Image Correction* (R. R. Radick, ed.), p. 15, 1993.
- [Esposito *et al.*(2005)] S. Esposito, E. Pinna, A. Tozzi, A. Puglisi, et P. Stefanini. Pyramid Wavefront Sensor at the William Herschel Telescope : Towards Extremely Large Telescopes. *the ING Newsletter* **10**, 26–27, 2005.
- [Esposito *et al.*(2012)] S. Esposito, A. Riccardi, E. Pinna, A. Puglisi, F. Quirós-Pacheco, C. Arcidiacono, M. Xompero, R. Briguglio, L. Busoni, L. Fini, et al. Natural guide star adaptive optics systems at LBT : FLAO commissioning and science operations status. Dans *Adaptive Optics Systems III*, Volume 8447, p. 84470U, International Society for Optics and Photonics, 2012.
- [Fanson *et al.*(2020)] J. Fanson, R. Bernstein, G. Angeli, D. Ashby, B. Bigelow, G. Brosus, A. Bouchez, W. Burgett, A. Contos, R. Demers, F. Figueroa, B. Fischer, F. Groark, R. Laskin, R. Millan-Gabet, M. Pi, et N. Wheeler. Overview and status of the Giant Magellan Telescope project. Dans *Ground-based and Airborne Telescopes VIII* (H. K. Marshall, J. Spyromilio, et T. Usuda, eds.), Volume 11445, pp. 295 – 314, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2020.
- [Ferreira *et al.*(2019)] F. Ferreira, A. Sevin, J. Bernard, et D. Gratadour. MICADO-MAORY SCAO RTC system prototyping : assessing the real-time capability of GPU. Dans *Proceedings of the AO4ELT6 conference*, 2019.
- [Fontanella *et al.*(1991)] J. C. Fontanella, G. Rousset, et P. Lena. Adaptive optics, a key-element of the VLT. *Journal of Optics* **22** 2, 99, 1991.
- [Foucault(1859)] M. L. Foucault. Description of various processes made use of for finding out the configuration of optical surfaces. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **18** 118, 157–160, 1859.
- [Freischlad et Koliopoulos(1986)] K. R. Freischlad et C. L. Koliopoulos. Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform. *JOSA A* **3** 11, 1852–1861, 1986.
- [Fried(1965)] D. L. Fried. Statistics of a Geometric Representation of Wavefront Distortion. *J. Opt. Soc. Am.* **55** 11, 1427–1435, 1965.
- [Fried(1977)] D. L. Fried. Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements. *JOSA* **67** 3, 370–375, 1977.
- [Fried et Clark(2008)] D. L. Fried et T. Clark. Extruding Kolmogorov-type phase screen ribbons. *JOSA A* **25**, 463–468, 2008.
- [Fusco(2000)] T. Fusco. *Correction partielle et anisoplanétisme en optique adaptative : traitement a posteriori et optique adaptative multiconjuguée*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2000.
- [Fusco et Costille(2010)] T. Fusco et A. Costille. Impact of Cn2 profile structure on wide-field AO performance. Dans *Adaptive Optics Systems II*, Volume 7736, p. 77360J, International Society for Optics and Photonics, 2010.

- [Fusco et Mawet(2014)] T. Fusco et D. Mawet. Final performance and lesson-learned of SAXO, the VLT-SPHERE extreme AO : from early design to on-sky results. Dans *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE), 2014.
- [Fusco *et al.*(2010)] T. Fusco, N. Thatte, S. Meimon, M. Tecza, F. Clarke, et M. Swinbank. Adaptive optics systems for HARMONI : a visible and near-infrared integral field spectrograph for the E-ELT. *Proc. SPIE* **7736**, 773633–773633–12, 2010.
- [Fusco *et al.*(2004)] T. Fusco, G. Rousset, D. Rabaud, E. Gendron, D. Mouillet, F. Lacombe, G. Zins, P. Madec, A. Lagrange, J. Charton, et al. NAOS on-line characterization of turbulence parameters and adaptive optics performance. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics* **6** 6, 585, 2004.
- [Gavel et Wiberg(2003)] D. T. Gavel et D. Wiberg. Toward Strehl-optimizing adaptive optics controllers. Dans *Adaptive Optical System Technologies II*, Volume 4839, pp. 890–902, International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [Gendron(1995)] E. Gendron. *Optimisation de la commande modale en optique adaptive : applications à l'astronomie*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot - Observatoire de Paris, 1995.
- [Gendron et Léna(1996)] E. Gendron et P. Léna. Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations. *Astrophysics and Space Science* **239** 2, 221–228, 1996.
- [Gilles et Ellerbroek(2013)] L. Gilles et B. Ellerbroek. Wind profiling via slope detection and ranging : algorithm formulation and performance analysis for laser guide star tomography on extremely large telescopes. Dans *Proceedings of the 3rd Conference on Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes, Florence, Italy*, 2013.
- [Gilles *et al.*(2015)] L. Gilles, P. Massioni, et B. L. Ellerbroek. Adaptive distributed Kalman filtering for laser guide star tomography on extremely large telescopes. Dans *Adaptive Optics : Analysis, Methods & Systems*, pp. AOTh1D–5, Optical Society of America, 2015.
- [Gilles *et al.*(2013)] L. Gilles, P. Massioni, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et B. Ellerbroek. Distributed Kalman filtering compared to Fourier domain preconditioned conjugate gradient for laser guide star tomography on extremely large telescopes. *JOSA A* **30** 5, 898–909, 2013.
- [Glück *et al.*(2018)] M. Glück, J.-U. Pott, et O. Sawodny. Model predictive control of multi-mirror adaptive optics systems. Dans *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pp. 909–914, IEEE, 2018.
- [Gonsalves(1982)] R. A. Gonsalves. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering* **21** 5, 215829–215829, 1982.
- [Goodman(2005)] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [Guesalaga *et al.*(2013)] A. Guesalaga, B. Neichel, J. O'Neal, et D. Guzman. Mitigation of vibrations in adaptive optics by minimization of closed-loop residuals. *Optics Express* **21** 9, 10676–10696, 2013.

- [Guyon *et al.*(2010)] O. Guyon, F. Martinache, V. Garrel, F. Vogt, K. Yokochi, et T. Yosikawa. The Subaru coronagraphic extreme AO (SCExAO) system : wavefront control and detection of exoplanets with coherent light modulation in the focal plane. Dans *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pp. 773624–773624, International Society for Optics and Photonics, 2010.
- [Hardy(1998)] J. W. Hardy. *Adaptive optics for astronomical telescopes*, Volume 16. Oxford University Press on Demand, 1998.
- [Jackson *et al.*(2015)] K. Jackson, C. Correia, O. Lardi  re, D. Andersen, et C. Bradley. Linear prediction of atmospheric wave-fronts for tomographic adaptive optics systems : modelling and robustness assessment. *Optics letters* **40** 2, 143–146, 2015.
- [Juvénal(2017)] R. Juvénal. *Modélisation et commande pour les optiques adaptatives des VLT et ELT : de l'analyse de performance    la validation ciel*. Theses, Université Paris-Saclay, 2017.
- [Juvénal *et al.*(2016a)] R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et J.-M. Conan. LQG adaptive optics control with wind-dependent turbulent models. Dans *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, Volume 9909, International Society for Optics and Photonics, 2016a.
- [Juvénal *et al.*(2016b)] R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et J.-M. Conan. LQG adaptive optics control with wind-dependent turbulent models. Dans *Adaptive Optics Systems V*, SPIE Astronomical telescopes and instrumentation, 2016b.
- [Juvénal *et al.*(2015)] R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, C. Petit, L. Leboulleux, G. Sivo, et V. Garrel. Tip-tilt modeling and control for GeMS : a performance comparison of identification techniques. Dans *4th AO4ELT Conference*, Lake Arrowhead, USA, 2015.
- [Kl  ckers *et al.*(1998)] V. Kl  ckers, N. Woorder, T. Nicholls, M. Adcock, I. Munro, et J. Dainty. Profiling of atmospheric turbulence strength and velocity using a generalised SCIDAR technique. *Astronomy and Astrophysics supplement series* **130** 1, 141–155, 1998.
- [Kolmogorov(1941a)] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. Dans *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Volume 32, pp. 16–18, JSTOR, 1941a.
- [Kolmogorov(1941b)] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Dans *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Volume 30, pp. 301–305, JSTOR, 1941b.
- [Kornilov *et al.*(2003)] V. Kornilov, A. A. Tokovinin, O. Vozyakova, A. Zaitsev, N. Shatsky, S. F. Potanin, et M. S. Sarazin. MASS : a monitor of the vertical turbulence distribution. Dans *Adaptive Optical System Technologies II*, Volume 4839, pp. 837–845, International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [Krabbendam *et al.*(1998)] V. L. Krabbendam, T. A. Sebring, F. B. Ray, et J. R. Fowler. Development and performance of Hobby-Eberly Telescope 11-m segmented mirror. Dans *Advanced Technology Optical/IR Telescopes VI*, Volume 3352, pp. 436–445, International Society for Optics and Photonics, 1998.
- [Kucera(1991)] V. Kucera. *Analysis and design of discrete linear control systems*. Prentice Hall London, 1991.

- [Kulcsár *et al.*(2012a)] C. Kulcsár, P. Massioni, G. Sivo, et H.-F. Raynaud. Vibration mitigation in adaptive optics control. Dans *Proc. SPIE Conference on Astronomical Telescopes and Instrumentation*, Volume 8447, pp. 84470Z–84470Z–16, Amsterdam, The Netherlands, 2012a.
- [Kulcsár *et al.*(2017)] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, R. Juvénal, et C. Correia. Towards minimum-variance control of ELTs AO systems. Dans *Fifth International Conference on Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (AO4ELT5)*, 2017.
- [Kulcsár *et al.*(2012b)] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, et J.-M. Conan. Minimum variance prediction and control for adaptive optics. *Automatica* pp. 1939–1954, 2012b.
- [Kulcsár *et al.*(2006)] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, et P. V. de Le segno. Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Optics express* **14** 17, 7464–7476, 2006.
- [Kulcsár *et al.*(2005)] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, et B. Le Roux. Optimality, observers and controllers in adaptive optics. Dans *Adaptive Optics : Methods, Analysis and Applications*, p. AWC1, Optical Society of America, 2005.
- [Lainiotis *et al.*(1994)] D. Lainiotis, N. Assimakis, et S. Katsikas. A new computationally effective algorithm for solving the discrete Riccati equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **186** 3, 868–895, 1994.
- [Le Louarn(2000)] M. Le Louarn. *Laser guide stars for large telescopes : cone effect and astrophysical implications*. Thèse de doctorat, CRAL - Observatoire de Lyon et ESO - Garching, 2000.
- [Le Roux *et al.*(2004)] B. Le Roux, C. Kulcsár, L. M. Mugnier, T. Fusco, H.-F. Raynaud, et J.-M. Conan. Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *JOSA A* **21** 7, 1261–1276, 2004.
- [Ma *et al.*(2018)] J. Ma, L. Tian, Y. Li, Z. Yang, Y. Cui, et J. Chu. Hysteresis compensation of piezoelectric deformable mirror based on Prandtl–Ishlinskii model. *Optics Communications* **416**, 94–99, 2018.
- [Madec(2012)] P.-Y. Madec. Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy. *Adaptive Optics Systems III, SPIE Proceedings* **8447**, 2012.
- [Mahajan(1983)] V. Mahajan. Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance. *JOSA* **73**, 860–861, 1983.
- [Maréchal(1948)] A. Maréchal. *Etudes des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux*. Thèse de doctorat, Paris XI, 1948.
- [Massioni *et al.*(2015)] P. Massioni, L. Gilles, et B. Ellerbroek. Adaptive distributed Kalman filtering with wind estimation for astronomical adaptive optics. *JOSA A* **32** 12, 2353–2364, 2015.
- [Massioni *et al.*(2011)] P. Massioni, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et J.-M. Conan. Fast computation of an optimal controller for large-scale adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **28** 11, 2298–2309, 2011.
- [Mocci *et al.*(2020)] J. Mocci, M. Quintavalla, A. Chiuso, S. Bonora, et R. Muradore. PI-shaped LQG control design for adaptive optics systems. *Control Engineering Practice* **102**, 104528, 2020.

- [Morrison(1994)] N. Morrison. *Introduction to Fourier analysis*. Wiley New York, 1994.
- [Neichel *et al.*(2009)] B. Neichel, T. Fusco, et J.-M. Conan. Tomographic reconstruction for wide-field adaptive optics systems : Fourier domain analysis and fundamental limitations. *JOSA A* **26** 1, 219–235, 2009.
- [Neichel *et al.*(2016)] B. Neichel, T. Fusco, J.-F. Sauvage, C. Correia, K. Dohlen, K. El-Hadi, L. Blanco, N. Schwartz, F. Clarke, N. Thatte, et al. The adaptive optics modes for HARMONI : from Classical to Laser Assisted Tomographic AO. Dans *Adaptive Optics Systems V*, Volume 9909, p. 990909, International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [Nelson *et al.*(1985)] J. E. Nelson, T. S. Mast, et S. M. Faber. The design of the Keck Observatory and Telescope 1985.
- [Noll(1976)] R. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *JOSA* **66**, 207–211, 1976.
- [Ochs *et al.*(1976)] G. Ochs, T.-i. Wang, R. S. Lawrence, et S. Clifford. Refractive-turbulence profiles measured by one-dimensional spatial filtering of scintillations. *Applied optics* **15** 10, 2504–2510, 1976.
- [Osborn *et al.*(2016)] J. Osborn, T. Butterley, M. Townson, A. Reeves, T. Morris, et R. Wilson. Turbulence velocity profiling for high sensitivity and vertical-resolution atmospheric characterisation with Stereo-SCIDAR. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* p. stw2685, 2016.
- [Osborn *et al.*(2013)] J. Osborn, R. Wilson, H. Shepherd, T. Butterley, V. Dhillon, et R. Avila. Stereo SCIDAR : Profiling atmospheric optical turbulence with improved altitude resolution. Dans *Proceedings of the Third AO4ELT Conference*, 2013.
- [Paschall et Anderson(1993)] R. N. Paschall et D. J. Anderson. Linear Quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Applied optics* **32** 31, 6347–6358, 1993.
- [Paschall *et al.*(1991)] R. N. Paschall, M. A. Von Bokern, et B. M. Welsh. Design of a linear quadratic Gaussian controller for an adaptive optics system. Dans *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pp. 1761–1769, IEEE, 1991.
- [Petit(2006)] C. Petit. *Étude de la commande optimale en OA et OAMC, validation numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, E.D. Galilée, Univ. Paris XIII., 2006.
- [Petit *et al.*(2008a)] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et T. Fusco. First laboratory validation of vibration filtering with LQG control law for adaptive optics. *Optics Express* **16** 1, 87–97, 2008a.
- [Petit *et al.*(2008b)] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, et T. Fusco. First laboratory validation of vibration filtering with LQG control law for Adaptive Optics. *Optics Express* **16** 1, 87–97, 2008b.
- [Petit *et al.*(2005)] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Monttri, F. Chemla, et D. Rabaud. Off-axis adaptive optics with optimal control : experimental and numerical validation. Dans *Optics & Photonics 2005*, pp. 59030P–59030P, International Society for Optics and Photonics, 2005.

- [Petit *et al.*(2008c)] C. Petit, T. Fusco, E. Fedrigo, J.-M. Conan, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud. Optimisation of the control laws for the SPHERE XAO system. Dans *Adaptive Optics Systems*, Volume 7015, p. 70151D, International Society for Optics and Photonics, 2008c.
- [Petit *et al.*(2008d)] C. Petit, T. Fusco, J. Charton, D. Mouillet, P. Rabou, T. Buey, G. Rousset, J.-F. Sauvage, P. Baudoz, P. Gigan, et al. The SPHERE XAO system : design and performance. Dans *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pp. 70151U–70151U, International Society for Optics and Photonics, 2008d.
- [Piatrou et Roggemann(2007)] P. Piatrou et M. C. Roggemann. Performance study of Kalman filter controller for multiconjugate adaptive optics. *Applied optics* **46** 9, 1446–1455, 2007.
- [Poyneer *et al.*(2009)] L. Poyneer, M. van Dam, et J.-P. Véran. Experimental verification of the frozen flow atmospheric turbulence assumption with use of astronomical adaptive optics telemetry. *JOSA A* **26** 4, 833–846, 2009.
- [Poyneer et Véran(2008)] L. Poyneer et J.-P. Véran. Predictive wavefront control for adaptive optics with arbitrary control loop delays. *JOSA A* **25** 7, 1486–1496, 2008.
- [Poyneer(2003)] L. A. Poyneer. Advanced techniques for Fourier transform wavefront reconstruction. Dans *Adaptive Optical System Technologies II*, Volume 4839, pp. 1023–1034, International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [Poyneer *et al.*(2002)] L. A. Poyneer, D. T. Gavel, et J. M. Brase. Fast wave-front reconstruction in large adaptive optics systems with use of the Fourier transform. *JOSA A* **19** 10, 2100–2111, 2002.
- [Poyneer *et al.*(2003)] L. A. Poyneer, K. Lafortune, et A. Awwal. Correlation wave-front sensing algorithms for Shack-Hartmann-based Adaptive Optics using a point source. *Lawrence Livermore National Lab Document Spetember 2003* 2003.
- [Poyneer *et al.*(2007)] L. A. Poyneer, B. A. Macintosh, et J.-P. Véran. Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere. *JOSA A* **24** 9, 2645–2660, 2007.
- [Prengere *et al.*(2020)] L. Prengere, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud. Adaptive optics control with predictive controllers based on frozen-flow models for Low-Earth Orbit satellite tracking. Dans *Adaptive Optics : Analysis, Methods & Systems*, pp. JW4G–5, Optical Society of America, 2020.
- [Prengère *et al.*(2020a)] L. Prengère, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud. Predictive controllers for high dynamic atmospheric turbulencecompensation. Application to Low-Earth Orbit satellite tracking. Dans *9th International Symposium on Optronics In Defence And Security (OPTRO 2020)*, 2020a.
- [Prengère *et al.*(2020b)] L. Prengère, C. Kulcsár, et H.-F. Raynaud. Zonal-based high-performance control in adaptive optics systems with application to astronomy and satellite tracking. *JOSA A* **37** 7, 1083–1099, 2020b.
- [Ragazzoni(1996)] R. Ragazzoni. Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of modern optics* **43** 2, 289–293, 1996.
- [Ramsay *et al.*(2020)] S. K. Ramsay, M. Cirasuolo, R. Tamai, P. Amico, N. Bezawada, P. Caillier, R. Dorn, S. Egner, E. George, F. Gonte, et al. A status report on the instruments for ESO’s Extremely Large Telescope. Dans *Ground-based and Airborne*

- Instrumentation for Astronomy VIII*, Volume 11447, p. 114471U, International Society for Optics and Photonics, 2020.
- [Raynaud et Kulcsár(2020)] H.-F. Raynaud et C. Kulcsár. Interlaced phase screen and convolution operators : an efficient modeling and computational tool for ELT-sized Adaptive Optics systems. Dans *Adaptive Optics : Analysis, Methods & Systems*, pp. JW1G-4, Optical Society of America, 2020.
- [Rigaut(2002)] F. Rigaut. Ground conjugate wide field adaptive optics for the ELTs. Dans *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, Volume 58, p. 11, 2002.
- [Rigaut *et al.*(2014)] F. Rigaut, B. Neichel, M. Boccas, C. d'Orgeville, F. Vidal, M. A. van Dam, G. Arriagada, V. Fesquet, R. L. Galvez, G. Gausachs, et al. Gemini multiconjugate adaptive optics system review—I. Design, trade-offs and integration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **437** 3, 2361–2375, 2014.
- [Roddier(1981)] F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in optics* **19**, 281–376, 1981.
- [Roddier(1988)] F. Roddier. Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Applied Optics* **27** 7, 1223–1225, 1988.
- [Roddier(1999)] F. Roddier. *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge University Press, 1999.
- [Rousset(1999)] G. Rousset. Wave-front sensors. *Adaptive optics in astronomy dans [Roddier(1999)]* 1999.
- [Rousset *et al.*(1990)] G. Rousset, J. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, et F. Rigaut. First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astronomy and Astrophysics* **230**, L29–L32, 1990.
- [Rousset *et al.*(1992)] G. Rousset, P. Madec, et D. Rabaud. Adaptive optics partial correction simulations for two telescope interferometry. Dans *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, Volume 39, 1992.
- [Rousset *et al.*(2000)] G. Rousset, F. Lacombe, P. Puget, E. Gendron, R. Arsenault, P. Y. Kern, D. Rabaud, P.-Y. Madec, N. N. Hubin, G. Zins, et al. Status of the VLT Nasmyth adaptive optics system (NAOS). Dans *Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pp. 72–81, International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [Scharmer *et al.*(2003)] G. B. Scharmer, P. M. Dettori, M. G. Lofdahl, et M. Shand. Adaptive optics system for the new Swedish solar telescope. Dans *Innovative Telescopes and Instrumentation for Solar Astrophysics*, Volume 4853, pp. 370–380, International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [Schödel *et al.*(2002)] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann, M. Lehnert, A. Eckart, N. Mouawad, T. Alexander, M. Reid, R. Lenzen, et al. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. *Nature* **419** 6908, 694–696, 2002.
- [Sergeyev *et al.*(2010)] A. Sergeyev, M. Roggemann, et C. Demars. Near the ground laser communication system : Fried parameter estimation from the WFS measurements. Dans *2010 IEEE Aerospace Conference*, pp. 1–12, IEEE, 2010.

- [Sergeyev et Roggemann(2011)] A. V. Sergeyev et M. C. Roggemann. Monitoring the statistics of turbulence : Fried parameter estimation from the wavefront sensor measurements. *Applied Optics* **50** 20, 3519–3528, 2011.
- [Shack et Platt(1971)] R. V. Shack et B. Platt. Production and use of a lenticular Hartmann screen. Dans *Journal of the Optical Society of America*, Volume 61, p. 656, 1971.
- [Shatokhina et Ramlau(2017)] I. Shatokhina et R. Ramlau. Convolution-and Fourier-transform-based reconstructors for pyramid wavefront sensor. *Applied optics* **56** 22, 6381–6390, 2017.
- [Simard *et al.*(2016)] L. Simard, B. Ellerbroek, R. Bhatia, M. Radovan, et E. Chisholm. Thirty Meter Telescope science instruments : a status report. Dans *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VI* (C. J. Evans, L. Simard, et H. Takami, eds.), Volume 9908, pp. 570 – 581, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016.
- [Sinquin *et al.*(2019)] B. Sinquin, C. Kulcsár, L. Prengère, H.-F. Raynaud, E. Gendron, J. Osborn, A. Basden, J.-M. Conan, N. Bharimal, L. Staykov, T. Morris, T. Buey, F. Chemla, et M. Cohen. Data-based modelling of low-order modes for AO control : what do on-sky experiments tell us ? Dans *Communications and Observations through Atmospheric Turbulence : characterization and mitigation*, 2019.
- [Sinquin *et al.*(2020)] B. Sinquin, L. Prengere, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, E. Gendron, J. Osborn, A. Basden, J.-M. Conan, N. Bharimal, L. Bardou, et al. On-sky results for adaptive optics control with data-driven models on low-order modes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **498** 3, 3228–3240, 2020.
- [Sivo(2013)] G. Sivo. *Validation ciel d'une commande haute performance en optique adaptative classique et multi-objet sur le démonstrateur CANARY*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2013.
- [Sivo *et al.*(2014)] G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, E. Gendron, A. Basden, F. Vidal, T. Morris, S. Meimon, C. Petit, D. Gratadour, O. Martin, Z. Hubert, A. Sevin, D. Perret, F. Chemla, G. Rousset, N. Dipper, G. Talbot, E. Younger, R. Myers, D. Henry, S. Todd, D. Atkinson, C. Dickson, et A. Longmore. First on-sky SCAO validation of full LQG control with vibration mitigation on the CANARY pathfinder. *Optics Express* **22**, 23565–23591, 2014.
- [Stuik *et al.*(2016)] R. Stuik, M. Feldt, S. Hippler, T. Bertram, S. Scheithauer, A. Oberecker, D. Saxenhuber, B. R. Brandl, M. Kenworthy, R. Jager, et L. Vanema. Designing the METIS SCAO and LTAO systems. Dans *Adaptive Optics Systems V*, SPIE Astronomical telescopes and instrumentation, 2016.
- [Takato et Yamaguchi(1995)] N. Takato et I. Yamaguchi. Spatial correlation of Zernike phase-expansion coefficients for atmospheric turbulence with finite outer scale. *JOSA A* **12** 5, 958–963, 1995.
- [Tesch *et al.*(2015)] J. Tesch, T. Truong, R. Burruss, et S. Gibson. On-sky demonstration of optimal control for adaptive optics at Palomar Observatory. *Opt. Lett.* **40** 7, 1575–1578, 2015.
- [Thatte *et al.*(2016)] N. A. Thatte, F. Clarke, I. Bryson, H. Shnetler, M. Tecza, T. Fusco, R. M. Bacon, J. Richard, E. Mediavilla, B. Neichel, et al. The E-ELT first light

- spectrograph HARMONI : capabilities and modes. Dans *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [Thomas *et al.*(2006)] S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, et G. Rousset. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack–Hartmann sensor. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **371** 1, 323–336, 2006.
- [Tokovinin *et al.*(2003)] A. Tokovinin, S. Baumont, et J. Vasquez. Statistics of turbulence profile at Cerro Tololo. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **340** 1, 52–58, 2003.
- [Tokovinin et Kornilov(2002)] A. Tokovinin et V. Kornilov. Measuring turbulence profile from scintillations of single stars. Dans *Astronomical Site Evaluation in the visible and Radio Range*, Volume 266, p. 104, 2002.
- [Vidal *et al.*(2010)] F. Vidal, E. Gendron, et G. Rousset. Tomography approach for multi-object adaptive optics. *JOSA A* **27** 11, A253–A264, 2010.
- [Von Karman(1948)] T. Von Karman. Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **34**, 530–539, 1948.
- [Wang et Markey(1978)] J. Wang et J. Markey. Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion. *JOSA* **68** 1, 78–87, 1978.
- [Wang et Ellerbroek(2012)] L. Wang et B. Ellerbroek. Computer simulations and real-time control of ELT AO systems using graphical processing units. Dans *Adaptive Optics Systems III*, Volume 8447, p. 844723, International Society for Optics and Photonics, 2012.
- [Winker(1991)] D. Winker. Effect of a finite outer scale on the Zernike decomposition of atmospheric optical turbulence. *JOSA A* **8** 10, 1568–1573, 1991.

Titre: Commande haute performance des systèmes d'optique adaptative classique - des grands aux extrêmement grands télescopes (ELT)

Mots clés: Optique adaptative, Télescope géant, Commande linéaire quadratique gaussienne (LQG), Turbulence atmosphérique, Modélisation pour la commande, Suivi de satellite

Résumé : Les systèmes d'optique adaptative (OA) astronomiques permettent de compenser les dégradations de la turbulence atmosphérique sur les images acquises par les télescopes terrestres. Pour cela, ils commandent en temps réel un ou plusieurs miroirs déformables (MD) à partir de mesures de déformation de front d'onde fournies par un ou plusieurs analyseurs de surface d'onde (ASO). Afin d'obtenir des commandes à haute performance, des commandes prédictives Linéaires Quadratiques Gaussiennes (LQG) construites sur une représentation d'état de la boucle d'optique adaptative ont été proposées afin de réduire les termes d'erreurs classiques de l'optique adaptative et notamment de compenser les retards de boucle inhérents à l'asservissement de l'OA. Les premiers travaux de cette thèse conduiront à proposer des modélisations polyvalentes aux changements de nature de la perturbation atmosphérique avec des modèles qui s'appuient sur des a priori de profils de vents et d'énergie de couches turbulentes pouvant être fournis par des mesures externes de Stereo-Scidar ou déduites des données de télémétrie. L'élaboration de régulateurs LQG avec des reconstructions multicouches ou bien une reconstruction de la phase résultante, dans des bases zonales ou des bases de Zernike, permettra de déduire quels modèles et échantillonnages sont adéquates pour deux cas d'applications : un cas d'astronomie classique avec un système d'OA type VLT NAOS, et un cas d'observation de satellite en orbite basse où la dynamique de

la turbulence est bien plus intense du fait du défilement du satellite. Cette dernière application montre très nettement la prédominance d'un régulateur en base zonale par rapport aux autres et à ceux de la littérature en termes de résultats et de justesse de la reconstruction de par son modèle dynamique auto-régressif d'ordre 2 et sa finesse de l'échantillonnage de 2 points linéaires par pitch d'actionneur. Les systèmes d'OA des télescopes de nouvelle génération exhiberont des dimensions dépassant de très loin les systèmes précédents et notamment les deux cas simulés précédemment, avec des ordres de grandeurs pour l'Extremely Large Telescope (ELT) de cinq mille actionneurs par MD, et la dizaine de milliers de mesures d'ASO pour le mode SCAO. La recherche de solutions propres au dimension ELT permettra de développer des modèles creux et dont l'identification est très rapide en base de Karhunen-Loève, bénéficiant de sa structure très particulière d'orthogonalité géométrique et stochastique sans toutefois subir les approximations des modélisations spatialement invariantes proposées dans la littérature en base zonale. Des comparaisons de performance avec ces régulateurs de la littérature et un correcteur à action intégrale dans un cas HARMONI SCAO ont été menées et ouvrent surtout de nouvelles possibilités dans la recherche de bases creuses adaptées pour la représentation d'état pour le calcul d'un filtre de Kalman en dimension ELT.

Title: High performance control of adaptive optics systems for large to extremely large telescopes

Keywords: Adaptive optics, Giant telescopes, Linear Quadratic Gaussian (LQG) control, Atmospheric turbulence, Modeling for control, Satellite tracking

Abstract: Astronomical Adaptive Optics (AO) systems enable to compensate for the nefarious effects of the atmospheric disturbance on the images acquired by ground telescopes, using one or several Deformable Mirrors (DMs) the commands of which are computed in real time from measurements provided by one or several Wavefront Sensors (WFSs). To reach high imaging performance, Linear Quadratic Gaussian (LQG) predictive regulators have been proposed using a state space representation. Previous works of the group have shown their efficiency to reduce significantly the classical error budget of the AO loop, and specifically compensate for the AO loop delays. The first framework intends to develop polyvalent models for various turbulent conditions using priors on the wind profile and the turbulent layers energy. These priors can come from measurements provided by an external system like a StereoScidar or directly using the AO telemetry. We study LQG regulators with multilayer or resultant phase reconstruction in zonal or Zernike basis and identify the adequate sampling and models for two cases: an astronomical case with VLT NAOS like AO system, and a Low Earth Orbit satellite observation case. The last case shows impressive

performance with a zonal-based LQG regulator compared to other controllers from the literature, because of an accurate auto-regressive order 2 dynamical model and the fine sampling of 2 points per actuator pitch. The new generation ELTs (Extremely Large Telescopes) AO systems will exhibit dimensions far greater than existing systems, with orders of magnitude of up to five thousand actuators per MD, double that number of WFS measurements for the simplest SCAO case of the future instrument HARMONI. The research of proper solution for ELT scale has been leading towards sparse models in Karhunen-Loève basis, with benefits from the very particular structure of the basis with geometrical and statistical orthogonality without degradations similar to approximations due to spatially invariant models proposed in the literature in zonal basis. Performance comparisons with the LQG regulators from the literature and the integral action controller has been made in an HARMONI SCAO mode and it validates our models in zonal basis with sparse structure, and it also opens possibilities to new KL basis better suited to Kalman filter in ELT scale AO system.