

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Préliminaires	3
1.2	Présentation des champs à longue mémoire	4
1.2.1	Longue mémoire et longue mémoire isotrope	4
1.2.2	Revue des travaux préexistants	6
1.3	Revue de l'asymptotique des sommes partielles d'un champ aléatoire . . .	7
1.3.1	En courte mémoire	7
1.3.2	En longue mémoire	9
1.4	Plan de la thèse	11
2	Modélisation de champs aléatoires à longue mémoire	17
2.1	Modélisation par filtrage	17
2.1.1	Les champs ARMA	18
2.1.2	Filtrage fractionnaire	21
2.2	Modélisation par agrégation	28
2.2.1	Processus agrégés à longue mémoire en dimension 1	30
2.2.2	Quelques champs agrégés à longue mémoire en dimension $d = 2$.	31
2.3	La forte dépendance en mécanique statistique	36
2.3.1	Le modèle d'Ising	37
2.3.2	Les modèles à interactions quadratiques	38
2.4	Preuves des lemmes	40
2.5	Simulation de champs fortement dépendants	44
3	Convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles	51
3.1	Approche spectrale	52
3.1.1	Théorème de convergence de mesures spectrales	52
3.1.2	Application à la convergence de S_n	53
3.2	Sommes partielles en dimension $d \leq 2$	54
3.3	Sommes partielles en dimension d quelconque	61
3.3.1	Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre continu à l'origine .	62
3.3.2	Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre singulier à l'origine	64
3.4	Démonstration du théorème 6	68
3.4.1	Démonstration du lemme 11	74
3.4.2	Démonstration du lemme 13	77

3.5	Annexe : propriétés des approximations de l'unité	83
4	Convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$	89
4.1	Critère d'équitension pour les sommes partielles	89
4.2	Équitension en longue mémoire isotrope	91
4.3	Équitension en longue mémoire non-isotrope	94
4.4	Convergence de S_n dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$: bilan	95
4.5	Démonstrations	97
4.5.1	Démonstration de la Proposition 8	97
4.5.2	Démonstration de la Proposition 9	105
5	Tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les champs aléatoires	107
5.1	Hypothèses et statistique du test	108
5.2	Comportement asymptotique de M_n	110
5.3	Simulations en dimension $d = 2$	112
5.3.1	Choix de q	115
5.3.2	Simulations sous différentes alternatives	116
5.4	Preuve des lemmes	116
6	Processus empirique de fonctionnelles de champs gaussiens à longue mémoire et applications	125
6.1	Convergence du processus empirique dans différentes situations de forte dépendance	126
6.1.1	Longue mémoire isotrope	127
6.1.2	Longue mémoire non-isotrope	129
6.2	Application aux statistiques de Von Mises et aux U-statistiques	135
6.3	Preuves	137
6.3.1	Preuve du théorème 18	137
6.3.2	Preuve du lemme 21	141
6.4	Conclusion	141
7	Etude des formes quadratiques	143
7.1	Intégrales doubles non gaussiennes	144
7.2	Convergence de mesures spectrales doubles	147
7.2.1	Théorème de convergence de mesures spectrales doubles	148
7.2.2	Etude des formes quadratiques : approche spectrale	150
7.3	Théorème limite non-central	151
7.4	Preuves des lemmes	159

Notations

$ \cdot $: Norme euclidienne dans \mathbb{R}^d
$ \cdot _1$: Norme l^1 dans \mathbb{Z}^d
$x \wedge y$: $\min(x, y)$
$x \vee y$: $\max(x, y)$
$[x]$: partie entière de x
\xrightarrow{fidi}	: convergence des lois fini-dimensionnelles
$\xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)}$: convergence dans l'espace de Skorokhod $\mathcal{D}([0,1]^d)$
$\langle x, y \rangle$: produit scalaire dans \mathbb{R}^d
bruit blanc	: suite de variables aléatoires centrées non-corrélées deux à deux
bruit blanc fort	: suite de variables centrées i.i.d.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préliminaires

Notre cadre de travail est celui des champs aléatoires sur un réseau, c'est-à-dire des processus aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ portés par le réseau \mathbb{Z}^d . Ces objets probabilistes sont des outils de modélisation en étude d'images, en géostatistique, en physique des particules ou encore en économétrie spatiale.

Les champs aléatoires que nous étudierons sont supposés être du second ordre et stationnaires : ils vérifient, pour tout n et h dans \mathbb{Z}^d , $E(X_n) = E(X_0)$ et $\text{cov}(X_n, X_{n+h}) = \text{cov}(X_0, X_h)$.

La dépendance d'un champ aléatoire stationnaire du second ordre, lorsqu'on se restreint aux caractéristiques d'ordre 2, peut être quantifiée par sa fonction de covariance, définie pour tout $h \in \mathbb{Z}^d$ par

$$r(h) = \text{cov}(X_0, X_h).$$

Un autre outil de mesure de la dépendance, très utilisé en géostatistique, est le variogramme V défini par $2V(h) = E(X_n - X_{n+h})^2$. Une présentation du variogramme se trouve dans le livre de Chiles et Delfiner (1998) et dans le livre de Cressie (1993). Contrairement à la fonction de covariance, le variogramme est indépendant de n même lorsque X est non stationnaire, pourvu que ses accroissements le soient. Lorsque X est stationnaire, comme ce sera le cas pour nous, la relation $V(h) = r(0) - r(h)$ montre qu'il est équivalent de mesurer la dépendance à l'aide du variogramme ou à l'aide de la fonction de covariance. Nous garderons la fonction de covariance comme outil principal.

De façon équivalente, la dépendance d'un champ aléatoire du second ordre peut être étudiée au travers de sa mesure spectrale μ définie par

$$r(h) = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle h, \lambda \rangle} d\mu(\lambda).$$

Nous supposons dans toute cette étude que les mesures spectrales des champs considérés sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et admettent donc une densité spectrale f appartenant à $L^1([-\pi, \pi]^d)$.

1.2 Présentation des champs à longue mémoire

1.2.1 Longue mémoire et longue mémoire isotrope

Définition 1. Un champ aléatoire stationnaire et du second ordre est à longue mémoire, ou fortement dépendant, si sa fonction de covariance est non sommable, i.e.

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |r(h)| = \infty.$$

Une définition alternative de la longue mémoire se rencontre parfois dans le domaine spectral : on dit qu'un champ aléatoire est fortement dépendant s'il admet une densité spectrale non-bornée. C'est en fait un point de vue plus restrictif que celui de la définition précédente :

Proposition 1. *Si un champ aléatoire X admet une densité spectrale non-bornée, alors il est à longue mémoire au sens de la définition 1.*

Démonstration. Lorsque la fonction de covariance est sommable, la densité spectrale peut être explicitement exprimée en fonction de la fonction de covariance par la formule $f(\lambda) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} e^{i\langle h, \lambda \rangle} r(h)$, quel que soit $\lambda \in [-\pi, \pi]^d$, et dans ce cas, la densité spectrale est continue donc bornée sur $[-\pi, \pi]^d$.

Si la densité spectrale de X est non-bornée, la fonction de covariance de X est donc non sommable et le champ est à longue mémoire. \square

Nous travaillerons par la suite essentiellement dans le domaine spectral. Afin de spécifier la façon dont la densité spectrale est non-bornée, nous précisons la notion de singularité d'une fonction en un point. Nous restreignons abusivement cette notion au type de singularité qui nous intéresse.

Définition 2. Une fonction de \mathbb{R}^d à valeurs complexes sera dite singulière en un point x si elle est non définie en ce point et si, au voisinage de x , le module de la fonction diverge vers l'infini au moins le long d'une direction.

Avant de définir la longue mémoire isotrope, nous introduisons l'ensemble des fonctions à variation lente. Il existe plusieurs définitions de cette notion. Nous adoptons la suivante, due à Zygmund (1959). La fonction L est à variation lente en l'infini si elle est à valeurs positives et si, pour tout $\delta > 0$, il existe t_δ tel que, lorsque $t > t_\delta$, $t^{-\delta}L(t)$ est décroissante et $t^\delta L(t)$ est croissante.

Remarque 1. La définition précédente d'une fonction à variation lente implique que pour tout $s > 0$, la limite, lorsque $t \rightarrow \infty$, de $L(st)/L(t)$ vaut 1 (voir Zygmund (1959), page 186). Cette dernière propriété est parfois donnée comme définition d'une fonction à variation lente ; c'est par exemple le cas dans Dobrushin et Major (1979).

Nous précisons à présent ce que nous entendons par un champ aléatoire à longue mémoire isotrope. La définition peut s'énoncer soit dans le domaine spectral, soit dans le domaine temporel. Même si les critères relatifs à ces deux points de vue ne sont pas

équivalents, nous parlerons indistinctement de longue mémoire isotrope dans les deux cas. Le Théorème 1 donné ci-après, dû à Wainger (1965), établit un lien entre les deux points de vue.

Définition 3. Un champ aléatoire stationnaire est à longue mémoire isotrope si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

- sa densité spectrale est continue partout sauf en l'origine où elle vérifie :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \|x\|^{\alpha-d} b\left(\frac{x}{\|x\|}\right) L\left(\frac{1}{\|x\|}\right), \quad 0 < \alpha < d. \quad (1.2.1)$$

- sa fonction de covariance vérifie

$$r(n) = \|n\|^{-\alpha} L(\|n\|) b\left(\frac{n}{\|n\|}\right) + e_n, \quad 0 < \alpha < d. \quad (1.2.2)$$

où, dans les expressions (1.2.1) et (1.2.2), L est une fonction à variation lente à l'infini, b est une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d , $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite sommable et $\|\cdot\|$ représente une norme quelconque dans \mathbb{R}^d .

Remarque 2. L'expression "longue mémoire isotrope" employée dans la définition 3 se comprend grâce à l'expression (1.2.2) de la fonction de covariance. Si un champ admet une telle fonction de covariance alors sa forte dépendance est guidée par le terme $\|n\|^{-\alpha}$. Lorsque la norme est la norme euclidienne, ce terme décroît de façon isotrope. De plus, si un champ aléatoire vérifie (1.2.2), quelle que soit la norme considérée, l'intensité de sa longue mémoire, quantifiée par l'exposant α , sera la même dans toutes les directions. C'est pourquoi nous parlons de longue mémoire isotrope. Le terme est toutefois abusif car la fonction r n'est pas strictement isotrope à cause de la présence de la fonction L et de la fonction b et car la norme n'est pas nécessairement euclidienne. Enfin, le Théorème 1 ci-dessous montre que dans la plupart des cas, le comportement (1.2.1) de la densité spectrale à l'origine est une conséquence de (1.2.2). C'est la raison pour laquelle nous adoptons également le terme de longue mémoire isotrope lorsque (1.2.1) est vérifiée.

Afin d'énoncer le théorème de Wainger (1965) liant (1.2.1) et (1.2.2), nous introduisons la classe \mathcal{S} , sous-ensemble des fonctions à variation lente. La fonction L appartient à la classe \mathcal{S} si, étant donnée la suite $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par $h_0 = L$ et pour $j \geq 1$,

$$h_j(t) = t \frac{d}{dt} h_{j-1}(t),$$

- (i) L est indéfiniment dérivable sur $[0, \infty[$,
- (ii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction h_j est à variation lente.

Remarque 3. La plupart des fonctions à variation lente connues appartiennent à \mathcal{S} . Nous renvoyons à l'annexe de Wainger (1965) pour une large classe d'exemples.

Le théorème suivant montre qu'en se restreignant aux fonctions à variation lente dans \mathcal{S} et à la norme euclidienne, (1.2.2) implique (1.2.1), pourvu que la densité spectrale soit supposée continue partout hors de l'origine.

Théorème 1 (Wainger (1965)). Soit $0 < \alpha < d$, soit b une fonction C^∞ sur la sphère unité de \mathbb{R}^d , soit L une fonction à variation lente à l'infini appartenant à la classe \mathcal{S} et soit $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ une suite sommable.

Soit f une fonction 2π -périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$ et continue partout sauf en l'origine. En notant $|\cdot|$ la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d , si les coefficients de Fourier de f vérifient

$$r(n) = |n|^{-\alpha} L(|n|) b\left(\frac{n}{|n|}\right) + e_n, \quad (1.2.3)$$

alors f admet le comportement suivant à l'origine :

$$f(x) = |x|^{\alpha-d} \tilde{b}\left(\frac{x}{|x|}\right) L\left(\frac{1}{|x|}\right) + o\left(|x|^{\alpha-d} L\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) + O(1),$$

où \tilde{b} est une fonction C^∞ sur la sphère unité de \mathbb{R}^d obtenue par transformation de b .

1.2.2 Revue des travaux préexistants

Les travaux existants sur les champs aléatoires à longue mémoire sont de deux types. On trouve d'une part des travaux de modélisation des champs fortement dépendants contenant parfois des procédures d'estimation, et d'autre part, lorsque la longue mémoire est isotrope, des recherches plus théoriques sur les outils de base de la statistique asymptotique comme les sommes partielles ou le processus empirique.

Certains modèles de champs à longue mémoire ont été introduits en dimension $d = 2$ afin de modéliser des textures d'image. Ils reposent sur des filtrages fractionnaires de bruit blanc, généralisation à la dimension $d = 2$ des représentations FARIMA pour les séries temporelles (nous revenons sur le filtrage fractionnaire dans le chapitre 2). Les travaux dans ce domaine sont dûs à Kashyap et Lapsa (1984), Kashyap et Eom (1989), Bennett et Khotanzad (1998) et Eom (2001). Les modèles proposés par ces auteurs conduisent à des champs à longue mémoire isotrope ou à longue mémoire de type produit (c'est à dire que la fonction de covariance s'écrit $r(h_1, h_2) = r_1(h_1)r_2(h_2)$ où $(r_1(h))$ et/ou $(r_2(h))$ sont des suites non-sommables).

Les articles de Bennett et Khotanzad (1998) et Eom (2001) proposent, de façon heuristique, une méthode algorithmique d'identification des paramètres des modèles qu'ils présentent.

Dans le cas de champs à longue mémoire de type produit, Kashyap et Lapsa (1984) et Kashyap et Eom (1989) proposent un estimateur des paramètres du modèle basé sur le log-périodogramme, comme cela se rencontre en dimension $d = 1$. Par ailleurs, Sethuraman et Basawa (1995) étudient eux-aussi un modèle, en dimension $d = 2$, conduisant à un champ à longue mémoire de type produit. La forte dépendance du champ résultant n'a en fait lieu que dans une direction et ils montrent la consistance de l'estimateur par maximum de vraisemblance des paramètres de leur modèle.

Enfin, dans Anh et Lunney (1995), les auteurs disposent d'une photo d'écorce d'un arbre qu'ils modélisent par un champ à longue mémoire isotrope. Ils supposent plus

précisément que la densité spectrale du champ sous-jacent s'écrit $f(\lambda) = c|\lambda|^\alpha$ où $\alpha < 0$. Ils montrent, sous cette hypothèse, la consistance de l'estimateur de Whittle de la densité spectrale et ils estiment par cette méthode les paramètres de leur modèle.

D'autres travaux concernent les outils de la statistique asymptotique lorsque le champ aléatoire est à longue mémoire isotrope. Il s'agit, pour l'étude des sommes partielles, des articles de Dobrushin et Major (1979) et de Surgailis (1982). Nous revenons dans la section suivante sur les énoncés précis des théorèmes limite que ces auteurs obtiennent.

L'étude du processus empirique d'un champ linéaire à longue mémoire isotrope a été effectuée par Doukhan et al. (2002). Les théorèmes limite montrent une dégénérescence asymptotique du processus empirique dans le sens où le processus limite admet la forme $f(x)Z$ où f est une fonction déterministe et Z une variable aléatoire.

Les formes quadratiques d'un champ à longue mémoire isotrope ont été étudiées par Heyde et Gay (1993) et dans un cadre plus large par Doukhan et al. (1996).

Enfin, on trouve une étude de l'asymptotique des temps locaux d'un champ à longue mémoire isotrope dans Doukhan et Leon (1996).

1.3 Revue de l'asymptotique des sommes partielles d'un champ aléatoire

Les sommes partielles sont un outil central en statistique asymptotique. Nous présentons dans cette section une revue des résultats connus selon que le champ sous-jacent est à courte mémoire ou qu'il est à longue mémoire.

1.3.1 En courte mémoire

Lorsque le champ aléatoire X est d'ordre 2, on dit qu'il est à courte mémoire si sa fonction de covariance est sommable. Cette définition complémentaire à celle de la longue mémoire se décline en réalité sous diverses formes. On distingue entre autres des champs de type accroissement d'une martingale, des champs mélangeants (il en existe de diverses sortes), des champs fonctions de gaussiens, des champs linéaires et des champs associés. Nous ne présentons pas ces notions qui sont détaillées dans Doukhan (2003). Dans cet article, on trouve également une revue de l'asymptotique des sommes partielles en dimension $d = 1$ selon le type de dépendance considérée.

En dimension d , le processus des sommes partielles de X est défini pour tout (t_1, \dots, t_d) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n(t_1, \dots, t_d) = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}. \quad (1.3.1)$$

On peut étendre cette définition en considérant la somme intervenant dans (1.3.1) non plus sur $[0, nt_1] \times \dots \times [0, nt_d]$ mais sur des ensembles boréliens de \mathbb{R}^d . La définition des sommes partielles devient la suivante. Soit, pour $i \in \mathbb{Z}^d$, le cube R_i défini par

$$R_i =]i_1 - 1, i_1] \times \dots \times]i_d - 1, i_d].$$

Le processus des sommes partielles indexé par une classe \mathcal{A} d'ensembles boréliens de $[0, 1]^d$ est défini pour tout $A \in \mathcal{A}$ par

$$S'_n(A) = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda(nA \cap R_i) X_i, \quad (1.3.2)$$

où λ représente la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Lorsque la classe \mathcal{A} correspond à l'ensemble des quadrants $[0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d]$, on remarque que S'_n défini en (1.3.2) est une version lissée de S_n défini en (1.3.1).

En faible dépendance, le comportement asymptotique des sommes partielles lorsque n tend vers l'infini a été étudié dans les deux situations précédentes : pour les sommes partielles (1.3.1) indexées par des quadrants et pour les sommes partielles (1.3.2) indexées par des boréliens. Nous renvoyons à la thèse de El Machkouri (2003) pour une revue précise des résultats.

Nous présentons un résultat de Dedecker (2001) pour les sommes partielles sur les quadrants. Nous introduisons dans un premier temps quelques notations. En notant \prec l'ordre lexicographique dans \mathbb{Z}^d , nous posons $V_i^1 = \{j \in \mathbb{Z}^d : j \prec i\}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$V_i^k = V_i^1 \cap \{j \in \mathbb{Z}^d : |i - j|_\infty \geq k\}$$

où, pour $i \in \mathbb{Z}^d$, $|i|_\infty = \max_{1 \leq p \leq d} \{|i_p|\}$. Soit enfin $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma(X_i; i \in \Lambda)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires (X_i) pour $i \in \Lambda$.

Le théorème suivant établit la convergence des sommes partielles d'un champ faiblement dépendant sous la condition projective (1.3.3). Dans l'article de Dedecker (2001), l'auteur montre que cette condition est vérifiée sous des conditions raisonnables de α -mélange.

Théorème 2 (Dedecker (2001)). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ strictement stationnaire ergodique et centré. Si, pour $p > 1$, $E(X_0^{2p}) < \infty$ et*

$$\sum_{k \in V_0^1} E \left(X_k E \left(X_0 | \mathcal{F}_{V_0^{|k|}} \right) \right)^p < \infty, \quad (1.3.3)$$

alors $\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} E(X_0 X_k) < \infty$ et

$$\frac{1}{\sigma n^{d/2}} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} W(t_1, \dots, t_d),$$

où W est le drap brownien et où la convergence en loi a lieu dans l'espace $D([0, 1]^d)$ muni de la norme uniforme.

Le théorème précédent témoigne du comportement typique des sommes partielles en faible dépendance : la normalisation est $n^{d/2}$ et le champ limite est le drap brownien. Dans un cadre plus restreint (le champ X est supposé être du type accroissement d'une martingale), Basu et Dorea (1979) montrent le même type de résultat en n'exigeant que

des moments d'ordre 2 finis pour X . Pour les champs associés, en supposant l'existence de moments d'ordre strictement supérieur à 2, Bulinski et Keane (1996) et Marinucci et Poghosyan (2001) montrent le même type de convergence pour les sommes partielles indexées par des quadrants.

Dans le cas des sommes partielles indexées par des boréliens, Dedecker (2001) montre un théorème central limite fonctionnel sous une condition projective de type (1.3.3), en supposant la classe \mathcal{A} de taille raisonnable (en contrôlant son entropie) et sous l'hypothèse que le champ X est borné. Lorsque le champ n'est pas supposé borné, El Machkouri et Volny (2003) montrent que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on peut construire une classe \mathcal{A} vérifiant les conditions d'entropie usuelles et un champ X d'ordre p tels que la convergence fonctionnelle de S'_n n'ait plus lieu. Cela montre que contrairement au cas i.i.d traité par Bass (1985) et Alexander et Pyke (1986), la maîtrise des moments d'ordre 2 ne suffit plus, en courte mémoire, pour obtenir un théorème central limite fonctionnel lorsque les sommes partielles sont indexées par des boréliens. Il est à noter qu'un tel contre-exemple n'est pas connu lorsque les sommes partielles sont indexées par des quadrants. Dans Dedecker (2001), l'auteur conjecture qu'il n'en existe pas, autrement dit que le contrôle des moments d'ordre 2 devrait être suffisant pour obtenir un théorème central limite fonctionnel en faible dépendance lorsque les sommes partielles sont indexées par des quadrants.

1.3.2 En longue mémoire

En longue mémoire, seules les sommes partielles indexées par des quadrants ont été étudiées. De plus, les résultats existants sur les sommes partielles d'un champ fortement dépendant X se placent sous l'hypothèse de longue mémoire isotrope. Le travail de Dobrushin et Major (1979) suppose par ailleurs que le champ X est fonction de champs gaussiens tandis que dans l'article plus récent de Surgailis (1982), l'auteur suppose que X est fonction de champs linéaires non nécessairement gaussiens. Enfin, dans ces travaux, les convergences ont été établies en lois fini-dimensionnelles et non dans un espace fonctionnel comme dans le Théorème 2 relatif à la courte mémoire.

Afin d'énoncer les résultats de ces travaux, nous commençons par définir le processus de Hermite d'ordre m .

Définition 4. Le processus de Hermite Z_m d'ordre m est défini par

$$Z_m(t) = \int_{\mathbb{R}^{md}} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j(x_j^{(1)} + \dots + x_j^{(m)})} - 1}{i(x_j^{(1)} + \dots + x_j^{(m)})} Z_{G_0}(dx^{(1)}) \dots Z_{G_0}(dx^{(m)}) \quad (1.3.4)$$

où Z_{G_0} est une mesure spectrale aléatoire gaussienne de mesure de contrôle G_0 . La mesure de contrôle G_0 dépend d'un paramètre α et d'une fonction b continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d ; elle est déterminée par la relation

$$2^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \prod_{j=1}^d \frac{1 - \cos(x_j)}{x_j^2} G_0(dx) = \int_{[-1,1]^d} \frac{b\left(\frac{x+t}{|x+t|}\right)}{|x+t|^\alpha} \prod_{j=1}^d (1 - |x_j|) dx.$$

Lorsque $d = 1$ (1.3.4) se simplifie car G_0 admet une densité proportionnelle à $|x|^{\alpha-1}$ et dans ce cas

$$Z_m(t) = \kappa^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{e^{it(x^{(1)} + \dots + x^{(m)})} - 1}{i(x^{(1)} + \dots + x^{(m)})} \prod_{k=1}^m |x^{(k)}|^{\frac{\alpha-1}{2}} dW(x^{(k)}),$$

où W est la mesure spectrale aléatoire d'un bruit blanc gaussien et où $\kappa = \int_{\mathbb{R}} e^{ix} |x|^{\alpha-1} dx$.

Les sommes partielles d'un champ fonctionnel de champs gaussiens reposent sur le développement d'une fonction dans la base des polynômes de Hermite.

Théorème 3 (Dobrushin et Major (1979)). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^\infty H(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty H^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty.$$

Notons m son rang de Hermite.

On suppose que (X_n) admet une fonction de covariance équivalente, lorsque $|k| \rightarrow \infty$, à

$$r(k) \sim |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right), \quad (1.3.5)$$

où $0 < m\alpha < d$, où L est une fonction à variation lente à l'infini et où b est une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} H(X_{j_d}) \xrightarrow{\text{fidi}} c_m Z_m(t),$$

où Z_m est le processus de Hermite de degré m défini par (1.3.4) et où c_m est le coefficient d'ordre m dans le développement de Hermite de H .

Le comportement asymptotique des sommes partielles donné dans le théorème précédent est typique de la forte dépendance : la normalisation n'est plus $n^{d/2}$ comme en faible dépendance et le processus limite n'est plus nécessairement gaussien (le processus de Hermite n'est gaussien que lorsque $m = 1$).

Nous retrouvons les mêmes spécificités pour les sommes partielles d'une fonctionnelle de champs linéaires à longue mémoire isotrope. La fonctionnelle est en fait un polynôme d'Appell, précision due au travail de Avram et Taqqu (1987) dans lequel on trouve une présentation de ces polynômes. Dans le cas particulier où le bruit ξ est gaussien, les polynômes d'Appel ne sont rien d'autre que les polynômes de Hermite.

Théorème 4 (Surgailis (1982), Avram et Taqqu (1987)). *Soit*

$$X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j},$$

où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est un bruit blanc fort et où

$$a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) \tilde{b} \left(\frac{j}{|j|} \right), \quad \frac{d}{2} < \beta < d,$$

avec L une fonction à variation lente à l'infini et \tilde{b} une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors,

$$\frac{1}{n^{d-m(\beta-\frac{d}{2})} L(n)^m} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} P_m(X_{k_1, \dots, k_d}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Z_m(t),$$

où P_m représente le polynôme d'Appell d'ordre m et où Z_m est le processus de Hermite d'ordre m défini par (1.3.4) avec $\alpha = 2\beta - d$ et

$$b(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{b} \left(\frac{s}{|s|} \right) \tilde{b} \left(\frac{s-t}{|s-t|} \right) |s|^{-\beta} |t-s|^{-\beta} ds.$$

Remarque 4. Le champ X défini dans le Théorème 4 est à longue mémoire isotrope. En effet, lorsque $|h| \rightarrow \infty$,

$$r(h) = |h|^{-\alpha} L(|h|)^2 \left(b \left(\frac{h}{|h|} \right) + o(1) \right), \quad (1.3.6)$$

où α et b sont définis dans le théorème.

1.4 Plan de la thèse

Le chapitre 2 de la thèse contient des exemples de modèles conduisant à des champs fortement dépendants. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à la convergence des sommes partielles de champs à longue mémoire (voir aussi Lavancier (2005a)). La connaissance de l'asymptotique des sommes partielles nous permet, dans le chapitre 5, de construire une procédure pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les champs aléatoires. Dans le chapitre 6, nous utilisons une nouvelle fois le comportement des sommes partielles pour en déduire la convergence du processus empirique de champs à longue mémoire (voir aussi Lavancier (2005c)). Enfin, nous nous intéressons dans le chapitre 7 à la convergence des formes quadratiques d'un champ fortement dépendant et nous obtenons en première application la loi asymptotique de la fonction de covariance empirique ; ce travail est en cours de développement avec Anne Philippe. Certains résultats de cette thèse sont présentés dans Lavancier (2005b), article qui consiste en une revue des champs à longue mémoire, à paraître dans un ouvrage collectif sur la dépendance en statistique (lecture notes in statistics, Springer-Verlag) ; ce travail contient quelques modèles de champs fortement dépendants issus du chapitre 2 et présente des résultats de convergence des sommes partielles et du processus empirique comme dans les chapitres 4 et 6 respectivement.

Chapitre 2 : Modélisation de champs aléatoires à longue mémoire

Nous modélisons dans ce chapitre des champs fortement dépendants à l'aide de différentes méthodes. Dans un premier temps, en nous inspirant des modèles développés en dimension $d = 1$ pour les séries temporelles à longue mémoire, nous présentons le filtrage fractionnaire d'un bruit blanc et l'agrégation de champs à courte mémoire. Ces deux techniques peuvent conduire à des champs à longue mémoire et nous présentons, pour chacune de ces deux méthodes, des exemples de modèles produisant de la forte dépendance. Nous remarquons, dans un cas particulier du filtrage fractionnaire, qu'un simple champ autorégressif peut admettre de la forte dépendance en dimension $d \geq 2$, ce qui est impossible en dimension $d = 1$.

Nous nous intéressons également dans ce chapitre à des systèmes de mécanique statistique assez simples comme le modèle d'Ising. Pour ces systèmes de particules, nous notons une propriété intéressante : il existe un lien étroit entre le fait que le système soit instable et le fait que le champ aléatoire constitué des particules du système soit à longue mémoire. Dans le cas de systèmes à interactions homogènes quadratiques, ce lien est même une équivalence.

Nous concluons par des simulations de champs à longue mémoire (isotrope ou non) obtenus par les méthodes présentées dans le chapitre.

Chapitre 3 : Convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles

Ce chapitre traite de la convergence des lois fini-dimensionnelles des sommes partielles

$$\sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad (1.4.1)$$

proprement renormalisées, lorsque X est un champ à longue mémoire. Des résultats en longue mémoire isotrope existent déjà et ont été présentés dans la section précédente. L'objectif est d'obtenir l'asymptotique des sommes partielles lorsque le champ est à longue mémoire non isotrope.

L'étude des sommes partielles est effectuée par une approche spectrale, généralisation à la dimension $d \geq 2$ de la démarche de Lang et Soulier (2000) en dimension $d = 1$. En supposant le champ linéaire, nous écrivons les sommes partielles comme une intégrale stochastique par rapport à une mesure dépendant de n et nous montrons un théorème de convergence de ce type d'intégrales.

En dimension $d = 2$, nous obtenons par cette méthode la convergence de (1.4.1) lorsque X est un champ linéaire issu du filtrage d'un bruit et lorsque nous contrôlons le comportement du filtre à l'origine. Dans le cas où ce bruit est un bruit blanc, cela revient à contrôler le comportement de la densité spectrale de X à l'origine. Lorsque le filtre est équivalent à l'origine à une fonction homogène de degré $\alpha < 0$, nous obtenons la convergence des sommes partielles de X , renormalisées par $n^{-1+\alpha}$, vers un champ qui n'est plus le drap brownien comme c'est le cas en faible dépendance. Ce résultat inclut des situations de forte dépendance non isotrope ; c'est par exemple le cas lorsque

le filtre dont est issu X est équivalent à l'origine à $|x_1 + x_2|^\alpha$ où $\alpha < 0$. Nous retrouvons ainsi les spécificités de l'asymptotique des sommes partielles en forte dépendance : une normalisation et un champ limite non standards.

Les résultats de convergence sont étendus à la dimension $d \geq 3$ sous quelques hypothèses supplémentaires sur le filtre dont est issu X . Nous obtenons notamment, en dimension quelconque et lorsque X est obtenu par un filtrage particulier, le drap brownien fractionnaire comme champ limite des sommes partielles de X .

Chapitre 4 : Convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$

Dans ce quatrième chapitre, nous étendons la convergence des lois fini-dimensionnelles des sommes partielles en une convergence fonctionnelle.

Dans un premier temps, nous montrons un critère d'équitension des sommes partielles d'un champ aléatoire dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$, adapté d'un critère d'équitension général dû à Bickel et Wichura (1971).

Selon le type de forte dépendance du champ sous-jacent, nous montrons alors l'équitension des sommes partielles d'un champ à longue mémoire. En longue mémoire isotrope, nous étendons ainsi la convergence du Théorème 3 obtenu par Dobrushin et Major (1979) à une convergence fonctionnelle. Ensuite lorsque le champ est linéaire, obtenu à partir du filtrage d'un bruit, nous montrons l'équitension des sommes partielles pour une large classe de filtres pouvant induire de la forte dépendance non isotrope.

Les situations de forte dépendance dans lesquelles nous obtenons la convergence fonctionnelle des sommes partielles sont résumées dans la section 4.4 de ce chapitre.

Chapitre 5 : Tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les champs aléatoires

Le test que nous proposons dans ce chapitre se base sur le comportement des sommes partielles d'un champ aléatoire.

Les deux hypothèses que nous confrontons sont, à quelques hypothèses techniques près,

- *Hypothèse nulle (courte mémoire)* : $\sum |r(h)| < \infty$, où r représente la fonction de covariance de X , et

$$\frac{n^{-d/2}}{\sigma} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t),$$

où B est le drap brownien sur $[0, 1]^d$ et où $\sigma^2 = \sum r(h)$.

- *Hypothèse alternative (longue mémoire)* : il existe une suite normalisatrice d_n vérifiant $d_n = n^\gamma L(n)$, où $\gamma > d/2$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini, telle que

$$d_n^{-1} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t),$$

où Y est un champ aléatoire mesurable.

Bien qu'en toute rigueur ces hypothèses ne soient pas respectivement équivalentes à la définition de la faible dépendance et de la forte dépendance, on remarque que la grande majorité des champs à courte mémoire vérifient l'hypothèse nulle, comme le montrent les résultats rappelés dans la section 1.3.1, et que tous les champs à longue mémoire étudiés dans les chapitres 3 et 4 vérifient l'hypothèse alternative.

Généralisant la procédure proposée dans Giraitis et al. (2003) pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les séries temporelles, nous montrons que la statistique V/S , basée sur l'estimation de la variance des sommes partielles, converge en loi sous l'hypothèse nulle et diverge vers l'infini sous l'hypothèse alternative.

Nous simulons la loi asymptotique rencontrée sous l'hypothèse nulle et nous mettons en œuvre le test sur différentes réalisations de champs à longue mémoire pour en évaluer la puissance.

Chapitre 6 : Processus empirique de fonctionnelles de champs gaussiens à longue mémoire

Etant donné un champ gaussien X à longue mémoire, nous étudions le processus empirique doublement indexé par $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]^d$, défini à une normalisation près par

$$\sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} \left[I_{\{G(X_{k_1, \dots, k_d}) \leq x\}} - F(x) \right], \quad (1.4.2)$$

où G est une fonction mesurable et où F est la fonction de répartition du champ aléatoire $(G(X_n))_{n \in \mathbb{Z}^d}$.

Dans de nombreux cas, le comportement asymptotique de cette quantité est directement lié au comportement asymptotique des sommes partielles de X . Ce lien est donné par le principe de réduction uniforme, initialement montré en dimension $d = 1$ par Dehling et Taqqu (1989) et que nous généralisons à notre cadre d'étude.

Nous utilisons alors le comportement asymptotique des sommes partielles d'un champ à longue mémoire obtenu dans les chapitres 3 et 4 pour en déduire la convergence de (1.4.2) dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}} \times [0, 1]^d)$.

Nous montrons ainsi que le processus empirique d'un champ fortement dépendant est asymptotiquement dégénéré dans le sens où son champ limite s'écrit $f(x)Z(t)$ où f est une fonction déterministe et Z un champ aléatoire. Cette propriété de la longue mémoire, connue en dimension $d = 1$, semble donc persister dans le cadre des champs aléatoires même si la forte dépendance n'est pas isotrope.

Les applications statistiques de ce résultat reposent sur le théorème de continuité ou sur la delta méthode. Nous présentons en exemple la loi limite des U-statistiques d'un champ à longue mémoire.

Chapitre 7 : Etude des formes quadratiques

On s'intéresse dans ce chapitre aux formes quadratiques d'un champ X définies par

$$J_n(g) = \sum_{k \in A_n} \sum_{l \in A_n} g_{k-l} X_k X_l,$$

où $A_n = \{1, \dots, n\}^d$. Le comportement asymptotique de J_n est fonction de la dépendance du champ X et de la suite $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$. La connaissance de cet asymptotique permet en application de montrer la convergence de l'estimateur de Whittle du paramètre de longue mémoire présent dans la densité spectrale ou encore d'obtenir la loi limite de la fonction de covariance empirique.

Lorsque le champ X est linéaire, et sous des hypothèses de nullité des cumulants d'ordre 4 du bruit, nous abordons l'étude de $J_n(g)$ en l'écrivant sous forme d'une intégrale stochastique double par rapport à des mesures dépendant de n .

Nous établissons ensuite un théorème de convergence des suites d'intégrales doubles de ce type. Ce résultat permet de ramener l'étude de la convergence en loi de $J_n(g)$ à une convergence de suite de fonctions dans L^2 .

En nous plaçant sous différentes situations de forte dépendance, nous obtenons en première application un théorème limite non central pour $J_n(g)$ lorsque la suite des coefficients $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est telle que la fonction $g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} g_j e^{-i \langle j, x \rangle}$ est continue à l'origine et vérifie $g(0) \neq 0$. La loi limite de l'estimateur de la fonction de covariance est un cas particulier de ce résultat.

La suite de ce travail est en cours. Elle concerne l'étude de $J_n(g)$ lorsque $g(0) = 0$, une situation qui nous permettra par la suite d'obtenir la loi limite de l'estimateur de Whittle.

Chapitre 2

Modélisation de champs aléatoires à longue mémoire

Nous présentons dans ce chapitre diverses manières de modéliser des champs à longue mémoire. Nous verrons qu'il est assez aisé de construire de tels champs et que, par ailleurs, la forte dépendance apparaît déjà dans certains modèles familiers.

Dans les deux premières parties, nous nous inspirons des modèles existants en dimension $d = 1$ afin de les adapter au cadre des champs. Il s'agit respectivement des champs obtenus par filtrage d'un bruit blanc ou par agrégation de champs à courte mémoire.

Dans le cas du filtrage, on obtient un champ fortement dépendant dès que le filtre est non-borné. On verra notamment que les champs ARMA, contrairement aux séries temporelles ARMA en dimension $d = 1$, peuvent être à longue mémoire. Nous présentons également le filtrage fractionnaire qui est une technique de modélisation déjà rencontrée dans certains travaux en image pour obtenir des propriétés de forte dépendance.

La modélisation de la longue mémoire par agrégation, présentée dans la seconde partie, est une technique populaire en dimension 1, grâce notamment à son interprétation en économie. Mais l'agrégation semble être une démarche inédite en dimension supérieure. Nous verrons qu'elle peut garder un sens en économétrie en dimension $d \geq 2$ et nous proposerons quelques exemples de champs agrégés fortement dépendants.

La troisième partie présente des modèles issus de la mécanique statistique. Ils sont donc plus spécifiques du cadre des champs. On verra que la transition de phase est un phénomène très lié à la forte dépendance.

Quelques démonstrations sont reléguées dans la quatrième partie. Finalement, des simulations de champs à longue mémoire concluent le chapitre.

2.1 Modélisation par filtrage

Soit un bruit blanc $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ de variance σ^2 admettant la représentation spectrale

$$\varepsilon_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda),$$

où la mesure contrôle de Z est de densité constante $\sigma^2/(2\pi)^d$ sur $[-\pi, \pi]^d$.

On dit que le champ X est obtenu par filtrage de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ à travers le filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ lorsque

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dZ(\lambda). \quad (2.1.1)$$

La densité spectrale de X s'écrit alors

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} |a(\lambda)|^2, \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi]^d. \quad (2.1.2)$$

En posant $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ la suite des coefficients de Fourier de a , i.e.

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} a(\lambda) e^{-i\langle k, \lambda \rangle} d\lambda,$$

la fonction a se décompose en $a(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i\langle k, \lambda \rangle}$, où la convergence de la série a lieu dans L^2 , et on peut réécrire le filtrage (2.1.1) dans le domaine temporel :

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k}.$$

D'après l'expression (2.1.2) de sa densité spectrale, le champ X sera à longue mémoire dès que $|a|$ est non-borné.

Avant de nous focaliser sur des classes particulières de filtres (les filtres ARMA et les filtres fractionnaires), nous donnons un exemple de filtrage en dimension $d = 2$ conduisant à un champ dont la densité spectrale est singulière sur toute une ligne.

Exemple 1. Soit un champ aléatoire $(X_{n_1, n_2})_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$ obtenu par filtrage d'un bruit blanc fort par $a(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 + \theta \lambda_2|^\alpha$ où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Sa densité spectrale, définie sur $[-\pi, \pi]^2$, est proportionnelle à $|\lambda_1 + \theta \lambda_2|^{2\alpha}$. Le champ est à longue mémoire non-isotrope puisque sa densité spectrale ne vérifie pas (1.2.1). De plus le lemme suivant montre que sa fonction de covariance ne vérifie pas (1.2.2).

Lemme 1. *Soit un champ aléatoire $(X_{n_1, n_2})_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$ dont la densité spectrale, définie sur $[-\pi, \pi]^2$ vaut $f(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 + \theta \lambda_2|^{2\alpha}$, où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors sa fonction de covariance ne vérifie pas (1.2.2).*

La démonstration est donnée dans la section 2.4.

2.1.1 Les champs ARMA

Les champs ARMA sont obtenus dans le cas particulier où le filtre s'écrit, pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [-\pi, \pi]^d$, $a(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \frac{Q}{P}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ où P et Q sont des polynômes. Pour plus de lisibilité, nous focalisons notre étude sur les champs autorégressifs c'est à dire lorsque le polynôme Q est identiquement égal à 1.

Nous allons montrer que contrairement aux processus autorégressifs en dimension 1, un champ autorégressif peut être fortement dépendant. En nous plaçant dans le domaine

spectral, nous donnons auparavant quelques conditions générales d'existence des champs autorégressifs.

En notant L_j l'opérateur retard par rapport au j^{eme} indice, c'est à dire

$$L_j X_{n_1, \dots, n_d} = X_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_d},$$

ou encore dans le domaine spectral,

$$L_j X_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} e^{-i\lambda_j} dZ_X(\lambda),$$

où Z_X représente la mesure spectrale aléatoire du champ stationnaire X , on remarque qu'un champ autorégressif est solution de l'équation plus familière :

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}. \quad (2.1.3)$$

Nous avons considéré un champ autorégressif comme le filtrage d'un bruit par la fonction $P^{-1}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$; dès que cette dernière est dans $L^2([-\pi, \pi]^d)$, nous sommes garantis de la stationnarité de X . Réciproquement, sous quelles conditions la représentation (2.1.3) admet-elle une solution stationnaire? En dimension $d = 1$, le résultat est bien connu : il est nécessaire et suffisant que le polynôme P n'ait aucune racine de module 1 (cf par exemple Brockwell et Davis (1991)). Cette équivalence n'est plus vraie en dimension quelconque comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc de mesure spectrale aléatoire Z . La représentation*

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d} \quad (2.1.4)$$

admet une unique solution stationnaire si et seulement si

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2 d\lambda < \infty. \quad (2.1.5)$$

Dans ce cas

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda). \quad (2.1.6)$$

Démonstration. Supposons X stationnaire. En notant Z_X la mesure spectrale aléatoire de X , (2.1.4) s'écrit

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ_X(\lambda) = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda).$$

Ceci prouve que X admet une densité spectrale proportionnelle à $|1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2$ qui est par définition intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$. Réciproquement, si (2.1.5) est vérifiée, le champ

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda)$$

est solution de (2.1.4) de façon évidente. Supposons qu'il existe une autre solution stationnaire à (2.1.4), le filtrage de cette dernière par $1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ montre qu'elle est égale à X . \square

Remarque 5. Il est important, en vue d'applications, de savoir sous quelles conditions la solution (2.1.6) admet une écriture sous forme de moyenne mobile causale. Cette question présuppose une relation d'ordre dans \mathbb{Z}^d . Notre objectif étant juste de souligner l'existence de la forte dépendance dans des champs autorégressifs, nous ne rentrons pas dans ces considérations. On trouve dans Guyon (1993) une description des principales écritures de (2.1.6) selon la relation d'ordre choisie.

La condition (2.1.5) est équivalente en dimension $d = 1$ à l'absence de racines de module 1 pour P . Ce dernier point est suffisant en dimension $d \geq 2$ pour garantir (2.1.5) mais pas nécessaire.

Il est en effet possible qu'un polynôme P vérifie (2.1.5) et qu'il existe par ailleurs (ν_1, \dots, ν_d) tel que $P(e^{i\nu_1}, \dots, e^{i\nu_d}) = 0$. D'après la proposition précédente, la représentation (2.1.4) associée à ce polynôme admet une solution stationnaire dont la densité spectrale est proportionnelle à $|1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2$. Cette solution stationnaire sera donc fortement dépendante car sa densité spectrale est non bornée.

Nous donnons un exemple simple d'une représentation AR conduisant à un champ fortement dépendant.

Exemple 2. En dimension $d = 5$, la représentation

$$X_{n_1, \dots, n_5} - \frac{1}{5}(X_{n_1-1, n_2, \dots, n_5} + X_{n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5} + \dots + X_{n_1, \dots, n_4, n_5-1}) = \varepsilon_{n_1, \dots, n_5},$$

où ε est un bruit blanc de variance σ^2 , admet une solution stationnaire de densité spectrale

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^5} \left| \frac{1}{1 - \frac{e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5}}{5}} \right|^2.$$

Elle est singulière à l'origine et X est à longue mémoire.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\int_{[-\pi, \pi]^5} \left| \frac{1}{1 - \frac{e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5}}{5}} \right|^2 d\lambda < \infty.$$

Le module à intégrer est inférieur à $[1 - (\cos(\lambda_1) + \dots + \cos(\lambda_5))/5]^{-2}$. Cette expression est majorée par $7\pi^2[\lambda_1^2 + \dots + \lambda_5^2]^{-2}$ car pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq 1 - (2/\pi)x^2$. Un changement en coordonnées polaires prouve l'intégrabilité recherchée. \square

Remarque 6. Le même exemple, mais en dimension $d = 3$, est proposé dans Rosenblatt (1985). Mais il n'est pas valide comme le précise le lemme suivant prouvé dans la partie 2.4.

Lemme 2. La représentation

$$X_{n_1, n_2, n_3} - \frac{1}{3}(X_{n_1-1, n_2, n_3} + X_{n_1, n_2-1, n_3} + X_{n_1, n_2, n_3-1}) = \varepsilon_{n_1, n_2, n_3}$$

n'admet aucune solution stationnaire.

2.1.2 Filtrage fractionnaire

L'idée du filtrage fractionnaire est la suivante. On considère une écriture AR dont le polynôme autoregressif P admet des racines sur le cercle unité et ne satisfait pas (2.1.5). On élève alors ce polynôme à une certaine puissance α de telle sorte que

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |P^{-\alpha}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2 d\lambda < \infty.$$

On appelle filtrage fractionnaire le filtrage d'un bruit blanc par $P^{-\alpha}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ qui devient dès lors légitime. Par construction, le champ résultant sera stationnaire et il sera à longue mémoire car de densité spectrale non bornée.

Cette démarche apparait pour la première fois en dimension 1 dans Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981). Ces auteurs introduisent la classe bien connue des modèles FARIMA (Fractionnal Autoregressive Integrated Moving Average) obtenus en filtrant un bruit blanc par $a(x) = (1 - x)^\alpha$, avec $-1/2 < \alpha < 1/2$, éventuellement multiplié par un filtre ARMA classique.

Les modèles existants en dimension 1

Nous rappelons quelques propriétés des modèles issus du filtrage fractionnaire en dimension 1. Il s'agit d'une part de la classe des processus FARIMA évoqués ci-dessus et des processus GARMA (dont le développement en moyenne mobile infinie fait intervenir les polynômes de Gegenbauer). Nous nous en inspirerons pour proposer quelques modèles en dimension supérieure.

Proposition 3. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 .*

L'équation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X_n = (1 - L)^\alpha \varepsilon_n,$$

avec $-1/2 < \alpha < 1/2$ admet une unique solution stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui s'écrit

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n-j}, \quad \text{où} \quad \psi_j = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = \prod_{k=1}^j \frac{k - 1 - \alpha}{k}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

On a de plus $\psi_j \sim \frac{j^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ lorsque $j \rightarrow \infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \infty$.

La densité spectrale de X_n s'écrit

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi[, f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{2\alpha} \sim c\lambda^{2\alpha} \text{ en } 0,$$

c étant une constante strictement positive.

Enfin sa fonction de covariance vaut pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$r(k) = \sigma^2 (-1)^k \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)}{\Gamma(k + 1 + \alpha)\Gamma(1 - k + \alpha)},$$

elle est équivalente, lorsque $k \rightarrow \infty$, à

$$r(k) \sim ck^{-2\alpha-1}$$

c étant une constante strictement positive.

Ces propriétés peuvent être trouvées dans Brockwell et Davis (1991). On remarque que le processus X est à longue mémoire dès que $-1/2 < \alpha < 0$ car sa densité spectrale est singulière en l'origine et la suite de ses covariances est non sommable.

Nous focalisons à présent la classe des processus GARMA. Les processus GARMA sont construits en filtrant un bruit blanc par un filtre du type $a(x) = (1 - 2x \cos \nu + x^2)^\alpha$ avec $|\alpha| < 1/2$ éventuellement multiplié par un filtre ARMA classique. Ce modèle a été proposé par Hosking (1981) et son étude, effectuée par Gray et al. (1989), fait intervenir les polynômes de Gegenbauer dont nous donnons la définition et quelques propriétés.

Définition 5. Les polynômes de Gegenbauer, notés $C_j^\alpha(2 \cos \nu)$, interviennent dans la décomposition suivante

$$(1 - 2x \cos \nu + x^2)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^\alpha(2 \cos \nu) x^j, \quad |x| \leq 1, \quad \alpha \neq 0.$$

Leur forme explicite est

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \Gamma(-\alpha + j - k) \frac{(2 \cos \nu)^{j-2k}}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(k+1) \Gamma(j-2k+1)}.$$

Ils vérifient $C_0^\alpha(2 \cos \nu) = 1$, $C_1^\alpha(2 \cos \nu) = -2\alpha \cos \nu$ et, pour tout $j \geq 2$, la relation de récurrence

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) = 2 \cos \nu \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) C_{j-1}^\alpha(2 \cos \nu) - \left(1 - 2\frac{\alpha+1}{j}\right) C_{j-2}^\alpha(2 \cos \nu).$$

Enfin les polynômes de Gegenbauer admettent l'équivalent suivant lorsque $j \rightarrow \infty$

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) \sim \frac{\cos[(j-\alpha)\nu + (\alpha\pi/2)]}{\Gamma(-\alpha) \sin^{-\alpha}(\nu)} \left(\frac{2}{j}\right)^{1+\alpha}.$$

On peut à présent énoncer des propriétés sur les processus GARMA.

Proposition 4. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 . L'équation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad X_n = (1 - 2 \cos \nu L + L^2)^\alpha \varepsilon_n,$$

avec $|\cos \nu| \neq 1$ et $|\alpha| < 1/2$, $\alpha \neq 0$, admet une unique solution stationnaire qui s'écrit

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^\alpha(2 \cos \nu) \varepsilon_{n-j}$$

où les C_j^α sont les polynômes de Gegenbauer de la définition 5.

La densité spectrale de X s'écrit

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi], f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2|\cos \lambda - \cos \nu|)^{2\alpha} \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} |\lambda^2 - \nu^2|^{2\alpha} \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \nu.$$

La fonction de covariance de X admet l'équivalent suivant, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$r(k) \sim c \cos(k\nu) k^{-2\alpha-1},$$

où c est une constante strictement positive.

Ces propriétés des processus GARMA peuvent être trouvées dans Leonenko (1999). On remarque que les processus GARMA sont à longue mémoire lorsque $-1/2 < \alpha < 0$. Ils admettent alors des singularités spectrales en des points différents de l'origine et la suite de leurs covariances est non sommable. Ce phénomène est connu sous le nom longue mémoire saisonnière et est étudié dans Ould Haye (2001).

Quelques exemples de filtrage fractionnaire produisant des champs à longue mémoire en dimension $d \leq 2$

Nous nous inspirons des modèles FARIMA et GARMA pour construire des champs à longue mémoire.

Certains des modèles que nous présentons sont utilisés en modélisation de textures d'images. Une présentation générale des modèles basés sur le filtrage fractionnaire et appliqués à l'étude d'images est proposée dans Bennett et Khotanzad (1998). Dans Kashyap et Lapsa (1984), on trouve des modèles comparables à ceux que nous présentons dans les exemples 2, 3 et 4 ci-dessous : les champs résultants sont fortement dépendants dans des directions privilégiées. Dans Kashyap et Eom (1989), les auteurs s'appuient sur le modèle produit (2.1.7) pour la détection de ruptures dans des textures d'images. Enfin un modèle amenant de la forte dépendance isotrope est proposé dans Eom (2001) ; nous le présentons pour finir dans l'exemple 7.

Dans tous les modèles qui suivent, nous notons $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^2}$ un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Soit le filtrage de type produit tensoriel

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1)^{\alpha_1} (1 - L_2)^{\alpha_2} \varepsilon_{n_1, n_2} \quad (2.1.7)$$

où $|\alpha_1| < 1/2$ et $|\alpha_2| < 1/2$.

La proposition 3 nous permet directement d'obtenir l'expression de X sous la forme d'une moyenne mobile :

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \psi_{i,1} \psi_{j,2} \varepsilon_{n_1-i, n_2-j}$$

où $\psi_{i,1}$ et $\psi_{j,2}$ ont la même expression que ψ_j dans la proposition 3 mais associés respectivement à α_1 et α_2 . On en déduit de même la densité spectrale de X :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} |1 - e^{i\lambda_1}|^{2\alpha_1} |1 - e^{i\lambda_2}|^{2\alpha_2}.$$

Enfin sa fonction de covariance s'écrit

$$r(h, l) = \frac{r_1(h)r_2(l)}{\sigma^2}$$

où les r_i sont comme dans la proposition 3 mais associés à α_i et leur équivalent fournit

$$r(h, l) \sim ch^{-2\alpha_1-1}l^{-2\alpha_2-1}$$

lorsque $h \rightarrow \infty$ et $l \rightarrow \infty$.

Ainsi, lorsque $-1/2 < \alpha_1 < 0$ ou $-1/2 < \alpha_2 < 0$, le champ X défini par (2.1.7) est fortement dépendant. On parlera dans ce cas particulier de longue mémoire séparable ou de type produit.

2. Nous pouvons construire un champ fortement dépendant dans une direction particulière en considérant le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1 L_2^k)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.1.8)$$

où $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est fixé et $-1/2 < \alpha < 0$.

D'après la proposition 3, on obtient une écriture de X sous forme de moyenne mobile infinie :

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{i \geq 0} \psi_i \varepsilon_{n_1 - i, n_2 - ki} \quad (2.1.9)$$

où $\psi_i = \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(i+1)}$.

Sa densité spectrale vaut

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} |1 - e^{i(\lambda_1 + k\lambda_2)}|^{2\alpha}.$$

La fonction de covariance de X se calcule à partir de (2.1.9)

$$r(h, l) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \psi_i \psi_j E(\varepsilon_{n_1 - i, n_2 - ki} \varepsilon_{n_1 + h - j, n_2 + l - kj})$$

ce qui, en s'appuyant sur la proposition 3, nous donne

$$\begin{cases} r(h, kh) = \sigma^2 (-1)^k \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)\Gamma(1-k+\alpha)} & h = \pm 1, \pm 2, \dots \\ r(h, l) = 0 & \text{si } l \neq kh. \end{cases}$$

Le champ issu du filtrage (2.1.8) admet donc une densité spectrale singulière sur toute la ligne $\lambda_1 + k\lambda_2 = 0$. D'autre part sa fonction de covariance est non sommable dans la direction $l = kh$ car asymptotiquement proportionnelle à $h^{-2\alpha-1}$. Le champ X ne vérifie ni (1.2.1) ni (1.2.2), il est donc à longue mémoire non-isotrope.

En s'inspirant des modèles GARMA, on peut étendre les deux exemples précédents afin de permettre des singularités spectrales hors de l'origine.

3. Considérons le filtrage de type produit tensoriel suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - 2L_1 \cos \nu_1 + L_1^2)^{\alpha_1} (1 - 2L_2 \cos \nu_2 + L_2^2)^{\alpha_2} \varepsilon_{n_1, n_2} \quad (2.1.10)$$

où $|\alpha_1| < 1/2$ et $|\alpha_2| < 1/2$.

On peut obtenir toutes les propriétés de X en s'appuyant sur la proposition 4. Sa densité spectrale sera

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} (2|\cos \lambda_1 - \cos \nu_1|)^{2\alpha_1} (2|\cos \lambda_2 - \cos \nu_2|)^{2\alpha_2};$$

elle est singulière sur les axes $\lambda_1 = \pm \nu_1$ ou $\lambda_2 = \pm \nu_2$ dès que $-1/2 < \alpha_1 < 0$ ou $-1/2 < \alpha_2 < 0$.

Sa fonction de covariance sera équivalente lorsque $h \rightarrow \infty$ et $l \rightarrow \infty$ à

$$r(h, l) \sim c \cos(h\nu_1) h^{-2\alpha_1-1} \cos(l\nu_2) h^{-2\alpha_2-1}$$

et est non sommable.

4. Considérons le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - 2 \cos \nu L_1 L_2^k + L_1^2 L_2^{2k})^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}. \quad (2.1.11)$$

En procédant comme pour la représentation (2.1.8) ci-dessus et en utilisant la proposition 4 on obtient

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim |(\lambda_1 + k\lambda_2)^2 - \nu^2|^{2\alpha}$$

lorsque $\lambda_1 + k\lambda_2 \rightarrow \pm \nu$.

Le champ construit par (2.1.11) admet donc une densité spectrale singulière le long de deux lignes ne passant pas par l'origine.

De même

$$\begin{cases} r(h, kh) = r_0(h) \\ r(h, l) = 0 \end{cases} \quad \text{si } l \neq kh,$$

où $r_0(h) \sim c \cos(h\nu) h^{-2\alpha-1}$ lorsque $h \rightarrow \infty$.

La fonction de covariance de X est non sommable dans la direction $l = kh$ où elle tend vers 0 de façon oscillante.

Dans l'exemple suivant, bien qu'issu d'un filtrage assez élémentaire, le champ construit admet une densité spectrale qui n'est singulière qu'en l'origine mais qui n'admet pas la forme isotrope (1.2.1).

5. Considérons le champ filtré

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{L_1 + L_2}{2}\right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.1.12)$$

où $-1/2 < \alpha < 0$.

La densité spectrale de X vaut

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left| 1 - \frac{e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2}}{2} \right|^{2\alpha},$$

qui s'écrit

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2} + \sin^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right)^\alpha.$$

La densité spectrale de X est singulière en l'origine. De plus son comportement en 0 dépend des directions d'approche puisqu'il est directement lié au comportement de $\lambda_1 + \lambda_2$ par rapport à $\lambda_1 \lambda_2$, deux quantités qui ne sont pas toujours comparables à l'origine. Il est donc vain d'espérer un équivalent de f en 0 de la forme (1.2.1).

Dans l'exemple 5 de la section 2.2.2 consacrée à la modélisation par agrégation, on rencontre le même type de singularité spectrale et la figure 2.1 nous en montre une représentation.

On peut évidemment construire un champ ayant une singularité spectrale du même type que précédemment mais en une fréquence autre que $\lambda = 0$:

6. Soit le champ construit par le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = \left(\left(1 - \frac{e^{i\nu_1} L_1 + e^{i\nu_2} L_2}{2} \right) \left(1 - \frac{e^{-i\nu_1} L_1 + e^{-i\nu_2} L_2}{2} \right) \right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2},$$

avec $-1/2 < \alpha < 0$, ou écrit autrement

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \cos \nu_1 L_1 - \cos \nu_2 L_2 + \frac{2 \cos(\nu_1 - \nu_2) L_1 L_2 + L_1^2 + L_2^2}{4} \right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}.$$

Ce champ admet la densité spectrale

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left| 1 - \frac{e^{i(\lambda_1 + \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 + \nu_2)}}{2} \right|^{2\alpha} \left| 1 - \frac{e^{i(\lambda_1 - \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 - \nu_2)}}{2} \right|^{2\alpha}$$

qui s'exprime après calculs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) = & \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1 - \nu_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_1 - \nu_1 + \lambda_2 - \nu_2}{2} \right)^\alpha \\ & \times \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1 + \nu_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2 + \nu_2}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \nu_1 + \lambda_2 + \nu_2}{2} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

La densité spectrale de X est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ et son comportement au voisinage de ces points dépend comme dans le modèle (2.1.12) des directions d'approche.

La figure 2.2 représente une densité spectrale ayant les mêmes types de singularités. Il s'agit de la densité du champ agrégé de l'exemple 6 de la section 2.2.2.

Remarque 7. Dans les exemples précédents, il est possible d'augmenter la quantité des singularités spectrales sur $[-\pi, \pi]^2$ des champs construits. Il suffit pour cela d'ajouter une puissance $p \in \mathbb{N}$ à tous les opérateurs L_i , $i = 1, 2$, intervenant dans les filtres. A titre d'exemple, dans le filtrage (2.1.8) cela donnerait :

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1^p L_2^{pk})^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2},$$

avec $-1/2 < \alpha < 0$. Le champ induit aura une densité spectrale singulière le long des axes $\lambda_1 + k\lambda_2 = j\frac{2\pi}{p}$, $j \in \{0, \pm 1, \dots, \pm[p/2]\}$.

Pour finir le modèle proposé par Eom (2001) amène de la forte dépendance isotrope.

7. On considère le filtre

$$P^\alpha (e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}) = (3 - \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) - \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2))^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$. La représentation suivie par le champ X est alors

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{1}{2} (L_1 + L_1^{-1} + L_2 + L_2^{-1}) - \frac{1}{4} (L_1 L_2 + L_1^{-1} L_2 + L_1 L_2^{-1} + L_1^{-1} L_2^{-1}) \right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}. \quad (2.1.13)$$

La densité spectrale de X est proportionnelle à

$$|3 - \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) - \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2)|^{2\alpha}.$$

Elle est continue partout sauf en l'origine où elle est proportionnelle à $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{2\alpha}$. Le champ X est donc à longue mémoire isotrope selon la définition (1.2.1).

Afin d'obtenir une densité spectrale singulière à l'originemais dont les lignes de niveau sont des ellipses, Eom (2001) propose de généraliser ce modèle en introduisant des paramètres $\theta \in [0, 2\pi]$ et $e \geq 1$ dans le filtre. Ce dernier s'écrit

$$(3 - \cos(\nu_1) - \cos(\nu_2) - \cos(\nu_1) \cos(\nu_2))^\alpha, \quad (2.1.14)$$

où $\nu_1 = \frac{\lambda_1}{e} \cos \theta - \frac{\lambda_2}{e} \sin \theta$ et $\nu_2 = \lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta$.

La densité spectrale du champ obtenu par ce filtrage est proportionnelle à

$$|3 - \cos(\nu_1) - \cos(\nu_2) - \cos(\nu_1) \cos(\nu_2)|^{2\alpha}$$

expression qui est équivalente en 0 à

$$\left| \lambda_1^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{e^2} + \sin^2 \theta \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{e^2} + \cos^2 \theta \right) + \lambda_1 \lambda_2 \left(\sin 2\theta \frac{e^2 - 1}{e^2} \right) \right|^{2\alpha}. \quad (2.1.15)$$

La densité spectrale est donc singulière en l'origine et ses lignes de niveau au voisinage de $\lambda = 0$ sont des ellipses. Cependant, son comportement satisfait (1.2.1) puisque (2.1.15) s'écrit $||\lambda||^{4\alpha} b\left(\frac{\lambda_1}{||\lambda||}, \frac{\lambda_2}{||\lambda||}\right)$ où $||\lambda||^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ et où

$$b(x, y) = \left| x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{e^2} + \sin^2 \theta \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{e^2} + \cos^2 \theta \right) + xy \left(\sin 2\theta \frac{e^2 - 1}{e^2} \right) \right|^{2\alpha}$$

est une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^2 . Le champ résultant X est donc à longue mémoire isotrope selon la définition 3 et sa fonction de covariance, d'après le théorème 1 de Wainger (1965), satisfait (1.2.2).

Remarque 8. L'écriture (2.1.13) ne fait pas intervenir un polynôme fonction de (L_1, L_2) comme nous l'exigeons dans la définition du filtrage fractionnaire mais nous pouvons nous y ramener en effectuant un changement d'indices. Par contre le filtrage par (2.1.14) n'est pas un filtrage fractionnaire au sens où nous l'avons défini.

2.2 Modélisation par agrégation

L'idée est venue des économètres. Elle apparaît pour la première fois dans Granger (1980) pour des processus temporels ($d = 1$). Cette façon de construire des processus à longue mémoire suggère l'interprétation économétrique suivante : un grand nombre de comportements microéconomiques à courte mémoire (temporelle) peut engendrer un comportement global, donc macroéconomique, à longue mémoire.

Nous expliquons dans un premier temps l'idée de l'agrégation en dimension d quelconque. Les justifications théoriques en dimension 1 se trouvent notamment dans Oppenheim et Viano (2004) et sont identiques en dimension supérieure. Nous donnerons ensuite des résultats spécifiant sous quelles conditions, en dimension 1, l'agrégation conduit à un processus à longue mémoire. Enfin, nous les utiliserons pour donner quelques exemples en dimension $d = 2$ de champs agrégés présentant de la forte dépendance.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc de variance σ^2 . Considérons une suite $(X^{(q)})_{q \geq 1}$ de copies indépendantes du champ autorégressif

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}, \quad (2.2.1)$$

où P est un polynôme dont les coefficients sont aléatoires et qui vérifie presque sûrement, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [-\pi, \pi]^d$, $P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) \neq 0$.

La représentation (2.2.1) admet presque sûrement la solution

$$X_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_j \varepsilon_{n-j}, \quad (2.2.2)$$

où $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ est la suite des coefficients du développement sous forme de série de P^{-1} .

Le champ X donné par (2.2.2) appartient à $L^2(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} E(|c_j|^2) < \infty, \quad (2.2.3)$$

et sa densité spectrale vaut alors

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} E \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2. \quad (2.2.4)$$

On peut à présent définir le champ agrégé Y comme suit

$$Y_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^N X_n^{(q)}, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

où la convergence a lieu en loi. Le champ Y existe bien d'après le Théorème Central Limite, il est gaussien et admet les mêmes caractéristiques d'ordre 2 que les champs $X^{(q)}$, $q \geq 1$. En particulier la densité spectrale de Y est (2.2.4).

Ainsi, le champ agrégé Y est à longue mémoire dès que $E \left| P^{-1}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) \right|^2$ est non borné. Il suffit donc de choisir correctement la loi que suivent les coefficients de P pour obtenir la forte dépendance désirée.

Remarque 9. Quelle interprétation en économétrie peut avoir l'agrégation de champs aléatoires ?

En dimension 1, on considère que l'indice est le temps et que chaque particule (q) est un acteur économique ayant un comportement $X^{(q)}$ à l'instant t qui dépend de son passé selon (2.2.1). Le processus agrégé peut être vu comme le comportement global de tous ces acteurs économiques à l'instant t . Il dépend de son passé de manière différente de ce qui se passe pour les particules puisqu'on vient de le voir : il peut être à longue mémoire alors que chaque particule est à courte mémoire.

En dimension supérieure, il est plus délicat de comprendre ce que signifie l'empilement de variables situées sur le même pixel. Cependant une interprétation économétrique est encore possible. Lorsque l'indice est dans \mathbb{Z}^2 , nous pouvons considérer qu'il représente les coordonnées géographiques de l'acteur économique (q) . Ces coordonnées sont issues d'un quadrillage régulier du domaine d'observation et il est tout à fait possible qu'il y ait plusieurs acteurs ayant les mêmes coordonnées. Typiquement le domaine d'étude pourrait être une grande ville que l'on quadrille en zones régulières : toute observation située dans une zone est assimilée au centre de la zone. On peut ainsi supposer qu'il y a un très grand nombre d'acteurs économiques dans chaque zone. L'agrégation aurait alors l'interprétation suivante : chaque acteur économique (q) admet un comportement $X^{(q)}$ au point (n_1, n_2) dépendant de son voisinage selon (2.2.1) ; le champ agrégé est le comportement global de tous les acteurs situés en (n_1, n_2) . Les modèles présentés en 2.2.2 montre que Y peut admettre une dépendance spatiale forte alors que chaque acteur économique ne dépend que faiblement de son voisinage.

En dimension $d = 3$, on peut de la même façon imaginer une interprétation spatio-temporelle à l'agrégation.

2.2.1 Processus agrégés à longue mémoire en dimension 1

Nous donnons deux lemmes spécifiant des conditions sur la loi des coefficients de P dans (2.2.1) qui conduisent à un processus agrégé à longue mémoire. Ils sont dus à Oppenheim et Viano (2004) et nous seront utiles dans la partie suivante pour la construction de champs agrégés fortement dépendants en dimension 2.

Nous supposons que le polynôme autorégressif dans (2.2.1) s'écrit

$$P_a(z) = \prod_{k=1}^{2p} (1 - a_k z)$$

où le vecteur des paramètres $a = (a_1, \dots, a_{2p})$ est aléatoire et indépendant du bruit ε . La loi des a_k a pour support la boule ouverte unité afin que l'écriture (2.2.2) existe presque sûrement.

Les a_k peuvent être réels ou complexes (on note dans ce cas ρ_k leur module et θ_k leur argument). Supposons que deux seulement sont réels. On choisit de mettre de l'aléa sur les modules des a_k , supposés indépendants entre eux et de densité de probabilité respective g_k . La densité spectrale (2.2.4) de Y est alors proportionnelle à

$$\int_0^1 \frac{g_1(s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds \int_0^1 \frac{g_2(s)}{|1 + se^{i\lambda}|^2} ds \prod_{k=3}^{p+1} \int_0^1 \frac{g_j(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta_j)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta_j)}|^2} d\rho \quad (2.2.5)$$

pour $\lambda \notin \{0, \pi, \pm\theta_1, \dots, \pm\theta_p\}$.

Les deux premières intégrales ci-dessus peuvent amener des singularités spectrales en 0 ou en π tandis que les autres peuvent en produire en $\pm\theta_j$, $j = 3, \dots, p+1$. Pour cela il suffit de spécifier le comportement des densités de probabilité g_k au voisinage de $x = 1$, autrement dit le comportement aléatoire des a_k au voisinage des points interdits. Les deux lemmes suivants le précisent.

Lemme 3. *Soit $\alpha \in]-1, 1[$ et $\forall s \in [0, 1]$ $g(s) = (1-s)^{-\alpha} \Phi(s)$ où Φ est borné sur $[0, 1]$ et est continu au point $s = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\lambda|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds = \Phi(1) \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds.$$

De même,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pi} |\lambda - \pi|^{1+\alpha} \int_0^{-1} \frac{g(-s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds = \Phi(1) \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds$$

et les intégrales de gauche sont C^∞ sur respectivement $]0, \pi[$ et $]-\pi, 0[$.

Lemme 4. *Si $g(\rho) = (1-\rho)^{-\alpha} \Phi(\rho)$, avec $\alpha \in]-1, 1[$, et où Φ est borné sur $[0, 1]$ et est continu au point $\rho = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \theta} |\lambda - \theta|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta)}|^2} d\rho = \frac{\Phi(1)}{4 \sin^2 \theta} \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds,$$

De même,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\theta} |\lambda + \theta|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta)}|^2} d\rho = \frac{\Phi(1)}{4 \sin^2 \theta} \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds$$

et les intégrales de gauche sont C^∞ sur les intervalles $] - \pi, -\theta[$, $] - \theta, \theta[$ et $] \theta, \pi[$.

En prenant les densité g_k comme dans ces lemmes, la condition (2.2.3) est remplie et le processus agrégé Y admet une densité spectrale (2.2.5) non bornée dès que $\alpha < 0$: il est à longue mémoire.

Enfin le lemme suivant donne la fonction de covariance de Y lorsque les densités g_k sont choisies comme ci-dessus.

Lemme 5. *Sous les hypothèses précédentes concernant la forme de P_a et en supposant, pour tout $k = 1 \dots p + 1$, $g_k(s) = (1 - s)^{-\alpha_k} \Phi_k(s)$ avec $-1 < \alpha_k < 0$ et où Φ_k est continu au point $s = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, le processus agrégé Y admet comme fonction de covariance, lorsque $h \rightarrow \infty$,*

$$r(h) = n^\alpha \left(\sum_{\{k | \alpha_k = \alpha\}} c_k \cos(h\theta_k) + o(1) \right),$$

où $\alpha = \sup\{\alpha_k\}$ et où les c_k sont des constantes complexes.

Ce lemme est issu comme les deux précédents de Oppenheim et Viano (2004).

Le processus agrégé admet sous ces hypothèses une fonction de covariance non-sommable ce qui confirme sa forte dépendance.

2.2.2 Quelques champs agrégés à longue mémoire en dimension $d = 2$

La modélisation par agrégation conduit à des champs ayant les mêmes types de singularités spectrales que celles rencontrées dans la modélisation par filtrage. La particularité de l'agrégation par rapport au filtrage est simplement qu'elle conduit nécessairement à un champ gaussien.

L'intérêt majeur est que l'agrégation nous fournit une alternative au filtrage pour la simulation de champs à longue mémoire.

Présentons quelques exemples. Ils sont ordonnés de la même manière que pour le filtrage, selon le type de singularités spectrales qu'ils amènent. Pour chacun d'entre eux, nous précisons le polynôme autorégressif à paramètres aléatoires intervenant dans la représentation (2.2.1) des particules composant le champ agrégé.

1. Des champs à longue mémoire de type produit peuvent être construits en considérant le polynôme autorégressif $P(L_1, L_2) = (1 - aL_1)(1 - bL_2)$. Les paramètres sont aléatoires sur $[0, 1]$ et on suppose que leur densité de probabilité vaut respectivement $g_a(x) = (1 - x)^{-\alpha_1} \Phi_1(x)$ et $g_b(x) = (1 - x)^{-\alpha_2} \Phi_2(x)$, où Φ_1 et Φ_2 sont comme dans le lemme 3 et où α_1 et α_2 appartiennent à $] - 1, 0[$.

Le lemme 3 nous assure alors que la condition (2.2.3) est remplie et nous fournit un équivalent de la densité spectrale du champ agrégé Y :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1|^{1+\alpha_1} |\lambda_2|^{1+\alpha_2}} \quad \text{en } (0, 0),$$

où c est une constante non nulle.

La fonction de covariance de Y nous est donnée par le lemme 5 : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à $h^{\alpha_1} l^{\alpha_2}$ et est donc non sommable.

2. De la longue mémoire dans une direction particulière peut être construite à l'aide du polynôme autorégressif $P(L_1, L_2) = 1 - aL_1L_2^k$ où $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est fixé et où a est un paramètre aléatoire sur $[0, 1]$. En choisissant la densité de probabilité de a égale à $(1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ où $\alpha \in]-1, 0]$ et où Φ vérifie les mêmes conditions que dans le lemme 3, la condition (2.2.3) est vérifiée. De plus, d'après le lemme 3 la densité spectrale du champ agrégé Y vérifiera

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 + k\lambda_2|^{1+\alpha}},$$

en $\lambda_1 + k\lambda_2 = 0$, où c est une constante non nulle.

La fonction de covariance de Y se déduit du lemme 5 : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à h^α dans la direction $l = kh$ et $r(h, l) = 0$ si $l \neq kh$.

Le champ agrégé est donc à longue mémoire non isotrope.

Il est possible de construire les mêmes types de champs fortement dépendants mais avec des singularités spectrales hors de l'origine.

3. Pour un champ présentant de la longue mémoire de type produit, il suffit de considérer le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = (1 - 2\rho_1 L_1 \cos \nu_1 + \rho_1^2 L_1^2)(1 - 2\rho_2 L_2 \cos \nu_2 + \rho_2^2 L_2^2),$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des paramètres aléatoires. On suppose que leur densité de probabilité vaut respectivement $g_{\rho_1}(x) = (1-x)^{-\alpha_1}\Phi_1(x)$ et $g_{\rho_2}(x) = (1-x)^{-\alpha_2}\Phi_2(x)$ avec Φ_{ρ_1} et Φ_{ρ_2} deux fonctions vérifiant les hypothèses du lemme 4 et où α_1 et α_2 appartiennent à $] -1, 0[$.

La densité spectrale du champ agrégé Y admettra alors les équivalents suivants en $(\mp \nu_1, \mp \nu_2)$

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 \pm \nu_1|^{1+\alpha_1} |\lambda_2 \pm \nu_2|^{1+\alpha_2}},$$

où c est une constante non nulle.

Le lemme 5 nous permet d'obtenir sa fonction de covariance : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à $h^{\alpha_1} \cos(h\nu_1) l^{\alpha_2} \cos(l\nu_2)$.

4. En considérant le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = 1 - \rho \cos \beta L_1 L_2^k + \rho^2 L_1^2 L_2^{2k}$$

où ρ est aléatoire sur $[0, 1]$ et où $\beta \neq 0$ et $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ sont fixés, on obtient un champ agrégé dont la densité spectrale est singulière tout le long d'une ligne ne passant pas par l'origine. Il suffit pour cela de supposer que la densité de probabilité de ρ vaut $(1 - x)^{-\alpha} \Phi(x)$.

La densité spectrale de Y vérifie, au voisinage de chacune des deux lignes $\lambda_1 + k\lambda_2 = \mp\beta$,

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 + k\lambda_2 \pm \beta|^{1+\alpha}}.$$

Sa fonction de covariance $r(h, l)$ sera nulle si $l \neq kh$ et sera asymptotiquement proportionnelle à $h^\alpha \cos(h\beta)$ dans la direction $l = kh$.

L'exemple suivant fournit un champ à longue mémoire non isotrope ayant une seule singularité spectrale à l'origine.

5. Considérons le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = 1 - a \frac{L_1 + L_2}{2}$$

où a est aléatoire sur $[0, 1]$ de densité de probabilité $g(x) = (1 - x)^{-\alpha} \Phi(x)$ avec $\alpha \in [-1, 0]$ et avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Pour une particule X , ce polynôme conduit à la représentation

$$X_{n_1, n_2} - a \frac{X_{n_1-1, n_2} + X_{n_1, n_2-1}}{2} = \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.2.6)$$

où ε est un bruit blanc de variance σ^2 . En inversant cette écriture, nous obtenons

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \varepsilon_{n_1-k+j, n_2-j}, \quad (2.2.7)$$

ce qui nous permet de donner une condition pour que (2.2.3) soit vérifiée. Il faut et il suffit que

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \right) E(a^{2k}) < \infty \Leftrightarrow E \left(\frac{1}{1 - a^2} \right) < \infty \quad (2.2.8)$$

car $\frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2$ est borné quelque soit $k \geq 0$. Cette condition est vérifiée compte tenu du choix de α .

La densité spectrale du champ agrégé Y vaut alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{g(x)}{|1 - x \frac{e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2}}{2}|^2} dx. \quad (2.2.9)$$

Le lemme suivant établit que le choix de g ci-dessus implique que le champ X est à longue mémoire.

Lemme 6. Soit $-1 < \alpha < 0$, $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Alors $f(\lambda_1, \lambda_2)$ définie par (2.2.9) est singulière en l'origine et est bornée sur tout intervalle ne contenant pas 0.

De plus, son comportement au voisinage de 0 dépend des directions d'approche comme le montre la démonstration du lemme donnée en section 2.4. Le champ est donc à longue mémoire non isotrope.

La figure 2.1 représente la densité spectrale (2.2.9) lorsque $\alpha = -0.75$ et $\Phi \equiv 1$. Cette représentation confirme les résultats du lemme : la densité est singulière en l'origine et la divergence est plus rapide dans certaines directions, comme le long de l'axe $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Enfin le même type de singularité spectrale que précédemment mais en des points différents de l'origine peut être construit selon l'exemple suivant.

6. Considérons le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = \left(1 - \rho \frac{e^{i\nu_1} L_1 + e^{i\nu_2} L_2}{2}\right) \left(1 - \rho \frac{e^{-i\nu_1} L_1 + e^{-i\nu_2} L_2}{2}\right),$$

où ρ est un paramètre aléatoire sur $[0, 1]$ de densité de probabilité $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec $-1 < \alpha < 0$ et avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Cela conduit à la représentation suivante

$$\begin{aligned} X_{n_1, n_2} - \rho \cos \nu_1 X_{n_1-1, n_2} - \rho \cos \nu_2 X_{n_1, n_2-1} \\ + \frac{\rho^2}{2} \cos(\nu_1 - \nu_2) X_{n_1-1, n_2-1} + \frac{\rho^2}{4} X_{n_1-2, n_2} + \frac{\rho^2}{4} X_{n_1, n_2-2} = \varepsilon_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

La densité spectrale du champ agrégé Y vaudra alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{g(x)}{|1 - x \frac{e^{i(\lambda_1+\nu_1)} + e^{i(\lambda_2+\nu_2)}}{2}|^2 |1 - x \frac{e^{i(\lambda_1-\nu_1)} + e^{i(\lambda_2-\nu_2)}}{2}|^2} dx. \quad (2.2.10)$$

Elle est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ et bornée sur tout intervalle ne contenant pas ces points comme le montre le lemme 7 de la partie 2.4. De plus son comportement en (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ dépend des directions d'approche comme dans l'exemple précédent. On peut le vérifier sur la figure 2.2 qui représente la densité spectrale (2.2.10) lorsque $\alpha = -0.75$ et $\Phi \equiv 1$. On remarque par exemple une divergence plus forte dans la direction $\lambda_1 - \nu_1 + \lambda_2 - \nu_2 = 0$ au voisinage de (ν_1, ν_2) .

Remarque 10. Comme pour le filtrage fractionnaire, il est possible d'augmenter la fréquence des singularités spectrales sur $[-\pi, \pi]^2$ des champs agrégés. Il suffit pour cela d'ajouter une puissance $p \in \mathbb{N}$ à tous les opérateurs L_i , $i = 1, 2$, intervenant dans les polynômes autorégressifs.

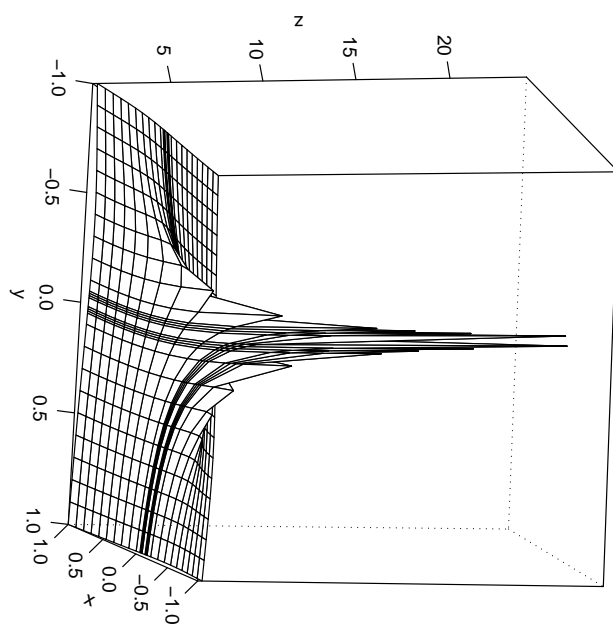
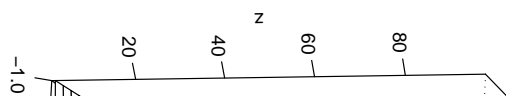


FIG. 2.1 – Densité spectrale (2.2.9) obtenue par agrégation ayant une singularité anisotrope en $(0,0)$



2.3 La forte dépendance en mécanique statistique

L'objet de la mécanique statistique est de rendre compte du comportement macroscopique d'un système de particules à partir de la modélisation et de l'étude de son comportement microscopique (état des particules, interactions entre elles). La mécanique statistique a été initialement introduite par les physiciens pour modéliser des phénomènes thermodynamiques et magnétiques dont la transition de phase. La transition de phase est un état instable du système en des valeurs d'un paramètre tel que la température ou un champ magnétique extérieur. Elle apparaît par exemple lorsque la matière passe d'un état à un autre en thermodynamique ou lorsqu'un matériau magnétique passe de l'état ferromagnétique à l'état paramagnétique. Le formalisme mathématique permettant l'étude rigoureuse des modèles de mécanique statistique est apparu plus tardivement et s'appuie sur l'existence et l'étude des mesures de Gibbs. Sans vouloir entrer dans les détails de ce formalisme, nous introduisons les notions nécessaires à la présentation de quelques modèles. Une présentation rigoureuse du domaine se trouve par exemple dans Georgii (1988). L'objectif est de souligner des propriétés de forte dépendance dans des systèmes de particules en transition de phase. Les modèles présentés sont le modèle d'Ising, très populaire en mécanique statistique, et les modèles à interactions quadratiques.

On considère un système de particules sur \mathbb{Z}^d . L'état d'une particule située en $j \in \mathbb{Z}^d$ est donnée par le spin x_j , une variable aléatoire à valeurs dans un espace polonais X . L'interaction entre les particules (on la suppose ici par paires) est modélisée par le potentiel d'interaction $\Phi_{i,j}$, fonction de $X \times X$ à valeurs réelles.

Les configurations possibles du système sont notées $\omega = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in X^{\mathbb{Z}^d}$. On définit l'énergie sur un ensemble fini Λ de \mathbb{Z}^d par

$$E_\Lambda(\omega) = \sum_{\{i,j\} \subset \Lambda} \Phi_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Lambda^c}} \Phi_{i,j}(x_i, x_j), \quad (2.3.1)$$

où Λ^c est le complémentaire de Λ dans \mathbb{Z}^d . L'énergie E_Λ tient compte à la fois de la quantité d'énergie au sein de l'ensemble Λ mais aussi des interactions au bord modélisées par la seconde somme dans (2.3.1).

Considérons à présent une mesure produit $\rho = \otimes_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho_i$ où ρ_i est une mesure sur X (typiquement ρ_i est la mesure de Lebesgue si $X = \mathbb{R}$ ou la mesure de Bernoulli si $X = \{\pm 1\}$). On dit qu'une mesure μ sur $X^{\mathbb{Z}^d}$ est une mesure de Gibbs pour le potentiel Φ par rapport à ρ si

$$\mu(d\omega_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} e^{-E_\Lambda(\omega)} \rho(d\omega), \quad (2.3.2)$$

où ω_Λ est une configuration sur Λ et ω_{Λ^c} une configuration sur Λ^c et où $Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})$ est une constante de normalisation dépendante de la configuration extérieure à Λ appelée fonction de partition. Une mesure de Gibbs est donc définie localement selon (2.3.2), formalisme proposé par Dobrushin, Landford et Ruelle qui garantit la cohérence des lois conditionnelles.

Pour un modèle donné, une question primordiale consiste à s'assurer, selon les valeurs prises par les paramètres du modèle, de l'existence d'une mesure de Gibbs. Lorsqu'il y a existence mais non-unicité de la mesure de Gibbs, on dit que le modèle est en transition de phase. Dans ce cas, on sait que l'ensemble des mesures de Gibbs est un convexe dont les éléments extrémaux sont appelés phases pures.

Considérons à présent le système de spins comme un champ aléatoire probabilisé par la mesure de Gibbs. Lorsque les moments d'ordre 2 existent, on peut mesurer la dépendance entre deux sites i et j grâce à $r(i, j) = \text{cov}(x_i, x_j)$ ou $r(h) = \text{cov}(x_i, x_{i+h})$ lorsque le champ est stationnaire. Dans les exemples suivants, cette fonction de covariance peut être non-sommable, témoignant de la forte dépendance du système : dans le modèle d'Ising, en la valeur critique au delà de laquelle il y a transition de phase et dans les modèles gaussiens, pour des interactions particulières.

2.3.1 Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising est le plus connu des modèles de mécanique statistique. Il a été introduit pour l'étude du magnétisme et de la dynamique des fluides. L'espace d'état est $X = \{-1, 1\}$, la mesure de référence est la mesure de Bernouilli $1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$ et le potentiel d'interaction se limite aux plus proches voisins :

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta x_i x_j & \text{si } \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante représentant l'inverse de la température.

En dimension $d = 1$, il y a existence et unicité de la mesure de Gibbs quelque soit β , il n'y a donc jamais transition de phase. En dimension $d \geq 2$, il y a transition de phase au delà d'un certain β_c dépendant de la dimension d . Cela fut montré en dimension $d = 2$ par Onsager (1944) en utilisant l'approche physique du modèle, puis par Dobrushin (1965) dans le formalisme mathématique en dimension quelconque. Lorsque $d = 2$, $\beta_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.441$.

Intéressons-nous à la fonction de covariance. Dans leur approche physique du modèle d'Ising, Kaufman et Onsager (1949) et Fisher (1964) obtiennent la vitesse de décroissance de r selon les valeurs de β . Si $\beta \neq \beta_c$, la fonction de covariance décroît exponentiellement mais lorsque $\beta = \beta_c$ elle décroît géométriquement et n'est plus sommable. On a

$$r(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} |h|^{-1} e^{-\kappa|h|} & \text{si } \beta \neq \beta_c \\ |h|^{-(d-2+\mu)} & \text{si } \beta = \beta_c, \end{cases}$$

où $\kappa > 0$ est la constante de Boltzmann et $\mu \in [0, 2]$ est un paramètre critique valant $1/4$ dans le cas $d = 2$.

Dans le modèle d'Ising en dimension $d \geq 2$, le champ aléatoire des spins est donc fortement dépendant en la valeur critique β_c , la longue mémoire étant isotrope.

Remarque 11. La propriété de forte dépendance dans le modèle d'Ising est relevée dans Cassandro et Jona-Lasinio (1978) ; on y trouve également d'autres modèles physiques pouvant présenter de la longue mémoire en des points critiques. Dans Pickard (1987),

l'auteur s'intéresse à l'estimation dans le modèle d'Ising et souligne les difficultés liées au comportement de forte dépendance au point critique.

Remarque 12. Il est à noter qu'il existe certains modèles compliquant le modèle d'Ising qui exhibent de la forte dépendance sans qu'il y ait transition de phase. C'est le cas pour le modèle XY ou le modèle d'Heisenberg qui n'admettent pas de transition de phase lorsque $d \leq 2$ mais dont la fonction de covariance en dimension $d = 2$ est non sommable sur tout un intervalle de basses températures (cf Kosterlitz et Thouless (1978)).

2.3.2 Les modèles à interactions quadratiques

L'espace d'état est $X = \mathbb{R}$, la mesure de référence est la mesure de Lebesgue et le potentiel d'interaction par paires est :

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta \left(\frac{1}{2} J(0) x_i^2 + e x_i \right) & \text{si } i = j \\ \beta J(i-j) x_i x_j & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où β et e sont des constantes représentant respectivement l'inverse de la température et un champ magnétique ambiant et où $(J(i))_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite réelle définie positive vérifiant $J(i) = J(-i)$ pour tout i et $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |J(i)| < \infty$. Nous supposons pour simplifier $e = 0$ qui reste un cas fondamental à partir duquel nombre de résultats peuvent se déduire pour e quelconque. Par ailleurs, contrairement au modèle d'Ising, la température est sans influence sur l'apparition de transition de phase, le paramètre déterminant est donc la suite J que l'on appellera par abus le potentiel d'interaction.

Ce type de modèles a été étudié par Künsch (1980) et Dobrushin (1980). On peut trouver les résultats qui vont suivre dans Georgii (1988). L'intérêt du modèle présenté est qu'il conduit à des mesures de Gibbs gaussiennes dont les caractéristiques sont directement liées au potentiel J . Soit

$$\hat{J}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) e^{i \langle n, \lambda \rangle}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]^d,$$

on a en effet le théorème suivant :

Théorème 5 (Kunsch, Dobrushin). *Sous les hypothèses précédentes sur J et dans le cas $e = 0$, l'ensemble des mesure de Gibbs associées au modèle précédent est non vide si et seulement si*

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Dans ce cas, les phases pures sont les mesures gaussiennes de fonction de covariance

$$r(h) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) e^{i \langle h, \lambda \rangle} d\lambda \quad (2.3.3)$$

et de moyenne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \sum J(n) u_{k+n} = 0$.

Remarque 13. Le cas $e \neq 0$ nécessite une hypothèse supplémentaire sur J pour assurer l'existence d'une mesure de Gibbs.

L'apparition de transition de phase dans notre cas particulier où $e = 0$ se déduit de ce théorème et est résumé dans le corollaire suivant dû à Künsch. Bien que les phases pures soient gaussiennes, toutes les mesures de Gibbs ne le sont pas forcément. Lorsque le système est en transition de phase, certaines mesures peuvent ne pas avoir de second moment. Le corollaire suivant ne concerne que les mesures du second ordre.

Corollaire 1 (Künsch). *Sous les hypothèses du Théorème 5, il existe plusieurs mesures de Gibbs du second ordre si et seulement si \hat{J} admet une racine dans $[-\pi, \pi]^d$.*

Autrement dit, en transition de phase, toutes les mesures de Gibbs du second ordre sont à longue mémoire. En effet \hat{J}^{-1} correspond à leur densité spectrale d'après la forme (2.3.3) de leur covariance : elle sera non-bornée dès que \hat{J} admet une racine, c'est à dire lorsqu'il y a transition de phase.

Exemple 3. Soit le potentiel harmonique en dimension $d \geq 3$:

$$J(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2d} & \text{si } \sum_{j=1}^d |n_j| = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

On a

$$\hat{J}(\lambda) = 1 - \sum_{|n|=1} \frac{1}{2d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(\lambda_k).$$

Le dernier terme est équivalent en 0 à $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \lambda_k^2$ dont l'inverse est intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$ car $d \geq 3$. Cela nous assure, d'après le théorème 5, l'existence de mesures de Gibbs associées au potentiel J . Par ailleurs $\hat{J}(0) = 0$, d'après le corollaire 1 le système est en transition de phase et les mesures de Gibbs du second ordre sont à longue mémoire. On remarque de plus que la longue mémoire est ici isotrope. Le potentiel harmonique est donc un exemple simple d'interactions à portée finie conduisant à des champs à longue mémoire isotrope.

Exemple 4. Soit, en dimension $d = 2$, le potentiel suivant :

$$J(k, l) = \begin{cases} \prod_{0 < j \leq k} \frac{j-1+\alpha}{j-\alpha} & \text{si } l = pk, |k| > 1 \\ 1 & \text{si } k = l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où p est une constante non nulle et $\alpha \in]-1/2, 0[$.

La suite $J(k, pk)$ correspond à la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire intégré d'ordre α dont on trouve la présentation et des propriétés dans la Proposition 3. On en tire

$$J(k, pk) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} k^{2\alpha-1}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ ce qui montre la sommabilité de J . Par ailleurs, en notant \tilde{r} et \tilde{f} la fonction de covariance et la densité spectrale d'un processus intégré d'ordre α ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} J(k, pk) e^{ik\lambda} = \frac{2\pi}{\tilde{r}(0)} \tilde{f}(\lambda) = \frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \left| 2 \sin \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^{-2\alpha}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \hat{J}(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^2} J(k, l) e^{i(k\lambda_1 + l\lambda_2)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J(k, pk) e^{ik(\lambda_1 + p\lambda_2)} \\ &= \frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \left| 2 \sin \left(\frac{\lambda_1 + p\lambda_2}{2} \right) \right|^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

L'inverse de \hat{J} est intégrable sur $[-\pi, \pi]^2$ car $\alpha \in]-1/2, 0[$ et l'existence d'une mesure de Gibbs associée au potentiel J est garantie par le théorème 5. D'autre part, \hat{J} s'annule sur toute la ligne $\lambda_1 + p\lambda_2 = 0$ ce qui montre que le système est en transition de phase d'après le corollaire 1 et que les mesures de Gibbs sont à longue mémoire. Leur densité spectrale est de plus singulière le long de toute une ligne, la longue mémoire est donc ici non-isotrope.

2.4 Preuves des lemmes

Preuve du lemme 1

La fonction de covariance vaut

$$r(h, l) = \int_{[-\pi, \pi]^2} |\lambda_1 + \theta\lambda_2|^{2\alpha} e^{i(h\lambda_1 + l\lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2.$$

On se restreint au calcul de $r(h, \theta h)$, pour les h tels que $\theta h \in \mathbb{Z}$, suffisant pour conclure.

$$r(h, \theta h) = \int_{[-\pi, \pi]^2} |\lambda_1 + \theta\lambda_2|^{2\alpha} e^{ih(\lambda_1 + \theta\lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2.$$

On effectue le changement de variable $u = \lambda_1 + \theta\lambda_2$ et $v = \theta\lambda_2 - \lambda_1$. Nous supposons, sans nuire à la généralité, que $\theta \geq 1$; on obtient alors le nouveau domaine d'intégration

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\theta-1)\pi < u < (\theta-1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\pi + u \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} -(\theta+1)\pi < u < -(\theta-1)\pi \\ -2\theta\pi - u < v < 2\pi + u \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} (\theta-1)\pi < u < (\theta+1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\theta\pi - u \end{array} \right\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
r(h, \theta h) &= \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta-1)\pi} |u|^{2\alpha} e^{ihu} du + \int_{-(\theta+1)\pi}^{-(\theta-1)\pi} (2u + 2(\theta+1)\pi) |u|^{2\alpha} e^{ihu} du \\
&\quad + \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} (2(\theta+1)\pi - 2u) |u|^{2\alpha} e^{ihu} du \\
&= 2 \int_0^{(\theta-1)\pi} u^{2\alpha} \cos(hu) du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} |u|^{2\alpha} \cos(hu) du \\
&\quad - 4 \int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} u |u|^{2\alpha} \cos(hu) du \\
&= \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \left(2 \int_0^{(\theta-1)\pi h} u^{2\alpha} \cos(u) du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} |u|^{2\alpha} \cos(u) du \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{h} \int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} u |u|^{2\alpha} \cos(u) du \right).
\end{aligned}$$

La première intégrale admet une limite finie non nulle et les deux derniers termes convergent vers 0. Ainsi

$$r(h, \theta h) \sim ch^{-2\alpha-1},$$

lorsque $h \rightarrow \infty$, où c est une constante positive non nulle.

Si le champ X admettait une fonction de covariance du type (1.2.2), alors, d'après le calcul de $r(h, \theta h)$, elle devrait vérifier

$$r(h, l) \sim |(h, l)|^{-2\alpha-1} L(|(h, l)|) b\left(\frac{(h, l)}{|(h, l)|}\right)$$

lorsque $|(h, l)| \rightarrow \infty$. On pourrait appliquer le théorème de Dobrushin et Major (1979) sur la convergence de ses sommes partielles présenté dans le chapitre introductif. Pour obtenir cette convergence, la normalisation des sommes partielles serait alors $n^{\alpha-3/2} L(n)^{-1/2}$. Or le (ii) du théorème 7 du chapitre 3 montre que les sommes partielles de X convergent en loi avec une normalisation égale à $n^{\alpha-1}$. La fonction de covariance de X n'est donc pas de la forme (1.2.2).

Preuve du lemme 2

D'après la Proposition 2 il suffit de montrer que

$$\int_{[-\pi, \pi]^3} \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda = \infty. \quad (2.4.1)$$

Le dénominateur est proportionnel à $6 + \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_3) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_3) + \cos(\lambda_2) \cos(\lambda_3) + \sin(\lambda_2) \sin(\lambda_3) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_3)$. Nous

pouvons intégrer son inverse par rapport à λ_3 sur $[-\pi/2, 0]$ et après calculs nous obtenons

$$\int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda_3 = \frac{1}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \left(\arctan \left[\frac{\sin(\lambda_1) + \sin(\lambda_2)}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \right] + \arctan \left[\frac{\cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) - 4 \cos(\lambda_1) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - \sin(\lambda_1) - 4 \cos(\lambda_2) - \sin(\lambda_2) + 9}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \right] \right),$$

où

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = |\cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5|.$$

Lorsque $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, \frac{\pi}{6}]^2$, on obtient donc facilement

$$\frac{c}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda_3 \leq \frac{\pi}{G(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad (2.4.2)$$

où $0 < c < \pi$. Or, sur $[0, \frac{\pi}{6}]^2$,

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5 \\ \leq \lambda_1 \lambda_2 + \frac{3\lambda_1^2}{2} + \frac{3\lambda_2^2}{2} \leq \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5 \\ \geq -\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{4} \geq -\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_2^2}{2} \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$G(\lambda_1, \lambda_2) \leq \max \left(\frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2, \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) = \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

Ainsi $1/G$ n'est pas intégrable sur $[0, \frac{\pi}{6}]^2$ et grâce à (2.4.2), (2.4.1) s'ensuit.

Preuve du lemme 6

Le dénominateur dans l'intégrale de (2.2.9) vaut

$$D = \left(1 - \frac{x}{2}(\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) \right)^2 + x^2 \frac{(\sin \lambda_1 + \sin \lambda_2)^2}{4}$$

ce qui se développe à l'aide de formules trigonométriques en

$$D = \left(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

D'après (2.2.9) on a donc

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{(1-x)^{-\alpha} \Phi(x)}{(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} dx$$

ce qui montre que f est borné sur tout intervalle ne contenant pas 0. Par ailleurs, pour tout $y \in [0, 1]$, f est supérieur à

$$\frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^{-\alpha} \Phi(x)}{(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} dx.$$

La dernière intégrale est asymptotiquement proportionnelle à $\int_0^y (1-x)^{-\alpha-2} \Phi(x) dx$ lorsque (λ_1, λ_2) tend vers 0. En faisant tendre y vers 1, on remarque que f est singulière en l'origine.

Etudions son comportement lorsque (λ_1, λ_2) tend vers 0 le long des quelques directions particulières. certaines directions d'approche.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $D = (x \cos \lambda - 1)^2$. En posant $u = (1-x) \frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}$ dans l'intégrale de (2.2.9), on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda, -\lambda) &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{(1 - \cos \lambda)^{-\alpha-1}}{\cos^{-\alpha+1} \lambda} \int_0^{\frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}} \frac{u^{-\alpha}}{1 + u^2} \Phi \left(1 - u \frac{1 - \cos \lambda}{\cos \lambda} \right) du \\ &\sim c |\lambda|^{2-\alpha-2} \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{1 + u^2} du, \end{aligned}$$

en $\lambda = 0$ et avec c une constante non nulle.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, on pose dans l'intégrale $u = \frac{x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}$, et on obtient, en 0,

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} \int_A^B \frac{(2 \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2} - u \sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^{-\alpha}}{1 + u^2} \Phi(1) du \quad (2.4.3)$$

avec $A = -\frac{1}{\tan(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})}$ et $B = \frac{2 \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2}}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}$.

Le comportement dans ce cas dépend encore des directions, relevons-en trois :

- . Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = o(\lambda_1 \lambda_2)$ en 0, alors l'expression (2.4.3) nous donne l'équivalent :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^{-\alpha}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

avec c une constante non nulle.

- . Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 = o(\lambda_1 + \lambda_2)$ en 0, alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha-1}$$

où c est une constante non nulle.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et si $\lambda_1\lambda_2$ est du même ordre que $\lambda_1 + \lambda_2$ en 0, on obtient l'équivalence

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c(\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha-1}$$

où c est une constante non nulle.

Il y a évidemment d'autres directions pour lesquelles le comportement est différent car $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$ ne sont pas toujours comparables au voisinage de 0.

Nous énonçons maintenant un lemme similaire à celui que nous venons de démontrer. Il concerne l'exemple 6 de la section 2.2.2.

Lemme 7. *Soit $-1 < \alpha < 0$, $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec Φ borné sur $[0, 1]$ et continu au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Alors $f(\lambda_1, \lambda_2)$ définie par (2.2.10) est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$. Elle est bornée sur tout intervalle ne contenant pas ces points.*

Démonstration. Supposons que (λ_1, λ_2) est dans un voisinage de (ν_1, ν_2) ; alors la fonction

$$x \mapsto \left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1+\nu_1)} + e^{i(\lambda_2+\nu_2)}}{2} \right|^2$$

est majorée sur $[0, 1]$ par une constante $1/c$ strictement positive. D'où, pour tout y dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^d \Phi(x)}{\left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1+\nu_1)} + e^{i(\lambda_2+\nu_2)}}{2} \right|^2 \left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1-\nu_1)} + e^{i(\lambda_2-\nu_2)}}{2} \right|^2} dx \\ &\geq c \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^d \Phi(x)}{\left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1-\nu_1)} + e^{i(\lambda_2-\nu_2)}}{2} \right|^2} dx. \end{aligned}$$

Lorsque (λ_1, λ_2) tend vers (ν_1, ν_2) , la dernière intégrale est asymptotiquement proportionnelle à $\int_0^y (1-x)^{-\alpha-2} \Phi(x) dx$ qui diverge vers $+\infty$ lorsque y tend vers 1. La densité spectrale est donc singulière en (ν_1, ν_2) . Le même résultat s'obtient en $(-\nu_1, -\nu_2)$. Sur tout intervalle en contenant ni (ν_1, ν_2) ni $(-\nu_1, -\nu_2)$, la densité spectrale est bornée de façon évidente. \square

2.5 Simulation de champs fortement dépendants

Les figures 2.3 à 2.7 représentent des champs aléatoires gaussiens, leur périodogramme (en trois dimension à gauche et projeté en deux dimension à droite) et l'estimation de leur fonction de covariance (en 3D et projeté en 2D). Leur réalisation sont des images de taille 100×100 . La valeur de chaque variable aléatoire $X_{i,j}$ située au pixel (i, j) est symbolisée par un niveau de gris.

La figure 2.3 représente un champ faiblement dépendant. Il est issu du modèle auto-régressif de type produit :

$$(1 - \frac{1}{2}L_1)(1 - \frac{1}{2}L_2)X_{n_1, n_2} = \varepsilon_{n_1, n_2},$$

où ε est un champ i.i.d gaussien. La structure produit se lit sur le périodogramme et sur la fonction de covariance dont la forme en croix révèle deux directions privilégiées de décroissance le long des axes. Le périodogramme ne témoigne pas de singularités spectrales particulières et la fonction de covariance décroît très rapidement ce qui confirme la courte mémoire du champ.

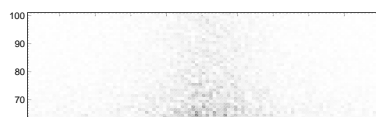
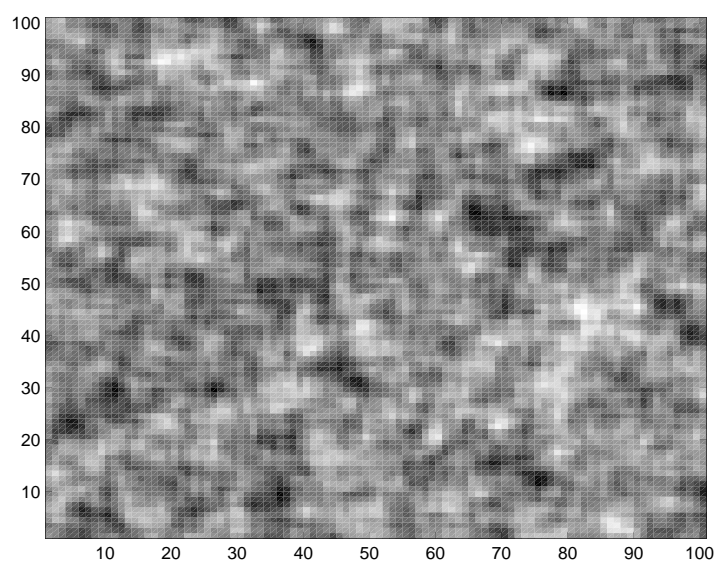
A titre de comparaison, les figures 2.4 à 2.7 représentent des champs à longue mémoire. Tous admettent d'une part un périodogramme témoignant visiblement d'une densité spectrale non-bornée et d'autre par d'une fonction de covariance à décroissance lente.

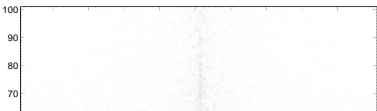
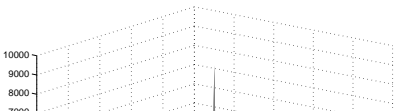
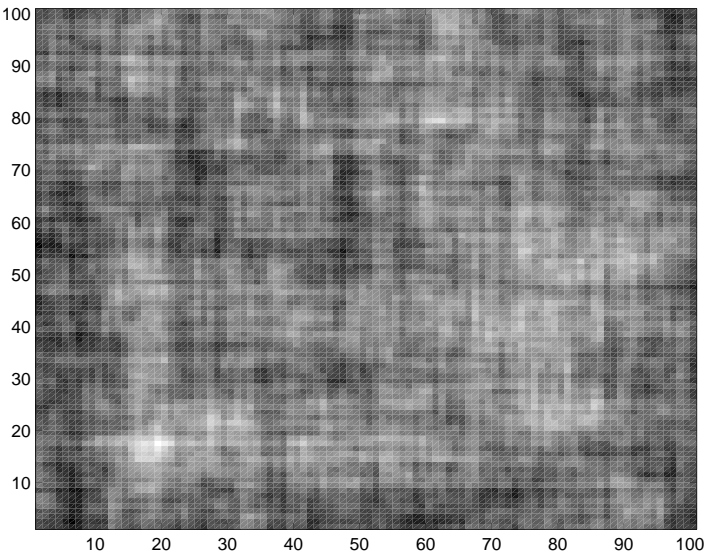
La figure 2.4 est une simulation du champ agrégé considéré dans l'exemple 1 de la partie 2.2.2 où l'on a choisi $g_a(x) = g_b(x) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x}$ et $N = 1000$. L'image possède des taches de niveau de gris uniforme beaucoup plus étendues que l'image de la figure 2.3 ce qui témoigne de sa forte dépendance. Le périodogramme témoigne d'une singularité spectrale prononcée en l'origine et la fonction de covariance décroît faiblement ce qui confirme le caractère fortement dépendant du champ. La structure produit se remarque clairement sur les représentations.

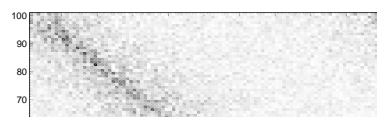
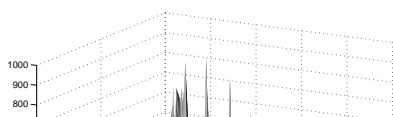
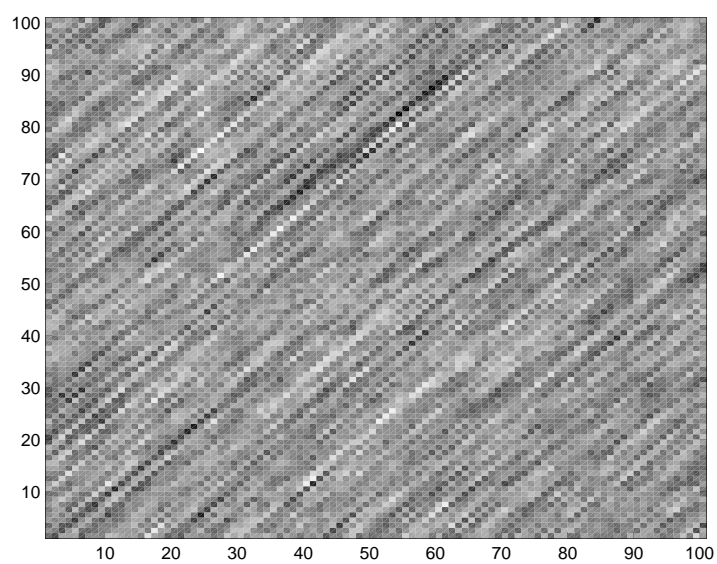
La figure 2.5 montre une simulation du champ agrégé de l'exemple 2 de la partie 2.2.2 avec $k = 1$, g proportionnel à $(1-x)^{0.9}$ et $N = 1000$. La forte dépendance le long d'une direction oblique se voit clairement sur l'image. Elle se confirme sur le périodogramme qui montre une singularité spectrale tout le long de la ligne $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et sur la fonction de covariance $r(k, l)$ qui ne décroît faiblement que dans la direction $k = l$.

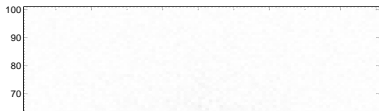
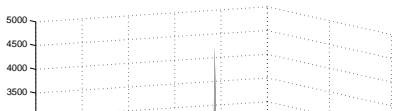
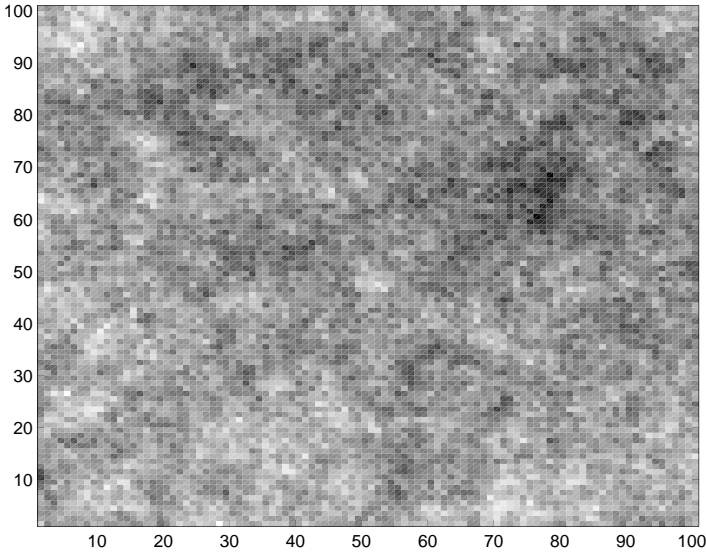
Le champ de la figure 2.6 a été obtenu par filtrage d'après la procédure de simulation présentée dans Eom (2001). Il s'agit de l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\alpha = -0,48$, $\theta = 0$ et $e = 1$. La forte dépendance du champ se remarque comme précédemment grâce aux taches de niveau de gris uniforme, à la singularité spectrale suggérée par le périodogramme et à la décroissance lente de la fonction de covariance. La divergence du périodogramme en l'origine ainsi que la décroissance de la fonction de covariance ont visiblement lieu de façon isotrope.

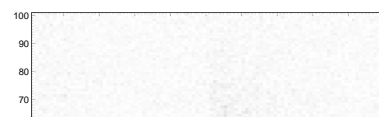
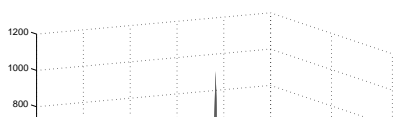
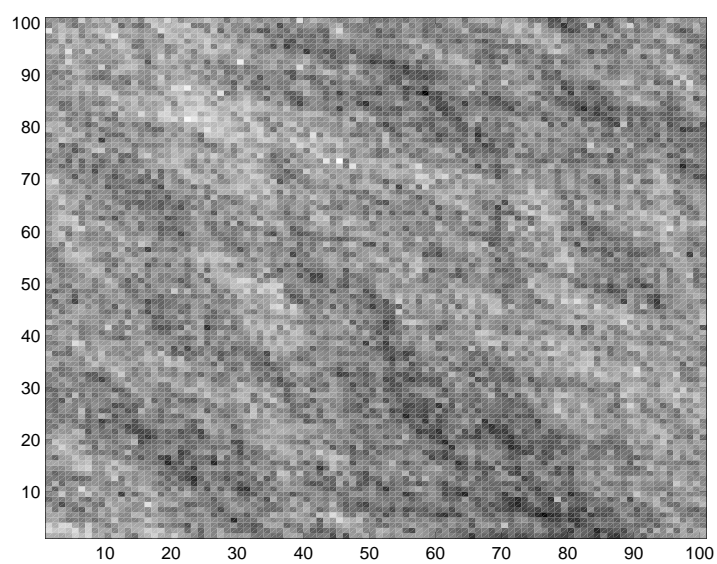
La figure 2.7 représente également une simulation du champ considéré dans l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\alpha = -0,48$ mais avec $\theta = \pi/6$ et $e = 2$. Le champ est clairement à longue mémoire. Bien que la forte dépendance soit isotrope au sens de la définition 3, la divergence du périodogramme à l'origine n'est pas invariante par rotation des axes. D'après l'équivalent (2.1.15), cette divergence a plutôt lieu de manière elliptique ce qui semble confirmé sur les représentations du périodogramme.











Chapitre 3

Convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles

Soit X un champ linéaire fortement dépendant. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique des lois fini-dimensionnelles de ses sommes partielles

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad (3.0.1)$$

pour $t \in [0, 1]^d$ et où d_n est une suite normalisatrice qui sera précisée par la suite.

La convergence fonctionnelle de ces sommes nécessite l'étude de leur équitension dans l'espace de Skorohod $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ et fera l'objet du chapitre suivant.

Nous basons notre étude sur un théorème de convergence de mesures spectrales démontré dans le cas $d = 1$ par Van der Meer (1996) et Lang et Soulier (2000) et que nous généralisons au cadre des champs dans la section 3.1. Le théorème 6 permet l'étude de statistiques linéaires pouvant s'écrire sous forme d'une intégrale stochastique. C'est le cas des sommes partielles (3.0.1) lorsque le champ X s'écrit

$$X_{n_1, \dots, n_d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1, \dots, k_d} \xi_{n_1 - k_1, \dots, n_d - k_d},$$

où ξ est un bruit dont nous préciserons les propriétés plus tard et où les a_k peuvent être vus comme les coefficients de Fourier d'un filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$. Ce filtre détermine la structure de dépendance de X puisqu'il est très lié à sa densité spectrale : cette dernière est proportionnelle à $|a|^2$ lorsque ξ est un bruit blanc.

Dans la section 3.2, on applique le Théorème 6 pour les dimensions $d = 1$ et $d = 2$. Des conditions de dépendance sur le champ X , précisées via le filtre a dans le Théorème 7, nous permettent d'obtenir la limite de S_n . Les résultats se déclinent selon que le filtre est continu en 0 ou non. Dans la première situation, S_n admet un comportement de type centrale limite. Dans la seconde, nous supposons le filtre équivalent en l'origine à une fonction homogène de degré négatif, un cadre typique amenant de la forte dépendance, et nous obtenons un théorème limite non-central dans le sens où la normalisation n'est plus standard.

La section 3.3 généralise l'étude précédente à $d \geq 3$. Notre approche, basée sur le Théorème 6, ne permet pas d'obtenir la convergence de S_n sans renforcer les hypothèses faites sur a dans la section précédente. Néanmoins, nous retrouvons la distinction principale selon que le filtre est continu en 0 ou non, impliquant un théorème limite de type central ou non-central respectivement.

Dans un cas particulier, nous obtenons comme limite de S_n le drap Brownien fractionnaire en dimension d (voir remarque 19).

La section 3.4 contient la démonstration du Théorème 6 et la partie 3.5 résume quelques propriétés sur les approximations de l'unité que nous utilisons dans les preuves.

3.1 Approche spectrale

3.1.1 Théorème de convergence de mesures spectrales

Nous énonçons le résultat principal qui nous permettra d'étudier la convergence des sommes partielles d'un champ linéaire. Il établit la convergence de mesures spectrales construites à partir d'un champ aléatoire vérifiant un théorème de type Donsker.

Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel. On adopte l'hypothèse suivante :

H 1. *Le champ aléatoire stationnaire $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est centré et admet une densité spectrale f_ξ bornée par un réel positif $M > 0$. De plus la suite S_n^ξ définie sur $]0, \infty[^d$ par :*

$$S_n^\xi(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \xi_{k_1, \dots, k_d}$$

converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers un processus B .

Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort $B(t_1, \dots, t_d)$ est le drap brownien de fonction de covariance $\sigma(s, t) = (s_1 \wedge t_1) \dots (s_d \wedge t_d)$ (cf Wichura (1969)).

La variable aléatoire ξ_k admet la représentation spectrale suivante :

$$\xi_k = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle k, x \rangle} dW(x), \quad (3.1.1)$$

où la mesure de contrôle de W a pour densité f_ξ .

Pour $n \geq 1$, on considère la mesure aléatoire W_n à accroissements orthogonaux sur $[-n\pi; n\pi]^d$ définie par

$$W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A).$$

Le théorème suivant étend au cas $d > 1$ un résultat obtenu par Lang et Soulier (2000) en dimension $d = 1$.

Théorème 6. *Sous H 1, il existe une application linéaire I de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Si Φ_n est une suite de fonctions qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Φ , alors $\int \Phi_n(x) dW_n(x)$ converge en loi vers $I(\Phi)$.*

- (ii) $\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad E(I(\Phi))^2 \leq (2\pi)^d M \|\Phi\|_2^2$
- (iii) $I\left(x \mapsto \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}\right) = B(t_1, \dots, t_d)$
- (iv) Si ξ est un bruit blanc fort, quelque soit Φ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, $I(\Phi) = \int \Phi dW_0$, où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

La preuve de ce théorème est donnée dans la section 3.4.

Remarque 14. Le (ii) du théorème montre que l'application I n'est pas nécessairement une isométrie et qu'elle ne peut pas toujours être vue comme une intégrale stochastique. Cette interprétation devient possible lorsque ξ est un bruit blanc fort comme spécifié dans le (iv). Dans ce cas, B est le drap brownien et la propriété (iii) correspond à sa représentation harmonisable :

$$B(t_1, \dots, t_d) = \int \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_0(x_1, \dots, x_d).$$

3.1.2 Application à la convergence de S_n

Le Théorème 6 nous permet, en particulier, d'étudier le comportement asymptotique de toute statistique linéaire de la forme $\sum_{k \in \mathcal{D}_n} c_k \xi_k$ où \mathcal{D}_n est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d , où les c_k sont des constantes complexes, pourvu qu'elle puisse se réécrire sous forme d'une intégrale stochastique. Nous détaillons la démarche dans le cas particulier des sommes partielles d'un champ linéaire X , notre centre d'intérêt.

Soit

$$X_{n_1, \dots, n_d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1, \dots, k_d} \xi_{n_1 - k_1, \dots, n_d - k_d}, \quad (3.1.2)$$

où a_{k_1, \dots, k_d} sont les coefficients de Fourier (à $(2\pi)^{d/2}$ près) d'un filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ et vérifient

$$a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1, \dots, k_d} e^{-i\langle k, x \rangle}.$$

Dans les résultats de convergence présentés par la suite, nous spécifierons la structure de dépendance du champ X à partir du filtre a . Ce dernier est lié à la densité spectrale f_X de X par la relation :

$$f_X(x) = f_\xi(x) |a(x)|^2,$$

où $x = (x_1, \dots, x_d) \in [-\pi, \pi]^d$. En particulier, si ξ est un bruit blanc de variance σ^2 , $f_X(x) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} |a(x)|^2$.

Les sommes partielles de X (ici classiquement normalisées par $n^{-d/2}$) sont définies, pour tout $t = (t_1, \dots, t_d)$ dans $[0, 1]^d$, par

$$S_n(t) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}. \quad (3.1.3)$$

En utilisant la représentation spectrale (3.1.1) de ξ et la définition de W_n , on a

$$S_n(t) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) dW_n(x). \quad (3.1.4)$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et où

$$D_n(x_j, t_j) = \frac{e^{ix_j([t_j n] + 1)/n} - 1}{n(e^{ix_j/n} - 1)} \mathbf{I}_{[-n\pi, n\pi]}(x_j). \quad (3.1.5)$$

Cette écriture nous permet d'utiliser le théorème 6. À t fixé et à une renormalisation près, les sommes partielles de X convergent en loi dès que $a(x/n) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j)$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

3.2 Sommes partielles en dimension $d \leq 2$

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique des sommes partielles d'un champ linéaire en dimension 2, construit soit à partir d'un filtre continu à l'origine, soit à partir d'un filtre équivalent en 0 à une fonction homogène.

Théorème 7. *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire défini par (3.1.2), construit en filtrant ξ à travers un filtre a .*

(i) *Si $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ est continu en l'origine avec $a(0) \neq 0$, alors, pour $d \leq 2$,*

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} a(0)B(t), \quad (3.2.1)$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H1**.

(ii) *Si a est équivalent en 0 à une fonction homogène \tilde{a} de degré $\alpha \in]-1; 0[$ assurant $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$, i.e. $\forall \lambda \tilde{a}(\lambda x) = |\lambda|^\alpha \tilde{a}(x)$, alors, pour $d \leq 2$,*

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} I \left(\tilde{a}(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right), \quad (3.2.2)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 15. Lorsque $d = 1$, nous retrouvons les résultats montrés dans Lang et Soulier (2000); cependant nous en allégeons un peu les hypothèses, car là où ces auteurs supposent le filtre continu à l'origine et borné sur $[-\pi, \pi]$, nous ne supposons que la continuité en 0. De même, dans (ii), le filtre n'a pas besoin d'être homogène sur tout $[-\pi, \pi]$ mais seulement en l'origine.

Remarque 16. Le filtrage du bruit ξ par une fonction vérifiant les hypothèses du (i) peut produire un champ faiblement dépendant ; c'est le cas lorsque par exemple a est continu sur $[-\pi, \pi]^d$. Mais il peut aussi amener de la forte dépendance lorsque a est singulière en des points de fréquence non nulle. Dans ce contexte, la dépendance est forte car la fonction de covariance est non sommable mais, comme attendu lorsque les singularités spectrales ne se situent pas à l'origine, le comportement asymptotique des sommes partielles n'est pas modifié par rapport à un cadre de faible dépendance. En dimension $d = 1$, ce cadre de forte dépendance faisant intervenir des singularités spectrales hors de l'origine est connu sous le nom de longue mémoire saisonnière, voir à ce sujet Ould Haye (2001).

Remarque 17. Lorsque le filtre vérifie les hypothèses du (ii) du Théorème 7, le champ résultant est à longue mémoire. Il est à longue mémoire isotrope lorsque le filtre est de la forme $a(x, y) = |(x, y)|^\alpha$. Nous obtenons de la longue mémoire non-isotrope en considérant par exemple le filtre discuté dans l'exemple 1, de la forme $a(x, y) = |x + \theta y|^\alpha$, avec $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 18. Dans (3.2.2), le processus limite n'admet pas une forme explicite dans le cas général. Mais dans le cas particulier où ξ est un bruit blanc fort, il peut s'écrire comme une intégrale stochastique par rapport à la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien (cf la remarque 14).

Preuve du Théorème 7. Nous commençons par montrer (i).

Pour montrer la convergence en loi de $S_n(t)$ à t fixé, nous employons la démarche expliquée dans la section 3.1.2 en vue d'appliquer le Théorème 6 et nous devons montrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0. \quad (3.2.3)$$

Par cette méthode, la convergence des lois fini-dimensionnelles, ramenée ici à une convergence dans L^2 , se déduit aisément de la convergence en loi de $S_n(t)$ à t fixé.

Séparons l'intégrale (3.2.3) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\ &= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\ & \quad + \int_{\cup_{j=1}^d \{|x_j| > n\pi\}} \left| a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale converge vers 0 à t fixé, car $x_j \mapsto D(x_j, t_j)$ est continu sur \mathbb{R} et

vérifie $|D(x_j, t_j)|^2 < 2x_j^{-2}$, donc est intégrable sur \mathbb{R} . Pour la première intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\ \leq 2 \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) - a(0) \right|^2 \prod_{j=1}^d |D_n(x_j, t_j)|^2 dx \\ + 2 \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a^2(0) \left| \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 12 de la section 3.4, la dernière intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il nous reste à traiter la première intégrale du terme à droite de l'inégalité. Le changement de variable $x/n \rightarrow x$ nous donne :

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) - a(0) \right|^2 \prod_{j=1}^d |D_n(x_j, t_j)|^2 dx = \int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx, \quad (3.2.4)$$

avec

$$\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) = 2\pi \frac{[nt_j] + 1}{n} F_{[nt_j]+1}(x_j), \quad (3.2.5)$$

où F_n est le noyau de Fejer :

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{n}{2\pi} & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Si $d = 1$, $\tilde{F}_{[nt_1]}(x_1)$ est, à une constante près, une approximation forte de l'unité ; comme $|a(x) - a(0)|^2$ est continu en $x = 0$, le Théorème 13 donné dans la partie annexe 3.5 s'applique et (3.2.3) est montré. Le même argument ne peut pas être appliqué lorsque $d \geq 2$ car le produit tensoriel $\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)$ n'est plus qu'une approximation de l'unité au sens faible (voir la Proposition 5 en annexe). Cependant, lorsque $d = 2$, le résultat reste vrai comme nous le prouvons ci-dessous.

Nous séparons le domaine d'intégration du membre de droite dans (3.2.4) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx \\ = \int_{\|x\| \leq \delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx + \int_{\|x\| > \delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx, \end{aligned}$$

où la suite $(\delta_n)_{n>0}$ devra être convenablement choisie par la suite et où la norme considérée est $\|(x_1, x_2)\| = \max(|x_1|, |x_2|)$. D'après la continuité de $a(x)$ en $x = 0$, le premier

terme tend vers 0 dès que $\delta_n \rightarrow 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned} \int_{||x|| > \delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx &\leq \\ \int_{|x_1| > \delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx &+ \int_{|x_2| > \delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Les deux termes du membre de droite ci-dessus sont traités de la même manière. Considérons par exemple le premier :

$$\begin{aligned} \int_{|x_1| > \delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) \left(\int_{|x_1| > \delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

La Proposition 6 de l'Annexe 3.5 implique, \tilde{F} étant défini dans (3.2.5),

$$\sup_{|x_1| > \delta_n} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) \leq \frac{\pi^2}{n\delta_n^2}.$$

Donc

$$\int_{|x_1| > \delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^2 \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx \leq \frac{\pi^2}{\delta_n^2} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) b(x_2) dx_2,$$

où $b(x_2) = \int_{[-\pi, \pi]} |a(x) - a(0)|^2 dx_1$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Toujours d'après la Proposition 6,

$$v_{2,n} = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) b(x_2) dx_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Posons de façon analogue

$$v_{1,n} = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) b(x_1) dx_1$$

où $b(x_1) = \int_{[-\pi, \pi]} |a(x) - a(0)|^2 dx_2$.

Il suffit pour conclure de choisir $\delta_n^2 = (v_{1,n} \vee v_{2,n})^{1/2}$. Ce choix garantit $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ et implique la convergence vers 0 de chaque terme de (3.2.7).

Nous montrons à présent le (ii) du théorème 7 en nous restreignant encore à la convergence en loi à t fixé. Nous utilisons le Théorème 6 et devons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \tilde{a}(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx = 0. \quad (3.2.8)$$

Nous donnons d'abord quelques propriétés du filtre \tilde{a} .

Lemme 8. Si $d \leq 2$,

$$(i) \int_{[-\pi, \pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) dx < \infty, \quad (ii) \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{i=1}^d (x_i^{-2} \wedge 1) dx < \infty.$$

Preuve du Lemme 8. Nous supposons que $d = 2$ car la preuve lorsque $d = 1$ ne présente aucune difficulté. Comme $a(x)$ est équivalent à $\tilde{a}(x)$ en $x = 0$, il existe $0 < \eta < \pi$ tel que $|x| < \eta$ implique $|\tilde{a}^2(x)/a^2(x)| < 2$. Ainsi,

$$\int_{|x| < \eta} |\tilde{a}|^2(x) dx = \int_{|x| < \eta} |a|^2(x) \frac{|\tilde{a}|^2(x)}{|a|^2(x)} dx \leq 2 \int_{[-\pi, \pi]^d} |a|^2(x) dx < \infty.$$

Par ailleurs, en passant aux coordonnées polaires et par homogénéité de \tilde{a} ,

$$\int_{|x| < \eta} |\tilde{a}|^2(x) dx = \int_0^\eta r^{2\alpha+1} dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{\eta^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

La dernière intégrale est donc nécessairement finie et

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) dx = \frac{\pi^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) d\theta < \infty,$$

ce qui montre le (i) du Lemme 8.

Pour le (ii) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{i=1}^d (x_i^{-2} \wedge 1) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) ((r^{-2} \cos^{-2} \theta) \wedge 1) ((r^{-2} \sin^{-2} \theta) \wedge 1) d\theta dr \\ &\leq \int_0^1 r^{2\alpha+1} dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &\quad + \int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) ((r^{-2} \cos^{-2} \theta) \wedge 1) ((r^{-2} \sin^{-2} \theta) \wedge 1) d\theta dr \end{aligned}$$

L'intégrale sur le domaine $r \leq 1$ est finie ; pour la dernière intégrale sur $r > 1$, on peut ramener le domaine d'intégration selon θ sur $[0, \pi]$ et il convient de scinder ce dernier selon que $|\theta - \pi/2| < \pi/4$ ou non. Sur $\{|\theta - \pi/2| < \pi/4\}$, $\sin^{-2} \theta < 2$ et sur $\{|\theta - \pi/2| > \pi/4\}$, $\cos^{-2} \theta < 2$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) ((r^{-2} \cos^{-2} \theta) \wedge 1) ((r^{-2} \sin^{-2} \theta) \wedge 1) d\theta \\ & \leq c \int_1^\infty r^{2\alpha-1} dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos \theta, \sin \theta) d\theta < \infty \end{aligned}$$

ce qui montre le (ii) du lemme 8. \square

Nous revenons à la preuve de (3.2.8).

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \tilde{a}(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\
& \leq 2 \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i, t_i)|^2 dx \\
& \quad + 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx. \quad (3.2.9)
\end{aligned}$$

Le lemme suivant traite de la convergence de la première intégrale dans (3.2.9).

Lemme 9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i, t_i)|^2 dx = 0$$

Preuve du Lemme 9. Après un changement de variables et grâce à l'homogénéité de \tilde{a} ,

$$\begin{aligned}
& \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i, t_i)|^2 dx \\
& = n^{2\alpha} \int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx,
\end{aligned}$$

où $\tilde{F}_{[nt_j]+1}$ est défini en (3.2.5). Soit $\alpha < \beta < 0$, nous coupons le domaine d'intégration de la dernière intégrale de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& n^{2\alpha} \int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx = \\
& n^{2\alpha} \int_{|x| \leq n^\beta} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx + n^{2\alpha} \int_{|x| > n^\beta} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx.
\end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Comme $\beta > \alpha$ et d'après le Lemme 8, la convergence vers 0 de la dernière intégrale se montre exactement comme celle de (3.2.7). Quant à la première intégrale dans le membre de droite de 3.2.10, on utilise le fait que $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ lorsque x tend vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|x| \leq n^\beta$ implique

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \varepsilon |\tilde{a}(x)|.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}
n^{2\alpha} \int_{|x| \leq n^\beta} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx \\
\leq \varepsilon n^{2\alpha} \int_{|x| \leq n^\beta} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx \\
\leq c\varepsilon \int_{|x| \leq n^{\beta+1}} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2\left(\frac{[nt_j]+1}{n} \frac{x_j}{2}\right)}{x_j^2} \frac{\left(\frac{x_j}{2n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x_j}{2n}\right)} dx \\
\leq c\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{j=1}^d \frac{(1 \wedge (t_j + 1)^2 x_j^2)}{x_j^2} dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie d'après le Lemme 8 d'où la convergence vers 0 de (3.2.10). \square

Revenons à la preuve du (ii) du Théorème 7. D'après (3.2.9) et le Lemme 9, il reste à prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx = 0.$$

Nous séparons le domaine d'intégration de cette intégrale :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\
&= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx + \int_{\cup_i \{|x_i| > n\pi\}} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{i=1}^d |D(x_i, t_i)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 par intégrabilité sur \mathbb{R}^d de la fonction sous l'intégrale. Pour la première intégrale, le changement de variables $x/n \rightarrow x$ conduit à :

$$\begin{aligned}
& \int_{[-n\pi, n\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\
&= n^{2\alpha+d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 12 de la section 3.4, nous avons

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]^d} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 = O(n^{-2}). \quad (3.2.11)$$

Comme $\int_{[-\pi, \pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) dx < \infty$, nous obtenons finalement

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx = O(n^{2\alpha+d-2})$$

qui converge vers 0 puisque $d \leq 2$ et $\alpha < 0$.

□

3.3 Sommes partielles en dimension d quelconque

La méthode adoptée pour montrer la convergence des sommes partielles se base sur la convergence dans L^2 de $a(x/n) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j)$. D'après le Théorème 7, cette convergence se décline assez bien en dimension $d = 2$ selon que le filtre a est continu en l'origine ou non. Ce n'est plus le cas en dimension $d \geq 3$: le lemme suivant montre que l'on ne peut pas généraliser les résultats obtenus en dimension 2 sans hypothèse supplémentaire sur a . Le filtre présenté vérifie en effet les hypothèses du (i) du Théorème 7 mais la convergence souhaitée dans L^2 n'a pas lieu.

Lemme 10. *Soit le filtre a sur $[-\pi, \pi]^3$ défini par :*

$$a(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_1| \leq c \text{ ou si } x_2 x_3 = 0 \\ |x_2|^{\alpha/2} |x_3|^{\alpha/2} + 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $-1 < \alpha < -1/2$ et $0 < c < \pi$.

Ce filtre appartient à $L^2([-\pi, \pi]^3)$, il est continu en 0 avec $a(0) \neq 0$ et la fonction $a(x/n) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j)$ ne converge pas dans $L^2([-\pi, \pi]^3)$.

Démonstration du lemme 10. Le candidat pour la limite dans L^2 de $a(x/n) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j)$ est $\prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j)$, sa limite presque sûre. Or

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(a\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) + \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant la minoration $|x + y| \geq ||x| - |y||$, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(a\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) + \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j) \right|^2 dx \right)^{1/2} \geq \\ & \left| \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right|^2 \prod_{j=1}^3 |D_n(x_j, t_j)|^2 dx \right)^{1/2} - \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j) \right|^2 dx \right)^{1/2} \right|. \end{aligned}$$

Le second terme converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ donc reste borné à partir d'un certain rang. Quant au premier terme, après le changement de variable $x/n \rightarrow x$ et en procédant comme dans (3.2.4) dans la preuve du Théorème 7, il s'écrit

$$\int_{|x_1|>c} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^\alpha \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^\alpha \tilde{F}_{[nt_3]+1}(x_3) dx_3$$

où \tilde{F} a été défini en (3.2.5). D'après la propriété 3. de la Proposition 6 de la partie annexe 3.5, cette expression est supérieure à

$$\frac{1}{n} \left(\pi - c + \frac{\sin(([nt_1] + 1)c)}{[nt_1] + 1} \right) \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^\alpha \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2) dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^\alpha \tilde{F}_{[nt_3]}(x_3) dx_3.$$

Le dernier point de cette proposition nous fournit également un équivalent pour les deux intégrales ci-dessus et finalement pour n assez grand,

$$\int_{|x_1|>c} \tilde{F}_{[nt_1]}(x_1) dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^\alpha \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2) dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^\alpha \tilde{F}_{[nt_3]}(x_3) dx_3 \geq \kappa n^{-2\alpha-1},$$

où $\kappa > 0$ est une constante dépendante de c et des t_i . Comme $\alpha < -1/2$, nous obtenons donc, à t fixé, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left| a \left(\frac{x}{n} \right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j, t_j) \right|^2 dx = \infty.$$

□

Nous présentons deux types de résultats concernant la convergence des sommes partielles en dimension d quelconque. La première partie concerne des champs aléatoires construits à partir d'un filtre continu et non nul en $x = 0$. Nous venons de montrer que cette condition n'est pas suffisante pour obtenir la convergence souhaitée, nous supposons donc que le filtre est de plus borné ou qu'il appartient à une classe restreinte de filtres non-bornés et continus en l'origine. Les sommes partielles de champs aléatoires construits à partir de tels filtres suivront un théorème central limite comme dans le (i) du Théorème 7.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à des champs aléatoires dont les sommes partielles ne vérifient pas un théorème central limite. Ce sont des champs construits à partir de filtres non continus en $x = 0$. Ces derniers seront supposés homogènes ou de type produit tensoriel de telle sorte que le champ aléatoire résultant sera à longue mémoire non-isotrope.

3.3.1 Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre continu à l'origine

Nous supposons d'abord que le filtre est continu en $x = 0$ et qu'il est borné sur $[-\pi, \pi]^d$. Dans ce cas les sommes partielles du champ X construit selon (3.1.2) convergent vers la même limite que celles de ξ , en particulier vers le drap Brownien lorsque ξ est un bruit blanc fort.

Théorème 8. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**.

Soit $a \in L^2[-\pi, \pi]^d$, borné sur $[-\pi, \pi]^d$ et continu en 0 tel que $a(0) \neq 0$.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2), construit en filtrant ξ à travers a , alors

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H 1**.

Démonstration. Nous montrons la convergence en loi à t fixé, la convergence des lois finidimensionnelles s'en déduisant facilement. D'après le Théorème 6 nous devons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0. \quad (3.3.1)$$

Nous coupons le domaine d'intégration comme pour l'intégrale (3.2.3) dans la démonstration du Théorème 7 et nous utilisons les mêmes arguments jusqu'à l'étude de

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx.$$

Pour $t_j > 0$ fixé, $\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)$ est, à une constante près, une approximation forte de l'unité. D'après la Proposition 5 de l'Annexe 3.5, $\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)$ n'est plus qu'une approximation de l'unité au sens faible. Cependant, comme $|a(x) - a(0)|^2$ est continu en $x = 0$ et borné sur $[-\pi, \pi]^d$, le Théorème 13 nous assure à travers (3.5.3) que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx = 0.$$

□

Nous nous plaçons à présent dans le cas de champs obtenus à partir d'un filtre continu en 0 mais non nécessairement borné.

Théorème 9. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2).

Nous supposons que le filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ est de la forme

$$a(x_1, \dots, x_d) = g\left(\sum_{i=1}^d c_i x_i\right),$$

où les c_i sont des constantes réelles et où g est une fonction définie sur un ensemble compact de \mathbb{R} , de carré intégrable et continue en $x = 0$ avec $g(0) \neq 0$.

Alors,

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H 1**.

Démonstration. Nous devons montrer (3.2.3). En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 7 nous sommes amenés à étudier

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx = \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| g\left(\sum_{i=1}^d c_i x_i\right) - g(0) \right|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx.$$

Nous supposons sans perte de généralité que $c_1 \neq 0$ et nous effectuons le changement de variable $u = x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1} x_i$, les autres variables restant inchangées. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx &\leq \\ \int_{[-\tau, \tau]} |g(c_1 u) - g(0)|^2 \left(\int_{[-\pi, \pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]+1}\left(u - \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1} x_i\right) \prod_{j=2}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx_2 \dots dx_d \right) du, \end{aligned}$$

où $[-\tau, \tau]$ est un ensemble compact contenant le domaine d'intégration de u . Soit

$$K_n(u) = \int_{[-\pi, \pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]+1}\left(u - \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1} x_i\right) \prod_{j=2}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx_2 \dots dx_d,$$

nous devons montrer que lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{[-\tau, \tau]} |g(c_1 u) - g(0)|^2 K_n(u) du \longrightarrow 0. \quad (3.3.2)$$

Dans le cas particulier où pour tout i , $c_i = t_i = 1$, K_n est, à une constante multiplicative près, le produit de convolution $(d-1)^{\text{ème}}$ du noyau de Fejer F_n avec lui-même. D'après la Proposition 5 de la partie annexe 3.5, K_n est donc, à une constante près, une approximation de l'unité au sens fort sur $[-\tau, \tau]$.

Le Théorème 13 conclut alors la preuve puisque $|g(c_1 u) - g(0)|^2$ est intégrable et continu en $u = 0$.

Dans le cas général où les c_i (ou les t_i) ne sont pas tous égaux à 1, il est facile d'adapter le raisonnement précédent pour obtenir (3.3.2). \square

3.3.2 Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre singulier à l'origine

Nous supposons dans un premier temps que le champ aléatoire X est issu d'un filtre de type produit tensoriel. Cette situation est en fait très similaire au cas $d = 1$. Le produit tensoriel composant le filtre est supposé construit à partir de filtres suivant les hypothèses dans (i) ou dans (ii) du Théorème 7.

Théorème 10. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) où le filtre a admet la forme

$$a(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d a_j(x_j), \quad (3.3.3)$$

expression dans laquelle

- ou bien $a_j \in L^2([-\pi, \pi])$ est continu en 0 avec $a_j(0) \neq 0$
- ou bien $a_j(x)$ est équivalent en 0 à $\tilde{a}_j(x)$ où \tilde{a}_j est homogène de degré $\alpha_j \in]-1/2, 0[$ garantissant $a_j \in L^2([-\pi, \pi])$.

En notant \mathcal{J} l'ensemble des indices j tels que a_j est équivalent en 0 à une fonction homogène de degré α_j et en notant \mathcal{I} les autres indices,

$$\frac{1}{n^{(d/2 - \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \left(\prod_{j \in \mathcal{I}} a_j(0) \right) I \left(\prod_{j \in \mathcal{J}} \tilde{a}_j(x_j) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 19. Si ξ est un bruit blanc fort, I peut alors s'écrire comme une intégrale stochastique (voir la remarque 14). Dans ce cas et lorsque pour tout j , $\tilde{a}_j(x) = |x|^{\alpha_j}$ avec $-1/2 < \alpha_j < 0$, la limite des sommes partielles est le drap Brownien fractionnaire

$$\frac{1}{n^{(d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j |x_j|^{-\alpha_j}} dW_0(x),$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

Preuve du Théorème 10. La convergence des lois fini-dimensionnelles se déduit aisément de la convergence en loi à t fixé. Nous appliquons le Théorème 6 en montrant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| n^{(\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j)} \prod_{j=1}^d a_j \left(\frac{x_j}{n} \right) D_n(x_j, t_j) - \prod_{j \in \mathcal{I}} a_j(0) \prod_{j \in \mathcal{J}} \tilde{a}_j(x_j) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0.$$

Ce résultat est déjà montré en dimension $d = 1$ dans le Théorème 7 et il n'est pas difficile de l'étendre par récurrence pour tout d en s'appuyant sur la décomposition :

$$AB - CD = (A - C)(B - D) + (A - C)D + (B - D)C.$$

□

Le Théorème 11 ci-dessous concerne des champs à longue mémoire non-isotrope. Ils sont construits à partir d'un filtre singulier sur tout un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$.

Théorème 11. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) où a est de la forme :

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où les c_i sont des constantes réelles. Alors

(i) Si $d \leq 3$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} I \left(a(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right), \quad (3.3.4)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

(ii) Si $d \geq 4$ et si $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ alors la convergence (3.3.4) a encore lieu.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx = 0.$$

Nous découpons le domaine d'intégration de cette intégrale comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\ &= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\ & \quad + \int_{\cup_i \{|x_i| > n\pi\}} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \prod_{i=1}^d |D(x_i, t_i)|^2 dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale converge vers 0 ; pour la première, le changement de variables $x/n \rightarrow x$ conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx \\ &= n^{2\alpha+d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 dx. \quad (3.3.5) \end{aligned}$$

Définissons à présent l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_n = \left\{ x \in [-\pi, \pi]^d ; \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \geq n^\gamma \text{ où } \gamma < 1 - 2\alpha \right\}.$$

En notant $\overline{\mathcal{A}_n}$ le complémentaire de \mathcal{A}_n dans $[-\pi, \pi]^d$, nous découpons l'ensemble d'intégration de (3.3.5) selon \mathcal{A}_n et $\overline{\mathcal{A}_n}$. D'après le Lemme 12 de la section 3.4

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| \prod_j D_n(x_j, t_j) - \prod_j D(x_j, t_j) \right|^2 dx = O(n^{-1}),$$

donc

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \prod_j D_n(nx_j, t_j) - \prod_j D(nx_j, t_j) \right|^2 dx = O(n^{-d-1}). \quad (3.3.6)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} n^{2\alpha+d} \int_{\overline{\mathcal{A}_n}} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 dx \\ \leq n^{2\alpha+d+\gamma} \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 dx = O(n^{2\alpha-1+\gamma}). \end{aligned}$$

Comme $\gamma < 1 - 2\alpha$, ce terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il reste à étudier l'intégrale (3.3.5) sur \mathcal{A}_n . D'après (3.2.11)

$$\begin{aligned} n^{2\alpha+d} \int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i, t_i) \right|^2 dx \\ \leq O(n^{2\alpha+d-2}) \int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} dx. \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Après un changement de variables,

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} dx = \int_{-n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}}^{n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}} |u|^{2\alpha} du \int_{[-\pi, \pi]^{d-1}} dx_2 \dots dx_d = c n^{\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1)}.$$

Afin d'obtenir la convergence vers 0 du terme de droite dans (3.3.7), il suffit que

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} dx = o(n^{2-d-2\alpha}),$$

ce qui est satisfait lorsque

$$\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) - 2 + d + 2\alpha < 0. \quad (3.3.8)$$

Si $d = 3$,

$$\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) + 2\alpha + 1 < 0 \Leftrightarrow \gamma > -2\alpha$$

et (3.3.4) est prouvé en choisissant γ dans $] -2\alpha; 1-2\alpha[$.

Si $d \geq 4$, la condition (3.3.8) est vérifiée si

$$\gamma > -2\alpha \frac{d+2\alpha-2}{2\alpha+1},$$

ce qui est possible dès que $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ compte tenu de la condition initiale $\gamma < 1-2\alpha$. \square

3.4 Démonstration du théorème 6

Nous commençons par un lemme établissant la mesurabilité du champ B défini dans l'hypothèse **H 1**.

Lemme 11. *Sous H 1, le champ aléatoire B est mesurable et séparable.*

La démonstration de ce lemme est reporté à la section 3.4.1.

La preuve du théorème 6 s'inspire de celle de Lang et Soulier (2000) en dimension $d = 1$.

Définissons le champ B_n sur \mathbb{R}^d par :

$$B_n(t_1, \dots, t_d) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_n(x_1, \dots, x_d). \quad (3.4.1)$$

L'intégrale est bien définie car l'intégrand, étant proportionnel à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de $\mathbf{1}_{[0,t_1] \times \dots \times [0,t_d]}$, est de carré intégrable.

L'idée de la démonstration est de définir l'intégrale stochastique par rapport à B_n dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puis de transformer son expression afin de pouvoir utiliser des arguments de convergence et faire apparaître le champ B . Ceci nous conduira à la définition de l'application linéaire I .

La mesure de contrôle de W_n est $f_n(x) = f_\xi(n^{-1}x)$, $x \in [-n\pi, n\pi]^d$; elle est donc, comme f_ξ , bornée par M .

Pour $t_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in \mathbb{R}$, on rappelle que $D(t_j, x_j) = \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}$ si $x_j \neq 0$ et $D(t_j, 0) = t_j$. On a

$$\begin{aligned} E(B_n(t_1, \dots, t_d)^2) &= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d |D(t_j, x_j)|^2 f_n(x) dx \\ &\leq M \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} |D(t_j, x_j)|^2 dx_j \\ &\leq M \prod_{j=1}^d 4|t_j| \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \leq c \prod_{j=1}^d |t_j|, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

où c est une constante strictement positive.

Montrons dans un premier temps la convergence de B_n vers B au sens des répartitions finies. On peut réécrire S_n^ξ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
S_n^\xi(t) &= n^{-d/2} \sum_{k=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle k; x \rangle} dW(x) \\
&= n^{-d} \sum_{k=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} e^{i\langle k; x/n \rangle} dW_n(x) \\
&= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d n^{-1} \left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j]} e^{ik_j x_j/n} \right) dW_n(x) \\
&= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) dW_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E \left(B_n(t_1, \dots, t_d) - S_n^\xi(t_1, \dots, t_d) \right)^2 = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) \right|^2 f_n(x) dx. \quad (3.4.3)$$

La suite de fonctions f_n étant uniformément bornée par M , la convergence vers 0 de (3.4.3) découle du lemme 12 ci-dessous. Cette convergence et l'hypothèse **H1** impliquent la convergence de B_n vers B au sens des répartitions finies.

Lemme 12. *Nous avons les taux de convergence suivants :*

$$\sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^d} \left| \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 \leq O(n^{-2}) \quad (3.4.4)$$

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \leq O(n^{-1}) \quad (3.4.5)$$

Démonstration du Lemme 12. En dimension $d = 1$, à t fixé et pour tout $|x| < n\pi$:

$$\begin{aligned}
|D_n(x, t) - D(x, t)| &= \left| \frac{e^{ix([tn]+1)/n} - 1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{e^{itx} - 1}{ix} \right| \\
&\leq \left| (e^{ix([tn]+1)/n} - 1) \left(\frac{1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{1}{ix} \right) \right| + \left| \frac{e^{ix([tn]+1)/n} - e^{itx}}{ix} \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{1}{ix} \right| + \left| \frac{e^{ix([tn]+1)/n} - e^{itx}}{ix} \right|.
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}} - 1)} - \frac{1}{ix} \right|^2 &= \frac{|ix - n(e^{i\frac{x}{n}} - 1)|^2}{4n^2x^2 \sin^2(\frac{x}{2n})} \\ &= \frac{(x - n \sin(\frac{x}{n}))^2 + n^2 \sin^4(\frac{x}{2n})}{4n^2x^2 \sin^2(\frac{x}{2n})} \\ &= \frac{\sin^2(\frac{x}{2n})}{x^2} + \frac{(\frac{x}{n} - \sin(\frac{x}{n}))^2}{4x^2 \sin^2(\frac{x}{2n})}. \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est inférieur à $1/(4n^2)$ et le second est une fonction paire de $u = x/n$ qui appartient à $[-\pi, \pi]$; de plus,

$$\frac{(u - \sin(u))^2}{4n^2u^2 \sin^2(\frac{u}{2})} \leq \frac{1}{n^2} \frac{1 \wedge u^4}{4 \sin^2(\frac{u}{2})} \leq c \frac{1}{n^2} \quad \forall u \in [0, \pi].$$

Ainsi

$$\left| \frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}} - 1)} - \frac{1}{ix} \right|^2 \leq c \frac{1}{n^2}. \quad (3.4.6)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ix(\frac{[tn]+1}{n})} - e^{itx}}{ix} \right|^2 &= \frac{|e^{ix(\frac{[tn]+1}{n}-t)} - 1|^2}{x^2} \\ &= \frac{4}{x^2} \sin^2\left(\frac{x}{2} \left(\frac{[tn]+1}{n} - t\right)\right) \\ &\leq \left|\frac{[tn]+1}{n} - t\right|^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Ainsi par (3.4.7) et (3.4.6)

$$\sup_{x \in [-n\pi, n\pi]} |D_n(x, t) - D(x, t)|^2 \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (3.4.8)$$

Par ailleurs, f_n étant borné,

$$\int_{-n\pi}^{n\pi} |D_n(t, x) - D(t, x)|^2 f_n(x) dx \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \int_{-n\pi}^{n\pi} f_n(x) dx \leq O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.4.9)$$

Les inégalités (3.4.8) et (3.4.9) prouvent le Lemme 12 pour $d = 1$. Maintenant, lorsque $d = 2$,

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D_n(x_1, t_1) D_n(x_2, t_2) - D(x_1, t_1) D(x_2, t_2)|^2 \\ &\leq 3 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D_n(x_1, t_1) - D(x_1, t_1)|^2 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D_n(x_2, t_2) - D(x_2, t_2)|^2 \\ &\quad + 3 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D_n(x_1, t_1) - D(x_1, t_1)|^2 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D(x_2, t_2)|^2 \\ &\quad + 3 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D_n(x_2, t_2) - D(x_2, t_2)|^2 \sup_{x \in [-n\pi, n\pi]^2} |D(x_1, t_1)|^2. \end{aligned}$$

A t fixé, $D(., t)$ est borné et la première inégalité du Lemme 12 découle de (3.4.8). Il est aisé d'étendre de la même manière le résultat au cas $d > 2$.

La preuve de (3.4.5) est similaire : il suffit de changer la norme sup par la norme L^1 . \square

Revenons à la démonstration du théorème 6.

Pour toute fonction Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on note $\hat{\Phi}$ sa transformée de Fourier définie de telle sorte que la transformation $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$ soit une isométrie. Considérons l'application linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega)$ qui à Φ associe $(2\pi)^{d/2} \int \hat{\Phi} dW_n$.

En appliquant cette dernière à $\Phi = \mathbf{1}_{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_d]}$ et en interprétant $B_n(t_1, \dots, t_d)$ comme $B_n([0, t_1] \times \dots \times [0, t_d])$, on remarque que (3.4.1) permet d'écrire l'application linéaire que nous venons de définir comme une intégrale stochastique par rapport à B_n . Nous posons donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t) dB_n(t) = (2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \hat{\Phi}(x) dW_n(x), \quad (3.4.10)$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$.

Nous nous intéressons à la convergence en loi de cette intégrale.

On se restreint dans un premier temps au cas où Φ est différentiable à support compact pour réécrire $\hat{\Phi}$. Dans l'expression

$$\hat{\Phi}(x_1, \dots, x_d) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t_1, \dots, t_d) e^{it_1 x_1} \dots e^{it_d x_d} dt_1 \dots dt_d,$$

on effectue d intégrations par parties en dérivant Φ et en intégrant le reste en t_1 , puis en t_2 , etc. jusqu'à t_d (à chaque étape on change l'ordre d'intégration en utilisant Fubini). La première étape est la suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x_1, \dots, x_d) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left[\Phi(t_1, \dots, t_d) \frac{e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1} \right]_{t_1 \in \mathbb{R}} dt_2 \dots dt_d \\ &\quad - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1} \left(\frac{e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1} + (-1)^{d-(d-1)} \frac{e^{i(t_2 x_2 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1} \right) dt_1, \dots, t_d, \end{aligned}$$

le premier terme est nul car Φ est à support compact et l'on a

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x_1, \dots, x_d) &= -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1} \left(\frac{e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1} - \frac{e^{i(t_2 x_2 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1} \right) dt \\ &= -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1} \frac{e^{it_1 x_1} - 1}{ix_1} e^{i(t_2 x_2 + \dots + t_d x_d)} dt. \end{aligned}$$

L'intégration par parties suivante nous donne :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\frac{e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1 ix_2} - \frac{e^{i(t_2 x_2 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1 ix_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i(t_3 x_3 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1 ix_2} - \frac{e^{it_1 x_1} e^{i(t_3 x_3 + \dots + t_d x_d)}}{ix_1 ix_2} \right) dt \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{e^{it_1 x_1} - 1}{ix_1} \frac{e^{it_2 x_2} - 1}{ix_2} e^{i(t_3 x_3 + \dots + t_d x_d)} dt. \end{aligned}$$

De même à l'étape p , on choisit une primitive en t_p avec 2^{p-1} termes constants par rapport à t_p . Ces termes constants sont tous les produits possibles entre $\frac{e^{it_{p+1}x_{p+1}+\dots+it_dx_d}}{ix_p}$ d'une part et $1, e^{it_1x_1}, \dots, e^{it_{p-1}x_{p-1}}$ d'autre part, affectés du signe $(-1)^{d-q}$ si q est le nombre de t_i distincts présents dans le produit. Tous ces termes contiennent $e^{it_{p+1}x_{p+1}}$ et on peut passer à l'intégration par parties suivante concernant t_{p+1} qui factorisera $1/ix_{p+1}$. Finalement à la dernière étape, tous les termes intégrés représentent une somme de $(1 + \sum_{p=1}^d 2^{p-1})$ termes, soit 2^d termes qui correspondent au développement de $\prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}$.

Ainsi dans le cas où Φ est différentiable à support compact, on a

$$\hat{\Phi}(x_1, \dots, x_d) = (-1)^d (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j} - 1}{ix_j} dt_1 \dots dt_d.$$

En utilisant le théorème de Fubini stochastique, qui se démontre dans notre cas comme dans le lemme 3 de Lang et Soulier (2000), on peut réécrire l'intégrale (3.4.10) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t) dB_n(t) &= (2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \hat{\Phi}(x) dW_n(x) \\ &= (2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left((-1)^d (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j} - 1}{ix_j} dt \right) dW_n(x) \\ &= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} \left(\int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j} - 1}{ix_j} dW_n(x) \right) dt \\ &= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} B_n(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Nous utilisons à présent un lemme qui généralise le théorème de Grinblatt (1976).

Lemme 13. *Soit les processus mesurables $(Y_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ et $Y(t)$ définis pour $t \in K$, K étant un compact de \mathbb{R}^d . Supposons que la suite $(Y_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens des répartitions finies vers $Y(t)$. Si $E|Y_n(t)|$ est uniformément borné par rapport à $n \in \mathbb{N}$ et $t \in K$, et si $E|Y_n(t)| \rightarrow E|Y(t)|$ pour tout $t \in K$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors pour toute fonctionnelle H continue sur $L^1(K)$, $H(Y_n)$ converge en loi vers $H(Y)$.*

Sa démonstration est donnée dans la partie 3.4.2.

D'après (3.4.2), $E(B_n^2(t))$ est uniformément borné en n et t , donc $E|B_n(t)|$ est uniformément bornée ; en outre la suite B_n est uniformément intégrable. La convergence en loi de $B_n(t)$ vers $B(t)$ donnée par le lemme 12 jointe à l'uniforme intégrabilité de B_n nous donne la convergence de $E|B_n(t)|$ vers $E|B(t)|$. D'après le lemme 11, B est mesurable et on peut appliquer le lemme 13 avec $Y_n = B_n$ et K un compact de \mathbb{R}^d à la fonctionnelle

$$H(g) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t_1, \dots, t_d)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} g(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d,$$

où Φ est différentiable à support compact. Cette fonctionnelle H est bien continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi, pour toute Φ différentiable à support compact, $H(B_n)$ converge en loi vers $H(B)$. Donc d'après (3.4.11), $\int \Phi dB_n$ converge en loi vers $(-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} B(t) dt$. Notons I_B l'application linéaire :

$$I_B(\Phi) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} B(t) dt.$$

L'ensemble des applications différentiables à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'application linéaire $I_B(\Phi)$ est bornée puisque

$$\begin{aligned} E(I_B(\Phi))^2 &= E\left(\int_{\mathbb{R}^d} (-1)^d \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} B(t) dt\right)^2 \\ &\leq \underline{\lim} E\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_d} B_n(t) dt\right)^2 \\ &\leq \underline{\lim} E\left((2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \hat{\Phi} dW_n\right)^2 \\ &\leq (2\pi)^d M \|\hat{\Phi}\|_2^2 = (2\pi)^d M \|\Phi\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

En vertu du théorème de Hahn-Banach, nous pouvons donc étendre I_B à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et (3.4.12) reste valide pour toute fonction Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$E(I_B(\Phi))^2 \leq (2\pi)^d M \|\Phi\|_2^2. \quad (3.4.13)$$

Nous définissons à présent l'application I du théorème par

$$I(\Psi) = I_B(\check{\Psi}), \quad \forall \Psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

où $\check{\Psi}$ est la transformée de Fourier inverse de Ψ .

La propriété (ii) du théorème provient de ce que

$$E(I(\Psi))^2 = E(I_B(\check{\Psi}))^2 \leq (2\pi)^d M \|\check{\Psi}\|_2^2 = (2\pi)^d M \|\Psi\|_2^2.$$

On s'intéresse maintenant au résultat de convergence (i) du théorème. On s'appuie sur le théorème 4.2 de Billingsley (1968) qui affirme que lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées (toutes les variables aléatoires qui interviennent étant à valeurs dans le même espace séparable métrisé par ρ) :

- (i) pour tout k , $X_{k,n}$ converge en loi vers X_k
- (ii) X_k converge en loi vers X
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P\{\rho(X_{k,n}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0$,

alors Y_n converge en loi vers X .

Soit une fonction Ψ quelconque de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère une suite de fonctions Ψ_k tel que $\hat{\Psi}_k$ soit différentiable à support compact, convergeant dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Ψ . On a alors :

- (i) $\int \Psi_k dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi_k)$ d'après le lemme 13,
- (ii) $E(I(\Psi_k) - I(\Psi))^2 \leq (2\pi)^d M \|\Psi_k - \Psi\|_2^2 \longrightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$
- (iii) $E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 \leq (2\pi)^d M \|\Psi_k - \Psi\|_2^2$, donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 = 0.$$

En prenant $X_{k,n} = \int \Psi_k dW_n$, $X_k = I(\Psi_k)$, $X = I(\Psi)$ et $Y_n = \int \Psi dW_n$, toutes à valeurs réelles, on remarque que les trois conditions de Billingsley sont respectivement impliquées par les trois points précédents, et donc pour toute fonction Ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\int \Psi dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi)$.

Si l'on considère enfin une suite de fonctions Ψ_n qui converge vers Ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on obtient directement que $\int \Psi_n dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi)$ et la propriété (i) du Théorème 6 est montrée.

En particulier pour $\check{\Psi} = \mathbf{I}_{[0,t_1] \times \dots \times [0,t_d]}$

$$I\left(\prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t) = B(t),$$

qui est la propriété (iii) du Théorème 6.

Montrons enfin (iv) concernant le cas où ξ est supposé être un bruit blanc fort dont nous imposons, pour simplifier, la variance égale à 1. Dans ce cas $B(t)$ est le drap Brownien de fonction de covariance $\sigma(s, t) = \prod_{j=1}^d t_j \wedge s_j$. D'après le (ii) du théorème, la norme de l'application I est inférieure à 1 car $M = (2\pi)^{-d}$; par ailleurs cette valeur est atteinte au point particulier considéré en (iii). Ainsi I est une isométrie. Soit W_0 la mesure définie pour tout ensemble A par $W_0(A) = I(\mathbf{I}_A)$. C'est une mesure orthogonale car I , en tant qu'isométrie, conserve le produit scalaire. De plus

$$0 \leq E(W_0(A)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(W_n(A)) = 0.$$

Donc I peut dans ce cas être considérée comme une intégrale stochastique par rapport à W_0 :

$$\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad I(\Phi) = \int \Phi dW_0.$$

Dans ce cas, nous remarquons que le (iii) est en fait la représentation harmonisable du drap brownien et nous en déduisons que W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

3.4.1 Démonstration du lemme 11

Si le champ $(B(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ est continu en probabilité presque partout, c'est à dire si pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|B(s) - B(t)| > \varepsilon) = 0, \tag{3.4.14}$$

alors il existe une version mesurable et séparable de $B(t)$ (cf par exemple Gikhman et Skorokhod (1965)).

D'après **H1** la distribution jointe de $(S_n^\xi(s), S_n^\xi(t))$ converge vers celle de $(B(s), B(t))$. Ainsi, comme l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x| > \varepsilon\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 ,

$$P(|B(s) - B(t)| > \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t)| > \varepsilon). \quad (3.4.15)$$

Evaluons $E(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2$.

$$E(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2 = E \left(n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[ns_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[ns_d]} \xi_k - n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \xi_k \right)^2.$$

On décompose les ensembles de sommation de la façon suivante

$$\prod_{j=1}^d \{0, \dots, [ns_j]\} = \prod_{j=1}^d \{0, \dots, [nt_j] \wedge [ns_j]\} \cup \{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1, \dots, [ns_j]\},$$

en posant $\{[ns_j] + 1, [ns_j]\} = \emptyset$. En développant, cela donne

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^d \{0, \dots, [ns_j]\} &= \bigcup_{l=1}^{d-1} \bigcup_{C_d^l} \prod_{j \in C_d^l} \{0, \dots, [nt_j] \wedge [ns_j]\} \prod_{j \in \overline{C_d^l}} \{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1, \dots, [ns_j]\} \\ &\quad \bigcup \prod_{j=1}^d \{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1, \dots, [ns_j]\} \bigcup \prod_{j=1}^d \{0, \dots, [nt_j] \wedge [ns_j]\} \end{aligned}$$

où C_d^l parcourt l'ensemble des l -uplets de $\{1, \dots, d\}$ et où $\overline{C_d^l}$ est le complémentaire de C_d^l dans $\{1, \dots, d\}$.

On peut à présent réécrire $S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t)$ en utilisant cette décomposition et en remarquant que les termes associés à la dernière union ci-dessus s'annulent. Nous convenons dans les sommes qui suivent que lorsque $l = 0$, la sommation se fait uniquement sur $j' \in \overline{C_d^0} = \{1, \dots, d\}$.

$$S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t) = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C_d^l}}} \left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]} \xi_k - \sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]} \xi_k \right).$$

En utilisant la convexité de $x \mapsto x^2$, il vient

$$\begin{aligned} E (S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2 &\leq 2(2^d - 1) \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} E \left(n^{-d/2} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C}_d^l}} \sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]} \xi_k \right)^2 \\ &\quad + 2(2^d - 1) \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} E \left(n^{-d/2} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C}_d^l}} \sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]} \xi_k \right)^2. \end{aligned}$$

La stationnarité de ξ nous permet de translater les indices dans les sommes

$$\begin{aligned} E (S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2 &\leq 2(2^d - 1) \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} E \left(n^{-d/2} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C}_d^l}} \sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=0}^{[ns_{j'}] - [nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}] - 1} \xi_k \right)^2 \\ &\quad + 2(2^d - 1) \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} E \left(n^{-d/2} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C}_d^l}} \sum_{k_j=0}^{[nt_j] \wedge [ns_j]} \sum_{k_{j'}=0}^{[nt_{j'}] - [nt_{j'}] \wedge [ns_{j'}] - 1} \xi_k \right)^2. \end{aligned}$$

Maintenant il suffit de remarquer que pour tous p_1, \dots, p_d appartenant à $\{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} E \left(n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} \xi_k \right)^2 &= n^{-d} \sum_{k_1, k'_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d, k'_d=0}^{p_d} \int_{[-\pi, \pi]^d} f_\xi(\lambda) e^{i \langle k' - k, \lambda \rangle} d\lambda \\ &\leq M n^{-d} \sum_{k_1, k'_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d, k'_d=0}^{p_d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \langle k' - k, \lambda \rangle} d\lambda \\ &\leq M \prod_{j=1}^d \frac{p_j + 1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E (S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2 &\leq c \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} \left(\prod_{j \in C_d^l} \frac{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1}{n} \right) \left(\prod_{j \in \overline{C}_d^l} \frac{[ns_j] - [nt_j] \wedge [ns_j]}{n} \right) \\ &\quad + c \sum_{l=1}^{d-1} \sum_{C_d^l} \left(\prod_{j \in C_d^l} \frac{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1}{n} \right) \left(\prod_{j \in \overline{C}_d^l} \frac{[nt_j] - [nt_j] \wedge [ns_j]}{n} \right), \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive, et finalement

$$E \left(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t) \right)^2 \leq c \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} \prod_{j \in C_d^l} (t_j \wedge s_j + n^{-1}) \left(\prod_{j \in \overline{C_d^l}} (s_j - t_j \wedge s_j + n^{-1}) + \prod_{j \in \overline{C_d^l}} (t_j - t_j \wedge s_j + n^{-1}) \right).$$

Cette dernière inégalité montre que

$$\lim_{s \rightarrow t} \liminf_{n \rightarrow \infty} E \left(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t) \right)^2 = 0 \quad (3.4.16)$$

car $\overline{C_d^l}$ n'est jamais vide lorsque $l \leq d-1$.

Il suffit enfin, pour obtenir (3.4.14) et conclure la démonstration, d'appliquer l'inégalité de Tchebychev dans (3.4.15) et d'utiliser (3.4.16).

3.4.2 Démonstration du lemme 13

On reprend la démonstration du théorème de Grinblatt (1976) en la détaillant et en l'adaptant à notre cadre multidimensionnel.

On suppose, sans nuire à la généralité, que le compact K de l'énoncé est $[0, 1]^d$.

Notons μ_n la mesure induite par $Y_n(t)$ sur $L^1([0, 1]^d)$ et μ celle induite par $Y(t)$. Nous devons montrer la convergence faible de μ_n vers μ . Il suffit de montrer que la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte, la convergence des lois fini-dimensionnelles nous donnant alors le résultat. Pour cela on utilise le théorème de Prohorov donné par exemple dans Billingsley (1968) :

Théorème 12 (Prohorov). *Soit X un espace mesuré et \mathcal{B} sa tribu borélienne. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que $\sup_n \mu_n(X \setminus K) < \varepsilon$, alors la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte.*

Nous utilisons par ailleurs la caractérisation d'un compact dans $L^p([0, 1]^d)$ due à Fréchet et Kolmogorov (voir Brezis (1983)).

Lemme 14 (Fréchet et Kolmogorov). *Un ensemble $K \in L^p([0, 1]^d)$ est compact si et seulement si :*

1. $\sup_{x \in K} \|x\|_p < \infty$
2. $\sup_{x \in K} \lim_{|t| \rightarrow 0} \int_{[0, 1]^d} |x(t+s) - x(s)|^p ds = 0$. (On considère la somme $t+s$ "modulo 1" pour rester dans $[0, 1]^d$).

Notons (Ω, P) l'espace probabilisé sous-jacent et μ_o la mesure produit $\lambda_d \times P$ où λ_d est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . On note $Y(t, \omega)$ le processus Y où $\omega \in \Omega$ et $t \in [0, 1]^d$. Nous commençons la démonstration en montrant le lemme suivant :

Lemme 15. *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de cubes $(B_i)_{i \in I_\varepsilon}$ mutuellement disjoints, de volume V_i , vérifiant $\cup_{i \in I_\varepsilon} B_i \subset [0, 1]^d$ et $\sum_{i \in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2$, tels que, pour tout i dans I_ε ,*

$$\lambda_d(T_\varepsilon^i) > (1 - \varepsilon^2)V_i,$$

où $T_\varepsilon^i = \{t \in B_i : E|Y(b_i) - Y(t)| < \varepsilon^2\}$ et $b_i \in B_i$.

Preuve du lemme 15. D'après la mesurabilité de $Y(t, \omega)$, on peut l'approcher par des fonctions en escaliers, c'est à dire que pour $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles mutuellement disjoints $\hat{\Omega}_1, \dots, \hat{\Omega}_k$, des cubes mutuellement disjoints B_1, \dots, B_k , et une fonction $\hat{Y}(t, \omega)$ tels que :

1. $\Omega = \cup_{i=1}^k \hat{\Omega}_i$ et $[0, 1]^d = \cup_{i=1}^k B_i$
2. La fonction $\hat{Y}(t, \omega)$ est constante sur les ensembles $B_j \times \hat{\Omega}_i$
- 3.

$$\int |Y(t, \omega) - \hat{Y}(t, \omega)| d\mu_o(t, \omega) < \frac{\varepsilon^6}{2}. \quad (3.4.17)$$

Notons $\hat{Y}_j = \hat{Y}(t)$ lorsque $t \in B_j$. On choisit (b_1, \dots, b_k) des éléments respectifs de B_1, \dots, B_k tels que :

$$\sum_{j=1}^k V_j E|Y(b_j) - \hat{Y}_j| < \frac{\varepsilon^6}{2}, \quad (3.4.18)$$

où V_j représente le volume de B_j .

Montrons dans un premier temps que ce choix est possible. Supposons que quel que soit $(x_1, \dots, x_k) \in B_1 \times \dots \times B_k$, $\sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j) - \hat{Y}_j| \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$. On aurait alors

$$\int_{B_1 \times \dots \times B_k} \sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j) - \hat{Y}_j| dx_1 \dots dx_k \geq \int_{B_1 \times \dots \times B_k} \frac{\varepsilon^6}{2} dx_1 \dots dx_k,$$

et donc

$$\prod_{i=1}^k V_i \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x_j) - \hat{Y}_j| dx_j \geq \frac{\varepsilon^6}{2} \prod_{i=1}^k V_i.$$

On aboutirait à $\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x) - \hat{Y}_j| dx \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$ ce qui contredirait (3.4.17). On peut donc choisir (b_1, \dots, b_k) dans $B_1 \times \dots \times B_k$ qui vérifient (3.4.18).

Soit maintenant

$$I_\varepsilon = \left\{ i : \frac{\int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)| dt}{V_i} < \varepsilon^4 \right\}.$$

On a d'une part

$$\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j) - Y(t)| dt \leq \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j) - \hat{Y}_j| dt + \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|\hat{Y}_j - Y(t)| dt < \varepsilon^6$$

d'après le choix de b_1, \dots, b_k et la propriété (3.4.17) ; d'autre part

$$\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j) - Y(t)| dt \geq \sum_{i \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)| dt \geq \varepsilon^4 \sum_{i \in \bar{I}_\varepsilon} V_i,$$

d'après la définition de \bar{I}_ε , le complémentaire de I_ε dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Si $\sum_{i \in \bar{I}_\varepsilon} V_i \geq \varepsilon^2$, on aboutit à une contradiction. Donc

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2.$$

On considère à présent, pour $i \in I_\varepsilon$, l'ensemble T_ε^i du lemme 15. En appliquant l'inégalité de Markov et le fait que $i \in I_\varepsilon$, on obtient

$$\frac{\lambda_d(T_\varepsilon^i)}{V_i} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 V_i} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)| dt > 1 - \varepsilon^2.$$

Ceci achève la preuve du lemme 15. \square

Nous savons que, pour tout $t \in [0, 1]^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E|Y_n(t)| = E|Y(t)|$. En conservant les notations du lemme précédent, on a donc pour tout $t \in [0, 1]^d$

$$\Phi_n^i(t) := E|Y_n(b_i) - Y_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi^i(t) := E|Y(b_i) - Y(t)|. \quad (3.4.19)$$

Nous allons maintenant contrôler uniformément cette dernière convergence sur T_ε^i . Pour $\varepsilon > 0$ et $i \in I$, on suppose que $t \in T_\varepsilon^i$. La convergence ponctuelle (3.4.19) implique la convergence en mesure, nous pouvons donc écrire :

$$\forall \eta > 0 \exists N \forall n \geq N \lambda_d \{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit $t \in T_\varepsilon^i$, $\Phi^i(t) < \varepsilon^2$, donc

$$|\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \Rightarrow \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2.$$

En posant $S_{\varepsilon,n}^i = \{\Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2\}$, on a donc

$$\forall \eta > 0 \exists N \forall n \geq N \lambda_d(S_{\varepsilon,n}^i) \geq \lambda_d \{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit maintenant

$$S_{\varepsilon,N}^i = \bigcap_{n \geq N} S_{\varepsilon,n}^i.$$

Quel que soit $\eta > 0$, il existe un $N > 0$ tel que

$$S_{\varepsilon,N}^i = \{t \in T_\varepsilon^i : \forall n > N, \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2\} \text{ et } \lambda_d(S_{\varepsilon,N}^i) > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, choisissons à présent $\eta = \varepsilon^2 V_i$, nous obtenons que quelque soit $i \in I_\varepsilon$, il existe un $N > 0$ et un ensemble $S_\varepsilon^i \subset T_\varepsilon^i$ tel que

1. $\forall t \in S_\varepsilon^i, \forall n > N \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2$
2. $\lambda_d(S_\varepsilon^i) > (1 - 2\varepsilon^2)V_i$.

Nous voulons appliquer le Théorème de Prohorov ; il nous faut donc contrôler $\sup_n \mu_n(K)$ où K est un compact de $L^1([0, 1]^d)$. Ce compact sera directement construit à partir des ensembles suivants :

$$K_{\varepsilon, \delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0, 1]^d) : \sup_{|\tau| < \delta} \int_{[0, 1]^d} |x(t + \tau) - x(t)| dt < 4\varepsilon \right\}.$$

On a

$$\mu_n(K_{\varepsilon, \delta}) = P \left(\sup_{|\tau| < \delta} \int_{[0, 1]^d} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt < 4\varepsilon \right).$$

Nous allons donc à présent contrôler cette probabilité en construisant un évènement Ω_n approprié.

Rappelons que $E|Y_n(t)|$ est par hypothèse uniformément borné en n et en t . En notant A cette borne uniforme et $\overline{S_\varepsilon^i}$ le complémentaire de S_ε^i dans B_i , on a, pour $n > N$,

$$\begin{aligned} E \int_{B_i} |Y_n(b_i) - Y_n(t)| dt &= \int_{S_\varepsilon^i} \Phi_n^i(t) dt + \int_{\overline{S_\varepsilon^i}} \Phi_n^i(t) dt \\ &< 2\varepsilon^2 \lambda_d(S_\varepsilon^i) + 2A \lambda_d(\overline{S_\varepsilon^i}) \\ &< 2\varepsilon^2 V_i + 4A\varepsilon^2 V_i \\ &< 4\varepsilon^2 V_i (1 + A), \end{aligned}$$

et donc

$$E \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i} |Y_n(b_i) - Y_n(t)| dt < 4\varepsilon^2 (1 + A).$$

Pour $n > N$ on considère à présent l'ensemble

$$\Omega_n^{(1)} = \{\omega : \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i} |Y_n(b_i, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt < \varepsilon\}.$$

D'après l'inégalité de Markov, $P(\Omega_n^{(1)}) > 1 - \frac{4\varepsilon^2(1+A)}{\varepsilon} = 1 - 4\varepsilon(1 + A)$.

Soit maintenant $\delta > 0$. Pour chaque $i \in I_\varepsilon$, on considère le cube $B_i^{(-2\delta)}$ de même centre que B_i et de rayon $R_i - 2\delta$ si R_i est le rayon de B_i . On note son volume $V_i^{(-2\delta)}$. Soit l'ensemble $Q = [0, 1]^d - \cup_{i \in I_\varepsilon} B_i^{(-2\delta)}$. On a

$$\lambda_d(Q) = 1 - \sum_{i \in I_\varepsilon} \lambda(B_i^{(-2\delta)}) = 1 - \sum_{i \in I_\varepsilon} V_i^{(-2\delta)}.$$

On sait que $\sum_{i \in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2$, on choisit alors δ assez petit pour que $\lambda_d(Q) < 2\varepsilon^2$. Ainsi, $E \int_Q |Y_n(t)| dt < 2\varepsilon^2 A$.

On considère l'ensemble $\Omega_n^{(2)} = \{\omega : \int_Q |Y_n(t, \omega)| dt < \varepsilon\}$. D'après l'inégalité de Markov, $P(\Omega_n^{(2)}) > 1 - 2\varepsilon A$.

Soit maintenant $\Omega_n = \Omega_n^{(1)} \cap \Omega_n^{(2)}$,

$$P(\Omega_n) > 1 - 4\varepsilon(1 + A) - 2\varepsilon A.$$

Considérons $Q' = [0, 1]^d - \cup_{i \in I_\varepsilon} B_i^{(-\delta)}$. L'implication $Q' \subset Q$ est évidente. Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$, alors

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt \\ = \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(b_i, \omega) + Y_n(b_i, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt \\ + \int_{Q'} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt \\ \leq \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(b_i, \omega)| dt + \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t, \omega) - Y_n(b_i, \omega)| dt \\ + \int_{Q'} |Y_n(t + \tau, \omega)| dt + \int_{Q'} |Y_n(t, \omega)| dt. \end{aligned}$$

Dans les intégrales du premier et du troisième terme de l'expression ci-dessus, on applique le changement de variable $u = t + \tau$. Notons c_i le centre de B_i . Si $t \in B_i^{(-\delta)}$, $|t - c_i| \leq R_i - \delta$; sachant que $|\tau| < \delta$, on a alors $|u - c_i| \leq R_i$ et donc $u \in B_i$. Si $t \in Q'$, on a $\forall i \in I_\varepsilon$, $|t - c_i| > R_i - \delta$, donc $|u - c_i| > |t - c_i| - |\tau| > R_i - 2\delta$ et $u \in Q$. En utilisant dans les termes restants le fait que $B_i^{(-\delta)} \subset B_i$ et que $Q' \subset Q$, on obtient, si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt &\leq \sum_{i \in I} 2 \int_{B_i} |Y_n(b_i, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt + 2 \int_Q |Y_n(t, \omega)| dt \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

On peut revenir maintenant à l'ensemble

$$K_{\varepsilon, \delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0, 1]^d) : \sup_{|\tau| < \delta} \int_{[0,1]^d} |x(t + \tau) - x(t)| dt < 4\varepsilon \right\}.$$

Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$,

$$\int_{[0,1]^d} |Y_n(t + \tau, \omega) - Y_n(t, \omega)| dt < 4\varepsilon,$$

donc pour $n \geq N$,

$$\mu_n(K_{\varepsilon, \delta}) \geq P(\Omega_n) > 1 - (4 + 2A)\varepsilon. \quad (3.4.20)$$

Pour tout n fixé, $n < N$, on peut appliquer la même idée que dans le lemme 15. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_{1,n}, \dots, B_{k,n}$ mutuellement disjoints tels que $\cup_{i=1}^k B_{i,n} = [0, 1]^d$ et

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}} E|Y_n(t) - \hat{Y}_{i,n}| dt < \varepsilon^2, \quad (3.4.21)$$

où $\hat{Y}_{i,n} = \hat{Y}_n(t)$ pour $t \in B_{i,n}$. On considère alors $Q_n = [0, 1]^d - \cup_{i=1}^k B_{i,n}^{(-\delta_n)}$. On peut choisir δ_n tel que $\lambda_d(Q_n) < \varepsilon^2$ et alors

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} E|Y_n(t + \tau) - Y_n(t)| dt = \\ \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t + \tau) - Y_n(t)| dt + \int_{Q_n} E|Y_n(t + \tau) - Y_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Le second terme est majoré par $2\varepsilon^2 A$; on décompose le premier de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t + \tau) - Y_n(t)| dt \\ \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t + \tau) - \hat{Y}_n(t + \tau)| dt + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t + \tau) - \hat{Y}_n(t)| dt \\ + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t) - Y_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Si $|\tau| < \delta_n$, le premier et le dernier terme sont majorés par ε^2 d'après (3.4.21) et le terme du milieu est nul. Ainsi, $\forall n < N$, d'après l'inégalité de Markov, $\mu_n(K_{\varepsilon, \delta_n}) > 1 - c\varepsilon$, où c est une constante strictement positive qui pourra varier de ligne à ligne dans la suite.

Il suffit à présent de choisir pour chaque $\varepsilon > 0$, $\delta_o = \max\{(\delta_n)_{n < N}, \delta\}$ et la propriété (3.4.20) est vraie pour tout n , i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \sup_n \mu_n(K_{\varepsilon, \delta}) > 1 - c\varepsilon. \quad (3.4.22)$$

Soit maintenant $\varepsilon_o > 0$ et $K_{\varepsilon_o} = \cap_{k \geq 1} K_{\frac{\varepsilon_o}{k^2}, \delta}$ où δ est choisi tel que la minoration dans (3.4.22) soit vraie. On a, en posant \bar{K} le complémentaire de K dans $L^1([0, 1]^d)$,

$$\mu_n(\bar{K}_{\varepsilon_o}) = \mu_n\left(\bigcup_{k \geq 1} \bar{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2}, \delta}\right) \leq \sum_{k \geq 1} \mu_n\left(\bar{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2}, \delta}\right) \leq \sum_{k \geq 1} c \frac{\varepsilon_o}{k^2} = c' \varepsilon_o,$$

où c' est une constante strictement positive.

Posons enfin, pour $\varepsilon_o > 0$ fixé,

$$K'_{\varepsilon_o} = K_{\varepsilon_o} \cap \left\{ \|x\|_1 < \frac{A}{\varepsilon_o} \right\}.$$

Nous noterons par la suite $B = \{\|x\|_1 < \frac{A}{\varepsilon_o}\}$. L'ensemble K'_{ε_o} remplit de façon évidente la première condition du lemme 14, i.e.

$$\sum_{x \in K'_{\varepsilon_o}} \|x\|_1 < \infty.$$

Pour la seconde condition : soit $\eta > 0$, il existe $k_1 \geq 1$ tel que $\eta > 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2}$, on a alors

$$\forall x \in K'_{\varepsilon_o} \subset K_{\frac{\varepsilon_o}{k_1^2}, \delta_1}, \quad |\tau| \leq \delta_1 \Rightarrow \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)| dt < 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2} < \eta.$$

Les deux conditions du lemme 14 sont satisfaites et donc K'_{ε_o} est un ensemble compact de $L^1([0,1]^d)$. Quelque soit $n > 0$,

$$\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) = \mu_n(K_{\varepsilon_o}) - \mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}),$$

or

$$\mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}) \leq \mu_n(\overline{B}) = P \left(\int_{[0,1]^d} |Y_n(t)| dt \geq \frac{A}{\varepsilon_o} \right) \leq \frac{E \int_{[0,1]^d} |Y_n(t)| dt}{A} \varepsilon_o \leq \varepsilon_o,$$

donc, quelque soit $n > 0$, $\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) \geq 1 - (c' + 1)\varepsilon_o$.

Quelque soit $\varepsilon_o > 0$, il existe donc un ensemble compact $K = K'_{\varepsilon_o/(c'+1)}$ inclus dans $L^1([0,1]^d)$ tel que $\sup_n \mu_n(L^1([0,1]^d) \setminus K) < \varepsilon_o$. L'application du théorème de Prohorov permet de conclure la démonstration du lemme 13.

3.5 Annexe : propriétés des approximations de l'unité

Dans cette partie, nous résumons quelques propriétés des approximations de l'unité dont nous avons besoin pour nos démonstrations. Certaines sont connues ou évidentes, d'autres sont particulières à l'utilisation que nous en avons et n'ont pas été trouvées dans la littérature. Il s'agit notamment des propriétés du produit tensoriel et du produit de convolution d'approximations de l'unité. Ces propriétés dépendent de la nature des approximations de l'unité que l'on considère. Nous en distinguons deux classes : la première concerne les approximations de l'unité en un sens faible (c'est le sens courant d'une approximation de l'unité), l'autre en un sens fort. Nous appliquons ces résultats au noyau de Fejer qui est une approximation de l'unité au sens fort ; nous en résumons finalement les propriétés spécifiques, transversales aux démonstrations des parties précédentes. En vue de cette utilisation finale, nous focalisons notre étude sur des approximations de l'unité définies sur $[-\pi, \pi]^d$.

Définition 6. Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi, \pi]^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens faible si $\forall n, K_n \geq 0$, $\int_{[-\pi, \pi]^d} K_n(x) dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} K_n(x) dx = 0. \quad (3.5.1)$$

Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi, \pi]^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens fort si $\forall n, K_n \geq 0$, $\int_{[-\pi, \pi]^d} K_n(x) dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| > \delta} K_n(x) = 0. \quad (3.5.2)$$

Une approximation de l'unité au sens fort l'est aussi clairement au sens faible. Ces fonctions sont principalement utilisées pour la propriété bien connue suivante, applicable à une plus large classe de fonctions dans le cas des approximations de l'unité au sens fort.

Théorème 13. Soit K_n une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi, \pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi, \pi]^d)$, bornée et continue en 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]^d} g(x) K_n(x) dx = g(0) \quad (3.5.3)$$

Soit K_n une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi, \pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi, \pi]^d)$ continue en 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]^d} g(x) K_n(x) dx = g(0) \quad (3.5.4)$$

Démonstration. Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens faible, (3.5.3) provient de la décomposition suivante, sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de g en 0 assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $|x| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-\pi, \pi]^d} g(x) K_n(x) dx - g(0) \right| &= \left| \int_{[-\pi, \pi]^d} (g(x) - g(0)) K_n(x) dx \right| \\ &\leq \int_{|x| \leq \delta} |g(x) - g(0)| K_n(x) dx + \int_{|x| > \delta} |g(x) - g(0)| K_n(x) dx \\ &\leq \varepsilon + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{|g(x)|\} \int_{|x| > \delta} K_n(x) dx, \end{aligned}$$

la première majoration étant due à la continuité de g en 0 et la seconde au fait que g est borné. En utilisant enfin la propriété (3.5.1) d'une approximation au sens faible, nous obtenons la convergence vers 0 voulue.

Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens fort, g n'est pas nécessairement borné :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-\pi, \pi]^d} g(x) K_n(x) dx - g(0) \right| &= \\ \left| \int_{|x| \leq \delta} (g(x) - g(0)) K_n(x) dx + \int_{|x| > \delta} g(x) K_n(x) dx - g(0) \int_{|x| > \delta} K_n(x) dx \right|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) K_n(x) dx - g(0) \right| \\ & \leq \int_{|x| \leq \delta} |g(x) - g(0)| K_n(x) dx + \|g\|_{L^1} \sup_{|x| > \delta} \{K_n(x)\} + |g(0)| \int_{|x| > \delta} K_n(x) dx. \end{aligned}$$

En choisissant δ correctement, le premier terme est aussi petit que l'on veut par continuité de g à l'origine. Le second terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ par la propriété (3.5.2) d'une approximation de l'unité au sens fort et le dernier terme également par la propriété (3.5.1) vérifiée par une approximation de l'unité au sens faible, à plus forte raison par une approximation de l'unité au sens fort. \square

La propriété d'approximation de l'unité se conserve de la manière suivante pour le produit de convolution et le produit tensoriel :

Proposition 5. Soit $K_n^{(1)}, \dots, K_n^{(d)}$ des approximations de l'unité de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbb{R} .

Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens faible, alors

1. $K_n^{(1)} * \dots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi, \pi]$.
2. $P_n(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi, \pi]^d$.

Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens fort, alors

1. $K_n^{(1)} * \dots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi, \pi]$.
2. $P_n(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ n'est plus une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi, \pi]^d$, mais uniquement au sens faible.

Démonstration. Nous montrons ces propriétés pour $d = 2$, les résultats se généralisant facilement par récurrence à d quelconque.

Soit pour commencer $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens faible de $[-\pi, \pi]$. Ces deux approximations de l'unité peuvent être considérées comme des densités de probabilité sur $[-\pi, \pi]$. Soient donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(1)}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(2)}$. La condition (3.5.1) sur $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ signifie :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad \text{et} \quad Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

les convergences ayant lieu en probabilité. La suite $(X_n + Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de densité $K_n^{(1)} * K_n^{(2)}$ et converge elle aussi en probabilité vers 0. Le produit de convolution de $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ vérifie donc la propriété (3.5.1), est positif et d'intégrale 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}$: c'est donc une approximation de l'unité au sens faible.

Considérons à présent le produit $P_n(x, y) = K_n^{(1)}(x) K_n^{(2)}(y)$. La fonction P_n est positive et de somme 1 dans $[-\pi, \pi]^2$ de façon évidente. Regardons la propriété (3.5.1),

nous supposons sans perte de généralité que la norme est la norme infini : $\|(x, y)\| = \max(x, y)$, on obtient ainsi :

$$\int_{\|(x, y)\| > \delta} K_n^{(1)}(x) K_n^{(2)}(y) dx dy \leq \int_{|x| > \delta} K_n^{(1)}(x) dx + \int_{|y| > \delta} K_n^{(2)}(y) dy,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont positifs et de somme 1. La propriété (3.5.1) s'en déduit directement et P_n est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi, \pi]^2$.

Soit maintenant $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens fort de $[-\pi, \pi]$. Considérons leur produit de convolution $K_n(t) = K_n^{(1)} * K_n^{(2)}(t)$, il est positif et de somme 1 dans $[-\pi, \pi]$ de façon évidente. Montrons qu'il vérifie la propriété (3.5.2). Soit $\delta > 0$, soit $0 < \gamma < \delta$,

$$\sup_{|t| > \delta} K_n(t) = \sup_{|t| > \delta} \left(\int_{|x| > \gamma} K_n^{(1)}(t-x) K_n^{(2)}(x) dx + \int_{|x| \leq \gamma} K_n^{(1)}(t-x) K_n^{(2)}(x) dx \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang on a $\sup_{|x| > \gamma} K_n^{(2)}(x) < \varepsilon$. D'autre part, si $|t| > \delta$ et $|x| \leq \gamma$, alors $|t-x| > \delta - \gamma > 0$ et donc, uniformément sur ce domaine, $K_n^{(1)}(t-x) < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. D'où quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang,

$$\sup_{|t| > \delta} K_n(t) \leq \varepsilon \sup_{|t| > \delta} \int_{|x| > \gamma} K_n^{(1)}(t-x) dx + \varepsilon \sup_{|t| > \delta} \int_{|x| \leq \gamma} K_n^{(2)}(x) dx \leq 2\varepsilon,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont de somme 1. La propriété (3.5.2) est donc vérifiée pour K_n et c'est une approximation de l'unité au sens fort.

Enfin, le produit tensoriel de deux approximations de l'unité au sens fort n'est pas nécessairement une approximation de l'unité au sens fort. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le noyau de Fejer F_n défini en (3.5.5) ci-dessous. C'est une approximation de l'unité au sens fort, mais on a $F_n(0)F_n(\pi) = 0$ si n est pair et $F_n(0)F_n(\pi) = \frac{1}{4\pi^2}$ si n est impair. La propriété (3.5.2) n'est donc pas vérifiée pour le produit tensoriel $(x, y) \mapsto F_n(x)F_n(y)$. \square

Nous nous focalisons maintenant plus particulièrement sur le noyau de Fejer, défini sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} & \text{si } x \neq 0 \\ &= \frac{n}{2\pi} & \text{si } x = 0. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Nous résumons certaines de ses propriétés dont nous avons constamment besoin dans les autres parties.

Proposition 6. *Soit F_n le noyau de Fejer défini sur $[-\pi, \pi]$.*

1. F_n est une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbb{R}
2. $\forall \delta > 0 \quad \sup_{|x| > \delta} F_n(x) \leq \frac{\pi}{2n\delta^2}$
3. $\forall \delta > 0 \quad \int_{|x| > \delta} F_n(x) dx \geq \frac{1}{2\pi n} \left(\pi - \delta + \frac{\sin(n\delta)}{n} \right)$

4. $\forall g \in L^1([-\pi, \pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) F_n(x) dx = o(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$
5. Soit $\alpha > -1$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} |x|^\alpha F_n(x) dx \sim \kappa n^{-\alpha}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, où κ est une constante strictement positive.

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et $\delta < |x| \leq \pi$, par concavité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, \pi/2]$,

$$F_n(x) \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \leq \frac{\pi}{2n\delta^2},$$

ce qui montre le point 2.

On sait par ailleurs que F_n est positif et de somme 1 sur $[-\pi, \pi]$. La propriété (3.5.2) est impliquée par l'inégalité précédente donc F_n est un noyau au sens fort.

Pour $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\delta < |x| \leq \pi} F_n(x) dx &\geq \frac{2}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \sin^2(nx/2) dx \\ &\geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} (1 - \cos(nx)) dx = \frac{1}{2\pi n} \left(\pi - \delta + \frac{\sin(n\delta)}{n} \right), \end{aligned}$$

ce qui montre le point 3.

Enfin, quel que soit $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\frac{g(x)F_n(x)}{n} \leq \frac{g(x)}{2\pi},$$

qui est dans $L^1([-\pi, \pi])$. Par ailleurs $x \mapsto \frac{g(x)F_n(x)}{n}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]} \frac{g(x)F_n(x)}{n} dx = 0,$$

ce qui montre le point 4.

Le point 5 est montré dans le lemme 9 de Viano et al. (1995). □

Chapitre 4

Convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$

Que ce soit dans les résultats pré-existants ou dans ceux montrés dans le chapitre précédent, le comportement asymptotique des sommes partielles de champs aléatoires à longue mémoire a été étudié au travers de la convergence des lois fini-dimensionnelles. Il est intéressant, en vue d'applications, d'étendre cette convergence à une convergence fonctionnelle sur $\mathcal{D}([0, 1]^d)$. Nous présentons à cette fin un critère d'équitension des champs aléatoires dû à Bickel et Wichura (1971) que nous adaptons au cas des sommes partielles dans le corollaire 2 ci-dessous.

Nous appliquerons ce critère d'équitension à différents cas de longue mémoire isotrope et non-isotrope dans les sections 4.2 et 4.3.

La section 4.4 résume les situations de forte dépendance où la convergence de S_n dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ est établie, en s'appuyant d'une part sur la convergence en loi fini-dimensionnelle montrée notamment dans le chapitre précédent et d'autre part sur l'équitension étudiée ici.

4.1 Critère d'équitension pour les sommes partielles

Soit $C = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ un sous ensemble de $[0, 1]^d$ et soit S_n un processus dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$. On note $S_n(C)$ la quantité

$$S_n(C) = \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_d = 0, 1} (-1)^{d + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i} S(s_1 + \varepsilon_1(t_1 - s_1), \dots, s_d + \varepsilon_d(t_d - s_d)). \quad (4.1.1)$$

Les théorèmes 2 et 3 de Bickel et Wichura (1971) nous donnent le critère d'équitension suivant.

Théorème 14 (Bickel et Wichura (1971)). *Soit $S_n(t)$, $t \in [0, 1]^d$, un processus de $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ dont les lois fini-dimensionnelles convergent en loi vers celle d'un processus $Y(t)$.*

On suppose que $Y(t)$ est continu en $t = 1$ et que $S_n(0) = 0$.

S'il existe $\beta > 1$, $\gamma > 1$ et une mesure finie positive μ sur $[0, 1]^d$ tels que, pour tous $C = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ et $C' = [s'_1, t'_1[\times \cdots \times [s'_d, t'_d[$,

$$\forall n \quad E(|S_n(C)|^{\gamma_1} |S_n(C')|^{\gamma_2}) \leq (\mu(C))^{\beta_1} (\mu(C'))^{\beta_2}, \quad (4.1.2)$$

avec $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, où $S_n(C)$ et $S_n(C')$ sont définis par (4.1.1), alors

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}([0, 1]^d)} Y.$$

Le corollaire suivant, dont les conditions sont plus pratiques à vérifier, concerne le cas particulier où S_n est le processus des sommes partielles d'un champ aléatoire stationnaire.

Corollaire 2. On considère un champ aléatoire stationnaire $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ et ses sommes partielles

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad t \in [0, 1]^d. \quad (4.1.3)$$

Si S_n converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers Y et s'il existe $c > 0$ et $\beta > 1$ tel que pour tous p_1, \dots, p_d appartenant à $\{1, \dots, n\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^d \frac{p_i}{n} \right)^{-\beta} E \left(d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c, \quad (4.1.4)$$

alors

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}([0, 1]^d)} Y.$$

De plus le champ Y admet une version à trajectoires continues.

Démonstration. Bickel et Wichura (1971) montrent en remarque de leur théorème 3 qu'il suffit de vérifier la condition (4.1.2) pour des ensembles du type $C_n = [i_1/n, j_1/n[\times \cdots \times [i_d/n, j_d/n[$ ($i_l, j_l = 0 \dots n$, $l = 1, \dots, d$). Cette condition, en employant les mêmes notations, se lit alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu(C_n))^{-\beta_1} (\mu(C'_n))^{-\beta_2} E(|S_n(C)|^{\gamma_1} |S_n(C')|^{\gamma_2}) \leq 1. \quad (4.1.5)$$

Dans le cas $d = 2$, d'après (4.1.1) on a

$$\begin{aligned} & S_n \left(\left[\frac{i_1}{n}, \frac{j_1}{n} \right[\times \left[\frac{i_2}{n}, \frac{j_2}{n} \right[\right) \\ &= S_n \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n} \right) - S_n \left(\frac{j_1}{n}, \frac{i_2}{n} \right) - S_n \left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_2}{n} \right) + S_n \left(\frac{j_1}{n}, \frac{j_2}{n} \right) \\ &= d_n^{-1} \left(\sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1, k_2} - \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1, k_2} - \sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1, k_2} + \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1, k_2} \right) \\ &= d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \sum_{k_2=i_2}^{j_2} X_{k_1, k_2}. \end{aligned}$$

On obtient par récurrence le même résultat quelque soit d :

$$S_n(C_n) = d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1, \dots, k_d}.$$

Si $C'_n = [i'_1/n, j'_1/n[\times \cdots \times [i'_d/n, j'_d/n[$, en utilisant l'inégalité de Schwartz et la stationnarité de X , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[E(|S_n(C_n)| |S_n(C'_n)|) \right]^2 \\ & \leq E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=i'_1}^{j'_1} \cdots \sum_{k_d=i'_d}^{j'_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \\ & \leq E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=0}^{j_1-i_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j_d-i_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=0}^{j'_1-i'_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j'_d-i'_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si (4.1.4) est vraie alors la condition (4.1.5) est remplie avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $2\beta_1 = 2\beta_2 = \beta$ et μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$ (à un facteur multiplicatif près).

La continuité du champ aléatoire limite Y se montre exactement comme celle de B dans le lemme 11 prouvé en section 3.4.1, où le rôle de S_n^ξ est joué par S_n et où la normalisation $n^{d/2}$ est remplacée par d_n , de telle sorte qu'en utilisant l'hypothèse (4.1.4) on aboutit à

$$\begin{aligned} & E(S_n(s) - S_n(t))^2 \leq \\ & c \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} \prod_{j \in C_d^l} (t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta \left(\prod_{j \in \overline{C_d^l}} (s_j - t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta + \prod_{j \in \overline{C_d^l}} (t_j - t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta \right) \end{aligned}$$

dont le majorant converge bien vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ et $s \rightarrow t$.

En remarquant enfin que $S_n(0) = 0$, toutes les conditions du théorème 14 sont remplies et la convergence annoncée dans le corollaire s'en déduit. \square

4.2 Équitension en longue mémoire isotrope

Nous montrons l'équitension des sommes partielles dans la situation standard de longue mémoire isotrope : lorsque le champ est une fonctionnelle de champs gaussiens, hypothèse de travail de Dobrushin et Major (1979).

Proposition 7. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^\infty H(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty H^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty.$$

Notons m son rang de Hermite.

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right), \quad (4.2.1)$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors le processus des sommes partielles de $H(X_n)$,

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2}(L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} H(X_{k_1, \dots, k_d}),$$

est équitendu dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$.

Démonstration. On utilise le corollaire 2 et l'on doit évaluer, pour p_1, \dots, p_d appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$E \left(\frac{1}{n^{d-m\alpha/2}(L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k) \right)^2. \quad (4.2.2)$$

En utilisant la décomposition de $H(X_k)$ dans la base de Hermite

$$H(X_k) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i}{i!} H_i(X_k),$$

où

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{J_i^2}{i!} < \infty, \quad (4.2.3)$$

et la relation

$$\text{cov}(H_k(X_i), H_l(X_j)) = \delta_{k,l} k! r(j-i)^k,$$

où H_k est le polynôme de Hermite d'ordre k , on obtient

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k) \right)^2 &= \sum_{k, l=0}^{p_1 \dots p_d} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} r^i(l-k) \\ &\leq \sum_{k, l=0}^{p_1 \dots p_d} r^m(l-k) \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} \\ &\leq c \sum_{k, l=0}^{p_1 \dots p_d} r^m(l-k), \end{aligned}$$

car $0 \leq r(l - k) \leq 1$ et en utilisant (4.2.3). On a donc

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 &\leq c \sum_{k=-p_1+1, \dots, -p_d+1}^{p_1-1, \dots, p_d-1} |k|^{-m\alpha} L(|k|)^m b^m \left(\frac{k}{|k|}\right) \prod_{j=1}^d (p_j - |k_j|) \\ &\leq c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + 2^d \sum_{k=1}^{p_1, \dots, p_d} (|k|)^{-m\alpha} L(|k|)^m\right), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

la fonction b étant bornée.

Le théorème de Potter sur les fonctions à variation lente (cf Bingham et al. (1987)) affirme que si $y \leq x$ alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante c telle que

$$L(y) \leq c \left(\frac{y}{x}\right)^{-\eta} L(x). \quad (4.2.5)$$

Nous appliquons cette inégalité avec $y = |k| = k_1 + \dots + k_d$ et $x = dn$ en choisissant

$$\eta = \frac{d}{2m} - \frac{\alpha}{2} > 0. \quad (4.2.6)$$

Nous utilisons de plus le fait que la moyenne arithmétique de quantités positives est toujours supérieure à leur moyenne géométrique et (4.2.4) est majoré par

$$\begin{aligned} c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + \sum_{k=1}^{p_1, \dots, p_d} \prod_{j=1}^d k_j^{-(\alpha+\eta)m/d} L(dn)^m n^{m\eta}\right) \\ \leq c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + L(dn)^m n^{m\eta} \prod_{j=1}^d p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi (4.2.2) est majorée par

$$\begin{aligned} cn^{m\alpha-2d} L(n)^{-m} \left(\prod_{j=1}^d p_j + L(dn)^m n^{m\eta} \prod_{j=1}^d p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+2}\right) \\ \leq c \left(\frac{L(dn)}{L(n)}\right)^m \prod_{j=1}^d \left(\frac{p_j}{n}\right)^\beta \left(n^{-m\eta} L(dn)^{-m} \prod_{j=1}^d p_j^{1-\beta} + 1\right), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

avec $\beta = -(\alpha + \eta)m/d + 2$. D'après (4.2.6) et comme $0 < m\alpha < d$, on a $\beta > 1$. Ceci montre par ailleurs que le terme entre parenthèses dans (4.2.7) reste borné. De plus L étant une fonction à variations lentes, $L(dn)/L(n)$ est borné. Ainsi

$$\forall (p_1, \dots, p_d) \in \{1, \dots, n\}^d,$$

$$E\left(\frac{1}{n^{d-m\alpha/2}(L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 \leq c \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n}\right)^\beta,$$

avec $\beta > 1$ et la condition (4.1.4) du corollaire 2 est vérifiée. \square

4.3 Équitension en longue mémoire non-isotrope

Nous considérons dans cette partie différentes situations de longue mémoire non-isotrope pour lesquelles nous montrons l'équitension des sommes partielles. Le champ X considéré est supposé issu du filtrage d'un bruit ξ à travers un filtre a comme dans (3.1.2) et les conditions de dépendance que nous considérons portent comme précédemment sur la fonction a .

L'objectif est de montrer l'équitension de S_n dans les situations de forte dépendance considérées lors de l'étude des lois fini-dimensionnelles du chapitre précédent : dans le (ii) du Théorème 7 en dimension $d \leq 2$ ou dans les Théorèmes 10 et 11 en dimension d quelconque.

A défaut de pouvoir le faire en toute généralité pour des raisons techniques, nous restreignons un peu notre étude.

En dimension $d = 2$, nous considérons des filtres homogènes de degré $-1 < \alpha < 0$ et nous scindons l'étude selon que $-1 < \alpha < -1/2$ et $-1/2 < \alpha < 0$. Dans le premier cas, l'équitension est obtenue dès que a est équivalent en l'origine à une fonction homogène de degré α : le filtre a n'a en fait pas besoin d'être supposé homogène sur tout $[-\pi, \pi]^2$. Par contre, dans le second cas, lorsque $-1/2 < \alpha < 0$, nous supposons que a est un polynôme homogène à une certaine puissance : a appartient donc à une classe restreinte de fonctions homogènes.

En dimension d quelconque, nous considérons d'une part des filtres de type produit tensoriel, chaque composante du produit étant homogène à une certaine puissance, d'autre part des filtres singuliers sur un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$ comme dans le Théorème 11.

Proposition 8 ($d = 2$). *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ où a vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$,*

$$a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k}, \quad (4.3.1)$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où P_k est un polynôme homogène de degré k à deux variables, c'est à dire $P_k(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^k P_k(x, y)$.

(ii) *$a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ où \tilde{a} est une fonction homogène de degré α avec $-1 < \alpha < -1/2$.*

Alors le processus des sommes partielles de X défini par (4.1.3) est tendu dans $D([0, 1]^2)$.

Proposition 9 (d quelconque). *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ où a vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$, $a(x) = \prod_{i=1}^d a_i(x_i)$ où les a_i sont équivalents en 0 à une fonction homogène de degré α_i , $-1/2 < \alpha_i < 0$.*

(ii) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$,

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{\alpha/2}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

où $(c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$.

Alors le processus des sommes partielles de X défini par (4.1.3) est tendu dans $D([0, 1]^d)$.

4.4 Convergence de S_n dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$: bilan

Nous résumons les situations de forte dépendance pour lesquelles nous avons établi la convergence dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ des sommes partielles. Celle-ci provient d'une part de la convergence des lois fini-dimensionnelles montrée dans des travaux préexistants en longue mémoire isotrope (par exemple dans Dobrushin et Major (1979)) ou étudiée dans le chapitre précédent, d'autre part de l'équitension des sommes partielles prouvée dans les sections précédentes.

Nous focalisons tout d'abord le cas $d \leq 2$ puis, pour d quelconque, nous donnons deux résultats : le premier en longue mémoire isotrope dans le cadre de Dobrushin et Major (1979), le second dans deux situations de longue mémoire non-isotrope.

Le théorème suivant se restreint à $d \leq 2$. Il se déduit du Théorème 7 et de la Proposition 8.

Théorème 15. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$.

(i) Si, pour tout $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$,

$$a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k},$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où P_k est un polynôme homogène de degré k à deux variables (c'est à dire $P_k(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^k P_k(x, y)$), alors

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \sum_{k_2=0}^{[nt_2]} X_{k_1, k_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0, 1]^2)} I \left(|P_k(x, y)|^{\alpha/k} \prod_{i=1}^2 D(x_i, t_i) \right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

(ii) Si $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ où \tilde{a} est une fonction homogène de degré α avec $-1 < \alpha < -1/2$, alors

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \sum_{k_2=0}^{[nt_2]} X_{k_1, k_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0, 1]^2)} I \left(\tilde{a}(x) \prod_{i=1}^2 D(x_i, t_i) \right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 20. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, la limite obtenue dans le théorème précédent s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à la mesure spectrale d'un bruit blanc gaussien (voir la remarque 14 du chapitre précédent).

Le Théorème 16 ci-dessous complète celui de Dobrushin et Major (1979) en étendant la convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles en une convergence fonctionnelle dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ grâce à l'équitension établie à la Proposition 7. Dans le cas particulier où $d = 1$, le Théorème 16 équivaut au Théorème 5.6 de Taqqu (1979).

Théorème 16. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^\infty H(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty H^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty.$$

Notons m son rang de Hermite.

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right),$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} H(X_{j_j}) \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} c_m Z_m(t),$$

où Z_m est le processus de Hermite de degré m défini par (1.3.4) et où c_m est le coefficient d'ordre m dans le développement de Hermite de H .

Enfin le Théorème suivant se place dans deux situations de longue mémoire non-isotrope en dimension quelconque. Le champ X , défini par (3.1.2), est obtenu par filtrage d'un bruit. Le premier cas concerne des filtres singuliers sur tout un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$ et le résultat découle du Théorème 11 et de la Proposition 9. Le second cas concerne des filtres de type produit tensoriel et la limite fonctionnelle des sommes partielles est dans un cas particulier le drap Brownien fractionnaire (voir la remarque ci-dessous); ce résultat se déduit du Théorème 10 et de la Proposition 9.

Théorème 17. *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers a .*

(i) Si pour tout $x \in [-\pi, \pi]^d$

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où les c_i sont des constantes réelles. Alors

– Si $d \leq 3$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} I \left(a(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right), \quad (4.4.1)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

– Si $d \geq 4$ et si $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ alors la convergence (4.4.1) a encore lieu.

(ii) Si pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in [-\pi, \pi]^d$

$$a(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d a_j(x_j),$$

avec $a_j(x_j) \sim \tilde{a}_j(x_j)$ en $x_j = 0$ où \tilde{a}_j est homogène de degré $\alpha_j \in]-1/2, 0[$ garantissant $a_j \in L^2([-\pi, \pi])$,

$$\frac{1}{n^{(d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} I \left(\prod_{j=1}^d \tilde{a}_j(x_j) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right), \quad (4.4.2)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 21. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, l'application I peut s'écrire comme une intégrale stochastique et lorsque pour tout j , $\tilde{a}_j(x) = |x|^{\alpha_j}$ avec $-1/2 < \alpha_j < 0$, la limite de (4.4.2) correspond au drap brownien fractionnaire

$$\frac{1}{n^{(d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j |x_j|^{-\alpha_j}} dW_0(x),$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

4.5 Démonstrations

4.5.1 Démonstration de la Proposition 8

Preuve du (i) de la Proposition 8

D'après le corollaire 2, il suffit de montrer qu'il existe une constante strictement positive c et $\beta > 1$ tels que

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta.$$

On sait que $X_{k_1, k_2} = \int_{[-\pi, \pi]^2} a(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} dW(\lambda_1, \lambda_2)$, où W est la mesure spectrale de ξ . Ainsi

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} a^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy,$$

où M est le majorant de la densité spectrale de ξ . Par suite

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} a^2(x, y) (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy, \quad (4.5.1)$$

où c est une constante strictement positive qui pourra varier dans la suite de ligne à ligne.

Par hypothèse $a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k}$ où P_k est un polynôme à deux variables, homogène de degré k que l'on peut écrire

$$P_k(x, y) = x^k P_k(1, y/x). \quad (4.5.2)$$

Posons $Q_k(t) = P_k(1, t)$; Q_k est un polynôme réel de degré k que l'on peut factoriser de la façon suivante

$$Q_k(t) = R(t) \prod_{i=1}^r |t - r_i|^{\tau_i},$$

où les r_i sont les r racines réels de Q_k d'ordres de multiplicité respectifs τ_i et R est un polynôme irréductible dans \mathbb{R} qui vérifie donc $|R(t)| \geq c$ pour un certain $c > 0$.

Nous allons distinguer les cas où $r = 0$ (Q_k n'admet aucune racine réelle), $r = 1$ et $r \geq 2$.

Si $r = 0$, $a(x, y) = |x|^\alpha |Q_k(y/x)|^{\alpha/k}$ où Q_k n'admet aucune racine réelle. L'hypothèse $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ impose dans ce cas $\alpha > -1/2$. En partant de (4.5.1), on a donc

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 &\leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\ &\leq c \left(\frac{p}{n} \right)^{1-2\alpha} \left(\frac{q}{n} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\alpha} (1 \wedge u^{-2}) (1 \wedge v^{-2}) du dv, \end{aligned}$$

en ayant posé $u = px$ et $v = qy$. La dernière intégrale est finie et l'on a donc

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n} \right)^{1-2\alpha} \left(\frac{q}{n} \right), \quad (4.5.3)$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant pas de p et q .

Si $r = 1$, en définissant $\gamma_1 = \alpha(1 - \tau_1/k)$,

$$\begin{aligned}
& E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} \left| \frac{y}{x} - r_1 \right|^{2\alpha\tau_1/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\gamma_1} |y - r_1 x|^{2\alpha\tau_1/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{1}{n^{2-2\alpha}} (pq)^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2} \right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2} \right) dudv, \quad (4.5.4)
\end{aligned}$$

en ayant posé $u = x\sqrt{pq}$ et $v = y\sqrt{pq}$. Nous scindons l'intégrale précédente en deux selon les domaines $A_1 = \{|v - r_1 u| > 1\}$ et $A_2 = \{|v - r_1 u| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2} \right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2} \right) dudv \\
& \leq \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2} \right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2} \right) dudv,
\end{aligned}$$

car $\alpha < 0$. En posant à présent $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v\sqrt{q/p}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2} \right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2} \right) dudv \\
& \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{\gamma_1} \int_{\mathbb{R}^2} |s|^{2\gamma_1} (1 \wedge s^{-2}) (1 \wedge t^{-2}) ds dt. \quad (4.5.5)
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie car $2\gamma_1 > 2\alpha > -1$.

Par ailleurs en effectuant le changement de variables $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v - r_1 u$

$$\begin{aligned}
& \int_{A_2} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2} \right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2} \right) dudv \\
& \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{\gamma_1 + \frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |s|^{2\gamma_1} 1 \wedge s^{-2} ds \int_{|t| \leq 1} t^{2\alpha\tau_1/k} dt, \quad (4.5.6)
\end{aligned}$$

où toutes les intégrales sont finies.

Finalement, lorsque $r = 1$, par (4.5.4), (4.5.5) et (4.5.6),

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left[\left(\frac{p}{n} \right)^{1-\alpha-\gamma_1} \left(\frac{q}{n} \right)^{1-\alpha+\gamma_1} \vee \left(\frac{p}{n} \right)^{1/2-\alpha-\gamma_1} \left(\frac{p}{n} \right)^{3/2-\alpha+\gamma_1} \right],$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant pas de p et q .

Enfin, si $r \geq 2$, en posant $\gamma = \alpha(1 - \sum_{i=1}^r \tau_i/k)$,

$$\begin{aligned}
& E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} \prod_{i=1}^r \left| \frac{y}{x} - r_i \right|^{2\alpha\tau_i/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |y - r_i x|^{2\alpha\tau_i/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{1}{n^{2-2\alpha}} (pq)^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv, \quad (4.5.7)
\end{aligned}$$

en ayant posé $u = x\sqrt{pq}$ et $v = y\sqrt{pq}$. Nous scindons à présent la dernière intégrale selon les domaines $A = \cap_{i=1}^r \{|v - r_i u| > 1\}$ et $B = \cup_{i=1}^r \{|v - r_i u| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
& \int_A |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \left(\frac{q}{p}\right)^\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |s|^{2\gamma} (1 \wedge s^{-2}) (1 \wedge t^{-2}) ds dt, \quad (4.5.8)
\end{aligned}$$

en posant $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v\sqrt{q/p}$.

Par ailleurs, sur B , soit il existe un unique indice $i = i_0$ tel que $|v - r_{i_0} u| \leq 1$ et pour tout $j \neq i_0$, $|v - r_j u| > 1$, notons alors B_{i_0} cet ensemble et $C_1 = \cup_{i_0=1} B_{i_0}$, soit il existe au moins deux indices i_0 et $j_0 \neq i_0$ tels que $|v - r_{i_0} u| \leq 1$ et $|v - r_{j_0} u| \leq 1$, notons l'union de ces ensembles C_2 .

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \sum_{i_0=1}^r \int_{B_{i_0}} |u|^{2\gamma} |v - r_{i_0} u|^{2\alpha\tau_{i_0}/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v - r_{i_0} u$ et

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \sum_{i_0=1}^r \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma+1/2} \int_{\mathbb{R}} |s|^{2\gamma} 1 \wedge s^{-2} ds \int_{|t|<1} |t|^{2\alpha\tau_{i_0}/k} dt \\
& \leq c \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma+1/2}. \quad (4.5.9)
\end{aligned}$$

Et sur C_2 , en nommant K_{i_0, j_0} un ensemble compact de \mathbb{R}^2 incluant $\{|v - r_{i_0} u| \leq 1\} \cap \{|v - r_{j_0} u| \leq 1\}$, puis K un ensemble compact contenant tous les K_{i_0, j_0} ,

$$\begin{aligned} & \int_{C_2} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\ & \leq c \sum_{i_0=1}^r \sum_{j_0=1}^r \int_{K_{i_0, j_0}} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} dudv \\ & \leq c \int_K |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} dudv, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

où toutes les intégrales sont finies.

Finalement, lorsque $r = 2$, partant de (4.5.7) et d'après (4.5.8), (4.5.9) et (4.5.10), on obtient

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ & \leq \frac{c}{n^{2-2\alpha}} \left[(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

où c est une constante strictement positive indépendante de p , q et n .

Le raisonnement précédent se base sur la factorisation (4.5.2). Nous pouvons de même factoriser le polynôme P_k par y ce qui conduit à l'étude du polynôme réel $Q'_k(t) = P_k(t, 1)$. Soit r' le nombre de racines réelles de Q'_k , selon que $r' = 0$, $r' = 1$ ou $r' \geq 2$, nous obtenons respectivement les inégalités (4.5.3), (4.5.7) et (4.5.11) où les rôles de p et q sont inversés et où γ est remplacé par $\gamma' = \alpha(1 - \sum_{i=1}^{r'} \tau'_i/k)$ en notant τ'_i les ordres de multiplicités des racines réelles de Q'_k .

Pour conclure, il suffit de considérer les différents cas selon les valeurs possibles de r et r' . Traitons le cas $r \geq 2$ et $r' \geq 2$, les autres situations se démontrent de la même manière. Si $r \geq 2$ et $r' \geq 2$, l'inégalité (4.5.11) est vérifiée à la fois telle quelle et en inversant les rôles de p et q de telle sorte que

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ & \leq \frac{c}{n^{2-2\alpha}} \left(\left[(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) \right] \right. \\ & \quad \left. \wedge \left[(q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}) \vee (q^{1/2-\alpha-\gamma'} p^{3/2-\alpha+\gamma'}) \vee (q^{1-\alpha} p^{1-\alpha}) \right] \right). \end{aligned}$$

Supposons $p < q$, alors il est aisé de montrer que

$$(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) = p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}.$$

De même, si $p < q$,

$$\left(q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}\right) \vee \left(q^{1/2-\alpha-\gamma'} p^{3/2-\alpha+\gamma'}\right) \vee \left(q^{1-\alpha} p^{1-\alpha}\right) = q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}.$$

De plus,

$$p^{1/2-\alpha-\gamma'} q^{3/2-\alpha+\gamma'} \wedge q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'} \leq q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}.$$

On montre enfin facilement que lorsque $p < q$

$$\left(\frac{q}{n}\right)^{1-\alpha-\gamma'} \left(\frac{p}{n}\right)^{1-\alpha+\gamma'} \leq \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n}\right)^\beta.$$

où β est choisi tel que $1 < \beta < 1 - \alpha + \gamma'$ ce qui est possible car $\gamma' = \alpha(1 - \sum_{i=1}^{r'} \tau'_i/k) > \alpha$.

Lorsque $p > q$, on procède de la même manière et on obtient ainsi le résultat recherché

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta, \quad (4.5.12)$$

où β est choisi tel que $1 < \beta < (1 - \alpha + \gamma) \wedge (1 - \alpha + \gamma')$.

Preuve du (ii) de la Proposition 8

D'après le corollaire 2, il suffit de montrer qu'il existe une constante strictement positive c et $\beta > 1$ tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n}\right)^\beta} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c.$$

On sait que $X_{k_1, k_2} = \int_{[-\pi, \pi]^2} a(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} dW(\lambda_1, \lambda_2)$, où W est la mesure spectrale de ξ . Ainsi

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy,$$

où M est le majorant de la densité spectrale de ξ . On utilise à présent le lemme suivant

Lemme 16. Soit $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ tel que $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ avec \tilde{a} une fonction homogène de degré $\alpha < -1/2$ telle que

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.13)$$

Alors

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy = O \left(\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta \right),$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Sa démonstration est donnée à la suite de celle-ci. D'après le lemme 16, il suffit de montrer que

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.14)$$

Après le changement de variables $u = px$ et $v = py$ et en utilisant l'homogénéité de \tilde{a} , on obtient

$$\begin{aligned} n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq cn^{2\alpha-2} p^{-2\alpha} q^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{a}|^2(u, v) (1 \wedge u^{-2}) \left(1 \wedge \frac{p^2}{q^2 v^2} \right) dudv \\ \leq cn^{2\alpha-2} p^{-2\alpha} q^2 \left(1 \vee \frac{p^2}{q^2} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{a}|^2(u, v) (1 \wedge u^{-2}) (1 \wedge v^{-2}) dudv, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive indépendante de p , q et n qui peut varier de ligne à ligne. La dernière intégrale est finie (cf lemme 8 du chapitre précédent) et, puisque l'on peut mener exactement les mêmes majorations en inversant les rôles joués par p et q , on obtient

$$\begin{aligned} n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq c \left[p^{-2\alpha} q^2 \left(1 \vee \frac{p^2}{q^2} \right) \right] \wedge \left[q^{-2\alpha} p^2 \left(1 \vee \frac{q^2}{p^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Il est aisé de montrer que ce majorant est inférieur à $c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta$ avec $\beta = 1/2 - \alpha > 1$ ce qui achève la démonstration.

Preuve du lemme 16

Soit $\delta > 0$ tel que si $\|(x, y)\| < \delta$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme, alors $|\frac{a^2(x, y)}{\tilde{a}^2(x, y)}| < 2$. On utilise la décomposition suivante

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \left[\int_{\|(x, y)\| < \delta} \frac{|a|^2(x, y)}{|\tilde{a}|^2(x, y)} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \right. \\ \left. + \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \right]. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Par hypothèse il existe $c > 0$ et $\beta > 1$ tels que la première intégrale dans (4.5.15) est majorée par

$$\frac{2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.16)$$

Il reste donc à traiter la seconde intégrale dans (4.5.15). Nous allons montrer que si $\alpha < -1/2$,

$$n^{2\alpha-2} \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy = O \left(\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta \right) \quad (4.5.17)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

En notant F_p le noyau de Fejer défini par (3.5.5) dans la section 3.5 du chapitre précédent,

$$\begin{aligned} \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq pq \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) F_p(x) F_q(y) dx dy \\ \leq pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) \left(\int_{|x| > \delta} |a|^2(x, y) F_p(x) dx \right) dy \\ + pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(x) \left(\int_{|y| > \delta} |a|^2(x, y) F_q(y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales se traitent de la même manière. Observons la première en utilisant la propriété du noyau de Fejer :

$$\forall \delta > 0 \quad \sup_{|x| > \delta} F_n(x) \leq \frac{\pi}{2n\delta^2}.$$

Ainsi

$$pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) \left(\int_{|x| > \delta} |a|^2(x, y) F_p(x) dx \right) dy \leq c \frac{pq}{p\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) b(y) dy,$$

où $b(y) = \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x, y) dx$.

On obtient, en notant $d(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x, y) dy$,

$$\begin{aligned} \frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} n^{2\alpha-2} \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq \frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} n^{2\alpha-2} \left(\frac{q}{\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) b(y) dy + \frac{p}{\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_p(x) d(x) dx \right) \\ \leq cn^{2\beta+2\alpha-1} \left(\frac{u_{n,q}}{p^\beta q^{\beta-1}} + \frac{v_{n,p}}{p^{\beta-1} q^\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

où $u_{n,q} = n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y)b(y)dy$ et $v_{n,p} = n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F_p(x)d(x)dx$.

Or on sait que $\int_{-\pi}^{\pi} F_q(y)b(y)dy = o(q)$ lorsque $q \rightarrow \infty$ (voir la Proposition 6 du chapitre précédent), ainsi $u_{n,q}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ quelque soit $q \leq n$; de même $u_{n,p}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour finir on sait que l'inégalité (4.5.13) est vraie pour $\beta > 1$, elle est donc vraie également si l'on impose $1 < \beta < 1/2 - \alpha$ ce qui est possible dans le cas $\alpha < -1/2$. Finalement d'après (4.5.16) et (4.5.18)

$$\frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1,k_2} \right)^2 \leq c(1 + n^{2\beta+2\alpha-1}(u_{n,q} + v_{n,p})). \quad (4.5.19)$$

Le majorant est borné et le lemme est prouvé.

4.5.2 Démonstration de la Proposition 9

Pour la démonstration du (i), en utilisant le corollaire 2 et la représentation spectrale de X , il faut montrer que pour tout (p_1, \dots, p_d) appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$\prod_{i=1}^d \left[n^{2\alpha_i-1} \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x_i) \frac{\sin^2(p_i x_i/2)}{\sin^2(x_i/2)} dx_i \right] = O \left(\prod_{i=1}^d \frac{p_i}{n} \right)^\beta, \quad (4.5.20)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ où $\beta > 1$. Il suffit de le montrer pour chaque composante. Fixons i dans $\{1, \dots, d\}$, comme $a_i(x_i) \sim \tilde{a}_i(x_i)$ en $x_i = 0$, d'après le Lemme 16 (adapté trivialement à la dimension 1), il suffit de montrer que

$$n^{2\alpha_i-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{a}|^2(x_i) \frac{\sin^2(p_i x_i/2)}{\sin^2(x_i/2)} dx_i \leq c \left(\frac{p_i}{n} \right)^{\beta_i},$$

ce que le changement de variable $x_i \mapsto x_i/p_i$ nous fournit directement avec $\beta_i = 1 - 2\alpha_i$. Dans le cas général où $a(x) = \prod_{i=1}^d a_i(x_i)$, (4.5.20) s'en déduit avec $\beta = \min(1 - 2\alpha_i, i = 1, \dots, d)$.

Montrons à présent le (ii) en utilisant le corollaire 2. D'après la représentation spectrale de X , pour tout (p_1, \dots, p_d) dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 &\leq c \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(p_j x_j/2)}{\sin^2(x_j/2)} dx \\ &\leq c \prod_{j=1}^d \frac{1}{p_j} \int_{\prod_{j=1}^d [-p_j \pi, p_j \pi]} \left| \sum_{i=1}^d c_i \frac{x_i}{p_i} \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(x_j/2)}{\sin^2(x_j/2p_j)} dx \\ &\leq p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j \int_{\mathbb{R}^d} \left| c_1 x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i} x_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(x_j/2)}{(x_j/2)^2} dx. \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

L'intégrale dans (4.5.21) est finie. On peut le vérifier en effectuant le changement de variables $u = c_1 x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i} x_i$ et $x_i = x_i$ pour $i \geq 2$ sur le domaine $\{|u| < 1\}$, l'intégrabilité sur $\{|u| > 1\}$ étant évidente.

On a donc montré

$$E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c n^{2\alpha-d} p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j.$$

Cette inégalité reste vraie en permutant les p_j entre eux, ainsi

$$\begin{aligned} E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 &\leq c n^{2\alpha-d} \min_{i=1, \dots, d} \left\{ p_i^{1-2\alpha} \prod_{j \neq i} p_j \right\} \\ &\leq c n^{2\alpha-d} p_-^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} p_j = c \left(\frac{p_-}{n} \right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} \frac{p_j}{n}, \end{aligned}$$

en notant $p_- = \min\{p_j\}$. Un passage au logarithme montre facilement que

$$\left(\frac{p_-}{n} \right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} \frac{p_j}{n} \leq \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n} \right)^{1-2\alpha/d}.$$

On obtient donc finalement

$$\forall (p_1, \dots, p_d) \in \{1, \dots, n\}^d, \quad E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n} \right)^\beta,$$

où $\beta = 1 - 2\alpha/d > 1$. La condition (4.1.4) du corollaire 2 est donc vérifiée.

Chapitre 5

Tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les champs aléatoires

Nous présentons une procédure pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance d'un champ aléatoire $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ du second ordre et stationnaire.

En dimension $d = 1$, la plupart des procédures construites pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance se basent sur une estimation des variations des sommes partielles de X (on trouve par ailleurs des tests d'adéquation à des familles de modèles). Dans tous les tests développés, l'alternative consiste en des modèles de processus à longue mémoire, typiquement des processus FARIMA. Lo (1991) a proposé un test reposant sur la statistique R/S qui estime la taille de l'ensemble des valeurs prises par les sommes partielles de X . Ce test, très utilisé en pratique, a été critiqué pour sa faible puissance. Le test KPSS a été initialement développé par Kwiatkowski et al. (1992) pour tester la stationnarité (sous des hypothèses de faible dépendance) contre la présence d'une tendance déterministe ou la présence d'une racine unité. Lee et Schmidt (1996) ont remarqué que le test KPSS peut être adapté pour tester la courte mémoire contre la longue mémoire ; dans ce cas, la statistique de test repose sur une estimation du moment d'ordre deux des sommes partielles de X . Dans Giraitis et al. (2003), les auteurs introduisent la statistique V/S basée sur une estimation de la variance des sommes partielles de X ; le test qu'ils développent à partir de la statistique V/S pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance s'avère plus puissant que le test basé sur la statistique R/S et que le test $KPSS$. Il est à noter que récemment, Giraitis et al. (2002) ont proposé un test basé lui aussi sur la statistique V/S qui permet de discriminer la stationnarité de la présence de tendance déterministe ou de la présence d'une racine unité ; leur procédure, contrairement au test KPSS, englobe sous l'hypothèse nulle à la fois des processus stationnaires faiblement dépendants, mais aussi des processus à longue mémoire.

Nous présentons en première partie la généralisation à la dimension $d \geq 2$ de la statistique V/S introduite par Giraitis et al. (2003) en dimension $d = 1$. Nous donnons également dans cette partie les hypothèses sous lesquelles nous prouvons la consistance

du test : l'hypothèse nulle concerne la faible dépendance et l'hypothèse alternative englobe des situations variées de longue mémoire.

La seconde partie présente les résultats théoriques qui valident la procédure de test. La troisième partie est consacrée d'une part à la simulation de la loi limite reconstruite sous l'hypothèse nulle, d'autre part à la mise en oeuvre du test sur des champs simulés.

Enfin la quatrième partie contient les preuves des lemmes.

5.1 Hypothèses et statistique du test

L'hypothèse nulle du test est une hypothèse de courte mémoire. Il y a de nombreuses manières de supposer un champ faiblement dépendant, aussi nous nous focaliserons sur les hypothèses nécessaires pour valider le test, à savoir un contrôle des moments et la validité du théorème central limite fonctionnel classique. Ces hypothèses que nous noterons **CM** sont référencées ci-dessous. Nous montrerons par ailleurs la consistance du test sous l'hypothèse alternative **LM** qui est un cadre très général de longue mémoire.

CM : Hypothèses de courte mémoire. X est un champ aléatoire stationnaire du second ordre de fonction de covariance r tel que

CM1

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j) > 0. \quad (5.1.1)$$

CM2

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{2d}} |c_4(i, j, k)| < \infty,$$

où $c_4(i, j, k)$ représente les cumulants d'ordre 4 de X (la Définition 7 du chapitre 7 rappelle ce que sont les cumulants d'un champ aléatoire).

CM3

$$\frac{n^{-d/2}}{\sigma} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t),$$

où B est le drap brownien sur $[0, 1]^d$.

LM : Hypothèses de longue mémoire. X étant un champ aléatoire stationnaire du second ordre, on suppose qu'il existe une suite normalisatrice d_n vérifiant $d_n = n^\gamma L(n)$ où $\gamma > d/2$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini, telle que

$$d_n^{-1} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t), \quad (5.1.2)$$

où Y est un champ aléatoire non dégénéré mesurable.

Remarque 22. L'hypothèse **CM1** est classique en courte mémoire, **CM2** est une hypothèse technique et **CM3** est vérifiée dans toutes les situations de faible dépendance étudiées jusqu'à présent (voir la partie 1.3.1).

Remarque 23. Il n'existe aucun exemple de champ à longue mémoire en dimension $d = 2$ ne vérifiant pas **LM**. La partie 4.4 du chapitre 2 donne des conditions très générales sous lesquelles **LM** est vérifiée.

Pour procéder au test, on utilise la statistique de variance renormalisée nommée également V/S, généralisation en dimension $d > 1$ de celle proposée par Giraitis et al. (2003) en dimension $d = 1$.

Introduisons dans un premier temps les notations. Soit, pour $j = (j_1, \dots, j_d)$,

$$S_j^* = \sum_{i_1=1}^{j_1} \dots \sum_{i_d=1}^{j_d} (X_{i_1, \dots, i_d} - \bar{X}_n),$$

où $\bar{X}_n = n^{-d} \sum_{j \in A_n} X_j$ avec $A_n = \{1, \dots, n\}^d$. Soit q un entier dans $[1, n]$. On prendra comme estimateur de σ^2 , défini en (5.1.1),

$$\hat{s}_n^2 = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \hat{r}(j), \quad (5.1.3)$$

où $B_q = \{-q, \dots, q\}^d$, où $\omega_{q,j} = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|j_i|}{q})$ sont des poids assurant la positivité de \hat{s}_n^2 (cf la remarque 24 ci-dessous) et avec

$$\hat{r}(j) = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \dots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_{k_1, \dots, k_d} - \bar{X}_n) (X_{k_1+|j_1|, \dots, k_d+|j_d|} - \bar{X}_n).$$

La statistique V/S est finalement définie par

$$M_n = n^{-d} \frac{\widehat{Var}(S_j^*, j \in A_n)}{\hat{s}_n^2},$$

où $\widehat{Var}(S_j^*, j \in A_n) = n^{-d} \sum_{j \in A_n} (S_j^* - \bar{S}_n^*)^2$ ce qui donne en développant

$$M_n = \frac{n^{-2d}}{\hat{s}_n^2} \left[\sum_{j \in A_n} S_j^{*2} - n^{-d} \left(\sum_{j \in A_n} S_j^* \right)^2 \right]. \quad (5.1.4)$$

Remarque 24. Il est à noter que $\hat{s}_n^2 = \hat{f}_q(0)$ où \hat{f}_q est l'estimateur de la densité spectrale de X à l'aide des fenêtres de Bartlett (cf par exemple Brockwell et Davis (1991)) i.e.

$$\hat{f}_q(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \hat{r}(j) e^{-i\langle j, \lambda \rangle}.$$

Soit $I_n(\nu) = n^{-d} \left| \sum_{j \in A_n} (X_j - \bar{X}_n) e^{-i\langle j, \nu \rangle} \right|^2$ le périodogramme de X . En notant $E = [-\pi, \pi]^d$, comme $\hat{r}(j) = (2\pi)^{-d} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} I_n(\nu) d\nu$,

$$\hat{f}_q(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_E I_n(\nu) \prod_{i=1}^d \frac{1}{2\pi q} \frac{\sin^2 q(\lambda_i - \nu_i)/2}{\sin^2(\lambda_i - \nu_i)/2} d\nu.$$

Donc \hat{f}_q est toujours positif et \hat{s}_n^2 également.

5.2 Comportement asymptotique de M_n

Dans ce qui suit, l'entier q intervenant dans la définition 5.1.3 est en réalité une fonction q_n de n . Pour alléger les notations, l'indice n sera parfois omis au profit de la notation $q_n = q$. Les deux propositions suivantes établissent la consistance du test sous l'hypothèse nulle **CM** et sous l'hypothèse alternative **LM** dès que la suite q_n est choisie convenablement.

Proposition 10. *Sous l'hypothèse **CM** et en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[\int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2, \quad (5.2.1)$$

où B est le drap brownien standard sur $[0, 1]^d$.

Démonstration. On remarque que si $\frac{k}{n} \leq t_1 < \frac{k+1}{n}$, alors $S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) = S^*(k + 1, [nt_2] + 1, \dots, [nt_d] + 1)$. Ainsi

$$n^{-d} \sum_{j \in A_n} S_j^* = \int_{[0,1]^d} S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt.$$

La même égalité est vraie en remplaçant S^* par S^{*2} et la représentation (5.1.4) de M_n devient

$$M_n = \frac{n^{-d}}{\hat{s}_n^2} \left[\int_{[0,1]^d} S^{*2}([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt - \left(\int_{[0,1]^d} S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt \right)^2 \right].$$

Posons $S_n(t) = S_n(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}$, alors

$$M_n = \frac{1}{\hat{s}_n^2} \left[\int_{[0,1]^d} \left(S_n(t) - \prod_{i=1}^d \frac{[nt_i] + 1}{n} S_n(1) \right)^2 dt - \left(\int_{[0,1]^d} S_n(t) - \prod_{i=1}^d \frac{[nt_i] + 1}{n} S_n(1) dt \right)^2 \right]. \quad (5.2.2)$$

Ainsi $\hat{s}_n^2 M_n$ s'écrit comme l'action sur la fonction $S_n(\cdot)$ d'une fonctionnelle continue. La convergence vérifiée en **CM3** et l'utilisation du théorème de continuité nous donne la convergence en loi de $\frac{\hat{s}_n^2}{\sigma^2} M_n$ vers la limite annoncée en (5.2.1). Il suffit pour conclure d'utiliser la convergence en probabilité de \hat{s}_n^2 vers σ^2 établie dans le lemme suivant

Lemme 17. *Sous les hypothèses de la Proposition 10,*

$$\hat{s}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

La démonstration du lemme 17 est donnée dans la partie 5.4 ; on y remarque qu'en fait la condition **CM3** est inutile pour prouver le lemme 19. \square

Proposition 11. *Sous l'hypothèse **LM** et en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n^\delta = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Démonstration. D'après l'écriture (5.2.2) de M_n , on peut utiliser la convergence (5.1.2) et le théorème de continuité pour obtenir la convergence suivante :

$$\hat{s}_n^2 \frac{n^d}{d_n^2} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left(Y(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) Y(1) \right)^2 dt - \left(\int_{[0,1]^d} Y(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) Y(1) dt \right)^2.$$

On utilise enfin le lemme suivant :

Lemme 18. *Sous les hypothèses de la Proposition 11,*

$$\frac{n^d}{d_n^2} \hat{s}_n^2 \xrightarrow{P} 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration du lemme 18 est donnée dans la partie 5.4. \square

La condition sur la vitesse de divergence de q imposée dans la Proposition 11 n'est pas celle que l'on rencontre dans les travaux équivalents en dimension $d = 1$ (comme par exemple dans Giraitis et al. (2003) ou dans Giraitis et al. (2002)). Dans ces articles, la suite q est supposée vérifier les mêmes conditions de divergence sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative, c'est à dire $q \rightarrow \infty$ et $q/n \rightarrow 0$. En pratique, la suite q est à choisir en fonction de n et il n'est pas plus contraignant de lui imposer les conditions de divergence présentes dans la Proposition 11 que celles présentes dans la Proposition 10. Nous montrons néanmoins qu'en se plaçant sous l'hypothèse alternative **LM'** suivante, nous retrouvons les hypothèses sur q de la Proposition 10. Cela montre que les hypothèses sur q imposées dans la Proposition 11 ne semblent pas témoigner d'une spécificité due à la dimension. Nous nous focalisons pour cela sur des modèles de champs à longue mémoire plus particuliers que dans **LM** :

LM' : X est un champ aléatoire centré, admettant une densité spectrale et vérifiant une des deux hypothèses suivantes

- (i) Sa densité spectrale f est homogène de degré $2\alpha < 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \prod_{i=1}^d [1 \wedge \lambda_i^{-2}] d\lambda < \infty$$

et **LM** est vérifiée avec $d_n = n^{d/2-\alpha}$.

- (ii) En dimension $d \leq 2$, la densité spectrale de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est équivalente en 0 à une fonction homogène \tilde{f} de degré $2\alpha < 0$ garantissant $\int_E \tilde{f}(x)dx < \infty$. On suppose de plus **LM** avec $d_n = n^{d/2-\alpha}$.

Remarque 25. Les hypothèses de longue mémoire **LM'** sont vérifiées pour les champs obtenus par filtrage considérés dans le chapitre 2 (voir les Théorèmes 15 et 17).

Proposition 12. *Sous l'hypothèse **LM'** et en choisissant q fonction de n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q/n = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la Proposition 11. Elle repose sur le lemme suivant.

Lemme 19. *Sous l'hypothèse **LM'**, en choisissant q fonction de n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q/n = 0$, on a*

$$\frac{n^d}{d_n^2} \hat{s}_n^2 \xrightarrow{P} 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 5.4. □

5.3 Simulations en dimension $d = 2$

Nous simulons dans un premier temps la loi asymptotique de M_n sous l'hypothèse nulle. D'après la Proposition 10 il s'agit de la loi de

$$\int_{[0,1]^2} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^2 t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[\int_{[0,1]^2} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^2 t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2, \quad (5.3.1)$$

où B est le drap brownien standard sur $[0,1]^2$. L'expression (5.3.1) se réécrit après développement

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2)^2 dt_1 dt_2 - 2B(1, 1) \int_{[0,1]^2} t_1 t_2 B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \left(\int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^2 \\ + \frac{B(1, 1)}{2} \int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \frac{7}{144} B(1, 1)^2. \end{aligned}$$

Pour simuler une réalisation suivant cette loi, nous approchons chaque intégrale par une somme de Riemann

$$\int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right),$$

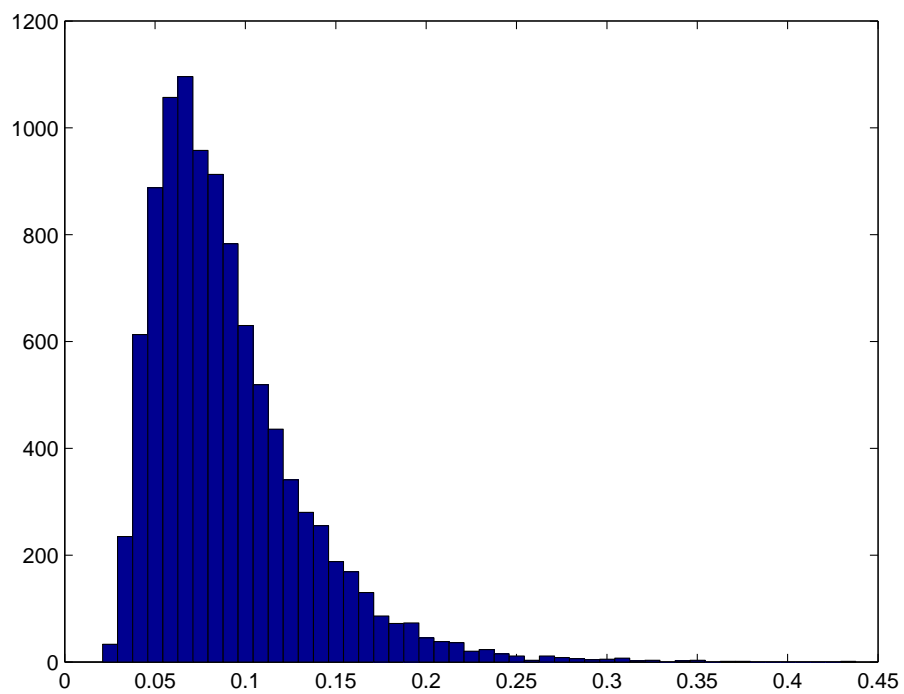
$$\int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2)^2 dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)^2,$$

$$\int_{[0,1]^2} t_1 t_2 B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \frac{k_1}{n} \frac{k_2}{n} B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right);$$

et, étant donné une réalisation d'un bruit blanc gaussien $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}^2}$, une réalisation de $(B(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}))_{1 \leq k_1, k_2 \leq n}$ est donnée par

$$B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \varepsilon_{j_1, j_2}, \quad \forall (k_1, k_2) \in \{1, \dots, n\}^2.$$

Nous avons choisi $n = 7000$ dans les approximations précédentes et 10 000 réalisations de la loi (5.3.1) ont alors été tirées. L'histogramme de l'échantillon résultant est le suivant :



A partir de l'échantillon, nous relevons les statistiques suivantes :

m	v	$c_{90\%}$	$c_{95\%}$
0,0897	0,0018	0,1448	0,1692

où m représente la moyenne, v la variance empirique, $c_{90\%}$ et $c_{95\%}$ les quantiles d'ordre respectifs 90% et 95%.

Les simulations qui suivent ont pour objectif d'évaluer la qualité du test dans différentes situations de dépendance. Sous l'hypothèse alternative, les champs fortement dépendants sont simulés soit par filtrage soit par agrégation conformément aux modèles présentés dans le chapitre 2. Le temps de calcul nécessaire à ces simulations est malheureusement trop long pour considérer de gros échantillons. Nous restreignons à des champs de taille 50×50 . Nos simulations sont donc insuffisantes à une évaluation convenable du test ; elles soulignent néanmoins un lien étroit entre sa puissance et la structure de forte dépendance du champ sous l'alternative.

5.3.1 Choix de q

A n fixé, le choix de q intervenant dans la définition de M_n est problématique. Nous décidons de le choisir en fonction de la qualité du test sous l'hypothèse nulle. Plus précisément, nous retenons le q pour lequel la loi de M_n sous différentes situations de faible dépendance est la plus proche possible de la loi asymptotique (5.3.1).

Nous avons calculé M_n pour $n = 50$ et pour différentes valeurs de q sur 10000 champs i.i.d gaussiens. En notant $\overline{M_n}$ la moyenne de l'échantillon résultant, \hat{s}_n^2 sa variance et $\hat{c}_{95\%}$ son quantile d'ordre 95%, nous obtenons :

	$q = 4$	$q = 6$	$q = 8$	$q = 10$	$q = 12$	$q = 14$
$\overline{M_n}$	0,0919	0,0923	0,0929	0,0939	0,0953	0,0970
\hat{s}_n^2	0,0016	0,0015	0,0013	0,0011	0,0010	0,0009
$\hat{c}_{95\%}$	0,1720	0,1678	0,1644	0,1599	0,1566	0,1531

Le calcul de M_n sur 10000 réalisations d'un champ autorégressif de type produit suivant la représentation $(1 - 0.5L_1)(1 - 0.3L_2)X_{n_1, n_2} = \varepsilon_{n_1, n_2}$ donne :

	$q = 6$	$q = 8$	$q = 10$	$q = 12$	$q = 14$
$\overline{M_n}$	0,1300	0,1157	0,1087	0,1051	0,1035
\hat{s}_n^2	0,0035	0,0024	0,0018	0,0015	0,0012
$\hat{c}_{95\%}$	0,2464	0,2133	0,1922	0,1784	0,1697

Au vu des résultats précédents, nous choisissons de retenir $q = 8$ pour $n = 50$, ce qui semble un compromis acceptable entre les performances relevées dans le cas d'un champ i.i.d et dans le cas du champ autorégressif précédent.

Remarque 26. La différence notable entre les répartitions empiriques rencontrées ci-dessus et la loi asymptotique (5.3.1) confirme l'insuffisance de la taille de nos échantillons pour une évaluation correcte du test.

5.3.2 Simulations sous différentes alternatives

Nous implémentons le test sur différents champs aléatoires à longue mémoire provenant de modèles présentées dans le chapitre 2. Tous les champs simulés sont gaussiens de taille 50×50 . Le calcul de M_n se fait avec le choix $q = 8$.

Nous avons simulé dans un premier temps des champs à longue mémoire de type produit semblables à ceux présentés dans l'exemple 1 de la partie 2.2.2 où nous avons choisi g_a et g_b toutes deux proportionnelles à $(1 - x)^\gamma$ et $N = 1000$. L'implémentation du test sur 1000 réalisations de ces champs conduit à l'estimation de la puissance \hat{p} suivante :

γ	0,25	0,5	0,75
\hat{p}	81%	75,4%	62,4%

La puissance du test est bonne. Elle se dégrade comme attendu lorsque γ croît car la forte dépendance est alors de moins en moins prononcée.

Nous avons ensuite implémenté le test sur 1000 réalisations d'un champ à longue mémoire isotrope construit comme dans l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\theta = 0$, $e = 1$ et α valant -0.48, -0.35 puis -0.2. Les résultats sont les suivants :

α	-0,48	-0,35	-0,2
\hat{p}	75%	58,1%	32,7%

Lorsque la forte dépendance est isotrope, la puissance du test semble moins bonne que dans le cas d'une longue mémoire de type produit. La puissance reste cependant acceptable lorsque la forte dépendance est prononcée (lorsque $|\alpha|$ est élevé) mais elle décroît lorsque $|\alpha|$ décroît.

Enfin, suivant la procédure d'agrégation de l'exemple 2 de la partie 2.2.2 où nous avons choisi $k = 1$, $N = 1000$ et g proportionnelle à $(1 - x)^\gamma$, nous avons simulé des champs à longue mémoire non-isotrope dont la forte dépendance n'a lieu que dans une direction. L'implémentation du test sur 1000 réalisations donne :

γ	0,25	0,5	0,75
\hat{p}	27%	27%	24,5%

Dans ce cas, la puissance est assez faible. Cela peut s'expliquer par la petite taille de l'échantillon qui ne permet pas de capter la forte dépendance, présente uniquement dans une seule direction.

5.4 Preuve des lemmes

Preuve du lemme 17

La démonstration est une adaptation de celle de Giraitis et al. (2003) au cadre des champs.

En notant

$$\tilde{r}_j = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_{k_1, \dots, k_d} - \mu) (X_{k_1+|j_1|, \dots, k_d+|j_d|} - \mu)$$

où μ est l'espérance de X , on décompose \hat{s}_n^2 de la façon suivante

$$\hat{s}_n^2 = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \tilde{r}_j + \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} (\hat{r}_j - \tilde{r}_j) := u_n + v_n, \quad (5.4.1)$$

où u_n représente la première somme et v_n la seconde. Nous allons montrer dans un premier temps que $E(|v_n|) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ puis que $u_n \rightarrow \sigma^2$ en probabilité.

Quelques manipulations conduisent à

$$\hat{r}_j - \tilde{r}_j = \prod_{i=1}^d \left(1 - \frac{|j_i|}{n}\right) (\bar{X}_n - \mu)^2 - n^{-d} (\bar{X}_n - \mu) \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} ((X_k - \mu) + (X_{k+|j|} - \mu)).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} E(|v_n|) &\leq \sum_{j \in B_{q-1}} E |\hat{r}_j - \tilde{r}_j| \\ &\leq \sum_{j \in B_{q-1}} \left\{ E (\bar{X}_n - \mu)^2 + n^{-d} \sqrt{E (\bar{X}_n - \mu)^2} \left[\sqrt{E \left(\sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_k - \mu) \right)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{E \left(\sum_{k_1=|j_1|}^n \cdots \sum_{k_d=|j_d|}^n (X_k - \mu) \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse **CM1**, si $r_i < s_i$ pour tout $i = 1 \dots d$,

$$E \left(\sum_{i_1=r_1}^{s_1} \cdots \sum_{i_d=r_d}^{s_d} (X_i - \mu) \right)^2 = \sum_{i_1, i'_1=r_1}^{s_1} \cdots \sum_{i_d, i'_d=r_d}^{s_d} r(i - i') \leq c \prod_{i=1}^d (s_i - r_i),$$

où c est une constante strictement positive. Ainsi

$$E(|v_n|) \leq c \sum_{j \in B_{q-1}} \left(n^{-d} + 2n^{-d} n^{-d/2} \prod_{i=1}^d \sqrt{n - |j_i|} \right) \leq c q^d n^{-d}$$

et la convergence vers 0 du terme de droite est assurée dès que q/n tend vers 0.

Montrons maintenant que u_n , définie en (5.4.1), converge en probabilité vers σ^2 lorsque n tend vers l'infini. On remarque tout d'abord que

$$E(u_n) = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \left(\prod_{i=1}^d \frac{n - |j_i|}{n} \right) r(j) \rightarrow \sigma^2;$$

il suffit pour le voir de séparer la somme en deux selon que, pour $i = 1 \dots d$, $|j_i| \leq [\sqrt{q}]$ ou $|j_i| > [\sqrt{q}]$.

D'après (5.4.1), il suffit donc, pour prouver que \hat{s}_n^2 converge en probabilité vers σ^2 , de montrer que $E(u_n - E(u_n))^2$ converge vers 0.

$$\begin{aligned} E(u_n - E(u_n))^2 &= E \left(\sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} [\tilde{r}(j) - E(\tilde{r}(j))] \right)^2 \\ &= \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \omega_{q,j} \omega_{q,j'} \text{cov}(\tilde{r}(j), \tilde{r}(j')) \\ &\leq \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} |\text{cov}(\tilde{r}(j), \tilde{r}(j'))| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |\text{cov}((X_k - \mu)(X_{k+|j|} - \mu), (X_{k'} - \mu)(X_{k'+|j'|} - \mu))|. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition des cumulants,

$$\begin{aligned} &\text{cov}((X_k - \mu)(X_{k+|j|} - \mu), (X_{k'} - \mu)(X_{k'+|j'|} - \mu)) = \\ &\text{cum}(X_k, X_{k+|j|}, X'_k, X'_{k'+|j'|}) + r(k - k')r(k' - k + |j'| - |j|) + r(k - k' - |j'|)r(k - k' + |j|). \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant **CM2**,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |\text{cum}(X_k, X_{k+|j|}, X'_k, X'_{k'+|j'|})| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{k \in A_n} \sum_{i, i' \in B_{2n}} |\text{cum}(X_0, X_{|j|}, X_i, X_{i'})| \\ &\leq \frac{1}{n^d} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{i, i' \in B_{2n}} |c_4(|j|, i, i')| \\ &\leq c \left(\frac{q}{n} \right)^d, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive.

D'autre part

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |r(k - k')r(k' - k + |j'| - |j|) + r(k - k' - |j'|)r(k - k' + |j|)| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{k \in A_n} \sum_{i, i' \in B_{2n}} 2|r(i)r(i')| \\ &\leq c \left(\frac{q}{n} \right)^d, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive.

Finalement $E(u_n - E(u_n))^2$ converge vers 0 dès que $q/n \rightarrow 0$ et le lemme est montré.

Preuve du lemme 18

On part de la même décomposition qu'en (5.4.1). On remarque que $E(|v_n|) < cq^d$ de façon trivial. D'autre part

$$\begin{aligned}
E(u_n) &= \sum_{j \in B_{q-1}} r(j) \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\
&= \sum_{j \in B_{q-1}} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} f(\lambda) d\lambda \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\
&= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(\hat{s}_n^2) \leq cq^d,$$

et donc

$$\frac{n^d}{d_n^2} E(\hat{s}_n^2) \leq cq^d \frac{n^d}{n^{2\gamma} L(n)}$$

ce qui montre le lemme 18 puisque $qn^{-\delta} \rightarrow 0$ pour tout $\delta > 0$.

Preuve du lemme 19

Nous devons montrer que $n^{2\alpha} \hat{s}_n^2$ converge vers 0 en probabilité.

$$\begin{aligned}
E(\hat{s}_n^2) &= \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} E(\hat{r}_j) \\
&= \sum_{j \in B_{q-1}} r(j) \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\
&= \sum_{j \in B_{q-1}} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} f(\lambda) d\lambda \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\
&= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

Le lemme suivant donne quelques propriétés du noyau

$$K_n(x) = \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Lemme 20. *Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,*

$$K_n(x) = K_{1,n}(x) + K_{2,n}(x) \quad (5.4.2)$$

où

$$K_{1,n}(x) = \frac{n - q \sin^2(qx/2)}{nq \sin^2(x/2)},$$

$$K_{2,n}(x) = \frac{1}{\sin^4(x/2)} \left(\frac{1}{n} \sin^2(x/2) - \frac{1}{4qn} \sin qx \sin x \right).$$

On a de plus les propriétés suivantes.

(i) $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} K_{1,n}(x) \leq cq$ et $\sup_{|x| > \delta} K_{1,n}(x) \leq cq^{-1}$, où c est une constante strictement positive indépendante de n .

(ii) $\forall x \in [-q\pi, q\pi], K_{1,n}(x/q) \leq cq(1 \wedge x^{-2})$.

(iii) $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ et $\sup_{|x| > \delta} K_{2,n}(x) \leq cn^{-1}$, où c est une constante strictement positive indépendante de n .

(iv) $\forall x \in [-q\pi, q\pi], K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} (1 \wedge x^{-2})$.

Démonstration du lemme 20.

$$K_n(x) = \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} \left(1 - \frac{|j|}{q} \right) \left(1 - \frac{|j|}{n} \right)$$

$$= \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} - 2 \frac{n+q}{nq} \sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) + \frac{2}{nq} \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx). \quad (5.4.3)$$

Le développement de $\sum_{j=1}^{q-1} e^{ijx}$ ainsi que celui de ses dérivées par rapport à x nous donne

$$\sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) = \frac{q \cos(q-1)x - (q-1) \cos qx - 1}{4 \sin^2(x/2)},$$

$$\sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx) =$$

$$\frac{(q-1)^2 \cos(q+1)x - q(3q-4) \cos qx + (q-1)(3q+1) \cos(q-1)x - q^2 \cos(q-2)x}{16 \sin^4(x/2)}.$$

On peut remanier ces expressions à l'aide de formules trigonométriques pour obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} &= \frac{\sin(q-1/2)x}{\sin(x/2)}, \\ \sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) &= \frac{q \sin(q-1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{\sin^2(qx/2)}{2 \sin^2(x/2)}, \\ \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx) &= \frac{q^2 \sin(q-1/2)x}{2 \sin(x/2)} + \frac{q \cos qx}{2 \sin^2(x/2)} - \frac{\sin qx \sin x}{8 \sin^4(x/2)}.\end{aligned}$$

Les trois expressions précédentes, utilisées dans (5.4.3), nous donnent (5.4.2).

A une constante multiplicative près, $K_{1,n}$ est toujours inférieur au noyau de Fejer F_q ce qui nous donne les propriétés (i) et (ii). Pour le (iii), le développement en série entière de $K_{2,n}(x)$ pour $|x| < \pi/q$ donne

$$K_{2,n}(x) = \frac{2q^2}{3n} \left(1 + \frac{1}{2q^2}\right) - \frac{q^4}{30n} \left(1 - \frac{1}{q^4}\right) x^2 + O(x^4).$$

Ainsi $K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ pour tout $|x| < \pi/q$ où c est une constante strictement positive. Par ailleurs en écrivant $K_{2,n}(x)$ sous la forme suivante

$$K_{2,n}(x) = \frac{4}{nx^2} \left(\frac{(x/2)^2}{\sin^2(x/2)} - \cos(x/2) \frac{\sin qx}{qx} \frac{(x/2)^3}{\sin^3(x/2)} \right), \quad (5.4.4)$$

on voit que $K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ pour $|x| \geq \pi/q$ où c est une constante strictement positive. Maintenant si $|x| \geq \delta$, l'écriture (5.4.4) nous montre directement que $K_{2,n} \leq cn^{-1}$ où c ne dépend que de δ . Le (iii) est ainsi montré.

Enfin d'après (5.4.4), il est clair que $K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} x^{-2}$ de telle sorte que, grâce à (iii), on peut trouver une constante strictement positive c telle que pour tout x dans $[-q\pi, q\pi]$, $K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} (1 \wedge x^{-2})$. \square

Nous utilisons à présent les propriétés de K_n pour étudier

$$E(\hat{s}_n^2) = \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda \quad (5.4.5)$$

lorsque le champ X vérifie **LM'**.

Supposons dans un premier temps que X vérifie l'hypothèse (i) de **LM'**. L'expression (5.4.5) s'écrit

$$\begin{aligned}E(\hat{s}_n^2) &= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \int_E f(\lambda) \prod_{j=1}^k K_{1,n}(\lambda_{i_j}) \prod_{j=k+1}^d K_{2,n}(\lambda_{i_j}) d\lambda,\end{aligned} \quad (5.4.6)$$

où C_d^k est l'ensemble des vecteurs (i_1, \dots, i_d) dont les k premiers éléments (i_1, \dots, i_k) sont les combinaisons de k éléments dans $\{1, \dots, d\}$ et les $n - k$ autres éléments sont le complémentaire de (i_1, \dots, i_k) dans $(1, \dots, d)$. On convient que pour toute suite u_j $\prod_{j=1}^0 u_j = 1$ et $\prod_{j=d+1}^d u_j = 1$.

Un changement de variables et l'homogénéité de f donnent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \int_E f(\lambda) \prod_{j=1}^k K_{1,n}(\lambda_{i_j}) \prod_{j=k+1}^d K_{2,n}(\lambda_{i_j}) d\lambda \\ = \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} q^{-2\alpha} \int_{qE} f(\lambda) \prod_{j=1}^k \frac{1}{q} K_{1,n} \left(\frac{\lambda_{i_j}}{q} \right) \prod_{j=k+1}^d \frac{1}{q} K_{2,n} \left(\frac{\lambda_{i_j}}{q} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

On utilise à présent le (ii) et le (iv) du lemme 20 et

$$E(\hat{s}_n^2) \leq cq^{-2\alpha} \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \prod_{j=k+1}^d \frac{q}{n} \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) \prod_{j=1}^d [1 \wedge \lambda_j^{-2}] d\lambda. \quad (5.4.7)$$

Comme $q/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient $E(\hat{s}_n^2) = o(n^{-2\alpha})$, le résultat recherché.

Supposons à présent que X vérifie l'hypothèse (ii) de **LM'**. On montre le résultat pour $d = 2$, le cas $d = 1$ s'en déduit facilement.

$$\begin{aligned} E(\hat{s}_n^2) = \int_E (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ + \int_E \tilde{f}(\lambda) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

La dernière intégrale est un $o(n^{-2\alpha})$. En effet, le raisonnement conduisant à (5.4.7) peut être réitéré car \tilde{f} est homogène et vérifie nécessairement $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\lambda) \prod_{i=1}^2 [1 \wedge \lambda_i^{-2}] d\lambda < \infty$ lorsque $d \leq 2$ (voir le lemme 8 du chapitre 3).

En notant $\|\cdot\|$ la norme sup dans \mathbb{R}^2 , la première intégrale de (5.4.8) se décompose en

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda| < \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ + \int_{|\lambda| > \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Puisque $f \sim \tilde{f}$ en 0, on peut choisir δ tel que

$$\int_{|\lambda| < \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \leq \int_E \tilde{f}(\lambda) \prod_{k=1}^d (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda$$

qui est alors un $o(n^{-2\alpha})$. Il reste à traiter la dernière intégrale dans (5.4.9).

$$\begin{aligned}
& \int_{|\lambda|>\delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\
& \leq \int_{|\lambda_1|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_1 d\lambda_2 \\
& \quad + \int_{|\lambda_2|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_2 d\lambda_1.
\end{aligned}$$

Ces deux dernières intégrales se traitent de la même manière. Montrons par exemple que la première est un $o(1)$ donc à plus forte raison un $o(n^{-2\alpha})$. D'après les propriétés (i) et (iii) du lemme 20, on a pour n assez grand,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\lambda_1|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_1 d\lambda_2 \\
& \leq \frac{c}{q} \int_{-\pi}^{\pi} (K_{1,n}(\lambda_2) + K_{2,n}(\lambda_2)) \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) d\lambda_1 \right) d\lambda_2, \quad (5.4.10)
\end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive dépendant de δ . Soit $g(\lambda_2) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) d\lambda_1$. D'après le lemme 20, la fonction

$$\frac{1}{q} (K_{1,n}(\lambda_2) + K_{2,n}(\lambda_2)) g(\lambda_2)$$

est, à une constante près, uniformément bornée par g qui est intégrable sur $[-\pi, \pi]$. De plus elle tend presque sûrement vers 0. Par application du théorème de convergence dominée le majorant dans (5.4.10) converge donc vers 0.

Chapitre 6

Processus empirique de fonctionnelles de champs gaussiens à longue mémoire et applications

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique du processus empirique d'une fonction d'un champ gaussien à longue mémoire. Nous considérons ici le processus empirique doublement indexé par $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]^d$. Il est défini, à une normalisation près dépendante de n , par

$$\sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} \left[I_{\{G(X_{k_1, \dots, k_d}) \leq x\}} - F(x) \right], \quad (6.0.1)$$

où G est une fonction mesurable et où F est la fonction de répartition du champ aléatoire $(G(X_k))_{k \in \mathbb{Z}^d}$.

En dimension $d = 1$, cette étude a été effectuée par Dehling et Taqqu (1989) sous l'hypothèse où X est gaussien et où sa fonction de covariance vérifie $r(h) = h^\alpha L(h)$ où $-1 < \alpha < 0$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini. Ces auteurs montrent la dégénérescence asymptotique du processus limite, celui-ci ayant la forme $f(x)Z(t)$, où f est une fonction déterministe et Z un champ aléatoire.

Ce comportement, en dimension $d = 1$, semble être une caractéristique exclusive des processus à longue mémoire et l'on peut se demander si cette dégénérescence persiste dans le cadre plus large des champs.

En dimension d quelconque, la convergence de (6.0.1) est étudiée en $t = 1$ dans Doukhan et al. (2002) lorsque G est la fonction identité et lorsque le champ stationnaire X est linéaire et à longue mémoire isotrope. Le résultat de ces auteurs montre la même dégénérescence asymptotique du processus empirique que celle qui se produit en dimension $d = 1$.

Dans le corollaire 3, nous reprenons l'étude de Doukhan et al. (2002) et montrons, pour un champ gaussien à longue mémoire isotrope, et pour une fonction G quelconque, la convergence du champ (6.0.1) proprement normalisé dans l'espace $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}} \times [0, 1]^d)$. Ce travail étend donc aux dimensions $d \geq 2$ celui de Dehling et Taqqu (1989).

Nous supposons ensuite, dans les corollaires 4 et 5, que le champ X est linéaire, gaussien et qu'il est à forte dépendance non-isotrope. Nous établissons alors la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, 1]^d)$ du processus empirique proprement normalisé lorsque le rang de Hermite de G vaut 1.

L'ensemble de ces résultats repose sur le principe de réduction uniforme introduit par Dehling et Taqqu (1989), que nous généralisons dans le théorème 1. Il lie le comportement asymptotique du processus empirique d'un champ aléatoire à longue mémoire à celui de ses sommes partielles.

Dans la section 6.1, nous établissons le principe de réduction uniforme et nous obtenons en application la convergence du processus empirique doublement indexé dans diverses situations de longue mémoire. La loi limite du processus empirique nous permet, dans la partie 6.2, d'obtenir le comportement asymptotique des U-statistiques et des statistiques de Von-Mises d'un champ fortement dépendant. Enfin la section 6.3 contient la preuve du théorème 1.

6.1 Convergence du processus empirique dans différentes situations de forte dépendance

Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ un champ gaussien stationnaire de fonction de covariance r tel que $r(0) = 1$. Soit G une fonction mesurable. On considère le développement suivant sur la base des polynômes de Hermite :

$$I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) = \sum_{q=m}^{\infty} \frac{J_q(x)}{q!} H_q(X_j),$$

où $F(x) = P(G(X_1) \leq x)$ est la fonction de répartition de $G(X_1)$. H_q est le polynôme de Hermite de degré q et

$$J_q(x) = E \left[I_{\{G(X_1) \leq x\}} H_q(X_1) \right]. \quad (6.1.1)$$

m est appelé le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_1) \leq x\}} - F(x)$. Soit

$$R_n(x) = \sum_{j \in A_n} \left[I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) - \frac{J_m(x)}{m!} H_m(X_j) \right],$$

où $A_n = \{1, \dots, n\}^d$.

Théorème 18. *Avec les notations précédentes, soit*

$$d_N^2 = \text{Var} \left(\sum_{j \in A_N} H_m(X_j) \right) = m! \sum_{j, k \in A_N^2} r^m(k - j). \quad (6.1.2)$$

Si $\lim_{N \rightarrow \infty} d_N = \infty$, on a, pour tout $\delta > 0$ et tout $n \leq N$,

$$P \left(\sup_x d_N^{-1} |R_n(x)| > \varepsilon \right) \leq C(\varepsilon) N^\delta d_N^{-2} \sum_{j, k \in A_N^2} |r(k - j)|^{m+1} + \frac{d_n^2}{N^{2d}}, \quad (6.1.3)$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante positive qui dépend de ε .

La démonstration du Théorème 18 se trouve dans la partie 6.3.1.

Si l'on connaît la distribution limite de $d_N^{-1} \sum_{j \in A_N} H_m(X_j)$, l'inégalité (6.1.3) nous fournit le comportement asymptotique du processus empirique (6.0.1) dès que le majorant dans (6.1.3) tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Nous présentons des corollaires dans lesquels ces deux conditions sont remplies. Le premier concerne des champs à longue mémoire isotrope tels qu'étudiés dans Dobrushin et Major (1979). Les autres concernent des situations de longue mémoire non isotrope : nous considérons d'une part des champs à longue mémoire de type produit et d'autre part des champs dont la densité spectrale est singulière sur des sous espaces linéaires de $[-\pi, \pi]^d$.

6.1.1 Longue mémoire isotrope

Le corollaire suivant donne la convergence du processus empirique d'une fonctionnelle d'un champ gaussien à longue mémoire isotrope.

La limite fait intervenir le processus de Hermite Z_m de degré m défini dans le chapitre introductif par (1.3.4).

Corollaire 3. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit G une fonction mesurable et F la fonction de répartition de $G(X_n)$.*

Soit m le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_1) \leq x\}} - F(x)$ et soit $J_m(x)$ défini par (6.1.1).

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b \left(\frac{k}{|k|} \right), \quad (6.1.4)$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$, où L est une fonction à variation lente à l'infini et où b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} [I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x)] \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} \frac{J_m(x)}{m!} Z_m(t),$$

où la convergence a lieu dans $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes et où Z_m représente le processus de Hermite de degré m .

Démonstration. D'après le Théorème 16, lorsque N tend vers l'infini,

$$d_N^2 \sim N^{2d-m\alpha} (L(N))^m. \quad (6.1.5)$$

Cherchons d'autre part l'ordre de $\sum_{j,k \in A_N} |r(k-j)|^{m+1}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k \in A_N} |r(k-j)|^{m+1} \\ & \leq N^d + 2^d \sum_{k \in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)\alpha} L(|k|)^{m+1} \left(b \left(\frac{k}{|k|} \right) \right)^{m+1} \prod_{j=1}^d (N - k_j) \\ & \leq N^d + cN^d \sum_{k \in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)\alpha} L(|k|)^{m+1}, \end{aligned}$$

car la fonction b est bornée, c étant une constante strictement positive. Le théorème de Potter sur les fonctions à variation lente (cf. Bingham et al. (1987)) affirme que si $y \leq x$ alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante c telle que

$$L(y) \leq c \left(\frac{y}{x} \right)^{-\eta} L(x).$$

Nous appliquons cette inégalité à $y = |k|$ et $x = dN$ en choisissant $\eta < \alpha$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in A_N} |r(k-j)|^{m+1} & \leq N^d + cN^d \sum_{k \in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)(\alpha+\eta)} L(dN)^{m+1} (dN)^{(m+1)\eta} \\ & \leq N^d + cN^{2d-(m+1)\alpha} L(N)^{m+1} \frac{L(dN)^{m+1}}{L(N)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Comme L est une fonction à variation lente, $L(dN)/L(N)$ est borné et l'on obtient finalement

$$\sum_{j,k \in A_N} |r(k-j)|^{m+1} = O(N^{2d-(m+1)\alpha} L(N)^{m+1}) + O(N^d). \quad (6.1.6)$$

Ainsi, grâce à (6.1.5) et (6.1.6), on voit que le terme de droite dans l'inégalité (6.1.3) converge vers 0 dès que $\delta < \alpha \wedge (d - m\alpha)$.

On a donc :

$$\left\| \frac{1}{N^{d-m\alpha/2} (L(N))^{m/2}} \sum_{j \in A_{[Nt]}} \left[I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) - \frac{J_m(x)}{m!} H_m(X_j) \right] \right\|_{\infty} \longrightarrow 0 \quad (6.1.7)$$

en probabilité où la norme considérée est la norme uniforme par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et la variable $t \in [0, 1]^d$.

Dobrushin et Major (1979) obtiennent la convergence des lois fini-dimensionnelles des sommes partielles du processus $H_m(X_j)$ vers le processus de Hermite Z_m . Le Théorème 16 montre que cette convergence a lieu dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$. Le processus Z_m appartenant à $C([0, 1]^d)$, on peut donc, d'après le théorème de représentation de Skorohod et Dudley, trouver une version \tilde{Z}_m de Z_m et une version $\tilde{Z}_{m,N}$ des sommes partielles normalisées telles que

$$\|\tilde{Z}_{m,N}(\cdot) - \tilde{Z}_m(\cdot)\|_{\mathcal{D}([0,1]^d)} \xrightarrow{p.s.} 0,$$

la norme considérée étant la norme uniforme. D'où

$$\|J_m(\cdot)\tilde{Z}_{m,N}(\cdot) - J_m(\cdot)\tilde{Z}_m(\cdot)\|_{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} \xrightarrow{p.s.} 0,$$

J_m étant fonction bornée dépendante de $x \in \mathbb{R}$ et Z_m étant fonction de $t \in [0,1]^d$. Ainsi

$$J_m(x)d_N^{-1} \sum_{j \in A_{[Nt]}} H_m(X_j) \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} J_m(x)Z_m(t). \quad (6.1.8)$$

L'espace $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ n'étant pas séparable, il convient de considérer la tribu engendrée par les boules ouvertes plutôt que la tribu borelienne pour rendre le processus empirique mesurable dans cet espace (cf. par exemple Pollard (1984)). La convergence faible considérée dans $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ ci-dessus est donc à entendre dans cette tribu.

Finalement (6.1.7) et (6.1.8) nous donnent la convergence annoncée. \square

6.1.2 Longue mémoire non-isotrope

Nous donnons à présent des résultats de convergence du processus empirique de champs à longue mémoire non isotrope. Comme notre démarche s'appuie sur l'inégalité (6.1.3), elle nécessite la limite des sommes partielles de $H_m(X)$. Lorsque X est à longue mémoire non isotrope, le comportement de ces sommes partielles est obtenu dans les Théorèmes 15 et 17 du chapitre 4 dans le cas où $m = 1$. C'est pourquoi, dans les résultats suivants, nous supposons que le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_n) \leq x\}} - F(x)$ vaut 1 (c'est par exemple le cas lorsque G est la fonction identité).

Dans un premier temps nous focalisons notre étude sur des champs gaussiens à longue mémoire de type produit.

Corollaire 4. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ gaussien stationnaire de densité spectrale bornée. On considère le champ linéaire*

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k},$$

où les (a_k) sont, à une constante normalisatrice près garantissant $\text{Var}(X_1) = 1$, les coefficients de Fourier du filtre

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^d s(\lambda_j) |\lambda_j|^{\alpha_j}, \quad (6.1.9)$$

où, pour tout j , $-1/2 < \alpha_j < 0$ et où s_j est borné, continue en 0 tel que $s_j(0) \neq 0$.

Soit G une fonction mesurable et F la fonction de répartition de $G(X_n)$. On suppose que le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_n) \leq x\}} - F(x)$ vaut 1.

Alors,

$$\frac{1}{n^{d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} (I_{\{G(X_{j_1 \dots j_d}) \leq x\}} - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} J_1(x) B_f(t),$$

où

$$J_1(x) = E[I_{\{G(X_1) \leq x\}} X_1],$$

et où la convergence a lieu dans $D(\overline{\mathbb{R}} \times [0, 1]^d)$ muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes. Le champ $B_f(t)$ est le champ limite intervenant dans (4.4.2); dans le cas particulier où ε est un bruit blanc, il s'agit, à une constante près, du drap brownien fractionnaire

$$B_f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d s_j(0) |\lambda_j|^{\alpha_j} \frac{e^{it_j \lambda_j} - 1}{i \lambda_j} dW(\lambda),$$

où W est le champ spectral associé au bruit blanc gaussien.

Remarque 27. On ne peut pas alléger l'hypothèse (6.1.9) sur a en ne spécifiant qu'un équivalent du filtre en 0, ce qui suffit pourtant à obtenir la convergence des sommes partielles (cf. le Théorème 17). Alors que les pôles non-nuls de la densité spectrale de X ne jouent aucun rôle dans le comportement asymptotique de ses sommes partielles, ils peuvent modifier celui du processus empirique. Ould Haye (2002) a montré en effet, en dimension $d = 1$, que le comportement asymptotique du processus empirique pouvait être gouverné non pas par le premier terme dans son développement de Hermite mais par son second terme, et ce à cause des pôles non nuls de sa densité spectrale. C'est par exemple le cas lorsque la densité spectrale du processus considéré s'écrit

$$f(\lambda) = |\lambda|^{\alpha_0} |\lambda^2 - 1|^{\alpha_1} \quad (6.1.10)$$

avec $-1 < \alpha_1 < -1/2$ et $2\alpha_1 < \alpha_0 - 1$. En dimension $d = 2$, le même phénomène se produira en considérant par exemple un filtre de type produit tensoriel i.e. $a(\lambda_1, \lambda_2) = a_1(\lambda_1)a_2(\lambda_2)$ dont l'une des composantes vaut (6.1.10) et l'autre est constante; son seul équivalent en 0, qui est de la forme (6.1.9), ne suffira donc pas à donner le comportement asymptotique du processus empirique associé.

Démonstration. Dans ce qui suit, c désigne une constante dont la valeur peut différer d'une équation à l'autre. En utilisant la représentation spectrale de X , on remarque que sa fonction de covariance vérifie

$$r(k_1, \dots, k_d) \leq c \prod_{j=1}^d \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_j \lambda} |\lambda|^{2\alpha_j} d\lambda.$$

On sait par Zygmund (1959) que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_j \lambda} |\lambda|^{2\alpha_j} d\lambda = ck_j^{-2\alpha_j-1}$. D'où

$$r(k_1, \dots, k_d) \leq c \prod_{j=1}^d k_j^{-2\alpha_j-1}.$$

Ainsi

$$\sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) \leq n^d + c \sum_{k \in A_{n-1}} \prod_{j=1}^d k_j^{-4\alpha_j-2} (n - |k_j|)$$

et

$$\sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) = O(n^d) + O(n^{-4 \sum_{j=1}^d \alpha_j}).$$

Le théorème 17 nous donne $d_n^2 = n^{d-2 \sum_{j=1}^d \alpha_j}$ de telle sorte que dans tous les cas

$$d_n^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) = o(n^{-\eta}),$$

pour un $\eta > 0$. D'autre part, pour tout $N \geq n$, $d_n^2/N^{2d} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Dans l'inégalité (6.1.3), vérifiée sous les hypothèses du corollaire 4, le majorant tend donc vers 0 lorsque N tend vers l'infini dès que $\delta < \eta$.

Le théorème 17 prouve par ailleurs la convergence dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ des sommes partielles de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ vers $B \in C([0,1]^d)$. En utilisant le même argument que dans la démonstration du corollaire 3 qui s'appuie sur cette convergence dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ et sur la convergence vers 0 du majorant dans (6.1.3), on obtient le résultat annoncé. □

Nous donnons maintenant un résultat de convergence dans le cas de champs gaussiens à longue mémoire non-isotrope. Ces champs ont une densité spectrale singulière sur un sous espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$.

Corollaire 5. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ gaussien stationnaire de densité spectrale bornée. On considère le champ linéaire*

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{6.1.11}$$

où les (a_k) sont, à une constante normalisatrice près garantissant $\text{Var}(X_1) = 1$, les coefficients de Fourier du filtre

$$a(\lambda) = \left| \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i \right|^\alpha, \quad -1/2 < \alpha < 0, \tag{6.1.12}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ et $(c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$, et vérifient donc, au sens de la convergence dans L^2 ,

$$a(\lambda) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{-i \langle k, \lambda \rangle}.$$

Soit G une fonction mesurable et F la fonction de répartition de $G(X_n)$. On suppose que le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_n) \leq x\}} - F(x)$ vaut 1.

Alors, quel que soit $-1 < 2\alpha < 0$ lorsque $d \leq 3$ et sous la restriction $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ lorsque $d \geq 4$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} (I_{\{G(X_{j_i}) \leq x\}} - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0,1]^d)} J_1(x) B(t),$$

où

$$J_1(x) = E[I_{\{G(X_1) \leq x\}} X_1],$$

et où la convergence a lieu dans $D(\overline{\mathbb{R}} \times [0, 1]^d)$ muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes. Le champ $B(t)$ est le champ limite intervenant dans (4.4.1); dans le cas particulier où ε est un bruit blanc il vaut :

$$B(t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\lambda) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j \lambda_j} - 1}{i \lambda_j} dW(\lambda),$$

où W est le champ spectral associé au bruit blanc gaussien.

Pour la démonstration du corollaire 5, on utilisera la proposition suivante

Proposition 13. *La fonction de covariance du champ linéaire (6.1.11) vérifie lorsque $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} \text{si } -1/2 < 2\alpha < 0, \quad \sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) &= O(n^d), \\ \text{si } -1 < 2\alpha < -1/2, \quad \sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) &= O(n^{d-1-4\alpha}), \end{aligned}$$

où $A_n = \{1, \dots, n\}^d$.

Preuve de la proposition 13. Soit $f_X(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]^d$ la densité spectrale de X . D'après la définition (6.1.11) de X on sait que f_X est majorée à une constante près par $\left| \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i \right|^{2\alpha}$. Dans le cas où $-1/2 < 2\alpha < 0$, la densité spectrale de X est donc de carré intégrable et par la formule de Parseval sa fonction de covariance est de carré sommable. On a ainsi

$$\sum_{j,k \in A_n} r^2(k-j) = \sum_{k \in A'_n} r^2(k) \prod_{j=1}^d (n - |k_j|) \leq n^d \sum_{\mathbb{Z}^d} r^2(k),$$

où $A'_n = \{-n+1, \dots, n-1\}^d$, ce qui prouve la première partie de la proposition 13.

Dans le cas où $-1 < 2\alpha < -1/2$, on utilise la représentation de la fonction de covariance à l'aide de la densité spectrale et on obtient

$$\sum_{j,k \in A_n} r^2(k-j) = n^d \int_{[-\pi, \pi]^{2d}} f_X(x) f_X(y) \prod_{j=1}^d F_n(x_j - y_j) dx dy, \quad (6.1.13)$$

où F_n est le noyau de Fejer :

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

On effectue dans (6.1.13) le changement de variables $s_j = x_j - y_j$, $j = 1 \dots d$, les x_j restant inchangés. On note K le nouvel ensemble d'intégration que l'on sépare en deux

en notant Δ_n son intersection avec l'ensemble $\cap_j \{|s_j| \leq n^{-\delta}\}$ où $0 < \delta < -2\alpha$ et Δ'_n le complémentaire de Δ_n dans K :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in A_n} r^2(k-j) &= n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ &\quad + n^d \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Traisons tout d'abord la seconde intégrale (6.1.14). Sur Δ'_n , il existe au moins un j tel que $|s_j| > n^{-\delta}$, l'intégrand étant positif, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ \leq \sum_{i=1}^d \int_{|s_i| > n^{-\delta}} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds. \end{aligned}$$

On sait que $|s_i| > n^{-\delta}$ implique $F_n(s_i) \leq cn^{-1+2\delta}$ où c est une constante positive non nulle qui pourra par la suite varier de ligne à ligne. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \sum_{i=1}^d \int_K f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j \neq i} F_n(s_j) dx ds \\ \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \sum_{i=1}^d \int_K \left| \sum_{k=1}^d c_k x_k \right|^{2\alpha} \left| \sum_{k=1}^d c_k (x_k - s_k) \right|^{2\alpha} \prod_{j \neq i} F_n(s_j) dx ds. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

On effectue à présent dans chaque intégrale de (6.1.15) le changement de variables $u = \sum_{k=1}^d c_k x_k$, $y = \sum_{k=1}^d c_k s_k$ et, pour $j \neq i$, $v_j = \sum_{k=1}^j c_k x_k$ et $s_j = s_j$. On obtient

$$\int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \int_{K'} |u|^{2\alpha} |u-y|^{2\alpha} \prod_{j \neq i} F_n(s_j) du dy ds,$$

où K' est un compact de \mathbb{R}^{d+1} . Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ deux cubes tels que $K' \subset K_1 \times K_2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \int_{K_1} |u|^{2\alpha} |u-y|^{2\alpha} du dy \int_{K_2} \prod_{j \neq i} F_n(s_j) ds \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}}. \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

D'après (6.1.16) et comme $\delta < -2\alpha$ on a

$$n^d \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds = o(n^{d-1-4\alpha}). \quad (6.1.17)$$

D'après (6.1.14) et (6.1.17),

$$\sum_{j,k \in A_n} r^2(k-j) = n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds + o(n^{d-1-4\alpha}) \quad (6.1.18)$$

Il nous reste à traiter l'intégrale dans (6.1.18). Pour tout $j = 1, \dots, d$, on a

$$|s_j| \leq n^{-\delta} \Rightarrow |F_n(s_j)| \leq cn \frac{\sin^2(ns_j/2)}{(ns_j/2)^2}.$$

En utilisant cette propriété et en effectuant dans l'intégrale de (6.1.18) le changement de variables $u = \sum_{i=1}^d c_i x_i$, et, pour $j = 1, \dots, d-1$, $v_j = \sum_{i=1}^j c_i x_i$, les s_j restant inchangés, on obtient

$$\begin{aligned} n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ \leq cn^{2d} \int_{K'} |u|^{2\alpha} \left| u - \sum_{i=1}^d c_i s_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(ns_j/2)}{(ns_j/2)^2} ds du, \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

où K' est un compact de \mathbb{R}^{d+1} . On effectue enfin dans (6.1.19) le changement de variables $v = nu$ et $t_j = ns_j$ pour tout j

$$\begin{aligned} n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^d F_n(s_j) dx ds \\ \leq cn^{d-1-4\alpha} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |v|^{2\alpha} \left| v - \sum_{i=1}^d c_i t_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(t_j/2)}{(t_j/2)^2} dt dv. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

On se sert à présent du lemme suivant :

Lemme 21. Si $-1 < 2\alpha < -1/2$ et $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1 \dots d$,

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |x|^{2\alpha} \left| x - \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(y_j)}{y_j^2} dx dy_1 \dots dy_d < \infty. \quad (6.1.21)$$

Sa démonstration est donnée dans la section 6.3.2

La dernière intégrale dans (6.1.20) est finie d'après le lemme 21 et (6.1.18) et (6.1.20) montrent le résultat de la proposition 13 dans le cas $-1 < 2\alpha < -1/2$. \square

Preuve du corollaire 5. Le Théorème 17 nous donne, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$d_n^2 \sim n^{d-2\alpha}. \quad (6.1.22)$$

En utilisant la Proposition 13 on a donc, dans tous les cas,

$$d_n^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) = o(n^{-\eta}),$$

pour un $\eta > 0$. D'autre part, d'après (6.1.22), on a, pour tout $N \geq n$, $d_n^2/N^{2d} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. L'inégalité (6.1.3) est vérifiée sous les hypothèses du corollaire et son majorant tend donc vers 0 lorsque N tend vers l'infini dès que $\delta < \eta$.

Le Théorème 17 établit la convergence des sommes partielles de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ vers un champ dans $C([0, 1]^d)$. Il suffit pour conclure d'appliquer le même raisonnement que dans la démonstration du corollaire 3. \square

6.2 Application aux statistiques de Von Mises et aux U-statistiques

Soit h une fonction mesurable de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R} invariante par permutation des variables. On considère la U-statistique définie par

$$U_n(h) = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in A_n^k \\ j_p \neq j_q \text{ si } p \neq q}} h(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_k}), \quad (6.2.1)$$

où $Y_j = G(X_j)$ est un champ fonction du champ gaussien X .

On considère de plus la statistique de Von Mises

$$V_n(h) = \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in A_n^k} h(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_k}). \quad (6.2.2)$$

On suppose que la fonction h est intégrable par rapport à $\prod_{j=1}^k F(dx_j)$ où F est la fonction de répartition de Y et que h est dégénérée dans le sens où

$$\int_{\mathbb{R}} h(x_1, \dots, x_k) F(dx_1) = 0, \quad \forall x_2, \dots, x_k. \quad (6.2.3)$$

Corollaire 6. *Soit la U-statistique définie par (6.2.1) et la statistique de Von Mises définie par (6.2.2) sous les hypothèses précédentes sur h . Si l'on suppose de plus que h est à variation bornée et que $h(x_1, \dots, x_k)$ n'a pas de points de discontinuité en commun avec $\prod_{j=1}^k F(x_j)$ alors,*

- (i) *Sous les hypothèses du corollaire 3 (section 6.1.1), en posant $d_n = n^{d-m\alpha/2}(L(n))^{m/2}$, les statistiques $d_n^{-k}U_n(h)$ et $d_n^{-k}V_n(h)$ convergent toutes deux en loi vers*

$$\left(\frac{Z_m(1)}{m!} \right)^k \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) J_m(dx_1) \dots J_m(dx_k),$$

où les fonctions J_m et Z_m sont définies dans le corollaire 3.

(ii) Sous les hypothèses du corollaire 4 (section 6.1.2), en posant $d_n = n^{d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j}$, les statistiques $d_n^{-k} U_n(h)$ et $d_n^{-k} V_n(h)$ convergent toutes deux en loi vers

$$(B_f(1))^k \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) J_1(dx_1) \dots J_1(dx_k),$$

où B_f et J_1 interviennent dans la limite établie dans le corollaire 4.

(iii) Sous les hypothèses du corollaire 5 (section 6.1.2), en posant $d_n = n^{d/2 - \alpha}$, les statistiques $d_n^{-k} U_n(h)$ et $d_n^{-k} V_n(h)$ convergent toutes deux en loi vers

$$(B(1))^k \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) J_1(dx_1) \dots J_1(dx_k),$$

où B et J_1 interviennent dans la limite établie dans le corollaire 5.

Démonstration. Sous les hypothèses du corollaire 6 et en notant F_n le processus empirique de Y , i.e.

$$F_n(x) = n^{-d} \sum_{j \in A_n} I_{\{Y_j \leq x\}},$$

on peut écrire V_n de la façon suivante

$$V_n(h) = n^{kd} \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^k (F_n(dx_j) - F(dx_j)). \quad (6.2.4)$$

En effectuant une intégration par parties dans (6.2.4), on obtient

$$V_n(h) = n^{kd} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^k (F_n(x_j) - F(x_j)) h(dx_1, \dots, dx_k),$$

d'où

$$d_n^{-k} V_n(h) = \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^k n^d d_n^{-1} (F_n(x_j) - F(x_j)) h(dx_1, \dots, dx_k).$$

L'application de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}})$ dans \mathbb{R} qui à Q associe $\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^k Q(x_j) dh(x_1, \dots, x_k)$ est continue par rapport à la norme uniforme. On peut donc utiliser la convergence dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}})$ de $n^d d_n^{-1} (F_n(x) - F(x)) = d_n^{-1} \sum_{j \in A_n} I_{\{Y_j \leq x\}} - F(x)$ obtenue dans les corollaires 3, 4 et 5 (selon les hypothèses sur le champ X) pour obtenir finalement la convergence en loi de V_n .

Pour la convergence de U_n il suffit de remarquer que

$$d_n^{-k} (V_n(h) - U_n(h)) \rightarrow 0$$

en probabilité. Cela est justifié dans Dehling et Taqqu (1989) dans le cas $d = 1$ et la dimension d ne jouant aucun rôle dans l'argument, on peut conclure au même résultat dès que $d_n^{-1} = o(n^{-d/2})$ ce qui le cas dans les situations considérées dans le corollaire 6. □

6.3 Preuves

6.3.1 Preuve du théorème 18

Le schéma de preuve est classique, il utilise l'argument de chaînage de Dehling et Taquq (1989). On notera dans la suite, pour une fonction f , $f(x, y) = f(y) - f(x)$.

On montre dans un premier temps le lemme suivant.

Lemme 22.

$$E(S_n^2(x, y)) \leq F(x, y) \sum_{j, k \in A_N^2} |r(k - j)|^{m+1} \quad (6.3.1)$$

Démonstration du lemme.

$$\begin{aligned} S_n(x, y) &= \sum_{j \in A_n} \left[I_{\{x < G(X_j) \leq y\}} - F(x, y) - \frac{J_m(x, y)}{m!} H_m(X_j) \right] \\ &= \sum_{j \in A_n} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q(x, y)}{q!} H_q(X_j). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(S_n^2(x, y)) &= \sum_{j, k \in A_n^2} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x, y)}{(q!)^2} E(H_q(X_j) H_q(X_k)) \\ &= \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x, y)}{q!} \sum_{j, k \in A_n^2} r^q(k - j) \\ &\leq \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x, y)}{q!} \sum_{j, k \in A_n^2} |r(k - j)|^q \\ &\leq \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x, y)}{q!} \sum_{j, k \in A_n^2} |r(k - j)|^{m+1}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x, y)}{q!} &\leq E((I_{\{x < G(X_j) \leq y\}} - F(x, y))^2) \\ &= F(x, y)(1 - F(x, y)) \leq F(x, y). \end{aligned}$$

□

Définissons

$$\Lambda(x) = F(x) + \int_{G(s) \leq x} \frac{|H_m(s)|}{m!} \Phi(s) ds, \quad (6.3.2)$$

où Φ est la densité d'une loi normale standard. C'est une fonction positive, croissante et bornée. D'autre part, $F(x, y)$ et $(1/m!)J_m(x, y)$ sont bornées par $\Lambda(x, y)$. On pose

$x_i(k) = \inf\{x : \Lambda(x) \geq \Lambda(\infty)2^{-k}\}$ pour $i = 0, \dots, 2^k - 1$. Ainsi les $x_i(k)$ constituent, à k fixé, une partition de \mathbb{R} . Pour tout x et tout $k = 0, \dots, K$ où K sera choisi plus tard, on définit $i_k(x)$ par

$$x_{i_k(x)}(k) \leq x < x_{i_k(x)+1}(k).$$

On peut ainsi définir une chaîne liant chaque point x à $-\infty$:

$$-\infty = x_{i_0(x)}(0) \leq \dots \leq x_{i_K(x)}(K) \leq x < x_{i_K(x)+1}(K).$$

On utilise ce chaînage pour étudier $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{K-1} S_n(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1)) + S_n(x_{i_K(x)}(K), x). \quad (6.3.3)$$

On traite dans un premier temps le dernier terme de (6.3.3). Pour une fonction f , on note $f(x^-)$ sa limite à gauche en x . On a toujours

$$\Lambda(x_{i-1}(k), x_i^-(k)) \leq \Lambda(\infty)2^{-k}. \quad (6.3.4)$$

Comme $x < x_{i_K(x)+1}(K)$ et $(1/m!)J_m(x, y) \leq \Lambda(x, y)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| S_n(x_{i_K(x)}(K), x) \right| \\ & \leq \sum_{j \in A_n} (I_{\{x_{i_K(x)}(K) < Y_j \leq x\}} + F(x_{i_K(x)}(K), x)) \\ & \quad + \left| \frac{1}{m!} J_m(x_{i_K(x)}(K), x) \right| \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right| \\ & \leq \sum_{j \in A_n} \left[I_{\{x_{i_K(x)}(K) < Y_j \leq x_{i_K(x)+1}(K)\}} + F(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \right] \\ & \quad + \Lambda(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right|. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \left| S_n(x_{i_K(x)}(K), x) \right| \\ & \leq \left| S_n(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \right| + 2n^d F(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \\ & \quad + 2\Lambda(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right|. \end{aligned}$$

Finalement, d'après (6.3.4) et car $F(x, y) \leq \Lambda(x, y)$

$$\begin{aligned} \left| S_n(x_{i_K(x)}(K), x) \right| & \leq \left| S_n(x_{i_K(x)}(K), x_{i_K(x)+1}^-(K)) \right| \\ & \quad + 2\Lambda(\infty)n^d 2^{-K} + 2\Lambda(\infty)2^{-K} \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right|. \quad (6.3.5) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'après (6.3.3) et (6.3.5),

$$\begin{aligned}
& P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x)| > \varepsilon \right) \\
& \leq \sum_{k=0}^{K-1} P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1))| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \right) \\
& \quad + P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x_{i_K(x)}(K), x_{i_{K(x)+1}^-}(K))| > \frac{\varepsilon}{(K+3)^2} \right) \\
& \quad + P \left(2\Lambda(\infty)2^{-K}d_N^{-1} \left| \sum j \in A_n H_m(X_j) \right| > \frac{\varepsilon}{2} - 2\Lambda(\infty)n^d d_N^{-1}2^{-K} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Les partitions construites ci-dessus impliquent que les points $x_{i_k(x)}(k)$ et $x_{i_{k+1}(x)}(k+1)$ sont soit égaux, soit voisins dans la partition associée à $k+1$. Ainsi, si pour tout $i = 0, \dots, 2^{k+1} - 1$,

$$d_N^{-1} S_n(x_i(k+1), x_{i+1}(k+1)) \leq \frac{\varepsilon}{(k+3)^2},$$

alors

$$\sup_x d_N^{-1} |S_n(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1))| \leq \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{K-1} P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1))| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \right) \\
& \leq \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} P \left(d_N^{-1} S_n(x_i(k+1), x_{i+1}(k+1)) > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \right) \\
& \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(k+3)^4}{\varepsilon^2} d_N^{-2} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} E(S_n^2(x_i(k+1), x_{i+1}(k+1))),
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Chebyshev. En utilisant (6.3.1)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{K-1} P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1))| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \right) \\
& \leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} \sum_{k=0}^{K-1} (k+3)^4 \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} F(x_i(k+1), x_{i+1}(k+1)) \\
& \leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} \sum_{k=0}^{K-1} (k+3)^4.
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

On obtient la même majoration pour le second terme de (6.3.6) :

$$\begin{aligned} P \left(\sup_x d_N^{-1} \left| S_n \left(x_{i_K(x)}(K), x_{i_{K(x)+1}}^-(K) \right) \right| > \frac{\varepsilon}{(K+3)^2} \right) \\ \leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} (K+3)^4. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Maintenant, en choisissant $\alpha > 0$ assez grand pour garantir

$$\frac{N^{d-\alpha}}{d_N} \leq \frac{1}{8\Lambda_\infty},$$

on choisit

$$K = \left\lceil \log_2 \left(\frac{N^\alpha}{\varepsilon} \right) \right\rceil + 1.$$

On a alors, puisque $n \leq N$,

$$2\Lambda_\infty n^d d_N^{-1} 2^{-K} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (6.3.9)$$

Et donc, d'après (6.3.9) et la définition (6.1.2) de d_n ,

$$\begin{aligned} P \left(2\Lambda_\infty 2^{-K} d_N^{-1} \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right| > \frac{\varepsilon}{2} - 2\Lambda_\infty n^d d_N^{-1} 2^{-K} \right) \\ \leq P \left(d_N^{-1} \left| \sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right| > \frac{\varepsilon}{4} \frac{2^{K-1}}{\Lambda_\infty} \right) \\ \leq 2^{-2K+2} \Lambda_\infty^2 16\varepsilon^{-2} d_N^{-2} \text{Var} \left(\sum_{j \in A_n} H_m(X_j) \right) \\ \leq \frac{d_n^2}{N^{2d}}. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Finalement, d'après (6.3.6) et par (6.3.7), (6.3.8) et (6.3.10),

$$\begin{aligned} P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x)| > \varepsilon \right) &\leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} \sum_{k=0}^K (k+3)^4 + \frac{d_n^2}{N^{2d}} \\ &\leq C\varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} (K+3)^5 + \frac{d_n^2}{N^{2d}}, \end{aligned}$$

où C est une constante positive. On a par ailleurs, pour tout $\delta > 0$,

$$(K+3)^5 \leq \left(\log_2 \left(\frac{N^\alpha}{\varepsilon} \right) + 1 \right)^5 \leq C(\varepsilon) N^\delta,$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante positive qui dépend de ε . Ainsi, pour tout $\delta > 0$,

$$P \left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x)| > \varepsilon \right) \leq C(\varepsilon) N^\delta d_N^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} + \frac{d_n^2}{N^{2d}}.$$

6.3.2 Preuve du lemme 21

Si tous les c_j sont nuls le lemme est vrai de façon évidente. Supposons qu'au moins un c_j est non nul et posons, dans (6.1.21), $x = u \sum_{i=1}^d c_i y_i$, les y_j restant inchangés. L'intégrale (6.1.21) est alors inférieure à une constante multiplicative près à

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} |u|^{2\alpha} |u-1|^{2\alpha} dy_1 \dots dy_d du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} dy_1 \dots dy_d \int_{\mathbb{R}} |u|^{2\alpha} |u-1|^{2\alpha} du. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est finie puisque $-1 < 2\alpha < -1/2$. Il reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} dy < \infty.$$

On découpe l'ensemble d'intégration en deux :

$$\int_{\{|\sum_{i=1}^d c_i y_i| > 1\}} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) dy < \infty.$$

Par ailleurs

$$\int_{\{|\sum_{i=1}^d c_i y_i| < 1\}} \prod_{j=1}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=2}^d (1 \wedge y_j^{-2}) \left| \sum_{i=1}^d c_i y_i \right|^{4\alpha+1} dy. \quad (6.3.11)$$

On peut effectuer le changement de variables $u = \sum_{i=1}^d c_i y_i$, les y_j restant inchangés, et (6.3.11) est majorée à une constante multiplicative près par

$$\int_0^1 |u|^{4\alpha+1} du \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{j=2}^d (1 \wedge y_j^{-2}) dy_2 \dots dy_d < \infty.$$

6.4 Conclusion

Les situations de forte dépendance étudiées dans ce chapitre (forte dépendance isotrope comme dans le corollaire 3 et forte dépendance non isotrope comme dans les corollaires 4 et 5) témoignent d'un comportement asymptotique dégénéré du processus empirique. C'est une propriété connue en dimension $d = 1$ qui semble donc persister dans le cadre des champs aléatoires même lorsque la forte dépendance n'est pas isotrope. L'asymptotique du processus empirique peut-être étudié dans d'autres situations de forte dépendance en s'appuyant sur l'inégalité (6.1.3) du théorème 18. Il suffit pour

cela de connaître le comportement des sommes partielles du champ sous-jacent (ce que la partie 4.4 du chapitre 4 nous fournit dans un large cadre) et d'établir l'ordre de $\sum_{A_n^2} r^2(k-j)$.

Par ailleurs la loi limite du processus empirique mène à de nombreuses applications comme par exemple l'obtention de la loi asymptotique des U-statistiques ou des statistiques de Von-Mises établie dans la partie 6.2. Nous renvoyons pour ces applications à la partie III de l'ouvrage collectif édité par Dehling et al. (2002).

Chapitre 7

Etude des formes quadratiques

On s'intéresse dans ce chapitre aux formes quadratiques d'un champ X définies par

$$J_n(g) = \sum_{k \in A_n} \sum_{l \in A_n} g_{k-l} X_k X_l,$$

où $A_n = \{1, \dots, n\}^d$ et où $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite sommable. Dans le cas particulier où $g_k = \delta_{-h}(k)$, $J_n(g)$ est l'estimateur de la fonction de covariance de X au point h . Plus généralement, $J_n(g)$ est une statistique que l'on retrouve dans de nombreux problèmes comme par exemple dans la démonstration de la convergence de l'estimateur de Whittle du paramètre de longue mémoire d'une série temporelle.

En posant $g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} g_j e^{-i \langle j, x \rangle}$, on peut réécrire la forme quadratique $J_n(g)$ sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction g et le périodogramme de X .

Le périodogramme d'un champ aléatoire X est en effet défini sur $E = [-\pi, \pi]^d$ par

$$I_n(x) = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{k \in A_n} X_k e^{i \langle k, x \rangle} \right|^2 = \frac{1}{n^d} \sum_{k, l \in A_n^2} X_k X_l e^{-i \langle k-l, x \rangle}$$

et on vérifie facilement que

$$J_n(g) = \int_E g(t) I_n(t) dt. \quad (7.0.1)$$

En dimension $d = 1$, l'étude de (7.0.1) lorsque X est gaussien à longue mémoire a été réalisée par Fox et Taqqu (1985, 1987). Lorsque X est linéaire à longue mémoire, la même étude a été conduite par Giraitis et Surgailis (1990) qui appliquent leur résultat à la convergence de l'estimateur de Whittle. Ces auteurs ont montré que $J_n(g) - E(J_n(g))$ ne suivait pas nécessairement un théorème central limite. Plus précisément, on peut distinguer deux situations selon que $g(0) = 0$ ou $g(0) \neq 0$. Dans le premier cas, on retrouve un théorème central limite (Fox et Taqqu (1987) et Giraitis et Surgailis (1990)) et dans le second, on obtient un théorème non central (Fox et Taqqu (1985) et Terrin et Taqqu (1990)).

En dimension $d \geq 1$, Doukhan et al. (1996) montrent le même type de résultats lorsque le champ X est gaussien à longue mémoire isotrope.

Notre objectif est de généraliser ces résultats aux champs linéaires, non nécessairement gaussiens et à longue mémoire non isotrope. Pour cela nous adoptons une démarche spectrale en réécrivant (7.0.1) sous forme d'une intégrale stochastique double.

Dans la partie 7.1, nous reprenons la construction de l'intégrale doubles de Major (1981) dans un contexte non gaussien. On rappelle ensuite la formule d'Ito pour ces intégrales.

Nous présentons dans la partie 7.2.1 un théorème de convergence de mesures spectrales doubles, généralisation du Théorème 6 du chapitre 3. L'étude de l'asymptotique de (7.0.1), écrit sous forme d'une intégrale stochastique double, se base sur ce théorème.

Enfin, dans la section 7.3, nous montrons un théorème non central pour $J_n(g)$ lorsque $g(0) \neq 0$. Nous obtenons en application la loi limite de l'estimateur de la fonction de covariance d'un champ fortement dépendant.

La partie 7.4 contient les preuves de lemmes techniques.

Remarque 28. Ce travail sur les formes quadratiques est en cours. Un de nos objectifs était de sortir du cadre gaussien. Mais un point reste encore insatisfaisant : il s'agit de la définition de l'intégrale double par rapport à des mesures aléatoires à accroissements orthogonaux non gaussiennes. Lorsque les cumulants d'ordre 4 de la mesure sont supposés nuls, la définition de l'intégrale s'adapte directement du cas gaussien et c'est l'hypothèse que nous ferons tout au long du chapitre. Cette hypothèse reste à alléger car elle induit des hypothèses difficilement interprétables dans les Théorèmes 20 et 21.

Si on suppose que les champs aléatoires sont gaussiens, les hypothèses effectuées dans le Théorème 21 (le résultat principal du chapitre) deviennent naturelles. Dans cette situation, le Théorème 21 étend au cadre de forte dépendance non-isotrope le résultat de convergence de type non central des formes quadratiques d'un champ aléatoire montré dans Doukhan et al. (1996).

7.1 Intégrales doubles non gaussiennes

Soit Z une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux. Lorsque Z est gaussienne, l'intégrale multiple par rapport à Z est définie dans Major (1981). La construction de l'intégrale double par rapport à Z telle qu'elle est présentée dans Major (1981) reste valable en dehors du cadre gaussien si les cumulants d'ordre 4 de Z sont supposés nuls. Pour nous en convaincre, nous rappelons dans cette partie la définition de cette intégrale.

Nous commençons par rappeler une définition des cumulants (cf par exemple Brillinger (1981) ou Kendall et Stuart (1958)).

Définition 7. Les cumulants de k variables aléatoires Y_1, \dots, Y_k sont définis par

$$cum(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{\nu} (-1)^{p-1} (p-1)! E \left(\prod_{j \in \nu_1} Y_j \right) \dots E \left(\prod_{j \in \nu_p} Y_j \right), \quad (7.1.1)$$

où $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ est une partition de $\{1, \dots, k\}$ et où la somme se fait sur toutes ces partitions.

Dans le cas particulier où $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ est un champ aléatoire strictement stationnaire, ses cumulants d'ordre k , lorsqu'ils existent, sont définis grâce à la stationnarité par

$$\text{cum}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) = \text{cum}(Y_0, Y_{t_2-t_1}, \dots, Y_{t_k-t_{k-1}}) = c_k(h_1, \dots, h_{k-1}),$$

en notant $h_j = t_{j+1} - t_j$ pour $j = 1 \dots k-1$.

Nous supposons que Z est une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls. Nous supposons de plus que la mesure de contrôle μ de Z est non atomique.

L'intégrale double par rapport à Z est définie sur H_μ où H_μ est l'espace des fonctions complexes f dépendant de deux variables telles que

- (i) $f(-x, -y) = \overline{f(x, y)}$
- (ii) $\int |f(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty$.

On définit dans un premier temps l'intégrale double pour les fonctions simples de H_μ (définies ci-après) puis on l'étend à toute fonction de H_μ par le théorème de Hahn-Banach.

Définition 8. Soit un système de rectangles Δ_j , $j = \pm 1, \dots, \pm N$ de \mathbb{R}^d où $\Delta_{-j} = -\Delta_j$.

- On dit qu'une fonction est adaptée au système de rectangles précédent si elle est constante sur les ensembles du type $\Delta_i \times \Delta_j$ pour $i \neq \pm j$, nulle à l'extérieur de $\mathcal{A} = \cup_{i,j} \Delta_i \times \Delta_j$ et nulle sur les ensembles du type $\Delta_j \times \Delta_{\pm j}$.
- Une fonction de H_μ est dite simple s'il existe un système de rectangles auquel elle est adaptée, c'est donc une fonction en escalier à support compact. Nous notons \hat{H}_μ l'ensemble des fonctions simples.

Pour toute fonction simple $f \in \hat{H}_\mu$ on définit l'intégrale double par rapport à Z par

$$\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) = \sum_{\substack{i,j=\pm 1, \dots, \pm N \\ i \neq \pm j}} f(x_i, y_j) Z(\Delta_i) Z(\Delta_j), \quad (7.1.2)$$

où $f(x_i, y_j)$ représente la valeur de f sur $\Delta_i \times \Delta_j$ (f étant constante sur ces ensembles).

Il est facile de voir que pour une fonction simple donnée, cette définition est indépendante du système de rectangles choisi.

Pour toute fonction $f \in \hat{H}_\mu$, on a les propriétés immédiates suivantes :

$$E \left(\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) \right) = 0, \quad (7.1.3)$$

$$\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) \in \mathbb{R}, \quad (7.1.4)$$

car f vérifie (i) et pour tout ensemble A , $Z(A) = \overline{Z(-A)}$, et enfin

$$\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) = \iint \text{sym}(f)(x, y) dZ(x) dZ(y), \quad (7.1.5)$$

où $\text{sym}(f)(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$.

Afin d'étendre la définition de l'intégrale sur H_μ par le théorème de Hahn Banach, il nous faut évaluer sa norme.

Lemme 23. *Si Z est une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls alors, pour toute fonction $f \in \hat{H}_\mu$,*

$$E \left(\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) \right)^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y). \quad (7.1.6)$$

Si f est symétrique i.e. $f(x, y) = f(y, x)$, (7.1.6) est une égalité.

Démonstration. D'après (7.1.5) et l'inégalité

$$\int |\text{sym}(f)|^2 d\mu d\mu \leq \int |f|^2 d\mu d\mu,$$

il suffit de ne prouver le résultat que pour les fonctions symétriques de \hat{H}_μ . Montrons que

$$E \left(\iint f(x, y) dZ(x) dZ(y) \right)^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

On note $f(x_i, y_j)$ les valeurs constantes de f sur $\Delta_i \times \Delta_j$ lorsque $i \neq \pm j$.

D'après la définition (7.1.2) de l'intégrale, il suffit de prouver

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq \pm j} \sum_{k \neq \pm l} f(x_i, y_j) \overline{f(x_k, y_l)} E \left(Z(\Delta_i) Z(\Delta_j) \overline{Z(\Delta_k) Z(\Delta_l)} \right) \\ = \sum_{i \neq \pm j} f(x_i, y_j) \overline{f(x_i, y_j)} \mu(\Delta_i) \mu(\Delta_j). \end{aligned}$$

Puisque, pour tout i , $\overline{Z(\Delta_i)} = Z(-\Delta_i) = Z(\Delta_{-i})$, et compte tenu de la définition 7 des cumulants,

$$\begin{aligned} E \left(Z(\Delta_i) Z(\Delta_j) \overline{Z(\Delta_k) Z(\Delta_l)} \right) \\ = \text{cum} (Z(\Delta_i), Z(\Delta_j), Z(\Delta_{-k}), Z(\Delta_{-l})) + E (Z(\Delta_i) Z(\Delta_j)) E (Z(\Delta_{-k}) Z(\Delta_{-l})) \\ + E (Z(\Delta_i) Z(\Delta_{-k})) E (Z(\Delta_j) Z(\Delta_{-l})) + E (Z(\Delta_i) Z(\Delta_{-l})) E (Z(\Delta_j) Z(\Delta_{-k})). \end{aligned}$$

Nous avons supposé que les cumulants d'ordre 4 de Z sont nuls. En s'appuyant sur l'orthogonalité des accroissements de Z , i.e. $E[Z(\Delta_i) Z(\Delta_j)] = \delta_{\{i=-j\}} \mu(\Delta_i)$, on obtient

$$\begin{aligned} E \left(Z(\Delta_i) Z(\Delta_j) \overline{Z(\Delta_k) Z(\Delta_l)} \right) \\ = \delta_{\{i=-j\}} \mu(\Delta_i) \delta_{\{k=-l\}} \mu(\Delta_k) + \delta_{\{i=k\}} \mu(\Delta_i) \delta_{\{j=l\}} \mu(\Delta_k) + \delta_{\{i=l\}} \mu(\Delta_i) \delta_{\{j=k\}} \mu(\Delta_j) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq \pm j} \sum_{k \neq \pm l} f(x_i, y_j) \overline{f(x_k, y_l)} E \left(Z(\Delta_i) Z(\Delta_j) \overline{Z(\Delta_k) Z(\Delta_l)} \right) \\ = \sum_{i \neq \pm j} \left(f(x_i, y_j) \overline{f(x_i, y_j)} + f(x_i, y_j) \overline{f(x_j, y_i)} \right) \mu(\Delta_i) \mu(\Delta_j). \end{aligned}$$

Par symétrie de f , on obtient le résultat recherché. □

Comme μ est non-atomique, l'ensemble \hat{H}_μ est dense dans H_μ (voir à ce propos Major (1981), pages 28 et 29). L'application qui à $f \in \hat{H}_\mu$ associe $\iint f dZ dZ$ est de plus linéaire et contractante d'après le lemme précédent. Nous pouvons donc prolonger sur H_μ l'intégrale définie par (7.1.2) grâce au Théorème de Hahn-Banach.

Ainsi pour toute fonction $f \in H_\mu$, l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} f(x, y) dZ(x) dZ(y)$$

a un sens et les propriétés (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5) et (7.1.6) restent vraies.

Nous rappelons enfin la formule d'Ito pour ces intégrales.

Théorème 19. *Soit Z une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux, de mesure de contrôle μ , dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls.*

Alors, pour toutes f et g dans H_μ ,

$$\iint f(x) g(y) dZ(x) dZ(y) = \int f(x) dZ(x) \int g(y) dZ(y) - \int f(x) \overline{g(x)} d\mu(x). \quad (7.1.7)$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans Major (1981) dans le cas gaussien. Elle ne s'appuie que sur les propriétés d'orthogonalité des accroissements de Z et sur le fait que les cumulants d'ordre 4 de Z sont nuls.

7.2 Convergence de mesures spectrales doubles

Nous montrons un théorème de convergence de mesures spectrales doubles. Comme dans le chapitre 3, ce théorème est utile pour étudier le comportement asymptotique de toute statistique pouvant s'écrire sous forme d'une intégrale double par rapport à une mesure spectrale.

Nous l'appliquons aux formes quadratiques d'un champ fortement dépendant. En adoptant une démarche spectrale, nous écrivons en effet les formes quadratiques sous forme d'une intégrale stochastique double par rapport à des mesures spectrales dilatées.

7.2.1 Théorème de convergence de mesures spectrales doubles

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis.

Soit W la mesure spectrale aléatoire de ε et W_n la mesure aléatoire sur $[-n\pi, n\pi]^d$, définie pour tout borélien A par

$$W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A).$$

Théorème 20. *Soit ε un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis et dont la mesure spectrale W admet des cumulants d'ordre 4 nuls.*

Si Φ_n est une suite de fonctions de H_λ , où λ représente la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , qui converge en moyenne quadratique vers Φ alors

$$\iint \Phi_n(x, y) dW_n(x) dW_n(y) \xrightarrow{\mathcal{L}} \iint \Phi(x, y) dW_0(x) dW_0(y), \quad (7.2.1)$$

où W_0 représente la mesure spectrale aléatoire du bruit blanc gaussien et où \mathcal{L} symbolise la convergence en loi.

Remarque 29. L'hypothèse portant sur le bruit ε dans le Théorème 20 est difficilement interprétable car elle fait intervenir les cumulants de sa mesure spectrale aléatoire. Cette hypothèse provient de la difficulté de définir l'intégrale double par rapport à des mesures aléatoires à accroissements orthogonaux non gaussiennes (voir la Remarque 28). Dans le cas gaussien, l'hypothèse sur le bruit est trivialement vérifiée mais dans ce cas, le résultat de convergence établi dans le théorème devient évident.

Démonstration. La démonstration suit le même schéma que celle du Théorème 6. Il faut juste effectuer au préalable quelques manipulations grâce à la formule d'Ito (7.1.7).

Soit

$$B_n(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{it_j y_j} - 1}{iy_j} dW_n(x) dW_n(y).$$

L'intégrale existe bien car la fonction intégrée est dans H_{λ_n} . D'après le théorème 19,

$$B_n(s, t) = B_n^*(s) B_n^*(t) - \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{-it_j x_j} - 1}{-ix_j} dx,$$

où $B_n^*(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} dW_n(x)$. D'après la démonstration du Théorème 6 donnée dans le chapitre 3, les lois fini-dimensionnelles de B_n^* convergent vers celles du drap brownien B car ε est un bruit blanc fort, donc

$$B_n(s, t) \xrightarrow{fidi} B(s) B(t) - \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{-it_j x_j} - 1}{-ix_j} dx.$$

La fonction $x \mapsto \prod \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j}$ est la transformée de Fourier de $I_{[0,s_1] \times \dots \times [0,s_d]}$, l'intégrale ci-dessus vaut donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{-it_j x_j} - 1}{-ix_j} dx = \langle I_{[0,s_1] \times \dots \times [0,s_d]}, I_{[0,t_1] \times \dots \times [0,t_d]} \rangle = \prod_{j=1}^d s_j \wedge t_j,$$

en notant $\langle \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi

$$B_n(s, t) \xrightarrow{fidi} B(s)B(t) - \prod_{j=1}^d s_j \wedge t_j.$$

En utilisant la représentation harmonisable du drap brownien,

$$B(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} dW_0(x),$$

où W_0 est la mesure du bruit blanc gaussien, et par application, une nouvelle fois, de la formule d'Ito, on en déduit une représentation sous forme d'intégrale double :

$$B_n(s, t) \xrightarrow{fidi} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{it_j y_j} - 1}{iy_j} dW_0(x) dW_0(y).$$

La suite de la preuve est la même que dans la démonstration du Théorème 6. Nous en donnons les grandes lignes.

On définit l'application linéaire sur H_λ

$$F_n(\Phi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{\Phi}(x, y) dW_n(x) dW_n(y).$$

Elle se réécrit pour les fonctions Φ différentiables à support compact, après des intégrations par parties successives et grâce à Fubini,

$$F_n(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\partial \Phi(s, t)}{\partial s_1 \dots \partial s_d \partial t_1 \dots \partial t_d} B_n(s, t) ds dt. \quad (7.2.2)$$

Nous pouvons appliquer le lemme 13 du chapitre 3, généralisation du théorème de Grinblatt (1976) à la dimension d car, à s et t fixés, $E(B_n(s, t))^2$ est uniformément bornée. En effet, d'après (7.1.6),

$$E(B_n(s, t))^2 \leq 2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(\prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{it_j y_j} - 1}{iy_j} \right)^2 dx dy \leq 2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^d |t_j| |s_j|.$$

Ainsi $F_n(\Phi)$ converge en loi vers

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\partial \Phi(s, t)}{\partial s_1 \dots \partial s_d \partial t_1 \dots \partial t_d} B(s, t) ds dt,$$

où

$$B(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_j x_j} - 1}{ix_j} \frac{e^{it_j y_j} - 1}{iy_j} dW_0(x) dW_0(y).$$

En procédant par intégration par parties comme pour obtenir (7.2.2), la limite se réécrit

$$F_n(\Phi) \xrightarrow{\mathcal{L}} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{\Phi}(x, y) dW_0(x) dW_0(y).$$

Notons $F(\Phi)$ cette limite. C'est une application linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables à support compact. Elle est contractante :

$$E(F(\Phi))^2 \leq 2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\Phi(x, y)|^2 dx dy.$$

On peut donc étendre F à H_λ . La convergence de F_n vers F sur H_λ découle du Théorème 4.2 de Billingsley (1968). Pour finir, si Φ_n est une suite d'éléments de H_λ qui converge en moyenne quadratique vers Φ , on a directement que $F_n(\Phi_n)$ converge en loi vers $F(\Phi)$ en utilisant l'inégalité triangulaire. \square

7.2.2 Etude des formes quadratiques : approche spectrale

Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ de mesure spectrale W . Nous supposons que ε admet des moments d'ordre 4 finis et que les cumulants d'ordre 4 de W sont nuls. Nous noterons dans toute la suite $E = [-\pi, \pi]^d$.

Soit X le champ aléatoire construit à partir du filtrage de ε à travers un filtre $a \in L^2(E)$:

$$X_n = \int_E a(x) e^{i\langle n, x \rangle} dW(x).$$

Soit enfin g une fonction définie sur E . Nous étudions la convergence en loi de $J_n(g)$ défini par (7.0.1) lorsque X est fortement dépendant. Pour cela nous utilisons une écriture sous forme d'intégrale double. On a

$$J_n(g) = \frac{1}{n^d} \sum_{k, l \in A_n^2} \left(\int_E g(t) e^{-i\langle k-l, t \rangle} dt \right) X_k X_l,$$

d'où

$$J_n(g) - E J_n(g) = \int_E g(t) \left[\frac{1}{n^d} \sum e^{-i\langle k-l, t \rangle} (X_k X_l - r(l-k)) \right] dt, \quad (7.2.3)$$

où r représente la fonction de covariance de X . Or, d'après la formule d'Ito (7.1.7),

$$\begin{aligned} X_k X_l - r(l-k) &= \int_E a(x) e^{i\langle n, x \rangle} dW(x) \int_E a(y) e^{i\langle l, y \rangle} dW(y) - \int_E e^{i\langle k-l, x \rangle} a^2(x) d\mu(x) \\ &= \iint_{E^2} a(x) a(y) e^{i(\langle k, x \rangle + \langle l, y \rangle)} dW(x) dW(y), \end{aligned}$$

où μ est la mesure spectrale de ε , proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

Si par ailleurs g vérifie $g(-t) = \overline{g(t)}$ et si le filtre a vérifie $a(-x) = \overline{a(x)}$, la fonction

$$a(x)a(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) \sum e^{i\langle k, x-t \rangle} \sum e^{i\langle l, y+t \rangle} dt \right]$$

appartient à H_{λ_n} et on peut donc écrire

$$J_n(g) - EJ_n(g) = \iint_{E^2} a(x)a(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) \sum e^{i\langle k, x-t \rangle} \sum e^{i\langle l, y+t \rangle} dt \right] dW(x)dW(y).$$

En notant $H_n(t) = \sum_{k \in A_n} e^{i\langle k, t \rangle}$,

$$J_n(g) - EJ_n(g) = \iint_{E^2} a(x)a(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n(x-t) H_n(y+t) dt \right] dW(x)dW(y).$$

Enfin, en notant W_n la mesure dilatée de W définie pour tout borélien A de E par $W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A)$,

$$\begin{aligned} J_n(g) - EJ_n(g) = \\ n^{-d} \iint_{(nE)^2} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] dW_n(x)dW_n(y). \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

A l'aide de cette dernière écriture, nous pouvons utiliser le Théorème 20 pour étudier la convergence en loi de $J_n(g) - EJ_n(g)$. Elle se ramène à l'étude d'une convergence L^2 .

7.3 Théorème limite non-central

Nous donnons le comportement asymptotique de $J_n(g) - EJ_n(g)$, défini en fonction du bruit blanc ε et du filtre a comme dans la section 7.2.2, dans le cas particulier où g est continue et non nul en l'origine. Ce résultat sera appliqué dans le corollaire 7 pour obtenir la convergence en loi de l'estimateur de la fonction de covariance d'un champ fortement dépendant.

Théorème 21. *Soit ε un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis et dont la mesure spectrale aléatoire admet des cumulants d'ordre 4 nuls.*

Soit X le champ aléatoire obtenu par le filtrage de ε à travers un filtre a homogène de degré $\alpha < 0$ vérifiant $a(-x) = \overline{a(x)}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |a|^2(x) |a|^2(y) \prod_{i=1}^d 1 \wedge (x_i + y_i)^{-2} dx dy < \infty. \quad (7.3.1)$$

Soit g une fonction définie sur $[-\pi, \pi]^d$ à valeurs complexes. Si g vérifie $g(-t) = \overline{g(t)}$, si g est de module borné et est continue en 0 tel que $g(0) \neq 0$ et si de plus la suite de ses coefficients de Fourier est sommable, alors

$$n^{d+2\alpha}(J_n(g) - EJ_n(g)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(0) \iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x)a(y) \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j + y_j)} dW_0(x)dW_0(y), \quad (7.3.2)$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

Remarque 30. La condition (7.3.1) portant sur le filtre a n'est pas évidente à vérifier pour un filtre quelconque. Nous donnons trois exemples de filtres pour lesquels les conditions du Théorème 21 sont vérifiées :

(i) le filtre

$$a(x) = |x|^\alpha,$$

où $-d/2 < \alpha < -d/4$. Ce filtre conduit à un champ à longue mémoire isotrope et la convergence (7.3.2) correspond dans ce cas au résultat du Théorème 5.1 de Doukhan et al. (1996). Le fait que ce filtre vérifie (7.3.1) est montré dans Major (1981), page 63.

(ii) le filtre produit

$$a(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{\alpha_j}$$

où, pour tout j , $-1/2 < \alpha_j < -1/4$. Ce filtre conduit à un champ dont la forte dépendance est de type produit.

(iii) en dimension $d = 2$, le filtre

$$a(x_1, x_2) = |x_1 + \theta x_2|^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < -1/4$, conduisant à un champ à longue mémoire non-isotrope. La propriété (7.3.1) de ce filtre est établie dans le lemme 26 donné en section 7.4.

Remarque 31. La condition portant sur ε n'est pas interprétable facilement car elle s'appuie sur les moments de sa mesure spectrale aléatoire. Lorsque ε est un bruit blanc gaussien, les conditions portant sur ε sont trivialement vérifiées. Le Théorème 21 étend alors au cas non-isotrope le Théorème 5.1 de Doukhan et al. (1996) établissant le comportement limite de type non-central des formes quadratiques d'un champ à longue mémoire.

Corollaire 7. Soit X un champ aléatoire vérifiant les hypothèses du Théorème 21 et soit $\hat{r}_n(h)$ sa fonction de covariance empirique définie, pour $h \in \mathbb{N}^d$, par

$$\hat{r}_n(h) = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-h_1} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-h_d} X_k X_{k+h}.$$

Alors

$$n^{d+2\alpha}[\hat{r}_n(h) - E(\hat{r}_n(h))] \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x)a(y) \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j+y_j)} dW_0(x)dW_0(y),$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

Remarque 32. En prenant $a(x) = |x|^\alpha$ où $-1/2 < \alpha < -1/4$, on retrouve le résultat de Hosking (1996) en dimension $d = 1$: la loi limite de l'estimateur de la fonction de covariance n'est pas asymptotiquement normal. Lorsque, dans le cas particulier précédent, $-1/4 < \alpha < 0$, la loi limite obtenue par Hosking (1996) en dimension $d = 1$ est gaussienne ; c'est une situation qui sort du cadre du Corollaire 7 et qui est en cours d'étude.

Démonstration du corollaire 7. La preuve est une conséquence du Théorème 21 en prenant $g(t) = (2\pi)^{-d}e^{i\langle h, t \rangle}$. On vérifie alors facilement que $J_n(g) = \hat{r}_n(h)$. \square

Démonstration du Théorème 21. D'après l'écriture (7.2.4),

$$\begin{aligned} n^{d+2\alpha}(J_n(g) - EJ_n(g)) \\ = \iint_{nE^2} n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] dW_n(x)dW_n(y). \end{aligned}$$

D'après le théorème 20, pour montrer la convergence (7.3.2), il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nE^2} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y) \right)^2 dx dy = 0, \quad (7.3.3) \end{aligned}$$

où $H(x+y) = \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j+y_j)}$.

On ramène dans un premier temps l'ensemble d'intégration à $nD^2 = \cap_{i=1}^d \{|x_i + y_i| < n\pi\} \cap nE^2$. Sur l'ensemble d'intégration $nE^2 - nD^2$, il existe au moins un indice j tel que $|x_j + y_j| > n\pi$. Traitons sans perte de généralité le cas où $x_1 + y_1 > n\pi$ et où pour tout $j \geq 2$, $|x_j + y_j| < n\pi$, ensemble que nous notons nA_1 . Dans l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{nA_1} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y) \right)^2 dx dy, \quad (7.3.4) \end{aligned}$$

on effectue le changement de variable $u_1 = x_1 + y_1 - 2n\pi$ et, pour $j \geq 2$, $u_j = x_j + y_j$.

La fonction $a(x)\mathbf{I}_E(x)$ est le filtre à partir duquel le champ X est construit, elle est donc 2π -périodique. En utilisant cette périodicité et celle de H_n et H , l'intégrale (7.3.4) s'écrit après le changement de variables précédent

$$\int_{nV_1} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{u-y}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{u-y}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(u-y)a(y)H(u) \right)^2 dudy,$$

où nV_1 est le nouveau domaine d'intégration qui est contenu dans nE^2 . Le changement de variable $x = u - y$ et $y = y$ nous donne à présent

$$\int_{nA_1} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y) \right)^2 dxdy \\ = \int_{nD_1^2} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y) \right)^2 dxdy,$$

où $nD_1^2 = \{-n\pi < x_1 + y_1 < 0\} \cap_{j=2}^d \{|x_j + y_j| < n\pi\} \cap nE^2$ est un ensemble inclu dans nD^2 .

Ainsi montrer (7.3.3) se ramène à montrer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nD^2} \left(n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] \right. \\ \left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y) \right)^2 dxdy = 0.$$

En utilisant l'homogénéité de a , l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt - g(0)H(x+y) \right]^2 dxdy$$

et elle est majorée par

$$2 \int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E (g(t) - g(0)) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right]^2 dxdy \\ + 2g^2(0) \int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt - H(x+y) \right]^2 dxdy.$$

On vérifie facilement que $\int_E H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt = H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)$, il nous reste donc à montrer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nD^2} |a|^2(x) |a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} \int_E (g(t) - g(0)) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right]^2 dx dy = 0, \quad (7.3.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nD^2} |a|^2(x) |a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} H_n\left(\frac{x+y}{n}\right) - H(x+y) \right]^2 = 0. \quad (7.3.6)$$

Commençons par prouver (7.3.6). Il est clair que l'intégrand tend vers 0 pour presque tout x et y dans \mathbb{R}^d . Par ailleurs,

$$\frac{1}{n^d} H_n\left(\frac{x+y}{n}\right) - H(x+y) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{n} e^{i \frac{x_j+y_j}{n}} \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{e^{i \frac{x_j+y_j}{n}} - 1} - \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j+y_j)}. \quad (7.3.7)$$

Pour $d = 1$

$$\left| \frac{1}{n} e^{i \frac{x+y}{n}} \frac{e^{i(x+y)} - 1}{e^{i \frac{x+y}{n}} - 1} - \frac{e^{i(x+y)} - 1}{i(x+y)} \right|^2 \leq \frac{2}{(x+y)^2} \left| \frac{e^{i \frac{x+y}{n}} i(x+y)}{n(e^{i \frac{x+y}{n}} - 1)} - 1 \right|^2.$$

Le module du terme de droite est uniformément borné sur $\{|x+y| < n\pi\}$ car

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i \frac{x+y}{n}} i(x+y)}{n(e^{i \frac{x+y}{n}} - 1)} - 1 \right|^2 &= \frac{\left(\frac{x+y}{2n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2n}\right)} - \frac{x+y}{n} \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{x+y}{2n}\right)} + 1 \\ &\leq \frac{\left(\frac{x+y}{2n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2n}\right)} + 2 \left| \frac{\frac{x+y}{2n}}{\sin\left(\frac{x+y}{2n}\right)} \right| + 1. \end{aligned}$$

En dimension d quelconque, on obtient de même

$$\left| \frac{1}{n^d} H_n\left(\frac{x+y}{n}\right) - H(x+y) \right|^2 \leq c \prod_{j=1}^d \frac{1}{(x_j+y_j)^2},$$

où c est une constante strictement positive. Le résultat se montre à l'aide d'une récurrence sur la dimension en utilisant la décomposition $AB - CD = (A - C)D + (B - D)C + (A - C)(B - D)$.

De plus, d'après (7.3.7), $|n^{-d} H_n\left(\frac{x+y}{n}\right) - H(x+y)|$ reste toujours bornée et l'on a donc la majoration uniforme

$$|a|^2(x) |a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d} H_n\left(\frac{x+y}{n}\right) - H(x+y) \right]^2 \mathbf{1}_{nD^2}(x, y) \leq c |a|^2(x) |a|^2(y) \prod_{j=1}^d 1 \wedge \frac{1}{(x_j+y_j)^2}.$$

Le majorant est par hypothèse intégrable sur \mathbb{R}^{2d} et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, (7.3.6) est prouvée.

Intéressons nous maintenant à (7.3.5). Le lemme 5.1 de Doukhan et al. (1996) montre que comme g est continue en 0 et bornée sur $[-\pi, \pi]^d$, le terme entre crochets dans (7.3.5) converge vers 0 pour presque tout x et y fixés dans \mathbb{R}^d . Nous allons maintenant majorer l'intégrand dans (7.3.5) uniformément en n . En notant $\varphi(t) = g(t) - g(0)$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n^d} \int_E (g(t) - g(0)) H_n \left(\frac{x}{n} - t \right) H_n \left(\frac{y}{n} + t \right) dt \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{n^d} \int_E \varphi(t) \sum_{k \in A_n} e^{i \langle k, \frac{x}{n} - t \rangle} \sum_{j \in A_n} e^{i \langle j, \frac{y}{n} + t \rangle} dt \right|^2 \\ &= \frac{1}{n^{2d}} \left| \sum_{k \in A_n} \sum_{j \in A_n} e^{i \langle k, \frac{x}{n} \rangle + i \langle j, \frac{y}{n} \rangle} \int_E \varphi(t) e^{i \langle t, j - k \rangle} dt \right|^2 \\ &= \frac{1}{n^{2d}} \left| \sum_{k \in A_n} \sum_{j \in A_n} e^{i \langle k, \frac{x}{n} \rangle + i \langle j, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_{k-j} \right|^2, \end{aligned}$$

où $(\hat{\varphi}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est la suite des coefficients de Fourier de φ . En posant $l = k - j$ dans l'expression précédente, on obtient

$$\left| \frac{1}{n^d} \int_E (g(t) - g(0)) H_n \left(\frac{x}{n} - t \right) H_n \left(\frac{y}{n} + t \right) dt \right|^2 = \frac{1}{n^{2d}} \left| \sum_{k \in A_n} e^{i \langle k, \frac{x+y}{n} \rangle} \sum_{k-l \in A_n} e^{-i \langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l \right|^2. \quad (7.3.8)$$

On utilise à présent une généralisation de la transformation d'Abel pour les sommes à plusieurs indices établie dans le lemme 24 ci-dessous. Nous introduisons quelques notations.

Pour j entier non nul fixé entre 1 et d , nous noterons $C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d$ l'ensemble des d -uplets ayant j termes égaux respectivement à k_1, k_2, \dots, k_j , les $d - j$ autres termes valant n et tels que, si $p < q$, le rang du terme égal à k_p soit inférieur au rang du terme égal à k_q . Nous noterons $\{k, n\}_d$ les éléments de cet ensemble. Par exemple le d -uplet $\{k, n\}_d = (n, k_1, n, \dots, n, k_2, n, k_3, k_4, \dots, k_j)$ contenant $d - j$ termes égaux à n appartient à $C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d$ mais pas $(n, k_2, k_1, n, \dots, n, k_3, \dots, k_j)$. Lorsque $j = d$, $C_{(k_1, \dots, k_d, n)}^d$ est réduit à l'élément (k_1, \dots, k_d) .

Soit la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$ et la suite marginale \tilde{a} de a dépendant des j indices k_1, \dots, k_j définie par $\tilde{a}_{k_1, \dots, k_j} = a_{\{k, n\}_d}$. Nous définissons les accroissements Δ_j de $a_{\{k, n\}_d}$ au point k comme suit :

$$\Delta_j (a_{\{k, n\}_d}) = \Delta_j (\tilde{a}_{k_1, \dots, k_j}) = \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_j=0}^1 (-1)^{(\sum \varepsilon_i)} \tilde{a}_{k_1+\varepsilon_1, \dots, k_d+\varepsilon_d}.$$

Lemme 24 (Transformation d'Abel).

$$\sum_{i \in A_n^d} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k, n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} \Delta_j (a_{\{k, n\}_d}) B_{\{k, n\}_d}, \quad (7.3.9)$$

où $A_n^d = \{1, \dots, n\}^d$ et où $B_{p_1, \dots, p_d} = \sum_{i_1=1}^{p_1} \dots \sum_{i_d=1}^{p_d} b_{i_1, \dots, i_d}$.

Dans le cas $d = 1$ cette formule correspond à la transformation d'Abel classique :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_k,$$

où $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$.

Dans le cas $d = 2$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} &= a_{n,n} B_{n,n} + \sum_{k_1=1}^{n-1} (a_{k_1,n} - a_{k_1+1,n}) B_{k_1,n} + \sum_{k_2=1}^{n-1} (a_{n,k_2} - a_{n,k_2+1}) B_{n,k_2} \\ &\quad + \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-1} (a_{k_1,k_2} - a_{k_1+1,k_2} - a_{k_1,k_2+1} + a_{k_1+1,k_2+1}) B_{k_1,k_2}, \end{aligned}$$

où $B_{k_1,k_2} = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} b_{i,j}$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 7.4.

On applique la transformation d'Abel à l'expression (7.3.8) avec $b_k = e^{i\langle k, \frac{x+y}{n} \rangle}$ et

$$a_k = \sum_{l \in A_n} e^{-i\langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k \in A_n} e^{i\langle k, \frac{x+y}{n} \rangle} \sum_{l \in A_n} e^{-i\langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l \right|^2 \\ &= \left| a_n B_n + \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} \Delta_j(a_{\{k,n\}_d}) B_{\{k,n\}_d} \right|^2 \\ &\leq 2 |a_n B_n|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} |\Delta_j(a_{\{k,n\}_d})| |B_{\{k,n\}_d}| \right)^2. \end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, pour tous p_1, \dots, p_d dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} |B_{p_1, \dots, p_d}| &= \left| \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_d=1}^{p_d} b_{k_1, \dots, k_d} \right| = \prod_{j=1}^d \left| \sum_{k_j=1}^{p_j} e^{i\langle k_j, \frac{x_j+y_j}{n} \rangle} \right| = \prod_{j=1}^d \left| \frac{\sin(p_j \frac{x_j+y_j}{2n})}{\sin(\frac{x_j+y_j}{2n})} \right| \\ &\leq c \prod_{j=1}^d p_j \left[1 \wedge \left(\frac{n}{p_j} \frac{1}{|x_j+y_j|} \right) \right] \leq c \prod_{j=1}^d n \left[1 \wedge \frac{1}{|x_j+y_j|} \right], \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive. Par ailleurs $|a_n| \leq |\hat{\varphi}|_1$ avec $|\hat{\varphi}|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varphi}_k|$. Ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \in A_n} e^{i \langle k, \frac{x+y}{n} \rangle} \sum_{k-l \in A_n} e^{-i \langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l \right|^2 \\ & \leq c n^{2d} \prod_{j=1}^d \left[1 \wedge \frac{1}{(x_j + y_j)^2} \right] \left\{ |\hat{\varphi}|_1^2 + \left(\sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} |\Delta_j(a_{\{k,n\}_d})| \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Nous allons montrer pour finir que le terme entre parenthèses reste borné. Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 25. *Soit j entier naturel non nul et soit une suite $(u(l))_{l \in \mathbb{Z}^d}$.*

$$\begin{aligned} & \Delta_j \left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n} \cdots \sum_{l_j=k_j-1}^{k_j-n} u(l_1, \dots, l_j) \right) \\ & = \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \cdots \sum_{\varepsilon_j=0}^1 (-1)^{(\sum \varepsilon_i)} u(k_1 - 1 + \varepsilon_1(2-n), \dots, k_j - 1 + \varepsilon_j(2-n)). \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 7.4.

On a

$$\Delta_j(a_{\{k,n\}_d}) = \Delta_j \left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n} \cdots \sum_{l_j=k_j-1}^{k_j-n} u(l_1, \dots, l_j) \right),$$

où $u(l_1, \dots, l_j) = \sum_{l_{j+1}=0}^{n-1} \cdots \sum_{l_d=0}^{n-1} e^{-i \langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l$ dans le cas où $a_{\{k,n\}_d} = a_{k_1, \dots, k_j, n, \dots, n}$. Lorsque l'indice $\{k,n\}_d$ est quelconque, $u(l_1, \dots, l_j)$ s'écrit de la même manière mais en permutant les indices l_i dans $e^{-i \langle l, \frac{y}{n} \rangle} \hat{\varphi}_l$. La permutation des indices ne change rien au raisonnement qui suit et nous écrirons abusivement par la suite $\{k,n\}_d = (k_1, \dots, k_j, n, \dots, n)$.

Appliquons à présent (7.3.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} |\Delta_j(a_{\{k,n\}_d})| \\ & = \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} \left| \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \cdots \right. \\ & \quad \left. \cdots \sum_{\varepsilon_j=0}^1 (-1)^{(\sum \varepsilon_i)} u(k_1 - 1 + \varepsilon_1(2-n), \dots, k_j - 1 + \varepsilon_j(2-n)) \right|. \end{aligned}$$

D'où la majoration

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} |\Delta_j(a_{\{k,n\}_d})| \\
& \leq \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \cdots \\
& \quad \cdots \sum_{\varepsilon_j=0}^1 \sum_{l_{j+1}=0}^{n-1} \cdots \sum_{l_d=0}^{n-1} |\hat{\varphi}(k_1 - 1 + \varepsilon_1(2 - n), \dots, k_j - 1 + \varepsilon_j(2 - n), l_{j+1}, \dots, l_d)| \\
& \leq c |\hat{\varphi}|_1,
\end{aligned} \tag{7.3.12}$$

où c est une constante dépendant de d .

D'après (7.3.8), (7.3.10) et (7.3.12),

$$\begin{aligned}
& |a|^2(x) |a|^2(y) \left| \frac{1}{n^d} \int_E (g(t) - g(0)) H_n \left(\frac{x}{n} - t \right) H_n \left(\frac{y}{n} + t \right) dt \right|^2 \mathbf{I}_{nD^2}(x, y) \\
& \leq c |\hat{\varphi}|_1^2 |a|^2(x) |a|^2(y) \prod_{j=1}^d \left[1 \wedge \frac{1}{(x_j + y_j)^2} \right]
\end{aligned}$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}^{2d} et par le théorème de convergence dominée, (7.3.5) est montrée. \square

7.4 Preuves des lemmes

Démonstration du lemme 24. La preuve se fait par récurrence sur d . Le cas $d = 1$ est évident. Nous supposons que (7.3.9) est vérifiée au rang d et nous allons la montrer au rang $d + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A_n^{d+1}} a_i b_i &= \sum_{i_{d+1}=1}^n \left[\sum_{i \in A_n^d} a_i b_i \right] = \sum_{i_{d+1}=1}^n a_{n, \dots, n, i_{d+1}} B'_{n, \dots, n, i_{d+1}} \\
&+ \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1, \dots, k_j, n)}^d} \sum_{i_{d+1}=1}^n \Delta_j(a_{\{k,n\}_d, i_{d+1}}) B'_{(\{k,n\}_d, i_{d+1})}
\end{aligned}$$

où $B'_{p_1, \dots, p_d, p_{d+1}} = \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{p_d} b_{i_1, \dots, i_d, i_{d+1}}$ et où le vecteur des $d+1$ indices $(\{k, n\}_d, i_{d+1})$ est composé du vecteur de d indices $\{k, n\}_d$ complété en dernière position par l'indice i_{d+1} . En utilisant la transformation d'Abel classique aux sommes indicées par i_{d+1} dans

la dernière expression, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A_n^{d+1}} a_i b_i &= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,\dots,n,k} - a_{n,\dots,n,k+1}) B_{n,\dots,n,k} \\
&+ \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1,\dots,k_j,n)}^d} \Delta_j (a_{(\{k,n\}_d,n)}) B_{(\{k,n\}_d,n)} \\
&+ \sum_{j=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1,\dots,k_j,n)}^d} \sum_{k_{d+1}=1}^{n-1} [\Delta_j (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}) - \Delta_j (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1}+1)})] B_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\Delta_j (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}) - \Delta_j (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1}+1)}) = \Delta_{j+1} (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A_n^{d+1}} a_i b_i &= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_1 (a_{n,\dots,n,k}) B_{n,\dots,n,k} \\
&+ \sum_{j_2=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_{j_2}=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1,\dots,k_{j_2})}^d} \Delta_{j_2} (a_{(\{k,n\}_d,n)}) B_{(\{k,n\}_d,n)} \\
&+ \sum_{j_3=1}^d \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_{j_3}=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C_{(k_1,\dots,k_{j_3})}^d} \sum_{k_{d+1}=1}^{n-1} \Delta_{j_3+1} (a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}) B_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}. \quad (7.4.1)
\end{aligned}$$

Comparons cette expression au résultat recherché :

$$a_n B_n + \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{k_1=1}^{n-1} \dots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_{d+1} \in C_{(k_1,\dots,k_j,n)}^{d+1}} \Delta_j (a_{\{k,n\}_{d+1}}) B_{\{k,n\}_{d+1}}. \quad (7.4.2)$$

La question est de savoir si l'ensemble des indices $\{k,n\}_{d+1}$ dans (7.4.2) décrit le même ensemble que dans les sommes de (7.4.1).

Lorsque $j = d + 1$ dans la somme de (7.4.2), l'ensemble $C_{(k_1,\dots,k_{d+1})}^{d+1}$ est réduit à l'élément (k_1, \dots, k_{d+1}) et les termes associés à $j = d + 1$ dans (7.4.2) se retrouvent dans la dernière somme de (7.4.1) en y prenant $j_3 = d$.

En prenant $j_2 = 1$ dans la seconde somme de (7.4.1), on retrouve presque tous les termes associés à $j = 1$ dans (7.4.2). Il ne manque que les indices $\{k,n\}_{d+1}$ pour lesquels le terme k_1 est placé en dernière position du $(d+1)$ -uplet : il s'agit de la première somme de (7.4.1).

Enfin, lorsque $j = 2, \dots, d$ dans (7.4.2), il est facile de se convaincre que tous les termes se retrouvent d'une part dans la seconde somme de (7.4.1) (on y retrouve pour

$j_2 = j$ les indices $\{k, n\}_{d+1}$ pour lesquels le dernier élément reste fixé à n) et d'autre part dans la dernière somme de (7.4.1) pour $j_3 = j - 1$ (on récupère alors les indices $\{k, n\}_{d+1}$ pour lesquels le dernier élément est k_j). \square

Démonstration du lemme 25. On démontre le résultat par récurrence sur j . Pour $j = 1$,

$$\Delta_1 \left(\sum_{l=k-1}^{k-n} u(l) \right) = \sum_{l=k-1}^{k-n} u(l) - \sum_{l=k}^{k-n+1} u(l) = u(k-1) - u(k-n+1)$$

ce qui correspond bien à (7.3.11). Supposons la formule vraie au rang j .

$$\begin{aligned} \Delta_{j+1} \left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n} \dots \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}-1}^{k_{j+1}-n} u(l_1, \dots, l_{j+1}) \right) \\ = \sum_{\varepsilon_{j+1}=0}^1 (-1)^{\varepsilon_{j+1}} \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}+\varepsilon_{j+1}-1}^{k_{j+1}+\varepsilon_{j+1}-n} \Delta_j \left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n} \dots \sum_{l_j=k_j-1}^{k_j-n} u(l_1, \dots, l_{j+1}) \right) \\ = \sum_{\varepsilon_{j+1}=0}^1 (-1)^{\varepsilon_{j+1}} \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}+\varepsilon_{j+1}-1}^{k_{j+1}+\varepsilon_{j+1}-n} U_{k_1, \dots, k_j}(l+1), \end{aligned}$$

où

$$U_{k_1, \dots, k_j}(l+1) = \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_j=0}^1 (-1)^{(\sum_{i=1}^j \varepsilon_i)} u(k_1 - 1 + \varepsilon_1(2-n), \dots, k_j - 1 + \varepsilon_j(2-n), l_{j+1}).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \Delta_{j+1} \left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n} \dots \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}-1}^{k_{j+1}-n} u(l_1, \dots, l_{j+1}) \right) \\ = \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}-1}^{k_{j+1}-n} U_{k_1, \dots, k_j}(l+1) - \sum_{l_{j+1}=k_{j+1}}^{k_{j+1}+1-n} U_{k_1, \dots, k_j}(l+1) \\ = \sum_{\varepsilon_{j+1}=0}^1 (-1)^{\varepsilon_{j+1}} U_{k_1, \dots, k_j}(k_{j+1} - 1 + \varepsilon_{j+1}(2-n)) \\ = \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_{j+1}=0}^1 (-1)^{(\sum \varepsilon_i)} u(k_1 - 1 + \varepsilon_1(2-n), \dots, k_{j+1} - 1 + \varepsilon_{j+1}(2-n)). \end{aligned}$$

\square

Nous terminons en prouvant l'intégrabilité énoncée dans le (iii) de la Remarque 30.

Lemme 26. Soit $-1/2 < \alpha < -1/4$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^4} |x_1 + \theta x_2|^\alpha |y_1 + \theta y_2|^\alpha [1 \wedge (x_1 + y_1)^{-2}] [1 \wedge (x_2 + y_2)^{-2}] dx dy < \infty. \quad (7.4.3)$$

Démonstration du lemme 26. En posant dans (7.4.3) $u = x + y$ et $x = x$, l'intégrale est majorée par

$$\int_{\mathbb{R}^2} [1 \wedge (u_1)^{-2}] [1 \wedge (u_2)^{-2}] \int_{\mathbb{R}^2} |x_1 + \theta x_2|^\alpha |u_1 + \theta u_2 - (x_1 + \theta x_2)|^\alpha dx du.$$

Posons à présent dans cette intégrale $v_1 = u_1 + \theta u_2$ et $v_2 = u_2$. Elle se réécrit alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} [1 \wedge (v_1 - \theta v_2)^{-2}] [1 \wedge (v_2)^{-2}] \int_{\mathbb{R}^2} |x_1 + \theta x_2|^\alpha |v_1 - (x_1 + \theta x_2)|^\alpha dx dv.$$

Finalement, le changement de variables $x_1 = v_1 t_1$ et $x_2 = v_1 t_2$ montre que cette dernière expression est égale à

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} [1 \wedge (v_1 - \theta v_2)^{-2}] [1 \wedge (v_2)^{-2}] |v_1|^{4\alpha+2} dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |t_1 + \theta t_2|^\alpha |1 - (t_1 + \theta t_2)|^\alpha dt \right).$$

Comme $-1/2 < \alpha < -1/4$, les deux intégrales ci-dessus sont finies. \square

Bibliographie

- Alexander, K. S. and Pyke, R. (1986). A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance. *Ann. Probab.*, 14 :582–597.
- Anh, V. V. and Lunney, K. E. (1995). Parameter estimation of random fields with long-range dependence. *Mathl. Comput. Modelling*, 21(9) :67–77.
- Avram, F. and Taqqu, M. (1987). Noncentral limit theorems and Appell polynomials. *Ann. Probab.*, 15 :767–775.
- Bass, R. F. (1985). Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 70 :591–608.
- Basu, A. K. and Dorea, C. C. Y. (1979). On functional central limit theorem for stationary martingale random fields. *Acta. Math. Hung.*, 33 :307–316.
- Bennett, J. and Khotanzad, A. (1998). Modeling textured images using generalized long correlation models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 20 :1365–1370.
- Bickel, P. J. and Wichura, M. J. (1971). Convergence criteria for multiparameters stochastic processes and some applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(5) :1656–1670.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons.
- Bingham, N., Goldie, C., and Teugels, J. L. (1987). *Regular variation*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27. Cambridge University Press.
- Brezis, H. (1983). *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris.
- Brillinger, D. R. (1981). *Time Series : Data analysis and theory*. Holden-Day, expanded edition.
- Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Bulinski, A. and Keane, M. (1996). Invariance principle for associated random fields. *J. Math. Sci.*, 81(5) :2905–2911.

- Cassandro, M. and Jona-Lasinio, G. (1978). Critical point behaviour and probability theory. *Advances in Physics*, 27(6) :913–941.
- Chiles, J.-P. and Delfiner, P. (1998). *Geostatistics : Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*. Wiley, New York.
- Dedecker, J. (2001). Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields. *ESAIM : Probability and Statistics*, 5 :77–104.
- Dehling, H., Mikosch, T., and Sorensen, M., editors (2002). *Empirical process techniques for dependent data*. Birkhäuser.
- Dehling, H. and Taqqu, M. S. (1989). The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to u-statistics. *Ann. Stat.*, 4 :1767–1783.
- Dobrushin, R. L. (1965). Existence of a phase transition in two and three dimensional ising models. *Th. Prob. Appl.*, 10 :193–213.
- Dobrushin, R. L. (1980). Gaussian random fields - gibbsian point of view. In Dobrushin, R. L. and Sinai, Y. G., editors, *Multicomponent random systems*, volume 6 of *Adv. in Prob. and Related Topics*. New York : Dekker.
- Dobrushin, R. L. and Major, P. (1979). Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Z. Warsch. verw. Geb.*, 50 :27–52.
- Doukhan, P. (2003). Models, inequalities, and limit theorems for stationary sequences. In Doukhan, P., Oppenheim, G., and Taqqu, M., editors, *Theory and applications of long-range dependence*. Birkhäuser.
- Doukhan, P., Lang, G., and Surgailis, D. (2002). Asymptotics of weighted empirical processes of linear fields with long-rang dependence. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6 :879–896.
- Doukhan, P. and Leon, J. R. (1996). Asymptotics for the local time of a strongly dependent vector-valued gaussian random field. *Acta. Math. Hungar.*, 70(4) :329–351.
- Doukhan, P., Leon, J. R., and Soulier, P. (1996). Central and non central limit theorems for quadratic forms of a strongly dependent gaussian field. *Brazilian Journal of Prob. and. Stat.*, 10 :205–223.
- El Machkouri, M. (2003). *Théorèmes limite pour les champs et les suites stationnaires de variables aléatoires réelles*. PhD thesis, Université de Rouen.
- El Machkouri, M. and Volny, D. (2003). Contre-exemple dans le théorème limite central fonctionnel pour les champs aléatoires réels. *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, 39(2) :325–337.

- Eom, K. (2001). Long-correlation models for texture with circular and elliptical correlation structures. *IEEE Trans. on Image Proces.*, 10(7) :1047–1055.
- Fisher, M. E. (1964). Correlation functions and the critical region of simple fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 5(7) :944–962.
- Fox, R. and Taqqu, M. (1985). Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Annals of Probability*, 13 :428–446.
- Fox, R. and Taqqu, M. (1987). Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Probability Theory and Related Fields*, 74 :213–240.
- Georgii, H. O. (1988). *Gibbs measure and phase transitions*. De Gruyter.
- Gikhman, I. I. and Skorokhod, A. V. (1965). *Introduction to the theory of random processes*. W. B. Saunders.
- Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R., and Teyssière, G. (2003). Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels. *Journal of Econometrics*, 112 :265–294.
- Giraitis, L., Leipus, R., and Philippe, A. (2002). The test for stationarity versus trends and unit roots for a wide class of dependent errors. *Preprint. IRMA, Lille.*, (59, VI).
- Giraitis, L. and Surgailis, D. (1990). A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittles’s estimate. *Probab. Theory Related Fields*, 86 :87–104.
- Granger, C. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series and fractional differencing. *J. of Time Series Analysis*, 1 :15–30.
- Granger, C. W. (1980). Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14 :227–238.
- Gray, H., Zhang, N., and Woodward, W. (1989). On generalized fractionnal process. *J. Time Ser. Anal.*, 10 :233–257.
- Grinblatt, L. (1976). A limit theorem for measurable random processes and its applications. *Proc. of the American Math. Society*, 61(2) :371–376.
- Guyon, X. (1993). *Champs aléatoires sur un réseau*. Masson.
- Heyde, C. C. and Gay, R. (1993). Smoothed periodogram asymptotics and estimation for processes and fields with possible long-range dependence. *Stochastic Processes and their Applications*, 45 :169–182.
- Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68 :165–176.

- Hosking, J. R. M. (1996). Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of long-memory time series. *J. of Econometrics*, 73 :261–284.
- Kashyap, R. and Eom, K. (1989). Texture boundary detection based on the long correlation model. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11(1) :58–67.
- Kashyap, R. and Lapsa, P. (1984). Synthesis and estimation of random fields using long-correlation models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, PAMI-6(6) :800–809.
- Kaufman, B. and Onsager, L. (1949). Crystal statistics III : Short-range order in a binary Ising lattice. *Physical Review*, 76 :1244–1252.
- Kendall, M. and Stuart, A. (1958). *The advanced theory of statistics*, volume 1. London, England, Griffin.
- Kosterlitz, J. M. and Thouless, D. J. (1978). Two-dimensional physics. In *Progress in Low Temperature Physics*, volume VII B, page 371. North-Holland, Amsterdam.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : how sure are we that economic time series have a unit root ? *J. of Econometrics*, 54 :159–178.
- Künsch, H. (1980). *Reellwertige Zufallsfelder auf einem Gitter : Interpolationsprobleme, Variationsprinzip und statistische Analyse*. PhD thesis, ETH Zürich.
- Lang, G. and Soulier, P. (2000). Convergence de mesures spectrales aléatoires et applications à des principes d'invariance. *Stat. Inf. for Stoch. Proc.*, 3 :41–51.
- Lavancier, F. (2005a). Invariance principles for non-isotropic long memory random fields. *preprint. disponible à <http://math.univ-lille1.fr/lavancier>*.
- Lavancier, F. (2005b). Long memory random fields. *à paraître dans un ouvrage collectif chez Springer, disponible à <http://math.univ-lille1.fr/lavancier>*.
- Lavancier, F. (2005c). Processus empirique de fonctionnelles de champs gaussiens à longue mémoire. *preprint 63, IX, IRMA, Lille. disponible à <http://math.univ-lille1.fr/lavancier>*.
- Lee, H. S. and Schmidt, P. (1996). On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternative. *J. of Econometrics*, 73 :285–302.
- Leonenko, N. (1999). *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum*. Kluwer Academic Publisher.
- Leonenko, N. and Bentsic, M. (1998). On estimation of regression coefficients of long memory random fields observed on the arrays. *Random Oper. and Stoch. Equ.*, 6(1) :61–76.
- Lo, A. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59 :1279–1313.

- Major, P. (1981). *Multiple Wiener-Itô Integrals*. Number 849 in Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- Marinucci, D. and Poghosyan, S. (2001). Asymptotics for linear random fields. *Stat. and Proba. Letters*, 51 :131–141.
- Onsager, L. (1944). Crystal statistics I : A two dimensional model with order-disorder transition. *Physical Review*, 65 :117–149.
- Oppenheim, G. and Viano, M.-C. (2004). Aggregation of random parameter ornstein-uhlenbeck or ar processes : some convergence results. *J. Time ser. Anal.*, 25(3) :335–350.
- Ould Haye, M. (2001). *Théorèmes limites pour des processus à longue mémoire saisonnière*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Ould Haye, M. (2002). Asymptotical behavior of the empirical process for seasonal long-memory data. *ESAIM*, 6 :293–309.
- Pesquet-Popescu, B. and Pesquet, J.-C. (2002). Synthesis of bidimensional alpha-stable models with long-range dependence. *Signal Processing*, (82) :1927–1940.
- Pickard, D. K. (1987). Inference for discrete markov fields : the simplest nontrivial case. *J. Am. Stat. Assoc.*, 82(397) :90–96.
- Pollard, D. (1984). *Convergence of stochastic processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag.
- Rosenblatt, M. (1985). *Stationary sequences and random fields*. Birkhäuser.
- Sethuraman, S. and Basawa, I. V. (1995). Maximum likelihood estimation for a fractionally differenced autoregressive model on a two-dimensional lattice. *J. of Statistical Planning and Inference*, 44 :219–235.
- Surgailis, D. (1982). Zones of attraction of self-similar multiple integrals. *Lithuanian Math. J.*, 22 :327–340.
- Taqqu, M. (1979). Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 50 :53–83.
- Terrin, N. and Taqqu, M. (1990). A noncentral limit theorem for quadratic forms of Gaussian stationary sequences. *J. Theor. Probab.*, 3 :449–475.
- Van der Meer, T. (1996). Invariance principle for strongly dependent sequences. *Prépub. Lab. Prob. et Stat. Paris VI*, 373.
- Viano, M.-C., Deniau, C., and Oppenheim, G. (1995). Long-range dependence and mixing for discrete time fractional processes. *J. Time Ser. Anal.*, 16(3) :323–338.

- Wainger, S. (1965). *Special trigonometric series in k -dimensions*. Number 59. AMS.
- Wichura, M. (1969). Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. *Ann. Math. Stat.*, 40(2) :681–687.
- Zygmund, A. (1959). *Trigonometric series*. Cambridge University Press.