

SOMMAIRE

	Page
Introduction générale	8
1 Apport de la théorie des jeux et de l'économie industrielle à la stratégie d'entreprise	12
2 L'« Industry Cost Curve » comme outil d'analyse stratégique	15
3 Programmation linéaire et concurrence parfaite	18
4 Théorie de l'oligopole et industries de commodité	24
5 Conclusion	29
Problématique de la thèse	30
Introduction aux chapitres	
1 Préemption et incertitude (Chapitre 1)	33
2 Cournot et contraintes de capacité (Chapitre 2)	35
3 <i>Judo economics</i> et négociation (Chapitre 3 et 4)	36
Références bibliographie	46
 <u>Chapitre 1 :</u>	
<i>How Uncertainty Disciplines Pre-commitment on Risky Markets ?</i>	49
 <u>Chapitre 2 :</u>	
<i>Capacity Constrained Cournot-Nash Equilibrium : A Simple Formula</i>	82
 <u>Chapitre 3 :</u>	
<i>Equilibre de négociation sous menace de guerre de prix</i>	113
 <u>Chapitre 4 :</u>	
<i>The limits of accomodation : an experiment in Judo economics</i>	143

INTRODUCTION

« Il n'y a pas de science de l'homme, ce qu'il nous faut entendre au même ton qu'il n'y a pas de petites économies. »

Jacques Lacan, La science et la vérité.

Rapport-gratuit.com 
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

Objet de la thèse

L'analyse des situations d'interactions stratégiques, telle qu'elle s'est développée ces 30 dernières années en économie industrielle sur la base de modèles théoriques mobilisant la théorie des jeux, peut-elle être utilisée dans les firmes industrielles pour l'aide à l'analyse stratégique ?

L'objectif de cette thèse est d'explorer cette question dans un secteur spécifique : celui des industries de biens dits « de commodité ».

En effet, leurs caractéristiques particulières (faible différenciation en qualité, quasi inélasticité de la demande aux prix, forte intensité capitaliste, faible nombre d'acteurs...) favorisent l'émergence de comportements stratégiques pour l'analyse desquels la théorie des jeux semble particulièrement bien adaptée et en ont ainsi fait un terrain d'investigation privilégié pour l'Economie Industrielle.

Les industries de commodité, et l'industrie cimentière en particulier, sont donc souvent considérées comme des cas d'école illustrant la théorie de l'oligopole telle qu'analysée dans les manuels d'Economie Industrielle et ont donné lieu à de nombreux essais de modélisation.

En outre, devant l'importance de l'impact financier des décisions stratégiques et de leur caractère relativement irréversible, les firmes industrielles et de nombreux cabinets de conseil en stratégie se sont fortement intéressés aux problématiques spécifiques à ces secteurs.

Pourtant, les apports de la concurrence imparfaite, qui ont fourni un cadre d'analyse formel aux interactions stratégiques, ne semblent pas avoir donné le jour à beaucoup d'applications à la stratégie industrielle au sein de l'entreprise. Leur impact est resté, assurément, sans commune mesure avec l'ampleur du renouveau qu'a fourni la théorie des jeux à l'économie moderne.

Cette thèse se place ainsi dans le cadre théorique de la concurrence imparfaite et cherche à développer des perspectives entrant dans le champ de la stratégie industrielle.

Son objet est de proposer des modélisations prenant en compte les spécificités de ces industries de commodité et de tenter d'utiliser certains des résultats pour l'aide à la décision stratégique au sein de l'entreprise.

Principaux résultats

Nous nous sommes attachés à l'étude de questionnements stratégiques récurrents dans ces contextes industriels et pour lesquels des approfondissements théoriques nous ont paru pertinents. Nous avons donc cherché à mobiliser les concepts classiques de l'Economie Industrielle (Equilibres de Stackelberg, Bertrand, Cournot, théorie de la négociation) en les confrontant aux spécificités de ces industries de commodité .

Ainsi, le chapitre 1 est un essai traitant de l'impact de l'incertitude de la demande sur des stratégies de préemption .

L'essai du chapitre 2 s'attache à la prise en compte des contraintes de capacité de production dans l'Equilibre de Cournot-Nash.

L'essai du chapitre 3 propose un équilibre de négociation fondé sur des menaces de guerre de prix en demande inélastique.

Enfin, le dernier chapitre présente un jeu expérimental proposant des limitations aux stratégies d'accommodation à travers, en particulier, la présence d'un joueur à rationalité différente (importateur).

Contexte d'étude

Ce travail de recherche a été réalisé dans le cadre d'une convention CIFRE, en partenariat entre le groupe LAFARGE et le Ministère de la Recherche, au sein du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique.

Durant près de deux années passées en tant que chargé d'études stratégiques au sein de la Direction de la Stratégie Cimentière (DSC) du groupe Lafarge, l'occasion m'a été donnée de me familiariser avec les problématiques stratégiques spécifiques à l'industrie cimentière.

Mon travail durant cette période s'est articulé autour de deux axes principaux.

D'une part, je fus chargé du développement et de l'amélioration d'outils et de méthodes d'aide à la décision stratégique, ainsi que de la formation des nouveaux stratèges de la Branche Ciment à ces sujets.

D'autre part, j'ai collaboré à de nombreuses études stratégiques pour lesquelles la DSC était mandatée par la Direction Générale, soit pour répondre à des questionnements stratégiques de long terme, soit pour apporter son expertise aux Unités Opérationnelles, en vue d'émettre un avis sur des propositions de dossiers de développement, ou en intervenant en tant que support à l'équipe locale.

Plus précisément, des méthodes et des études ont été développées concernant la prévision de la demande, la sensibilité aux variables clés dans les dossiers d'investissement, l'opportunité de « décommoditisation », les stratégies d'intégration verticale entre les activités du ciment, du béton et des granulats, les problématiques liées aux menaces de nouveaux entrants ou d'importateurs, ou encore les enjeux liés à l'usage de produits de substitution au ciment.

Plus spécifiquement, c'est sur la modélisation des interactions concurrentielles entre cimentiers que mon travail s'est concentré, à travers le déploiement d'outils et de

méthodes d'analyse stratégique au sein de l'ensemble des unités opérationnelles cimentières du groupe.

L'animation de la communauté des stratégies de la Branche Ciment à travers la mise en œuvre de sessions de formation spécifiques et de conception d'études de cas et de jeux pour les séminaires annuels des stratégies a également constitué une part importante de mon activité.

Les collaborations avec les Unités Opérationnelles ont été réalisées dans des pays très variés en terme de taille ainsi que de contexte industriel et concurrentiel : Allemagne, Canada, Corée, Espagne, Etats-Unis, France, Inde, Italie, Maroc, Pologne, Roumanie, Royaume-Uni, Suisse, Turquie. Les problématiques abordées ont donc été très différentes : acquisition, restructuration, lutte contre les imports, intégration verticale, segmentation clients, guerres de prix, nouveaux entrants ...

Cette expérience industrielle m'a donc permis d'appréhender des contextes stratégiques très variés, et a ainsi été propice à la détermination des orientations de mon travail de recherche.

Présentation

Nous décrivons tout d'abord les liens, finalement limités, que l'économie industrielle a pu tisser avec la stratégie d'entreprise, même dans le contexte favorable des industries de commodité qui nous intéresse ici.

Nous poursuivrons cette introduction par la description d'un outil classique mobilisé pour l'analyse des problématiques stratégiques des industries de commodité : l'« Industrie Cost Curve ». Après en avoir proposé une illustration stylisée, nous nous focaliserons sur une interprétation en terme de concurrence parfaite et en montrerons les limites.

Nous passerons ensuite rapidement en revue les concepts classiques proposés par la théorie de l'oligopole et présenterons la problématique de la thèse.

Enfin, nous introduirons les quatre différents chapitres qui constituent la thèse.

1 Apport de la théorie des jeux et de l' économie industrielle à la stratégie d'entreprise

Au cours de ces trente dernières années, l'économie industrielle a été profondément influencée par la mobilisation de la théorie des jeux, c'est à dire par l'étude des choix rationnels des acteurs lorsque les gains de chacun dépendent des actions des autres et lorsque ceux-ci en ont pleinement conscience.

En 1994, cinquante ans après la publication du livre fondateur de John von Neumann et Oskar Morgenstern, « *The Theory of Game and Economic Behavior* », le prix Nobel d'économie fut attribué à trois théoriciens des jeux : John Nash, John Harsanyi et Reinhard Selten, marquant la reconnaissance du rôle essentiel de la théorie de jeux au sein de l'Economie.

Mobilisée depuis dans de nombreux domaines, c'est probablement en économie industrielle qu'elle a trouvé le champ d'application le plus fructueux, lui procurant un essor très important. A titre illustratif, depuis 1980, 60% des articles d'économie industrielle publiés dans les cinq revues d'économie généralistes les plus citées, mobilisent la théorie des jeux².

Ce sont, historiquement, les problématiques de politique de la concurrence aussi bien aux Etats-Unis qu'en Europe qui en ont été le premier champ d'application, en s'intéressant au surplus des consommateurs, au travers, par exemple, des lois anti-trust, de la lutte contre les cartels, de la régulation des fusions, etc.

Cependant, ces trente dernières années marquent un changement considérable de perspective quant aux mobilisations de l'économie industrielle. En effet, les firmes se sont intéressées à l'outil avec lequel leurs potentielles déviances anticoncurrentielles étaient analysées, pour le mobiliser à des fins stratégiques. On peut vraisemblablement attribuer ce renouveau de l'usage de l'Economie Industrielle à l'ampleur des idées initiées par le Boston Consulting Group et propagées par la plupart des cabinets de conseil en stratégie dans les années 70, focalisant les enjeux sur le positionnement concurrentiel³.

Pourtant, la véritable révolution qu'a opérée la théorie des jeux sur le plan académique, débouchant sur ce qu'il est maintenant convenu d'appeler la « nouvelle économie industrielle », et qui joue un rôle primordial dans la façon d'aborder en théorie les problèmes de stratégie d'entreprise, n'a pas eu le même retentissement dans son application en stratégie industrielle. En effet, les publications traitant des apports de la nouvelle économie industrielle sont très limitées dans les revues de management et de stratégie d'entreprise⁴.

Ainsi, bien que les liens entre les contributions de la théorie des jeux et les problématiques rencontrées dans les questionnements stratégiques des firmes semblent souvent évidents (en particulier concernant les interactions concurrentielles), nombre

² Voir Ghemawat (1997).

³ Voir Ponssard (1988) pour une analyse détaillée du rôle de l'Economie Industrielle au sein de la stratégie d'entreprise.

⁴ Voir Ghemawat (1997)

de stratégies industriels restent sceptiques et débattent toujours de son apport effectif à leur champ d'investigation.

Ce constat est d'autant plus surprenant que l'« ancienne » économie industrielle avait, quant à elle, énormément influencé la stratégie d'entreprise, en particulier au travers du livre de Porter (1980), « *Competitive Strategy* », devenu la référence incontournable des cabinets de conseil en stratégie.

Porter lui-même a, par ailleurs, souligné que l'apport de la théorie des jeux permet de focaliser l'analyse sur les profits individuels plutôt que sur le surplus collectif et de passer d'indicateurs de performance inter-industries à l'identification de différences structurelles et stratégiques des firmes à l'intérieur d'une même industrie. Ceci permet d'appréhender la structure de l'industrie, non plus comme exogène, mais comme résultant des stratégies des firmes⁵.

En outre, la plupart des cursus de *Master of Business Administration* proposent aujourd'hui un enseignement de la théorie des jeux, en particulier au travers d'études de cas initiés par Havard Business School. En France, la plupart des grandes écoles proposent désormais un cours d'économie industrielle, même si l'enseignement de la théorie des jeux elle-même restait jusqu'à ces dernières années cantonné au 3^{ème} cycle universitaire de filières mathématiques.

De plus, des ouvrages de vulgarisation riches en illustrations de cas concrets ont vu le jour et ont été accueillis avec un certain succès. On peut citer en particulier celui de Nalebuff et Brandenburger « *Coopetition* » (1996).

L'ensemble de ces éléments aurait dû contribuer au succès de la théorie des jeux auprès des stratèges de l'industrie dont les préoccupations se portent de plus en plus sur leurs concurrents plutôt que sur leurs produits : amélioration de la structure des coûts, différenciation des produits, construction de barrières à l'entrée et développement d'avantages concurrentiels durables.

Pourtant, lorsque l'on recherche les éventuels impacts de l'utilisation de la théorie des jeux au sein des firmes industrielles, voire même de cabinets de conseil en stratégie, le constat semble sans appel : les rares références à la théorie des jeux se limitent en général à quelques allusions au « dilemme du prisonnier ».

Certaines causes de l'échec de l'application de la théorie des jeux à la réalité industrielle sont identifiables.

En effet, si toute tentative d'application d'une théorie à la réalité se révèle en général périlleuse, dans ce cas, plusieurs éléments viennent rendre l'exercice particulièrement délicat. Rumelt, Schendel et Teece (1991) avancent les raisons suivantes :

Tout d'abord, les théoriciens des jeux sont en général peu enclins à considérer les problèmes des entreprises, très éloignés de leurs préoccupations académiques. Ensuite, l'objet de la théorie des jeux est d'analyser les interactions entre les variables plutôt que de présumer de leur importance pratique. Par ailleurs, la complexité des

⁵ Voir Sutton (1991)

interactions impose rapidement de se limiter à quelques variables et à négliger les autres, limitant fortement toute tentative d'évaluation et d'application. Enfin, les équilibres proposés nécessitent un haut degré de rationalité et d'accès à l'information de la part des acteurs, ce qui n'est pas toujours le cas de la réalité industrielle.

2 L'« Industry Cost Curve » comme outil d'analyse stratégique

Dans les années 1980, le cabinet de conseil McKinsey développe, avec un certain succès, des analyses mobilisant l'« Industry Cost Curve » (ICC) comme outil de réflexion lors de la prise de décisions stratégiques dans les industries de commodité à forte intensité capitaliste. Les justifications théoriques font référence à la programmation linéaire et à la concurrence parfaite.⁶

En particulier, ces analyses sont utilisées pour des décisions irréversibles d'investissement dans de nouvelles capacités de production, de rationalisation des ventes et de *pricing* stratégique.

L'analyse proposée est la suivante : dans ces types d'industrie, la demande est quasi constante et le marché n'a pas d'autre critère que le prix pour le choix de ses fournisseurs. En outre, la production est caractérisée par des contraintes de capacité très rigides et des coûts variables de production déterminés par la technologie et le dimensionnement de l'outil industriel aboutissant à des coûts rendus au marché différenciés (souvent accentués par des coûts de transport relativement importants).

Dans ce cadre, les parts de marchés, les prix et donc les profits sont directement déterminés par trois facteurs : les capacités, les coûts et la taille du marché.

Reprenons ici l'exemple proposé par D.C. Watters (1981) sur la base de la figure 1.

Supposons ainsi que la demande annuelle pour un bien homogène soit 75kt indépendamment du prix.

En abscisse et en ordonnée sont indiqués respectivement les capacités et coûts de production des différents joueurs potentiels par ordre croissant.

L'analyse proposée est la suivante : le leader en coût produira jusqu'à saturation de sa capacité et laissera à son concurrent suivant l'opportunité de faire de même. Et ce, ainsi de suite jusqu'à la satisfaction de l'ensemble de la demande, suggérant alors une fixation du prix proche du coût du premier non entrant.

Ainsi, dans cet exemple, trois joueurs sont présents sur le marché (Alpha 1, Bravo 1 et Alpha 2), le prix étant déterminé par l'exclusion de Romeo.

La vue des coûts est ici déterminante. Par exemple, le coût à considérer pour Bravo 2, premier non entrant (usine à l'état de projet), doit inclure le coût de production prévisionnel, le transport (en supposant qu'il soit effectué par le producteur), mais aussi le coût d'opportunité de la construction de l'usine, par comparaison avec une autre décision d'investissement de risque identique garantissant à la compagnie Bravo un retour sur capitaux investis acceptable.

⁶ Watters, Don C. 1981. The Industry Cost Curve as a Strategic Tool. A McKinsey Classic.

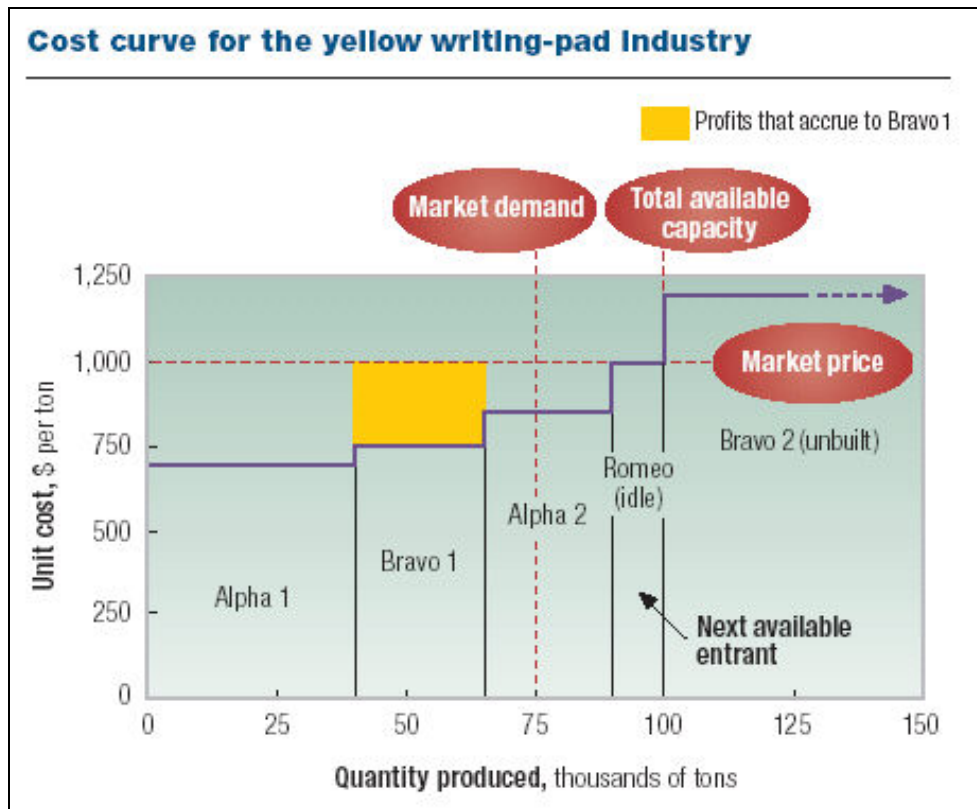


Figure 1 extrait de Watters, 1981.

La simple analyse de ce graphe permet certaines remarques intéressantes :

Par exemple, même si Bravo 1 est un producteur efficace, la compagnie Bravo pourrait ne pas souhaiter une augmentation de capacité car, ce faisant, elle ferait baisser le prix jusqu'au coût d'Alpha 2.

D'un autre côté, la fermeture d'Alpha 2 permettrait de faire monter les prix jusqu'aux coûts potentiels de Bravo 2. Cette stratégie profiterait fortement à Bravo 1 et Alpha 1. Ainsi la fermeture de Alpha 2 pourrait finalement s'avérer être une bonne stratégie pour Alpha.

Cependant, si Romeo n'avait pas assez de capacité (par exemple en cas de croissance du marché), Bravo pourrait être construite et son coût cash *ex-post* modifier la hiérarchie des coûts rendus.

Trois questions principales se posent, à ce stade de l'analyse, et restent sans réponse dans les brochures des cabinets de conseils en stratégie :

Premièrement, en cas de croissance anticipée de la demande future, Alpha pourrait décider d'investir dans une nouvelle usine et préempter la construction de Bravo2. Quelle serait alors l'issue de cette concurrence à l'investissement ?

Deuxièmement, que se passerait-il si les entreprises en question se retrouvaient en concurrence sur plusieurs marchés distants, la hiérarchie des coûts rendus étant

différente sur chaque marché, et la contrainte de capacité s'appliquant sur l'ensemble des marchés desservis par chaque usine ?

Troisièmement, pourquoi Alpha 2 ne chercherait-il pas à vendre plus, étant donné sa capacité disponible et l'ombrelle de prix dont il dispose ? Quel mécanisme discipline donc Alpha 2 ?

Concernant le premier point, seules des différences de coût d'accès à de nouvelles capacités semblent pouvoir éviter une course à la préemption destructrice. Dans notre exemple, l'effet de réseau dont bénéficie Alpha est indéniablement un avantage stratégique, car la fermeture d'Alpha 2 permettrait un meilleur taux d'utilisation de la nouvelle usine (comparativement à ce qui pourrait être envisagé pour Bravo 2). Cependant, ces stratégies sont très sensibles aux anticipations que peuvent avoir les concurrents des perspectives de croissance du marché. Ainsi, l'incertitude sur la demande future affecte ces stratégies de préemption.

C'est l'objet de la première partie de cette thèse.

Sur le second point, les promoteurs de l'ICC répondent en proposant une généralisation à plusieurs marchés via l'utilisation de la Programmation Linéaire. La section suivante examine les fondements économiques d'une allocation de marché fondée sur ce concept, et en montre les limites.

La deuxième partie de la thèse examine l'impact des contraintes de capacité à travers une modélisation en concurrence imparfaite de plusieurs usines en compétition sur plusieurs marchés.

Concernant le dernier point, on peut imaginer un mécanisme de punition par les autres joueurs plus compétitifs tel que, si Alpha 2 cherchait à leur prendre du marché, ils abaisseraient le prix au niveau des coûts d'Alpha 2, le rendant indifférent au gain de part de marché supplémentaire.

En fait, les négociations qui pourraient intervenir entre Alpha 2 et les autres joueurs présents sur le marché méritent d'être approfondies, et le résultat de l'équilibre ne serait pas forcément celui décrit par les auteurs de l'ICC.

La troisième partie de la thèse est consacrée à l'analyse de ce sujet.

3 Programmation linéaire et concurrence parfaite.

Les développements, déjà anciens, de la recherche opérationnelle ont fourni, au travers de la programmation linéaire, un cadre de référence théorique permettant d'intégrer des contraintes de capacité de production au sein de l'équilibre de concurrence parfaite.

Des logiciels, utilisant des algorithmes de programmation linéaire, ont ainsi été mobilisés pour tenter de mettre en oeuvre le type d'analyse issu de l'étude de l'ICC, en particulier lorsque plusieurs marchés et plusieurs unités de production contraintes en capacité sont à considérer. L'exemple le plus classique étant celui du problème de transport.

Le « problème du transport » :

Le « problème du transport » est un cas simple de programmation linéaire qui présente un intérêt, à la fois en raison de ses applications économiques et de sa simplicité de calcul.

Il a été posé et résolu en 1941, par F.L. Hitchcock plusieurs années avant la formulation du concept de programmation linéaire.

L'essence même de ce problème suggère une analogie évidente avec celui issu de l'ICC. En effet, il considère m unités de production de capacité K_i pouvant approvisionner n marchés de demande D_j données, respectivement aux coûts d'expédition C_{ij} .

Le problème dit « du transport » consiste à déterminer un réseau de livraison X_{ij} qui permette de satisfaire simultanément les contraintes de capacité et les demandes de marché tout en assurant que le coût global soit minimum.

Une caractéristique importante de nombre de problèmes de transport est l'égalité supposée entre la capacité totale des usines et la demande totale des consommateurs, ce qui joue un rôle important dans la simplicité particulière de leur résolution.

Notons que cette formulation peut être adaptée facilement aux cas de capacité excédentaire. Il suffit d'introduire une destination fictive pour laquelle la demande est égale à l'excédent de capacité et de supposer que les joueurs y accèdent à coût de transport nul. L'optimum de ce problème sera également celui du problème initial, les affectations sur le marché fictif étant considérées comme des liquidations de surplus.

Formulé en terme de programme linéaire il s'agit donc de minimiser la fonction de coût total :

$$T = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \quad i \in [1, m] \text{ et } j \in [1, n]$$

sous les trois séries de contraintes suivantes :

$$\sum_j X_{ij} = K_i \quad j \in [1, n]$$

$$\sum_i X_{ij} = D_j \quad i \in [1, m]$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in [1, m] \quad \forall j \in [1, n]$$

Ces équations montrent en quoi les calculs requis sont particulièrement simples. En effet, le problème comporte nm variables de choix, et est contraint par m restrictions dues aux contraintes de capacité ainsi que par n restrictions dues aux contraintes de satisfaction de la demande, soit au total à $m+n$ restrictions.

Or, comme $\sum_i K_i = \sum_j D_j$, une de ces contraintes est superflue. Le problème se limite alors à $n+m-1$ restrictions.

La méthode de résolution est la même que celle utilisée en programmation linéaire ordinaire. Selon un de ses principes, il existe un programme optimum dans lequel le nombre d'activités à des niveaux positifs (ici les livraisons) n'est pas plus élevé que le nombre d'équations restrictives, soit $m+n-1$ dans le cas présent.

Ainsi, en partant d'une solution de base dans laquelle le nombre de routes est effectivement égal à $m+n-1$ et en procédant par itérations, on peut obtenir successivement des bases meilleures jusqu'à ce qu'un optimum soit découvert.

Le critère d'amélioration est analogue au critère du simplexe ordinaire mais grandement simplifié grâce à la forme triangulaire qu'il est possible de choisir comme base de départ, les coefficients unitaires pondérant par ailleurs toutes les variables de choix (cf. figure 2). Ainsi, lorsque les capacités et les demandes sont des nombres entiers, les niveaux de productions envisagés au cours de la résolution sont obtenus par simple addition ou soustraction de nombres entiers.

La solution obtenue algorithmiquement (plusieurs solutions peuvent exister) est optimale du point de vue de la minimisation des coûts de transport.

La question se pose alors de savoir si cette répartition correspond à un jeu de concurrence et si donc la solution du problème de transport peut être mobilisée pour l'analyse de l'ICC.

Ceci dépend évidemment de la structure du marché. Cependant, l'issue de la résolution de ce programme linéaire fournit une analogie intéressante avec le jeu de la concurrence parfaite.

En effet, la notion d'optimalité est un critère présent dans ces deux vues.

La concurrence parfaite nous enseigne que la recherche de la maximisation des profits individuels des producteurs, lorsqu'ils n'ont pas conscience de leur influence sur les prix, aboutit à l'annulation des profits et à la maximisation du surplus collectif.

La notion d'optimalité rencontrée dans le problème du transport concerne le coût de transport total sans référence aux prix ni aux intérêts individuels de chacun.

L'analyse du problème dual, issu du problème de transport, et en particulier l'interprétation des variables duales comme des prix, fournit une vue éclairante sur ses liens avec l'équilibre de concurrence parfaite.

Formulé de façon canonique, le problème de transport a la forme suivante :

Programme Primal																	
Variables	X11	...	X1j	...	X1n	...	Xi1	...	Xij	...	Xin	...	Xm1	...	Xmj	...	Xmn
	1						1						1				
				
			1			...			1			...			1		
				
					1						1						1
	-1	...	-1	...	-1												
						...											
							-1	...	-1	...	-1						
												...					
													-1	...	-1	...	-1
Fonction objectif	C11	...	C1j	...	C1n	...	Ci1	...	Cij	...	Cin	...	Cm1	...	Cmj	...	Cmn

≥

...

≥

...

≥

...

≥

...

≥

...

≥

Constantes
D1
...
Dj
...
Dm
-K1
...
-Ki
...
-Kn
= à minimiser

Figure 2

et son dual s'exprime alors :

Programme Dual												
Variables primales correspondantes	Variables Duales											
	V1	...	Vj	...	Vm	U1	...	Ui	...	Un		Constantes
X11	1					-1					≤	C11
...	
X1j			1			-1					≤	C1j
...			
X1n					1	-1					≤	C1n
...		
Xi1	1							-1			≤	Ci1
...	
Xij			1					-1			≤	Cij
...			
Xin					1			-1			≤	Cin
...		
Xm1	1									-1	≤	Cm1
...	
Xmj			1							-1	≤	Cmj
...			
Xmn					1					-1	≤	Cmn
Fonction objectif	D1	...	Dj	...	Dm	-K1	...	-Ki	...	-Kn	=	à maximiser

Figure 3

La formulation du problème par son dual permet d'interpréter les variables U_i , comme des prix départs des usines et les V_j comme des prix rendus aux différents marchés.

On notera que $\forall i, \forall j, V_j \leq U_i + C_{ij}$ exprime le fait que le transport de marchandises ne peut donner lieu à surplus de valeur, la fonction à maximiser exprimant l'excédant total de la valeur à destination sur la valeur à l'usine.

Les valeurs de U_i correspondent au gain généré par l'usine i en cas de relâchement d'une unité de la contrainte K_i et dépendent des avantages comparés des localisations des usines. Elles peuvent donc être vues comme des rentes liées aux contraintes de capacités.

Les prix ainsi obtenus correspondent aux prix de l'équilibre parfait qui résulterait des efforts non coordonnés des usines pour vendre la totalité de leur production aux prix les plus élevés possibles⁷. L'issue n'engendre pas l'absence de profit des producteurs, du fait des contraintes de capacité, mais elle correspond aux prix maximisant le surplus global et permettant de satisfaire la demande.

De façon générale, il est possible de montrer qu'il y a identité entre la solution optimale du problème de la maximisation jointe des rentes du producteur et du consommateur sous contrainte d'équilibre, et l'ensemble des solutions optimales de la maximisation des profits des producteurs en situation de concurrence parfaite⁸.

Apport de la programmation linéaire à l'analyse stratégique :

Lorsque le contexte concurrentiel s'apparente effectivement à la concurrence parfaite, l'utilisation de la programmation linéaire peut donc s'avérer pertinente.

En outre, l'intérêt essentiel de ce modèle, et qui en a fait le succès, est qu'il répond assez bien aux besoins de quantification exprimés par l'industrie.

Le calcul économique des conséquences de décisions stratégiques devient ainsi possible.

L'analyse ne se limite alors pas à la présentation de contextes instantanés, mais l'intègre au sein d'une perspective dynamique dans laquelle les variables, comme les coûts et les capacités des différents joueurs potentiels, peuvent évoluer, de même que la demande et, au final, la compétitivité relative, les taux d'utilisation des capacités et les politiques de prix/volume⁹.

Ainsi, la programmation linéaire peut être utilisée comme outil de simulation, permettant d'évaluer les impacts des modifications de certaines variables. Il devient alors possible de tester différentes options et même de les enchaîner en fonction de conjectures envisagées pour les réactions éventuelles des concurrents.

L'aspect stratégique absent de l'équilibre est donc intégré dans l'analyse elle-même, de manière exogène.

En outre, la programmation linéaire permet de résoudre très efficacement nombre de problèmes d'optimisation industrielle. En particulier, en déterminant le réseau de vente optimal, répondant à un problème concret, fréquent et complexe dès que le nombre d'usines et de marchés devient important.

Des algorithmes puissants et fiables ont fait une percée importante au sein de l'industrie. Si leur mise en œuvre n'est pas sans difficulté pour l'aide à la décision dans l'organisation¹⁰, leur pertinence n'est pas contestée et connaît même un regain d'intérêt avec le développement des politiques de « supply chain management ».

⁷ Voir Dorfman et alii.1963, pour une analyse détaillée de l'utilisation de la programmation linéaire en économie.

⁸ Voir Boussard et Daudin 1988, pour un exemple de démonstration.

⁹ Voir par exemple William Barnett, jr, 1993.

¹⁰ Voir Hatchuel, Moisdon (1993)

Cependant, ces analyses sortent clairement du cadre de l'interaction stratégique qui nous intéresse ici.

Limitations de son utilisation

Lorsque l'on cherche à mobiliser ce genre d'outil dans un contexte opérationnel en s'intéressant aux équilibres effectivement obtenus, plusieurs difficultés apparaissent néanmoins.

La principale faiblesse des algorithmes de programmation linéaire est leur manque de robustesse quant aux modifications, même faibles, des variables d'entrée.

Or, la structure des coûts, qu'ils soient internes à l'usine ou relatifs au transport, n'est en général pas connue de manière précise et est plus couramment issue d'estimations, en particulier pour ce qui concerne les concurrents.

Ainsi la modification marginale d'un coût de production peut engendrer une modification profonde de l'affectation finale.

Cette instabilité constitue un frein essentiel à toute tentative d'utilisation à des fins industrielles lorsque les variables ne sont connues qu'imparfaitement et proviennent d'estimations plus ou moins fiables.

En outre, et plus fondamentalement, lorsqu'on doit intégrer des interactions concurrentielles entre joueurs stratégiques, l'analyse sort du cadre de la concurrence parfaite.

Par exemple, les parts de marchés obtenues par la programmation linéaire tendent à générer des monopoles locaux, en particulier lorsque les capacités sont fortes devant la demande des marchés¹¹. Pourtant, force est de constater que la réalité industrielle foisonne d'exemples où plusieurs concurrents coexistent sur un même marché.

Ainsi, la question fondamentale sous-jacente à ces difficultés est donc celle de la réalité de l'émergence d'un équilibre de concurrence parfaite dans le contexte des industries de commodités qui nous intéresse ici.

Il existe, certes, des situations où les firmes sont « price takers » par exemple au sein de zones à forte croissance encore non structurées où de nombreux joueurs potentiels coexistent sur chaque marché local.

Pourtant, comme nous allons le décrire dans le paragraphe suivant, les caractéristiques des industries de commodités déterminent, en général, une réalité industrielle proche de la concurrence oligopolistique.

En outre, si les arguments en faveur d'une modélisation en concurrence parfaite ou imparfaite peuvent être débattus, lorsqu'il s'agit de décisions de volumes ou de prix de vente, il est un domaine pour lequel la prise en compte des interactions stratégiques

¹¹ La présence de plusieurs joueurs ne pouvant provenir que d'une limitation de la capacité de production.

semble claire : l'investissement en capacité de production. La modification du jeu concurrentiel que ces choix entraînent est si profonde, les investissements si lourds et les durées d'engagement si longues, qu'elles échappent indéniablement au cadre de la concurrence parfaite.

Comme nous allons le voir, la mobilisation de concepts issus de la théorie des jeux au sein de l'économie industrielle a, en particulier, permis de formaliser ce type d'interactions stratégiques et a fourni une base théorique à l'élaboration de la concurrence imparfaite.

4 Théorie de l'oligopole et industries de commodité

La théorie de l'oligopole

La théorie de l'oligopole est l'étude des interactions d'un certain nombre d'entreprises sur un marché, ce nombre étant insuffisant pour pouvoir considérer que les décisions de chacune d'entre elles a un effet négligeable sur les décisions des autres.

L'étude moderne de ce sujet repose presque exclusivement sur la théorie des jeux, dont les concepts ont substantiellement clarifié la plupart des premières spécifications ad hoc développées pour analyser les interactions stratégiques sur un marché.

Le fondement de cette théorie remonte aux analyses de Cournot (1838) et de Bertrand (1883), dont la formalisation a été achevée par la théorie des jeux notamment grâce au concept d'équilibre de Nash (1950).

Du point de vue de la théorie des jeux, ces modèles se distinguent par la définition de l'espace des stratégies (prix ou volume) et par les ensembles d'information. Les joueurs sont, ou non, informés du choix des concurrents lorsqu'ils prennent leurs décisions, l'équilibre de Nash déterminé par le principe d'induction à rebours permettant d'obtenir l'issue du jeu.

Les deux modèles classiques de la classe des « jeux à une étape » constituent des équilibres de référence et proposent des résultats contrastés.

Ainsi, lorsqu'il s'agit d'applications, on cherche en général à modéliser une structure de marché qui dure plusieurs périodes. Il est alors naturel de choisir des modèles en décisions simultanées, en fonction d'une certaine stabilité de la variable stratégique correspondante.

Le modèle de Bertrand, aboutit à des situations où un seul joueur sert chaque marché, lorsque des contraintes de capacité ne viennent pas l'interdire. Les prix sont alors limités aux coûts d'entrants potentiels.

Le modèle de Cournot correspond à une concurrence moins « dure », laissant plusieurs joueurs coexister sur le marché, et a eu, à ce titre, la préférence de nombreux travaux empiriques : Salant, (1982), Greenhut et al. (1975) et McBride (1983).

Cependant, le véritable renouveau qu'a initié la théorie des jeux est vraisemblablement lié à l'introduction de modèles en deux étapes, introduisant la dimension temporelle présente dans la plupart des interactions stratégiques et modélisant ainsi le poids des actions passées sur les marges de liberté des actions de l'étape suivante.

Cette idée était déjà présente dans le modèle de Stackelberg (1934), où une firme en place décide de son choix de quantité, avant un entrant potentiel, modélisant ainsi des stratégies de préemption.

Ces analyses en terme de choix séquentiels ont permis une interprétation des modèles initiaux à une étape :

Les jeux de leadership (Stackelberg), en quantité et en prix, peuvent être généralisés de manière intéressante en terme de variations conjecturales. En effet, par exemple, la décision de quantité du leader de Stackelberg analyse la fonction de réaction du suiveur, et d'une certaine façon cette expression est une « conjecture » arbitraire sur la façon dont son concurrent réagit à sa décision de production. Une paramétrisation de ces conjectures permet de retrouver les modèles classiques de Cournot et Bertrand.

De manière plus générale, la plupart des problématiques stratégiques peuvent être formalisées par des jeux séquentiels. La première étape correspond à des choix stratégiques de long-terme (capacité, localisation) alors que la seconde concerne des décisions opérationnelles de court terme (prix de vente, quantité).

Plus précisément, de nombreuses situations concurrentielles concernent des choix stratégiques de firmes en place et d'entrants potentiels. La première étape du jeu peut se décomposer en deux : une première phase durant laquelle la firme en place prend des décisions de long terme, et une seconde phase où l'entrant réagit à cette décision par une action stratégique. La dernière étape du jeu étant constituée de choix opérationnels simultanés (jeu de Bertrand ou de Cournot).

Kreps et Scheinkman (1983) proposent une interprétation du jeu de Cournot comme jeu séquentiel, en montrant qu'un modèle de concurrence en prix précédé d'une étape de choix de capacité peut, sous certaines hypothèses de rationnement des consommateurs, conduire aux mêmes résultats que le modèle en une étape de concurrence en quantité. Ce résultat a souvent été cité pour justifier l'utilisation de l'équilibre de Cournot.

Cependant, ces modélisations conservent leurs dimensions statiques, relativement inadaptées aux interactions réelles. Des concepts issus de la théorie des « jeux répétés » ont donc été mobilisés pour intégrer le caractère renouvelé de ces interactions.

L'analyse est parallèle à celle du classique « dilemme du prisonnier répété » et intègre des aspects coopératifs.

Par exemple, en envisageant un jeu de Cournot répété, la solution coopérative étant la solution de cartel¹² et la sanction la quantité de Cournot, il est possible d'obtenir un ensemble de stratégies correspondant à un équilibre de Nash, cela tant que le taux d'actualisation considéré par les joueurs n'est pas trop élevé. Cependant, comme pour le dilemme du prisonnier, beaucoup de stratégies d'équilibre sont possibles. En outre, et contrairement au cas du dilemme du prisonnier, cela est également vrai pour le jeu répété un nombre fini de fois.

Se pose alors la question de la crédibilité de la mise à exécution des menaces liées aux stratégies de punition à travers la notion d'équilibre en sous-jeu parfait. Par exemple, et au moins lorsque l'équilibre de Cournot en une étape est unique, on peut montrer qu'il est aussi l'unique équilibre en sous-jeu parfait du jeu répété un nombre fini de fois. De plus, lorsque ce jeu est répété un nombre infini de fois, la production de cartel est un équilibre soutenable en tant que sous-jeu parfait pour différentes stratégies de sanctions.

¹² Maximisation du profit de l'industrie

La répétition des interactions et la prédominance des jeux à somme non nulle dans les situations concurrentielles réelles rendent les phénomènes de coopération incontournables lors de l'analyse des oligopoles.

Ils sont généralement liés à l'étude des cartels dans lesquels les firmes s'entendent dans une certaine mesure quant à la fixation des prix et des quantités. Ces phénomènes de collusion sont étudiés dans le cadre des jeux répétés évoqués plus haut, principalement au travers des stratégies de sanction optimale mais se heurtent à des problèmes de stabilité.

Une autre voie d'étude de la coopération est abordée par la théorie de la négociation, qui propose des solutions axiomatiques relatives au partage du surplus lors d'une négociation. La plus classique étant celle de Nash (1950).

Les industries de commodité

Les industries de commodité se caractérisent par un faible degré de différenciation verticale¹³, les consommateurs n'ayant d'autre critère que le prix quant à l'arbitrage de leurs préférences.

En outre, la demande se caractérise par une faible élasticité aux prix, et une relative stabilité dans le temps au sein d'évolutions cycliques, engendrées plus par la conjoncture économique que par des facteurs internes à l'industrie.

Ces critères caractéristiques ont pour effet de limiter les problématiques issues de la demande et de focaliser ainsi les enjeux sur les interactions concurrentielles.

D'autres spécificités viennent accentuer cet aspect. En général, et en particulier pour les industries de process, certains facteurs influencent fortement la structure des marchés : intensité en capital, faible part des coûts variables par rapport aux coûts fixes, contraintes de capacité peu ajustables, part importante des coûts logistiques, absence relative de produits de substitution et d'innovation technologique.

L'issue en est en général la constitution d'oligopoles naturels. A titre d'exemple, on peut citer des secteurs industriels comme le ciment, les granulats, la sidérurgie, l'aluminium, le bois, la pâte à papier, la chimie lourde, le verre, le sucre, ou l'énergie.

Souvent dans ces industries, l'information est publique : les acteurs peuvent estimer de façon pertinente leur structure de coût et celles de leurs concurrents.

En outre, les biens étant peu différenciés, les consommateurs arbitrent facilement entre les offres des concurrents, et favorisent la diffusion d'informations sur les prix.

Dans les oligopoles de biens de commodité, la dimension spatiale vient souvent se conjuguer aux problèmes temporels précédemment évoqués.

L'analyse spécifique de ces problématiques est l'objet de la théorie de la localisation, qui s'intéresse aux problèmes d'entrée lorsque les biens sont différenciés horizontalement par des coûts de transport importants (Hotelling, 1929).

Généralement, il s'agit de modèles à deux étapes où les joueurs choisissent leur localisation puis se font une concurrence en prix, différents systèmes de prix étant utilisés (Zone prices, Basing Point System, Uniform FOB prices avec ou sans absorption des coûts de transport).

¹³ En terme de qualité

Si les principes du modèle de Bertrand semblent bien correspondre à des stratégies présentes dans la réalité¹⁴, l'issue qu'ils proposent semble généralement absente des observations réelles.

C'est pourquoi, le modèle de Cournot est également mobilisé pour cette deuxième étape (Brander 1981, Greenhut et Greenhut, 1975), en particulier parce qu'il permet de rendre compte de la réalité des ventes croisées (Phlips, 1983 et McBride, 1983) contrairement aux modèles en prix.

L'ensemble de ces caractéristiques engendre des comportements stratégiques relevant clairement du champ de la concurrence imparfaite, et permet de focaliser l'analyse sur certains aspects spécifiques : problème de localisation, d'entrée, d'engagement en capacité, d'intégration de secteurs aval, de politiques de prix, de cartels, de collusions tacites, de concentration, etc.

Au sein des industries de commodité, le cas de l'industrie cimentière est particulièrement intéressant.

En effet, elle peut être décrite à l'aide de peu de variables et donne cependant naissance à des problématiques stratégiques complexes et variées.

Son intensité capitalistique, les contraintes de capacité des usines et leur caractère non re-déployable génèrent une concurrence de long terme fondée sur des stratégies d'entrée et d'engagement où les acteurs peuvent tenter de préempter l'investissement des concurrents.

La limitation des sites de production (présence de calcaire et contraintes environnementales) et l'importance des coûts logistiques font que les usines sont pour la plupart contraintes d'écouler leur production sur un marché régional sur lequel elles ne rencontrent que peu de concurrents. Le caractère pondéreux du bien et le faible niveau des coûts variables (relativement au coût complet) tendent à faire revêtir à la concurrence de court terme des spécificités géographiques aboutissant à une différenciation horizontale propice à l'émergence de stratégies d'exclusion fondées sur les coûts rendus.

La concurrence en prix qui émerge de ces contextes est soit très stable, soit très instable et a donné lieu à de nombreux débats. En effet, cette stabilité peut être interprétée comme de la collusion tacite, mais peut tout aussi bien provenir de comportements parallèles. L'instabilité pouvant, quant à elle, provenir d'une concurrence destructrice visant à limiter le nombre d'acteurs, mais également d'un processus normal d'ajustement structurel¹⁵.

¹⁴ La menace d'entrée est souvent considérée comme un moyen de discipliner les oligopoles. Ainsi, l'impact de joueurs potentiels, bien que non présents, est à considérer car il peut alors générer des fixations de prix stratégiques spécifiques (politique du prix limite). Pour être efficaces, ces stratégies nécessitent en général un engagement en prix.

¹⁵ Voir l'analyse historique de Dumez et Jeunemaître.

Ces spécificités ont ainsi généré une littérature théorique et appliquée très abondante, à partir des concepts principaux qui constituent la théorie de l'oligopole. Pourtant on notera que, pour l'essentiel, les motivations de cette littérature concernent la politique de la concurrence. On citera en particulier, pour l'industrie cimentière l'article de D'Aspremont, Encaoua et Ponssard (2000) sur la mobilisation de la théorie des jeux pour l'analyse de ces questions.

5. Conclusion

Les industries de commodité fournissent indéniablement un cadre privilégié à l'application de l'économie industrielle. Pourtant, même dans ce contexte, ses apports à la stratégie industrielle semblent limités, la motivation des chercheurs s'étant plutôt portée vers les questions relatives aux problématiques antitrust.

Pas plus que dans d'autres secteurs, l'Economie Industrielle ne semble avoir donné lieu à de véritables applications opérationnelles, même si ses concepts trouvent de plus en plus d'échos dans la culture stratégique de certains de ses *managers*.

Les modèles théoriques développés ne permettent de capturer que certains aspects d'une réalité qui reste, même dans le « cas d'école » des industries de commodité, finalement complexe et où les problématiques se mélangent.

En outre, si ces modèles ont su dégager de la réalité industrielle les concepts essentiels des problématiques stratégiques, le monde industriel est généralement plus en attente d'outils d'aide à la décision fondés sur la quantification de scénarios que sur la formalisation de concepts dont les conclusions qualitatives apparaissent souvent limitées et déjà connues.

De plus, la nécessaire stylisation des situations réelles, concentrant l'analyse sur l'aspect stratégique principal, aboutit souvent à négliger des paramètres industriels néanmoins essentiels qui interdisent alors l'utilisation opérationnelle.

A titre d'exemple, la plupart des modèles ne considèrent que deux joueurs, la question centrale de la prévision de la demande est souvent absente des modèles de préemption. Le rôle stratégique des capacités fait négliger le fait qu'à court et moyen termes, elles n'apparaissent que comme de simples contraintes de production. En outre, peu de modèles conjuguent la présence de plusieurs joueurs avec des menaces d'exclusion ou s'interrogent sur la place que peuvent occuper des stratégies fondées sur des négociations, sans pour autant considérer une industrie cartellisée.

Nous avons tenté dans ce travail de thèse de nous attacher à l'étude de quelques-uns de ces aspects qui nous ont paru pertinents, mais peu traités.

Même si, bien évidemment, nous n'échappons pas aux difficultés précédemment évoquées, le choix des problématiques et l'esprit dans lequel nous avons essayé de les traiter ont été orientés par une préoccupation de mise en œuvre opérationnelle.

Problématique de la thèse

La thèse a donc pour cadre de départ les analyses stratégiques issues de l'« Industry Cost Curve », et pour objectif la contribution de l'économie industrielle à la stratégie d'entreprise, en particulier grâce au développement de modélisations d'équilibres calculables susceptibles d'être mobilisées dans l'élaboration d'outils d'aide à l'analyse stratégique.

Le cadre général est, au sein de la théorie de la concurrence imparfaite, celui de la théorie de l'oligopole avec des firmes différenciées en coûts et opérant sur des marchés de biens homogènes.

Contrairement à la majorité des travaux dans ce domaine, dont le positionnement est celui de la politique de la concurrence, notre analyse cherche à mobiliser les développements de l'économie industrielle pour les firmes industrielles.

La problématique de la thèse peut se présenter comme une analyse des différents impacts que peuvent engendrer les contraintes de capacités de production sur la structure de la concurrence.

En effet, ces capacités peuvent, par leur pouvoir d'engagement à une production importante, limiter l'entrée d'un concurrent, mais être affectées par une incertitude sur la demande future.

Elles peuvent aussi n'être que de « simples contraintes » initiales héritées de décisions passées, limitant les décisions des joueurs, lors de jeux de concurrence en quantité. Elles peuvent également constituer l'engagement d'un entrant à limiter ses ventes, forçant l'accommodation d'un concurrent en place plus compétitif.

Ainsi, ce cadre d'analyse peut se décomposer, à travers les différents essais constituant la thèse, suivant des enjeux de type spatial et temporel (fig. 1) :

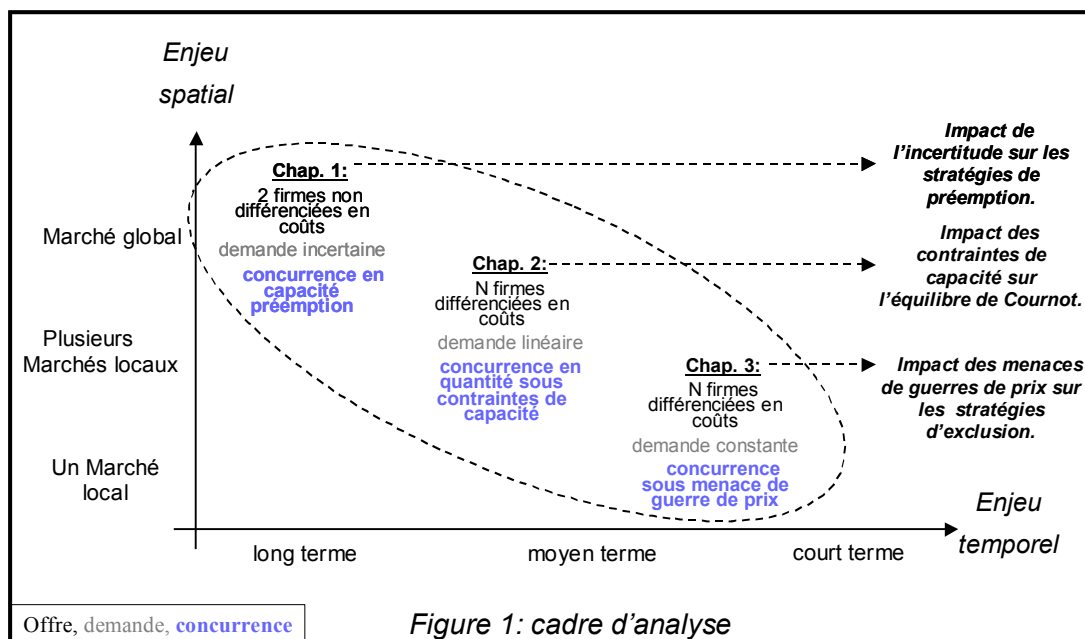
Lorsque l'on évoque des décisions de long terme, c'est la gestion des capacités de production qui domine les questions stratégiques.

Les contraintes industrielles confèrent à ces investissements en capacité une durée de vie très importante, un caractère non redéployable et très intensif en capital.

Ces décisions, ainsi lourdes de conséquences, doivent simultanément intégrer une évaluation de la demande et les stratégies des concurrents ; il s'agit donc d'une concurrence en capacité entre un petit nombre de joueurs, avec une incertitude quant au niveau de la demande globale future.

A moyen terme, et lorsque le jeu de concurrence en capacité s'est temporairement, figé, les capacités ne sont plus les variables stratégiques, mais de simples contraintes héritées de décisions passées, affectant une concurrence en quantité de plusieurs joueurs sur différents marchés différenciés horizontalement.

Enfin, une vue plus locale et à court terme limite la valeur stratégique des capacités et des volumes, laissant émerger, via une demande inélastique, des menaces de guerres de prix et des stratégies d'exclusion, rendant aux prix leurs rôles stratégiques.



Nous nous sommes également attachés à proposer une approche qui tente de favoriser la mise en œuvre d'outils au sein de l'entreprise en tenant compte d'aspects opérationnels essentiels rencontrés dans les industries de commodité.

Nous avons donc cherché à focaliser notre travail, sur les points suivants qui nous ont paru les plus délicats et pour lesquels une analyse théorique plus approfondie nous a semblé pouvoir être intéressante.

La question de la préemption est centrale dans les décisions stratégiques des firmes confrontées à ces contextes. Par exemple, le joueur qui investit en capacité prématurément afin de capter la totalité de l'augmentation de la demande future, dissuade les investissements de concurrents qui anticipent les conséquences d'une situation sur-capacitaire.

L'incertitude sur la demande future constitue indéniablement un frein à ces stratégies. Evoquer des stratégies de préemption en négligeant ce point limite fortement les chances d'une éventuelle application de ce concept d'économie industrielle à la stratégie d'entreprise.

Nous nous sommes donc intéressés, à travers le premier essai, à l'impact des flux informationnels et des arbitrages entre engagement et flexibilité qu'ils engendrent dans un jeu de concurrence. En particulier nous nous sommes focalisés sur le cas où l'issue *ex-post* peut entraîner des pertes en fonction des aléas de la demande.

Nous mobilisons comme référence, le modèle de Stackelberg concernant la stratégie de préemption, tandis que celui de Cournot sert de référence à une concurrence sans engagement.

Un autre point délicat est la façon dont les contraintes de capacité affectent l'équilibre concurrentiel.

Si l'on considère que la structure de l'industrie fait de l'équilibre concurrentiel le résultat d'un jeu où les quantités sont les variables stratégiques, la prise en compte de

contraintes de capacité, dès lors que les firmes interagissent sur différents marchés, devient un problème complexe.

C'est pourquoi nous nous sommes attachés, dans le deuxième essai, à l'explicitation de ces équilibres dans un cadre général (quel que soit le nombre d'usines et de marchés) en limitant cependant l'analyse à une demande linéaire.

L'objectif de ce travail est d'obtenir des équilibres calculables capables de simuler des situations réelles. Il s'agit également de pouvoir obtenir une interprétation économique des résultats obtenus, ce que ne permet pas le recours aux algorithmes complexes de recherche opérationnelle et qui constitue indéniablement un frein à leur utilisation industrielle.

En effet, autant un responsable logistique pourrait faire confiance à un algorithme de recherche opérationnelle sans en comprendre les subtilités mathématiques et en se réjouissant des gains associés à l'optimum, autant un stratège industriel éprouvera de grandes difficultés à utiliser un modèle d'interactions stratégiques, dont il ne peut avoir d'interprétation économique satisfaisante.

Le dernier point que nous avons cherché à analyser, à travers le troisième essai, concerne les arbitrages entre volumes et prix, et les problèmes d'entrée qui en découlent.

La question de la modélisation de l'entrée potentielle d'un joueur moins efficace que les firmes en place demeure une question essentielle, à la fois pour l'analyse de la structure des marchés, et pour celle des fréquentes menaces d'importation déstabilisant des marchés à marge importante.

En effet, lorsque la demande est quasi inélastique au prix, et l'industrie sur-capacitaire, ce sont vraisemblablement des considérations d'exclusions potentielles et/ou effectives qui structurent le marché.

L'approche théorique de l'équilibre de Cournot avec son commissaire priseur est peu convaincante pour le monde industriel réel. En effet, dans ces contextes, les joueurs peuvent évoluer d'une "stratégie volume" orientée vers la saturation de leur outil industriel vers une "stratégie prix", cherchant à maximiser leur marge en acceptant des concessions de parts de marché.

Si les joueurs ont conscience des pertes importantes qui résulteraient de stratégies d'exclusions brutales de leurs concurrents, des phénomènes de "négociation" peuvent émerger. Chacun sachant les pertes et profits que peuvent générer les différentes issues, les guerres de prix peuvent alors rester à l'état de menaces, mais constituer la base de détermination d'issues plus profitables.

Dans ce travail nous introduisons un concept de « semi-coopération » dans lequel, l'équilibre de Bertrand constitue la référence des menaces de guerres de prix, et où l'équilibre de négociation obtenu présente des similitudes avec l'équilibre de Cournot.

Introduction aux chapitres

1 Prémption et incertitude (Chapitre 1)

Dans le premier essai, co-écrit avec Thierry Lafay, nous abordons la question de la prémption, une des préoccupations stratégiques centrale des industries à forte intensité capitalistique aux actifs non re-déployables .

L'Economie industrielle étudie de façon détaillée les comportements stratégiques des firmes visant à décourager l'entrée de concurrents potentiels. En particulier, une stratégie de prémption consistant à investir en capacité avant ses concurrents permet de capter une rente de monopole, qu'une course à la prémption peut d'ailleurs finir par dissiper (Eaton et Lipsey (1979), Gromb, Ponssard et Sevy (1997))

L'exemple de l'industrie cimentière est à ce titre particulièrement intéressant. En effet les contraintes industrielles concernant les augmentations de capacité de production qui ne peuvent être mises en œuvre que de façon non incrémentale, accentuent leur valeur d'engagement mais peuvent aussi engendrer des situations de surcapacité chronique (investissements simultanés).

Inversement, la difficulté à prévoir l'évolution de la demande à moyen et long termes augmente le risque de ces décisions et devrait tempérer l'intérêt *ex-ante* d'une prémption.

Le cadre général de notre analyse fait référence aux problèmes d'arbitrage entre engagement et flexibilité.

Ainsi, en l'absence d'interactions stratégiques, lorsque l'environnement est en information imparfaite et croissante, une firme aura tendance à retarder ses décisions et à privilégier la flexibilité, en particulier si le degré d'irréversibilité des investissements envisagés est important (valeur d'option : Henry, 1974).

Pourtant, dès que l'on aborde le plan stratégique, les firmes chercheront, en général, à anticiper leurs décisions d'investissement, d'autant plus que ces décisions constituent un engagement crédible (par exemple un actif non redéployable) afin de préempter ses concurrents.

Cette valeur d'engagement peut être définie, lorsque les variables stratégiques de la concurrence sont les quantités, comme l'écart entre les gains d'un leader de Stackelberg et ceux d'un joueur en Cournot (choix simultané des quantités) (Spencer et Brander 1992)

Ainsi, l'arbitrage entre flexibilité et engagement, analysé au travers de la comparaison des valeurs d'option et d'engagement permet d'évaluer l'impact de l'incertitude lié à l'imperfection de la prévision de la demande future sur la profitabilité des stratégies de prémption.

Lorsque les joueurs sont symétriques, la question du type d'équilibre pouvant émerger est particulièrement pertinente.

En effet, l'équilibre asymétrique (lorsqu'un des joueurs seulement décide de préempter) peut justifier ex post des différences de parts de marché entre firmes symétriques.

Cette possibilité est directement liée au type de modèle utilisé. En effet, les équilibres asymétriques sont toujours présents lorsque les joueurs s'engagent au travers de leur production instantanée (modèles dit quantitatifs), alors que ce n'est pas toujours le cas lorsque les joueurs s'engagent sur leur timing de production (modèles dit qualitatifs, Hamilton et Slutsky (1990)).

C'est dans le cadre de ces derniers que nous nous plaçons, les décisions d'engagement que nous considérons faisant référence à des investissements en capacité dont le délai de construction est important et connu.

Plus précisément, nous construisons un jeu à deux joueurs dans lequel l'un d'entre eux peut décider d'entrer en première période en tant que leader de Stackelberg (préemption), en connaissant imparfaitement la demande future, ou d'entrer en deuxième période, en concurrence à la Cournot (concurrence en quantité), mais en connaissant parfaitement la demande.

Nous montrons alors que la préemption décroît avec l'incertitude sur la demande et qu'elle peut se révéler destructrice, pour des incertitudes faibles, si les deux joueurs peuvent préempter. De plus, lorsque l'incertitude est très forte, un suiveur peut gagner en espérance plus que le leader sur le marché ("réaction oligopolistique", Knickerbocker(1973)). Pour des incertitudes intermédiaires, plusieurs équilibres coexistent, pouvant ainsi générer des issues dissymétriques.

L'originalité de notre modèle réside dans le fait que ces effets apparaissent alors que les firmes sont neutres au risque.

Nous considérons, en outre, des incertitudes sur la demande pouvant rendre le marché non profitable ex post (contrairement à Spencer et Brander(1992)). Ce relâchement de l'hypothèse de profitabilité en cas de surproduction ne permet pas l'émergence d'équilibres asymétriques, mais fait apparaître un « effet *feedback* » de l'information du suiveur sur la stratégie du leader.

Ainsi, ce n'est pas l'incertitude en tant que telle qui génère un frein à la stratégie de préemption, mais le fait qu'un suiveur puisse acquérir une meilleure information que le leader.

2 Cournot et contraintes de capacité (Chapitre 2)

Dans le second essai, coécrit avec Jacques-Alexandre Laye, nous nous intéressons aux capacités, non plus comme des variables stratégiques lors de décisions d'investissement, mais comme de « simples » contraintes de production.

En effet, si la concurrence concernant les investissements a un impact particulièrement important, le choix des capacités contraint par la suite le jeu concurrentiel sur de très longues périodes de temps. Ceci est dû aux faibles possibilités de réajustement des capacités de production et à la très longue durée de vie des outils industriels.

Bien qu'essentielle, cette vue « non stratégique » des contraintes de capacité est peu traitée en Economie Industrielle, plus attachée à l'étude des problèmes d'entrée et d'engagement.

Ainsi, nous cherchons à analyser l'impact de ces contraintes de capacité sur la concurrence à court et moyen termes lorsque les variables stratégiques sont les quantités.

Cette question devient particulièrement pertinente lorsque plusieurs firmes sont en concurrence sur plusieurs marchés car les contraintes de capacité engendrent alors des arbitrages intermarchés.

Comme nous l'avons déjà évoqué, des algorithmes de programmation linéaire, pourtant bien adaptés aux résolutions d'équilibres à plusieurs joueurs et plusieurs marchés en concurrence parfaite ne sont plus adaptés dès lors que les comportements stratégiques apparaissent.

La Recherche Opérationnelle a cependant produit des algorithmes beaucoup plus complexes, en particulier fondés sur les inégalités variationnelles ou la recherche de points fixes capables de s'atteler à cette tâche¹⁶ en utilisant l'équivalence entre l'équilibre de Cournot et des problèmes formels de maximisation sous contrainte. Ce faisant, les espoirs d'interprétation économique des processus de convergence de ces algorithmes semblent faibles et ne permettent pas d'obtenir de formulation explicites des équilibres.

Nous montrons que, dans le cas linéaire, il est possible de déterminer l'équilibre sous contrainte de capacité et ce, quel que soit le nombre de marchés et de joueurs, sans mobiliser d'algorithmes complexes.

En effet, en explicitant les liens particuliers qu'entretiennent les équilibres non contraints et contraints dans le cas linéaire, nous montrons qu'il est possible d'explicitier ces derniers en réduisant leur détermination à un problème d'annulation d'une fonction auxiliaire.

De plus, nous proposons une interprétation économique d'un cas particulier fréquent décrivant l'impact sur l'équilibre d'une modification de la contrainte de capacité de l'un des joueurs.

¹⁶ Gabay and Moulin (1980) et Murphy, Sherali and Soyster (1986).

3 *Judo economics* et négociation (Chapitre 3 et 4)

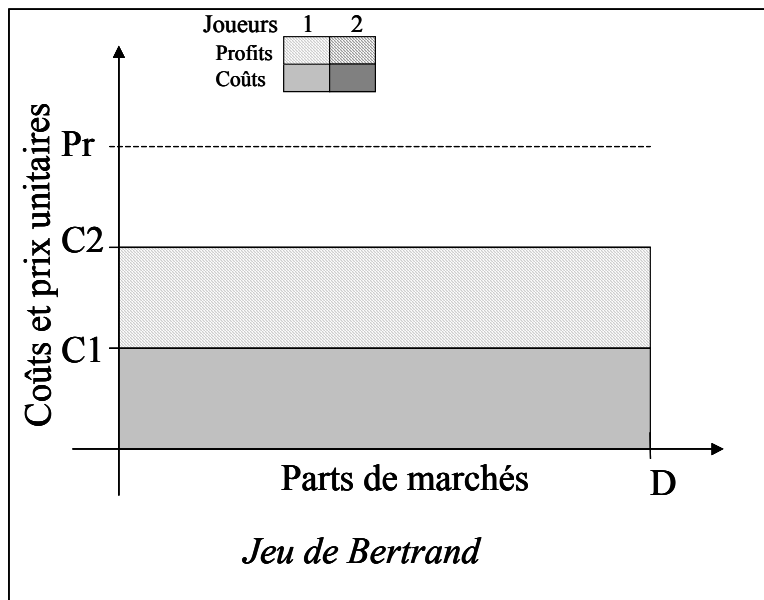
Nous commençons cette introduction par une description des issues des jeux de Bertrand et de Cournot dans le contexte particulier des marchés de demande constante, fréquemment rencontrés, au moins à court et moyen termes dans les industries de commodités.

Nous présentons ensuite le concept de « Judo Economics » puis les chapitre III et IV dont il constitue le cadre de départ comme alternative aux modèles précédents.

Modèles de Bertrand et Cournot

Considérons une demande constante, deux joueurs, ayant respectivement des coûts de production C_1 et $C_2 > C_1$ et un jeu simultané en prix.

L'équilibre de Nash de ce jeu abouti à une situation où le joueur 1 sert l'ensemble du marché au prix C_2 excluant de fait le joueur 2. Nous retrouvons l'issue classique du jeu de Bertrand.



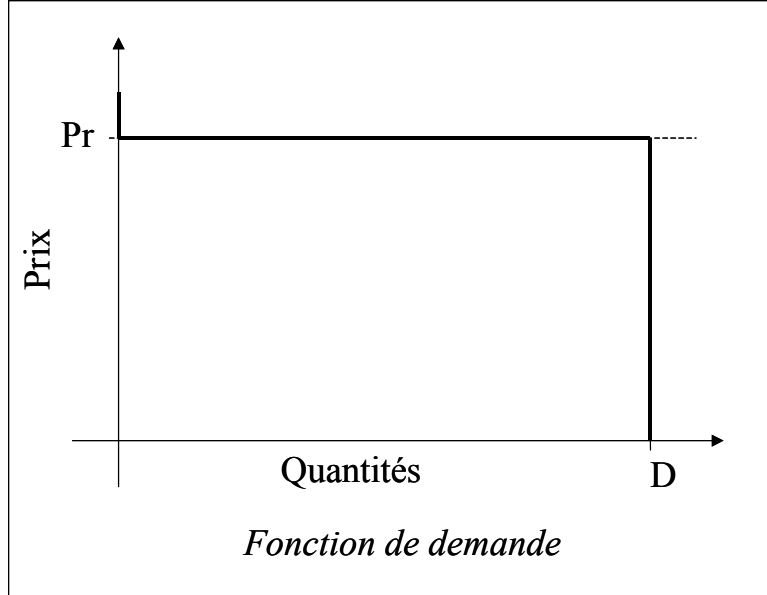
L'analyse du jeu de Cournot est plus problématique, en effet la constance de la demande ne permet pas de définir un unique équilibre de Nash.

En effet considérons la fonction de demande suivante : Au delà du prix de réservation Pr , la demande est nulle, entre 0 et Pr elle est constante.

La fonction de demande inverse est telle que :

$$P(Q_1+Q_2)=Pr \text{ pour } 0 < Q_1+Q_2 \leq D$$

$$P(Q_1+Q_2)=0 \text{ pour } Q_1+Q_2 > D$$

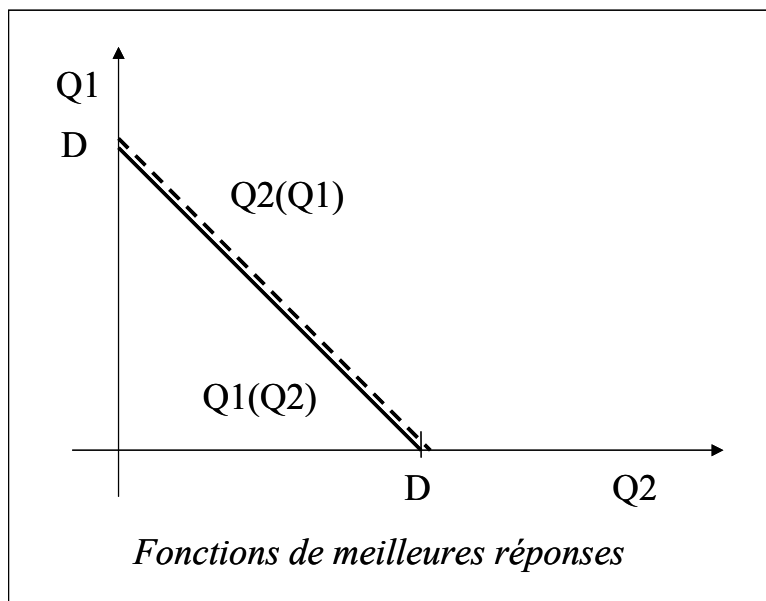


Les stratégies de meilleures réponses consistent simplement à satisfaire la demande résiduelle. Les fonctions de meilleures réponse sont alors confondues.

Soit Π le profit du joueur et Q^* la quantité d'équilibre,

$$Q_i^* = \text{Argmax} \Pi_i(Q_i, Q_j^*) \quad i, j=1,2$$

Il y a donc une infinité d'équilibres de Nash à ce jeu en quantité.



Le concept de « *Judo Economics* » propose une alternative intéressante à ces jeux de base.

« *Judo economics* »

Le principe de « *Judo Economics* », introduit par Gelman et Salop (1992) et présenté sous forme de cas par Brandenburger (1995), peut être défini comme la stratégie d'un

entrant face à une firme existante, ayant pour objectif de forcer l'accommodation de cette dernière via l'engagement sur une capacité de production limitée.

Brandenburger applique ce principe à différents contextes en demande constante, en fonction de l'efficacité relative des deux joueurs et des prix de réservation qu'ils rencontrent respectivement auprès des consommateurs.

Le concept général peut être formalisé de la façon suivante :

Considérons une firme en place (joueur 1) capable de satisfaire un marché d'un bien homogène de demande D avec un prix de réservation Pr et un coût de production $C1 < Pr$.

Considérons également la présence d'un entrant potentiel (joueur 2) avec un coût $C2 > C1$.

Soit le jeu à trois étapes suivant :

Etape 1 : l'entrant s'engage à proposer le bien à une fraction $N \leq 1$ des consommateurs au prix P

Etape 2 : la firme en place décide du prix qu'elle propose à l'ensemble du marché.

Etape 3 : les consommateurs qui n'ont que le prix comme préférence décident de leur fournisseur.

Ce jeu se résout par une simple induction à rebours :

La stratégie de l'entrant est de déterminer un couple (N, P) maximisant son profit tout en dissuadant la firme en place de l'exclure.

La firme en place choisira l'accommodation plutôt que l'exclusion si :

$$(1-N)(Pr-C1) > P-C1$$

ou encore

$$P < -N(Pr-C1) + Pr$$

Ainsi le programme de l'entrant peut s'écrire :

$$\text{Max } (P-C2)N$$

$$\text{Sous la contrainte } P < -N(Pr-C1) + Pr$$

La solution de ce programme de maximisation est :

$$N = (Pr-C2)/(Pr-C1)$$

$$P = (C2+Pr)/2$$

Ainsi, l'entrant obtient une part de marché de N avec un prix $P = (C2+Pr)/2 < Pr$, et laissant à la firme en place une part de marché de $1-N$ au prix Pr

Comme le notent Gelman et Salop, considérer un jeu dans lequel l'entrant s'engage uniquement en volume à l'étape 1, suivit d'un jeu de Bertrand en étape 2, génère la même issue. En effet, la concurrence en prix aboutirait à une offre de prix par l'entrant à $P = (C2+Pr)/2$ pour les N consommateurs démarchés par l'entrant, laissant la firme en place indifférente entre exclure l'entrant via une proposition de prix juste inférieure ou se contenter de la demande résiduelle $(1-N)$ au prix fort Pr .

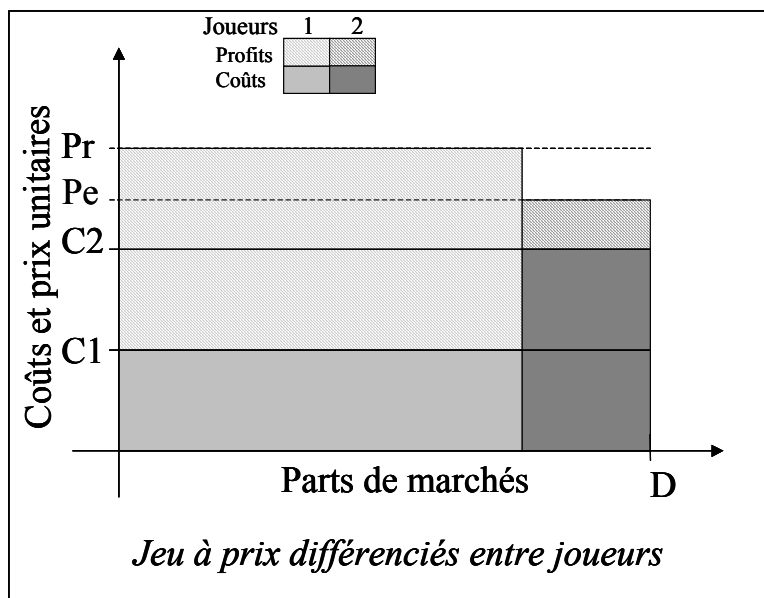
Dans ces conditions, un nouvel entrant moins efficace, mais sachant limiter ses ventes est donc toujours capable d'entrer.

En effet, tant que l'entrant représente une faible menace en terme de parts de marché, la firme existante perdrait beaucoup à se lancer dans une guerre de prix visant à l'exclure.

La pertinence de ce principe est liée à la règle de non-discrimination des consommateurs par la firme en place, c'est à dire à l'existence d'un prix unique pour l'ensemble de ses clients, lui interdisant une guerre focalisée sur les clients (limités) sollicités par l'entrant.

Elle est également liée à la capacité effective de l'entrant à s'engager à limiter durablement sa part de marché, la firme existante pouvant sinon sacrifier ses gains pour limiter une entrée future plus importante.

Ainsi, et lorsqu'il n'est pas possible pour la firme en place de discriminer les consommateurs, il existe toujours une part de marché que la firme en place préfère céder, plutôt que d'exclure un nouvel entrant capable de s'engager de façon crédible à



limiter ses ventes à cette part de marché (par exemple en limitant sa capacité).

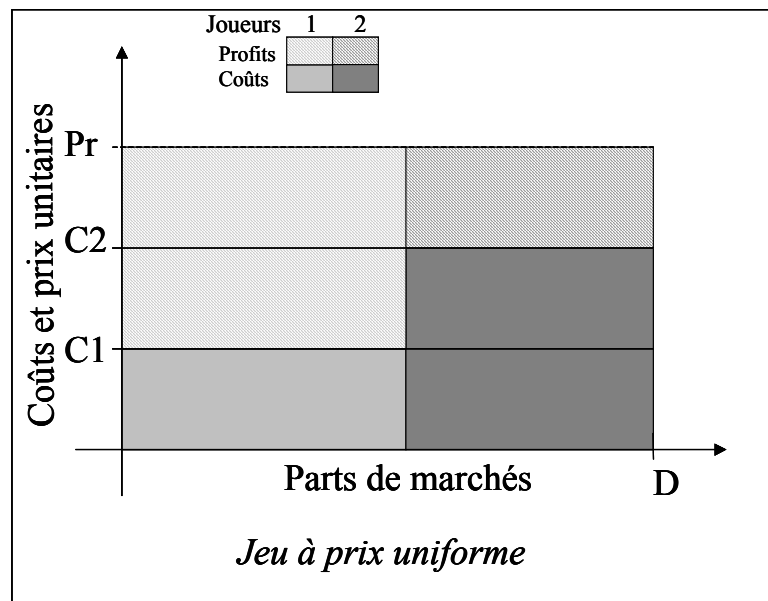
Notre objectif est d'adapter ce principe à un problème d'entrée à plusieurs joueurs à coûts de production croissants. En outre, nous cherchons à introduire des facteurs limitant ce phénomène d'accommodation.

Nous considérons, une demande constante et conservons l'hypothèse de non discrimination en prix des consommateurs. Cependant, nous supposons que les consommateurs, qui n'ont pas d'autres préférences que le prix, peuvent arbitrer entre les offres des différents producteurs conduisant en fin de compte à l'émergence d'un prix unique sur le marché.

Cette hypothèse a vraisemblablement l'avantage de rendre le jeu plus proche de certains contextes de concurrence réelle. En outre, l'existence d'un prix unique facilite son extension à plusieurs joueurs.

L'entrant a alors pour objectif l'obtention d'une part de marché la plus forte possible sans pour autant détériorer les prix et déclencher une stratégie d'exclusion. L'exclusion potentielle de l'entrant par la firme en place est alors fondée sur une décision de prix égal au coût de l'entrant.

Ce jeu conserve le principe de « Judo Economics ». En effet, considérons, sous ces



hypothèses, deux joueurs avec les notations précédentes, N représentant la part de marché de l'entrant :

A l'étape 1, l'entrant s'engage uniquement sur un volume

A l'étape 2, la firme en place décide alors du prix de marché, correspondant soit à une exclusion (C2) soit à l'accommodation (Pr), laissant à l'entrant la part de marché N.

Ainsi, la firme en place choisira l'accommodation plutôt que l'exclusion si :

$$(1-N)Pr > C2 - C1$$

soit

$$N < (Pr - C2) / (Pr - C1)$$

Ainsi le programme de l'entrant peut s'écrire :

$$\text{Max } (Pr - C2)N$$

$$\text{Sous la contrainte } N < (Pr - C2) / (Pr - C1)$$

Dont la solution est :

$$N = (Pr - C2) / (Pr - C1)$$

Ainsi, l'entrant et la firme en place obtiennent respectivement les parts de marchés $N=(Pr-C2)/(Pr-C1)$ et $1-N$ au prix Pr .

Contrairement au modèle de Brandenburger, les consommateurs ne bénéficient plus de la concurrence générée par l'entrant.

En outre, l'engagement de l'entrant se limitant au volume rend son exclusion potentielle plus coûteuse à la firme en place (au coût $C2$).

Ainsi ce jeu est très favorable à l'entrant, qui bénéficie à la fois d'une part de marché plus forte et d'un prix plus élevé, et représente en fait la configuration la plus favorable possible pour un entrant face à une firme en place.

On notera que la part de marché de l'entrant peut même dépasser celle de la firme en place (lorsque $Pr > 2C2 - C1$), ce qui n'était pas le cas dans le jeu précédent.

Cette issue est engendrée par le timing du jeu, laissant la possibilité à l'entrant de s'engager en volume, un peu à la manière du leader de Stackelberg, devant cependant limiter cet engagement sous peine d'exclusion.

Ce dernier modèle sert de base au jeu étendu à plusieurs joueurs développé dans le chapitre IV.

Ces jeux séquentiels fondés sur les principes de « Judo Economics » peuvent correspondre à des situations où les décisions de production font référence à des décisions de dimensionnement de capacité. Ils semblent cependant peu adaptés à des situations où les seules différences entre joueurs sont les coûts et où les volumes représentent de simples offres.

Dans ces conditions, les deux joueurs ont à perdre à la chute des prix et ont donc une incitation à la coordination.

Sans considérer explicitement des jeux répétés, l'objectif du chapitre III est de mobiliser la théorie de la négociation pour déterminer des « équilibres semi-coopératif » pour ce type de jeu.

Négociations sous menaces de guerre de prix. (Chapitre 3)

Dans le chapitre III, nous conservons un contexte d'oligopole avec coûts différenciés mais nous intégrons une caractéristique spécifique aux industries de commodités (au moins à court terme) : l'inélasticité de la demande au prix.

La demande est donc considérée comme constante, les consommateurs ayant cependant un prix de réservation (que nous supposons toujours supérieur aux coûts des joueurs).

Cette hypothèse nous permet de focaliser l'analyse sur les interactions concurrentielles, dégagées des réactions de la demande.

En outre, cette hypothèse simplifie notablement le calcul des équilibres présentés.

L'originalité de ce chapitre est de mobiliser la théorie de la négociation, dans un cadre concurrentiel et impliquant plusieurs joueurs. En effet, nous considérons des négociations dont les points de rupture sont des situations de guerres de prix fondées sur l'exclusion de joueurs moins efficaces.

La théorie de la négociation est en général utilisée pour répartir les surplus d'un cartel dont le point de rupture est le jeu en quantité. Schmalensee (1987) mobilise cette théorie en s'interrogeant sur les profits du cartel, lorsque les transferts monétaires sont impossibles, et propose différentes technologies de négociation entre un leader ayant un avantage en coût et une frange concurrentielle, le point de menace étant constitué d'une concurrence à la Cournot.

Notre objectif est ici très différent. Nous considérons, pour le cas à deux joueurs, une firme en place plus efficace qu'un entrant potentiel et un jeu de négociation dans lequel le point de rupture est constitué par le jeu de Bertrand aboutissant à l'exclusion de l'entrant. Le succès de la négociation est alors un partage du marché au prix de réservation des consommateurs, ce partage étant déterminé par le principe de répartition en « Equal Gain » (Roth, 1979), assurant à chacun des gains de profit équivalents par rapport au point de rupture.

Ainsi, il ne s'agit pas d'une coopération visant à améliorer le surplus global comparativement à une situation de menace en jeu de Cournot, mais d'une modélisation des interactions concurrentielles par la négociation semi coopérative de parts de marché sous menace de guerre de prix (jeu de Bertrand).

Nous nous intéressons ensuite à la généralisation de ce type de processus à plus de deux joueurs, en considérant la présence potentielle de joueurs de moins en moins efficaces.

L'idée la plus naturelle, présentée en annexe du chapitre III, (et utilisée dans le chapitre IV) consiste à considérer comme points de ruptures successifs la situation de négociation obtenue avec un joueur de moins. L'issue en est l'entrée de tous les joueurs potentiels dont le coût est inférieur au prix de réservation des consommateurs, aucune exclusion effective n'apparaissant.

Il est possible de faire émerger des exclusions en introduisant un coût fixe irrécupérable à l'entrée et en considérant un jeu dans lequel le leader peut s'engager *ex ante* à ne pas augmenter les prix. Nous en proposons une formulation en annexe du chapitre III.

Il est également possible de limiter l'accommodation en introduisant un joueur non stratégique (c'est ce que nous proposons dans le chapitre IV)

Une autre voie possible est de considérer un processus de négociation à plus de deux joueurs au travers de menaces de guerres de prix « bilatérales ». Chacun des joueurs présent sur le marché menace alors le dernier entrant indépendamment des autres, d'une guerre de prix visant à l'exclure, pour s'approprier sa part de marché et ce, sans possibilité de discrimination entre consommateurs (donc au prix de rabais étendus à sa propre part de marché initiale).

Ce processus engendre des préférences différentes selon les joueurs quant au nombre total de joueurs finalement présents sur le marché, et permet ainsi d'endogénéiser un prix d'exclusion et donc nombre de joueurs finalement présents .

De plus, nous montrons que ces stratégies d'exclusion sont mises en oeuvre par le leader en coût de l'industrie, qui a toujours la préférence la plus faible quant au nombre de joueurs présents.

En outre, cet équilibre de négociation a la particularité de partager avec l'équilibre de Cournot linéaire les mêmes relations qu'entretiennent les parts de marché et les prix, suggérant des liens entre ces équilibres pourtant de natures très différentes.

Le processus que nous proposons permet ainsi de déterminer une unique répartition calculable de parts de marché fondée sur des menaces d'exclusion et de rendre compte de dynamiques concurrentielles, au sein desquelles des joueurs d'efficacités différentes coexistent sans que les plus efficaces ne soient contraints en capacité.

En outre, le prix d'équilibre est un prix d'exclusion effective mis en oeuvre par le leader en coût de l'industrie.

Ce résultat pourrait également proposer une autre interprétation aux travaux expérimentaux cherchant à valider le modèle de Cournot par l'analyse des parts de marché.

4 Jeu de commodités (Chapitre 4)

Le concept de « Judo Economic » formalise donc la stratégie d'un entrant pouvant s'engager de manière crédible à limiter ses ventes et faisant préférer à la firme en place l'accommodation plutôt que l'exclusion.

Plusieurs exemples tirés de l'industrie cimentière semblent l'illustrer ce type de stratégie :

Dundee Cement Company a construit une usine à St Louis, USA, en vendant sur une large zone sans dépasser 5% de parts de marché sur chaque marché¹⁷.

¹⁷ Cité par Scherer et al. 1975, p.150.

Viking Cement, s'est établi dans l'ouest de la Norvège, en vendant des quantités très faibles, et en affichant sa volonté de limiter ses ventes par peur de représailles de la firme en place (Norcem)¹⁸.

L'efficacité de telles stratégies repose sur une règle de prix interdisant à la firme en place de discriminer ses clients en prix («*one-price-to-all-clients*») et donc de riposter sélectivement en prix sur les seuls clients sollicités par l'entrant.

Nous proposons un jeu expérimental fondé sur ce principe et appliqué à une demande constante qui met en situation d'interaction stratégique plusieurs joueurs, différenciés en coûts. Chaque joueur occupe alors le rôle de la firme en place la plus efficace sur son marché naturel et le rôle d'entrants potentiels avec des coûts différents sur les marchés naturels des autres joueurs.

Le timing du jeu est le suivant :

Étape 1 : les joueurs font simultanément des offres en quantité.

Étape 2 : le leader en coût du marché, connaissant les offres et les coûts de chacun de ses concurrents, décide du prix du marché, excluant de fait, ceux de ses concurrents dont les coûts sont supérieurs au prix.

Étape 3 : Les ventes sont attribuées entre les joueurs non exclus au prorata de leurs offres, et toute l'information devient publique.

Nous proposons une résolution théorique de ce jeu expérimental réduit à un seul marché par le concept d'équilibre de Nash qui fait apparaître que la firme en place accommode les entrées de tous les entrants, aboutissant à une faible efficacité de l'allocation des marchés.

Nous cherchons ensuite à faire émerger des limitations à cette accommodation mises en oeuvre par des exclusions. Cela peut être en particulier le cas lorsqu'un des joueurs n'a pas de comportement stratégique (par exemple lorsqu'il propose systématiquement de satisfaire l'ensemble du marché).

Nous proposons une résolution de ce jeu à travers deux concepts d'équilibre différents : équilibres de Nash et équilibre semi coopératifs évoqués au chapitre III.

D'autres limitations à l'accommodation pourraient être atteintes lorsque les joueurs, par exemple motivés par la répétition, adoptent des stratégies fondées sur des principes de négociation tels que développés dans le chapitre III.

Dans un cadre expérimental, nous proposons une mise oeuvre impliquant huit joueurs symétriques, chacun étant leader en coûts sur son marché naturel, et ayant accès aux marchés naturels de ses concurrents moyennant des coûts logistiques additionnels.

Le jeu de base se déroule simultanément sur chacun des huit marchés en demande constante identique. Ainsi sur chaque marché, chaque joueur se retrouve dans toutes les positions possibles en terme de coût rendu relatif.

Ce jeu est alors répété un certain nombre de fois, inconnu des joueurs.

L'impact de la présence d'un importateur offrant systématiquement de satisfaire les demandes sans se préoccuper d'éventuelles rétorsions peut être testé.

¹⁸ Cité par Guthus, 1984, p.17.

Ce jeu offre un cadre expérimental pour analyser les raisons possibles d'une limitation de l'accommodation par les firmes les plus compétitives : présence de joueurs obéissant à une autre rationalité (importateurs), rétorsions possibles dans un contexte multi-marché, punitions dans un jeu répété.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- d'Apremont, C., D. Encaoua, and J.-P. Ponssard. 2000. Competition policy and game-theory : reflections based on the cement industry case. Market Structure and Competition Policy. Cambridge University Press.
- Barnett William, JR. 1993. Memo to a CEO - Taking the mystery out of tomorrow's prices, The McKinsey Quarterly, Number 4, pp. 99–107.
- Boussard, J-M. et J-J. Daudin.1988. La programmation linéaire dans les problèmes de production. Masson.
- Bertrand, J.,1883. Théorie mathématique de la richesse sociale.In M. Lutfalla, editor, Recherches sur Les Principes Mathématiques de la Théorie Des Richesses, pages 233—50. Marcel Rivière & Cie, Paris, 1938. Publié dans le Journal des Savants, cahier de septembre,1883, p. 499.
- Brandenburger, A.M., and B. Nalebuff. 1996. Coopetition. New York: Doubleday.
- Brander, J.A., 1981. Intra-Industrie Trade in Identical Commodities. Journal of International Economics 11, pp. 1-14.
- Cournot, A.,1838, Recherches sur les principes Mathématiques de la Théorie des Richesses. Réédition, Paris :Edition Lutfalla,1938.
- Dorfman R., P.A. Samuelson and R.M. Solow, 1962. Linear Programming and Economic Analysis. McGraw-Hill Book Cy, Inc. N-Y.
- Dumez H. and A. Jeunemaître. 2000. Understanding and regulating the market at a time of globalization : the case of cement industry. Basingstokes Palegrave. Mc Millan.
- Eaton, B.C., and Lipsey, R.G. 1979. The theory of market preemption: the persistence of excess capacity and monopoly in growing spatial markets. Economica 46: 149-158.
- Henry C, 1974.Investments decisions under uncertainty : the « irreversibility effect ». American Economic Review, 64, 1006-1012.
- Gabay, D., Moulin, H. 1980. On the uniqueness and stability of Nash equilibria in non cooperative games. in: A. Benssoussan, P. Kleindorfer and C.S. Tapiero, eds, Applied stochastic control in econometrics and management science. Amsterdam: North-Holland, pp. 271-294.
- Gelman J., and S. Salop, 1983. Judo Economics: Capacity limitation and coupon competition. Bell Journal of Economics, 14, pp.315-165.

- Ghemawat, P. 1997. Games Businesses Play, Case and Models. The MIT Press.
- Greenhut, J. and Greenhut, M.L., 1975. Spatial price discrimination, competition and locational effects. *Economica* 42, pp. 401-419.
- Gromb D., JP. Ponssard and D. Sevy. 1997. Selection in dynamic entry game. *Games and Economic Behavior*, 21, 62-84, 1997
- Gultus G. 1984. Omsetning av sement (sale of cement), international note in Prisdirektoratet, dated 28.11.84. (Nowegian Prive Directorate).
- Hamilton, J.H and S. Slutsky. 1990, Endogenous timing in duopoly games : Stackeleberg or Cournot Equilibria, *Games and Economic Behavior*, 2, 29-46.
- Hatchuel A. et Moisdon J.C. 1993. "Modèles et apprentissages organisationnels", *Cahiers d'Economie et de Sociologie Rurales*, INRA, n°28, pp.18-32.
- Hitchcock, F. L., 1941. The distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. *Journal of Mathematics and Physics*, 20, pp. 224-230.
- Hotelling, H., 1929. Stability in Competition. *Economic Journal* 39, pp. 41-57.
- Knickerbocker, F., 1973, *Oligopolistic Reaction and Multinational Enterprise*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kreps, D. M., Scheinkman, J.A., 1983. Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Bell Journal of Economics*, pp 326-337.
- McBride, M., 1983. Spatial competition and vertical integration: cement and concrete revisited. *American Economic Review* 73, pp. 1011-1022.
- Murphy, F. H., Sherali, H.D., Soyster, A.L. 1986 A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium. *Mathematical Programming* 24, pp. 92-106.
- Nash J.F., 1950. The bargaining problem. *Econometrica*, 18, pp. 513-518.
- Nash J.F., 1950. Equilibrium Points in N-person Games. *Proceedings of the National Academy of Science*
- Von Neuman, J. and O. Morgenstern. 1947. *The Theory of Game and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton
- Phlips, L., 1983. *The Economics of Price Discrimination*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Ponssard, J-P. 1988. *Stratégie d'Entreprise et Economie Industrielle*. McGraw-Hill.
- Porter, 1980. *Competitive Strategy*. The Free Press.
- Roth, A.E., 1979. *Axiomatic model of bargaining*. Springer, New York.
- Rumelt, R.P., D. Schendel et Teece. 1991. *Strategic Management and Economics*. *Strategic Management Journal*. 12:5-29.
- Salant, S., 1982. Imperfect competition in the international energy market: a computerized Nash-Cournot model. *Operations Research* 30, pp. 252-280.
- Schmalensee, R., 1987. Competitive advantage and collusive optima. *International Journal of Industrial Organization* 5, pp. 351-367.
- Stackelberg (Von), H. 1934. *Marktform und Gleichgewicht*. Julius Springer, Berlin, 1934.
- Sutton, J., 1991. *Sunk Cost and Market Structure*. The MIT Press.
- Scherer, F.M., A. Beckenstein, E. Kaufer and R.D. Murphy, 1975. *The Economics of Multiplant Operation. An International Comparison Study* (Harvard University Press, Cambridge, MA)
- Spencer, B. et J. Brander, 1992, Pre-commitment and Flexibility : Applications to Oligopoly Theory, *European Economic Review*, 36, 1601-1626.
- Watters, Don C. 1981. *The Industry Cost Curve as a Strategic Tool*. A McKinsey Classic.

How Uncertainty Disciplines Pre-commitment on Risky Markets*

Christophe Caron and Thierry Lafay[†]

January 2003

Abstract

This paper studies how information flows affect the strategies of firms in a two-period qualitative model based on a classical inverse demand with a quantity competition. We first analyze the conditions under which a leader exercises his 'first mover' advantage when information is increasing through time. We then emphasize the impact of information flows on each player's profit and strategy. Finally, we analyze the incentive of both players to preempt the market. We derive two major conclusions: first, the availability of future information for a Stackelberg follower has a feedback effect on the leader's strategy and second, a sequential move is not likely to be an equilibrium in a simple framework, as preemption profits are very diminished when information is increasing.

Key words: Cournot competition, Stackelberg, preemption, information value, real option value.

JEL Classification: C73 D43 D81 D83 L13

*The theme of this paper arose from extensive discussions with J.P. Ponssard to whom we are sincerely thankful. We also benefited from advices and comments by A. Jacques, L. Linnemer, T. Mayer, C. Montmarquette, B. Spencer and H. Tanguy.

[†]from Laboratoire d'Économétrie, École Polytechnique, 1 rue Descartes Paris, France. Phone (33) 1-55-55-82-17 Fax: (33) 1-55-55-84-28 Email: lafay@poly.polytechnique.fr, christophe.caron@lafarge.com

1 Introduction

Different strategical issues concerning competition between firms have been the subject of many models in industrial economics. The Nash Cournot game captures the idea that oligopolies might end up with nonnegative profits whereas the Stackelberg game underlines the pre-commitment value. It has long been recognized in industrial economics that, in many markets, "the important aspect is the order of moves"¹. Given this, we may legitimately wonder when and why some players would be able to commit before their competitors. Such an ability may come from an asymmetry in firms' position as argued by Dixit (1980). Dixit's model suggests that the asymmetry between players can be explained as an historical fact. But Stackelberg equilibria may also arise even with similar firms. For example, in more recent papers (Dowrick (1986), Hamilton and Slutsky (1988), Sadanand and Sadanand (1996), van Damme and Hurken (1999), ...) the firms' asymmetry is endogenized by exhibiting games with symmetric players but asymmetric equilibria. Moreover, firm's asymmetry may also be endogenized on the basis of informational aspects as in Ponssard(1979)².

This paper studies the influence of an uncertain environment on the preemption profit and exhibit the equilibrium which is likely to occur in a simple framework. We use a model with quantity competition between firms where information on the final demand is partial in the first step and totally revealed in the second step. On the basis of this environment, we study the incentive for players to preempt the market. The preceding literature only studies markets which are always profitable ex post. In many industries, markets are however risky in the sense that investing in emerging countries, for example, can display an ex post negative return when the market demand is lower than anticipated. Hence, because it assumes that firms incur no losses when they are overcommitted, previous literature clearly overestimates the preemption profit. Moreover, this assumption often implicitly implies that rent dissipation can never occur for an incumbent.

Contrary to most of the other studies (Ponssard(1979), Spencer and Bran-

¹See Sadanand and Sadanand(1996).

²This author shows that, in a Cournot Nash competition, the problem of strategic acquisition of information by firms in a market with uncertain demand function is completely similar to the strategic problem of entry of new firms in a market with a known demand function.

der(1992), Sadanand and Sadanand(1996),etc.) a negative profit is possible in this paper³. In this sense the market presents an additional type of risk: a risk of loss⁴. As we shall see, it also implies that, contrary to previous literature, the manner in which information is acquired, either privately or secretly, carries much importance in our model⁵. However, despite this assumption, our framework model remains close to Hamilton and Sltusky(1988) or Spencer and Brander(1992).

This paper presents three main results. The first one is rather counter-intuitive: an uninformed player in a leader position will produce less when he knows that the follower will have more information compared to the situation when he knows that the follower will have none. This confirms the result of Hauk and Hurkens(2000) that information may also have a pure "strategic value" towards the other competitors⁶. It was already known that uncertainty could affect the follower's profit and in some model even the leader's profit but it did not affect the leader's strategy in the previous literature. Second, the model derives conditions on the volatility of the demand under which the strategy "follow the leader" might be optimal even with risk neutral players. Third, numerical examples indicate that a sequential move cannot be an equilibrium and that the two Cournot outcomes may be both equilibria (with the postponed one Pareto dominating the other). Thus, asymmetric "output" may arise in this region and the volatility "window" at which it happens is larger on markets with a risk of loss than on markets profitable for sure.

The first section describes the model under three information structures: first, a perfect information environment, second, a no information environment (except for the distribution function) and third, a partial information environment. A numerical example illustrates the conclusions. Each case is computed either as a Nash Cournot game or as a Stackelberg game. In

³Spencer and Brander (1992) partially study this case: and it corresponds to their "shut down option". However, they do not explicit the strategical effect associated to this hypothesis and they do not extend their study to the symmetric player case.

⁴We however assume that the risk of loss is sufficiently small to make the risk of bankruptcy negligible. Thus there is no special treatment for bankruptcy.

⁵On the distinction between private and secrete information see Levine and Ponsard(1977).

⁶According to these authors, the information value in a game has two components: the classical information value, i.e.the intrinsic value of the private information owned by a player and the strategical value, i.e. the supplementary value linked to the fact that the other players know that the initial player owns private information.

the second section, we discuss the results in different situations and provide some intuition on welfare effects via an example. The conclusion sums up the results and examines their consequences on the incentives of players to preempt a market.

2 The Model

The model is a canonical duopolistic model. There are two players and they compete on quantity. $P = a - b.Q$ is an inverse demand function where P is the price and Q is the total quantity produced. The use of an inverse demand presents the advantage to make the game less competitive than in a Bertrand competition. Consequently it facilitates the emergence of preemption, the emergence of preemption is linked to the level of the expected rent for a leader⁷.

The key information corresponds to the fixed part of the demand, that is a . Initially, players have only partial information \bar{a} while ex post the demand is $\bar{a} + \eta - b.Q$ where η is a random variable which follows a normal law with a mean 0 and a variance σ . The price derivative is a constant b , i.e. when we talk about the demand volatility we mean the volatility of the fixed part of the demand, that is σ . The distribution function is $f(\eta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}$, while the cumulative distribution function will be noted $F(x)$. For convenience we use $G(x) = 1 - F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta$.

We use a linear cost of production c . These costs are engaged when production takes place: $C(q) = c.q$. Ex post if $\eta < c - \bar{a}$ then the overall profits are negative. Thus, if the firm did not produce before knowing the price it might not enter the market whereas if the firm already produces, then its overall profit will be negative. Many models assume that \bar{a} is high enough to render the latter effect statistically insignificant but in this paper we consider markets that may not be profitable both ex ante and ex post. These models also make a second and more stringent assumption that \bar{a} is sufficiently high to render the probability of a negative residual demand infinitesimal. This second assumption is especially debatable in a Stackelberg game because it changes the leader's strategy as it takes into account the edge effect on $a - c - b.q_L$. We compute and illustrate the strategic effect of

⁷Though in Bertrand competition, preemption may happen and involve some rent for the incumbent as shown by Boyer, Lasserre, Mariotti and Moreaux (2001)

the "shut down option" which is briefly discussed in Spencer and Brander (1992), and we also study the symmetric player case without making this previous assumption. We just implicitly assume that costs or real price on the market are high enough so that when players precommitted they still always sell all their product on the market (i.e. the case where $P(Q)$ is negative is statistically insignificant and players cannot ration the market after producing, otherwise commitments of players would be not credible). From now on, we will only talk about the ex post average revenue on the market that is: $r(Q) = \bar{r} + \eta - b.Q$ where $\bar{r} = \bar{a} - c$ can be negative. We also make the classical assumption that if one firm has decided to produce on the first period then it cannot adjust its production on period 2 (Spencer and Brander(1992), Sadanand and Sadanand(1996),...). In fact the strategic effect would not be changed but as Saloner(1987) suggests it, there would be several subgame perfect equilibria.

Models with uncertainty on the final demand using an inverse demand function are mathematically identical to models where uncertainty bears on production costs. We may also interpret this model by assuming that the demand is ex ante known while the production cost is a random variable⁸. So, the work by Somma (1999) or van Damme and Hurkens (1999) are also linked to the study made here. Moreover, the kind of model we use directly refers to the literature on flexibility (see Jacques (2000) for a complete survey).

In order to limit the number of exogenous variables, the model assumes that the discount rate is zero. Thus a monopolist would always wait in order to know the demand before producing. The only advantage to produce earlier is due to the preemption effect toward competition. Finally, the fact that an informed player will produce nothing as soon as the average profit is negative introduces an edge effect for a follower (he may not enter the market depending on the leader's strategy). As we shall see, this effect has implication on his strategy.

In the first subsection, we assume that both players know the demand. In the second subsection, we assume that both players have only a signal on the final demand when they choose their quantity. The results of the two preceding subsections are already known. They appear as a subgame of our game and are used as a benchmark for the last model. Finally, in the third

⁸To go from our model to this alternative interpretation of it, it suffices to assume that both firms have the same production cost with an average random cost $-\eta$ so that the average revenue would write $r(Q) = \bar{r} - (-\eta) - b.Q$.

subsection, we assume that only the first player can choose either to produce first with partial information on the final demand or to produce at the same time as the second player with perfect knowledge on the demand function. The case of symmetric players will be studied in the next section.

2.1 Notation

A profit such as $\Pi_i^{A,B}(q)$ denotes the profit function whereas $\Pi_i^{A,B}$ denotes the profit when both players play the subgame perfect equilibrium. $\Pi_i^{A,B}$ is the i th player's profit; A denotes the kind of model, either S for a Stackelberg or C for a Cournot; B denotes the information structure, either I if both players are totally informed on the demand (this case is the classical Cournot or Stackelberg game), or U if both players are both uninformed on the final demand, or P if we have in the first period only a partial knowledge information (that would be entirely revealed in a second period). We use the same notation for the equilibrium quantity played in each model thus $q_i^{S,P}$ refers to the quantity played by player i in the Stackelberg model with the partial information structure.

Finally, in a Stackelberg game $i \in \{L, F\}$ denotes either L for the leader or F for the follower. We ignore the player's index in a Cournot game as both players have the same profits and strategies. The detailed proofs of the propositions given below are gathered in a mathematical index, available on request.

2.2 Full information case

We will assume that players choose their quantity with perfect information on the demand function. The ex post average revenue is: $r(Q) = r - bQ$ where $r = a - c$ is perfectly known by each player.

In the classical Cournot game: each player knows the demand and produces at the same time. The symmetric equilibrium of the game is such that: $q^{C,I} = \frac{r}{3b}$ moreover their profits are $\Pi^{C,I} = \frac{1}{9b}r^2$.

In the Stackelberg game, both players know the demand before producing. However one player, the leader, chooses his quantity output before the other player. The quantity chosen by players are: $q_L^{S,I} = \frac{r}{2b}$ and the follower produces $q_F^{S,I} = \frac{r}{4b}$. The profits of both players are: $\Pi_L^{S,I} = \frac{r^2}{8b}$ and $\Pi_F^{S,I} = \frac{r^2}{16b}$.

The preemption value is thus defined as the difference between the Stackelberg leader's profit and that of a Cournot player. This extraprofit emphasizes the fact that, in a context of a quantity competition, each player would like to be able to commit before the other by producing a given quantity. The second player would have then to accommodate the quantity already produced. Playing first allows the incumbent to extract some of the second player's profit, but the total surplus of the industry is lower in the Stackelberg game than in the Cournot game.

2.3 Uninformed players

In the Cournot game, the model is the same as before but it is now assumed that both players have only a signal on the demand. Thus, both players know \bar{r} while their ex post average revenue will be: $r(Q) = \bar{r} + \eta - bQ$, where η is a random variable. If $\bar{r} > 0$ then both players produce the same quantity $q^{C,U} = \frac{\bar{r}}{3b}$ and get the same expected profits $\Pi^{C,U} = \frac{1}{9b} \bar{r}^2$.

When there is a leader and a follower then if $\bar{r} > 0$ we have a Stackelberg game and players produce: $q_L^{S,U} = \frac{\bar{r}}{2b}$ and $q_F^{S,U} = \frac{\bar{r}}{4b}$. The expected profits of both players are: $\Pi_L^{S,U} = \frac{\bar{r}^2}{8b}$ and $\Pi_F^{S,U} = \frac{\bar{r}^2}{16b}$.

Ex post, in both cases, the players may incur losses so that the payoff does not have as in many other models a zero floor profit. Moreover, the strategy and the payoffs of the player at equilibrium can be computed in both models by just replacing r by its mean \bar{r} in the results of the full information model (cf Tisdell (1963)).

2.4 Partial information in first period and full information in second period

The model we study in this subsection is described in figure 1.

Only one player, the leader L , is able to choose whether he produces in period 1 or in period 3. If the leader chooses to produce in period 1, then he cannot adjust his production level in period 3. If he could, then the effect emphasized in the model would still exist but it would be alleviated by the adjustment ability. The leader strategy is a two-dimensional choice: he chooses when to produce and what quantity to produce. The follower only reacts to the residual demand. However, when the leader chooses to delay, the follower observes it. We compute the subgame perfect equilibrium of the

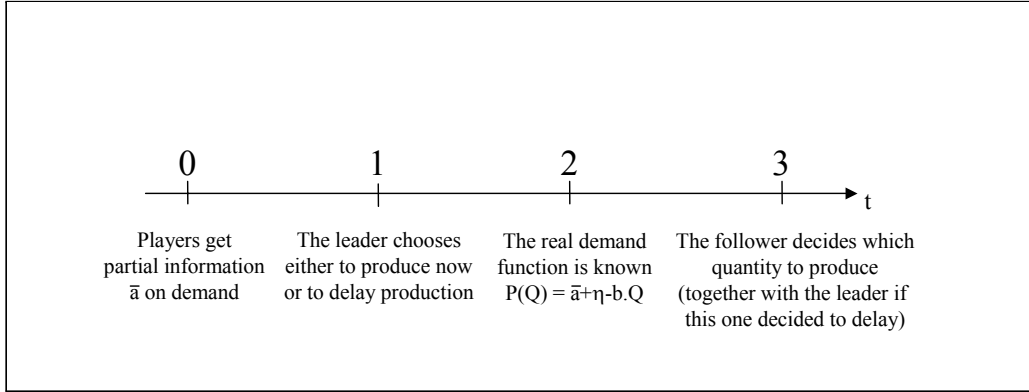


Figure 1: Game sequence.

game. This implies to independently study in a first step the Cournot game (that is when the first player decides to delay production) and the Stackelberg game (that is when the first player uses his first mover advantage). Subsequently we will compare both profits and derive the leader's optimal choice.

2.4.1 Cournot game

Let \bar{r} be the signal (or the initial information) on r for the players. We will have $r = \bar{r} + \eta$ where η follows a normal distribution of mean 0 and variance σ^2 .

Proposition 2.4.1 *If the leader decides to delay production after the revelation of the demand function, we have a classical Cournot model and the symmetric equilibrium is:*

$$q^{C,P} = \frac{\bar{r} + \eta}{3 \cdot b} \cdot \chi_{\bar{r} + \eta > 0}$$

Then the expected profit (in period 0) for both players is:

$$\Pi^{C,P}(\bar{r}) = \frac{1}{9b} \times [(\bar{r}^2 + \sigma^2) \cdot G(-\bar{r}) + \bar{r} \cdot \sigma^2 \cdot f(\bar{r})]$$

This $\Pi^{C,P}$ profit is in fact the expected profit of one player prior to receiving information on the final demand. This result is close to the result of

Spencer and Brander (1992). The last term represents the extra gain due to the fact that firms may not enter the market when it is not profitable⁹. This Cournot profit is increasing in σ . This confirms Oi(1961)'s intuition who argued that firms were likely to desire price instability. In our model it means that in a Cournot game, firms would ex ante prefer markets with a high volatility if they know that they will ex post learn about market conditions before producing¹⁰. The intuition behind this result is that the upside risk on the market is unbounded while the downside risk is bounded.

2.4.2 Stackelberg game

In this game the leader chooses his quantity output at period 1 while he has only a prior \bar{r} on the market conditions. The follower adjusts his quantity level at period 3 when he knows exactly the demand function.

Lemma 1 *The reaction curve of the follower is given by:*

$$q_F^{S,P}(q_L) = \frac{\bar{r} + \eta - b \cdot q_L}{2 \cdot b} \cdot \chi_{r > b \cdot q_L - \bar{a}}$$

Proof.

With an inverse demand, the monopoly quantity is:

$$q^M = \frac{r}{2 \cdot b}$$

The follower is ex post a monopoly on the residual demand left by the leader (i.e. $\bar{a} + \eta - b \cdot q_L$). However the follower will enter the market only if the market is profitable, thus:

$$q_F^{S,P}(q_L) = \frac{\bar{r} + \eta - b \cdot q_L}{2 \cdot b} \cdot \chi_{r > b \cdot q_L - \bar{a}}$$

■

Lemma 2 *If the leader produces at period 1 while he has only partial information on the demand level then his expected profit is:*

$$\Pi_L^{S,P}(q_L) = \frac{q_L}{2} \cdot (\bar{r} - b \cdot q_L) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})] - \sigma^2 \cdot \frac{q_L}{2} \cdot f(b \cdot q_L - \bar{r})$$

For each quantity produced, his expected profit is lower in this case than when the follower has also partial information.

⁹This is thus exactly the option value defined by Henry(1974).

¹⁰As shown by Tisdell(1963) this additional assumption is necessary to ensure the desirability of price instability for firms.

This lemma underlines the fact that ex ante the availability of new information for the follower decreases the leader's profit.

Proposition 2.4.2 *The maximization of the leader's profit leads to the optimal strategy¹¹ $q_L^{S,P} \equiv q_L^*$ defined by the following implicit equation ($q_L^* > 0$, $\Pi_L^{S,P}(q_L^*) \geq 0$):*

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(bq_L^* - \bar{r})^2}{2\sigma^2}} = (\bar{r} - 2b \cdot q_L^*) \cdot [2 - G(b \cdot q_L^* - \bar{r})]$$

The solution is unique and continuous in σ .

Corollary 2.4.1 *When the partial information \bar{a} tends to be fully informative (i.e. when the variance of demand goes to zero), the optimal quantity played by the leader tends to be the Stackelberg quantity in the full information game where $a = \bar{a}$.*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} q_L^{S,P}(\sigma) = q_L^{S,U} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} q_L^{S,I}$$

Moreover, as the variance of the noise goes to infinity (which means that the initial information \bar{a} does not reveal any information as the normal law tends to a 'uniform' distribution) then the leader never produces.

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} q_L^{S,P}(\sigma) = 0$$

This last result implies by continuity that there is at least an uncertainty level such that an incumbent gives up its first mover advantage and prefers not to produce, even though the market is profitable on average.

Corollary 2.4.2 *The more uncertain the signal, the less the leader produces:*

$$q_L^{S,P} > 0 \Rightarrow \frac{\partial q_L^{S,P}}{\partial \sigma} < 0$$

Thus the leader does not like price instability. The explanation behind this result is as follows: even though the market is ex ante profitable, the expected leader's profit can be negative as the option effect made his profit concave on the noise. If the market is ex post not as profitable as forecasted then only the leader will lose, while if the market is profitable ex post then he

¹¹For notation simplicity we denote $q_L^{S,P}$ as q_L^* .

will share the profits with the follower. Thus for high uncertainty, the follower gets second mover advantage and it can earn more than the leader¹².

This last corollary may also be interpreted as follows: the wider the information gap between the two players (to the benefit of the follower), the lower the preemption effect will be in terms of quantity. It directly implies that the expected quantity produced by the follower is increasing in σ .¹³ Thus, on average (according to the distribution law), the equilibrium strategy ex ante for the follower corresponds to a higher production when he is informed than when he is not.

Proposition 2.4.3 *The optimal quantity $q_L^{S,P}$ is less than the Stackelberg quantity $q_L^{S,U}$ (i.e. when both players have only the partial information, \bar{a} , while choosing their quantities). Moreover, the leader's profits are lower when the follower is informed on demand conditions than when both players have the same partial information on these conditions, i.e. $\Pi_L^{S,P} < \Pi_L^{S,U}$.*

Thus when the follower is informed before producing, his own profit improves by an option effect (because he can adjust his output knowing the price)¹⁴. But the proposition states that the existence of a follower also makes the leader lower his quantity output. When the leader knows that the follower will be better informed when producing, then he less preempts the market than what he would do if the follower had no additional information¹⁵. We must note that if the market was profitable for sure whatever the leader's quantity then the leader would always produce the same quantity (which is the monopoly quantity in fact) whatever the information of the follower (i.e. $q_L^{S,U}$ whatever σ as in Spencer and Brander(1992)).

This also means that there is some value for the leader to take action to keep the follower uninformed. Thus, there is in this model an ex ante positive value for the leader to be able to disinform the follower in the future.

¹²See Boyer and Moreaux(1987) for a similar result with a competition on price and quantity.

¹³Simple integration on the formula defining q_F gives the result.

¹⁴This effect has been captured by models such as Henry(1974)'s. In these models, the real option value is defined as the expected value of delaying some decision (i.e. as the value of information).

¹⁵This result mitigates McGahan(1993)'s result under Bertrand competition. According to this author, preemptive investment might be optimal when the follower commits to get information but it is no longer the case when he does not get information.

This result is not obvious as one might think that the detention of information of a follower would have a positive impact on the industry and that the fact that the follower would be informed could improve the leader's position, but the result is the opposite. The intuition behind this result is as follows: when the follower has no information on the demand curve, the leader has a tendency to overproduce because both players share the risk of overproduction and because the follower's reaction will then be to underproduce, in order to secure a profitable market. Hence the leader preempts more of the follower's profit. On the contrary, when the follower is informed on the market before producing, the quantity commitment of the leader loses his credibility as the follower will not bare the risk if the leader overproduces. The precommitment of the leader has no threatening value.

We must notice that if the market was always profitable ex post, then the leader's profit and the follower's one would not depend on the volatility of the demand level. Thus our result depends directly on the fact that precommitting on the market is risky, as players might end up with negative profits.

Corollary 2.4.3 *The follower's profit is:*

$$\begin{aligned}\Pi_F^{S,P} = & \frac{1}{4.b} \cdot ((\bar{r} - b.q_L^*)^2 + \sigma^2) \cdot G(b.q_L^* - \bar{r}) \\ & + \frac{(\bar{r} - b.q_L^*)}{4.b} \cdot \sigma^2 \cdot f(b.q_L^* - \bar{r})\end{aligned}$$

Moreover the leader's profit is decreasing in σ while the follower's profit is increasing in σ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (\Pi_F^{S,P}) \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Pi_L^{S,P}) \leq 0$$

Remark: We can easily check that $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_F^{S,P} = \Pi_F^{S,I}$. Moreover if $q_L^* = 0$ then $\Pi_F^{S,P} = \Pi^{M,U}$, where $\Pi^{M,U}$ denotes the monopoly profit in the uninformed game. Thus we also have: $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \Pi_F^{S,P} = \Pi^{M,I}$.

Therefore, contrary to the Cournot game, where both players like price volatility, the profits of the leader are here decreasing in the volatility while the follower's profits are still increasing in σ .

If we compare this model with the case where both players are uninformed, we conclude that the follower earns more than the information value

by waiting to obtain the information. There is some strategic value toward the leader. Moreover, the fact that information acquisition is public or secret does matter now as it changes both the expected follower's profit and the leader's strategy.

Proposition 2.4.3 and corollaries 2.4.2 and 2.4.3 are quite general: the model uses simple assumptions and the same kind of result would prevail in any game where the strategic variables are strategic substitutes and whenever the price is decreasing with the total output. However, the results might be changed in case of positive fix costs, as these could be used as a means to block entry for competitors.

Proposition 2.4.4 *It exists σ^* such that if $\sigma < \sigma^*$ the leader chooses to preempt the market and plays the positive quantity $q_L^{S,P}$ at the first period, and if $\sigma > \sigma^*$ the leader chooses to delay the production period and to produce at the same time as the other player.*

Proof.

$\Pi_L^{S,P}$ is a decreasing function of σ . We already proved that $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} q_L^*(\sigma) = 0$. Thus $\Pi_L^{S,P}$ is a decreasing function of σ which tends to zero. Moreover, if the first player chose to wait, he would get $\Pi^{C,P}$ which is a non negative increasing function of σ . As for $\sigma = 0$, $\Pi^{C,P} < \Pi_L^{S,P}$, we obtain by continuity the existence of σ^* which concludes.

■

2.5 Example

For the following application we use the inverse demand function $P(Q) = 1 - Q$. The first player arbitrates between the preemption value of the game and the option value (see figure 2). We define $\bar{\sigma}$ the variance at which $\Pi_F^{S,P} = \Pi^{C,U}$, while $\tilde{\sigma}$ is the variance at which $\Pi_L^{S,P} = \Pi_F^{S,P}$.

We can see that, for a volatility lower than σ^* , the first player will use his first mover advantage in order to preempt the market. But when uncertainty is higher, the first player prefers to delay the production stage in period 2.

3 Discussion

There are different ways to reinterpret the model. The model can be seen as a competition on capacity where the unit cost of setting up new capacity is

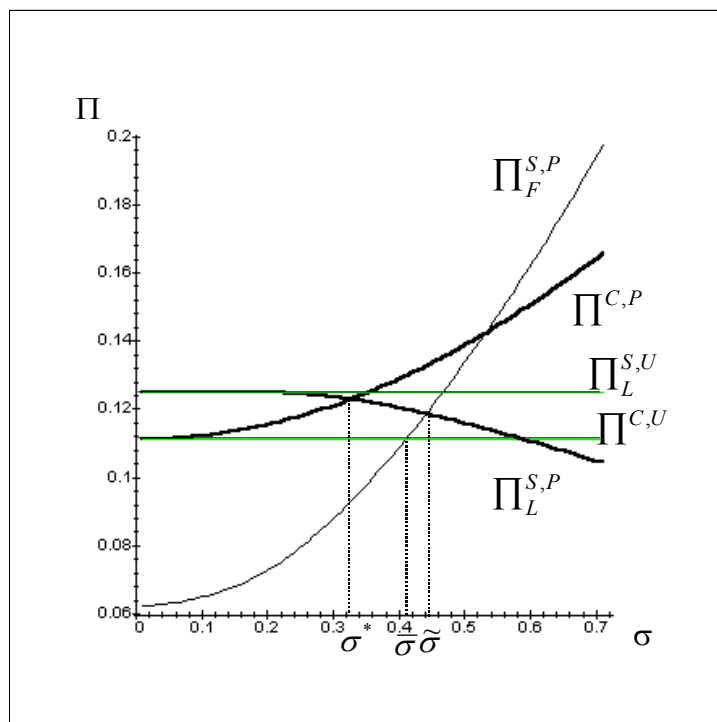


Figure 2: Player's trade-off.

c. In this case either we may think that the marginal cost of producing in a plant is then 0 (but we still may have to give additional condition in order to prove that firms produce up to their capacity) or we may see the price as the average revenue of capacity. Indeed the inverse demand is the simplest function that exhibits two basic ideas: the fact that average revenue decreases with production, and that production is a strategic substitute between firms. Thus any kind of investment game that has those property can fit our model. Moreover in this model the market clears only one time after time 3. This choice of modelization fits well situation were the long term profits are the most important.

3.1 The value of information on demand

In our model, waiting in order to play in stage 3 means that one player prefers to get information on the market and to take the risk to let the other player

preempt the market. Hence the cost of information is endogenized via the preemption effect. We can then interpret the choice to produce latter as an investment in order to be more informed on the future market, we are thus close to the assumptions made in Ponsard(1979).

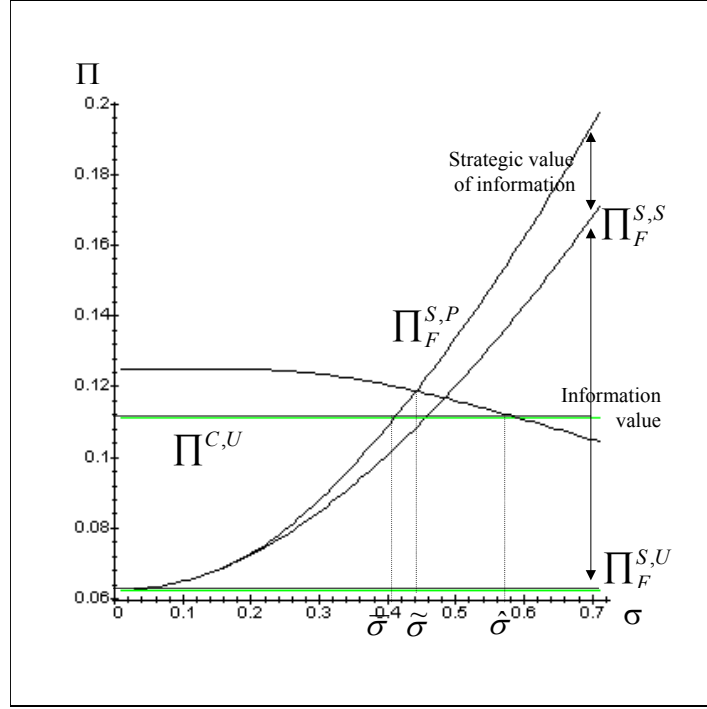


Figure 3: The value of information on demand function.

As noticed, the follower earns more when the acquisition of information is private rather than secret¹⁶. In fact the value of information can be seen as the sum of two components: the informational value and the strategic value of information (as in Hauk and Hurkens(2000)). The strategic value, that is "the indirect gain caused by the reaction of agents to the private information", is in our model always positive. In figure 3, $\Pi_F^{S,S}$ denotes the profit of the follower if he decides to acquire information only at stage 2 while the leader did not anticipate this acquisition (The information is thus secret

¹⁶Thus the way information is acquired (either privately or secretly) does matter in our model.

for the follower¹⁷).

We now assume that one player can choose when to produce while the other produces at stage 1. This would be the case if only one player can wait to obtain information on the market. Then from the previous computations, we have the following results: if the volatility is too low, then it is not worth it to wait in order to get information on demand, else the player who can get information on demand will do it, and a volatility window may exist where the uninformed player will earn more than the informed player¹⁸. Figure 3 displays a numerical example. When $\sigma < \bar{\sigma}$, then the value of information does not compensate the cost of being preempted, and the subgame perfect Nash equilibrium is such that both players produce without knowing the demand at stage 1. For $\sigma > \bar{\sigma}$, the player who can afford to wait, do it in order to purchase information. However, the choice of the informed player makes the uninformed one earn more than the informed one if $\bar{\sigma} < \sigma < \tilde{\sigma}$. Finally, when $\tilde{\sigma} < \sigma < \hat{\sigma}$, there are still information spillovers for the first player and the first player earns from the fact that the second player has waited to get information on demand. When $\sigma > \hat{\sigma}$, the fact that information is available to the other player hurts the uninformed player. We can conclude that the information value of demand is only positive for high volatility, and that players might earn more whenever the other ones have acquired information.

3.2 Symmetric players

We can now extrapolate the previous results in a supergame where players are symmetric. We use a qualitative - and not a quantitative - model (see Hamilton and Slutsky (1990) or Guth and Ritzberger (2000) about the distinction between quantitative and qualitative commitments). This means that the choice of one player to produce before or after the revelation about demand is public information. Thus it is not possible for players to produce together the Stackelberg leader's quantity hoping that the other player chose to wait and see. This choice of modelization solves some of the coordination problems of players in this kind of game. The corresponding game is represented in figure 4.

We analyze the incentives of both players to invest during the first period. In the following table, we represent the profits of both players when they

¹⁷See Levine and Ponssard(1977) about the difference between secrete and private information.

¹⁸This effect depends directly on the demand elasticity.

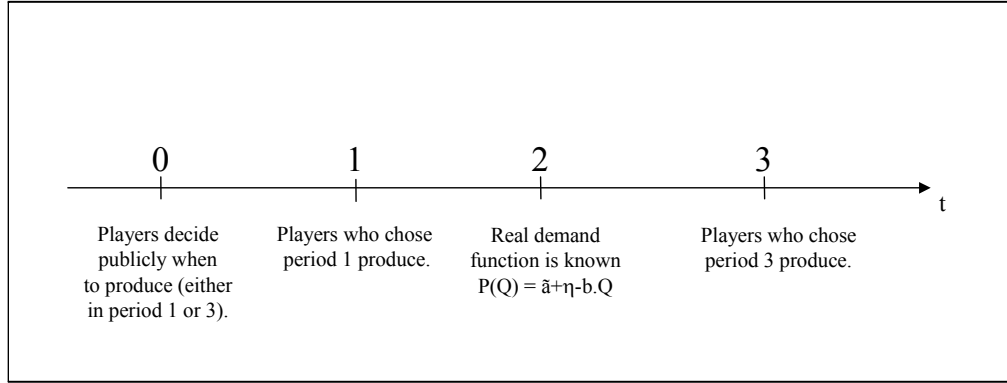


Figure 4: Symmetric player game form.

use either strategy P or W . Strategy P means producing before receiving information about market conditions, while strategy W consists in delaying production in period 3. The following table displays the normal form of the game depending on the previous results on the subgames.

$I \setminus II$	<i>Preempt</i>	<i>Wait</i>
<i>Preempt</i>	$(\Pi^{C,U}, \Pi^{C,U})$	$(\Pi_L^{S,P}, \Pi_F^{S,P})$
<i>Wait</i>	$(\Pi_F^{S,P}, \Pi_L^{S,P})$	$(\Pi^{C,P}, \Pi^{C,P})$

$\Pi_L^{S,P}$ is the profit of the leader in the Stackelberg game and $\Pi_F^{S,P}$ is the profit of the follower. $\Pi^{C,P}$ is the profit of both players when they postpone production to period 3. $\Pi^{C,U}$ is the profit of both players when they invest in the first period. The game might have one or multiple equilibria. The profits of the players, according to their choices, have already been displayed on figure 2.

First we see that according to proposition 2.4.4, when σ is lower than σ^* , each player would prefer to be the Stackelberg leader than to play together with its competitor in stage 3. As in Hamilton and Slutsky (1990), the question is then: would a follower prefer to play a Cournot game in the first stage? In fact we know that if the volatility is low enough, then he would prefer this strategy (as we have $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_F^{S,P}(\sigma) = \Pi_F^{S,U} < \Pi^{C,U}$). Therefore, we have the worst case scenario for a sufficiently low volatility, as the only equilibrium makes both players produce before knowing the demand.

The following table exhibits the equilibria of the game depending on σ for the classical inverse demand function.

Volatility	Nash Equilibrium
$0 < \sigma < \sigma^*$	(P, P)
$\sigma^* < \sigma < \bar{\sigma}$	(P, P) and (W, W)
$\sigma > \bar{\sigma}$	(W, W)

As in Spencer and Brander (1992) for a low volatility, players are trapped into a Cournot game in stage 1, while they would be better off playing a Cournot game in stage 2. Only the two Cournot equilibria are arising. Contrary to Sadanand and Sadanand(1996), we do not find asymmetric equilibria. Indeed, it seems that a classical quantity competition environment with an information flow on the final level of demand does not provide sufficient conditions to endogenize a sequential move in a qualitative model. Numerical tests indicate that we have: $\Pi_F^{S,P} > \Pi^{C,U} \Rightarrow \Pi^{C,P} > \Pi_L^{S,P}$, which implies that no asymmetric equilibrium can occur. Both symmetric equilibria might happen, but the (W, W) equilibrium Pareto dominates the second one. Though we confirm the results of Spencer and Brander(1992), the example proves that neglecting the real option leads to different spins on the apparition of equilibria. For example, the volatility window at which both Cournot solutions are equilibria is wider with a real option effect. The following table displays a numerical example for the inverse demand function and a zero production cost.

Nash Equilibrium	Spencer and Brander	This model
(P, P)	$0 < \sigma < \frac{\sqrt{2}}{4} \cong 0.3536$	$0 < \sigma < \sigma^* \cong 0.3264$
(P, P) and (W, W)	$\frac{\sqrt{2}}{4} < \sigma < \frac{\sqrt{7}}{6}$	$\sigma^* < \sigma < \bar{\sigma}$
(W, W)	$\sigma > \frac{\sqrt{7}}{6} \cong 0.4410$	$\sigma > \bar{\sigma} \cong 0.5300$

We can notice that a mixed strategy equilibrium might also happen for $0 < \sigma < \sigma^*$ and thus the information on which stage players planned to produce has some positive value. A qualitative model would imply a coordination problem leading players to sometimes overproduce in period 1 for low level of volatility (i.e. $0 < \sigma < \sigma^*$).

3.3 Surplus, Welfare

We first analyze the industry surplus. In this trade-off, the best competition from the industry surplus point of view is a Cournot game where both firms wait in order to be informed about demand. However if volatility is really high ($\sigma > \sigma_I$), then the industry would be better-off with a Stackelberg competition. This is only due to the fact that as uncertainty increases, the first player produces a smaller quantity, leaving the follower with a monopoly on a larger residual demand.

From the consumer's point of view, we directly obtain that consumers would prefer a Stackelberg competition between firms when volatility is low and a Cournot one when volatility is higher. The consumers prefer Stackelberg for a low volatility because typically, when demand is almost known by both players, Stackelberg leads to a higher quantity output. However, as volatility increases, a Stackelberg leader would allow the follower to monopolize a higher residual demand. Thus Cournot competition becomes more intensive than the Stackelberg one as volatility increases. It exists σ_C , such that if $\sigma > \sigma_C$, then the consumers prefer a Cournot competition. The industry and the consumers' surplus are represented in figure 5.

From the normative point of view, we know that when uncertainty is low ($\sigma \approx 0$), social welfare is higher with a Stackelberg competition. This is due to the fact that competition is more intense with a Stackelberg leader than when players play the Cournot game. When uncertainty increases (but still such that $\sigma < \sigma_I$), we know that the industry' profits are higher in a Cournot game. Moreover, if $\sigma > \sigma_C$ then the consumers' surplus is higher in a Cournot game. Therefore, it exists $\sigma_W < \sigma_C$ such that if $\sigma > \sigma_W$, welfare is higher with a Cournot competition. Indeed we have two different effects argued in Maggi 1996, "a leader-follower equilibrium entails information dissipation ... on the other hand, leader-follower outcomes tend to entail higher output". The following table summarizes these results:

	$0 \dots \sigma^*$	$\sigma^* \dots \sigma_W$	$\sigma_W \dots \sigma_C$	$\sigma_C \dots \sigma_I$	$\sigma_I \dots + \infty$
Total industry	Cournot	Cournot	Cournot	Cournot	Stackelberg
Consumer	Stackelberg	Stackelberg	Stackelberg	Cournot	Cournot
Welfare	Stackelberg	Stackelberg	Cournot	Cournot	Cournot
Model	Cournot (ex ante)	Cournot	Cournot	Cournot	Cournot

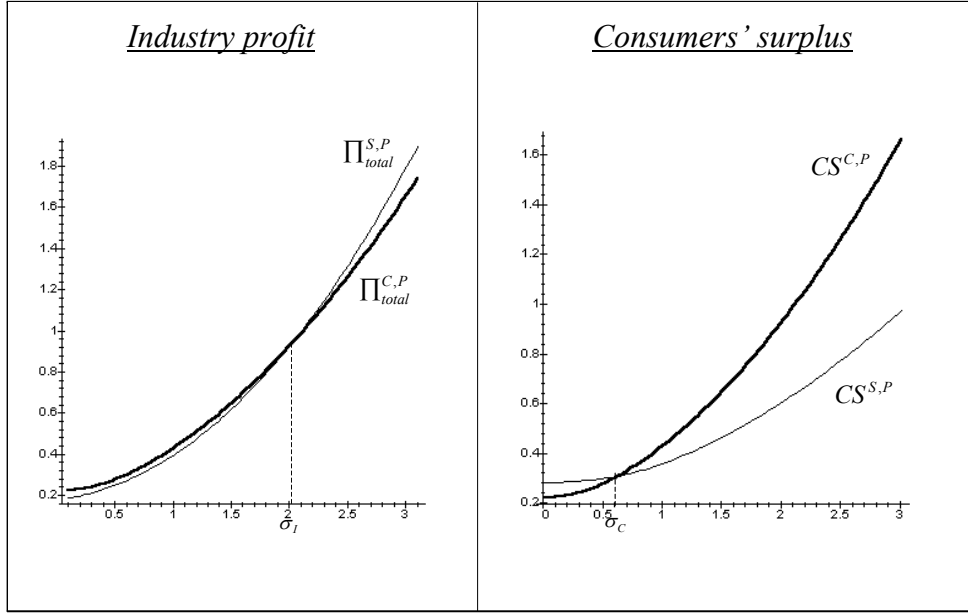


Figure 5: Surplus.

The line entitled "Model" represents the output structure of the model. We already noticed that when $\sigma < \sigma^*$, then the industry structure leads to a suboptimal output. When $\sigma \in [\sigma^*, \sigma_W]$, players delay production until they know demand and neither welfare nor consumers' surplus are maximized under this industrial choice.

We obtained that for low volatility, Stackelberg is the welfare maximizing industrial structure. Thus, if $\sigma^* < \sigma < \sigma_W$, the government should encourage leaders to produce in a first period. For lower volatility $0 < \sigma < \sigma^*$, the government should be induced to give a monopoly for a short time to one player, so that one of the two players delay his production. Thus, though our model does not explicitly endogenize sequential moves, we understand that such sequential moves might sometimes be encouraged in order to maximize the total surplus. Finally, firms' asymmetries might not be due to the existence of asymmetric equilibria but to the government's preference for a sequential move of firms on risky markets.

3.4 Leadership and foreign direct investment

An interesting extension of our model concerns the behavior of firms toward foreign investment. Even though capacities might be more appropriate to that kind of situation, we must note that under our assumptions quantities are almost capacities in our model. When a firm wants to invest in another country, it might not know the market conditions before investing. On one hand, the more it waits, the larger the risk that other firms invest in the country. But, on the other hand, the more information it can get from the potential market. If we assume that firms may enter different countries, then for each country a firm may have different profits corresponding to the countries' competition level. Suppose that at least two firms will be on each country at stage 2 (which means that no firm can make a long term entry barrier) and that uncertainty about each country demand have the same mean and volatility. Suppose also that there is already an incumbent on one country. Then we obtain that, for some parameter values, a firm might prefer to be a follower in the country of the incumbent rather than being a Stackelberg leader in the other country (see figure 2, for $\sigma > \tilde{\sigma}$ the follower is better-off than the leader). However, by adapting our model to this situation, we implicitly assume that, as a leader, a firm would invest with no information, while as a follower the firm anticipates an informational increase on the market conditions.

This result shows that under some circumstances, the foreign direct investments (FDI) are strategic complements, while in others, they are strategic substitutes (see K. Head et al.(forthcoming) for a complete explanation of the "oligopolistic reaction" approach in an FDI theory). The major difference between our model and that of Head et al. regarding the FDI aspect is that both situations may happen even with risk neutral firms¹⁹.

4 Conclusion

In a context where a firm has a first mover advantage, uncertainty about future demand might create incentives for the firm not to preempt the market. Seen from that angle, we are able to argue that uncertainty disciplines

¹⁹Furthermore Head et al. studies firms with uncertain costs but as we already explained that models with symmetric players facing uncertainty about the fixed amount of an inverse demand or uncertainty about a production cost are formally similar.

preemption.

Secondly, proposition 2.4.3 can be interpreted as follows: if, for example, a firm has to renew its capacity in a market which is potentially growing, then even if the firm anticipates the reaction of its competitors, the firm might overinvest if it does not simultaneously anticipate that these competitors would be more informed when they will invest. Hence, the fact that future competitors might have more information has a feedback effect on the leader's strategy, which reduces his commitment ability. Indeed the difference in knowledge between the leader and the follower invalidates the preemption effect. The value of commitment is then diminished. Uncertainty about demand and its volatility have thus a major impact on the incentives to invest first. However as it is shown this is not uncertainty per se that prevents preemption of a leader but the fact that the follower may have more information. Indeed the wider the information gap between a leader and a follower the less the leader preempts the market. If it was already known that the availability of future information was changing the follower's profit and thus the equilibrium of such a game we also showed that the quality of future information is directly changing the strategy of the leader and its profit. This effect can be emphasized if investment also reveals some private information of the investors. Moreover, the simplicity of the model renders the results rather general, as they would characterize any game where the strategic variables are strategic substitutes and where the market selling price is decreasing with the total output.

We also derived the basic trade-off for an investor between receiving a better information on final demand and using a leadership to precommit and secure a market. Numerical examples tend to confirm the idea that a linear inverse demand is too simple to create a 'window' for volatility on demand such that asymmetric equilibria arise. Our conclusions emphasize that, when information regarding demand is imperfect, preemption is not likely to endogenously occur. Moreover, in some circumstances, a player is better-off as a follower rather than as a leader. Finally, studies on surplus seem to indicate that when uncertainty is low, the competition game reduces the total welfare compared to Stackelberg competition. Thus, a surplus maximizer such as the government may be induced to favor sequential entries on a market when information is increasing through time.

References

- [1] Boyer, M., Lasserre, P., Mariotti, T. and M. Moreaux, 2001, Preemption and Rent Dissipation under Bertrand Competition,” Working Paper 2000s-06, CIRANO.
- [2] Boyer, M. and M. Moreaux, 1987, Being a Leader or a Follower: Reflections on the Distribution of Roles in Duopoly, *International Journal of Industrial Organization*, 5, 175-192.
- [3] Dixit, A., 1980, The role of investment in entry deterrence, *Economic Journal*, 90, 95-106.
- [4] Dowrick S. ,1986, von Stackelberg and Cournot duopoly: choosing roles, *Rand Journal of Economics*, 17, 251-260.
- [5] Hamilton, J. and S. Slutsky, 1990, Endogenous timing in duopoly games : Stackelberg or Cournot Equilibria, *Games and Economic Behavior*, 2, 29-46.
- [6] Hauk, E. and S. Hurkens, 2001, Secret Information Acquisition in Cournot Markets, *Economic Theory*, 18, 661-681.
- [7] Head, K., Mayer, T. and J. Ries, 2002, Revisiting Oligopolistic Reaction : Are Decisions on Foreign Direct Investment Strategic Complements?, *Journal of Economics and Management Strategy*, 11, 453-472.
- [8] Henry, C., 1974, Investments decisions under uncertainty: the 'irreversibility effect',” *American Economic Review*, 64, 1006-1012.
- [9] Jacques, A., 2000, La flexibilité technologique: un survol de la littérature, chapitre 1 de *L'adoption des technologies flexibles et ses implications concurrentielles*, thèse, Université des sciences sociales de Toulouse.
- [10] Knickerbocker, F., 1973, *Oligopolistic Reaction and Multinational Enterprise*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [11] Levine, P. and J.P. Ponssard, 1977, The Value of Information in Some Nonzero Sum Games, *International Journal of Game Theory*, 6, 221-229.

- [12] Maggi, G., 1996, Endogenous Leadership in a New Market, *RAND Journal of Economics*, 27, 641-659.
- [13] McGahan, A.M., 1993, The Effect of Incomplete Information about Demand on Preemption, *International Journal of Industrial Organization*, 11, 327-346.
- [14] Oi, W., 1961, The desirability of price instability under perfect competition, *Econometrica*, 29, 58-64.
- [15] Ponssard, J.P., 1979, The strategic role of information on the demand function in an oligopolistic market, *Management Science*, 25, 243-250.
- [16] Sadanand, A. and V. Sadanand, 1996, Firm scale and the endogenous timing of entry: a choice between commitment and flexibility, *Journal of Economic Theory*, 70, 516-530.
- [17] Saloner, G., 1987, Cournot Duopoly with Two Production Periods, *Journal of Economic Theory*, 42, 183-187.
- [18] Somma, E., 1999, The effect of incomplete information about future technological opportunities on pre-emption, *International Journal of Industrial Organization*, 17, 765-799.
- [19] Spencer, B. and J. Brander, 1992, Pre-commitment and flexibility : applications to oligopoly theory, *European Economic Review*, 36, 1601-1626.
- [20] Tisdell, C., 1963, Uncertainty, Instability, Expected Profit, *Econometrica*, 31, 243-247.
- [21] van Damme, E. and S. Hurkens, 1999, Endogenous Stackelberg Leadership, *Games and Economic Behavior*, 28, 105-129.

Appendix

The normal distribution function is:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

$$G(x) = G(\eta > x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} d\eta$$

As a notation we use:

$$\chi_{\eta>0} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \eta > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Useful Math formulas:

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} d\eta &= \left[-\sigma^2 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right]_x^{+\infty} = \sigma^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ \int_x^{+\infty} \eta^2 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} d\eta &= \sigma^2 \cdot \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} d\eta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left[e^{-\frac{(b \cdot q - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] &= -\frac{b}{\sigma^2} (b \cdot q - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] &= \frac{\eta^2}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} [G(b \cdot q - \bar{r})] &= -\frac{b}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} [G(b \cdot q - \bar{r})] &= \frac{1}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot (b \cdot q - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \end{aligned}$$

(These proofs are available on demand)

Proof of proposition 2.4.1:

When demand is known we have the Cournot solution of the full information case iff $r = \bar{r} + \eta > 0$, otherwise the quantity produced is zero. Moreover in a Cournot game, we have a symmetric equilibrium where each player produces the same quantity:

$$q^{C,P} = \frac{\bar{r} + \eta}{3.b} \chi_{\bar{r} + \eta > 0}$$

From the Cournot game we also have the player's profit:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{r} + \eta) &= \frac{1}{9b} \cdot (\bar{r} + \eta)^2 \cdot \chi_{\bar{r} + \eta > 0} + 0 \cdot \chi_{\bar{r} + \eta < 0} \\ &= \frac{1}{9b} \cdot (\bar{r}^2 + \eta^2 + 2\bar{r} \cdot \eta) \cdot \chi_{\bar{r} + \eta > 0} \end{aligned}$$

Therefore, the expected profit for each player before the revelation on the η information is:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{-\bar{r}}^{+\infty} \frac{1}{9b} \cdot (\bar{r}^2 + \eta^2 + 2\bar{r} \cdot \eta) f(\eta) \cdot d\eta \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{9b} \times \int_{-\bar{r}}^{+\infty} (\bar{r}^2 + \eta^2 + 2\bar{r} \cdot \eta) \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{9b} \times \left[\bar{r}^2 \cdot \int_{-\bar{r}}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta + 2\bar{r} \cdot \left[-\sigma^2 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\bar{r}}^{+\infty} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{9b} \times \int_{-\bar{r}}^{+\infty} \eta^2 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{9b} \times \left[\bar{r}^2 \cdot \int_{-\bar{r}}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta + 2\bar{r} \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{\bar{r}^2}{2\sigma^2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{9b} \times \sigma^2 \left[-\bar{r} \cdot e^{-\frac{\bar{r}^2}{2\sigma^2}} + \int_{-\bar{r}}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta \right] \\ \Pi &= \frac{1}{9b} \times \left[(\bar{r}^2 + \sigma^2) \cdot \int_{-\bar{r}}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta + \frac{\bar{r} \cdot \sigma^2}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{r}^2}{2\sigma^2}} \right] \end{aligned}$$

Thus:

$$\Pi^{C,P}(\bar{r}) = \frac{1}{9b} \times \left[(\bar{r}^2 + \sigma^2) \cdot G(-\bar{r}) + \frac{\bar{r} \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{r}^2}{2\sigma^2}} \right]$$

■

Proof of lemma 2:

Given the reaction curve of the follower player, the leader's ex post profit is:

$$\begin{aligned}
\Pi_L^{S,P}(\bar{r} + \eta, q_L) &= (\bar{r} + \eta - b \cdot (q_L + q_F^*(q_L))) \cdot q_L \cdot \chi_{\bar{r} + \eta - b \cdot q_L > 0} \\
&\quad + (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \cdot \chi_{\bar{r} + \eta - b \cdot q_L < 0} \\
&= \left(\bar{r} + \eta - b \cdot \left(q_L + \frac{\bar{r} + \eta - b \cdot q_L}{2 \cdot b} \right) \right) \cdot q_L \cdot \chi_{\eta > b \cdot q_L - \bar{r}} \\
&\quad + (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \cdot \chi_{\eta < b \cdot q_L - \bar{r}} \\
&= \left(\frac{\bar{r} + \eta}{2} - b \cdot \frac{q_L}{2} \right) \cdot q_L \cdot \chi_{\eta > b \cdot q_L - \bar{r}} + (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \cdot \chi_{\eta < b \cdot q_L - \bar{r}} \\
&= (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L - \frac{1}{2} \cdot (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \chi_{\eta > b \cdot q_L - \bar{r}}
\end{aligned}$$

We had:

$$\begin{aligned}
\Pi_L^{S,U}(\bar{r} + \eta, q_L) &= \frac{1}{2} \cdot (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \\
\Pi_L^{S,P}(\bar{r} + \eta, q_L) - \Pi_L^{S,U}(\bar{r} + \eta, q_L) &= \frac{1}{2} \cdot (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot q_L \chi_{\eta \leq b \cdot q_L - \bar{r}}
\end{aligned}$$

Thus we have $\Pi_L^{S,P}(\bar{r} + \eta, q_L) < \Pi_L^{S,U}(\bar{r} + \eta, q_L)$, so that by integrating on η : $\Pi_L^{S,P}(q_L) < \Pi_L^{S,U}(q_L)$.

The expected profit of the leader is:

$$\begin{aligned}
\Pi_L^{S,P}(q_L) &= \int \Pi_L(\bar{r} + \eta, q_L) \cdot f(\eta) \cdot d\eta \\
&= (\bar{r} - b \cdot q_L) \cdot q_L - \frac{1}{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot q_L \cdot \int_{b \cdot q_L - \bar{r}}^{+\infty} (\bar{r} + \eta - b \cdot q_L) \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot d\eta \\
&= (\bar{r} - b \cdot q_L) \cdot q_L - \frac{1}{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot q_L \cdot (\bar{r} - b \cdot q_L) \int_{b \cdot q_L - \bar{r}}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot d\eta \\
&\quad - \frac{1}{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot q_L \cdot \int_{b \cdot q_L - \bar{r}}^{+\infty} \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot d\eta \\
&= (\bar{r} - b \cdot q_L) \cdot q_L - \frac{1}{2} \cdot (\bar{r} - b \cdot q_L) \cdot q_L \cdot G(b \cdot q_L - \bar{r}) \\
&\quad - \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot q_L \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}}
\end{aligned}$$

Finally, the profit function of the leader is:

$$\begin{aligned}\Pi_L^{S,P}(q_L) &= \frac{1}{2} (\bar{r} \cdot q_L - b \cdot q_L^2) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})] \\ &\quad - \sigma \frac{q_L}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}}\end{aligned}$$

■

Proof of proposition 2.4.2:

We can maximize the expected profit in q_L :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_L} \Pi_L^{S,P}(q_L) &= \frac{1}{2} (\bar{r} - 2 \cdot b \cdot q_L) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\bar{r} \cdot q_L - b \cdot q_L^2) \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial q_L} (G(b \cdot q_L - \bar{r})) \right] \\ &\quad - \sigma \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \sigma \frac{q_L}{4 \cdot \sigma^2 \sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot b \cdot (b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{r} - 2 \cdot b \cdot q_L) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\bar{r} \cdot q_L - b \cdot q_L^2) \cdot \left[\frac{b}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] - \sigma^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot b \cdot q_L \cdot (b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_L} \Pi_1^{S,P}(q_L) = \frac{1}{2} (\bar{r} - 2 \cdot b \cdot q_L) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})] - \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

If the first order condition holds, we have the quantity played as an implicit function defined by:

$$\frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} = \frac{1}{2} (\bar{r} - 2 \cdot b \cdot q_L) \cdot [2 - G(b \cdot q_L - \bar{r})]$$

The unicity is given by the strict concavity of the profit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial q_L^2} \Pi_1^{S,P}(q_L) &= -b.q_L \cdot [2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{r} - 2.b.q_L) \cdot \frac{\partial}{\partial q_L} G(b.q_L - \bar{r}) \\
&\quad + \frac{2\sigma(b.q_L - \bar{r})}{2.\sqrt{2\pi}2.\sigma^2} e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} \\
&= -b.q_L \cdot [2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{r} - 2.b.q_L) \cdot \left[-\frac{b}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b.q - \bar{a})^2}{2.\sigma^2}} \right] \\
&\quad + \frac{b.q_L - \bar{r}}{2.\sqrt{2\pi}.\sigma} e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} \\
&= -b.q_L \cdot [2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\
&\quad + \frac{1}{2} [\bar{r} - 2.b.q_L + 2b.q_L - 2\bar{r}] \frac{b}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b.q - \bar{a})^2}{2.\sigma^2}} \\
&= -b.q_L \cdot [2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \bar{r} \cdot \frac{b}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b.q - \bar{a})^2}{2.\sigma^2}}
\end{aligned}$$

Thus we clearly have $\frac{\partial^2}{\partial q_L^2} \Pi_L^{S,P}(q_L) < 0$

■

Proof of corollary 2.4.1:

If we take the limit of the implicit function defining $q_L^{S,P}$, we can notice that the left term decreases to 0.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b.q_L^{S,P} - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} = 0$$

As the right side of the right term stays positive:

$$\left[2 - G(b.q_L^{S,P} - \bar{r}) \right] > 0$$

We have:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\bar{r} - 2.b.q_L^{S,P}(\sigma)) = 0$$

Thus:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} q_L^{S,P}(\sigma) = \frac{\bar{r}}{2.b} = q_L^{S,U}$$

We also have $q_L^{S,U} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} q_L^{S,F}$ which concludes.

For the second result we first notice that the left term of the implicit function defining $q_L^{S,P}$ tends to infinity when $\sigma \rightarrow +\infty$ and the right term is bounded by \bar{r} (q_L is positive), thus there is no solution for the first order condition. Moreover, $\frac{\partial}{\partial q_L} \Pi_L^{S,P}(q_L)$ is clearly negative for q_L large enough so that finally we can conclude that the constraint on the maximization problem is binding that is $q_L^{S,P} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} 0$.

■

Proof of corollary 2.4.2:

We are going to differentiate the implicit equation on σ as $q_L^{S,P}$ is a function of σ . We define $\Psi(q_L) = 0$ as an implicit function to define $q_L^{S,P} = q_L^*$.

$$\Psi(q_L) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} + (2.b.q_L - \bar{r}) \cdot [2 - G(b.q_L - \bar{r})]$$

We defined q_L^* as $\Psi(q_L^*) = 0$ thus by the implicit function theorem and if we want to differentiate this equation on σ as if we had $\Psi(q_L^*, \sigma) = 0$

$$\frac{\partial q_L^*}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_L}(q_L^*, \sigma) + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(q_L^*, \sigma) = 0$$

We have:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial q_L}(q_L, \sigma) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_L} \left[e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} \right] + 2.b[2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\ &\quad - (2.b.q_L - \bar{r}) \cdot \frac{\partial G}{\partial q_L}(b.q_L - \bar{r}) \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b}{\sigma^2} (b.q_L - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} + 2.b[2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\ &\quad + (2.b.q_L - \bar{r}) \frac{b}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} \\ &= \frac{b}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} (\bar{r} - b.q_L) \cdot e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} + 2.b[2 - G(b.q_L - \bar{r})] \\ &\quad + \frac{b}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot (2.b.q_L - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b.q_L - \bar{r})^2}{2.\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_L}(q_L^*, \sigma) = \frac{b^2 \cdot q_L^*}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + 2 \cdot b [2 - G(b \cdot q_L^* - \bar{r})]$$

We notice that $\frac{\partial G}{\partial q_1}(q_L^*, \sigma) > 0$, which is the condition to use the implicit function.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(q_L, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] \\ &\quad - (2 \cdot b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} [G(b \cdot q_L - \bar{r})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot (2 \cdot b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot (b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &= \frac{\sigma^2 + (b \cdot q_L - \bar{r})^2 - (2 \cdot b \cdot q_L - \bar{r}) \cdot (b \cdot q_L - \bar{r})}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \end{aligned}$$

Thus

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(q_L, \sigma) = \frac{\sigma^2 + b \cdot q_L \cdot (\bar{r} - b \cdot q_L)}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Finally

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_L^*}{\partial \sigma} \cdot \left[\frac{b^2 \cdot q_L^*}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + 2 \cdot b [2 - G(b \cdot q_L^* - \bar{r})] \right] &= \frac{-b \cdot q_L^* \cdot (\bar{r} - b \cdot q_L^*) - \sigma^2}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ \frac{\partial q_L^*}{\partial \sigma} \cdot \left[\frac{b \cdot q_L^*}{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + 2 - G(b \cdot q_L^* - \bar{r}) \right] &= \frac{b \cdot q_L^* \cdot (b \cdot q_L^* - \bar{r}) - \sigma^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot b \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \end{aligned}$$

The right side of the left term is positive, moreover $q_L^* < \frac{\bar{r}}{2 \cdot b} < \frac{\bar{r}}{b}$ so indeed $(\bar{r} - b \cdot q_L^*) > 0$ thus:

$$\frac{b \cdot q_L^* \cdot (b \cdot q_L^* - \bar{r}) - \sigma^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot b \cdot \sqrt{2\pi}} < 0$$

We can conclude that $\frac{\partial q_L^*}{\partial \sigma} < 0$. ■

Proof of proposition 2.4.3:

If the follower has only the partial information, then he plays the following quantity $q_L^{S,U} = \frac{\bar{r}}{2b}$.

We could prove this proposition by using the last two results, but we can prove it directly by studying the sign of the terms of the equation defining q_L^* :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(bq_L^* - \bar{r})^2}{2\sigma^2}} = (\bar{r} - 2b \cdot q_L^*) \cdot [2 - G(b \cdot q_L^* - \bar{r})]$$

We assume that q_L^* exists otherwise $q_L^* = 0$ and the assumption is clearly verified. The left term is always strictly positive, the last one is also positive as $G(b \cdot q_L^* - \bar{r}) \leq 1$. So we can conclude that we will have:

$$\begin{aligned} \bar{r} - 2b \cdot q_L^* &> 0 \\ q_L^* &< \frac{\bar{r}}{2b} \end{aligned}$$

And finally we have $q_L^* < q_L^{S,U}$.

We can now prove the second part of the proposition. We need to show that: $\Pi_L^{S,P} \leq \Pi_L^{S,U}$. We already obtained that:

$$\forall q_L : \Pi_L^{S,P}(q_L) < \Pi_L^{S,U}(q_L) \leq \Pi_L^{S,U}$$

We conclude:

$$\begin{aligned} \max_{q_L} [\Pi_L^{S,P}(q_L)] &\leq \Pi_L^{S,U} \\ \Pi_L^{S,P} &\leq \Pi_L^{S,U} \end{aligned}$$

■

Proof of corollary 2.4.3:

The first result is obtained by deriving the leader's profit at equilibrium:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \left(\Pi_L^{S,P} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_L} \left(\Pi_L^{S,P} \right) (q_L^*, \sigma) \cdot \frac{\partial q_L^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\Pi_L^{S,P} \right) (q_L^*, \sigma) \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\Pi_L^{S,P} \right) (q_L^*, \sigma) \\
&= -\frac{1}{2} (\bar{r} \cdot q_L^* - b \cdot q_L^{*2}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [G(b \cdot q_L^* - \bar{r})] - \frac{q_L^*}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] \\
&= -\frac{1}{2} (\bar{r} \cdot q_L^* - b \cdot q_L^{*2}) \frac{1}{\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot (b \cdot q_L^* - \bar{r}) \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\
&\quad - \frac{q_L^*}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \left[e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] \\
&= \frac{q_L^*}{2 \cdot \sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot [(\bar{r} - b \cdot q_L^*)^2 - \sigma^2 - (b \cdot q_L^* - \bar{r})^2] \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\
&= -\frac{q_L^*}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b \cdot q_L^* - \bar{r})^2}{2 \cdot \sigma^2}} < 0
\end{aligned}$$

For the computation of the second player's profit, we use the same methodology as before (complete proof is available on request).

Finally when σ increases, the quantity played by the first player is decreasing, thus the residual demand that the incumbent is leaving to the follower is increasing in expectation. Therefore, the follower is facing a bigger market with a monopoly power on it. As a result, the volatility σ of this residual demand is higher, which improves more the follower's expected profit.

■

Capacity Constrained Cournot-Nash Equilibrium : *A Simple Formula*

C. Caron*, J-A. Laye†

Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique

December 2003 (initial version December 2002)

Abstract

We propose an explicit formula for computing Cournot-Nash equilibrium for several firms with capacity constraints in a multi-market context. For linear demand and cost functions, we establish the non-trivial relationship between capacity constrained Cournot-Nash equilibrium and the projection over the set of constraints of unconstrained equilibrium. We show that solving capacity constrained Cournot-Nash equilibrium is equivalent to finding the zero of a simple function and we give a solution to this auxiliary problem.

Key words: Computational economics, Cournot competition, capacity constraints.

*Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 1 rue Descartes, 75005 Paris.
caron@poly.polytechnique.fr.

†Laboratoire d'Ecocométrie de l'Ecole Polytechnique, 1 rue Descartes, 75005 Paris.
laye@poly.polytechnique.fr.

1 Introduction

Considering capacity constraints in a context of imperfect competition has been motivated by the strategic problems that arise in many industrial sectors about the impact of production capacities on market shares. These questions arise in many industrial sectors of commodities where the product is quite homogenous and the most crucial strategic choices are the investments for production capacity. The problem faced by the managers lies on the fact that the production is limited by a constraint that appears exogenous when the competition in quantity takes place. In these sectors the production capacity is related to investment choices and technology set several decades before and are fixed for large periods of time. It is for example the case in the wine industry where the decisions on quantities to supply are constrained by the planted surfaces that cannot be adjusted in each wine campaign (see Soler, Tanguy (1998)). The choice of future capacities having a dramatic impact on future competitive behaviors, and due to the irreversibility and the importance of the investments, the related strategic choices are generally the subject of deep analysis. To give another example, in the cement industry the competition among firms requires decision support tools able to estimate as precisely as possible the consequences of investments on capacity (see d'Apremont, Encaoua, Ponssard (1999)). From a managerial point of view, the kind of analysis we propose can bring a better understanding of the interactions in a competitive context, when capacity constraints play a critical role. Our model can even, if the conditions of realism and tractability are met, be used as a decision support tool.

From a theoretical point of view, the fundamental impact of the introduction of capacity constraints in a price competition model has been studied by Kreps and Sheinkman (1983). The authors show that in a two-stage game with choice of capacity followed by a price competition, and under some rationing rules, the equilibrium that is obtained is identical to an equilibrium in a competition in quantity, without capacity constraints. For a competition in quantities the capacities are trivially adjusted in order to be able to supply the quantities at Cournot-Nash equilibrium. Nevertheless, other economic analysis show that it can be pertinent

to introduce capacity constraints in a Cournot-Nash equilibrium depending on the way we consider information and on the timing of the game. For example, Gab-szewicz and Poddar (1996) define a two-stage game where two symmetric firms choose their capacity in a context of imperfect information on the demand. In the first stage, the firms choose their capacity having only priors on the distribution of the demand characteristics, and in the second stage they define the quantity they will produce once the information is revealed, being constrained by the choice of capacity made in the first stage. Thus, the last stage is a Cournot game with capacity constraints.

Another stream of the literature focus on computing equilibria in more complex settings than those presented in the simple theoretical models of imperfect competition. The authors deal with mathematical difficulties depending on the way the model is complexified, and look for algorithmic methods that allow for example to compute Cournot-Nash equilibria for complex cost functions. Tobin (1992) explore the reaction of a Cournot-Nash Equilibrium to a Stackelberg firm and analyze the effect of this reaction on the uniqueness of the Stackelberg-Cournot-Nash equilibrium, providing efficient algorithm for finding the equilibrium. Kemfert and Tol (2000) focus on the introduction of constraints in a Cournot model applied to the electricity market and compute the constrained equilibrium with algorithms based on Gabay and Moulin (1980) that use variational inequalities methods and Murphy, Sherali and Soyster (1986) that use fixed point methods.

The same goes in the situation we want to describe in this paper since we propose an algorithmic solution. Our objective is two-fold: (1) to introduce enough complexity in the competition model (multi-market and multi-producer context, differentiation in firms costs, capacity constraints), (2) to remain tractable with a low algorithmic complexity, and understandable in the sense of being able to give an interpretation of the results we obtain, thanks to an explicit formula for the constrained equilibrium.

In the model we present we consider the case of linear functions of cost and demand.

We also assume that the capacity constraints are fixed. We consider competition among producers in a multi-market context, each producer having different production costs and distribution costs depending on which market is supplied.

Combining capacity constraints with multi-market context creates the complexity of the related equilibrium by generating links between players through different markets. We provide tractable formulation of the constrained equilibrium using relations with the unconstrained equilibrium.

In the first part of the paper, we present a simplified model applied to two producers. In the second part of the work, after a presentation of the general model where n producers compete in quantity in m differentiated markets, we present some rules for the repartition of market shares among the competitors of a constrained producer. Like in the simple two-producer model, we establish the non-trivial relationship between constraint equilibrium quantities and the projection over the set of constraints of unconstrained equilibrium quantities. We establish that the problem is equivalent to finding the zero of an auxiliary function, for which we provide an algorithmic solution. As a result we obtain an algorithmic method for finding capacity constrained Cournot-Nash equilibrium for great scale problems.

2 A simplified model : Two firms and two markets

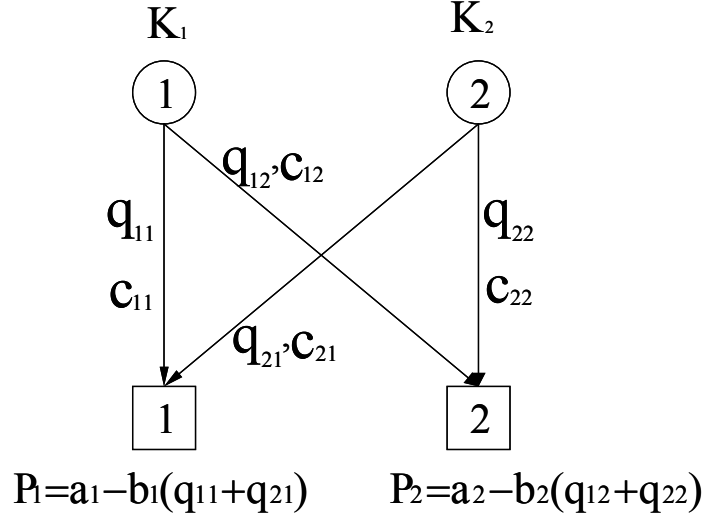
2.1 The model

We consider 2 producers competing in 2 markets. We denote by q_{ij} the quantity supplied by producer $i \in \{1, 2\}$ in market $j \in \{1, 2\}$. The price p_j for each market is an decreasing linear function of the total quantity offered in this market $q_{1j} + q_{2j}$:

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) \\ p_2 = a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) \end{cases} \quad (1)$$

Each of the two producers is able to supply both markets, under capacity constraint, i.e.:

$$\begin{cases} q_{11} + q_{12} \leq K_1 \\ q_{21} + q_{22} \leq K_2 \end{cases} \quad (2)$$



The producers are represented by circles and the markets by squares. According to the previously mentioned notations, q_{11} denotes the quantity supplied by producer 1 to the market of the market 1. This producer has a capacity constraint K_1 and incurs a cost c_{11} proportional to the quantity supplied to the market 1. We consider that c_{ij} is the sum of production costs, transportation costs, and all the other costs that are proportional to the quantity produced, and incurred by producer i when the market j is supplied. Then the cost c_{ij} is defined by the bilateral relationship between a producer and a market. This relationship is characterized by distance and tax policy among others.

We consider that the only objective of the producers is to maximize their profits:

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1) = [p_1 - c_{11}]q_{11} + [p_2 - c_{12}]q_{12} \\ \Pi_2(q_2) = [p_1 - c_{21}]q_{21} + [p_2 - c_{22}]q_{22} \end{cases} \quad (3)$$

Where q_i is the vector (q_{i1}, q_{i2}) of the quantities that producer i decides to sell to the two markets. It is also its only strategic variable.

Each producer maximizes (under capacity constraint) its profit, taking into consideration the quantities supplied on each market by its competitor. The optimization program of producer i is written as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{q_i} \Pi_i(q_i) \\ q_i \geq 0 \\ q_{i1} + q_{i2} \leq K_i \end{array} \right. \quad (4)$$

- We introduce finally some further notation:
- $q_i^{BR}(q_{-i})$: producer i 's best reply to the strategies of the rest of the producers.
- $\bar{q}_i^{BR}(q_{-i})$: producer i 's best reply with capacity constraint to the strategies of the rest of the producers.
- q_i^* : producer i 's Nash equilibrium strategy without capacity constraint.
- \bar{q}_i^* : producer i 's Nash equilibrium strategy with capacity constraints.

2.2 Equilibrium without constraints

The equilibrium without constraints is our starting point for solving equilibrium under capacity constraints.

The optimization program of producer i is now: $\max_{q_i} \Pi_i(q_i)$

By replacing the prices by their values in the expressions of profits, we find:

$$\begin{aligned} \Pi_1(q_1) &= [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{11}]q_{11} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{12}]q_{12} = \Pi_{11} + \Pi_{12} \\ \Pi_2(q_2) &= [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{21}]q_{21} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{22}]q_{22} = \Pi_{21} + \Pi_{22} \end{aligned}$$

where Π_{ij} is the part of the profit Π_i that comes from the quantity q_{ij} .

Given the properties of the profit functions (continuity, concavity), the first order condition $\frac{d\Pi_{ij}}{dq_{ij}} = 0$ gives the best reply in each market for producer i , when the quantities of its competitor are considered fixed:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{11}^{BR}(q_{21}) = (a_1 - b_1q_{21} - c_{11})/2b_1 \\ q_{12}^{BR}(q_{22}) = (a_2 - b_2q_{22} - c_{12})/2b_2 \\ q_{21}^{BR}(q_{11}) = (a_1 - b_1q_{11} - c_{21})/2b_1 \\ q_{22}^{BR}(q_{12}) = (a_2 - b_2q_{12} - c_{22})/2b_2 \end{array} \right. \quad (5)$$

This linear system of equation has a unique solution:

$$\begin{cases} q_{11}^* = (a_1 + c_{21} - 2c_{11})/3b_1 \\ q_{12}^* = (a_2 + c_{22} - 2c_{12})/3b_2 \\ q_{21}^* = (a_1 + c_{11} - 2c_{21})/3b_1 \\ q_{22}^* = (a_2 + c_{12} - 2c_{22})/3b_2 \end{cases} \quad (6)$$

We deduce the equilibrium price for both markets: $p_j^* = (a_j + c_{1j} + c_{2j})/3$ and the equilibrium profits:

$$\Pi_i^* = b_1 q_{i1}^{*2} + b_2 q_{i2}^{*2}$$

How will the introduction of capacity constraints modify the Cournot-Nash equilibrium? The following sections intend to answer to this question.

2.3 Equilibrium with capacity constraints

In this section we detail different ideas that lead to solving capacity constrained Cournot-Nash equilibrium: (1) relationship between best reply function and its projection over the set of constraints, (2) relationship between constrained and unconstrained equilibria, (3) reduction of the problem to finding the zero of a function, and (4) solution of this auxiliary problem.

2.3.1 Constained best reply functions

First of all we attempt to know how the introduction of capacity constraints influences the best reply functions. We first suppose that $b_1 = b_2 = 1$, but we will show later how to relax this simplifying assumption¹.

Lemma 1 *The best reply of a capacity constrained producer is the projection over the set of constraints of its best reply without constraints, i.e.:*

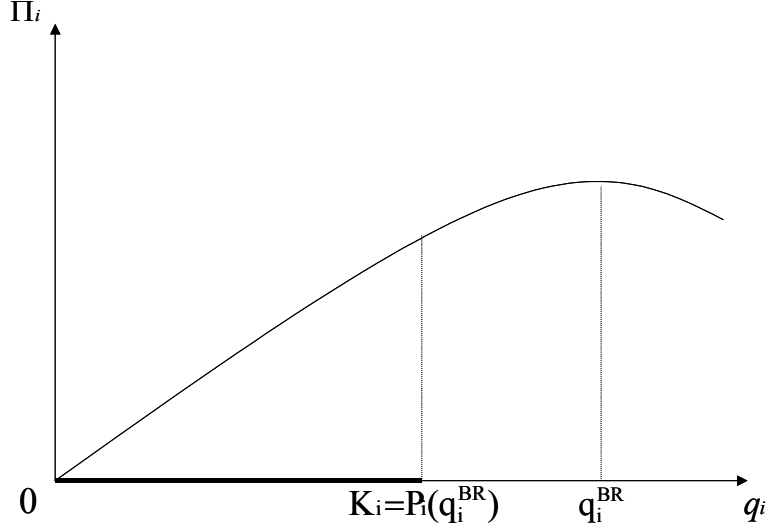
$$\bar{q}_i^{BR} = P_{S_i}(q_i^{BR}) \quad (7)$$

¹In fact this assumption is equivalent to $b_j = b \in \mathbb{R}_+^*$ for all j , but we normalize this constant by 1 in order to simplify the expressions.

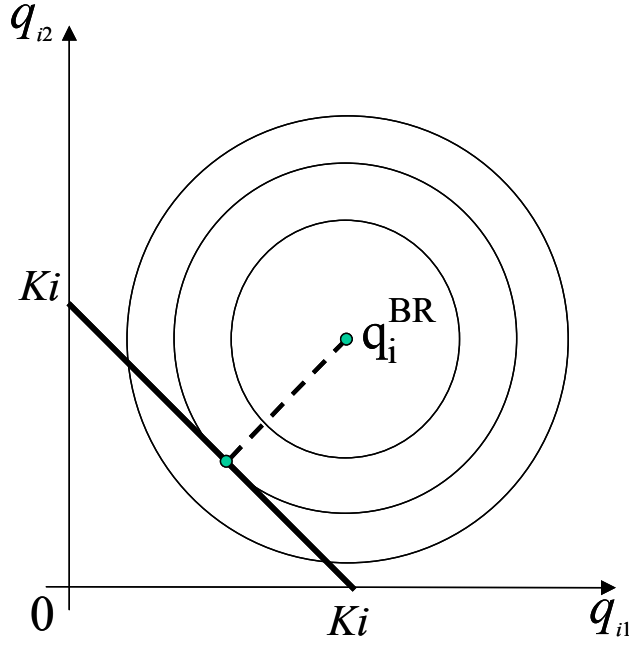
where P_{S_i} is the projection over:

$$S_i = \{q \in \mathbb{R}_+^2, \quad q_{i1} + q_{i2} \leq K_i\} \quad (8)$$

Proof. This result is trivial if we consider two producers competing in a single market. The profit of one of them when the quantity of its competitor is fixed is in this case a parabola and the set of constraints is the segment $[0, K_i]$.



It is therefore evident that if a producer is capacity constrained, its best reply is to supply the quantity K_i to the market if $K_i < q_i^{BR}$, to abandon the market if $q_i^{BR} < 0$, and to choose the quantity q_i^{BR} if $q_i^{BR} \in [0, K_i]$. To put it in another way, its best reply is the projection of q_i^{BR} (best reply without constraint) over $[0, K_i]$. When we go to dimension 2 (2 markets), and as we will see later for higher dimensions, this result remains true. In the two producers and two markets case we have considered until now, the profit is always a decreasing function with the distance from unconstrained optimum (paraboloid), and the isoprofit curves are balls for the euclidean norm:



The point of S_i that maximizes the profit is then the closest point to q_i^{BR} , i.e. its projection over S_i . Existence and uniqueness of the projection are ensured by the fact that S_i is close, bounded and convex in finite dimension (homothetic of ratio K_i of the simplex of \mathbb{R}^2). ■

2.3.2 Constrained and unconstrained equilibria

The next step that is essential for solving our problem is to express the constrained Cournot-Nash equilibrium in function of the unconstrained Cournot-Nash equilibrium.

Proposition 2 *The vectors \bar{q}_1^* and \bar{q}_2^* of the quantities supplied by each producer to the 2 markets at the Nash equilibrium with capacity constraints is solution of the system:*

$$\begin{cases} \bar{q}_1^* = P_{S_1}[q_1^* - (\bar{q}_2^* - q_2^*)/2] \\ \bar{q}_2^* = P_{S_2}[q_2^* - (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2] \end{cases} \quad (9)$$

Proof. This results from the linearity of the best reply function and Lemma 1 that links the best reply under constraints to the best reply without constraints

via the projection over S_i , and from the fact that the Nash equilibrium is the fixed point of the best reply functions.

A detailed description of the demonstration is given later for the general case where it is shown that $q_i^{BR} = q_i^* - \sum_{k \neq i} (q_k - q_k^*)/2$. ■

Thanks to the system that we have obtained, it is already possible to say that in a constrained Nash equilibrium, if producer 2 does not reach, *ex-post*, its constraint (i.e. $\bar{q}_2^* = P_{S_2}[q_2^* - (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2] = q_2^* - (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2$), while producer 1 reaches its constraint, it means that producer 2 takes profit of half of the market share freed by its competitor in the different markets. At the same time, due to orthogonal projection, and if no market is completely abandoned by reducing quantities, producer 1 reduces its quantities by the same amount on the two markets. This result can appear counterintuitive since the costs over the different markets are differentiated, but it results from the symmetric shape of the profit function (see scheme of paraboloids). We will exploit and extend this type of properties in section 10. At this step we have only expressed the strategy of a producer in function of the strategy of its competitor. This gives a system of equations that characterizes the Nash equilibrium. Unfortunately, due to the projections, solving this system is not trivial and requires further steps that we describe in the following sections.

2.3.3 An equivalent problem

We show that it is possible to solve the system of equations by reducing it to finding the zero of a simple function.

Proposition 3 *Let $\Delta = (q_1^* - \bar{q}_1^*) + (q_2^* - \bar{q}_2^*)$ be the sum of the differences between the quantity vectors at equilibrium without and with constraints. Finding Nash equilibrium under capacity constraints is equivalent to solving in Δ the equation:*

$$\Psi(\Delta) = \Delta + P_{t_{-q_1^*}(S_1)}(\Delta) + P_{t_{-q_2^*}(S_2)}(\Delta) = 0 \quad (10)$$

where $P_{t_{-q_i^*}(S_i)}$ is the projection over the translation of S_i by vector $-q_i^*$.

Proof. Proposition 1 for each of the two players gives:

$$\bar{q}_1^* = P_{S_1}[q_1^* + \Delta/2 + (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2] = P_{S_1}[q_1^*/2 + \Delta/2 + \bar{q}_1^*/2] \quad (11)$$

$$\bar{q}_2^* = P_{S_2}[q_2^* + \Delta/2 + (\bar{q}_2^* - q_2^*)/2] = P_{S_2}[q_2^*/2 + \Delta/2 + \bar{q}_2^*/2] \quad (12)$$

Let $v_1 = (q_1^* + \Delta + \bar{q}_1^*)/2$ and $v_2 = (q_2^* + \Delta + \bar{q}_2^*)/2$. Therefore, $\bar{q}_1^* = P_{S_1}(v_1) = 2v_1 - q_1^* - \Delta$ and $\bar{q}_2^* = P_{S_2}(v_2) = 2v_2 - q_2^* - \Delta$

We isolate v_1 and v_2 using the following Lemma proved in the Annex:

Lemma 4 *The equation $P(v) = 2v + \alpha$ for $v, \alpha \in \mathbb{R}^2$ and P the projection over S_i has a unique solution $v = (-\alpha + P(-\alpha))/2$*

As a result, we have that $v_1 = (\Delta + q_1^* + P_{S_1}(\Delta + q_1^*))/2$ and $v_2 = (\Delta + q_2^* + P_{S_2}(\Delta + q_2^*))/2$

On the other hand we knew that $v_1 = (q_1^* + \Delta + \bar{q}_1^*)/2$ and $v_2 = (q_2^* + \Delta + \bar{q}_2^*)/2$ therefore:

$$\begin{cases} \bar{q}_1^* = P_{S_1}(\Delta + q_1^*) \\ \bar{q}_2^* = P_{S_2}(\Delta + q_2^*) \end{cases} \quad (13)$$

but $P_{S_i}(\Delta + q_i^*) = P_{t_{-q_i^*}(S_i)}(\Delta) + q_i^*$ where $P_{t_{-q_i^*}(S_i)}$ is the projection over the translation of S_i by vector $-q_i^*$.

therefore:

$$\begin{cases} q_1^* - \bar{q}_1^* + P_{t_{-q_1^*}(S_1)}(\Delta) = 0 \\ q_2^* - \bar{q}_2^* + P_{t_{-q_2^*}(S_2)}(\Delta) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Finally, since $\Delta = (q_1^* - \bar{q}_1^*) + (q_2^* - \bar{q}_2^*)$, by adding these two equations we find:

$$\Psi(\Delta) = \Delta + P_{t_{-q_1^*}(S_1)}(\Delta) + P_{t_{-q_2^*}(S_2)}(\Delta) = 0 \quad (15)$$

■

We can now say that if we know the vector of differences in quantities supplied to the different markets, resulting from the introduction of capacity constraints, then the constrained equilibrium can be obtained thanks to a relatively simple equation $\bar{q}_i^* = P_{S_i}(\Delta + q_i^*)$. We can remark that we find the same vector Δ in the expression of any producer. It is this formula that allows to find the constrained equilibrium, once the zero of the function Ψ is found.

2.3.4 Calculation of constrained equilibrium

We reduced the capacity constrained Nash equilibrium problem to finding the zero of the function Ψ .

Proposition 5 *The solution of $\Psi(\Delta) = 0$ exists and is unique.*

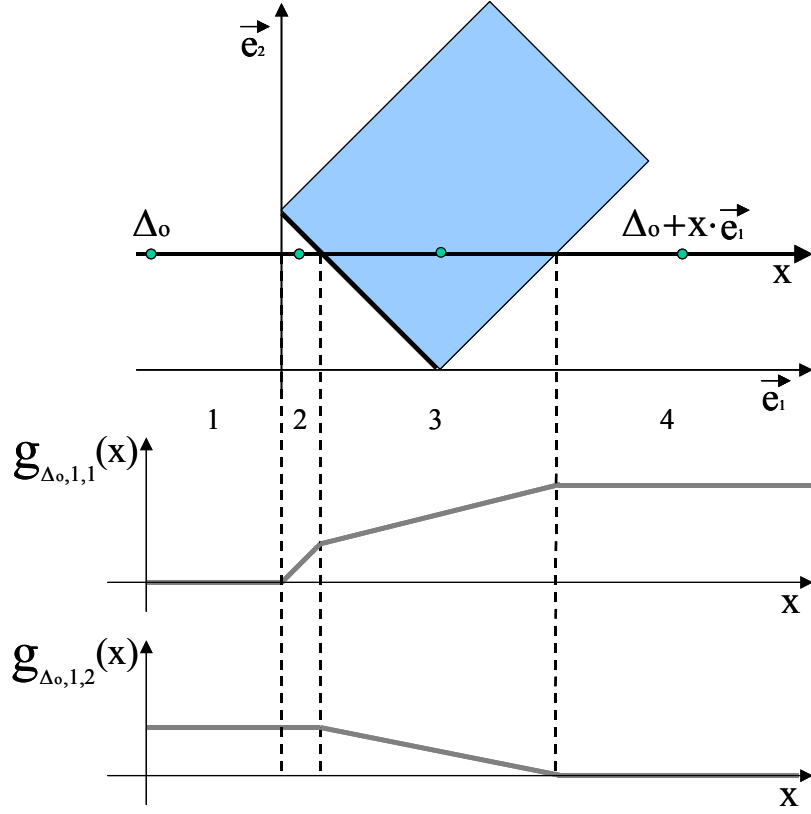
Proof. We take any $\Delta_0 \in \mathbb{R}^2$ and we observe how the j -th component of Ψ varies when we increase the i -th component of Δ_0 by x .

$$\begin{aligned} \text{Let be } f_{\Delta_0,i,j}(x) &= \Psi(\Delta_0 + x\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \\ &= (\sum_{i=1}^n P_{t_{-q_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x\vec{e}_i)) \cdot \vec{e}_j + (\Delta_0 + x\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \\ \text{and } g_{\Delta_0,i,j}(x) &= P_{t_{-q_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \end{aligned}$$

To illustrate the argument, we describe in the figure below the case where we start from a point Δ_0 of coordinates (x_0, y_0) to which we increase the first component by a quantity x . We observe how the projection over the translation of the set of constraints $P_{t_{-q_i^*}(S_i)}$ behaves. We first observe its first component thanks to the function $g_{\Delta_0,1,1}(x)$, then the second component thanks to $g_{\Delta_0,1,2}(x)$.

The three vertical dashed lines define four zones, numbered from 1 to 4. The limits of these zones are switching points:

- in zone 1, the points $\Delta_0 + x\vec{e}_1$ are projected over S_i on the same point $(0, y_0)$, therefore $g_{\Delta_0,1,1}(x) = 0$ and $g_{\Delta_0,1,2}(x) = y_0$.
- in zone 2, the points $\Delta_0 + x\vec{e}_1$ are in the interior of S_i , the transformation is now the identity and $g_{\Delta_0,1,1}(x)$ increases with the same speed than x while $g_{\Delta_0,1,2}(x)$ stays in y_0 .
- in zone 3, the points $\Delta_0 + x\vec{e}_1$ belong to a band drawn in grey and are projected on the face of S_i defined by the capacity constraint K_i . The first component of the projection increases with x but with a slope inferior to 1 (1 was the slope in zone 2), while the second component of the projection decreases with x .
- in zone 4, the points $\Delta_0 + x\vec{e}_1$ are projected in a same point $(K_i, 0)$, therefore $g_{\Delta_0,1,1}(x) = K_i$ and $g_{\Delta_0,1,2}(x) = 0$.



The results obtained remain true for any initial points Δ_0 which second component $y_0 \in [0, K_i]$

We repeat this study for initial points Δ_0 situated in the two other regions of the space, i.e. so that $y_0 < 0$ and so that $y_0 > K_i$.

We also observe what happens when we increase the second component of Δ_0 , also in the three configurations where $x_0 < 0$, $x_0 \in [0, K_i]$ and $x_0 > K_i$.

The general study of g reveals that the same phenomenon occurs for any Δ_0 . We can deduce from this study the behavior of function f :

if $i \neq j$ then $\frac{dg}{dx} \leq 0$ therefore $\frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 0 \leq 0$

if $i = j$ then $\frac{dg}{dx} \geq 0$ therefore $\frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 1 > 0$

We see that from any point of \mathbb{R}^2 , by moving in the direction \vec{e}_i , we strictly increase the i -th component of Ψ while we reduce the other component.

Method for finding Δ : the method consists in cancelling out one component of $\Psi(\Delta)$ at a time.

Let $L_i = \{x \in \mathbb{R}^2 / \Psi(x) \cdot \vec{e}_i = 0\}$ be the set of x so that the i -th component of Ψ is 0. Δ is in the intersection of L_1 and L_2 .

S_i being bounded, we can find a vector Δ_0 so that $\Psi(\Delta_0) \cdot \vec{e}_i \leq 0$ for every i .

We increase the first component by a quantity x until $\Psi(\Delta_0 + x\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = 0$ thanks to the continuity and the strict increasing of f when $i = j$. By doing this, we find a point Δ_1 of L_1 .

We iterate alternatively this operation along both components. On each iteration we cancel out a component while we reduce the other since if $i \neq j$ then $\frac{df}{dx} \leq 0$.

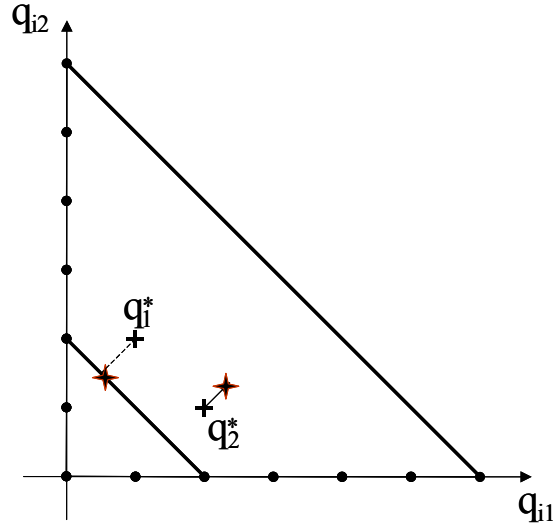
The components of the series (Δ_n) are an increasing series, upper bounded by the level lines L_i that are also upper bounded. The series is therefore convergent. At the limit: $\Delta_{(\infty)} \in L_1 \cap L_2$ ■

2.3.5 Application

To illustrate the method we consider a simple example. We assume that producer 1 and producer 2 have production capacities $K_1 = 2$ and $K_2 = 6$. They compete in two markets characterized by demand parameters $a_1 = a_2 = 6$, $b_1 = b_2 = 1$ and their costs for each market are $c_{11} = c_{22} = 2$, $c_{12} = c_{21} = 1$. At equilibrium without constraints the producers choose the quantities:

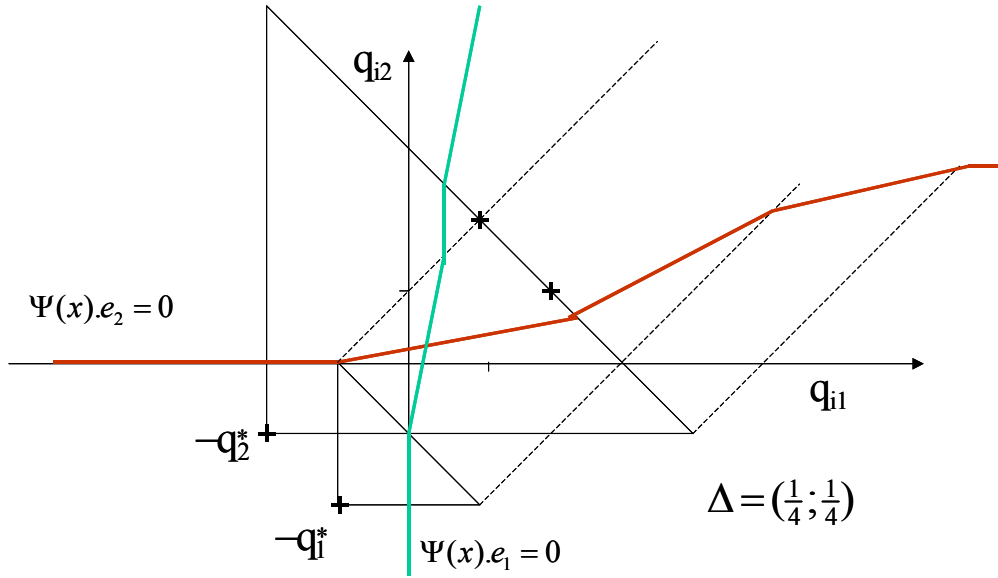
$$\left\{ \begin{array}{l} q_{11}^* = (a_1 + c_{21} - 2c_{11})/3b_1 = (6 + 1 - 4)/3 = 1 \\ q_{12}^* = (a_2 + c_{22} - 2c_{12})/3b_2 = (6 + 2 - 2)/3 = 2 \\ q_{21}^* = (a_1 + c_{11} - 2c_{21})/3b_1 = (6 + 2 - 2)/3 = 2 \\ q_{22}^* = (a_2 + c_{12} - 2c_{22})/3b_2 = (6 + 1 - 4)/3 = 1 \end{array} \right. \quad (16)$$

$q_1^* = (1, 2)$, $q_2^* = (2, 1)$.



We have shown that Cournot-Nash equilibrium with capacity constraints exists and is unique and satisfies the equation $\bar{q}_i^* = P_{S_i}(q_i^* + \Delta)$.

It is necessary to find the vector Δ , so that $\Psi(\Delta) = 0$. By drawing the curves where the first and the second component of Ψ are 0, we find Δ as intersection of these curves². We find $\Delta = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.



²For greater scale problems it is necessary to implement the method described in the previous section to find Δ .

In this example Δ is colinear to $(1, 1)$ thus orthogonal to the face defined by the capacity constraint, then, for producer 1, $P_{S_1}(u_1^* + \Delta) = P_{S_1}(u_1^*)$. When Δ is not colinear to $(1, 1)$, $P_{S_i}(u_i^* + \Delta) \neq P_{S_i}(u_i^*)$. This means that in general capacity constrained optimum does not coincide with the projection of constrained optimum.

In this example we find:

$$\bar{u}_1^* = P_{S_1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 25 \\ 0, 25 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0, 5 \\ 1, 5 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{u}_2^* = P_{S_2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 25 \\ 0, 25 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2, 25 \\ 1, 25 \end{pmatrix} \quad (18)$$

We verify that producer 2, unconstrained *ex-post* in capacity, takes profit of half of the quantities freed by its competitor due to its constraint.

2.4 Generalization for differentiated markets

In this section we want to show that the results we obtained are robust when we consider markets so that $b_1 \neq b_2$ just by modifying the definition of the set S_i over which the projections are made.

Lemma 6 *When we do not suppose that b_j is the same for each market j , "the best reply function of a capacity constrained producer is:*

$$\bar{u}_i^{BR} = P_{S_i}(u_i^{BR}) \quad (19)$$

where $u_{ij} = \sqrt{b_j} q_{ij}$ and P_{S_i} is the projection over:

$$S_i = \{u \in \mathfrak{R}_+, u_{i1}/\sqrt{b_1} + u_{i2}/\sqrt{b_2} \leq K_i\} \quad (20)$$

Proof. The profit of producer i is:

$$\begin{aligned} \Pi_1(q_1) &= [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{11}]q_{11} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{12}]q_{12} \\ &= -b_1 q_{11}^2 + q_{11}[a_1 - b_1 q_{21} - c_{11}] - b_2 q_{12}^2 + q_{12}[a_2 - b_2 q_{22} - c_{12}] \end{aligned}$$

As the isoprofit curves are now ellipsoids defined by:

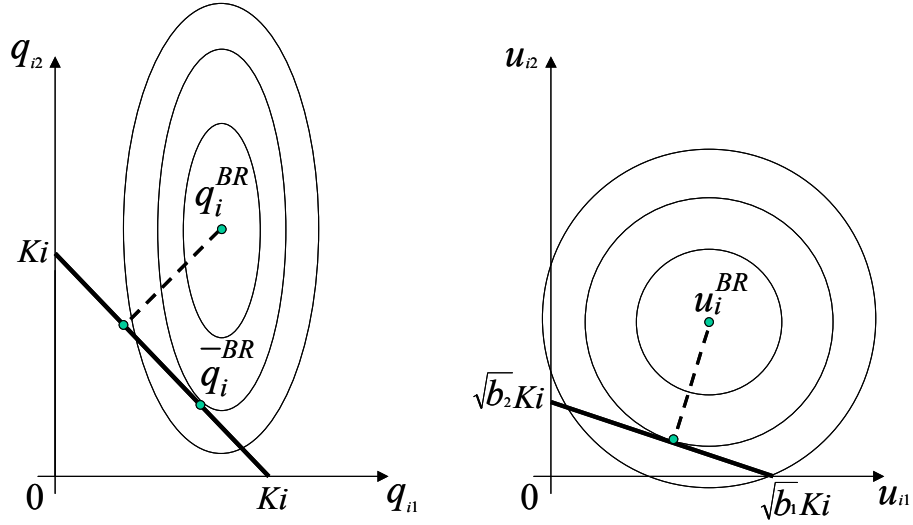
$$(-b_1 q_{11}^2 + \alpha q_{11}) + (-b_2 q_{12}^2 + \alpha q_{12}) = cst$$

the maximisation problem would imply that under constraints the optimal point does not coincide with the projection on the set defined by the constraints. In order to get these points to coincide we should, if possible, transform the ellipsoids into circles, which may be done by means of the pertinent change of variables. Let us define $u_{1j} = \sqrt{b_j}q_{1j}$ that makes quantities comparable in terms of profit in the two markets, then:

$$(-u_{11}^2 - \alpha' u_{11}) + (-u_{12}^2 - \alpha' u_{12}) = cst$$

and the constraint is now: $u_{11}/\sqrt{b_1} + u_{12}/\sqrt{b_2} \leq K_1$

We apply the same variable change to the quantities of producer 2.



In this new system of coordinates the isoprofit curves are, just like in the case where $b_1 = b_2$, balls for the euclidean norm (right scheme of the figure), the profit is then a decreasing function of the distance and the point of S_i that maximizes the profit is then the closest point to u_i^{BR} , i.e. its projection over S_i . As we can see in the left scheme of the figure, when the isoprofit curves are ellipsoids, the point of tangency \bar{q}_i^{BR} does not match with the projection of the optimum without constraints. ■

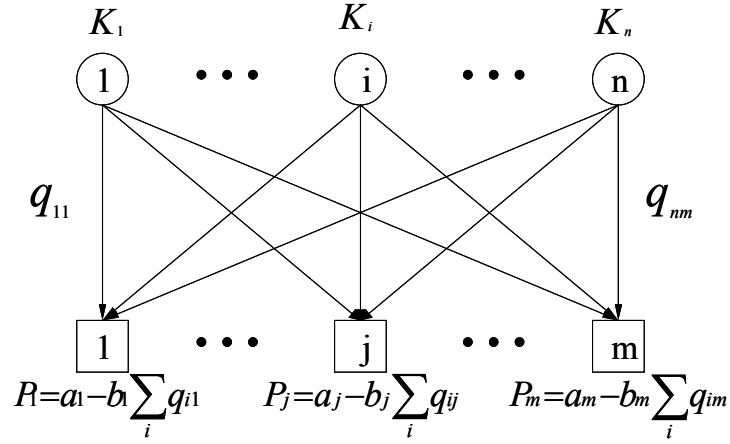
With these variable changes and the new definition of S_i , the results we obtained before remain true and we can keep the expression $\bar{u}_i^* = P_{S_i}(\Delta + u_i^*)$. We will just have to change again variables to find the equilibrium under constraints: $\bar{q}_i^* = \bar{u}_i^* / \sqrt{b_j}$.

3 Generalization to n firms and m differentiated markets

We consider n producers competing in m markets. We denote by q_{ij} the quantity supplied by producer $i \in \{1, \dots, n\}$ to market $j \in \{1, \dots, m\}$. The price p_j for each market is an decreasing linear function of the total quantity offered on this market $\sum_{i=1}^n q_{ij}$:

$$p_j = a_j - b_j \sum_{i=1}^n q_{ij} \quad (21)$$

Each producer i is able to supply any market j under capacity constraint K_i , i.e.: $\sum_{j=1}^m q_{ij} \leq K_i$.



Optimization program of producer i :

The profit of the producer is now written:

$$\Pi_i(q_i) = \sum_{j=1}^m [p_j - c_{ij}] q_{ij}$$

Where c_{ij} is the production cost of a unit of product when producer i supplies market j and q_i is the vector $(q_{ij})_{j=1..m}$, strategic variable of the producer.

Each producer maximizes (under capacity constraint) its profit, taking into consideration the quantities supplied in each market by its competitors. The optimization program of producer i is written as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{q_i} \Pi_i(q_i) \\ q_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m q_{ij} \leq K_i \end{array} \right. \quad (22)$$

We keep the same notations than in the 2 producers and 2 markets case.

3.1 Equilibrium without constraint

The formulas for unconstrained equilibrium of the 2 producers and 2 market case are generalized to n producers and m markets.

The optimization program of producer i is now: $\max_{q_i} \Pi_i(q_i)$ with $\Pi_i(q_i) = \sum_{j=1}^m [a_j - b_j \sum_{k=1}^n q_{kj} - c_{ij}] q_{ij} = \sum_{j=1}^m \Pi_{ij}$

where Π_{ij} is the part of the profit Π_i that comes from the quantity q_{ij} .

Given the good properties of the profit functions (continuity, concavity), the first order condition $\frac{d\Pi_{ij}}{dq_{ij}} = 0$ gives the best reply in each market for producer i , the quantities of its competitor been fixed: $q_{ij}^{BR}(q_{-ij}) = [a_j - b_j \sum_{k \neq i} q_{kj} - c_{ij}] / 2b_j$.

The Nash equilibrium is easily found by substitution:

$$q_{ij}^* = [a_j + \sum_{k \neq i} c_{kj} - nc_{ij}] / (n+1)b_j \quad (23)$$

We deduce the equilibrium price any market: $p_j^* = (a_j + \sum_{i=1}^n c_{ij}) / (n+1)$, and equilibrium profits: $\Pi_i^* = \sum_{j=1}^m b_j q_{ij}^{*2}$.

3.2 Equilibrium with capacity constraints

In this section we generalize to n producers and m markets the different ideas that allow to solve the problem, following the same structure than in the 2 producers and 2 markets case: (1) relationship between best reply function and its projection over the set of constraints, (2) relationship between constrained and unconstrained equilibria, (3) reduction of the problem to finding the zero of a function, and (4) solution of this auxiliary problem.

The general proofs of the following lemmas and propositions for n producers and m markets are in the Annex.

Best reply and projection:

Lemma 7 *The best reply of a capacity constrained producer is:*

$$\bar{u}_i^{BR} = P_{S_i}(u_i^{BR}) \quad (24)$$

where $u_{ij} = \sqrt{b_j}q_{ij}$ and P_{S_i} is the projection over:

$$S_i = \{u \in \mathbb{R}_+^m, \sum_{j=1}^m (u_{ij}/\sqrt{b_j}) \leq K_i\} \quad (25)$$

Remark: The projection over the simplex can be found in a maximum of m steps.

Relationship between constrained and unconstrained equilibria:

Proposition 8 *The n vectors \bar{u}_i^* of the quantities supplied by each producer i to the m markets at the Nash equilibrium with capacity constraints satisfy:*

$$\bar{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\bar{u}_k^* - u_k^*)/2) \quad (26)$$

Reduction to an equivalent problem:

Proposition 9 *Let be $\Delta = \sum_{k=1}^n (u_k^* - \bar{u}_k^*)$. Finding Nash equilibrium under capacity constraints is equivalent to solving in Δ the equation:*

$$\Psi(\Delta) = \Delta + \sum_{i=1}^n P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta) = 0 \quad (27)$$

where $P_{t_{-u_i^*}(S_i)}$ is the projection over the translation of S_i by vector $-u_i^*$.

Proposition 10 *The solution of $\Psi(\Delta) = 0$ exists and is unique.*

As we can see all the results can be generalized for more producers and more markets, which allows to use the method for larger scale problems.

4 Some repartition rules in a particular case

In this section we want to give some repartition rules for the markets shares feed by a producer when we introduce its capacity constraint starting from the unconstrained equilibrium. Afterwards, these rules will be used in a method for constrained equilibrium calculation in a particular case where the progressive introduction of capacity constraints does not force any producer (at any iteration) to abandon any market (this is equivalent to say that for any producer i whose optimum without constraints is out of the set of constraints, this optimum is projected over the interior of the face define by the capacity constraint). The following proposition is demonstrated in the Annex:

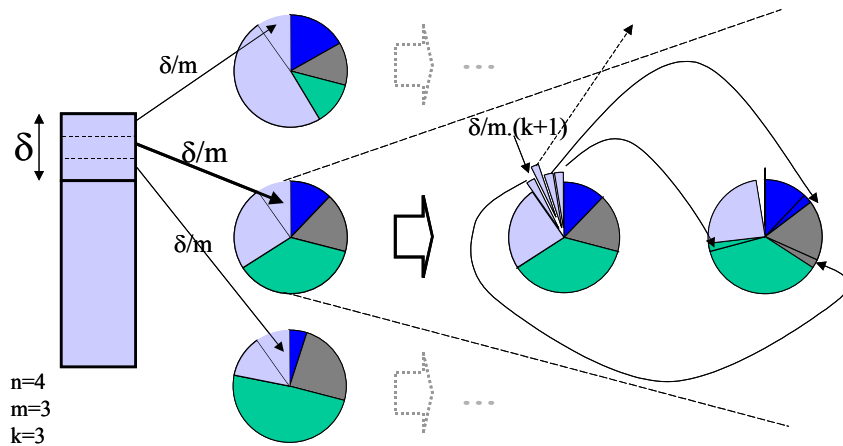
Proposition 11 “Rule of equal repartition”

If $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ so that q_i^ is out of the set of constraints, q_i^* is projected over the interior of the face define by the capacity constraint and if $b_j = 1 \forall i, j$*

When a producer has to reduce its production by δ then:

- its quantities in each of the m market are reduced by δ/m
- the producers that are already constrained are not affected by this change
- the k unconstrained producers increase their sales by $\delta/m(k+1)$

The assumption regarding b_j is not crucial since we can always normalize the quantities and think in terms of equivalent volumes from a profit point of view.



In the figure we can see how a constrained producer reduces equally its sales on the 3 markets (light grey). On the market represented in the center of the figure

we see that the quantity freed by the constrained producer is shared as follows: a fourth of this quantity is lost while the rest is equally shared among its competitors. This rule can seem counterintuitive since producers are cost differentiated over the markets.

Let's use this rule of equal repartition to solve constrained equilibrium. We consider the particular case of 4 producers and 3 markets, satisfying the assumptions (i.e. identical b_j and introduction of constraints never lead any producer to abandon any market).

The following table summarizes the characteristics (a_j, b_j) of the demand in 3 markets (M1 to M3), the costs in each market (c_{ij}) , and the capacity constraints (K_i) of 4 producers (J1 to J4).

	M1	M2	M3	
a	30	40	60	
b	1	1	1	
Cij	M1	M1	M3	Ki
J1	1	2	4	30
J2	3	8	6	21
J3	2	3	4	15
J4	3	3	7	50

The calculation of unconstrained equilibrium shows that for producer J3, the sum of the quantities exceeds its constraint $K_3 = 15$:

	M1	M2	M3	Total	Capa -Total
J1	6,80	9,20	12,20	28,20	1,80
J2	4,80	3,20	10,20	18,20	2,80
J3	5,80	8,20	12,20	26,20	-11,20
J4	4,80	8,20	9,20	22,20	27,80

The equal repartition rule allows us to easily obtain constrained equilibrium by including capacity constraints from the starting point of unconstrained equilibria. We first consider the capacity constraint of the producer whose unconstrained equilibrium is violating its capacity constraint in a greater way, and so on (by decreasing order in the distances between unconstrained equilibria and capacity constraints), until we reach the last producer.

	M1	M2	M3	Total	Capa -Total	modif
J1	7.40	9.80	12.80	30.00	0.00	0.00
J2	5.73	4.13	11.13	21.00	0.00	0.00
J3	2.07	4.47	8.47	15.00	0.00	-1.00
J4	5.90	9.30	10.30	25.50	24.50	0.50

Figure 1:

In the following tables, in each step, the producer for which the constraint is more active reduces its quantities in each market according to the equal repartition rule in order to progressively reach its constraint (reduction of δ_t at each step t). The competitors increase their quantities on each market by $\delta_t/m(k+1)$, where k is the number of unconstrained producers at this step. By increasing in this way the quantities, one of the competitors might reach its capacity constraint, in which case this producer is out of the next repartition. This guarantees to obtain the constrained equilibrium in a finite number of steps.

In this example J1, J2 and J4 increase their quantities by the same amount, due to the quantities freed by constrained producer J3 until J1 reaches its constraint:

	M1	M2	M3	Total	Capa -Total	modif
J1	7,40	9,80	12,80	30,00	0,00	1,80
J2	5,40	3,80	10,80	20,00	1,00	1,80
J3	3,40	5,80	9,80	19,00	-4,00	-7,20
J4	5,40	8,80	9,80	24,00	26,00	1,80

At second step J2 and J4 benefit of the quantities freed by J3 until J2 reaches its constraint:

	M1	M2	M3	Total	Capa -Total	modif
J1	7,40	9,80	12,80	30,00	0,00	0,00
J2	5,73	4,13	11,13	21,00	0,00	1,00
J3	2,40	4,80	8,80	16,00	-1,00	-3,00
J4	5,73	9,13	10,13	25,00	25,00	1,00

Finally J4 benefits of the quantity freed by J3 until constraint K_4 , and this gives the capacity constrained Cournot-Nash equilibrium:

Nevertheless this method has a limit. If in any step any producer abandons any market, the equal repartition rule is no longer valid to solve constrained equilibrium.

For example, we can use this method for a limit capacity $K_3 = 8,80$, by reducing the quantities of producer 3 until 8,80, corresponding to $q_{31} = 0$:

	M1	M2	M3	Total
J1	7,40	9,80	12,80	30,00
J2	5,73	4,13	11,13	21,00
J3	0,00	2,40	6,40	8,80
J4	6,93	10,33	11,33	26,53

But if the capacity of J3 was 7,80 all the quantities would have been affected in a complex way that does not follow the equal repartition rule:

	M1	M2	M3	Total
J1	7,32	9,84	12,84	30,00
J2	5,65	4,17	11,18	21,00
J3	0,00	1,90	5,90	7,80
J4	7,02	10,54	11,54	22,03

(This constraint equilibrium is obtained thanks to the general method we describe in the following sections).

5 Conclusion

Solving capacity constrained equilibria in the way we just exposed enables us, once implemented, to deal with large scale problems, since the complexities of the algorithms of projection over a close convex in finite dimension and of algorithms to find the zero of a \mathcal{R}^m to \mathcal{R}^m function such as Ψ , are negligible in front of the complexity of a best reply based algorithm that converges to an approximate solution. One of the contributions of this article is in the originality of the method for solving this kind of equilibria.

This method also brings a more intuitive interpretation of the impact of the introduction of capacity constraints by focusing on the relationship between constrained

and unconstrained equilibria. Both the simplicity of the potential interpretation of real study cases, and the low complexity of the method could lead to develop decision support tools, able to help managers in strategic analysis related to the problems that arise in the sectors that motivated this work.

6 Annex

Lemma 5 *The equation $P(v) = 2v + \alpha$ for $v, \alpha \in \mathbb{R}^m$ and P the projection over S_i has a unique solution $v = (-\alpha + P(-\alpha))/2$*

Proof. *Uniqueness:* Let us assume that there exists $v_1 \neq v_2$ solutions of $P(v) = 2v + \alpha$. By contraction of the projection over a convex set we have that $\|P(v_1) - P(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2\|$. On the other hand, $\|P(v_1) - P(v_2)\| = \|2v_1 + \alpha - 2v_2 - \alpha\| = 2\|v_1 - v_2\| \leq \|v_1 - v_2\|$. Therefore $v_1 = v_2$, a contradiction.

Existence: Let a be the point of coordinate $(-\alpha)$, $P(a)$ the projection of a over S , b the center of $[a, P(a)]$, v the coordinate of point b , and $P(b)$ the projection of b over S . We will prove that $P(b) = P(a)$:

$$d(a, P(a)) = d(a, b) + d(b, P(a))$$

$d(a, P(b)) \leq d(a, b) + d(b, P(b)) \leq d(a, b) + d(b, P(a)) = d(a, P(a))$ since $P(b)$ minimizes the distance between b and S . Thus, $d(a, P(b)) \leq d(a, P(a))$ and therefore $P(b) = P(a)$, since $P(a)$ minimizes the distance between a and S . We have $v = (-\alpha + P(-a))/2$. $P(b) = P(a)$ is equivalent to $P(v) = P(-\alpha)$, and thus, $v = (-\alpha + P(v))/2$, which is equivalent to $P(v) = 2v + \alpha$. Hence, v is a solution of the equation. ■

Proposition 12 “Rule of equal repartition”

If $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ so that q_i^ is out of the set of constraints, q_i^* is projected over the interior of the face define by the capacity constraint and if $b_j = 1 \forall i, j$*

When a producer has to reduce its production by δ then:

- its quantities on each of the m market are reduced by δ/m
- the producers that are already constrained are not affected by this change
- the k unconstrained producers increase their sells by $\delta/m(k+1)$

Proof. Let's suppose that the introduction of producer 1 capacity constraint leads to a reduction of its quantities by δ/m on each market, that the already constrained producers do not change their quantities, and also that the k unconstrained producers increase their quantity on each market by $\delta/m(k+1)$. We want to prove that this describes a Nash equilibrium. We have shown that $\bar{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* + \Delta)$ with $\Delta = \sum_{k=1}^n (u_k^* - \bar{u}_k^*)$.

For all i , the i -th component of Δ is written:

$$\Delta_i = \delta/m + 0(n - k - 1) - \delta k/m(k + 1) = \delta/m(k + 1).$$

That is to say that Δ is colinear to the vector $(1, \dots, 1) \in \mathfrak{R}^m$. Since $P_{S_1}(u_i^*)$ belongs to the interior of the face defined by the capacity constraint, we have that $P_{S_1}(u_1^* + \Delta) = P_{S_1}(u_1^*)$ and the reduction is effectively the same on all the markets and is then δ/m . The same phenomenon justifies the status quo for producers that were already capacity constrained.

For the unconstrained producers $P_{S_i}(u_i^* + \Delta) = u_i^* + \Delta$, we find then that they will decrease their quantities by $\delta/m(k + 1)$. ■

Generalization to n firms and m differentiated markets

Lemma 13 *The best reply of a capacity constrained producer is:*

$$\bar{u}_i^{BR} = P_{S_i}(u_i^{BR}) \quad (28)$$

where $u_{ij} = \sqrt{b_j}q_{ij}$ and P_{S_i} is the projection over:

$$S_i = \{u \in \mathfrak{R}_+^m, \sum_{j=1}^m (u_{ij}/\sqrt{b_j}) \leq K_i\} \quad (29)$$

Proof. The profit of producer i is:

$$\begin{aligned} \Pi_i(q_i) &= \sum_{j=1}^m [a_j - b_j \sum_{k=1}^n q_{kj} - c_{ij}] q_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^m (-b_j q_{ij}^2 + q_{ij} [a_j - b_j \sum_{k \neq i}^n q_{kj} - c_{ij}]) \end{aligned}$$

As the isoprofit curves are ellipsoids defined by:

$$\sum_{j=1}^m (-b_j q_{ij}^2 + \alpha q_{ij}) = cst$$

the maximisation problem would imply that under constraints the optimal point does not coincide with the projection on the set defined by the constraints. In order to get these points to coincide we should, if possible, transform the ellipsoids into circles, which may be done by means of the pertinent change of variables. Let

us define $u_{ij} = \sqrt{b_j}q_{ij}$ that makes quantities comparable in terms of profit in the different markets:

$$\sum_{j=1}^m (-u_{ij}^2 + \alpha' u_{ij}) = cst$$

the constraint becomes:

$$\sum_{j=1}^m (u_{ij}/\sqrt{b_j}) \leq K_i$$

In this new system of coordinates the isoprofit curves are balls for the euclidean norm, the profit is a function that decreases with the distance from its maximum. The point of S_i that maximizes the profit is then the closest point to u_i^{BR} , i.e. its projection over S_i . Existence and uniqueness of the projection are ensured by the fact that S_i is close, bounded and convex in finite dimension (deformation of the simplex of \Re^m). ■

Proposition 14 *The n vectors \bar{u}_i^* of the quantities supplied by each producer i to the m markets at the Nash equilibrium with capacity constraints satisfy:*

$$\bar{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\bar{u}_k^* - u_k^*)/2) \quad (30)$$

Proof. The best reply function of producer i is:

$$q_{ij}^{BR}(q_{-ij}) = [a_j - b_j \sum_{k \neq i} q_{kj} - c_{ij}]/2b_j$$

Since the best reply function is linear on the quantities of producer i competitors, we can rewrite the best reply in function of a change of strategy of the other producers:

$$q_{ij}^{BR}(q_{-ij}) = q_{ij}^{BR}(q'_{-ij}) - \sum_{k \neq i} (q_{kj} - q'_{kj})/2 \quad \forall j = 1..m \quad (31)$$

which gives in vectorial notation: $q_i^{BR}(q_{-i}) = q_i^{BR}(q'_{-i}) - \sum_{k \neq i} (q_k - q'_k)/2 \quad \forall q'_{-i}$
In particular: $q_i^{BR} = q_i^* - \sum_{k \neq i} (q_k - q_k^*)/2$ because of the definition of Nash equilibrium $q_i^{BR}(q_{-i}^*) = q_i^*$.

By changing variables we obtain: $u_i^{BR} = u_i^* - \sum_{k \neq i} (u_k - u_k^*)/2$

And thanks to Lemma 1: $\bar{u}_i^{BR}(u_k) = P_{S_i}(u_i^* - \sum_{k \neq i} (u_k - u_k^*)/2)$

Since Nash equilibrium is the fixed point of the best reply functions, we have that:

$\bar{u}_i^* = \bar{u}_i^{BR}(\bar{u}_k^*)$, and finally:

$$\bar{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\bar{u}_k^* - u_k^*)/2) \quad (32)$$

■

Proposition 15 *Let be $\Delta = \sum_{k=1}^n (u_k^* - \bar{u}_k^*)$. Finding Nash equilibrium under capacity constraints is equivalent to solving in Δ the equation:*

$$\Psi(\Delta) = \Delta + \sum_{i=1}^n P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta) = 0 \quad (33)$$

where $P_{t_{-u_i^*}(S_i)}$ is the projection over the translation of S_i by vector $-u_i^*$.

Proof. Proposition 1 gives:

$$\bar{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* + \Delta/2 + (\bar{u}_i^* - u_i^*)/2) = P_{S_i}(u_i^*/2 + \Delta/2 + \bar{u}_i^*/2) \quad (34)$$

Let be $v_i = (u_i^* + \Delta + \bar{u}_i^*)/2$ thus $\bar{u}_i^* = P_i(v_i) = 2v_i - u_i^* - \Delta$

We isolate v_i in this equation, using the Lemma 5

As a result we have that $v_i = (\Delta + u_i^* + P_{S_i}(\Delta + u_i^*))/2$

On the other hand we knew that $v_i = (u_i^* + \Delta + \bar{u}_i^*)/2$

therefore:

$$\bar{u}_i^* = P_{S_i}(\Delta + u_i^*) \quad (35)$$

but $P_{S_i}(\Delta + u_i^*) = P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta) + u_i^*$ where $P_{t_{-u_i^*}(S_i)}$ is the projection on the translation of S_i of vector $-u_i^*$.

therefore:

$$u_i^* - \bar{u}_i^* + P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta) = 0 \quad (36)$$

Finally, since $\Delta = \sum_{k=1}^n (u_k^* - \bar{u}_k^*)$, by adding these equations for $i = 1$ to n we find:

$$\Psi(\Delta) = \Delta + \sum_{i=1}^n P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta) = 0 \quad (37)$$

■

Proposition 16 *The solution of $\Psi(\Delta) = 0$ exists and is unique.*

Proof. We consider any $\Delta_0 \in \mathbb{R}^m$ and we observe how the j -th component of Ψ varies when we increase the i -th component of Δ_0 by x .

$$\begin{aligned} \text{Let be } f_{\Delta_0, i, j}(x) &= \Psi(\Delta_0 + x \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \\ &= (\sum_{i=1}^n P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x \vec{e}_i)) \cdot \vec{e}_j + (\Delta_0 + x \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \\ \text{and } g_{\Delta_0, i, j}(x) &= P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j \end{aligned}$$

The study of g reveals that:

$$\text{if } i \neq j \text{ then } \frac{dg}{dx} \leq 0 \text{ therefore } \frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 0 \leq 0$$

$$\text{if } i = j \text{ then } \frac{dg}{dx} \geq 0 \text{ therefore } \frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 1 > 0$$

We see that from any point of \mathbb{R}^m , by moving in the direction \vec{e}_i , we strictly increase the i -th component of Ψ while we reduce the other components.

The method for finding Δ consists in cancelling out one component of $\Psi(\Delta)$ at a time.

Let $L_i = \{x \in \mathbb{R}^m / \Psi(x) \cdot \vec{e}_i = 0\}$ be the set of x so that the i -th component of Ψ is 0. Δ is in the intersection of the L_i .

S_i being bounded, we can find a vector Δ_0 so that $\Psi(\Delta_0) \cdot \vec{e}_i \leq 0$ for every i .

We increase the first component by a quantity x until $\Psi(\Delta_0 + x \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = 0$ thanks to the continuity and the strict increasing of f when $i = j$. By doing this, we find a point Δ_1 of L_1 .

We iterate alternatively this operation along each component \vec{e}_i . On each iteration we bring to 0 a component while we reduce all the others since if $i \neq j$ then $\frac{df}{dx} \leq 0$. The components of the series (Δ_n) are an increasing series, upper bounded by the level lines L_i that are also upper bounded, hence (Δ_n) converges. Since every m steps we are in $\Delta_n \in L_i$, at the limit: $\Delta_{(\infty)} \in \bigcap_{i=1}^m L_i$

■

7 Bibliography

- [1] D'Aspremont, C., Encaoua, D., Ponssard, J-P. (1999) "Politique de la concurrence et théorie des jeux : quelques réflexions à partir de l'industrie cimentière", *Revue d'Economie Politique*, 109 (1), pp. 35-58.
- [2] Gabay, D., Moulin, H.(1980) "On the uniqueness and stability of Nash equilibria in non cooperative games", in: A. Benssoussan, P. Kleindorfer and C.S. Tapiero, eds, *Applied stochastic control in econometrics and management science*. Amsterdam: North-Holland, pp. 271-294.
- [3] Gabszewicz, J. J., Poddar, S. (1996) "Demand fluctuations and capacity utilization under duopoly". *Economic Theory* 10, pp. 131-146.
- [4] Kemfert, C., Tol, R. (2000) "Modelling an Oligopolistic Structure by a Computational Game Theoretic Modelling Tool".
- [5] Kreps, D.M., Scheinkman, J.A.(1983) "Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes". *Bell Journal of Economics*, pp. 326-337.
- [6] Murphy, F. H.,Sherali, H.D., Soyster, A.L. (1986) "A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium", *Mathematical Programming* 24, pp. 92-106.
- [7] Soler, L. G., Tanguy, H. (1998). "Contrats et Négociations dans le secteur des Vins de Champagne". *Annales des Mines-Gérer et Comprendre*, mars 1998, pp. 74-86.
- [8] Tobin, R.L. (1992) "Uniqueness Results and Algorithms for Stackelberg-Cournot-Nash Equilibria". *Annals of Operations Research* 34, pp. 21-36.

Négociations de parts de marché
sous menace de guerres de prix
Le cas de l'oligopole en demande inélastique

Ch. Caron*

Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique

Mai 2003

Abstract

Nous proposons un modèle de concurrence oligopolistique utilisant l'équilibre de Bertrand comme point de rupture d'une négociation en "Equal Gain" entre joueurs différenciés en coûts pour un bien homogène en demande inélastique. Ce processus permet de déterminer des parts de marché fondées sur des menaces d'exclusion et de rendre compte de dynamiques concurrentielles, peu traitées par la littérature, où plusieurs joueurs coexistent sur le marché mais où des exclusions effectives peuvent émerger. Nous montrons que ces stratégies d'exclusions sont mises en oeuvre par le leader en coût de l'industrie.

En outre, cet équilibre de négociation en demande constante partage avec l'Equilibre de Cournot linéaire les mêmes relations qu'entretiennent les parts de marché et les prix, avec pourtant des hypothèses de construction très différentes.

*Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique: 1 rue Descartes 75005 Paris.
caron@poly.polytechnique.fr.

1 Introduction :

La modélisation des interactions concurrentielles d'un nombre fini de firmes sur le marché d'un bien homogène est un grand classique historique d'économie industrielle. Les modèles standards utilisés sont ceux de Bertrand et de Cournot avec, en général, des fonctions linéaires de demande inverse. Lorsque les coûts des firmes sont différents, le modèle de Cournot, dans lequel les variables stratégiques sont les quantités, décrit des situations d'oligopole mais ne rend pas compte de stratégies d'exclusion : à l'équilibre tous les joueurs sont présents. Le modèle de Bertrand, dans lequel les prix sont les variables stratégiques, génère au contraire des stratégies d'exclusion à l'équilibre : le leader en coût se retrouve systématiquement en situation de monopole. Ces modèles sont traditionnellement intégrés dans des jeux à plusieurs étapes pour décrire des interactions stratégiques variées. D'autres modèles ont cherché à considérer les prix comme variables stratégiques sans renoncer à l'émergence de situations à plusieurs acteurs : Demange et Ponsard (1991) proposent un jeu en prix, à deux joueurs, utilisant des fonctions de demande sensibles aux écarts des offres en prix, faisant émerger des prix limites et débouchant sur une typologie des situations concurrentielles (duopole ou monopole).

Plus classiquement, l'introduction de contraintes de capacité rétablit la présence de plusieurs joueurs à l'équilibre (Bertrand-Edgeworth).

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux interactions stratégiques rencontrées dans les industries dites "de commodité" dans lesquelles le bien est homogène et la fonction de demande est inélastique au prix à court et moyen termes. L'existence de ventes croisées et de plusieurs firmes dotées de coûts de production différents coexistant en général sur les marchés, nous éloigne du modèle de Bertrand pour représenter la concurrence.

Quant à la modélisation de Cournot, dans ce type de secteur, elle pose un double problème:

D'une part, l'inélasticité de la demande au prix ne permet pas de définir un unique équilibre de Nash par intersection des fonctions de meilleures réponses¹.

¹ Contrairement au modèle de Bertrand, Hotelling(1929) considérait d'ailleurs un modèle en demande inélastique.

D'autre part, comme nous l'avons déjà mentionné, les stratégies d'exclusion fréquemment rencontrées dans la réalité ne sont pas capturées par le modèle de Cournot.

Ainsi, notre objectif de modélisation est de tenir compte de plusieurs phénomènes observés dans la réalité industrielle et peu pris en compte simultanément dans la littérature théorique :

- l'inélasticité de la demande au prix.
- l'existence de coûts différenciés conduisant à des menaces de guerre de prix et des situations d'exclusion.
- la coexistence de plusieurs firmes sur un même marché.

Nous considérons ici des joueurs différenciés en coûts, en concurrence sur le marché d'un bien homogène, la demande globale étant constante et donc indépendante du prix de marché. Nous mobilisons la théorie de la négociation non coopérative en utilisant le jeu de Bertrand (bien défini en demande inélastique) comme une menace, le considérant comme le point de rupture de la négociation. Le prix, associé au succès de la négociation sur les parts de marché respectives, est celui permettant l'exclusion d'un nouvel entrant potentiel ayant un coût de production plus élevé (dans la limite du prix de réservation des consommateurs).

Nous utiliserons le principe de négociation en "equal gain" (Roth, 1979,) particulièrement bien adapté aux problèmes à utilité non transférable et dont l'esprit est généralisable à plusieurs joueurs. La procédure de transfert d'utilité se fait en effet ici via l'ajustement des parts de marché, ce qui génère bien évidemment des contraintes sur l'ensemble des négociations possibles et affecte ainsi le surplus total.

La théorie de la négociation a surtout été utilisée dans la théorie de l'oligopole pour répartir les surplus d'un cartel, en considérant l'équilibre de Cournot comme point de rupture : Osborne et Pitchik (1983) considèrent un duopole symétrique en coût mais dissymétrique en capacité et utilisent le modèle de négociation de Nash (1953) pour mesurer les impacts de ces différences sur les profits de collusion. Ils montrent que la firme dotée de la plus petite capacité bénéficie d'un gain de profit relatif plus élevé. Schmalensee (1987) mobilise également cette théorie en s'interrogeant sur les objectifs du cartel, avec coûts dissymétriques, lorsque les

paiements latéraux sont impossibles, et propose différentes technologies de négociation entre un leader ayant un avantage en coût et une frange concurrentielle. Normann (2000) étudie différentes méthodes de pricing dans des contextes de collusions tacites où les firmes ne sont pas symétriques en coûts.

Notre objectif est ici très différent. Il ne s'agit pas d'une coopération visant à maximiser le profit total de l'industrie, où la négociation porte sur le partage de ce profit, avec une concurrence à la Cournot comme situation de rupture. En effet nous cherchons à modéliser une concurrence sur les parts de marché structurée par la menace d'une concurrence en prix (à la Bertrand). Cette forme de concurrence est stylisée par une négociation de parts de marché au prix de monopole sous menace d'affrontement en prix.

Dans une première partie, nous présentons le modèle de négociation en "Equal Gain" sous menace de jeu de Bertrand pour le duopole, le prix étant exogène. La résolution de ce jeu fournit ainsi des parts de marchés intégrant la menace du joueur le plus efficace sur son concurrent et les situations de ruptures associées. Nous observons, en outre, que la menace d'exclusion n'est jamais mise à exécution (En annexe, nous montrons qu'il est possible de générer des stratégies d'exclusion effectives en introduisant un jeu avec "sunk cost" d'entrée au sein duquel le leader peut s'engager ex ante à ne pas monter les prix après l'entrée négociée d'un concurrent moins compétitif).

Dans une deuxième partie, nous cherchons à étendre le modèle à n joueurs en conservant le principe d'"Equal Gain" et en utilisant des menaces "bilatérales" dans lesquelles chaque joueur menace indépendamment le joueur le moins efficace d'un jeu en prix sur leurs parts de marchés respectives. Nous définissons ainsi des parts de marchés relativement à un nombre de joueurs et à un prix maximum exogène. En considérant comme prix (d'exclusion) possibles les coûts successifs des différents joueurs, nous proposons un concept d'équilibre fondé sur les préférences des joueurs quant aux différentes situations d'exclusion, Nous montrons alors, que relativement aux écarts de coûts entre joueurs, l'ensemble des situations d'exclusion potentielles peuvent émerger. Dans tous les cas, c'est le leader en coût de l'industrie qui déterminera le prix et donc l'équilibre du jeu. (Nous proposons en annexe une autre généralisation à n joueur que la négociation "bilatérale " faisant explicite-

ment référence au jeu à $n-1$ joueurs mais qui ne produit pas d'exclusions.) Enfin, nous présentons quelques résultats de statique comparative concernant la mise à exécution de menace d'exclusion à 3 joueurs.

Dans la dernière partie nous nous attachons à comparer ces résultats avec l'équilibre de Cournot. Nous montrons en particulier que cet équilibre de négociation partage avec l'équilibre de Cournot linéaire une même dépendance des parts de marchés au prix.

1.1 Equilibre de négociation en "equal gain" à deux joueurs:

Considérons un jeu de négociation dans lequel la situation de désaccord est un jeu à la Bertrand et la situation rupture est le prix maximum unique², avec une négociation sur les parts de marché. L'utilité n'est pas transférable, et est affectée par la répartition des parts de marché.

Soient $0 < c_1 < c_2$ les coûts de production des joueurs 1 et 2 et soit $p_{\max} = c_3 > c_2$, le coût d'un troisième joueur à exclure ou le prix maximum acceptable par le marché .

Le prix est donc considéré comme exogène à ce stade, nous reviendrons sur sa formation dans le cas à plusieurs joueurs.

Nous utilisons une procédure de négociation en "Equal Gain": en cas de rupture le joueur 1 est en monopole avec un prix c_2 et le joueur 2 obtient 0 (résultat du jeu de Bertrand). La solution d'équilibre proposée est une situation où chacun des joueurs, partant de la situation de rupture, gagne autant à accepter la solution en prix maximum (chacun perdrait autant à l'échec des négociations). (cf. fig.1 et 2)

Il existe de nombreuses technologies de négociation : Schmalensee (1987) en montre les différences lorsque les coûts sont dissymétriques et que l'objectif est de gérer un cartel utilisant l'équilibre de Cournot comme point de rupture. La solution de Nash est la plus connue et associe des concepts d'équité et d'optimalité. Nous lui préférons cependant la solution en "Equal Gain"³ (moins favorable au joueur

²Rotemberg et Saloner (1990) montrent qu'une politique de prix identiques peut résulter d'un comportement d'équilibre de firmes asymétriques.

³Selon MacLeod (1985) : la solution en « Equal Gain » est une solution incontournable pour la négociation expérimental et pourrait être considérée comme plausible également dans un

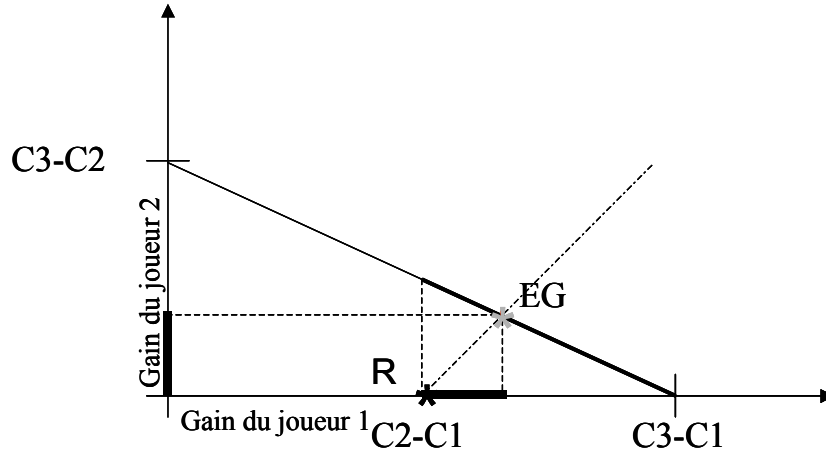


Figure 1: Principe de négociation en "Equal Gain"

le plus efficace que celle de Nash) et se limitant à l'axiome d'équité. En ce sens il n'y a pas de recherche de profit de l'ensemble de l'industrie, l'utilité n'est pas transférable entre joueurs et la négociation modélisée se distingue radicalement d'un jeu de cartélisation.

Proposition 1 Soient x_1 et x_2 les parts de marché des joueurs 1 et 2. Elles vérifient le jeu de négociation en "Equal Gain" sous menace de prix d'exclusion $p = c_2$ si et seulement si :

$$x_2 = \frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

$$x_1 = \frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

Proof. Démonstration en annexe ■

Cette technologie de négociation fait référence à la possibilité qu'ont tous les joueurs de baisser leurs prix. Le résultat s'éloigne de la recherche d'efficacité de la production jointe, car si les gains à la négociation sont identiques, c'est le joueur le moins performant qui obtient la part de marché additionnelle la plus importante

contexte d'oligopoles hétérogènes.

Selon Bain (1948) : Lorsque les firmes sont différenciées en coûts, et lorsque les biens sont homogènes, la maximisation du profit joint ne fait sens que lorsque les paiement latéraux sont possibles.

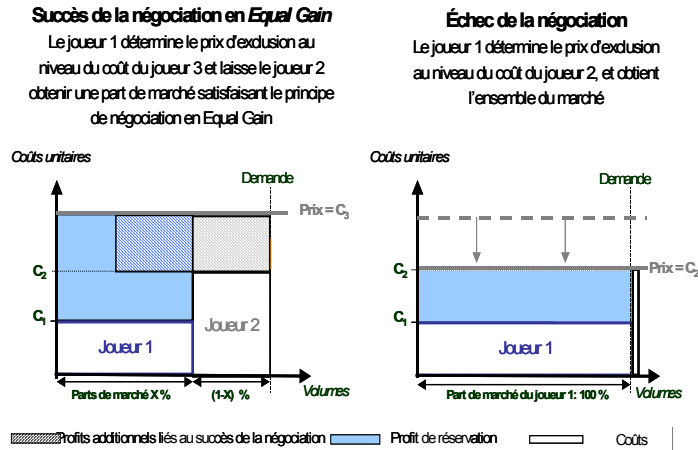


Figure 2: Jeu de négociation en "Equal Gain"

(un volume plus important lui sera nécessaire pour obtenir un même profit que son concurrent plus efficace). Cependant, le joueur le plus performant conserve toujours une part de marché totale supérieure à celle de son concurrent.

Notons que l'issue de ce jeu de négociation produit toujours des situations de duopole, la menace d'exclusion du joueur 1 n'étant jamais mise à exécution.⁴

Nous allons maintenant étendre ces résultats à n joueurs

1.2 Sous équilibres de négociation "bilatérales" à n joueurs donnés

Nous proposons une généralisation à n joueurs du modèle de négociation précédemment introduit pour le duopole. Nous considérons ici des points de rupture fondés sur des menaces de guerres de prix "bilatérales" de chacun des joueurs sur le dernier. Ces menaces sont indépendantes et génèrent une chute de prix au niveau du coût du dernier entrant postulant à l'entrée (celui qui a les coûts les plus élevés). Ce prix s'applique sur les parts de marché qu'obtiendrait ce dernier joueur en cas de succès de la négociation et sur celle du joueur le menaçant. Nous conservons le principe d'"Equal Gain" comme règle déterminant les parts de marché négociées dans le cadre de cette menace (tous les joueurs sont capables d'exclure le dernier

⁴nous montrons en annexe comment une modélisation introduisant un "sunk cost" peut rétablir l'émergence de situations d'exclusion.

joueur et de faire ainsi échouer la négociation).

Ce jeu de négociation nous permet de définir une notion de "sous équilibre" pour un nombre de joueurs donné n , le prix étant considéré comme exogène et étant défini ici comme le coût d'un joueur $n + 1$ exclu par hypothèse.

Nous considérons n joueurs avec des coûts croissants :

$$\forall i \leq n, 0 < c_i < c_{i+1}$$

$p^{(n)}$: le prix. $p^{(n)} > c_n$

$x_i^{(n)}$: la part de marché du joueur i dans le jeu à n joueurs

$\pi_i^{(n)}$: son profit au prix $p^{(n)}$

$\pi_{ir}^{(n-1)}$: son profit de réservation lorsque le joueur n est exclu par mise à exécution d'une menace bilatérale.

Definition 2 *Sous équilibre en négociation bilatérale : Une allocation de part de marché $(x_1^{(n)}; \dots; x_n^{(n)})$ est un sous équilibre de négociation bilatérale pour le prix $p^{(n)}$ si:*

- le point de rupture de la négociation est :

pour le joueur n : 0

pour chaque joueur $i < n$: le profit réalisé avec le prix c_n sur son propre volume additionné de celui du joueur n , soit: $\pi_{ir}^{(n-1)} = (c_n - c_i) (x_i^{(n)} + x_n^{(n)})$

- elle respecte la propriété d'"Equal Gain": chacun des n joueurs a autant à perdre à mettre en oeuvre le prix d'exclusion c_n

$$\forall i \neq n, \quad \pi_i^{(n)} - \pi_{ir}^{(n-1)} = \pi_n^{(n)}$$

Le point de rupture de la négociation bilatérale peut s'interpréter comme une menace de guerre de prix entre un joueur i et le joueur n , les parts de marchés des autres étant inchangées. C'est un jeu de Bertrand sur le marché constitué des volumes de ces deux joueurs : on peut voir cette menace comme une guerre de prix concernant des remises consenties par le joueur i aux clients du joueur n , qu'il doit ensuite appliquer à ses propres clients (cf.fig.3). Implicitement, nous supposons que les joueurs ne peuvent donc discriminer en prix. En outre, ils n'envisagent pas

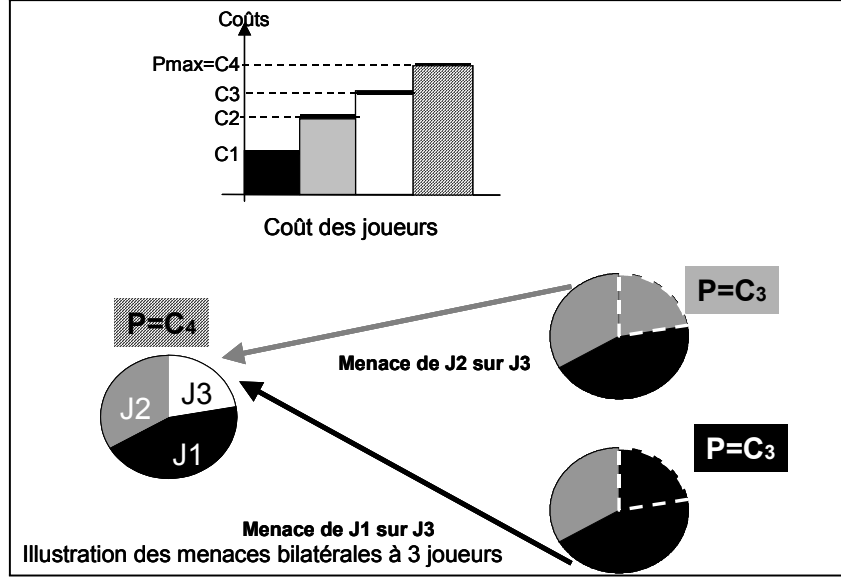


Figure 3: Menaces bilatérales à 3 joueurs

la mise à exécution simultanée de leurs menaces. Ainsi, ces menaces bilatérales sont donc considérées comme indépendantes les une des autres.⁵

Remark 3 Dans le cadre de rationalité limitée retenu ici (non considération de la réaction des joueurs autres que le dernier), les joueurs 1 et 2 ne peuvent mettre simultanément leur menace à exécution, la part de marché du joueur 3 ne pouvant être attribuée simultanément aux deux autres joueurs. Si tel était le cas on peut supposer cependant que l'issue serait le sous équilibre de négociation à 2 joueurs. En effet, le joueur 1 préfère la situation de mise à exécution de sa menace sur le joueur 3 à la situation de sous équilibre à 2 joueurs. Le prix est le même mais la part de marché est plus forte dans le cas de sous équilibre à 2 joueurs.

Proposition 4 $(x_1^{(n)}; \dots; x_n^{(n)})$ est un sous équilibre de négociation bilatérale pour le prix $p^{(n)}$ si et seulement si

$$\forall i, x_i^{(n)} = \frac{p^{(n)} - c_i}{np^{(n)} - \sum_{k=1}^n c_k}$$

Proof. démonstration en annexe ■

⁵Le principe de négociation bilatérale est semblable au concept de « conjectures passives » ou « conjectures de négociation marché par marché » Rey Tirole (1996)

A ce stade, le nombre de joueur et le prix étant fixés, ce processus de négociation ne définit pas d'équilibre mais seulement une "situation de stabilité" à n joueurs liant leurs parts de marchés au prix. Nous envisageons maintenant un équilibre à N joueurs potentiels.

1.3 Equilibre en négociations bilatérales à N joueurs potentiels

Nous proposons un concept d'équilibre par la sélection des sous équilibre à n joueurs ($n \leq N$). Cette modélisation a l'avantage de générer des préférences des joueurs sur leur nombre et donc de motiver des stratégies d'exclusion (dès trois joueurs). En outre, nous montrons que ces stratégies d'exclusion sont mises en oeuvre par le leader en coût du marché. Cet équilibre est construit sur la sélection des sous équilibres à n joueurs qui utilisent une vue du profit de réservation qui ne fait pas référence à la situation de stabilité à $n-1$ joueurs (nous proposons en annexe une négociation y faisant référence) mais à une perturbation de la stabilité du jeu à n , liée à l'exclusion potentielle du joueur n par chacun des autres, de façon bilatérale et indépendante.

Nous proposons donc une définition d'équilibre fondée sur les préférences des joueurs relativement à ces situations de sous équilibres, déterminant leur nombre, le prix et les parts de marchés correspondantes. Le principe est que le prix augmente tant que tous les joueurs ont une incitation à l'augmenter, quitte à céder de la part de marché pour accommoder à l'entrée d'un joueur supplémentaire, le prix d'équilibre étant le prix maximal vérifiant ce principe. En effet, dès que l'entrée d'un nouveau joueur impose (par le sous équilibre) des parts de marché qui font préférer à l'un des joueurs déjà présents la situation antérieure, le prix retenu à l'équilibre exclura ce joueur.

Definition 5 *Equilibre en négociation bilatérale*

Soit N le nombre maximum de joueurs.

On dira qu'un joueur i a une stricte préférence pour le sous équilibre à $n_i \leq N$ joueurs si : $\forall k \leq n_i, \pi_i^{(k-1)} < \pi_i^{(k)}$

On dira qu'un joueur i a une stricte préférence maximum pour le sous équilibre à $n_i \leq N$ joueurs si de plus : $\pi_i^{(n_i)} > \pi_i^{(n_i+1)}$ ou si $n_i = N$

L'équilibre en négociation unilatérale est le sous équilibre à $n_e < N$ tel que:

- tous les joueurs le préfèrent strictement : $\forall i \leq n_e, \pi_i^{(n-1)} < \pi_i^{(n)} \forall n \leq n_e$
- au moins l'un d'entre eux a une stricte préférence maximale pour n_e : $\exists i \leq n_e$ tq $\pi_i^{(n_e)} > \pi_i^{(n_e+1)}$

Un équilibre en négociation bilatérale est défini par un nombre de joueurs n_e correspondant à un sous équilibre $((x_1^{(n_e)}; \dots; x_{n_e}^{(n_e)}), p^{(n_e)} = c_{n_e+1})$ tel que les fonctions de profit $\pi_i^{(k)}$ des n_e joueurs sont croissantes en fonction du nombre de joueurs $k < n_e$. Tous les joueurs sont prêts à augmenter successivement les prix jusqu'à $p^{(n_e)}$, à partir duquel l'un d'entre eux ne préfère plus augmenter le prix.

Ainsi, nous supposons que tous les joueurs ont le même pouvoir de négociation à faire échouer une augmentation de prix : si un des joueurs n'y trouve pas un bénéfice, il conserve un prix plus bas et oblige ses concurrents à l'imiter sous peine de diminuer leurs parts de marché. Cette hypothèse est cohérente avec la règle de répartition en "Equal Gain" utilisée pour déterminer les sous équilibres assurant à chaque joueur un profit additionnel identique lors des négociations.

En outre, nous supposons que ces augmentations de prix successives à l'entrée de joueurs supplémentaires nécessitent la croissance de leur profit à chaque étape. Il est possible qu'il existe un prix $p^{(n_e+l)}$ supérieur à $p^{(n_e)}$, avec $l > 1$ pour lequel les profits de tous les joueurs soient supérieurs à ceux obtenus avec le prix $p^{(n_e)}$. Le concept d'équilibre retenu ici est donc dépendant de la prise en considération ascendante et successive des profits des joueurs selon leurs coûts.

Nous allons montrer que la détermination de cet équilibre se réduit à celle du premier maximum local de la fonction de profit du leader en coût. En fait, la préférence stricte et maximale du leader est toujours plus faible (relativement au prix ou au nombre de joueurs) que celle des autres joueurs : autrement dit, la fonction de profit du leader cesse d'être croissante (avec le nombre de joueurs) avant celles des autres joueurs.

Proposition 6 *L'équilibre en négociation est le sous équilibre préféré strict et*

maximal du leader

$$n_e \text{ est tel que } \pi_1^{(n-1)} < \pi_1^{(n)} \forall n \leq n_e \text{ et } \pi_1^{(n_e)} > \pi_1^{(n_e+1)}$$

Proof. démonstration en annexe ■

Ainsi, aucun joueur ne souhaite une exclusion si elle n'est pas également souhaitée par le leader. La détermination du prix d'exclusion peut donc se limiter à l'analyse des préférences du leader. C'est le leader qui impose le nombre de joueurs à travers le prix, avec ou sans le consentement d'autres joueurs.⁶

Nous avons montré (cf. preuve de la proposition précédente) que le leader préfère limiter la hausse des prix dès qu'il préfère le jeu à $n-1$ joueurs au jeu à n , c'est à dire dès que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{c_n c_{n+1} - c_1^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_1)}$$

Ainsi, en fonction des c_i , différents prix $c_i \leq c_{N+1}$ peuvent émerger en engendrant des exclusions effectives, cependant, comme nous l'avons déjà noté dans le jeu à deux joueurs (qui est un cas particulier du jeu en négociation bilatérale), le leader n'exclue jamais le deuxième joueur.

Nous proposons en annexe un exemple à 10 joueurs potentiels, illustrant qu'en fonction des écarts de coûts relatifs, toutes les situations d'exclusions sont possibles.

1.4 Statique comparative à 3 joueurs

Etudions la statique comparative de l'exclusion du joueurs 3 en fonction des écarts de coûts relatifs des joueurs 1, 2, 3, 4.

Nous supposons $c_1 = 0$

Proposition 7 $c_3 > 2c_2$ est une condition suffisante pour que le joueur 3 ne soit jamais exclu. Lorsque $c_3 < 2c_2$, à c_3 fixé, la décision de l'exclusion du joueur 3 augmente avec c_2 et diminue avec c_4 .

Proof. démonstration en annexe ■

⁶Scherer et Ross (1990, p.248) observaient que dans des marchés réels (exemple des cigarettes dans les années 20) les acteurs utilisent un prix identique déterminé par le leader en coût

Il suffit donc au joueur 3 d'avoir des coûts supérieurs à 2 fois ceux du joueur 2 pour ne jamais risquer d'exclusion basée sur une négociation "bilatérale". Cependant, il existe des configurations de coûts pour lesquelles le joueur 3 peut diminuer ses coûts au dessous de cette limite sans risquer d'exclusion.

Les configurations les plus propices pour que le joueur 3 soit accepté sont lorsque l'écart de coût entre le joueur 1 et le joueur 2 est faible et qu'il est fort entre le joueur 2 et 4.

Ainsi, un marché avec deux joueurs semblables bénéficiant d'une ombrelle de prix élevé est attractif pour un troisième joueur moins performant.

Les fig. 15, 16, 17 en annexe illustrent ces différentes typologies de marchés.

1.5 Liens avec l'Equilibre de Cournot linéaire

La comparaison de l'équilibre en parts de marché négociées avec l'équilibre de Cournot s'avère délicate. En effet, les expressions de la demande (linéaire ou constante) sont différentes. L'hypothèse de demande constante ne permet pas de bien définir l'équilibre de Cournot. d'un autre côté, l'équilibre de négociation est attaché à un processus d'exclusion adapté à une demande constante. Cependant, dans le cas d'une fonction de demande linéaire, les parts de marchés peuvent s'exprimer uniquement en fonction du prix et des coûts des joueurs. Nous allons montrer que cette expression des parts de marché est identique pour l'équilibre de négociation.

Proposition 8 *l'Equilibre de Cournot linéaire à n joueurs partage avec le sous équilibre de négociation les même relations entre prix et parts de marché.*

soit p le prix et x_i les parts de marché, on a dans les deux cas:

$$x_i = \frac{[p - c_i]}{np - \sum_{i=1}^n c_i}$$

Proof. démonstration en annexe ■

Fondés sur des hypothèses de modélisation pourtant très différentes, ces deux modèles présentent donc la même dépendance des prix aux parts de marché.

Il est vraisemblable que l'équivalence des solutions des deux problèmes soit du à un "transfert de complexité à somme nulle" entre d'un côté, la structure de la demande (plus sophistiquée dans l'équilibre de Cournot), et de l'autre, la détermination des parts de marchés (plus sophistiquée dans l'équilibre de négociation).⁷

2 Conclusion

L'introduction de la théorie de la négociation nous permet, pour un oligopole en demande constante, de déterminer un équilibre pour lequel les parts de marché sont fondées sur des menaces d'exclusion et le prix sur des exclusions effectives mises en oeuvre par le leader en coût de l'industrie.

Nous montrons que cette modélisation partage avec le jeu de Cournot une même dépendance des parts de marché aux prix. Ce résultat peut venir conforter l'idée que le jeu de Cournot peut être vu comme intégrant des aspects de négociation⁸ dont le jeu de Bertrand constitue les menaces.

Contrairement à Schmalensee (1987) qui mobilisait la théorie de la négociation pour proposer des technologies de collusion afin d'intégrer les différences de coûts entre joueurs au sein du cartel, nous restons dans des situations non coopératives. Les différences de coûts entre joueurs et l'inélasticité de la demande assurent à ce modèle en prix, bien que mobilisant des concepts empruntés à la théorie de la négociation, une dynamique de concurrence non coopérative comparable aux résultats de Cournot.

Cette analyse suggère également que l'observation dans les industries de commodité de parts de marché réelles cohérentes avec le modèle de Cournot ne prouvent pas nécessairement l'existence des principes de concurrence sur lequel il est fondé, puisqu' une interprétation très différente utilisant la théorie de la négociation y parvient également, offrant en outre l'avantage d'être compatible avec une demande inélastique et rendant compte des stratégies de prix d'exclusion. Ainsi une négociation de quota de production en négligeant l'élasticité de la demande

⁷Merci à Nicolas Curien pour ses remarques sur ces points

⁸Kamien (2001) propose un rapprochement de l'équilibre de Cournot et des issues d'une technologie particulière de résolution du "divide the dollar game"

revient au même que de se livrer à une concurrence en quantité en tenant compte des réactions du marché.⁷

3 Bibliographie

Bain J. S., 1948. Output Quotas in Imperfect cartels. *Quarterly Journal of Econometrics*, 62, pp. 617-622

Demange, G. and Ponssard J.-P., 1991. A Duopoly model suggesting a taxonomy of competitive situations, *Microeconomic contributions to strategic management*.

Hotelling, H., 1929. Stability in Competition. *Economic Journal* 39, pp. 41-57.

Kamien, M.I., 2001. A cake for Cournot. *Economics Letters* 70, pp. 349-355.

MacLeod W.B., 1985. A theory of conscious parallelism. *European Economic Review*, 27, pp.25-44.

Nash J.F., 1953. Two persons cooperative game. *Econometrica*, 21, pp.128-140.

Normann, H.T., 2000. Conscious parallelism in asymmetric oligopoly. *Metroeconomica*, 51 : 3, pp 343-366.

Osborne D.K. and Pitchik, C., 1983. Profit sharing in a collusive oligopoly. *European Economic Review* 22, pp. 59-74.

Rey P., and Tirole J., 1996. A primer on foreclosure, *Handbook of Industrial Organization*, vol 3, North Holland Amsterdam.

Rotemberg, J. J. and Salloner, G., 1990. Collusive price leadership. *Journal of Industrial Economics*, 39, pp. 93-111.

Roth, A.E., 1979. *Axiomatic model of bargaining* (Springer, New York).

Scherer F. M., Ross D., 1990. *Industrial structure and economic performance*, 3rd edn, Rand McNelly, Chicago IL.

Schmalensee, R., 1987. Competitive advantage and collusive optima. *International Journal of Industrial Organization* 5, pp. 351-367.

Sutton J., (1991). *Sunk Cost and Market Structure*. The MIT Press.

4 ANNEXE

4.0.1 Démonstration des propositions

Proposition 1 Proof. Soient π_1 et π_2 les profits des deux joueurs en cas de succès de la négociation et π_{1r} et π_{2r} leurs profits de réservation (échec de la négociation) ■

Proposition 9 Proof. $\pi_{1r} = (c_2 - c_1)$

$$\pi_1 = (c_3 - c_1)x_1 = (c_3 - c_1)\frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

$$\pi_{2r} = 0$$

$$\pi_2 = (c_3 - c_2)x_2 = (c_3 - c_2)\frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

On vérifie bien la propriété d’’Equal Gain’’:

$$\pi_1 - \pi_{1r} = \pi_2 - \pi_{2r}$$

$$\text{soit } (c_3 - c_1)\frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1} - (c_2 - c_1) = (c_3 - c_2)\frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

En outre on a bien:

$$x_1 + x_2 = \frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1} + \frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1} = 1 \quad \blacksquare$$

Proposition 4 Proof. Démonstration à 3 joueurs

A trois joueurs, les parts de marché ont les expressions suivantes :

$$x_1^{(3)} = \frac{p - c_1}{3p - c_1 - c_2 - c_3}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{p - c_2}{3p - c_1 - c_2 - c_3}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{p - c_3}{3p - c_1 - c_2 - c_3}$$

Vérifions que ces expressions satisfont la règle de répartition en ”Equal Gain” avec comme point de rupture les menaces bilatérales.

La règle de répartition en ”Equal Gain” impose $\pi_1^{(3)} - \pi_{1r}^{(2)} = \pi_2^{(3)} - \pi_{2r}^{(2)} = \pi_3^{(3)}$

$$\pi_{1r}^{(2)} = \pi_1^{(3)} - \pi_3^{(3)} = \frac{(p - c_1)^2 - (p - c_3)^2}{3p - c_1 - c_2 - c_3} = (c_3 - c_1) \frac{2p - c_1 - c_3}{3p - c_1 - c_2 - c_3}$$

$$= (c_3 - c_1) \left(1 - \frac{p - c_2}{3p - c_1 - c_2 - c_3} \right) = (c_3 - c_1) \left(1 - x_2^{(3)} \right)$$

$$\pi_{2r}^{(2)} = \pi_2^{(3)} - \pi_3^{(3)} = \frac{(p - c_2)^2 - (p - c_3)^2}{3p - c_1 - c_2 - c_3} = (c_3 - c_2) \frac{2p - c_2 - c_3}{3p - c_1 - c_2 - c_3}$$

$$= (c_3 - c_2) \left(1 - x_1^{(3)} \right)$$

$\pi_{1r}^{(2)}$ est bien le profit de réservation de J1 en excluant 3 : il fournit seul le marché laissé vacant par l’exclusion de 3, soit avec un prix c_3 .

De même, $\pi_{2r}^{(2)}$ est le profit de réservation de J2 en excluant unilatéralement 3 :
il fournit seul le marché laissé vacant par l'exclusion de 3, soit avec un prix c_3 .

Montrons que ces expressions sont les seules parts de marché qui vérifient la définition de la règle de négociation :

$$\pi_{1r}^{(2)} = \pi_1^{(3)} - \pi_3^{(3)} = (c_3 - c_1) \left(1 - x_2^{(3)}\right) \quad (1)$$

$$\pi_{2r}^{(2)} = \pi_2^{(3)} - \pi_3^{(3)} = (c_3 - c_2) \left(1 - x_1^{(3)}\right) \quad (2)$$

$$\pi_1^{(3)} = (p - c_1)x_1^{(3)} \quad (3)$$

$$\pi_2^{(3)} = (p - c_2)x_2^{(3)} \quad (4)$$

$$\pi_3^{(3)} = (p - c_3)x_3^{(3)} \quad (5)$$

$$x_1^{(3)} + x_2^{(3)} + x_3^{(3)} = 1 \quad (6)$$

Soit :

$$1 - \frac{\pi_2^{(3)}}{(p-c_2)} = \frac{\pi_1^{(3)} - \pi_3^{(3)}}{(c_3 - c_1)} \quad (1), (3), (4)$$

$$1 - \frac{\pi_1^{(3)}}{(p-c_1)} = \frac{\pi_2^{(3)} - \pi_3^{(3)}}{(c_3 - c_2)} \quad (2), (3), (5)$$

$$\frac{\pi_1^{(3)}}{(p-c_1)} + \frac{\pi_2^{(3)}}{(p-c_2)} + \frac{\pi_3^{(3)}}{(p-c_3)} = 1 \quad (3), (4), (5), (6)$$

$\left(\frac{(p-c_1)^2}{3p-c_1-c_2-c_3}; \frac{(p-c_2)^2}{3p-c_1-c_2-c_3}; \frac{(p-c_3)^2}{3p-c_1-c_2-c_3}\right)$ étant l'unique solution de ce système linéaire,

il vient :

$$x_1^{(3)} = \frac{p-c_1}{3p-c_1-c_2-c_3}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{p-c_2}{3p-c_1-c_2-c_3}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{p-c_3}{3p-c_1-c_2-c_3}$$

Ce resultat s'étend sans difficultés à n joueurs :

$$\text{avec } \pi_i^{(n)} = (c_n - c_i)x_i^{(n)}$$

$$\text{et } \sum_n x_i^{(n)} = 1$$

$$\pi_i^{(n)} = \pi_{ir}^{(n-1)} + \pi_n^{(n)}$$

Le système suivant

$$\pi_{ir}^{(n-1)} = \pi_i^{(n)} - \pi_n^{(n)} \forall i < n$$

vérifie

$$\pi_{ir}^{(n-1)} = \frac{(p-c_i)^2 - (p-c_n)^2}{np - \sum_{k=1}^n c_i} = (c_n - c_i) \frac{2p - c_i - c_n}{np - \sum_{k=1}^n c_i}$$

$$\pi_{ir}^{(n-1)} = (c_n - c_i) \left(1 - \sum_{k \neq i}^{n-1} x_k^{(n)}\right)$$

et admet comme unique solution

$$x_i^{(n)} = \frac{p_{(n)} - c_i}{np_{(n)} - \sum_{k=1}^n c_i} \forall i \quad \blacksquare$$

Proposition 6 Proof. Nous allons tout d'abord exprimer la condition de préférence d'un joueur entre un jeu à n par rapport à un jeu à $n - 1$ joueurs. Nous isolerons ensuite une condition sur les coûts de l'ensemble des joueurs sous laquelle la préférence du leader en coût correspond toujours à la définition de l'équilibre. Nous montrerons ensuite que lorsque cette condition n'est pas vérifiée, tous les joueurs ont la même préférence. Ainsi, quel que soit le cas, c'est la préférence du leader en coût qui détermine l'équilibre, avec ou non le "consentement" des autres joueurs.

On rappelle que $\pi_{i(n)} = \frac{(c_{n+1}-c_i)^2}{(nc_{n+1}-\sum_{k=1}^n c_k)}$ est le profit obtenu en négociation bilatérale à n joueurs par le joueur i .

Soit $\sigma_{i(n)(n-1)} = \pi_{i(n)} - \pi_{i(n-1)}$, lorsque $\sigma_{i(n)(n-1)} > 0$ (le joueur i préfère l'exclusion du joueur n à son entrée)

- Montrons que : $\sigma_{i(n)(n-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_i)}$

Par définition

$$\begin{aligned}\sigma_{i(n)(n-1)} &= \frac{(c_{n+1}-c_i)^2}{(nc_{n+1}-\sum_{k=1}^n c_k)} - \frac{(c_n-c_i)^2}{((n-1)c_n-\sum_{k=1}^{n-1} c_k)} \\ &= \frac{(c_{n+1}-c_i)^2((n-1)c_n-\sum_{k=1}^{n-1} c_k) - (c_n-c_i)^2(nc_{n+1}-\sum_{k=1}^n c_k)}{(nc_{n+1}-\sum_{k=1}^n c_k)((n-1)c_n-\sum_{k=1}^{n-1} c_k)}\end{aligned}$$

$$\text{Soit } P_i = (c_{n+1} - c_i)^2 ((n-1)c_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k) - (c_n - c_i)^2 (nc_{n+1} - \sum_{k=1}^n c_k)$$

Comme $0 < C_i < C_{i+1}; \forall i$, $\sigma_{i(n)(n-1)}$ est du signe de P_i

$$\begin{aligned}\text{Or } P_i &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k (-c_{n+1}^2 + 2c_{n+1}c_i + c_n^2 - 2c_n c_i) \\ &+ c_{n+1}^2 c_n n - c_{n+1}^2 c_n + 2c_{n+1}c_n c_i + c_i^2 c_n n - c_{n+1}c_n^2 n + c_n^3 - 2c_n^2 c_i - c_i^2 n c_{n+1}\end{aligned}$$

Et P_i est divisible par $(c_n - c_{n+1})$ d'où l'expression de P_i suivante :

$$\begin{aligned}P_i &= (c_n - c_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k (c_n + c_{n+1} - 2c_i) + (c_n^2 - c_n c_{n+1} n + c_n c_{n+1} + c_i^2 n - 2c_n c_i) \right) \\ \sigma_{i(n)(n-1)} &= \frac{(c_n - c_{n+1}) \left[(c_n + c_{n+1} - 2c_i) \sum_{k=1}^{n-1} c_k + (c_n^2 - c_n c_{n+1} n + c_n c_{n+1} + c_i^2 n - 2c_n c_i) \right]}{(nc_{n+1} - \sum_{k=1}^n c_k)((n-1)c_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k)}\end{aligned}$$

$$\text{On a } P_i < 0 \Leftrightarrow \sigma_{i(n)(n-1)} < 0$$

Soit

$$\sigma_{i(n)(n-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_i)}$$

- Montrons que :

$$\text{Si } \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2} \text{ alors } \sigma_{1(n)(n-1)} > \sigma_{i(n)(n-1)} \forall i, 1 < i \leq n-1 \leq N$$

$$\sigma_{1(n)(n-1)} > \sigma_{i(n)(n-1)} \forall i, n \leq N$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (c_n - c_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k (c_n + c_{n+1} - 2c_1) + (c_n^2 - c_n c_{n+1} n + c_n c_{n+1} + c_1^2 n - 2c_n c_1) \right) \\
&> (c_n - c_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k (c_n + c_{n+1} - 2c_i) + (c_n^2 - c_n c_{n+1} n + c_n c_{n+1} + c_i^2 n - 2c_n c_i) \right) \\
&\Leftrightarrow 2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k (c_i - c_1) + c_1^2 n - c_i^2 n - 2c_n c_1 + 2c_n c_i > 0 \\
&\Leftrightarrow (c_i - c_1) \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k + 2c_n - n c_i - n c_1 \right) > 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \sum_{k=1}^n c_k - n (c_i + c_1) > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1 + c_i)}{2}
\end{aligned}$$

Comme $c_i \leq c_{n-1} \forall i, 1 < i \leq n-1 \leq N$

si $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2}$ alors $\sigma_{1(n)(n-1)} > \sigma_{i(n)(n-1)} \forall i, 1 < i \leq n-1 \leq N$

et en particulier, si $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2}$ alors $\sigma_{1(n)(n-1)} > 0 \Rightarrow \sigma_{i(n)(n-1)} > 0$

$\forall i, 1 < i \leq n-1 \leq N$

Dans ce cas le leader a toujours une incitation plus faible que les autres joueurs à augmenter les prix (et le nombre de joueurs), c'est donc lui qui limitera leur agmentation.

On peut noter que la condition $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2}$ est en particulier toujours vérifiée si $n < 5$

• Montrons que :

Si $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} \leq \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2}$, alors tous les joueurs préfèrent le jeu à n , $\forall n < N$

$$\begin{aligned}
&\text{— Montrons tout d'abord: } \frac{(c_1 + c_{n-1})}{2} \leq \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_i)} \\
&\frac{(c_1 + c_{n-1})}{2} \leq \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_i)} \\
&\Leftrightarrow (c_1 + c_{n-1}) (c_n + c_{n+1} - 2c_i) < 2c_n c_{n+1} - 2c_i^2 \\
&\Leftrightarrow 2c_i^2 - 2c_i (c_1 + c_{n-1}) + ((c_1 + c_{n-1}) (c_n + c_{n+1}) - 2c_n c_{n+1}) < 0 \\
&\Delta = 4(c_1 + c_{n-1})^2 - 4 * 2 [(c_1 + c_{n-1}) (c_n + c_{n+1}) - 2c_n c_{n+1}]
\end{aligned}$$

Or $\Delta < 0$

en effet $\Delta < 0$ si $(c_1 + c_{n-1}) [(c_1 + c_{n-1}) - 2(c_n + c_{n+1})] - 4c_n c_{n+1} < 0$

ce qui est toujours le cas car $(c_1 + c_{n-1}) < 2(c_n + c_{n+1})$

Ainsi, le polynome en c_i étant de signe constant, montrons qu'il est négatif en le vérifiant pour une valeur particulière de c_i ; ($c_i = c_n$)

soit $\frac{(c_1 + c_{n-1})}{2} < \frac{c_n (c_{n+1} - c_n)}{(c_n + c_{n+1} - 2c_n)}$

soit $(c_1 + c_{n-1}) < 2c_n$ ce qui est toujours les cas

— Nous savons que : $\sigma_{i(n)(n-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} < \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n + c_{n+1} - 2c_i)}$

et nous venons de montrer que : $\frac{(c_1+c_{n-1})}{2} \leq \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n+c_{n+1}-2c_i)}$, donc $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} \leq \frac{(c_1+c_{n-1})}{2} \implies \sigma_{i(n)(n-1)} > 0$ ce qui donne le résultat

- Nous avons donc démontré que si $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{(c_1+c_{n-1})}{2}$ alors si le leader souhaite augmenter les prix, tous les autres joueurs y sont favorables et que si $\frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} \leq \frac{(c_1+c_{n-1})}{2}$ tous les joueurs préfèrent le jeu à n joueurs.

Le même raisonnement s'appliquant au rang $n+1$, nous avons donc ainsi montré que, dans tous les cas, le prix (et le nombre joueur) sur le marché correspondent à la préférence du leader en coût. ■

Proposition 7 Proof. Le Joueur 1 préfère la situation à $n-1$ joueurs à la situa-

tion à n joueurs lorsque:

$$\sigma_{i(n)(n-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n} > \frac{c_n c_{n+1} - c_i^2}{(c_n+c_{n+1}-2c_i)}$$

Le joueur 1 décide donc exclure le joueur 3 si :

$$\sigma_{1(3)(2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{c_1+c_2+c_3}{3} > \frac{c_3 c_4 - c_1^2}{(c_3+c_4-2c_1)}$$

$$\frac{c_1+c_2+c_3}{3} - \frac{c_3 c_4 - c_1^2}{(c_3+c_4-2c_1)} > 0$$

Supposons $c_1 = 0$

et notons

$$a_{12} = c_2 > 0$$

$$a_{23} = c_3 - c_2 > 0$$

$$a_{34} = c_4 - c_3 > 0$$

Soit

$$c_4 = (a_{34} + a_{23} + a_{12})$$

$$c_3 = (a_{23} + a_{12})$$

$$c_2 = a_{12}$$

Soit

$$\frac{a_{12}+a_{23}+a_{12}}{3} - \frac{(a_{23}+a_{12})(a_{34}+a_{23}+a_{12})}{a_{23}+a_{12}+a_{34}+a_{23}+a_{12}} > 0$$

les a étant positifs il vient :

$$-a_{12}^2 + a_{12}a_{34} + a_{23}^2 + 2a_{23}a_{34} < 0$$

En isolant a_{34} on obtient:

$$a_{34} < \frac{a_{12}^2 - a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_{12}} \left(\frac{a_{12}^2 - a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} \right) &= \frac{a_{12}^2 + 4a_{12}a_{23} + a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} > 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_{23}} \left(\frac{a_{12}^2 - a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} \right) &= -2 \frac{a_{12}a_{23} + a_{23}^2 + a_{12}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} < 0 \\ \text{Et } \frac{a_{12}^2 + 4a_{12}a_{23} + a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} - 2 \frac{a_{12}a_{23} + a_{23}^2 + a_{12}^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} &= -\frac{(a_{23} - a_{12})^2}{(a_{12} + 2a_{23})^2} < 0\end{aligned}$$

Lorsque a_{34} diminue, la tendance à l'exclusion du joueur 3 augmente : plus l'écart entre 3 et 4 est fort moins le joueur 1 souhaite exclure le joueur 3 (qui permet un prix élevé)

Lorsque a_{12} augmente, la tendance à l'exclusion du joueur 3 augmente

Lorsque a_{23} diminue, la tendance à l'exclusion du joueur 3 augmente (de façon relativement plus sensible que a_{12})

Ainsi toutes choses étant égales par ailleurs, la tendance à l'exclusion du joueur 3 augmente avec c_2 .

Il n'y a donc jamais d'exclusion du joueur 3, lorsque $\frac{a_{12}^2 - a_{23}^2}{(a_{12} + 2a_{23})} < 0$, soit $a_{12} < a_{23}$ et ce quelque soit a_{34} . ■

Proposition 8 Proof. Soit une fonction de demande linéaire $P = a - bQ$ ■

L'équilibre de Cournot $(q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$ s'obtient en croisant les fonctions de meilleure réponse des deux joueurs et il vient:

$$\begin{aligned}q_1^{(2)} &= \frac{1}{3b} (a + c_2 - 2c_1) \\ q_2^{(2)} &= \frac{1}{3b} (a + c_1 - 2c_2)\end{aligned}$$

Proposition 10 Proof. et le prix

$$p = \frac{1}{3}(a + c_1 + c_2)$$

en exprimant $q_1^{(2)}$ et $q_2^{(2)}$ en fonction du prix:

$$q_1^{(2)} = \frac{1}{b}(p - c_1)$$

$$q_2^{(2)} = \frac{1}{b}(p - c_2)$$

les parts de marchés s'expriment alors en fonction de p

$$x_1(p) = \frac{p - c_1}{2p - c_1 - c_2}$$

$$x_2(p) = \frac{p - c_2}{2p - c_1 - c_2}$$

avec la notation $p = c_3$:

$$x_1 = \frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

$$x_2 = \frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

Ce résultat s'étend facilement à n joueurs :

L'équilibre de Cournot à n joueurs est défini par :

$$q_i = \frac{1}{(n+1)b} \left[a + \sum_{i \neq k} c_k - nc_i \right]$$

■

Proof. et on a

$$p = \frac{1}{(n+1)} \left(a + \sum_{i=1}^n c_i \right) \text{ et } \Pi_i = bq_i^2$$

En exprimant les volumes en fonction des prix il vient $q_i = \frac{1}{b}[p - c_i]$ et avec $\sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{b}[np - \sum_{i=1}^n c_i]$

ainsi les parts de marché ont l'expression:

$$x_i = \frac{[p - c_i]}{np - \sum_{i=1}^n c_i}$$

et on retrouve les parts de marché définies par le sous équilibre en négociation bilatérale. ■

4.1 Exemples

4.1.1 Exemples de diversité des situations d'exclusions à 10 joueurs potentiels

A dix joueurs potentiels voici des exemples illustrant les principaux résultats (fig 4 à 7)

Les joueurs 2 et 3 peuvent préférer des situations d'exclusion, mais elles sont toujours moins strictes que celles souhaitées par le leader en coût :

fig 4

Toutes les situations d'exclusion peuvent apparaître en modifiant les écarts de coûts entre C1 et C2 et entre C2 et C3:

fig 5, 6,

fig 7

4.1.2 Autre extension à plus de deux joueurs

Nous proposons ici une autre généralisation du modèle de négociation introduit pour le duopole qui diffère par le choix du point de rupture. Nous faisons ici référence à l'équilibre de négociation à un joueur de moins, les parts de marchés à n joueurs étant alors obtenues par récurrence. Comme dans le cas à deux joueurs il n'y a jamais d'exclusion effective, sauf si nous modifions le jeu par l'introduction de coûts fixes irrécupérables.

Négociation en menaces "multilatérales et simultanées" Nous général-

isons le modèle initial (section 2.3) en faisant l'hypothèse que les n joueurs présents considèrent leurs gains à $n - 1$ joueurs comme utilité de réservation (exclusion du joueur n) lors de la négociation avec l'entrant potentiel (n), l'utilité de réservation de ce dernier étant toujours nulle. Le prix en cas de succès de la négociation étant alors le coût permettant d'exclure le joueur ($n + 1$): c_{n+1} .

Ainsi nous faisons implicitement l'hypothèse que les négociations se déroulent de manière successive et sont indépendantes.

Nous exprimons de façon itérative les parts de marché négociées :

Proposition 11 *Dans le cas de deux joueurs exprimons les parts de marchés par récurrence*

Pour un prix $\leq c_3$ et une négociation en "equal gain", il existe une unique solution en parts de marché $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$

$$x_2^{(2)} = \frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_2)}$$

$$x_1^{(2)} = x_{1r}^{(2)} + \frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_1)}$$

avec

$$x_{1r}^{(2)} = \frac{(c_2 - c_1)}{(c_3 - c_1)}$$

$$Y^{(2)} = \frac{\left(1 - x_1^{(2)}r\right)}{\left(\frac{1}{(c_3 - c_1)} + \frac{1}{(c_3 - c_2)}\right)}$$

soit encore

$$x_2^{(2)} = \frac{c_3 - c_2}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{c_3 - c_1}{2c_3 - c_2 - c_1}$$

Proof. Vérifions que le volume d'indifférence $x_{1r}^{(2)}$, procure bien au joueur 1 le même profit qu'en monopole :

$$(c_3 - c_1)x_{1r}^{(2)} = \frac{(c_2 - c_1)}{(c_3 - c_1)}(c_3 - c_1) = \pi_1^{(2)}$$

Vérifions que les profits additionnels liés à l'entrée du joueur 2 sont identiques pour les deux joueurs: $\frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_1)}(c_3 - c_1) = \frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_2)}(c_3 - c_2) = Y^{(2)}$

En outre

$$x_1^{(2)} + x_2^{(2)} = x_{1r}^{(2)} + \frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_1)} + \frac{Y^{(2)}}{(c_3 - c_2)} = 1 \quad \blacksquare$$

Proposition 12 Généralisons ce résultat à n joueurs :

Soit $x_i^{(n)}$ la part de marché du joueur i dans le jeu à n joueurs à prix maximum c_{n+1} alors en négociation equal gain. Les parts de marché sont alors les suivantes:

$$x_i^{(n)} = x_{ir}^{(n)} + y_i^{(n)}$$

$$x_{ir}^{(n)} = x_i^{(n-1)} \frac{c_n - c_i}{c_{n+1} - c_i}$$

$$x_n^{(n)} r = 0$$

$$y_i^{(n)} = \frac{Y^{(n)}}{c_{n+1} - c_i}$$

$$Y^{(n)} = \frac{1 - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{(n)} r}{c_{n+1} - c_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_{n+1} - c_k}}$$

Proof. Vérifions que les volumes d'indifférence à n joueurs procurent bien le même profit que celui obtenu à $n - 1$

$$x_{ir}^{(n)} (c_{n+1} - c_i) = x_i^{(n)} (c_n - c_i)$$

$$x_i^{(n)} \frac{(c_n - c_i)}{(c_{n+1} - c_i)} (c_{n+1} - c_i) = x_i^{(n)} (c_n - c_i)$$

Vérifions que le profit additionnel est identique pour tous les joueurs :

$$y_i^{(n)} = \frac{Y^{(n)}}{c_{n+1} - c_i}$$

$$\pi_i^{(n)} = y_i^{(n)} (c_{n+1} - c_i) = Y^{(n)} \quad \forall i$$

En outre

$$\sum_1^n x_i^{(n)} = 1$$

$$\sum_1^n \left(x_{ir}^{(n)} + y_i^{(n)} \right) = 1$$

$$\sum_1^n \left(x_{ir}^{(n)} + \frac{Y^{(n)}}{c_{n+1} - c_i} \right) = 1$$

$$\sum_1^n x_{ir}^{(n)} + Y^{(n)} \sum_1^n \frac{1}{c_{n+1}-c_i} = 1$$

$$Y^{(n)} = \frac{1 - \sum_1^n x_i^{(n)} r}{\sum_1^n \frac{1}{c_{n+1}-c_i}}$$

Nous avons donc bien montré que cette règle d'affectation des parts de marchés vérifie la règle de négociation en "Equal Gain". ■

Avec ce type de négociation, le leader en coût ne peut que gagner à l'entrée du second joueur dès que $c_3 > c_2$, dans ce cas $0 < x_1 < 1$ et $x_2 > 0$. Il n'y a donc jamais d'exclusion effective du joueur 2 et donc pas de monopole sous menace d'entrée du joueur 2. Contrairement à la négociation "bilatérale", cette négociation à n joueurs ne permet pas de faire émerger des situations d'exclusion effective : les joueurs présents sont toujours assurés d'obtenir plus que leur profit de réservation avec l'entrée d'un nouveau, dès que $c_{n+1} > c_n$.

Nous proposons dans la section suivante une extension avec coût irrécupérable et engagement du leader en prix qui peut faire émerger des situations d'exclusion à deux joueurs (et dont l'esprit pourrait être généralisable à n joueurs).

Duopole avec "sunk cost" et engagement en prix du leader Soit le jeu suivant (cf. fig.11):

- 1) J1 s'engage sur un prix max.
- 2) J2 décide d'entrer ou non sachant le coût irrécupérable d'entrée F .
- 3) J1 et J2 négocient sur la base d'un "Equal Gain".

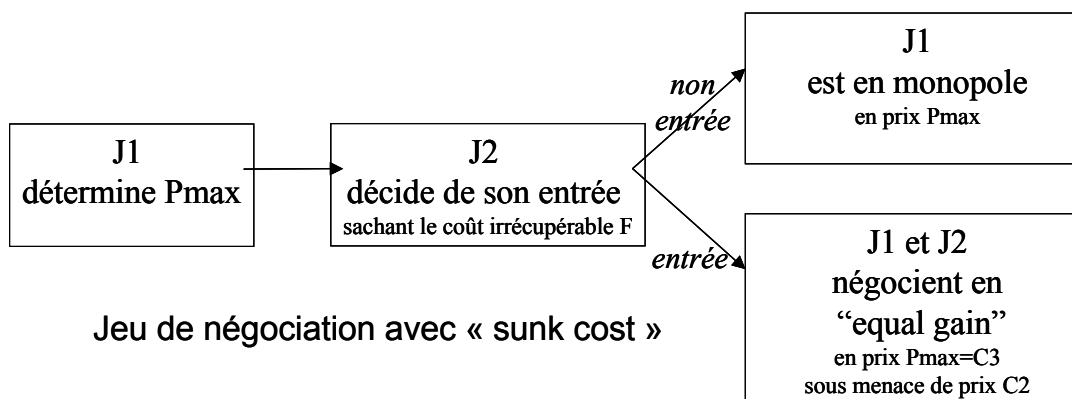


Figure 4:

Proposition 13 Pour $F > \frac{(\pi_1 - (c_2 - c_1))^2}{(2\pi_1 - (c_2 - c_1))}$ J1 décide d'exclure J2 en choisissant le prix:

$$p_l = (F + c_2) + \sqrt{F(F + c_2 - c_1)}$$

$$\text{avec } \pi_1 = \frac{(c_3 - c_1)^2}{c_3 - c_2 + c_3 - c_1}$$

Proof. Le coût fixe d'entrée F étant sunk, le joueur 2, s'il décide d'entrer, négociera, ex post, sur l'unique base des coûts variables de production. Recherchons donc le prix p_l tel que le gain généré ne lui permette pas de couvrir le coût F engagé à la période précédente.

D'après l'expression des parts de marché négociées en "Equal Gain", $p_l > c_2 > c_1$ est tel que:

$$\frac{Y^{(2)}}{(p_l^{(1)} - c_2)}(p_l - c_2) = F$$

$$\text{soit } Y^{(2)} = F$$

$$\text{soit } \frac{\left(1 - \frac{(c_2 - c_1)}{(p_l^{(1)} - c_1)}\right)}{\left(\frac{1}{(p_l - c_1)} + \frac{1}{(p_l - c_2)}\right)} = F$$

$$p_l^2 - 2p_l(c_2 + F) + F(c_1 + c_2) + c_2^2 = 0$$

$$\Delta = 4F(F + c_2 - c_1)$$

$$F \geq 0, c_2 - c_1 > 0$$

$$\text{donc } \Delta \geq 0$$

$$p_l = (c_2 + F) \pm \sqrt{F(F + c_2 - c_1)}$$

$$\text{si } p_l = (c_2 + F) - \sqrt{F(F + c_2 - c_1)} \text{ alors } c_1 > c_2$$

donc

$$p_l = (F + c_2) + \sqrt{F(F + c_2 - c_1)}$$

Le joueur 1 peut donc exclure le joueur 2 en utilisant p_l . Déterminons les conditions sur F pour que cette exclusion soit profitable au joueur 1

Exclusion si

$$p_l - c_1 > \pi_1$$

$$c_2 - c_1 + F + \sqrt{F(F + c_2 - c_1)} > \pi_1$$

$$F(F + c_2 - c_1) > \pi_1^2 + (c_2 - c_1 + F)^2 - 2\pi_1(c_2 - c_1 + F)$$

$$F > \frac{\pi_1^2}{(F + c_2 - c_1)} + (c_2 - c_1 + F) - 2\pi_1$$

$$\begin{aligned}
2\pi_1 &> \frac{\pi_1^2}{(F+c_2-c_1)} + c_2 - c_1 \\
F &> \frac{\pi_1^2}{(2\pi_1-(c_2-c_1))} - (c_2 - c_1) \\
F &> \frac{(\pi_1-(c_2-c_1))^2}{(2\pi_1-(c_2-c_1))}
\end{aligned}$$

$$F > \frac{(\pi_1 - (c_2 - c_1))^2}{(2\pi_1 - (c_2 - c_1))}$$

■

Remark 14 *Justification de l'hypothèse d'engagement du leader en prix :*

L'engagement à ne pas augmenter les prix après l'entrée de son concurrent est relativement crédible : le leader peut toujours s'engager publiquement auprès de ses clients sur des tarifs plafonds, voire même contractualiser cet engagement. Par ailleurs, refuser cette hypothèse revient à admettre que toute arrivée de nouveau concurrent (à partir du troisième) se traduise par une augmentation de prix, ce que les clients auraient sûrement du mal à accepter. L'irrécupérabilité des coûts fixes est une hypothèse assez classique reflétant des coûts exogènes⁹ de dispositifs industriels ou commerciaux.

Remark 15 *Justification économique de l'hypothèse d'engagement du leader en prix: il reste à comparer le profit de la firme en place en l'absence d'engagement sur le prix et celui en cas d'engagement sur le prix lui conférant le profit maximum*

⁹voir Sutton (1991)

The limits of accomodation : an experiment in Judo economics

Christophe Caron, Jean-Pierre Ponssard and Hervé Tanguy

Laboratoire d'Econométrie, Ecole Polytechnique, Paris.

June 2004

Abstract

Judo economics suggests that a strong incumbent may prefer to accomodate a weak entrant rather than decrease its price to keep its market share. This paper explores this idea in a situation in which there are many weak, possibly heterogenous, entrants. This context is motivated by the cement industry in which there are local oligopolists and traders. There should be limits to accomodation. A model is elaborated to test this hypothesis and preliminary experimental results are discussed.

1 Introduction

The idea of "Judo economics" has been introduced in the industrial organization literature to suggest that a strong incumbent may prefer to accommodate a weak entrant rather than decrease its price to keep its market share (Gelman and Salop, 1992). Several assumptions are crucial to this result: the ability of the weak entrant to commit to a small enough capacity (and so exploit its weakness as in judo), the absence of a large fixed cost of entry, the absence of price discrimination. Airlines are often used as a classical example of such situations, though price discrimination by major carriers has reduced the benefits of weak entrants over time (Brandenburger, 1995). The local telecom market, in which historical incumbents have large market shares, offers another illustration.

Judo economics has attracted some attention from theoretic economists. Sør-gard (1995) argues that in a repeated situation weak entrants should reconsider making small commitments because a larger capacity may be useful as a threat point to sustain a higher collusive profit. Dechenaux and Kovenock (2003) partly refute this argument through a careful exploration of the Pareto payoffs that are sustainable through tacit collusion for different discount factors. They show that Judo economics, i.e. committing to a small enough capacity, may be used to extend this frontier to one's benefit. The highest stationary perfect equilibrium payoff for the weak firm requires that it undercuts its rival's price and rations demand. This framework is used by the authors to convincingly interpret the data observed in the Great Salt Duopoly (Rees, 1993). These two papers are directly related to the present analysis. However, the model to be discussed here not only introduces repetition but also allows for many weak entrants.

The empirical motivation comes for the cement market. Cement is a homogeneous product with high transport cost, it is produced in mills which require significant investment cost and a relatively low production cost. Competition among existing firms takes the form of a spatial oligopoly with "*home*" markets around each plant. In a way, in anyone of these home markets, a strong incumbent is facing a Judo economics situation relative to the surrounding plants. Illustrations of Judo economics in cement are numerous, see for examples Sherer (1975) or

Gultus (1984). In the early eighties, a new form of competition arose due to the rapid decline in shipping costs, with cement being delivered in bulk and no longer in bags. Importers typically adopted a myopic behavior quite different from the other oligopolists. They do not invest in local production facilities and stay in the market only as long as domestic price is higher than their delivered cash costs. Domestic producers are unable to use "tit for tat" strategies against such players that have no home market. This structural change destabilized local oligopolies and competition became more global (for references on competition in the cement industry see for instance d'Aspremont, Encaoua and Ponssard, 2000, and Dumez and Jeunemaître, 2000).

Our research objective is to explore the validity of Judo economics in this more global situation. We are interested in understanding the competitive mechanisms that may limit accommodation behaviors in multi-market and multi-period contexts with two profiles of players, local producers with home markets and importers without any home market. Such strategic situations are analytically complex because simple Judo economics and tit for tat behaviors between local producers interact with short term competition between local producers and importers. Without an appropriate theoretic frame of analysis the empirical appraisal of such situations is difficult. Standard anti-trust approaches do not apply: the "relevant" market is difficult to define because of the networking of local markets, low market concentration in a local market does not necessarily go along with production efficiency because of high transport cost.

This paper is a first step in providing some answers to these questions, using experimental economics. An experimental framework has been designed featuring eight oligopolists and an importer. In each home market, the firms face an inelastic demand curve, commit to some quantities, and then obtain actual market shares depending on the level of accommodation decided by the firm located on that market. The fact that the firms have quite different transport costs to that market is the key strategic aspect. The game theoretic analysis of the experimental game in a "one market" setting is carried out. Two extreme solution concepts are used in this analysis: the non cooperative Nash equilibrium and the cooperative solution based on a specific form of Nash bargaining. The latter solution concept is seen

as a simplified way to analyze collusion in a repeated game. It is shown that, in a situation in which there is no importer, there are no limits to accommodation. However, as soon as the importer is introduced with its specific behavior, there may be limits to accommodation. In both solution concepts, there is a solution in which the number of accommodated firms goes down from 8 to 2, the two entrants being the nearest firms to the home market under consideration. However, there are also solutions in which all firms are accommodated, but these solutions require much more sophisticated behaviors which are unlikely to occur in practice. This experimental game provides an interesting benchmark to test empirically the limits of accommodation.

The game has been experimented in class room with students. These results support our hypothesis but they are too preliminary to provide definite answers. They should be viewed as a feasibility step in our research project.

The paper is organized as follows. Section 2 describes the experimental game. A static reduced form of this game with only one home market is analyzed in section 3: without the importer all firms would be accommodated. The experimental game is then analyzed in section 4, introducing the importer, repetition and a home market for each firm. Preliminary experimental results are discussed in section 5.

2 The experimental game

2.1 Description of the game

The economic situation features a specific form of price-quantity competition among eight firms in a homogenous market with horizontal differentiation. The firms are located on a circle and each of these eight positions also coincides with a market (see figure 1).

Each firm manages a plant of a given capacity production, with no variable production cost but with a linear transport cost from the plant to the different markets.

The market on which a given firm is located is denoted the *home market* of this firm.

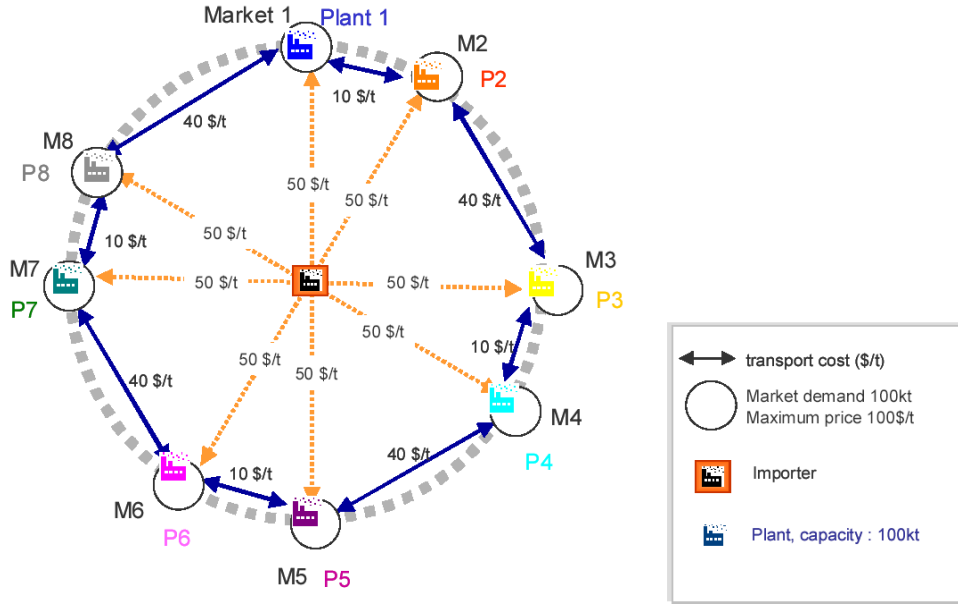


Figure 1: The Experimental Game

Each market is homogenous and completely inelastic to price.

A dummy player is introduced. It is located in the middle of the circle and represents *an importer*. This firm cannot commit to small quantities, it always offers to serve the whole demand on all markets. It has the same transport cost to any one of the eight market.

The game consists of playing repeatedly the same stage game.

At each stage, each firm:

- decides how much quantity to offer on each market,
- sets the price on its home market knowing the quantities offered by competitors given that no firm deliver a quantity to a market if the price is lower than its transport cost to that market and that actual quantities in that market are proportional to the offers of the remaining firms.

Though the firms (and markets) are not uniformly distributed on the circle, the firms are symmetric in the sense that each firm faces the same strategic game.

The actual data used in the game for demand and costs are detailed in figure 1. Note that the demand in each market is 100kt, the capacity of a plant is 100kt and the reservation unit price is 100\$/t.

Two additional rules are introduced:

- a firm cannot offer in any market more than this market demand that is 100kt;
- in case the allocated quantity to a given firm exceeds its capacity, this firm has to buy the excess from the importer and to pay the extra transport cost from the importer location and then to the markets it has to deliver.

2.1.1 Notation and definitions

- 8 markets with $j \in \{1, 2 \dots 8\}$ arranged on a circle,
- 8 active players with $i \in \{1, 2 \dots 8\}$ and a dummy player i_0 ,
- c_{ij} denotes the linear transport cost for player i to sell in market j , it is assumed that $c_{ii} = 0\$/t$ for $i \in \{1, 2 \dots 8\}$ then the linear transport cost in $\$/t$ increases from 0 to 10, 40, 50 (with two markets and the importer at that distance), 60, 90, 100 according to the spatial arrangement detailed in figure 1,
- $c_{0j} = 50\$/t$ for all $j \in \{1, 2 \dots 8\}$,
- there is no fixed cost,
- each player $i \in \{1, 2 \dots 8\}$ has the same capacity constraint $K = 100kt$, the dummy player has none,
- in each market the (non elastic) demand is $D = 100kt$ with a reservation price $p_r = 100\$/t$,
- the quantity offered to market j by player i is denoted q_{ij} , with $0 \leq q_{ij} \leq D$,
- the price at market j is denoted p_j .
- The actual quantity that player i delivers at market j is denoted q_{ij}^* .

2.2 Quantities delivered and payoff functions

The quantities q_{ij}^* are determined as follows :

- for all j such $c_{ij} \geq p_j$ we have $q_{ij}^* = 0$
- for all j such $c_{ij} < p_j$
 - if $\sum_i q_{ij} \leq D$ we have $q_{ij}^* = q_{ij}$
 - if $\sum_i q_{ij} > D$ we have $q_{ij}^* = Dq_{ij} / \sum_i q_{ij}$

Let π_i denote player i 's payoff. It is determined as follows

- if $\sum_j q_{ij}^* \leq K$ we have $\pi_i = \sum_j q_{ij}^* (p_j - c_{ij})$
- if $\sum_j q_{ij}^* > K$ we have $\pi_i = \sum_j q_{ij}^* (p_j - c_{ij}) - 50(K - \sum_j q_{ij}^*)$
(in the latter case the corresponding player buys from the dummy player).

2.3 The extensive form

The players repeatedly play the following stage game which involves four steps :

- step 1: each player $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ selects some quantity q_{ij} with $0 \leq q_{ij} \leq D$, the dummy player selects $q_{0j} = 100$ for all $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$,
- step 2: each player $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ observes the moves selected at step 1 for its home market $j = i$ and selects the price p_j for this market,
- step 3: each player $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ gets its delivered quantities and payoff, respectively q_{ij}^* and π_i .
- step 4: all information regarding offers, prices, quantities and payoffs become public information.

3 Theoretic analysis of the n-player 1-market game without the dummy player

A reduced game is constructed from the experimental one. The attention is on only one market and the dummy player is excluded from the analysis.

This reduced game is analyzed in two directions. In a non cooperative framework, in the special case in which the capacity constraints are not active, a simple characterization of a Nash equilibrium is given. In this Nash equilibrium, each firm induces entry through limiting its offer in a process similar to the Judo economics

argument. However, it can be proved that entry is accomodated for all players, so that this non cooperative approach is not very selective as regards the number of entrants.

In a cooperative framework, the active players bargain with a potential entrant using an equal sharing rule. The threat point is the cooperative solution in which this entrant would be excluded. Cooperative solutions are obtained in an induction process over the number of active players. Again accomodation prevails for all entrants.

For convenience specific simplified notations are introduced.

3.1 Simplified notations

n firms, a firm is denoted i with $i \in N = \{1, \dots, n\}$ firm 1 is said to be the incumbent and the other firms the entrants;

the constant marginal cost is denoted c_i with $c_i < c_{i+1}$ for all i , without lack of generality it is further assumed that $c_1 = 0$;

the price is denoted p , the total demand $D(p)$ is such that:

if $p \leq p_r$ $D(p) = D$

if $p > p_r$ $D(p) = 0$;

recall that p_r stands for the reservation price, we have $c_n < p_r$;

each firm has a limited capacity which is assumed to be equal to D , the size of the market;

the quantity actually produced by firm i is denoted q_i^* ;

the profit for firm i is denoted π_i , it is obtained as $\pi_i = (p - c_i)q_i^*$.

3.2 The non cooperative solution for the static game

The extensive form simplifies as follows:

stage 1: all firms select a quantity offer q_i , with $0 \leq q_i \leq D$;

stage 2: the incumbent firm selects the price p , with $0 \leq p \leq p_r$, knowing the decisions made at stage 1;

stage 3: the quantities produced by each firm q_i^* are determined as follows: all entrant firms j such that $p \leq c_j$ are excluded, $q_j^* = 0$; the remaining entrants are

called *active*; denote $N(p)$ the subset of active firms for a given p , then

$$\text{if } \sum_{i \in N(p)} q_i \leq D \quad q_i^* = q_i$$

$$\text{if } \sum_{i \in N(p)} q_i > D \quad q_i^* = Dq_i / \sum_{i \in N(p)} q_i;$$

stage 3: the firms gets their pay-offs $\pi_i = (p - c_i)q_i^*$.

Lemma 1 *It is a dominant strategy for the incumbent to select $q_i = D$.*

Proof. Whatever the price p , the incumbent profit is an increasing function of q_i . ■

Definition 2 *Define recursively $q_i^a = \text{Min}((c_{i+1}/c_i - 1)\Sigma_1^{i-1}q_k^a, D)$ starting with $q_1^a = D$. For all entrants i , the quantity offer q_i^a will be referred as the **induced accomodation strategy**.*

Proposition 3 *Assume that $q_i^a < D$ for all $i > 1$. The following strategies constitute a perfect Nash equilibrium: for all i the quantity offers are q_i^a ; the incumbent selects the price that maximizes its payoff given the offers q_i so that, if for all i we have $q_i \leq q_i^a$, the incumbent selects a price $p = p_r$.*

Proof. The incumbent profit writes:

$$\pi_1(p = c_{i+1}) = c_{i+1}D / \Sigma_1^i q_k^a,$$

by definition of q_i^a we have $c_{i+1}D / \Sigma_1^i q_k^a = c_i D / \Sigma_1^{i-1} q_k^a$

so that $\pi_1(p = c_{i+1}) = \pi_1(p = c_i)$ and $p = p_r$ is a best reply.

Any entrant i that increases its offer q_i above q_i^a triggers a best reply in price from the incumbent such that $p = c_i$ and it will be excluded, whereas it is certainly not a good strategy to decrease q_i^a , thus $q_i = q_i^a$ is a best reply. ■

Comment 1 There are other Nash equilibria. Modify the preceding equilibrium by allowing some firm k , $2 \leq k < n$, to select $q_k = q_k^a + \alpha$ while firm $k + 1$ (or any other firm i with $k < i \leq n$) selects $q_{k+1} = q_{k+1}^a - \alpha$. This will generate another Nash equilibrium since the incumbent's best strategy at the second stage remains to accomodate all entrants, even if it would not do so if it were restricted to allow only k entrants.

Comment 2 To obtain an equilibrium whenever $q_k^a = D$ for some k , one should increase q_{k-1} (or any offer q_i with $1 < i < k$) above q_{k-1}^a until $\pi_1(p = c_{k+1}) = \pi_1(p = c_{k-2})$. The incumbent will accomodate all entrants, even if it would not accomodate firm $k - 1$ if the game would involve only firms 1 to $k - 1$. Then a similar technique as the one described in comment 1 may be used to obtain other Nash equilibria.

Comment 3 It is easily seen that any equilibrium necessarily induces entry of all firms. Consider the lowest cost firm i for which this were not the case, it must be that $p \geq c_i$ but then using $q_i = q_i^a$ firm i will induce accomodation. This entry result depends crucially on two assumptions: the absence of fixed cost and the strict inequality between marginal costs. This second assumption is crucial because if $c_i = c_{i+1}$, one equilibrium may be constructed in which quantity offers are such as $q_i = q_{i+1} = D$. Any deviation of anyone player i or $i + 1$ alone cannot induce an accomodation strategy of the incumbent and an equilibrium with only $i - 1$ players is obtained.

3.3 A cooperative solution as a short cut to collusion in the repeated game

The selected cooperative solution draws from the "Equal Gain" solution to the standard Nash bargaining problem as proposed by (Roth, 1979). In this approach, each player gains equally relative to the threat point. This solution is proposed as a simplified way to study the repeated game (without discounting).

Consider the present context. Suppose the only lower cost k firms bargain. The price would be the highest one that excludes firm $k + 1$, that is $p = c_{k+1}$. The natural question for the set of k firms is to know whether or not it was valuable in the first place to include firm k . The idea is to use as a threat point in this bargaining game the cooperative solution in which firm k is exluded with $p = c_k$. The set of solutions over k can be constructed by induction.

Definition 4 *The k firm cooperative solution of the game, to be denoted as $(q_1^k, \dots, q_k^k; p = c_{k+1})$, is the Equal Gain bargaining solution in which the threat point is the $k - 1$ firm cooperative solution $(q_1^{k-1}, \dots, q_{k-1}^{k-1}; p = c_k)$.*

Proposition 5 *The k firm cooperative solution $(q_1^k, \dots, q_k^k; p = c_{k+1})$ is obtained from the $k-1$ firm cooperative solution $(q_1^{k-1}, \dots, q_{k-1}^{k-1}; p = c_k)$ as follows:*

$$q_k^k = (1 - \Sigma_1^k q_j^{k-1} (c_k - c_j) / (c_{k+1} - c_j)) / ((c_{k+1} - c_k) (\Sigma_1^k 1 / (c_{k+1} - c_j)))$$

for all $j, 1 \leq j \leq k-1, q_j^k = q_k^k (c_{k+1} - c_k) / (c_{k+1} - c_j) + q_j^{k-1} (c_k - c_j) / (c_{k+1} - c_j).$

Proof. By construction:

for all $j, 1 \leq j \leq k, \pi_j^k = (c_{k+1} - c_j) q_j^k = \pi_j^{k-1} + \pi_k^k = (c_k - c_j) q_j^{k-1} + (c_{k+1} - c_k) q_k^k$
substituting q_j^k for all $j, 1 \leq j \leq k-1$, in $\Sigma_1^k q_j^k = D$ gives the result. ■

Comment 5 Since π_j^k is clearly increasing over k , the cooperative solution implies accomodation of all entrants.

4 Theoretic analysis of the experimental game

This analysis may be carried out using the results obtained in the previous section on a reduced form of the game. This reduced form involves several aspects:

- the number of markets is 1 instead of 8;
- there is no dummy player;
- the linear transport costs are strictly increasing.

To analyze the experimental game we proceed as follows. Firstly a numerical reduced game with the data corresponding to the experimental game is solved. Secondly a dummy player is introduced. Thirdly, the effects of the multiplicity of markets and the repetition of the game are discussed.

4.1 Analysis of a numerical reduced game

The index j of the market is deleted. It will be convenient to relabel the players by increasing transport costs to obtain the following table.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
0	10	40	50	50	60	90	100

Observe that $c_4 = c_5$. Observe also that $c_8 = p^{\max}$ so that q_8 is irrelevant.

4.1.1 Nash equilibria

Analysis without a dummy player For simplicity, assume that players 4 and 5 act as a unique player. The "accommodation induced strategies" q_k^a for $k = 1$ to 8 of this reduced game are easily obtained (see table below). Observe that the capacity constraints are binding for firm 6 (and firm 2). The profit for player 1, according to the number i of players that are accommodated (that number i is obtained through price setting by player 1 at c_{i+1}) is also given.

Because of the capacity constraint of firm 6, these entry accomodation quantities q_k^a do not constitute a Nash equilibrium.

i	1	2	3	4&5	6	7	8
c_i	0	10	40	50	60	90	100
$(c_{i+1}/c_i - 1)$		3	1/4	1/5	1/2	1/9	
$(c_{i+1}/c_i - 1)\sum_{i=1}^{i-1} q_k^a$		300	50	50	150	400/9	
q_i^a	100	100	50	50	100	400/9	
$\pi_1(q_i^a)$	1000	2000	2000	2000	2250	2250	
q_i^*	100	100	50	100	100	50	
$\pi_1(q_i^*)$	1000	2000	2000	2000	2000	2000	

A Nash equilibrium with offers (q_i^*) may be constructed from the (q_k^a) offers. A possibility is to increase firms 4&5 offer to a level such that player 1's profit remains at the same level for $p = p_r$ as it would be with $p = c_2$. It can be seen that firms 4&5 may increase their offer to 100 but then firm 7 would have to reduce its offer to 50. To see that this is indeed a Nash equilibrium observe that: firms 3 and 7 have no incentive to unilaterally increase their respective offer since it would trigger exclusion; the other firms cannot increase their offers which are at capacity; and no firm has any incentive to reduce its offer. There are many other Nash equilibria.

Analysis with the dummy player The introduction of the dummy player limits accommodation in the sense that the incumbent's profit may now decrease with the number of active players and thus an exclusion strategy can emerge.

Proposition 6 *The reduced game has two families of Nash equilibria. Denote by q_i^* the players associated offers, then :*

$$\text{Family 1 : } q_1^* = 100, q_2^* = 100, q_3^* = 50,$$

$$q_4^* + q_5^* + q_6^* > 100,$$

$$q_4^* + q_5^* + q_6^* + q_7^* > 150,$$

there are only three active players, the associated price set by player 1 is 50 and respective profits would be (2000, 1600, 200, 0, 0, 0, 0);

$$\text{Family 2 : } q_1^* = 100, q_2^* = 100, q_3^* = 50,$$

$$q_4^* + q_5^* + q_6^* = 100 \text{ with } q_6^* > 0,$$

$$q_7^* = 50,$$

there are 8 active players, including the dummy player, the associated price set by player 1 is 100 and in the specific case $q_6^ = 100$ and respective profits would be (2000, 1800, 600, 0, 0, 800, 100, 0).*

Proof. *The fact that the dummy player is constrained to play $q_0 = 100$ implies that players 4 and 5 cannot alone induce accommodation. Accommodation needs to involve player 6 as well, using the same calculation as in the recursive calculation of accommodation quantities, $q_4^* + q_5^* + q_6^* = 100$. Then player 7 would induce accommodation through playing $q_7^* = 50$.*

Family 1 is obtained assuming players 4 to 7 simultaneously commit to (too) high quantities, so that anyone player cannot induce accommodation through decreasing his own quantity alone. The accommodation process at work in the recursive calculation of accommodation quantities is stopped.

Family 2 corresponds to the direct extension of the no dummy no tie version of the preceding analysis, assuming now that players 4, 5 and 6 play as a unique player. ■

These two families correspond to quite distinct behaviors. In family 1, the potential entrants 4, 5 and 6 prevent anyone of them to allow unilateral accommodation. In family 2, the accommodation process is restored because of the internal coordination among these entrants.

Family 1 appears to be more in line with the spirit of Judo economics, local producers are accommodated and the importer disciplines the price level.

4.1.2 The cooperative solution

The cooperative solution is defined by induction over k . The k solution is based on a bargaining process among the k lowest marginal cost firms acting as incumbents with a price $p = c_{k+1}$. This process assumes equal sharing from a threat point. The threat point is the $k - 1$ cooperative solution of the game. This bargaining process is proposed as a substitute to a collusive Nash equilibrium in a repeated situation. A more satisfactory approach would require the direct calculation of such an equilibrium.

The cooperative solution of the reduced game with no dummy is detailed in figure 2 (it is a simple matter to adapt the solution given in section 3 to the case of ties among transport costs).

active firms		1		1,2		1,2,3		1,2,3,4,5		1,2,3,4,5,6		1,2,3,4,5,6,7	
price		10		40		50		60		90		100	
firm	transport cost	market share	profit	market share	profit	market share	profit	market share	profit	market share	profit	market share	profit
1	0	100%	1 000	57%	2 286	49%	2 438	43%	2 551	33%	2 937	30%	3 011
2	10			43%	1 286	36%	1 438	31%	1 551	22%	1 765	20%	1 839
3	40					15%	153	13%	266	11%	533	10%	607
4	50							11%	113	11%	436	10%	510
5	50							11%	113	11%	436	10%	510
6	60									13%	386	11%	460
7	90											7%	74

Figure 2: The cooperative solution

Figure 2 provides the k firm cooperative solutions. The introduction of the dummy player makes impossible to get a solution with 5 active players. To see this observe that the profit of 2 438 for firm 1 obtained at a price of $p = 60$ would require a market share of 41%, similarly firm 2 would require a market share of 29%. Since $q_0 = 100$ and $q_1 \leq 100$, the market share of the dummy player has to be at least equal to the one of firm 1, thus a contradiction. However, as for the non cooperative solution, there may be cooperative solutions for a larger set of active players since this contradiction is removed with a higher price.

4.2 The repeated n -market game

No formal analysis of the n -market game is made, some hints are given.

Intuitively, the existence of spatial markets should facilitate some form of collusion. Suppose each player makes an offer only on his home market. With a price of 50, he gets 5 000. He would also get 5 000 with a price of 100 allowing the dummy player to have 50% market share. It should be possible to sustain any of these two situations as a Nash equilibrium.

Less extreme forms of collusion may also be obtained.

The spatial markets are not uniformly distributed. The markets are structured by the geography: three are "close" to each other, then two are somewhat "distant" to these three, and the last two are "far away". The theoretic analysis of the one-market game may be used. One may certainly construct an equilibrium in which the overall market structure is the geographic addition of the one-market cooperative solution in which accomodation in anyone market is limited to 3 firms, the price being set at the delivered cash cost of the importer.

5 The experiment : some preliminary results

This experimental game provides an interesting framework to test the limits of accomodation. Can we empirically observe the analytical result obtained in the one market model: without the importer, there would be no limit to accomodation while, with the importer, accomodation would be strictly limited and the price set at the importer's delivered cash cost ? How does this result change when more markets are introduced so that tacit collusion is made easier ? More generally, from an anti-trust point of view, collusion reduces transport cost but may lead to higher prices. Accomodation, as long as it does not reduce prices, is only a wast of resources. Then the role of the importer is beneficiary both because it limits accomodation and because it disciplines the price level. Is this analysis supported by the empirical results ?

At this point an exploratory test of the experimental has been made using the 8-market, multi-period setting. This test took place as part of a managerial economics class. It has been used as a pedagogical introduction to competitive analysis starting from the standard industry cost curve to more strategic behaviors, such as two stage games illustrating entry barriers and Judo economics. However,

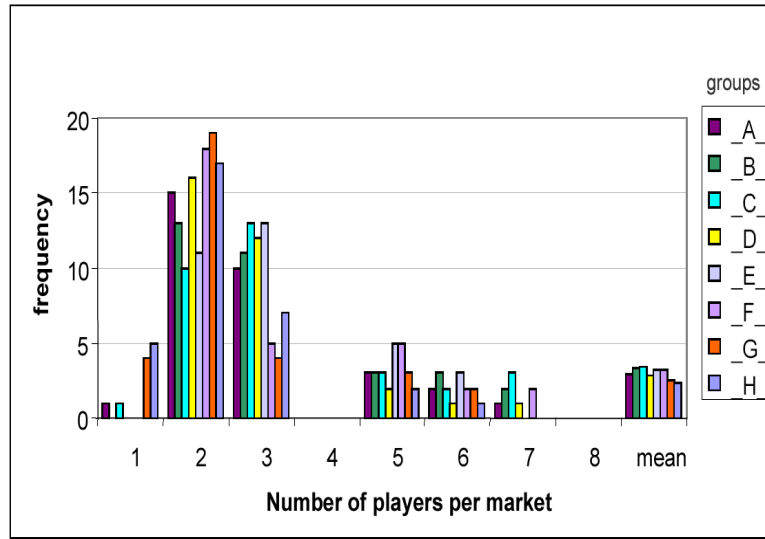


Figure 3: Experimental Results

all of these concepts were introduced after the experiment had taken place.

A class of 64 students was distributed in 8 teams and in each team, a student operated a firm. Each team played 4 rounds over two hours. There were no direct rewards given to the students apart from taking part of an exercise analysis of pedagogical value.

Figure 3 gives the frequency of the number of active players over all plays. These results are somewhat consistent with the theoretical analysis: the existence of a dummy player does seem to be a focal point to limit accommodation. The fact that there are many cases with only two active players is a sign of high price competition.

The existence of cases with more than 5 players is not related to sophisticated rational accommodation as might be suggested by the theoretic analysis. These cases correspond to incumbents setting high prices irrespectively of the maximization of their own profit. Indeed quite many students did not go through the explicit calculation of the best cutting price, given the offers of all players. Such a behavior benefited to the more aggressive players often located far away from these naïve players .

6 References

d'Aspremont, C. , D. Encaoua and J.P. Ponssard (2000), "Competition policy and game theory : reflection based on the cement industry case" in *Market Structure and Competition Policy*, (G. Norman and J. F. Thisse eds.), ch.1, 9-30, Cambridge University Press.

Brandenburger, A. (1995) "Judo Economics - Teaching Note", Harvard Business School.

Dumez H. and A. Jeunemaître (2000) *Understanding and Regulating the Market at a Time of Globalization : The Case of the Cement Industry*, Basingstoke, Palgrave (McMillan).

Dechenaux, E. and D. Kovenock (2003) "Endogenous rationing, price competition and collusion in capacity constrained supergames", working paper, Department of Economics, Krannert School of Management, Purdue University.

Gelman J., and S. C. Salop (1983) "Judo Economics: Capacity limitation and coupon competition", *Bell Journal of Economics*, 14, 315-325.

Gultus G. (1984), *Omsetning av sement*, international note in Prisdirektoratet, dated 28.11.84.

Rees, R. (1993), "Collusive equilibrium in the Great Salt Duopoly", *The Economic Journal*, 103, 833-848.

Roth, A.E. (1979), *Axiomatic model of bargaining*, Springer, New York.

Sherer, F.M., A. Beckenstein, E. Kaufer and R.D. Murphy (1975), *The Economics of Multiplant Operation. An International Comparison Study*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Sorgar, L. (1995), "Judo Economics reconsidered: Capacity limitation, entry and collusion" *International Journal of Industrial Organization*, 15, 349-368.