

Table des matières

Remerciements

Chapitre 1

Introduction

1.1	Contexte et motivations	13
1.1.1	Objectifs de la simulation de réservoir	13
1.1.2	Intérêt de l'utilisation de nouvelles méthodes numériques	14
1.2	Simulation numérique et méthodes multi-échelles	15
1.3	État de l'art des méthodes multi-échelles	15
1.4	Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse	16
1.4.1	Résultats théoriques d'homogénéisation	16
1.4.2	Définition d'une nouvelle méthode multi-échelle et estimation d'erreur	18
1.4.3	Implémentation de notre nouvelle méthode multi-échelle et résultats	19
1.4.4	Implémentation de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles	20
1.5	Perspectives	24
1.5.1	Généralisation des résultats d'homogénéisation sur le transport	24
1.5.2	Amélioration du module implémenté dans <i>Arcane</i> pour calculer la pression	25
1.5.3	Amélioration du module implémenté dans <i>Arcane</i> pour simuler l'évolution d'un traceur	26

Liste des publications et communications

28

Chapitre 2

Définition des problèmes modèles

2.1	Problème modèle d'écoulement diphasique	31
2.2	Définition du maillage et notations	32
2.3	Schéma IMPES	34
2.3.1	Résolution du problème en pression	34
2.3.2	Résolution du problème en saturation	35
2.4	Schéma IMPIMS	36
2.5	Résultats numériques	37
2.5.1	Présentation des cas étudiés	37
2.5.2	Présentation des résultats	39

Chapitre 3**Homogénéisation d'un problème elliptique**

3.1	Présentation de la théorie de l'homogénéisation	41
3.2	Problème de départ	42
3.3	Résultats et théorèmes préliminaires	43
3.4	Développement asymptotique formel	43
3.5	Convergence à deux échelles	48
3.6	Résultat de convergence et estimation <i>a priori</i>	49

Chapitre 4**Une méthode multi-échelle pour des problèmes elliptiques**

4.1	Étude bibliographique des méthodes multi-échelles	51
4.1.1	Définition	52
4.1.2	Méthodes des éléments finis multi-échelles	53
4.1.3	Méthodes multi-échelles hétérogènes	53
4.1.4	Méthodes des volumes finis multi-échelles	55
4.2	Définition de la méthode multi-échelle	57
4.2.1	Hypothèses de départ	57
4.2.2	Idée de la méthode	57
4.2.3	Hypothèses de discrétisation	58
4.2.4	Définition de la méthode	59
4.3	Estimation <i>a priori</i>	60
4.3.1	Terme d'homogénéisation globale G_1	61
4.3.2	Terme d'interpolation G_2	62
4.3.3	Terme d'homogénéisation locale G_3	63
4.3.4	Terme d'interpolation locale G_4	66
4.3.5	Conclusion	69
4.4	Présentation des résultats obtenus avec cette méthode	69
4.4.1	Remarques préliminaires	69
4.4.2	Application à la couche 85 du cas SPE 10	69

Chapitre 5**Méthode des éléments finis mixtes multi-échelles pour la simulation d'écoulements**

5.1	Notations et définitions	73
5.2	Application au problème monophasique	75
5.2.1	Calcul des fonctions de base	75
5.2.2	Passage des variables grossières aux variables fines	77
5.2.3	Construction du système grossier	77
5.2.4	Estimation <i>a priori</i>	79
5.3	Extension au cas diphasique	79
5.3.1	Mise à jour des fonctions de base	79

5.3.2	Utilisation d'une information globale	80
5.4	Présentation des résultats	81
5.4.1	Couche 85 du cas SPE10	81
5.4.2	Cas fracturé	83

Chapitre 6

Implémentation et performances

6.1	La plate-forme <i>Arcane</i>	85
6.1.1	Architecture de la plate-forme	86
6.1.2	Maillage et variable	86
6.1.3	Parallélisme	87
6.1.4	Principe de développement d'une application	91
6.2	Architecture du prototype	92
6.2.1	Maillages	92
6.2.2	Organisation du module principal	93
6.2.3	Organisation des services physiques	93
6.2.4	Organisation des services numériques	94
6.3	Résultats de performance	95
6.3.1	Présentation des supercalculateurs utilisés	95
6.3.2	Cas SPE10 3D	96
6.3.3	Cube	99

Chapitre 7

Homogénéisation d'un problème de transport

7.1	Construction du problème modèle	101
7.2	Remarques préliminaires sur la mise à l'échelle	102
7.3	Définition du problème périodique	103
7.4	Résultats préliminaires	104
7.5	Développement asymptotique avec dérive	104
7.6	Convergence à deux échelles avec dérive	110
7.7	Résultat de convergence	114
7.8	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	117

Chapitre 8

Une nouvelle méthode multi-échelle pour un problème de transport

8.1	Construction de la méthode multi-échelle	125
8.1.1	Hypothèses de départ	125
8.1.2	Idée de la méthode	126
8.1.3	Définition de la méthode	127
8.2	Estimation <i>a priori</i> en temps continu	128
8.2.1	Terme en gradient X_1	130
8.2.2	Terme de dérivée convective X_3	135

8.2.3	Termes X_2 et X_4	148
8.2.4	Erreur initiale X_5	148
8.3	Conclusion	149
<hr/>		
Chapitre 9		
Résultats obtenus avec la nouvelle méthode multi-échelle		
9.1	Présentation des deux implémentations	151
9.1.1	Implémentation sur FreeFem++	151
9.1.2	Implémentation sur le prototype <i>Arcane</i>	151
9.2	Difficultés dans l'implémentation de la méthode	152
9.2.1	Résolution des problèmes de cellule	152
9.2.2	Discrétisation en temps	153
9.2.3	Construction du système grossier	154
9.3	Application de la méthode	155
9.3.1	Cas d'application	155
9.3.2	Visualisation de la solution en utilisant <i>FreeFem++</i>	156
9.3.3	Résultats obtenus en utilisant la plate-forme <i>Arcane</i>	157
Bibliographie		160
Annexe A Résultats d'analyse fonctionnelle et d'approximation variationnelle		165
A.1	Définitions et résultats importants	165
A.1.1	Espaces L^p	165
A.1.2	Espaces de Sobolev	166
A.1.3	Espaces $W_0^{1,p}$	167
A.1.4	Inégalités de Sobolev	167
A.2	Résolution d'équations aux dérivées partielles	168
A.2.1	Théorème de Lax-Milgram et généralisation	168
A.2.2	Théorème de Jacques-Louis Lions	168
A.2.3	Régularité elliptique	168
A.3	Approximation variationnelle des solutions d'équations aux dérivées partielles	169
A.3.1	Lemme de Céa	169
A.3.2	Définition d'un élément fini	170
A.3.3	Éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange	170
A.3.4	Élément de référence	170
A.3.5	Inégalités d'interpolation	171
Annexe B Estimation d'erreur de la solution semi-discrète		173
B.1	Introduction du problème	173
B.2	Discrétisation	174
B.3	Remarque préliminaire	174
B.4	Estimation d'erreur	175

Annexe C Homogénéisation locale pour le problème de transport	179
Annexe D Méthode des caractéristiques	183



Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et motivations

1.1.1 Objectifs de la simulation de réservoir

Présentation d'un réservoir d'hydrocarbures

L'industrie pétrolière s'intéresse aux réservoirs géologiques dans lesquels se sont accumulés des hydrocarbures. L'objectif est alors d'extraire ces hydrocarbures de la manière la plus efficace possible. Dans un premier temps, le sous-sol est foré jusqu'à atteindre la roche *réservoir* où sont situés les hydrocarbures. Dans

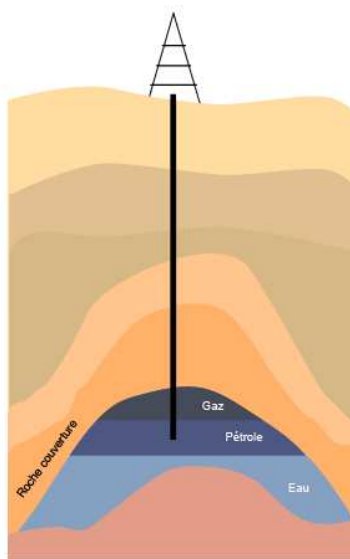


FIGURE 1.1 – Un réservoir d'hydrocarbures simplifié en exploitation

certains cas, la pression initiale du sous-sol peut permettre aux hydrocarbures de remonter à la surface. On parle de *récupération primaire*. Cette méthode ne permet, en général, de récupérer que 5 à 15 % des hydrocarbures présents. La deuxième étape consiste alors à injecter de l'eau à l'intérieur du réservoir pour pouvoir en récupérer une plus grande partie : c'est la *récupération secondaire*. On arrive ainsi à atteindre des taux de récupération de l'ordre de 35 à 45 %. D'autres méthodes permettent d'améliorer encore ce taux de récupération. L'injection de CO_2 et sa dissolution dans la phase hydrocarbure permet de réduire la viscosité de l'huile et ainsi faciliter sa récupération. Des composés chimiques tels que des polymères, des surfactants, des alcalins peuvent augmenter la récupération en réduisant les différences de viscosité et la tension superficielle

entre les différentes phases. Ce type de technique constitue ce que l'on appelle la *récupération améliorée* et permet, en moyenne, d'augmenter de 5 à 15 % le taux de récupération.

Utilisation de la simulation numérique

Nous avons décrit succinctement les méthodes d'exploitation d'un réservoir d'hydrocarbures. Cependant, le choix de l'exploitation ou non d'un gisement d'hydrocarbures est l'aboutissement d'un processus décisionnel assez important. En effet, la mise en place d'une exploitation pétrolière représente un investissement très lourd (quelques millions d'euros par forage). Les compagnies pétrolières chargées d'évaluer l'intérêt d'un gisement pétrolier doivent donc être capables de prévoir le plus précisément possible la quantité d'hydrocarbures qu'elles pourront récupérer. Ces entreprises ont recours à des logiciels de *simulation de réservoir* qui utilisent des données PVT et pétrophysiques mesurées par le biais de différentes techniques (carottes, enregistrements sismiques, ...). Ces simulations ne servent pas seulement à prévoir les quantités d'hydrocarbures produites mais sont également utilisées pour optimiser le placement des puits. Les modèles d'écoulement sont souvent mis au point via un processus dit de calage d'historique où les données du modèle sont modifiées au cours d'un processus d'optimisation itératif nécessitant le lancement de plusieurs simulations d'écoulement et visant à reproduire les données mesurées au cours de l'exploitation.

1.1.2 Intérêt de l'utilisation de nouvelles méthodes numériques

Un simulateur de réservoir constitue donc un outil important pour l'industrie pétrolière. Toutefois, comme nous allons le voir dans ce qui suit, le temps d'exécution et la précision des résultats obtenus sont dépendants d'un changement d'échelle. En effet, un réservoir d'hydrocarbures est constitué de roches sédimentaires formées d'un réseau de pores où les fluides peuvent circuler (voir figure 1.2). La taille des pores est de l'ordre du micromètre. Un réservoir d'hydrocarbures peut, quant à lui, s'étendre sur plusieurs

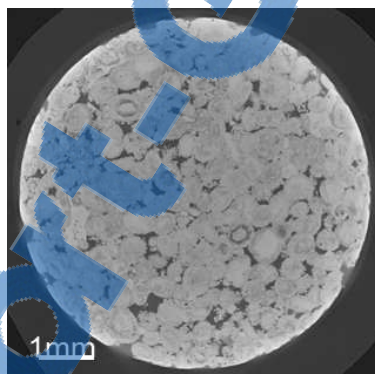


FIGURE 1.2 – Roche poreuse observée au microscope

centaines de kilomètres carrés. Cette différence d'échelle est souvent en partie réduite en introduisant deux grandeurs moyennes caractérisant le milieu poreux à l'échelle du mètre :

- la porosité ϕ représente le rapport du volume poreux sur le volume total de la roche,
- la perméabilité k est la capacité de la roche à laisser un fluide s'écouler sous l'effet d'une différence de pression. Cette grandeur a été introduite par H. Darcy [Dar56].

L'introduction de ces grandeurs moyennées permet d'éviter la distinction entre le pore et la matrice solide. Les équations physiques permettant de simuler un écoulement fluide sont donc écrites à une échelle plus macroscopique. Le modèle constitué des cartes de porosités et perméabilités est appelé *modèle géologique*. Les longueurs caractéristiques de variations de ces propriétés peuvent encore être relativement petites par rapport aux dimensions du réservoir. Ainsi, une résolution numérique de l'écoulement sur le modèle géologique consisterait à définir, dans des cas industriels, une grille de l'ordre du million ou du milliard de mailles. Sur une grille de cette dimension, l'utilisation de méthodes numériques classiques serait trop coûteuse. Cette thèse a pour but de construire et de tester des méthodes multi-échelles pour simuler ces écoulements en

diminuant le temps de calcul tout en maintenant une précision des solutions proches de celles obtenues avec des méthodes classiques.

Les méthodes multi-échelles étudiées dans ce manuscrit ont d'autres applications que la simulation de réservoir, en particulier,

- l'étude du risque lié au stockage de déchets nucléaires dans les sous-sols [AKP07],
- l'étude de la pollution des sols.

1.2 Simulation numérique et méthodes multi-échelles

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que la simulation d'écoulement sur le modèle géologique n'était pas réalisable avec des méthodes classiques. En pratique, les porosités et les perméabilités sont souvent mises à l'échelle sur une grille plus grossière. La grille obtenue à l'issue de cette étape dite d'*upscaling* comporte 100 à 1000 fois moins de mailles. Cette nouvelle grille constitue ce qu'on appelle le *modèle de réservoir*. Dans la suite de ce manuscrit, on appellera *modèle fin* le modèle géologique et *modèle grossier* le modèle de réservoir. La simulation d'écoulement sur la grille grossière permet ensuite de calculer des données de production comme, par exemple, les débits, les pressions aux puits ou encore les water cuts¹. Si l'on souhaite obtenir des cartes de saturations ou de pression à l'échelle fine, une fois la simulation effectuée sur la grille grossière, il est nécessaire de passer par une étape de *downscaling*. Ces deux changements d'échelle permettent, certes, de réduire la dimension du modèle de réservoir et donc les temps de calculs, mais aboutissent souvent à une perte de précision au niveau des résultats. Une partie de l'information disponible dans le modèle géologique est perdue suite à l'*upscaling* et il est souvent très difficile de reconstituer l'impact des hétérogénéités présentes à l'échelle fine sur l'écoulement lors du *downscaling*. Les travaux effectués dans cette thèse visent à traiter efficacement cette problématique.

Les méthodes multi-échelles représentent une alternative prometteuse aux techniques traditionnelles d'*upscaling* et de *downscaling*. En effet, ces méthodes permettent de reproduire l'impact sur les solutions des variations des perméabilités et des porosités à l'échelle du modèle géologique tout en effectuant une résolution du système linéaire à une échelle plus grossière. Les champs de pressions et de vitesses obtenus sont plus précis qu'en utilisant une méthode d'*upscaling* et leur calcul est moins coûteux qu'une simulation réalisée sur le modèle géologique car les inconnues intervenant dans la résolution du système sont définies sur un maillage beaucoup plus grossier.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier et quantifier dans quelle mesure les méthodes multi-échelles permettent d'effectuer des simulations d'écoulement directement à partir du modèle géologique tout en limitant les temps de calculs.

1.3 État de l'art des méthodes multi-échelles

La méthode des éléments finis multi-échelles a été initialement introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] pour résoudre des problèmes elliptiques où le coefficient de diffusion varie selon une échelle beaucoup plus petite que le domaine. Cette méthode introduit des fonctions de base éléments finis spécifiques qui tiennent compte des variations du coefficient de diffusion à l'échelle fine. Le principe de cette méthode est justifié par des résultats d'homogénéisation périodique présentés, par exemple, dans [BLP78], [SP80] et [ZKO94]. D'autres méthodes multi-échelles, basées elles aussi sur des résultats d'homogénéisation périodique, ont ensuite été introduites dans [Arb00], [MBS00], [EE03] et [EH09].

Appliquée à un écoulement diphasique, la méthode de Th.Y. Hou et X.H. Wu ne permet pas de calculer des flux conservatifs à l'échelle fine. Or, cette propriété est importante si l'on souhaite utiliser ces flux pour simuler le transport des fluides et assurer la conservation de la masse. Une seconde méthode multi-échelle basée sur des éléments finis mixtes-hybrides a donc été proposée dans [CH02] et mise en œuvre sur un

1. Water cut : Rapport volumique entre l'eau produite et la production totale de liquide

modèle de type *Black-Oil* dans [KLN⁺09]. Notons qu'une méthode multi-échelle basée sur des volumes finis a également été proposée dans [JLT03] pour la simulation de réservoir. Cette dernière méthode est plus contraignante puisqu'elle nécessite la construction d'un maillage dual et le calcul de fonctions de base sur les deux maillages.

Les méthodes multi-échelles évoquées précédemment permettent de réduire le coût du calcul des pressions et des flux. Dans le cas d'un écoulement diphasique, une fois les flux calculés, une équation de transport doit être résolue pour calculer les saturations des fluides. À ce stade, on utilise classiquement un schéma de type volumes finis directement sur la grille fine. Toutefois, la simulation du problème de transport sur le maillage fin est très contraignante, en particulier si les saturations sont résolues avec un schéma explicite en temps. Dans ce cas précis, une condition de stabilité, appelée aussi condition *CFL*, limite les valeurs du pas de temps et impose un très grand nombre d'itérations jusqu'au temps final. Un schéma implicite peut également être utilisé pour résoudre ce problème. Ce mode de résolution permet d'obtenir des pas de temps plus élevés mais plusieurs résolutions de systèmes linéaires définis sur la grille fine peuvent être nécessaires pour résoudre ce système non linéaire. De plus, là aussi, les valeurs du pas de temps dépendent de la résolution de la grille. Pour réduire les temps de calcul en implicite, une méthode de déraffinement adaptative a été proposée dans [AHE07]. Cette méthode agglomère les mailles où les flux sont peu importants et conserve un maillage fin dans le reste du domaine. Notons enfin qu'une méthode multi-échelle hétérogène (HMM) a récemment été proposée dans [HO10] pour résoudre un problème de transport mais cette méthode sert uniquement à calculer plus précisément une solution sur le maillage grossier et ne permet pas d'obtenir les valeurs des saturations à l'échelle fine. De plus, les hypothèses faites sur les paramètres du problème, notamment sur le champ de vitesse, rendent difficiles son application à des cas plus généraux.

Dans ce mémoire, une nouvelle méthode multi-échelle pour la résolution d'un problème de transport est proposée.

1.4 Présentation des résultats obtenus au cours de la thèse

1.4.1 Résultats théoriques d'homogénéisation

Le problème de transport étudié dans ce manuscrit permet, par exemple, de simuler le déplacement d'un traceur à l'intérieur d'une phase se déplaçant dans un milieu poreux. L'équation à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} \rho^*(x^*) \frac{\partial c^*}{\partial t^*}(t^*, x^*) + b^*(x^*) \cdot \nabla c^*(t^*, x^*) - \operatorname{div}(A^*(x^*) \nabla c^*(t^*, x^*)) &= 0 \\ c^*(0, x^*) &= c^0(x^*). \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans cette équation, ρ^* représente la porosité, b^* la vitesse d'écoulement, A^* le tenseur de diffusion et c^* la concentration du traceur. On suppose que les propriétés physiques (ρ^* , b^* et A^*) varient à une échelle beaucoup plus petite que la taille du réservoir considéré. On note $\varepsilon = \frac{l}{L}$ le rapport entre les longueurs caractéristiques des deux échelles. Ici, l est la taille des hétérogénéités et L la taille du domaine. Nous considérons ici que la convection est du même ordre que la diffusion à l'échelle fine. Nous choisissons également une échelle de temps permettant d'observer la diffusion. L'équation sans dimension obtenue à partir de (1.1) est

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) &= 0 \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce choix d'échelle est également utilisé dans [AR07], [DP05] et [ABMP10]. La plupart des méthodes multi-échelles sont basées sur des résultats d'*homogénéisation périodique*. Nous allons donc supposer les fonctions ρ^ε , b^ε et A^ε périodiques de période ε :

$$\rho^\varepsilon = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad b^\varepsilon = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad A^\varepsilon = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec ρ , b et A périodiques de période 1. L'étude de cette équation dans [MPP05] a permis de montrer que, pour de faibles valeurs de ε , u_ε peut être approchée par une fonction plus simple.

Théorème 1.1. Soit u_ε solution du problème (1.2). Nous construisons les fonctions w_i définies pour chaque direction e_i comme les solutions du problème de cellule

$$\begin{cases} b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) &= \rho(y) b^* \cdot e_i \\ w_i \text{ est périodique.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce problème est posé sur la maille unité Y et b^* est une moyenne de b sur le volume poreux

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy,$$

où

$$\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy.$$

Nous définissons ensuite u solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) &= 0, \\ u(0, x) &= u^0(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

où la matrice A^* est définie à partir des solutions des problèmes de cellule w_i et de la matrice A :

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy. \quad (1.5)$$

On construit enfin la fonction u_1 en utilisant la formule

$$u_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) w_i(y). \quad (1.6)$$

La fonction u_ε peut alors être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1.7)$$

Remarques 1.1 :

Le terme d'ordre 0 dans l'approximation (1.7) est la fonction u calculée en résolvant le problème parabolique (1.4). Ce problème ne fait pas intervenir de convection ce qui semble surprenant puisque l'on cherche à approcher la fonction u_ε solution du problème de convection-diffusion (1.2). Cependant, l'approximation (1.7) montre que cette fonction est dans un repère mobile par rapport à la solution u_ε . Ainsi, la fonction qui approche u_ε est

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

En reprenant l'équation (1.4), on constate que \tilde{u}_ε est solution de l'équation

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon - \operatorname{div} (A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon) &= 0, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, x) &= u^0(x). \end{cases}$$

Ainsi, cette fonction \tilde{u}_ε est solution d'un problème de convection-diffusion à convection uniforme.

L'approximation (1.7) montre également que, pour approcher u_ε , il faut d'abord calculer les solutions w_i des problèmes de cellule (1.3). Une fois les fonctions w_i calculées, la formule (1.5) permet d'obtenir la matrice A^* . On utilise alors cette matrice pour résoudre l'équation (1.4) et calculer la fonction u . Avec cette fonction, on peut approcher u_ε car l'approximation (1.7) se réécrit

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Il suffit donc, pour approcher u_ε , de résoudre les équations (1.3) et (1.4). Les problèmes (1.3) doivent être résolus à l'échelle fine mais ils sont définis sur une maille unitaire. Leur résolution ne nécessite donc pas une grande puissance de calcul. De plus, le problème (1.4) est un problème parabolique où la matrice de diffusion A^* est constante. Ce problème peut donc être résolu numériquement sans trop de difficultés. Au final, les deux résolutions numériques demandent moins de calculs numériques que la résolution du problème (1.2).

Le première nouveauté apportée par ce manuscrit a été de caractériser la vitesse à laquelle la fonction u_ε converge vers

$$u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

quand ε se rapproche de 0. Nous démontrons alors le théorème suivant.

Théorème 1.2. *L'écart entre u_ε et $u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est de l'ordre de ε . Plus précisément, on a*

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C\varepsilon. \quad (1.8)$$

1.4.2 Définition d'une nouvelle méthode multi-échelle et estimation d'erreur

En reprenant les notations définies au paragraphe précédent, nous avons montré que la solution u_ε du problème (1.2) peut être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{u}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial x_i}(t, x) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On remarque que le membre de droite de cette approximation est le début d'un *développement de Taylor*. Ainsi, cette approximation peut se réécrire

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{u}_\varepsilon\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \quad (1.9)$$

Cette approximation est le point de départ de notre nouvelle méthode éléments finis multi-échelles. Rappelons, qu'une méthode éléments finis consiste à définir des *fonctions de base* et de considérer l'ensemble des fonctions qui sont des combinaisons linéaires de ces fonctions de base. Le principe de la méthode que l'on propose est de construire des fonctions de base particulières en composant des fonctions de base classiques avec des fonctions oscillantes comme dans le membre de droite de l'approximation (1.9). Ainsi, si $(\Phi_i)_{i=1,\dots,D}$ représente un ensemble de fonctions de base classiques, on voudrait définir nos fonctions de base multi-échelles par

$$\Phi_i^\varepsilon = \Phi_i \circ \hat{w}^\varepsilon, \quad (1.10)$$

où $\hat{w}_i^\varepsilon = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Cette méthode multi-échelle vise à être appliquée à des cas non périodiques où les paramètres ρ^ε , b^ε et A^ε varient à l'échelle ε . Dans ce cas, il n'est pas suffisant de définir des problèmes de cellule sur une maille unitaire. En fait, les fonctions \hat{w}_i^ε devraient, dans le cas général, être calculées en résolvant les problèmes

$$\frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \hat{w}_i^\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla \hat{w}_i^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i, \quad (1.11)$$

dans tout l'espace. En pratique, ces problèmes sont résolus localement. On définit donc un *maillage grossier* \mathcal{K}_H composé de mailles de taille $H > \varepsilon$. Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ on définit la fonction $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ en reprenant l'équation (1.11) :

$$\frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon,K} - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon,K}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*,K} \cdot e_i, \quad (1.12)$$

où $b^{*,K}$ est une moyenne du champ de vitesse sur la maille K :

$$b^{*,K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}.$$

Pour que chaque problème (1.12) ait une solution unique, nous imposons à la fonction $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ des conditions linéaires sur le bord de la maille K . Les problèmes de cellule (1.12) sont alors résolus numériquement en utilisant un maillage fin \mathcal{K}_h de résolution h qui doit être faible par rapport à ε . En regroupant les solutions $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ obtenues dans chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on construit les fonctions $\tilde{w}_i^{\varepsilon,H}$. Nous définissons donc les fonctions de base multi-échelles par

$$\Phi_i^{\varepsilon,H} = \Phi_i \circ \tilde{w}_i^{\varepsilon,H}. \quad (1.13)$$

Une fois ces fonctions de base définies, la méthode multi-échelle consiste simplement à supposer que la solution u_ε est une combinaison linéaire des fonctions $\Phi_i^{\varepsilon,H}$. Nous démontrons dans ce manuscrit que la solution obtenue en utilisant cette approximation est proche de la solution exacte u_ε .

Théorème 1.3. *On note u_ε la solution du problème (1.2). On définit alors $u_{\varepsilon,H}$ la solution obtenue en utilisant la méthode des éléments finis multi-échelles ayant, pour fonctions de base, les $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ définies par l'équation (1.13). On a alors*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leq C \left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon} (H^{k+1} + \varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (1.14)$$

où

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}^2.$$

La présence de termes en $\frac{|b^*|}{\varepsilon}$ dans (1.14) peut sembler surprenante. En fait, ce facteur apparaît car les fonctions de base Φ_i considérées au départ ne sont pas adaptées au problème que nous traitons. En effet, le problème homogénéisé (1.4) est un problème de convection-diffusion si on considère la fonction u dans le repère mobile. Plusieurs méthodes numériques permettent de résoudre efficacement cette classe de problèmes. On peut citer les méthodes de décentrement [BH82] ou la méthode des caractéristiques [BPS83]. On peut donc penser qu'en partant de telles méthodes et en utilisant la même règle de composition que dans l'équation (1.13), on peut approcher la solution u_ε plus efficacement.

1.4.3 Implémentation de notre nouvelle méthode multi-échelle et résultats

La méthode présentée au paragraphe précédent a, par la suite, été implémentée dans deux programmes différents. Nous avons d'abord utilisé le logiciel *FreeFem++* [HPLHO98] permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant des éléments finis.

Cette méthode a également été implémentée dans la plate-forme de développement *Arcane* [GL09] utilisée à IFP Énergies nouvelles (IFPEN). Cette plate-forme est présentée plus en détails au chapitre 6.

Le chapitre 9 explique comment sont résolues numériquement les différentes équations qui permettent d'obtenir la solution numérique $u_{\varepsilon,H}$ introduite au paragraphe précédent.

Les deux implémentations de cette méthodes nous ont permis de vérifier les résultats prévus par le théorème 1.3 sur un exemple de problème périodique.

Cas d'application

Les résultats présentés ici sont ceux obtenus en utilisant le logiciel *FreeFem++*. On considère le domaine $\Omega = (0,1)^2$. On choisit une condition initiale ayant pour support un sous-domaine de Ω (voir figure 1.3(a)). On impose le champ de vitesse :

$$b^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0 \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{pmatrix}.$$

Sa composante horizontale est représentée sur la figure 1.3(b). Ce champ de vitesse est à divergence nulle et de moyenne $b^0 = \begin{pmatrix} b_x^0 \\ b_y^0 \end{pmatrix}$.

On considère un coefficient de diffusion $A = 1$.

Les conditions aux bords du domaine sont périodiques.

Dans la suite, nous utilisons également les valeurs suivantes :

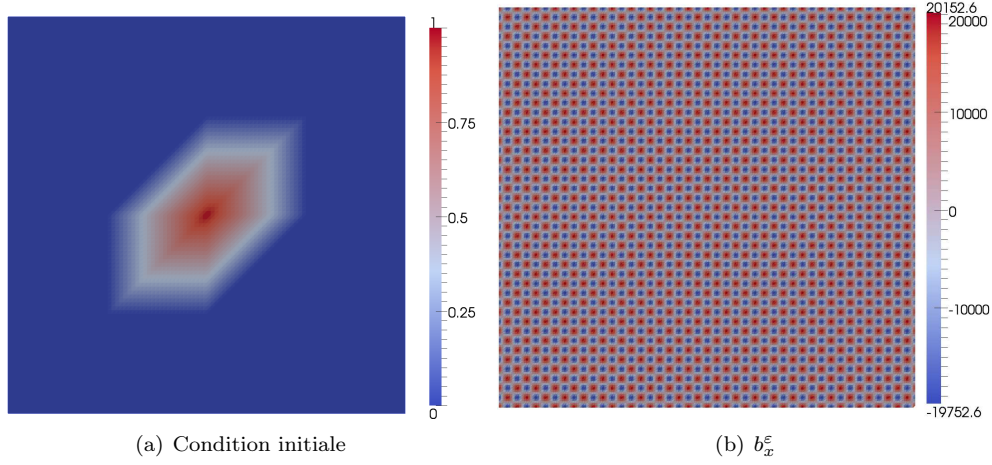


FIGURE 1.3 – À gauche, la condition initiale. À droite, le champ de vitesse b_x^ε imposé dans la direction x

- $\varepsilon = \frac{1}{200}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 1$.

Le maillage grossier associé à ce problème est composé de 800 triangles de diamètre

$$H = \frac{1}{20} = 10\varepsilon.$$

Chaque maille grossière contient 5 000 triangles de diamètre

$$h = \frac{1}{1000} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour appliquer notre méthode, il n'est pas nécessaire de construire complètement le maillage fin. Si nous l'avions fait, celui-ci aurait été composé de 4 000 000 de triangles.

Résultats obtenus

Nous avons donc appliqué notre méthode multi-échelle à la résolution du problème (1.2) avec les paramètres définis au paragraphe précédent. Pour vérifier la précision de la solution obtenue numériquement, nous la comparons avec la solution homogénéisée u définie par l'équation (1.4). Nous montrons également, la solution que l'on obtient en résolvant numériquement le problème (1.2) sur le maillage grossier avec une méthode numérique classique. Cette solution est appelée "solution grossière". La figure 1.4 permet d'observer ces trois solutions.

On remarque que la solution obtenue avec notre méthode multi-échelle est assez proche de la solution homogénéisée u . La solution obtenue avec une résolution grossière est, ici, très éloignée de cette solution homogénéisée : la solution homogénéisée diffuse davantage que la solution grossière. Ici, la matrice A^* définie par l'équation (1.5) est assez différente du coefficient de diffusion initial A . Ce phénomène, appelé *dispersion de Taylor*, est donc bien pris en compte avec notre méthode multi-échelle.

1.4.4 Implémentation de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles

Au cours de cette thèse, nous présentons également des résultats obtenus en implémentant d'autres méthodes multi-échelles. Ces méthodes issues de l'état de l'art présenté au paragraphe 1.3 permettent, pour un écoulement diphasique, de calculer la pression dans un réservoir ainsi que les flux de saturation sur les interfaces fines. En particulier, la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles introduite par Z. Chen et Th.Y. Hou dans [CH02] est présentée au chapitre 5. Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que les flux calculés par cette méthode permettent d'approcher le champ de saturation obtenu avec un maillage fin.

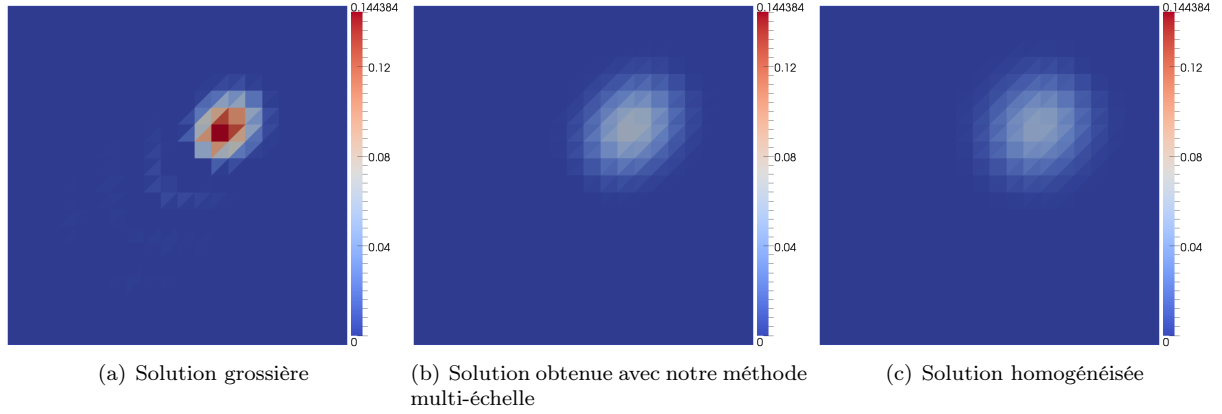


FIGURE 1.4 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue par homogénéisation périodique

Présentation du problème physique

Nous considérons ici un écoulement diphasique dans un milieu poreux. Il y a donc une phase aqueuse et une phase hydrocarbure. Les équations caractérisant l'écoulement diphasique sont les suivantes

$$\begin{cases} v + k\lambda_T(S) \nabla P &= 0 \\ \operatorname{div}(v) &= 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S) v) &= 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où

- P est la pression,
- v est la vitesse totale du fluide,
- S est la saturation en eau,
- λ_T est la mobilité totale du fluide,
- f_w est le flux fractionnaire en eau.

Les définitions de la mobilité totale et du flux fractionnaire en eau sont données en détail au chapitre 2.

Principe de la méthode

La méthode des éléments finis mixtes multi-échelles vise à résoudre le problème (1.15). Cette méthode permet d'obtenir des valeurs du champ de vitesse v sur le maillage fin. Ainsi sur chaque face Σ du maillage grossier \mathcal{K}_H , on résout un problème défini sur le domaine formé par la réunion des mailles associées à cette face. Comme pour la méthode présentée au paragraphe 1.4.2, ces problèmes de cellule sont résolus sur un maillage fin \mathcal{K}_h . Cette résolution permet d'obtenir une fonction de base ψ_Σ . On exprime alors les flux de la vitesse v_σ sur les faces fines σ , en fonction des flux V_Σ sur les faces grossières Σ :

$$v_\sigma = \sum_{\Sigma} V_\Sigma \psi_{\Sigma, \sigma}. \quad (1.16)$$

On considère des pressions constantes sur les mailles grossières. On utilise alors cette expression des flux fins et des pressions pour résoudre les deux premières équations du système (1.15) en utilisant uniquement des variables définies sur le maillage grossier \mathcal{K}_H .

Une fois cette résolution faite, la formule (1.16) permet d'obtenir les flux à l'échelle fine.

Ces flux fins sont alors utilisés pour résoudre la dernière équation du système (1.15) pour calculer le transport de la saturation. L'avantage de cette méthode est que les flux fins calculés par l'équation (1.16) gardent des propriétés indispensables pour que les saturations obtenues aient un sens physique : on ne pourra pas, par exemple, obtenir de saturation négative.

Nous allons maintenant observer la qualité de la solution obtenue avec cette méthode.

Précision de la méthode sur un cas de type réservoir

On va considérer ici un cas d'application à deux dimensions de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles. On dispose d'un réservoir composé de 60 mailles dans la direction x et de 220 mailles dans la direction y . La perméabilité de la roche dans chacune de ces mailles est donnée par la figure 1.5. Ce champ de perméabilité est en fait la couche 85 du cas présenté dans [CB01] pour évaluer différentes méthodes d'upscaling. Ce réservoir n'est, au départ, constitué que de la phase hydrocarbure. Nous étudions alors

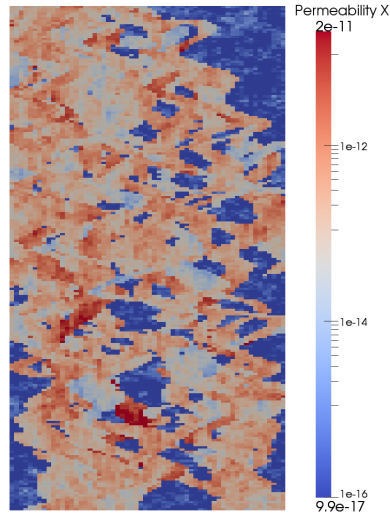


FIGURE 1.5 – Champ de perméabilité utilisé

l'évolution de ce milieu si on y injecte de l'eau sur le bord de droite. Nous décidons d'arrêter la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 25% du volume poreux disponible. La figure 1.6 montre les

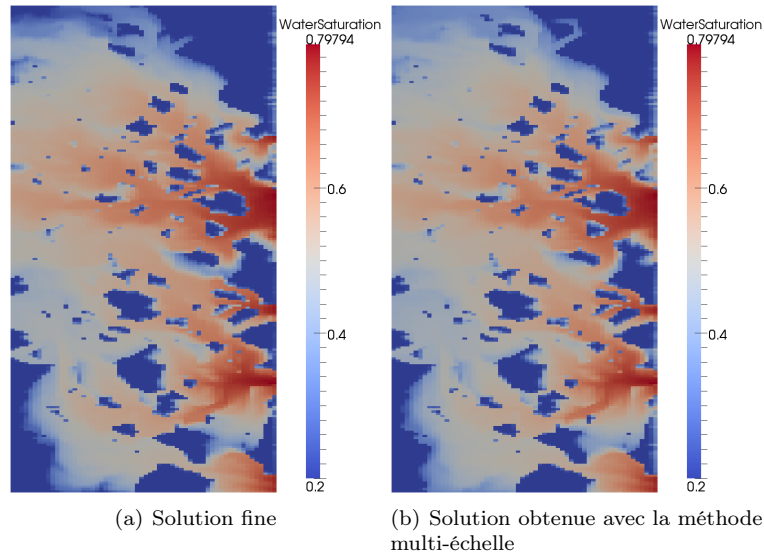


FIGURE 1.6 – Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle

résultats obtenus avec un solveur fin classique (à gauche) et avec la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles en considérant un maillage grossier composé de 4 mailles dans chaque direction (à droite). Cette figure nous permet de vérifier que la méthode que nous avons implémentée donne une bonne approximation du champ de saturation obtenu avec une méthode classique.

D'un point de vue plus quantitatif, l'écart relatif entre la solution fine et la solution obtenue avec la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles est de 6,21% (en norme L^2).

Nous allons maintenant voir que cette méthode permet également d'obtenir de réels gains en terme de performance.

Performance de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles

La méthode des éléments finis mixtes multi-échelles a été implémentée dans la plate-forme *Arcane* utilisée à IFPEN. Cette plate-forme a permis au prototype mis en place d'être adaptable sur des machines composées d'un très grand nombre de cœurs de calcul. En particulier, la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles se basent sur des fonctions qui sont calculées localement et de manière indépendante. Ces calculs peuvent donc être effectués en *parallèle*. Le parallélisme utilisé dans notre prototype *Arcane* est précisé dans le chapitre 6. Nous précisons uniquement ici que l'implémentation faite dans ce prototype permet d'utiliser du parallélisme par *échange de message* (de type *MPI*) ainsi que des énumérations parallèles (basé sur du *multithreading* de type *TBB*).

Notre implémentation de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles a été testée sur deux supercalculateurs :

- Le supercalculateur ENER110 appartenant à IFPEN,
- Le supercalculateur CURIE appartenant au GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif) et hébergé par le CEA.

Sur le supercalculateur ENER110, nous avons appliqué notre méthode multi-échelle à un cas à trois dimensions comprenant plus d'un million de mailles (60 dans la direction x , 220 dans la direction y et 85 dans la direction z). Ce cas est en fait celui présenté dans l'article [CB01]. Nous étudions alors l'évolution de ce milieu si on y injecte de l'eau sur le bord $y = 0$. Nous décidons d'arrêter la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 1% du volume poreux disponible.

Les résultats de performance obtenus en comparant les différents solveurs en pression sont présentés dans le tableau 1.1.

Nb cœurs	Solveur fin	Solveur multi-échelle
1	2 939,69 s	105,00 s
2	1 571,63 s	54,65 s
4	817,27 s	33,24 s
8	454,81 s	22,26 s
16	293,56 s	17,36 s

TABLE 1.1 – Temps de calculs de la pression obtenus avec les solveurs en pression fin et multi-échelle en fonction du nombre de cœurs utilisés

On observe que la méthode multi-échelle nécessite beaucoup moins de temps que la résolution fine de la pression (entre 28 et 17 fois plus rapide). De plus, la précision reste intéressante comme le montre la figure 1.7. En fait, l'écart relatif entre le champ de saturation obtenu avec un solveur fin et celui obtenu en utilisant la méthode multi-échelle est de 4,84% (en norme L^2).

Sur le supercalculateur CURIE, nous avons considéré un cas construit à partir d'une réalisation géostatistique en faciès. Dans ce cas, le réservoir est un cube composé de 256 mailles dans chaque direction. Chaque maille est un cube de 5 mètres de côté. Deux faciès ou types de roche sont présents : un faciès réservoir avec une bonne perméabilité de $1D$ et un faciès beaucoup moins perméable de perméabilité égale à $10mD$. La figure 1.8 présente la distribution des perméabilités sur deux couches de ce réservoir. Dans ce cas, on injecte de l'eau sur le bord $x = 0$. Nous arrêtons la simulation lorsque le volume poreux d'eau injecté est égale à 1% du volume poreux disponible. Cette simulation a été faite uniquement sur 128 cœurs afin de vérifier que la méthode multi-échelle reste intéressante pour des cas nécessitant une grande puissance de calcul. Pour ce cas, le temps de résolution en pression avec un solveur fin est de 22 153,31 secondes alors que la résolution en pression avec le solveur multi-échelle nécessite 576,02 secondes. La méthode multi-échelle est donc plus de 38 fois plus rapide qu'un solveur fin classique dans ce cas.

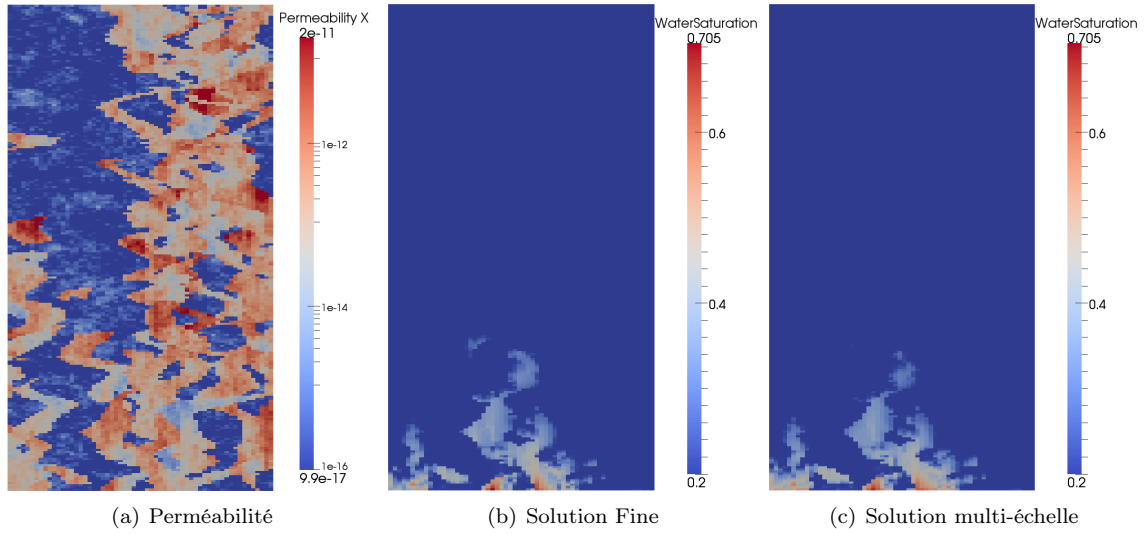


FIGURE 1.7 – Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l’approche classique sur la couche $z = 40$ du cas 3D issu de [CB01]

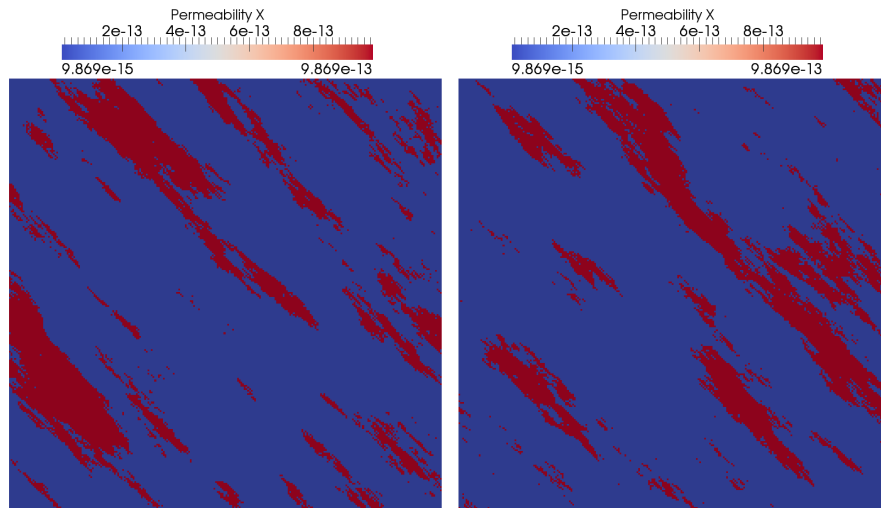


FIGURE 1.8 – Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$

1.5 Perspectives

Nous présentons ici les différentes suites qui pourraient être données aux travaux présentés dans ce mémoire. Certaines perspectives évoquées dans ce paragraphe seront étudiées au cours de la thèse d’A. Konate (en partenariat avec IFPEN et l’Université Paris VI) qui a débuté le 1^{er} octobre 2013.

1.5.1 Généralisation des résultats d’homogénéisation sur le transport

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis de mettre au point une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre un problème de transport. Nous avons alors pu montrer rigoureusement que cette méthode permet d’approcher de manière assez précise la solution exacte. Cependant, il serait intéressant de

voir si cette méthode peut se généraliser à d'autres cas.

Application à des cas non linéaires

Le problème de transport que nous avons considéré est linéaire, que ce soit pour le terme de diffusion ou le terme de convection. Il serait très utile de savoir si cette méthode peut également s'appliquer à des cas non linéaires. Plusieurs travaux dont [Glo06] ont permis de généraliser certains résultats d'homogénéisation à des problèmes de diffusion présentant certains types de non linéarités. Pour ces cas, la forme des problèmes homogénéisés et de cellule doit être modifiée.

Intégration de la gravité

Le problème de transport que nous avons traité ici ne prend pas en compte le terme de gravité. En fait, on pourrait montrer que l'introduction d'un terme de gravité dans notre équation ne modifierait que légèrement les résultats d'homogénéisation. En fait, il suffirait de résoudre un problème de cellule supplémentaire et d'intégrer la solution obtenue dans la définition du terme d'ordre 1 u_1 .

Cependant, l'ajout de ce terme rend caduque l'approximation (1.9) qui est le point de départ de notre méthode multi-échelle. Il faudrait donc étudier plus précisément ce problème pour, éventuellement, construire une méthode multi-échelle plus adaptée.

1.5.2 Amélioration du module implémenté dans *Arcane* pour calculer la pression

Nous avons implémenté, sur la plate-forme *Arcane*, la méthode des éléments mixtes multi-échelles introduite dans [CH02]. Pour les exemples utilisés dans ce manuscrit, le modèle physique est assez simple (de type *Dead-Oil*) et tous les maillages sont cartésiens.

Application à des problèmes physiques plus complexes

Nous pourrions d'abord appliquer cette méthode à un modèle de type *Black-Oil* [CTP95]. Ce modèle est un modèle compositionnel relativement simple à trois constituants : l'eau, un composant hydrocarbure lourd et un composant hydrocarbure léger. La phase aqueuse ne contient que l'eau, la phase huile peut contenir les deux composants hydrocarbures et la phase gaz n'est composée que du composant léger. L'application de la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles au modèle *Black-Oil* a déjà été réalisée dans [KLN⁺09].

Nous rappelons que les conditions aux bords considérées dans ce manuscrit sont uniquement des conditions de type Dirichlet ou Neumann homogène. Ces conditions sont rarement appliquées en simulation de réservoir. En effet, la plupart du temps, les conditions aux bords sont définies grâce à des termes sources liés à la présence de puits. Pour prendre en compte ce type de conditions aux limites, il est nécessaire de modifier la définition des fonctions de base au voisinage des puits [KLN⁺09].

Il serait également intéressant de tenir compte des termes supplémentaires associés à la gravité. Cet ajout a déjà été évoqué au paragraphe 1.5.1.

Application à des maillages non structurés

Les exemples présentés dans ce mémoire utilisent uniquement des maillages cartésiens que ce soit au niveau fin ou au niveau grossier. Durant les 4 derniers mois de la thèse, un stage de Master 2 a été réalisé par M. Shakoor à IFPEN pour étudier les méthodes de *différences finies mimétiques* (MFD) [KLS04] permettant de simuler des écoulements dans des réservoirs discrétisés au moyen de grilles à géométrie Corner Point (CPG). Durant ce stage, cette méthode a également été utilisée sur ce type de maillage pour la résolution des problèmes de cellule intervenant dans la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles. Cette approche avait déjà été testée dans [AKL08]. Un exemple de maillage CPG est donné sur la figure 1.9. Comme dans le cas cartésien, le maillage initial est aggloméré de manière régulière dans chaque direction. La figure 1.10 montre le maillage grossier obtenu par ce procédé. Sur cette figure, le maillage de départ ondule comme sur la figure 1.9 mais la visualisation en deux dimensions ne permet pas de le voir facilement. Les résultats obtenus par M. Shakoor, pendant son stage, sont représentés sur la figure 1.11. Sur cette

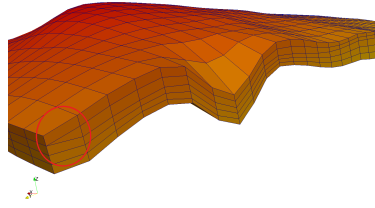


FIGURE 1.9 – Exemple de maillage CPG

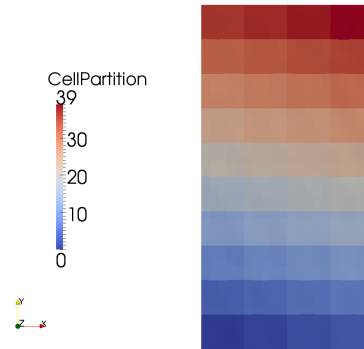


FIGURE 1.10 – Agglomération du maillage CPG (vue de dessus)

figure, on peut observer les fronts de saturation obtenus avec des flux calculés à l'aide de la méthode MFD directement sur la grille fine et des flux calculés par la méthode MFD et l'approche multi-échelle. Une suite à ce travail consistera à mesurer, là aussi, les performances de cette utilisation jointe de la méthode MFD et de la méthode multi-échelle lors de simulations parallèles.

1.5.3 Amélioration du module implémenté dans *Arcane* pour simuler l'évolution d'un traceur

Nous avons également implémenté dans *Arcane* un module permettant de calculer, avec une méthode multi-échelle, l'évolution de la concentration d'un traceur à l'intérieur d'un fluide monophasique se déplaçant dans un milieu poreux.

Ajout d'autres méthodes numériques

Pour l'instant cette méthode multi-échelle se base uniquement sur des éléments finis de type Lagrange d'ordre 1. Comme expliqué dans le chapitre 9, cette limitation est pour l'instant nécessaire car la plate-forme *Arcane* ne définit pas la notion de degré de liberté. Ainsi, une variable doit nécessairement être liée à une entité géométrique. Cependant, cette notion devrait être ajoutée dans une future version d'*Arcane*. Il serait alors intéressant de créer un code générique qui pourrait appliquer cette méthode pour des ordres supérieurs.

Nous avons également vu, au chapitre 9, comment le problème était discrétisé en espace : on applique une méthode des caractéristiques qui est une méthode explicite. Nous pourrions tester cette méthode dans le cas où l'on utilise un schéma de type Euler implicite pour la discrétisation en temps.

Application à d'autres problèmes physiques

Dans les cas considérés dans cette thèse, la vitesse et le tenseur de diffusion sont des données périodiques. Nous pourrions, tout d'abord, envisager d'appliquer cette méthode dans le cas où le champ de vitesse est calculé en résolvant un problème d'écoulement monophasique.

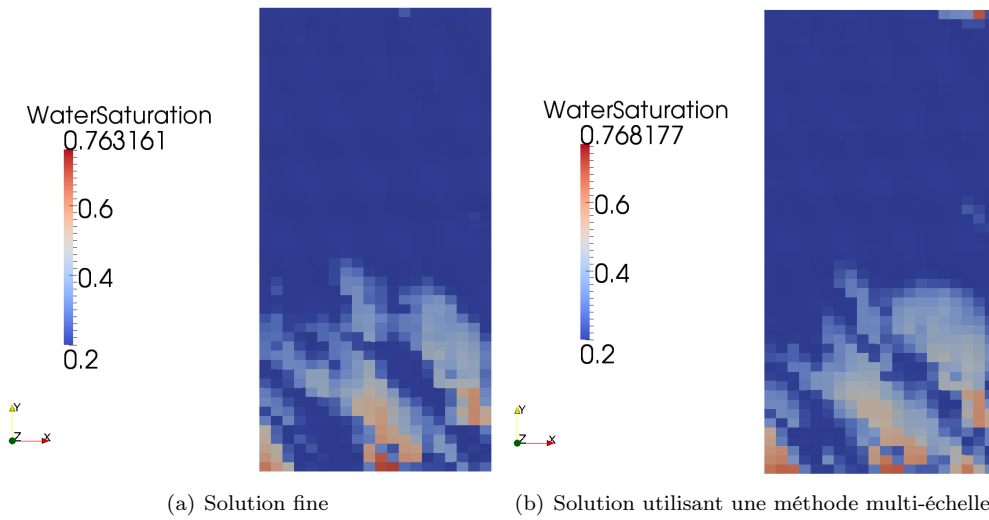


FIGURE 1.11 – À gauche, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD sur le maillage fin. À droite, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD et la méthode multi-échelle

On pourrait également considérer des cas plus généraux d'application de la méthode multi-échelle. En effet, certains modèles considèrent que le composé dissous modifie les propriétés physiques de la phase [SW05]. La prise en compte de cette modification crée une non linéarité dans l'équation régissant le déplacement de ce constituant. La résolution de ce type de problème avec une méthode multi-échelle semble assez difficile et constitue une bonne perspective pour cette méthode.

Liste des publications et communications

- [1] F. Ouaki, G. Allaire, G. Enchéry and S. Desrozier. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modelling. In *Journées scientifiques du GNR MoMaS*, 2011. (Poster)
- [2] F. Ouaki, G. Allaire, G. Enchéry and S. Desrozier. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modelling. In *International Conference on Flows and Mechanics in Natural Porous Media from Pore to Field Scale-Pore2Field*, 2011. (Poster)
- [3] G. Allaire, G. Enchéry, S. Desrozier and F. Ouaki. A Multiscale Finite Element Method for Transport Modeling. In *ECCOMAS*, 2012. ISBN : 978-3-9502481-9-7. (Présentation orale, publication dans les actes de congrès)
- [4] F. Ouaki, G. Allaire, S. Desrozier and G. Enchéry. A Multi-Scale Finite Element Method for Transport Modeling. In *SIAM Geosciences*, 2013. (Présentation orale)

Table des figures

1.1	Un réservoir d'hydrocarbures simplifié en exploitation	13
1.2	Roche poreuse observée au microscope	14
1.3	Condition initiale et champ de vitesse dans la direction x	20
1.4	Solutions grossière, multi-échelle et homogénéisée	21
1.5	Champ de perméabilité utilisé	22
1.6	Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle	22
1.7	Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l'approche classique sur la couche $z = 40$ du cas 3D issu de [CB01]	24
1.8	Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$	24
1.9	Exemple de maillage CPG	26
1.10	Agglomération du maillage CPG (vue de dessus)	26
1.11	À gauche, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD sur le maillage fin. À droite, le front de saturation obtenu en utilisant la méthode MFD et la méthode multi-échelle	27
2.1	Perméabilités de la couche 85 du cas SPE 10	38
2.2	Perméabilités dans les directions x et y pour le cas fracturé	38
2.3	Porosités du cas fracturé	39
2.4	Résultats obtenus avec le solveur fin pour la couche 85 du cas SPE 10	40
2.5	Résultats obtenus avec le solveur fin pour le cas fracturé	40
4.1	Les deux maillages (fin et grossier)	52
4.2	Schéma présentant la discrétisation effectuée pour la Méthode Multi-échelle Hétérogène	54
4.3	En trait plein le maillage \mathcal{K}_H , en tirets le maillage dual $\tilde{\mathcal{K}}_H$	56
4.4	Comparaison des champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi pour différents maillages grossiers.	71
5.1	Principe de l'agglomération	74
5.2	Discrétisation locale pour une face interne Σ	76
5.3	Discrétisation locale pour une face de bord Σ	76
5.4	Comparaison des pressions obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle en utilisant un maillage grossier 12×44	81
5.5	Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle <i>Global70</i> pour plusieurs maillages grossiers	82
5.6	Comparaison des saturations obtenues avec les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 4×4	82
5.7	Comparaison des saturations obtenues les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 10×10	84
6.1	Architecture distribuée	88
6.2	Déroulement d'une application en mode distribué	89
6.3	Architecture partagée	89

6.4	Déroulement d'une application en mode partagé	89
6.5	Architecture traditionnelle d'un supercalculateur	90
6.6	Déroulement d'une application en mode hybride	90
6.7	Organisation d'un programme sous Arcane	92
6.8	Maillage multi-échelle	93
6.9	Diagramme UML représentant le module Multiscale	93
6.10	Diagramme UML représentant les services définissant les modèles de perméabilité	94
6.11	Diagramme UML représentant les services implémentant les différentes méthodes de résolution du système en saturation	94
6.12	Diagramme UML représentant les services représentant les différents solveurs en pression	95
6.13	Diagramme UML représentant les services définissant les différentes méthodes pour calculer les fonctions de base multi-échelles	95
6.14	Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l'approche classique sur la couche $z = 40$ du cas SPE 10 3D	97
6.15	Graphique présentant l'efficacité des différents solveurs	98
6.16	Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$	99
9.1	Solution du problème de cellule obtenue sur FreeFem++ avec des éléments finis \mathbb{P}_1 Lagrange	152
9.2	Solution du problème de cellule obtenue avec notre méthode itérative	153
9.3	Condition initiale et champ de vitesse dans la direction x	155
9.4	Fonction de base sur le maillage grossier fonction de base multi-échelle associée	157
9.5	Solutions grossière, multi-échelle et homogénéisée	157
9.6	Solutions raffinées avec les méthodes multi-échelle et d'homogénéisation	158
9.7	Condition initiale du cas testé sur le prototype <i>Arcane</i>	159
9.8	Solutions grossière, multi-échelle et fine dans Arcane	159

Chapitre 2

Définition des problèmes modèles

Sommaire

2.1	Problème modèle d'écoulement diphasique	31
2.2	Définition du maillage et notations	32
2.3	Schéma IMPES	34
2.3.1	Résolution du problème en pression	34
2.3.2	Résolution du problème en saturation	35
2.4	Schéma IMPIMS	36
2.5	Résultats numériques	37
2.5.1	Présentation des cas étudiés	37
2.5.2	Présentation des résultats	39

Ce chapitre a pour but d'introduire le problème physique modèle considéré dans ce manuscrit et, en particulier, aux chapitres 3, 4 et 5. Nous présentons également deux méthodes classiques de type volumes finis pour résoudre ce problème numériquement. Nous définissons ensuite dans ce chapitre des exemples de réservoirs et montrons les résultats obtenus avec ces deux méthodes. Ces résultats serviront de référence pour évaluer la qualité des méthodes multi-échelles développées aux chapitres suivants.

2.1 Problème modèle d'écoulement diphasique

Considérons un fluide diphasique composé d'une phase aqueuse notée w et d'une phase hydrocarbure notée o s'écoulant dans un milieu poreux. L'approche classique de modélisation d'un écoulement diphasique en milieu poreux se base sur l'application de la loi de Darcy [Dar56] pour chaque phase $\alpha \in \{w, o\}$ avec des facteurs adimensionnels kr_α devant la perméabilité k , appelés perméabilités relatives des phases, qui tiennent compte de la réduction de section de passage due à la présence des phases. Pour des fluides incompressibles, les équations décrivant la conservation du volume poreux et du volume des phases, la conservation de la quantité de mouvement, les forces capillaires existant entre les deux phases s'écrivent :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \text{div} (v_o) = 0 \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + \text{div} (v_w) = 0, \quad (2.1)$$

$$v_o = -\frac{kkr_o(S_o)}{\mu_o} \nabla P_o \quad v_w = -\frac{kkr_w(S_w)}{\mu_w} \nabla P_w, \quad (2.2)$$

$$P_o - P_w = P_{c_{o,w}} \quad (2.3)$$

$$S_o + S_w = 1 \quad (2.4)$$

où S_α est la saturation de la phase, v_α la vitesse d'écoulement de la phase dans le milieu poreux, μ_α la viscosité de la phase, P_α la pression de la phase, $P_{c_{o,w}}$ la pression capillaire et ϕ la porosité du milieu.

Les perméabilités relatives $kr_\alpha(S_\alpha)$ pour $\alpha \in \{w, o\}$ sont des fonctions croissantes de la saturation seule. Dans notre modèle, on suppose que la perméabilité k et la porosité ϕ varient en espace mais sont constantes

au cours du temps. On suppose de plus que les viscosités μ_α sont constantes et que les saturations vérifient les relations :

$$S_{or} \leq S_o \leq 1 - S_{wi} \quad \text{et} \quad S_{wi} \leq S_w \leq 1 - S_{or},$$

où S_{or} est la saturation résiduelle en huile et S_{wi} la saturation irréductible en eau.

La mobilité λ_α de la phase $\alpha \in \{o, w\}$ est définie par :

$$\lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{k r_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}$$

et la mobilité totale λ_T se définit comme :

$$\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o.$$

Considérons Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N pour $N = 2$ ou 3 , typiquement, le réservoir et $T > 0$ un temps donné. En utilisant les définitions et hypothèses précédentes et en insérant (2.2) dans (2.1), le problème d'écoulement (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) considéré dans Ω peut se reformuler comme suit :

$$\begin{cases} v + k(\lambda_T(S) \nabla P_w + \lambda_o(S) \nabla P_{c_{o,w}}(S)) & = 0 \\ \operatorname{div}(v) & = 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S)(v - k\lambda_o(S) \nabla P_{c_{o,w}}(S))) & = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.5)$$

où $S = S_w$ est la saturation en eau, v est la vitesse totale :

$$v = v_w + v_o = -k(\lambda_T \nabla P_w + \lambda_o \nabla P_{c_{o,w}})$$

et f_w est le flux fractionnaire en eau :

$$f_w(S) = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w}.$$

Dans la suite de ce mémoire, on suppose que la pression capillaire $P_{c_{o,w}}$ est nulle. Ainsi, d'après la formule (2.3), la pression est la même dans les deux phases et on note

$$P = P_o = P_w.$$

Le système (2.5) peut alors être simplifié :

$$\begin{cases} v + k\lambda_T(S) \nabla P & = 0 \\ \operatorname{div}(v) & = 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S) v) & = 0. \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.6)$$

Soit $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ une frontière du domaine Ω . La fermeture du problème (2.6) est assurée en imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P & = P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ S & = S_b(x) & \text{sur } \Gamma_D \text{ si } v \cdot \mathbf{n} < 0, \\ v \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{cases} \quad (2.7)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante au domaine Ω , la pression $P_b(x)$ et la saturation en eau $S_b(x)$ sont données.

2.2 Définition du maillage et notations

Soit \mathcal{K}_h un ensemble fini de polyèdres non vides, ouverts et disjoints formant une partition de Ω telle que $h = \max_{k \in \mathcal{K}_h} h_k$ où h_k est le diamètre de l'élément $k \in \mathcal{K}_h$. L'ensemble \mathcal{K}_h forme donc un maillage de

Ω dont les éléments $k \in \mathcal{K}_h$ sont les mailles. On définit N_h le nombre de mailles dans le maillage \mathcal{K}_h . De même, on note \mathcal{N}_h l'ensemble de nœuds et \mathcal{F}_h l'ensemble des faces du maillage.

On définit $\mathcal{N}_{h,k}$ l'ensemble des nœuds $n \in \mathcal{N}_h$ qui se trouvent sur le bord de la maille $k \in \mathcal{K}_h$. De plus, on définit \mathcal{F}_h^i l'ensemble des faces *internes* du maillage

$$\mathcal{F}_h^i = \{\sigma \subset \partial k_1 \cap \partial k_2 \mid k_1, k_2 \in \mathcal{K}_h\}.$$

De même, on note \mathcal{F}_h^b l'ensemble des faces *de bords* :

$$\mathcal{F}_h^b = \{\sigma \subset \partial k \cap \partial \Omega \mid k \in \mathcal{K}_h\}.$$

L'ensemble des faces \mathcal{F}_h du maillage \mathcal{K}_h vérifie alors $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$. On note $\mathcal{F}_{h,k}$ l'ensemble des faces d'une maille $k \in \mathcal{K}_h$:

$$\mathcal{F}_{h,k} = \{\sigma \in \mathcal{F}_h \mid \sigma \subset \partial k\}.$$

De plus, on note $\mathcal{F}_{h,k}^i$ l'ensemble des faces internes d'une maille $k \in \mathcal{K}_h$:

$$\mathcal{F}_{h,k}^i = \mathcal{F}_{h,k} \cap \mathcal{F}_h^i,$$

et $\mathcal{F}_{h,k}^b$ l'ensemble des faces de bord d'une maille $k \in \mathcal{K}_h$:

$$\mathcal{F}_{h,k}^b = \mathcal{F}_{h,k} \cap \mathcal{F}_h^b.$$

Dans le problème présenté au paragraphe précédent, des conditions de Dirichlet sont imposées sur un bord $\Gamma_D \subset \Omega$. On note alors \mathcal{F}_h^D l'ensemble des faces de bord incluses dans Γ_D :

$$\mathcal{F}_h^D = \{\sigma \in \mathcal{F}_h^b \mid \sigma \subset \Gamma_D\}$$

et $\mathcal{F}_{h,k}^D$ l'ensemble des faces du bord de la maille $k \in \mathcal{K}_h$ incluses dans Γ_D :

$$\mathcal{F}_{h,k}^D = \{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^b \mid \sigma \subset \Gamma_D\}.$$

On introduit également les ensembles :

$$\mathcal{F}_h^{i \vee D} = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{h,k}^{i \vee D} = \mathcal{F}_{h,k}^i \cup \mathcal{F}_{h,k}^D.$$

De manière symétrique à $\mathcal{F}_{h,k}$, on note $\mathcal{K}_{h,\sigma}$ l'ensemble des mailles $k \in \mathcal{K}_h$ situées de part et d'autre d'une face $\sigma \in \mathcal{F}_h$:

$$\mathcal{K}_{h,\sigma} = \{k \in \mathcal{K}_h \mid \sigma \subset \partial k\}.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{K}_{h,\sigma}$ est composé exactement de deux éléments si $\sigma \in \mathcal{F}_h^i$ et d'un élément si $\sigma \in \mathcal{F}_h^b$. Pour chaque interface $\sigma \in \mathcal{F}_h^i$, nous définissons une normale unitaire \mathbf{n}_σ orientée de manière arbitraire mais fixée. Pour une maille $k \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$, on note $\mathbf{n}_{\sigma,k}$ la normale à σ unitaire sortante de k et on définit :

$$\varepsilon_{\sigma,k} = \mathbf{n}_{\sigma,k} \cdot \mathbf{n}_\sigma$$

valant 1 si la normale de la face est sortante pour k et -1 sinon. Sur une face de bord $\sigma \in \mathcal{F}_h^b$, \mathbf{n}_σ est la normale sortante de Ω .

Pour une maille $k \in \mathcal{K}_h$, on identifie le centre de la maille \mathbf{x}_k . De même, pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_h$, \mathbf{x}_σ est le centre de la face. Pour toute maille $k \in \mathcal{K}_h$, et pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}$, on note :

$$d_{k,\sigma} = \text{dist}(\mathbf{x}_k, \sigma).$$

De même, pour tous $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_h$, on note :

$$d_{k_1,k_2} = \text{dist}(\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}).$$

Pour une face $\sigma \in \mathcal{F}_h$, on note $|\sigma|$ l'aire de la face. De la même manière, pour une maille $k \in \mathcal{K}_h$, $|k|$ correspond au volume de la maille.

Remarque 2.1 : Les maillages que nous considérons dans toute la suite sont, en pratique, cartésiens. Toutefois, nos travaux s'appliquent également à des maillages non structurés.

2.3 Schéma IMPES

On présente ici un schéma numérique classique de résolution du problème (2.6) sur le maillage fin \mathcal{K}_h visant à nous fournir des résultats de référence. En particulier, on utilise le schéma *IMPES* (*Implicit Pressure, Explicit Saturation* [AS79], [SGJ61] et [SZC59]) qui consiste à découpler les résolutions en pression et saturation. Le principe de ce schéma est d'effectuer une intégration en temps de type Euler en choisissant d'être implicite en pression et explicite en saturation. À l'itération n , le système (2.6) se réécrit comme suit :

$$\operatorname{div} (v (P^{n+1}, S^n)) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \quad (2.8)$$

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \operatorname{div} (f_w (S^n) v (P^{n+1}, S^n)) = 0 \quad (2.9)$$

associé aux conditions aux limites présentées dans l'équation (2.7), δt étant le pas de discrétisation en temps de la méthode.

Dans la suite, on définit, de manière classique, pour une grandeur X , pour une maille $k \in \mathcal{K}_h$ et un temps $t^n = n \delta t$:

$$X_k^n = X(\mathbf{x}_k, t^n).$$

Similairement, pour une face $\sigma \in \mathcal{F}_h$ et un temps $t^n = n \delta t$, on note :

$$X_\sigma^n = X(\mathbf{x}_\sigma, t^n).$$

2.3.1 Résolution du problème en pression

On s'intéresse, dans un premier temps, au calcul de la pression P^{n+1} . Pour cela, l'équation (2.8) est intégrée sur une maille $k \in \mathcal{K}_h$. On applique ensuite la formule de Green :

$$\int_k \operatorname{div} v \, dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^b} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_\sigma \, ds.$$

On choisit ici de calculer les flux diffusifs par un schéma volumes finis deux points [EGH00] consistant pour les maillages cartésiens (ou de type Voronoï). Dans le cadre de maillages non structurés, les flux peuvent être approchés par des schémas multi-points [ABBM98], [ER98].

Flux diffusifs sur les faces internes

Soit $k \in \mathcal{K}_h$. Pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i$ telle que $k, l \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$, on a :

$$\int_\sigma v (P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds \simeq \Phi_{k,\sigma}^i$$

avec

$$\Phi_{k,\sigma}^i = \lambda_{T,\sigma}^i T_\sigma^i (P_k^{n+1} - P_l^{n+1})$$

où la transmissivité T_σ^i est calculée par une moyenne harmonique :

$$T_\sigma^i = |\sigma| \frac{k_k k_l}{k_l d_{k,\sigma} + k_l d_{l,\sigma}}$$

et la mobilité totale $\lambda_{T,\sigma}^i$ est calculée au moyen d'un décentrement amont par rapport au gradient de pression :

$$\lambda_{T,\sigma}^i = \begin{cases} \lambda_T(S_k^n) & \text{si } P_k^{n+1} \geq P_l^{n+1} \\ \lambda_T(S_l^n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Flux diffusifs sur les faces de bord

Soit $k \in \mathcal{K}_h$. Pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D$, on a :

$$\int_{\sigma} v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{\sigma} ds \simeq \Phi_{k,\sigma}^D$$

avec

$$\Phi_{k,\sigma}^D = \lambda_{T,\sigma}^D T_{\sigma}^D (P_k^{n+1} - P_{\sigma})$$

où la transmissivité T_{σ}^D est donnée par :

$$T_{\sigma}^D = |\sigma| \frac{k_k}{d_{k,\sigma}} \text{ pour } k \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$$

et la mobilité totale $\lambda_{T,\sigma}^D$ est calculée au moyen d'un décentrement amont par rapport au gradient de pression :

$$\lambda_{T,\sigma}^D = \begin{cases} \lambda_T(S_k^n) & \text{si } P_k^{n+1} \geq P_{\sigma} \\ \lambda_T(S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résolution du système linéaire

Finalement, l'équation discrète associée à la maille $k \in \mathcal{K}_h$ pour le problème en pression est :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} \Phi_{k,\sigma}^i + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} \Phi_{k,\sigma}^D = 0. \quad (2.10)$$

Après assemblage, on obtient un système linéaire $Ax = b$ de taille N_h où :

- $x \in \mathbb{R}^{N_h}$ est un vecteur dont les composantes sont les valeurs de la pression P^{n+1} dans chaque maille $k \in \mathcal{K}_h$;
- $A \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$ est une matrice symétrique définie positive.

Notons que le système a une solution unique si $|\Gamma_D| > 0$.

2.3.2 Résolution du problème en saturation

Une fois la pression P^{n+1} obtenue par résolution du problème (2.8), il convient de calculer la saturation S^{n+1} en résolvant l'équation de transport (2.9). L'intégration de l'équation (2.9) sur une maille $k \in \mathcal{K}_h$ donne :

$$\int_k \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \operatorname{div} (f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n)) \right) dx = 0.$$

Puis, en appliquant la formule de la divergence :

$$\int_k \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} \right) dx + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_h} \int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} d\sigma = 0.$$

Dans la suite, on introduit la notation $(u)^+ = \max(u, 0)$ et $(u)^- = \min(u, 0)$.

Terme d'accumulation

On fait l'approximation suivante du terme d'accumulation :

$$\int_k \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} \right) dx \simeq |k| \phi_k \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\delta t}.$$

Termes de flux

Soit une maille $k \in \mathcal{K}_h$. Pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i$ telle que $k, l \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$, le flux est discrétisé de la manière suivante :

$$\int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} d\sigma \simeq F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n)$$

avec

$$F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n) = f_w(S_k^n) (\Phi_{k,\sigma}^i)^+ + f_w(S_l^n) (\Phi_{k,\sigma}^i)^-.$$

Pour les faces $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D$, on a :

$$\int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{\sigma} d\sigma \simeq F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma}))$$

avec

$$F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) = f_w(S_k^n) (\Phi_{k,\sigma}^D)^+ + f_w(S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) (\Phi_{k,\sigma}^D)^-.$$

Résolution

Finalement, l'équation discrète associée à la maille $k \in \mathcal{K}_h$ pour le problème en saturation est :

$$|k| \phi_k \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^i + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^D = 0.$$

Les saturations sont calculées de façon explicite et ne nécessitent pas l'inversion d'un système linéaire :

$$S_k^{n+1} = S_k^n - \frac{\delta t}{|k| \phi_k} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) \right). \quad (2.11)$$

On rappelle que les valeurs des saturations S^{n+1} restent bornées si le pas de temps vérifie une condition CFL [CFL28].

Théorème 2.1. *Soit S^{n+1} le champ de saturation vérifiant le problème (2.9). On suppose que le pas de temps δt vérifie la condition suivante*

$$\delta t \leq \frac{\inf_{k \in \mathcal{K}_h} (|k| \phi_k)}{\sup_{k \in \mathcal{K}_h} \left(- \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} (F_{w,\sigma}^i)^- - \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} (F_{w,\sigma}^D)^- \right) \sup_{S \in [0,1]} (f'_w(S))}. \quad (2.12)$$

Alors

$$\forall n \geq 0, \forall k \in \mathcal{K}_h, \quad \min(S^0, S_b) \leq S_k^n \leq \max(S^0, S_b).$$

La condition (2.12) est appelée condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

2.4 Schéma IMPIMS

Dans cette partie, on présente le schéma *IMPIMS* (*IMplicit Pressure, IMplicit Saturation* [Far98] et [Coa00]). Comme pour le schéma *IMPES*, les résolutions en pression et saturation sont découplées. Dans ce schéma l'intégration en temps est aussi de type Euler, la pression est toujours implicite mais la saturation est implicite pour calculer le flux fractionnaire. On résout donc le système

$$\operatorname{div}(v(P^{n+1}, S^n)) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \quad (2.13)$$

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \operatorname{div}(f_w(S^{n+1}) v(P^{n+1}, S^n)) = 0. \quad (2.14)$$

Ainsi, la pression est calculée de la même manière que dans le paragraphe 2.3. Cela nous permet d'obtenir les flux de la vitesse totale v à travers les faces $\sigma \in \mathcal{F}_h^{i \vee D}$ (les flux à travers les autres faces étant nuls). Pour calculer les saturations à l'instant $n+1$, on effectue une discrétisation en volumes finis de l'équation (2.14). Pour toute maille $k \in \mathcal{K}_h$, on a alors

$$S_k^{n+1} = S_k^n - \frac{\delta t}{|k| \phi_k} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^{i,n+1} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^{D,n+1} \right). \quad (2.15)$$

avec les flux discrets définis en utilisant un décentrement amont de la même manière qu'au paragraphe 2.3 :

$$\begin{aligned} F_{w,\sigma}^{i,n+1} &= f_w(S_k^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^i)^+ + f_w(S_l^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^i)^- \\ F_{w,\sigma}^{D,n+1} &= f_w(S_k^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^D)^+ + f_w(S_b(\mathbf{x}_\sigma)) (\Phi_{k,\sigma}^D)^- \end{aligned}$$

Le calcul des saturations S_k^{n+1} nécessite la résolution d'un système non linéaire du fait de l'expression de la fonction f_w . Cette résolution s'effectue par une méthode de Newton [WR67]. En évaluant les flux de manière implicite, la solution obtenue respecte le principe du maximum quel que soit le pas de temps choisi.

Théorème 2.2. Soit $\delta t > 0$. Soit S^{n+1} le champ de saturation vérifiant le problème (2.15). Alors

$$\forall n \geq 0, \forall k \in \mathcal{K}_h, \quad \min(S^0, S_b) \leq S_k^n \leq \max(S^0, S_b).$$

2.5 Résultats numériques

Tous les résultats présentés dans ce paragraphe ainsi que ceux du paragraphe 5.4 ont été obtenus à partir d'un code prototype écrit en *C++* basé sur la plate-forme *Arcane* [GL09]. Plus de détails sur cette plate-forme et notre implémentation sont présentés au chapitre 6.

2.5.1 Présentation des cas étudiés

Présentation du cas SPE 10

Pour comparer les différents schémas de discrétisation du modèle *Dead-Oil* introduit dans ce manuscrit, nous considérons le cas présenté dans [CB01] que nous désignerons par cas *SPE 10*. Ce cas a été introduit pour comparer différentes méthodes d'*upscaling*. Il est composé de 60 mailles dans la direction x , 220 mailles dans la direction y et 85 mailles dans la direction z . Cela correspond à un total de plus d'un million de mailles. Chaque maille est un parallélépipède de taille 6,096 m dans la direction x , 3,048 m dans la direction y et 0,6096 m dans la direction z . Les autres paramètres du modèle sont fixés de la façon suivante :

- $S_{wi} = S_{or} = 0,2$,
- $\mu_o = 1$ cp et $\mu_w = 0,3$ cp ,
-

$$kr_w = \left(\frac{S - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^2 \quad \text{et} \quad kr_o = \left(\frac{1 - S - S_{or}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^2.$$

Contrairement au jeu de données original, les perméabilités utilisées pour nos tests sont scalaires. Ainsi, les valeurs définies sur la direction x dans [CB01] seront, dans notre cas, celles utilisées pour toutes les directions. De plus, pour éviter de trop grands écarts de perméabilités, on considère que toutes les perméabilités inférieures à 0,1 millidarcy sont égales à 0,1 millidarcy. La porosité a été choisie uniforme et égale à 1.

Pour ces premiers résultats, on se limite à un cas à deux dimensions correspondant à la couche 85 du cas SPE 10. Les perméabilités de cette couche sont représentées sur la figure 2.1 (toutes les cartes dans ce manuscrit sont en unités SI). Le cas à trois dimensions complet sera utilisé dans le chapitre 6 pour comparer les temps de calculs de chaque méthode.

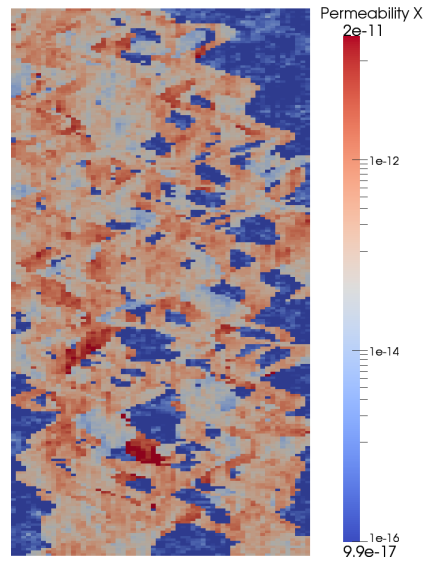


FIGURE 2.1 – Perméabilités de la couche 85 du cas SPE 10

Présentation d'un cas fracturé

Nous considérons également un deuxième cas réservoir que nous dénommons *cas fracturé*. Ce cas modélise un réservoir fracturé pour lequel les fluides se déplacent majoritairement le long des fractures. Ce cas comporte 200 mailles dans la direction x et 100 mailles dans la direction y . Chaque maille est un carré de 100 m de côté. Le champ de perméabilité est très hétérogène et ses valeurs sont très différentes selon la direction considérée (voir figure 2.2).

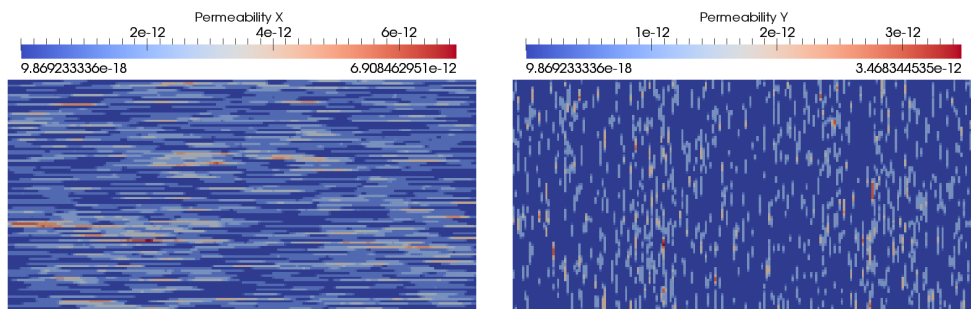


FIGURE 2.2 – Perméabilités dans les directions x et y pour le cas fracturé

Dans ce cas, on considère un champ de porosité également très hétérogène (voir figure 2.3). Les autres paramètres physiques sont les mêmes que ceux utilisés pour le cas SPE 10.

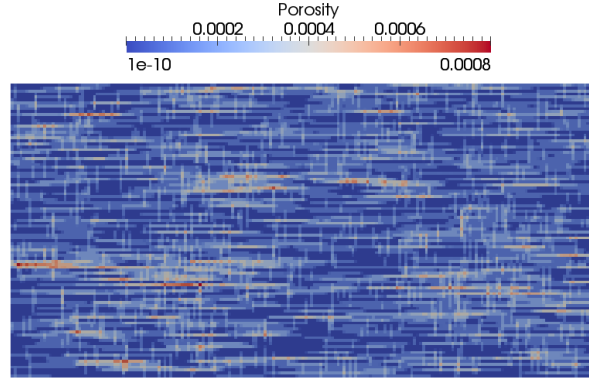


FIGURE 2.3 – Porosités du cas fracturé

2.5.2 Présentation des résultats

Les solutions présentées ici seront comparées avec celles obtenues avec les différentes méthodes multi-échelles dans la suite.

Couche 85 du cas SPE 10

On considère la couche 85 du cas SPE 10 présenté au paragraphe précédent. Dans ce cas, on impose une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord de droite. Sur le bord de gauche, une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0 sont fixées. Sur les autres bords, une condition de flux nul est imposée.

La figure 2.4 présente les champs de pression et de saturation obtenus lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 25% du volume poreux total. Le solveur linéaire utilisé pour résoudre le système en pression est un solveur itératif *BiCGStab* [vdV92] avec un préconditionneur de type *AMG* (Algebraic MultiGrid [Stü01]). Pour la méthode IMPIMS, ce solveur est également utilisé dans le calcul des saturations pour résoudre le système linéaire à chaque itération de la méthode de Newton mais le préconditionneur est dans ce cas de type *ILU0* [MvdV77].

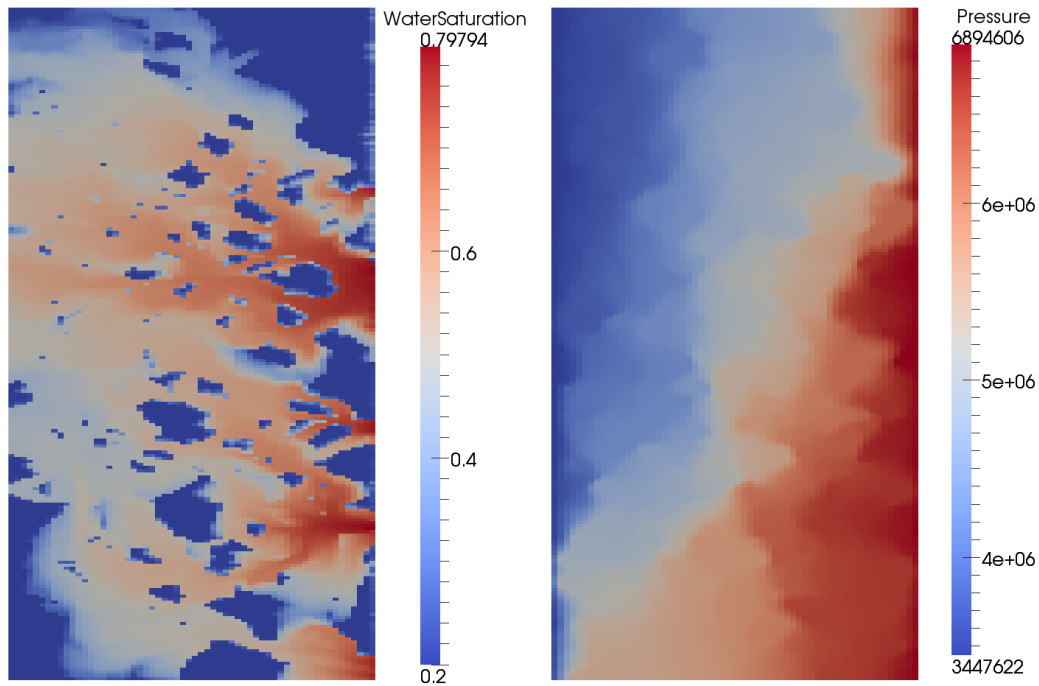


FIGURE 2.4 – Résultats obtenus avec le solveur fin pour la couche 85 du cas SPE 10

Cas fracturé

On reprend le cas fracturé présenté au paragraphe 2.5.1. On impose une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord de gauche. Sur le bord de droite, une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0 sont fixées. Sur les autres bords, une condition de flux nul est imposée.

La figure 2.5 présente les champs de pression et de saturation obtenus lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 10% du volume poreux total. Les solveurs utilisés sont les mêmes que dans le cas précédent.

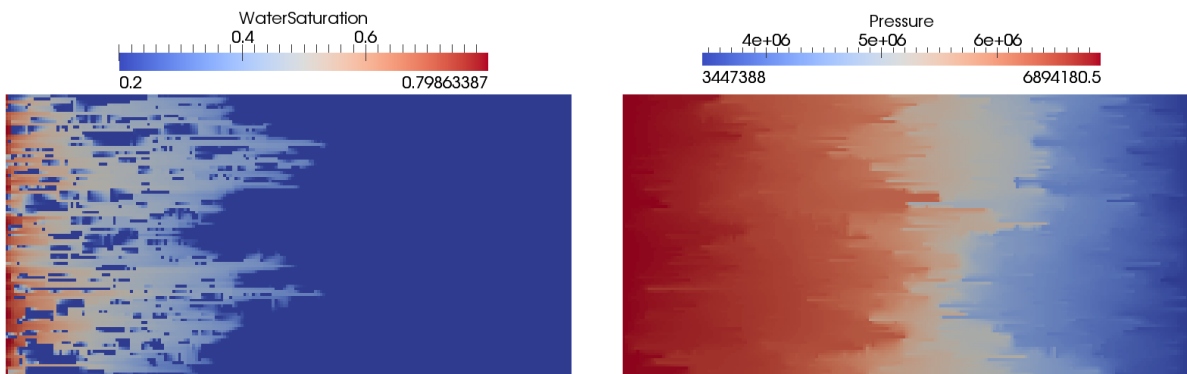


FIGURE 2.5 – Résultats obtenus avec le solveur fin pour le cas fracturé

Chapitre 3

Homogénéisation d'un problème elliptique

Sommaire

3.1	Présentation de la théorie de l'homogénéisation	41
3.2	Problème de départ	42
3.3	Résultats et théorèmes préliminaires	43
3.4	Développement asymptotique formel	43
3.5	Convergence à deux échelles	48
3.6	Résultat de convergence et estimation <i>a priori</i>	49

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté deux schémas de discrétisation pour le calcul d'un écoulement diphasique dans un milieu poreux. Pour ces deux schémas, la première étape consiste à résoudre un problème elliptique pour calculer la pression à l'intérieur du réservoir. Dans ce chapitre, nous présentons l'homogénéisation d'un problème elliptique périodique. Ces résultats servent de base aux méthodes multi-échelles présentées aux chapitres 4 et 5. L'objectif est de calculer numériquement la pression dans le réservoir lors d'un écoulement diphasique avec ces méthodes.

3.1 Présentation de la théorie de l'homogénéisation

De nombreux problèmes rencontrés dans différents domaines scientifiques dépendent de paramètres ayant une grande variabilité spatiale. La résolution de ce type de problème à l'échelle de variation de ces paramètres peut être très difficile du fait de la taille des maillages utilisés. Le but de l'homogénéisation est de reformuler ces problèmes sous la forme d'un problème dit *homogénéisé* en introduisant des paramètres effectifs définis à une échelle d'espace plus grossière. La résolution de ce second problème à cette échelle est alors moins coûteuse.

La notion d'homogénéisation est en fait une généralisation du concept de *valeurs moyennes* qui a été étudié depuis le XIX^e siècle (voir, par exemple, J. C. Maxwell [Max81] et S.-D. Poisson [Poi25]). Cependant le terme d'homogénéisation a été introduit, pour la première fois, par P. Benoist [Ben64] pour l'étude des phénomènes de diffusion dans les réacteurs nucléaires. Les premières théories mathématiques sur l'homogénéisation ont été publiées par S. Spagnolo et E. De Giorgi (voir [Spa68], [DS73], [DG75], [Spa76] et [DG83]) qui ont introduit les notions de G-convergence et Γ -convergence. Ces notions ont ensuite été généralisées par F. Murat et L. Tartar qui ont défini la notion de H-convergence [MT97]. La théorie de l'homogénéisation s'est ensuite étoffée avec l'utilisation de développements asymptotiques. Les développements asymptotiques avaient déjà été utilisés notamment pour spécifier des termes de couches limites. Cependant, leur utilisation pour prouver des résultats d'homogénéisation a été proposée par É. Sanchez-Palencia [SP80], I. Babuška [Bab76], N. Bakhvalov et G. Panasenko [BP89]. Le livre [BLP78] écrit par A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou regroupe un certain nombre de résultats et de démonstrations sur la théorie de

l'homogénéisation. Dans ce qui suit, on démontre une partie des résultats issus de cette théorie dans le cas d'un problème elliptique à coefficients périodiques. Ces démonstrations se basent sur la convergence à deux échelles qui a été introduite par G. Nguetseng [Ngu89] et formalisée par G. Allaire [All92]. D'autres méthodes telles que la *méthode de l'éclatement périodique* (periodic unfolding method) présentée par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso [CDG02] ont été mises au point pour expliquer et démontrer différents résultats d'homogénéisation.

Le concept de convergence à deux échelles a également été généralisé avec l'intégration d'une dérive pour traiter des problèmes de convection-diffusion à convection dominante dans [MPP05]. Cette notion a notamment été présentée par P. Donato et A.L. Piatnitski [DP05] ainsi que G. Allaire et A.L. Raphael [AR07]. Notons que certains articles antérieurs tels que [ZKO94] et [Pap95] envisageaient déjà une extension des résultats d'homogénéisation elliptique à cette classe de problèmes. L'homogénéisation basée sur un développement asymptotique à deux échelles avec dérive est présentée plus en détail au chapitre 7.

La plupart des références que nous avons évoquées s'intéressent à l'homogénéisation de problèmes périodiques. De nombreux auteurs ont pu constater que des résultats assez similaires pouvaient également être démontrés si on souhaite intégrer des données aléatoires. On parle alors d'*homogénéisation stochastique* (voir [ZKO94], [PS08] et [PV⁺79]).

Mentionnons enfin plusieurs livres très complets sur l'homogénéisation : [All02], [CD99], [PS08], [Tar09] et [ZKO94].

Ce chapitre présente brièvement des résultats d'homogénéisation dans le cas d'un problème elliptique périodique.

3.2 Problème de départ

Le problème elliptique que l'on cherche à résoudre dans le système (2.6) est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla P) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ P &= P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D \\ k\lambda_T \nabla P \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D. \end{cases}$$

Ce problème est posé sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné qui représente le réservoir. On souhaite résoudre ce problème dans le cas où $k\lambda_T$ varie à une échelle beaucoup plus petite que le domaine Ω .

Ainsi, notons $\varepsilon = \frac{l}{L}$ où l représente l'échelle caractéristique des hétérogénéités et L celle du domaine Ω .

Nous voulons construire une méthode multi-échelle permettant d'approcher la solution de ce problème elliptique. Pour plus de généralité, nous considérons ici un problème avec second membre. On va cependant prendre des conditions aux bords plus simples. De plus, pour se conformer aux usages en théorie de l'homogénéisation nous modifions les notations. Le problème que l'on cherche à résoudre est alors

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où A^ε est une matrice dont les coefficients varient à l'échelle ε . Ce problème est utilisé pour construire et justifier le choix de la méthode multi-échelle. Nous appliquerons ensuite la même méthode pour le problème en pression précédent.

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats d'homogénéisation périodique où A^ε est supposée périodique de période ε dans chaque direction de l'espace.

Dans ce qui suit, on ajoutera l'indice $\#$ sur les espaces de fonctions pour préciser que ces fonctions vérifient des conditions aux bords de périodicité. Ainsi, on désigne par $L^2_\#(X)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable définies sur un pavé X et X -périodiques.

Soit Y la cellule unité $(0,1)^N$. Le problème que l'on cherche à résoudre consiste alors à trouver $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon\right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses 3.1 :

1. $A \in \left[L_{\#}^{\infty}(Y) \right]^{N \times N}$,
2. A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N ,

3. $f \in L^2(\Omega)$.

Le problème ainsi posé admet une et une seule solution u_{ε} par le théorème de Lax-Milgram rappelé dans l'annexe A.2.1.

La valeur du coefficient ε est faible. On va donc chercher à caractériser la solution à ce problème lorsque ε tend vers 0.

Dans la prochaine partie, nous allons partir d'un développement asymptotique formel pour obtenir un problème de cellule (3.4) et un problème homogénéisé (3.5) (paragraphe 3.4).

Puis, dans le paragraphe 3.5, nous allons introduire la notion de convergence à deux échelles et nous verrons que cette notion nous permet de caractériser la convergence de la solution calculée à partir du problème homogénéisé vers la solution du problème de départ. En particulier, le théorème des correcteurs (Théorème 3.3) montre que l'on peut avoir une convergence en norme $H_0^1(\Omega)$ vers la solution du problème initial.

Une fois ces résultats établis, nous allons voir qu'on peut estimer l'écart entre la solution obtenue en résolvant le problème homogénéisé et la solution du problème initial. On arrive, par exemple, à l'inégalité (3.21) qui montre que la convergence en norme $H_0^1(\Omega)$ rappelée précédemment est à l'ordre $\frac{1}{2}$ en ε .

Ces résultats théoriques servent de base à la méthode multi-échelle présentée au chapitre 4.

3.3 Résultats et théorèmes préliminaires

Le résultat suivant est classique et sera utilisé dans la suite.

Lemme 3.1. *Soit φ une fonction dans l'espace $L^2\left(\Omega, \mathcal{C}_{\#}^0(Y)\right)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est mesurable sur Ω , et on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) dx dy. \quad (3.2)$$

Pour résoudre les problèmes qui suivent, on va utiliser l'alternative de Fredholm montrée sous cette forme dans [BLP78].

Lemme 3.2 (Alternative de Fredholm). *Soit $g \in L_{\#}^2(Y)$. On suppose que la matrice $A \in \left[L_{\#}^{\infty}(Y) \right]^{N \times N}$ est coercive. Le problème : trouver $v \in H_{\#}^1(Y)$ telle que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y v) &= g & \text{dans } Y \\ v \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

admet une solution unique, à l'addition d'une constante près si et seulement si

$$\int_Y g(y) dy = 0.$$

Cette condition est appelée alternative de Fredholm ou condition de compatibilité.

3.4 Développement asymptotique formel

Les calculs que l'on présente dans ce paragraphe sont formels. Pour plus de détail sur ce développement asymptotique, on peut, par exemple, se référer à [SP80], [BLP78] ou [BP89]. Nous allons, ici, partir d'un

postulat : on suppose que la fonction u_ε solution du problème (3.1) peut s'écrire sous la forme

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (3.3)$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction $u_i(x, y)$ dépend de deux variables $x \in \Omega$ et $y \in Y$ et est Y -périodique par rapport à y .

Proposition 3.1. *Soit u_ε la solution du problème (3.1). On suppose que les hypothèses 3.1 sont vérifiées. On suppose également que le développement asymptotique (3.3) est vrai et que les fonctions u_i sont Y -périodiques par rapport à y et "régulières" (les résultats de cette proposition sont uniquement formels, il n'y a donc pas besoin de préciser les régularités). Alors*

- la fonction u_0 ne dépend pas de la variable y :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall y \in Y, \quad u_0(x, y) = u(x).$$

- On définit les fonctions w_i solutions des problèmes de cellules

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) = 0, \\ y \mapsto w_i(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.4)$$

- La fonction u est solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

où A^* est une matrice définie positive telle que

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy. \quad (3.6)$$

- La fonction u_1 est définie par

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y) + \tilde{u}_1(x), \quad (3.7)$$

avec une fonction \tilde{u}_1 dépendant uniquement de x qui reste à définir.

Remarque 3.1 : La solution du problème de départ peut ensuite être approchée de la manière suivante

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cela correspond aux deux premiers termes du développement asymptotique (3.3).

On remarque que, pour calculer ces deux termes, il faut d'abord résoudre les problèmes de cellule (3.4) dans chaque direction. Ces problèmes doivent être résolus sur Y à l'échelle fine. Puis, en utilisant les solutions w_i , on calcule la matrice homogénéisée A^* par la formule (3.6). On obtient alors u en résolvant un autre problème elliptique (3.5) sur Ω mais ce problème n'a pas de coefficient variant à l'échelle ε . On a donc, à aucun moment, besoin de faire des calculs à l'échelle fine sur l'espace entier.

Démonstration. On remarque d'abord que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\nabla \left(u_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left(\nabla_x u_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y u_i \right) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

En appliquant cette formule au développement asymptotique de u_ε , et en regroupant les termes en fonctions du degré en ε , on obtient :

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y u_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\nabla_x u_i + \nabla_y u_{i+1}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{div}_y (A \nabla_y u_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_x (A \nabla_y u_0) + \operatorname{div}_y (A (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1))) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\operatorname{div}_x (A \nabla_x u_i + A \nabla_y u_{i+1}) + \operatorname{div}_y (A \nabla_x u_{i+1} + A \nabla_y u_{i+2})) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Sachant que l'on veut

$$-\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f(x)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on peut identifier les termes en fonction de l'ordre en ε .

On obtient d'abord en prenant le terme en ε^{-2}

$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \quad -\operatorname{div}_y \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla_y u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = 0.$$

On a donc, en posant $y = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad -\operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0. \quad (3.8)$$

De même, en considérant le terme en ε^{-1} , on a :

$$\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)(x, y)) - \operatorname{div}_x (A(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0. \quad (3.9)$$

Pour le terme en ε^i , avec $i \geq 0$, l'équation qui doit être vérifiée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad &-\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y u_{i+2} + \nabla_x u_{i+1})(x, y)) \\ &-\operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)(x, y)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

On interprète toutes ces équations comme des équations aux dérivées partielles en y qui sont toutes de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y v) = g & \text{dans } Y, \\ y \mapsto v(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

où g est une fonction Y -périodique.

Dans cette partie, on cherche à effectuer le calcul formellement. On va donc supposer que toutes fonctions g aux seconds membres sont dans $L^2(Y)$. On applique ensuite l'alternative de Fredholm (voir lemme 3.2) aux différentes équations.

Pour l'équation (3.8), le second membre est nul donc cette condition est clairement vérifiée. De plus, $u_0 = 0$ est une solution évidente du problème et l'unicité à une constante près nous permet de dire que u_0 est une constante par rapport à y . On peut donc écrire :

$$\boxed{\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad u_0(x, y) = u(x).}$$

En utilisant ce résultat, l'équation (3.9) devient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1)(x, y)) = 0, \\ y \mapsto u_1(x, y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.11)$$

On décompose $\nabla_x u$ sur la base canonique :

$$\nabla_x u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) e_i.$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$, on définit $w_i : Y \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) = 0, \\ y \mapsto w_i(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Ces fonctions existent car les seconds membres sont $g_i = \operatorname{div}_y (A e_i)$ et

$$\int_Y \operatorname{div}_y (A e_i) = \int_{\partial Y} A e_i \cdot n = 0,$$

par périodicité de A .

Le problème (3.4) est appelé *problème de cellule* et les solutions w_i sont appelés *correcteurs*.

On remarque ensuite que, par linéarité, la fonction

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y)$$

est solution du problème (3.11).

Par unicité de la solution à une constante près, on obtient

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y) + \tilde{u}_1(x).$$

Remarque 3.2 : En pratique, les fonctions w_i étant définies à une constante près, on les choisira à moyenne nulle. De plus, on prendra $\tilde{u}_1(x) = 0$.

On résout ensuite le problème (3.10) pour $i = 0$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1)) - \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) = f(x), \\ y \mapsto u_2(x, y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.12)$$

La condition de compatibilité impose

$$\int_Y (f(x) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) + \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1)) dy = 0.$$

L'intégrale du terme en div_y est nulle car $A(y) \nabla_x u_1(x, y)$ est Y -périodique.

La fonction f ne dépend pas de la variable y , donc son intégrale sur Y (de mesure unitaire) vaut f . En décomposant ensuite l'équation précédente et, en adoptant la convention de sommation d'Einstein, on obtient :

$$f + \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) \right) dy = 0,$$

ie.

$$\forall x \in \Omega, \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y A_{i,j}(y) \left(\frac{\partial w_k}{\partial y_j}(y) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) dy = f(x),$$

ou

$$\forall x \in \Omega, \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,k}^* \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right) = f(x),$$

avec

$$A_{i,k}^* = \int_Y A_{i,j}(y) \left(\frac{\partial w_k}{\partial y_j}(y) + \delta_{k,j} \right) dy.$$

Ce qui peut se réécrire

$$A_{i,k}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_k(y) + e_k) \cdot e_i dy. \quad (3.13)$$

On aboutit donc à l'équation *homogénéisée* :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemme 3.3. *La matrice A^* définie par (3.13) est définie positive et*

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy.$$

Cette formule montre que A^ est symétrique si pour tout $y \in Y$, $A(y)$ l'est.*

Démonstration. On reprend l'équation (3.4) pour w_j :

$$-\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_j + e_j)) = 0.$$

On multiplie cette égalité par w_i et on l'intègre sur Y . On effectue ensuite une intégration par parties :

$$\int_Y A(y) (\nabla_y w_j + e_j) \cdot \nabla_y w_i dy = 0.$$

En ajoutant ce terme à la définition de $A_{i,j}^*$, on obtient :

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy.$$

La matrice A^* peut donc bien être définie par la formule (3.6). Il nous reste à montrer qu'elle est définie positive. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. On définit

$$w_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i.$$

Par linéarité, la fonction w_ξ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_\xi + \xi)) = 0, \\ y \mapsto w_\xi(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.14)$$

En multipliant l'équation (3.14) par w_ξ et en intégrant sur Y par parties, on a :

$$\int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \nabla_y w_\xi(y) dy = 0. \quad (3.15)$$

Et

$$A^* \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \xi dy. \quad (3.16)$$

D'où, en sommant les égalités (3.15) et (3.16) :

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) dy.$$

On utilise maintenant la coercivité de A

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) dy \geq C_{sta} \int_Y |\nabla_y w_\xi(y) + \xi|^2 dy.$$

On a donc la positivité de la matrice. De plus, si $A^* \xi \cdot \xi = 0$, on a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\forall y \in Y, \quad \nabla_y w_\xi(y) + \xi = 0.$$

On en déduit que

$$w_\xi(y) = -\xi y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Or, w_ξ est une fonction Y -périodique, donc $\xi = 0$.

A^* est donc bien une matrice définie positive. \square

Par le théorème de Lax-Milgram, le problème homogénéisé (3.5) admet donc une solution unique. De plus, par les théorèmes de régularité elliptique (voir annexe A.2.3) A^* étant constant, si f est régulière, u est aussi régulière que Ω . Ainsi, si Ω est de classe C^∞ et $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. \square

Tous les résultats obtenus dans ce paragraphe sont uniquement formels et n'ont, pour l'instant, pas de justification mathématique. En particulier la régularité des différentes fonctions n'est pas précisée et on ne précise pas en quel sens la fonction u_ε est proche de son développement asymptotique.

3.5 Convergence à deux échelles

Nous présentons ici le concept de convergence à deux échelles. La notion de convergence à deux échelles a été introduite par G. Nguetseng dans [Ngu89] et formalisée par G. Allaire dans [All92]. Cette notion va nous servir à justifier mathématiquement et de manière plus précise le développement asymptotique (3.3) et les résultats de la proposition 3.1. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour obtenir ces résultats. On peut citer, par exemple, la *méthode du déploiement périodique* (periodic unfolding method) présentée par D. Cioranescu, A. Damlaian et G. Griso dans [CDG02] ou la méthode de la *fonction test oscillante* introduite par L. Tartar dans [Tar76] et [MT97]. La méthode de la fonction test oscillante permet, en outre, d'obtenir des résultats d'homogénéisation pour des cas non périodiques.

Définition 3.1 (Convergence à deux échelles). *On dit qu'une suite de fonctions $u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ converge à deux échelles vers une limite $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si, pour toute fonction $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x,y) \varphi(x,y) dx dy.$$

Propriétés :

1. Si u_ε est une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et converge à deux échelles vers $u_0(x,y)$ alors u_ε converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $u(x) = \int_Y u_0(x,y) dy$. En effet, $\forall \varphi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi(x) = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x,y) \varphi(x) dx dy = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

2. On a aussi l'inégalité :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0(x,y)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u(x)\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'introduction de la notion de convergence à deux échelles permet d'obtenir certains résultats intéressants. On peut citer, le théorème suivant montré dans [All92].

Théorème 3.1. *Soit (u_ε) une suite bornée de fonctions de $H^1(\Omega)$.*

Alors il existe une sous-suite et deux fonctions limites $u(x) \in H^1(\Omega)$ et $u_1(x,y) \in L^2\left(\Omega, H_\#^1(Y)\right)$ tels que :

$u_\varepsilon(x)$ converge à deux échelles vers $u(x)$

$\nabla u_\varepsilon(x)$ converge à deux échelles vers $\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)$

En fait, pour u_ε solution du problème (3.1), on peut montrer que les fonctions $u(x)$ et $u_1(x,y)$ définies dans le théorème 3.1 peuvent être identifiées aux fonctions définies la proposition 3.1.

Théorème 3.2. *On considère la suite (u_ε) des solutions de (3.1). Alors u_ε converge à deux échelles vers u solution de (3.5) et ∇u_ε converge à deux échelles vers $\nabla_x u + \nabla_y u_1$ avec u_1 définie par l'équation (3.7).*

Ce théorème est également montré dans [All92].

3.6 Résultat de convergence et estimation a priori

Les théorèmes énoncés au paragraphe précédent nous permettent d'obtenir des résultats de convergence sur des espaces de fonctions plus classiques. Ainsi, le théorème suivant qui a, par ailleurs, été démontré dans [BLP78], montre que la fonction u_ε converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers $u + \varepsilon u_1$.

Théorème 3.3 (des correcteurs). *Soient u_ε vérifiant l'équation (3.1), u solution du problème homogénéisé (3.5) et u_1 définie par (3.7) où les fonctions w_i sont les solutions à moyenne nulle des problèmes (3.4) et $\tilde{u}_1 = 0$. Si on suppose, de plus, que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, alors on a :*

$$u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Nous reprenons ici la preuve de ce théorème faite dans [All92]. Nous supposons ici que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ mais le résultat reste vrai si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. On va évaluer la limite quand ε tend vers 0 de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) dx \\ & - 2 \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx \\ & + \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \cdot \left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En multipliant la première équation du système (3.1) par u_ε et en intégrant, on montre que

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_\varepsilon. \quad (3.18)$$

On veut passer à la limite quand ε tend vers 0 dans l'équation (3.17). Pour cela, on utilise l'équation (3.18) ainsi que la convergence à deux échelles de ∇u_ε vers $\nabla u + \nabla_y u_1$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) u(x) dx - 2 \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy \\ & + \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (3.19)$$

On reprend ensuite la définition de A^* dans (3.6) et la définition (3.7) de u_1 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy &= \int_{\Omega} A^* \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (A^* \nabla u(x)) u(x) dx, \end{aligned} \quad (3.20)$$

par intégrations par parties.

En insérant l'égalité (3.20) dans l'équation (3.19), on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left(\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x) - \operatorname{div} (A^* \nabla u(x))) u(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction u étant solution du problème homogénéisé (3.5), on remarque que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left(\nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx = 0.$$

En utilisant la coercivité de A , on en déduit le résultat voulu. \square

De plus, on peut caractériser la vitesse de cette convergence comme le montre ce théorème démontré dans [BLP78] et dans [AA99] d'une autre manière.

Théorème 3.4. *Soient u_{ε} , u et u_1 définies comme dans le théorème 3.3. Si on suppose, de plus, que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$, alors on a l'estimation a priori :*

$$\left\| u_{\varepsilon}(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.21)$$

Chapitre 4

Une méthode multi-échelle pour des problèmes elliptiques

Sommaire

4.1	Étude bibliographique des méthodes multi-échelles	51
4.1.1	Définition	52
4.1.2	Méthodes des éléments finis multi-échelles	53
4.1.3	Méthodes multi-échelles hétérogènes	53
4.1.4	Méthodes des volumes finis multi-échelles	55
4.2	Définition de la méthode multi-échelle	57
4.2.1	Hypothèses de départ	57
4.2.2	Idée de la méthode	57
4.2.3	Hypothèses de discrétisation	58
4.2.4	Définition de la méthode	59
4.3	Estimation <i>a priori</i>	60
4.3.1	Terme d'homogénéisation globale G_1	61
4.3.2	Terme d'interpolation G_2	62
4.3.3	Terme d'homogénéisation locale G_3	63
4.3.4	Terme d'interpolation locale G_4	66
4.3.5	Conclusion	69
4.4	Présentation des résultats obtenus avec cette méthode	69
4.4.1	Remarques préliminaires	69
4.4.2	Application à la couche 85 du cas SPE 10	69

Ce chapitre débute par une étude bibliographique des méthodes multi-échelles développées pour la résolution de problèmes elliptiques. Nous rappelons ensuite la méthode multi-échelle présentée par G. Allaire et R. Brizzi dans [AB05] qui est construite à partir des résultats du chapitre 3. Après avoir défini cette méthode, nous démontrons le théorème 4.1 qui nous permet d'obtenir une estimation *a priori* de sa précision et présentons quelques résultats numériques.

4.1 Étude bibliographique des méthodes multi-échelles

L'*upscaling* ou mise à l'échelle consiste à moyenner les valeurs de propriétés sur un maillage plus grossier que le maillage où elles sont initialement définies et à ne résoudre le problème initial que sur ce second maillage. Le calcul de ces valeurs moyennes peut souvent être justifié par le biais de résultats d'homogénéisation périodique ou stochastique [BQW88]. Dans le cas d'un problème elliptique de type (3.1), l'*upscaling* consisterait à calculer les valeurs de A^* sur chaque maille grossière, puis à résoudre le problème grossier (3.5)

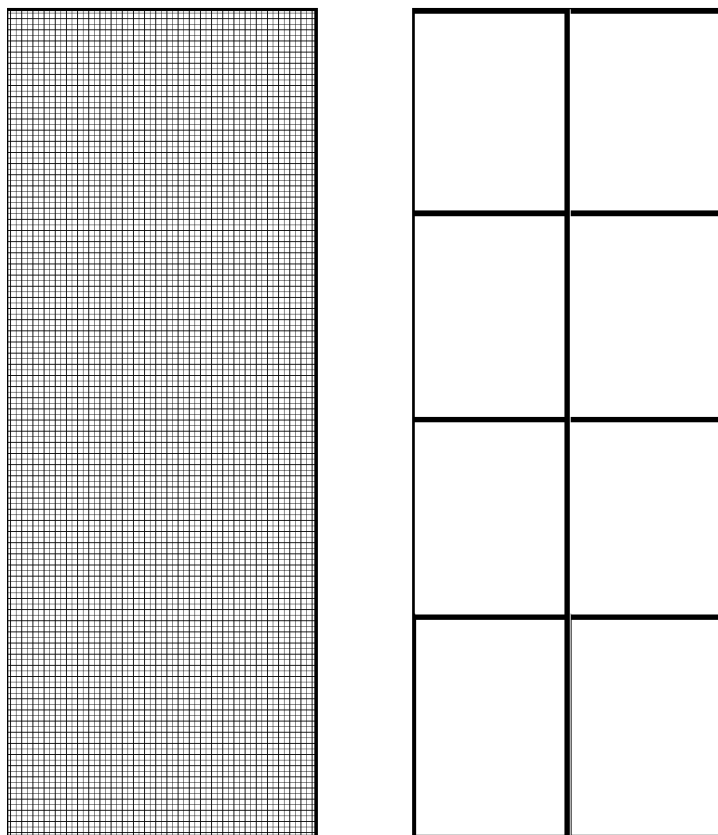


FIGURE 4.1 – Les deux maillages (fin et grossier)

avec une matrice A^* constante sur chaque maille grossière. Ce type d'approche, largement antérieur aux méthodes multi-échelles (voir [Max81] et [Poi25]), permet de calculer une valeur moyenne de la solution de manière efficace et est très largement utilisé pour la simulation des écoulements en milieux poreux [RDM97]. L'upsampling ne permet toutefois pas de reproduire les oscillations de la solution à l'échelle fine à moins d'utiliser une approche de type double maillage comme dans [GV95].

Dans la suite de cette section, nous allons voir que les méthodes multi-échelles ne calculent pas des paramètres équivalents à l'échelle grossière mais des fonctions de base qui permettent de réduire la taille du système linéaire à résoudre à cette échelle et de projeter ensuite les solutions à l'échelle fine.

4.1.1 Définition

D'une manière générale, les méthodes multi-échelles sont des méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes dans lesquels on observe une séparation d'échelle. Le plus souvent, on considère une échelle fine correspondant à la longueur caractéristique de variation des paramètres et une échelle grossière associée à la taille du domaine de définition du problème. Dans toute la suite de ce paragraphe, on va donc considérer qu'il y a deux maillages :

- un *maillage fin* \mathcal{K}_h dont la résolution est plus fine que la taille des hétérogénéités,
- un *maillage grossier* \mathcal{K}_H qui comporte des mailles beaucoup plus grandes (voir figure 4.1).

Le plus souvent, les méthodes multi-échelles s'inspirent de résultats obtenus dans des cas périodiques pour justifier les différentes approximations.

4.1.2 Méthodes des éléments finis multi-échelles

La *méthode des éléments finis multi-échelles* a été introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97]. I. Babuška et J.E. Osborn avaient proposé une idée similaire en une dimension [BO83]. L'idée principale de cette méthode est de définir des fonctions de base associées à des degrés de liberté grossiers mais dépendant localement des valeurs des paramètres connues à l'échelle fine. Plus précisément, la méthode des éléments finis multi-échelles consiste à calculer numériquement, sur un maillage fin local à chaque maille grossière, des fonctions solutions du problème elliptique suivant :

$$-\operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla \phi_K^i \right) = 0 \quad \text{dans } K. \quad (4.1)$$

Ce problème n'est pas fermé tant que l'on n'a pas imposé de conditions aux limites. Ces fonctions de base sont en fait considérées comme des extensions des fonctions de base d'une méthode \mathbb{P}_1 Lagrange. Ainsi, une fonction ϕ^i est associée à un nœud x_i et vérifie

$$\forall x_j \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_{1,H}}, \quad \phi^i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Il reste donc à définir les valeurs sur les bords des mailles $K \in \mathcal{K}_H$ tout en respectant cette condition sur les nœuds. L'article [HW97] propose plusieurs façons d'imposer ces conditions aux bords, mais on va supposer ici que ces conditions sont linéaires. Ce choix implique que les fonctions ϕ^i sont nulles sur toutes les mailles qui n'ont pas x_i pour sommet. Les problèmes (4.1) peuvent être résolus pour un nombre restreint de mailles et de manière indépendante du fait du choix des conditions aux limites. Cette dernière caractéristique est très intéressante d'un point de vue informatique, car cela signifie que la résolution de ces problèmes peut être faite en parallèle. Une fois ces fonctions de base construites, on construit l'espace aux éléments finis V_H^{MS} engendrés par ces fonctions ϕ^i . Le problème consiste alors à chercher la solution $u^{MS} \in V_H^{MS}$ du problème

$$\forall v^{MS} \in V_H^{MS}, \quad \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u^{MS} \cdot \nabla v^{MS} dx = \int_{\Omega} f v^{MS} dx. \quad (4.2)$$

Si on suppose que les fonction ϕ^i sont calculées en résolvant de manière exacte les problèmes (4.1), on peut alors montrer l'estimation d'erreur *a priori* entre la solution multi-échelle et la solution u_ε du problème (3.1) :

$$\|u_\varepsilon - u_{MS}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(H + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right). \quad (4.3)$$

D'autres méthodes présentées antérieurement peuvent être rapprochées de la méthode des éléments finis multi-échelles. On peut citer la méthode de *partition de l'unité* présentée par I. Babuška et J.M. Melenk [MB96] ou les méthodes intégrant des *bulles* présentées par F. Brezzi, L. Franca et A. Russo [BR94, BFR98]. La méthode que nous présentons dans ce chapitre généralise la méthode introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] en considérant des fonctions de base d'ordres supérieurs. Cette idée a ensuite été reprise par H. Owhadi et L. Zhang dans [OZ07] et [OZ08].

Le chapitre 5 présente la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles introduite par Z. Chen et Th. Y. Hou [CH02] qui est l'adaptation de la méthode des éléments finis multi-échelles aux éléments finis mixtes.

4.1.3 Méthodes multi-échelles hétérogènes

La première méthode multi-échelle hétérogène a été proposée par W. E et B. Engquist [EE03] pour résoudre des problèmes elliptiques à coefficients périodiques de type (3.1). On décrit ici la méthode en s'inspirant de la description faite par A. Abdulle [Abd13]. En fait, l'objectif de cette méthode est de calculer numériquement le tenseur A^* vu au chapitre 3 dans un cas non périodique. On voudrait ensuite appliquer une méthode aux éléments finis V_H associée à un maillage grossier \mathcal{K}_H du domaine Ω pour résoudre le problème homogénéisé (3.5). Cependant, on remarque que, si on veut résoudre numériquement un problème elliptique, on a besoin de connaître la valeur du tenseur uniquement aux points de quadrature utilisés pour calculer les intégrales. Ici, les variations de la solution à l'échelle fine ne sont donc calculées qu'au voisinage de certains points qui seront, en général, ces points de quadrature. On définit alors, pour chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, des pavés $Y_{i,\delta}$ de taille δ autour de ces points (voir figure 4.2). On décompose ensuite la solution

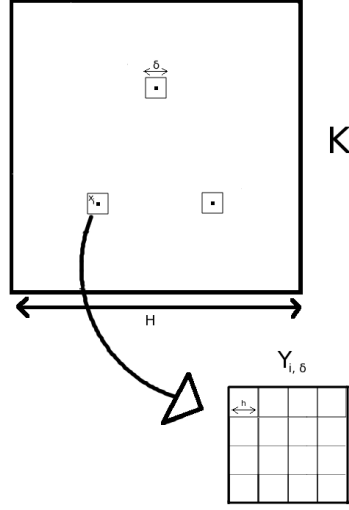


FIGURE 4.2 – Schéma présentant la discrétisation effectuée pour la Méthode Multi-échelle Hétérogène

numérique en deux parties : une partie macroscopique $u_H \in V_H$ et une partie microscopique \tilde{u}_h définie sur les $Y_{i,\delta}$. Au final, on définit la solution obtenue avec une méthode multi-échelle hétérogène par

$$u_h = u_H + \tilde{u}_h. \quad (4.4)$$

On remarque que la décomposition (4.4) peut être rapprochée de l'approximation montrée au chapitre 3 :

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Ainsi, la fonction \tilde{u}_h devrait être de l'ordre de ε mais son gradient de l'ordre de 1. L'objectif de cette méthode est de bien approcher u et on ne s'intéresse donc ici qu'au calcul de u_H . On choisit alors $\delta > \varepsilon$ mais de l'ordre de ε de telle sorte que le maillage utilisé à l'intérieur des $Y_{i,\delta}$ soit de résolution $h \ll \varepsilon$ et comporte un nombre de mailles raisonnable. Dans cette méthode, on impose que la partie microscopique \tilde{u}_h soit à moyenne nulle sur chacune des cellules $Y_{i,\delta}$. Cette condition est liée au fait que ce terme devrait être de l'ordre de ε . On construit alors un espace aux éléments finis $\tilde{V}_h(Y_{i,\delta})$ qui est un sous-espace de l'ensemble des fonctions de $Y_{i,\delta}$ à moyenne nulle associé au maillage fin \mathcal{K}_h . On suppose ensuite que $\tilde{u}_h|_{Y_{i,\delta}} \in \tilde{V}_h(Y_{i,\delta})$. En s'inspirant des problèmes de cellules (3.4), on définit des problèmes de cellules discrets. On cherche sur chaque maille $Y_{i,\delta}$ les fonctions $w_{Y_{i,\delta},h,j}, j = 1, \dots, N$ solutions des problèmes

$$\forall \tilde{z}_h \in \tilde{V}_h(Y_{i,\delta}), \quad \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j} \cdot \nabla \tilde{z}_h dx = \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) e_j \cdot \nabla \tilde{z}_h dx. \quad (4.5)$$

Ensuite, en se basant sur la définition de la matrice A^* dans (3.13), on définit

$$A_{Y_{i,\delta}}^0 = \frac{1}{|Y_{i,\delta}|} \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) (Id + \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j}) dx. \quad (4.6)$$

La fonction u_H est alors calculée en résolvant le problème :

$$\forall v_H \in V_H, \quad B_H(u_H, v_H) = \int_{\Omega} f v_H, \quad (4.7)$$

où

$$\begin{aligned} B_H(u_H, v_H) &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \sum_{x_i \in K} \frac{|K|}{|Y_{i,\delta}|} \omega_{K,i} \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) (Id + \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j}) \nabla u_H \cdot \nabla v_H dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} |K| \sum_{x_i \in K} \omega_{K,i} A_{Y_{i,\delta}}^0 \nabla u_H(x_i) \cdot \nabla v_H(x_i), \end{aligned}$$

les x_i étant les points de quadrature de la maille K et les $\omega_{K,i}$ les poids associés. Avec cette méthode, pour un bon choix de δ , les estimations d'erreur *a priori* (voir [MZ⁺05] et [Abd05]) suivantes peuvent être établies

$$\|u_\varepsilon - u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(H^2 + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} + \varepsilon \right), \quad (4.8)$$

$$\|u - u_H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(H + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} \right), \quad (4.9)$$

où u est la solution du problème homogénéisé (3.5). On peut même montrer, si on suppose que le rapport $\frac{\delta}{\varepsilon}$ est entier, que

$$\|u - u_H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(H + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \right).$$

L'avantage de cette méthode par rapport à celle de Th. Hou et X. Wu est qu'elle diminue la taille des systèmes fins à résoudre. En effet, les problèmes de cellule (4.5) sont aussi indépendants mais doivent être uniquement résolus sur les $Y_{i,\delta}$. Ainsi, pour un maillage de même résolution, le nombre d'inconnues fines sera plus faible avec la méthode multi-échelle hétérogène.

On peut également, avec cette méthode, reconstruire une solution oscillante sur le maillage complet. Pour cela, on utilise la solution locale \tilde{u}_h définie sur les mailles $Y_{i,\delta}$ que l'on prolonge par périodicité sur toute la maille K . Cela nous permet de définir une fonction oscillante $\tilde{u}_{h,K}$. On introduit ainsi la fonction u_{Hh} définie par

$$u_{Hh}|_K = u_H + \tilde{u}_{h,K}.$$

On peut alors montrer l'inégalité

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u_{Hh}\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(H + \frac{h}{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \right),$$

sous l'hypothèse $\frac{\delta}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$.

Cette reconstruction par périodicité est très intéressante dans le cas localement périodique. Cependant, cette méthode ne serait pas applicable dans les cas que nous souhaitons considérer où les oscillations ne sont pas périodiques.

4.1.4 Méthodes des volumes finis multi-échelles

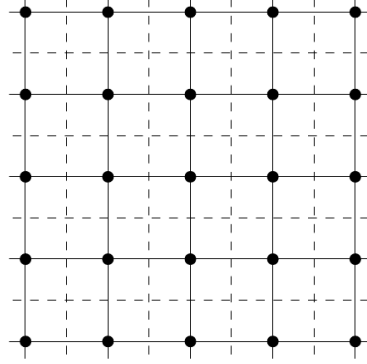
La méthode des éléments finis multi-échelles permet de résoudre un problème elliptique et pourrait donc être appliquée pour calculer un champ de pression (voir chapitre 2). Cependant, les flux que l'on obtiendrait en appliquant cette méthode ne seraient pas conservatifs à l'échelle fine. Ainsi, si on souhaite préserver le principe du maximum en saturation (voir chapitre 2), la méthode des éléments finis multi-échelles n'est pas applicable à la simulation d'un écoulement. La méthode des volumes finis multi-échelles a été présentée pour la première fois par P. Jenny, S.H. Lee et H. Tchelepi dans [JLT03]. Cette méthode a pour but d'être appliquée à la simulation d'un écoulement en milieu poreux. L'objectif de cette méthode multi-échelle est donc d'obtenir des flux conservatifs sur le maillage fin. La présentation que l'on donne de cette méthode est inspirée de la description faite par Th. Abballe dans [Abb11].

Pour définir cette méthode, il faut tout d'abord construire le maillage dual $\tilde{\mathcal{K}}_H$ associé au maillage grossier \mathcal{K}_H en reliant les barycentres des mailles $K \in \mathcal{K}_H$.

Cette méthode a pour but d'être appliquée à la simulation des écoulements en milieux poreux, on reprend donc les notations du chapitre 2. On veut résoudre le problème

$$-\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla P) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Comme dans l'approche volumes finis classique, on suppose que la pression est constante sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ et on la note P_K . La première étape de cette méthode est de réécrire la pression sur une maille


 FIGURE 4.3 – En trait plein le maillage \mathcal{K}_H , en tirets le maillage dual $\tilde{\mathcal{K}}_H$

duale $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}_H$ comme une combinaison des pressions sur les mailles qui lui sont reliées :

$$P_{|\tilde{K}}(x) = \sum_{K, K \cap \tilde{K} \neq \emptyset} P_K \Phi_K^K(x). \quad (4.10)$$

Il reste donc à définir les fonctions Φ_K^K . Dans cette méthode, ces fonctions Φ_K^K sont en fait définies en s'inspirant de la méthode aux éléments finis multi-échelles présentée au paragraphe 4.1.2. Ainsi, Φ_K^K est solution du *problème de cellule dual*

$$-\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla \Phi_K^K) = 0 \quad \text{dans } \tilde{K}. \quad (4.11)$$

On note \mathbf{x}_K le barycentre de la maille $K \in \mathcal{K}_H$. On impose alors que

$$\forall L \in \mathcal{K}_H, \quad \Phi_K^K(\mathbf{x}_L) = \delta_{K,L}.$$

Comme pour le problème (4.1), nous allons supposer ici que les conditions aux bords sont linéaires. Ces problèmes de cellule duals sont alors résolus sur un maillage fin local. Une fois les fonctions Φ_K^K connues sur ce maillage fin, les flux de $k\lambda_T \nabla P$ à travers les faces grossières $\Sigma \in \mathcal{F}_H$ peuvent être calculés en utilisant la formule (4.10). Nous pouvons donc obtenir les pressions grossières P_K .

On voudrait maintenant reconstruire ce champ de pression à l'échelle fine pour obtenir des flux conservatifs. Pour cela, on considère l'ensemble des mailles de \mathcal{K}_H partageant un sommet avec la maille $K \in \mathcal{K}_H$. On note cet ensemble $\mathcal{V}_{H,K}$. Alors, pour chaque maille $L \in \mathcal{V}_{H,K}$ on définit la fonction ψ_K^L solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla \psi_K^L) = 0 & \text{dans } L, \\ \psi_K^L = \sum_{\tilde{K}, L \cap \tilde{K} \neq \emptyset} \Phi_K^K & \text{sur } \partial L. \end{cases} \quad (4.12)$$

Ces problèmes sont également résolus sur des maillages fins locaux. La pression est ensuite reconstruite sur le maillage fin en utilisant la formule

$$P_h|_K = \sum_{L \in \mathcal{V}_{H,K}} P_L \psi_K^L.$$

Ce champ de pression fin permet finalement d'obtenir des flux conservatifs à l'échelle fine.

V. Ginting [Gin04] a montré que cette méthode permettait d'avoir la même estimation d'erreur que la méthode des éléments finis multi-échelles.

La méthode des volumes finis multi-échelles a été, par la suite, appliquée à des cas non linéaires [LZT09]. Cette méthode a également été adaptée pour prendre en compte des géométries non conformes [HDJ11].

4.2 Définition de la méthode multi-échelle

4.2.1 Hypothèses de départ

On veut construire une méthode aux éléments finis qui s'inspire des résultats obtenus dans le cas de l'homogénéisation périodique mais qui s'appliquerait à des cas plus généraux. Cependant, on peut obtenir une estimation quantitative dans le cas périodique. Le problème que l'on souhaite résoudre est donc de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.13)$$

où on suppose que $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et on fait les hypothèses suivantes

Hypothèses 4.1 :

1. La fonction A est Y -périodique,
2. La fonction A est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et les interfaces de discontinuités sont \mathcal{C}^2 ,
3. A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

Avec ces hypothèses sur A , en reprenant la définition des fonctions w_i dans (3.4), on peut montrer que $w_i \in W_{\#}^{1,\infty}(Y)$. En effet, on peut appliquer le lemme suivant.

Lemme 4.1. *On se place dans l'espace \mathbb{R}^N . On définit les fonctions f , a_i et $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ vérifiant les hypothèses*

1. *La matrice des $a_{i,j}$ est coercive.*
2. *Les fonctions f, a_i et $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ sont de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et les interfaces de discontinuités sont de classe \mathcal{C}^2 .*

Soit w la fonction solution du problème

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (4.14)$$

Alors, la fonction w est dans l'espace $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Idée de la démonstration. Cette démonstration suppose que l'on est localement d'un seul côté de l'interface de discontinuité (ie. les interfaces ne se touchent pas). Lorsqu'on est loin des interfaces de discontinuités des $a_i, a_{i,j}$, on peut dériver l'équation (4.14). On en déduit, en utilisant des régularités elliptiques, que w est localement dans $W^{1,\infty}$.

Il reste à montrer que l'on peut "recoller" la fonction aux interfaces de discontinuités de manière à avoir $w \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Cela est possible car ces interfaces sont de classe \mathcal{C}^2 . Une utilise alors un argument de carte locale et une partition de l'unité (voir, par exemple [All05] ou [Bre83]). La démonstration faite dans [LV00] permet de montrer que cela reste vrai si les interfaces de discontinuités se touchent ponctuellement. \square

Remarque 4.1 : On utilise ici le fait que résoudre un problème sur pavé de \mathbb{R}^N avec des conditions aux bords de périodicité est équivalent à résoudre un problème sur l'espace \mathbb{R}^N tout entier. Cette remarque sera utilisée souvent par la suite.

4.2.2 Idée de la méthode

Les résultats présentés dans la partie 3.6 nous permettent de justifier l'approximation

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On définit les *fonctions tests oscillantes* \tilde{w}_i^ε par

$$\tilde{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où w_i est la solution de l'équation (3.4). En reprenant la définition de u_1 dans (3.7), u_ε peut être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon \approx u + \sum_{i=1}^N (\tilde{w}_i^\varepsilon - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

On remarque que cela est en fait le début d'un développement de Taylor et on peut donc faire l'approximation :

$$u_\varepsilon \approx u \circ \tilde{w}^\varepsilon.$$

Cette remarque a été faite par S.M. Kozlov dans [Koz80] dans le contexte de l'homogénéisation d'opérateurs aléatoires. Ce changement de variables était appelé “coordonnées harmoniques” dans cet article.

Dans la suite, en partant de cette approximation, nous allons construire des fonctions de base utilisant cette composition.

4.2.3 Hypothèses de discrétisation

Nous avons introduit au paragraphe 2.2 des notations sur les maillages. Cependant, ces maillages sont utilisés pour appliquer des méthodes volumes finis. Dans ce chapitre, on construit une méthode aux éléments finis. Pour que cette méthode approche efficacement la solution, le maillage considéré doit vérifier un certain nombre d'hypothèses.

On introduit une famille de maillages $(\mathcal{K}_H)_H$ tels que pour tout $H > 0$,

$$\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{K}_H} K} = \overline{\Omega}.$$

Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on définit :

- le diamètre H_K , la longueur du plus grand côté de K ,
- la rondeur ρ_K , diamètre de la boule inscrite dans K ,
- l'excentricité $\sigma_K = \frac{H_K}{\rho_K}$ qui mesure la non-dégénérescence de K .

Chaque maillage \mathcal{K}_H est tel que $H = \max_{K \in \mathcal{K}_H} H_K$. On introduit maintenant quelques définitions.

Définition 4.1. *Un maillage \mathcal{K}_H est dit conforme (au sens des éléments finis) si toute face d'un élément de $K \in \mathcal{K}_H$ est soit contenue dans la frontière $\partial\Omega$, soit égale à une face d'un autre élément K' .*

Définition 4.2. *La famille de maillages $(\mathcal{K}_H)_H$ est dite régulière si et seulement si, il existe une constante C_r telle que*

$$\sigma_K \leq C_r,$$

pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$ et pour tout $H > 0$.

Définition 4.3. *La famille de maillages $(\mathcal{K}_H)_H$ est dite quasi-uniforme si et seulement si, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que*

$$\forall H > 0, \forall K \in \mathcal{K}_H, \quad C_1 H \leq \rho_K \leq H_K \leq H.$$

Pour la suite, on fait les hypothèses suivantes

Hypothèses 4.2 :

La famille de maillages $(\mathcal{K}_H)_H$ est conforme, régulière et quasi-uniforme.

4.2.4 Définition de la méthode

Nous allons maintenant mettre en place une méthode de résolution pour le problème (4.13) en faisant les hypothèses 4.1. On considère une famille de maillages grossiers \mathcal{K}_H de résolution H vérifiant les hypothèses 4.2. Soient k et k' deux entiers ≥ 1 qui représentent les ordres de résolutions global et local de notre méthode multi-échelle. Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on calcule les fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = 0 & \text{sur } K, \\ \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (4.15)$$

On note alors $\widehat{w}_i^{\varepsilon,H}$ les fonctions définies sur le domaine Ω telles que pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$

$$\left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \right)_{|K} = \widehat{w}_i^{\varepsilon,K}.$$

Pour chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on définit un maillage local \mathcal{K}_h^K vérifiant aussi les hypothèses 4.2 et tel que $\bigcup_{k \in \mathcal{K}_h^K} k = K$. On définit alors le maillage fin \mathcal{K}_h par

$$\mathcal{K}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_H} \mathcal{K}_h^K.$$

Chaque problème de cellule (4.15) est résolu numériquement en utilisant une méthode $\mathbb{P}_{k'}$ Lagrange sur le maillage \mathcal{K}_h^K de résolution h . On note $w_i^{\varepsilon,K}$ les solutions numériques des problèmes (4.15). Et, par extension, on note $w_i^{\varepsilon,H}$ les fonctions telles que, pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$,

$$\left(w_i^{\varepsilon,H} \right)_{|K} = w_i^{\varepsilon,K}.$$

On souhaite que l'échelle h soit assez fine pour que les oscillations de A^ε soient prises en compte. Donc $h < \varepsilon$. De plus, pour que l'homogénéisation faite à l'échelle H soit cohérente avec les hypothèses, il faut que $H \gg \varepsilon$. Ainsi, on fait les hypothèses suivantes

$$0 < h < \varepsilon < H.$$

Nous allons maintenant mettre en place la méthode aux éléments finis multi-échelles présentée dans [AB05]. On considère V_H , un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension D_H finie et associé au maillage grossier \mathcal{K}_H . Dans notre cas, V_H est un espace \mathbb{P}_k Lagrange. On note $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$ l'ensemble des nœuds de cette méthode. Soient $(\Phi_l^H)_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}}$ les fonctions de base de l'espace \mathbb{P}_k Lagrange V_H . On construit $V_{\varepsilon,H}$ l'espace engendré par les fonctions

$$\Phi_l^{\varepsilon,H}(x) = \Phi_l^H \circ w^{\varepsilon,H}(x).$$

Soit π_H l'opérateur d'interpolation sur V_H :

$$\pi_H v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l) \Phi_l^H(x).$$

On définit l'opérateur d'interpolation $\pi_{\varepsilon,H}$ sur $V_{\varepsilon,H}$:

$$\pi_{\varepsilon,H} v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l) \Phi_l^{\varepsilon,H}(x).$$

L'espace $V_{\varepsilon,H}$ va être utilisé pour résoudre la formulation variationnelle du problème (4.13). Le problème discret que l'on résout s'écrit alors : trouver $u_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}$ telle que

$$\forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}, \quad \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,H} \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} dx = \int_{\Omega} f v_{\varepsilon,H} dx. \quad (4.16)$$

Remarques 4.2 :

Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, les fonctions $\Phi_l^{\varepsilon, H}$ se décomposent selon

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon, H}\right)_{|K}(x) = p_l^K \circ w^{\varepsilon, K}(x),$$

avec les $p_l^K \in \mathbb{P}_k(K)$ tels que pour tout $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$, $p_l^K(l') = \delta_{l, l'}$ et 0 sinon. Pour $k \leq 2$, comme on a $w^{\varepsilon, K} = x$ sur ∂K et que tous les nœuds se situent sur le bord des mailles, on a pour tout $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$,

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon, H}\right)_{|K}(l') = \delta_{l, l'}.$$

On a donc, pour $k \leq 2$,

$$\pi_{\varepsilon, H} v(l) = v(l), \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}. \quad (4.17)$$

Pour des ordres $k \geq 3$, les nœuds de la méthode aux éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange ne sont pas tous sur le bord des mailles, l'égalité (4.17) n'est donc plus vraie.

$V_{\varepsilon, H}$ est de dimension D_H même s'il est nécessaire de résoudre des problèmes locaux sur un maillage plus fin pour construire ses fonctions de base.

L'espace V_H est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ et chaque point $x \in \partial\Omega$ appartenant au bord du domaine se situe nécessairement sur le bord d'une certaine maille $K \in \mathcal{K}_H$. Ainsi

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad w^{\varepsilon, H}(x) = x.$$

Comme, pour tout $l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$, $\Phi_l^H \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\Phi_l^{\varepsilon, H} = \Phi_l^H \circ w^{\varepsilon, H} \in H_0^1(\Omega).$$

On en déduit que l'espace $V_{\varepsilon, H}$ est bien un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$.

4.3 Estimation *a priori*

Dans cette partie, on va prouver l'estimation *a priori* présentée dans [AB05]. La démonstration qui en est faite dans cet article n'est pas tout à fait exacte : les termes que l'on nomme “terme d'homogénéisation locale” et “terme d'interpolation locale” y sont mal exprimés. La preuve donnée dans ce paragraphe complète donc cette démonstration.

Théorème 4.1. *Soit u_ε la solution du problème (4.13). On considère un maillage \mathcal{K}_H de résolution H vérifiant les hypothèses 4.2. Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on résout les problèmes de cellule (4.15) numériquement en appliquant une méthode aux éléments finis $\mathbb{P}_{k'}$ Lagrange sur un maillage fin local \mathcal{K}_h^K de résolution h et vérifiant les hypothèses 4.2. On suppose de plus que $h < \varepsilon < H$. On peut alors construire l'espace aux éléments finis multi-échelles $V_{\varepsilon, H}$ défini au paragraphe 4.2.4. On note alors $u_{\varepsilon, H}$ la solution numérique du problème (4.16).*

On suppose que $u \in W^{k+1, \infty}(\Omega)$ et on fait les hypothèses 4.1. On suppose, de plus, que les coefficients de A sont de classe $C^{k'}$. Il existe une constante C indépendante de ε , H et h telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon, H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'} \right).$$

Remarques 4.3 :

Cette estimation *a priori* nous permet de vérifier que la fonction $u_{\varepsilon,H}$, obtenue avec la méthode aux éléments finis multi-échelles, est une bonne approximation de la solution u_ε du problème initial (4.13) si H , $\frac{\varepsilon}{H}$ et $\frac{h'}{\varepsilon}$ sont faibles. On peut d'abord remarquer que cela est cohérent avec notre hypothèse $h < \varepsilon < H$. Pour avoir une erreur la plus petite possible il faut même que

$$h \ll \varepsilon \ll H.$$

Le terme en $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ montre que si les hétérogénéités sont du même ordre de grandeur que le maillage grossier ($\frac{\varepsilon}{H} \approx 1$), la méthode ne peut pas converger. Ce terme est souvent appelé *terme de résonance*.

Pour $k = 1$, cette méthode est en fait équivalente à celle présentée par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] (voir paragraphe 4.1.2). L'estimation *a priori* obtenue est elle aussi en accord avec celle présentée dans (4.3).

Démonstration. Tout d'abord, en appliquant le lemme de Céa (voir annexe A.3.1) au problème (4.16), on a :

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}} \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec C indépendant de ε et H . On choisit $v_{\varepsilon,H} = \pi_{\varepsilon,H}u$. On a

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On veut donc majorer

$$\|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u)\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On décompose alors ce terme de la manière suivante

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H}u)\|_{L^2(\Omega)^N} &\leq \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla(\pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Il nous reste à majorer ces quatre termes pour obtenir une estimation a priori. On définit donc

$$\begin{aligned} G_1 &= \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ G_2 &= \|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ G_3 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } G_4 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

La majoration du terme G_1 est liée à un résultat d'homogénéisation périodique et à une approximation de Taylor. Le terme G_2 utilise un résultat d'interpolation en éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange sur le maillage grossier. Le terme G_3 peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation pour les fonctions oscillantes locales. Enfin, le terme G_4 sera majoré à l'aide d'une estimation d'erreur de la méthode aux éléments finis $\mathbb{P}_{k'}$ Lagrange utilisée pour calculer les fonctions tests oscillantes.

4.3.1 Terme d'homogénéisation globale G_1

On s'intéresse d'abord au terme G_1 . Pour majorer ce terme, on va montrer le lemme :

Lemme 4.2. *On suppose que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$. Alors, il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Démonstration. On a d'abord l'inégalité

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \left\| \nabla u_\varepsilon - [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)^N} + \left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (4.19)$$

On remarque que $[\nabla \tilde{w}^\varepsilon](x) = Id + [\nabla_y w] \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$. Le premier terme du membre de droite de l'inégalité est donc égal à

$$\left\| \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x) - \left[\nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

De plus, si on applique (3.21), on obtient :

$$\left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \\ = \left\| \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x) - \left[\nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \nabla u_\varepsilon - [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)^N} &\leq \left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En utilisant le fait que $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$, on peut majorer le deuxième terme de l'inégalité (4.19) de la manière suivante

$$\left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + [\nabla_y w]\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\nabla u - (\nabla u) \circ \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On effectue un développement de Taylor avec reste intégral :

$$(\nabla u) \circ \tilde{w}^\varepsilon = \nabla u + \varepsilon \int_0^1 \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(x + \varepsilon t w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dt.$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$\left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \varepsilon \|Id + [\nabla_y w]\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (4.21)$$

En insérant (4.21) et (4.20) dans (4.19), on obtient le résultat annoncé. \square

4.3.2 Terme d'interpolation G_2

On s'intéresse maintenant à (4.18) :

$$G_2 = \|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\{\nabla(u - \pi_H u)\} \circ \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On s'aide une nouvelle fois d'un développement de Taylor avec reste intégral :

$$\{\nabla(u - \pi_H u)\} \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) = \nabla(u - \pi_H u)(x) + \varepsilon \int_0^1 \nabla \frac{\partial(u - \pi_H u)}{\partial x_i} \left(x + \varepsilon t w \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dt.$$

On a donc

$$\|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \left(\|u - \pi_H u\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|u - \pi_H u\|_{H^2(\Omega)} \|w\|_{L^\infty(\Omega)^N} \right).$$

D'où

$$\|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} \left(H^k + \varepsilon H^{k-1} \|w\|_{L^\infty(\Omega)^N} \right) \quad (4.22)$$

en utilisant des résultats classiques sur les éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange (voir annexe A.3.3).

4.3.3 Terme d'homogénéisation locale G_3

Le terme G_3 nécessite l'introduction du lemme suivant démontré dans [BLP78] et [TYHC99].

Lemme 4.3. *Soit ω un ouvert borné et régulier. Soient $f \in L^2(\omega)$ et $g \in H^1(\omega)$. On définit v_ε solution de*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v_\varepsilon \right) = f & \text{dans } \omega, \\ v_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

et v^* solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (A^* \nabla v^*) = f & \text{dans } \omega, \\ v^* = g & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Il existe une constante C indépendante de ε et ω et des fonctions f et g telle que :

$$\left| v_\varepsilon - v^* - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial v^*}{\partial x_i}(x) \right|_{H^1(\omega)} \leq C \left(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{|\partial\omega|} \|\nabla v^*\|_{L^\infty(\omega)^N} + \varepsilon \|\nabla^2 v^*\|_{L^2(\omega)^{N \times N}} \right).$$

$|\partial\omega|$ étant borné et ω assez régulier, on a même, par une inégalité de Poincaré

$$\left\| v_\varepsilon - v^* - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial v^*}{\partial x_i}(x) \right\|_{H^1(\omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|\partial\omega|} \|v^*\|_{W^{2,\infty}(\omega)}.$$

Le terme G_3 est majoré en le décomposant en deux parties :

$$\begin{aligned} G_3 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \left\| \left(\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

On note

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\| \left(\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } N_2 &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

On va écrire

$$\|\nabla (\tilde{w}^\varepsilon - \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla (\tilde{w}^\varepsilon - \hat{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2.$$

On applique ensuite le lemme 4.3 sur chaque maille K avec $v_\varepsilon = \hat{w}_i^{\varepsilon,K}$, $f = 0$ et $g(x) = x_i$. Dans ce cas, la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla w_i^*) = 0 & \text{dans } K, \\ w_i^* = x_i & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

est clairement $w_i^* = x_i$ (car A^* est constante). On obtient donc

$$\|\hat{w}_i^{\varepsilon,K}(x) - x_i - \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(K)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{|\partial K|}.$$

Or, par définition, $\tilde{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Donc, en utilisant le fait que la norme H^1 est supérieure à la semi-norme H^1 , on obtient

$$\|\nabla (\hat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \leq C\varepsilon |\partial K|.$$

Comme la longueur de K est de l'ordre de H la surface de sa frontière $|\partial K|$ est de l'ordre de H^{N-1} et le nombre de mailles K pour mailler l'espace Ω est de l'ordre de H^{-N} . On arrive à

$$\|\nabla (\tilde{w}^\varepsilon - \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 \leq C \frac{\varepsilon}{H}.$$

Or, on a

$$N_1 = \left\| \left(\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|\nabla (\tilde{w}^\varepsilon - \hat{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

Remarque 4.4 : En utilisant les inégalités d'interpolation (voir annexe A.3.5), on montre que

$$\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(K)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(K)} + CH^k |u|_{W^{k+1,\infty}(K)}.$$

Comme $k \geq 1$ et H est faible, on en déduit que $\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ est borné.

On a donc

$$N_1 \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.24)$$

Pour le terme N_2 , on écrit

$$\begin{aligned} N_2 &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \|\nabla \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^{N \times N}} \|\nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

On veut d'abord majorer le terme

$$\|\nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N}^2. \quad (4.26)$$

On voudrait ici appliquer un développement de Taylor mais $\pi_H u$ n'est pas une fonction $\mathcal{C}^2(\Omega)$. C'est cependant une fonction polynomiale sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty(K)$. Pour pouvoir appliquer un développement de Taylor, à cette fonction entre les points $\tilde{w}^\varepsilon(x)$ et $\hat{w}^{\varepsilon,K}(x)$ on doit vérifier que ces points sont dans la maille K . Par le principe du maximum (voir équation (4.15)), $\hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \in K$. On construit alors l'ensemble

$$C_K = \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) > \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\}.$$

On remarque que si $x \in C_K$,

$$\tilde{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in K.$$

Ainsi, on va alors séparer la norme L^2 sur chaque maille en deux parties :

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ &= \int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \\ & \quad + \int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour le premier terme, on peut utiliser une inégalité de Taylor

$$\left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right| \leq \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left| \tilde{w}^\varepsilon(x) - \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|.$$

Donc

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \leq \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}}^2 \left\| \tilde{w}^\varepsilon - \hat{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N}^2.$$

Puis, en utilisant la continuité de l'opérateur d'interpolation, le lemme 4.3, ainsi que le fait que $|\partial C_K| \leq |\partial K|$ on a

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \leq C \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}^2 \varepsilon |\partial K|.$$

Et les longueurs de K étant de l'ordre de H , on a $|\partial K| \leq CH^{N-1}$, donc

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon H^{N-1}. \quad (4.28)$$

Pour l'autre terme, on écrit

$$\int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \leq 4 \|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2 \int_{K \setminus C_K} dx.$$

On a déjà vu que $\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ était bornée. Puis, par construction de C_K

$$K \setminus C_K = \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) \leq \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\}.$$

Cela correspond à une couronne d'épaisseur $\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N}$ autour de la frontière ∂K . On a donc

$$|K \setminus C_K| \leq C |\partial K| \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N}.$$

D'où

$$|K \setminus C_K| \leq C \varepsilon H^{N-1}.$$

Au final, on obtient

$$\int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K}(x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon H^{N-1}. \quad (4.29)$$

Puis, en reprenant les inégalités (4.28) et (4.29) dans (4.27), on obtient

$$\left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N}^2 \leq C \varepsilon H^{N-1}.$$

Et donc, en utilisant l'équation (4.26)

$$\left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \varepsilon H^{N-1}.$$

De plus, le nombre de mailles de tailles H pour mailler Ω est de l'ordre de H^{-N} , on a donc

$$\|\nabla(\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla(\pi_H u) \circ \hat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq C \frac{\varepsilon}{H}.$$

D'où, en reprenant l'inégalité (4.25)

$$N_2 \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.30)$$

Enfin, en insérant cette inégalité et l'inégalité (4.24) dans (4.23), on a

$$\|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.31)$$

4.3.4 Terme d'interpolation locale G_4

Enfin, pour traiter le terme G_4 , on le sépare en deux :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ \leq \left\| \left(\nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ + \left\| \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

On définit alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \left(\nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } I_2 &= \left\| \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Pour le terme I_1 , on a

$$I_1 = \left\| \left(\nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \|\nabla w^{\varepsilon,H} - \nabla \hat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}. \quad (4.33)$$

Comme $A \in \mathcal{C}^{k'}(Y)$, les fonctions tests oscillantes solutions des problèmes elliptiques (4.15) sont dans $H^{k'+1}(Y)$ (voir [Bre83]). On applique alors les inégalités classiques sur les éléments finis $\mathbb{P}_{k'}$ Lagrange (voir annexe A.3.5). On a :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\hat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla(\hat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \\ &\leq C(h)^{2k'} \sum_{K \in \mathcal{K}_H} |\hat{w}^{\varepsilon,H}|_{H^{k'+1}(K)^N}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

On va maintenant montrer le lemme suivant.

Lemme 4.4. *On rappelle que les fonctions $\hat{w}_i^{\varepsilon,K}$ sont les solutions des problèmes de cellules (4.15) :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = 0 & \text{sur } K, \\ \hat{w}_i^{\varepsilon,K} = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

La fonction $A \in \mathcal{C}_{\#}^{k'}(Y)$ et vérifie les hypothèses 4.1. On a alors, pour tout $0 \leq n \leq k'$

$$|\hat{w}^{\varepsilon,K}|_{H^{n+1}(K)^N} \leq C \varepsilon^{-n} \sqrt{|K|}.$$

Démonstration. On le montre par récurrence. Pour $n = 0$ on réécrit la définition des fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ pour obtenir une équation aux dérivées partielles pour les fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i$

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right) = \operatorname{div} (A^\varepsilon e_i) & \text{sur } K, \\ \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i$ et on intègre par parties sur K . On obtient

$$\int_K A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \cdot \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) = \int_K A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_i \cdot \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right).$$

On utilise alors le fait que $\|e_i\|_{L^2(K)^N} = \sqrt{|K|}$, la continuité et la coercivité de A et on obtient

$$C_{sta} \left\| \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right\|_{L^2(K)^N} \leq C_{bnd} \left\| \nabla \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right\|_{L^2(K)^N} \sqrt{|K|}.$$

On obtient donc

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - e_i \right\|_{L^2(K)^N} \leq \frac{C_{bnd}}{C_{sta}} \sqrt{|K|}.$$

En réutilisant le fait que $\|e_i\|_{L^2(K)^N} = \sqrt{|K|}$, on a

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \sqrt{|K|}.$$

Supposons maintenant que l'hypothèse soit vérifiée pour tout $k \leq n \leq k' - 1$. Nous voulons maintenant montrer que cela reste vrai pour $n+1 \leq k'$. On se fixe un multi-indice α tel que $|\alpha| = n+1$ (voir annexe A.1.2 pour la définition d'un multi-indice). On applique l'opérateur ∂^α à l'équation (4.15) définissant $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$, on a donc le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = \operatorname{div} \left(\sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \partial_y^k A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) & \text{sur } K, \\ \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} = \partial^\alpha x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Ce qui peut se réécrire

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right) = \operatorname{div} \left(\sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \partial_y^k A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) & \text{sur } K, \\ \partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) = 0 & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (4.35)$$

car $\nabla \partial^\alpha x_i = 0$ puisque $|\alpha| \geq 1$. On multiplie alors la première équation du système (4.35) par $\partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right)$ et on intègre par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_K A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \cdot \nabla \partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \\ &= \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \int_\Omega \partial_y^k A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \cdot \nabla \partial^\alpha \left(\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

les termes de bords étant nuls car $\partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i)$ est nul sur le bord. Par constructions des différents multi-indice k , on a $|k| \leq |\alpha| = n+1 \leq k'$. Ainsi, A étant de classe $\mathcal{C}^{k'}$, la fonction $\partial_y^k A$ est bornée. On définit alors la constante $C_{bnd,n+1}$ telle que pour tout multi-indice k tel que $|k| \leq n+1$

$$\|\partial_y^k A\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \leq C_{bnd,n+1}.$$

En appliquant cette propriété ainsi que la coercivité de A dans l'équation (4.36), on a

$$\begin{aligned} C_{sta} \left\| \nabla \partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i) \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ \leq \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} C_{bnd,n+1} \left\| \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \left\| \nabla \partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i) \right\|_{L^2(K)^N}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left\| \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \varepsilon^{-|\alpha|+|k|} \sqrt{|K|},$$

car $|k| \neq 0$ donc $|\alpha - k| \leq n$. De plus, comme écrit auparavant, $\nabla \partial^\alpha x_i = 0$. Donc l'inégalité (4.37) implique

$$\left\| \nabla \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sqrt{|K|}. \quad (4.38)$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $n+1$. On a donc montré le résultat voulu. \square

On en déduit que

$$\|\widehat{w}^{\varepsilon,K}\|_{H^{k'+1}(K)^N} \leq C \varepsilon^{-k'} \sqrt{|K|}.$$

De plus,

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_H} |K| = |\Omega|.$$

Ce volume étant borné, on a, en utilisant l'inégalité (4.34),

$$\left\| \nabla (\widehat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H}) \right\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'}.$$

Puis, en reprenant l'équation (4.33), on a

$$I_1 \leq C \left(\frac{h'}{\varepsilon} \right)^{k'}. \quad (4.39)$$

Il reste à majorer le terme

$$I_2 = \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, ce terme peut être borné en utilisant un développement de Taylor sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$. Ici, le principe du maximum est respecté pour les deux fonctions :

$$\forall x \in K, \quad w^{\varepsilon,H}(x) \in K \quad \text{et} \quad \widehat{w}^{\varepsilon,H}(x) \in K.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left(\frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(K)^N} \\ &\leq C \left\| \widehat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left\| w^{\varepsilon,K} - \widehat{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N}. \end{aligned}$$

Remarque 4.5 : On reprend ici la remarque 4.4 pour la norme $W^{2,\infty}(K)$:

$$\|\pi_H u\|_{W^{2,\infty}(K)} \leq \|u\|_{W^{2,\infty}(K)} + CH^{k-1} |u|_{W^{k+1,\infty}(K)}.$$

Comme $k \geq 1$, on en déduit que $\|\nabla^2(\pi_H u)\|_{L^\infty(K)^{N \times N}}$ est bornée. Et, comme précédemment, on a, par des inégalités classiques

$$\|w^{\varepsilon,K} - \widehat{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N} \leq Ch^{k'} |\widehat{w}^{\varepsilon,H}|_{H^{k'}(K)}.$$

On a donc montré que

$$I_2 \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'}. \quad (4.40)$$

D'où, en reprenant les inégalités (4.39) et (4.40) dans (4.32)

$$\|\nabla(\pi_H u \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'}. \quad (4.41)$$

4.3.5 Conclusion

On insérant les inégalités (4.21), (4.22), (4.31) et (4.41) dans l'inégalité (4.18) on montre

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H} u)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left(\sqrt{\varepsilon} + H^k + \varepsilon H^{k-1} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'} \right).$$

Cela peut se réécrire sous la forme

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H} u)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left(H^k \left(1 + \frac{\varepsilon}{H} \right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} (1 + \sqrt{H}) + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'} \right).$$

Comme $H > \varepsilon$ et H est borné, on en déduit l'inégalité voulue. \square

4.4 Présentation des résultats obtenus avec cette méthode

4.4.1 Remarques préliminaires

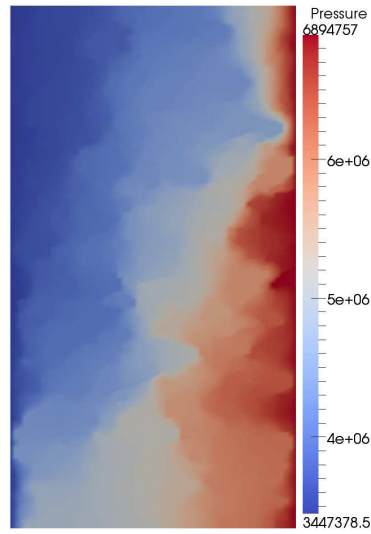
Comme nous allons le voir, la méthode Allaire-Brizzi, testée dans [AB05] sur des problèmes périodiques et aléatoires, permet d'obtenir une bonne approximation d'un champ de pression. Cette méthode ne peut toutefois pas être couplée à la résolution du problème de transport en saturations. En effet, les flux totaux donnés par cette méthode ne sont pas tels que la somme de leurs valeurs sur l'ensemble des faces d'une maille soit nulle. Or, cette condition est indispensable pour pouvoir assurer le principe du maximum lors du calcul des saturations par un des deux schémas volumes finis introduits précédemment.

4.4.2 Application à la couche 85 du cas SPE 10

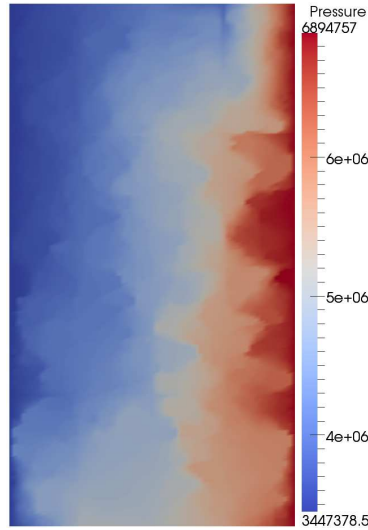
Considérons le cas présenté au paragraphe 2.5.1. Nous comparons ici les champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi et ceux obtenus avec une méthode éléments finis classique. Notons que, pour les résultats présentés ici, nous avons utilisé des méthodes aux éléments finis de Lagrange d'ordre 1 à l'échelle fine comme à l'échelle grossière ($k = k' = 1$). La figure 4.4 montre les champs de pressions obtenus en fonction de la taille du maillage grossier. Le tableau 4.1 indique les différents écarts relatifs observés en normes L^2 et H^1 entre la solution fine et les solutions multi-échelles obtenues pour différents maillages grossiers. On peut ici remarquer que le raffinement du maillage grossier n'améliore pas toujours la qualité des résultats. Cela a également été observé dans un cas périodique dans [AB05] et se justifie théoriquement par la présence du terme dit de résonance en $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ dans l'estimation d'erreur *a priori* donnée par le théorème 4.1.

Maillage grossier	Erreur relative en norme L^2	Erreur relative en norme H^1
4×4	5,74%	5,75%
6×10	5,14%	5,14%
12×20	4,48%	4,48%
12×44	6,64%	6,64%

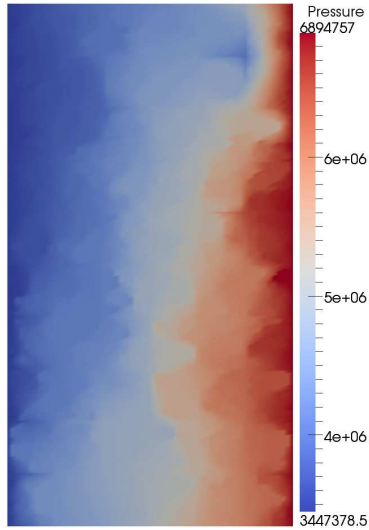
TABLE 4.1 – Écarts relatifs entre le champ de pressions obtenu avec une résolution fine et celui obtenu avec la méthode Allaire-Brizzi pour différentes tailles du maillage grossier



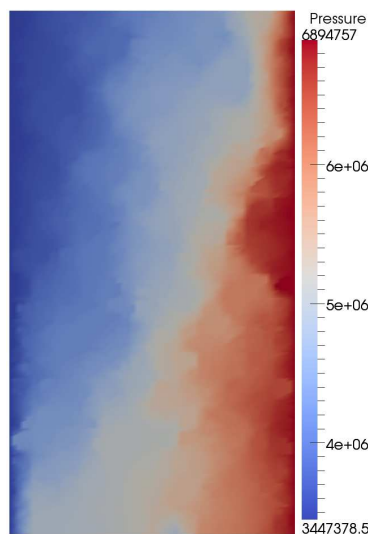
(a) Fine



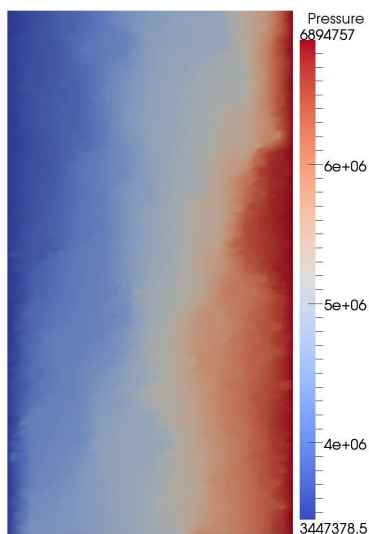
(b) 4x4



(c) 6x10



(d) 12x20



(e) 12x44

FIGURE 4.4 – Comparaison des champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi pour différents maillages grossiers.

Chapitre 5

Méthode des éléments finis mixtes multi-échelles pour la simulation d'écoulements en milieux poreux

Sommaire

5.1	Notations et définitions	73
5.2	Application au problème monophasique	75
5.2.1	Calcul des fonctions de base	75
5.2.2	Passage des variables grossières aux variables fines	77
5.2.3	Construction du système grossier	77
5.2.4	Estimation <i>a priori</i>	79
5.3	Extension au cas diphasique	79
5.3.1	Mise à jour des fonctions de base	79
5.3.2	Utilisation d'une information globale	80
5.4	Présentation des résultats	81
5.4.1	Couche 85 du cas SPE10	81
5.4.2	Cas fracturé	83

Ce chapitre introduit la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles proposée dans [CH02]. Cette méthode est utilisée pour calculer les champs de pression et de vitesse que nous associons à une des méthodes de résolution du problème de transport présentées au chapitre 2. Nous détaillons le principe de cette méthode multi-échelle en deux temps. Nous présentons, tout d'abord, la méthode lorsqu'elle est appliquée à un modèle monophasique. Nous expliquons ensuite son extension au cas diphasique. Finalement, nous présentons les résultats obtenus en les comparant notamment avec les résultats de référence du chapitre 2. Des résultats de performance sont également présentés au chapitre 6.

5.1 Notations et définitions

Considérons un maillage donné \mathcal{K}_h du domaine Ω . En appliquant des techniques d'agglomération de mailles $k \in \mathcal{K}_h$, il est toujours possible de construire un maillage \mathcal{K}_H où $H \gg h$ et tel que \mathcal{K}_H forme une partition du domaine Ω plus grossière que \mathcal{K}_h . Ainsi, dans notre description géométrique multi-échelle, tout élément $K \in \mathcal{K}_H$ (respectivement $\Sigma \in \mathcal{F}_H$) est composé d'éléments $k \in \mathcal{K}_h$ (respectivement $\sigma \in \mathcal{F}_h$). De plus, on a $\mathcal{N}_H \subset \mathcal{N}_h$.

Dans le cadre des méthodes multi-échelles, nous qualifions de *grossiers* les éléments de \mathcal{K}_H et \mathcal{F}_H et de *fins* les éléments de \mathcal{K}_h et \mathcal{F}_h . Par exemple, \mathcal{K}_H est appelé maillage *grossier* et \mathcal{K}_h est le maillage *fin*.

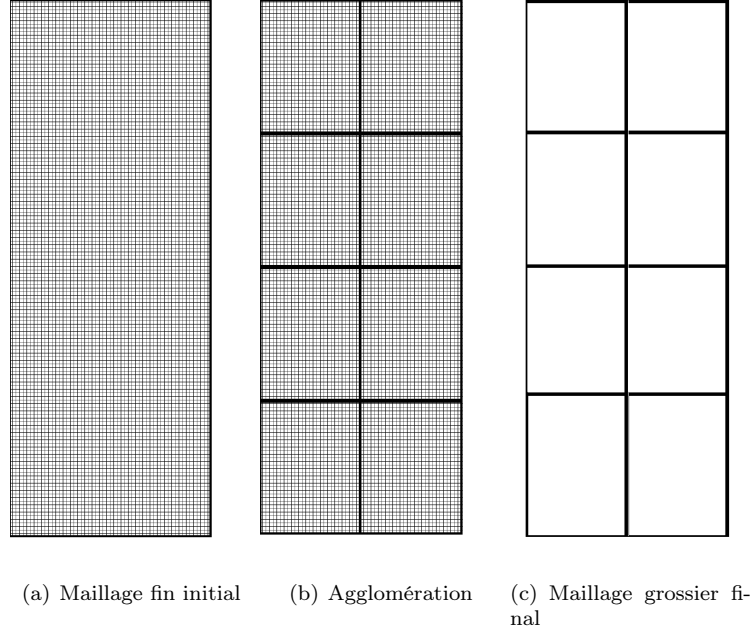


FIGURE 5.1 – Principe de l'agglomération

Dès lors, on note $\mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}$ l'ensemble des mailles fines $k \in \mathcal{K}_h$ incluses dans la maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$:

$$\mathcal{K}_{H \rightarrow h, K} = \{k \in \mathcal{K}_h \mid k \subset K\}$$

et $\mathcal{K}_{h \rightarrow H, k}$ la maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$ incluant la maille fine $k \in \mathcal{K}_h$:

$$\mathcal{K}_{h \rightarrow H, k} = \{K \in \mathcal{K}_H \mid k \subset K\}.$$

De même, on note $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}$ l'ensemble des faces fines composant la face grossière $\Sigma \in \mathcal{F}_H$:

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma} = \{\sigma \in \mathcal{F}_h \mid \sigma \subset \Sigma\}$$

et $\mathcal{F}_{h \rightarrow H, \sigma}$ la face grossière incluant la face fine $\sigma \in \mathcal{F}_h$:

$$\mathcal{F}_{h \rightarrow H, \sigma} = \{\Sigma \in \mathcal{F}_H \mid \sigma \subset \Sigma\}.$$

De plus, on note $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}$ l'ensemble des faces fines composant les mailles fines incluses dans la maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$:

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K} = \{\sigma \in \mathcal{F}_{h, k}, \forall k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}\}.$$

L'ensemble des faces fines composant les faces de bord de la maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$ est noté $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b$:

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b = \{\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}, \forall \Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^b\}$$

et l'ensemble des faces internes incluses dans la maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$ est :

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^i = \mathcal{F}_{H \rightarrow h, K} \setminus \mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b.$$

Remarque 5.1 : On se restreint ici aux cas de maillages agglomérés \mathcal{K}_H cartésiens. Cependant, nos travaux s'appliquent également à des agglomérations non structurées.

Par souci de simplicité, nous introduisons la méthode multi-échelle en considérant un problème d'écoulement monophasique. L'extension au cas diphasique est présentée dans la partie suivante.

5.2 Application au problème monophasique

Le système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} v + \lambda \nabla P &= 0 \\ \operatorname{div}(v) &= 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.1)$$

où v est la vitesse et λ s'écrit en fonction de la perméabilité k et la viscosité μ :

$$\lambda = \frac{k}{\mu}.$$

On suppose ici que la viscosité μ est constante. On ferme le problème (5.1) en imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P &= P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ v \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.2)$$

où la pression $P_b(x)$ est donnée.

On suppose que l'on dispose d'un maillage fin \mathcal{K}_h sur lequel la perméabilité k est donnée, typiquement issue d'un modèle géologique. Comme expliqué précédemment, un maillage grossier \mathcal{K}_H est construit en agglomérant les mailles de \mathcal{K}_h .

Dans la suite, on résout le problème (5.1) par une méthode de type éléments finis mixtes multi-échelles. Le but est d'effectuer une résolution sur l'échelle grossière tout en tenant compte des variations des paramètres à l'échelle fine. De manière classique, une méthode aux éléments finis consiste à approcher la solution du problème (5.1) en la décomposant suivant un nombre fini de fonctions de base à partir du maillage grossier \mathcal{K}_H . Les éléments finis considérés ici sont mixtes, c'est-à-dire que l'on définit des fonctions de base pour la pression sur les mailles $K \in \mathcal{K}_H$ et des fonctions de base pour la vitesse sur les faces $\Sigma \in \mathcal{F}_H$. Toutefois, la différence fondamentale avec les méthodes éléments finis classiques réside dans le fait que les fonctions de base sont construites à partir des paramètres définis à l'échelle fine. Ainsi, ces fonctions sont calculées numériquement et sont solutions de problèmes discrétisés sur le maillage fin. On désigne respectivement par ψ_Σ et ϕ_Σ les vitesses et pressions de base associées à une face $\Sigma \in \mathcal{F}_H$. Dans la suite, nous détaillons le calcul des fonctions de base multi-échelles ainsi que l'assemblage du système grossier.

5.2.1 Calcul des fonctions de base

Fonctions de base pour les faces internes

Soient $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ et $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$. On note $K_{1,2} = K_1 \cup K_2$. On rappelle qu'on a défini au paragraphe 2.2, pour chaque couple $(K, \Sigma) \in \mathcal{K}_H \times \mathcal{F}_{H,K}$,

$$\varepsilon_{\Sigma,K} = \mathbf{n}_{\Sigma,K} \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

Les fonctions de base ϕ_Σ et ψ_Σ associées à une face grossière interne $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ sont définies sur $K_{1,2}$ comme étant les solutions du système :

$$\begin{cases} \psi_\Sigma &= -\lambda \nabla \phi_\Sigma & \text{dans } K_{1,2}, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) &= \varepsilon_{\Sigma,K_1} w_1 & \text{dans } K_1, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) &= \varepsilon_{\Sigma,K_2} w_2 & \text{dans } K_2, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial K_{1,2}, \end{cases} \quad (5.3)$$

où la normale \mathbf{n} est supposée sortante au domaine $K_{1,2}$. Les fonctions w sont des fonctions poids de la forme suivante :

$$w_i(x) = \frac{\theta(x)}{\int_{K_i} \theta(y) dy}$$

Dans les tests numériques présentés dans la suite on prend

$$\theta = (\lambda \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

Les fonctions de base ϕ_Σ associées à la pression sont définies dans (5.3) à une constante près. En pratique, on impose que ces fonctions de base soient à moyenne nulle et on pondère cette moyenne par λ . La fonction ψ_Σ est telle que son flux à travers Σ est unitaire et orienté suivant \mathbf{n}_Σ .

Fonctions de base pour les faces de bord

Soient $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$ et $K \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$. La fonction de base associée à la face Σ a un support uniquement défini sur la maille K . Cette fonction vérifie :

$$\begin{cases} \psi_\Sigma &= -\lambda \nabla \phi_\Sigma & \text{dans } K, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) &= w & \text{dans } K, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial K \setminus \Sigma, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} &= w_\Sigma & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ici, la fonction w est définie par :

$$w(x) = \frac{\theta(x)}{\int_K \theta(y) dy}$$

et

$$w_\Sigma(x) = \frac{\theta(x)}{\int_\Sigma \theta(y) dy}.$$

Nous rappelons que, pour les faces de bord $\Sigma \in \mathcal{F}_H^b$, nous avons défini la normale \mathbf{n}_Σ de façon à ce qu'elle soit orientée vers l'extérieur de K .

Dans le cas particulier où $\Sigma \in \mathcal{F}_H^b \setminus \mathcal{F}_H^D$, c'est-à-dire pour les faces grossières appartenant au bord du domaine sur lequel une condition de type Neumann homogène a été imposée, la fonction de base ψ_Σ est nulle.

Bilan

Les systèmes (5.3) et (5.4) sont typiquement résolus en utilisant une discrétisation basée sur le maillage fin \mathcal{K}_h . Les figures 5.2 et 5.3 montrent comment ces maillages sont définis.

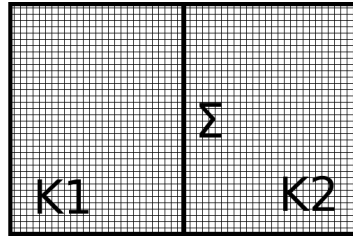


FIGURE 5.2 – Discrétisation locale pour une face interne Σ

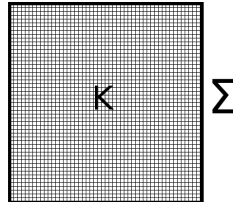


FIGURE 5.3 – Discrétisation locale pour une face de bord Σ

Finalement, on construit, par résolution d'un problème (5.3) ou (5.4), une fonction de base par face grossière interne ou incluse sur le bord Γ_D . Ensuite, pour chacune de ces faces $\Sigma \in \mathcal{F}_H^{i \vee D}$, les flux $\psi_{\Sigma,\sigma}$ sont

calculés pour toute face $\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}$ et représentent les valeurs des flux ψ_Σ sur les faces fines. Les flux ψ_Σ vérifient, par construction,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}} \psi_{\Sigma, \sigma} = 1. \quad (5.5)$$

De plus, considérons une maille grossière $K \in \mathcal{F}_{H, \Sigma}$. Par construction, les flux sont nuls sur les faces grossières du bord de K différentes de Σ . Autrement dit, on a :

$$\psi_{\Sigma, \sigma} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma'} \quad \text{où} \quad \Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K} \setminus \{\Sigma\}. \quad (5.6)$$

5.2.2 Passage des variables grossières aux variables fines

La pression $(p_k)_{k \in \mathcal{K}_h}$ et les flux $(v_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{F}_h^{i \vee D}}$ à l'échelle fine sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_\sigma = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{i \vee D}} V_\Sigma \psi_{\Sigma, \sigma}, \\ p_k = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} P_K \mathbb{1}_{\{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}\}} \end{cases} \quad (5.7)$$

où V_Σ et P_K sont respectivement les flux et la pression sur le maillage grossier \mathcal{K}_H .

Nous détaillons au paragraphe suivant comment ces valeurs grossières sont calculées.

5.2.3 Construction du système grossier

On considère une maille grossière $K \in \mathcal{K}_H$ et une face grossière $\Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^{i \vee D}$. On multiplie la première équation du système (5.1) par la restriction à K de la fonction de base associée à Σ : $\psi_\Sigma|_K$. On intègre ensuite cette équation sur la maille K . Alors

$$\int_K (\lambda^{-1} v) \cdot \psi_\Sigma = - \int_K \nabla P \cdot \psi_\Sigma. \quad (5.8)$$

On utilise alors le fait que la fonction ψ_Σ est nulle sur les faces de la maille K différentes de Σ . On a donc, par intégration par parties

$$\int_K -\nabla P \cdot \psi_\Sigma = - \int_\Sigma P \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} + \int_K P \operatorname{div}(\psi_\Sigma).$$

Or, par construction des fonctions de base ψ_Σ , on a

$$\int_\Sigma \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{et} \quad \int_K \operatorname{div}(\psi_\Sigma) = 1.$$

On fait alors les approximations

$$\int_\Sigma P \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} \simeq \Pi_\Sigma \quad \text{et} \quad \int_K P \operatorname{div}(\psi_\Sigma) \simeq P_K$$

où on a noté Π_Σ la pression sur la face grossière $\Sigma \in \mathcal{F}_H$. On pose :

$$\begin{aligned} p_k &= P_K & \forall k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K} \\ \text{et} \quad \pi_\sigma &= \Pi_\Sigma & \forall \sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On définit pour une maille $K \in \mathcal{K}_H$ et une face $\Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^{i \vee D}$

$$V_{\Sigma, K} = V_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_{\Sigma, K} = V_\Sigma \varepsilon_{\Sigma, K}.$$

On décompose ensuite v sur la base des $(\psi_{\Sigma'})_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{i \vee D}}$, les flux étant nuls sur les autres faces.

$$v = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{i \vee D}} V_{\Sigma'} \psi_{\Sigma'} = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K}^{i \vee D}} V_{\Sigma', K} \psi_{\Sigma'}|_K.$$

On a donc

$$\int_K (\lambda^{-1} v) \cdot \psi_\Sigma = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} V_{\Sigma',K} \int_K (\lambda^{-1} \psi_{\Sigma'}) \cdot \psi_\Sigma.$$

On note pour toute face $\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}$

$$\Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}^{-1} = \int_K (\lambda^{-1} \psi_{\Sigma'}) \cdot \psi_\Sigma.$$

L'équation (5.8), s'écrit alors

$$\sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}^{-1} V_{\Sigma',K} = P_K - \Pi_\Sigma. \quad (5.10)$$

On peut ensuite inverser ce système linéaire et on obtient

$$V_{\Sigma,K} = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} (P_K - \Pi_{\Sigma'}).$$

Pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$, le fluide étant incompressible, nous pouvons écrire la conservation du volume de fluide à l'échelle grossière :

$$\sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}} V_{\Sigma,K} = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} (P_K - \Pi_{\Sigma'}) = 0.$$

Cette équation peut être utilisée pour exprimer les pressions des mailles grossières en fonction des pressions des faces grossières :

$$P_K = \frac{\sum_{\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \Pi_{\Sigma'}}{\sum_{\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}} = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} R_{K,\Sigma} \Pi_\Sigma. \quad (5.11)$$

Finalement, pour obtenir les équations du système linéaire, on écrit la continuité des flux sur chaque face interne grossière $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$, sous la forme :

$$V_{\Sigma,K} = -V_{\Sigma,L}, \quad \text{où } K, L \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}.$$

En utilisant les équations (5.10) et (5.11), cette équation peut se réécrire, pour toute face $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ avec $K, L \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$, sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} R_{K,\Sigma''} \left(\sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \right) \Pi_{\Sigma''} - \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \Pi_{\Sigma'} \\ + \sum_{\Gamma'' \in \mathcal{F}_{H,L}^{iVD}} R_{L,\Gamma''} \left(\sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_{H,L}^{iVD}} \Lambda_{L,\Sigma,\Gamma'} \right) \Pi_{\Gamma''} - \sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_{H,L}^{iVD}} \Lambda_{L,\Sigma,\Gamma'} \Pi_{\Gamma'} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

De plus, en intégrant le fait que la condition de Dirichlet impose la pression sur les faces $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$, nous aboutissons, au niveau algébrique, à un système de la forme :

$$A \Pi = B. \quad (5.13)$$

Une fois le système (5.13) résolu, les pressions des mailles grossières se déduisent des pressions sur les faces grossières Π_Σ , $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ en reprenant l'équation (5.11).

Pour calculer le flux sur une face grossière $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ où $K, L \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$ deux expressions peuvent être utilisées :

$$\begin{aligned} V_\Sigma &= \varepsilon_{\Sigma,K} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{i \vee D}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \left(\sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_{H,K}} R_{K,\Sigma''} \Pi_{\Sigma''} - \Pi_{\Sigma'} \right) \\ &= \varepsilon_{\Sigma,L} \sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_{H,L}^{i \vee D}} \Lambda_{L,\Sigma,\Gamma'} \left(\sum_{\Gamma'' \in \mathcal{F}_{H,L}} R_{L,\Gamma''} \Pi_{\Gamma''} - \Pi_{\Gamma'} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pour une face $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$ avec $K \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$, le flux V_Σ est donné par :

$$V_\Sigma = \varepsilon_{\Sigma,K} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}^{i \vee D}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \left(\sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_{H,K}} R_{K,\Sigma''} \Pi_{\Sigma''} - \Pi_{\Sigma'} \right). \quad (5.15)$$

Une fois les flux grossiers calculés, les flux fins se déduisent de la formule (5.7).

5.2.4 Estimation *a priori*

Z. Chen et T.Y. Hou ont présenté la méthode aux éléments finis mixtes multi-échelles dans [CH02]. Dans cet article, ils détaillent également comment ils peuvent obtenir une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution obtenue avec cette méthode multi-échelle. Pour écrire cette erreur, nous introduisons l'espace

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^N \mid \operatorname{div}(u) \in L^2(\Omega), u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On lui associe la norme $\|\cdot\|_{\operatorname{div},\Omega}$ telle que

$$\forall u \in H_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad \|u\|_{\operatorname{div},\Omega}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'estimation *a priori* montrée dans l'article [CH02] est la suivante.

Théorème 5.1. *On suppose que la mobilité est une fonction localement périodique de période $\varepsilon > 0$. On peut alors écrire la mobilité sous la forme $\lambda(x, \frac{x}{\varepsilon})$, cette fonction étant Y -périodique par rapport à sa deuxième variable. On note $(P_\varepsilon, v_\varepsilon)$ la pression et le flux obtenus en résolvant le problème (5.1) de manière exacte. On suppose que les problèmes (5.3) et (5.4) permettant de définir les fonctions de base multi-échelles sont résolus de manière exacte. Ainsi, au lieu de définir les pressions et les flux par maille ou face fines comme dans (5.7), on construit des fonctions de $x \in \Omega$*

$$\begin{cases} v_H = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{i \vee D}} V_\Sigma \psi_\Sigma(x), \\ P_H = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} P_K \mathbf{1}_K(x) \end{cases} \quad (5.16)$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε et H telle que

$$\|v_\varepsilon - v_H\|_{\operatorname{div},\Omega} + \|P_\varepsilon - P_H\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(H + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right). \quad (5.17)$$

5.3 Extension au cas diphasique

5.3.1 Mise à jour des fonctions de base

Afin de résoudre le problème diphasique (2.6) sur le maillage fin \mathcal{K}_h , on a présenté dans le chapitre 2 des schémas de discrétisation en temps dont le principe est de découpler le calcul de la pression (2.8) de celui des saturations (voir équations (2.9) ou (2.14)). Dans ce chapitre, nous avons vu comment la solution du problème (2.8) pouvait être obtenue par application d'un schéma volumes finis classique.

Dès lors, l'extension au cas diphasique de la méthode présentée dans la partie précédente consiste à appliquer l'un de ces schémas de résolution IMPES ou IMPIMS en substituant le schéma de résolution du problème en pression (2.8) par la méthode multi-échelle. En effet, la différence entre le problème (5.1) et les deux premières équations du problème (2.6) est simplement la dépendance de la mobilité totale à la saturation du fluide. Ainsi, il convient de considérer $\lambda \equiv k \lambda_T$ pour appliquer strictement la même stratégie de résolution multi-échelle au problème en pression du cas diphasique. Les flux sont calculés sur le maillage grossier \mathcal{K}_H puis mis à l'échelle sur le maillage \mathcal{K}_h . L'évolution de la saturation au cours du temps est obtenue en utilisant les flux fins issus du calcul multi-échelle. Ce calcul peut être fait de manière explicite par l'application de (2.11) ou de manière implicite en résolvant l'équation (2.15)

Toutefois, la dépendance en saturation de la mobilité implique également une dépendance en saturation des fonctions de base. Ainsi, les fonctions de base doivent être recalculées dès que la saturation varie, c'est-à-dire à chaque pas de temps. Ce calcul de mise à jour peut s'avérer très coûteux. Or, les variations de la saturation sont souvent localisées dans une partie du domaine. Ainsi, pour éviter de mettre à jour toutes les fonctions de base à chaque itération en temps, on propose d'introduire la variable :

$$(D_{\lambda_T}^n)_k = \frac{\lambda_T(S_k^n)}{\lambda_T(S_k^{last})},$$

où pour une maille $k \in \mathcal{K}_h$, on note S_k^{last} les saturations fines calculées lors de la dernière mise à jour des fonctions de base. On se fixe un seuil ε_{tol} et pour chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on recalcule toutes les fonctions de bases ψ_Σ , ϕ_Σ pour $\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}$ si

$$\max_{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}} (D_{\lambda_T}^n)_k > 1 + \varepsilon_{tol} \quad \text{ou} \quad \min_{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}} (D_{\lambda_T}^n)_k < \frac{1}{1 + \varepsilon_{tol}}.$$

Dans ce cas, on remet à jour les saturations dans le calcul des fonctions de base ϕ_Σ et ψ_Σ uniquement dans les mailles vérifiant une de ces conditions. En pratique, on constate un réel gain de temps de calcul à bénéficier de cette mise à jour localisée des fonctions de base par rapport aux variations de saturation.

5.3.2 Utilisation d'une information globale

La méthode multi-échelle présentée jusqu'à présent fait intervenir uniquement des informations locales pour le calcul des fonctions de base. Cependant, cela peut ne pas être suffisant pour bien décrire l'écoulement. En particulier, si les propriétés varient également à une échelle de l'ordre de la résolution du maillage grossier une erreur de résonance va affecter la solution obtenue avec notre méthode (voir inégalité (5.17) et remarques 4.3). On cherche donc à incorporer une information fine globale au calcul des fonctions de base multi-échelles. La méthode que l'on va appliquer est présentée au paragraphe 4.2.1 de l'ouvrage [EH09].

Cette méthode consiste en fait à résoudre sur le maillage fin le problème monophasique (5.1). La résolution numérique de ce problème nous permet d'obtenir la vitesse de Darcy dans le cas monophasique : v^{mono} . On définit alors les fonctions de base sur des couples face/maille en utilisant cette vitesse pour pondérer la vitesse de base sur la face grossière à laquelle elle est associée. Ainsi, pour une face $\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}$ et une maille K ayant Σ pour face, on définit la fonction de base $\psi_{K,\Sigma}$ par

$$\begin{cases} \psi_{K,\Sigma} &= -k \lambda_T \nabla \phi_{K,\Sigma} & \text{dans } K, \\ \text{div}(\psi_{K,\Sigma}) &= \varepsilon_{\Sigma,K} w & \text{dans } K, \\ \psi_{K,\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial K \setminus \Sigma, \\ \psi_{K,\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \frac{v^{mono}(x) \cdot \mathbf{n}}{\int_\Sigma v^{mono} \cdot \mathbf{n}} & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5.18)$$

On rappelle que $\varepsilon_{\Sigma,K} = \mathbf{n}_{\Sigma,K} \cdot \mathbf{n}_\Sigma$. Comme pour le système (5.3), w est la fonction poids :

$$w(x) = \frac{\theta(x)}{\int_K \theta(y) dy},$$

comme pour le cas monophasique, on choisit

$$\theta = (\lambda_T \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

La fonction $\psi_{K,\Sigma}$ est telle que son flux à travers Σ est unitaire et orienté suivant \mathbf{n}_Σ . Pour une face interne, la fonction $\psi_{K,\Sigma}$ peut être assimilée à la restriction de la fonction de base ψ_Σ définie par (5.3) à la maille K . La différence importante entre les systèmes (5.3) et (5.18) vient de la condition imposée sur Σ . Le flux total à travers Σ est unitaire dans les deux cas mais la répartition de ce flux sur chaque face fine dépend dans (5.18) de l'écoulement monophasique global dans le milieu poreux.

5.4 Présentation des résultats

On présente dans cette partie les résultats obtenus avec le schéma *IMPIMS* intégrant la méthode multi-échelle présentée dans ce chapitre. Ces résultats sont présentés pour différentes tailles de maillage grossier et comparés à ceux obtenus au paragraphe 2.5.2.

5.4.1 Couche 85 du cas SPE10

Dans ce paragraphe, on observe la solution obtenue lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 25% du volume poreux total.

La figure 5.4 montre le champ de pression obtenu dans le cas fin ainsi que celui obtenu avec une simulation multi-échelle comprenant 12 mailles grossières en x et 44 mailles grossières en y .

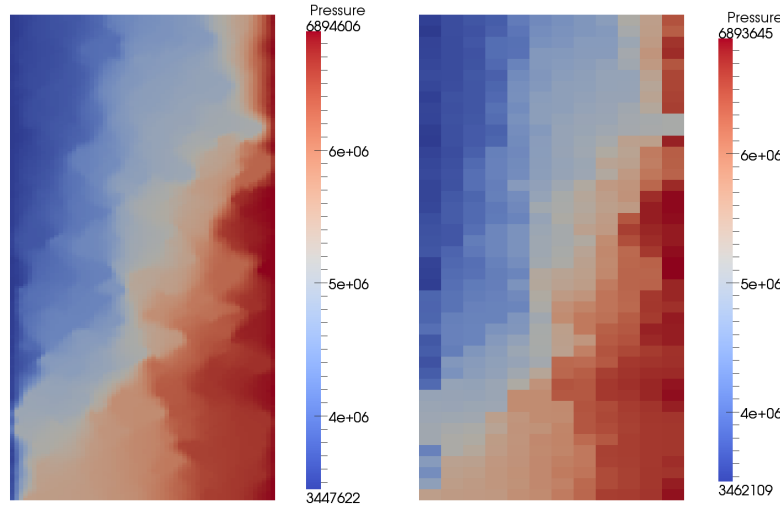


FIGURE 5.4 – Comparaison des pressions obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle en utilisant un maillage grossier 12×44

Sur la figure 5.5 les champs de saturation obtenus avec deux maillages grossiers sont comparés avec le champ de saturation obtenu avec un solveur fin et présenté dans le paragraphe 2.5.2. Les différents champs de saturation obtenus avec la méthode multi-échelle sont également comparées numériquement à la solution fine en utilisant la norme L^2 dans le tableau 5.1. Dans ce tableau, nous désignons par *LocalAlways* la solution calculée en mettant à jour toutes les fonctions de base après chaque pas de temps. *Local70* représente la solution obtenue si on choisit comme critère de mise à jour des fonctions de base $\varepsilon_{tol} = 0,7$ (voir paragraphe 5.3.1). *GlobalAlways* et *Global70* sont les solutions obtenues en utilisant une information globale pour calculer les fonctions de base multi-échelles (voir paragraphe 5.3.2). Les résultats obtenus avec la méthode multi-échelle sont assez proches de ceux obtenus avec une résolution fine. On remarque également que l'augmentation du nombre de mailles grossières améliore la précision de la solution multi-échelle par rapport à la solution fine. Ce résultat logique traduit l'augmentation de la précision de la méthode considérant un maillage grossier \mathcal{K}_H lorsque H décroît. La figure 5.6 présente les saturations obtenues avec les différentes méthodes pour un maillage grossier 4×4 .

On vérifie également que la prise en compte d'une information globale améliore la qualité de la solution. De plus, on constate que la mise à jour partielle des fonctions de base n'augmente que faiblement l'erreur.

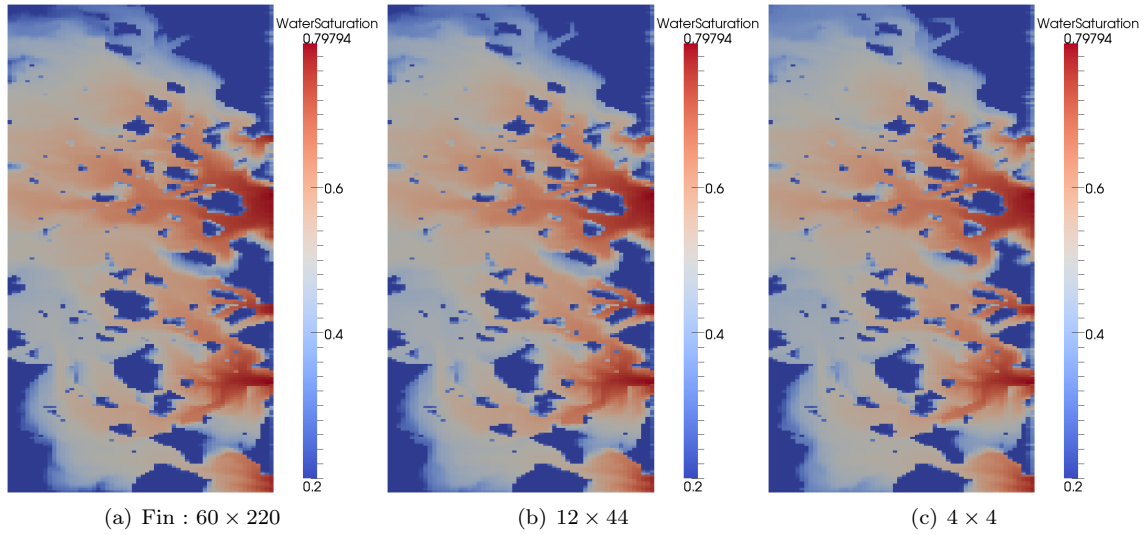


FIGURE 5.5 – Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle *Global70* pour plusieurs maillages grossiers

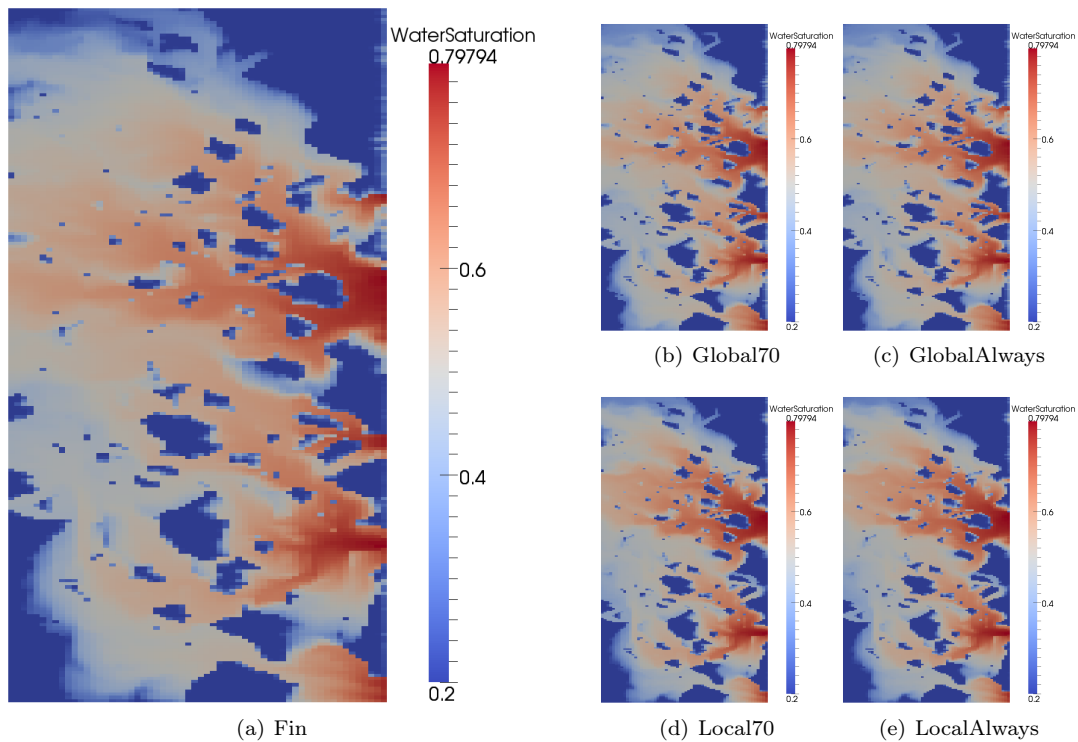


FIGURE 5.6 – Comparaison des saturations obtenues avec les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 4×4

Ces résultats permettent de vérifier que la méthode mise en place dans ce chapitre permet d'obtenir une bonne approximation de la solution de notre problème d'écoulement.

Résolution	4×4	12×20	12×44	6×20	6×10
LocalAlways	10,47%	8,05%	7,52%	7,02%	8,79%
Local70	10,66%	8,13%	7,37%	7,08%	8,68%
GlobalAlways	6,07%	4,14%	3,16%	4,53%	5,09%
Global70	6,21%	4,39%	3,71%	4,77%	5,24%

TABLE 5.1 – Ecarts relatifs en norme L^2 entre le champ de saturation obtenu avec une résolution fine et celui obtenu pour différents cas multi-échelles

5.4.2 Cas fracturé

Le cas fracturé présenté au paragraphe 2.5.2 est beaucoup plus hétérogène que la couche 85 du cas SPE 10. Les hétérogénéités présentes dans le champ de perméabilité sont de tailles très variées. La prise en compte d'une information globale lors du calcul des fonctions de base a une influence très importante dans ce cas comme nous pouvons le constater sur la figure 5.7.

Le tableau 5.2 confirme cette observation.

Résolution	10×10	20×10	10×5	10×20	20×20
LocalAlways	18,70%	8,05%	7,52%	7,02%	8,79%
Local70	18,08%	8,13%	7,37%	7,08%	8,68%
GlobalAlways	5,13%	4,14%	3,16%	4,53%	5,09%
Global70	5,69%	4,39%	3,71%	4,77%	5,24%

TABLE 5.2 – Ecarts relatifs en norme L^2 entre le champ de saturation obtenu avec une résolution fine et celui obtenu pour différents cas multi-échelles

D'autres résultats s'intéressant plus particulièrement à la performance de cette méthode en temps de calcul sont présentés au chapitre 6.

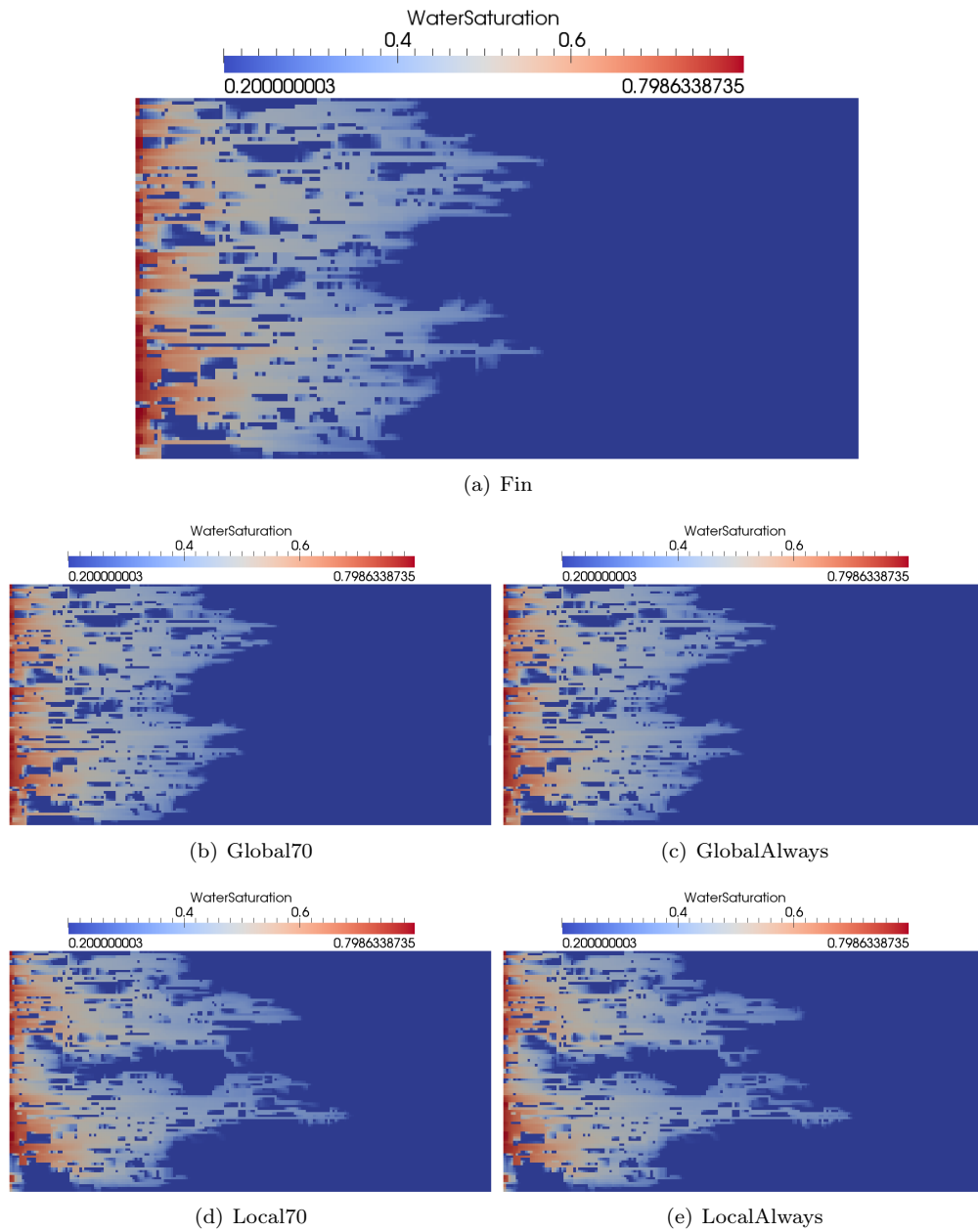


FIGURE 5.7 – Comparaison des saturations obtenues les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier 10×10

Chapitre 6

Implémentation et performances

Sommaire

6.1	La plate-forme <i>Arcane</i>	85
6.1.1	Architecture de la plate-forme	86
6.1.2	Maillage et variable	86
6.1.3	Parallélisme	87
6.1.4	Principe de développement d'une application	91
6.2	Architecture du prototype	92
6.2.1	Maillages	92
6.2.2	Organisation du module principal	93
6.2.3	Organisation des services physiques	93
6.2.4	Organisation des services numériques	94
6.3	Résultats de performance	95
6.3.1	Présentation des supercalculateurs utilisés	95
6.3.2	Cas SPE10 3D	96
6.3.3	Cube	99

Ce chapitre présente l'implémentation effectuée des différentes méthodes détaillées aux chapitres 2, 4 et 5. Nous présentons également les aspects performance de ces méthodes. Nous allons d'abord introduire la plate-forme *Arcane* sur laquelle se sont basés nos développements. L'architecture informatique de notre prototype est ensuite décrite. Puis, nous montrons comment les considérations de performance ont influencé la construction de ce prototype notamment au travers des modèles de programmation parallèle employés. Des résultats de performance obtenus sur différentes machines parallèles sont discutés en fin de chapitre.

6.1 La plate-forme *Arcane*

Arcane [GL09] est une plate-forme de développement pour les codes de simulation numérique volumes/éléments finis 2D/3D parallèles. Initiée en 2000 par le CEA/DAM, IFPEN collabore depuis 2007 à son développement. A l'opposé d'une plate-forme d'intégration, *Arcane* vise à proposer un ensemble d'outils et abstractions dédié au développement d'applications scientifiques de simulation pouvant s'exécuter sur des machines massivement parallèles. La plate-forme est aujourd'hui utilisée à IFPEN pour la mise au point d'applications de nouvelle génération en géosciences (modélisation de bassin, simulateurs de réservoir, stockage de CO_2 , ...) à vocation industrielle.

La plate-forme *Arcane* a pour objectifs principaux de :

- simplifier au maximum l'écriture des modules numériques et d'environnement par la prise en charge des aspects informatiques,
- garantir de bonnes performances sur les machines parallèles actuelles et limiter l'impact des évolutions matérielles futures,

- assurer un cadre de développement de qualité : outils de mise au point, temps de compilation réduit, simplicité de mise en œuvre.

6.1.1 Architecture de la plate-forme

Arcane est écrite en C++ et fait environ 200 mille lignes de code. Le code est écrit pour être le plus simple possible pour les non-spécialistes du C++ en limitant les techniques complexes du langage (par exemple les *expressions templates*). La plate-forme fonctionne sous *Unix* et *Windows*.

Arcane est construite sur une architecture logicielle type *component*. Chaque fonctionnalité est fournie par un composant appelé *service* dans la terminologie *Arcane*. Un service doit se conformer à un comportement défini par un *contrat*. Un contrat est ici défini par un ensemble d'opérations et de contraintes que l'on appelle *interface* (au sens informatique). Un service donné implémente une telle interface. Par exemple, *Arcane* fournit une interface de maillage **IMesh** avec des opérations standards comme obtenir le nombre de mailles ou ajouter/retirer des mailles. Un service peut accéder à d'autres interfaces et ainsi utiliser d'autres services. De fait, un service agit comme un *plugin*. En utilisant cette approche, *Arcane* est hautement adaptable et n'est pas liée à une implémentation spécifique.

Arcane prend en charge par défaut une multitude de services dont en particulier :

- la gestion des structures liées au maillage,
- la gestion des grandeurs portées par le maillage à travers une base de données,
- le parallélisme,
- l'aide à la construction de briques logicielles utilisateurs,
- la gestion de ces briques logicielles et de leurs interactions,
- les options de configuration des briques utilisateurs (jeu de données),
- le mécanisme de protections / reprises,
- la fourniture de fonctions utilitaires (mathématiques, listing, temps d'exécution, ...),
- les outils d'analyse et d'aide à la mise au point,
- le mécanisme de retour-arrière,
- les sorties spécifiques de dépouillement (courbes et historiques).

6.1.2 Maillage et variable

Un élément central proposé par la plate-forme est la gestion des maillages. *Arcane* prend en charge les maillages non-structurés 2D ou 3D. Les différents éléments du maillage sont appelés des *entités*. Il existe 4 genres d'entités : nœuds (0D), arêtes (1D), faces (2D), et mailles (2D ou 3D). *Arcane* définit un grand nombre de types de face ou maille (triangle, tétraèdre, pyramide, quadrangle, etc) et il est possible de spécifier d'autres types. De plus, le maillage est complètement dynamique, c'est-à-dire qu'il est possible d'ajouter ou retirer des éléments durant la simulation.

La structure de données sous-jacente au maillage a été conçue pour que l'utilisation du maillage soit la plus indépendante possible de la dimension de l'espace. En particulier, un développeur pourra, si l'application s'y prête, écrire un code similaire pour traiter les cas à deux dimensions et à trois dimensions. Ainsi, une maille peut être un élément 2D ou 3D. Une face est toujours le bord d'une maille. Par exemple, un hexaèdre est composé de 6 faces et un quadrangle de 4 faces.

Il est possible de définir des grandeurs portées par les éléments du maillage. On parle alors de *variable*. Typiquement, ce sont les objets manipulés par l'utilisateur pour conceptualiser des quantités physiques, par exemple, une pression définie aux centres des mailles ou une vitesse définie au centre des faces. *Arcane* propose des outils d'énumérations et d'accès à la connectivité des entités permettant d'écrire des algorithmes génériques par rapport à la dimension du maillage. Une variable est définie par :

- Un type de donnée comme entier, réel ou booléen,
- Une dimension pouvant être scalaire, tableau 1D ou 2D,
- Une entité de maillage supportant les données : maille, nœud, face ou arête.

On présente ici un exemple d'utilisation de cette structure de maillage. Ce code définit le profil du système linéaire obtenu en résolvant une équation d'advection avec un schéma de type volumes finis à deux points.

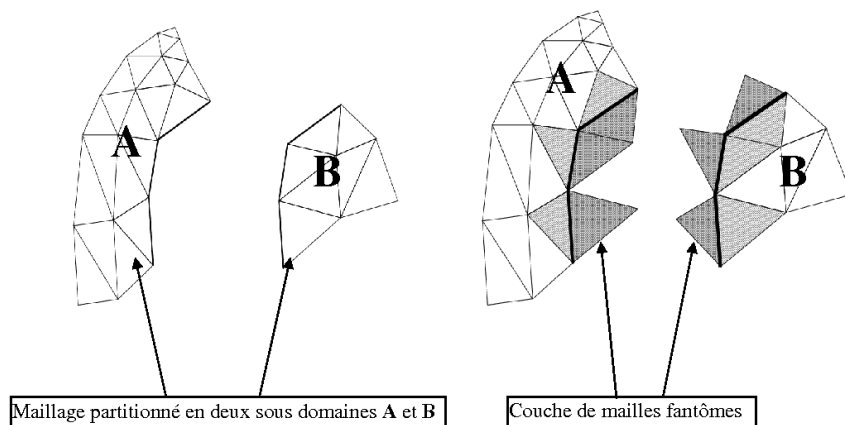
```
// On énumère les mailles présente dans le domaine
ENUMERATE_CELL(icell, m_mesh -> ownCells()) {
    // On récupère la maille associée à l'itérateur icell
    const Arcane::Cell cell = *icell;
    // On demande l'indice associé à cette maille
    const Arcane::Integer id = m_cache_index[cell.localId()];

    // On énumère les faces associées à la maille cell
    ENUMERATE_FACE(iface, icell -> faces()) {
        // On s'intéresse uniquement aux faces internes
        if(not iface -> isBoundary()) {
            const Arcane::Face face = *iface;
            // On récupère les indices des deux mailles liées à la face face
            Arcane::Integer id_back = m_cache_index[face.backCell().localId()] ;
            Arcane::Integer id_front = m_cache_index[face.frontCell().localId()] ;

            // On donne au constructeur du système linéaire les indices des coefficients
            // de la matrices qui peuvent être non nuls
            m_linear_system_builder -> defineData(id, id_back) ;
            m_linear_system_builder -> defineData(id, id_front) ;
        }
    }
}
```

6.1.3 Parallélisme

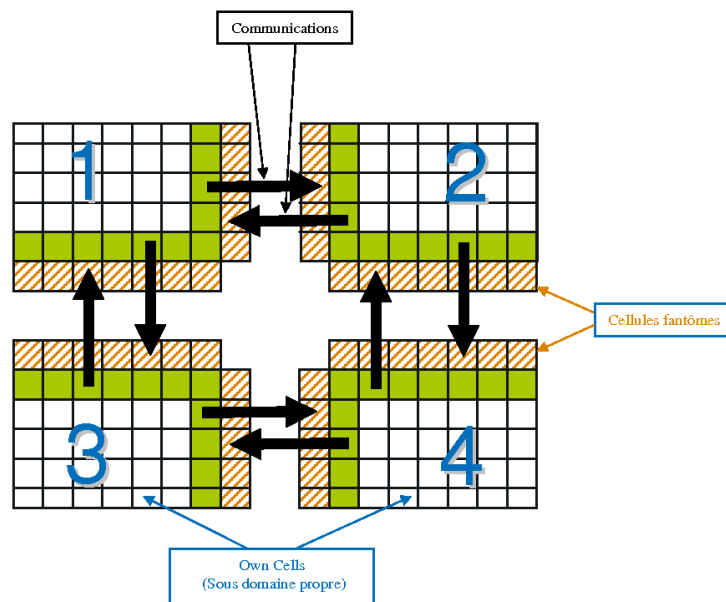
Arcane a été conçue pour s'exécuter sur des supercalculateurs composés de plusieurs milliers (et bien plus) de cœurs de calcul. Dans ce cas, le choix a été fait de partitionner le maillage en *sous-domaines* répartis sur chaque cœur de calcul. Chaque élément du maillage est *possédé* par un et un seul cœur de calcul. Chaque variable portée par le maillage est donc distribuée à travers tous les cœurs. On parle alors de la distribution des données. Les algorithmes calculant ces variables peuvent nécessiter l'utilisation d'un voisinage, les sous-domaines sont donc complétés par une ou plusieurs couches de mailles représentant une duplication d'éléments du maillage. Ces mailles dites *fantômes* sont la recopie des mailles voisines au sous-domaine. Cela forme donc une couche de recouvrement entre les sous-domaines.



La synchronisation des données entre sous-domaines est à effectuer explicitement par l'utilisateur :

```
\\ pressure est une variable
pressure.synchronize();
```


Notons que les mailles symétriques aux mailles fantômes sont appelées les mailles *partagées*.



Modèles de programmation parallèle

Les communications entre les sous-domaines sont effectuées suivant le paradigme *échange de messages* par l'utilisation d'un gestionnaire de parallélisme `IParallelMng`. Un sous-domaine peut donc envoyer et recevoir des messages des autres sous-domaines. *Arcane* met à disposition plusieurs implémentations du gestionnaire de parallélisme permettant une adaptation fine à l'architecture matérielle sous-jacente de la machine utilisée.

Mode distribué Ce mode est adapté aux architectures à mémoire distribuée. L'implémentation par défaut est basée sur *MPI* [WD96].

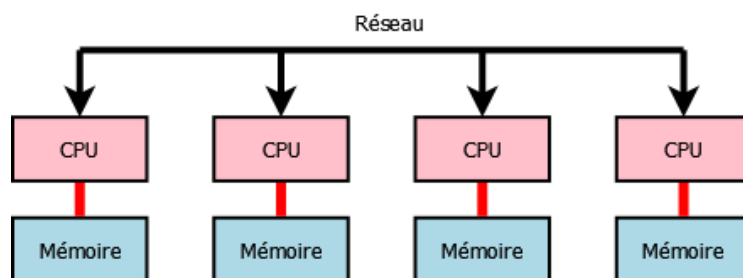


FIGURE 6.1 – Architecture distribuée

Ainsi, chaque sous-domaine est associé à un processus *MPI* ayant un espace d'adressage mémoire privé par rapport aux autres sous-domaines. Les communications se font à bas niveau par l'appel de routines *MPI* dédiées.

Mode partagé Ce mode est adapté aux architectures à mémoire partagée. L'implémentation par défaut est basée sur *TBB* [Rei07].

Ici, chaque sous-domaine est associé à un *thread*, c'est-à-dire un processus léger. Au lancement d'*Arcane*, autant de threads que de sous-domaines sont créés. Chaque thread gère ensuite indépendamment des autres

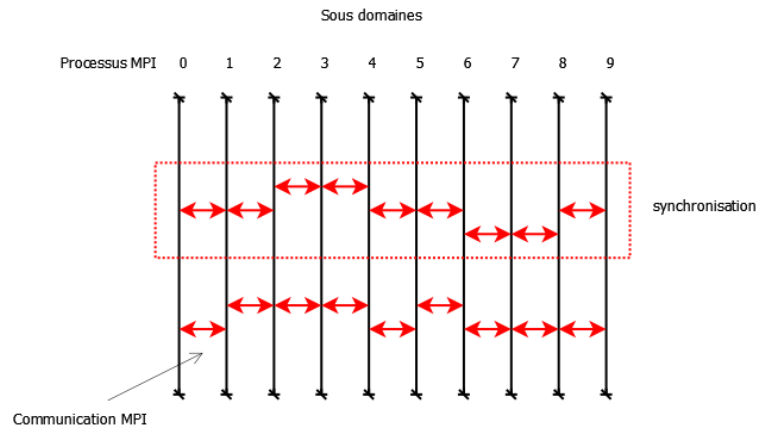


FIGURE 6.2 – Déroulement d’une application en mode distribué

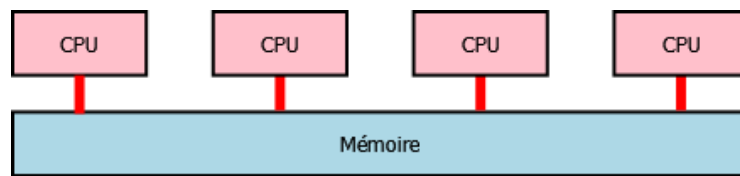


FIGURE 6.3 – Architecture partagée

le sous-domaine et les communications entre sous-domaines partagent le même formalisme qu’en mode distribué. L’avantage ici est de pouvoir substituer les appels *MPI* par des copies mémoires. De plus, chaque thread gérant la mémoire nécessaire pour les données associées au sous-domaine, les conflits mémoire sont réduits.

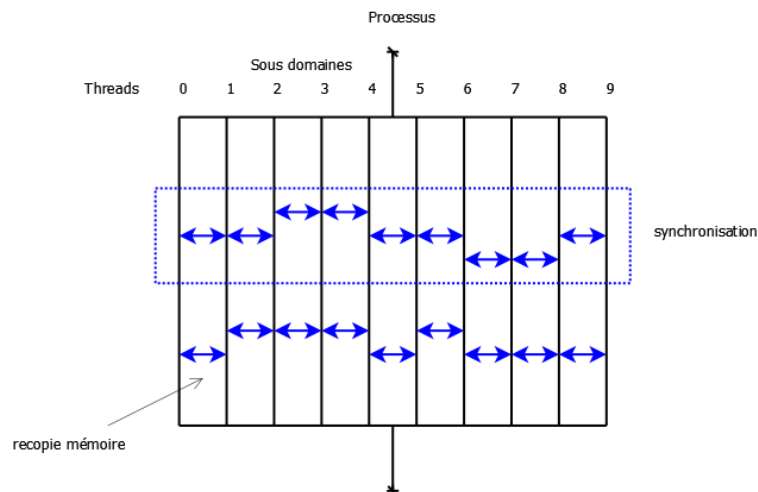


FIGURE 6.4 – Déroulement d’une application en mode partagé

Mode hybride Ce mode est adapté aux architectures massivement parallèles actuelles. En effet, les machines modernes sont composées de nœuds de processeurs à mémoire partagée connectés entre eux par

un réseau rapide. Ainsi, il y a une hiérarchie mémoire où des ressources peuvent partager une partie de la mémoire.

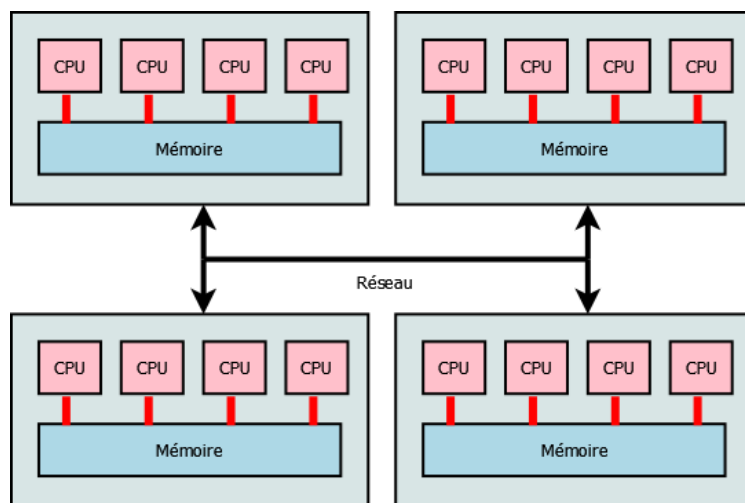


FIGURE 6.5 – Architecture traditionnelle d'un supercalculateur

Ce mode mélange les deux modes précédents. Les sous-domaines sont associés à des threads et en fonction de la localité du voisinage, les communications peuvent être de la copie mémoire (partagée) ou de l'envoi de message *MPI* (distribué).

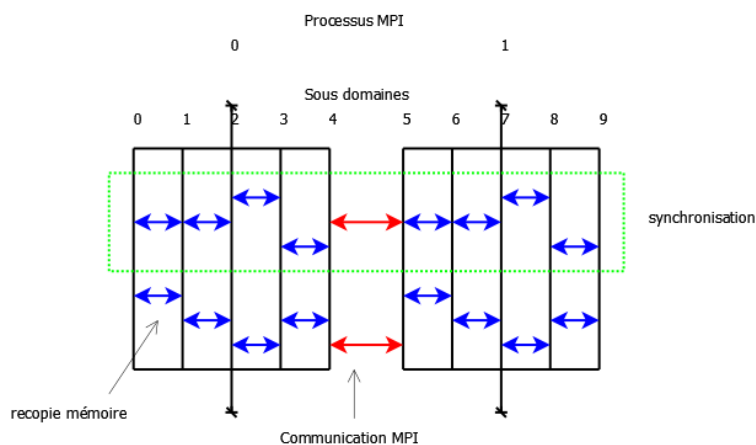


FIGURE 6.6 – Déroulement d'une application en mode hybride

Énumération parallèle

Indépendamment des modèles précédemment présentés, l'énumération des entités du maillage peut également être effectuée en parallèle. Pour cela, une approche *multithread* est utilisée. Bien entendu, un prérequis pour obtenir des performances intéressantes est d'avoir des ressources disponibles pour cette parallélisation. Cela est donc utile lorsque l'on exécute le prototype sur un supercalculateur (voir paragraphe 6.3).

Ainsi pour la méthode présentée au chapitre 5, le calcul des différentes fonctions de base ϕ_Σ et ψ_Σ définies sur des faces grossières Σ peut se faire en utilisant cette énumération parallèle. On construit alors une classe `ForComputer` qui contient la fonction `compute` qui calcule un certain nombre de fonctions de base.

```

class ForComputer
{
public:
    ForComputer(MultiThreadGlobalBasisFunctionComputerService& service)
        : m_service(service) {}

    void compute(const Arcane::Integer begin, const Arcane::Integer size) {
        const std::vector<CoarseFace>& faces_to_compute = *m_faces_to_compute;
        for(Arcane::Integer iface = begin; iface < begin + size; ++iface) {
            const CoarseFace& face = faces_to_compute[iface];
            m_basis_functions[face]->compute();
        }
    }
}

```

On construit alors le foncteur `m_compute`

```
m_compute = new RangeFunctorT<ForComputer>(m_computer, &ForComputer::compute);
```

Pour résoudre les problèmes de cellule en utilisant une énumération parallèle, on applique donc la fonction

```
TaskFactory::executeParallelFor(0, faces_to_compute.size(), m_compute);
```

6.1.4 Principe de développement d'une application

Une application bâtie sur Arcane est constituée d'un ensemble fonctionnel de briques utilisateurs. Chacune représente un modèle physique, un algorithme mathématique ou une fonctionnalité noyau de la simulation numérique. En règle général, ces briques sont développées par des physiciens ou des mathématiciens. On parle ici de *modules* et de *services*. Chaque module est indépendant des autres et est caractérisé par :

- des *variables* représentant les paramètres physiques,
- des *points d'entrée* représentant les opérations mises à disposition par le module et pouvant être appelées par le noyau Arcane durant la simulation.

Les modules décrivent leurs variables, points d'entrée et options de configuration dans un fichier XML. À partir de ce fichier, Arcane génère, durant la compilation du module, les classes parentes qui définissent des attributs représentant les variables. Ces classes déclarent également les points d'entrée en méthodes abstraites et offrent les services techniques communs aux modules (accession au maillage, opérateur de trace, etc.). Les variables sont identifiées par leurs noms. En conséquence, les modules peuvent partager les données : deux modules utilisant une variable de même nom partagent les mêmes données. Un point d'entrée d'un module est une méthode rendant le module visible pour Arcane. La méthode peut ainsi être référencée dans un fichier XML décrivant la boucle en temps de l'application. La figure 6.7 résume l'organisation d'un programme sous Arcane.

Nous donnons ici un exemple de fichier XML décrivant un module Arcane :

```

<module name='Hydrodynamique'>
  <variables>
    <variable field-name='velocity' name='Velocity' data-type='real3'
              item-kind='node' dim='0' />
    <variable field-name='density' name='Density' data-type='real'
              item-kind='cell' dim='0' />
  </variables>
  <entry-points>
    <entry-point method-name='computeForces' name='CalculDesForces'
                  where='compute-loop' />
    <entry-point method-name='moveNodes' name='DeplacementDesNoeuds'
                  where='compute-loop' />
  </entry-points>
</module>

```

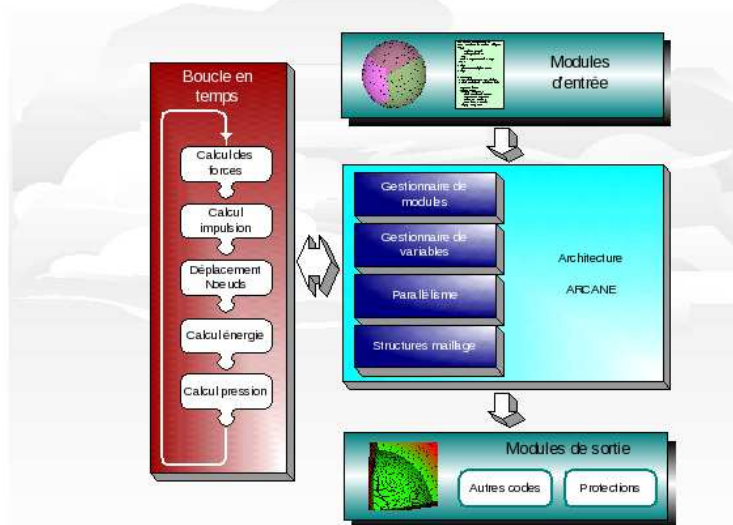


FIGURE 6.7 – Organisation d'un programme sous Arcane

```

</entry-points>
<options>
  <simple name='cfl' type='real' default='0.5'>
    <description>Définition de la CFL</description>
  </simple>
</options>
</module>

```

Enfin, les modules peuvent partager des fragments de code au travers de composants dédiés appelés services. Les services peuvent être techniques comme un outil d'écriture parallèle sur fichier ou spécifiques au domaine d'application comme un solveur algébrique ou un schéma. Un service est vu comme un contrat représenté par un ensemble d'opérations rassemblées dans une interface. Les modules choisissent les implémentations des services dans leur fichier de configuration.

6.2 Architecture du prototype

On présente ici les différentes briques logicielles développées durant cette thèse. Notre but était de mettre au point un prototype suffisamment modulable pour permettre des évolutions et ajouts rapides.

6.2.1 Maillages

Arcane propose un lot d'outils avancés concernant le maillage. Toutefois, la problématique multi-échelle est centrée sur le lien entre les éléments de deux maillages distincts : un maillage grossier agrégeant les éléments d'un maillage fin. Ce lien a été formalisé dans un objet `MultiscaleMesh` contenant deux maillages *Arcane* `IMesh` ainsi que des éléments grossiers `CoarseCell` et `CoarseFace`. Chaque élément grossier est composé des différents éléments fins associés. De plus, une face grossière `CoarseFace` contient les mailles grossières dont elle est le bord.

Un lecteur de maillage cartésien `MultiscaleMeshReader` a également été conçu pour construire efficacement et en parallèle les maillages *Arcane* fin et grossier ainsi que le maillage multi-échelle `MultiscaleMesh`. Notons que la numérotation choisie des éléments est la numérotation classique $\{i, j, k\}$.

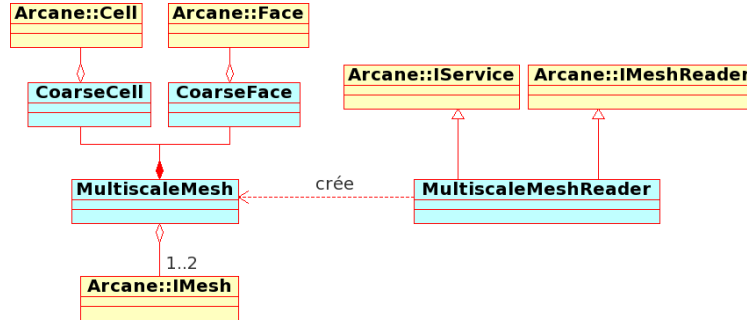
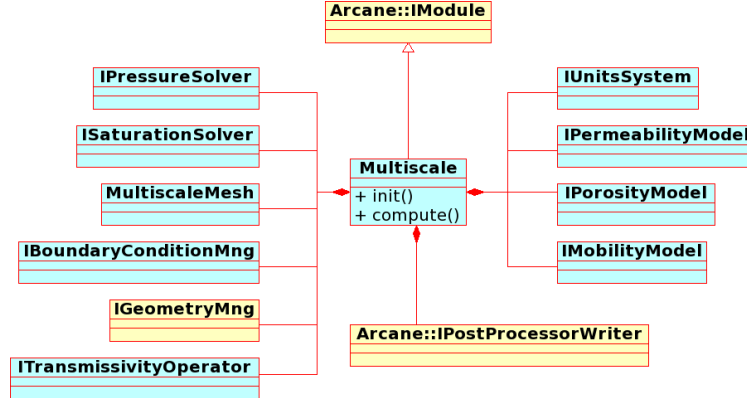


FIGURE 6.8 – Maillage multi-échelle

L'appel de ce lecteur est effectué dans l'initialisation de la plate-forme **Arcane**. Ce n'est pas à l'utilisateur de piloter explicitement la construction du maillage. En effet, ce lecteur est un service *Arcane* de type **IMeshReader**. L'approche environnement de programmation par composant prend son sens sur cet exemple d'ajout de fonctionnalité à la plate-forme.

6.2.2 Organisation du module principal

Le module principal est appelé **Multiscale**. Sa structure est présentée sur la figure 6.9. Ce module construit d'abord les données d'entrée en utilisant des modèles physiques représentés sur la droite du diagramme. Une fois ces paramètres connus, le module fait appel à différents services numériques pour résoudre les différentes équations permettant d'obtenir l'évolution de l'écoulement diphasique. En particulier, le module **Multiscale** requiert une résolution en pression et une résolution en saturation. En fonction des services utilisés pour résoudre ces équations, on pourra donc obtenir une résolution IMPES (voir paragraphe 2.3) ou IMPIMS (paragraphe 2.4). On peut également résoudre l'équation en pression en utilisant une des méthodes multi-échelles présentées aux chapitres 4 et 5.

FIGURE 6.9 – Diagramme UML représentant le module **Multiscale**

6.2.3 Organisation des services physiques

Nous avons vu que la première étape dans la résolution est le calcul des données physiques. Ces calculs sont effectués en utilisant des services qui diffèrent selon le modèle considéré. Nous détaillons ici les différents services implémentés dans le prototype qui permettent d'obtenir la perméabilité (voir figure 6.10). Ainsi, on peut choisir des perméabilités constantes (**CstPermeabilityModel**) ou dépendantes des

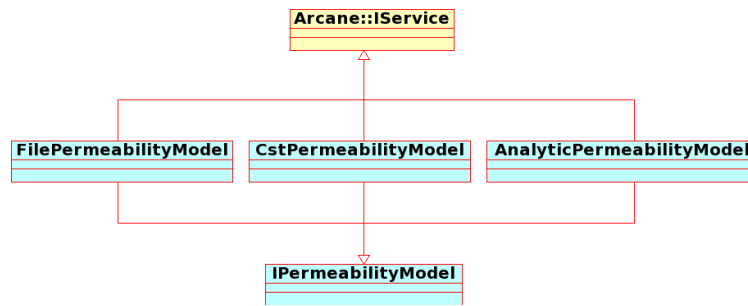


FIGURE 6.10 – Diagramme UML représentant les services définissant les modèles de perméabilité

coordonnées des mailles (`AnalyticPermeabilityModel`). Une troisième implémentation de cette interface, `FilePermeabilityModel`, permet de définir la perméabilité à partir d'un fichier.

D'autres services assez semblables sont disponibles pour modéliser la mobilité et la porosité.

6.2.4 Organisation des services numériques

Solveur en saturation

Nous avons vu au chapitre 2 que la saturation pouvait être résolue en utilisant un schéma implicite (paragraphe 2.3.2) ou explicite (paragraphe 2.4). Ces deux méthodes de résolution sont donc implémentées dans notre prototype (voir figure 6.11).

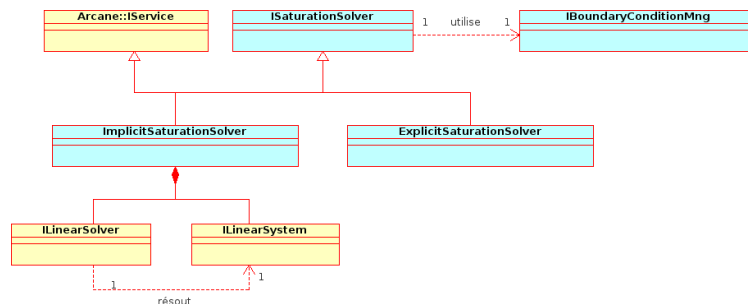


FIGURE 6.11 – Diagramme UML représentant les services implémentant les différentes méthodes de résolution du système en saturation

Solveur en pression

Les chapitres 2, 4 et 5 ont permis de définir trois méthodes pour résoudre le problème en pression (voir figure 6.12).

- La méthode utilisant des volumes finis définie au chapitre 2 est appliquée dans le service `ImplicitSolver`.
- La méthode *Allaire-Brizzi* présentée au chapitre 4 est utilisée dans le service `AllaireBrizziSolver`.
- Enfin, la méthode aux éléments finis mixtes multi-échelles [CH02] détaillée au chapitre 5 est implémentée dans le `MultiscaleSolver`.

Nous avons également mis en place une résolution de la pression par une méthode aux éléments finis de Lagrange dans le `FiniteElementSolver`. Le paragraphe 5.3.1 présente aussi un critère de mise à jour des fonctions de base dépendant de la variation des mobilités dans une maille grossière. Si on choisit d'appliquer cette mise à jour partielle, il suffit de préciser qu'on utilise le service `MobilityVariationUpdate`. Dans le cas contraire, on choisira le service `AlwaysUpdate`.

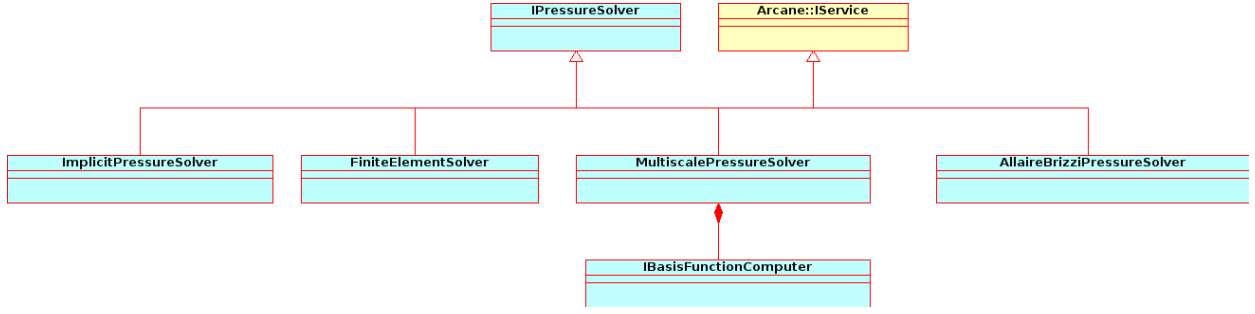


FIGURE 6.12 – Diagramme UML représentant les services représentant les différents solveurs en pression

Nous nous intéressons plus spécifiquement au service utilisant la méthode aux éléments finis mixtes multi-échelles. Ce service est détaillé dans la figure 6.13. Nous avons vu dans le chapitre 5 qu’il y avait deux façons différentes de définir les problèmes de cellule permettant de calculer les fonctions de base.

- La méthode présentée au paragraphe 5.2.1 est appelée **LocalComputer** car le calcul des fonctions de base dépend uniquement d’informations locales.
 - La méthode présentée au paragraphe 5.3.2 est appelée **GlobalComputer** car elle nécessite l’utilisation d’une information globale, et plus précisément, du champ de vitesse d’un écoulement monophasique.
- Pour ces deux méthodes, on peut choisir aussi d’effectuer le calcul des fonctions de base en utilisant une énumération parallèle (voir paragraphe 6.1.3). Nous avons donc également défini les services **MultiThreadGlobalComputer** et **MultiThreadLocalComputer**.

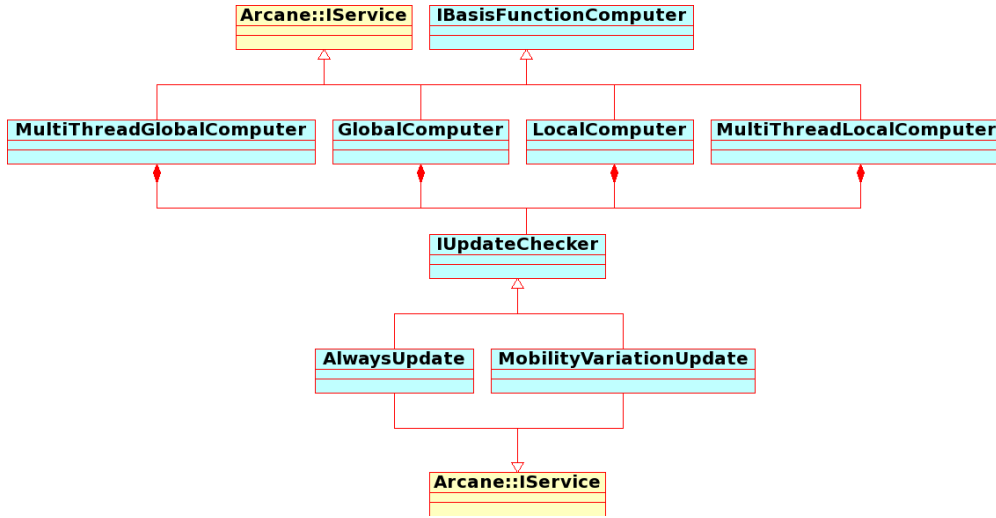


FIGURE 6.13 – Diagramme UML représentant les services définissant les différentes méthodes pour calculer les fonctions de base multi-échelles

6.3 Résultats de performance

Nous nous intéressons maintenant aux résultats de performance obtenus avec notre implémentation de la méthode multi-échelle présentée au chapitre 5.

6.3.1 Présentation des supercalculateurs utilisés

Nous présentons ici les différentes machines sur lesquelles nous avons pu tester le prototype présenté dans ce chapitre. Nous avons tout d’abord utilisé le supercalculateur d’IFPEN, ENER110. Ce supercalculateur,

mis en service le 29 janvier 2013, dispose d’une puissance de crête de 126 TFlops ce qui le place au 391^e rang mondial du top 500 des supercalculateurs de juin 2013 [Top13].

Ses caractéristiques sont les suivantes :

- un processeur est composé de 8 cœurs Intel Sandy Bridge 2,6 GHz,
- chaque nœud est composé de 2 processeurs c’est-à-dire de 16 cœurs et de 64 Go de RAM (donc 4Go par cœur),
- le supercalculateur comporte 378 nœuds de ce type,
- le réseau est de type infiniband FDR.

Grâce au GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif) nous avons également pu disposer de temps de calcul sur le supercalculateur *CURIE* (15^e au top 500 de juin 2013) hébergé dans les locaux du CEA. Ce supercalculateur dispose de plusieurs types de nœuds. Les nœuds que nous avons utilisés pour tester notre prototype sont les nœuds “larges” qui ont les caractéristiques suivantes :

- un processeur est composé de 8 cœurs Intel Nehalem-EX 2,27 GHz,
- chaque nœud est composé de 16 processeurs c’est-à-dire 128 cœurs et 512 Go de RAM (donc 4Go par cœur),
- le supercalculateur comporte 360 nœuds de ce type,
- le réseau est de type infiniband QDR.

6.3.2 Cas SPE10 3D

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas SPE 10 à trois dimensions présenté dans le paragraphe 2.5.1. Pour ce cas, nous imposons une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord $y = 0$. Sur le bord où y est maximal, une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0 sont fixées. Sur les autres bords, une condition de flux nul est imposée. Une première simulation est effectuée sur le maillage fin avec le schéma *IMPIMS*. Nous mesurons le temps nécessaire pour simuler cet écoulement jusqu’à ce que le volume poreux d’eau injecté soit égal à 1% du volume poreux total. Le pas de temps choisi correspond à dix fois le pas de temps maximal pour un schéma *IMPES* (voir équation (2.12)). Ce test est effectué en séquentiel puis en parallèle avec un nombre croissant de processeurs. Les temps de calcul présentés dans le tableau 6.1 sont en fait les temps totaux passés par le programme pour construire et résoudre les problèmes en pression. Les résultats présentés dans ce tableau sont obtenus en utilisant uniquement le parallélisme MPI pour partitionner le maillage en sous domaines.

1 proc.	2 proc.	4 proc.	8 proc.	16 proc.
2 939,69 s	1 571,63 s	817,27 s	454,81 s	293,56 s

TABLE 6.1 – Temps de calculs de la pression obtenus avec le solveur *IMPIMS* sur maillage fin en utilisant le parallélisme MPI

Les mailles sont ensuite agglomérées pour obtenir un maillage grossier comprenant 12 mailles dans la direction x , 20 dans la direction y et 5 dans la direction z . Comme dans le cas fin, nous mesurons le temps nécessaire pour atteindre un volume poreux d’eau injecté égal à 1% du volume poreux total. La méthode multi-échelle que l’on considère ici est la méthode globale avec une mise à jour partielle des fonctions de base avec $\varepsilon_{tol} = 0,7$ (voir paragraphe 5.3.1). Avant de comparer les temps de calcul, nous vérifions que cette solution multi-échelle approche assez bien la solution fine. La figure 6.14 présente les saturations de la couche $z = 40$ obtenues à l’état final avec la méthode multi-échelle ainsi que celles obtenues avec la solution fine. L’erreur relative en norme L^2 sur le domaine 3D complet entre la solution fine et la solution multi-échelle est de 4,84%. On en déduit donc que cette solution est assez proche de la solution fine.

Les temps de calcul des pressions sont présentés dans le tableau 6.2. Là aussi, le maillage est parallélisé avec MPI et il y a autant de sous-domaines que de processeurs.

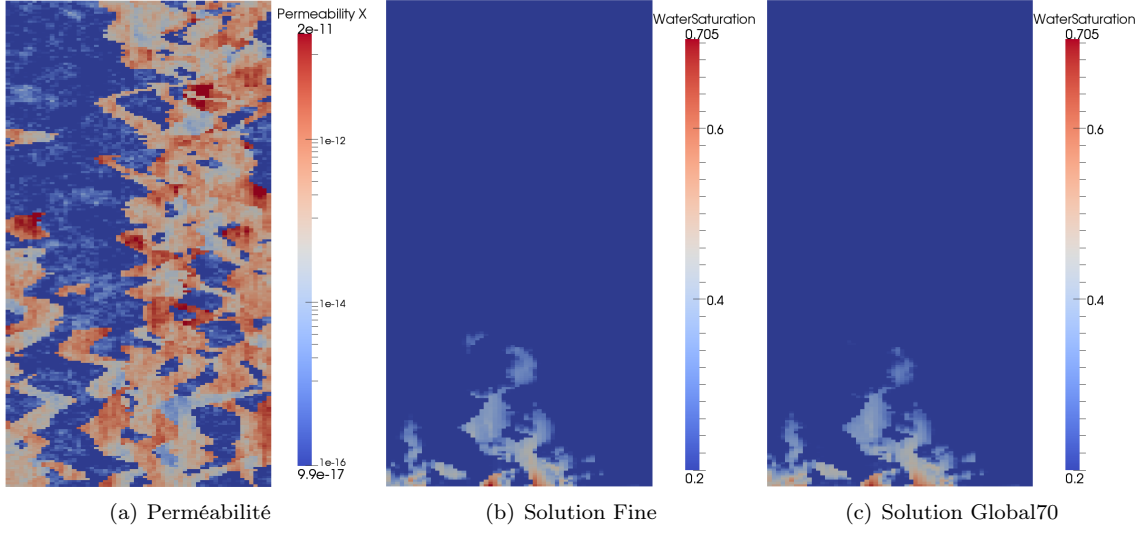


FIGURE 6.14 – Comparaison des saturations obtenues avec la méthode multi-échelle et l’approche classique sur la couche $z = 40$ du cas SPE 10 3D

1 proc.	2 proc.	4 proc.	8 proc.	16 proc.
105,00 s	54,65 s	35,54 s	27,61 s	22,74 s

TABLE 6.2 – Temps de calculs de la pression obtenus avec le solveur IMPIMS multi-échelle en utilisant le parallélisme MPI

Nous remarquons donc que la méthode multi-échelle résout beaucoup plus rapidement le même problème : sur ce cas, en séquentiel, le temps de calcul est 28 fois plus faible en multi-échelle qu’avec une méthode classique. Cependant, on remarque que l’accélération apportée par la parallélisation est beaucoup plus faible avec la méthode multi-échelle qu’avec un solveur implicite (voir figure 6.15 détaillée plus tard). Cela est dû à la trop faible taille du système grossier ($12 \times 20 \times 85$). Le système linéaire n’est donc constitué que de quelques dizaines de milliers d’inconnues. L’utilisation de 16 processus MPI pour résoudre ce système n’est donc pas nécessaire. Pour mieux utiliser les ressources disponibles nous allons diminuer le nombre de processus MPI et utiliser une énumération parallèle de type multithread (voir paragraphe 6.1.3).

Tous les temps de calcul obtenus sont présentés dans le tableau 6.3. Dans ce tableau, *le nombre de processus MPI est égal au nombre de cœurs disponibles divisé par le nombre de threads*.

Nb cœurs	Solveur fin	1 thread	2 threads	4 threads	8 threads
1	2 939,69 s (1 proc. MPI)	105,00 s (1 proc. MPI)			
2	1 571,63 s (2 proc. MPI)	54,65 s (2 proc. MPI)	55,35 s (1 proc. MPI)		
4	817,27 s (4 proc. MPI)	35,54 s (4 proc. MPI)	33,24 s (2 proc. MPI)	43,91 s (1 proc. MPI)	
8	454,81 s (8 proc. MPI)	27,61 s (8 proc. MPI)	22,26 s (4 proc. MPI)	26,67 s (2 proc. MPI)	38,63 s (1 proc. MPI)
16	293,56 s (16 proc. MPI)	22,74 s (16 proc. MPI)	18,74 s (8 proc. MPI)	17,36 s (4 proc. MPI)	23,69 s (2 proc. MPI)

TABLE 6.3 – Temps de calculs de la pression obtenus avec les solveurs en pression fin et multi-échelle en fonction du nombre de cœurs utilisés et du nombre de threads ($Nb_{MPI} = Nb_{cœur} / Nb_{thread}$)

On remarque donc que l'utilisation de l'énumération parallèle pour le calcul des fonctions de base permet une meilleure utilisation de la puissance de calcul. Ainsi, avec 16 cœurs disponibles, l'utilisation de 4 threads au lieu d'un seul permet un gain de près de 24%.

Sur la figure 6.15, nous présentons l'efficacité des différentes méthodes. Tout d'abord, nous définissons l'efficacité par le temps de calcul total en parallèle divisé par le temps de calcul en séquentiel. Nous entendons par temps de calcul total le temps de calcul multiplié par le nombre de processeurs. Cette *efficacité* est donc un nombre inférieur à 1. Nous comparons alors l'efficacité du solveur fin avec celle de la méthode multi-échelle. On remarque que le solveur fin est beaucoup plus efficace que la méthode multi-échelle. Nous avons déjà remarqué que le maillage grossier comportait trop peu de mailles pour que l'utilisation d'un grand nombre de processeurs soit utile. Nous introduisons également l'efficacité de la méthode multi-échelle si on utilise le multithreading pour calculer les problèmes de cellule. Bien sûr, dans ce cas, on considère, pour chaque nombre de processeurs la valeur la plus faible observée dans le tableau 6.3. La figure 6.15 nous

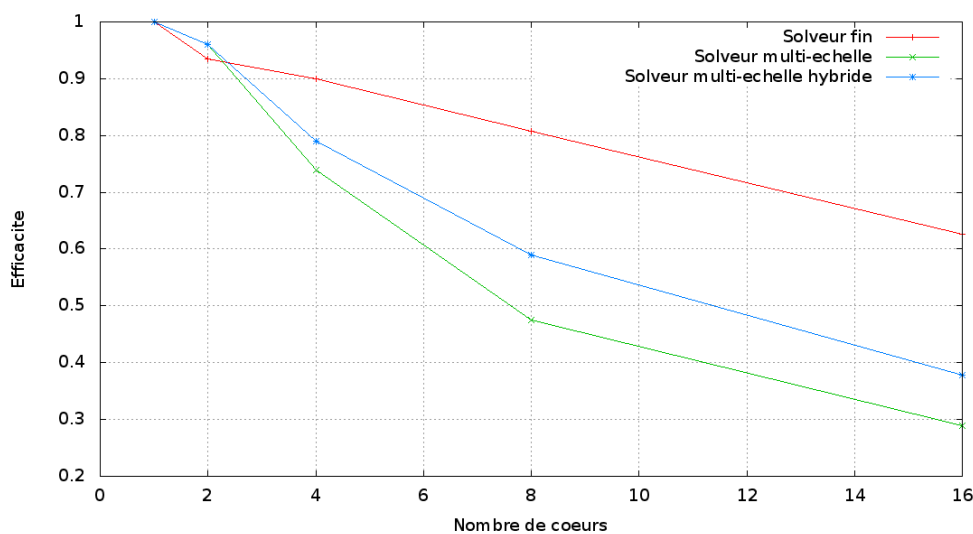


FIGURE 6.15 – Graphique présentant l'efficacité des différents solveurs

permet donc de déduire que l'utilisation de l'énumération parallèle augmente l'efficacité de la méthode.

Nous avons également testé notre prototype avec 16 cœurs sur un nœud “large” du supercalculateur CURIE. Comme indiqué précédemment, ce nœud possède une architecture différente et le but de ce second test est vérifier que le multithreading améliore également l'efficacité du code sur cette configuration de nœud. Le tableau 6.4 présente les résultats obtenus.

Solveur fin	1 thread	2 threads	4 threads	8 threads
16 proc. MPI	16 proc. MPI	8 proc. MPI	4 proc. MPI	2 proc. MPI
770,03 s	54,65 s	42,49 s	34,67 s	45,24 s

TABLE 6.4 – Temps de calculs de la pression obtenus avec les solveurs en pression fin et multi-échelle pour 16 cœurs en fonction du nombre de threads

On remarque que, sur cette seconde machine, le gain en performance entre le solveur fin et le solveur multi-échelle est du même ordre. Cependant, l'utilisation de plusieurs threads est ici beaucoup plus intéressante : avec 4 threads, le gain en temps de calcul par rapport à un parallélisme uniquement distribué est de plus de 35%.

6.3.3 Cube

On considère ici un cas théorique mis en place pour tester la capacité de la méthode multi-échelle sur des cas comportant un très grand nombre de mailles. Dans ce cas, le réservoir est un cube comportant 256 mailles dans chaque direction. Le nombre total de mailles est donc de près de 17 millions. Chaque maille est un cube de 5 mètres de côté. Le champ de perméabilité a été généré en utilisant des méthodes statistiques employées par le logiciel *Condor* développé par IFPEN (voir figure 6.16). On simule un écoulement diphasique dans

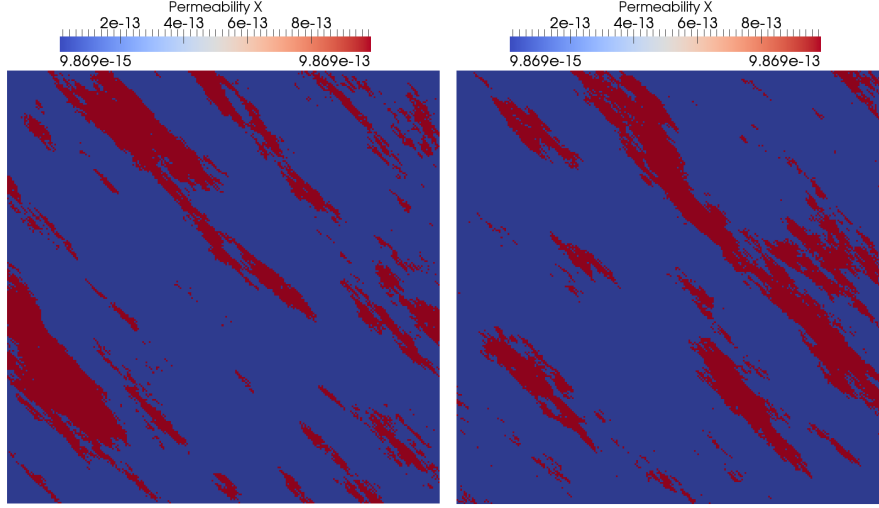


FIGURE 6.16 – Perméabilités du cube composé de 256 mailles dans chaque direction. À gauche pour $z = 200$ et à droite pour $z = 640$

ce réservoir en imposant une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord $x = 0$. Sur le bord où x est maximal, on impose une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0. Nous présentons dans le tableau 6.5 les résultats de performance obtenus lorsqu'on simule un écoulement dans ce cube jusqu'à atteindre un volume poreux d'eau injectée correspondant à 1% du volume poreux disponible. Le maillage grossier utilisé pour effectuer les simulations multi-échelles dans ce cas est composé de 32 mailles dans chaque direction.

Solveur fin	1 thread	4 threads	8 threads	16 threads
128 proc. MPI	128 proc. MPI	32 proc. MPI	16 proc. MPI	8 proc. MPI
22 153,31 s	694,38 s	466,80 s	576,02 s	773,23 s

TABLE 6.5 – Temps de calculs obtenus avec les solveurs en pression fin et multi-échelle pour 128 cœurs en fonction du nombre de threads

On remarque que, dans ce cas nécessitant de grandes capacités de calcul, la méthode multi-échelle est toujours beaucoup plus performante que la résolution classique (32 fois plus rapide). Comme dans le cas précédent, l'utilisation du multithreading pour le calcul des fonctions de base permet de réduire encore le temps de calcul. On atteint alors un temps de calcul plus de 47 fois plus faible.

Chapitre 7

Homogénéisation d'un problème de transport

Sommaire

7.1	Construction du problème modèle	101
7.2	Remarques préliminaires sur la mise à l'échelle	102
7.3	Définition du problème périodique	103
7.4	Résultats préliminaires	104
7.5	Développement asymptotique avec dérive	104
7.6	Convergence à deux échelles avec dérive	110
7.7	Résultat de convergence	114
7.8	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	117

Une fois les pressions et les vitesses calculées avec la méthode multi-échelle définie au chapitre 5, le transport des fluides peut être réalisé en appliquant un schéma explicite en saturation à l'échelle fine comme pour la discrétisation IMPES (voir paragraphe 2.3). Cependant, pour obtenir des valeurs de saturation en eau comprises entre S_{wi} et $1 - S_{or}$, c'est-à-dire pour respecter le principe du maximum, la condition CFL (2.12) sur le pas de temps doit être respectée ce qui peut conduire à des pas de temps relativement faibles. On peut également appliquer un schéma IMPIMS (voir paragraphe 2.4) mais cela revient à résoudre un système non linéaire de très grande taille. Une méthode multi-échelle simulant un transport à l'échelle grossière par un schéma explicite avant de reconstruire la solution en saturation à l'échelle fine permet d'augmenter les valeurs de ce pas de temps.

7.1 Construction du problème modèle

Le problème en saturation que l'on souhaite résoudre est la troisième équation du système (2.5) :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} (f_w(S) (v - k\lambda_o(S) \nabla P_{c_{o,w}}(S))) = 0.$$

Ce problème est, *a priori*, non linéaire. Dans ce travail, nous nous limitons à un problème de transport linéaire sur un ouvert $(0, \mathcal{T}) \times \Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\mathcal{T} > 0$:

$$\begin{cases} \rho^*(x^*) \frac{\partial c^*}{\partial t^*}(t^*, x^*) + b^*(x^*) \cdot \nabla c^*(t^*, x^*) - \operatorname{div} (A^*(x^*) \nabla c^*(t^*, x^*)) &= 0 \text{ dans } (0, \mathcal{T}) \times \Omega \\ c^*(0, x^*) &= c^0(x^*) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

Dans (7.1), ρ^* représente la porosité, b^* la vitesse, A^* le tenseur de diffusion, c^* une concentration et on suppose que

$$\operatorname{div} (b^*) = 0.$$

Cette équation modèle intervient, par exemple, lorsque l'on simule l'évolution de la concentration d'un traceur à l'intérieur d'une phase (voir [Bea88]). Dans ce cas, A^* correspond au coefficient de diffusion moléculaire et de dispersion et b^* est la vitesse de déplacement de la phase. L'objectif est ici de savoir sous quelle forme peut se mettre cette équation si on considère que les différentes propriétés varient à une échelle beaucoup plus faible que la taille du domaine.

Nous allons maintenant mettre à l'échelle le système (7.1) comme cela a été présenté dans [AR07], [DP05] et [ABMP10]. La variable x^* représente, ici, la variable d'espace à l'échelle fine. Nous notons l une longueur caractéristique de cette échelle et L_R une longueur caractéristique de la taille du domaine Ω . Nous définissons alors $\varepsilon = \frac{l}{L_R}$ qui est supposé faible. Nous prenons ensuite T_R pour définir notre échelle de temps. Nous notons alors ρ_R, b_R, c_R, A_R les grandeurs caractéristiques de la porosité, la vitesse, la concentration et la diffusion. Les variables adimensionnées sont alors définies ainsi

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L_R}, \quad t = \frac{t^*}{T_R}, \quad \rho^\varepsilon(x) = \frac{\rho^*(x^*)}{\rho_R}, \\ b^\varepsilon(x) &= \frac{b^*(x^*)}{b_R}, \quad A^\varepsilon(x) = \frac{A^*(x^*)}{A_R}, \quad u_\varepsilon(t, x) = \frac{c^*(t^*, x^*)}{c_R}. \end{aligned}$$

Le système d'équations sans dimension obtenu à partir de (7.1) s'écrit

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{b_R T_R}{L_R \rho_R} b^\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \frac{A_R T_R}{L_R^2 \rho_R} \operatorname{div}_x (A^\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon) &= 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (7.2)$$

où $\Omega_\varepsilon = \left\{ \frac{x^*}{L_R} \mid x^* \in \Omega \right\}$ et $T = \frac{T_R}{T_R}$. Pour ce problème on peut définir un nombre de Péclet sur chaque échelle :

– à l'échelle fine, on note

$$\mathbf{Pe}_{loc} = \frac{l b_R}{A_R},$$

– à l'échelle macroscopique, on définit

$$\mathbf{Pe} = \frac{L_R b_R}{A_R}.$$

On a alors $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{Pe}_{loc}$. Nous allons nous placer dans le cas où

- $\mathbf{Pe}_{loc} = 1$,
- et $T_R = \frac{L_R^2 \rho_R}{A_R}$.

On considère donc une échelle de temps correspondant au temps de diffusion et on suppose que la diffusion est du même ordre que la convection à l'échelle fine. Le système (7.2) se réécrit alors :

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{Pe} b^\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \operatorname{div}_x (A^\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon) &= 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Le nombre de Péclet local étant égal à 1, $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon}$, et le système initial (7.1) se réécrit :

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \operatorname{div}_x (A^\varepsilon(x) \nabla_x u_\varepsilon) &= 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (7.3)$$

Dans la suite, on considérera uniquement ce problème adimensionné.

7.2 Remarques préliminaires sur la mise à l'échelle

Des travaux de recherche ont également été menés pour homogénéiser le problème de transport (7.1) en considérant des échelles différentes. Ainsi, on peut remarquer que, dans les travaux présentés par A. Bourgeat, M. Jurak et A. Piatnitski dans [BJP03], l'équation étudiée est sous la forme

$$\rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b^\varepsilon(x) \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \varepsilon \operatorname{div}_x (A^\varepsilon(x) \nabla_x u_\varepsilon) = 0. \quad (7.4)$$

Pour arriver à cette équation, l'échelle d'espace et le nombre de Péclet choisis sont les mêmes que dans notre cas mais l'échelle de temps est différente : un temps d'ordre 1 dans (7.4) est équivalent à un temps d'ordre ε dans (7.3). En fait, l'échelle de temps choisie dans [BJP03] est celle correspondant au temps de convection. Cela reviendrait à prendre $T_R = \frac{L_R \rho_R}{b_R}$ dans la mise à l'échelle faite au paragraphe précédent. Les résultats obtenus avec ces hypothèses montrent que la solution homogénéisée est uniformément nulle à partir d'un temps assez long même si on considère les termes d'ordre supérieurs dans le développement asymptotique. Cela justifie donc notre choix d'échelle temporelle.

Dans [HL09], T.Y. Hou et D. Liang étudient l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \varepsilon^m \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (7.5)$$

où $m \in [2, +\infty[$. L'échelle en temps est ici la même que dans [BJP03] mais le nombre de Péclet local considéré est de l'ordre de ε^{-m+1} .

7.3 Définition du problème périodique

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que les coefficients ρ^ε , b^ε et A^ε sont périodiques en espace de période ε , et nous rappelons un certain nombre de résultats d'homogénéisation connus. Nous démontrons également une nouvelle estimation *a priori* (Théorème 7.4). Ces résultats sont utilisés au chapitre suivant pour construire une méthode multi-échelle applicable à des cas non périodiques comme cela a été fait dans [AB05] pour des problèmes elliptiques.

Nous considérons le problème de transport qui consiste à chercher u_ε dans l'espace

$$L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N))$$

solution de

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon\right) &= 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (7.6)$$

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses 7.1 :

1. Les fonctions b , A et ρ sont Y -périodiques,
2. $\rho \in L^\infty(Y)$,
3. Les fonctions b , A et ρ sont de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et les interfaces de discontinuités sont de classe \mathcal{C}^2 ,
4. $\operatorname{div}(b) = 0$,
5. il existe $\rho_{\min} > 0$ tel que $\forall y \in Y, \rho(y) \geq \rho_{\min}$,
6. A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall y \in Y, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A(y)\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

7. $u^0 \in H^3(\mathbb{R}^N)$.

D'après le théorème de Lions (voir annexe A.2.2), ce problème a une unique solution

$$u_\varepsilon \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^0((0, T), L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Dans la suite de cette partie, nous allons postuler un développement asymptotique particulier pour la fonction u_ε qui permet d'approcher cette fonction en résolvant deux problèmes : un problème homogénéisé et un problème de cellule. Des résultats de convergence des différentes solutions approchées vers la solution exacte sont ensuite présentés.

7.4 Résultats préliminaires

Comme dans le cas elliptique, on peut montrer que pour une fonction $\varphi \in L^2\left((0, T) \times \mathbb{R}^N, \mathcal{C}_{\#}^0(Y)\right)$ (voir [AADH06] ou [MPP05, Remarque 2])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y \varphi(t, x, y) dy dx dt. \quad (7.7)$$

L'alternative de Fredholm s'adapte également à ce cas.

Lemme 7.1. *Soit $g \in L_{\#}^2(Y)$. b et A vérifiant les hypothèses 7.1, le problème*

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y v - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y v) = g & \text{dans } Y, \\ y \mapsto v(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

admet une solution $v \in H_{\#}^1(Y)$, unique à l'addition d'une constante près si et seulement si

$$\int_Y g dy = 0.$$

La démonstration est identique à celle faite dans [BLP78] dans le cas elliptique. Le lemme suivant sera également utilisé

Lemme 7.2. *Soit une fonction $g \in L_{\#}^2(Y)$ telle que $\int_Y g(y) dy = 0$. Il existe $\zeta \in L_{\#}^2(Y)^N$ telle que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \zeta = g(y), \\ \int_Y \zeta(y) dy = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de poser $\zeta = -\nabla \theta$ où θ est solution du problème

$$-\Delta \theta = g.$$

L'alternative de Fredholm est vérifiée pour ce problème. On a donc $\theta \in H_{\#}^1(Y)$ et $\zeta \in L_{\#}^2(Y)^N$. □

7.5 Développement asymptotique avec dérive

Comme dans le cas elliptique présenté au chapitre 3, on postule un développement asymptotique pour u_{ε} . Cependant, nous allons ici y intégrer une dérive. Soit b^* un vecteur constant représentant une homogénéisation de la fonction b . Nous la considérons pour l'instant comme une inconnue à calculer.

On suppose que u_{ε} peut s'écrire sous la forme :

$$u_{\varepsilon}(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (7.8)$$

avec des fonctions u_i Y -périodiques par rapport leur troisième variable y . L'intégration d'une dérive dans la variable d'espace est nécessaire pour homogénéiser l'équation (7.6). En fait, on sait (voir [BJP03]) que si on considère des temps courts, le problème homogénéisé est une équation de transport dont la solution explicite est de la forme

$$u(t, x - vt).$$

Il nous faut donc intégrer ce transport dans notre terme d'ordre 0 pour des temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. De plus, si ne prend pas en compte cette dérive et qu'on suppose $b^* = 0$ la condition de compatibilité présentée plus tard imposerait que le champs de vitesse $b(y)$ soit à moyenne nulle.

Proposition 7.1. *Soit u_{ε} la solution du problème (7.6). On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. On suppose également que le développement asymptotique (7.8) est vrai et que les fonctions u_i sont Y -périodiques par rapport à y et "régulières" (les résultats de cette proposition sont uniquement formels, il n'y a donc pas besoin de préciser les régularités). Alors*

- la fonction u_0 ne dépend pas de la variable y :

$$\forall t \in (0, T), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall y \in Y, \quad u_0(t, x, y) = u(t, x).$$

- La vitesse homogénéisée b^* peut être définie par :

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy, \quad (7.9)$$

où $\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy$.

- On définit les fonctions w_i solutions des problèmes de cellules

$$\begin{cases} b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) &= \rho(y) b^* \cdot e_i, \\ w_i \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad \text{sur } Y. \quad (7.10)$$

- La fonction u est solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) &= u^0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (7.11)$$

où A^* est une matrice définie positive telle que

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy. \quad (7.12)$$

- La fonction u_1 est définie par

$$u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y) + \tilde{u}_1(x), \quad (7.13)$$

avec une fonction \tilde{u}_1 dépendant uniquement de x qui reste à définir.

- La fonction u_2 est définie par

$$u_2(t, x, y) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}(t, x), \quad (7.14)$$

où les fonctions $\chi_{i,j}$ sont solutions des problèmes de cellules du deuxième ordre

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y \chi_{i,j}(y) - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla \chi_{i,j}(y)) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial y_k} (w_i A_{k,j}) (y) + A_{i,k}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y) \right) + A_{i,j}(y) \\ \quad - \frac{\rho(y)}{\bar{\rho}} A_{i,j}^* + (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j(y) \quad \text{sur } Y \\ \chi_{i,j} \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (7.15)$$

Remarque 7.1 : On remarque que le calcul du terme d'ordre 0 du développement asymptotique (7.8) est la fonction u calculée en résolvant le problème parabolique (7.11). Ce problème ne fait pas intervenir de convection ce qui semble surprenant puisque l'on cherche à approcher la fonction u_ε solution du problème de convection-diffusion (7.3). Cependant, on remarque que, dans le développement asymptotique (7.8), la fonction u est dans un repère mobile par rapport à u_ε . En fait, la fonction qui approche u_ε est \tilde{u}_ε telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in (0, T), \quad \tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \quad (7.16)$$

En reprenant l'équation (7.11) on remarque que \tilde{u}_ε est solution du problème

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon - \operatorname{div} (A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.17)$$

La fonction \tilde{u}_ε approchant u_ε à l'ordre 0 est donc solution d'un problème de convection-diffusion à convection constante.

Démonstration. Remarquons que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\nabla \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left(\nabla_x u_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y u_i \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left(\partial_t u_i - \frac{b^*}{\varepsilon} \cdot \nabla_x u_i \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

On remplace u_ε par son développement asymptotique (7.8) dans (7.6) et on applique les formules précédentes. On identifie ensuite les termes en fonction du degré en ε :

– Terme en ε^{-2}

$$b(y) \cdot \nabla_y u_0 - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_0) = 0. \quad (7.18)$$

– Terme en ε^{-1}

$$-\rho(y) b^* \cdot \nabla_x u_0 + b(y) \cdot (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1) \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) = \operatorname{div}_x (A(y) \nabla_y u_0). \quad (7.19)$$

– Terme en ε^0

$$b(y) \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_2) = -\rho(y) \partial_t u_0 + \rho(y) b^* \cdot \nabla_x u_1 - b(y) \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)). \quad (7.20)$$

De l'équation (7.18), on déduit que u_0 ne dépend pas de y . On note donc

$$u_0 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right).$$

L'équation (7.19) peut ensuite être simplifiée :

$$-\rho(y) b^* \cdot \nabla u + b(y) \cdot (\nabla u + \nabla_y u_1) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1)) = 0. \quad (7.21)$$

Cette équation nous permet de calculer u_1 . En décomposant ∇u dans chaque direction et en appliquant l'alternative de Fredholm, on remarque que u_1 s'écrit :

$$u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y) + \tilde{u}_1(x),$$

où on a introduit les fonctions w_i , solutions Y -périodiques du problème de cellule

$$b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) = \rho(y) b^* \cdot e_i, \quad \text{sur } Y.$$

La condition de compatibilité pour assurer l'existence des w_i impose :

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy,$$

où $\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy$.

Remarque 7.2 : Comme dans le cas elliptique, les fonctions w_i sont définies à une constante près. En pratique, on les choisira à moyenne nulle. De plus, on prendra $\tilde{u}_1(x) = 0$. En fait, le terme $\tilde{u}_1(x)$ interviendrait pour vérifier la condition d'existence de u_3 .

En utilisant les hypothèses 7.1, on peut montrer que les fonctions w_i définies par (7.10) sont dans l'espace $W_{\#}^{1,\infty}(Y)$ (voir lemme 4.1).

Enfin, la condition d'existence de u_2 solution de l'équation (7.20) s'écrit :

$$\int_Y \left(\rho(y)b^* \cdot \nabla_x u_1 - b(y) \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) - \rho(y) \partial_t u \right) dy = 0. \quad (7.22)$$

Remarquons, tout d'abord, que :

$$\int_Y \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1) dy = \int_{\partial Y} (A(y) \nabla_x u_1) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

car A et $\nabla_x u_1$ sont Y -périodiques. Nous avons également l'égalité

$$\int_Y \rho(y) \partial_t u dy = \bar{\rho} \partial_t u,$$

car u ne dépend pas de y . L'équation (7.22) devient :

$$\bar{\rho} \partial_t u - \int_Y ((\rho(y)b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1(\cdot, y) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1(\cdot, y) + \nabla_x u))) dy = 0. \quad (7.23)$$

La fonction \tilde{u}_1 ne dépend pas de la variable y donc en reprenant la définition de b^* dans (7.9), on a

$$\int_Y (\rho(y)b^* - b(y)) \cdot \nabla_x \tilde{u}_1 dy = 0.$$

De plus, en utilisant l'équation (7.13), on remarque que

$$\int_Y (\rho(y)b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1 dy$$

est une combinaison linéaire des dérivées secondes de u .

De même, $\int_Y \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) dy$ s'exprime linéairement en fonction des dérivées secondes de u . Finalement, l'équation (7.23) peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) = 0,}$$

où la matrice A^* est définie par la formule suivante :

$$\int_Y (\operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) + (\rho(y)b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1) = \operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u). \quad (7.24)$$

On remarque d'abord qu'étant donnée la définition de A^* par la formule précédente, on ne s'intéresse qu'au terme $\operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u)$. Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, on pourra choisir de considérer A^* , sa transposée ou sa partie symétrique sans modifier ce terme. On va d'abord montrer que

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy.$$

On prend les conventions de sommation d'Einstein et on notera, pour simplifier l'écriture des équations $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Ainsi

$$u_1(x, y) = \partial_{x_j} u(x) w_j(y).$$

Et

$$\nabla_y u_1(x, y) = \partial_{x_j} u(x) \partial_{y_i} w_j(y) e_i,$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \int_Y \operatorname{div}_x (A(y) \nabla_y u_1) dy &= \int_Y \operatorname{div}_x (A(y) (\partial_{x_j} u(x) \partial_{y_k} w_j(y) e_k)) dy \\
 &= \int_Y \operatorname{div}_x (A_{i,k}(y) \partial_{x_j} u(x) \partial_{y_k} w_j(y) e_i) dy \\
 &= \operatorname{div}_x \left(\left(\int_Y A_{i,k}(y) \partial_{y_k} w_j(y) dy \right) \partial_{x_j} u(x) e_i \right) \\
 &= \left(\int_Y A_{i,k}(y) \partial_{y_k} w_j(y) dy \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.
 \end{aligned}$$

De plus, on a clairement

$$\int_Y \operatorname{div}_x (A(y) \nabla_x u) dy = \left(\int_Y A_{i,j}(y) dy \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Et

$$\int_Y (\rho(y) b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1(x, y) dy = \int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) \partial_{x_i, x_j}^2 u(x) w_j(y) dy,$$

où les b_i et les b_i^* sont les composantes respectives de b et b^* sur les e_i . Donc

$$\int_Y (\rho(y) b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1(x, y) dy = \left(\int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j dy \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

En sommant tous ces termes et en reprenant l'équations (7.24), on peut alors définir la matrice A^* par

$$A_{i,j}^* = \int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j dy + \int_Y A(y) (\nabla_y w_j + e_j) \cdot e_i dy. \quad (7.25)$$

Si on multiplie l'équation (7.10) par w_j et qu'on l'intègre sur Y , on a :

$$\int_Y (b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) w_j) dy = \int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j dy.$$

En intégrant par parties, on a donc :

$$\int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j dy = \int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j dy + \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot \nabla_y w_j dy.$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$,

$$\int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j dy \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_j w_i dy \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Or

$$\int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_j w_i dy = \int_Y b(y) \cdot \nabla_y (w_j w_i) dy.$$

On effectue ensuite une intégration par parties (les termes de bord sont nuls car les w_i et b sont Y -périodiques)

$$\int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y) \cdot \nabla_y w_j w_i dy = - \int_Y \operatorname{div}(b(y)) w_j w_i dy = 0$$

car $\operatorname{div}(b) = 0$. En reprenant l'équation (7.25), on peut donc définir de manière équivalente A^* par

$$A_{i,j}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot \nabla_y w_j dy \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \int_Y A(y) (\nabla_y w_j + e_j) \cdot e_i dy \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Quitte à inverser les indices i et j pour un des termes, on a donc

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy.$$

On remarque que A^* définie ainsi est symétrique si, pour tout $y \in Y$, $A(y)$ l'est. On veut résoudre le problème homogénéisé :

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Il reste à prouver que ce problème admet bien une solution. Le caractère borné de A^* se déduit directement de (7.12) et du fait que les w_i sont à gradients bornés (en fait, il suffirait d'avoir $w_i \in H^1(Y)$). Montrons maintenant le lemme suivant.

Lemme 7.3. *La matrice A^* est définie positive.*

Démonstration. il reste à montrer les deux autres propriétés. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. On définit

$$w_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i.$$

w_ξ est une solution périodique du problème

$$b(y) \cdot (\nabla_y w_\xi + \xi) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_\xi + \xi)) = \rho(y) b^* \cdot \xi, \quad \text{sur } Y.$$

En multipliant cette équation par w_ξ et en intégrant sur Y par parties, on a :

$$\int_Y (b(y) - \rho(y) b^*) \cdot \xi w_\xi dy + \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \nabla_y w_\xi(y) dy = 0, \quad (7.26)$$

car w_ξ est Y -périodique et $\operatorname{div}(b) = 0$. On reprend ensuite (7.25), on a alors

$$\begin{aligned} A^* \xi \cdot \xi &= \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j A_{i,j}^* \\ &= \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j \int_Y (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j dy + \int_Y A(y) (\nabla_y w_j + e_j) \cdot e_i \\ &= \int_Y (\rho(y) b^* - b(y)) \cdot \xi w_\xi + \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \xi dy. \end{aligned}$$

En ajoutant, la dernière équation et (7.26), on obtient

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) dy.$$

Puis en utilisant la coercivité de A , on a

$$A^* \xi \cdot \xi \geq C_{sta} \int_Y |\nabla_y w_\xi(y) + \xi|^2 dy \geq 0$$

On a donc la positivité de la matrice. De plus, si $A^* \xi \cdot \xi = 0$, on a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\forall y \in Y, \quad \nabla_y w_\xi(y) + \xi = 0,$$

donc, en intégrant cette égalité : $w_\xi(y) = -\xi y + c, c \in \mathbb{R}$. Or, w_ξ est une fonction Y -périodique, donc $\xi = 0$. A^* est donc bien une matrice définie positive. \square

On déduit de ce lemme que le problème (7.11) admet une solution unique

$$u \in L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}^0((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))$$

en appliquant le théorème de Lions une nouvelle fois.

Pour la suite, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 7.4. *À une fonction de x près, la fonction u_2 peut être définie par*

$$u_2(t, x, y) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}(t, x)$$

où les fonctions w_i sont les solutions aux problèmes de cellule (7.10) et les fonctions $\chi_{i,j}$ sont les solutions Y -périodiques aux problèmes de cellule du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} b(y) \cdot \nabla_y \chi_{i,j}(y) - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla \chi_{i,j}(y)) &= -\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}} A_{i,j}^* + (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) w_j(y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial y_k} (w_i A_{k,j})(y) + A_{i,k}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y) \right) + A_{i,j}(y) \quad \text{sur } Y. \end{aligned}$$

De plus, de même que pour les w_i , les fonctions $\chi_{i,j}$ ainsi définies sont dans l'espace $W_{\#}^{1,\infty}(Y)$ (voir lemme 4.1).

Démonstration. À partir des équations (7.20) et (7.11), on obtient

$$\begin{aligned} b(y) \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_2) &= -\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}} \operatorname{div}_x (A^* \nabla u) + (\rho(y) b^* - b(y)) \cdot \nabla_x u_1 \\ &\quad + \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)). \end{aligned}$$

On remplace u_1 par son expression dans (7.13) sans omettre le terme en \tilde{u}_1 . L'équation devient

$$\begin{aligned} b(y) \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_2) &= -\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}} \operatorname{div}_x (A^* \nabla u) + (\rho(y) b_i^* - b_i(y)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} w_j + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \operatorname{div}_y \left(A(y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} w_j + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i} \right) e_i \right) \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left(A(y) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial y_i} e_i + \nabla_x u \right) \right). \end{aligned}$$

Par linéarité et du fait que les w_i vérifient (7.10), on remarque que u_2 définie par (7.14) est bien solution de ce problème. Or, la condition de compatibilité est vérifiée puisque u vérifie (7.11), ce problème admet donc une solution unique à une fonction de x près. \square

Tous les résultats annoncés dans la proposition 7.1 ont donc été démontrés. \square

7.6 Convergence à deux échelles avec dérive

Les calculs faits dans le paragraphe précédent sont formels et ne sont pas justifiés d'un point de vue mathématique. Comme au chapitre 3, on va introduire une nouvelle notion de convergence pour pouvoir démontrer des résultats d'approximation plus précis entre la solution u_ε du problème (7.6) et le début de son développement asymptotique. Étant donné que nous avons introduit une dérive dans ce développement asymptotique, la notion de convergence à deux échelles vue au paragraphe 3.5 ne peut pas s'adapter à notre problème. Ainsi, E. Marušić-Paloka et A. Piatnitski ont défini dans [MPP05] la notion de *convergence à deux échelles avec dérive*.

Définition 7.1. Soit $b^* \in \mathbb{R}^N$ un vecteur constant. Soit $u_\varepsilon(t, x)$ une suite de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. On dit que u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers u_0 si $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, C_\#^0(Y))$,

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t, x) \varphi\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times Y} u_0(t, x, y) \varphi(t, x, y) dx dt dy$$

avec $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times Y)$.

Remarque 7.3 :

1. Si $b^* = 0$ cette définition correspond bien à la convergence à deux échelles rappelée au chapitre 3 et définie dans [Ngu89] et [All92]).
2. La notion de limite à deux échelles avec dérive dépend de la dérive considérée.
3. Cette définition peut également s'appliquer à des ensembles de la forme $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ avec $T > 0$. Si la convergence à deux échelles avec dérive sur un espace $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ est assurée cette convergence est encore vraie sur tous les espaces de la forme $(0, t) \times \mathbb{R}^N$ avec $0 \leq t \leq T$.

L'introduction de la notion de convergence à deux échelles avec dérive permet d'obtenir plusieurs résultats intéressants dont le théorème :

Théorème 7.1 (Marušić-Paloka, Piatnitski [MPP05]). Soient $b^* \in \mathbb{R}^N$ un vecteur constant et u_ε une suite de fonctions dans $L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N))$ vérifiant

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_2.$$

On suppose, de plus, que les hypothèses 7.1 sont vérifiées.

Alors, il existe une sous-suite et deux fonctions $u_0 \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N))$ et $u_1 \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N, H^1(Y))$ telles que, pour cette sous-suite,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon & \text{ converge à deux échelles avec la dérive } b^* \text{ vers } u_0 \\ \text{et } \nabla u_\varepsilon & \text{ converge à deux échelles avec la dérive } b^* \text{ vers } \nabla u_0(t, x) + \nabla u_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Le théorème suivant établit que la limite à deux échelles avec la dérive b^* de la solution de l'équation (7.6) est la solution du problème (7.11) :

Théorème 7.2 ([DP05], [AR07], [AMP10]). On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. La suite (u_ε) des solutions du problème (7.6) converge à deux échelles avec la dérive $b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy$ vers la solution $u(t, x) \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^0((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))$ de l'équation

$$\begin{cases} \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Démonstration. On veut d'abord appliquer le théorème 7.1 à la suite (u_ε) . Pour cela on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 7.5. Soit u_ε une solution faible du problème (7.6). Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)} \leq C.$$

Idée de la démonstration. Cette inégalité se démontre simplement en multipliant la première équation de (7.6) par u_ε et en intégrant en espace et en temps. \square

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N))}^2 \leq T \|u_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)}^2.$$

Que l'on peut réécrire

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))}^2 \leq C_3(T) \left(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N}^2 \right). \quad (7.27)$$

On a donc montré que la suite (u_ε) est bornée en norme $L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))$.

On teste la première équation de (7.6) avec une fonction φ_ε de la forme

$$\varphi_\varepsilon = \varphi\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\varphi_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$ et $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$. On obtient :

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \varphi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\varepsilon \varphi_\varepsilon + A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon \right) dx dt = 0.$$

On intègre par parties par rapport à t le terme en $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ et on intègre par parties en espace le terme en $\nabla u_\varepsilon \varphi_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon(T, x) \varphi_\varepsilon(T, x) - u^0(x) \varphi_\varepsilon(0, x)) dx \\ & + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{b^*}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi + b^* \cdot \nabla_x \varphi_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) u_\varepsilon dx dt \\ & + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \left(-\frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla \varphi u_\varepsilon - b \cdot \nabla \varphi_1 u_\varepsilon + A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon \right) dx dt = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon(T, x) (\varphi(T, x) + \varepsilon \varphi_1(T, x)) - u^0(x) (\varphi(0, x) + \varepsilon \varphi_1(0, x))) dx \\ & + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(b^* \cdot \nabla_x \varphi_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) u_\varepsilon + b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\varepsilon \varphi_1 \right) dx dt \\ & + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi u_\varepsilon dx dt \\ & + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot (\nabla \varphi + \nabla_y \varphi_1 + \varepsilon \nabla_x \varphi_1) dx dt = 0. \quad (7.28) \end{aligned}$$

On veut ensuite étudier la limite de cette expression quand ε tend vers 0. On remarque tout d'abord que la fonction u_ε est bornée dans $L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))$ (voir lemme 7.5) donc, φ_1 , et ρ étant bornées, on a

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon(T, x) \varphi_1(T, x) - u^0(x) \varphi_1(0, x)) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (7.29)$$

De même, A , $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ et $\nabla_x \varphi_1$ sont bornées et la suite u_ε est bornée dans $L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))$ uniformément en ε en norme. Donc

$$-\varepsilon \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} u_\varepsilon dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (7.30)$$

$$\text{et } \varepsilon \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi_1 dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (7.31)$$

On a $\int_Y (b(y) - \rho(y)b^*) dy = 0$. On applique alors le lemme 7.2 sur chaque composante. On note ζ_i la

fonction obtenue en prenant $g(y) = b_i(y) - \rho(y)b_i^*$. On a donc :

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b_i^* - b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \partial_{x_i} \varphi u_\varepsilon dx dt &= \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \frac{(\operatorname{div}_y \zeta_i)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \partial_{x_i} \varphi u_\varepsilon dx dt \\ &= \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x \left(\zeta_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \varphi u_\varepsilon dx dt \\ &= - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \zeta_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot (\partial_{x_i} \varphi \nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon \nabla \partial_{x_i} \varphi) dx dt. \end{aligned}$$

Le lemme 7.5 nous permet d'appliquer le théorème (7.1) à (u_ε) . Donc, pour une sous-suite, u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers $u(t, x)$ et ∇u_ε vers $\nabla_x u(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y)$. Ainsi, pour une sous-suite :

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi u_\varepsilon dx dt \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \zeta_i(y) \cdot (\partial_{x_i} \varphi(t, x) (\nabla_x u(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y)) \\ + \nabla \partial_{x_i} \varphi(t, x) u(t, x)) dy dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\int_Y \zeta_i(y) dy = 0$ et u et φ ne dépendent pas de y , un seul de ces termes est non nul et :

$$\begin{aligned} - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \zeta_i(y) \partial_{x_i} \varphi(t, x) \nabla_y u_1(t, x, y) dy dx dt &= \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \operatorname{div}_y (\zeta_i(y)) \partial_{x_i} \varphi u_1 dx dt dy \\ &= - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} (b_i(y) - \rho(y)b_i^*) \partial_{x_i} \varphi u_1 dx dt dy. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi u_\varepsilon dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} (b_i(y) - \rho(y)b_i^*) \partial_{x_i} \varphi u_1 dx dt dy. \quad (7.32)$$

Pour le passage à la limite dans (7.28), on reprend les équations (7.29), (7.30), (7.31) et (7.32) et on utilise les limites à deux échelles avec dérive des fonctions u_ε et ∇u_ε . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon(T, x) \varphi(T, x) - u^0(x) \varphi(0, x)) dx &+ \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) \left(b^* \cdot \nabla_x \varphi_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) u dx dt dy \\ &+ \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} b(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \varphi_1 dx dt dy \\ &- \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} (b(y) - \rho(y)b^*) \cdot \nabla \varphi u_1 dx dt dy \\ &+ \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla \varphi + \nabla_y \varphi_1) dx dt dy = 0. \quad (7.33) \end{aligned}$$

Regardons d'abord le cas où $\varphi = 0$. On a :

$$\begin{aligned} - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) b^* \cdot \nabla_x u \varphi_1 dx dt dy &+ \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} b(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \varphi_1 dx dt dy \\ &- \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1)) \varphi_1 dx dt dy = 0. \end{aligned}$$

Cela doit être vrai pour tout $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$. Donc :

$$b(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1)) = \rho(y) b^* \cdot \nabla_x u.$$

Cette équation est en fait la même que (7.21) et elle nous permet donc d'avoir, à une fonction de x près :

$$u_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} w_i(y),$$

avec les w_i définis en (7.10).

Prenons maintenant $\varphi_1 = 0$ et φ quelconque. L'équation (7.33) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon(T, x) \varphi(T, x) - u^0(x) \varphi(0, x)) dx - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dx dt dy \\ - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} (b(y) - \rho(y) b^*) \cdot \nabla \varphi u_1 dx dt dy \\ + \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \cdot \nabla \varphi dx dt dy = 0. \end{aligned}$$

En intégrant par parties en temps et en espace, on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx dt dy + \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} (b(y) - \rho(y) b^*) \cdot \nabla_x u_1 \varphi dx dt dy \\ - \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1)) \varphi dx dt dy = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions u et φ ne dépendant pas de y , cela se simplifie :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx dt + \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \left(\int_Y (b(y) - \rho(y) b^*) \cdot \nabla_x u_1 dy \right) \varphi dx dt \\ - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy \right) \varphi dx dt = 0. \end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$, on a :

$$\bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_Y (b(y) - \rho(y) b^*) \cdot \nabla_x u_1 dy - \operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy \right) = 0.$$

On retrouve l'équation (7.23) et comme on a la même relation entre u et u_1 , on aboutit de la même manière au problème :

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div} (A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

avec

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_i + e_i) \cdot (\nabla_y w_j + e_j) dy. \quad (7.34)$$

De plus, on a vu que ce problème admet une solution unique

$$u \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}^0((0, T), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Cela montre que, quelle que soit la sous-suite choisie, u_ε converge à deux échelles avec la dérivée b^* vers le même u . Cela est donc vrai pour toute la suite (u_ε) . \square

7.7 Résultat de convergence

À partir des définitions et des résultats précédents, des résultats de convergences fortes peuvent être montrés. Ainsi, en norme L^2 , le résultat suivant indique que la solution homogénéisée est une bonne approximation de u_ε .

Théorème 7.3 ([AMP10]). Soient (u_ε) la suite des solutions de l'équation (7.6) et u la solution au problème homogénéisé (7.11). On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)} = 0.$$

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt = 0.$$

En testant l'équation (7.6) avec u_ε , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \partial_t u_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon(t, x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon(t, x) dx \\ - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x) \right) u_\varepsilon(t, x) dx = 0. \end{aligned}$$

On intègre par parties en espace en utilisant le fait que $\nabla u_\varepsilon u_\varepsilon = \frac{1}{2} \nabla |u_\varepsilon|^2$:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \partial_t (u_\varepsilon^2(t, x)) dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(t, x) dx = 0.$$

On utilise le fait que $\operatorname{div}(b) = 0$ et on intègre l'équation par rapport à t entre 0 et t :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) ds dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u^0(x)|^2 dx.$$

On intègre ensuite par rapport à t entre 0 et T :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) ds dx dt \\ = \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u^0(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On effectue le même calcul pour u en utilisant l'équation (7.11) et on a :

$$\frac{1}{2} \bar{\rho} \|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)}^2 + \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A^* \nabla u(s, x) \cdot \nabla u(s, x) ds dx dt = \frac{T}{2} \bar{\rho} \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Et, en utilisant le résultat (7.7),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u^0(x)|^2 dx = \bar{\rho} \int_{\mathbb{R}^N} |u^0(x)|^2 dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) ds dx dt \right) \\ = \frac{\bar{\rho}}{2} \|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)}^2 \\ + \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A^* \nabla u(s, x) \cdot \nabla u(s, x) ds dx dt. \quad (7.35) \end{aligned}$$

On va maintenant montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \geq \bar{\rho} \|u\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)}^2.$$

Pour cela, on va partir du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt &= \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \\ &+ \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt \\ &- 2 \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon(t, x) u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (7.36)$$

On utilise le résultat (7.7) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt \\ &= \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) |u(t, x)|^2 dx dt dy. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt = \bar{\rho} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx dt.$$

De plus, en prenant $\rho^\varepsilon(x) u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$ comme fonction test dans la convergence de u_ε avec dérive, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon(t, x) u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) dx dt &= \iiint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N \times Y} \rho(y) |u(t, x)|^2 dx dt dy \\ &= \bar{\rho} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Et $\iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt$ étant positif, on obtient, en passant à la limite dans (7.36) :

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \geq \bar{\rho} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx dt.} \quad (7.37)$$

De même, on développe le terme

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &\left(\nabla u_\varepsilon(s, x) - \nabla \left(u\left(s, x - \frac{b^* s}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(s, x - \frac{b^* s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right. \\ &\left. \cdot \left(\nabla u_\varepsilon(s, x) - \nabla \left(u\left(s, x - \frac{b^* s}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(s, x - \frac{b^* s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \right) dx ds \end{aligned}$$

qui est positif car A est coercive. Les calculs sont semblables à ceux effectués pour le terme en ρ^ε . On obtient, en utilisant le fait que ∇u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers $\nabla_x u + \nabla_y u_1$ sur tous les ensembles $(0, t) \times \mathbb{R}^N$ avec $0 \leq t \leq T$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) dx ds \geq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy dx ds.$$

Et, en intégrant cette inégalité par rapport à t de 0 à T ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) dx ds dt \\ \geq \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy dx ds dt. \end{aligned}$$

Or, A^* étant défini par (7.12), on a :

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A^* \nabla u(s, x) \cdot \nabla u(s, x) dx ds dt = \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy dx ds dt.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(s, x) \cdot \nabla u_\varepsilon(s, x) dx ds dt \geq \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} A^* \nabla u(s, x) \cdot \nabla u(s, x) dx ds dt.} \quad (7.38)$$

Les inégalités (7.37) et (7.38), montrent que dans (7.35), chacun des termes de gauche est supérieur à un des termes de droite. Leur somme étant égale, on en déduit que ces inégalités sont des égalités et, en particulier :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt = \bar{\rho} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx dt.$$

On utilise ce résultat pour passer à la limite dans l'équation (7.36), et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt = 0.$$

De plus, en utilisant les hypothèses 7.1, on a

$$\iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt \leq \frac{1}{\rho_{\min}} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho^\varepsilon(x) \left| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

7.8 Estimation d'erreur a priori

On s'intéresse ensuite à l'erreur en norme H^1 en espace et L^2 en temps entre la solution exacte u_ε du problème (7.6) et les deux premiers termes de son développement asymptotiques :

$$u + \varepsilon u_1.$$

Le terme εu_1 d'ordre 1 en ε n'est pas utile pour approcher la solution en norme L^2 mais sa présence est indispensable si on cherche à approcher son gradient. L'estimation *a priori* établie dans le théorème suivant n'a, à notre connaissance, pas été montrée auparavant.

Théorème 7.4. Soient (u_ε) la suite des solutions de l'équation (7.6), u la solution au problème homogénéisé (7.11) et u_1 définie par l'équation (7.13) où les fonctions w_i sont les solutions à moyenne nulle et Y -périodiques des problèmes (7.10) et $\tilde{u}_1 = 0$. On suppose, de plus, que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. On a alors l'estimation suivante pour une certaine constante $C_4 > 0$ indépendante de ε mais dépendant du temps final T :

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_4 \varepsilon. \quad (7.39)$$

On a, de plus,

$$\left\| \nabla \left(u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))^N} \leq C_5 \varepsilon \quad (7.40)$$

et

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \leq C_6 \varepsilon, \quad (7.41)$$

avec des constantes $C_5, C_6 > 0$ indépendantes de ε mais dépendant du temps final T .

Remarques 7.4 :

Cette estimation est plus forte que celle montrée dans [BLP78] pour un problème elliptique (voir théorème 3.3). En effet, dans cette estimation, la majoration est en $\sqrt{\varepsilon}$. Cette différence vient du fait que l'on se place sur l'espace \mathbb{R}^N et non sur un ouvert Ω borné, ainsi les termes de *couche limite* n'apparaissent pas.

Cette estimation nous montre que la solution u_ε au problème (7.6) peut être approchée de la manière suivante

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (7.42)$$

pour de faibles valeurs de ε . Cette approximation est intéressante car elle ne nécessite pas de résolution globale à l'échelle fine. En effet, les fonctions w_i sont chacune solution d'un problème de cellule défini sur la cellule unité Y . Ensuite, à partir des fonctions w_i et de leur gradient, on peut calculer A^* et donc résoudre le problème homogénéisé (7.11) pour calculer u . Ce problème ne fait pas intervenir de termes à l'échelle ε , sa résolution est donc plus facilement réalisable numériquement. Enfin, u_1 se déduit des dérivées de u et de celles des fonctions w_i . Dans la suite de ce mémoire, on cherchera donc à mettre en place une méthode numérique capable d'approcher $u + \varepsilon u_1$ pour calculer u_ε .

Démonstration. Cette démonstration a été publiée dans [ADEO12]. Soit r_ε la fonction définie par :

$$r_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-1} \left(u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right).$$

On veut démontrer que l'on a une inégalité de type

$$\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N} \leq C.$$

On définit $B^\varepsilon(r_\varepsilon)$ par

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t r_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla r_\varepsilon\right). \quad (7.43)$$

On développe les termes en reprenant la définition de r_ε . Les termes en u_ε se simplifient car u_ε est solution du problème (7.6). On a :

$$\begin{aligned} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) &= \varepsilon^{-2} \left(-b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \right. \\ &\quad + \operatorname{div}_y \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \right) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot \nabla_x u \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \left(-\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x u_1 \right) \right. \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \right) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot \nabla_x u_1 \\ &\quad \left. - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1 + \operatorname{div}_x \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x u_1 \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant (7.21), on remarque que le terme en ε^{-2} est nul. On utilise ensuite l'équation (7.20) pour définir une fonction u_2 et on a :

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) = \varepsilon^{-1} \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2 \right) - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1 + \operatorname{div}_x \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x u_1 \right) \right). \quad (7.44)$$

On rappelle que la condition de compatibilité du problème (7.20) est bien vérifiée et qu'il est donc possible de trouver une telle fonction u_2 . L'équation (7.44) peut se réécrire

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla(u_2) - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_2 - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\right) \\ + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\right) - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x u_1\right).$$

Ou encore, en utilisant le fait que $\operatorname{div}(b) = 0$:

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) = \operatorname{div}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_2\right) - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\right) \\ - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_2 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\right) \\ - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x u_1\right).$$

On multiplie l'équation par r_ε et on intègre en temps et en espace :

$$\iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt \\ = - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt \\ + \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt \\ + \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \left(-b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right. \\ \left. + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_x u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) \right. \\ \left. - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) r_\varepsilon(t, x) dx dt. \quad (7.45)$$

On veut majorer la valeur absolue de cette intégrale. On va donc traiter chacun des termes séparément. Soient

$$B_1 = - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt, \\ B_2 = \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt, \\ B_3 = - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t, x) dx dt, \\ B_4 = \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_x u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) r_\varepsilon(t, x) dx dt, \\ B_5 = - \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t, x) dx dt.$$

Avec ces définitions, l'équation (7.45) se réécrit

$$\iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5. \quad (7.46)$$

On rappelle tout d'abord que u est solution d'un problème parabolique avec un opérateur elliptique constant car A^* ne dépend pas du temps. La fonction u est donc au moins aussi régulière que la condition initiale (voir annexe A.2.3). En particulier, dans notre cas et avec les hypothèses 7.1, on a $u^0 \in H^3(\mathbb{R}^N)$ donc

$$u \in L^\infty((0, T), H^3(\mathbb{R}^N)). \quad (7.47)$$

Et, par translation,

$$(t, x) \mapsto u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \in L^\infty((0, T), H^3(\mathbb{R}^N)).$$

Nous nous intéressons d'abord à la régularité de la fonction u_2 . Nous rappelons que la fonction u_2 solution du problème (7.20) peut aussi s'écrire (voir lemme 7.4) :

$$u_2(t, x, y) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x).$$

où les fonctions $\chi_{i,j}$ sont les solutions des problèmes (7.15). Nous avons également vu que ces fonctions sont dans l'espace $W_\#^{1,\infty}(Y)$. Ainsi, en utilisant cette propriété et la propriété (7.47), on a

$$(t, x) \mapsto u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N)) \quad (7.48)$$

$$(t, x) \mapsto \nabla_x u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))^N \quad (7.49)$$

$$(t, x) \mapsto \nabla_y u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N \nabla \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))^N \quad (7.50)$$

$$(t, x) \mapsto \nabla_x \nabla_y u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N \nabla \chi_{i,j}(y) \otimes \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))^{N \times N}. \quad (7.51)$$

On déduit des propriétés (7.48) et (7.49) et du fait que la fonction b soit bornée que

$$\begin{aligned} |B_1| &= \left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(Y)^N} \|u_2\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))} \end{aligned} \quad (7.52)$$

et

$$\begin{aligned} |B_3| &= \left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_x u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(Y)^N} \|\nabla_x u_2\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))^N} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

De même, en utilisant la propriété (7.50) et le fait que la matrice A soit bornée, on a

$$\begin{aligned} |B_2| &= \left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla_y u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \\ &\leq C_{bnd} \|\nabla_y u_2\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))^N} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Pour les autres termes, nous avons besoin d'étudier la régularité de la fonction u_1 . On rappelle d'abord, en reprenant l'équation (7.13), que

$$u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right).$$

On rappelle également que les fonctions w_i solutions des problèmes de cellule (7.10) sont dans l'espace $W_\#^{1,\infty}(Y)$. On déduit de cette propriété et de la propriété (7.47) que

$$(t, x) \mapsto \nabla_x^2 u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N))^{N \times N}. \quad (7.55)$$

Alors en utilisant les propriétés (7.55) et (7.51) ainsi que le caractère borné de A , on obtient

$$\begin{aligned} |B_4| &= \left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\nabla_y u_2 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla_x u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \\ &\leq C_{bnd} \left(\|\nabla_y \nabla_x u_2\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))^{N \times N}} + \|\nabla_x^2 u_1\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))^{N \times N}} \right) \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Pour majorer $|B_5|$ on doit étudier la régularité de $\partial_t u_1$. Comme $\partial_t u = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(A^* \nabla u)$ et $u \in L^\infty((0, T), H^3(\mathbb{R}^N))$, on a

$$\partial_t u \in L^\infty((0, T), H^1(\mathbb{R}^N)).$$

Donc

$$(t, x) \mapsto \partial_t u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \sum_{i,j=1}^N w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla^2 \frac{\partial \partial_t u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty((0, T), L^2(\mathbb{R}^N)). \quad (7.57)$$

On utilise alors cette propriété et le caractère borné de ρ et on montre que

$$\begin{aligned} |B_5| &= \left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_t u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \\ &\leq \rho_{max} \|\partial_t u_1\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Ainsi, en reprenant les inégalités (7.52), (7.54), (7.53), (7.56) et (7.58) dans (7.46), on obtient :

$$\left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \leq C_7 \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T), H^1(\mathbb{R}^N))}.$$

On a donc

$$\left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \leq C_8(T) \left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N} \right).$$

De plus, si on revient à la définition de B^ε dans (7.43), en intégrant en temps et en espace et en effectuant des intégrations par parties en espace, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(T, x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(0, x)^2 dx \\ &\quad + \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla r_\varepsilon \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

On a, en utilisant la coercivité de A ,

$$\left| \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla r_\varepsilon(t, x) \cdot \nabla r_\varepsilon(t, x) dx dt \right| \geq C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)}^2.$$

De plus, la fonction ρ est bornée supérieurement et inférieurement donc on peut montrer que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(T, x)^2 dx \geq C_9 \|r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

et que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) r_\varepsilon(0, x)^2 dx \leq C_{10} \|r_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

avec $C_9, C_{10} > 0$. On arrive alors à

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N}^2 + C_9 \|r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - C_{10} \|r_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ \leq \iint_{(0,T) \times \mathbb{R}^N} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t, x)) r_\varepsilon(t, x) dx dt \\ \leq C_8(T) \left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N} \right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la norme $\|r_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ est bornée.
Tout d'abord, par définition,

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(0, x) &= \varepsilon^{-1} \left(u_\varepsilon(0, x) - u(0, x) - \varepsilon u_1 \left(0, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= -u_1 \left(0, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On a supposé que la condition initiale $u^0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et on a montré que les w_i sont bornés en norme $L^\infty(Y)$. On obtient :

$$\|r_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_{11}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N}^2 + C_9 \|r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - C_{10} C_{11} \\ \leq C_8(T) \left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N} \right). \quad (7.59) \end{aligned}$$

On montre d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 7.6. Soit X_ε une suite de réels positifs, vérifiant :

$$X_\varepsilon^2 - \alpha \leq \beta X_\varepsilon, \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

Alors il existe une constante $\gamma > 0$

$$X_\varepsilon \leq \gamma(T).$$

Démonstration. Ce polynôme de degré 2 en X_ε est de discriminant $\Delta = \beta(T)^2 + 4\alpha > 0$. On en déduit que X_ε reste entre les racines du polynôme associé et est donc borné. \square

Soit $T_0 \leq T$ tel que

$$\frac{1}{2} \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \leq \|r_\varepsilon(T_0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

On applique ensuite l'inégalité (7.59) sur $(0, T_0)$:

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0) \times \mathbb{R}^N)^N}^2 + \frac{C_9}{2} \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}^2 - C_{10} C_{11} \\ \leq C_8(T) \left(\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0) \times \mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \right). \end{aligned}$$

On applique le lemme 7.6 avec

$$X_\varepsilon = \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0) \times \mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

On obtient

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0) \times \mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^N))} \leq C_{12}(T),$$

et donc il existe des constantes $C_{13}, C_6 > 0$ dépendant du temps final T telles que

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)} \leq C_{13}, \quad (7.60)$$

$$\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leq C_6. \quad (7.61)$$

L'inégalité (7.61) est en fait l'inégalité (7.41). On reprend l'inégalité (7.59) en utilisant le fait que $\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}$ est borné pour le membre de droite et en minorant $\|r_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ par 0 pour le membre de gauche :

$$C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)}^2 + 0 - C_{10}C_{11} \leq C_8(T) \left(\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + C_6(T) \right).$$

En réutilisant le lemme 7.6 avec

$$X_\varepsilon = \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)},$$

on en déduit l'inégalité (7.40) :

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \leq C_5.$$

On a donc montré que

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leq C_{14}(T).$$

Ainsi, en reprenant (7.27)

$$\|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_{15}(T).$$

D'où le résultat voulu. \square

Remarque 7.5 : Le cas où le champ de vitesse b n'est pas à divergence nulle a été traité dans [AR07] et [HR13]. Dans notre cas, il n'y a pas de terme de réaction donc on a un résultat plus simple. En fait, dans ce cas, le problème physique que l'on obtient en écrivant la conservation de la masse est de la forme

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon \right) - \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.62)$$

Dans (7.62) on ne suppose pas que $\operatorname{div}_y b = 0$. On introduit alors le problème spectral suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (b(y)\psi) - \operatorname{div}_y (A(y)\nabla_y \psi) = \lambda \psi & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ \psi \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (7.63)$$

Le problème adjoint à (7.63) est

$$\begin{cases} -b(y) \cdot \nabla_y \psi^* - \operatorname{div}_y (A^t(y)\nabla_y \psi^*) = \lambda \psi^* & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ \psi^* \text{ est } Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (7.64)$$

où A^t est la transposée de la matrice A . On remarque que le couple $(\lambda = 0, \psi^* = 1)$ est solution de ce problème. 0 est donc aussi valeur propre du problème (7.63). Autrement dit, il existe une fonction ψ_1 non nulle telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (b(y)\psi_1) - \operatorname{div}_y (A(y)\nabla_y \psi_1) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ \psi_1 \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (7.65)$$

Le théorème de Krein-Rutman (voir, par exemple, [Bre83]) permet même de montrer que l'on peut choisir la fonction ψ_1 pour qu'elle reste strictement positive. On effectue alors un changement de variable en définissant

$$v_\varepsilon(t, x) = \frac{u_\varepsilon(t, x)}{\psi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$

Évidemment, si $\operatorname{div}_y(b) = 0$, $\psi_1 = 1$ est solution du problème (7.65) et il n'est pas nécessaire de faire ce changement de variable. Le problème (7.62) peut alors se réécrire

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{b}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla v_\varepsilon - \operatorname{div} \left(\tilde{A}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \right) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ v_\varepsilon(0, x) = \frac{u^0(x)}{\psi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (7.66)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(y) &= \psi_1(y)\rho(y), \\ \tilde{A}(y) &= \psi_1(y)A(y), \\ \text{et } \tilde{b}(y) &= \psi_1(y)b(y) - A(y)\nabla_y\psi_1(y).\end{aligned}$$

On vérifie, en utilisant la définition de ψ_1 , que \tilde{b} est bien à divergence nulle. On a donc réussi à se ramener au cas considéré dans ce chapitre.

Chapitre 8

Une nouvelle méthode multi-échelle pour un problème de transport en milieux poreux

Sommaire

8.1	Construction de la méthode multi-échelle	125
8.1.1	Hypothèses de départ	125
8.1.2	Idée de la méthode	126
8.1.3	Définition de la méthode	127
8.2	Estimation <i>a priori</i> en temps continu	128
8.2.1	Terme en gradient X_1	130
8.2.2	Terme de dérivée convective X_3	135
8.2.3	Termes X_2 et X_4	148
8.2.4	Erreur initiale X_5	148
8.3	Conclusion	149

Dans ce chapitre, on reprend les résultats montrés au chapitre 7 pour mettre en place une méthode multi-échelle adaptée à un problème de transport plus général.

8.1 Construction de la méthode multi-échelle

8.1.1 Hypothèses de départ

Nous souhaitons appliquer les résultats obtenus au chapitre 7 pour construire une méthode multi-échelle. Cependant, ces résultats théoriques ont été montrés en considérant l'espace \mathbb{R}^N . Nous ne pouvons évidemment pas mailler l'espace \mathbb{R}^N tout entier et il nous est donc impossible de faire des simulations numériques pour résoudre le problème (7.6). Nous allons donc considérer un pavé $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aux bords duquel on impose des conditions de périodicité. Les résultats d'homogénéisation qu'on obtiendrait avec des conditions aux bords de type Dirichlet seraient différents (voir [APP12]). Cela est principalement dû au terme de grande dérive $\frac{b^*}{\varepsilon}$ qui pose un problème sur le bord du domaine. Les hypothèses de périodicité sur les conditions aux limites sont donc nécessaires pour l'étude théorique de la méthode mais, en pratique, cette méthode sera aussi appliquée avec des conditions aux bords plus classiques.

On se donne un entier $k \geq 1$ qui sera l'ordre de la méthode numérique multi-échelle. On cherche

$$u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0((0, T), L^2_\#(\Omega)) \cap L^2((0, T), H^1_\#(\Omega))$$

solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho^\varepsilon(x) \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) &= 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon \text{ est } \Omega\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Pour pouvoir appliquer les résultats présentés au chapitre 7, on doit au moins reprendre les hypothèses 7.1 en supposant que l'on a

$$\rho^\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad b^\varepsilon(x) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cependant, comme dans le cas elliptique, pour appliquer les résultats sur un ouvert borné et obtenir une estimation d'erreur de la méthode multi-échelle il faut ajouter des hypothèses. Ainsi, on fait les hypothèses suivantes.

Hypothèses 8.1 :

1. On considère une suite de réels ε tendant vers 0 en rapport rationnel avec les dimensions de Ω . Ainsi, on peut toujours écrire Ω sous la forme

$$\Omega = \prod_{i=1}^N (n_i^\varepsilon \varepsilon, m_i^\varepsilon \varepsilon), \quad n_i^\varepsilon, m_i^\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ avec } n_i^\varepsilon < m_i^\varepsilon.$$

2. Les fonctions b , A et ρ sont des fonctions Y -périodiques.
3. La fonction ρ est dans l'espace $L^\infty(Y)$.
4. Les fonctions b , A et ρ sont de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et les interfaces de discontinuités sont \mathcal{C}^2 .
5. La divergence de la fonction b est nulle :

$$\operatorname{div}(b) = 0.$$

6. Il existe un réel $\rho_{\min} > 0$ tel que $\forall y \in Y, \quad \rho(y) \geq \rho_{\min}$.
7. La matrice A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

la norme $|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

8. La fonction u^0 est dans l'espace $W_{\#}^{k+3,\infty}(\Omega)$.

Remarques 8.1 :

Les hypothèses 3 et 4 permettent d'assurer que les fonctions w_i solutions des problèmes de cellule (7.10) sont dans l'espace $W_{\#}^{1,\infty}(Y)$ (voir lemme 4.1).

La fonction u est la solution du problème homogénéisé (7.11). Cette équation présente un problème parabolique avec un opérateur elliptique constant car A^* ne dépend pas du temps. Cette fonction est donc au moins aussi régulière que la condition initiale (voir annexe A.2.3), en particulier :

$$u \in L^\infty\left((0, T), W_{\#}^{k+3,\infty}(\Omega)\right).$$

8.1.2 Idée de la méthode

On introduit des *fonctions tests oscillantes* $\widehat{w}_i^\varepsilon$ telles que

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où les fonctions w_i sont les solutions Y -périodiques et à moyenne nulle des problèmes de cellule (7.10). On remarque qu'avec cette définition, $e_i + (\nabla_y w_i)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x)$. De plus, en remplaçant div_y par $\varepsilon \operatorname{div}$,

l'équation (7.10) devient :

$$b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) - \varepsilon \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) \right) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i.$$

Les fonctions $\widehat{w}_i^\varepsilon$ sont des solutions ε -périodiques de l'équation :

$$\frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon - \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i \quad \text{dans } \varepsilon Y. \quad (8.2)$$

L'approximation (7.42) peut alors se réécrire :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^N (\widehat{w}_i^\varepsilon(x) - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

On remarque que le membre de droite correspond à un développement de Taylor à l'ordre 1 en espace. On va donc écrire :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx u\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

On introduit la fonction \tilde{u}_ε vérifiant :

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right). \quad (8.3)$$

Dans ce cas,

$$u\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) = \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)),$$

et on a donc l'approximation :

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)). \quad (8.4)$$

La formule d'approximation (8.4) est le point de départ de la définition d'une nouvelle méthode d'éléments finis multi-échelles adaptée au problème (8.1). Comme pour la méthode Allaire-Brizzi présentée au chapitre 4, on va construire des fonctions de base multi-échelles en utilisant cette composition.

8.1.3 Définition de la méthode

On souhaite trouver $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0\left((0, T), L^2_\#(\Omega)\right) \cap L^2\left((0, T), H^1_\#(\Omega)\right)$ solution du problème (8.1) en faisant les hypothèses 8.1. Le but, ici, est de mettre en place une méthode multi-échelle qui pourrait s'appliquer à des cas non-périodiques. On ne va donc pas utiliser le fait que les fonctions ρ^ε , A^ε et b^ε sont des fonctions Y -périodiques de $\frac{x}{\varepsilon}$ ni que le domaine Ω est muni de conditions aux bords périodiques pour définir la méthode. Cependant, l'erreur d'approximation de cette méthode ne peut être calculée que dans le cas périodique.

On considère une famille de maillages grossiers \mathcal{K}_H de résolution H vérifiant les hypothèses 4.2. On suppose également que $H > \varepsilon$. En pratique, on choisira H au moins de l'ordre de $100 \times \varepsilon$. On introduit ensuite V_H , un sous-espace de $H^1_\#(\Omega)$ de dimension finie D_H et associé au maillage grossier \mathcal{K}_H . V_H est, dans notre cas, l'espace associé à la méthode aux éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange. On note donc $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$ l'ensemble des nœuds associés à cette méthode. Pour chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$, on calcule les fonctions $\tilde{w}_i^{\varepsilon, K}$ en reprenant l'équation (8.2) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} - \operatorname{div} \left(A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*, K} \cdot e_i & \text{dans } K, \\ \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} = x_i & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (8.5)$$

où

$$b^{*, K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}.$$

Les fonctions $\tilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ sont des approximations de \hat{w}_i^ε dans le cas périodique, les conditions aux bords étant différentes. On construit également le vecteur $\tilde{w}^{\varepsilon,K}$ ayant pour composantes les solutions des problèmes (8.5). On définit ensuite la fonction $\tilde{w}^{\varepsilon,H}$ telle que

$$\forall K \in \mathcal{K}_H, \quad \tilde{w}|_K^{\varepsilon,H} = \tilde{w}^{\varepsilon,K}.$$

On construit alors l'espace $V_{\varepsilon,H}$ engendré par les fonctions de base définies, pour chaque nœud $l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$, par

$$\Phi_l^{\varepsilon,H} = \Phi_l^H \circ \tilde{w}^{\varepsilon,H},$$

où les Φ_l^H sont les fonctions de base de V_H . On rappelle que les fonctions de base d'une méthode aux éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange sont des polynômes d'ordre k dans chaque maille K vérifiant

$$\forall l, l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}, \quad \Phi_l^H(l') = \delta_{l,l'}.$$

Soit π_H l'opérateur d'interpolation sur V_H :

$$\pi_H v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l) \Phi_l^H(x).$$

On définit ensuite l'opérateur d'interpolation $\pi_{\varepsilon,H}$ sur $V_{\varepsilon,H}$, par :

$$\pi_{\varepsilon,H} v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l) \Phi_l^{\varepsilon,H}(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l) \Phi_l^H \circ \tilde{w}^{\varepsilon,H}(x) = (\pi_H v) \circ \tilde{w}^{\varepsilon,H}(x). \quad (8.6)$$

On souhaite résoudre la formulation variationnelle du problème (8.1) sur l'espace $V_{\varepsilon,H}$ qui est de dimension finie D_H . On va donc calculer la solution $u_{\varepsilon,H}$ dans $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$ du problème

$$\begin{cases} \forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}, & \int_{\Omega} \left(\rho^\varepsilon \partial_t u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,H} \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} \right) dx = 0 \\ u_{\varepsilon,H}(0, x) & = \pi_{\varepsilon,H} u^0(x). \end{cases} \quad (8.7)$$

Remarques 8.2 :

On suppose ici que les problèmes de cellules (8.5) sont résolus de manière exacte sur chaque maille grossière K .

Le problème (8.7) est en fait un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants car l'espace $V_{\varepsilon,H}$ est de dimension finie et ρ^ε , b^ε et A^ε ne dépendent pas du temps. Ce problème a donc bien une solution unique dans $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$.

On peut reprendre ici la première des remarques 4.2.

Pour $k \leq 2$, comme on a $w^{\varepsilon,K} = x$ sur ∂K et que tous les nœuds se situent sur le bord des mailles, on a pour tout $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$,

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon,H} \right)|_K(l') = \delta_{l,l'}.$$

On a donc, pour $k \leq 2$,

$$\pi_{\varepsilon,H} v(l) = v(l), \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}. \quad (8.8)$$

Pour des ordres $k \geq 3$, les nœuds de la méthode aux éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange ne sont pas tous sur le bord des mailles, l'égalité (8.8) n'est donc plus vraie.

8.2 Estimation *a priori* en temps continu

On se place dans le cas périodique et on calcule la solution $u_{\varepsilon,H}$ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$ du problème (8.7). On considère ici une discrétisation uniquement en espace. On suppose donc que le système d'équations aux dérivées ordinaires en temps (8.7) est résolu de manière exacte. L'objectif de la suite est d'estimer l'erreur entre la solution u_ε du problème (8.1) et la fonction $u_{\varepsilon,H}$ solution du problème (8.7).

Théorème 8.1. Soit u_ε la solution du problème (8.1). On considère un maillage \mathcal{K}_H de résolution H vérifiant les hypothèses 4.2. Sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ on résout les problèmes de cellule (8.5) de manière exacte. Chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$ est une réunion de cubes de taille ε . On suppose, de plus, que $H > \varepsilon$. On suppose également que les hypothèses 8.1 sont vérifiées. On peut alors construire les fonctions de base multi-échelles $\Phi_l^{\varepsilon, H}$. On note alors $u_{\varepsilon, H}$ la solution numérique du problème (8.7).

Il existe une constante C_{16} indépendante de ε et H telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon, H}\|_{\Omega_T} \leq C_{16} \left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon} (H^{k+1} + \varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (8.9)$$

où

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0, T), L^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^2((0, T), H^1(\Omega))}^2.$$

Remarques 8.3 :

La présence du terme en $\frac{b^*}{\varepsilon}$ peut sembler décevante car, *stricto sensu*, si b^* est une grandeur d'ordre 1, l'estimation d'erreur ne tend pas vers zéro avec ε et H . Néanmoins, il faut se souvenir que dans le problème homogénéisé (7.16) (écrit dans un repère fixe) la vitesse homogénéisée est justement $\frac{b^*}{\varepsilon}$. Par conséquent, d'un point de vue "physique" on peut dire que c'est le terme $\frac{b^*}{\varepsilon}$ qui est une grandeur d'ordre 1, et dans ce cas l'estimation d'erreur 8.9 prouve bien la convergence de la méthode multi-échelle. D'un autre point de vue, ce facteur doit obligatoirement apparaître dans l'erreur du fait que la méthode utilisée est semi-discrète et ne traite pas spécifiquement le terme de convection. En effet, de manière générale, si on souhaite résoudre un problème de convection-diffusion avec une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange classique, la norme de la vitesse de convection va nécessairement intervenir dans les estimations *a priori* possibles. Un certain nombre de méthodes numériques adaptées à cette classe de problèmes ont déjà été proposées. On peut citer les méthodes de décentrement [BH82] ou la méthode des caractéristiques [BPS83]. On peut donc penser que l'utilisation de telles méthodes couplées avec les éléments finis multi-échelles présentés dans ce chapitre pourraient donner des résultats plus satisfaisants en terme d'estimations d'erreur. Cela reste un problème ouvert difficile.

P. Henning et M. Ohlberger ont construit dans [HO10] une méthode multi-échelle hétérogène pour résoudre le problème (8.1). Ils obtiennent une estimation *a priori* en considérant une résolution totalement discrète (en temps et en espace). Cette estimation est plus forte que (8.9) puisqu'elle ne comporte pas de terme en $\frac{b^*}{\varepsilon}$. Cependant, dans cet article, les solutions sont calculées dans le repère mobile

$$x \mapsto x - \frac{b^* t}{\varepsilon}. \quad (8.10)$$

Ainsi, il faudrait théoriquement appliquer ce changement de variable aux paramètres physiques ρ^ε , b^ε et A^ε ce qui modifie les problèmes de cellule à résoudre pour chaque itération en temps. En fait, dans [HO10], une hypothèse supplémentaire est supposée vérifiée : ces propriétés physiques dépendent uniquement de la variable $\frac{x}{\varepsilon}$ et ne varient donc pas à l'échelle grossière. Sous cette hypothèse, le changement de repère (8.10) ne modifie pas les solutions des différents problèmes de cellule. Cette hypothèse est très contraignante et ne pourrait pas s'appliquer dans le cadre de la simulation de réservoir.

Le théorème 8.1 se démontre en grâce au lemme suivant qui s'inspire d'un résultat montré dans [Whe73].

Lemme 8.1. On définit le sous-espace de $H_\#^1(\Omega)$

$$\dot{H}_\#^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H_\#^1(\Omega) \mid \int_\Omega \varphi = 0 \right\}.$$

On introduit alors son dual $\dot{H}_\#^{-1}(\Omega)$ auquel on associe la norme

$$\|u\|_{\dot{H}_\#^{-1}(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}_\#^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega u \varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$

Il existe une constante $C_{17} > 0$ indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leq C_{17} \inf_{v_{\varepsilon,H} \in C^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})} & \left(\|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} + \|D_t(u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H})\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))} \right. \\ & \left. + \left\| \int_\Omega D_t(u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}) \right\|_{L^2((0,T))} + \|(u_{\varepsilon,H} - v_{\varepsilon,H})(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (8.11)$$

où $D_t = \rho^\varepsilon \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla$ et $\|\cdot\|_{\Omega_T}$ est défini dans le théorème 8.1.

Ce lemme est démontré dans l'annexe B. On va appliquer cette inégalité en prenant comme fonction particulière $v_{\varepsilon,H} = \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon$ où $\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$, u étant la solution du problème homogénéisé (7.11). Dans la suite, on va donc successivement majorer les termes

$$\begin{aligned} X_1 &= \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}, \\ X_2 &= \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))}, \\ X_3 &= \|D_t(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}, \\ X_4 &= \left\| \int_\Omega D_t(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2((0,T))}, \\ \text{et } X_5 &= \|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Et on a

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leq C_{18} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5). \quad (8.12)$$

Le reste de la section 8.2 est consacrée à la démonstration du théorème 8.1 en majorant les uns après les autres les termes du membre de droite de l'inégalité (8.12).

8.2.1 Terme en gradient X_1

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition 8.1. Soient u_ε la solution du problème (8.1) et \tilde{u}_ε définie par (8.3), on a

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{19} \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (8.13)$$

où $\pi_{\varepsilon,H}$ est l'opérateur d'interpolation sur $V_{\varepsilon,H}$ défini par l'équation (8.6).

L'intégralité de ce paragraphe sera consacrée à la démonstration de cette proposition. Pour ce faire, on décompose la norme du gradient de la façon suivante :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq G_1 + G_2 + G_3, \quad (8.14)$$

où

$$\begin{aligned} G_1 &= \|\nabla u_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \hat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}, \\ G_2 &= \|\nabla ((\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot)) \circ \hat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}, \\ \text{et } G_3 &= \|\nabla (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \hat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}, \end{aligned}$$

la fonction \hat{w}^ε est définie pour chaque composante par

$$\hat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

et les fonctions w_i sont les solutions des problèmes de cellule (7.10).

Le terme G_1 est un terme d'homogénéisation globale qui peut être majoré en précisant l'approximation (8.4). Le terme G_2 est un terme d'interpolation sur le maillage grossier. Le terme G_3 peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation sur chaque maille grossière.

Terme d'homogénéisation globale G_1

Nous montrons ici le lemme suivant.

Lemme 8.2. *En reprenant les hypothèses de la proposition 8.1, on a l'inégalité*

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{20}\varepsilon. \quad (8.15)$$

Démonstration. Le problème est défini sur un parallélépipède Ω sur lequel on impose des conditions aux bords de périodicité, l'inégalité (7.39) montrée sur \mathbb{R}^N reste alors valable :

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))} \leq C_4\varepsilon. \quad (8.16)$$

On va alors décomposer le terme que l'on veut majorer en deux parties :

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} &\leq \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Le premier terme peut être majoré en utilisant l'inégalité (8.16). En effet,

$$\begin{aligned} \nabla \left(u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) &= \nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \nabla \left(w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) \right) \\ &= \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction $\widehat{w}_i^\varepsilon$ est définie par

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

donc

$$\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) = e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Et

$$\nabla \left(u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = \nabla u_\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon.$$

On a alors, en reprenant l'inégalité (8.16)

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_4\varepsilon + \varepsilon \left\| w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}.$$

Puis, en utilisant le fait que $u \in L^\infty((0, T), W^{k+2, \infty}(\Omega))$ et $w \in L^\infty(Y)^N$, on obtient

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{21}\varepsilon. \quad (8.18)$$

Pour majorer l'autre terme de (8.17), on remarque d'abord que

$$\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) = \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) (\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x))).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) (\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)))\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - \nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x))\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

On écrit alors le développement de Taylor avec reste intégral de $\nabla \tilde{u}_\varepsilon$:

$$\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) = \nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, x) + \varepsilon \int_0^1 w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\left(t, x + \varepsilon s w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) ds.$$

Ainsi

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T), W^{2,\infty}(\Omega))} \|w\|_{L^\infty(Y)^N}.$$

Puisque $\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$ et que les conditions imposées aux bords de Ω sont périodiques,

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T), W^{2,\infty}(\Omega))} = \|u\|_{L^2((0,T), W^{2,\infty}(\Omega))} \leq \sqrt{T} \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{2,\infty}(\Omega))},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{22}\varepsilon.$$

Finalement, en insérant cette inégalité dans (8.19), on a

$$\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) (\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)))\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{23}\varepsilon. \quad (8.20)$$

Puis, en reprenant les inégalités (8.18) et (8.20) dans (8.17), on a l'inégalité voulue. \square

Terme d'interpolation G_2

On veut maintenant montrer le lemme suivant

Lemme 8.3. *En reprenant les hypothèses de la proposition 8.1, on a*

$$\|\nabla ((\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{24} H^k \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))}, \quad (8.21)$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \|\nabla ((\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ = \|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\nabla (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

les fonctions w_i étant dans l'espace $W_{\#}^{1,\infty}(Y)$. La fonction u est dans $L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))$, et, en appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla ((\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ \leq \sqrt{T |\Omega|} \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\nabla (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)^N}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant des résultats d'interpolation classiques (voir annexe A.3.5) et le fait que

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))} = \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))}$$

on obtient le résultat voulu. \square

Terme d'homogénéisation locale G_3

Il nous reste enfin à majorer le terme

$$G_3 = \|\nabla (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}.$$

Pour cela, nous allons d'abord caractériser l'erreur entre \widehat{w}^ε et $\widetilde{w}^{\varepsilon,K}$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 8.4. *Il existe une constante C_{25} indépendante de ε et de la maille K telle que*

$$|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}|_{H^1(K)^N} \leq C_{25} \sqrt{\varepsilon |\partial K|}.$$

De plus, il existe une constante C_{26} indépendante de ε et de la maille K telle que

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N} \leq C_{26} \varepsilon \sqrt{|K|} \quad (8.23)$$

et

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^\infty(K)^N} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon. \quad (8.24)$$

Ce lemme est démontré en annexe C. Cette démonstration est similaire à celle faite pour un cas elliptique (voir [BLP78] et [TYHC99]).

Nous allons maintenant montrer le lemme suivant.

Lemme 8.5. *Soient \tilde{u}_ε et $\pi_{\varepsilon,H}$ définis comme dans la proposition 8.1. Il existe une constante $C_{27} > 0$ indépendante de ε , k et H telle que*

$$\|\nabla (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{27} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}, \quad (8.25)$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H .

Démonstration. Le terme dont nous allons majorer la norme est

$$\begin{aligned} \nabla ((\pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon) &= \nabla ((\pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x))) \\ &= \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H}(x) \partial_{x_i} (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon)(t, \widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)). \end{aligned}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} &\left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H} \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ &\leq \left\| \left(\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon - \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \\ &\quad + \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}) \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Or, on a

$$\|\nabla (\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla (\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2.$$

On applique ensuite le lemme 8.4 sur chaque maille K . Donc

$$\begin{aligned} \|\nabla (\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla (\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{K}_H} C_{25}^2 \varepsilon |\partial K| \\ &\leq C_{28} \varepsilon H^{N-1} H^{-N}, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que le périmètre d'une maille est de l'ordre de H^{N-1} et que le nombre de mailles nécessaires au recouvrement de Ω est de l'ordre de H^{-N} . On a donc montré que

$$\|\nabla (\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \leq \sqrt{C_{28} \frac{\varepsilon}{H}}. \quad (8.27)$$

Et donc

$$\left\| \nabla \left(\widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \sqrt{C_{28} \frac{\varepsilon}{H}} \|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

De plus, utilisant le fait que $\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ est bornée (voir remarque 4.4), on a

$$\left\| \nabla \left(\widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_{29} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

D'où

$$\left\| \nabla \left(\widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{30} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (8.28)$$

Pour le deuxième terme de (8.26), on va d'abord utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 et l'estimation (8.23). Or, pour pouvoir faire ce développement de Taylor, il faut que la fonction soit de classe \mathcal{C}^2 dans l'ensemble considéré. Les fonctions Φ_l^H et donc $\pi_H u$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur chaque maille K . Il faut donc trouver, comme dans le cas elliptique un sous-ensemble de K dans lequel les valeurs \widehat{w}^ε et $\widetilde{w}^{\varepsilon,K}$ soient dans K . En fait, en reprenant l'estimation (8.24), on a

$$\left\| \widehat{w}^\varepsilon - x - (\widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x) \right\|_{L^\infty(K)^N} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon.$$

Donc

$$\left\| \widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x \right\|_{L^\infty(K)^N} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon + \left\| \widehat{w}^\varepsilon - x \right\|_{L^\infty(K)^N}.$$

Or $\widehat{w}^\varepsilon - x = \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$, donc

$$\left\| \widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x \right\|_{L^\infty(K)^N} \leq 2 \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon. \quad (8.29)$$

On construit alors l'ensemble

$$C_K = \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) > 2\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\}.$$

On remarque que si $x \in C_K$,

$$\widehat{w}^\varepsilon(x) \in K$$

et

$$\widetilde{w}^{\varepsilon,K}(x) \in K.$$

On va donc majorer le deuxième terme de (8.26) en le séparant en deux

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ &= \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(C_K)^N}^2 \\ & \quad + \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(K \setminus C_K)^N}^2. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Sur l'ensemble C_K , on peut appliquer une inégalité de Taylor.

Remarque 8.4 : Comme à la remarque 4.4, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla^2 \pi_H u \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} &\leq \left\| \nabla^2 u \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} + \left\| \nabla^2 (u - \pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \\ &\leq \left\| \nabla^2 u \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} + C H^{k-1} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(K)} \end{aligned}$$

en reprenant des résultats d'interpolation (voir annexe A.3.5). Comme $k \geq 1$, on montre bien que

$$\left\| \nabla^2 \pi_H u \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}}$$

est bornée.

On a donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(C_K)^N} \\ & \leq \left\| \nabla \widehat{w}^\varepsilon \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(C_K)^N} \\ & \leq C_{31} \left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \\ & \leq C_{31} C_{26} \varepsilon \sqrt{|K|} \\ & \leq C_{32} \varepsilon \sqrt{H^N}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

en utilisant le fait que les volumes des mailles sont de l'ordre de H^N . Sur $K \setminus C_K$, on utilise le fait que

$$|K \setminus C_K| = \left| \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) \leq 2\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\} \right| \leq C_{33} |\partial K| \varepsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2(K \setminus C_K)^N} \\ \leq 2 \|\nabla \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(K)^N} \|\nabla (\pi_H u)\|_{L^\infty(K)^N} \sqrt{C_{33} |\partial K| \varepsilon} \\ \leq C_{34} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

en utilisant le fait que les périmètres des mailles sont de l'ordre de H^{N-1} . En insérant les inégalités (8.32) et (8.31) dans (8.30), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2(K)^N}^2 &\leq C_{35} \varepsilon H^{N-1} (\varepsilon H + 1) \\ &\leq C_{36} \varepsilon H^{N-1}, \end{aligned}$$

car ε et H sont bornés. En calculant la norme L^2 sur tout l'espace, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2(\Omega)^N}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{K}_H} C_{36} \varepsilon H^{N-1} \\ &\leq C_{37} \frac{\varepsilon}{H} \end{aligned}$$

car le nombre de mailles pour recouvrir Ω est de l'ordre de H^{-N} . On a donc montré que

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \sqrt{C_{37}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

D'où, on déduit

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon (\partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i} (\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H}) \right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{38} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (8.33)$$

Ainsi en reprenant les inégalités (8.28) et (8.33) dans (8.26), on a l'inégalité voulue. \square

On conclut la démonstration de la proposition 8.1 en mettant bout à bout les résultats des lemmes 8.2, 8.3 et 8.5 c'est-à-dire les inégalités (8.15), (8.21) et (8.25) dans (8.14), on obtient :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{39} \left(\varepsilon + H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right).$$

En utilisant le fait que $\varepsilon \leq C_{40} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ car $\sqrt{\varepsilon H}$ est borné, on aboutit à la majoration annoncée dans la proposition 8.1 :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leq C_{19} \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right).$$

8.2.2 Terme de dérivée convective X_3

On veut majorer les termes

$$X_3 = \|D_t (u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}$$

et

$$X_4 = \left\| \int_{\Omega} D_t (u_{\varepsilon} - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_{\varepsilon}) \right\|_{L^2((0, T))}.$$

Or, on remarque d'abord que, pour une fonction f donnée, les termes en

$$\|f\|_{L^2((0, T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))}$$

et en

$$\left\| \int_{\Omega} f \right\|_{L^2((0, T))}$$

peuvent être majorés de la même manière en prenant des fonctions tests différentes. En effet, rappelons que, par définition,

$$\|f\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} f \varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$

On remarque que

$$\frac{|\int_{\Omega} f \varphi|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \left| \int_{\Omega} f \right| \quad \text{si } \varphi = 1.$$

Et pour $\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega)$, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, la semi-norme $|\varphi|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente à la norme $\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$. On va donc se contenter de majorer $\frac{|\int_{\Omega} f \varphi|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}}$. Les résultats qui sont montrés dans le cas où $\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega)$ s'appliquent assez naturellement au cas où $\varphi = 1$.

On va donc ici montrer uniquement la proposition suivante.

Proposition 8.2. *Soient u_{ε} la solution du problème (8.1) et \tilde{u}_{ε} vérifiant (8.3). Il existe une constante $C_{41} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\|D_t (u_{\varepsilon} - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}^{-1}(\Omega))} \leq C_{41} \left(H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (8.34)$$

où $\pi_{\varepsilon, H}$ est l'opérateur d'interpolation sur $V_{\varepsilon, H}$ défini par l'équation (8.6).

Ce paragraphe établit la preuve de cette proposition. Comme au paragraphe 8.2.1, on décompose d'abord ce terme en trois parties :

$$\|D_t (u_{\varepsilon} - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}^{-1}(\Omega)_{\#})} \leq D_1 + D_2 + D_3, \quad (8.35)$$

où

$$\begin{aligned} D_1 &= \|D_t u_{\varepsilon} - D_t (\tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))}, \\ D_2 &= \|D_t ((\tilde{u}_{\varepsilon} - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon})(t, \cdot) \circ \widehat{w}^{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))}, \\ \text{et } D_3 &= \|D_t (\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^{\varepsilon} - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Le terme D_1 est un terme d'homogénéisation globale. Le terme D_2 est un terme d'interpolation sur le maillage grossier. Le terme D_3 peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation sur chaque maille grossière.

Terme d'homogénéisation globale D_1

On va montrer ici le lemme suivant.

Lemme 8.6. *Soient u_{ε} la solution du problème (8.1) et \tilde{u}_{ε} vérifiant (8.3). Il existe une constante $C_{42} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\|D_t u_{\varepsilon} - D_t (\tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^{\varepsilon})\|_{L^2((0, T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))} \leq C_{42} \varepsilon. \quad (8.36)$$

Démonstration. Pour majorer $\|D_t u_\varepsilon - D_t (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}$ prenons une fonction test

$$\varphi \in L^2\left((0,T), \dot{H}_\#^1(\Omega)\right).$$

On cherche alors à majorer l'intégrale

$$\int_{\Omega} D_t (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) \varphi dx.$$

On rappelle que $D_t = \rho^\varepsilon \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla$. On a

$$D_t u_\varepsilon = \operatorname{div} (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon).$$

On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon(x) \partial_t (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)(x) &= \rho^\varepsilon(x) \partial_t \left(u \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \rho^\varepsilon(x) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)(x) &= \nabla \left(u \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} u \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} D_t (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) &= \rho^\varepsilon(x) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} u \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On définit alors

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ I_2 &= \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} u \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On utilise le fait que u vérifie l'équation (7.11), on a

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon(x) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) &= \bar{\rho} (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + (\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &= \operatorname{div} (A^* (\nabla u)) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + (\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} I_3 &= \operatorname{div} (A^* (\nabla u)) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ I_4 &= (\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$D_t (\tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

On utilise le lemme 7.2, pour majorer le terme I_4 . En effet, puisque $\int_Y (\rho(y) - \bar{\rho}) dy = 0$, il existe une fonction $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$ telle que $-\operatorname{div}_y \zeta(y) = \rho(y) - \bar{\rho}$.

Remarque 8.5 : On rappelle que $\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$ et que

$$\Omega = \prod_{i=1}^N (n_i^\varepsilon \varepsilon, m_i^\varepsilon \varepsilon), \quad n_i^\varepsilon, m_i^\varepsilon \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, \widehat{w}^ε est égal à l'identité à laquelle on ajoute une fonction Ω -périodique. Donc, pour toute fonction f Ω -périodique, $f \circ \widehat{w}^\varepsilon$ est aussi Ω -périodique. De plus, pour tout $x \in \partial\Omega$, $\widehat{w}^{\varepsilon, H}(x) = x$. On en déduit que, pour toute fonction f Ω -périodique, $f \circ \widehat{w}^{\varepsilon, H}$ est aussi Ω -périodique.

On montre alors que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\ &= - \int_\Omega \operatorname{div}_y \zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\ &= - \int_\Omega \varepsilon \operatorname{div} \left(\zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_\Omega \varepsilon \zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \left((\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) \right) dx, \end{aligned}$$

par intégrations par parties et en utilisant la périodicité des différentes fonctions (voir remarque 8.5). Comme $\partial_t u = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (A^* \nabla u)$ et $u \in L^\infty((0, T), W^{k+3, \infty}(\Omega))$,

$$\partial_t u \in L^\infty((0, T), W^{k+1, \infty}(\Omega)) \subset L^\infty((0, T), W^{1, \infty}(\Omega)).$$

De plus, $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$ donc $\zeta \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \in L^2(\Omega)^N$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \varepsilon \zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \left((\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) \right) dx \right| \\ & \leq \varepsilon \left\| \zeta \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \left\| \nabla \left((\partial_t u) \left(t, x + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) \right) \right\|_{L^\infty((0, T), L^2(\Omega))^N} \\ & \leq \varepsilon \left\| \zeta \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \|\partial_t u\|_{L^\infty((0, T), W^{1, \infty}(\Omega))} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\|I_4\|_{L^\infty((0, T), \dot{H}^{-1}_\#(\Omega))} \leq C_{43} \varepsilon. \quad (8.37)$$

On applique ensuite un développement de Taylor sur les termes I_1 , I_2 et I_3 en utilisant le fait que $u \in L^\infty((0, T), W^{3, \infty}(\Omega))$:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ & \quad + \varepsilon \int_0^1 w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i, x_j}^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (1-s) ds. \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) + b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \\ + \varepsilon \int_0^1 b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j, x_k}^3 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (1-s) ds.$$

$$I_3 = \operatorname{div} \left(A^* (\nabla u) \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \int_0^1 w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div} \left(A^* (\nabla \partial_{x_i} u) \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) ds.$$

On en déduit que

$$D_t (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) = \operatorname{div} (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon \\ - b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon \\ + \varepsilon C_{44}(t, x) - I_4 \\ = \operatorname{div} \left(\left((A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - A^* \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon \\ - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon \\ + \operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - (A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \\ + \varepsilon C_{44}(t, x) - I_4,$$

où $\|C_{44}\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)}$ est indépendante de ε car $u \in W^{3,\infty}(\Omega)$, $w_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\rho^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et $b^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)^N$.
Notons

$$I_\varepsilon(t, x) = \operatorname{div} \left(\left((A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - A^* \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon$$

et

$$J_{\varepsilon, \varphi} = \int_\Omega \operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \varphi.$$

On a alors

$$\int_\Omega D_t (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) \varphi = \int_\Omega I_\varepsilon \varphi + J_{\varepsilon, \varphi} + \varepsilon \int_\Omega C_{44}(t, x) \varphi - \int_\Omega I_4 \varphi. \quad (8.38)$$

On a d'abord

$$\left| \int_\Omega C_{44}(t, x) \varphi \right| \leq \|C_{44}\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|C_{44}\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} |\varphi|_{H^1(\Omega)} \quad (8.39)$$

où C_Ω est la constante de Poincaré-Wirtinger associée à Ω .

On s'intéresse ensuite au terme $\int_\Omega I_\varepsilon \varphi$. On remarque alors que

$$\operatorname{div} \left((A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) = (A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \left((A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right), \quad (8.40)$$

où : est le produit de contraction défini pour deux matrices $M_{i,j}$ et $N_{i,j}$ par

$$M : N = \sum_{i,j} M_{i,j} N_{i,j}.$$

De plus, dans l'équation (8.40), \tilde{u}_ε ne dépend pas de y . Ainsi, le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ de I_ε est

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \left(\operatorname{div}_y \left((A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_i \right) + \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) b^* \cdot e_i - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) = 0$$

en utilisant le problème de cellule (7.10). I_ε peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= (A (Id + \nabla_y w)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon - A^* : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon + \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon \\ &= \left(A_{i,j} + A_{i,k} \partial_{y_k} w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \left(\rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) b_j^* - b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. - b_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{y_k} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - A_{i,j}^* \right) : \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Par définition de A^* (voir (7.25)), on a

$$\int_Y \left(A_{i,j} + A_{i,k} \partial_{y_k} w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \left(\rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) b_j^* - b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dy = A_{i,j}^*.$$

Il reste à identifier le terme

$$b_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{y_k} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon.$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, on a

$$\begin{aligned} b_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{y_k} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon &= \frac{1}{2} b_k \left(\partial_{y_k} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_k} w_j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} b_k \partial_{y_k} (w_i w_j) \partial_{x_i, x_j}^2 \tilde{u}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Et, les fonctions w et b étant Y -périodiques,

$$\frac{1}{2} \int_Y b_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} (w_i w_j) (y) = -\frac{1}{2} \int_Y \operatorname{div} (b) w_i w_j = 0,$$

car $\operatorname{div}(b) = 0$. On peut donc écrire I_ε sous la forme

$$I_\varepsilon = P_{i,j}^\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i, x_j}^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right),$$

avec

$$\int_Y P_{i,j}^\varepsilon(y) dy = 0.$$

On applique alors le lemme 7.2 pour chaque i, j . Ainsi, les $P_{i,j}^\varepsilon$ peuvent s'écrire sous la forme

$$P_{i,j}^\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = \operatorname{div}_x \left(\varepsilon Z_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right),$$

avec $Z_{i,j} \in L^2(Y)^N$. Donc, pour $\varphi \in \dot{H}_\#^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega I_\varepsilon \varphi &= \int_\Omega \operatorname{div}_x \left(\varepsilon Z_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \partial_{x_i, x_j}^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\ &= - \int_\Omega \varepsilon Z_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \left(\varphi(x) \partial_{x_i, x_j}^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que $Z_{i,j}$ est bornée, on a

$$\left| \int_{\Omega} I_{\varepsilon} \varphi \right| \leq C_{45} \varepsilon \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{3,\infty}(\Omega))}. \quad (8.41)$$

On veut ensuite majorer le terme $|J_{\varepsilon, \varphi}|$. On rappelle que

$$J_{\varepsilon, \varphi} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \varphi.$$

Donc, par intégration par parties,

$$J_{\varepsilon, \varphi} = - \int_{\Omega} \left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) \cdot \nabla \varphi.$$

On montre d'abord que :

$$\left\| A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_{46} \varepsilon.$$

Pour cela, reprenons l'inégalité (8.16). On a alors

$$\left\| \nabla u_\varepsilon - \left(\nabla \tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon \nabla \left(u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_4 \varepsilon.$$

Cela peut donc se réécrire

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \nabla_y u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \nabla_x u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + g_\varepsilon, \quad (8.42)$$

avec

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_{47} \varepsilon.$$

En multipliant l'égalité (8.42) par A^ε , et en réutilisant la définition de u_1 dans l'équation (7.13), on a

$$A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon = \varepsilon A^\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_i} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) + A^\varepsilon g_\varepsilon.$$

Les fonctions w et la matrice A étant bornées, on a

$$\left\| A^\varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla^2 u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} C_{bnd} \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \leq C_{48}$$

car $u \in L^\infty((0, T), W^{2,\infty}(\Omega))$. De plus, en utilisant les propriétés de g_ε et le caractère borné de A^ε

$$\|A^\varepsilon g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_{bnd} C_{47} \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\left\| A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_{46} \varepsilon.$$

On en déduit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|J_{\varepsilon, \varphi}| = \left| \int_{\Omega} \left(A^\varepsilon - A (Id + \nabla_y w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \right| \leq C_{46} \varepsilon |\varphi|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.43)$$

Alors, en insérant les inégalités (8.37), (8.39), (8.41) et (8.43) dans (8.38)

$$\left| \int_{\Omega} D_t (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon) \varphi \right| \leq C_{49} \varepsilon |\varphi|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\|D_t (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \leq C_{49} \varepsilon.$$

D'où le résultat voulu. \square

Terme d'interpolation D_2

On veut montrer ici le lemme suivant

Lemme 8.7. *Soient u_ε la solution du problème (8.1) et \tilde{u}_ε vérifiant (8.3). Il existe une constante $C_{50} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\|D_t((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))} \leq C_{50} \left(H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} \right), \quad (8.44)$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H et la fonction \widehat{w}^ε est définie pour chaque composante par

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

les fonctions w_i étant les solutions des problèmes de cellule (7.10).

Démonstration.

$$\begin{aligned} D_t \left(u \left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{F}_k, H}} u \left(t, l - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \Phi_l(\widehat{w}^\varepsilon(x)) \right) \\ = \rho^\varepsilon(x) \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \pi_H \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \\ - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} (b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Pour le premier terme, on utilise la remarque suivante.

Remarque 8.6 : La norme $\|\cdot\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}$ est définie par

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} = \inf_{\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\int_{\Omega} u \varphi|}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^N}}.$$

Or, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour toute fonction $\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega)$,

$$\frac{|\int_{\Omega} u \varphi|}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^N}} \leq C_{\Omega} \frac{|\int_{\Omega} u \varphi|}{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}} \leq C_{\Omega} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a donc, en passant à la borne inférieure,

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On va donc majorer la norme L^2 de ce premier terme :

$$\begin{aligned} & \left\| \rho^\varepsilon(x) \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \pi_H \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \rho_{\max} \left\| \partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \pi_H \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & \leq C_{24} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \rho_{\max} H^{k+1} \|\partial_t u\|_{W^{k+1, \infty}(\Omega)}, \end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois un résultat d'interpolation. Étant donné que

$$\partial_t u = \frac{1}{\bar{\rho}} \operatorname{div} (A^* \nabla u),$$

on a

$$\|\partial_t u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} \leq C_{51} \|u\|_{W^{k+3,\infty}(\Omega)}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} & \left\| \rho^\varepsilon(x) \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \pi_H \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \\ & \leq \left\| \rho^\varepsilon(x) \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) - \pi_H \left(\partial_t u \left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \right) \right) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C_{52} H^{k+1}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Pour le deuxième terme, on utilise le fait que

$$\|(\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|(\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N}.$$

Et

$$\|(\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N} = \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N} \leq C_{24} H^{k+1} \|\nabla u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)^N}.$$

On a donc

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{53} H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} \|u\|_{W^{k+2,\infty}(\Omega)} \quad (8.47)$$

Pour le troisième terme, on va considérer une fonction test $\varphi \in \dot{H}_\#^1(\Omega)$. Les différentes fonctions étant Ω -périodiques (voir remarque 8.5), on peut intégrer par parties et on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} (b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)) \varphi(x) dx = - \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

On va séparer cette intégrale en deux :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx &= \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} b^* (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - b^*) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Pour la première intégrale, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} b^* (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| &\leq \frac{|b^*|}{\varepsilon} \|(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} |\varphi|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_{24} \frac{|b^*|}{\varepsilon} H^{k+1} \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))} |\varphi|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des inégalités d'interpolation. Pour la deuxième intégrale, on utilise le lemme suivant montré dans [MPP85].

Lemme 8.8. *Soit une fonction $g \in L_\#^2(Y)^N$ telle que $\int_Y g(y) dy = 0$ et $\operatorname{div}(g) = 0$. Il existe une matrice $\zeta \in L_\#^2(Y)^{N \times N}$ antisymétrique telle que $g = \operatorname{div}(\zeta)$. La matrice ζ peut être définie par*

$$\zeta_{i,j} = (-\Delta)^{-1} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right).$$

On applique alors ce lemme à $b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*$ et on note ζ la matrice antisymétrique ainsi obtenue. On a donc

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega \operatorname{div} \left(\zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Toutes les fonctions étant Ω -périodiques (voir remarque 8.5), on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x)b^*) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \zeta_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\partial_{x_i} (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \partial_{x_j} \varphi(x) + (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \partial_{x_i, x_j} \varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Comme ζ est une matrice antisymétrique et que $\partial_{x_i, x_j} \varphi = \partial_{x_j, x_i} \varphi$, le deuxième terme de l'intégrale est nul et on a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x)b^*) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \zeta_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} ((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)) \partial_{x_j} \varphi(x) dx.$$

De plus,

$$\partial_{x_i} ((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)) = \partial_{x_i} \widehat{w}_k^\varepsilon(x) \partial_{x_k} (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x).$$

Et donc

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} ((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x))| &\leq \|w\|_{W^{1,\infty}(Y)} \|\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ &\leq \|w\|_{W^{1,\infty}(Y)} H^k \|u\|_{L^\infty((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Comme $\zeta \in L^2(\Omega)^{N \times N}$, on a alors

$$\left| \int_{\Omega} \zeta_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} ((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)) \partial_{x_j} \varphi(x) dx \right| \leq C_{54} H^k |\varphi|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x)b^*) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \leq C_{54} H^k |\varphi|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.50)$$

En insérant les inégalités (8.49) et (8.50) dans l'équation (8.48), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} (b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)) \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) (\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \\ &\leq C_{55} H^k |\varphi|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Ainsi, en regroupant les inégalités (8.46), (8.47) et (8.51) dans l'équation (8.45), on obtient

$$\|D_t ((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^\infty((0,T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))} \leq C_{56} \left(H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} \right).$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité voulue. \square

Terme d'homogénéisation locale D_3

On montre maintenant le lemme suivant

Lemme 8.9. *On reprend les définitions de la proposition 8.2. Il existe une constante $C_{57} > 0$*

$$\|D_t (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))} \leq C_{57} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \varepsilon \frac{|b^*|}{\varepsilon} \right), \quad (8.52)$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H .

Démonstration. On veut majorer la norme de

$$D_t (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon) = D_t (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, H}).$$

On introduit la fonction $\tilde{u}_{t,\varepsilon}$ définie par

$$\tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, x) = \partial_t u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} D_t \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \\ = \rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \left(b^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon b^* \cdot \left((\pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon)(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - (\pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon)(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Pour le premier terme de cette somme, on applique une nouvelle fois la remarque 8.6.

$$\begin{aligned} \left\| \rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}^2 \\ \leq \rho_{max}^2 C_\Omega^2 \left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \rho_{max}^2 C_\Omega^2 \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)}^2. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Comme au paragraphe 8.2.1, sur chaque maille K , on va séparer cette norme en deux en considérant l'ensemble C_K et son complémentaire. Sur $K \setminus C_K$, on majore simplement de la manière suivante

$$\begin{aligned} \left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K \setminus C_K)} &\leq C_{58} \left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon} \right\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} \sqrt{\varepsilon |\partial K|} \\ &\leq C_{59} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

car

$$\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}} \partial_t u \left(t, l - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) \Phi_l^H(x)$$

et les Φ_l^H et $\partial_t u$ sont bornés.

Sur C_K , les fonctions sont de classe \mathcal{C}^∞ et on utilise une inégalité de Taylor

$$\left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(C_K)} \leq C_{60} \left\| \nabla \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon} \right\|_{L^\infty(K)^N} \left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)^N}.$$

On a déjà vu que $\tilde{u}_{t,\varepsilon} \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ car $u \in W^{k+3,\infty}(\Omega)$. On en déduit, en utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe 4.3.3, que $\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}$ est borné en norme $W^{1,\infty}(\Omega)$. Et donc

$$\left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(C_K)} \leq C_{61} \varepsilon \sqrt{H^N}. \quad (8.56)$$

On déduit des inégalités (8.56) et (8.55)

$$\left\| \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq C_{62} \varepsilon H^{N-1} (1 + \varepsilon H).$$

Et donc, en reprenant l'inégalité (8.54)

$$\left\| \rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} \leq C_{63} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}, \quad (8.57)$$

car le nombre de mailles dans \mathcal{K}_H est de l'ordre de H^N et le produit εH est borné.

Pour majorer le deuxième terme de l'inégalité (8.53), on considère une fonction test $\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega)$. On utilise la remarque 8.5 pour effectuer l'intégration par parties sur Ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \left(b^{\varepsilon}(x) \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \right) \varphi(x) dx \\ = - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon}(x) \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

le terme de bord étant nul car b^{ε} , $\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \hat{w}^{\varepsilon}$, $\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \tilde{w}^{\varepsilon, H}$ et φ sont Ω -périodiques. On introduit une nouvelle fois la matrice antisymétrique $\zeta \in L_{\#}^2(Y)^{N \times N}$ telle que $b(y) - \rho(y)b^* = \operatorname{div}(\zeta(y))$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^{\varepsilon}(x) - \rho^{\varepsilon}(x)b^*) \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ = \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\zeta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ = - \int_{\Omega} \zeta_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \left(\left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \partial_{x_j} \varphi(x) \right) dx, \end{aligned}$$

les termes de bord étant nuls en utilisant les mêmes remarques que précédemment. La matrice ζ étant antisymétrique le terme en $\partial_{x_i, x_j}^2 \varphi$ est nul et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^{\varepsilon}(x) - \rho^{\varepsilon}(x)b^*) \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ = - \int_{\Omega} \zeta_{i,j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \partial_{x_j} \varphi(x) dx. \quad (8.58) \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \left(\pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) &= \partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon}(x) \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \partial_{x_i} \tilde{w}_k^{\varepsilon, H}(x) \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \\ &= \left(\partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon}(x) - \partial_{x_i} \tilde{w}_k^{\varepsilon, H}(x) \right) \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \\ &\quad + \partial_{x_i} \tilde{w}_k^{\varepsilon, H}(x) \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \hat{w}^{\varepsilon}(x)) - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \tilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right). \quad (8.59) \end{aligned}$$

En reprenant les mêmes calculs que précédemment, on a

$$\begin{aligned} \left\| \left(\partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon} - \partial_{x_i} \tilde{w}_k^{\varepsilon, H} \right) \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \left(\partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon} - \partial_{x_i} \tilde{w}_k^{\varepsilon, H} \right) \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \nabla \hat{w}^{\varepsilon} - \nabla \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \left\| \nabla \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)^N}^2 \\ &\leq C_{64} \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \varepsilon H^{N-1} \\ &\leq C_{65} \frac{\varepsilon}{H}. \quad (8.60) \end{aligned}$$

De plus, on peut faire un développement de Taylor sur les C_K :

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon} \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \hat{w}^{\varepsilon} - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{L^2(C_K)} \\ \leq \left\| \hat{w}^{\varepsilon} \right\|_{W^{1, \infty}(\Omega)^N} \left\| \hat{w}^{\varepsilon} - \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)^N} \left\| \nabla^2 \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(K)^N} \\ \leq C_{66} \varepsilon \sqrt{H^N}. \quad (8.61) \end{aligned}$$

Sur $K \setminus C_K$, on utilise le fait que $|K \setminus C_K| \leq C_{33} |\partial K| \varepsilon$ et on a

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{x_i} \hat{w}_k^{\varepsilon} \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \hat{w}^{\varepsilon} - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \circ \tilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{L^2(K \setminus C_K)} \\ \leq 2 \left\| \hat{w}^{\varepsilon} \right\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \left\| \nabla \pi_H \tilde{u}_{\varepsilon} \right\|_{L^{\infty}(K)^{N \times N}} \sqrt{C_{33} |\partial K| \varepsilon} \\ \leq C_{67} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}}. \quad (8.62) \end{aligned}$$

D'où, en regroupant les inégalités (8.61) et (8.62) :

$$\left\| \partial_{x_i} \widehat{w}_k^\varepsilon \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{L^2(K)} \leq C_{68} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{x_i} \widehat{w}_k^\varepsilon \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \partial_{x_i} \widehat{w}_k^\varepsilon \left(\partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_k} \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right) \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{K}_H} C_{69} \varepsilon H^{N-1} \\ &\leq C_{70} \frac{\varepsilon}{H}. \end{aligned} \quad (8.63)$$

En insérant les inégalités (8.60) et (8.63) dans (8.59), on a

$$\left\| \partial_{x_i} \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widetilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{71} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

Et, en utilisant l'égalité (8.58) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*) \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widetilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq C_{72} |\varphi|_{H^1(\Omega)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (8.64)$$

$\pi_H \tilde{u}_\varepsilon$ étant borné dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, on peut montrer que

$$\left\| \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)} \leq C_{73} \left\| \widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)}.$$

Puis, en appliquant le lemme 8.4, on a

$$\left\| \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)} \leq C_{73} C_{26} \varepsilon \sqrt{|K|}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\| \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq C_{73}^2 C_{26}^2 \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{K}_H} |K| \\ &\leq C_{73}^2 C_{26}^2 |\Omega| \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widetilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq C_{74} \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon |\varphi|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.65)$$

En regroupant les équations (8.65) et (8.64), on a

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \widetilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq C_{75} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon \right) |\varphi|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.66)$$

De plus, on peut montrer, avec les mêmes arguments que ceux qui ont abouti à l'inégalité (8.65)

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \left(\pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)) - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon(t, \widetilde{w}^{\varepsilon, H}(x)) \right) \varphi(x) dx \right| \leq C_{76} \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (8.67)$$

En reprenant les inégalités (8.54), (8.66) et (8.67) et en les utilisant dans (8.53), on obtient

$$\|D_t (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t, \cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon, H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} \leq C_{77} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon \right).$$

On en déduit le résultat voulu. \square

On peut donc démontrer la proposition 8.2 en insérant les résultats des lemmes 8.6, 8.7 et 8.9 c'est-à-dire les inégalités (8.36), (8.44) et (8.52) dans l'inégalité (8.35), on obtient alors :

$$\|D_t(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T),\dot{H}^{-1}(\Omega))} \leq C_{41} \left(\varepsilon + H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right).$$

En utilisant le fait que $\varepsilon \leq C_{40} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ on en déduit la proposition 8.2.

8.2.3 Termes X_2 et X_4

Nous avons expliqué au début du paragraphe 8.2.2 comment le terme X_4 pouvait être majoré en utilisant la même démonstration que pour le terme X_3 (voir proposition 8.2). Donc

$$\left\| \int_{\Omega} D_t(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T)} \leq C_{78} \left(H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (8.68)$$

où C_{78} est une constante positive indépendante de ε et H .

Le terme X_2 peut être majoré de la même manière que le terme X_1 . Cependant, au lieu d'utiliser l'estimation *a priori* (8.16), nous devons utiliser l'estimation (7.41), ce qui nous permet de déduire qu'il existe une constante $C_{79} > 0$ telle que :

$$\left\| u_\varepsilon(t, x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))} \leq C_{79}\varepsilon. \quad (8.69)$$

La démonstration de la proposition 8.1 peut donc facilement s'adapter pour ce terme : il existe une constante positive C_{80} indépendante de ε et H :

$$X_2 = \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))} \leq C_{80} \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right). \quad (8.70)$$

La majoration pourrait même être plus fine car ce terme ne fait pas intervenir le gradient des fonctions.

8.2.4 Erreur initiale X_5

Il nous reste à majorer l'erreur initiale

$$X_5 = \|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a défini la condition initiale sur $u_{\varepsilon,H}$ par

$$\forall x \in \Omega, \quad u_{\varepsilon,H}(0, x) = \pi_{\varepsilon,H}u^0(x).$$

Or, la fonction \tilde{u}_ε est définie par

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right)$$

où la fonction u est la solution du problème de cellule (7.11) :

$$\begin{cases} \bar{\rho} \partial_t u - \operatorname{div}(A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Donc

$$\pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \pi_{\varepsilon,H}u^0.$$

D'où

$$\|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (8.71)$$

8.3 Conclusion

En ajoutant les inégalités (8.13), (8.70), (8.34), (8.68) et (8.71) dans l'inégalité (8.12) on obtient bien le résultat annoncé dans le théorème 8.1 : il existe une constante $C_{16} > 0$ indépendante de ε et H telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leq C_{16} \left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon} (H^{k+1} + \varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right),$$

où

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}^2.$$

Chapitre 9

Résultats obtenus avec la nouvelle méthode multi-échelle

Sommaire

9.1	Présentation des deux implémentations	151
9.1.1	Implémentation sur FreeFem++	151
9.1.2	Implémentation sur le prototype <i>Arcane</i>	151
9.2	Difficultés dans l'implémentation de la méthode	152
9.2.1	Résolution des problèmes de cellule	152
9.2.2	Discretisation en temps	153
9.2.3	Construction du système grossier	154
9.3	Application de la méthode	155
9.3.1	Cas d'application	155
9.3.2	Visualisation de la solution en utilisant <i>FreeFem++</i>	156
9.3.3	Résultats obtenus en utilisant la plate-forme <i>Arcane</i>	157

Nous avons construit, au chapitre 8, une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre le problème de transport (7.6). Nous allons maintenant observer les résultats numériques obtenus avec cette méthode. Dans un premier temps, nous présentons les prototypes dans lesquels la méthode a été implémentée. Nous détaillons ensuite les méthodes numériques employées pour résoudre les problèmes non discrétisés dans le chapitre 8. Puis, nous montrons quelques résultats obtenus avec ces implémentations.

9.1 Présentation des deux implémentations

9.1.1 Implémentation sur FreeFem++

FreeFem++ [HPLHO98] est un logiciel permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant des éléments finis. Ce logiciel permet de mettre en place assez facilement la méthode multi-échelle présentée au chapitre 8. Les différentes équations aux dérivées partielles peuvent en effet être résolues par une méthode aux éléments finis de Lagrange en utilisant une fonction déjà programmée. Ce logiciel permet également de calculer numériquement des intégrales de fonctions sur maillage en utilisant des points de quadrature par maille. Cela permet, une fois les fonctions de base calculées, de construire assez facilement le système linéaire à résoudre à chaque pas de temps.

9.1.2 Implémentation sur le prototype *Arcane*

Nous avons également pu implémenter notre nouvelle méthode aux éléments finis multi-échelles sur le prototype présenté au chapitre 6. Cette méthode résout une équation différente de celles traitées dans les

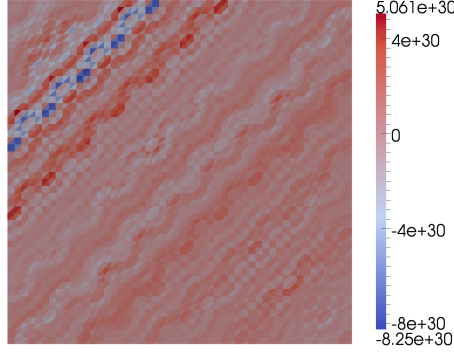


FIGURE 9.1 – Solution du problème de cellule (8.5) obtenue sur le programme FreeFem++ avec des éléments finis \mathbb{P}_1 Lagrange

chapitres 2, 4 et 5. Elle utilise donc un *module* différent appelé **Tracer**. Cette implémentation a été plus compliquée car les éléments finis de type Lagrange ont dû être implémentés spécifiquement pour cette méthode. De plus, la notion de degré de liberté n'existe pas encore dans la plate-forme Arcane, l'implémentation est donc ici réduite à celle faite dans le cas où l'espace aux éléments finis initial (V_H dans le chapitre 8) est un espace aux éléments finis de Lagrange d'ordre 1. En effet, dans ce cas, les degrés de liberté correspondent aux nœuds du maillage ce qui simplifie la construction des systèmes linéaires.

9.2 Difficultés dans l'implémentation de la méthode

9.2.1 Résolution des problèmes de cellule

Lors de la définition de la méthode multi-échelle au chapitre 8, nous avons supposé que les différents problèmes de cellules (8.5) étaient résolus de manière exacte. Nous rappelons que ces problèmes consistent, pour une maille $K \in \mathcal{K}_H$ et une direction i , à trouver $\tilde{w}_i^{\varepsilon, K}$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} - \operatorname{div} \left(A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*, K} \cdot e_i & \text{dans } K, \\ \tilde{w}_i^{\varepsilon, K} = x_i & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

où

$$b^{*, K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}.$$

En pratique, ces problèmes doivent être résolus numériquement en utilisant un maillage fin local \mathcal{K}_h^K de taille h petite par rapport à ε . Dans la suite, on note $w^{\varepsilon, K}$ les solutions numériques des problèmes de cellules (8.5). On définit, de plus, $w^{\varepsilon, H}$ la fonction telle que pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$,

$$w^{\varepsilon, H}|_K = w^{\varepsilon, K}.$$

Résolution sur FreeFem++

La solution du problème de cellule (8.5) n'est pas facilement calculable avec FreeFem++. En effet, le terme d'advection $\frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{w}_i^{\varepsilon, K}$ peut créer des instabilités numériques lors d'une résolution par éléments finis classiques. La figure 9.1 montre la solution obtenue après résolution de l'équation (8.5) sur la cellule unité avec des éléments finis \mathbb{P}_1 . Cette solution est clairement instable. Pour réduire ces instabilités, nous avons introduit une dérivée en temps et considéré le problème de cellule suivant :

$$\begin{cases} \partial_t w_i^{t, \varepsilon, K} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla w_i^{t, \varepsilon, K} - \operatorname{div} \left(A^\varepsilon(x) \nabla w_i^{t, \varepsilon, K} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b_K^* \cdot e_i & \text{dans } K, \\ w_i^{t, \varepsilon, K} = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (9.1)$$

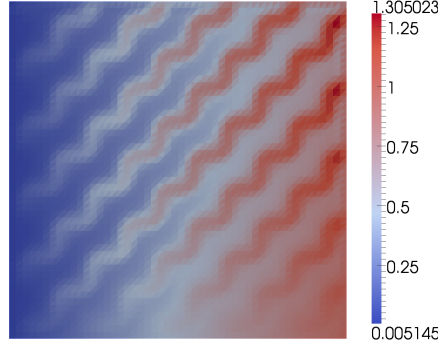


FIGURE 9.2 – Solution du problème de cellule (8.5) obtenue avec notre méthode itérative

Ce problème instationnaire est résolu avec une méthode Galerkin caractéristique (opérateur `convect` dans FreeFem++) qui est inconditionnellement stable. Ces résolutions sont alors faites en considérant un pas de temps fixe δt_0 jusqu'à ce que la solution devienne stationnaire, c'est-à-dire jusqu'à une date t_0 pour laquelle

$$\frac{\left\| w_i^{t_0, \varepsilon, K} - w_i^{t_0 + \delta t_0, \varepsilon, K} \right\|_{L^2(\Omega)}}{\delta t_0 \left\| w_i^{t_0, \varepsilon, K} \right\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon_0.$$

La solution $w_i^{t_0, \varepsilon, K}$ est alors la fonction que l'on choisit pour approcher la solution du problème de cellule (8.5). La figure 9.2 montre une solution obtenue avec cet algorithme. Les oscillations ont bien disparu. Néanmoins, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution stationnaire est élevé. En effet, dans le cas considéré ici, si nous choisissons une tolérance $\varepsilon_0 = 0,01$ sur chaque maille grossière, la solution stationnaire est atteinte après 2 000 itérations.

Résolution avec le prototype Arcane

En fait, la méthode la plus simple pour résoudre le problème de cellule (8.5) est l'utilisation d'une méthode volumes finis avec un décentrement dans le sens de l'advection. Cette méthode numérique permet, sans itération, d'obtenir une solution stable. L'utilisation de méthodes volumes finis est assez naturel sur Arcane. Cette méthode a donc pu être facilement implémentée dans ce prototype.

9.2.2 Discrétisation en temps

La méthode définie au chapitre 8 suppose également que le problème (8.7) est résolu de manière exacte en temps. Nous rappelons que ce problème consiste à trouver $u_{\varepsilon, H}$ dans $\mathcal{C}^\infty((0, T), V_{\varepsilon, H})$ solution du problème

$$\begin{cases} \forall v_{\varepsilon, H} \in V_{\varepsilon, H}, & \int_{\Omega} \left(\rho^\varepsilon \partial_t u_{\varepsilon, H} v_{\varepsilon, H} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon, H} v_{\varepsilon, H} + A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon, H} \cdot \nabla v_{\varepsilon, H} \right) dx = 0 \\ u_{\varepsilon, H}(0, x) & = \pi_{\varepsilon, H} u^0(x). \end{cases}$$

Dans nos implémentations, la discrétisation en temps a été faite en utilisant la méthode des caractéristiques (voir annexe D). On considère un pas de temps δt et on définit $t^n = n\delta t$. On construit alors une fonction χ telle que, pour chaque temps t^{n+1} :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u}_\varepsilon(t, w^{\varepsilon, H} \circ \chi(t))) (t^{n+1}) = \tilde{D}_{t, H} (\tilde{u}_\varepsilon(t, w^{\varepsilon, H}(x))) (t^{n+1}, x),$$

où $\tilde{D}_{t, H}$ est l'opérateur de dérivée convective vérifiant

$$\tilde{D}_{t, H} = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b_H^*(x) \cdot \nabla$$

et b_H^* est telle que, pour toute maille $K \in \mathcal{K}_K$

$$b_H^*|_K = b^{*,K}.$$

La fonction χ est alors la solution de l'équation différentielle en temps :

$$\partial_t \chi(t) = b_H^*(\chi(t)), \chi(t^{n+1}) = x.$$

Dans ce cas, on introduit

$$X^n(x) = \chi(t^{n+1} - \delta t).$$

Pour chaque temps t^n , on arrive au problème suivant, trouver $u_{\varepsilon,H}^{n+1} \in V_{\varepsilon,H}$ telle que $\forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho^\varepsilon(x) \frac{u_{\varepsilon,H}^{n+1} - u_{\varepsilon,H}^n \circ X^n(x)}{\delta t} v_{\varepsilon,H}(x) + A^\varepsilon(x) \nabla u_{\varepsilon,H}^{n+1}(x) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H}(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)) \cdot \nabla u_{\varepsilon,H}^{n+1}(x) v_{\varepsilon,H}(x) \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Cette méthode est inconditionnellement stable, ce qui signifie qu'elle est stable quelle que soit la valeur du pas de temps δt . La limitation du pas de temps vient du fait que $\chi(t^{n+1} - \delta t)$ doit rester à l'intérieur du domaine considéré. En théorie, le fait de prendre des conditions aux bords périodiques revient à considérer un domaine infini. Avec le logiciel *FreeFem++* le calcul du terme $u^n \circ w^{\varepsilon,H} \circ X^n(x)$ peut être effectué. La fonction utilisée dans ce logiciel pour calculer ce terme n'intègre pas cette particularité du cas périodique. Ainsi, il est pour l'instant nécessaire d'appliquer une condition de type CFL pour que $\chi(t^{n+1} - \delta t)$ reste dans le domaine.

Cependant, la fonction permettant de calculer ce terme a également été implémentée dans notre prototype Arcane. Cette fonction est directement inspirée de celle existante dans *FreeFem++* mais nous avons pu rajouter un cas particulier pour les conditions aux bords périodiques. Cela permet d'appliquer cette méthode avec des pas de temps quelconques.

9.2.3 Construction du système grossier

Nous avons donc vu comment ce problème pouvait être discrétisé en temps. Nous allons maintenant voir comment le problème totalement discrétisé (9.2) est résolu en pratique. Par définition de $V_{\varepsilon,H}$, les fonctions $u_{\varepsilon,H}^n \in V_{\varepsilon,H}$ se décomposent sur les $\Phi_i^{\varepsilon,H}$:

$$u_{\varepsilon,H}^n(x) = \sum_{i=1}^{D_H} u_i^n \Phi_i^{\varepsilon,H}(x).$$

On utilise ensuite comme fonctions tests les différentes fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}(x)$. On a donc à résoudre pour tout $i = 1, \dots, D_H$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{D_H} \int_{\Omega} \left(\frac{u_j^{n+1}}{\delta t} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) - \frac{u_j^n}{\delta t} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j^{\varepsilon,H} \circ X^n(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \right. \\ \left. + u_j^{n+1} A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \right. \\ \left. + u_j^{n+1} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ vérifient

$$\Phi_i^{\varepsilon,H} = \Phi_i^{\varepsilon,H} \circ w^{\varepsilon,H}.$$

Nous avons vu au chapitre 8, ou plus particulièrement dans l'inégalité (8.29) que

$$\|\tilde{w}^{\varepsilon,H} - x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

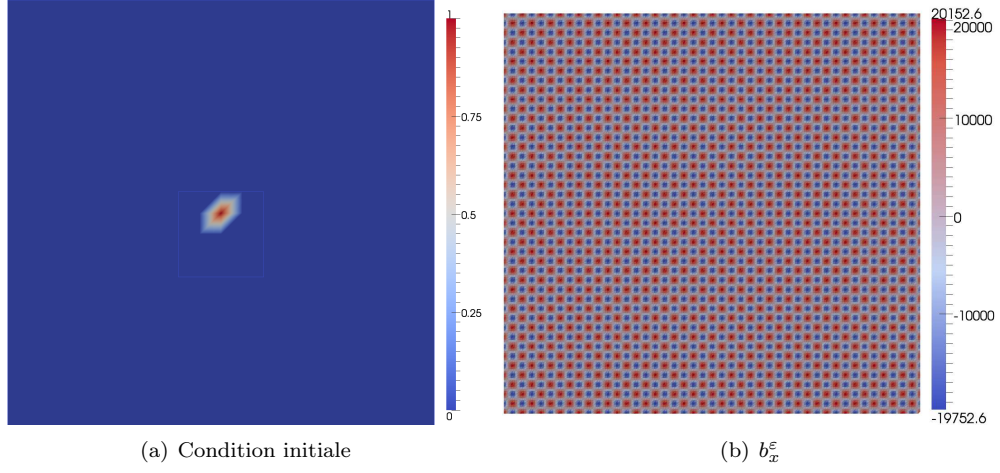


FIGURE 9.3 – À gauche, la condition initiale. À droite, le champ de vitesse b_x^ε imposé dans la direction x

On en déduit que les termes utilisant les fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ peuvent être remplacées par Φ_i si leur gradient n'apparaît pas. On obtient ainsi, pour tout $i = 1, \dots, D_H$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{D_H} u_j^{n+1} & \left(\int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) \left(\Phi_i(x) \Phi_j(x) + \delta t A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\delta t}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \right) dx \right) \\ & = \sum_{j=1}^{D_H} u_j^n \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j \circ X^n(x) \Phi_i(x) dx. \end{aligned}$$

Cela s'écrit matriciellement

$$RU^{n+1} = F^n, \quad (9.3)$$

avec

$$\begin{aligned} U^{n+1} & \in \mathbb{R}^{D_H}, \quad U_i^{n+1} = u_i^{n+1}, \\ R & \in \mathbb{R}^{D_H \times D_H}, \quad R_{i,j} = \int_{\Omega} \left(\rho^\varepsilon(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) + \delta t A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\delta t}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \right) dx, \\ F^n & \in \mathbb{R}^{D_H}, \quad F_i^n = \sum_{j=1}^{D_H} u_j^n \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j \circ X^n(x) \Phi_i(x) dx. \end{aligned}$$

9.3 Application de la méthode

9.3.1 Cas d'application

On considère le domaine $\Omega = (0,1)^2$. On choisit une condition initiale ayant pour support un sous-domaine de Ω (voir figure 9.3(a)) et valant 1 au nœud du maillage grossier situé le plus au centre du domaine et 0 sur les autres nœuds. On impose le champ de vitesse :

$$b^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0 \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{pmatrix}.$$

Sa composante horizontale est représentée sur la figure 9.3(b). Ce champ de vitesse est à divergence nulle et de moyenne $b^0 = \begin{pmatrix} b_x^0 \\ b_y^0 \end{pmatrix}$.

On considère un coefficient de diffusion $A = 1$.

Les conditions aux bords du domaine sont périodiques. Cela nous permet d'appliquer nos résultats vérifiés sur l'espace tout entier en ne considérant qu'un domaine fini.

Dans la suite, nous utilisons également les valeurs suivantes :

- $\varepsilon = \frac{1}{200}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 1$.

Le maillage grossier associé à ce problème est composé de 800 triangles de diamètre

$$H = \frac{1}{20} = 10\varepsilon.$$

Chaque maille grossière contient 5 000 triangles de diamètre

$$h = \frac{1}{1000} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour appliquer notre méthode, il n'est pas nécessaire de construire complètement le maillage fin. Si nous l'avions fait, celui-ci aurait été composé de 4 000 000 de triangles.

9.3.2 Visualisation de la solution en utilisant *FreeFem++*

La matrice R et le second membre F^n dans l'équation (9.3) sont progressivement construits après chaque résolution du problème de cellule (8.5). Ce système est défini sur le maillage grossier. Une fois la résolution effectuée, la solution multi-échelle s'écrit

$$u_{\varepsilon,H}^n(x) = \sum_{i=1}^{D_H} u_i^n \Phi_i^{\varepsilon,H}(x).$$

Rappelons que les fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ sont calculées sur des maillages fins locaux et que le maillage fin n'est jamais complètement construit. Ainsi, pour visualiser la reconstruction fine de la solution, nous sélectionnons une zone de l'espace et n'appliquons la reconstruction que dans cette zone. Ailleurs, nous considérons que $\Phi_i^{\varepsilon,H}(x) = \Phi_i^H(x)$. La figure 9.4 montre un exemple de fonction de base grossière et multi-échelle. Un exemple de reconstruction est donné sur la figure 9.6(b).

Ici, comme le cas est périodique, la solution multi-échelle peut être directement comparée à la solution homogénéisée. Nous avons donc calculé le vecteur w sur la cellule unité et la solution u^n du problème homogénéisé (7.11). Puis nous avons posé

$$\tilde{u}_{\varepsilon}^n = u^n \left(x - \frac{b^* t^n}{\varepsilon} \right).$$

D'après les résultats d'homogénéisation rappelés au paragraphe 7.7, cette fonction est une première approximation de u_{ε} . Cette solution ainsi que la solution multi-échelle non reconstruite sont représentées sur les figures 9.5(b) et 9.5(c) à un instant donné.

Comme pour la solution multi-échelle, une reconstruction de la solution homogénéisée est également possible sur le maillage fin. Nous utilisons pour cela l'approximation (8.4) et calculons localement la fonction :

$$\tilde{u}_{\varepsilon,1}^n = u^n \left(x - \frac{b^* t^n}{\varepsilon} + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right).$$

Cette seconde fonction est une meilleure approximation de u_{ε} (voir paragraphe 7.8). Les deux fonctions reconstruites, multi-échelle et homogénéisée, sont représentées sur les figures 9.6(b) et 9.6(a) à un instant

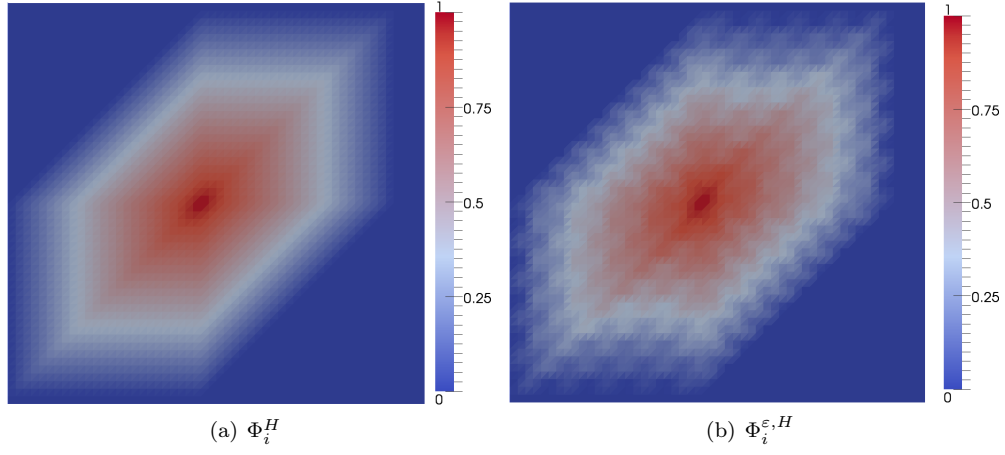


FIGURE 9.4 – Une fonction de base définie sur le maillage grossier (Φ_i^H) et la fonction de base multi-échelle associée ($\Phi_i^{\varepsilon, H}$)

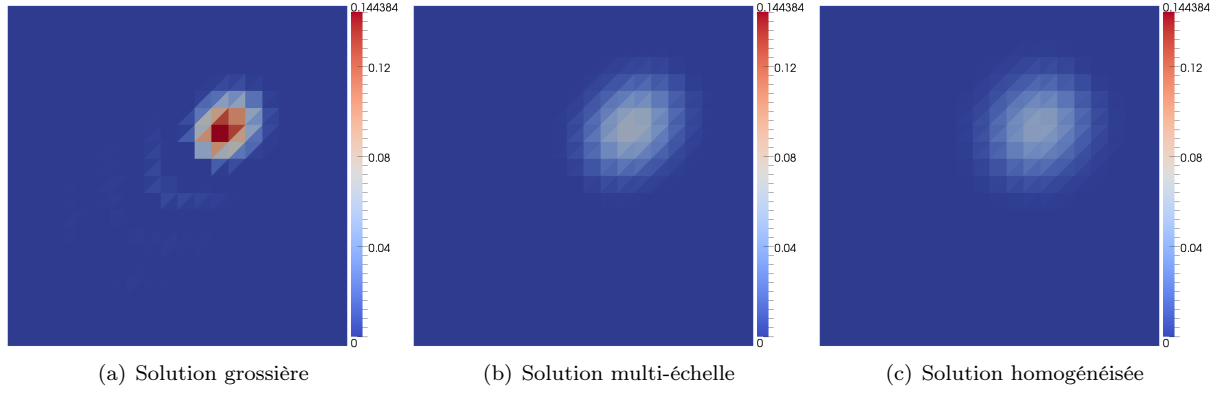


FIGURE 9.5 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue par homogénéisation périodique

donné.

En fait, la solution multi-échelle s'avère être plus précise même à l'échelle grossière. En effet, si nous simulons à l'échelle grossière le transport de la condition initiale par le champ de vitesse b^* et un coefficient de diffusion égal $A = 1$, nous obtenons la solution représentée sur la figure 9.5(a). Nous remarquons que les valeurs obtenues avec cette méthode sont plus élevées que celles données par les solutions homogénéisée et multi-échelle. En fait la vitesse b^ε possède une composante de moyenne nulle qui crée une dispersion supplémentaire à l'intérieur du domaine. Numériquement, ce phénomène est inclus dans la matrice de diffusion homogénéisée A^* définie par (7.12). Sur cet exemple, cette matrice possède, sur sa diagonale, des coefficients quatre fois plus élevés que le coefficient de diffusion A . La méthode multi-échelle permet donc bien de reproduire cette diffusion additionnelle. Cette diffusion supplémentaire est souvent appelée *dispersion de Taylor* [AA95].

9.3.3 Résultats obtenus en utilisant la plate-forme *Arcane*

Nous nous intéressons maintenant à l'implémentation qui a été faite de cette nouvelle méthode multi-échelle sur la plate-forme de développement *Arcane*. Cette implémentation a été plus compliquée que celle sur *FreeFem++*. En effet, comme nous l'avons précisé au paragraphe 9.1.2, nous avons d'abord dû implémenter la méthode des éléments finis de Lagrange. Pour appliquer la méthode des caractéristiques, nous avons

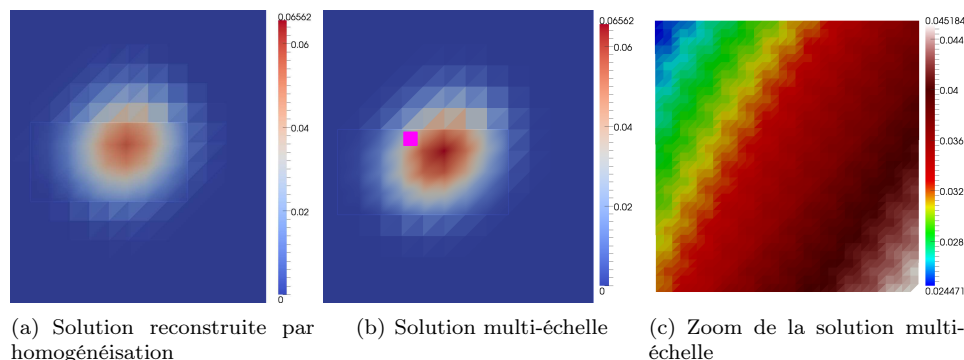


FIGURE 9.6 – Comparaison entre la solution raffinée obtenue en utilisant la méthode multi-échelle et la solution reconstruite par homogénéisation périodique. La figure de droite est un zoom de la solution multi-échelle. La partie extraite est indiquée avec une pastille rose sur la seconde figure

également dû rajouter une fonction permettant de calculer la valeur d'une fonction de cet espace éléments finis lorsqu'on la compose avec une autre fonction.

Cependant, la grande différence entre les deux implémentations est la gestion des maillages. Nous avons vu, au paragraphe précédent, que le prototype *FreeFem++* que nous avons programmé ne construit jamais le maillage fin complet : on se contente de raffiner les mailles grossières pour résoudre les problèmes de cellule et calculer les termes intervenant dans le système linéaire grossier. Le gestionnaire de maillage d'*Arcane* ne permet pas d'utiliser la même méthode. Ainsi, dans notre cas, le maillage fin complet doit être construit.

De plus, la gestion de conditions aux bords périodiques n'est pas gérée nativement par *Arcane*. L'ajout de ce type de conditions aux bords n'est pas compliqué mais, cela crée une dépendance entre la solution à un bord et la solution dans le bord symétrique. Ainsi, lors d'une implémentation en parallèle, les mailles *fantômes* et les mailles *partagées* d'un domaine devraient être définies en prenant en compte cette dépendance. Cela n'est pas possible en utilisant les partitionneurs actuellement disponibles dans la plate-forme *Arcane*. Tous les tests effectués avec cette méthode ont donc eu lieu en séquentiel.

Par conséquent, les cas traités avec ce prototype sont composés de moins de mailles. Les propriétés physiques sont définies par les formules du cas présenté au paragraphe 9.3.1 mais avec les valeurs suivantes :

- $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 100$.

Le tenseur de diffusion est $A = 0,001$. La condition initiale est sinusoïdale dans les deux directions (voir figure 9.7).

Nous considérons un maillage fin composé de 200 mailles fines dans chaque direction. Chaque maille fine est un carré de taille $\frac{1}{2000}$. Le domaine total est donc un carré de taille 0,1. Le maillage grossier est lui composé de 40 mailles dans chaque direction. Nous présentons sur la figure 9.8 les différentes solutions calculées. Le maillage fin étant composé de moins de mailles, nous avons, dans ce cas, pu faire la comparaison avec une solution fine. Sur ce cas, on constate que la méthode multi-échelle approche plus précisément la solution fine que la résolution sur un maillage grossier.

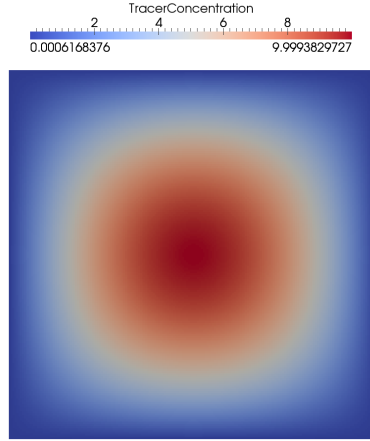


FIGURE 9.7 – Condition initiale du cas testé sur le prototype *Arcane*

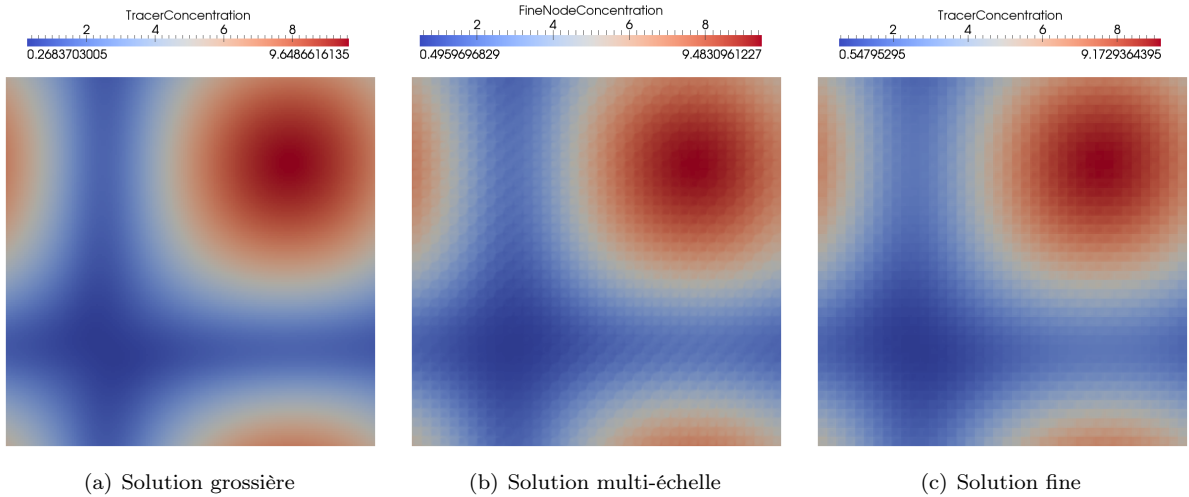


FIGURE 9.8 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue en effectuant la simulation sur le maillage fin

Bibliographie

- [AA95] J.-L. Auriault and P.M. Adler. Taylor dispersion in porous media : analysis by multiple scale expansions. *Advances in Water Resources*, 18(4) :217–226, 1995.
- [AA99] G. Allaire and M. Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 4 :209–243, 1999.
- [AADH06] G. Allaire, A. Arnold, P. Degond, and Th.Y. Hou. Quantum Transport : Modelling, Analysis and Asymptotics - Lectures given at the C.I.M.E. summer school held in Cetraro, Italy, September 11-16, 2006. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1946. Springer, 2006.
- [AB05] G. Allaire and R. Brizzi. A multiscale finite element method for numerical homogenization. *Multiscale Model. Simul.*, 4(3) :790–812, 2005. ISSN 1540-3459.
- [Abb11] Thomas Abballe. *Simulation multi-échelle et homogénéisation des matériaux cimentaires*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.
- [ABBM98] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part I : Derivation of the methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1700–1716, 1998.
- [Abd05] Assy Abdulle. On a priori error analysis of fully discrete heterogeneous multiscale fem. *Multiscale Model. Simul.*, 4(2) :447–459, 2005.
- [Abd13] Assy Abdulle. Numerical homogenization methods. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics (to be published)*, 2013.
- [ABMP10] G. Allaire, R. Brizzi, A. Mikelić, and A.L. Piatnitski. Two-scale expansion with drift approach to the Taylor dispersion for reactive transport through porous media. *Chemical Engineering Science*, 65(7) :2292–2300, 2010. ISSN 0009-2509.
- [ADEO12] G. Allaire, S. Desrozier, G. Enchéry, and F. Ouaki. A multiscale finite element method for transport modeling. In *CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Vienna University of Technology, Austria, 2012. ISBN 978-3-9502481-9-7.
- [AHE07] J.E. Aarnes, V.L. Hauge, and Y. Efendiev. Coarsening of three-dimensional structured and unstructured grids for subsurface flow. *Advances in Water Resources*, 30(11) :2177–2193, 2007.
- [AKL08] J.E. Aarnes, S. Krogstad, and K.A. Lie. Multiscale mixed/mimetic methods on corner-point grids. *Comput. Geosci.*, 12(3) :297–315, 2008.
- [AKP07] J.-B. Apoung Kamga and O. Pironneau. Numerical zoom for multiscale problems with an application to nuclear waste disposal. *J. Comput. Phys.*, 224(1) :403–413, 2007.
- [All92] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) : 1482–1518, 1992.
- [All02] Grégoire Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146. Springer, 2002.
- [All05] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Éditions École Polytechnique, 2005.
- [AMP10] G. Allaire, A. Mikelić, and A.L. Piatnitski. Homogenization approach to the dispersion theory for reactive transport through porous media. *SIAM J. Math. Anal.*, 2010.

-
- [APP12] G. Allaire, I. Pankratova, and A.L. Piatnitski. Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain. *J. Funct. Anal.*, 262(1) :300–330, 2012.
 - [AR07] G. Allaire and A.L. Raphael. Homogenization of a convection-diffusion model with reaction in a porous medium. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 344(8) :523–528, 2007. ISSN 1631-073X.
 - [Arb00] Todd Arbogast. Numerical subgrid upscaling of two-phase flow in porous media. In *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media : Proceedings of the International Workshop Held at Beijing, China, 2-6 August, 1999*, volume 552, pages 35–49. Springer, 2000.
 - [AS79] K. Aziz and A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation*. Applied Science Publishers, London, 1979.
 - [Bab76] Ivo Babuška. Homogenization and its application. mathematical and computational problems. *Numerical solution of partial differential equations III*, pages 89–116, 1976.
 - [Bea88] Jacob Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. Dover (New York), 1988.
 - [Ben64] Pierre Benoist. *Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités*. PhD thesis, Centre d’études nucléaires de Saclay, 1964.
 - [BFR98] F. Brezzi, L. Franca, and A. Russo. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 166(1) :25–33, 1998.
 - [BH82] A.N. Brooks and Th.J.R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32(1) :199–259, 1982.
 - [BJP03] A. Bourgeat, M. Jurak, and A.L. Piatnitski. Averaging a transport equation with small diffusion and oscillating velocity. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(2) :95–117, 2003.
 - [BLP78] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, 1978. ISBN 0444851720.
 - [BO83] I. Babuška and J.E. Osborn. Generalized finite element methods : their performance and their relation to mixed methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3) :510–536, 1983.
 - [BP89] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenisation : averaging processes in periodic media : mathematical problems in the mechanics of composite materials*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
 - [BPS83] M. Bercovier, O. Pironneau, and V. Sastri. Finite elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems. *Appl. Math. Modelling*, 7(2) :89–96, 1983.
 - [BQW88] A. Bourgeat, M. Quintard, and S. Whitaker. Eléments de comparaison entre la méthode d’homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, 306(7) :463–466, 1988.
 - [BR94] F. Brezzi and A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Model. Meth. Appl. Sci.*, 4(4) :571–587, 1994.
 - [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
 - [CB01] M.A. Christie and M.J. Blunt. Tenth SPE comparative solution project : A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4(4) :308–317, 2001.
 - [CD99] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 26. Oxford University Press Oxford, 1999.
 - [CDG02] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(1) :99–104, 2002.
 - [CFL28] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1) :32–74, 1928.
 - [CH02] Z. Chen and Th.Y. Hou. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Math. Comput.*, 72(242) :541–576, 2002.
 - [Cia78] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978. ISBN 0444850287.

- [Coa00] Keith H. Coats. A note on IMPES and some IMPES-based simulation models. *SPE Journal*, 5(3) :245–251, 2000.
- [CTP95] K.H. Coats, L.K. Thomas, and R.G. Pierson. Compositional and black oil reservoir simulation. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 1995.
- [Dar56] Henry Darcy. Les fontaines de la ville de dijon. *Victor Dalmont, Paris*, 1856.
- [DG75] Ennio De Giorgi. Sulla convergenza di alcune successioni d’integrali del tipo dell’area. *Rendi Conti di Mat.*, 8 :277–294, 1975.
- [DG83] Ennio De Giorgi. G-operators and γ -convergence. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1175–1191. PWN Polish Scientific Publishers and North Holland, Warsaw, Poland, 1983.
- [DP05] P. Donato and A.L. Piatnitski. Averaging of nonstationary parabolic operators with large lower order terms. *Multi Scale Problems and Asymptotic Analysis. GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl*, 24 :153–165, 2005.
- [DS73] E. De Giorgi and S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell’energia per operatori ellittici del secondo ordine. *Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser.*, 8 :391–411, 1973. ISSN 0041-7084.
- [EE03] W. E and B. Engquist. The heterogeneous multiscale methods. *Comm. Math. Sci.*, 1(1) : 87–132, 2003.
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7 :713–1018, 2000.
- [EH09] Y. Efendiev and Th.Y. Hou. *Multiscale finite element methods : theory and applications*. Springer Verlag, 2009.
- [ER98] M.G. Edwards and C.F. Rogers. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Comput. Geosci.*, 2(4) :259–290, 1998.
- [Far98] Eva Farkas. Linearization techniques of reservoir-simulation equations : Fully implicit cases. *SPE Journal*, 3(4) :316–323, 1998.
- [Gin04] Victor Ginting. Analysis of two-scale finite volume element method for elliptic problem. *J. Numer. Math.*, 12(2) :119–141, 2004.
- [GL09] G. Grospellier and B. Lelandais. The arcane development framework. In *Proceedings of the 8th workshop on Parallel/High-Performance Object-Oriented Scientific Computing*, page 4. ACM, 2009.
- [Glo06] Antoine Gloria. An analytical framework for the numerical homogenization of monotone elliptic operators and quasiconvex energies. *Multiscale Model. Simul.*, 5(3) :996–1043, 2006.
- [Gol90] François Golse. Averaging of vector fields and PDE. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–17, 1990.
- [GV95] D.R. Guerillot and S. Verdière. Different pressure grids for reservoir simulation in heterogeneous reservoirs. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, February 1995.
- [HDJ11] H. Hajibeygi, R. Deb, and P. Jenny. Multiscale finite volume method for non-conformal coarse grids arising from faulted porous media. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2011.
- [HL09] Th.Y. Hou and D. Liang. Multiscale analysis for convection dominated transport equations. *DCDS*, 23(1-2) :281–298, 2009.
- [HO10] P. Henning and M. Ohlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift. *Netw. Heterog. Media*, 5(4) :711–744, 2010.
- [HPLHO98] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. Freefem++. *Laboratoire J.-L. Lions, University of Paris VI, France*, 1998.
- [HR13] Harsha Hutridurga Ramaiah. *Homogenization of complex flows in porous media and applications*. PhD Thesis, École polytechnique, 2013.

-
- [HW97] Th.Y. Hou and X.H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J. Comput. Phys.*, 134(1) :169–189, art. no. cp975682, 1997.
 - [JLT03] P. Jenny, S.H. Lee, and H.A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J. Comput. Phys.*, 187(1) :47–67, 2003.
 - [KLN⁺09] S. Krogstad, K.A. Lie, H. Nilsen, J. Natvig, B. Skaflestad, and J. Aarnes. A multiscale mixed finite element solver for three phase black oil flow. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2009.
 - [KLS04] Y. Kuznetsov, K. Lipnikov, and M. Shashkov. The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems. *Comput. Geosci.*, 8(4) :301–324, 2004.
 - [Koz80] Sergei Mikhailovich Kozlov. Averaging of random operators. *Math. USSR-Sb.*, 37(2) :167–180, 1980.
 - [LM54] P.D. Lax and A.N. Milgram. Parabolic equations, volume 33 of *Annals of Mathematics Studies*, 1954.
 - [LM68] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications (3 volumes)*. Dunod, Paris, 1968.
 - [LV00] Y. Y. Li and M. Vogelius. Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(2) :91–151, 2000.
 - [LZT09] S. H. Lee, H. Zhou, and H. A. Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for nonlinear multiphase transport in heterogeneous formations. *J. Comput. Phys.*, 228(24) :9036–9058, 2009. ISSN 0021-9991.
 - [Max81] James C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881.
 - [MB96] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139(1) :289–314, 1996.
 - [MBS00] A.M. Matache, I. Babuška, and C. Schwab. Generalized p-FEM in homogenization. *Numer. Math.*, 86(2) :319–375, 2000.
 - [MPP85] D.W. McLaughlin, G. Papanicolaou, and O. Pironneau. Convection of microstructure and related problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 45(5) :780–797, 1985.
 - [MPP05] E. Marušić-Paloka and A.L. Piatnitski. Homogenization of a nonlinear convection-diffusion equation with rapidly oscillating coefficients and strong convection. *J. London Math. Soc.*, 72(2) :391–409, 2005.
 - [MT97] F. Murat and L. Tartar. H-convergence. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, pages 21–43. Springer, 1997.
 - [MvdV77] J. Meijerink and H. A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix. *Math. Comput.*, 31(137) :148–162, 1977.
 - [MZ⁺05] Pingbing Ming, Pingwen Zhang, et al. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems. *J. Am. Math. Soc.*, 18(1) :121–156, 2005.
 - [Ngu89] Gabriel Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.
 - [OZ07] H. Owhadi and L. Zhang. Metric-based upscaling. *Commun. Pure Appl. Math.*, 60(5) :675–723, 2007.
 - [OZ08] H. Owhadi and L. Zhang. Numerical homogenization of the acoustic wave equations with a continuum of scales. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 198(3) :397–406, 2008.
 - [Pap95] George C. Papanicolaou. Diffusion in random media. *Surveys in applied mathematics*, 1 : 205–253, 1995.
 - [Pir88] Olivier Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Masson, Paris, 1988.
 - [Poi25] Siméon-Denis Poisson. *Second mémoire sur la théorie du magnétisme*. Imprimerie royale, 1825.
 - [PS08] G.A. Pavliotis and A.M. Stuart. *Multiscale methods : averaging and homogenization*, volume 53. Springer, 2008.

- [PV⁺79] George C Papanicolaou, SR Srinivasa Varadhan, et al. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. *Random fields*, 1 :835–873, 1979.
- [RDM97] Ph. Renard and G. De Marsily. Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Resources*, 20(5) :253–278, 1997.
- [Rei07] James Reinders. *Intel Threading Building Blocks : Outfitting C++ for Multi-core Processor Parallelism*. O’Reilly Media, Inc, 2007.
- [SGJ61] H.L. Stone and A.O. Garder Jr. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Old SPE Journal*, 1(2) :92–104, 1961.
- [SP80] Évariste Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [Spa68] Sergio Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4) :571–597, 1968.
- [Spa76] Sergio Spagnolo. Convergence in energy for elliptic operators. In *Proc. Third Symp. Numer. Solut. Partial Diff. Equat.*, pages 469–498. Acad. Press, New York, 1976.
- [Stü01] Klaus Stüben. A review of algebraic multigrid. *J. Comput. Appl. Math.*, 128(1) :281–309, 2001.
- [SW05] S. Sun and M.F. Wheeler. Discontinuous galerkin methods for coupled flow and reactive transport problems. *Appl. Numer. Math.*, 52(2) :273–298, 2005.
- [SZC59] J.W. Sheldon, B. Zondek, and W.T. Cardwell. One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *Trans. SPE AIME*, 216 :290–296, 1959.
- [Tar76] Luc Tartar. Quelques remarques sur l’homogénéisation. In *Functional Analysis and Numerical Analysis, Proceedings of the Japan-France Seminar*, pages 469–482. Japan Society for the Promotion of Sciences, 1976.
- [Tar09] Luc Tartar. *The general theory of homogenization : a personalized introduction*, volume 7. Springer, 2009.
- [Top13] Top500. Supercomputer sites, June 2013. URL <http://www.top500.org/>.
- [TYHC99] X.-H. Wu Th. Y. Hou and Z. Cai. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. *Math. Comput.*, 68(227) :913–943, 1999.
- [vdV92] Henk A. van der Vorst. Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2) :631–644, 1992.
- [WD96] D. W. Walker and J. J. Dongarra. MPI : a standard message passing interface. *Supercomputer*, 12 :56–68, 1996.
- [Whe73] Mary F. Wheeler. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(4) :723–759, 1973.
- [WR67] E.T. Whittaker and G. Robinson. The Newton-Raphson method. *The calculus of observations : a treatise on numerical mathematics*, 4th ed. Dover, New York, 1967.
- [ZKO94] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer Verlag, 1994.

Annexe A

Résultats d'analyse fonctionnelle et d'approximation variationnelle

Sommaire

A.1 Définitions et résultats importants	165
A.1.1 Espaces L^p	165
A.1.2 Espaces de Sobolev	166
A.1.3 Espaces $W_0^{1,p}$	167
A.1.4 Inégalités de Sobolev	167
A.2 Résolution d'équations aux dérivées partielles	168
A.2.1 Théorème de Lax-Milgram et généralisation	168
A.2.2 Théorème de Jacques-Louis Lions	168
A.2.3 Régularité elliptique	168
A.3 Approximation variationnelle des solutions d'équations aux dérivées partielles	169
A.3.1 Lemme de Cea	169
A.3.2 Définition d'un élément fini	170
A.3.3 Éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange	170
A.3.4 Élément de référence	170
A.3.5 Inégalités d'interpolation	171

Cette annexe rappelle un certain nombre de résultats d'analyse fonctionnelle et d'approximation variationnelle. Ces résultats, assez classiques, sont utilisés tout au long du manuscrit.

A.1 Définitions et résultats importants

Les définitions et résultats présentés dans ce paragraphe sont issus du livre [Bre83] de H. Brezis. Dans toute la suite, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. On suppose, pour plus de simplicité, que Ω est de classe \mathcal{C}^1 . On supposera également que sa frontière $\partial\Omega$ est bornée.

A.1.1 Espaces L^p

Définition A.1. On note $L^1(\Omega)$, l'ensemble des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} . On pose alors pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| \, dx.$$

Définition A.2. Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq p < +\infty$. On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note alors

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition A.3. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}$$

On note alors

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{C \in \mathbb{R}_+} \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ sont des espaces de Banach. De plus, l'espace $L^2(\Omega)$ peut être muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ défini par

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

Muni de ce produit scalaire $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

A.1.2 Espaces de Sobolev

Définition A.4 (Multi-indices). On définit un multi-indice α comme un vecteur de \mathbb{N}^N . On note alors

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

On définit pour une fonction u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Définition A.5. Soit un entier p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On définit tout d'abord

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Pour un entier $m \geq 1$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ par récurrence :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \mid \forall i = 1, \dots, N, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \right\}.$$

La dérivée ici est la dérivée au sens des distributions. On définit ensuite pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\ \text{et} \quad |u|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ sont des espaces de Banach. De plus, pour $p = 2$ on définit

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Pour tout $m \geq 1$ l'espace $H^m(\Omega)$ peut être muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^m(\Omega)}$ défini par

$$\forall u, v \in H^m(\Omega), \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Muni de ce produit scalaire $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

A.1.3 Espaces $W_0^{1,p}$

Définition A.6 (Fonctions $C_c^k(\Omega)$). Pour $k \geq 0$ entier, on définit $C_c^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact.

Définition A.7. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note également

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Remarques A.1 :

On peut montrer que ces espaces peuvent également être définis comme la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Sur l'espace \mathbb{R}^N , on a $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

On admet ici que les fonctions de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ admettent une trace sur $\partial\Omega$. Pour une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note alors $u|_{\partial\Omega}$ sa trace et on a

$$u|_{\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega).$$

Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ peuvent alors être définis par

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Théorème A.1 (Inégalité de Poincaré). On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante $C_{\Omega,p}$ dépendant de Ω et p telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\Omega,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}.$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème A.2 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). Il existe une constante C telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \text{avec } \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u.$$

A.1.4 Inégalités de Sobolev

Définition A.8. Soient E et F deux espaces normés. On dit que E s'injecte continûment dans F si

- $E \subset F$,
- il existe une constante C telle que $\forall u \in E, \|u\|_F \leq C \|u\|_E$.

On note alors

$$E \hookrightarrow F.$$

Avec cette définition, il est clair que

$$\forall p \in [1, +\infty], \forall k \geq 0, \quad W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega).$$

Théorème A.3. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On a les injections continues suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & 1 \leq p < N, & \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \\ \text{si} & p = N, & \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \\ \text{si} & p > N, & \text{alors} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad \forall q \in [1, +\infty[.$$

A.2 Résolution d'équations aux dérivées partielles

A.2.1 Théorème de Lax-Milgram et généralisation

On considère \mathcal{H} un espace de Hilbert réel dont on notera $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) .

Théorème A.4 (Lax-Milgram [LM54]). *On souhaite résoudre le problème qui consiste à trouver $u \in \mathcal{H}$ telle que*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u, v) = L(v),$$

où a est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire.

Si la forme bilinéaire a est

– continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ie.

$$\exists C_a > 0, \forall (u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad |a(u, v)| \leq C_a \|u\| \|v\|,$$

– coercive sur \mathcal{H} ie.

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{H}, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Et, si la forme linéaire L est continue sur \mathcal{H} ie.

$$\exists C_L > 0, \forall u \in \mathcal{H}, \quad |L(u)| \leq C_L \|u\|,$$

alors il existe un et un seul élément $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u, v) = L(v). \quad (\text{A.1})$$

A.2.2 Théorème de Jacques-Louis Lions

Pour simplifier les notations, on se place dans des espaces fixés mais ce théorème possède une forme plus générale (voir [Bre83]). On définit $H^{-1}(\Omega)$ le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$. On se fixe un réel $T > 0$.

Théorème A.5 ([LM68]). *On se donne pour tout $t \in [0, T]$ la forme bilinéaire $a(t; \cdot, \cdot)$ définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et vérifiant*

- $\forall t \in [0, T], \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad |a(t; u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$
- $\forall t \in [0, T], \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$

où $\alpha > 0$, C et M sont des constantes.

Étant donnés $f \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction u telle que

$$\begin{aligned} u &\in L^2((0, T), H_0^1(\Omega)) \cap C^0((0, T), L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega)) \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], \forall v \in \mathcal{H}, \quad \left(\frac{du}{dt}(t), v \right)_{L^2(\Omega)} + a(t; u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ sur } [0, +\infty) \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

A.2.3 Régularité elliptique

Théorème A.6. *Soient $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty((0, T) \times \Omega)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose de plus que la matrice des a_{ij} est définie positive :*

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2,$$

où $|\xi|$ est la norme euclidienne classique sur \mathbb{R}^N . On veut résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

On suppose que Ω est borné et de classe C^∞ . On suppose que $f \in C^\infty((0,T) \times \bar{\Omega})$. Alors le problème (A.2) a une solution unique et cette solution appartient à $C^\infty(\bar{\Omega})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On a un résultat équivalent pour un problème dépendant du temps.

Théorème A.7. Soient $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty((0,T) \times \Omega)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose de plus que la matrice des a_{ij} est uniformément coercive. On veut résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u & = & f \text{ sur } (0,T) \times \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega. \\ u(0, \cdot) & = & u_0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

On suppose que Ω est borné et de classe C^∞ . On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que $f \in C^\infty((0,T) \times \bar{\Omega})$. Alors le problème (A.3) a une solution unique et cette solution appartient à $C^\infty([\varepsilon, T] \times \bar{\Omega})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Si, de plus, $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\{f, u_0\}$ vérifient certaines relations de compatibilité sur $\partial\Omega \times \{0\}$, alors

$$u \in C^\infty([0, T], \bar{\Omega}).$$

A.3 Approximation variationnelle des solutions d'équations aux dérivées partielles

A.3.1 Lemme de Céa

Lemme A.1. On se place dans les hypothèses du théorème de Lax-Milgram et on considère V_h un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} . On considère $u_h \in V_h$ la solution au problème :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

Alors il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \beta \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}},$$

où u , comme dans le théorème A.4 est la solution au problème (A.1) dans \mathcal{H} .

Démonstration. Par définition de u_h , on a :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

Comme $V_h \subset \mathcal{H}$, on a également :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u, v_h) = L(v_h).$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient donc :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u - u_h, v_h) = 0.$$

On choisit d'écrire les éléments de V_h sous la forme $v_h - u_h$ avec $v_h \in V_h$. On a donc $\forall v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h - u_h) &= 0, \\ \text{ie. } a(u - u_h, u - u_h + v_h - u) &= 0, \\ \text{ie. } a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h). \end{aligned}$$

On utilise la coercivité de a pour le membre de gauche et sa continuité pour le membre de droite :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \alpha \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_a \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$

Donc

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_a}{\alpha} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout v_h dans V_h , on peut donc prendre l'infimum :

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$

□

A.3.2 Définition d'un élément fini

Définition A.9 ([Cia78]). *Un élément fini est un triplet (K, P, Σ) où*

- (i) *K est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^N d'intérieur non vide avec une frontière continue et lipschitzienne,*
- (ii) *P est un espace de fonctions à valeurs réelles définies sur l'ensemble K ,*
- (iii) *Σ est un ensemble de formes linéaires $\phi_i, i = 1, \dots, \mathcal{N}$, définies sur l'espace P .*

On suppose également que l'ensemble Σ est P -unisolvant : Pour tous réels $\alpha_i, i = 1, \dots, \mathcal{N}$, il existe une unique fonction $p \in P$ vérifiant

$$\phi_i(p) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}.$$

Ainsi, pour $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, il existe une unique fonction $p_i \in P$ vérifiant

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}.$$

On a donc

$$\forall p \in P, \quad p = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \phi_i(p) p_i.$$

Cela montre que l'espace P est de dimension finie et que $\dim(P) = \mathcal{N}$.

Les formes linéaires $\phi_i, i = 1, \dots, \mathcal{N}$ sont appelées degrés de liberté de l'élément fini et les fonctions $p_i, i = 1, \dots, \mathcal{N}$ sont appelées fonctions de base de l'élément fini.

A.3.3 Éléments finis \mathbb{P}_k Lagrange

Définition A.10. *Un élément fini (K, P, Σ) est dit de Lagrange si tous ses degrés de liberté sont des formes linéaires tels que*

$$\phi_i(p) = p(a_i),$$

où les points a_i sont dans l'ensemble K . Ces points sont alors appelés nœuds de l'élément fini.

A.3.4 Éléments de référence

Dans les problèmes qu'on considère, on souhaite en général résoudre une équation sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ce domaine est alors découpé en mailles. On note alors \mathcal{K} ce maillage et on a

$$\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K} = \overline{\Omega}.$$

On désire définir des éléments finis pour chaque maille $K \in \mathcal{K}$. Pour faire cela de manière plus simple on se donne d'abord un *élément fini de référence* $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ associé à des nœuds \hat{a}_i et un ensemble de transformations affines $(F_K)_{K \in \mathcal{K}}$ telles que $K = F_K(\hat{K})$. Alors, pour tout $K \in \mathcal{K}$, on définit l'élément fini (K, P_K, Σ_K) par

$$\begin{aligned} K &= F_K(\hat{K}) \\ P_K &= \left\{ p : K \rightarrow \mathbb{R} \mid p = \hat{p} \cdot F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P} \right\} \\ \Sigma_K &= \left\{ p(F_K(\hat{a}_i)), \quad i = 1, \dots, \hat{\mathcal{N}} \right\}. \end{aligned}$$

A.3.5 Inégalités d'interpolation

Théorème A.8. Soient deux entiers k et m positifs et deux nombres $p, q \in [1, +\infty]$. Soit $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini de référence de type Lagrange. On suppose que l'on a

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{K}), \quad (\text{A.4})$$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{K}), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{P}_k(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{K}). \quad (\text{A.6})$$

On considère un élément fini (K, P, Σ) ayant pour élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. On suppose de plus que l'excentricité de K est borné (voir paragraphe 4.2.3 pour les définitions). Alors, il existe une constante, $C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ telle que, pour toute maille K , et pour toute fonction $v \in W^{k+1,p}(K)$,

$$\|v - \pi_K v\|_{W^{m,q}(K)} \leq C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}) |K|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} H_K^{k+1-m} |v|_{W^{k+1,p}(K)}, \quad (\text{A.7})$$

où H_K est le diamètre de la maille K .

Annexe B

Estimation d'erreur de la solution semi-discrète

Sommaire

B.1	Introduction du problème	173
B.2	Discrétisation	174
B.3	Remarque préliminaire	174
B.4	Estimation d'erreur	175

B.1 Introduction du problème

Soit Ω un pavé de \mathbb{R}^N . Résoudre le problème (8.1) avec les hypothèses 8.1 revient à résoudre le problème : trouver $u \in L^2\left((0,T), H_{\#}^1(\Omega)\right) \cap C^0\left((0,T), L_{\#}^2(\Omega)\right)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall v \in H_{\#}^1(\Omega), & (D_t u(t, \cdot), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t, \cdot), v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{dans } (0, T), \\ u(0, x) & = u^0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u \text{ est } \Omega\text{-périodique.} & \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

où

- $D_t = \rho^\varepsilon(x) \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla$,
- $\operatorname{div}(b^\varepsilon) = 0$,
- $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire classique dans $L^2(\Omega)$,
- a est une forme bilinéaire sur $H_{\#}^1(\Omega) \times H_{\#}^1(\Omega)$ continue et coercive par rapport à la semi-norme H^1 : soient $C_{bnd}, C_{sta} > 0$ les constantes telles

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H_{\#}^1(\Omega), \quad a(u, u) &\geq C_{sta} |u|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \text{et } a(u, v) &\leq C_{bnd} |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

- $f \in L^2(\Omega)$ est le terme source,
- $u^0 \in H_{\#}^1(\Omega)$ est la condition initiale.

Remarque B.2 : Pour le problème (8.1) on a $f = 0$ mais dans cette annexe on montre une inégalité dans un cas plus général. La forme bilinéaire a est alors définie par

$$\forall u, v \in H_{\#}^1(\Omega), \quad a(u, v) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u) v = \int_{\Omega} A^\varepsilon(x) \nabla u \cdot \nabla v.$$

Cette forme bilinéaire vérifie bien les conditions de coercivité et de continuité avec des constantes indépendantes de ε . De plus, on peut modifier le choix de D_t en posant $\tilde{D}_t = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla$. Avec cette définition, \tilde{a} vérifie

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (b^\varepsilon(x) - b^*) \cdot \nabla u v - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u) v.$$

Or, on peut montrer (voir [MPP85]) que cela peut se réécrire

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) + B^\varepsilon(x)) \nabla u \cdot \nabla v,$$

où $B^\varepsilon(x) = B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une matrice antisymétrique et B est une fonction Y -périodique appartenant à l'espace $L^\infty(Y)^{N \times N}$. La forme bilinéaire \tilde{a} vérifie donc aussi les conditions de coercivité et de continuité avec des constantes indépendantes de ε . Et on a également $\operatorname{div}(b^*) = 0$. Les résultats présentés dans la suite sont donc valables pour les deux choix de l'opérateur D_t .

B.2 Discrétisation

On se place dans un cadre semi-discret où le temps est toujours considéré comme étant continu. On définit un espace éléments finis $V_h \subset H_{\#}^1(\Omega)$. On applique alors une méthode de Galerkin : on cherche $u_h : (0, T) \rightarrow V_h$ solution du problème

$$(D_t u_h, v_h)_{L^2(\Omega)} + a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in C^\infty((0, T), V_h). \quad (\text{B.2})$$

L'objectif est de montrer que la solution u_h est proche de la solution u du problème initial (B.1).

Remarque B.3 : Le problème (B.2) est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants (f , a , ρ et b ne dépendent pas du temps). Sa solution est donc dans l'espace $C^\infty((0, T), V_h)$.

B.3 Remarque préliminaire

La démonstration de l'estimation d'erreur dans cette annexe est inspirée de l'article de M.F. Wheeler [Whe73]. Dans cet article, les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes. Dans ce cas, les fonctions u , u_h , v_h et w_h sont dans $H_0^1(\Omega)$ et on a une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} \left| (D_t(w_h - u), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \|D_t(u - w_h)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_h - w_h\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_{sta}}{4} \|u_h - w_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{sta}} \|D_t(u - w_h)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On veut donc utiliser une inégalité de la même forme dans $H_{\#}^1(\Omega)$. On définit l'ensemble

$$\dot{H}_{\#}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H_{\#}^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \varphi = 0 \right\}.$$

On introduit alors son dual $\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)$ auquel on associe la norme

$$\|u\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}_{\#}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} u \varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^N}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\|u\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc $L^2(\Omega) \subset \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)$. On veut maintenant montrer le lemme suivant

Lemme B.2. *Il existe une constante $C_{81} > 0$ telle que*

$$\forall u \in L^2_{\#}(\Omega), \forall v \in H^1_{\#}(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} uv \right| \leq \|u\|_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + C_{81} \left| \int_{\Omega} u \right| \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. En fait,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uv \right| &= \left| \int_{\Omega} u \left(v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v \right) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \int_{\Omega} v \right| \\ &\leq \|u\|_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \frac{1}{|\Omega|} \left| \int_{\Omega} u \right| \left| \int_{\Omega} v \right| \\ &\leq \|u\|_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{\Omega} u \right| \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

B.4 Estimation d'erreur

Le but de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant.

Lemme 8.1. *Il existe une constante $C_{17} > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\Omega_T} &\leq C_{17} \inf_{v_h \in \mathcal{C}^{\infty}((0,T), V_h)} \left(\|u - v_h\|_{\Omega_T} \right. \\ &\quad \left. + \|D_t(u - v_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega))} + \left\| \int_{\Omega} D_t(u - v_h) \right\|_{L^2((0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \|(u_h - v_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $w_h \in \mathcal{C}^{\infty}((0,T), V_h)$. On a, $\forall v_h \in \mathcal{C}^{\infty}((0,T), V_h)$

$$(D_t w_h, v_h)_{L^2(\Omega)} + a(w_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} + (D_t(w_h - u), v_h)_{L^2(\Omega)} + a(w_h - u, v_h). \quad (\text{B.3})$$

En faisant (B.2) – (B.3) avec $v_h = u_h - w_h$, on a

$$\begin{aligned} (D_t(u_h - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} + a(u_h - w_h, u_h - w_h) \\ = (D_t(u - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} + a(u - w_h, u_h - w_h). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On a, pour le membre de gauche de l'équation (B.4) :

$$(D_t(u_h - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho^{\varepsilon}}(u_h - w_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ car } \forall u \in H^1_{\#}(\Omega) \quad (b^{\varepsilon} \cdot \nabla u, u)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$a(u_h - w_h, u_h - w_h) \geq C_{sta} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Pour le membre de droite, on a

$$\begin{aligned} |a(u - w_h, u_h - w_h)| &\leq C_{bnd} |u - w_h|_{H^1(\Omega)} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_{sta}}{4} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C_{bnd}^2}{C_{sta}} |u - w_h|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme B.2

$$\begin{aligned}
 \left| (D_t(w_h - u), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \|D_t(u - w_h)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)} \|\nabla(u_h - w_h)\|_{L^2(\Omega)^N} \\
 &\quad + C_{81} \left| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right| \|u_h - w_h\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \frac{C_{sta}}{4} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{C_{sta}} \|D_t(u - w_h)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \frac{\rho_{min}}{2} \|u_h - w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \frac{C_{81}^2}{2\rho_{min}} \left| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right|^2.
 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{2C_{bnd}^2}{C_{sta}} |u - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{C_{sta}} \|D_t(u - w_h)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \rho_{min} \|u_h - w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_{81}^2}{\rho_{min}} \left| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right|^2 \\
 &\quad - C_{sta} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\rho^\varepsilon(x) \geq \rho_{min}$ on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + C \left(|u - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \|D_t(u - w_h)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right|^2 \right) - C_{sta} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

On utilise ensuite une inégalité de Grönwall entre 0 et $t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned}
 \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq e^t \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + C \int_0^t e^{t-s} \left(|u - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \|D_t(u - w_h)\|_{\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right|^2 ds \right) - C_{sta} \int_0^t e^{t-s} |u_h - w_h|_{H^1(\Omega)}^2 ds.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\forall s \in (0, t), \quad 1 \leq e^{t-s} \leq e^t,$$

on a

$$\begin{aligned}
 \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ C_{sta} |u_h - w_h|_{L^2((0, t), H^1(\Omega))}^2 \\
 &\leq e^t \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + C e^t \left(|u - w_h|_{L^2((0, t), H^1(\Omega))}^2 + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0, t), \dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left\| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0, t)}^2 \right). \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq e^T \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + Ce^T \left(|u - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $t \in [0, T]$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))}^2 &\leq C \left(\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad + |u - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \\ &\quad \left. + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \right). \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

De même, en utilisant l'inégalité (B.6), on a

$$\begin{aligned} C_{sta} |u_h - w_h|_{L^2((0,t), H^1(\Omega))}^2 &\leq e^t \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + Ce^t \left(|u - w_h|_{L^2((0,t), H^1(\Omega))}^2 + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,t), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,t)}^2 \right) \end{aligned}$$

et en prenant $t = T$, on obtient

$$\begin{aligned} |u_h - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 &\leq C \left(\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad + |u - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \\ &\quad \left. + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \right). \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

En additionnant les inégalités (B.7) et (B.8) on aboutit à

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))}^2 &+ |u_h - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \\ &\leq C \left(|u - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \\ &\quad \left. + \|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Comme $\rho^\varepsilon \geq \rho_{min}$ et $\rho^\varepsilon \leq \rho_{max}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_h - w_h\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))}^2 &+ |u_h - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \\ &\leq C \left(|u - w_h|_{L^2((0,T), H^1(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T), \dot{H}_\#^{-1}(\Omega))}^2 + \left\| \int_\Omega D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \\ &\quad \left. + \|(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

On définit la norme $\|\cdot\|_{\Omega_T}$ par

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}^2.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\Omega_T} \leq & C \left(\|u - w_h\|_{\Omega_T} \right. \\ & + \|D_t(u - w_h)\|_{L^2((0,T),\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega))} + \left\| \int_{\Omega} D_t(u - w_h) \right\|_{L^2(0,T)} \\ & \left. + \|(u_h - w_h)(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

□

Annexe C

Homogénéisation locale pour le problème de transport

Lemme 8.4. *On suppose que les hypothèses 8.1 sont vérifiées. On définit les fonctions w_i solutions des problèmes de cellules*

$$\begin{cases} b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) &= \rho(y) b^* \cdot e_i, & \text{sur } Y. \\ w_i &\text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

On construit les fonctions tests oscillantes $\widehat{w}_i^\varepsilon$ telles que

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Pour une maille K , on calcule les fonctions $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ solutions des problèmes :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} - \operatorname{div} \left(A^\varepsilon(x) \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*,K} \cdot e_i & \text{dans } K, \\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} &= x_i & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

où

$$b^{*,K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}.$$

On suppose que la maille K est une réunion de cubes de taille ε . Il existe une constante C_{25} indépendante de ε et de la maille K telle que

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\|_{H^1(K)^N} \leq C_{25} \sqrt{\varepsilon |\partial K|}.$$

De plus, il existe une constante C_{26} indépendante de ε et de la mailles K telle que

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N} \leq C_{26} \varepsilon \sqrt{|K|}$$

et

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^\infty(K)^N} \leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon.$$

Démonstration. Tout d'abord, on définit la fonction ζ^ε telle que

$$\widetilde{w}^{\varepsilon,K}(x) = x + \zeta^\varepsilon(x).$$

Les fonctions ζ_i^ε sont solutions de

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot (\nabla \zeta_i^\varepsilon + e_i) - \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\nabla \zeta_i^\varepsilon + e_i) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i & \text{dans } K \\ \zeta_i^\varepsilon(x) &= 0 & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

on a ici $b^{*,K} = b^*$. Cela est vrai car K est la réunion de cubes de taille ε . On définit ensuite r^ε par

$$\zeta^\varepsilon(x) = \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r^\varepsilon(x),$$

où w est la fonction dont les composantes sont les solutions de l'équation (7.10). Ainsi, les r_i^ε sont solutions des équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_i^\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla r_i^\varepsilon\right) = 0 & \text{dans } K \\ r_i^\varepsilon(x) = -\varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

On construit alors une fonction régulière m_ε telle que

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &= 1 && \text{sur } \partial K \\ \|\nabla m_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} &\leq \frac{C_{82}}{\varepsilon} && \text{dans } K \\ m_\varepsilon(x) &= 0 && \text{si } \operatorname{dist}(x, \partial K) \geq C_{83}\varepsilon \\ 0 &\leq m_\varepsilon(x) \leq 1 && \text{dans } K. \end{aligned}$$

On introduit $K' = \{x \in K \mid \operatorname{dist}(x, \partial K) \leq C_{83}\varepsilon\}$. K' contient le support de la fonction m_ε . On remarque alors, que

$$|K'| \leq C_{84}\varepsilon |\partial K|.$$

On introduit ensuite la fonction t^ε telle que :

$$r^\varepsilon(x) = -\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon(x) + t^\varepsilon(x).$$

t^ε est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla t^\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla t^\varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right) \\ \quad - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right)\right) & \text{dans } K \\ t^\varepsilon(x) = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

On utilise la formulation variationnelle de cette équation aux dérivées partielles avec la fonction test t^ε . t_ε étant nulle sur le bord ∂K , on obtient, après intégrations par parties :

$$\int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla t^\varepsilon \cdot \nabla t^\varepsilon = \int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right) \cdot \nabla t^\varepsilon - \int_K b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon \cdot \nabla t^\varepsilon, \quad (\text{C.2})$$

le terme $\int_K b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla t^\varepsilon t^\varepsilon$ est nul car $\operatorname{div}(b) = 0$. Par coercivité de A , on a :

$$\int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla t^\varepsilon \cdot \nabla t^\varepsilon \geq C_{sta} \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \quad (\text{C.3})$$

Il reste maintenant à majorer les différents termes du membre de droite. Tout d'abord,

$$\int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right) \cdot \nabla t^\varepsilon = \int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla m_\varepsilon + (\nabla_y w)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right) \cdot \nabla t^\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\left| \int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon\right) \cdot \nabla t^\varepsilon \right| \leq C_{85} \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}} \left(\|m_\varepsilon\|_{L^2(K)^N} + \|\varepsilon \nabla m_\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}} \right),$$

où la constante $C_{85} = C_{bnd} \max\left(\|w\|_{L^\infty(Y)^N}, \|\nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}}\right)$ est indépendante de ε et K . De plus, par construction de m_ε ,

$$\begin{aligned} \|m_\varepsilon\|_{L^2(K)^N}^2 &\leq \int_{K'} 1 \\ &\leq C_{84}\varepsilon |\partial K|. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\|\varepsilon \nabla m_\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 &\leq \int_{K'} \varepsilon^2 \frac{C_{82}}{\varepsilon^2} \\ &\leq C_{82} C_{84} \varepsilon |\partial K|.\end{aligned}$$

On a donc

$$\left| \int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \left(\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon \right) \cdot \nabla t^\varepsilon \right| \leq C_{86} \sqrt{\varepsilon |\partial K|} \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}}. \quad (\text{C.4})$$

Et

$$\begin{aligned}\left| \int_K b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon \cdot \nabla t^\varepsilon \right| &\leq \|b\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}} \|m_\varepsilon\|_{L^2(K)^N} \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(Y)} C_{84} \sqrt{\varepsilon |\partial K|} \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}}.\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité, ainsi que les inégalités (C.4) et (C.3) dans l'équation (C.2), on obtient :

$$\|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}} \leq C_{87} \sqrt{\varepsilon |\partial K|}.$$

Pour finir, on a

$$\begin{aligned}|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,l}|_{H^1(K)^N} &= \left| \zeta^\varepsilon - \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|_{H^1(K)^N} \\ &= |r^\varepsilon|_{H^1(K)^N} \\ &\leq \left| \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon \right|_{H^1(K)^N} + |t^\varepsilon|_{H^1(K)^N} \\ &\leq \left\| (\nabla_y w)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_\varepsilon \right\|_{L^2(K)^{N \times N}} + \left\| \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla m_\varepsilon \right\|_{L^2(K)^{N \times N}} \\ &\quad + \|\nabla t^\varepsilon\|_{L^2(K)^{N \times N}} \\ &\leq C_{25} \sqrt{\varepsilon |\partial K|},\end{aligned}$$

en utilisant les différents résultats précédents. De plus, en reprenant l'équation (C.1), et en utilisant le fait que les fonctions w_i sont bornées, on peut appliquer le principe du maximum, on a alors

$$\text{ie. } \begin{aligned} \|r^\varepsilon\|_{L^\infty(K)^N} &\leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon \\ \|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,l}\|_{L^\infty(K)^N} &\leq \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,l}\|_{L^2(K)^N} \leq C_{26} \varepsilon \sqrt{|K|}.$$

□

Remarque C.4 : Nous avons supposé que la maille K était la réunion de cubes de taille ε . Si cela n'était pas le cas, on a alors $b^{*,K} \neq b^*$. Dans ce cas, on peut néanmoins démontrer le lemme 8.4 à l'aide d'une des deux possibilités suivantes. Premièrement, on peut choisir de remplacer $b^{*,K}$ par b^* dans les problèmes desquels les fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ sont solutions. Cela modifie la définition des fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ mais n'affecte pas les différentes démonstrations.

Deuxièmement, si on souhaite calculer les fonctions $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ avec une convection $b^{*,K}$ neq b^* , on peut se contenter d'une hypothèse géométrique sur le maillage (hypothèse qui est "générique"). On suppose alors que tous les bords des mailles coupent de manière irrationnelle la cellule de périodicité ε avec une condition diophantienne adéquate pour que la pente irrationnelle soit "assez loin" d'un rationnel. Alors la moyenne de b^ε sur K est proche de b^* avec une distance de l'ordre d'une puissance de ε (dépendant de la condition diophantienne). Le lemme 8.4 serait alors vrai sous cette hypothèse géométrique avec la définition de $b^{*,K}$ donnée dans l'énoncé. Pour plus de détail sur cette hypothèse, on peut se référer à la section 7 du premier chapitre de [BLP78] et à [Gol90].

Annexe D

Méthode des caractéristiques

On se place dans un pavé $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nous considérons le problème consistant à trouver

$$u \in C^0((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T), H^1(\Omega))$$

tel que

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(x) \cdot \nabla u(t, x) - \operatorname{div}(A(x) \nabla u(t, x)) &= f(x) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u \text{ est } \Omega\text{-périodique,} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses D.1 :

1. Les fonctions b et A sont bornées,
2. $\operatorname{div}(b) = 0$,
3. A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N .

4. $u^0 \in H_{\#}^1(\Omega)$.
5. $f \in L_{\#}^2(\Omega)$

Remarquons que cette équation se compose d'un terme de diffusion, d'un terme source et d'une dérivée convective, D_t , définie par :

$$D_t u = \partial_t u + b(x) \cdot \nabla u.$$

On se donne un pas de temps δt et on définit $t^n = n\delta t$. Soit χ , la caractéristique partant de x en $t = t^{n+1}$ et solution de l'équation différentielle ordinaire en temps :

$$\begin{cases} \partial_t \chi(t) &= b(\chi(t)), \\ \chi(t^{n+1}) &= x. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Avec cette définition, on remarque que l'on a :

$$\begin{aligned} \partial_t (u(t, \chi(t))) (t^{n+1}, x) &= \partial_t u(t^{n+1}, \chi(t^{n+1})) + \partial_t \chi(t^{n+1}) \cdot \nabla u(t^{n+1}, \chi(t^{n+1})) \\ &= \partial_t u(t^{n+1}, x) + b(x) \cdot \nabla u(t^{n+1}, x). \end{aligned}$$

On a donc

$$D_t (u(t, x)) (t^{n+1}, x) = \partial_t (u(t, \chi(t))) (t^{n+1}, x).$$

Pour discrétiser l'équation précédente, on utilise l'approximation suivante :

$$D_t (u(t, x)) (t^{n+1}, x) \approx \frac{1}{\delta t} (u^{n+1}(t^{n+1}, x) - u(t^n, X^n(x)))$$

où l'on a posé

$$X^n(x) = \chi(t^n) = \chi(t^{n+1} - \delta t).$$

Ainsi, à chaque temps t^n , la formulation variationnelle approchée (discrète en temps) associée au problème (D.1) s'écrit : trouver $u^{n+1} \in H_{\#}^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_{\#}^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u^{n+1}(x) - u^n \circ X^n(x)}{\delta t} v(x) + A(x) \nabla u^{n+1}(x) \cdot \nabla v(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Approximation de la fonction X^n

La méthode des caractéristiques est théoriquement inconditionnellement stable [Pir88], autrement dit, il n'y a pas de restriction sur les valeurs du pas de temps. Toutefois, cela suppose la résolution exacte de l'équation différentielle (D.2) pour calculer $X^n(x) = \chi(t^{n+1} - \delta t)$.

On peut d'abord estimer $X^n(x)$ en approchant la fonction χ linéairement entre t^{n+1} et $t^{n+1} - \delta t$. Comme $\partial_t \chi(t^{n+1}) = b(\chi(t^{n+1})) = b(x)$ cela s'écrit :

$$X^n(x) = \chi(t^{n+1} - \delta t) \approx x - b(x) \delta t.$$

Cette approximation est cependant très grossière.

En pratique, l'espace Ω est discrétisé selon un maillage \mathcal{K}_H . Pour augmenter la précision de la méthode, la fonction χ est alors linéarisée sur chaque maille $K \in \mathcal{K}_H$. Soit K_x la maille contenant x . Tant que $\chi(t^{n+1} - \delta t')$ appartient à la maille K_x , on fait l'approximation

$$\chi(t^{n+1} - \delta t') \approx x - b(x) \delta t'.$$

On calcul alors le pas de temps minimal Δt_0 tel que

$$x - b(x) \Delta t_0 \notin K_x.$$

On calcule ensuite $x_1 = x - b(x) \Delta t_0$, on repart du point x_1 et on itère le même procédé dans la maille voisine. On renouvelle ces étapes jusqu'à ce que le pas de temps δt soit atteint.
