

Table des Matières

TABLE DES MATIÈRES	I
TABLES DE FIGURES	IX
NOTATIONS.....	XI
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
PRÉSENTATION DU PROJET MSIE.....	1
OBJECTIFS DU PROJET MSIE.....	1
OBJECTIFS DE LA THÈSE	3
CHAPITRE 1.....	5
ETAT DE L'ART SUR LE CONTRÔLE SANTÉ DES STRUCTURES : ENJEUX ET TECHNIQUES	
1.1 MATÉRIAUX ET STRUCTURES INTELLIGENTS	6
1.1.1 MATÉRIAUX INTELLIGENTS	6
1.1.2 STRUCTURES INTELLIGENTES.....	7
1.2 MATÉRIAUX COMPOSITES DANS L'INDUSTRIE AÉRONAUTIQUE	8
1.3 ENDOMMAGEMENTS RENCONTRÉS DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES.....	10
1.4 CONTRÔLE SANTÉ DES STRUCTURES (SHM)	12
1.4.1 DÉFINITION.....	12
1.4.2 MOTIVATIONS ET ENJEUX	12
1.5 TERMINOLOGIE.....	15
1.6 PRINCIPE DU CONTRÔLE SANTÉ DES STRUCTURES.....	15
1.7 CAPTEURS/ACTIONNEURS UTILISÉS DANS LE SHM	18
1.7.1 MATÉRIAUX PIÉZOÉLECTRIQUES POUR LE SHM	18
1.7.2 RELATIONS FONDAMENTALES DE LA PIÉZOÉLECTRICITÉ	20
1.7.3 DÉVELOPPEMENT TECHNOLOGIQUE	21
1.8 ETAT DE L'ART SUR LA DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT	23
1.8.1 MÉTHODES GLOBALES/LOCALES.....	23
1.8.2 APPROCHES UTILISÉES POUR LA DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT.....	25
1.8.3 MÉTHODES DE DÉTECTION À BASE DE MODÈLE MÉCANIQUE	26
1.8.4 DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT SANS MODÈLE MÉCANIQUE.....	27
1.8.4.1 Traitement individuel des informations.....	27
1.8.4.2 Quelques rappels de la théorie du signal.....	27
1.8.4.3 Résidus indicateurs d'endommagement (DI).....	29
1.8.4.4 Traitement multivarié de l'information : séparation aveugle de sources.....	31
1.9 CONCLUSION	32
CHAPITRE 2.....	33
DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX	
2.1 DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX	34
2.1.1 PRÉSENTATION DES PLAQUES COMPOSITES.....	34
2.1.1.1 Traitement des mesures	36
2.1.1.2 Identification des paramètres modaux de la plaque saine et de la plaque endommagée.....	42
2.1.1.3 Endommagement du capteur.....	43
2.1.1.4 Etude du bruit de mesure	45
2.1.2 PRÉSENTATION DES STRUCTURES COMPOSITES ANTENNAIRES.....	47

2.1.2.1 Objectifs visés	47
2.1.2.2 Identification des paramètres modaux de la lame antennaire	51
2.2 MODÉLISATION	52
2.2.1 MODÈLES STRUCTURAUX.....	52
2.2.1.1 Modèle structural nodal	53
2.2.1.2 Modèle structural modal.....	53
2.2.1.3 Représentation d'état.....	55
2.2.2 PLACEMENT DES ÉLÉMENTS PIÉZOÉLECTRIQUES	56
2.2.2.1 Grammien de gouvernabilité et d'observabilité	57
2.2.2.2 Expression de l'énergie d'entrée et de sortie.....	58
2.2.2.3 Indice de placement	59
2.2.2.4 Stratégie de placement	60
2.2.3 APPLICATION À LA PLAQUE COMPOSITE	61
2.3 CONCLUSION	67
CHAPITRE 3.....	68
SÉPARATION AVEUGLE DE SOURCES.....	68
3.1 HISTORIQUE DE LA SÉPARATION AVEUGLE DE SOURCES	69
3.2 APPLICATION DE LA SÉPARATION AVEUGLE DE SOURCES	71
3.3 MODÈLE DE LA SAS	72
3.3.1 MODÈLE DE MÉLANGE	72
3.3.2 INDÉTERMINATION DU MODÈLE SAS.....	74
3.3.3 MODÈLE DE SÉPARATION.....	75
3.4 MÉTHODES DE SÉPARATION DE SOURCES	76
3.5 ANALYSE EN COMPOSANTES INDÉPENDANTES.....	78
3.6 MESURES DE GAUSSIANTÉ ET D'INDÉPENDANCE STATISTIQUE.....	79
3.6.1 MESURE DE GAUSSIANTÉ	79
3.6.2 MESURE D'INDÉPENDANCE STATISTIQUE EN PROBABILITÉ	82
3.6.2.1 Divergence de Kullback-Leibler.....	82
3.6.2.2 Information mutuelle	83
3.7 SÉPARATION DE SOURCES	84
3.7.1 SOURCES GAUSSIENNES ET IID : ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES	84
3.7.2 SOURCES NON GAUSSIENNES ET IID: ANALYSE EN COMPOSANTES INDÉPENDANTES.....	87
3.7.2.1 Etude statistique du bruit mesuré	87
3.7.2.2 Séparation par la méthode ACI	90
3.7.2.3 Algorithme du point fixe pour l'extraction des sources par la méthode ACI	92
3.8 EXEMPLE DE SÉPARATION PAR ACP ET ACI	94
3.9 LIEN ENTRE LA SAS ET LA MÉCANIQUE.....	96
3.10 CONCLUSIONS.....	98
CHAPITRE 4.....	100
DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES PAR L'ACP.....	100
4.1. INTRODUCTION	101
4.2 SURVEILLANCE DES SYSTÈMES ET DES STRUCTURES PAR L'ACP	101
4.2.1 DIAGNOSTIC DES SYSTÈMES PAR L'ACP	102
4.2.2 CONTRÔLE SANTÉ DES STRUCTURES PAR L'ACP	106
4.3 DÉTERMINATION DU NOMBRE DE COMPOSANTES PRINCIPALES	107

4.4 DÉTECTION D'ENDOMMAGEMENT PAR L'ACP : MÉTHODE PROPOSÉE.....	108
4.4.1 CARACTÉRISTIQUE DE FONCTIONNEMENT.....	108
4.4.2 RÉSIDU INDICATEUR D'ENDOMMAGEMENT.....	109
4.4.3 RÉSIDU ROBUSTE INDICATEUR D'ENDOMMAGEMENT.....	114
4.5 DISCUSSION SUR LE CHOIX DU RÉSIDU PROPOSÉ	118
4.6 APPLICATION AUX STRUCTURES COMPOSITES	119
4.6.1 DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT	119
4.6.2 LOCALISATION DE L'ENDOMMAGEMENT	123
4.7 DE L'ACP VERS L'ACI	126
4.7.1 ANALYSE DE LA BORNE ASSOCIÉE À LA MÉTHODE DE DÉTECTION PAR L'ACP	126
4.7.1.1 Simulation de bruits gaussiens.....	126
4.7.1.2 Simulation de bruits non gaussiens.....	129
4.7.2 DISCUSSION DES RÉSULTATS OBTENUS.....	129
4.8 CONCLUSIONS	133
CHAPITRE 5.....	134
DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES PAR L'ACI
5.1 INTRODUCTION	135
5.2 SURVEILLANCE DES SYSTÈMES ET DES STRUCTURES PAR ACI.....	135
5.3 MÉTHODE PROPOSÉE POUR LA DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT PAR L'ACI	136
5.3.1 CARACTÉRISTIQUE DE FONCTIONNEMENT.....	136
5.3.2 RÉSIDU INDICATEUR D'ENDOMMAGEMENT PAR ACI.....	136
5.3.3 RÉSIDU ROBUSTE	139
5.3.4 DISCUSSION SUR LE CHOIX DU RÉSIDU PROPOSÉ.....	141
5.4 APPLICATION AUX STRUCTURES COMPOSITES	142
5.4.1 DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT	143
5.4.2 LOCALISATION DE L'ENDOMMAGEMENT	145
5.4.3 COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE ACI ET ACP.....	147
5.5 ANALYSE DES BORNES SUR LE MODÈLE EF DE LA PLAQUE COMPOSITE	148
5.5.1 SIMULATION DE BRUITS NON GAUSSIENS.....	148
5.5.2 DISCUSSION DES RÉSULTATS OBTENUS.....	149
5.5.3 CONSÉQUENCES	151
5.6 SÉVÉRITÉ DE L'ENDOMMAGEMENT	151
5.7 DE LA DÉTECTION À L'ESTIMATION DE LA SÉVÉRITÉ DE L'ENDOMMAGEMENT	154
5.8 CONCLUSION	156
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	157
CONCLUSION	157
PERSPECTIVES.....	159
BIBLIOGRAPHIE.....	161
ANNEXE.....	172

Tables de figures

Figure i.1 : Antennes de l' AIRBUS A318 (MSIE 2009)	2
Figure i.2 : Métamatériau et patch antennaire (MSIE 2009)	2
Figure 1.1: Structure intelligente	8
Figure 1.2 : Objectifs visés au développement d'une structure intelligente	8
Figure 1.3 : Nomenclature dans un stratifié composite (Cugnoni 2004)	9
Figure 1.4 : Matériaux composites dans l' A380	10
Figure 1.5 : Endommagements rencontrés dans un matériau composite (Duplessis 2007)	11
Figure 1.6 : Endommagements rencontrés dans un matériau composite antennaire	11
Figure 1.7 : Types d'endommagements visés par le SHM (Roach and Neidigk 2011)	14
Figure 1.8 : Rôle d'un système SHM (Roach and Neidigk 2011)	14
Figure 1.9 : Etapes d'une méthode de surveillance des structures SI (Rytter 1993).....	17
Figure 1.10 : Types de matériaux piézoélectriques : (a) céramiques PZT de différentes formes ...	19
Figure 1.11 : Réseau de capteurs piézoélectriques type SMART Layer.....	19
Figure 1.12 : Plateforme sans fil associée à un élément piézoélectrique (Liu and Yuan 2008).....	22
Figure 1.13 : Réseau d'éléments piézoélectrique MD7 (Metis Design Corporation 2011).....	22
Figure 1.14 : Couplage des ondes partielles pour donner naissance aux ondes de Lamb.....	24
Figure 1.15 : Figure de diffraction à 60 KHz sur une plaque en aluminium (Liu et al. 2011).....	24
Figure 1.16 : Classification des méthodes de détection de l'endommagement	26
Figure 2.1 : Placement optimal des dix éléments piézoélectriques.....	35
Figure 2.2 : Plaque composite à l'état sain	35
Figure 2.3 : Plaque composite à l'état endommagé	35
Figure 2.4 : Endommagement structural de type impact (diamètre 5mm).....	36
Figure 2.5 : Photo de la chaine d'excitation, de mesures et d'acquisition des signaux	37
Figure 2.6 : Démarche entreprise pour exciter les plaques composites, mesurer et acquérir	38
Figure 2.7 : Réponses temporelles des capteurs piézoélectriques pour la plaque saine,.....	38
Figure 2.8 : Réponses temporelles des capteurs piézoélectriques pour la plaque endommagée : ..	39
Figure 2.9 : Réponse temporelle de quelques capteurs après l'étape de prétraitement.....	40
Figure 2.10 : Essais de répétabilité sur la plaque composite à l'état sain	41
Figure 2.11 : Réponse temporelle du capteur PZT 8 pour la plaque saine et pour la plaque endommagée	41
Figure 2.12 : Réponse fréquentielle de la plaque saine et endommagée	43
Figure 2.13 : Réduction de la surface du PZT 1 sur la plaque saine.....	44
Figure 2.14 : Réponse du capteur PZT 1 à l'état sain et endommagé.....	45
Figure 2.15 : Droite de Henry du bruit mesuré par le capteur PZT2 de la plaque saine.....	46
Figure 2.16 : Droite de Henry du bruit mesuré par le capteur PZT2 de la plaque endommagée....	46
Figure 2.17 : Lame composite antennaire.....	47
Figure 2.18 : Lame 1 munie de capteurs piézoélectriques : étude de la déformation statique.....	47
Figure 2.19 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque : lame composite au repos.....	48
Figure 2.20 : Placement optimal des sept éléments piézoélectriques sur la lame 2.....	49
Figure 2.21 : Lame 2 munie de sept éléments piézoélectriques.....	49
Figure 2.22 : Dispositif de flambage.....	50
Figure 2.23 : Endommagement de la lame 2: décollement du réseau d'antenne	50
Figure 2.24 : Réponse temporelle du capteur PZT 2 pour la lame saine et endommagée	50
Figure 2.25 : Réponse fréquentielle de la lame 2 : actionneur PZT 2/capteur PZT4.....	52
Figure 2.26 : Modèle EF de la plaque comportant dix éléments piézoélectriques.....	63
Figure 2.27 : Six premiers modes propres de la plaque composite.....	64
Figure 2.28 : Comparaison entre les réponses fréquentielles de la plaque saine,	65
Figure 3.1 : Principe de la séparation aveugle de sources	69
Figure 3.2 : Schéma du mélange et de séparation pour un mélange	76
Figure 3.3 : Classification des méthodes de séparation de sources pour un modèle linéaire instantané déterminé et sans bruit	77
Figure 3.4 : Kurtosis de quelques distributions statistiques.....	89

Figure 3.5 : Signaux sources	95
Figure 3.6 : Signaux de mélange.....	95
Figure 3.7 : Signaux sources estimés par la méthode ACP.....	96
Figure 3.8 : Signaux sources estimés par la méthode ACI	96
Figure 3.9 : Exemple de séparation de sources (Antoni 2005)	98
Figure 4.1 : Test de réduction du nombre de composantes principales :	122
Figure 4.2 : Test de la réduction ou non du nombre de composantes principales :	122
Figure 4.3 : Angles entre vecteurs singuliers droits de la matrice WACPs et WACPd : plaque endommagée	122
Figure 4.4 : Application de l'algorithme de localisation ACI à la plaque composite avec impact.....	124
Figure 4.5 : Localisation de l'impact par la méthode ACP.....	125
Figure 4.6 : Application de l'algorithme de localisation par l'ACP	125
Figure 4.7 : Modèle EF de la plaque composite comportant neuf éléments piézoélectriques	127
Figure 4.8 : Réponses temporelles simulées des capteurs piézoélectriques de la plaque saine	128
Figure 5.1 : Source n°1 obtenue par ACI dans le cas de la plaque saine et endommagée	144
Figure 5.2 : Source n°1 dans le cas de la lame saine et endommagée	144
Figure 5.3 : Application de l'algorithme de localisation ACI à la plaque composite avec impact.....	146
Figure 5.4 : Localisation de l'impact par la méthode ACI.....	146
Figure 5.5 : Application de l'algorithme de localisation par ACI.....	147
Figure 5.6 : Comparaison de la méthode ACP et ACI en terme de sévérité du défaut capteur	153
Figure 5.7 : Interpolation du résidu DIACP en fonction de la sévérité du défaut capteur	154
Figure 5.8 : Interpolation du résidu DIACI en fonction de la sévérité du défaut capteur	155
Figure A.1: Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite au repos »...	173
Figure A.2 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite fléchie à +50mm»	174
Figure A.3 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite tordue à +20°»	174
Figure A.4 : Mesures comparatives réalisées en flexion "-50 mm" obtenues pour la lame antennaire disposée de capteurs piézoélectriques « trait discontinu » puis pour la lame sans capteurs piézoélectriques « trait continu » : (MSIE 2009).....	175

NOTATIONS**Abréviation**

ACP	Analyse en Composantes Principales
ACI	Analyse en Composantes Indépendantes
β_{ACP}	Borne associée au résidu DI_{ACP}
β_{ACI}	Borne associée au résidu DI_{ACI}
DI	Résidu indicateur d'endommagement
DI_{ACP}	Résidu indicateur d'endommagement basé sur l'ACP
DI_{ACI}	Résidu indicateur d'endommagement basé sur l'ACI
ddl	Degré(s) de liberté
EF	Éléments finis
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
FRF	Réponse fréquentielle entre un actionneur et un capteur
iid	Indépendantes, et identiquement distribuées
IM	Information Mutuelle
PCV	Pourcentage cumulé de la variance totale
POD	Décomposition orthogonale aux valeurs propres
PZT	Céramique piézoélectrique de composition chimique : Plomb Zirconate Titanate :
SAS	Séparation Aveugle de Sources (Blind source separation)
SHM	Structural Health Monitoring (Contrôle santé des structures)
SO2	Statistiques d'Ordre 2
SOS	Statistiques d'Ordre Supérieurs
SI	Structure Intelligente
SVD	Singular Value Decomposition (Décomposition en valeurs singulières)
s, u, d	Exposants indiquant respectivement que la structure est à l'état sain , ou dans un état inconnu , où à l'état endommagé

Symboles généraux

\mathbb{E}	Espérance mathématique
$\hat{\mathbb{E}}$	Moyenne temporelle
$\underline{\mathbf{a}}^T$	Transposée d'un vecteur $\underline{\mathbf{a}}$
\mathbf{A}^T	Transposée d'une \mathbf{A}

\mathbf{A}^{-1}	Inverse d'une matrice carrée \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Inverse d'une matrice rectangulaire
$\det(\mathbf{A})$	Déterminant d'une matrice carrée \mathbf{A}
$R\{\mathbf{A}\}$	Espace image de la matrice \mathbf{A}
$R\{\mathbf{A}^T\}$	Espace image de la matrice \mathbf{A}^T
$N\{\mathbf{A}\}$	Espace noyau de la matrice \mathbf{A}
$N\{\mathbf{A}^T\}$	Espace noyau de la matrice \mathbf{A}^T
$\underline{\theta}[R\{\mathbf{A}\}, R\{\mathbf{B}\}]$	Vecteur d'angles entre le sous-espace $R\{\mathbf{A}\}$ et $R\{\mathbf{B}\}$
$\underline{\varphi}[R\{\mathbf{A}^T\}, R\{\mathbf{B}^T\}]$	Vecteur d'angles entre le sous-espace $R\{\mathbf{A}^T\}$ et $R\{\mathbf{B}^T\}$
$\ \underline{a}\ _2$	Norme 2 d'un vecteur \underline{a}
$\ \underline{a}\ _\infty$	Norme infinie d'un vecteur \underline{a}
$\text{diag}(a_i)$	Matrice diagonale avec des éléments a_i
$\Lambda_{\mathbf{A}}$	Matrice des valeurs propres d'une matrice carrée \mathbf{A}
$\lambda_i(\mathbf{A})$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre d'une matrice carrée symétrique \mathbf{A}
$\sigma_i(\mathbf{A})$	$i^{\text{ème}}$ valeur singulière d'une matrice rectangulaire \mathbf{A}
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
\prod	Symbole de produit
\sum	Symbole de sommation
$\ln(a)$	Logarithme népérien
$\mathbf{I}_{n_d \times N}$	Matrice identité de dimension $n_d \times N$
\mathbf{I}_{n_d}	Matrice identité de dimension $n_d \times n_d$
$\mathbf{0}_{n_d \times N}$	Matrice nulle de dimension $n_d \times N$
$\mathbf{0}_{n_d}$	Matrice nulle de dimension n_d
$\underline{\mathbf{0}}_{n_d}$	Vecteur nul de dimension n_d

Symboles indicatifs

§	Section d'un chapitre ou un paragraphe
	Enoncé d'une proposition
	Enoncé d'un théorème
	Enoncé d'une définition
	Enoncé d'une propriété
	Enoncé d'un critère

Ensembles

\mathbb{N}	Nombres entiers
\mathbb{R}	Nombres réels
A-a :	
A	Matrice d'état d'un système continu
A_m	Matrice d'état modale d'un système continu
α	Facteur de proportionnalité entre la matrice de masse et de la matrice d'amortissement (amortissement de Rayleigh)
B-b :	
B	Matrice d'excitation d'un système continu
B_m	Matrice d'excitation modale d'un système continu
β	Facteur de proportionnalité entre la matrice de rigidité et de dissipation en frottement proportionnel (amortissement de Rayleigh)
C- c :	
C	Matrice d'observation
C_n	Matrice d'observation nodale
C_m	Matrice d'observation modale
C_{mi}	i ^{ème} matrice d'observation modale
D-d	
d	Matrice des coefficients de charges piézoélectriques
d_{ij}	Coefficient de charges piézoélectrique [$C/N \equiv m/V$]
D	Matrice d'amortissement
D_m	Matrice d'amortissement modale
E-e :	
ϵ	Matrice de permittivité [F/m]
<u>E</u>	Vecteur du champ électrique [V/m]
E	Module de Young
G-g :	
G	Module de cisaillement
G(u)	Fonction d'approximation de la néguentropie $J(u)$ de la variable aléatoire u
Γ	Matrice des valeurs singulières

H-h

$H(u)$	Entropie différentielle de la variable aléatoire u
--------	--

I-i

$I(\underline{u})$	Information mutuelle du vecteur aléatoire \underline{u}
--------------------	---

J-j

$J(u)$	Néguentropie de la variable aléatoire u
--------	---

K-k :

k	Échantillon temporel
\mathbf{K}	Matrice de rigidité de la SI
\mathbf{K}_m	Matrice de rigidité modale
ζ_i	Coefficient d'amortissement modal du mode i
$KL(p_{\underline{u}}, p_{\underline{v}})$	Divergence de Kullback-Leibler entre les deux densités de probabilité $p_{\underline{u}}(\underline{u})$ et $p_{\underline{v}}(\underline{v})$

L-l :

Λ_{Σ_G}	Matrice diagonale des valeurs propres de la matrice de covariance Σ_G
----------------------	--

M-m

\mathbf{M}	Matrice de masse de la SI
\mathbf{M}_m	Matrice de masse modale
μ_v	Moyenne de la variable v

N-n :

n_d	Nombre de degrés de liberté
n_s	Dimension du vecteur d'état
n_y	Nombre de mesures capteurs
n_u	Nombre d'entrées
N	Nombre d'échantillons temporels
ν	Coefficient de Poisson
\mathbf{N}	Matrice de blanchiment

O-o :

ω_i	Pulsation propre du mode i
------------	------------------------------

P-p :

\underline{p}_i	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de la matrice de covariance
\mathbf{P}	Matrice des vecteurs propres de la matrice de covariance

$p_{\underline{u}}(\underline{u})$	Densité de probabilité du vecteur aléatoire \underline{u}
$\underline{\psi}_i$	$i^{\text{ème}}$ forme propre ou vecteur modal d'une structure SMI dans l'état sain
Ψ	Matrice des vecteurs modaux ou matrice modale de la SI
Q-q :	
$\underline{q}_n(t)$	Vecteur de déplacement nodal
$\underline{q}_m(t)$	Vecteur de déplacement modal
R-r :	
$r(\mathbf{A})$	Rang d'une matrice rectangulaire \mathbf{A}
$\underline{r}(k)$	Vecteur de sources estimé à l'instant k
$\underline{r}_{\text{ACP}}(k)$	Vecteur de sources estimé à l'instant k par l'ACP
$\underline{r}_{\text{ACI}}(k)$	Vecteur de sources estimé à l'instant k par l'ACI
S-s :	
$\underline{s}(k)$	Vecteur de sources à l'instant k
\mathbf{S}	Vecteur de déformations
$\Sigma_{\underline{y}}$	Matrice de covariance du vecteur de mesures \underline{y}
$\sigma_{r_i}^2$	Variance d'une variable aléatoire r_i
T-t :	
t	Temps en continu
\mathbf{T}	Matrice de mélange
$\underline{\mathbf{T}}$	Vecteur de contraintes $[N/m^2]$
U-u :	
\underline{u}	Vecteur d'excitation
\underline{u}_g	Vecteur aléatoire de distribution gaussienne
\mathbf{U}	Matrice des vecteurs singuliers gauches
\mathbf{U}^s	Matrice des vecteurs singuliers gauches de la structure à l'état sain
\mathbf{U}^u	Matrice des vecteurs singuliers gauches de la structure dans l'état inconnu
\mathbf{U}^d	Matrice des vecteurs singuliers gauches de la structure dans l'état endommagé
V-v :	

\mathbf{V}	Matrice des vecteurs singuliers droits
\mathbf{V}^s	Matrice des vecteurs singuliers droits de la structure à l'état sain
\mathbf{V}^u	Matrice des vecteurs singuliers droits de la structure dans l'état inconnu
\mathbf{V}^d	Matrice des vecteurs singuliers droits de la structure dans l'état endommagé
<hr/>	
W-w	
\mathbf{W}_o	Matrice grammienne d'observabilité
\mathbf{W}_c	Matrice grammienne de gouvernabilité
\mathbf{W}	Matrice de séparation du problème de la SAS
\mathbf{W}_{ACP}	Matrice de séparation obtenue par l'ACP
\mathbf{W}_{ACP1}	Matrice de séparation associée à l'espace principal, obtenue par l'ACP
\mathbf{W}_{ACP2}	Matrice de séparation à l'espace résiduel, obtenue par l'ACP
\mathbf{W}_{ACI}	Matrice de séparation obtenue par obtenue par l'ACP
\mathbf{W}_{ACI1}	Matrice de séparation associée à l'espace résiduel, obtenue par l'ACI
\mathbf{W}_{ACI2}	Matrice de séparation associée à l'espace résiduel, obtenue par l'ACI
<hr/>	
X-x	
$\underline{\mathbf{x}}(t)$	Vecteur d'état continu
<hr/>	
Y-y	
$y(k)$	Variable de sortie mesurée à l'instant k
$\underline{\mathbf{y}}(k)$	Vecteur de mesures à l'instant k
\mathbf{Y}	Matrice de mesures.
\mathbf{Y}^s	Matrice de mesures issue d'un premier essai de la structure à l'état sain
$\tilde{\mathbf{Y}}^s$	Matrice de mesures issue d'un second essai de la structure à l'état sain
\mathbf{Y}^u	Matrice de mesures de la structure dans l'état inconnu
\mathbf{Y}^d	Matrice de mesures de la structure à l'état endommagé
\mathbf{Y}^{dc}	Matrice de mesures de la structure comportant un défaut capteur
<hr/>	
Z-z	
$\underline{\mathbf{z}}(k)$	Vecteur de mesures blanchi à l'instant k
\mathbf{Z}	Matrice diagonale d'amortissement

INTRODUCTION GENERALE

Depuis la fin des années 1980, le concept de matériaux et structures intelligents est devenu de plus en plus présent dans différentes industries et notamment dans le domaine du génie civil, de l'aéronautique et de l'aérospatial. Le développement actuel de ces matériaux favorise une réelle intégration de fonctionnalités à la structure hôte. Et ainsi passer ces matériaux d'équipements greffés à des équipements complètement intégrés à la structure hôte. Le concept de matériaux intelligents est actuellement l'une des forces motrices de l'innovation et peut être considéré comme une étape dans l'évolution générale des objets réalisés par l'Homme. En effet, en partant de l'utilisation de matériaux homogènes avec leurs propriétés naturelles, nous sommes arrivés actuellement à la création de matériaux artificiels avec des propriétés qui s'adaptent en fonction de l'usage et aux changements des conditions environnementales. Cela requiert de les doter de fonctions sensorielles, de réaction et "d'intelligence". Un matériau et par extension une structure intelligente est donc une structure munie de capteurs, d'actionneurs et d'une unité de commande, imitant ainsi les mécanismes des systèmes biologiques (nerfs, muscles et cerveau).

Présentation du projet MSIE

Notre travail de thèse se situe dans le cadre du projet MSIE " *Matériaux et Structures Intelligentes pour l'Electromagnétisme* ". Plusieurs industriels et laboratoires universitaires travaillent en collaboration dans ce projet : **INEO DEFENSE, EADS IW, DASSAULT AVIATION, SATIMO, Arts et Métiers ParisTech, Mines ParisTech, SUPELEC et l'Université Paris Ouest Nanterre la Défense " UPOND "**.

Au niveau technique, ce projet a été dirigé par Monsieur **Alain PRIOU**, Professeur à l'Université UPOND, et au niveau management, ce projet a été dirigé par Madame **Annick RAMAHEF** et Monsieur **Pierre BESNARD** de l'industriel INEO DEFENSE.

Objectifs du projet MSIE

Les avions actuels comme les avions futurs sont ou seront équipés d'un nombre croissant de structures antennaires : à titre d'exemple, il y en a actuellement près de 40 sur l'AIRBUS A318, qui est pourtant le plus petit avion de la gamme (figure i.1).

Cette augmentation de structures antennaires répond à des besoins croissants des fonctions traditionnelles que sont la Navigation, la Communication, mais également pour des fonctions

nouvelles comme le multimédia, les communications privées et l'accès internet pour le confort des passagers. Pourtant, ce besoin de " fonctions antennaires " ne doit absolument pas avoir pour corollaire une augmentation du nombre d'implantations de structures antennaires sur un avion : bien au contraire, AIRBUS, par exemple, a même pour objectif d'en réduire leur nombre d'au moins 30% (MSIE 2009).

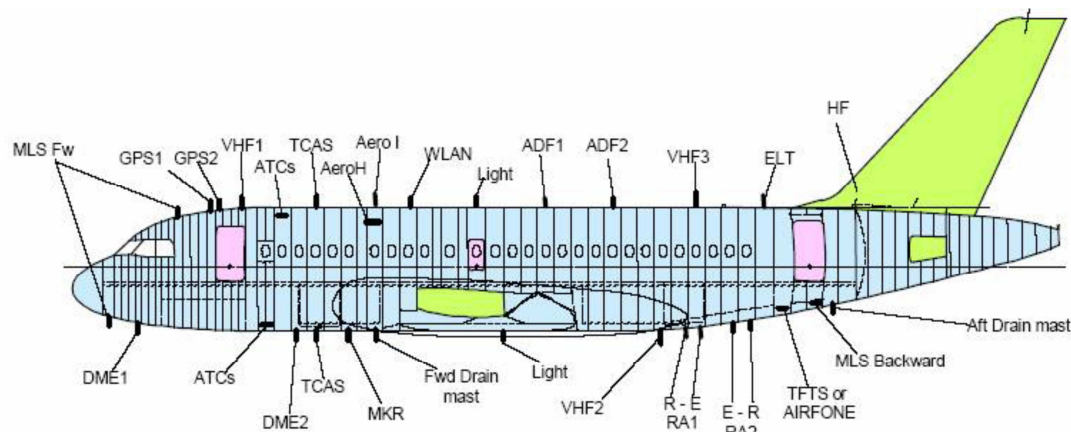


Figure i.1 : Antennes de l'AIRBUS A318 (MSIE 2009)

Pour répondre aux besoins exprimés par les avionneurs, la solution proposée par les responsables du projet MSIE est de développer des *métamatériaux sur des structures composites* (MSIE 2009).

Les *métamatériaux* sont des matériaux artificiels constitués de cellules élémentaires résonnantes, de dimensions bien inférieures à la longueur d'onde de l'onde électromagnétique qui les excite, insérées, avec une périodicité et motif bien définis, sur un substrat (figure i.2).

L'adjoint de capteurs et d'actionneurs sur la structure antennaire permet un contrôle actif de la directivité et du rendement de ces structures, c'est-à-dire, maintenir leurs performances ou de les faire évoluer en fonction des sollicitations environnementales. Cependant, les performances de ces structures dépendent de la connaissance de leur état de santé, qui peut être mis à mal par les sollicitations mécaniques (fatigue, délaminage, ruptures de fibres, etc.). Cette connaissance passe par l'ajout d'une fonction de contrôle santé qui vient compléter les fonctionnalités de ces structures " intelligentes". Et c'est dans l'élaboration d'une fonction de contrôle santé que ce travail de thèse se situe.

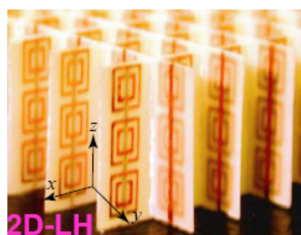


Figure i.2 : Métamatériau et patch antennaire (MSIE 2009)

Objectifs de la thèse

Conduite par de récentes avancées et percées techniques dans les domaines de la science des matériaux, la mécanique des structures, la technologie de capteur, l'électronique embarquée et le traitement du signal, les méthodes de Contrôle Non Destructif (CND) ont atteint une certaine *maturité*. Le reflet de cette dernière est l'apparition de méthodes dites de Contrôle Santé des Structures.

Ces avancées technologiques ont favorisé l'émergence des structures intelligentes " smart structures ". Ce sont des structures qui se composent d'un réseau de capteurs et/ou d'actionneurs, d'une architecture d'acquisition et de commande qui assurent le traitement des signaux. L'objectif principal est de disposer de méthodes efficaces et robustes pour l'analyse structurelle, l'évaluation non destructive et la surveillance de l'intégrité, afin d'éviter une maintenance systématique.

En effet, les maintenances planifiées sont une source de dépense qui pourrait être réduite si nous arrivons à prévoir et à suivre l'évolution des endommagements et donc le passage à une maintenance programmée.

*Notre objectif dans cette thèse est de développer des méthodes de surveillance des structures composites sans **modèles mécaniques**, afin de les appliquer par la suite sur des structures composites antennaires de forme complexe. Ce mémoire est organisé en cinq parties :*

Dans le **chapitre 1**, nous introduisons le contrôle santé des structures par le biais d'une analyse bibliographique.

Dans le **chapitre 2**, nous décrivons les dispositifs expérimentaux sur lesquels nos méthodes de surveillance de l'endommagement seront testées. Ces dispositifs comportent deux plaques composites et une lame composite **antennaires**.

Dans le **chapitre 3**, nous présentons le problème et les fondements de la séparation aveugle de sources, où nous proposons d'utiliser deux techniques d'extraction de caractéristiques : l'Analyse en Composantes Principales (ACP) et l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI).

Dans les **chapitres 4 et 5**, nous présentons deux méthodes de surveillance que nous avons développées et implémentées : méthode de surveillance par l'ACP et par l'ACI.

Les résultats présentés dans ce mémoire ont donné lieu aux publications suivantes dans des conférences nationales et internationales.

- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M** (2010). "Active Damage Detection and Localization Applied to a Composite Structure Using Piezoceramic Patches". *Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*. Nice, France.
- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M** (2011). " Proper Orthogonal Decomposition Applied to Structural Health Monitoring". *IEEE International Conference on Communications, Computing and Control Applications*. Hammamet, Tunisia.
- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M.** (2011)" Application de l'Analyse en Composantes Principales Pour le Contrôle Santé d'une Structure Composite. *Congrès International QUALITA*. Angers, France.
- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M** (2011). "Sensor Fault Detection for Structural Health Monitoring". *Conference Design, Modeling and Experiments of Advanced Structures and Systems*. Urselt, Luxembourg.
- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M** (2011)"Damage Detection of Composite Structure Using Independent Component Analysis". *International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford, United State*.
- Hajrya, R; Mechbal, N and Vergé, M.** (2011) "Enhanced Multivariate Based Approach for SHM Using Hilbert Transform". *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society 2011*. Montreal, Quebec, Canada.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART SUR LE CONTROLE SANTE DES STRUCTURES : ENJEUX ET TECHNIQUES

Ce chapitre a pour objectif d'introduire le contrôle santé des structures composites par le biais d'une analyse bibliographique. Cette dernière couvre plusieurs domaines scientifiques. Nous commençons par présenter le concept de matériaux et structures intelligents. Nous passons ensuite à la description des endommagements pouvant affecter les structures composites. Ensuite, nous procédons à la définition d'un système de contrôle santé, la terminologie et les différentes étapes le concernant. Nous mettons l'accent sur les matériaux piézoélectriques et leur utilisation. Enfin, nous décrivons quelques méthodes de détection de l'endommagement.

1.1 Matériaux et structures intelligents

Les premières civilisations se sont construites grâce à des matériaux naturels : le bois, la pierre, le cuir, l'os, etc. Nous avons ensuite connu l'émergence de l'acier, des matières plastiques, et plus récemment, des matériaux composites. Progressivement, les chercheurs et les ingénieurs ont eu le besoin d'utiliser des matériaux comportant eux-mêmes **leurs propres fonctions** (De Rosnay 1984). C'est l'avènement des matériaux intelligents. Né au début des années 1980 de travaux menés aux États-Unis dans le domaine aérospatial, ce concept est de nos jours l'une des forces motrices de l'innovation dans des domaines, tels que le génie civil, l'aéronautique et l'aérospatial.

1.1.1 Matériaux intelligents

Un matériau intelligent a la capacité de modifier spontanément ses propriétés physiques, par exemple : sa forme, son élasticité, sa conductivité, en réponse aux stimuli et aux changements venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau : variations de température, contraintes mécaniques, champ électrique ou magnétique (Akhras 2012).

Un matériau intelligent possède des fonctions qui lui permettent de se comporter comme un capteur (réagir à **son** environnement), ou un actionneur (effectuer une action **sur son** environnement).

Le développement de ces matériaux n'aurait jamais atteint des percées techniques sans les travaux de chercheurs, appartenant à différents domaines des sciences, et nous sommes redevables à la **Chimie** dans l'étude des matériaux intelligents au niveau cristallin.

Il existe de nombreuses catégories de matériaux intelligents, parmi lesquelles :

- **Piézoélectrique**: lorsqu'il est soumis à une variation de tension, un matériau piézoélectrique subit une déformation mécanique (effet inverse), et vice versa (Brissaud 2007).
- **Electrostrictif**: ce matériau a les mêmes propriétés qu'un matériau piézoélectrique, mais la transformation mécanique est proportionnelle au carré du champ électrique (Brissaud 2007).
- **Magnétostrictif** : soumis à une variation du champ magnétique, des échantillons de certaines substances subissent une modification d'un paramètre mécanique, tel que la dilatation, la contraction, la flexion, la torsion, et même la variation du module de Young de ces échantillons (Lemistre and Balageas 2002). Il existe l'effet inverse, où l'application d'un champ magnétique (ou la variation de ce champ) produit une modification d'un paramètre mécanique, et l'effet direct, où la variation d'un paramètre mécanique produit une modification de son aimantation (Hartemann 2012).

Parmi les matériaux magnétostrictifs utilisés, nous pouvons citer : le nickel polycristallin, les alliages fer-nickel, les ferrites et les composés terres rares-fer.

- **Alliage à mémoire de forme** : quand un métal ou un alliage est soumis à une contrainte mécanique supérieure à sa limite d'élasticité, il subit une déformation plastique qui subsiste après cessation de la contrainte (Guénin 2012). Cette déformation n'évolue ensuite pas ou très peu lors de traitements thermiques. Les *alliages à mémoire* échappent à ce comportement : un échantillon d'un tel alliage, déformé de façon plastique à une température donnée, peut récupérer intégralement sa forme initiale par simple chauffage. Ce phénomène est appelé *mémoire de forme*. Il existe de nombreux alliages présentant l'effet mémoire de forme, citons à titre d'exemple : les alliages à base de cuivre, les alliages à base de fer et les alliages à base de titane et nickel.
- **Capteur à fibres optiques** : selon l'organisme français (AFNOR 1999), un capteur à fibres optiques est un dispositif dans lequel l'information est créée dans le chemin optique par réaction de la lumière à une grandeur, cette information est ensuite transmise au récepteur optique par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs fibres optiques. La grandeur mesurée peut être par exemple une déformation, une température, une pression ou un champ magnétique (Grattan and Sun 2000).

1.1.2 Structures intelligentes

Par définition, une **structure intelligente** que nous noterons tout au long de ce mémoire " **SI** " est un ensemble formé de trois entités (figure 1.1) : une *structure mécanique hôte*, des *matériaux intelligents collés ou noyés* sur cette dernière, et une *unité de commande* pour **piloter** ces matériaux en mode **actionneur** et traiter les **mesures** prises à partir de ces matériaux en mode **capteur** (*en réponse au comportement de la structure hôte*). Les structures intelligentes sont conçues pour imiter, dans une certaine mesure, les systèmes biologiques (Balageas 2006).

Les enjeux visés par le scientifique lors du développement d'une structure intelligente sont considérables (figure 1.2) : reconfigurer la forme de la structure, contrôler les vibrations de la structure (Mechbal et al. 2006), surveiller l'état de santé de la structure et autoréparer la structure (Balageas et al. 2010).

Ce travail de thèse concerne le troisième objectif de la figure 1.2, plus précisément : sur la surveillance de l'état de santé de **structures intelligentes composites**. Nous commençons par définir les structures à base de matériaux composites et leurs développements dans l'industrie aéronautique.

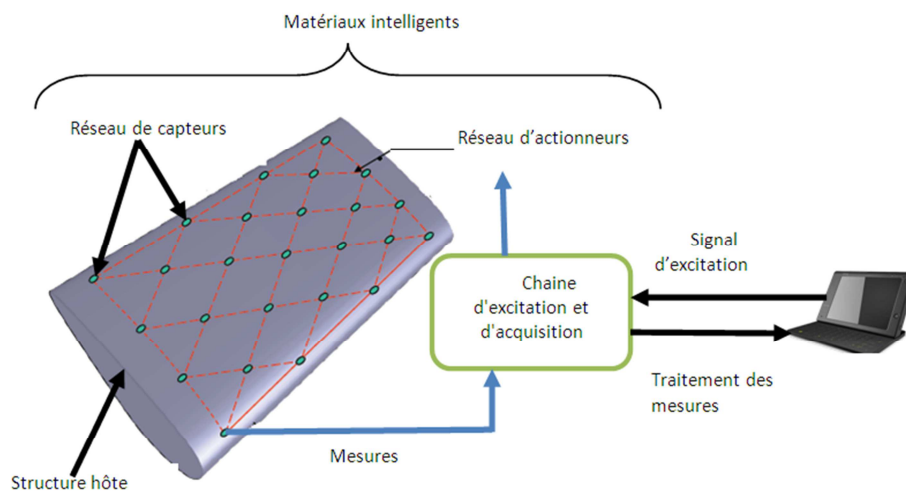


Figure 1.1: Structure intelligente

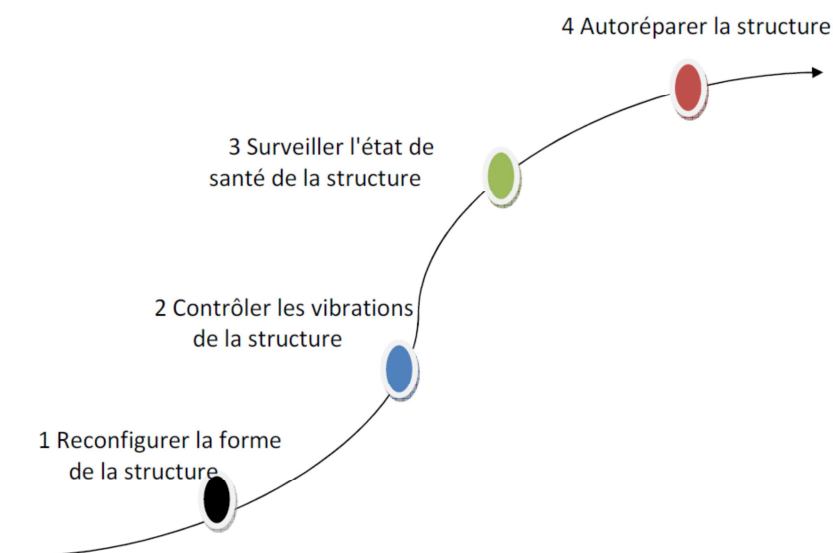


Figure 1.2 : Objectifs visés au développement d'une structure intelligente

1.2 Matériaux composites dans l'industrie aéronautique

Depuis quelques années, la course à la production de véhicules plus légers, et par conséquent moins consommateurs d'énergie, a conduit les industriels de l'aéronautique et de l'automobile à largement utiliser les *matériaux composites*, à cause de leurs propriétés de légèreté et de résistance spécifique.

Au niveau de la fabrication, un matériau composite est une combinaison de *deux éléments* distincts que l'on appelle : la **matrice** et le **renfort**. Le nouveau matériau ainsi constitué possède des propriétés mécaniques que les éléments seuls ne possèdent pas (Gay 2005). La matrice a pour rôle de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments du renfort, et

joue ainsi le rôle de " ciment ". Par contre, les propriétés mécaniques du matériau composite sont conditionnées par celles du renfort.

Les matrices peuvent être constituées par de nombreux produits (Gay 2005) :

- **Matrices polymères** : résine époxyde, polyesters, etc.
- **Matrices minérales** : carbure de silicium, carbone, etc.
- **Matrices métalliques** : alliages d'aluminium, de titane, etc.

Quant aux renforts, ils peuvent s'utiliser sous différentes formes, par exemple : en fibres longues, en fibres courtes, en sphères, et en tissu de fibres. La nature principale de ces fibres est le : **verre, kevlar, carbone, bore, carbure de silicium**.

Au niveau de l'assemblage, un matériau composite est un **stratifié**, composé d'un ensemble ordonné de couches, d'orientation et d'épaisseur bien déterminées (figure 1.3). Une couche de ce stratifié est souvent appelée **pli** ou **strate** (Cugnoni 2004). Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, par exemple, un stratifié de type $(90^\circ, 0^\circ)_{2s}$ est constitué de 8 plis orientés comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0° , puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90° . Les composites stratifiés permettent de créer des matériaux aux propriétés mécaniques optimales, répondant mieux aux sollicitations de la structure.

Dans l'industrie aéronautique, les matériaux composites sont apparus pour la première fois en 1944, sur le fuselage du Vultee BT-15 (Baker et al. 2003). Depuis, leur utilisation ne cesse de croître et devient un véritable enjeu pour les avionneurs. L'A380 d'Airbus comporte aujourd'hui près de 25% de la masse en matériaux composites (figure 1.4). Les matériaux composites représenteront 40% de la masse de l'AIRBUS A350 (Ye et al. 2005). La compagnie Boeing annonce que 50% de la structure primaire (incluant fuselage et ailes) du 787 Dreamliner sera réalisée en matériaux composites.

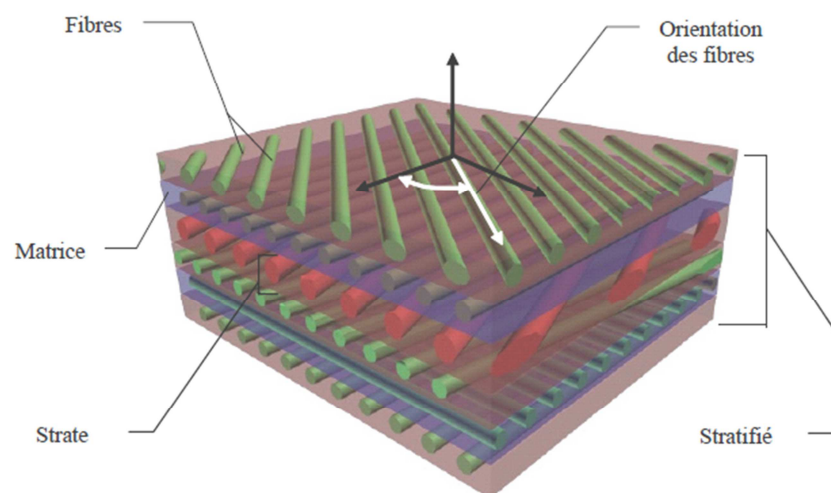


Figure 1.3 : Nomenclature dans un stratifié composite (Cugnoni 2004)

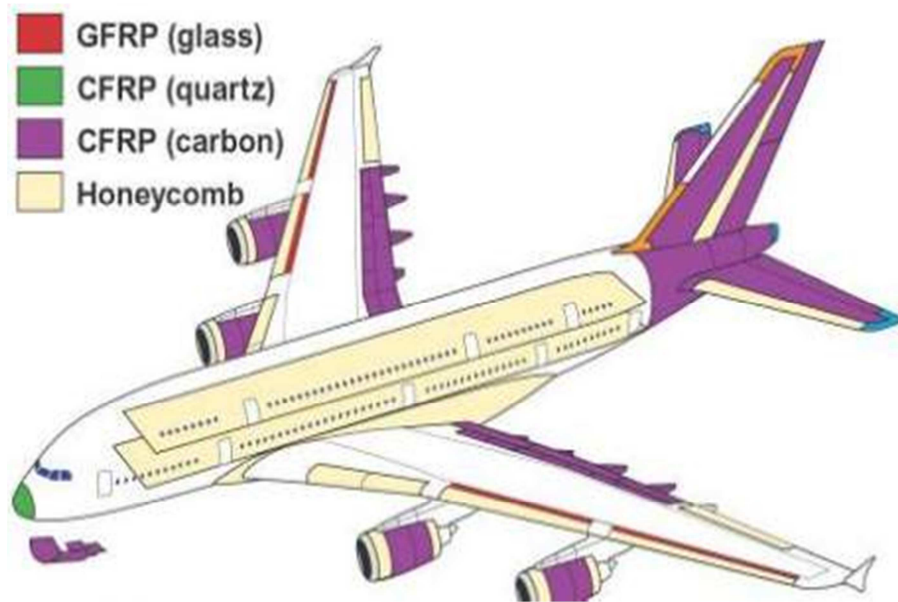


Figure 1.4 : Matériaux composites dans l'A380 ¹

1.3 Endommagements rencontrés dans les matériaux composites

Les excellentes caractéristiques des matériaux composites leur confèrent légèreté, rigidité, et une exceptionnelle résistance à la fatigue dans des conditions environnementales " standard ". Cependant, leurs performances se dégradent en présence d'environnements agressifs, susceptibles de dégrader leurs durabilités et leurs propriétés mécaniques.

Nous pouvons classer les mécanismes de *dégradation* en deux grandes familles :

vieillissement et *endommagements " impacts, fatigue mécanique "* (Beaumont et al. 2006).

Le vieillissement résulte de l'action combinée de la température, de l'humidité, et de la pression de l'environnement.

Les impacts sont provoqués par des chocs balistiques (par exemple des collisions en vol avec des oiseaux), ou des chocs à basse vitesse (par exemple chute d'objets lors de la maintenance) (Staszewski 2002).

Quant à la fatigue mécanique, elle se manifeste lorsque la structure est soumise à des sollicitations cycliques, ces dernières modifient avec le temps les propriétés mécaniques du matériau composite et peuvent entraîner l'apparition d'un endommagement.

Les impacts ainsi que la fatigue mécanique se matérialisent dans les matériaux composites par quatre types d'endommagements, que nous appelons **endommagements structuraux**. Dans le cas des matériaux composites à renforts fibreux, ces endommagements peuvent être classés en quatre types (figure 1.5) :

¹Document décrivant l'A380

- **Décohésion fibre/matrice,**
- **Fissure à l'intérieur du pli :** appelée aussi, fissure transverse,
- **Décollement entre plis:** appelé **délaminage**,
- **Rupture de fibre.**

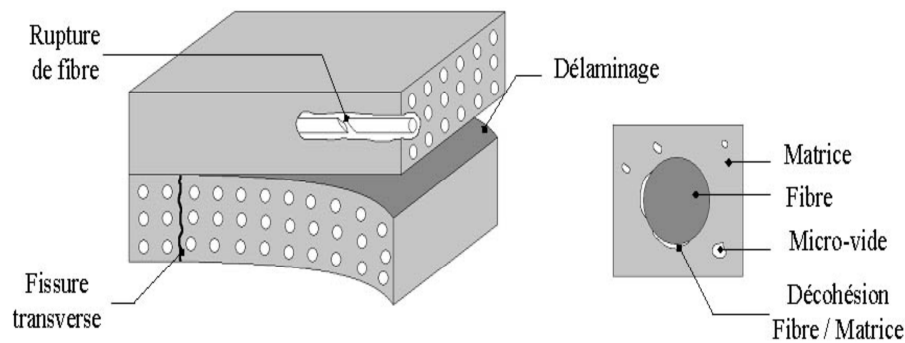


Figure 1.5 : Endommagements rencontrés dans un matériau composite (Duplessis 2007)

Ce travail de thèse rentre dans le cadre du projet MSIE, dont l'objectif vise à intégrer des réseaux d'antennes dans des matériaux composites. Un autre type d'endommagement peut donc subvenir : c'est le **décollement entre le matériau composite et le réseau d'antennes**.

La figure 1.6 montre les différents endommagements d'une *structure composite antennaire*, ils ont été observés au microscope au Centre des Matériaux des Mines ParisTech.

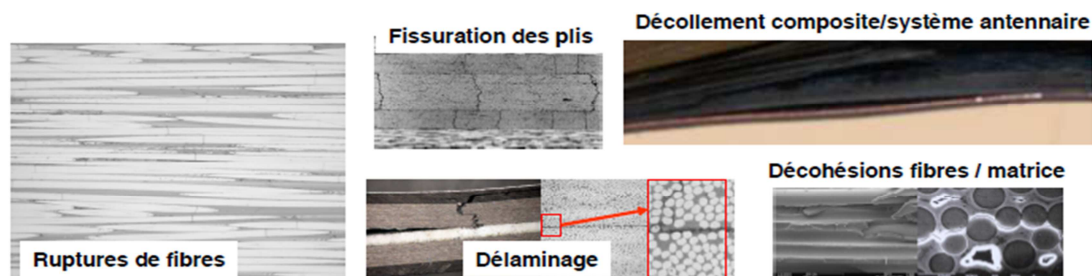


Figure 1.6 : Endommagements rencontrés dans un matériau composite antennaire
(Renard and Nimdum 2012)

Face à ces diverses familles d'endommagements, il est indispensable de mettre en œuvre des techniques de *Contrôle Santé des Structures*², (SHM : Structural Health Monitoring). Ces méthodes SHM seront développées sur des *structures composites intelligentes*, ce qui inévitablement fera apparaître d'autres types d'endommagements, liés directement au matériau intelligent utilisé.

² Dans la suite de ce mémoire, nous emploierons de manière équivalente l'expression anglo-saxonne "Structural Health Monitoring "(SHM) et les expressions françaises : " Contrôle Santé des Structures ""Surveillance de l'Etat de Santé de la Structure ", et "Surveillance de l'Intégrité Structurale ".

1.4 Contrôle santé des structures (SHM)

1.4.1 Définition

Parmi les principales qualités d'une structure mécanique, nous attachons beaucoup d'importance à sa *fiabilité*, à sa *durabilité*, et à la *maîtrise des coûts* de son utilisation. Ces spécifications ont intensifié la recherche et le développement de méthodes de Contrôle Non Destructif (CND) (Mix 2005).

Ces méthodes permettent de caractériser l'état de santé d'une structure sans avoir à la dégrader. Cependant, ces méthodes exigent que l'appareil soit immobilisé. De plus, il est parfois nécessaire de procéder au démontage d'une partie de la structure, inaccessible directement aux équipes de maintenance, sans être sûr de la présence d'un endommagement. Cette contrainte entraîne une augmentation du coût et de la durée de la maintenance.

Conduite par de récentes avancées et percées techniques dans les domaines de la science des matériaux, la mécanique des structures, la technologie des capteurs, l'électronique embarquée et le traitement du signal, les méthodes CND ont atteint une certaine *maturité*. Le reflet de cette dernière est l'apparition de méthodes dites de Contrôle Santé des Structures.

Comme nous l'avons décrit, l'avènement des matériaux et structures intelligents (figure 1.1) a ouvert la voie au développement de systèmes SHM. Un ensemble de capteurs et/ou d'actionneurs est *collé/noyé* de façon définitive sur la SI qui évolue sous l'influence de sollicitations extérieures (chargement mécanique, vieillissement) (Giurgiutiu et al. 2002). A travers les informations transmises par les capteurs, le système SHM surveille l'état de santé de la structure de manière continue ou périodique.

1.4.2 Motivations et enjeux

Dans l'industrie aéronautique, la capacité à évaluer rapidement l'état de santé d'une structure, *sans attendre une maintenance programmée* constitue un enjeu sécuritaire et économique considérable que ce soit pour les constructeurs, les compagnies aériennes et les équipes de maintenance. Les systèmes SHM sont développés pour répondre à cet enjeu :

"SHM is the key technology to enable the transition from traditional schedule-driven maintenance to Condition-Based Maintenance" (Chang 2011).

Dans l'industrie aéronautique, 14% des accidents sont dus à des problèmes de maintenance, 4% sont liés à la présence d'endommagements (Balageas 2006). On s'attend à ce que le développement de systèmes SHM permette de réduire de 10% le nombre de ces accidents.

Dans le but de mettre en évidence l'intérêt du développement de systèmes SHM dans l'industrie aéronautique, la Federal Aviation Administration (FAA) a effectué une enquête menée par Roach and Neidigk (2011). Cette enquête s'est basée sur les réponses de 455

personnes travaillant chez des constructeurs aéronautiques, compagnies aériennes et compagnies de maintenance (tableau 1.1).

L'enquête a révélé que 61% de ces participants trouvent qu'il est *très important* de développer des systèmes SHM dans l'industrie aéronautique. La figure 1.7 montre différents types d'endommagements que les participants à cette enquête cherchent à détecter par le biais de systèmes SHM. D'après cette figure, nous remarquons que les participants sont très intéressés par la détection des endommagements de types : *fissure, délaminage, corrosion et impact*. La figure 1.8 montre les objectifs d'un système SHM :

- ✓ Eviter le *démantèlement* de la structure,
- ✓ Détecter l'endommagement de manière *précoce*,
- ✓ Garantir la *fiabilité* de la structure,
- ✓ Obtenir des inspections *rapides et fréquentes*.
- ✓ Revoir l'*organisation* d'une procédure de maintenance.

En plus des motivations citées, deux programmes majeurs des Compagnies Boeing et Airbus (respectivement 787 Dreamliner et l'A380) envisagent l'installation de systèmes SHM sur leurs appareils (Giurgiutiu et al. 2010). Cela donnera un réel retour d'expérience sur la fiabilité de ces systèmes.

Tableau 1.1: Participants à l'enquête de la Federal Aviation Administration (FAA) (Roach and Neidigk 2011)

<i>Compagnies aériennes</i>	<i>Constructeurs aéronautiques</i>	<i>Organismes de réglementation</i>	<i>Compagnies ou organismes effectuant la maintenance</i>
NASA	Airbus	Air Transport Association	Aerotechnics Inc
American Airlines	Boeing	CAA-NL	Air New Zealand
Austrian Air Force	Dassault Aviation	CAA-Bra	China Airlines
China Airlines	EADS Military Air Systems	EASA	Fokker Aircraft Services BV
Continental Airlines	Goodrich	FAA	Fuji Heavy Industries, Ltd
Delta Air Lines	Bombardier Aerospace	NAVAIR	Jazz Air LTD
Federal Express	Honeywell	NAWCAD	NASA
United Airlines	Rolls-Royce Corp	Transport Canada	US Navy
Qantas Airways	Embraer	USAF	US Army
US Army	Bell Helicopter Textron	US Army	Texas Aero Engine Services

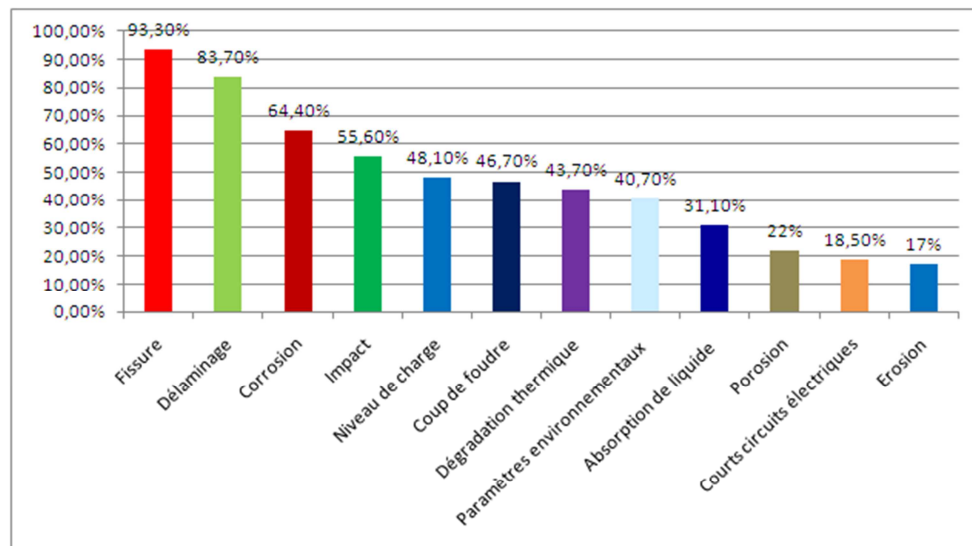


Figure 1.7 : Types d'endommagements visés par le SHM (Roach and Neidigk 2011)

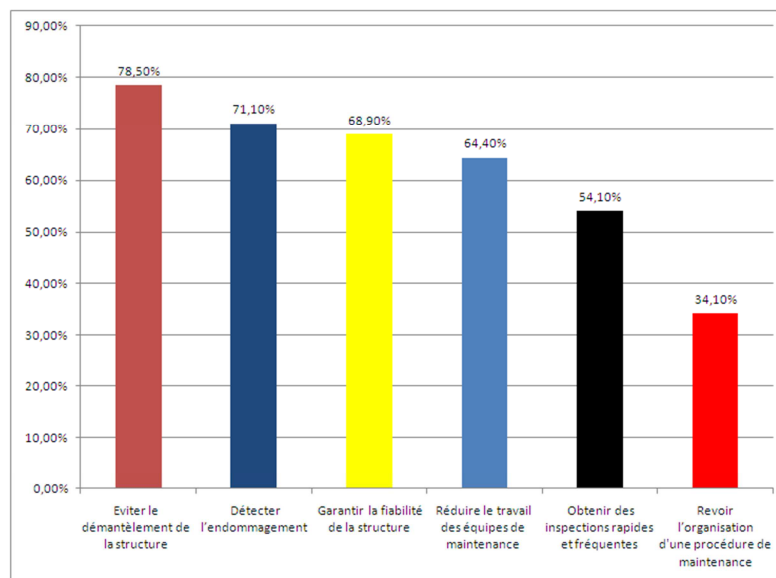


Figure 1.8 : Rôle d'un système SHM (Roach and Neidigk 2011)

Le contrôle santé des structures se trouve à la croisée des chemins de plusieurs disciplines, allant de la science des matériaux, jusqu'au traitement du signal. Les travaux scientifiques visant le domaine SHM ont été initialement présentés aux conférences : Structural Control et NDE (Nondestructive Evaluation). En 1997, le Professeur Fu-Kuo Chang de l'Université Stanford organise la première conférence consacrée au SHM, nommée : *International Workshop on SHM (IWSHM)*. Cette conférence se tient chaque année impaire à l'Université Stanford. Depuis 2002, elle a lieu en alternance avec la conférence EWSHM (*European Workshop on SHM*). En 2004 une revue spécialisée a été créée : *Structural Health Monitoring International Journal*.

1.5 Terminologie

Une *structure intelligente* est une structure munie d'un réseau de capteurs et/ou d'actionneurs. Cette structure est alors décrite par des variables d'entrées et de sorties qui permettent d'extraire ses **caractéristiques de fonctionnement** (Giurgiutiu et al. 2002).

Une structure est dite à l'état *endommagé*, si une des caractéristiques de cette dernière est différente de celle de l'état sain.

Dans ce mémoire, nous utiliserons la terminologie " *endommagement* " pour désigner les endommagements décrits au § 1.3. De plus, comme le réseau de capteurs et d'actionneurs fait maintenant partie intégrante de la structure à surveiller, nous utiliserons aussi cette terminologie " *endommagement* " pour désigner un **défaut capteur ou actionneur**. Notons que dans cette thèse, nous nous intéressons à la détection d'endommagements **permanents**.

Nous dirons qu'une méthode de surveillance est **active**, si cette dernière nécessite l'*excitation* de la SI par le biais d'un actionneur. A l'inverse, une méthode de surveillance est dite **passive**, si l'excitation de la structure s'effectue à travers les perturbations ambiantes, telles que le vent ou les vibrations du support.

Nous stipulerons qu'une méthode de surveillance est en **temps réel**, si la détection de l'endommagement s'effectue *séquentiellement* (à *chaque instant*). Nous dirons qu'une méthode de surveillance est en **temps différé**, si nous faisons l'acquisition de toutes les mesures puis le traitement. A l'inverse, nous stipulerons qu'une méthode de surveillance est en **semi temps réel**, si la détection de l'endommagement s'effectue après que les *mesures soient acquises et se répète*.

Dans le cadre de notre travail, nous allons développer des méthodes de surveillance en temps différé.

1.6 Principe du contrôle santé des structures

La bonne conduite d'un système de contrôle santé d'une structure SI exige plusieurs étapes qui ont été définies par Rytter (1993). Ces étapes sont séquentielles et sont présentées à la figure 1.9 que nous allons décrire :

1. Définition des objectifs

Dans cette étape, l'utilisateur doit définir les objectifs du système SHM :

- **Taille** de l'endommagement que l'utilisateur cherche à détecter,
- Plage de **température** de fonctionnement de la SI,
- Condition aux limites,
- **Choix** de l'actionneur et du signal d'excitation (dans le cas des méthodes actives),
- Quantité à mesurer : plusieurs facteurs doivent être pris en considération :

- ✓ Le type de capteur à utiliser,
- ✓ Le positionnement **optimal** des capteurs,
- ✓ La bande passante des capteurs.
- Intervalle d'acquisition des mesures : dans le cas d'une surveillance en temps différé, l'utilisateur doit planifier le temps entre deux traitements consécutifs d'une procédure de surveillance.

2. Acquisition des données

L'acquisition des données est la base d'une procédure de surveillance. Connaissant les signaux électriques mesurés par les capteurs, les fonctions suivantes doivent être satisfaites : *conditionnement et prétraitement du signal*. En général, cela signifie la correction du décalage de zéro, l'amplification, le filtrage du signal mesuré.

3. Caractéristique de fonctionnement

Cette étape consiste à extraire à partir des mesures recueillies lors de la phase d'acquisition, les informations nécessaires à la mise en forme d'une ou plusieurs caractéristiques de fonctionnement de la structure à l'état sain (dit de *référence*) et de son fonctionnement dans un état *inconnu*.

4. Résidu indicateur d'endommagement

Après avoir déterminé les caractéristiques de fonctionnement de la structure, nous réalisons l'étape de détection. L'écart entre les caractéristiques de la structure à l'état de référence et de la structure dans l'état inconnu se traduit par un résidu indicateur d'endommagement, que nous notons dans ce mémoire **DI** (*damage index*).

5. Détection de l'endommagement

A partir du DI, nous déterminons si la structure dans l'état inconnu est à l'*état sain ou non*. Sachant que la structure est soumise à des perturbations environnementales (bruit de mesures, perturbations extérieures, conditions aux limites), le résidu DI doit être **robuste** à leurs présences, et pour cela, un intervalle de confiance est nécessaire. Une fois cet intervalle défini, nous pouvons statuer sur l'état de santé de la structure: saine ou endommagée.

6. Localisation

Cette étape consiste à localiser la zone endommagée.

7. Classification

Cette étape permet de reconnaître le type de l'endommagement détecté (impact, fissure, délaminage, rupture des fibres, etc.)

8. Estimation de la sévérité de l'endommagement

Cette étape fait appel à des modèles d'endommagements, détectés, localisés et classés, dont le but est de décrire l'endommagement par le biais de paramètres, tels que le diamètre d'un impact, la longueur d'une fissure, la taille d'un délaminage (Chang et al. 2007).

9. Pronostic

Le pronostic a pour objectif de prédire l'évolution future de l'endommagement et d'estimer la durée de vie résiduelle de la SI. Cette étape nécessite une connaissance fine des lois

d'évolution de l'endommagement et/ou d'une phase d'apprentissage basée sur l'historique de la SI (Farrar and Lieven 2007).

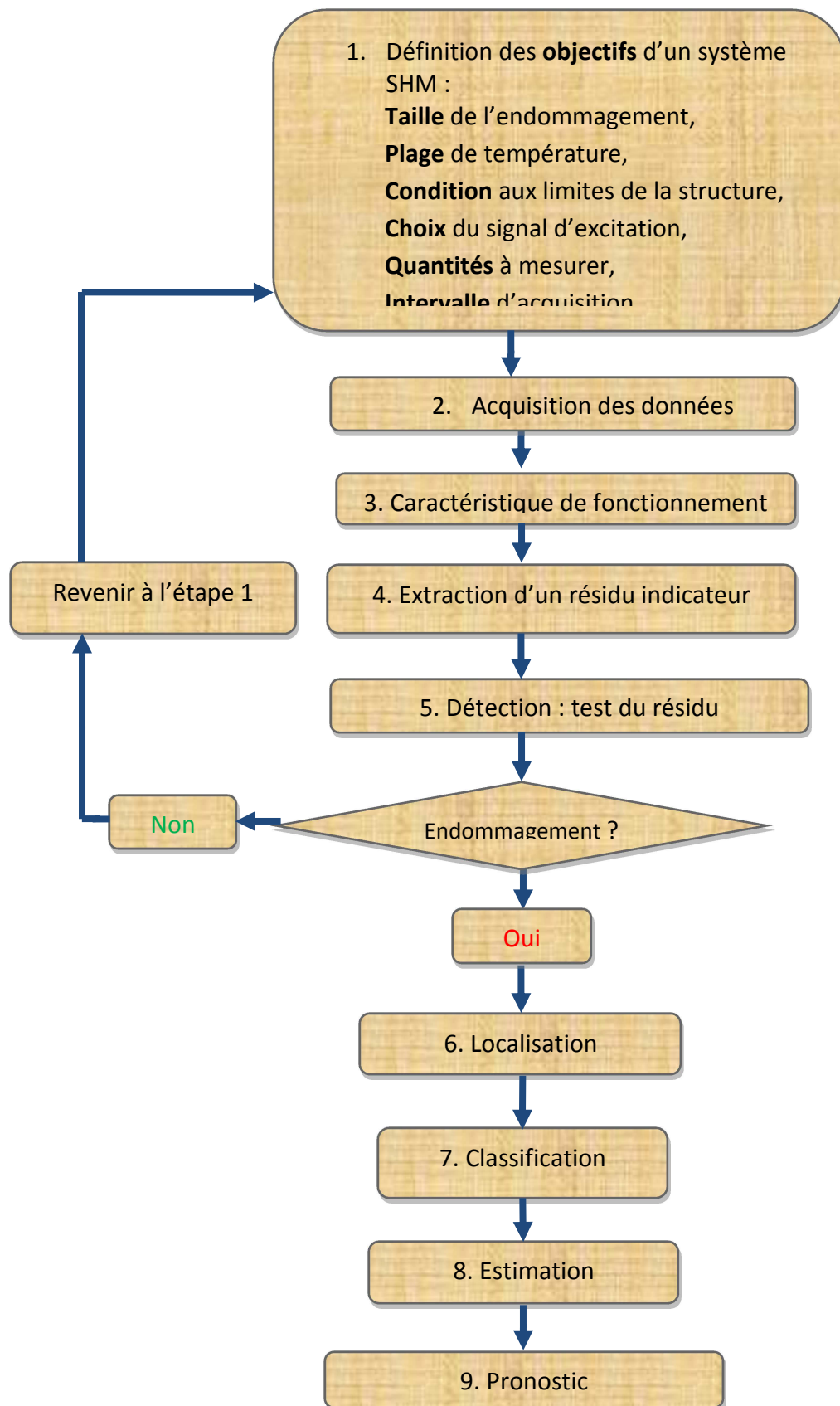


Figure 1.9 : Etapes d'une méthode de surveillance des structures SI (Rytter 1993)

1.7 Capteurs/actionneurs utilisés dans le SHM

Le choix de la technologie des capteurs pour un système de surveillance conditionne sa qualité, ce choix doit répondre aux spécifications suivantes (Su and Ye 2009) :

- Grande sensibilité à la présence d'un endommagement et faible sensibilité par rapport aux conditions environnementales de la SI,
- Intrusion minimale sur la SI : petit, léger, câblage électrique aisé,
- Un rapport coût fiabilité optimal.

Les capteurs les plus communément utilisés par la communauté SHM sont les capteurs à base de *matériaux piézoélectriques* et de *fibres optiques* (Wu et al. 2002). Nous allons nous limiter dans cet état de l'art aux éléments actifs à base de matériaux piézoélectriques.

1.7.1 Matériaux piézoélectriques pour le SHM

Etymologiquement, le préfixe " *piézo* "provient du grec, et signifie presser ou serrer. La piézoélectricité est une propriété basée sur la capacité de certains cristaux à générer des charges électriques lorsqu'ils sont soumis à une déformation mécanique (Brissaud 2007) ; c'est l'effet piézoélectrique **direct (mode capteur)**. Par contre, ces mêmes cristaux engendrent une déformation sous l'action d'un champ électrique ; c'est l'effet piézoélectrique **inverse (mode actionneur)**.

La découverte de l'effet piézoélectrique direct est attribuée à Pierre et Jacques Curie qui, en 1880, mettent en évidence, l'effet dans certains cristaux naturels tels que le quartz (SiO_2) et le sel de Seignette ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) à générer des charges électriques sous l'effet d'une déformation. L'effet inverse, suggéré par Lippman en 1881, a été vérifié expérimentalement la même année par les frères Curie.

Les matériaux piézoélectriques les plus employés en industrie sont les céramiques synthétiques **PZT** (*Titano-Zirconate de Plomb*), en raison de leurs forts couplages électromécaniques, de leurs faibles coûts et de la diversité de leurs formes (figure 1.10 (a)). L'opération par laquelle la céramique est rendue piézoélectrique s'appelle polarisation (Brissaud 2007). Elle consiste à chauffer le matériau au voisinage inférieur de la température de Curie (pour les PZT, cette température est de l'ordre de 200°C). La céramique est ensuite refroidie sous un champ électrique élevé. Cela a pour effet d'aligner les dipôles dans le sens du champ électrique. Finalement, lorsque le champ électrique est ramené à zéro, les dipôles conservent leur position dans chaque domaine cristallin.

Malgré leurs forts couplages électromécaniques, les céramiques PZT présentent certains inconvénients, parmi lesquels, la vulnérabilité à la cassure lors de leur fonctionnement ou lors du processus de collage sur la SI, et leurs capacités extrêmement limitées à se conformer sur des surfaces courbées.

Les polymères piézoélectriques, tels que le PVDF (PolyVynilDiFluorure) représentent une autre catégorie de matériaux piézoélectriques. L'élasticité des polymères leur permet de se conformer aisément sur des surfaces courbées, mais leur coefficient de couplage électromécanique est plus faible que celui des céramiques PZT.

Dans le but de combiner l'élasticité des PVDF et le fort couplage électromécanique des PZT, Bent et al. (1995) ont développé une nouvelle famille de matériau piézoélectrique appelée: *Active Fiber Composite* " AFC " (Figure 1.10 (b)). Ce matériau consiste en une couche active faite en fibres PZT, enrobée dans une matrice époxy. Cette composition permet d'éviter la fissuration des fibres PZT. De son côté, la NASA a développé le Macro Fiber Composite " MFC ", ce dernier se compose de fibres PZT prises en sandwich entre deux couches minces d'une matrice époxy.



Figure 1.10 : Types de matériaux piézoélectriques : (a) céramiques PZT de différentes formes
(b) Macro Fiber Composite (MFC)

Lin and Chang (2002) ont proposé le Smart Layer[®] (*Stanford Multi-Actuator Receiver*), (figure 1.11). Il est composé d'éléments piézoélectriques distribués sur un film diélectrique, et il est actuellement commercialisé par la société *Acellent[®] Technologies, Inc.*

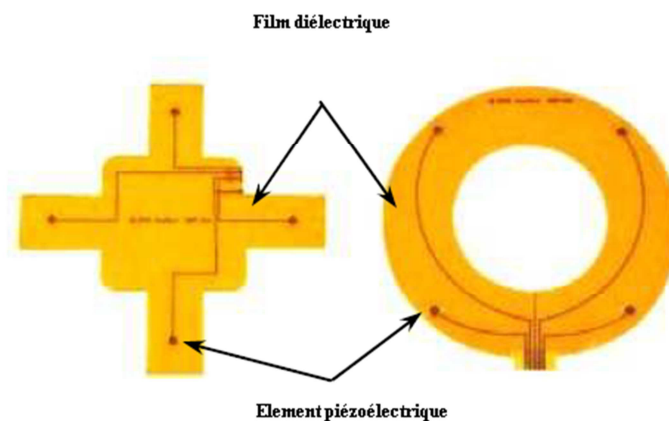


Figure 1.11 : Réseau de capteurs piézoélectriques type SMART Layer
(Acellent Technologies 2011)

1.7.2 Relations fondamentales de la piézoélectricité

Les relations fondamentales de la piézoélectricité se présentent sous la forme suivante (Brissaud 2007) :

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (1.1)$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ij}^T E_j \quad (1.2)$$

où

S_{ij} est le tenseur de déformations, T_{kl} est le tenseur de contraintes, E_k est la composante du champ électrique selon la direction k , et D_i est la composante de l'induction électrique selon la direction i . Les indices ij et kl sont définis au tableau 1.2.

Les coefficients $d_{ikl} [C/N \equiv m/V]$, $s_{ijkl}^E [Pa^{-1} \equiv m^2/N]$ et $\varepsilon [F/m]$ correspondent respectivement au coefficient de **charge piézoélectrique**, à la **souplesse**, et à la **permittivité** du matériau piézoélectrique.

L'équation (1.1) décrit l'expression de la déformation, le premier terme traduit l'élasticité du matériau et le second terme est la contribution correspondant au couplage dû à l'effet piézoélectrique direct. Dans l'expression de l'induction électrique définie à l'équation (1.2), le premier terme correspond à la contribution correspondant au couplage dû à l'effet piézoélectrique inverse, le second terme décrit la relation générale d'un diélectrique.

Les termes s_{ijkl}^E sont écrits avec un exposant E pour indiquer qu'ils sont mesurables lorsque le champ électrique est nul. De façon similaire, les termes ε_{ij}^T sont écrits avec un exposant T pour indiquer que la contrainte est nulle. Pour faciliter les expressions, les indices ij , kl sont supprimés, en les condensant par p ou q (tableau 1.2).

Tableau 1.2 : Correspondance entre les notations tensorielles et matricielles

ij ou kl	p ou q
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Les relations matricielles de la piézoélectricité sont alors données par :

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{s}} \underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{d}}^T \underline{\mathbf{E}} \quad (1.3)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{d}} \underline{\mathbf{T}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \underline{\mathbf{E}} \quad (1.4)$$

où $\underline{\mathbf{S}}$ est le vecteur de déformations de dimension (6×1) , $\underline{\mathbf{T}}$ est le vecteur de contraintes de dimension (6×1) , $\underline{\mathbf{E}}$ est le vecteur du champ électrique de dimension (3×1) et $\underline{\mathbf{D}}$ est le vecteur d'induction électrique de dimension (3×1) .

\mathbf{s} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ de dimension chacune (6×6) représentent respectivement la matrice symétrique de souplesses et la matrice symétrique de permittivités. La matrice des coefficients de charges piézoélectriques \mathbf{d} est de dimension (3×6) .

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.7.3 Développement technologique

Les récentes avancées de la technologie des circuits imprimés ont permis à de nombreux chercheurs de développer des méthodes SHM **en noyant** des matériaux piézoélectriques dans des structures composites (Su et al. 2006). Isolés de l'environnement ambiant, ces matériaux piézoélectriques (*en mode capteur*) offrent une reproductibilité des signaux mesurés et permettent l'élaboration de techniques de surveillance fiables.

Su et al. (2006) ont noyé un réseau de capteurs constitué de 12 éléments PZT dans une plaque composite en carbone époxy. Ce réseau est associé à un circuit imprimé en polyamide. Afin d'éviter le contact entre les électrodes des PZT et les fibres de carbonées, les auteurs ont enveloppé le réseau de capteurs avec une couche d'époxy.

L'utilisation des PZT dans les systèmes SHM ne cesse de croître. Cependant, leur utilisation dans une partie de la structure soumise à des températures *très élevées (par exemple dans certaines sous-structures de la nacelle d'un moteur d'avion)*, reste encore un thème de recherche à explorer, et un verrou technologique à lever. En effet, la température de Curie des PZT est de l'ordre de 200°C. Au-delà de cette température, les matériaux PZT perdent leurs propriétés piézoélectriques. Giurgiutiu et al. (2010) se sont intéressés à ce problème pour des applications SHM, en se basant sur les travaux de Kreml et al. (1997), ils ont développé un matériau piézoélectrique de composition chimique GaPO_4 (*gallium Orthophosphate*), et ont prouvé que ce nouveau matériau piézoélectrique peut être utilisé pour la surveillance d'une SI, dont la température de fonctionnement avoisine les 700°C.

L'installation de capteurs sur de grandes structures nécessite des câblages importants. Ces derniers sont très coûteux et exigent une maintenance. Par exemple, dans le domaine du génie civil, le coût total de l'installation de 350 capteurs (câbles et électronique inclus) sur le pont *Tsing-Ma* de Hong Kong a coûté huit Millions de Dollars (Lynch and Loh 2006).

L'avènement de la technologie sans fil a permis de simplifier l'acquisition des données envoyées par les capteurs de la SI. Cette technologie permet de remédier aux problèmes de vieillissement des câbles et de leurs coûts. De plus, cette technologie a ouvert la voie à la surveillance de l'état de santé de la SI à *distance*.

Pour des applications SHM à distance, la plateforme de capteurs sans fil la plus utilisée est la MICA Mote, développée par les chercheurs de l'Université de Californie, Berkeley : (Hill and Culler 2002). En utilisant la plateforme MICA Mote, Yuan et al. (2006) ont développé pour une structure composite, une méthode de surveillance passive et à *distance*.

A l'aide de la technologie FPGA (Field-Programmable Gate Array), Liu and Yuan (2008) ont réalisé une station sans fil associée à un élément piézoélectrique (figure 1.12). Cette station est de dimension : $30 \times 30 \times 35 \text{ mm}^3$, et elle a permis d'exciter une plaque en aluminium à la fréquence 200 kHz.

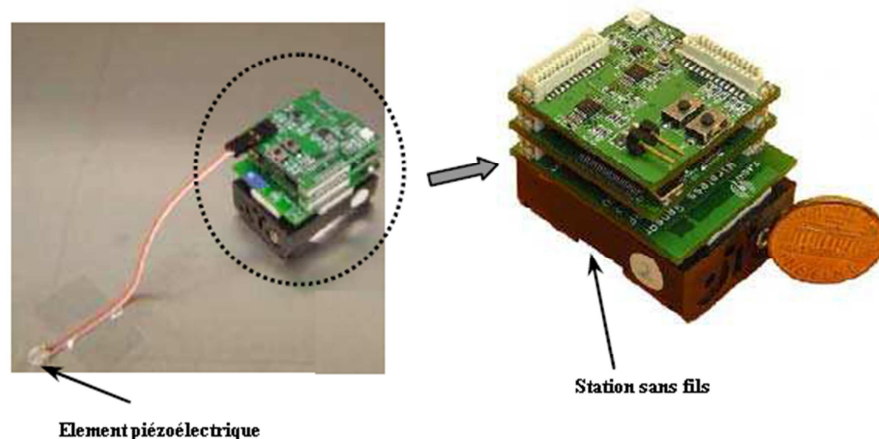


Figure 1.12 : Plateforme sans fil associée à un élément piézoélectrique (Liu and Yuan 2008)

De son côté, la société Metis Design Corporation commercialise un réseau d'éléments piézoélectriques appelé MD7 (figure 1.13). Ce réseau est associé à une centrale d'acquisition et d'excitation.

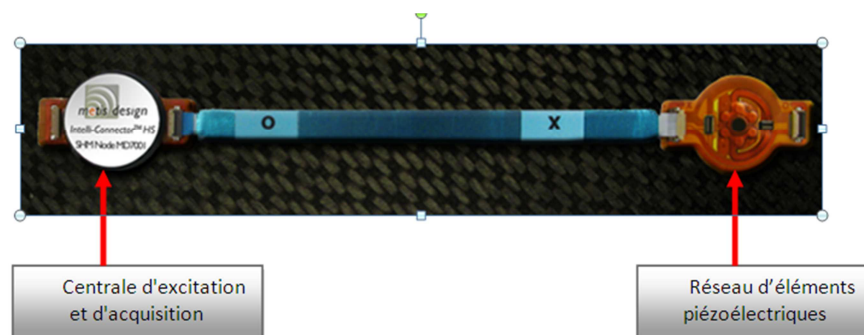


Figure 1.13 : Réseau d'éléments piézoélectrique MD7 (Metis Design Corporation 2011)

1.8 Etat de l'art sur la détection de l'endommagement

Une fois la technologie dédiée à la mesure de la réponse dynamique de la SI choisie, il faut fixer un objectif en terme de *taille de l'endommagement* que l'on souhaite surveiller. Dans le cadre des systèmes SHM *actifs*, la longueur d'onde du signal d'excitation est en relation avec la taille de l'endommagement. En effet, plus cette longueur d'onde est petite, plus nous sommes sensibles à la détection d'un endommagement de petite taille. Partant de ce raisonnement, les méthodes de surveillance actives se classent en deux grandes catégories : *méthodes actives globales et locales*.

1.8.1 Méthodes globales/locales

Les méthodes actives globales consistent à exciter la structure en basses fréquences, elles présentent l'avantage d'exciter l'ensemble de la structure, permettant ainsi de distribuer les capteurs spatialement, sans se soucier d'une partie de la structure sensible au développement d'un endommagement (Fassois and Sakellariou 2007). L'idée de la surveillance d'une SI à base de méthodes globales vient du fait qu'un endommagement provoque un changement de sa réponse dynamique et de ses propriétés structurales " rigidité, masse, amortissement " (Zou et al. 2000). Cependant, l'inconvénient de ces méthodes est leur faible sensibilité à la présence d'un endommagement de petite taille.

A l'inverse, les méthodes locales ont la particularité d'exciter la structure en hautes fréquences, cette particularité leur confère une grande sensibilité à la présence d'un endommagement de petite taille. Toutefois, ces méthodes nécessitent une forte concentration de capteurs sur une partie de la structure, sensible au développement d'un endommagement.

Dans cette catégorie de méthodes, il existe deux approches : celle basée sur l'impédance électrique (Park et al. 2003), et celle qui découle des ondes acoustiques : plus précisément les ondes élastiques (Kessler et al. 2002). Nous traitons ici le cas des ondes élastiques.

Une onde élastique est une perturbation mécanique qui se propage dans un milieu (gaz, liquide ou solide) ou à l'interface entre deux milieux. La présence de cette interface influe sur la propagation des ondes à cause des phénomènes de réflexion et de réfraction. Dans certaines conditions, la présence d'une interface peut donner naissance à des *ondes guidées* (Chapuis 2010). En fonction de la structure et des propriétés des milieux, une diversité d'ondes guidées peuvent se propager, telles que, les ondes : *longitudinales, transversales, de Rayleigh, et de Stonely* (Su and Ye 2009). Dans le cas des plaques, les ondes guidées apparaissant naturellement sont les *ondes de Lamb*, et elles sont décrites par les équations de Rayleigh-Lamb (Viktorov 1967). Ces ondes peuvent s'analyser comme une superposition de réflexions successives d'ondes de volume au sein d'une plaque (figure 1.14).

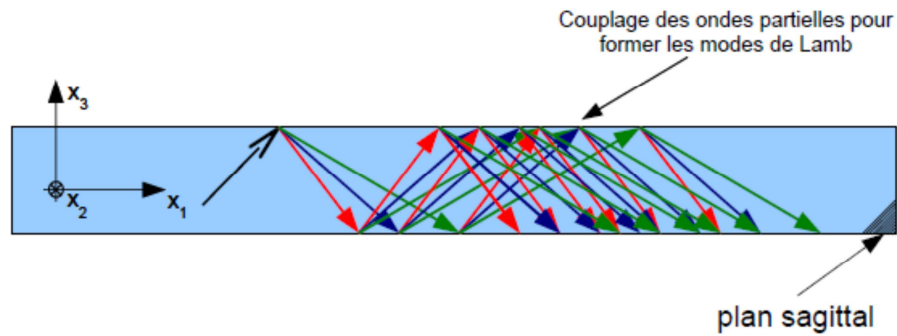


Figure 1.14 : Couplage des ondes partielles pour donner naissance aux ondes de Lamb
(Chapuis 2010)

La particularité des ondes de Lamb est qu'elles se propagent sur de longues distances, avec une faible atténuation au cours de leur trajet, ce qui permet donc de surveiller de larges structures (Raghavan and Cesnik 2007).

De nos jours, les méthodes SHM *actives* à base d'ondes de Lamb ont pu être développées grâce aux travaux du groupe de recherche de Cawley (Monkhouse et al. 1997). Dans leurs travaux, les auteurs ont mis en évidence la relation entre les équations de Rayleigh-Lamb (Viktorov 1967) et la taille d'un actionneur/capteur, dont le but est de favoriser l'excitation et la mesure d'un mode de propagation parmi d'autres.

La surveillance d'une SI à base d'ondes de Lamb réside dans le fait que la présence d'un endommagement va introduire un changement dans sa *vitesse de propagation*, dans la conversion de ces modes, et dans l'apparition de phénomène de *réflexion* de l'onde lors de sa rencontre avec un endommagement (Kessler et al. 2002).

Dans notre laboratoire, nous nous intéressons aussi aux ondes de Lamb pour détecter l'endommagement (Liu et al. 2011). Les auteurs ont proposé la Figure de Diffraction Perturbée en Amplitude (FDPA) comme une façon de détecter l'endommagement (figure 1.15).

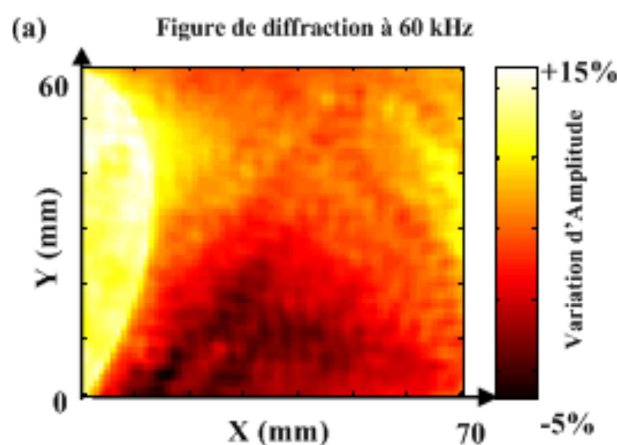


Figure 1.15 : Figure de diffraction à 60 KHz sur une plaque en aluminium (Liu et al. 2011)

1.8.2 Approches utilisées pour la détection de l'endommagement

La dynamique d'une structure non linéaire endommagée est décrite par un système d'équations couplées (Fritzen 2006) : une équation non linéaire du mouvement (1.7), une équation non linéaire de l'évolution de l'endommagement (1.8), et une équation d'observation (1.9):

$$\mathbf{M}(\underline{\theta}_d, \underline{\theta}_e, \underline{q}, t) \ddot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{\theta}_d, \underline{\theta}_e, t) = \underline{f}(t, \underline{\theta}_d, \underline{\theta}_e) \quad (1.7)$$

$$\dot{\underline{\theta}}_d = \Gamma(\underline{\theta}_d, \underline{\theta}_e, \underline{q}, t) \quad (1.8)$$

$$\underline{y}(t) = h(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{\theta}_d, \underline{\theta}_e, t) \quad (1.9)$$

où

\mathbf{M} est la matrice masse, \underline{g} est le vecteur de forces élastiques et d'amortissement, \underline{f} est le vecteur des efforts extérieurs, Γ est une fonction non linéaire croissante, décrivant l'évolution de l'endommagement $\underline{\theta}_d$ (fissure, délaminage, perte de rigidité, perte de masse, etc.), le vecteur de paramètre $\underline{\theta}_e$ de l'équation (1.8) permet de tenir compte de l'environnement et des conditions opératoires (température, humidité, etc.), \underline{q} , $\dot{\underline{q}}$ et $\ddot{\underline{q}}$ représentent respectivement le vecteur de déplacement, de vitesse et d'accélération, t est le temps.

Les deux équations (1.7) et (1.8) interagissent par leur couplage mécanique (déplacement, vitesse). Par exemple, une augmentation de l'amplitude du vecteur \underline{q} participe à la propagation de l'endommagement $\underline{\theta}_d$.

L'équation (1.9) fournit une relation entre les déplacements, les vitesses et le vecteur de mesures \underline{y} à travers la fonction h . Nous allons revenir plus en détail sur cette modélisation au chapitre 2.

L'endommagement et la dynamique de la structure à surveiller évoluent sur deux échelles de temps différentes. Comparé à la dynamique de la structure, l'endommagement est considéré comme un *processus plutôt lent*, ce qui conduit à ce que le vecteur $\underline{\theta}_d$ *reste constant dans un intervalle d'acquisition très court* (Fritzen 2006). Il en va de même pour les paramètres environnementaux, ces derniers sont aussi considérés constants. Dans le cas où la durée d'acquisition est courte, la surveillance de l'endommagement peut s'effectuer en *semi temps réel ou en temps différé*.

Lorsque le choix de la méthode est défini (locale ou globale), l'opérateur recherche au moyen des mesures recueillies, des caractéristiques de fonctionnement de la structure à l'état *sain* et d'une structure dans l'état *inconnu*. La comparaison de ces caractéristiques est réalisée grâce au résidu indicateur d'endommagement que nous notons DI (damage index), et nombreux sont les travaux le concernant (Su and Ye 2009).

Pour des raisons de clarté, nous nous sommes basés sur les équations (1.7), (1.8) et (1.9) pour classer les méthodes de détection de l'endommagement (figure 1.16). Cependant, nous allons nous restreindre à la description de certains résidus développés dans la littérature.

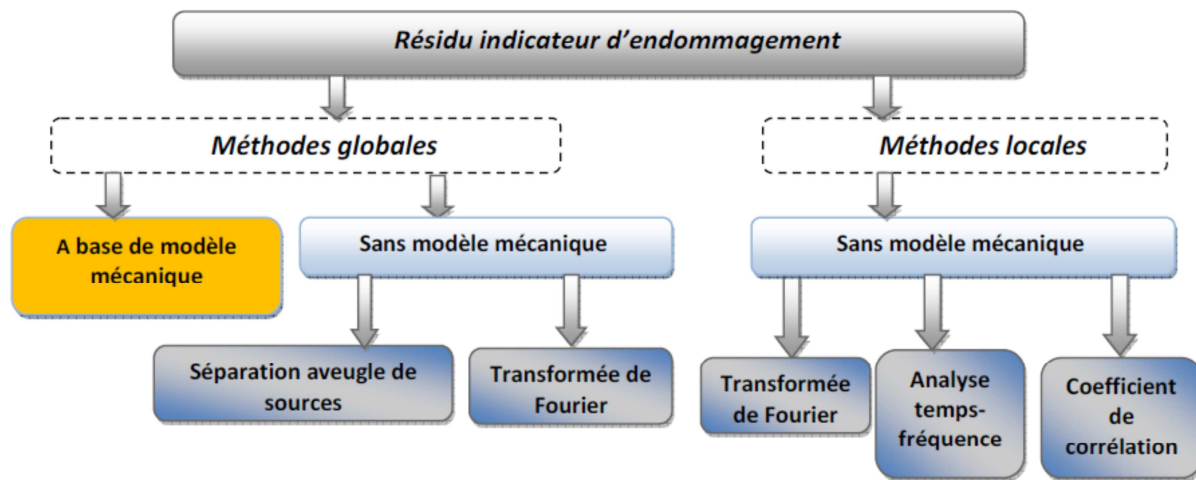


Figure 1.16 : Classification des méthodes de détection de l'endommagement

1.8.3 Méthodes de détection à base de modèle mécanique

L'analyse des équations (1.7) et (1.8) montre que la présence d'un endommagement dans une structure intelligente provoque un changement de ses propriétés structurales globales (rigidité, masse, amortissement). Cela entraîne donc une modification de ces propriétés modales (fréquences propres, déformés propres, coefficients d'amortissement). De ce fait, les mécaniciens considèrent les propriétés modales comme des caractéristiques de fonctionnement. Ce raisonnement a conduit Cawley and Adams (1979) dès la fin des années 70 à proposer un résidu basé sur les fréquences propres. Keye et al. (2001) et Montalvão et al. (2009) ont utilisé l'amortissement comme une caractéristique de fonctionnement.

Le changement de rigidité et/ou de la masse dû à l'endommagement provoque une modification des formes des modes de la structure, ces dernières peuvent donc être utilisées pour le développement de résidus. Dans la littérature, on trouve deux principaux résidus basés sur les formes des modes : " Modal Assurance Criterion-MAC " (Allemang and Brown 1982) et le " Coordinate Modal Assurance Criterion-COMAC " (West 1986).

Il existe d'autres approches appartenant à cette catégorie (à base de modèle mécanique) : celles basées sur le recalage de modèles éléments finis, mais nous n'allons pas les décrire, le lecteur intéressé par ces techniques est invité à lire la thèse de (Saeed 2010).

Certains automaticiens, cherchent à développer des résidus à partir de méthodes d'identification, ces dernières ne sont qu'une façon latente de refléter le changement des propriétés modales dues à la présence de l'endommagement. Dans cette catégorie, nous

pouvons citer les travaux de Basseville et al. (2000) sur l'identification par sous-espaces. L'intérêt de cette technique réside dans le fait de ne pas nécessiter des techniques d'optimisation, de plus, elle offre l'avantage d'utiliser le concept de représentation d'état, sur laquelle sont basées les techniques de commande.

1.8.4 Détection de l'endommagement sans modèle mécanique

Une autre catégorie de techniques, cette fois-ci appartenant aux méthodes globales et locales considèrent uniquement l'**observation** du vecteur de mesures (méthode output only)/de l'entrée et du vecteur de mesures (méthodes input-output), comme information préalable pour générer des résidus indicateurs d'endommagement. Les méthodes de détection appartenant à cette catégorie se distinguent entre elles par la comparaison des signaux mesurés (de la SI à l'état sain et d'une SI dans l'état inconnu) *individuellement* ou de *manière simultanée*.

1.8.4.1 Traitement individuel des informations

Ces méthodes de détection reposent sur l'extraction de caractéristiques des signaux mesurés de la SI à l'état sain et de la SI dans l'état inconnu d'une façon individuelle. Cette extraction peut s'effectuer à partir des mesures temporelles ou par le biais d'une transformation (Staszewski 2002). Parmi les transformations (TF) les plus répandues dans l'extraction des caractéristiques, on trouve celles basées sur la TF de Fourier, l'analyse temps-fréquence, la TF de Hilbert. L'écart entre les caractéristiques de la structure à l'état de sain et d'une structure dans un état inconnu se traduit par un résidu indicateur d'endommagement. Dans cette section, nous allons décrire quelques résidus DIs développés dans la littérature, nous commençons par rappeler quelques notions de traitement du signal.

1.8.4.2 Quelques rappels de la théorie du signal

Transformée de Fourier (De Coulon 1998)

Soit $u(t)$ un signal d'excitation et soit $y(t)$ le signal mesuré par un capteur.

L'intégrale de Fourier des signaux $u(t), y(t)$ est définie par :

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (1.10)$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (1.11)$$

La densité spectrale d'énergie du signal $y(t)$ est définie par :

$$S_{yy} = |Y(f)|^2 \quad (1.12)$$

où $|\cdot|$ représente le module.

La densité interspectrale d'énergie des signaux $y(t)$ et $u(t)$ est définie par :

$$S_{uy} = U^*(f)Y(f) \quad (1.13)$$

où $*$ est le complexe conjugué.

L'amplitude de la réponse fréquentielle entre un actionneur et un capteur est définie par :

$$H(f) = \frac{|S_{uy}|}{S_{uu}} \quad (1.14)$$

Analyse temps-fréquence (Mallat 2011)

L'équation (1.10) montre que la transformée de Fourier ne fournit pas d'information locale sur un signal, bien concentrée en temps et en fréquence (Mallat 2011). Pour mettre en évidence ces informations, une analyse temps-fréquence du signal est nécessaire. La transformée de Fourier à fenêtre glissante et la transformée en ondelettes sont deux exemples importants de cette analyse temps-fréquence. Notons aussi que cette analyse est très répandue pour extraire des caractéristiques pertinentes dans les méthodes à base d'ondes de Lamb (Staszewski and Robertson 2007).

Une transformée temps-fréquence corrèle le signal avec une famille de fonctions bien concentrées en temps et en fréquence (Mallat 2011). Ces fonctions sont appelées atomes temps-fréquences.

- **Transformée de Fourier à fenêtre glissante** (Mallat 2011)

Un atome de Fourier à fenêtre glissante s'obtient à partir d'une fenêtre g , que l'on translate dans le temps de δ et que l'on module à la fréquence f :

$$g_{\delta,f}(t) = e^{j2\pi ft} g(t - \delta) \quad (1.15)$$

La transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal $y(t)$ est définie par :

$$Sy(\delta, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) g(t - \delta) e^{-2\pi jft} dt \quad (1.16)$$

La multiplication de $y(t)$ par $g(t - \delta)$ localise l'intégrale de Fourier au voisinage de $t = \delta$, le symbole S est l'initiale de l'anglais Short time Fourier transform.

- **Analyse par ondelettes** (Mallat 2011)

Un atome d'ondelette est obtenu par une dilatation de s et une translation de u d'une ondelette mère ψ :

$$\psi_{\delta,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \delta}{s}\right) \quad (1.17)$$

La transformée en ondelettes du signal $y(t)$ est définie par :

$$Wy(\delta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - \delta}{s} \right) dt \quad (1.18)$$

où W est l'initiale de Wavelet.

TF de Hilbert (Bendat and Piersol 2000)

La TF de Hilbert d'un signal $y(t)$ est définie par :

$$\tilde{y}(t) = \mathcal{H}[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (1.19)$$

L'enveloppe du signal $e(t)$ et sa fréquence instantanée $\theta(t)$ sont définies par :

$$e(t) = \sqrt{y^2(t) + \tilde{y}^2(t)} \quad (1.20)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left[\frac{\tilde{y}(t)}{y(t)} \right] \quad (1.21)$$

1.8.4.3 Résidus indicateurs d'endommagement (DI)

- **DI à base de la réponse fréquentielle**

Les méthodes de détection basée l'analyse des réponse fréquentielle approche sont nombreuses, nous décrivons celle proposée par Fassois and Sakellariou (2007). Les auteurs ont proposé un résidu DI basé sur la différence d'amplitude des réponses fréquentielles :

$$DI = |H^s(f)| - |H^u(f)| \quad (1.22)$$

où

$H^s(f), H^u(f)$ représentent respectivement, la réponse fréquentielle entre l'actionneur et le capteur de la structure à l'état sain et de la structure dans l'inconnu.

Fassois and Sakellariou (2007) ont démontré que ce résidu suit une distribution normale:

$$DI \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma_s^2(f)) \quad (1.23)$$

où $\sigma_s^2(f)$ est la variance de $H^s(f)$.

De plus, les auteurs ont proposé le test d'hypothèse suivant :

Si :

$$|DI| \leq Z_{1-(\alpha/2)} \sqrt{2}\sigma_s \forall f \quad (1.24)$$

Alors la structure est à l'état sain,

Dans le cas contraire, la structure est à l'état endommagé.

Fassois and Sakellariou (2007) ont appliqué cette méthode pour détecter un ajout de masse (6.5g) sur une structure en aluminium (50 kg).

- **DI à base de TF Fourier à fenêtre glissante**

A partir d'un signal mesuré par un capteur piézoélectrique, Ihn and Chang (2004) ont proposé un résidu DI basé sur la transformée de Fourier à fenêtre glissante :

$$DI = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} Sy^s(\delta, f_0) d\tau}{\int_{\tau_1}^{\tau_2} Sy^u(\delta, f_0) d\tau} \quad (1.25)$$

où Sy^s, Sy^u représentent respectivement la transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal mesuré dans le cas d'une structure à l'état sain et d'une structure dans un état inconnu. Lorsque le résidu est proche de 1, la structure est à l'état sain. Les auteurs ont appliqué expérimentalement le résidu DI pour détecter une fissure dans une plaque en aluminium.

- **DI à base de TF en ondelettes**

Dans leurs travaux, Sohn et al. (2004) ont proposé un résidu basé sur la TF en ondelettes, ainsi défini :

$$DI = 1 - \frac{\int_{u_1}^{u_2} Wy^s(u, f_0) du}{\int_{u_1}^{u_2} Wy^u(u, f_0) du} \quad (1.26)$$

où Wy^s, Wy^u sont respectivement la TF en ondelettes du signal mesuré de la structure à l'état sain et d'une structure dans un état inconnu, u_1, u_2 représentent les instants de début et de fin du signal à analyser, f_0 représente la fréquence centrale du signal d'excitation.

Afin de réduire les fausses alarmes, les auteurs ont associé au résidu DI de l'équation (1.26) un intervalle de confiance basé sur la distribution de Gumbel (Castillo 1998). Cette procédure de détection a été appliquée sur des données expérimentales (onde de Lamb) relevées sur une plaque composite pour détecter un délaminage de taille $25.4 \times 25.4 \text{ mm}^2$.

Notons qu'il existe d'autres caractéristiques de fonctionnement et donc d'autres résidus appartenant à cette catégorie (*méthode à base d'observation et sans modèle mécanique*), par exemple ceux basés sur le temps de vol ou bien la transformée de Hilbert-Huang (Yang et al. 2004).

Le temps de vol d'une onde est défini comme étant le temps mis par cette dernière pour aller de l'émetteur (actionneur) au récepteur (capteur). L'idée de la détection à base de temps de vol réside dans le fait que la présence d'un endommagement va provoquer des phénomènes de réflexion de cette onde, donc son temps de vol sera alors modifié.

La transformée de Hilbert-Huang, appelée aussi "Empirical Mode Decomposition" est une méthode de traitement du signal introduite par Huang et al. (1998) qui permet d'estimer la densité d'énergie d'un signal dans le domaine fréquentiel, à l'aide de la transformée de Hilbert, voir équation (1.19).

Le lecteur désireux d'approfondir ces méthodes est encouragé à consulter : *Encyclopedia of Structural Health monitoring* (Boller et al. 2009).

- **DI à base Coefficient de corrélation**

Zhao et al. (2007) ont proposé un résidu DI basé sur le coefficient de corrélation, qui mesure la ressemblance de deux signaux, il est défini par :

$$DI = \left| \frac{\sum_{k=1}^N (y_k^s - \mu_{y^s})(y_k^u - \mu_{y^u})}{\sum_{k=1}^N (y_k^s - \mu_{y^s})^2 \sum_{k=1}^N (y_k^u - \mu_{y^u})^2} \right| \quad (1.27)$$

où y^s représente le signal mesuré par un capteur de la structure à l'état sain, y^u représente la mesure dans le cas d'une structure dans un état inconnu. Lorsque cette dernière est à l'état endommagé, le résidu DI est très loin de 1. En utilisant des ondes de Lamb, Zhao et al. (2007) ont appliqué ce résidu sur des données expérimentales pour détecter une fissure de longueur 3mm sur une aile d'avion en aluminium.

1.8.4.4 Traitement multivarié de l'information : séparation aveugle de sources

Le problème scientifique de la séparation aveugle de sources (SAS) consiste à extraire un ensemble de signaux non observables dits " signaux sources " et d'une matrice de mélange/séparation, à partir d'un ensemble de signaux observables (Jutten and Comon 2007). Dans le cadre de la surveillance des systèmes et des structures, les signaux sources et la matrice de mélange/séparation sont des **caractéristiques de fonctionnement**, et sont donc utilisés afin d'élaborer des résidus indicateurs d'endommagements et de défauts (Antoni 2005).

L'analyse en composantes principales (ACP) et l'analyse en composantes indépendantes (ACI) permettent de résoudre le problème de la séparation.

Dans cette section, nous ne mettons pas en évidence les différents résidus issus de ces deux méthodes, mais nous rappelons les travaux réalisés. La description détaillée de la théorie et la méthodologie SHM à base de SAS sera décrite dans les chapitres 3, 4 et 5.

L'ACP est très largement utilisée dans la communauté **FDI** "*Fault Detection and Isolation*" pour la détection et la localisation de défauts de capteurs des processus industriels : se rapporter aux travaux: (Harkat et al. 2006), (Tharrault et al. 2008).

Dans le cadre du SHM, De Boe and Golinval (2003) ont utilisé l'ACP pour détecter le décollement d'un capteur piézoélectrique de la surface d'une plaque en acier.

En utilisant l'ACI, Zang et al. (2004) ont utilisé la matrice de séparation comme une entrée d'un réseau de neurones pour détecter un changement de rigidité d'une structure.

1.9 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de définir le domaine SHM et son application à la surveillance des structures composites. La communauté scientifique du domaine de la surveillance des structures regroupe des chercheurs spécialisés en *mécanique*, en *traitement du signal*, en *science des matériaux* et en *technologie des capteurs*, etc. De part cette diversité, nombreux sont les travaux effectués au développement de systèmes SHM. Les percées théoriques et techniques dans ces disciplines ont contribué à donner naissance à de nouvelles méthodes de surveillance innovantes.

Le concept de matériaux et structures intelligents a ouvert la voie au développement de systèmes SHM. Grâce aux avancées technologiques dont les matériaux piézoélectriques ont bénéficié, quelques verrous ont pu être levés, comme la surveillance de l'état de santé à **distance**, et à l'utilisation de systèmes SHM dans une partie de la structure soumise à des températures *très élevées*.

Les informations capteurs de la SI permettent de définir des caractéristiques de fonctionnement de la structure à l'état sain et de la structure dans l'état inconnu, la comparaison entre ces caractéristiques fournit un résidu indicateur d'endommagement.

Notre objectif dans cette thèse est de surveiller l'état de santé des structures composites **antennaires** sur lesquelles un réseau de capteurs **piézoélectriques** est disposé. Cette multitude d'informations nous a conduit à l'utilisation de la *séparation aveugle de sources* comme un moyen d'extraire des caractéristiques de fonctionnement de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu, dont le but de développer de nouveaux résidus indicateurs d'endommagement.

Dans les chapitres suivants, nous allons développer les étapes d'une méthode de surveillance pour atteindre cet objectif, en particulier, les étapes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 8 de la figure 1.9. Pour commencer, nous allons décrire les étapes 1, 2 et les dispositifs expérimentaux que nous utilisons. C'est l'objet du chapitre 2.

CHAPITRE 2

DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX

Ce chapitre est consacré à la description des moyens expérimentaux sur lesquels nos méthodes de surveillance seront testées. L'objet de la première partie de ce chapitre est de présenter de manière détaillée le dispositif expérimental de deux plaques composites, d'une lame composite antennaire et les endommagements les concernant. Sur ces structures, des éléments piézoélectriques ont été placés de manière optimale, et l'objet de la seconde partie est de décrire la méthode de placement qui a permis ce positionnement. Cette méthode repose sur le grammien d'observabilité et de gouvernabilité, et pour l'appliquer, nous utilisons des modèles éléments finis (EF) des structures.

2.1 Dispositifs expérimentaux

Les deux méthodes de détection de l'endommagement qui seront exposées dans la suite de ce travail de thèse reposent sur les réponses dynamiques **expérimentales** des structures composites. A cet effet, notre partenaire INEO DEFENSE du projet MSIE, nous a fourni deux plaques composites et deux lames composites antennaires. Le matériau composite utilisé est constitué de deux éléments : **fibres de carbone T700 et d'une matrice en résine époxy**.

2.1.1 Présentation des plaques composites

Les deux plaques composites sont de dimension $400 \times 300 \times 2 \text{ mm}^3$, et chacune d'entre elles comporte **seize** plis : $(0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 0^\circ)_{2s}$, l'indice $_2$ signifie qu'il existe *deux plis successifs de même orientation*. La première plaque est à *l'état sain*, la seconde est dans un *état endommagé*. Sur cette dernière, nos partenaires du Centre des Matériaux des Mines ParisTech ont provoqué un **impact** en utilisant une bille projetée à *grande vitesse* : le diamètre de cet impact est de 5 mm . Les observations faites au microscope par nos partenaires ont permis de déceler la présence de **délamination** et de **ruptures des fibres**.

A partir de la méthode de placement que nous allons présenter dans la seconde partie du chapitre, nous avons collé dix éléments piézoélectriques de manière optimale sur les deux plaques composites. Ces éléments sont de type PZ 29, de dimension $30 \times 20 \times 0.2 \text{ mm}^3$, commandés de la société Ferroperm (Ferroperm 2009). Ces éléments sont sous forme de **céramique**, car les structures étudiées sont **planes**. La figure 2.1 montre la plaque composite, munie de dix éléments piézoélectriques. Sur cette figure, nous avons attribué à chaque élément piézoélectrique l'acronyme PZT (en référence à la céramique Titano-Zirconate de Plomb), cet acronyme est suivi d'un numéro. Le tableau 2.1 montre leurs coordonnées en mm par rapport à l'origine de la figure 2.1.

Les figures 2.2 et 2.3 sont des photographies de la plaque composite saine et de la plaque endommagée. La figure 2.4 montre la position de l'impact. Ces deux plaques composites sont en configuration libre-libre, elles ont été suspendues par des ressorts. Pour minimiser l'influence du câblage des éléments piézoélectriques sur les propriétés mécaniques des plaques composites, nous avons collé au niveau de leurs électrodes des fils souples (de couleur blanche sur la figure 2.2 et 2.3). Le raccordement de ces derniers à la chaîne de mesure et d'excitation s'opère par le biais de câbles blindés (de couleur noire sur la figure 2.2 et 2.3), relativement rigide.

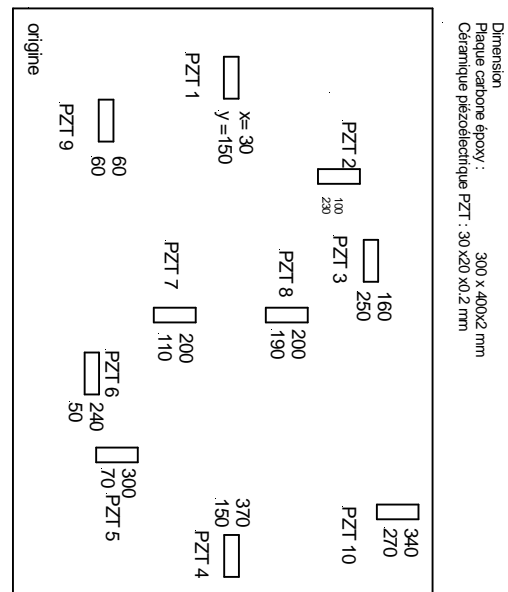


Figure 2.1 : Placement optimal des dix éléments piézoélectriques sur la plaque composite

Tableau 2. 1 : Coordonnées des éléments piézoélectriques sur la plaque composite

Numéro du PZT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cordonnées $\begin{Bmatrix} x [mm] \\ y [mm] \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 30 \\ 150 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 100 \\ 230 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 160 \\ 250 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 370 \\ 150 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 300 \\ 70 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 240 \\ 50 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 200 \\ 110 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 200 \\ 190 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 60 \\ 60 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 20 \\ 340 \end{Bmatrix}$

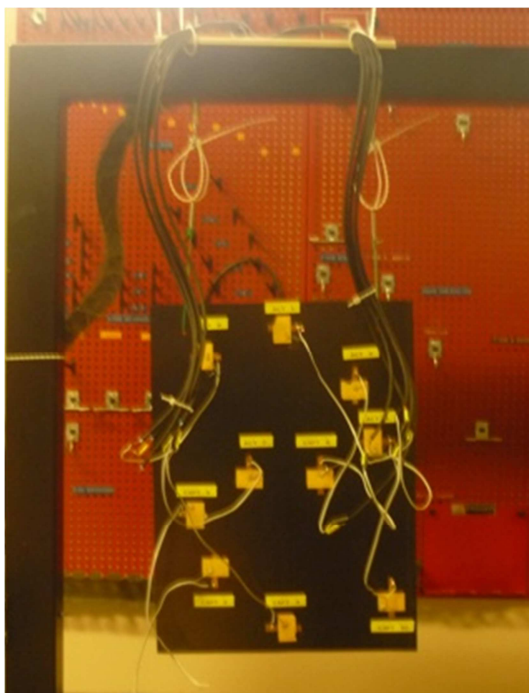


Figure 2.2 : Plaque composite à l'état sain

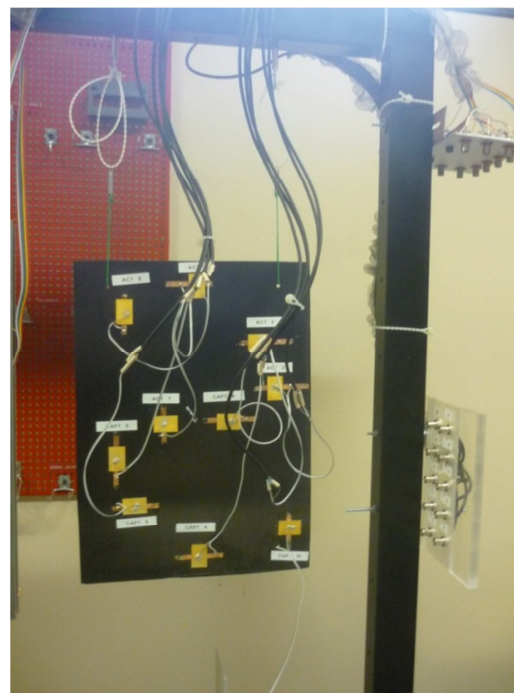


Figure 2.3 : Plaque composite à l'état endommagé

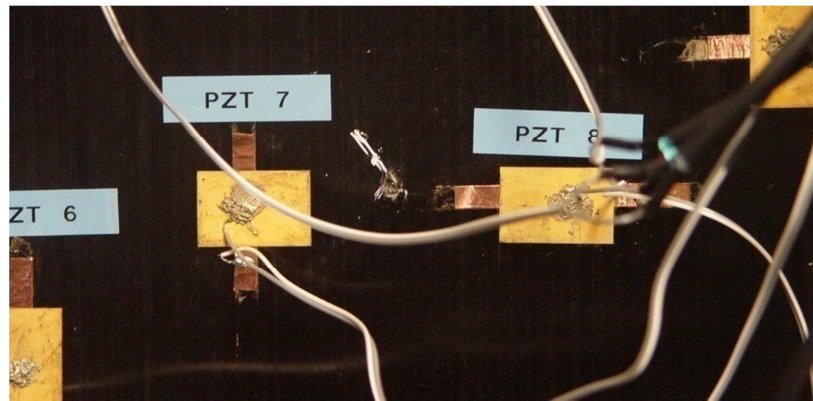


Figure 2.4 : Endommagement structural de type impact (diamètre 5mm)

2.1.1.1 Traitement des mesures

Comme annoncé au §1.6, la première étape d'une **méthode de contrôle santé active** passe nécessairement par le choix judicieux d'un signal d'excitation. Cette excitation est déterminée en fonction de la **taille de l'endommagement** que nous cherchons à détecter. Ce choix conditionne donc le résultat de la détection.

Pour exciter la plaque composite saine et la plaque endommagée, nous utilisons le PZT 7 comme actionneur (voir figures 2.2, 2.3), rappelons que les autres céramiques PZT (configurées au départ comme capteur) pourraient être utilisées comme actionneur.

La réponse de chaque plaque est mesurée par le biais des éléments piézoélectriques suivants : PZT 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, et 10. Notons que le PZT 6 n'a pas été utilisé lors des mesures. On dispose donc d'une seule excitation ($n_u = 1$) et de huit mesures capteurs ($n_y = 8$).

L'excitation de la structure et l'acquisition de ces réponses dynamiques sont réalisées en utilisant la carte d'acquisition et de commande dSPACE[®] (type, CLP1103). La photo de la figure 2.5 (a) montre le boîtier contenant cette carte. La carte dSPACE[®] permet d'interagir avec le logiciel Matlab/Simulink, elle comporte huit convertisseurs numériques/analogiques et vingt convertisseurs analogiques/numériques de 16 bits.

Après plusieurs essais, nous avons retenu comme excitation des plaques composites, un signal **rectangulaire**, dont les caractéristiques sont définies au tableau 2.2.

Tableau 2. 2 : Caractéristiques du signal de type rectangulaire

✓	Période d'échantillonnage : $T_e = 10\mu s$,
✓	Début du signal : $t_{début} = 0.5s$,
✓	Durée du signal rectangulaire : $\Delta T = 1ms$,
✓	Nombre d'échantillons du signal rectangulaire : 100,
✓	Amplitude : $A = 1$ Volt.
✓	Fin de la manipulation : $t_{fin} = 3s$.

Le signal d'excitation est amplifié par l'amplificateur de tension " *TREK, type 601C* " (figure 2.5(b)). Ce dernier a un gain égal à 50V/V avec une **bande passante** comprise entre **0 et 30 KHz**. La sortie de cet amplificateur est reliée à l'actionneur piézoélectrique PZT 7. Les mesures provenant des capteurs piézoélectriques sont amplifiées par une électronique bien spécifique. Nous utilisons des amplificateurs de charges " *KISTLER de type 5011B* " (figure 2.5 (c)) possédant une **bande passante** comprise entre **0 et 30 KHz**.

Deux raisons ont motivé notre choix quant à l'utilisation du signal rectangulaire. La première est que ce signal est de très courte durée ($\Delta T = 1ms$).

Cette notion de brièveté est liée à un enjeu important : **l'optimisation énergétique**. En effet, lors de l'intégration d'une méthode de contrôle santé sur un système embarqué, la **consommation d'énergie** du dispositif de mesures et d'excitation doit être réduite. La seconde raison à l'utilisation de ce signal sera détaillée ultérieurement.

Précisons que plusieurs essais de la plaque saine et de la plaque endommagée ont été effectués. Ces essais, nous serviront pour définir des résidus **robustes** indicateurs d'endommagements. Notons aussi, que les essais ont tous été faits pour des températures situées entre **T=18°C** et **T=24°C**.

Le schéma de la figure 2.6 montre la démarche que nous avons entreprise pour exciter les deux plaques composites, mesurer et acquérir leurs réponses dynamiques.



(a) Carte d'acquisition et de commande dSPACE



(b) Amplificateur de tension



(c) Amplificateurs de charges

Figure 2.5 : Photo de la chaîne d'excitation, de mesures et d'acquisition des signaux

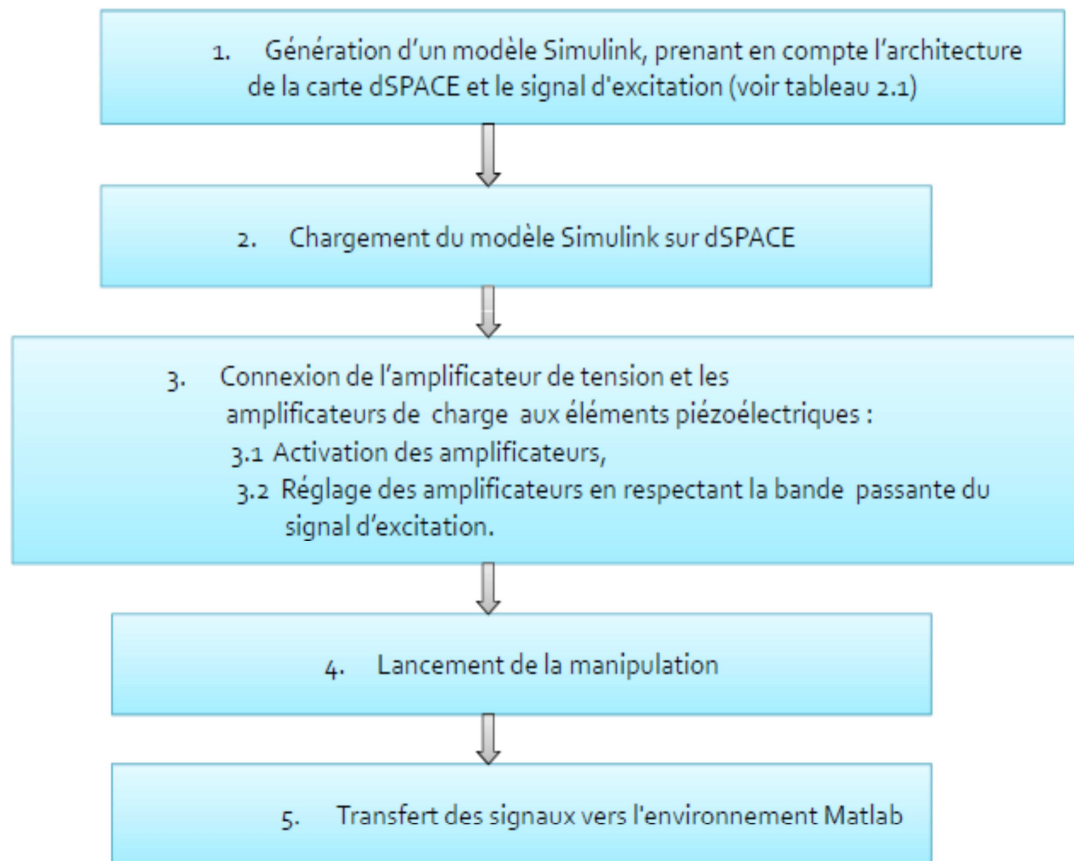


Figure 2.6 : Démarche entreprise pour exciter les plaques composites, mesurer et acquérir leurs réponses dynamiques

Les figures 2.7 et 2.8 montrent respectivement les huit réponses temporelles des différents capteurs de la plaque saine et de la plaque endommagée.

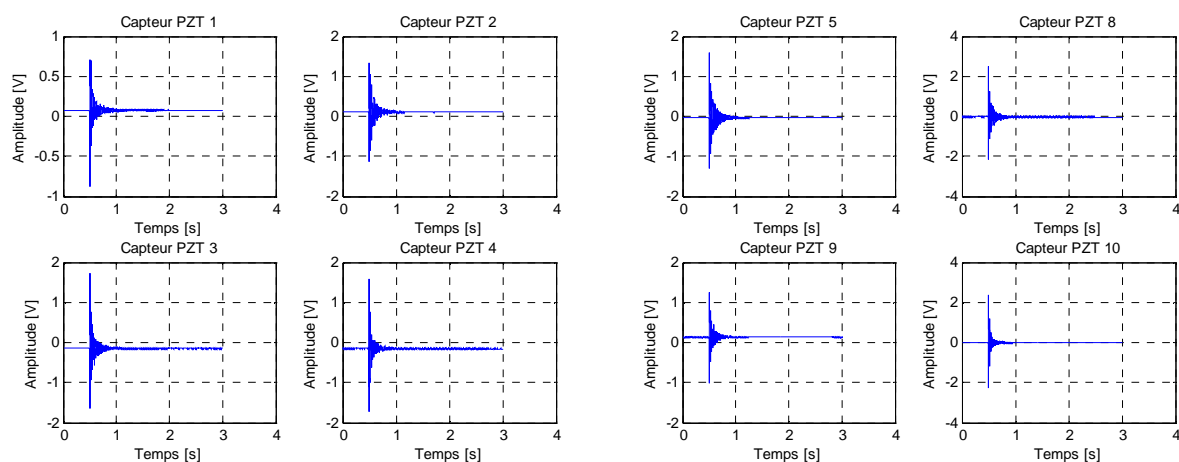


Figure 2.7 : Réponses temporelles des capteurs piézoélectriques pour la plaque saine, lorsque le PZT 7 est en mode actionneur

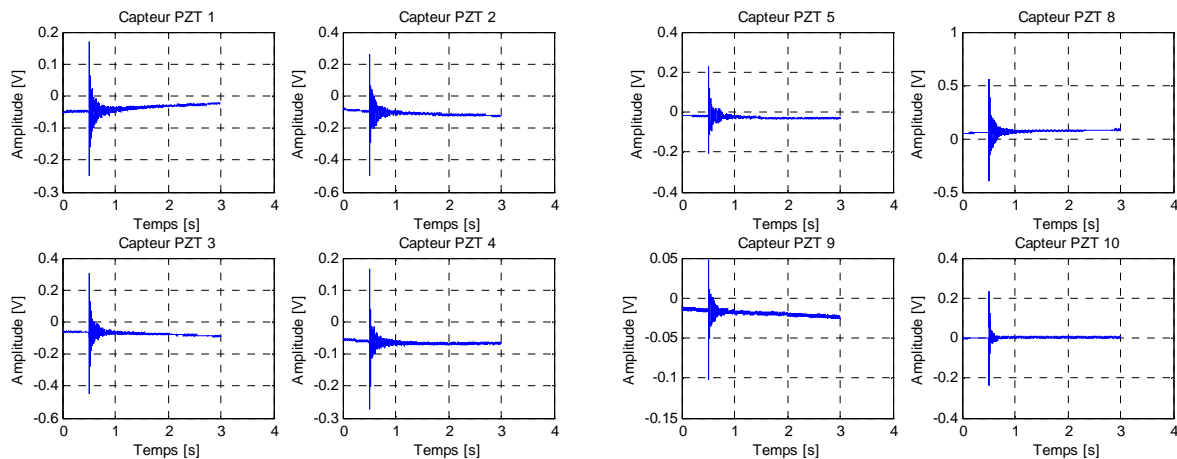


Figure 2.8 : Réponses temporelles des capteurs piézoélectriques pour la plaque endommagée : PZT 7 en mode actionneur

A partir des mesures présentées sur les figures ci-dessus, nous remarquons en premier lieu la présence d'un offset. Cet offset est dû aux propriétés inhérentes aux éléments piézoélectriques. En effet, avant de commencer la manipulation, les structures sont aux repos et les amplificateurs de charges sont déchargés. Compte tenu de l'absence de signal d'excitation entre les instants $t = 0$ et $t_{début} = 0.5$ s (voir tableau 2.2), la tension mesurée par les capteurs devrait être nulle. Or en pratique, la décharge des amplificateurs n'entraîne pas une suppression complète des charges électriques présentes sur les surfaces des éléments piézoélectriques. Certes, elles sont très faibles, cependant elles sont non négligeables. Ceci explique le décalage observé aux figures 2.7 et 2.8 par rapport au référentiel de tension zéro.

Sur certains capteurs de la plaque saine et de la plaque endommagée, cette tension a tendance à évoluer, par exemple, le capteur PZT 1 de la figure 2.8. L'explication vient du fait qu'un élément piézoélectrique en mode capteur se comporte comme un condensateur, d'où l'effet d'intégration observé. Hormis les propriétés inhérentes aux capteurs piézoélectriques, nous observons aussi la présence de bruit de mesures.

Dans le but de minimiser l'influence de ces perturbations (bruit de mesures, offset) et d'obtenir des mesures utiles représentant la dynamique des structures étudiées, un prétraitement est nécessaire. Il est résumé au tableau 2.3.

Tableau 2.3 : Prétraitement des mesures

1. Dans l'intervalle de temps $t \in [0 \quad t_{début} = 0.5]$ s, nous calculons la moyenne de chaque mesure délivrée par le capteur i , ($i = 1, 2, \dots, n_y = 8$),
2. Dans l'intervalle de temps $t \in [0 \quad t_{fin} = 3]$ s, nous retirons la moyenne de chaque mesure.
3. Dans l'intervalle de temps $t \in [0.5 \quad t_{fin} = 3]$ s, nous prenons $N = 2^{16}$ échantillons, cela correspond à l'intervalle de temps $t \in [0.5 \quad 1.1536]$ s

Nous notons :

$\underline{y}(kT_e) = \underline{y}(k)$, le vecteur de mesures à l'instant $kT_e \in [0.5 \ 1.15536]$ s provenant des n_y capteurs piézoélectriques :

$$\underline{y}(k) = [y_1(k) \cdots y_i(k) \cdots y_{n_y}(k)]^T \quad (2.1)$$

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$, la matrice de mesures formée par la concaténation de vecteurs $\underline{y}(k)$ à différents instants k :

$$\mathbf{Y} = [\underline{y}(1) \cdots \underline{y}(k) \cdots \underline{y}(N)] \quad (2.2)$$

où $N = 2^{16}$ est le nombre d'échantillons temporels.

Afin de distinguer entre des mesures prises sur la structure composite à l'état sain, ou inconnu, ou endommagé, nous notons dans la suite de ce travail : $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^u, \mathbf{Y}^d \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$, la matrice de mesures de la structure composite à l'état sain, ou inconnu, ou endommagé.

Après l'étape de prétraitement, nous présentons à la figure 2.9, les réponses temporelles de quelques capteurs de la plaque saine et de la plaque endommagée. Notons l'absence d'offset dans ces réponses.

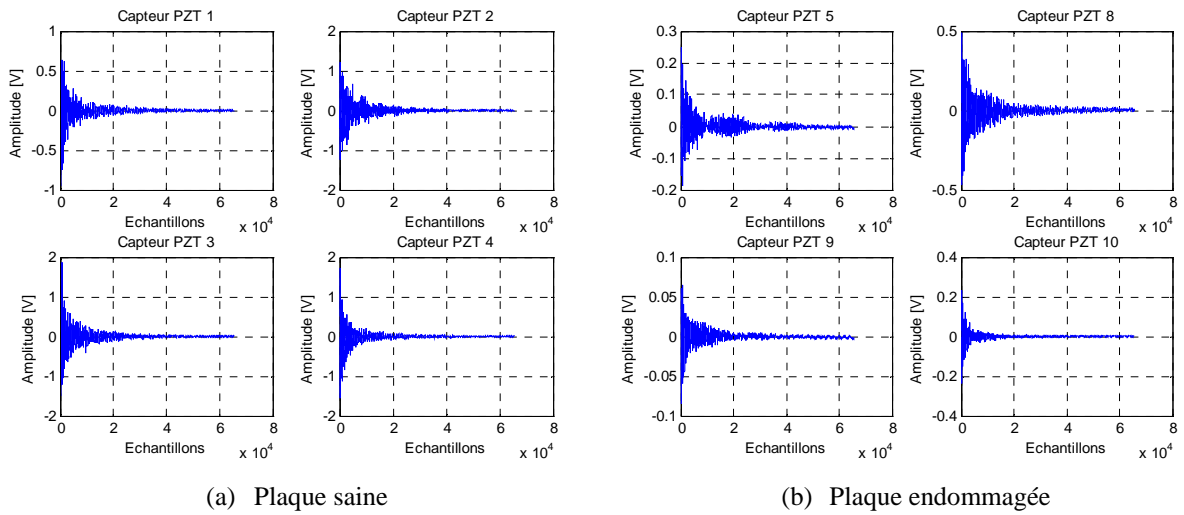


Figure 2.9 : Réponse temporelle de quelques capteurs après l'étape de prétraitement
(a) plaque saine, (b) plaque endommagée

Dans le but de vérifier la répétabilité des mesures, nous avons effectué $n = 13$ essais supplémentaires sur la plaque composite à l'état sain, la figure 2.10 montre la réponse

temporelle du capteur PZT 8 pour quelque un de ces essais. Nous constatons que les essais effectués sont répétables.

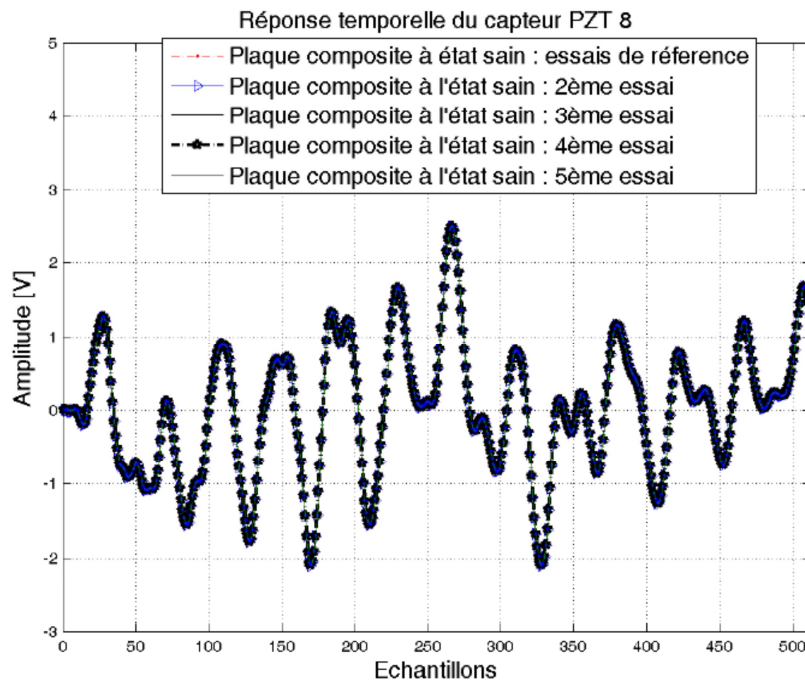


Figure 2.10 : Essais de répétabilité sur la plaque composite à l'état sain

Nous avons superposé à la figure 2.11, la réponse du capteur PZT 8 de la plaque saine et de la plaque endommagée pour les seuls 512 premiers échantillons. Cette figure montre que la présence de l'endommagement de type impact a modifié la réponse dynamique de la plaque saine.

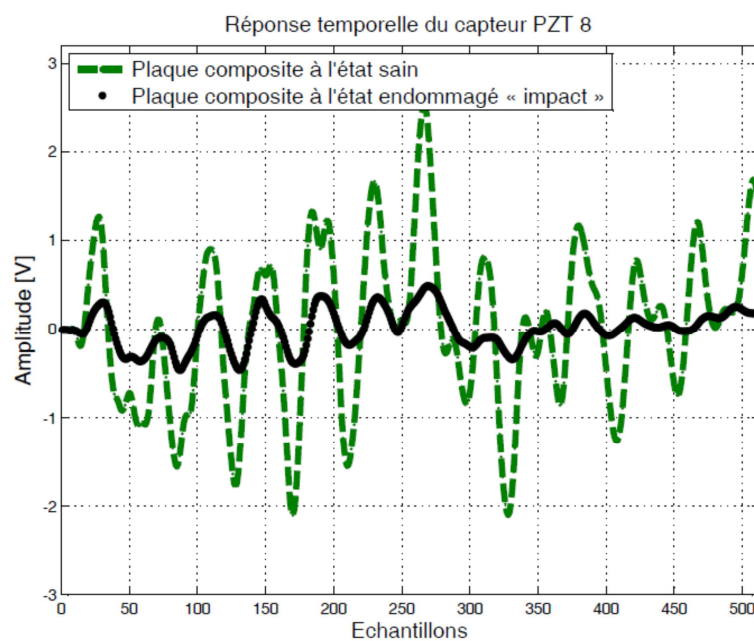


Figure 2.11 : Réponse temporelle du capteur PZT 8 pour la plaque saine et pour la plaque endommagée

Au § 1.8.2, nous avons souligné que l'évolution de l'endommagement peut être considérée comme un processus assez lent, à condition que la durée d'acquisition soit très courte (Fritzen 2006). Dans le cadre de notre travail, les signaux mesurés sont acquis sur une durée égale à 0.56 s :

*Une fois toutes les mesures acquises, nous cherchons à détecter l'endommagement: c'est une méthode de surveillance en **temps différé**.*

2.1.1.2 Identification des paramètres modaux de la plaque saine et de la plaque endommagée

Identifions les paramètres modaux de la plaque composite saine et de la plaque endommagée : *fréquences de résonances et coefficients d'amortissement modaux.*

A partir des réponses temporelles des capteurs et du signal d'entrée, nous avons calculé les réponses fréquentielles (FRFs) entre l'actionneur PZT 7 et un capteur PZT i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10$) à l'aide de la transformée de Fourier. Le nombre de points de calcul est $N = 2^{16}$ échantillons, la période d'échantillonnage est $T_e = 10 \mu s$, la résolution de la transformée de Fourier est donc : $T_{res} = \frac{1}{NT_e} = 1.52 \text{ Hz}$. La figure 2.12 montre la réponse fréquentielle entre l'actionneur PZT 7 et le capteur PZT 8 de la plaque saine et de la plaque endommagée. Nous constatons que dans la bande fréquentielle $[53.4 \text{ } 804.1] \text{ Hz}$ la présence de l'endommagement a modifié l'amplitude et les pics de résonances de la plaque à l'état sain. Cette constatation justifie l'utilisation du signal rectangulaire de durée $\Delta T = 1 \text{ ms}$ pour l'excitation des deux plaques composites, et constitue donc la seconde raison énoncée au § 2.1.1.1.

Remarquons que dans cette figure, nous n'avons pas représenté les fréquences comprises entre 1.52 Hz et 51.88 Hz, car aucune fréquence de résonance n'a été observée, ni sur la plaque saine ni sur la plaque endommagée.

Les coefficients d'amortissement modaux sont obtenus à partir de l'équation suivante (Ewins 2000) :

$$\zeta_i = \frac{\Delta f_{ri}}{f_{ri}} \quad (2.3)$$

où f_{ri} et Δf_{ri} représentent respectivement la fréquence de résonance et la bande passante à -3dB d'un mode i .

Les tableaux 2.4 et 2.5 montrent les paramètres modaux (fréquences de résonances et coefficients d'amortissement modaux) de quelques modes de la plaque saine et de la plaque endommagée, la numérotation de ces modes est définie par rapport aux pics de résonances de la plaque *saine*. Nous constatons que la présence de l'endommagement de type impact a modifié les paramètres modaux de cette plaque. Remarquons aussi que les coefficients

d'amortissement modaux de la plaque saine et de la plaque endommagée sont inférieurs à 1%, les structures étudiées sont donc flexibles.

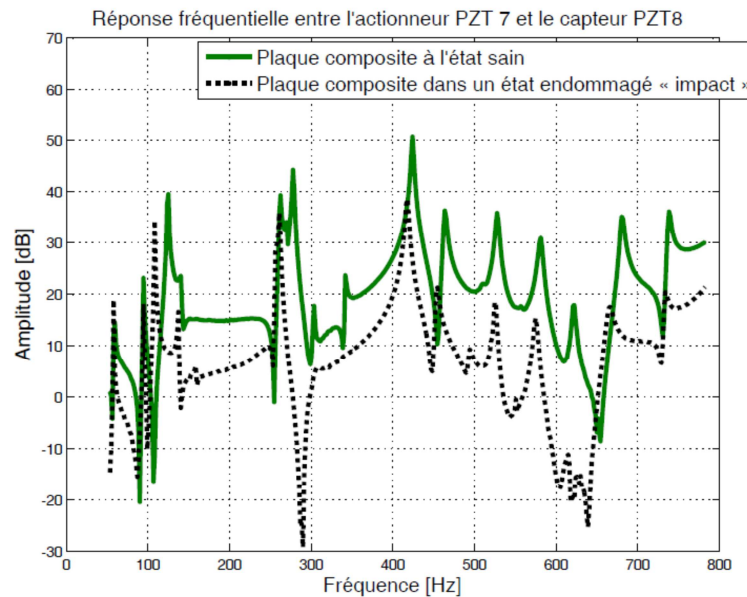


Figure 2.12 : Réponse fréquentielle de la plaque saine et endommagée

Tableau 2. 4 : Fréquences de résonances de la plaque saine et de la plaque endommagée

Numéro du pic de résonance	Fréquence de résonance f_r^s de la plaque saine [Hz]	Fréquence de résonance f_r^d de la plaque endommagée [Hz]	Ecart relatif [%] : $\frac{ f_r^s - f_r^d }{f_r^s}$
1	57.98	56.8	2.03
2	94.6	94.6	0
3	125.1	108.3	13.4
4	140.4	137.3	2.2
5	151.1	158.7	5.03

Tableau 2. 5 : Coefficient d'amortissements modaux de la plaque saine et endommagée

Numéro du pic de résonance	Coefficient d'amortissement [%] ζ^s : plaque saine	Coefficient d'amortissement [%] ζ^d : plaque endommagée	Ecart relatif [%] : $\frac{ \zeta^s - \zeta^d }{\zeta^s}$
1	0.9689	0.9585	1.0734
2	0.8511	0.9466	10.0887
3	0.9740	0.8824	9.4045
4	0.9862	0.3989	59.5518
5	0.9202	0.9428	2.3971

2.1.1.3 Endommagement du capteur

L'estimation de la sévérité de l'endommagement constitue l'avant dernière étape d'une procédure de contrôle santé (voir figure 1.9). Cette étape permet de décrire l'endommagement par le biais de paramètres, tels que le diamètre d'un impact, la longueur d'une fissure et la taille d'un délaminage (Chang et al. 2007).

Cette estimation peut être réalisée de deux manières, la première est effectuée par le biais d'une **modélisation fine** d'un ou plusieurs endommagements, avec des diamètres, des

longueurs et des tailles bien **définis**. Dans le cas où le résidu indicateur d'endommagement est quantifié par une valeur numérique, il permettra alors d'attribuer une valeur à la sévérité de l'endommagement.

La deuxième façon d'estimer la sévérité est expérimentale. Elle nécessite de disposer de structures présentant un ou plusieurs endommagements, avec des diamètres, des longueurs et des tailles bien **définis**. Malheureusement, nous n'avons pas pu disposer de plusieurs plaques endommagées.

Malgré l'absence de ces éléments, nous avons tout de même cherché à estimer la sévérité de l'endommagement d'un capteur. De plus, les capteurs font maintenant partie de la structure intelligente (SI), tout endommagement les concernant sera aussi considéré comme un endommagement de la SI. Ainsi un décollement, ou un changement de surface d'adhérence d'une partie d'un capteur est vu comme un **dé laminage local** affectant la SI.

Pour estimer la sévérité de l'endommagement d'un capteur, nous avons modifié progressivement la surface du capteur PZT 1 de la plaque saine (voir figure 2.13), de 0.975 à 0.1 de la surface totale du capteur (dimension : $30 \times 20 \times 0.2 \text{ mm}^3$).

En suivant la procédure de prétraitement décrite au tableau 2.3, la matrice de mesures de la plaque saine affectée par le *changement de surface* du capteur (de sévérité diverse) est construite. Nous notons $\mathbf{Y}^{dci} \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ ces matrices. L'exposant *dc* dénote des mesures provenant de la structure affectée par un endommagement capteur, l'exposant *i* dénote le changement de surface du capteur PZT 1 qui a été modifié.

La figure 2.14 montre qu'il existe une différence dans l'amplitude du capteur PZT 1 à l'état sain et à l'état défailant, et cela pour un changement de surface égal à 0.4.

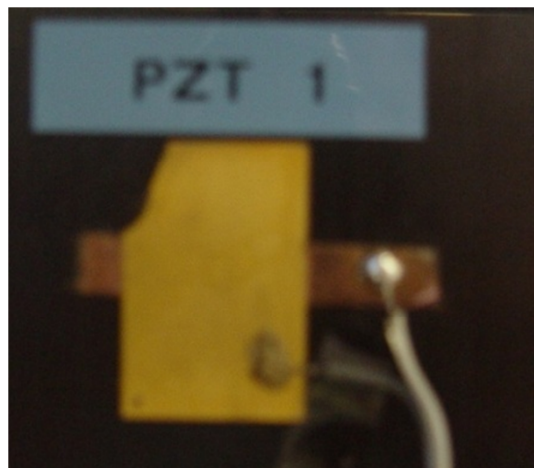


Figure 2.13 : Réduction de la surface du PZT 1 sur la plaque saine

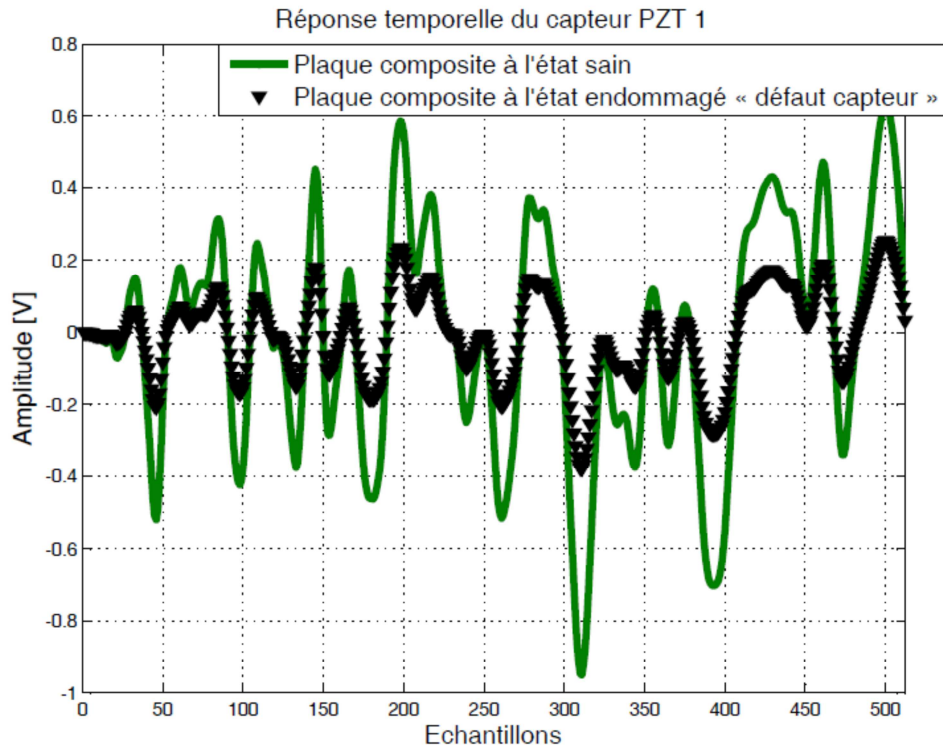


Figure 2.14 : Réponse du capteur PZT 1 à l'état sain et endommagé (changement de surface du capteur PZT1)

2.1.1.4 Etude du bruit de mesure

En absence d'excitation, nous avons effectué des mesures sur la plaque saine et la plaque endommagée dans l'intervalle de temps $t \in [0 \quad t_{fin} = 3]s$. Ces mesures ont permis de collecter des informations représentatives **du bruit** de mesure. Ces dernières ont été analysées avec le test du Q-Q plot, quantile-quantile plot (Saporta 2006), dont le but est d'évaluer la **gaussianité** du bruit.

Le Q-Q plot est une technique graphique qui permet de comparer la distribution de deux jeux de données. Dans notre étude, le premier jeu correspond au bruit mesuré par un capteur. Le second jeu correspond à un signal de distribution **gaussienne**. Rappelons que la période d'échantillonnage utilisée est : $T_e = 10\mu s$, donc le nombre d'échantillons étudiés ici est : $N_n = 300000$.

Les figures 2.15 et 2.16 montrent respectivement le graphique Q-Q plot du bruit mesuré par le capteur PZT 2 de la plaque saine et de la plaque endommagée. Nous observons que des points sont éloignés de la droite de Henry. Nous concluons donc que le bruit présent lors de la manipulation **n'est pas gaussien**.

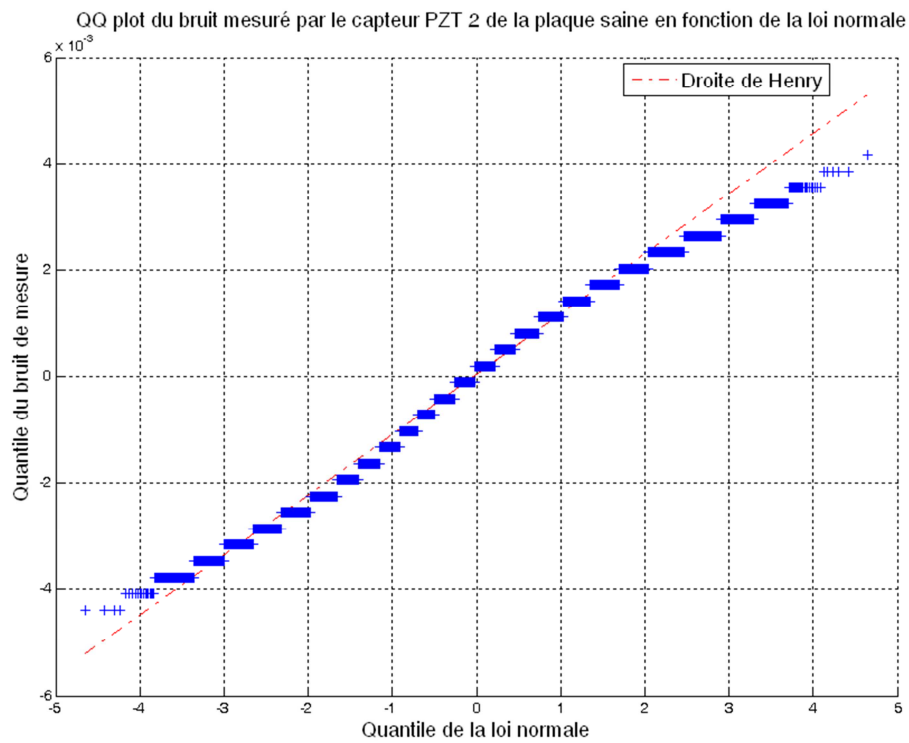


Figure 2.15 : Droite de Henry du bruit mesuré par le capteur PZT2 de la plaque saine

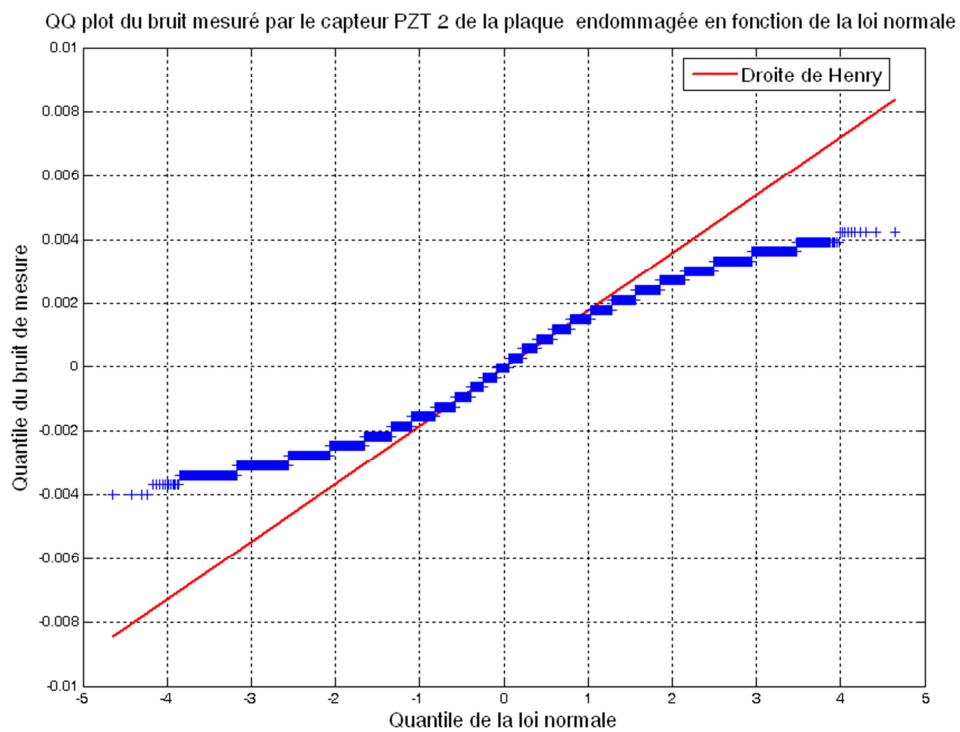


Figure 2.16 : Droite de Henry du bruit mesuré par le capteur PZT2 de la plaque endommagée

2.1.2 Présentation des structures composites antennaires

2.1.2.1 Objectifs visés

Ce travail de thèse rentre dans le cadre du projet MSIE, dont l'objectif est d'intégrer des réseaux d'antennes dans des matériaux composites. Cette intégration permet de former une *structure composite intelligente et antennaire*. A cet effet, nous avons travaillé sur deux lames composites antennaires, fournies par l'industriel INEO. Nous nommons dans ce mémoire ces lames par : **lame 1 et 2**. Chacune de ces lames est de dimension : $800 \times 150 \times 2 \text{ mm}^3$, la figure 2.17 montre le réseau d'antenne.

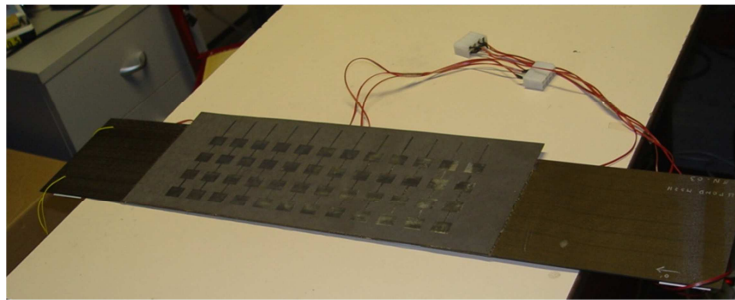


Figure 2.17 : Lame composite antennaire

L'étude de la **lame 1** a été faite en collaboration avec deux membres du projet MSIE : l'Université Paris Ouest Nanterre la Défense et l'industriel SATIMO, et elle visait *deux objectifs* : d'une part, mesurer les **déformations statiques** en flexion et en torsion de lame 1 par le biais des capteurs piézoélectriques (figure 2.18). D'autre part, vérifier s'il existe un **couplage** entre les **effets électromagnétiques** lors de l'émission des antennes et les **informations électriques** transmises par les capteurs piézoélectriques, lors de la déformation de la structure.

La figure 2.19 montre le dispositif qui a permis d'atteindre ces deux objectifs. Ce dispositif est composé de la lame 1, d'un système permettant de piloter la **lame en flexion et en torsion**, et d'une **arche** pour mesurer le rayonnement des antennes lors de leur émission. Cette partie de notre travail a été faite chez l'industriel SATIMO dans une chambre anéchoïque. Les mesures effectuées chez SATIMO ont permis de montrer que les deux phénomènes peuvent coexister au même temps sans *aucune interaction*. Cette étude sera décrite à l'annexe A.

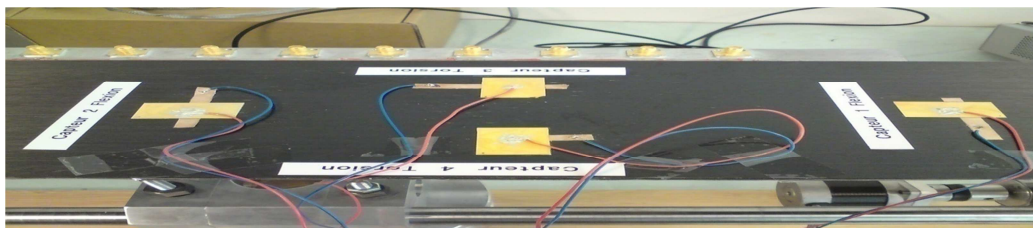


Figure 2.18 : Lame 1 munie de capteurs piézoélectriques : étude de la déformation statique

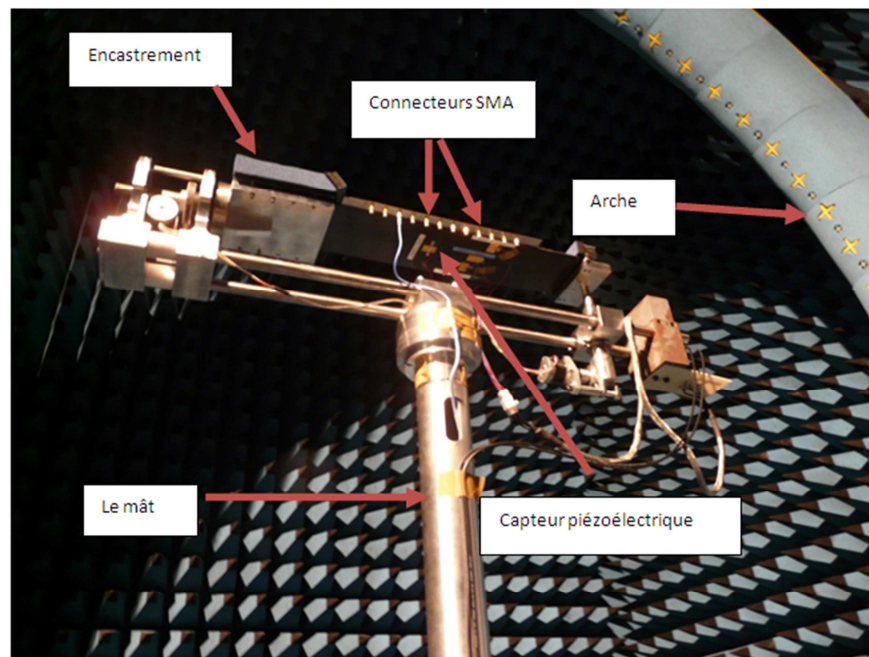


Figure 2.19 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque : lame composite au repos

En plus des endommagements qui peuvent affecter la structure composite intelligente :

- **Décohésion fibre/matrice,**
- **Fissure à l'intérieur du pli,**
- **Délaminage,**
- **Rupture de fibre,**

des endommagements du réseau d'antennes peuvent aussi se manifester, et donc perturber la qualité des communications entre l'avion et la tour de contrôle (à titre d'exemple).

Partant de ce nouveau type d'endommagement, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'endommagement du réseau d'antennes. C'est l'objet de notre travail sur la ***lame 2***. L'étude de cette lame a été faite quant à elle en collaboration avec le *Centre des Matériaux des Mines ParisTech*.

A partir de la méthode de placement que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre, sept éléments piézoélectriques ont été placés de manière optimale (figure 2.21). Le tableau 2.6 indique leurs coordonnées en mm par rapport à l'origine de la figure 2.20.

Pour tester cette lame, nous l'avons mis en configuration libre-libre. Nous avons excité cette lame à l'état sain par un signal rectangulaire, en fixant le PZT 2 en mode actionneur, les caractéristiques du signal d'excitation sont identiques à celles utilisées pour les plaques composites (tableau 2.2). Nous avons ensuite enregistré et prétraité les réponses temporelles fournies par les $n_y = 6$ capteurs piézoélectriques : ces mesures servent de base de référence. Notons que dans le cadre du contrôle santé, les essais s'effectuent uniquement sur la lame 2.

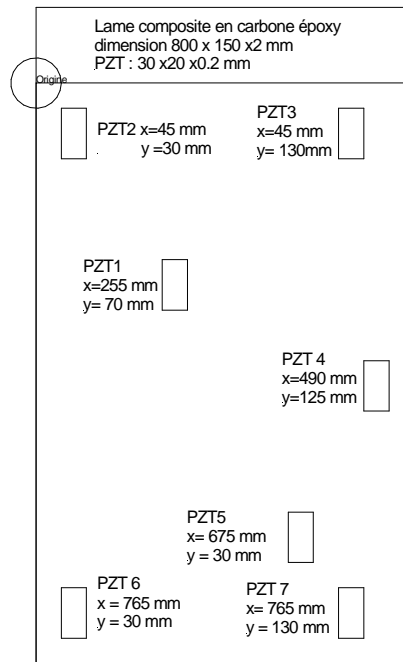


Figure 2.20 : Placement optimal des sept éléments piézoélectriques sur la lame 2

Tableau 2. 6 : Coordonnées des éléments piézoélectriques sur la lame 2

Numéro du PZT	1	2	3	4	5	6	7
Cordonnées $\begin{cases} x [mm] \\ y [mm] \end{cases}$	$\begin{cases} 70 \\ 255 \end{cases}$	$\begin{cases} 30 \\ 45 \end{cases}$	$\begin{cases} 130 \\ 45 \end{cases}$	$\begin{cases} 490 \\ 125 \end{cases}$	$\begin{cases} 675 \\ 100 \end{cases}$	$\begin{cases} 765 \\ 30 \end{cases}$	$\begin{cases} 765 \\ 130 \end{cases}$

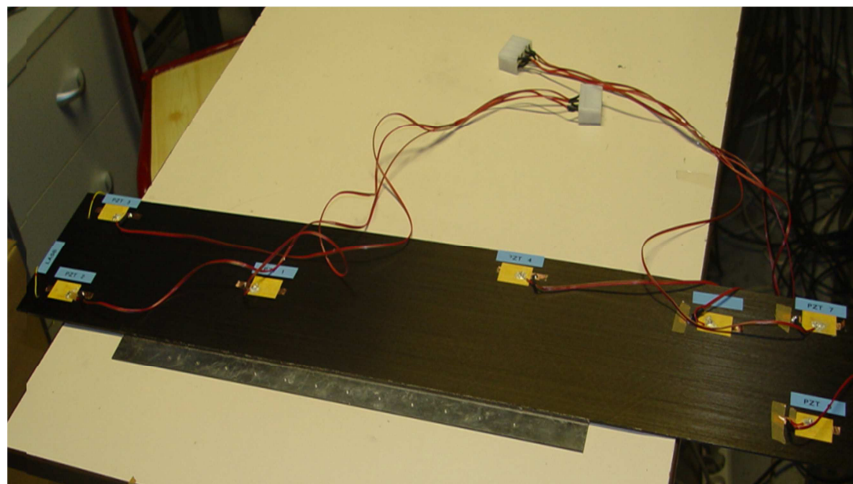


Figure 2.21 : Lame 2 munie de sept éléments piézoélectriques

Nous avons transmis ensuite la lame 2 au Centre des Matériaux des Mines ParisTech, cette lame a été déformée par un dispositif de flambage (figure 2.22), provoquant le **décollement**

du réseau d'antennes, observé à la figure 2.23. Cette lame nous a été retournée, et nous avons effectué des essais à l'état endommagé.

La figure 2.24 montre la réponse temporelle du capteur PZT 4 de la lame 2 à l'état sain et de la même lame après qu'elle soit endommagée.

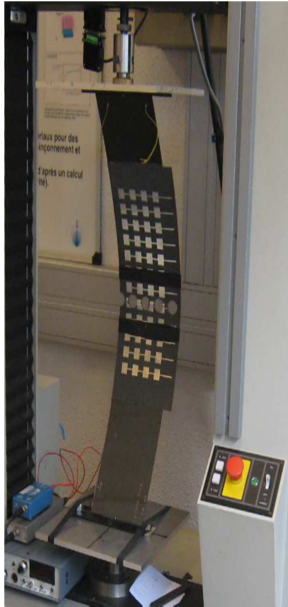


Figure 2.22 : Dispositif de flambage
(Renard and Nimdum 2012)



Figure 2.23 : Endommagement de la lame 2:
décollement du réseau d'antenne

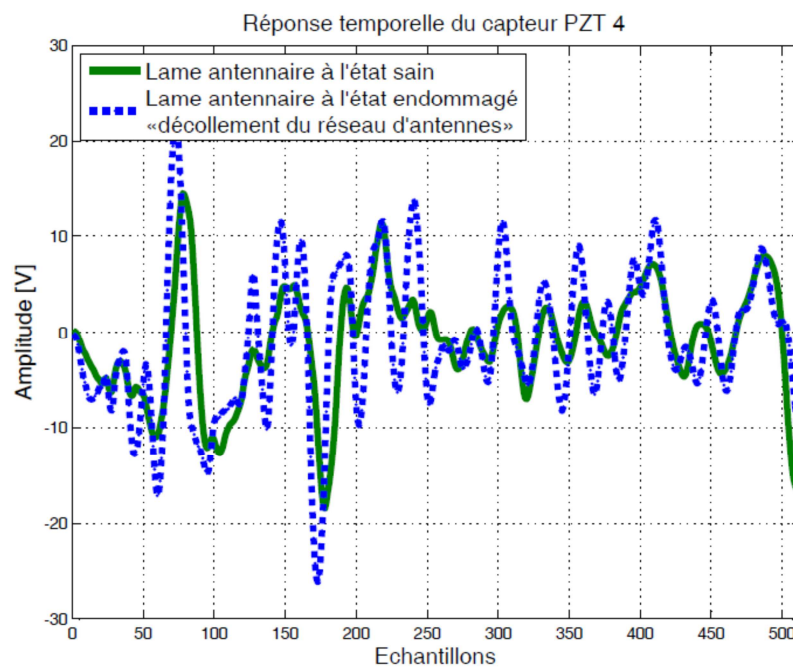


Figure 2.24 : Réponse temporelle du capteur PZT 2 pour la lame saine et endommagée

2.1.2.2 Identification des paramètres modaux de la lame antennaire

En suivant la même démarche que celle faite pour les plaques composites (§ 2.1.1.2), nous avons calculé la réponse fréquentielle entre l'actionneur PZT 2 et le capteur PZT i ($i=1, 3, 4, 5, 6, 7$). La figure 2.25 montre la réponse fréquentielle entre l'actionneur PZT 2 et le capteur PZT 4 de la lame à l'état sain et de la même lame, mais à l'état endommagé. Nous constatons que dans la bande fréquentielle [53.4 804.1] Hz, la présence de l'endommagement a modifié l'amplitude et les pics de résonances de la lame.

A partir de cette réponse fréquentielle, nous avons calculé les paramètres modaux (fréquences de résonances et coefficients d'amortissement modaux) de la lame dans les deux états : sain et endommagé (décollement du réseau d'antennes). Nous constatons d'après les tableaux 2.7 et 2.8 que le *décollement du réseau* d'antennes a modifié les paramètres modaux de la lame saine. Notons aussi, que la numérotation des modes est définie par rapport aux pics de résonances de la lame *saine*.

Tableau 2. 7 : Fréquences de résonances de la lame 2

Mode	Fréquence de résonance f_r^s de la lame 2 saine [Hz]	Fréquence de résonance f_r^d de la lame 2 endommagée [Hz]	Ecart relatif [%] : $\frac{ f_r^s - f_r^d }{f_r^s}$
1	51.88	51.88	0
2	103.8	103.8	0
3	116	111.4	3.9655
4	154.1	148	3.9585
5	189.2	187.7	0.7928

Tableau 2. 8 : Coefficients d'amortissement modaux de la lame 2

Mode	Coefficient d'amortissement [%] ζ^s : lame 2 saine	Coefficient d'amortissement [%] ζ^d : lame 2 endommagée	Ecart relatif [%] : $\frac{ \zeta^s - \zeta^d }{\zeta^s}$
1	0.8908	0.8977	0.7746
2	0.6489	0.6757	4.1301
3	0.8104	0.7991	1.3944
4	0.4583	0.9729	112.2845
5	0.7765	0.4130	46.8126

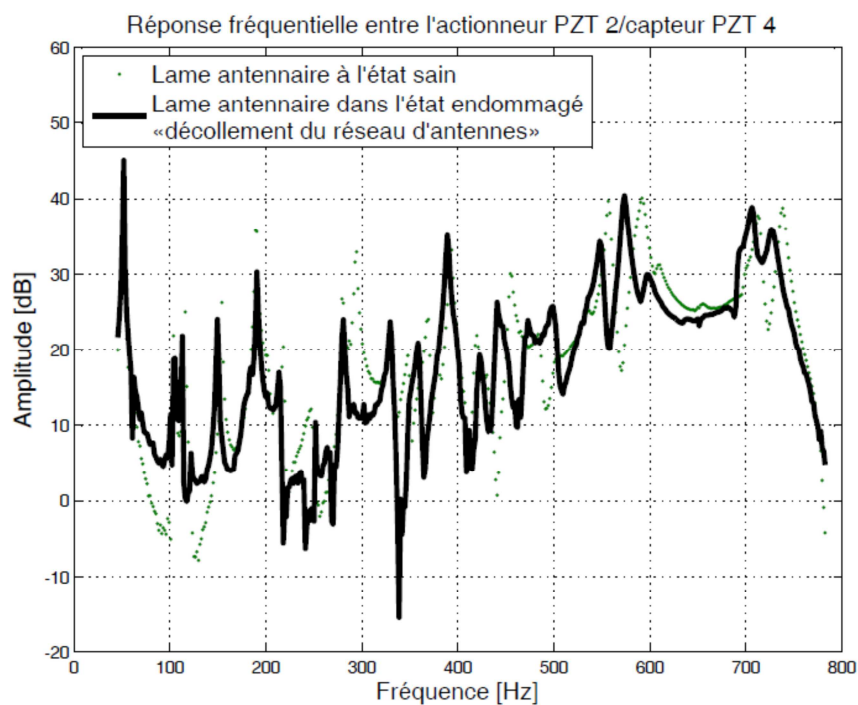


Figure 2.25 : Réponse fréquentielle de la lame 2 : actionneur PZT 2/capteur PZT4

2.2 Modélisation

Dans cette partie, nous décrivons la méthode de placement qui nous a permis de positionner de manière optimale les éléments piézoélectriques sur les plaques composites et sur la lame 2. Cette méthode est basée sur les grammians d'observabilité et de gouvernabilité. Pour commencer, nous allons aborder les notions de base de l'automatique et de la dynamique des structures.

2.2.1 Modèles structuraux

Les modèles structuraux sont représentés par des équations différentielles du second ou du premier ordre. En mécanique, nous utilisons généralement le premier formalisme, où la dynamique est représentée par les degrés de liberté de la structure. La représentation d'un système mécanique par des équations différentielles du premier ordre est appelée représentation état, cette dernière est adéquate pour le traitement des problèmes de commande et d'identification. Le choix du système de coordonnées est arbitraire ; par exemple, en mécanique des structures, nous utilisons les systèmes nodaux ou modaux. En coordonnées nodales, nous représentons les déplacements et les vitesses de certains points du système, appelés nœuds ; en revanche, les coordonnées modales sont définies à partir des déplacements et des vitesses des modes propres de la structure.

2.2.1.1 Modèle structural nodal

Soit une structure intelligente " SI " à l'état sain à n_d degrés de liberté, munie d'actionneurs et de capteurs. Cette SI est caractérisée par ses matrices de masse, de rigidité et d'amortissement et par la position des actionneurs et des capteurs (Gawronski 1998). On suppose qu'il y a n_u variables d'entrées et n_y mesures. La structure est représentée par l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\mathbf{M}^s \ddot{\mathbf{q}}_n^s(t) + \mathbf{D}^s \dot{\mathbf{q}}_n^s(t) + \mathbf{K}^s \mathbf{q}_n^s(t) = \mathbf{B}_n \mathbf{u}(t) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}^s(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{q}_n^s(t) \quad (2.5)$$

où

L'exposant s dénote une *structure à l'état sain*,

$\mathbf{q}_{n_d}^s(t) \in \mathbb{R}^{n_d \times 1}$ est le vecteur des déplacements nodaux à l'instant t , $\mathbf{M}^s \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{D}^s \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{K}^s \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure à l'état sain. Le vecteur $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$ est appelé dans le **contexte** de la surveillance, *vecteur d'excitation*, $\mathbf{B}_n \in \mathbb{R}^{n_d \times n_u}$ est la matrice d'excitation nodale, $\mathbf{y}^s(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$ est le vecteur de mesures et $\mathbf{C}_n \in \mathbb{R}^{n_y \times n_d}$ est la matrice d'observation nodale.

2.2.1.2 Modèle structural modal

En régime libre et en négligeant l'amortissement, l'équation matricielle (2.4) prend la forme suivante :

$$\mathbf{M}^s \ddot{\mathbf{q}}_n^s(t) + \mathbf{K}^s \mathbf{q}_n^s(t) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

La solution de l'équation (2.6) est donnée par :

$$\mathbf{q}_n^s(t) = \underline{\boldsymbol{\psi}}^s e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

où ω est un nombre réel et $\underline{\boldsymbol{\psi}}^s$ est un vecteur de constantes.

Compte tenu de cette expression, l'équation matricielle (2.6) associée au régime libre du système devient (Gmür 2008) :

$$(\mathbf{K}^s - \omega^2 \mathbf{M}^s) \underline{\boldsymbol{\psi}}^s e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Ce système homogène de n_d équations linéaires admet n_d solutions:

$$(\mathbf{K}^s - \omega_i^2 \mathbf{M}^s) \underline{\boldsymbol{\psi}}_i^s = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, n_d \quad (2.9)$$

où les grandeurs ω_i sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{K}^s - \omega^2 \mathbf{M}^s) = 0 \quad (2.10)$$

En dynamique des structures, le nombre de degrés de liberté n_d est très grand, nous calculons donc n_m valeurs de ω_i qui satisfont l'équation (2.10), où ($n_m \ll n_d$).

La substitution des ω_i dans l'équation (2.9) donne l'ensemble correspondant aux solutions $\{\underline{\psi}_1^s \cdots \underline{\psi}_i^s \cdots \underline{\psi}_{n_m}^s\}$.

Le vecteur $\underline{\psi}_i^s$ est appelé *vecteur modal* et ω_i est la *pulsation propre* associée au mode i .

Définissons respectivement la matrice *modale* $\Psi^s \in \mathbb{R}^{n_d \times n_m}$ et la matrice des *pulsations* propres $\Omega \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ par :

$$\Psi^s = [\underline{\psi}_1^s \cdots \underline{\psi}_i^s \cdots \underline{\psi}_{n_m}^s] \quad (2.11)$$

$$\Omega = \text{diag}(\omega_i), i = 1, 2, \dots, n_m \quad (2.12)$$

La matrice modale diagonalise les matrices de masse et de rigidité:

$$\mathbf{M}_m^s = (\Psi^s)^T \mathbf{M}^s \Psi^s \quad (2.13)$$

$$\mathbf{K}_m^s = (\Psi^s)^T \mathbf{K}^s \Psi^s \quad (2.14)$$

où $\mathbf{M}_m^s \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$, $\mathbf{K}_m^s \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ sont respectivement les matrices *diagonales* de masse et rigidité modales.

Dans le cas où la matrice d'amortissement \mathbf{D}^s s'exprime selon l'hypothèse de Rayleigh (Ewins 2000), c.à.d. par la combinaison linéaire de la matrice de masse et de rigidité, nous avons :

$$\mathbf{D}^s = \alpha \mathbf{M}^s + \beta \mathbf{K}^s \quad (2.15)$$

où α et β sont constants.

La matrice d'amortissement modale est alors donnée par :

$$\mathbf{D}_m^s = (\Psi^s)^T \mathbf{D}^s \Psi^s \quad (2.16)$$

Introduisons le nouveau vecteur $\underline{q}_m^s(t)$ défini par :

$$\underline{q}_m^s(t) = \Psi^s \underline{q}_m^s(t) \quad (2.17)$$

Substituons $\underline{q}_m^s(t)$ dans les équations (2.4) et (2.5),

Nous obtenons après multiplication à gauche de l'équation (2.4) par $(\Psi^s)^T$:

$$\mathbf{M}_m^s \ddot{\underline{q}}_m(t) + \mathbf{D}_m^s \dot{\underline{q}}_m(t) + \mathbf{K}_m^s \underline{q}_m(t) = (\Psi^s)^T \mathbf{B}_n \underline{u}(t) \quad (2.18)$$

$$\underline{y}^s(t) = \mathbf{C}_n \Psi^s \underline{q}_m^s(t) \quad (2.19)$$

En multipliant l'équation (2.18) à gauche par $(\mathbf{M}_m^s)^{-1}$, on obtient :

$$\ddot{\underline{q}}_m^s(t) + (\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{D}_m^s \dot{\underline{q}}_m^s(t) + (\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{K}_m^s \underline{q}_m^s(t) = (\mathbf{M}_m^s)^{-1} (\Psi^s)^T \mathbf{B}_n \underline{u}(t) \quad (2.20)$$

$$\underline{y}^s(t) = \mathbf{C}_n \Psi^s \underline{q}_m^s(t) \quad (2.21)$$

Ainsi, le modèle *modal* du second ordre est donné sous la forme suivante :

$$\ddot{\underline{q}}_m^s(t) + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \dot{\underline{q}}_m^s(t) + \mathbf{\Omega}^2 \underline{q}_m^s(t) = \mathbf{B}_m \underline{u}(t) \quad (2.22)$$

$$\underline{y}^s(t) = \mathbf{C}_m \underline{q}_m^s(t) \quad (2.23)$$

où

$\mathbf{\Omega}^2 = (\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{K}_m^s$	est la matrice spectrale, $\mathbf{\Omega}^2 \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$,
$\mathbf{Z} = 0.5(\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{D}_m^s \mathbf{\Omega}^{-1}$	est la matrice modale diagonale d'amortissement, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$,
$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_n \Psi^s$	est la matrice d'observation modale, $\mathbf{C}_m \in \mathbb{R}^{n_y \times n_m}$,
$\mathbf{B}_m = (\mathbf{M}_m^s)^{-1} \Psi^T \mathbf{B}_n$	est la matrice d'excitation modale, $\mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_u}$.

Les équations (2.22) et (2.23) se composent de n_m équations découplées, et elles sont données par :

$$\ddot{q}_{mi}^s(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_{mi}^s(t) + \omega_i^2 q_{mi}^s(t) = \mathbf{b}_{mi} \underline{u}(t) \quad (2.24)$$

$$\underline{y}^s(t) = \mathbf{c}_{mi} q_{mi}^s(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_m \quad (2.25)$$

2.2.1.3 Représentation d'état

La représentation d'état d'un système linéaire continu de dimension finie et stationnaire est donnée par :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A} \underline{x}(t) + \mathbf{B} \underline{u}(t) \quad (2.26)$$

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \underline{x}(t) \quad (2.27)$$

où

n_s est la dimension du vecteur d'état, $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ est la matrice d'état du système continu, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_u}$ est la matrice d'excitation, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_s}$ est la matrice d'observation.

Le vecteur d'état modal $\underline{x}_m^s(t)$ peut être défini par :

$$\underline{x}_m^s(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}_m^s(t) \\ \dot{\underline{q}}_m^s(t) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où $\underline{x}_m^s(t) \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}, n_s = 2n_m$.

La représentation d'état du système modal (équations (2.22), (2.23)) est donnée par :

$$\dot{\underline{x}}_m^s(t) = \mathbf{A}_m^s \underline{x}_m^s(t) + \mathbf{B}_m^s \underline{u}(t) \quad (2.29)$$

$$\underline{y}^s(t) = \mathbf{C} \underline{x}_m^s(t) \quad (2.30)$$

où

$$\mathbf{A}_m^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_m \times n_m} & \mathbf{I}_{n_m} \\ -(\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{K}_m^s & -(\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{D}_m^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_m \times n_m} & \mathbf{I}_{n_m} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}_m^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_m} \\ (\mathbf{M}_m^s)^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_m \quad \mathbf{0}_{n_y \times n_m}] \quad (2.33)$$

La représentation d'état du système modal est définie par le triplet $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$, où \mathbf{A}_m est une matrice diagonale par blocs.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m^s &= \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}^s) \\ \mathbf{B}_m^s &= [\mathbf{B}_{m1}^s \cdots \mathbf{B}_{mi}^s \cdots \mathbf{B}_{mn_m}^s]^T \\ \mathbf{C}_m &= [\mathbf{C}_{m1}^s \cdots \mathbf{C}_{mi}^s \cdots \mathbf{C}_{mn_m}^s] \end{aligned} \quad (2.34)$$

où

\mathbf{A}_{mi}^s est de dimension (2×2) , \mathbf{B}_{mi}^s est de dimension $(2 \times n_u)$ et \mathbf{C}_{mi} est de dimension $(n_y \times 2)$.

2.2.2 Placement des éléments piézoélectriques

Le placement de capteurs et d'actionneurs sur une structure mécanique est un aspect important que ce soit en surveillance, en contrôle actif ou en identification structurale. De ce fait, plusieurs méthodes de placement ont été développées dans la littérature. L'idée dans ces méthodes est de définir un **indice de placement** et un **algorithme d'optimisation** dédiés à une application bien déterminée, c.à.d. à la surveillance, au contrôle actif, ou à l'identification structurale.

Dans le cadre de l'identification structurale, Papadimitriou (2005) a proposé un indice de placement basé sur l'entropie d'information. L'auteur a utilisé un algorithme génétique pour optimiser le placement de dix capteurs d'une structure comportant 32 degrés de liberté.

Dans le cadre du contrôle actif, Gawronski (1997) a utilisé le grammien d'observabilité et de gouvernabilité comme indice de placement. L'auteur a appliqué cette méthode sur une structure qui comportait initialement 32 capteurs, pour les réduire à deux capteurs seulement.

Le test de ces méthodes de placement s'effectue grâce à un modèle analytique ou numérique, d'une structure, et la réduction d'ordre de ces modèles ne se fait pas sans conséquences. Tous les modes non modélisés sont considérés comme des **modes résiduels**. Dans le cadre du

contrôle actif, les modes résiduels peuvent entraîner une instabilité de la boucle de commande, c'est le phénomène du *spillover* (Balas 1978). Le phénomène de spillover de contrôle est observé quand une part de l'énergie censée aller vers les modes contrôlés est dirigée vers les modes résiduels, tandis que le spillover d'observation se produit quand les modes contrôlés sont contaminés par les modes résiduels. De ce fait, Bruant et al. (2010) ont proposé un indice de placement à base de grammien d'observabilité et de gouvernabilité qui prend en considération à la fois les modes d'intérêt et les modes résiduels.

Flynn and Todd (2010) se sont intéressés à la problématique du placement de capteurs et d'actionneurs dans le cadre SHM, leur objectif était de placer des éléments piézoélectriques de façon à détecter plusieurs types d'endommagements, tout en réduisant la probabilité de fausse alarme lors d'une procédure de détection. Les auteurs ont défini un indice de placement à base de la règle de décision de Bayes.

Maintenant, nous présentons notre méthode de placement, qui découle des travaux de Gawronski (1997). Nous commençons par définir le grammien de gouvernabilité et d'observabilité.

2.2.2.1 Grammien de gouvernabilité et d'observabilité

•• **Définition 2.1 : gouvernabilité** (Kailath 1980) :
 •• Un système est dit gouvernable, si il existe en un temps fini τ , un vecteur d'entrée
 •• $\underline{u}(t)$, $t \in [0 \quad \tau]$ permettant de conduire le système d'un état initial $\underline{x}(0)$ à un état
 •• $\underline{x}(\tau)$.

Le critère de Kalman peut être utilisé pour définir la gouvernabilité, mais il existe un second critère, faisant intervenir la matrice grammienne de gouvernabilité, que nous définissons :

•• **Définition 2.2 : matrice gramienne de gouvernabilité** (Kailath 1980)
 •• C'est une matrice symétrique définie positive :

$$\mathbf{W}_c(\tau) = \int_0^\tau \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) dt \quad (2.35)$$
 •• Lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et si le système est stable, la matrice grammienne de gouvernabilité
 •• $\mathbf{W}_c = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathbf{W}_c(\tau)$ est solution de l'équation de Lyapunov :

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0}_{n_s} \quad (2.36)$$

Le système est dit gouvernable si \mathbf{W}_c est inversible.

•• **Définition 2.3 : observabilité** (Kailath 1980)
 ••
 ••
 ••
 ••
 ••
 ••

Un système est dit observable, si il existe un temps fini τ , tel que la connaissance du vecteur d'observation $\underline{y}(t)$ et du vecteur d'entrée $\underline{u}(t)$ pour tout $t \in [0, \tau]$ est suffisante pour déterminer l'état initial $\underline{x}(0)$.

De même que pour la gouvernabilité, le critère de Kalman peut être utilisé pour définir l'observabilité, mais nous allons utiliser la matrice grammienne d'observabilité pour la définir.

•• **Définition 2.4 : matrice gramienne d'observabilité** (Kailath 1980)

C'est une matrice symétrique définie positive :

$$\mathbf{W}_o(\tau) = \int_0^\tau \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \exp(\mathbf{A} t) dt \quad (2.37)$$

Lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, et si le système est stable, la matrice grammienne de gouvernabilité : $\mathbf{W}_o = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathbf{W}_o(\tau)$ est solution de l'équation de Lyapunov :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}_{n_s} \quad (2.38)$$

Le système est dit observable, si \mathbf{W}_o est inversible.

Lorsque τ est suffisamment grand et si la structure est flexible ($\xi_i \ll 1 (i = 1, \dots, n_m)$), les matrices grammiennes de gouvernabilité et d'observabilité possèdent la *diagonale dominante* (Gawronski 1998), autrement dit :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c &\cong \text{diag}(w_{ci} \mathbf{I}_2), \quad w_{ci} > 0, \quad i = 1, \dots, n_m \\ \mathbf{W}_o &\cong \text{diag}(w_{oi} \mathbf{I}_2), \quad w_{oi} > 0, \quad i = 1, \dots, n_m \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans la partie expérimentale présentée précédemment, nous avons calculé les coefficients d'amortissement modaux des plaques composites et de la lame 2, et nous avons constaté que $\xi_i \ll 1 (i = 1, \dots, n_m)$, donc les structures étudiées sont flexibles. Nous pouvons donc travailler avec les approximations faites dans l'équation (2.39).

2.2.2.2 Expression de l'énergie d'entrée et de sortie

Pour le placement des actionneurs, une démarche consiste à **minimiser** l'énergie apportée au système pour le conduire d'un état initial $\underline{x}(0)$ à un état $\underline{x}(\tau)$ en un temps τ fini. Cette énergie dépend de ces états, mais également de la disposition des actionneurs. L'énergie d'excitation s'écrit (Baruh 1992) :

$$\psi(\tau) = \int_0^\tau \underline{u}^T(t) \underline{u}(t) dt \quad (2.40)$$

Baruh (1992) a montré que la solution optimale pour minimiser l'énergie d'entrée $\psi(\tau)$, dépend de la matrice grammienne de gouvernabilité \mathbf{W}_c :

$$\psi(\tau) = (\exp(\mathbf{A}^T \tau) \underline{\mathbf{x}}(0) - \underline{\mathbf{x}}(\tau))^T \mathbf{W}_o(\tau)^{-1} (\exp(\mathbf{A}^T \tau) \underline{\mathbf{x}}(0) - \underline{\mathbf{x}}(\tau)) \quad (2.41)$$

Pour le placement des capteurs, l'approche consiste à **maximiser** l'énergie de sortie $\chi(\tau)$, cette énergie a pour formulation :

$$\chi(\tau) = \int_0^\tau \underline{\mathbf{y}}^T(t) \underline{\mathbf{y}}(t) dt \quad (2.42)$$

Baruh (1992) a montré que la solution optimale pour maximiser l'énergie de sortie, dépend de la matrice grammienne d'observabilité $\mathbf{W}_o(\tau)$:

$$\chi(\tau) = \underline{\mathbf{x}}(0)^T \mathbf{W}_o(\tau) \underline{\mathbf{x}}(0) \quad (2.43)$$

Lorsque $\tau \rightarrow +\infty$, l'énergie $\chi(\tau)$:

$$\chi = \underline{\mathbf{x}}(0)^T \mathbf{W}_o \underline{\mathbf{x}}(0) \quad (2.44)$$

2.2.2.3 Indice de placement

Soit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ la représentation d'état d'un système linéaire continu, la matrice de transfert est donnée par :

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (2.45)$$

La norme H_∞ pour ce système est définie par :

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \max[\sigma_{\max} \mathbf{G}(p)] \quad (2.46)$$

où $\sigma_{\max} \mathbf{G}(p)$ représente la plus grande valeur singulière de $\mathbf{G}(p)$. Pour un système SISO, la norme H_∞ représente le **maximum** du gain de la fonction de transfert.

Considérons la représentation d'état continu du $i^{\text{ème}}$ mode $(\mathbf{A}_{mi}, \mathbf{B}_{mi}, \mathbf{C}_{mi})$ d'un système faiblement amorti, et notons $\mathbf{G}_i(p) = \mathbf{C}_{mi}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{mi})^{-1} \mathbf{B}_{mi}$, la fonction de transfert de chaque mode i .

Pour le placement des actionneurs et des capteurs, nous définissons l'indice suivant :

$$\sigma = \|\mathbf{G}_i\|_\infty \cong \frac{\|\mathbf{B}_{mi}\|_2 \|\mathbf{C}_{mi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i} = 2\sqrt{w_{ci} w_{oi}} \quad (2.47)$$

où w_{ci} , w_{oi} sont respectivement les éléments diagonaux des matrices grammiennes de gouvernabilité et d'observabilité, définis dans (2.39).

L'indice de placement que nous proposons ne tient pas compte de l'orientation des éléments piézoélectriques. Il existe dans la littérature des travaux qui optimisent l'orientation des actionneurs et des capteurs (Bruant et al. 2010).

2.2.2.4 Stratégie de placement

Nous souhaitons placer de manière optimale, un actionneur et n_y capteurs piézoélectriques sur une structure composite. Nous y procéderons en deux étapes :

- **Placement d'un actionneur**

Nous supposons que la structure dispose de capteurs répartis sur son ensemble ; donc la matrice d'observation est fixée.

Nous notons n_u , le nombre de positions admissibles pour les actionneurs. Le principe de la méthode de placement consiste à évaluer pour chaque position admissible $j = 1 \dots, n_u$, un indice de placement σ_{ij} , qui quantifie l'efficacité de l'excitation d'une position j sur le $i^{\text{ème}}$ mode, cet indice est défini par :

$$\sigma_{ij} = \|G_{ij}\|_{\infty} = 2\sqrt{w_{ci}w_{oi}} \quad (2.48)$$

$G_{ij}(p)$ est la fonction de transfert obtenue par l'actionneur j .

A partir de cette relation, nous calculons l'indice σ_{ij} pour les n_m modes, ces indices sont ensuite concaténés dans le vecteur $\underline{\sigma}_j$:

$$\underline{\sigma}_j = [\sigma_{1j} \dots \sigma_{ij} \dots \sigma_{n_m j}]^T \quad (2.49)$$

Le vecteur $\underline{\sigma}_j$ indique la performance de l'actionneur j à exciter les n_m modes.

En faisant varier une à une la position des actionneurs ($j = 1 \dots, n_u$), nous obtenons la matrice de placement des actionneurs \mathbf{E}_a :

$$\mathbf{E}_a = [\underline{\sigma}_1 \dots \underline{\sigma}_j \dots \underline{\sigma}_{n_u}] \quad (2.50)$$

L'indice j dont le vecteur $\underline{\sigma}_j$ ayant la plus grande norme 2 est choisi comme l'actionneur de la structure intelligente.

- **Placement des capteurs**

Une fois que l'on a optimisé et choisi la position de l'actionneur (la matrice \mathbf{B} est donc fixée), on applique une procédure similaire pour le placement des capteurs.

Notons n_c , le nombre de positions admissibles pour les capteurs, et n_y le nombre de capteurs qu'on cherche à placer sur la structure.

Pour chaque position $k = 1 \dots, n_c$, nous calculons un indice de placement σ_{ik} , qui quantifie l'efficacité d'un capteur à mesurer un mode i :

$$\sigma_{ik} = \|G_{ij}\|_{\infty} = 2\sqrt{w_{ci}w_{oi}} \quad (2.51)$$

A partir de l'équation précédente, nous calculons l'indice σ_{ik} pour les n_m modes, ces indices sont concaténés dans le vecteur $\underline{\sigma}_k$:

$$\underline{\sigma}_k = [\sigma_{1k} \dots \sigma_{ik} \dots \sigma_{n_mk}]^T \quad (2.52)$$

Le vecteur $\underline{\sigma}_k$ indique la performance du capteur k à mesurer les n_m modes.

En faisant varier une à une la position des capteurs ($k = 1 \dots, n_c$), nous obtenons la matrice de placement des capteurs \mathbf{E}_c :

$$\mathbf{E}_c = [\underline{\sigma}_1 \dots \underline{\sigma}_k \dots \underline{\sigma}_{n_c}] \quad (2.53)$$

Les n_y indices dont les vecteurs $\underline{\sigma}_k$ ayant la plus grande norme 2 sont choisis comme capteurs de la structure intelligente.

2.2.3 Application à la plaque composite

Nous avons appliqué la méthode de placement au modèle EF de la plaque composite saine, décrite au § 2.1.1, cette plaque est de dimension $400 \times 300 \times 2 \text{ mm}^3$, et elle comporte seize plis : $(0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 0^\circ)_{2s}$. Les propriétés mécaniques du matériau composite nous ont été fournies par le Centre des Matériaux des Mines ParisTech (partenaire du Projet MSIE). Pour les propriétés mécaniques et électriques des éléments piézoélectriques de type PZ 29, nous les avons obtenues de la documentation technique de Ferroperm (2009). Les tableaux 2.9 et 2.10 présentent ces propriétés.

Tableau 2. 9 : Propriétés mécaniques du matériau composite

Propriété	E_1	$E_2 = E_3$	$G_{12} = G_{13}$	G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}	ρ
Unité	Gpa	Gpa	Gpa	Gpa	-	-	Kg/m ³
Valeur	127.7	7.217	5.712	2.614	0.318	0.38	1546

Tableau 2. 10 : Propriétés mécaniques et électriques d'un élément piézoélectrique, type PZ 29 (Ferroperm 2009)

Propriété	Unité	Valeur
E_{PZT}	Gpa	58.8
ν	-	0.3
P	Kg/m	7460

d_{31}	C/N	-2.43×10^{-10}
d_{33}	C/N	5.74×10^{-10}
Température de Curie T_c	°C°	235
s_{11}	m^2/N	13×10^{-12}
ϵ_{33}	F/m	2.54×10^{-8}
k_{31}	-	0.37
Prix par unité (pour 50 éléments achetés)	€	32.06

Le modèle EF de la plaque composite a été développé en utilisant le logiciel SDTools (Balme et al. 2008), où l'effet piézoélectrique est pris en compte par ce logiciel. Nous avons choisi un modèle comportant 195 éléments quadratiques. Chaque élément est de dimension $15 \times 10 \text{ mm}^2$. La plaque est en configuration libre-libre et le nombre de degrés de liberté que comporte le modèle est $n_d = 4680 \text{ ddl}$.

Avant de procéder au placement des éléments piézoélectriques, un recalage de la plaque saine sans éléments actifs par analyse modale a été fait. Les fréquences propres ont été déterminées en utilisant un marteau de choc et des accéléromètres.

Une fois ce 1^{er} recalage réalisé, nous avons choisi la représentation d'état modale (voir équations (2.29) et (2.30)), où nous avons retenu $n_m = 30$ modes avec prise en compte de la *correction statique*. Ces derniers couvrent une bande passante comprise entre 0 et 800 Hz. Nous avons aussi opté pour les 30 modes étudiés, un amortissement uniforme de 0.05%.

Dans le cas des plaques composites, l'objectif de la méthode de placement est d'optimiser le positionnement de **dix éléments piézoélectriques** : **un** en mode actionneur et les autres en mode capteur (Hajrya et al. 2010).

Pour des raisons pratiques sur le banc de test, le nombre d'éléments piézoélectriques a été limité à 10. Ce choix permet d'avoir une multitude d'informations sur la dynamique de la structure

Nous avons choisi d'étudier 50 positions admissibles pour les éléments piézoélectriques, il existe initialement 50 choix possibles pour placer l'actionneur et 49 pour les capteurs, donc 2450 chemins possibles.

A partir du modèle EF, nous avons déterminé la représentation d'état modale entre un actionneur j et un capteur k , nous avons ensuite construit la matrice de placement des actionneurs \mathbf{E}_a , voir équations (2.48) à (2.50).

Une fois la position de l'actionneur choisie, nous avons ensuite procédé au placement des capteurs. Dans ce cas, nous avons 49 positions possibles et donc 49 chemins actionneur/capteur.

De la même manière que le placement de l'actionneur, la représentation d'état modale est calculée, la matrice de placement des capteurs \mathbf{E}_c est construite, voir équations (2.51) à (2.53). Les indices des neuf vecteurs $\underline{\sigma}_k$ ayant la plus grande norme 2 sont choisis comme capteurs de la plaque composite. La figure 2.26 montre le placement optimal obtenu sur le modèle EF de la plaque composite munie de l'actionneur PZT7 et des neuf capteurs. C'est à partir de ce modèle que les coordonnées illustrées au tableau 2.1 ont été obtenues.

La figure 2.27 montre la simulation par EF des six premiers modes propres de la plaque composite munie des dix éléments piézoélectriques.

Une fois le modèle EF de la plaque composite saine établie, nous avons comparé expérimentalement et numériquement la réponse fréquentielle entre un actionneur et un capteur de la plaque **saine**. Pour calculer numériquement la réponse fréquentielle, il nous faut les **réponses temporelles** des capteurs piézoélectriques, et pour les obtenir, nous avons calculé la représentation d'état continu du système **modal** avec un nombre de mode égal à 30. Nous avons ensuite discrétisé cette représentation d'état avec une période d'échantillonnage $T_e = 10\mu s$.

L'excitation de la structure est effectuée par l'actionneur piézoélectrique PZT 7, et elle consiste en un signal ayant les caractéristiques décrites au tableau 2.2. Une fois les réponses temporelles simulées, la réponse fréquentielle entre l'entrée et ces réponses a été calculée à l'aide de la transformée de Fourier. Le nombre de points de calcul est $N = 2^{16}$ échantillons, la période d'échantillonnage est $T_e = 10 \mu s$, la résolution de la transformée de Fourier est donc : $f_{res} = \frac{1}{NT_e} = 1.52 \text{ Hz}$. La figure 2.29 montre la réponse fréquentielle entre l'actionneur PZT7 et le capteur PZT2 obtenue *numériquement et expérimentalement*. Cette figure montre qu'il existe une différence d'amplitude et de fréquences de résonances entre le modèle expérimental et le modèle EF de la plaque composite saine.

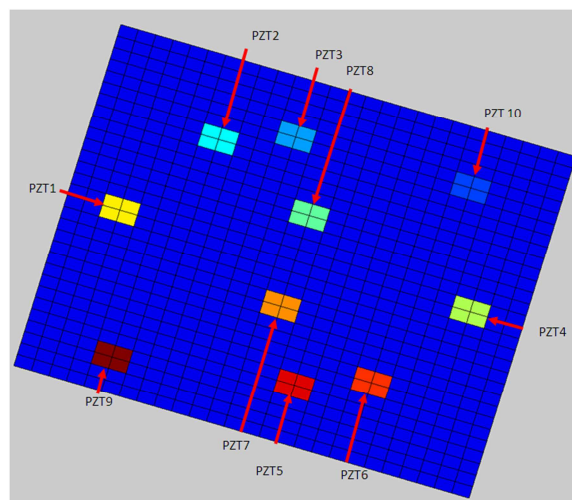
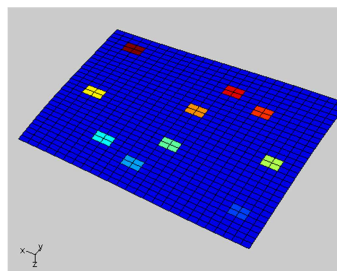


Figure 2.26 : Modèle EF de la plaque comportant dix éléments piézoélectriques

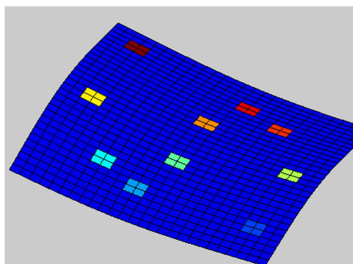
Indice du mode : fréquence
propre [Hz]

Mode propre

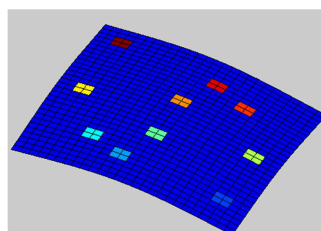
1 : 55.09



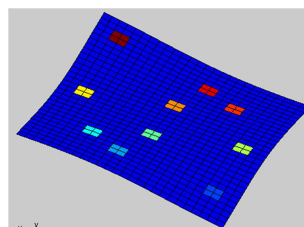
2 : $f=83.28$



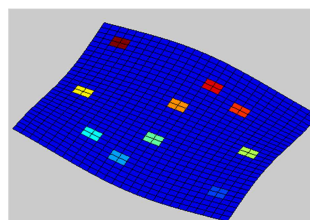
3 : 107.39



4 : 135.41



5 : 158.50



6 : 245.34

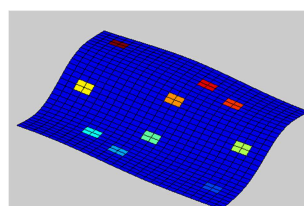


Figure 2.27 : Six premiers modes propres de la plaque composite

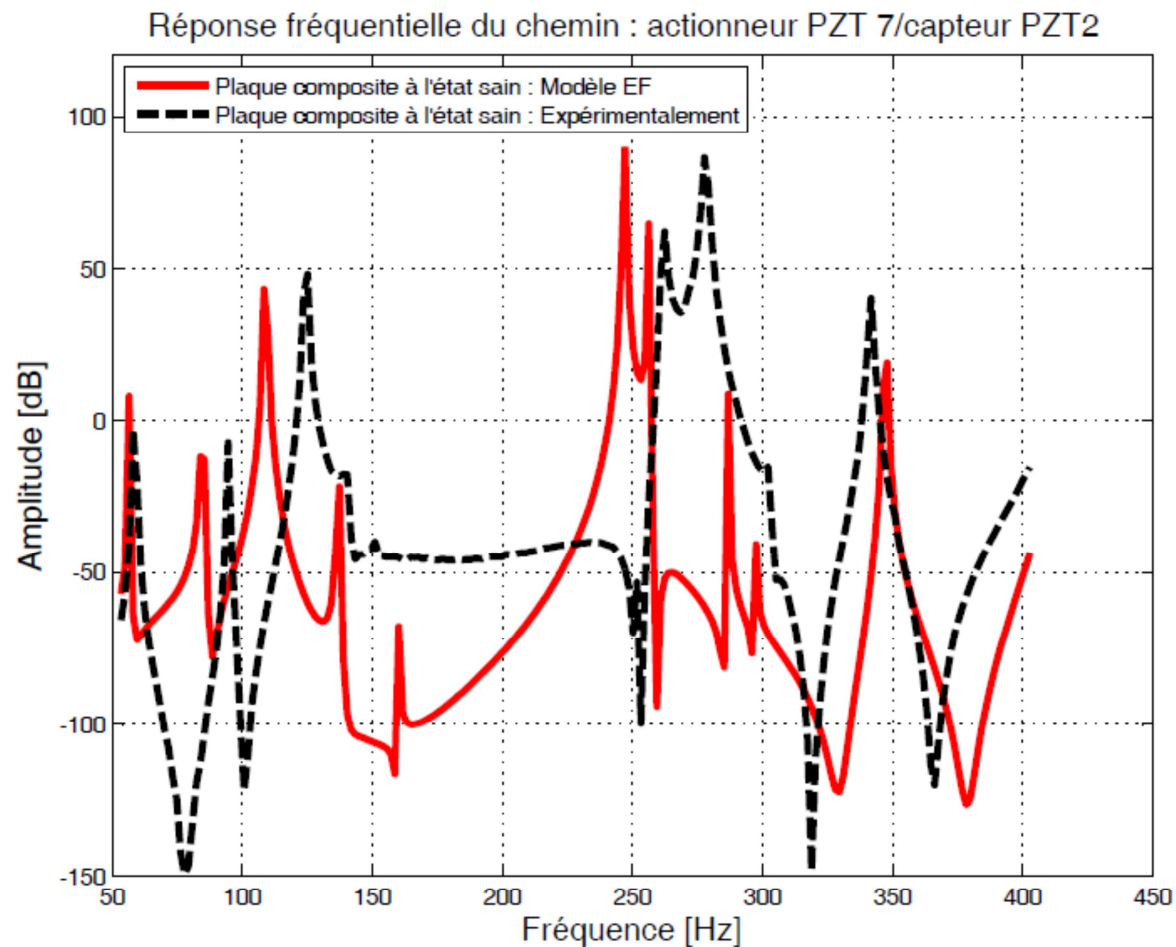


Figure 2.28 : Comparaison entre les réponses fréquentielles de la plaque saine, calculées à partir du modèle EF et expérimentalement

A titre de comparaison, nous illustrons au tableau 2.11, les fréquences de résonances calculées expérimentalement et les fréquences propres issues de la simulation de la plaque composite à l'état sain. Nous constatons qu'il existe un écart entre les fréquences calculées numériquement et expérimentalement.

Tableau 2. 11 : Comparaison entre les fréquences de résonances calculées expérimentalement et celles du modèle EF de la plaque saine : **avant recalage** de la plaque avec les éléments actifs

Mode	Fréquence de résonance f_r^{se} [Hz] : calculées expérimentalement	Fréquence propres f_r^{ss} [Hz] : calculées par la simulation EF	Ecart relatif [%] : $\frac{f_r^{se} - f_r^{ss}}{f_r^{ss}}$
1	57.98	55.09	4.97
2	94.6	83.28	11.96
3	125.1	107.39	14.15
4	140.4	135.41	3.54
5	151.1	158.50	-4.90
6	251.8	245.34	2.56
7	262.4	254.69	2.93
8	277.7	285.32	-2.74
9	302.1	295.81	2.08
10	341.8	345.69	-1.14

A partir de ces résultats, nous avons procédé à un ajustement du modèle EF de la plaque composite (avec ses éléments actifs). La procédure à consister au recalage des premiers modes basses fréquences en utilisant un critère quadratique sur les fréquences propres. C'est une approche itérative où la correction a été faite au niveau des propriétés mécaniques impliquées dans le modèle. Les caractéristiques concernées par le recalage sont les propriétés du matériau composite et des éléments PZT (module de Young, module de cisaillement).

Nous illustrons au tableau 2.12, les fréquences de résonances calculées expérimentalement et les fréquences propres après recalage. Nous constatons que l'écart relatif des 3 premiers modes est inférieur à 5%.

Tableau 2. 12 : Comparaison entre les fréquences de résonances calculées expérimentalement et celles du modèle EF de la plaque saine : **après recalage** de la plaque avec les éléments actifs

Mode	Fréquence de résonance f_r^{se} [Hz] : calculées expérimentalement	Fréquence propres f_r^{ss} [Hz] : calculées par la simulation EF	Ecart relatif [%] : $\frac{f_r^{se} - f_r^{ss}}{f_r^{ss}}$
1	57.98	55.09	-0.48
2	94.6	83.28	4.7077
3	125.1	107.39	4.91
4	140.4	135.41	-5.28
5	151.1	158.50	-9.49
6	251.8	245.34	-8.07
7	262.4	254.69	-7.79
8	277.7	285.32	-10.56
9	302.1	295.81	-3.40
10	341.8	345.69	-7.84

L'écart constaté pour certaines fréquences montre qu'une procédure de recalage plus poussée doit être entreprise. Ainsi, il faudra considérer d'autres critères que les fréquences propres et tenir compte des écarts de position des PZT après collage et aussi de l'effet de la colle et des câbles de connexion. Dans ce travail, nous n'avons pas jugé utile d'aller plus loin dans la phase de recalage du modèle EF. En effet, le but étant ici est d'utiliser directement les données expérimentales et d'utiliser un modèle numérique, dont le comportement est jugé acceptable suffisamment pour tester (en terme comportemental) les algorithmes SHM proposés. La démarche consistera donc à utiliser séparément, pour les tests et la validation, les données numériques et expérimentales pour la plaque saine et la plaque endommagée et ceci sans les confrontées. En effet, les écarts en fréquences entre simulation et expérimentation sont du même ordre de grandeur que ceux provenant d'un endommagement. Par conséquent il ne sera pas possible de comparer les fréquences du modèle théorique et celles mesurées pour le détecter.

Le placement des éléments piézoélectriques sur la lame composite suit le même raisonnement fait pour la plaque composite. Le résultat de ce placement a été illustré à la figure 2.20. Rappelons que le réseau d'antennes n'a pas été pris lors de la modélisation.

2.3 Conclusion

Les avancées technologiques ont favorisé l'émergence des " *structures intelligentes* " (*smart structures*). Ce sont des structures qui se composent d'un réseau de capteurs et/ou d'actionneurs, d'une architecture d'acquisition et de commande qui assurent le traitement des signaux. Le placement de ce réseau sur la structure doit être fait de manière optimale, à cet effet, nous avons présenté dans ce chapitre une méthode de placement d'éléments piézoélectriques à base de grammien de gouvernabilité et d'observabilité. L'application de cette méthode a été effectuée sur un modèle EF d'une plaque et d'une lame composite.

A partir du résultat de placement, nous avons présenté les dispositifs expérimentaux de *deux plaques composites et d'une lame antennaire* que nous avons réalisés. Nous avons ensuite décrit les endommagements que nous cherchons à détecter dans ces structures (*endommagement structural de type impact, décollement du réseau d'antennes et changement de surface du capteur*).

Dans le chapitre suivant, nous passons à l'étape 3 de la figure 1.9 : l'extraction de caractéristiques. Celles-ci sont basées sur les techniques de **séparation aveugle de sources** (Jutten and Comon 2007), et plus précisément, l'analyse en composantes principales (ACP) et l'analyse en composantes indépendantes (ACI). Afin de mieux comprendre la différence entre ces deux techniques, nous avons étudié le bruit mesuré en nous basant sur le test de Henry, et nous avons montré que ce bruit n'est pas gaussien, cette constatation (figures 2. 15 et 2.16) va nous permettre dans le chapitre 3, de justifier le développement de la méthode ACI.

CHAPITRE 3

SEPARATION AVEUGLE DE SOURCES

Comme il a été présenté au chapitre 1, la détection de l'endommagement repose sur l'extraction de caractéristiques de fonctionnement à partir des signaux mesurés : les réponses dynamiques de la structure à l'état sain et de la structure dans l'état inconnu.

*Dans ce chapitre, nous proposons d'utiliser deux techniques d'extraction de caractéristiques : l'**Analyse en Composantes Principales (ACP)** et l'**Analyse en Composantes Indépendantes (ACI)**. Ces deux techniques appartiennent à un ensemble de méthodes de traitement du signal, appelées communément Séparation Aveugle de sources (SAS).*

Dans un souci de clarté, nous présentons dans ce chapitre le problème et les fondements de la séparation aveugle de sources.

Après un bref historique de la SAS et de ses applications, nous décrivons au §3.3, le modèle de la SAS et les indéterminations associées. Au § 3.4, nous posons les hypothèses nécessaires pour résoudre le problème de la séparation. Nous décrivons ensuite une mesure de gaussianité et d'indépendance statistique : la néguentropie et l'information mutuelle. A partir d'un critère issu de ces mesures, nous présentons la technique de l'analyse en composantes principales et l'analyse en composantes indépendantes. Ensuite, nous illustrons la séparation de sources par l'ACP et l'ACI avec un exemple de simulation. Enfin, nous présentons le lien entre la SAS et le domaine de la mécanique.

3.1 Historique de la séparation aveugle de sources

Le problème scientifique de la **séparation de sources** (figure 3.1) consiste à *extraire* un ensemble de signaux **non observables**, dits « *signaux sources* », à partir d'un ensemble de signaux **observables** (Jutten and Comon 2007). Ces observations proviennent de capteurs, par exemple : des microphones, des sondes, des antennes, des caméras. Dans le cadre de notre travail, ces capteurs sont des éléments *piézoélectriques*.

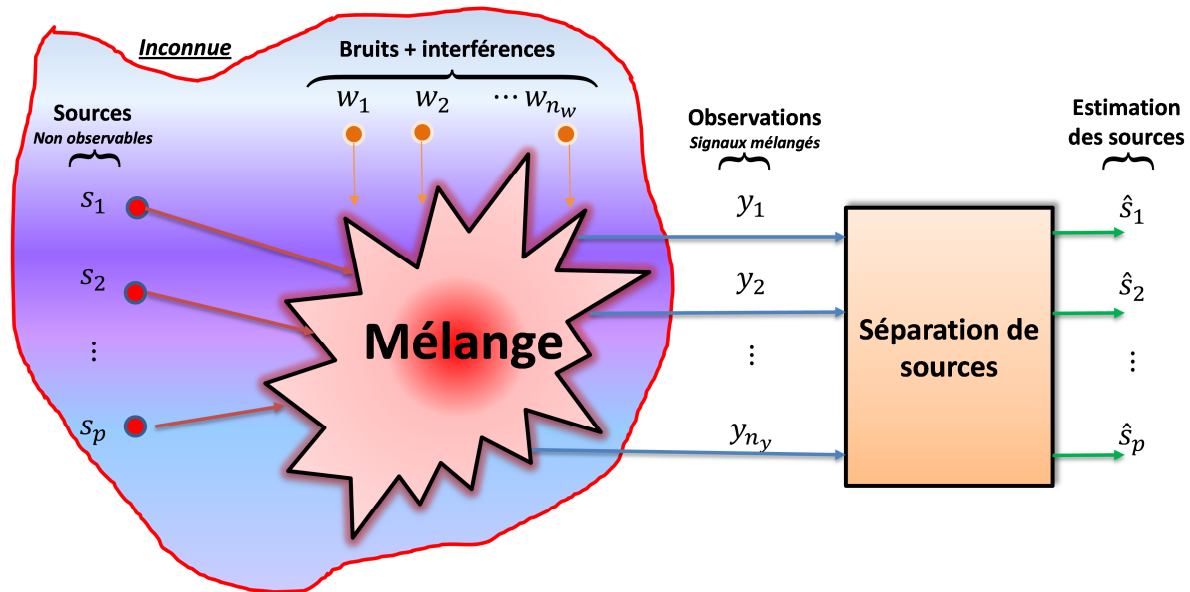


Figure 3.1 : Principe de la séparation aveugle de sources

Le fameux problème du "cocktail party" en est une illustration concrète du problème de la séparation de sources. Ce problème très étudié en traitement de signal évoque l'extraction des paroles (**sources**) de différentes personnes, indépendamment les unes des autres, à partir d'enregistrements **simultanés** de leurs voies.

La séparation de sources est un problème récurrent dans divers domaines. En biomédical, nous cherchons à extraire les battements cardiaques d'un fœtus de manière non invasive, à partir d'un ensemble de signaux enregistrés à l'aide d'électrodes, placées sur l'abdomen de la mère (De Lathauwer et al. 2000). Ces mesures contiennent **deux sources** : les battements de la mère et ceux du fœtus.

En astrophysique, le radiotélescope capte des ondes électromagnétiques **émises simultanément** par différents objets célestes "soleil, astres, etc..." (Lacoume et al. 1999). Dans ce cas, nous cherchons à séparer les *sources* émises par chacun de ces objets célestes.

En acoustique sous-marine, l'antenne du sonar reçoit simultanément les signaux émis par plusieurs bâtiments navals (*signaux sources*), l'objectif est le même : séparer ces signaux sources.

La séparation de sources est une généralisation du problème d'estimation d'un signal utile $s(t)$ dans une observation bruitée $y(t)$ (Jutten and Gribonval 2003) :

$$y(t) = s(t) + b(t) \quad (3.1)$$

Cette généralisation est qualifiée d'approche " **Aveugle** ", par référence aux techniques d'identification, basées uniquement sur les observations, sans connaissances *a priori* sur le système (mélange) ou sur la nature et le nombre de sources.

Dans la suite de ce mémoire, nous allons utiliser l'acronyme français SAS pour désigner la **Séparation Aveugle de Sources**, en anglais l'acronyme BSS : **Blind Source Separation** est utilisé.

Le problème de la SAS a été formalisé au début des années 80 par trois chercheurs français en traitement du signal : *Christian Jutten, Bernard Ans et Jeanny Hérault* (Hérault et al. 1985), mais il a été également abordé indépendamment dans le cadre de la télécommunication par Bar-Ness et al. (1982).

L'idée est venue à *Jutten et ses partenaires*, lors d'une discussion avec le neurobiologiste *Jean-Pierre Roll*, les travaux de Roll concernaient le décodage du mouvement musculaire chez l'homme (Roll 1981).

Les premiers articles de ces trois chercheurs ont été présentés dès 1985 dans des conférences relatives au domaine du traitement de signal (Hérault et al. 1985), et des réseaux de neurones (Ans et al. 1985), (Hérault et al. 1986). Depuis, ces publications ont ouvert la voie à des travaux de recherche dans différents domaines et applications :

Lacoume and Ruiz (1988) ont proposé un algorithme basé sur la minimisation des cumulants croisés des sorties d'un filtre inverse, dont le but est de séparer des sources.

Cardoso (1989) a proposé d'utiliser les propriétés algébriques des cumulants d'ordre quatre pour résoudre le problème de la SAS.

Comon (1990) a développé le concept **d'Analyse en Composantes Indépendantes** (ACI), ce concept a été introduit par Jutten and Hérault (1988).

Parallèlement à ces travaux, Gaeta and Lacoume (1990) ont proposé une approche utilisant le maximum de vraisemblance comme critère de séparation.

En 1993, les travaux de Hvam et al. (1993) sur la diagonalisation conjointe de matrices ont fourni un algorithme qui sert de référence dans les méthodes SAS.

Hyvärinen (1997) a proposé un critère de séparation de sources en utilisant la théorie de l'information : *information mutuelle et néguentropie*.

De nos jours, la séparation aveugle de sources est très largement étudiée et ne cesse d'attirer l'attention d'un très grand nombre de chercheurs, dans des domaines de plus en plus divers, tels que, le *génie biomédical, les télécommunications, l'astrophysique, l'acoustique*,

l'identification et la surveillance des systèmes et des structures, etc. Nous détaillons dans le paragraphe suivant certaines de ces applications.

3.2 Application de la séparation aveugle de sources

Les domaines d'applications de la SAS sont actuellement en plein essor. Il est donc difficile de présenter de manière exhaustive un état de l'art. Nous nous focalisons sur quelques-unes de ces applications.

1. En spectrométrie, Moussaoui et al. (2004) ont utilisé la SAS afin de séparer trois substances chimiques à partir des signaux mesurés par spectroscopie infrarouge.
2. En astronomie, Nuzillard and Bijaoui (2000) ont exploré la faisabilité de la SAS sur des images de la galaxie *Seyfert 3C120*. Cette étude a permis aux auteurs d'extraire des images du noyau actif de cette galaxie et de son centre galactique.
3. En biomédical, la SAS est appliquée par exemple dans l'analyse des signaux cardiaques : Electro-Cardio-Gramme (ECG) et des signaux cérébraux : Electro-Encéphalo-Graphique (EEG), et plus récemment le Magnéto Encéphalo-Gramme (MEG) :
 - L'une des utilisations de la SAS dans l'analyse par ECG est l'extraction des battements cardiaques d'un fœtus à partir d'un ensemble de signaux enregistrés à l'aide d'électrodes, placées sur l'abdomen de la mère. Les méthodes de la SAS ont permis de répondre à cet objectif avec succès. Des résultats relatifs à cette application peuvent se trouver dans : (De Lathauwer et al. 2000), (Zarzoso et al. 1997).
 - A partir des signaux mesurés par le MEG, (Wubbeler et al. 2000) ont extrait des sources, appelées dans le contexte médical : *champs quasi-continus* (en dessous de 0.1 Hz). Ces champs ont un grand intérêt sur le plan médical, car ils permettent de détecter l'absence d'oxygène au niveau du cerveau (Jutten and Comon 2007).
4. En radio-communication, Charkani (1996) a utilisé la SAS dans les systèmes de téléphones à main-libre.

Le lecteur intéressé par un panorama plus complet des applications de la SAS, est invité à lire les chapitres s'y référant dans l'ouvrage de (Comon and Jutten 2010).

Notons que beaucoup de chercheurs ont étendu le champ d'application de la SAS pour y inclure les problématiques de la *surveillance des systèmes, des structures et l'identification structurale*. Une contribution à l'état de l'art de la SAS au *contrôle santé des structures et des systèmes* est proposée aux chapitres 4 et 5.

3.3 Modèle de la SAS

3.3.1 Modèle de mélange

Quelles que soient les hypothèses formulées pour résoudre le problème de la SAS, nous nous plaçons dans le cadre statistique des **variables aléatoires multidimensionnelles, réelles, temporelles, continues, et centrées**.

Plaçons-nous maintenant dans un cadre général, où aucune considération sur la nature du modèle n'est faite.

Soit un ensemble de n_y signaux mesurés $y_i(kT_e)$ à l'instant kT_e , composé d'un **mélange** de p sources $s_i(kT_e)$ et se propageant dans un milieu de réponse \mathcal{T} (figure 3.1). Le modèle de la SAS est défini par la relation vectorielle suivante (Jutten and Comon 2007) :

$$\underline{\mathbf{y}}(kT_e) = \mathcal{T}\{\underline{\mathbf{s}}(kT_e)\} + \underline{\mathbf{w}}(kT_e), k=1, \dots, N \quad (3.2)$$

Le modèle (3.2) est appelé modèle de **mélange**.

où :

$\underline{\mathbf{y}}(kT_e) = [y_1(kT_e) \cdots y_i(kT_e) \cdots y_{n_y}(kT_e)]^T$ est le vecteur de **mesures**, de dimension n_y et à l'instant kT_e ,

$\underline{\mathbf{s}}(kT_e) = [s_1(kT_e) \cdots s_i(kT_e) \cdots s_p(kT_e)]^T$ est le vecteur de **sources**, de dimension p et à l'instant kT_e ,

kT_e désigne les instants d'échantillonnage, $k \in \mathbb{N}$,

\mathcal{T} est une application inconnue de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^{n_y} , et peut être linéaire ou non linéaire,

$\underline{\mathbf{w}}(kT_e)$ est le bruit de dimension n_y , et à l'instant kT_e . Ce bruit tient compte du *bruit de mesure et de l'incertitude du modèle de la SAS*,

N est le nombre d'échantillons que contiennent le vecteur de mesures et le vecteur de sources.

Pour simplifier les écritures, nous allons omettre à partir de maintenant la période d'échantillonnage T_e dans les équations.

Selon la nature de l'application \mathcal{T} , nous pouvons classer les mélanges en deux grandes catégories (Cardoso 1998) : les mélanges linéaires et non linéaires :

1. Dans le cas d'un mélange linéaire, deux cas de figure peuvent se présenter :
 - Les mélanges linéaires **instantanés**, pour lesquels chaque filtre composant la matrice de mélange que nous notons $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n_y \times p}$, ne présente pas de mémoire :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{T}\underline{\mathbf{s}}(k) + \underline{\mathbf{w}}(k) = \sum_{i=1}^{n_y} \underline{\mathbf{t}}_i s_i(k) + \underline{\mathbf{w}}(k) \quad (3.3)$$

- Les mélanges **convolutifs**, pour lesquels le modèle SAS linéaire s'écrit :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{T}(k) * \underline{\mathbf{s}}(k) + \underline{\mathbf{w}}(k) \quad (3.4)$$

où "*" désigne le produit de convolution.

2. Mélange non linéaire : ils sont utilisés si la relation entre les signaux observés et les signaux sources est non linéaire. Ces modèles sont peu étudiés à cause de leur complexité. Cependant, des classes particulières de ces modèles ont donné lieu à des travaux, citons les mélanges post non-linéaire (PNL) (Achard and Jutten 2005). Dans ce cas, le mélange est donné sous la forme suivante :

$$y_i(k) = f_i \left(\sum_{j=1}^p t_{ij} s_j(k) \right), i = 1, \dots, n_y \quad (3.5)$$

Le mélange PNL consiste en un mélange linéaire, suivi d'une transformation non linéaire f_i sur les capteurs.

En outre, les mélanges peuvent être classés en trois catégories, selon le **nombre** de sources :

1. Les mélanges dits **déterminés** : si le nombre d'observations n_y est égal au nombre de sources p ,
2. Les mélanges dits **sur-déterminés** : si le nombre d'observations n_y est supérieur au nombre de sources p ,
3. Les mélanges dits **sous-déterminés** : si le nombre d'observations n_y est inférieur au nombre de sources p .

Dans cette thèse, nous avons travaillé avec le modèle SAS **linéaire instantané déterminé et sans bruit**, même si dans le cadre de la dynamique des structures, le *modèle linéaire convolutif* semble attractif (Kerschen et al. 2007) :

Notre **non utilisation du modèle convolutif** suit le raisonnement suivant :

1. Au § 1.8.2, nous avons noté que l'endommagement et la dynamique de la structure à surveiller évoluent sur *deux échelles de temps différentes*. Comparé à la dynamique de la structure, l'endommagement est considéré comme un *processus plutôt lent* (Fritzen 2006).
2. Notre thèse est dans un contexte industriel, avec quelques contraintes telles que la minimisation de l'énergie du *dispositif de mesure et de l'unité de traitement*. Nous avons choisi d'acquérir les mesures sur une durée courte, elle est égale à 0.6554 s (voir § 2.1.1.1). Nous faisons l'acquisition de toutes les mesures aux différents instants d'échantillonnage, nous les traitons, puis nous détectons l'endommagement. Cette démarche s'inscrit dans le cadre de la surveillance en temps différé.

Nous avons donc opté pour un modèle **linéaire instantané déterminé**.

Dans un premier temps, nous ignorons le bruit de sorte que le modèle (3.3) devient le modèle **linéaire instantané déterminé et sans bruit**:

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{T}\underline{\mathbf{s}}(k) \quad (3.6)$$

Nous tiendrons compte de ces bruits dans le calcul des résidus DI.

Maintenant que le choix du modèle SAS a été présenté, nous allons aborder les indéterminations le concernant.

3.3.2 Indétermination du modèle SAS

Séparer les sources à partir de leur mélange est sujet à deux indéterminations. Comon (1994) a montré que les sources ne peuvent être estimées qu'à une **permutation** et un **facteur d'échelle** près :

- **L'indétermination de permutation :**

La première indétermination du problème de la SAS est celle de la permutation. En effet, l'ordre des signaux sources est arbitraire, car toute permutation appliquée au vecteur $\underline{\mathbf{s}}(k)$ et sur les colonnes de la matrice \mathbf{T} donne lieu au même contenu du vecteur $\underline{\mathbf{y}}(k)$:

La relation vectorielle qui lie les deux vecteurs $\underline{\mathbf{s}}(k)$ et $\underline{\mathbf{y}}(k)$ s'écrit :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = \sum_{i=1}^{n_y} \underline{\mathbf{t}}_i s_i(k) \quad (3.7)$$

où $\underline{\mathbf{t}}_i = [t_{1i} \cdots t_{n_y i}]^T$

La relation ci-dessus s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = [\underline{\mathbf{t}}_1 \quad \underline{\mathbf{t}}_2 \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{t}}_{n_y}] \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_{n_y}(k) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Cette relation est aussi équivalente à :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = [\underline{\mathbf{t}}_2 \quad \underline{\mathbf{t}}_1 \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{t}}_{n_y}] \begin{bmatrix} s_2(k) \\ s_1(k) \\ \vdots \\ s_{n_y}(k) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\underline{\mathbf{s}}}(k) \quad (3.9)$$

où $\tilde{\mathbf{T}}$ et $\tilde{\underline{\mathbf{s}}}(k)$ sont respectivement la nouvelle matrice de mélange et le nouveau vecteur de sources, obtenus par permutation.

Cette permutation peut être modélisée par une matrice orthogonale \mathbf{P} telle que :

$$\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{T} \underline{\mathbf{s}}(k) = (\mathbf{TP}) (\mathbf{P}^{-1} \underline{\mathbf{s}}(k)) = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\underline{\mathbf{s}}}(k) \quad (3.10)$$

Il s'ensuit que la multiplication à droite de la matrice \mathbf{T} par une matrice de permutation orthogonale \mathbf{P} ne change pas les mélanges (signaux observés $\underline{\mathbf{y}}(k)$), mais conduit à ce que l'ordre des sources soit modifié.

- **L'indétermination du facteur d'échelle :**

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la multiplication d'une colonne de la matrice de mélange et la division d'une source par un scalaire non nul α_i , ne change pas le vecteur de sources. Effectivement, nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}(k) &= \sum_{i=1}^{n_y} \underline{\mathbf{t}}_i s_i(k) = \sum_{i=1}^{n_y} (\alpha_i \underline{\mathbf{t}}_i) \left[\frac{s_i(k)}{\alpha_i} \right] \\ &= [\alpha_1 \underline{\mathbf{t}}_1 \quad \alpha_2 \underline{\mathbf{t}}_2 \quad \cdots \quad \alpha_{n_y} \underline{\mathbf{t}}_{n_y}] \begin{bmatrix} \frac{s_1(k)}{\alpha_1} \\ \frac{s_2(k)}{\alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{s_{n_y}(k)}{\alpha_{n_y}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Compte tenue de l'indétermination des amplitudes des sources, nous imposons que les amplitudes α_i soient égales à 1.

3.3.3 Modèle de séparation

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas d'un mélange *linéaire instantané déterminé et sans bruit* (voir équation (3.6)). La solution du problème de la SAS revient à chercher l'estimée d'une matrice \mathbf{W} , telle que :

$$\underline{\hat{\mathbf{s}}}(k) = \mathbf{W}\underline{\mathbf{y}}(k) \quad (3.12)$$

où $\underline{\hat{\mathbf{s}}}(k)$ est l'estimation du vecteur de sources,

$\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est nommée matrice de *séparation*.

Le modèle de l'équation (3.12) s'appelle modèle de **séparation** linéaire.

Lorsque le problème de séparation est résolu, la matrice \mathbf{W} est l'inverse de la matrice de mélange \mathbf{T} (voir équation (3.6)).

La relation liant le vecteur *estimé* de sources $\underline{\hat{\mathbf{s}}}(k)$ et le vecteur de sources $\underline{\mathbf{s}}(k)$ s'écrit :

$$\underline{\hat{\mathbf{s}}}(k) = \mathbf{W}\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{W}\mathbf{T}\underline{\mathbf{s}}(k) \quad (3.13)$$

$$\underline{\hat{\mathbf{s}}}(k) = \mathbf{G}\underline{\mathbf{s}}(k) \quad (3.14)$$

Pour alléger les écritures, nous notons $\underline{\mathbf{r}}(k) = \underline{\hat{\mathbf{s}}}(k)$:

Les modèles (3.13) et (3.14) s'écrivent :

$$\underline{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{W}\underline{\mathbf{y}}(k) \quad (3.15)$$

$$\underline{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{G}\underline{\mathbf{s}}(k) \quad (3.16)$$

La figure 3.2 présente le schéma du mélange et de séparation.

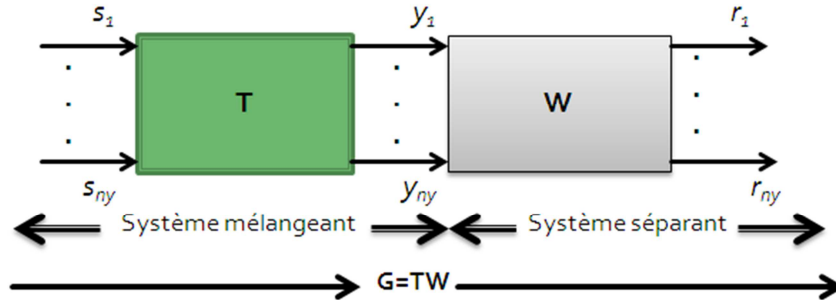


Figure 3.2 : Schéma du mélange et de séparation pour un mélange linéaire instantané déterminé et sans bruit.

3.4 Méthodes de séparation de sources

La solution du problème de la SAS repose sur l'hypothèse *d'indépendance statistique* des sources. Les méthodes pour résoudre le problème de séparation sont statistiques, multidimensionnelles (multi-capteurs), et exploitent la diversité spatiale, temporelle, fréquentielle etc.

Pour mettre en évidence la différence entre les différentes méthodes de la SAS, plus précisément, les méthodes à base de modèle *linéaire instantané déterminé et sans bruit*, nous commençons par définir l'indépendance statistique

•• **Définition 3.1 : indépendance statistique** (Cardoso 2001)

•• Soit $\underline{s} = [s_1 \cdots s_i \cdots s_{n_y}]^T$ le vecteur de sources, de densité de probabilité conjointe $p_{\underline{s}}(\underline{s}, k)$ à l'instant k . Notons $p_{s_i}(s_i, k)$, les densités de probabilités marginales à l'instant k des composantes s_i du vecteur \underline{s} .

•• L'indépendance statistique des sources s_i , signifie que la densité de probabilité conjointe $p_{\underline{s}}(\underline{s}, k)$ s'écrit, pour tout instant k , et pour tout décalage m_i , $i = 1, \dots, n_y$, comme le **produit** des densités de probabilités marginales $p_{s_i}(s_i, k)$:

$$p_{\underline{s}}(s_1(k - m_1), s_2(k - m_2), \dots, s_{n_y}(k - m_{n_y})) = \prod_{i=1}^{n_y} p_{s_i}(s_i(k - m_i)) \quad (3.17)$$

•• Cette définition de l'indépendance statistique se simplifie dans le cas d'un mélange linéaire **instantané**, en posant $m_i = 0$:

$$p_{\underline{s}}(s_1(k), s_2(k), \dots, s_{n_y}(k)) = \prod_{i=1}^{n_y} p_{s_i}(s_i(k)) \quad (3.18)$$

C'est à partir de la relation (3.18) que commence la distinction entre les différentes méthodes de séparations du modèle linéaire instantané (figure 3.3).

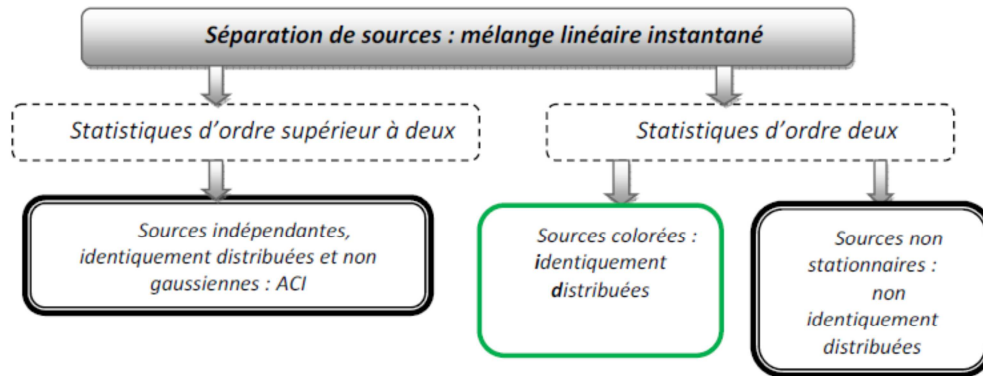


Figure 3.3 : Classification des méthodes de séparation de sources pour un modèle linéaire instantané déterminé et sans bruit

D'après Cardoso (2001), le problème d'un mélange linéaire instantané peut être résolu selon **trois approches**, qui font appel à des hypothèses sur le caractère spatial et/ou temporel des sources.

- **Hypothèse 3.1** : supposer que les sources sont statistiquement indépendantes, et identiquement distribuées (iid) et non **gaussiennes**. C'est la méthode d'analyse en composante indépendantes, méthode proposée par Jutten and Herault (1988) et développé par Comon (1990).

Remarque :

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la méthode ACI, et nous allons y revenir plus en détail par la suite.

➤ **Hypothèse 3.2 :** supposer que les sources sont *colorées* :

Relâcher le premier i de l'hypothèse 3.1 revient à supposer que les sources sont **colorées** (Jutten and Gribonval 2003). Dans ce cas, les matrices de covariance $\mathbf{R}_{\underline{s}}(\tau)$, pour différentes valeurs de τ sont différentes. La séparation de sources à partir de cette hypothèse fait appel aux statistiques d'ordre 2, et revient à diagonaliser conjointement les matrices $\mathbf{R}_{\underline{s}}(\tau)$.

➤ **Hypothèse 3.3 :** supposer que les sources ne sont pas stationnaires :

Relâcher la nature *id* (*identiquement distribuées*) revient à supposer que les échantillons successifs sont distribués différemment, c'est le cas de sources **non stationnaires** (Jutten and Gribonval 2003). Dans ce cas, les matrices de covariance $\mathbf{R}_{\underline{s}}(\tau)^i$ calculées sur les différentes fenêtres temporelles sont différentes. La séparation de sources à partir de cette hypothèse est aussi basée sur les statistiques d'ordre 2, et revient à diagonaliser conjointement les matrices $\mathbf{R}_{\underline{s}}(\tau)^i$.

3.5 Analyse en composantes indépendantes

L'ACI fait appel à la notion *d'indépendance statistique*. Cette notion est plus puissante que la **non corrélation**, car elle fait intervenir des statistiques d'ordre supérieur, et donc plus difficile à satisfaire que l'indépendance d'ordre deux ou non corrélation. L'ACI est une extension de l'*Analyse en Composantes Principales* (ACP) qui cherche à extraire des sources non corrélées dans des directions orthogonales.

La définition de l'indépendance statistique selon l'hypothèse 3.1 ne porte pas sur le temps k . Suivant cette hypothèse, l'indépendance statistique des sources est redéfinie de la façon suivante :

⋮ **Définition 3.2 : indépendance statistique** (Cardoso 2001)

⋮ Soit $\underline{s} = [s_1 \cdots s_i \cdots s_{n_y}]^T$ le vecteur de sources, de densité de probabilité conjointe

⋮ $p_{\underline{s}}(\underline{s})$.

⋮ Notons $p_{s_i}(s_i)$ les densités de probabilités marginales des composantes s_i du vecteur

⋮ \underline{s} . L'indépendance statistique des sources s_i signifie que la densité de probabilité

⋮ conjointe $p_{\underline{s}}(\underline{s})$ s'écrit comme le **produit** des densités de probabilités marginales

⋮ $p_{s_i}(s_i)$:

$$p_{\underline{s}}(\underline{s}) = \prod_{i=1}^{n_y} p_{s_i}(s_i) \quad (3.19)$$

L'ACI interprète le vecteur de mesures comme une combinaison linéaire de variables (sources) statistiquement indépendantes, soit :

$$\underline{y}(k) = \sum_{i=1}^{n_y} \underline{t}_i s_i(k) \quad (3.20)$$

Darmois (1953) a montré que la séparation des sources n'est pas possible si les sources sont *gaussiennes et iid*. Nous énonçons ce théorème.

Théorème 3.1 : théorème de Darmois (Darmois 1953)

Soient deux variables aléatoires e_1 et e_2 :

$$e_1 = \sum_{i=1}^{n_y} a_i f_i, e_2 = \sum_{i=1}^{n_y} b_i f_i \quad (3.21)$$

où f_1, \dots, f_{n_y} sont des variables aléatoires indépendantes.

Si les variables e_1 et e_2 sont indépendantes entre elles, alors toutes les variables f_i dont les coefficients $a_i b_i \neq 0$ sont gaussiennes.

Dans les méthodes ACI, l'indépendance est liée à la *nature non gaussienne des sources*, et les différents algorithmes proposés dans la littérature sont basés sur les notions d'*indépendance statistique* et de *non gaussianité*. L'entropie, la divergence de Kullback-Leibler et l'information mutuelle sont des mesures de gaussianité et d'indépendance statistique (Cover and Thomas 2006). Dans la section suivante, nous rappelons ces mesures dans un cadre général des vecteurs aléatoires **centrés** et à valeurs **réelles**.

3.6 Mesures de gaussianité et d'indépendance statistique

L'utilisation des statistiques pour résoudre le problème de la séparation dépend de l'hypothèse faite sur la nature des sources. Par exemple, dans le cas de *sources colorées " hypothèse 3.2 "*, ou *non stationnaire " hypothèse 3.3 "*, nous nous limitons aux statistiques d'ordre 2. Alors que dans le cas de l'hypothèse 3.1, nous utilisons les statistiques d'ordre supérieur.

L'ACI suppose que les sources sont *non gaussiennes et iid*, et pour la résoudre, deux mesures doivent être introduites : la mesure de non gaussianité et la mesure indépendance statistique.

3.6.1 Mesure de gaussianité

•• **Définition 3.3 : l'entropie différentielle conjointe et marginale** (Cover and Thomas 2006).

•• L'observation d'un vecteur aléatoire continu $\underline{u} = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n_y})^T$ de densité de probabilité conjointe $p_{\underline{u}}(\underline{u})$ apporte une quantité d'information (scalaire), quantifiée par l'entropie différentielle conjointe $H(\underline{u})$.

Cette notion a été introduite par Shannon (1948), et elle est définie par :

$$H(\underline{\mathbf{u}}) = - \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\xi}) \ln p_{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (3.22)$$

où $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n_y})^T$ est un vecteur de variables d'intégration muettes.

De la même manière, chacune des composantes u_i du vecteur $\underline{\mathbf{u}}$, de densité de probabilité marginale $p_{u_i}(u_i)$, apporte une quantité d'information, quantifiée par l'entropie différentielle **marginale** $H(u_i)$:

$$H(u_i) = - \int_{\mathbb{R}} p_{u_i}(\xi_i) \ln p_{u_i}(\xi_i) d\xi_i \quad (3.23)$$

L'entropie différentielle possède la propriété **d'équivariance** par transformation linéaire inversible :

Propriété 3.1 : équivariance de l'entropie différentielle (Cover and Thomas 2006)

Soit $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ un vecteur aléatoire et $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{b}}$, \mathbf{P} est une matrice inversible. Alors :

$$H(\underline{\mathbf{v}}) = H(\underline{\mathbf{u}}) + \ln|\det(\mathbf{P})| \quad (3.24)$$

Théorème 3.1: expression de l'entropie différentielle d'un vecteur gaussien

(Cover and Thomas 2006)

Soit $\underline{\mathbf{u}}_g \in \mathbb{R}^{n_y}$ un vecteur aléatoire de distribution gaussienne, $\underline{\mathbf{u}}_g \sim N(\underline{\mathbf{0}}, \underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g})$

, de densité de probabilité conjointe $p_{\underline{\mathbf{u}}_g}(\underline{\mathbf{u}}_g)$ définie par :

$$p_{\underline{\mathbf{u}}_g}(\underline{\mathbf{u}}_g) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det(\underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_g^T \underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g}^{-1} \underline{\mathbf{u}}_g \right\} \quad (3.25)$$

Alors, l'entropie différentielle conjointe du vecteur aléatoire $\underline{\mathbf{u}}_g$ est donnée par :

$$H(\underline{\mathbf{u}}_g) = \frac{1}{2} \ln \left\{ (2\pi e)^{n_y} \det(\underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g}) \right\} \quad (3.26)$$

L'entropie différentielle marginale d'une variable aléatoire gaussienne u_{gi} est donnée par:

$$H(u_{gi}) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 2\pi e \sigma_{u_{gi}}^2 \right\} \quad (3.27)$$

où $\sigma_{u_{gi}}^2$ est la variance de la variable u_{gi} .

On démontre aussi que parmi les vecteurs aléatoires $\underline{\mathbf{u}}$ (de même matrice de covariance) ayant une *entropie différentielle maximale* est le vecteur aléatoire gaussien $\underline{\mathbf{u}}_g$:

Théorème 3.2: entropie différentielle maximale

Soit $\underline{\mathbf{u}}_g, \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ deux vecteurs aléatoires, respectivement de distribution gaussienne et quelconque. L'entropie conjointe $H(\underline{\mathbf{u}})$ vérifie l'inégalité suivante :

$$H(\underline{\mathbf{u}}) < H(\underline{\mathbf{u}}_g) = \frac{1}{2} \ln \left\{ (2\pi e)^{n_y} \det(\Sigma_{\underline{\mathbf{u}}_g}) \right\} \quad (3.28)$$

Rappelons que :

$$H(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \ln \left\{ (2\pi e)^{n_y} \det(\Sigma_{\underline{\mathbf{u}}_g}) \right\} \text{ ssi } \underline{\mathbf{u}} \sim N(\underline{\mathbf{0}}, \Sigma_{\underline{\mathbf{u}}_g}) \quad (3.29)$$

Nous utilisons la définition de l'entropie marginale et conjointe pour définir une **mesure de non gaussianité** d'un vecteur aléatoire de distribution quelconque par rapport à un vecteur de distribution gaussienne.

Pour apporter une *information scalaire* sur la **non gaussianité**, nous utilisons la notion de **néguentropie conjointe** que nous notons $J(\underline{\mathbf{u}})$. Cette notion a été introduite par Donoho (1981).

•• **Définition 3.3 : l'entropie différentielle** (Cover and Thomas 2006)

•• Soit $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ un vecteur aléatoire de distribution quelconque, et soit

•• $\underline{\mathbf{u}}_g \in \mathbb{R}^{n_y}$ un vecteur aléatoire de distribution gaussienne. La néguentropie est définie par :

$$J(\underline{\mathbf{u}}) = H(\underline{\mathbf{u}}_g) - H(\underline{\mathbf{u}}) \quad (3.30)$$

•• De la même manière, on définit la néguentropie marginale entre une variable aléatoire quelconque u_i et une gaussienne u_{ig} par :

$$J(u_i) = H(u_{ig}) - H(u_i) \quad (3.31)$$

La néguentropie est une information scalaire, **positive** et qui s'**annule** seulement si le vecteur aléatoire suit une **distribution gaussienne**. Dans le cas contraire, le vecteur aléatoire suit une **distribution non gaussienne**.

A l'inverse de l'entropie différentielle, la néguentropie possède la propriété d'être **invariante** par rapport à une transformation linéaire inversible :

Propriété 3.2 : invariance de la néguentropie (Cover and Thomas 2006)

Soit $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ un vecteur aléatoire et $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{P} \cdot \underline{\mathbf{u}}$, \mathbf{P} est une matrice inversible, et soit $J(\underline{\mathbf{u}}), J(\underline{\mathbf{v}})$, la néguentropie associée à $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$. Alors :

$$KL(p_{\underline{u}}, p_{\underline{v}}) = \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{u}}(\underline{\xi}) \ln \frac{p_{\underline{v}}(\underline{\xi})}{p_{\underline{u}}(\underline{\xi})} d\underline{\xi} \quad (3.37)$$

La divergence de Kullback-Leibler $KL(p_{\underline{u}}, p_{\underline{v}})$ est aussi appelée : **néguentropie relative**.

Effectivement, de la relation (3.30) et (3.22), la néguentropie conjointe du vecteur \underline{u} se réécrit sous la forme suivante :

$$J(\underline{u}) = - \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{u}_g}(\underline{\xi}) \ln p_{\underline{u}_g}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} + \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{u}}(\underline{\xi}) \ln p_{\underline{u}_g}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (3.38)$$

Lorsque les moments d'ordre 2 des vecteurs aléatoires \underline{u} et \underline{u}_g sont égaux. La néguentropie de \underline{u} se réécrit alors sous la forme suivante :

$$J(\underline{u}) = p_{\underline{u}}(\underline{\xi}) \ln \frac{p_{\underline{u}}(\underline{\xi})}{p_{\underline{u}_g}(\underline{\xi})} = KL(p_{\underline{u}}, p_{\underline{u}_g}) \quad (3.39)$$

La néguentropie est donc égale à la divergence de Kullback-Leibler entre la densité de probabilité du vecteur \underline{u} et du vecteur gaussien \underline{u}_g de matrice de covariance.

3.6.2.2 Information mutuelle

⋮ **Définition 3.5 : information mutuelle** (Cover and Thomas 2006)

⋮ La divergence de Kullback-Leibler entre $p_{\underline{u}}(\underline{u})$ et $\prod_{i=1}^{n_y} p_{u_i}(u_i)$ donne une mesure de
 ⋮ l'indépendance statistique des composantes de \underline{u} , que l'on appelle information
 ⋮ mutuelle (IM). Nous notons cette mesure $I(\underline{u})$:

$$I(\underline{u}) = \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{u}}(\underline{\xi}) \ln \frac{\prod_{i=1}^{n_y} p_{u_i}(\xi_i)}{p_{\underline{u}}(\underline{\xi})} d\underline{\xi} \quad (3.40)$$

L'information mutuelle est une mesure d'indépendance statistique : **sa nullité implique l'indépendance statistique**.

L'information mutuelle peut aussi être exprimée en fonction de la néguentropie (Hyvärinen 1997) :

Associés au vecteur aléatoire \underline{u} le vecteur aléatoire gaussien \underline{u}_g ayant la même matrice de covariance, en reprenant les équations (3.30) et (3.31), nous avons :

$$\begin{aligned}
J(\underline{\mathbf{u}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(u_i) &= H(\underline{\mathbf{u}}_g) - H(\underline{\mathbf{u}}) - \sum_{i=1}^{n_y} H(u_{gi}) + \sum_{i=1}^{n_y} H(u_i) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_y}} p_{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\xi}) \ln \frac{p_{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\xi})}{p_{\underline{\mathbf{u}}_g}(\underline{\xi})} d\underline{\xi} - \sum_{i=1}^{n_y} \int_{\mathbb{R}} p_{u_i}(\xi_i) \ln \frac{p_{u_i}(\xi_i)}{p_{u_{gi}}(\xi_i)} d\xi_i
\end{aligned} \tag{3.41}$$

En manipulant cette expression, Hyvärinen (1997) obtient :

$$J(\underline{\mathbf{u}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(u_i) = I(\underline{\mathbf{u}}) - I(\underline{\mathbf{u}}_g) \tag{3.42}$$

L'information mutuelle associée au vecteur $\underline{\mathbf{u}}$ s'exprime donc :

$$I(\underline{\mathbf{u}}) = I(\underline{\mathbf{u}}_g) + J(\underline{\mathbf{u}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(u_i) \tag{3.43}$$

En utilisant les équations (3.26) et (3.27) du théorème 3.1, l'information mutuelle d'un vecteur aléatoire gaussien s'écrit :

$$I(\underline{\mathbf{u}}_g) = \frac{1}{2} \ln \frac{\prod_{i=1}^{n_y} \sigma_{u_{gi}}^2}{\det(\underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g})} \tag{3.44}$$

où $\sigma_{u_{gi}}^2$ est la variance de la variable aléatoire gaussienne u_{gi} , $\underline{\Sigma}_{\underline{\mathbf{u}}_g}$ est la matrice (symétrique) de covariance du vecteur aléatoire gaussien $\underline{\mathbf{u}}_g$.

3.7 Séparation de sources

Dans cette section, nous allons utiliser les mesures de non gaussianité et d'indépendance statistique "*néguentropie et information mutuelle*" afin de résoudre le problème de séparation du modèle séparation *linéaire instantané déterminé et sans bruit* (Hyvärinen 1997).

3.7.1 Sources gaussiennes et iid : analyse en composantes principales

Considérons, à nouveau, le problème de la séparation de sources :

$$\underline{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{W}\underline{\mathbf{y}}(k) \tag{3.45}$$

où $\underline{\mathbf{r}}(k) \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$ et $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont respectivement le vecteur de sources et la matrice de séparation à estimer à l'instant k .

Le modèle de séparation défini à l'équation (3.45) est un modèle instantané, où l'opération de séparation ne porte que sur les capteurs et non sur le temps k . Nous allons donc omettre l'instant k :

$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{W}\underline{\mathbf{y}} \quad (3.46)$$

L'analyse en composantes indépendantes est fondée sur l'hypothèse 3.1 : sources *iid et non gaussiennes*.

Analysons cette hypothèse dans le cas où les sources sont *iid et gaussiennes*. Dans ce cas, le problème de séparation revient à estimer un vecteur de sources $\underline{\mathbf{r}} = [r_1 \cdots r_i \cdots r_{n_y}]^T$ de distribution **gaussienne**, dont les composantes r_i sont *statistiquement indépendantes*.

Précédemment, nous avons vu que l'information mutuelle est une mesure d'indépendance statistique, nous allons donc l'utiliser afin de définir un *critère de séparation*.

Critère 3.1 : critère de séparation à base d'information mutuelle (Hyvärinen 1997)
Le problème de la séparation revient à trouver une matrice de séparation \mathbf{W} , de sorte que l'information mutuelle est nulle :

$$I(\underline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.47)$$

si et seulement si les variables r_i ($i = 1, \dots, n_y$) sont statistiquement indépendantes

D'après l'équation (3.44), l'information mutuelle du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ (de distribution **gaussienne**) s'écrit :

$$I(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \ln \frac{\prod_{i=1}^{n_y} \sigma_{r_i}^2}{\det(\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}})} \quad (3.48)$$

De l'équation (3.48), nous déduisons que si les composantes r_i du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ sont statistiquement indépendantes, alors :

$$I(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \ln \frac{\prod_{i=1}^{n_y} \sigma_{r_i}^2}{\det(\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}})} = 0 \Rightarrow \quad (3.49)$$

$$\prod_{i=1}^{n_y} \sigma_{r_i}^2 = \det(\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}}) \quad (3.50)$$

Sachant qu'une matrice de covariance est **symétrique**, l'égalité (3.50) est satisfaite si la matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}}$ du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ est égale à la matrice **diagonale** : les sources sont **non corrélées** et donc *statistiquement indépendantes au second ordre*. C'est la méthode *d'analyse en composantes principales* (ACP), appelée aussi méthode de *blanchiment spatial* (Jolliffe 1986).

L'analyse en composantes principales d'un vecteur de mesures $\underline{\mathbf{y}}$, de matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{y}}$ est définie comme un couple de matrices $\{\mathbf{P}, \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}\}$, telle que la matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{y}}$ se factorise sous la forme :

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \mathbf{P} \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{P}^T \quad (3.51)$$

En algèbre linéaire, l'équation (3.51) est une décomposition aux valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{y}}$:

$\mathbf{P} = [\underline{\mathbf{p}}_1 \cdots \underline{\mathbf{p}}_i \cdots \underline{\mathbf{p}}_{n_y}] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice des vecteurs propres,

$\underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_i \cdots \lambda_{n_y}) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice $\underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}$.

Si nous reprenons le modèle de séparation (3.46), l'ACP revient à trouver la matrice de séparation, que nous notons ici \mathbf{W}_{ACP} , telle que :

$$\mathbf{W}_{\text{ACP}} = \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \quad (3.52)$$

La relation (3.52) vient des justifications suivantes :

Au § 3.3.2, nous avons fait remarquer que la séparation de sources est sujette à une indétermination d'échelle, et nous avons supposé que l'amplitude des sources est égale à un. Par conséquent, la matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}}$ du vecteur de sources doit être égale à la matrice **identité**, soit :

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}} = \mathbf{I}_{n_y} \quad (3.53)$$

La matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}}$ s'écrit comme suit :

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}} = E\{\underline{\mathbf{r}}\underline{\mathbf{r}}^T\} = \mathbf{W}_{\text{ACP}} \mathbb{E}\{\underline{\mathbf{y}}\underline{\mathbf{y}}^T\} \mathbf{W}_{\text{ACP}} = \mathbf{W}_{\text{ACP}} \underline{\Sigma}_{\mathbf{y}} \mathbf{W}_{\text{ACP}}^T \quad (3.54)$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique.

Si nous insérons l'équation (3.52) dans (3.54), nous obtenons :

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}} = \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}} = \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}} \underline{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbf{y}}}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

donc :

$$\underline{\Sigma}_{\mathbf{r}} = \mathbf{I}_{n_y} \quad (3.57)$$

Maintenant, il nous faut estimer la matrice de covariance $\Sigma_{\underline{y}}$ pour calculer \mathbf{W}_{ACP} .

La nature *id* des sources et donc des mesures, signifie que les signaux sont stationnaires. En utilisant l'hypothèse d'ergodicité, nous pouvons donc estimer leurs **propriétés statistiques** en utilisant leurs **propriétés temporelles** (De Coulon 1998).

Pour estimer la matrice de covariance $\Sigma_{\underline{y}}$, nous utilisons la relation suivante :

$$\Sigma_{\underline{y}} = \mathbb{E} \{ \underline{y} \underline{y}^T \} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underline{y}(k) \underline{y}(k)^T = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \quad (3.58)$$

où N est le nombre d'échantillons temporels.

Le modèle de séparation de l'équation (3.45) lie le vecteur de sources et le vecteur de mesures à un instant k donné.

Pour estimer le vecteur de sources à tous les instants $k = 1, \dots, N$, nous réécrivons le modèle de séparation sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{ACP}} = \mathbf{W}_{\text{ACP}} \mathbf{Y} \quad (3.59)$$

où

$\mathbf{Y} = [\underline{y}(1) \cdots \underline{y}(k) \cdots \underline{y}(N)]$ est la matrice de mesures,

$\mathbf{R}_{\text{ACP}} = [\underline{r}_{\text{ACP}}(1) \cdots \underline{r}_{\text{ACP}}(k) \cdots \underline{r}_{\text{ACP}}(N)]$ est la matrice de sources estimée par l'ACP.

En résumé, l'ACP fournit la matrice de séparation (matrice de mélange \mathbf{T}_{ACP} est l'inverse de la matrice \mathbf{W}_{ACP}) et la matrice de sources estimées, définies respectivement dans les équations (3.52) et (3.59).

3.7.2 Sources non gaussiennes et iid: analyse en composantes indépendantes

Sous l'hypothèse que les sources sont iid et gaussiennes, la solution du problème de la SAS est l'ACP. Dans le cas où ces sources sont supposées **non gaussiennes**, l'ACI remplace l'ACP.

3.7.2.1 Etude statistique du bruit mesuré

L'ACI permet de résoudre la SAS sous l'hypothèse que les sources sont *iid* et **non gaussiennes**. Ces sources sont des variables *latentes* extraites à partir de la matrice de mesures. Avant de résoudre le problème de la SAS, ces sources sont inaccessibles, une analyse de l'hypothèse ou non de leur gaussianité *ne peut pas être établie*. Cependant, la présence de bruits non gaussiens peut contribuer à la non gaussianité des sources. Dans cette section, nous allons étudier de façon quantitative le bruit mesuré.

Rappelons le modèle de mélange et de séparation **linéaire instantané déterminé et sans bruit**:

$$\underline{y} = \mathbf{T}\underline{s} \quad (3.60)$$

$$\underline{r} = \mathbf{W}\underline{y} \quad (3.61)$$

Au § 2.1.1.4 du chapitre 2, nous avons étudié le *bruit environnant*, mesuré par les capteurs piézoélectriques, et pour cela, nous avons effectué des essais sur la plaque saine et sur la plaque endommagée **sans excitation**. Dans ce cas, les informations transmises par les capteurs piézoélectriques reflètent **entièrement** le bruit présent lors des essais, donc le bruit mesuré est contenu dans chacune des variables $y_i (i = 1, \dots, n_y = 8)$.

Nous avons étudié ce bruit par la technique du Q-Q plot, (Saporta 2006). Cette technique nous a permis de **constater** que le bruit mesuré par les capteurs n'est *pas gaussien*.

Au § 3.6.1, nous avons vu que la néguentropie permet de **quantifier** la non gaussianité d'un vecteur aléatoire, nous allons donc l'utiliser pour quantifier la non gaussianité du bruit mesuré par **chacun** des capteurs (étude des variables aléatoires y_i).

Rappelons tout d'abord la néguentropie marginale de la variable aléatoire y_i :

$$J(y_i) = H(u_{gi}) - H(y_i) \quad (3.62)$$

où $H(u_{gi})$ et $H(y_i)$ sont respectivement l'entropie différentielle marginale d'une variable aléatoire gaussienne u_{gi} et de la variable y_i .

A travers l'entropie différentielle marginale (voir équation (3.23)), la néguentropie marginale fait intervenir des densités de probabilité qui ne sont pas *a priori* connues, une approximation doit donc être faite.

Jones and Sibson (1987) ont proposé d'approximer la néguentropie marginale en utilisant le cumulants normalisés d'ordre 3 et d'ordre 4 : le coefficient **d'asymétrie** et le **kurtosis**. Cette approximation est donnée par :

$$J(y_i) \cong \frac{1}{12} [\mathbb{E}\{y_i^3\}]^2 + \frac{1}{48} [kur(y_i)]^2 \quad (3.63)$$

Dans le cas où la variable y_i est normalisée, le kurtosis de cette variable s'écrit :

$$kur(y_i) = \mathbb{E}\{y_i^4\} - 3 \quad (3.64)$$

et sous l'hypothèse que la variable y_i suit une distribution gaussienne, son moment d'ordre 4 : $\mathbb{E}\{y_i^4\}$ serait égal à 3. Le kurtosis de cette variable est donc égal à zéro.

La figure 3.4 montre la valeur du kurtosis de quelques distributions statistiques.

L'approximation de la néguentropie marginale donnée dans l'équation (3.64) est sensible aux valeurs aberrantes. Pour remédier à cela, Hyvärinen (1998) a proposé d'approcher la néguentropie marginale en utilisant des fonctions non polynomiales :

$$J(y_i) \cong [E\{G(y_i)\} - E\{G(u_{gi})\}]^2 \quad (3.65)$$

Distribution	Kurtosis
Gaussienne	0
Uniforme	-1.2
Laplace	3

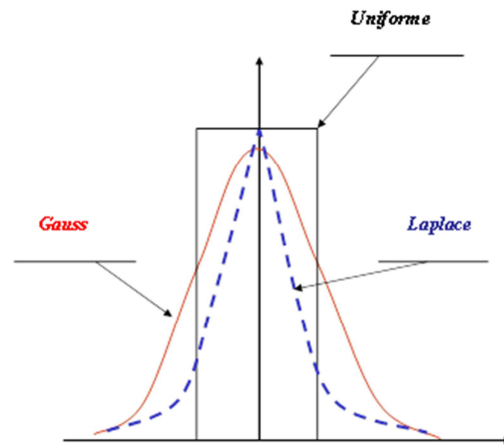


Figure 3.4 : Kurtosis de quelques distributions statistiques

où $G(\cdot)$ est une fonction non polynomiale de la forme (Hyvärinen 1998) :

$$\begin{aligned} G_1(\cdot) &= \ln \cosh(\cdot) \\ G_2(\cdot) &= -\exp\{-(\cdot)/2\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Nous choisissons de travailler avec la fonction G_1 .

L'estimation de la néguentropie $J(y_i)$, définie par l'équation (3.65) est donnée par la relation suivante :

$$J(y_i) = [\sum_{k=1}^N G_1\{y_i(k)\} - \sum_{k=1}^N G_1\{u_{gi}(k)\}]^2. \quad (3.67)$$

Rappelons que lors de l'étude du bruit dans le chapitre 2, nous avons choisi $N = 300000$.

En appliquant la relation (3.67) à chacun des bruits mesurés par les différents capteurs de la plaque saine ou endommagée, nous avons obtenu les résultats illustrés aux tableaux 3.1 et 3.2.

Tableau 3. 13 : Néguentropie du bruit mesuré par les capteurs de la plaque saine (sans excitation)

Capteur	1	2	3	4	5	8	9	10
Néguentropie du bruit	2.5740	3.2371	2.3138	1.7738	8.8108	2.1865	2.1523	2.7321

Tableau 3. 14 : Néguentropie du bruit mesuré par les capteurs de la plaque endommagée (sans excitation)

Capteur	1	2	3	4	5	8	9	10
Néguentropie du bruit	3.2777	2.1794	2.4394	2.1506	1.7720	1.6090	2.0647	2.8069

Les tableaux ci-dessus montrent que la néguentropie des bruits mesurés est **très différente de zéro**, ce qui signifie que les mesures y_i fournies par les capteurs piézoélectriques *ne sont pas gaussiennes*.

Comme la matrice de séparation \mathbf{W} est une application linéaire, le vecteur de sources $\underline{\mathbf{s}}$ n'est donc pas gaussien. Par conséquent, l'analyse en composante indépendantes est justifiée.

3.7.2.2 Séparation par la méthode ACI

Nous cherchons à estimer un vecteur de sources $\underline{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_i \dots r_{n_y})^T$ de distribution **non gaussienne** et dont les composantes r_i sont statistiquement indépendantes.

Selon le critère 3.1, le problème de la séparation revient à trouver une matrice de séparation, de façon à **minimiser** et si possible à **annuler** l'information mutuelle.

L'information mutuelle du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ s'écrit :

$$I(\underline{\mathbf{r}}) = I(\underline{\mathbf{r}}_g) + J(\underline{\mathbf{r}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(r_i) \quad (3.68)$$

où $\underline{\mathbf{r}}_g$ est un vecteur aléatoire gaussien de même matrice de covariance que le vecteur $\underline{\mathbf{r}}$.

L'équation (3.68) montre que l'information mutuelle se décompose en 3 termes : le premier $I(\underline{\mathbf{r}}_g)$, contient les **informations gaussiennes** du vecteur de sources, le second et le troisième terme contiennent respectivement des informations sur la **non gaussianité** du vecteur $\underline{\mathbf{r}}$ et de ses composantes r_i .

L'application de l'analyse en composantes principales au vecteur de mesures permet d'annuler $I(\underline{\mathbf{r}}_g)$:

$$\underline{\mathbf{r}}_{ACP} = \mathbf{W}_{ACP} \underline{\mathbf{y}} \quad (3.69)$$

Rappelons que la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP} obtenue par l'ACP est :

$$\mathbf{W}_{ACP} = \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_y}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \quad (3.70)$$

où le couple $\{\mathbf{\Lambda}_{\Sigma_y}, \mathbf{P}\}$ est la décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance de mesures Σ_y .

Le modèle de séparation de l'équation (3.61) se réécrit de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{W} \mathbf{W}_{ACP}^{-1} \underline{\mathbf{r}}_{ACP} \quad (3.71)$$

Dans ce cas, l'information mutuelle $I(\underline{\mathbf{r}})$ s'écrit:

$$I(\underline{\mathbf{r}}) = J(\underline{\mathbf{r}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(r_i) \quad (3.72)$$

Nous avons donc utilisé l'ACP pour annuler l'information mutuelle $I(\underline{\mathbf{r}}_g)$.

Le problème de séparation par ACI revient à trouver une matrice de séparation \mathbf{W} telle que :

$$\min_{\mathbf{W}} I(\underline{\mathbf{r}}) = \min_{\mathbf{W}} \left\{ J(\underline{\mathbf{r}}) - \sum_{i=1}^{n_y} J(r_i) \right\} \quad (3.73)$$

Les composantes r_i sont définies de la façon suivante :

$$r_i = \underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{ACP}, i = 1, \dots, n_y \quad (3.74)$$

où $\underline{\mathbf{w}}_i$ est le i ème vecteur colonne de la matrice de séparation \mathbf{W} :

$$\mathbf{W} = [\underline{\mathbf{w}}_1 \cdots \underline{\mathbf{w}}_i \cdots \underline{\mathbf{w}}_{n_y}] \quad (3.75)$$

Nous avons vu au § 3.6.1 (propriété 3.2) que la néguentropie conjointe est **invariante** par une transformation linéaire. Il s'ensuit que le seul terme sensible à cette transformation est le second terme à droite du problème de minimisation (3.73), c'est la **néguentropie marginale**. Par conséquent, pour résoudre ce problème, nous allons chercher une matrice de séparation \mathbf{W} , de sorte que la somme des néguentropies marginales $J(r_i)$ de toute les sources r_i soit **maximale** (Hyvärinen 1997) :

$$\max_{\mathbf{W}} \sum_{i=1}^{n_y} J(r_i) \quad (3.76)$$

La recherche de la matrice \mathbf{W} revient à maximiser la fonction objectif Υ suivante :

$$\Upsilon(\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{n_y} J(r_i) \quad (3.77)$$

Comme $r_i = \underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}}$, ces fonctions objectifs s'écrivent grâce à l'approximation faite dans l'équation (3.65), de la manière suivante :

$$\Upsilon(\underline{\mathbf{w}}_i)_i \cong [E\{G_1(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - E\{G_1(u_{gi})\}]^2, i = 1, \dots, n_y \quad (3.78)$$

3.7.2.3 Algorithme du point fixe pour l'extraction des sources par la méthode ACI

La maximisation de la fonction objectif $\Upsilon(\underline{\mathbf{w}}_i)_i$ revient à trouver un maximum de la fonction $E\{G(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\}$, car $E\{G(u_{gi})\}$ est fixe.

Rappelons que nous avons imposé que l'amplitude des sources soit égale à un, donc leur variance l'est aussi :

$$\sigma_{r_i}^2 = E\{\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}}^T \underline{\mathbf{w}}_i\} = \|\underline{\mathbf{w}}_i\|^2 = 1 \quad (3.79)$$

Nous sommes donc en face d'un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\begin{aligned} \max_{\underline{\mathbf{w}}_i} E\{G_1(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \\ \|\underline{\mathbf{w}}_i\|^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ce problème est résolu grâce à l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange (Hyvärinen 1999) :

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{w}}_i, \beta) = E\{G_1(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} + \beta (\|\underline{\mathbf{w}}_i\|^2 - 1) \quad (3.81)$$

où β est le multiplicateur de Lagrange.

Comme nous avons une seule contrainte : $\|\underline{\mathbf{w}}_i\|^2 = 1$, nous avons un seul multiplicateur de Lagrange.

Pour maximiser \mathcal{L} , il faut que le gradient de $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{w}}_i, \beta)$ par rapport à $\underline{\mathbf{w}}_i$ soit nul :

$$F(\underline{\mathbf{w}}_i, \beta) = \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\mathbf{w}}_i, \beta)}{\partial \underline{\mathbf{w}}_i} = E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - \beta \underline{\mathbf{w}}_i = 0 \quad (3.82)$$

Pour trouver une solution à l'équation (3.82), nous utilisons la méthode d'itération de Newton.

Le gradient de F par rapport à $\underline{\mathbf{w}}_i$ est donné par :

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{w}}_i} = E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}}^T G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - \beta \mathbf{I}_{n_y} \quad (3.83)$$

Nous faisons l'approximation suivante (Hyvärinen 1999) :

$$\begin{aligned} E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}}^T G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} &= E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}}^T\} E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \\ &= \mathbf{I}_{n_y} E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

L'itération de la méthode de Newton est donnée par :

$$\underline{\mathbf{w}}_i^+ = \underline{\mathbf{w}}_i - [E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - \beta \underline{\mathbf{w}}_i] / [E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - \beta] \quad (3.85)$$

En posant $\beta = E\{\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\}$

et en multipliant l'équation (3.85) par $\beta - E\{G''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\}$, nous obtenons :

$$\underline{\mathbf{w}}_i^+ [\beta - E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\}] = E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \underline{\mathbf{w}}_i \quad (3.86)$$

Ceci est équivalent à :

$$\underline{\mathbf{w}}_i^+ \propto E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \underline{\mathbf{w}}_i \quad (3.87)$$

où \propto est l'opérateur proportionnel.

L'algorithme du point fixe s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{w}}_i^+ &\propto E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \underline{\mathbf{w}}_i \\ \underline{\mathbf{w}}_i^+ &= \frac{\underline{\mathbf{w}}_i^+}{\|\underline{\mathbf{w}}_i^+\|} = 1 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Pour trouver tous les vecteurs $\underline{\mathbf{w}}_i$, $i = 1, \dots, n_y$, l'algorithme du point fixe est répété n_y fois.

Nous notons \mathbf{W}_{ACI} la matrice de séparation obtenue après application de cet algorithme.

Le modèle de séparation (3.45) lie le vecteur de sources et le vecteur de mesures à un instant k donné. Pour estimer le vecteur de sources par ACI à tous les instants $k = 1, \dots, N$, nous réécrivons le modèle de séparation sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{ACI}} = \mathbf{W}_{\text{ACI}} \mathbf{Y} \quad (3.89)$$

où

$\mathbf{Y} = [\underline{\mathbf{y}}(1) \cdots \underline{\mathbf{y}}(k) \cdots \underline{\mathbf{y}}(N)]$ est la matrice de mesures,

$\mathbf{R}_{\text{ACI}} = [\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACI}}(1) \cdots \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACI}}(k) \cdots \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACI}}(N)]$ est la matrice de sources estimée par l'ACI.

Nous avons résumé la séparation par l'ACI dans l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 3.1: Algorithme de séparation de sources par la méthode ACI : minimisation de l'information mutuelle

Début

1. Appliquer une ACP à la matrice de mesures \mathbf{Y} par la méthode ACP (voir § 3.7.1) :

$$\mathbf{R}_{\text{ACP}} = \mathbf{W}_{\text{ACP}} \mathbf{Y}$$

2. Initialiser la matrice \mathbf{W} :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{ACP}}$$

3. Orthogonaliser la matrice \mathbf{W} :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2} \mathbf{W}$$

Initialiser $t=0$

4. Tant que $t \leq t_{\max}$ (t_{\max} est le nombre d'itérations maximales : $t_{\max} = 1000$)

4.1

Pour $i = 1:n_y$

$\underline{\mathbf{w}}_i^+ = E\{\underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}} G_1'(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} - E\{G_1''(\underline{\mathbf{w}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_{\text{ACP}})\} \underline{\mathbf{w}}_i$, avec G_1' et G_1'' sont respectivement les dérivées première et seconde de G_1

Fin

4.2 Construire la matrice $\mathbf{W}^+ = [\underline{\mathbf{w}}_1^+ \cdots \underline{\mathbf{w}}_i^+ \cdots \underline{\mathbf{w}}_{n_y}^+]$

4.3 Orthogonaliser la matrice \mathbf{W}^+

$$\mathbf{W}^+ = (\mathbf{W}^+ (\mathbf{W}^+)^T)^{-1/2} \mathbf{W}^+$$

4.4

Si $1 - \min(|\text{diag}(\mathbf{W}^+ \mathbf{W}^+)|) < \varepsilon$

Alors, aller à l'étape 5

Sinon, aller à l'étape 4.5

Fin

4.5 $t=t+1$

Refaire les étapes 4.1 à 4.3

5. Fin

6. Calculer la matrice de sources:

$$\mathbf{R}_{\text{ACI}} = \mathbf{W}_{\text{ACI}} \mathbf{Y}$$

Fin

L'algorithme 3.1 est disponible sous forme d'une toolbox développée par Gavert et al. (2005).

3.8 Exemple de séparation par ACP et ACI

Pour illustrer la séparation de sources par le biais de la méthode ACP et ACI, nous présentons un exemple de résultats simulés. Dans cet exemple, nous traitons le cas de deux signaux sources centrés $s_1(k)$ et $s_2(k)$ ($k = 1, \dots, N = 2000$).

Ces deux signaux sources sont sinusoïdaux, le premier est de fréquence 12 Hz, le second est de 45 Hz.

Pour générer les deux signaux de mélange, nous utilisons la matrice de mélange \mathbf{T} suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2.3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TS}$$
(3.90)

Nous avons contaminé la matrice de mesures \mathbf{Y} par un bruit non gaussien, de type **laplacien**, la densité de probabilité de ce dernier s'écrit (Kay 2010) :

$$p_{\delta y} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma_i^2}} |\delta y|\right)$$
(3.91)

où δy est la variable aléatoire du bruit laplacien,

L'écart type σ_i est celui mesuré expérimentalement.

Ce bruit laplacien a été choisi, car il est proche de celui que nous avons mesuré expérimentalement, notons ce bruit δy_{SHM} .

Pour vérifier cela, nous avons calculé la néguentropie du bruit laplacien par rapport au bruit δy_{SHM} en utilisant l'approximation suivante :

$$J(\delta y) \cong [E\{G_1(\delta y)\} - E\{G_1(\delta y_{\text{SHM}})\}]^2$$
(3.92)

Le résultat du calcul est : $J(\delta y) = 0.2495$, et il montre que le bruit laplacien est proche de celui mesuré expérimentalement.

Les figures 3.5 et 3.6 montrent respectivement les signaux sources et de mélanges.

Nous avons appliqué la méthode ACP et l'algorithme ACI décrit à l'algorithme 3.1 pour extraire les deux signaux sources des deux signaux de mélanges. Les figures 3.7 et 3.8 montrent les deux sources estimées par l'ACP et l'ACI.

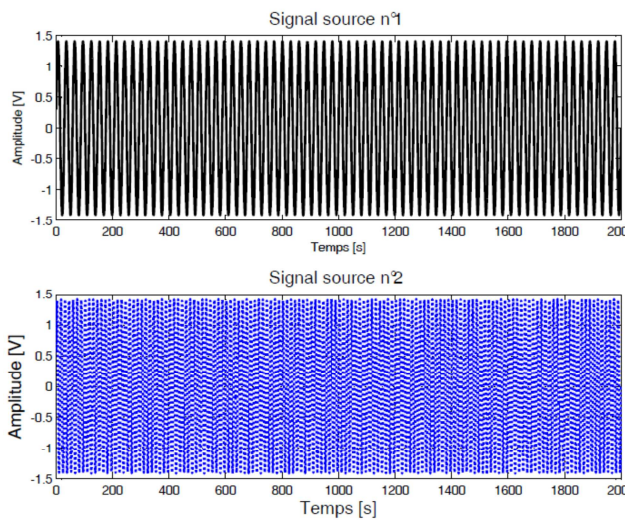


Figure 3.5 : Signaux sources

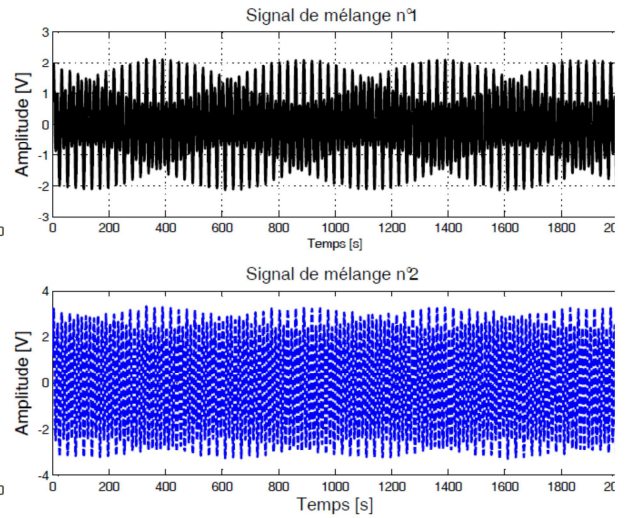


Figure 3.6 : Signaux de mélange

La qualité de séparation de chacun des deux signaux sources par la méthode ACI et ACP est évaluée par la valeur de l'erreur quadratique moyenne EQM.

L'erreur quadratique moyenne mesure la moyenne du carré de l'écart entre le signal source s_i et le signal estimé r_i . Cette erreur s'écrit :

$$EQM_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N=2000} [s_i(k) - r_i(k)]^2, i = 1, 2 \quad (3.93)$$

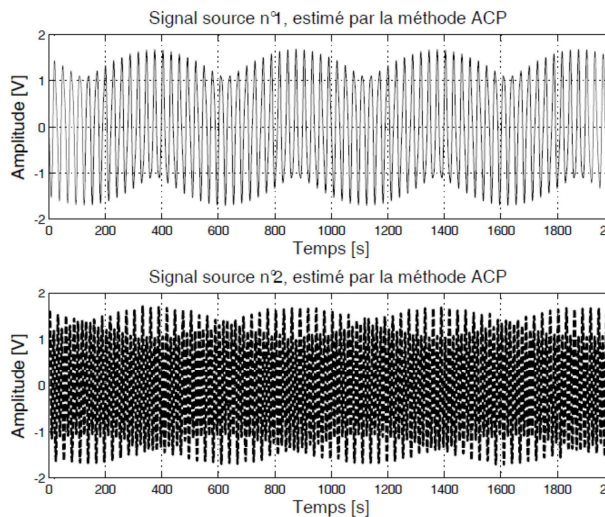


Figure 3.7 : Signaux sources estimés par la méthode ACP

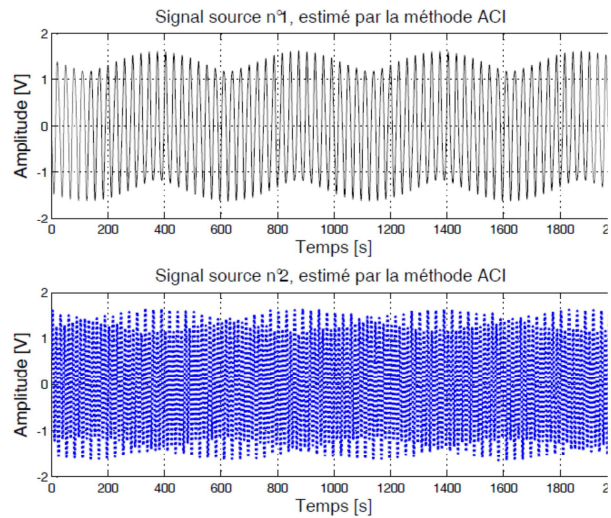


Figure 3.8 : Signaux sources estimés par la méthode ACI

Le tableau 3.3 montre que l'EQM de chacune des sources estimées par la méthode ACI est plus faible que celle de la méthode ACP, donc la séparation de sources à base d'ACI est meilleure que celle par la méthode ACP.

Tableau 3. 15 : Comparaison entre ACP et ACI en termes d'EQM

<i>EQM</i>	<i>Source 1</i>	<i>Source 2</i>
<i>EQM par ACP</i>	0.8649	0.8709
<i>EQM par ACI</i>	0.2580	0.2616

3.9 Lien entre la SAS et la mécanique

La manière dont la séparation aveugle de sources est appliquée dépend de notre vision des choses, certains chercheurs la voient comme une méthode qui permet d'extraire des signaux à partir d'un mélange, par exemple : extraire les battements cardiaques d'un fœtus à partir d'un ensemble de signaux enregistrés à l'aide d'électrodes, placées sur l'abdomen de la mère (De Lathauwer et al. 2000).

Pour notre part, nous voyons la SAS comme une façon de définir des **caractéristiques de fonctionnement** (*matrice de séparation/mélange et matrice des sources indépendantes*) de la structure à l'**état sain** et d'une structure dans un **état inconnu**.

Des chercheurs de la communauté mécanique se sont intéressés à l'application de la SAS, citons à titre d'exemple, les travaux de Poncelet et al. (2007), et Antoni and Menad (2004). Dans cette section, nous nous focalisons sur le lien entre la SAS et la mécanique, plus précisément : l'analyse vibratoire et l'identification structurale :

Des systèmes complexes tels que les machines tournantes impliquent le fonctionnement de plusieurs sous-systèmes. Une difficulté pratique consiste à reconnaître à partir des signaux fournis par les capteurs, la contribution de chaque sous-système (figure 3.9).

Pour comprendre le lien entre la SAS et l'analyse vibratoire, nous nous basons sur un exemple donné par Antoni and Menad (2004).

En analyse vibratoire d'une automobile, de nombreuses *sources non observables* (*forces d'inertie des pièces mécaniques en mouvement, forces thermodynamiques, forces hydrodynamiques, forces de roulement, etc.*) créent des **contributions multiples** qui se superposent à la sortie des capteurs. En fonction du ou des phénomènes que l'expérimentateur cherche à isoler, il y a donc un intérêt certain à savoir décomposer les contributions de chacune des sources au niveau des mesures pour pouvoir ensuite les analyser individuellement.

Partant de cet exemple, nous pouvons utiliser les méthodes SAS afin de résoudre ce problème sans aucune connaissance sur le milieu de propagation (modèle physique du système) ni sur les sources.

D'autres chercheurs de la communauté mécanique ont étudié la SAS dans le cadre de l'identification structurale (Kerschen et al. 2007), (Poncelet et al. 2007). Dans leurs travaux, ces chercheurs ont montré (sous certaine condition) que les vecteurs constituant la matrice de **mélange** sont les vecteurs modaux de la structure, et que les sources extraites sont les modes propres. Kerschen et al. (2007) a utilisé l'ACI, quant à Poncelet et al. (2007), il ont utilisé une méthode SAS d'ordre 2 (voir hypothèse 3.2).

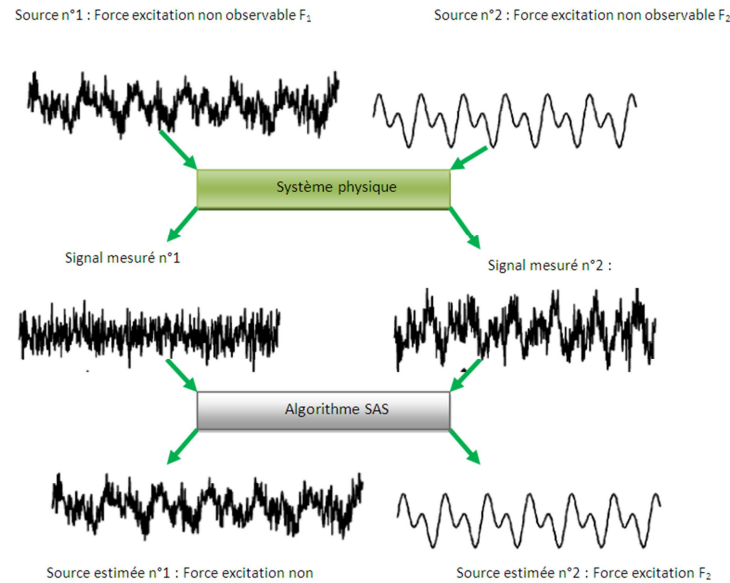


Figure 3.9 : Exemple de séparation de sources (Antoni 2005)

3.10 Conclusions

Depuis que le problème de la séparation aveugle de sources a été formalisé par *Christian Jutten, Bernard Ans et Jeanny Hérault*, les outils théoriques pour la résoudre n'ont cessé de croître. Ces outils dépendent des hypothèses faites sur la nature des sources et sur le modèle de mélange et de séparation (linéaire instantané/convolutif ou non linéaire).

Dans ce chapitre, nous avons retenu le modèle linéaire, et pour le résoudre, nous avons fait des hypothèses sur la **non gaussianité** des sources. Ces deux hypothèses nous ont permis d'introduire respectivement la technique de l'analyse en composantes principales (ACP) et l'analyse en composantes indépendantes (ACI). Ces deux techniques reposent sur la minimisation d'une certaine mesure de l'indépendance statistique. Dans notre travail, nous avons choisi d'utiliser l'information mutuelle comme une mesure d'indépendance statistique. Notons qu'il existe d'autres mesures d'indépendance statistique, tel que le cumulants croisés d'ordre 4 (De Lathauwer et al. 2007).

Partant de l'information mutuelle comme mesure d'indépendance statistique, nous avons montré la relation entre l'information mutuelle, la néguentropie marginale et conjointe, et nous avons montré que l'extraction de sources à partir de la technique ACP (sources **iid et gaussiennes**) revient à diagonaliser la matrice de covariance de mesures.

L'extraction de sources à partir de l'ACI (sources **iid et gaussiennes**) nécessite des développements supplémentaires.

Effectivement, la néguentropie fait intervenir des densités de probabilités de sources non gaussiennes qui ne sont pas *a priori* connues. Dans notre travail, nous n'avons pas cherché à estimer ces densités, mais nous avons approximé la néguentropie par une fonction non polynomiale, en nous basant sur les travaux de Hyvärinen (1998). Notons qu'il existe d'autres

travaux sur l'estimation de la densité de probabilité pour définir l'information mutuelle et la néguentropie (Pham 2004).

La néguentropie conjointe possède la propriété d'être invariante par rapport à une transformation linéaire, nous avons montré que la minimisation de l'information du vecteur de sources revient à maximiser un à un la néguentropie marginale de chacune des sources et donc à maximiser leur **non gaussianité**. Nous avons proposé l'algorithme du point fixe pour résoudre le problème d'optimisation, et donc pour extraire les sources (Hyvärinen 1999).

A titre d'exemple, nous avons présenté un exemple de simulation permettant d'extraire des sources non gaussiennes par la techniques ACP et ACI et nous avons montré que la séparation de sources par l'ACI est meilleure que celle par l'ACP.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser les caractéristiques de fonctionnement issues de la technique ACP et ACI pour définir des résidus indicateurs d'endommagement.

CHAPITRE 4

DETECTION DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES PAR L'ACP

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la théorie de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) et Indépendantes (ACI). Dans notre travail, ces deux méthodes sont considérées comme des techniques d'extraction des caractéristiques de fonctionnement à partir des signaux mesurés : les réponses dynamiques de la structure à l'état sain et d'une structure dans l'état inconnu.

Dans ce chapitre, nous procédons à la détection de l'endommagement par le biais de l'ACP. En première partie, nous commençons par décrire quelques méthodes de détection à base d'ACP, nous passons ensuite au développement de notre méthode de détection de l'endommagement. Dans cette méthode, nous proposons un résidu indicateur d'endommagement. Cet indicateur est associé à une borne de confiance basée sur la théorie des perturbations. Une fois ce résidu et sa borne définis, nous appliquons la méthode proposée pour détecter et localiser l'endommagement des structures composites (plaques et lame 2). Nous analysons ensuite la borne développée sur le modèle EF de la plaque composite à l'état sain, présenté au chapitre 2.

4.1. Introduction

La biomimétique est une démarche consistant à reproduire artificiellement les propriétés d'un système biologique. L'objectif est de comprendre et d'exploiter les propriétés de ce système, en vue de les appliquer dans différents domaines technologiques et de s'en inspirer pour résoudre des problèmes dans des domaines, tels que la surveillance des systèmes et des structures.

Prenons pour exemple le système audible de l'homme, la séparation aveugle de sources (SAS) vise à imiter les oreilles de l'homme, oreilles qui possèdent des capacités à discerner, en écoutant un concert, les partitions jouées individuellement par chacun des instruments. Dans notre cas, les oreilles sont remplacées par des capteurs, la partition musicale est remplacée par les signaux mesurés et les instruments de musique sont remplacés par la structure à surveiller (Antoni 2005).

L'introduction de la SAS pour surveiller l'état de santé d'un système ou d'une structure montre le fort impact du biomimétique dans notre quotidien. Dans ce cadre, nous allons utiliser les **deux** techniques que nous avons présentées au chapitre 3 : l'ACP et l'ACI. Ce chapitre est consacré à la méthode ACP.

4.2 Surveillance des systèmes et des structures par l'ACP

L'analyse en composantes principales est l'une des premières méthodes de la famille SAS à être utilisée dans le domaine de la surveillance de l'intégrité des systèmes. Les premiers travaux la concernant ont été développés par la communauté **FDI "Fault Detection and Isolation"** (Dunia et al. 1996). Par la suite Friswell and Inman (2000) ont étendu son champ d'application au SHM.

L'objectif de l'ACP est d'extraire une matrice de sources, une matrice de mélange et de séparation, connaissant seulement les observations. Comme au chapitre 3, l'ACP permet de répondre à cet objectif dans le cas où les sources sont supposées *gaussiennes iid* (indépendantes et identiquement distribuées). C'est une méthode de la SAS, où les sources sont supposées non corrélées (indépendance statistique au second ordre) :

Soit le modèle ACP introduit au chapitre 3 :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_{ACP} \mathbf{R}_{ACP} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{R}_{ACP} = \mathbf{W}_{ACP} \mathbf{Y} \quad (4.2)$$

où

$\mathbf{Y} = [\underline{\mathbf{y}}_1 \cdots \underline{\mathbf{y}}_i \cdots \underline{\mathbf{y}}_{n_y}]^T \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la matrice de mesures,

$\mathbf{R}_{ACP} = [\underline{\mathbf{r}}_1 \cdots \underline{\mathbf{r}}_i \cdots \underline{\mathbf{r}}_{n_y}]^T \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la matrice de sources, estimée par l'ACP,

$\mathbf{T}_{ACP} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice de mélange,

$\mathbf{W}_{ACP} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice de séparation,

n_y est le nombre de mesures,

N est le nombre d'échantillons.

Dans le cas de l'ACP, les sources sont aussi appelées **composantes principales**.

Selon le domaine d'application, l'ACP est connue sous le nom de la décomposition de Karhunen–Loève (Kosambi 1943), elle possède des liens très étroits avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD).

En effet, l'ACP revient à résoudre le problème aux valeurs propres de la matrice de covariance des mesures $\underline{\Sigma}_y$, tandis que la POD revient à calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice de mesures \mathbf{Y} . Les vecteurs propres de la matrice $\underline{\Sigma}_y$ sont égaux aux vecteurs singuliers gauches de la matrice \mathbf{Y} . D'où le lien entre l'ACP et la POD. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter les travaux de Wu et al. (2003) sur l'équivalence entre ces deux méthodes.

L'ACP est largement utilisée par la communauté **FDI** pour la détection et la localisation de défauts capteurs dans les systèmes industriels. Citons à titre d'exemple, les travaux menés au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (Harkat et al. 2006).

Afin de mieux positionner notre travail par rapport aux travaux de la communauté FDI et SHM, nous proposons dans un premier temps de décrire de manière plus détaillée, quelques méthodes de génération d'indicateurs de défaut à base d'ACP pour la surveillance des systèmes, nous appelons ces résidus **indicateurs de défauts**. Nous présenterons dans un deuxième temps, l'utilisation de l'ACP pour surveiller l'intégrité des structures.

4.2.1 Diagnostic des systèmes par l'ACP

Soit le modèle³ ACP suivant :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^T \mathbf{P} \quad (4.3)$$

où

$\mathbf{Z} = [\underline{z}_1 \cdots \underline{z}_i \cdots \underline{z}_{n_y}] \in \mathbb{R}^{N \times n_y}$ est la matrice des *composantes principales*,

$\mathbf{P} = [\underline{p}_1 \cdots \underline{p}_i \cdots \underline{p}_{n_y}] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice des vecteurs propres normalisés correspondant aux valeurs propres λ_i de la matrice de covariance des mesures $\underline{\Sigma}_y$, cette matrice est estimée par la relation (4.4) et décomposée en valeurs et vecteurs propres par l'équation (4.5)

$$\underline{\Sigma}_y = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \quad (4.4)$$

$$\underline{\Sigma}_y = \mathbf{P} \underline{\Lambda}_{\underline{\Sigma}_y} \mathbf{P}^T \quad (4.5)$$

³Ce modèle est différent de celui introduit dans les équations (4.1) et (4.2), mais en accord avec celui utilisé dans la majorité des travaux de la communauté FDI.

avec $\Lambda_{\Sigma_y} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_i \cdots \lambda_{n_y}) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice diagonale des valeurs propres, que nous ordonnons par ordre décroissant.

Partitionnons la matrice des valeurs propres, des vecteurs propres et des composantes principales :

$$\Lambda_{\Sigma_y} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{n_r \times n_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Lambda}_{(n_y - n_r) \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{P}}_{n_y \times n_r} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{n_y \times (n_y - n_r)}] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{Z} = [\hat{\mathbf{Z}}_{N \times n_r} \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{N \times (n_y - n_r)}] \quad (4.8)$$

où l'indice n_r correspond au nombre de composantes principales **retenues**, et il sera défini au § 4.3.

Les matrices $\hat{\Lambda}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Z}}$ sont appelées matrices des valeurs propres, des vecteurs propres et des composantes principales, associées à *l'espace principal*.

Les matrices $\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Z}}$ sont appelées matrices des valeurs propres, vecteurs propres et des composantes principales, associées à *l'espace résiduel*.

A l'instant k , les vecteurs $\hat{\mathbf{z}}(k)$ et $\tilde{\mathbf{z}}(k)$ sont définis de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{z}}(k) = [\hat{z}_1(k) \cdots \hat{z}_i(k) \cdots \hat{z}_{n_r}(k)] \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) = [\tilde{z}_{n_r}(k) \cdots \tilde{z}_i(k) \cdots \tilde{z}_{n_y - n_r}(k)] \quad (4.10)$$

Nous allons maintenant décrire quelques résidus développés dans la FDI, nous les nommons **indicateurs de défauts**.

Plusieurs indicateurs de défauts ont été développés pour le diagnostic des systèmes, notamment le test SPE (*Squared Prediction Error*), le test T_2 de Hotelling et l'indice T_H^2 de Hawkins (Tharrault 2008).

- **Indicateur de défaut SPE** (Tharrault 2008)

L'indicateur de défaut SPE (*Squared Prediction Error*) est associé à l'espace *résiduel*, à l'instant k , cet indicateur est donné par :

$$\begin{aligned} SPE(k) &= \underline{\mathbf{y}}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \underline{\mathbf{y}}(k) \\ &= \|\tilde{\mathbf{z}}(k)\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le système est considéré dans un état défaillant à l'instant k , si :

$$SPE(k) > \delta_\alpha^2 \quad (4.12)$$

où δ_α^2 est le seuil de détection du $SPE(k)$ déterminé théoriquement par (Box 1954).

- **Indicateur de défaut T^2 de Hotelling** (Tharrault 2008)

Cet indicateur est associé à l'espace *principal*. Il est calculé à partir des n_r premières composantes principales :

$$T^2(k) = \hat{\mathbf{z}}(k)^T \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{z}}(k) \quad (4.13)$$

Le système est considéré dans un état défaillant à l'instant k , si :

$$T^2(k) > T_\alpha^2 \quad (4.14)$$

où T_α^2 est un seuil de détection associé au résidu $T^2(k)$.

Lorsque le nombre d'échantillons N est grand, et pour un seuil de confiance α donné, le seuil de détection T_α^2 peut être approximé par une distribution du χ^2 avec n_r degrés de liberté (Tharrault 2008) :

$$T_\alpha^2 = \chi_{n_r, \alpha}^2 \quad (4.15)$$

- **Indicateur de défaut T_H^2 de Hawkins** (Tharrault 2008)

A l'inverse de l'indicateur de défaut de Hotelling qui traite les composantes principales, celui de Hawkins T_H^2 traite les composantes résiduelles, il est donné par :

$$T_H^2(k) = \tilde{\mathbf{z}}(k)^T \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}}(k) \quad (4.16)$$

A l'instant k , le système est dans un état défaillant, si :

$$T_H^2(k) > T_{H, \alpha}^2 \quad (4.17)$$

où $T_{H, \alpha}^2$ est un seuil de détection associé au résidu $T_H^2(k)$.

Lorsque le nombre d'échantillons N est grand, le seuil de détection peut être approximé, pour un seuil de confiance α donné, par une distribution du χ^2 avec $(n_y - n_r)$ degrés de liberté :

$$T_{H, \alpha}^2 = \chi_{(n_y - n_r), \alpha}^2 \quad (4.18)$$

- **Indicateur basé sur l'angle entre sous-espace**

Kano et al. (2001) ont proposé un indicateur de défaut basé sur le **calcul des angles** entre les vecteurs propres principaux de la matrice $\mathbf{\Lambda}_{\Sigma_y}$. Il est défini de la façon suivante :

$$A_i = 1 - \left| \left(\underline{\hat{\mathbf{p}}}_i^s \right)^T \underline{\hat{\mathbf{p}}}_i^d \right| \quad (4.19)$$

où $\underline{\hat{\mathbf{p}}}_i^s$, $\underline{\hat{\mathbf{p}}}_i^d$ sont respectivement le i ème vecteur propre de la matrice de covariance des mesures du système à l'état sain, et des mesures d'un système dans un état *inconnu*.

- **ACP robuste**

L'analyse en composantes principales est fondée sur le calcul de la matrice de covariance des mesures. Cependant l'estimation de cette matrice est sensible aux valeurs aberrantes, qui peuvent entraîner de fausses détections. Une valeur aberrante peut se produire durant une phase de démarrage, d'arrêt de fonctionnement d'un système, ou elle peut provenir des erreurs de mesures.

Pour remédier à la présence de valeurs aberrantes, des méthodes d'analyse en composantes principales **robustes** ont été développées (Tharrault et al. 2008), (Daszykowski et al. 2007) :

Ces méthodes peuvent être divisées selon trois approches (Tharrault et al. 2008) : la première rassemble les méthodes où l'on remplace la matrice de covariance par une estimation robuste de celle-ci. Dans ce cadre, nous pouvons citer l'estimateur MCD (*Minimum Covariance Determinant*) (Rousseeuw et al. 2006). Cet estimateur recherche les h observations d'une matrice de mesures (où le nombre h est fixé par l'utilisateur) qui possèdent une matrice de covariance ayant le plus petit déterminant possible. La présence de valeurs aberrantes augmente la variance des variables mesurées ; pour les rejeter, il faut isoler le déterminant de la matrice de covariance issu du calcul des h observations. Cette méthode présente deux inconvénients : d'une part, elle occasionne un important coût en calcul, d'autre part, elle dépend du paramètre de réglage h qui est *a priori* inconnu.

Une seconde approche utilise les projections révélatrices. Ces projections maximisent une mesure robuste de la dispersion des données afin d'obtenir des directions, sur lesquelles les données seront projetées (Croux and Ruiz-Gazen 2005).

La dernière approche consiste à minimiser une mesure robuste des distances orthogonales des observations au sous-espace résiduel de l'ACP (Maronna 2005).

Tharrault et al. (2008) ont utilisé la seconde approche citée pour développer une ACP robuste. Ils ont proposé un résidu combinant l'indicateur de défaut SPE et celui de Hotelling :

$$\eta(k) = \frac{T^2(k)}{\chi_{n_r, \alpha}^2} + \frac{SPE(k)}{\delta_\alpha^2} \quad (4.20)$$

Le système est considéré à l'état sain, si :

$$\eta(k) < \gamma^2(k) \quad (4.21)$$

$\gamma^2(k)$ est un seuil défini par Yue and Qin (2001).

- **ACP non linéaire**

Le modèle ACP présenté à l'équation (4.3) est un modèle linéaire, liant la matrice de mesures et la matrice des composantes principales à travers la matrice des vecteurs propres.

Dans le cas où les mesures correspondent à un comportement non linéaire, le modèle ACP n'est plus valable. Ainsi, des méthodes dites Analyse en Composantes Principales **Non Linéaires** (ACPNL) ont été proposées (Tibshirani 1992).

L'ACP à noyau est l'une des approches de l'ACPNL. Proche des méthodes appliquées dans le domaine des Machines à Support de Vecteurs (Schölkopf et al. 1998), l'ACP à noyau projette tout d'abord les mesures dans un espace de grande dimension via une fonction non linéaire. Les données obtenues après projection sont linéaire dans cet espace. Une ACP et par conséquent le calcul des composantes principales sont alors possibles.

Cho et al. (2005) ont utilisé l'ACP à noyau pour surveiller l'intégrité d'un système non isotherme. Les auteurs ont proposé un indicateur de défaut combinant l'indicateur de défaut SPE et celui de Hotelling.

4.2.2 Contrôle santé des structures par l'ACP

Nous présentons ici une revue de méthodes et applications, utilisant l'ACP pour surveiller l'intégrité des structures mécaniques.

Les méthodes de détection de l'endommagement sont appliquées à des *structures intelligentes* "SI", où la structure hôte est munie d'un réseau de capteurs et d'actionneurs. Cette diversité spatiale a conduit des chercheurs de la communauté SHM à utiliser l'ACP pour surveiller l'état de santé de la structure. L'utilisation de l'ACP dans ce cadre prend principalement deux formes : elle est utilisée pour générer directement des résidus indicateurs d'endommagement ou bien comme données d'apprentissage pour des méthodes de classification (réseau de neurones, machines à support de vecteurs).

Ainsi, la première application de l'ACP dans le cadre du SHM date des années 2000 (Friswell and Inman 2000), et elle concernait la détection de l'endommagement des capteurs (de type accélérométrique). Friswell and Inman (2000) ont proposé un résidu DI basé sur la comparaison des angles entre les vecteurs propres normalisés d'une structure à l'état sain \underline{p}_i^s et d'une structure dans l'état inconnu \underline{p}_i^u :

$$\cos \psi_i = \left(\underline{p}_i^s \right)^T \underline{p}_i^u, i = 1, \dots, n_y \quad (4.22)$$

$$\underline{DI} = \left[\psi_1 \cdots \psi_i \cdots \psi_{n_y} \right]^T \quad (4.23)$$

De Boe and Golinval (2003) ont utilisé le même résidu pour détecter le décollement d'un capteur piézoélectrique de la surface d'une plaque en acier.

Au lieu d'utiliser la matrice de covariance pour définir l'ACP, d'autres chercheurs ont utilisé la POD dans le cadre SHM et de l'identification structurale :

Vanlanduit et al. (2005) ont proposé d'utiliser la matrice des réponses fréquentielles. Cette matrice est construite à partir d'une seule réponse fréquentielle, mais issue de plusieurs essais de la structure à l'état sain, et pour différents états endommagés, les auteurs ont concaténé ces réponses dans une matrice, que nous notons $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N_f \times N_e}$, où N_f et N_e représentent respectivement le nombre de points fréquents et le nombre d'essais effectués.

Après une étape de réduction du nombre de valeurs singulières, les auteurs ont proposé le résidu suivant :

$$DI^i = \frac{s_i}{s}, i = 1 \cdots N_f \quad (4.24)$$

où

s_j et s sont définis par les relations suivantes :

$$s = \frac{1}{N_f \times N_e} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_e} [\mathbf{H}(i, j) - \mathbf{H}_1(i, j)]^2 \quad (4.25)$$

$$s_i = \frac{1}{(N_f - 1)} \sum_{i=1}^{N_f} [\mathbf{H}(i) - \mathbf{H}_1(i)]^2 \quad (4.26)$$

\mathbf{H}_1 est la matrice des réponses fréquentielles, obtenue après l'étape de réduction.

Vanlanduit et al. (2005) ont associé aux résidus $DI^i (i = 1 \cdots N_f)$, une distribution du χ^2 avec $(N_e - 1)$ degrés de liberté et un seuil de confiance de 95%.

Les auteurs ont appliqué cette méthode de détection sur plusieurs poutres en aluminium, les états sains proviennent de plusieurs poutres avec des dimensions légèrement différentes, et les états endommagés par des fissures de différentes longueurs.

4.3 Détermination du nombre de composantes principales

L'ACP est un outil puissant pour l'analyse des données. Comme, elle peut transformer l'espace des données en un espace de dimension inférieure, elle est très utilisée pour la *réduction de la taille du modèle* (4.3). De plus, le nombre n_r de composantes principales (voir équations (4.6) et (4.8)) est un paramètre clé dans le calcul des résidus et indicateurs présentés précédemment.

Pour sectionner le nombre composantes principales n_r , plusieurs règles ont été proposées. Dans ce cadre, nous pouvons citer : la méthode du pourcentage cumulé de la variance totale (PCV) (Malinowsk 1991), le pourcentage croisé (Wold 1978), la minimisation de la variance d'erreur de reconstruction (Qin and Dunia 1998).

Dans leur article, Valle et al. (1999) ont décrit de manière exhaustive les règles permettant définir le nombre de composantes principales.

Dans notre travail, nous avons choisi la méthode PCV. Cette méthode permet de sélectionner le nombre n_r de manière à ce que les composantes principales choisies conservent un certain pourcentage de la variance totale, ce pourcentage est ensuite comparé à un seuil que nous fixons à 98%.

Nous notons :

ϵ_i , la valeur propre normalisée :

$$\epsilon_i = 100 \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i} \quad (4.27)$$

ϵ_{ci} , la valeur propre normalisée et cumulée :

$$\epsilon_{ci} = \sum_{j=1}^i \epsilon_j, i = 1, \dots, n_y \quad (4.28)$$

PCV(n_r), le pourcentage cumulé de la variance :

$$\text{PCV}(n_r) = 100 \frac{\epsilon_{ci}}{\epsilon_{ci}}, 1, \dots, n_r \quad (4.29)$$

En fixant un seuil de 98%, par rapport au PCV(n_r), nous pouvons choisir le nombre n_r .

Le nombre n_r représente le nombre de valeurs propres **retenues** et donc des composantes principales.

4.4 Détection d'endommagement par l'ACP : Méthode proposée

Cette partie est consacrée au développement de notre méthode de détection de l'endommagement par l'ACP. Nous présentons la démarche pour réaliser cette méthode, puis nous allons l'analyser par rapport aux méthodes développées dans le cadre FDI et SHM, décrites aux § 4.2.1 et 4.2.2.

4.4.1 Caractéristique de fonctionnement

Comme toute méthode de détection, nous commençons par établir des **caractéristiques de fonctionnement** de la structure à l'état *sain* et d'une seconde structure, considérée dans un état *inconnu*.

Nous avons illustré expérimentalement au § 2.1.1.1, que la présence d'un endommagement dans une structure modifie sa réponse dynamique et donc sa matrice de mesures.

Nous notons $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ la matrice de mesures de la structure à l'**état sain**, et de la structure dans un **état inconnu**.

Pour définir notre méthode de détection, nous utilisons le modèle de séparation défini au chapitre 3 :

$$\mathbf{R}_{ACP}^s = \mathbf{W}_{ACP}^s \mathbf{Y}^s \quad (4.30)$$

$$\mathbf{R}_{ACP}^u = \mathbf{W}_{ACP}^u \mathbf{Y}^u \quad (4.31)$$

où

$\mathbf{R}_{ACP}^s, \mathbf{R}_{ACP}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ sont les matrices des composantes principales de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu.

$\mathbf{W}_{ACP}^s, \mathbf{W}_{ACP}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont les matrices de séparation de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu.

Au § 3.7.1, nous avons démontré que ces matrices sont obtenues par les relations suivantes :

$$\mathbf{W}_{ACP}^s = \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{\underline{y}^s}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P}^s)^T \quad (4.32)$$

$$\mathbf{W}_{ACP}^u = \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{\underline{y}^u}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P}^u)^T \quad (4.33)$$

Le couple $\{\mathbf{P}^s, \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{\underline{y}^s}}\}$ est la décomposition aux valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance $\Sigma_{\underline{y}^s}$ du vecteur de mesures \underline{y}^s de la structure à l'**état sain**. Tandis que le couple $\{\mathbf{P}^u, \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{\underline{y}^u}}\}$ est la décomposition aux valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance $\Sigma_{\underline{y}^u}$ du vecteur de mesures \underline{y}^u de la structure dans un **état inconnu**.

Notre méthode de détection de l'endommagement repose sur la comparaison d'une caractéristique de fonctionnement de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu. L'**écart** entre ces caractéristiques permet de définir un **résidu** indicateur d'endommagement. Dans le cas de la méthode de détection par l'ACP, nous notons cet indicateur DI_{ACP} .

Pour définir le résidu DI_{ACP} , nous avons choisi de travailler avec les matrices de **séparation** \mathbf{W}_{ACP}^s et \mathbf{W}_{ACP}^u comme façon de définir les caractéristiques de fonctionnement de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu.

4.4.2 Résidu indicateur d'endommagement

Nous souhaitons détecter un endommagement d'une structure dans un état inconnu, où *a priori* aucune information sur la présence ou non d'un endommagement n'est fournie. Nous disposons donc d'une base de référence (*état sain*) à laquelle la structure dans un état inconnu sera comparée.

Pour définir le résidu indicateur d'endommagement DI_{ACP} , nous nous basons sur le changement des sous-espaces engendrés par la matrice \mathbf{W}_{ACP}^u , comparés à ceux engendrés par la matrice \mathbf{W}_{ACP}^s .

Au préalable, nous rappelons quelques définitions issues de l'algèbre linéaire.

⋮ **Définition 4.1 : Décomposition aux valeurs singulières (SVD)** (Golub and Van Loan 1983)

⋮ Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ une matrice carrée **non symétrique**, alors il existe des matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} orthonormales telles que :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y}) \quad (4.34)$$

où

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{n_y} \geq 0$ sont appelées valeurs singulières,

Les matrices $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont appelées respectivement matrices des vecteurs singuliers gauches, des valeurs singulières et des vecteurs singuliers droits de la matrice \mathbf{A} .

⋮ **Définition 4.2 : Rang d'une matrice** (Golub and Van Loan 1983)

⋮ Soit σ_i , les valeurs singulières de la matrice \mathbf{A} ,

⋮ Si $\sigma_1 \geq \sigma_i \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{n_y} = 0$,

⋮ Alors, r est appelé le rang de la matrice \mathbf{A} .

Suivant les définitions 4.1 et 4.2, la SVD de la matrice \mathbf{A} s'écrit :

$$\mathbf{A} = [\bar{\mathbf{U}} \quad \bar{\bar{\mathbf{U}}}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}} & \mathbf{0}_{r \times n_y} \\ \mathbf{0}_{(n_y-r) \times n_y} & \bar{\bar{\mathbf{\Gamma}}} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{V}} \quad \bar{\bar{\mathbf{V}}}]^T \quad (4.35)$$

où

$\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{n_y \times r}$, $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n_y \times r}$, $\bar{\bar{\mathbf{U}}} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-r)}$, $\bar{\bar{\mathbf{V}}} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-r)}$,

$\bar{\bar{\mathbf{\Gamma}}} = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y-r}) \in \mathbb{R}^{(n_y-r) \times (n_y-r)}$.

Les matrices $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\bar{\mathbf{U}}}, \bar{\bar{\mathbf{V}}}$ satisfont une isométrie partielle (Golub and Van Loan 1983) :

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{n_y} \quad (4.36)$$

$$\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{I}_{n_r} \quad (4.37)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{U}}}^T \bar{\bar{\mathbf{U}}} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}^T \bar{\bar{\mathbf{V}}} = \mathbf{I}_{n_y-n_r} \quad (4.38)$$

Maintenant, définissons les sous-espaces engendrés par une matrice \mathbf{A} **non symétrique**, et les projections orthogonales les concernant. Nous les notons de la façon suivante (Meyer 2001) :

$R\{\mathbf{A}\}$ et $N\{\mathbf{A}\}$ sont l'espace image et l'espace noyau de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$,

$R\{\mathbf{A}^T\}$ et $N\{\mathbf{A}^T\}$ sont l'espace image et l'espace noyau de la transposée de la matrice \mathbf{A} ,

$\mathbf{P}_{R\{\mathbf{A}\}}$ la projection orthogonale dans l'espace image $R\{\mathbf{A}\}$,

$\mathbf{P}_{N\{\mathbf{A}\}}$ la projection orthogonale dans l'espace noyau $N\{\mathbf{A}\}$.

•• **Définition 4.3 :** *Sous-espaces engendrés par une matrice non symétrique et projections orthogonales* (Meyer 2001)

•• Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ une matrice carrée **non symétrique**, cette matrice engendre les sous-espaces suivants :

$$R\{\mathbf{A}\} = \{\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n_y}\} \quad (4.39)$$

$$R\{\mathbf{A}^T\} = \{\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n_y}\} \quad (4.40)$$

$$N\{\mathbf{A}\} = \{\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y} \mid \mathbf{A}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}_{n_y}\} \quad (4.41)$$

$$N\{\mathbf{A}^T\} = \{\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_y} \mid \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}_{n_y}\} \quad (4.42)$$

•• Les projections orthogonales de ces sous-espaces sont respectivement données par :

$$\mathbf{P}_{R\{\mathbf{A}\}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}^T \quad (4.43)$$

$$\mathbf{P}_{R\{\mathbf{A}^T\}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T \quad (4.44)$$

$$\mathbf{P}_{N\{\mathbf{A}\}=R\{\mathbf{A}^T\}^\perp} = \bar{\bar{\mathbf{V}}}\bar{\bar{\mathbf{V}}}^T \quad (4.45)$$

$$\mathbf{P}_{N\{\mathbf{A}^T\}=R\{\mathbf{A}\}^\perp} = \bar{\bar{\mathbf{U}}}\bar{\bar{\mathbf{U}}}^T \quad (4.46)$$

où \perp dénote le complément orthogonal.

Nous allons à présent utiliser ces définitions pour établir le résidu indicateur d'endommagement DI_{ACP} .

Remarquons que selon la définition des matrices de séparation $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^u$ (voir équations (4.32) et (4.33)), la *matrice des vecteurs singuliers* gauches est égale à la **matrice identité** :

$$\mathbf{U}^s = \mathbf{U}^u = \mathbf{I}_{n_y} \quad (4.47)$$

Par conséquent, aucune information ne pourra être tirée de la matrice des vecteurs singuliers gauches. Nous allons donc utiliser la matrice des **vecteurs singuliers droits** pour définir le résidu DI_{ACP} . Comme nous le verrons plus tard, les matrices de séparation $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^u$ sont inversibles, c.-à-d. que le rang $r = n_y$. De plus, nous avons noté au § 4.3, que l'ACP permet de réduire les données, donc les matrices de séparation $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^u$ peuvent se réécrire d'une autre manière :

Prenons la matrice de covariance $\underline{\Sigma}_{y^s}$. En fixant un pourcentage cumulé de la variance totale et un seuil, nous obtenons :

$$\underline{\Lambda}_{\underline{\Sigma}_{y^s}} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{n_r \times n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times n_y} \\ \mathbf{0}_{(n_y - n_r) \times n_y} & \tilde{\Lambda}_{(n_y - n_r) \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{P}^s = [\hat{\mathbf{P}}_{n_y \times n_r} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{n_y \times (n_y - n_r)}] \quad (4.49)$$

où

n_r est le nombre de valeurs propres retenues lors de l'étape de réduction,

Le couple $\{\mathbf{P}^s, \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{y^s}}\}$ est la décomposition aux valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance Σ_{y^s} .

Rappelons que la matrice de séparation s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{W}_{ACP}^s = \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_{y^s}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P}^s)^T \quad (4.50)$$

En insérant les équations (4.48) et (4.49) dans celle de (4.50), nous obtenons :

$$\mathbf{W}_{ACP}^s = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{\Lambda}}_{n_r \times n_r}]^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0}_{n_r \times n_y} \\ \mathbf{0}_{(n_y - n_r) \times n_y} & [\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{(n_y - n_r) \times (n_y - n_r)}]^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{n_y \times n_r} & \tilde{\mathbf{P}}_{n_y \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix}^T \quad (4.51)$$

L'équation (4.51) est la SVD de la matrice \mathbf{W}_{ACP}^s , et nous la récrivons sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ACP}^s &= \mathbf{I}_{n_y \times n_y} \mathbf{\Gamma}^s (\mathbf{V}^s)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y \times n_r} & \mathbf{I}_{n_y \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^s & \mathbf{V}_2^s \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{\Gamma}_1^s \mathbf{V}_1^s + \mathbf{\Gamma}_2^s \mathbf{V}_2^s = \mathbf{W}_{ACP1}^s + \mathbf{W}_{ACP2}^s \end{aligned} \quad (4.52)$$

où :

$\mathbf{\Gamma}_1^s = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_r}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $\mathbf{V}_1^s = [\underline{\mathbf{v}}_{11}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1i}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1n_r}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$, $\mathbf{W}_{ACP1}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits et la matrice de séparation, associées à l'espace principal de la structure à l'état sain.

$\mathbf{\Gamma}_2^s = \text{diag}(\sigma_{n_r+1} \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y}) \in \mathbb{R}^{(n_y - n_r) \times (n_y - n_r)}$, $\mathbf{V}_2^s = [\underline{\mathbf{v}}_{2(n_r+1)}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2i}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2n_y}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y - n_r)}$, $\mathbf{W}_{ACP2}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits et la matrice de séparation, associées à l'espace résiduel de la structure à l'état sain.

De la même façon, nous récrivons la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP}^u sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ACP}^u &= \mathbf{I}_{n_y \times n_y} \mathbf{\Gamma}^u (\mathbf{V}^u)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y \times n_r} & \mathbf{I}_{n_y \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^u & \mathbf{V}_2^u \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{W}_{ACP1}^u + \mathbf{W}_{ACP2}^u \end{aligned} \quad (4.53)$$

où

$\mathbf{\Gamma}_1^u = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_r}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $\mathbf{V}_1^u = [\underline{\mathbf{v}}_{11}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1i}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1n_r}^u] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$, $\mathbf{W}_{ACP1}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits et la matrice de séparation, associées à l'espace principal de la structure dans un état inconnu.

$\Gamma_2^u = \text{diag}(\sigma_{n_r+1} \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y}) \in \mathbb{R}^{(n_y-n_r) \times (n_y-n_r)}$, $\mathbf{V}_1^u = [\underline{v}_{2(n_r+1)}^u \cdots \underline{v}_{2i}^u \cdots \underline{v}_{2n_y}^u] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-n_r)}$, $\mathbf{W}_{\text{ACP2}}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits et la matrice de séparation, associées à l'espace résiduel de la structure dans un état **inconnu**.

Le résidu que nous proposons est basé sur le calcul du **sinus** du vecteur d'angles entre le sous-espace image de la matrice $(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T$ et celui de la matrice $(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T$, nous notons ce vecteur d'angles : $\underline{\varphi}[R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}]$.

Notons que ce vecteur d'angles est aussi appelé **vecteur d'angles principal** (Golub and Van Loan 1983).

Le sinus du vecteur d'angles $\underline{\varphi}[R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}]$ est défini par (Davis and Kahan 1970) :

$$\begin{aligned} \left\| \sin \underline{\varphi}[R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}] \right\| &= \left\| \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}^\perp} \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}} \right\| \\ &= \left\| \left(\mathbf{I}_{n_y} - \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}} \right) \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}} \right\| \end{aligned} \quad (4.54)$$

Remarque 4.1

Comme nous sommes dans un espace de Hilbert, le choix d'une norme est arbitraire. Nous avons choisi alors de travailler avec la **norme 2**.

De l'équation (4.44), le sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}$ et le sous-espace image $R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}$ s'écrit :

$$\left\| \sin \underline{\varphi}[R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}] \right\|_2 = \left\| [\mathbf{I}_{n_r} - \mathbf{V}_1^s (\mathbf{V}_1^s)^T] \mathbf{V}_1^u (\mathbf{V}_1^u)^T \right\|_2 \quad (4.55)$$

Ainsi toute déviation de l'état sain de la structure, se matérialisera par des variations du sinus du vecteur d'angles défini dans l'équation (4.55). Nous proposons ainsi le résidu DI_{ACP} suivant :

Proposition 4.1 : Résidu indicateur d'endommagement (Hajrya et al. 2011a)

Soit une structure intelligente munie de n_y capteurs, la détection de l'endommagement de cette structure peut être réalisée par le résidu suivant :

$$\text{DI}_{\text{ACP}} = \frac{\left\| \sin \underline{\varphi}[R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s)^T\}] \right\|_2}{n_r} \quad (4.56)$$

où

n_r est le nombre de composantes principales retenues.

L'introduction de la norme 2 dans le résidu proposé, permet de **quantifier** la présence d'un endommagement en lui associant une valeur numérique **bien déterminée**. De plus, ce dernier est normalisé par n_r .

En absence de perturbations et lorsque la structure dans un état inconnu est en réalité à l'état **sain**, le résidu DI_{ACP} est **nul**. Dans le cas contraire, la structure est à l'état endommagé. Or, en pratique, nous sommes en présence de perturbations, telles que le **bruit de mesure** (qualifié d'environnemental), et **les vibrations du support**. Donc le résidu DI_{ACP} n'est jamais nul. Par conséquent, il faut rendre le résidu DI_{ACP} **robuste** aux perturbations environnementales. C'est l'objet de la section suivante.

4.4.3 Résidu robuste indicateur d'endommagement

L'un des objectifs de notre thèse est de proposer des DI indépendants du modèle mécanique de la structure à surveiller. *Le but est d'appliquer ces résidus sur des structures complexes*. De plus, nous avons cherché à développer des résidus robustes, nécessitant le moins possible de connaissances *statistiques a priori* sur les perturbations et les bruits environnants.

C'est pour quoi, la démarche présentée ici pour rendre le résidu robuste n'est fondée sur **aucune hypothèse** sur la nature des perturbations. Cette démarche s'inspire des travaux de Wedin (1972).

L'objectif de Wedin était d'étudier le changement des sous-espaces images d'une matrice \mathbf{A} , non symétrique, c.-à-d. $R\{\mathbf{A}\}, R\{\mathbf{A}^T\}$, et cela, par le biais de la SVD.

L'intitulé des travaux de Wedin s'appelait : ***Perturbation Bounds in Connection with Singular value Decomposition.***

Nous allons maintenant aborder la façon entreprise pour élaborer la robustesse du résidu DI_{ACP} . Pour définir cette robustesse, un intervalle de confiance doit lui être associé. Cet intervalle est défini par une *borne supérieure* et *inférieure*. Sachant que le résidu DI_{ACP} est **positif**, la robustesse du résidu revient à lui associer la *borne supérieure*.

Notre démarche est réalisée en deux étapes, une proposition et une prise de décision. Les deux premières étapes nous permettent d'utiliser les travaux de Wedin.

- ***Première étape : comparaison entre deux essais de la structure intelligente à l'état sain.***

Considérons la variation $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s$ que la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP}^s subit à cause des perturbations. Pour décrire cette variation $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s$, nous effectuons **un second** essai sur la structure à **l'état sain**, nous appliquons la méthode ACP (équation (4.32)), et nous déterminons la nouvelle matrice de séparation, que nous notons $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s$.

La matrice $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s$ est définie par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s = \mathbf{W}_{ACP}^s + \delta \mathbf{W}_{ACP}^s \quad (4.57)$$

La SVD de la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y \times n_r} & \mathbf{I}_{n_y \times (n_y - n_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{r}}_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1^s & \tilde{\mathbf{v}}_2^s \end{bmatrix}^T = \tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s + \tilde{\mathbf{W}}_{ACP2}^s \quad (4.58)$$

Nous définissons les matrices résiduelles $\mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{21}$ suivantes (Wedin 1972) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{v}}_1^s - \tilde{\mathbf{u}}_1^s \tilde{\mathbf{r}}_1^s = \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{v}}_1^s - \tilde{\mathbf{u}}_1^s \left[(\tilde{\mathbf{u}}_1^s)^T \tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{v}}_1^s \right] \\ &= -\delta \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{v}}_1^s \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= (\mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{u}}_1^s - \tilde{\mathbf{u}}_1^s \tilde{\mathbf{r}}_1^s = (\mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{u}}_1^s - \tilde{\mathbf{v}}_1^s \left[(\tilde{\mathbf{v}}_1^s)^T (\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{u}}_1^s \right] \\ &= -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{u}}_1^s \end{aligned} \quad (4.60)$$

Rappelons que d'après la définition des matrices de séparation, la matrice des vecteurs singuliers gauches est égale à la matrice identité. La matrice résiduelle \mathbf{R}_{21} est alors donnée par :

$$\mathbf{R}_{21} = -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \quad (4.61)$$

Prenons la norme 2 de chacune des matrices résiduelles $\mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{21}$:

$$\|\mathbf{R}_{11}\|_2 = \|\delta \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{v}}_1^s\|_2 = \left\| \delta \mathbf{W}_{ACP}^s \mathbf{P}_{R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)^T\}} \right\|_2 \quad (4.62)$$

$$\|\mathbf{R}_{21}\|_2 = \|(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \mathbf{I}_{n_y \times n_r}\|_2 = \left\| \mathbf{P}_{R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s\}} \delta \mathbf{W}_{ACP}^s \right\|_2 \quad (4.63)$$

où $\mathbf{P}_{R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s\}}$ et $\mathbf{P}_{R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)^T\}}$ sont les projections orthogonales de la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s$ et de sa transposée " voir équations (4.43) et (4.44) ".

Définissons le nombre positif ε :

$$\varepsilon = \max(\|\mathbf{R}_{11}\|_2, \|\mathbf{R}_{21}\|_2) \quad (4.64)$$

Ce nombre représente l'**amplitude** de l'écart entre 2 essais de la structure à l'état sain.

- **Seconde étape** : élaboration de la borne.

Nous allons maintenant utiliser le théorème de Wedin que nous énonçons :

Théorème 4.1 : Théorie de Wedin (Wedin 1972)

Si $\exists \eta \geq 0$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\eta \leq \sigma_{\max}(\mathbf{W}_{ACP2}^s) = \|\mathbf{W}_{ACP2}^s\|_2 \quad (4.65)$$

$$\eta + \delta \leq \sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s) = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^{s^{-1}}\|_2} \quad (4.66)$$

alors :

$$\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1 = \|\sin \underline{\theta}[R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s\}, R\{\mathbf{W}_{ACP1}^s\}]\|_2 \leq \frac{\varepsilon + \eta \widetilde{\text{DI}}_{ACP}^2}{\eta + \delta} \quad (4.67)$$

$$\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^2 = \|\sin \underline{\varphi}[R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^s)^T\}]\|_2 \leq \frac{\varepsilon + \eta \widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1}{\eta + \delta} \quad (4.68)$$

où

Le nombre ε est défini dans l'équation (4.64).

$\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1$ est la norme 2 associée au sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s\}$ et sous-espace $R\{\mathbf{W}_{ACP1}^s\}$, il est défini comme suit (Davis and Kahan 1970) :

$$\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1 = \|\sin \underline{\theta}[R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s\}, R\{\mathbf{W}_{ACP1}^s\}]\|_2 = \left\| [\mathbf{I}_{n_y} - \mathbf{U}^s(\mathbf{U}^s)^T] \mathbf{U}^u(\mathbf{U}^u)^T \right\|_2 \quad (4.69)$$

$\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^2$ est la norme 2 associée au sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)^T\}$ et le sous-espace $R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^s)^T\}$, il est défini de la même manière que dans l'équation (4.54), en remplaçant la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP1}^u par la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s$.

Comme la matrice des vecteurs singuliers gauches des matrices de séparation est égale à la matrice identité, le terme $\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1 = 0$.

Remarque 4.2

Le résidu DI_{ACP} que nous avons défini " voir proposition 4.1 " repose sur le calcul du sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^u)^T\}$ et le sous-espace $R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^s)^T\}$. Cela revient à calculer les angles entre les vecteurs singuliers droits de la matrice \mathbf{W}_{ACP1}^s et \mathbf{W}_{ACP1}^u (voir équation (4.54)). L'énoncé du théorème de Wedin permet d'établir une borne au résidu DI_{ACP} , et cela par le biais de l'inégalité (4.68).

Le terme $\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1$ est nul, cependant, nous lui avons associé une inégalité définie par l'équation (4.67), car dans la seconde méthode de détection que nous allons présenter au chapitre 5, nous allons faire appel une seconde fois au théorème de Wedin. Et pour éviter les redites, nous avons préféré décrire cette inégalité, même si le terme $\widetilde{\text{DI}}_{ACP}^1 = 0$.

Maintenant que le théorème de Wedin a été présenté, nous allons établir notre proposition pour rendre le résidu DI_{ACP} robuste :

Proposition 4.2 : Borne proposée pour le résidu (Hajrya et al. 2011a)

Rappelons le résidu DI_{ACP} défini à l'équation (4.56) :

$$DI_{ACP} = \frac{\|\sin \varphi [R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACP1}^s)^T\}]\|_2}{n_r} \quad (4.70)$$

où n_r est le nombre de composantes principales retenues.

Remarquons que ce résidu est calculé à partir de la matrice de séparation **principale** \mathbf{W}_{ACP1}^s de la structure à l'état sain et \mathbf{W}_{ACP1}^u de la structure dans un état inconnu, tandis que le terme \widetilde{DI}_{ACP}^2 est calculé à partir de la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP1}^s de la structure à l'état sain et $\widetilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s$ de la structure à l'état sain, mais issu d'un **second** essai.

Comme la matrice des vecteurs singuliers des matrices de séparation est égale à la matrice identité, le terme $\widetilde{DI}_{ACP}^1 = 0$, donc le terme \widetilde{DI}_{ACP}^2 (voir équation (4.68)) satisfait l'inégalité suivante :

$$\widetilde{DI}_{ACP}^2 \leq \frac{\varepsilon}{\eta + \delta} \quad (4.71)$$

Pour rendre l'inégalité (4.71) stricte, nous posons :

$$\eta + \delta < \sigma_{\min}(\widetilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s) \quad (4.72)$$

La **borne** que nous proposons est définie par :

$$\beta_{ACP} = \frac{\varepsilon}{(\eta + \delta)n_r} \quad (4.73)$$

- **Troisième étape : Prise de décision.**

Le résidu DI_{ACP} et la borne β_{ACP} qui lui est associée sont quantifiés numériquement, nous pouvons donc calculer un rapport de détection R_{ACP} , qui se calcule par la relation suivante :

$$R_{ACP} = \frac{DI_{ACP}}{\beta_{ACP}} \quad (4.74)$$

La décision sur la présence ou non d'un endommagement est donnée par :

Si $R_{ACP} > 1$

Alors la structure dans l'état inconnu est à l'état **endommagé**,

Sinon la structure dans l'état inconnu est à l'état **sain**.

Fin

Remarque 4.3

L'équation (4.74) montre que le rapport de détection est d'autant meilleur que la borne β_{ACP} est petite.

D'après l'équation (4.73), nous constatons que la borne dépend de trois paramètres : ε , n_r et $\eta + \delta$. Ils représenteront alors les paramètres de **réglage** de la borne :

- ✓ Une fois le pourcentage de la variance totale défini, le nombre de composantes principales n_r reste fixe,
- ✓ Rappelons que ε est défini par les relations suivantes :

$$\|\mathbf{R}_{11}\|_2 = \|\delta \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s\|_2 \quad (4.75)$$

$$\|\mathbf{R}_{21}\|_2 = \left\| (\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \mathbf{I}_{n_y \times n_r} \right\| \quad (4.76)$$

$$\varepsilon = \max(\|\mathbf{R}_{11}\|_2, \|\mathbf{R}_{21}\|_2) \quad (4.77)$$

où $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s = \tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s - \mathbf{W}_{ACP}^s$.

Une fois l'ACP appliquée aux matrices de mesures, les matrices de séparation $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s$, \mathbf{W}_{ACP}^s seront fixées. Ainsi donc le nombre ε est figé.

Le seul paramètre qui peut être réglé est le nombre $\eta + \delta$. Plus ce paramètre est grand (en respectant l'inégalité (4.66)), plus la borne est petite, et plus le rapport de détection est grand.

4.5 Discussion sur le choix du résidu proposé

Examinons, ici, le choix du résidu et de la borne que nous avons proposés, par rapport à ceux développés dans la littérature (présentés aux § 4.2.1 et 4.2.2). Commençons par l'examen du résidu DI_{ACP} d'un point de vue FDI (§ 4.2.1).

En analysant les équations des indicateurs de défauts équations "(4.11), (4.13) (4.16), (4.20)", nous remarquons que ces derniers se basent seulement sur l'état du système dans un état inconnu et que les tests "équations (4.12), (4.14), (4.17) et (4.21)" effectués sur ces indicateurs sont **séquentiels**. Ils sont calculé à chaque instant k .

Dans notre travail, la situation est différente, et cela pour deux raisons. D'une part, l'élaboration du résidu DI_{ACP} est basée sur la comparaison entre des caractéristiques de fonctionnement de *deux états : structure à l'état sain et une structure dans l'état inconnu*. D'autre part, les endommagements étudiés dans notre travail sont considérés comme **permanents**, et les méthodes que nous développons s'effectuent en **temps différé**.

Des travaux antérieurs ont proposé un indicateur de défaut basé sur le calcul d'angle entre vecteurs propres (voir équation (4.19)), le résidu DI_{ACP} que nous avons développé repose lui aussi sur cette approche. Cependant, en le comparant au résidu proposé par Kano et al. (2001), nous remarquons que les auteurs cherchent à travers leur résidu, à détecter des défauts pouvant se produire à n'importe quel instant k , tandis que dans notre travail, nous nous intéressons à des endommagements permanents sur la structure.

Concernant la borne que nous avons proposée, elle est ajustable et ne fait appel à **aucune hypothèse statistique**. La démarche suivie pour la définir est **analytique**, et est régie par le théorème de Wedin (1972). D'ailleurs, dans le contexte FDI, Ragot et al. (2011) ont utilisé une théorie similaire, celle-ci, traite les *perturbations des valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance*.

D'un point de vue SHM (§ 4.2.2), le résidu que nous avons proposé présente des similarités avec celui proposé par Friswell and Inman (2000), mais notre résidu se différencie par le fait qu'il est **scalaire**.

L'approche proposée par Vanlanduit et al. (2005) tient compte de la dispersion entre structures lors de la fabrication. Les auteurs considèrent plusieurs structures saines, mais avec des dimensions légèrement différentes (erreur dans le processus de fabrication des structures). Cette approche peut aussi être introduite dans notre démarche de détection, en effectuant une moyenne sur les différentes structures.

4.6 Application aux structures composites

4.6.1 Détection de l'endommagement

Dans cette section, nous procédons à l'application de notre méthode de détection dans le cadre des structures composites, présentées au chapitre 2.

Cette méthode est régie par le résidu DI_{ACP} (voir proposition 4.1), et par la borne β_{ACP} (voir proposition 4.2). Cette borne a été établie sur deux essais de la structure à l'état sain.

Effectuer deux essais sur la structure à l'état sain ne suffit pas pour définir une borne robuste pour le résidu DI_{ACP} . A cet effet, nous avons effectué $n = 13$ essais supplémentaires sur la structure à l'état **sain** (plaque composite saine et lame 2 saine). Le choix de ce nombre d'essais a été arbitraire.

Pour résumer la méthode de détection proposée, nous l'avons décrite dans l'algorithme 4.1, et qui a été codé avec Matlab R2007b.

Algorithme 4.1 : Algorithme de détection de l'endommagement par la méthode ACP**Etape 1 : essais sur la structure à l'état sain et dans l'état inconnu**

- 1.1. Effectuer un premier essai de la structure à l'état **sain**,
- 1.2. Effectuer n autres essais de la structure à l'état **sain**,
- 1.3. Effectuer un seul essai de la structure dans l'état **inconnu**,
- 1.4. Construire la matrice de mesures de la structure à l'état sain \mathbf{Y}^s ,
- 1.5. Construire les matrices de mesures pour les n essais de la structure à l'état sain $\tilde{\mathbf{Y}}_i^s, i = 1 \dots n_1$,
- 1.6. Construire la matrice de mesures de la structure dans l'état inconnu \mathbf{Y}^u .

Etape 2 : calcul du résidu DI_{ACP}

- 2.1. Appliquer une ACP à la matrice de mesures \mathbf{Y}^s selon l'équation (4.30),
- 2.2. Calculer la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP}^s selon l'équation (4.32),
- 2.3. Appliquer une SVD à \mathbf{W}_{ACP}^s selon l'équation (4.52), et en fixant le seuil à 98% ,
- 2.4. Appliquer une ACP à la matrice de mesures \mathbf{Y}^u selon (4.31),
- 2.5. Calculer la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP}^u selon l'équation (4.33),
- 2.6. Appliquer une SVD à la matrice \mathbf{W}_{ACP}^u selon l'équation (4.53), et en fixant le seuil à 98% ,
- 2.7. Calculer le résidu DI_{ACP} selon la proposition 4.1.

Etape 3 : calcul de la borne $\mu_{B,ACP}$ associée au résidu DI_{ACP}

- 3.1 Reprendre le calcul 2.3
- 3.2 **Pour** $i=1 : n$

Appliquer une ACP à chacune des matrices $\tilde{\mathbf{Y}}_i^s$ selon l'équation (4.30),
 Calculer les matrices de séparation $(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s)^i, i = 1 \dots n$, selon l'équation (4.32),
 Appliquer une SVD à la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s$ selon l'équation (4.52), et en fixant le seuil à 98%,
 Calculer la variation $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s$ par la relation suivante :

$$\delta \mathbf{W}_{ACP}^s = \mathbf{W}_{ACP}^s - \tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s{}^i$$

Calculer la borne $\mathcal{B}_{i,ACP}$ selon l'équation (4.73).

Fin

- 3.3 Calculer la moyenne de la borne $\mu_{B,ACP}$

$$\mu_{B,ACP} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{i,ACP}$$

- 3.4 Calculer l'écart type de la borne $\sigma_{B,ACP}$
- 3.5 Calculer l'intervalle de confiance à 95% de certitude $[Inf_{ACP} \quad Sup_{ACP}]$:

$$Sup_{ACP} = \mu_{B,ACP} + \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sigma_{B,ACP}$$

$$Inf_{ACP} = \mu_{B,ACP} - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sigma_{B,ACP}$$

Etape 4 : Prise de décision sur la présence ou non d'un endommagement

$$\text{Si } R_{ACP} = \frac{DI_{ACP}}{Inf_{ACP}} > 1 \text{ et } R_{ACP} = \frac{DI_{ACP}}{Sup_{ACP}} > 1$$

Alors la structure dans un état inconnu est dans un état **endommagé**,
Sinon la structure est à l'état **sain**.

Fin

L'algorithme 4.1 a été appliqué aux plaques composites et à la lame 2 (lame composite *antennaire*) pour détecter respectivement l'endommagement de type **impact** (figure 2.4) et le **décollement du réseau d'antennes** (figure 2.24).

Nous rappelons que pour obtenir les matrices de mesures, nécessaires à l'extraction des matrices de séparation, nous avons choisi dans le cas des plaques composites, le PZT 7 en mode actionneur et le PZT 2 dans le cas de la lame 2. Le nombre de capteurs dans le cas des plaques composites et de la lame antennaire est respectivement égal à : $n_y = 8$ et $n_y = 6$.

Les mesures ont été effectuées pour des températures comprises entre $T=18^\circ\text{C}$ et $T=24^\circ\text{C}$.

Au § 4.4.2, nous avons fait l'hypothèse que les valeurs singulières des matrices de séparation sont nulles. Les figures 4.1 et 4.2 montrent respectivement les valeurs propres normalisées et cumulées de la matrice de covariance des mesures (voir équation (4.27)), prises sur la plaque composite saine/endommagée et sur la lame antennaire saine/endommagée. *Ces figures montrent que dans les quatre cas considérés, les valeurs propres et par conséquent les valeurs singulières des matrices de séparation sont toutes différentes de zéro (voir l'équivalence entre les équations (4.51 et (4.52))). Ceci justifie notre hypothèse.*

De plus, nous remarquons d'après ces figures, que lorsque nous fixons un seuil égal à 98%, on ne peut réduire le nombre de composantes principales des matrices de séparation: dans le cas des plaques composites $n_r = n_y = 8$, pour la lame antennaire $n_r = n_y = 6$. A partir de cette constatation, les matrices de séparation considérées pour définir la méthode de détection par l'ACP s'écrivent :

$$\mathbf{W}_{\text{ACP2}}^s = \tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP2}}^s = \mathbf{0}_{n_y \times n_y}, \mathbf{W}_{\text{ACP1}}^s = \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, \tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP1}}^s = \tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP}}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}.$$

D'après les équations (4.65) et (4.66), les nombres η et δ valent respectivement zéro et $\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP}}^s)/2$.

La figure 4.3 montre à titre d'exemple la projection des vecteurs singuliers droits de la matrice $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^u$ dans un plan, dans le cas de la plaque endommagée. Nous constatons qu'il existe une différence entre ces projections. Donc, le choix de notre proposition 4.1 est justifié.

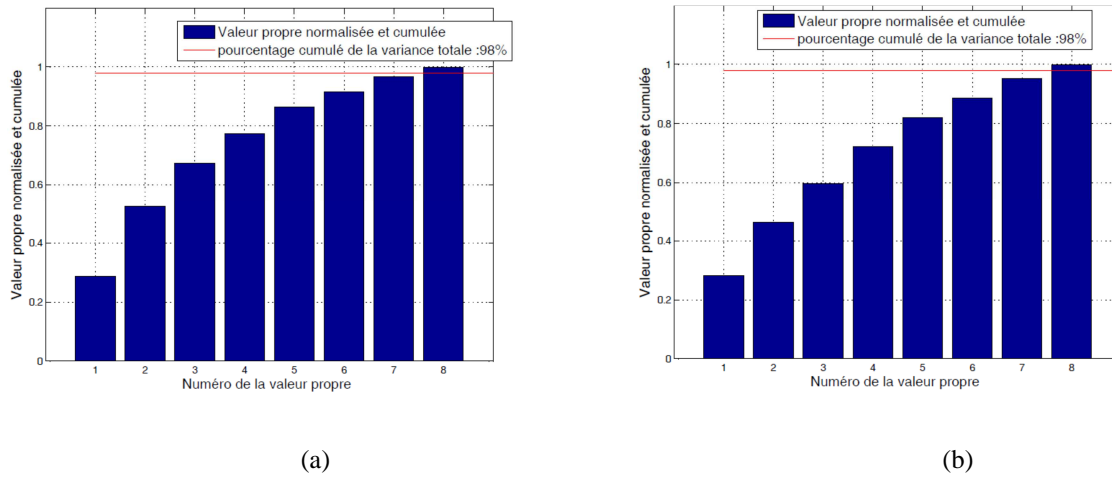


Figure 4.1 : Test de réduction du nombre de composantes principales :

(a) plaque composite saine, (b) plaque composite endommagée

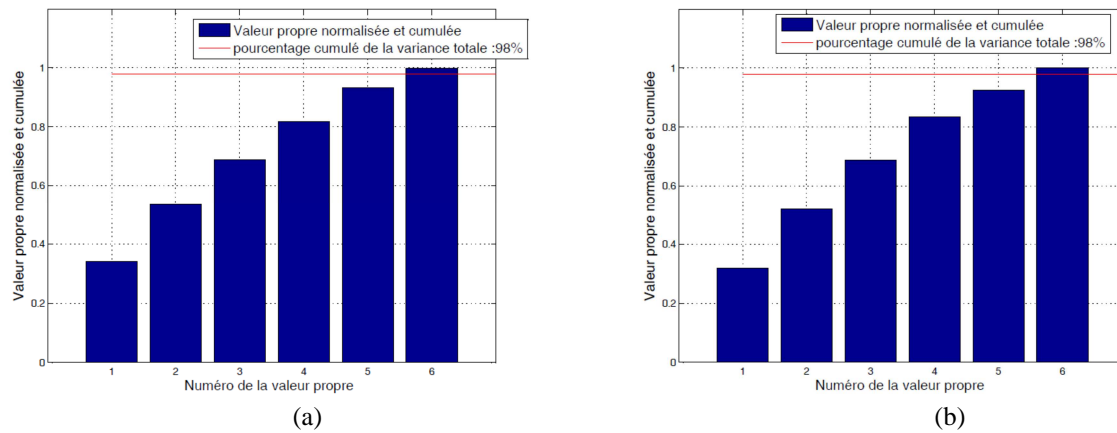
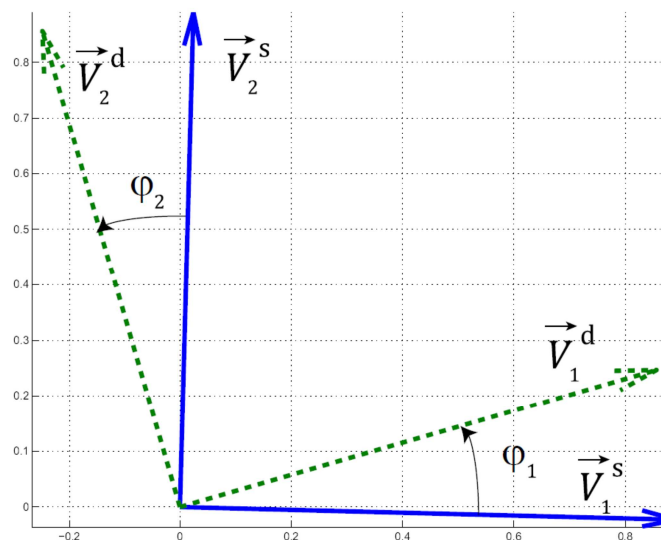


Figure 4.2 : Test de la réduction ou non du nombre de composantes principales :

(a) lame 2 saine, (b) lame 2 endommagée

Figure 4.3 : Angles entre vecteurs singuliers droits de la matrice \mathbf{W}_{ACP}^s et \mathbf{W}_{ACP}^d : plaque endommagée

Le tableau 4.1 montre les résultats de la détection de l'endommagement de type **impact** et du **décollement du réseau d'antennes**.

Dans le cas de l'endommagement de type *impact*, le résidu $DI_{ACP} = 0.33$, il est bien supérieur à la borne $Inf_{ACP} = 0.008$ et à la borne $Sup_{ACP} = 0.01$, d'ailleurs, le rapport de détection $\frac{DI_{ACP}}{Inf_{ACP}} = 41.25$ et $\frac{DI_{ACP}}{Sup_{ACP}} = 33$.

Dans ce tableau, nous remarquons que pour le *décollement du réseau d'antennes*, le résidu $DI_{ACP} = 0.42$, et il est supérieur à la borne $Inf_{ACP} = 0.03$ et à la borne $Sup_{ACP} = 0.038$, d'ailleurs, le rapport de détection $\frac{DI_{ACP}}{Inf_{ACP}} = 14$ et $\frac{DI_{ACP}}{Sup_{ACP}} = 11.05$.

Tableau 4. 1 : Détection de l'endommagement des deux structures composite par la méthode ACP

	DI_{ACP}	$\mu_{B,ACP}$	$\sigma_{B,ACP}$	Inf_{ACP}	Sup_{ACP}
<i>Plaque dans un état endommagé</i>	0.33	0.009	0.001	0.008	0.01
<i>Lame 2 dans un état endommagé</i>	0.42	0.0347	0.005	0.03	0.038

Ces calculs permettent d'affirmer que l'impact de la plaque et le décollement du réseau d'antennes de la lame 2 ont bien été détectés par la méthode ACP.

Remarquons que les valeurs des résidus DI_{ACP} obtenus pour les deux types d'endommagements sont différentes, nous pouvons donc envisager ces résidus comme l'entrée d'un réseau de classification. La sortie de ce réseau permettra d'associer un type à l'endommagement détecté.

4.6.2 Localisation de l'endommagement

Nous proposons dans cette section de localiser l'endommagement de type **impact et l'endommagement du capteur PZT 1** (figure 2.13). *Cette localisation repose sur le fait qu'il existe des capteurs plus sensibles à la présence d'un endommagement que d'autres.*

Dans l'étape de détection, le résidu DI_{ACP} a été calculé à partir de la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACP}^s de la structure à l'état sain et de la matrice \mathbf{W}_{ACP}^u de la structure dans un état inconnu. Maintenant que l'endommagement a bien été détecté, nous notons la matrice \mathbf{W}_{ACP}^u par \mathbf{W}_{ACP}^d .

Rappelons que ces matrices prennent en compte tout les capteurs de la SI : $\mathbf{W}_{ACP}^s, \mathbf{W}_{ACP}^d \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$. Dans le cas des plaques composites, $n_y = 8$.

Afin d'isoler les capteurs sensibles à la présence de l'endommagement, nous proposons de retirer **un à un** les capteurs que comportent les matrices $\mathbf{W}_{ACP}^s, \mathbf{W}_{ACP}^d$, puis de calculer le résidu DI_{ACP} correspondant à ce retrait. Les trois résidus *ayant la plus faible valeur sont utilisés pour trianguler l'endommagement*. L'algorithme 4.2 permet de résumer la procédure de localisation.

Cette procédure de localisation a été appliquée pour trouver une zone structurale où se trouve l'impact sur la plaque composite, les résultats sont illustrés à la figure 4.4. Nous constatons que lorsque nous retirons un à un les capteurs, les trois résidus DI_{ACP}^i les plus faibles correspondent aux capteurs PZT 1, 2 et 4. La figure 4.5 montre la localisation de cet impact par **triangulation** de ces 3 capteurs.

Algorithme 4.2 : Algorithme de localisation de l'endommagement par la méthode ACP

Etape 1 : essais sur la structure à l'état sain et de la structure à l'état endommagé

- 1.1. Reprendre la matrice de mesures de la structure à l'état sain (étape 1.4 de l'algorithme 4.1),
- 1.2. Reprendre la matrice de mesures de la structure à l'état endommagé (étape 1.6 : cette structure était dans un état **inconnu** avant détection de l'endommagement),

Etape 2 : calcul du résidu DI_{ACP}

Pour $i=1 : n_y$

Retirer un capteur des matrices \mathbf{Y}^s et \mathbf{Y}^u

Calculer le résidu DI_{ACP}^i , en reprenant l'étape 2 de l'algorithme 4.1

Fin

Etape 3 : Analyse des résultats

- 3.1 Construire le vecteur $\underline{DI}_{ACP} = [DI_{ACP}^1 \cdots DI_{ACP}^i \cdots DI_{ACP}^{n_y}]^T$
- 3.2 Trianguler l'endommagement en prenant 3 indices i , dont les résidus DI_{ACP}^i sont les plus faibles

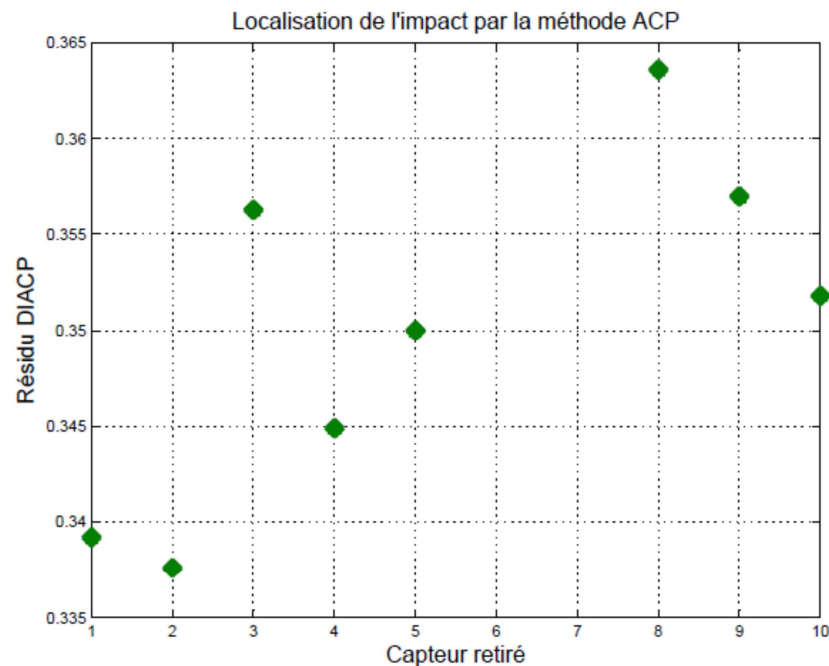


Figure 4.4 : Application de l'algorithme de localisation ACI à la plaque composite avec impact

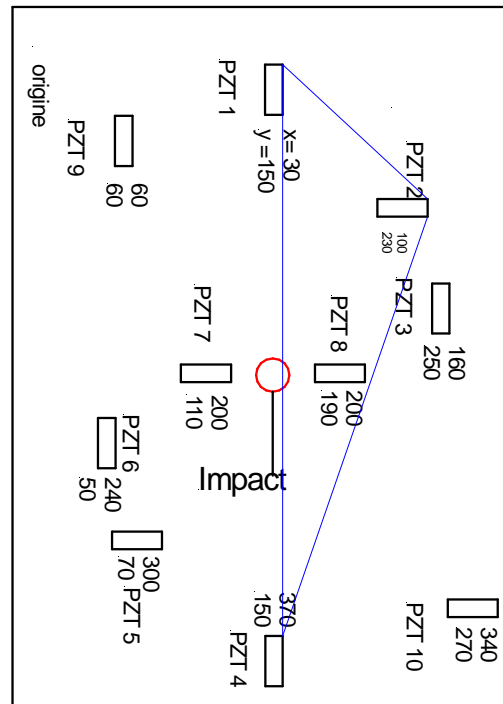


Figure 4.5 : Localisation de l'impact par la méthode ACP

De plus, nous avons appliqué l'algorithme de localisation 4.2 pour localiser l'endommagement du **capteur PZT 1** (délaminage local) présenté au § 2.1.1.3, les résultats sont illustrés sur la figure 4.6. Cette figure montre que lorsque l'on retire le capteur PZT1, le DI_{ACP} correspondant à ce retrait est le plus faible. Donc le PZT 1 est le capteur endommagé.

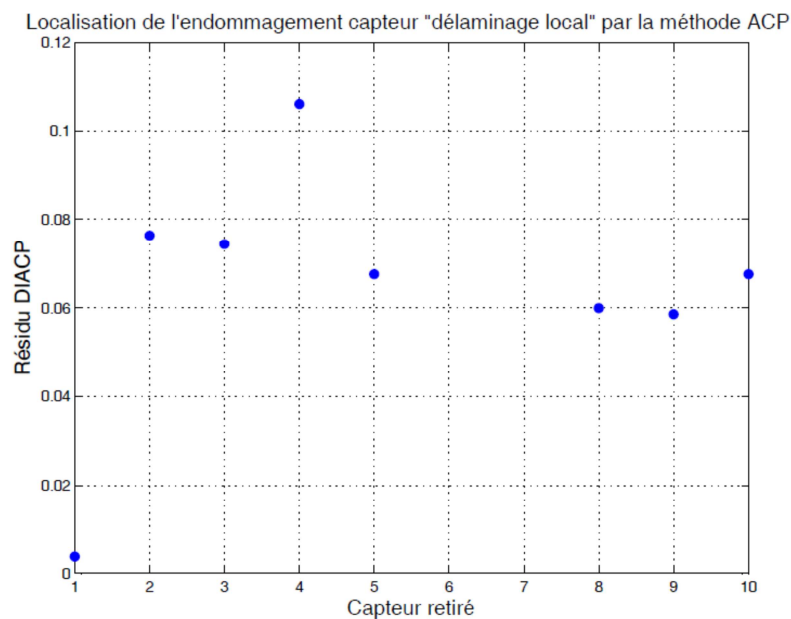


Figure 4.6 : Application de l'algorithme de localisation par l'ACP pour l'endommagement du capteur PZT 1 (délaminage local)

4.7 De l'ACP vers l'ACI

L'ACP permet de résoudre un problème de séparation (calcul de la matrice de séparation et de sources) sous l'hypothèse que les sources suivent une distribution *gaussienne et iid*. Cependant, nous avons montré au § 3.7.2.1 que dans le cadre de notre travail, les bruits mesurés suivent une distribution **non gaussienne**, ces derniers **peuvent contribuer** à la non gaussianité des sources. L'ACP fait donc place à l'ACI pour résoudre le problème de séparation.

Pour la détection de l'endommagement, nous pensons que l'ACI permettra de mieux détecter l'endommagement. C'est ce que nous allons exposer au chapitre 5.

*Mais avant d'aborder la description de la méthode de détection de l'endommagement par l'ACI, nous proposons d'analyser le résidu DI_{ACP} " voir proposition 4.1 " et de la borne β_{ACP} " voir proposition 4.1 " sur un modèle éléments finis (EF) d'une plaque composite saine, dans le cas où les bruits sont supposées **gaussiens**, puis dans le cas de bruits **non gaussiens**.*

4.7.1 Analyse de la borne associée à la méthode de détection par l'ACP

Dans cette section, nous allons étudier dans le cadre général d'une structure intelligente, la borne β_{ACP} associée au résidu DI_{ACP} . A cet effet, nous avons choisi de travailler avec le **modèle EF de la plaque composite à l'état sain**.

L'ACP permet de résoudre le problème de séparation sous l'hypothèse que les **sources** suivent une **distribution gaussienne**. Ces sources sont *latentes* et reflètent des caractéristiques de fonctionnement de la structure intelligente (SI). Avant de résoudre la séparation, ces sources sont **inaccessibles**, une analyse de l'hypothèse ou non de leur gaussianité *ne peut être établie*. Cependant, nous pouvons vérifier cette hypothèse à travers des simulations de bruits.

Au départ, les mesures simulées sur la SI contiennent seulement une information **déterministe**, représentant la réponse dynamique de la SI. Pour appliquer une ACP sur ces mesures, nous avons ajouté une information **aléatoire** provenant des bruits simulés. Partant de cette approche, nous allons entacher les mesures simulées par un **bruit gaussien** et puis par un bruit **non gaussien**, dans le but d'analyser la borne selon ces deux hypothèses.

4.7.1.1 Simulation de bruits gaussiens

Reprenons le modèle EF de la plaque composite à l'état sain, que nous avons présenté dans la section 2.2.4 du chapitre 2.

Ce modèle comporte 195 éléments, chaque élément est de dimension $15 \times 10 \text{ mm}^2$. La plaque est en configuration libre-libre et le nombre de degrés de liberté du modèle est $n_d = 4680 \text{ ddl}$. La figure 4.7 montre le modèle EF de la plaque composite intelligente.

Pour calculer la réponse temporelle des capteurs piézoélectriques du modèle EF, nous avons commencé par établir le modèle structural modal du modèle EF (voir § 2.2.1.2). Le nombre de modes étudié est égal à 30 avec un amortissement uniforme de 0.05%. Puis, nous avons calculé la représentation d'état du système continu **modal** (voir § 2.2.1.2). Dans cette représentation, nous avons simulé l'excitation de la plaque par l'actionneur piézoélectrique PZT 7 : cette excitation consiste en un signal rectangulaire défini au tableau 2.2. Enfin, nous avons discrétisé la représentation d'état avec la période d'échantillonnage $T_e = 10\mu\text{s}$.

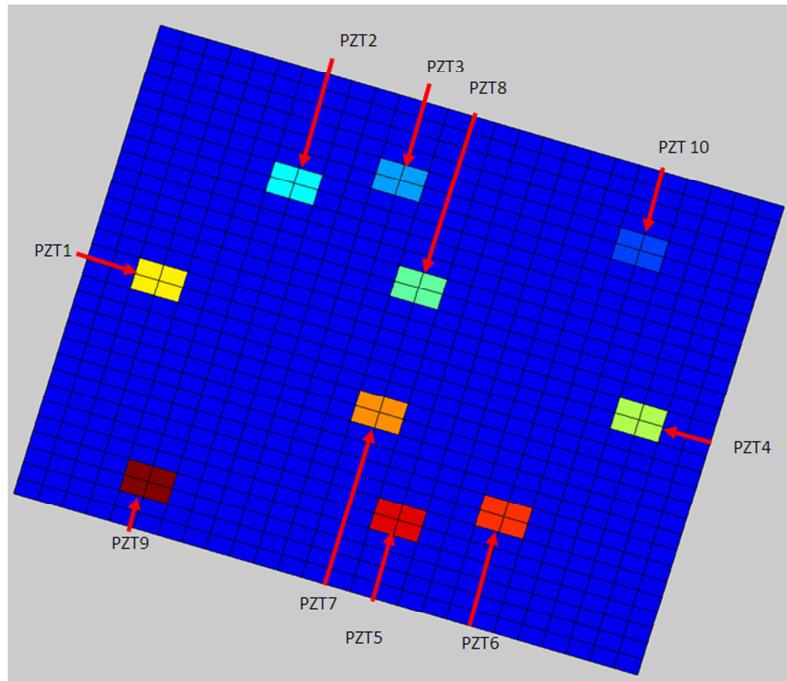


Figure 4.7 : Modèle EF de la plaque composite comportant neuf éléments piézoélectriques

Une fois les réponses temporelles des capteurs obtenues, nous les avons contaminées par des bruits **gaussiens** de moyenne nulle, la variance de chaque bruit associé à chaque signal capteur représente **0.5%** de la variance de ce dernier.

Les réponses temporelles bruitées sont concaténées dans une matrice notée $\mathbf{Y}^s = [\underline{y}_1 \cdots \underline{y}_i \cdots \underline{y}_{n_y}] \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$, cette matrice s'écrit par :

$$\mathbf{Y}^s = \mathbf{Y}_{\text{sans bruit}}^s + \delta \mathbf{Y}^{1s} \quad (4.78)$$

où

$\mathbf{Y}_{\text{sans bruit}}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la matrice des réponses simulées des capteurs piézoélectriques,

$\delta\mathbf{Y}^{1s} \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la matrice des bruits gaussiens,

$n_y = 8$ et $N = 2^{16}$ sont respectivement le nombre de capteurs et le nombre d'échantillons temporels.

La figure 4.8 montre les réponses temporelles **simulées** des différents capteurs constituant la matrice \mathbf{Y}^s .

Analysons à présent la borne $\mu_{B,ACP}$:

Pour définir cette borne, il nous faut une seconde matrice $\tilde{\mathbf{Y}}^s$, et elle est donnée par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{Y}}^s = \mathbf{Y}^s_{\text{sans bruit}} + \delta\mathbf{Y}^{2s} \quad (4.79)$$

où $\delta\mathbf{Y}^{2s} \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la seconde matrice des bruits simulés.

Pour obtenir la matrice $\delta\mathbf{Y}^{2s}$, nous avons aussi considéré des bruits **gaussiens**, la variance de ces derniers représente **1%** de la variance de chaque signal capteur (sans bruit).

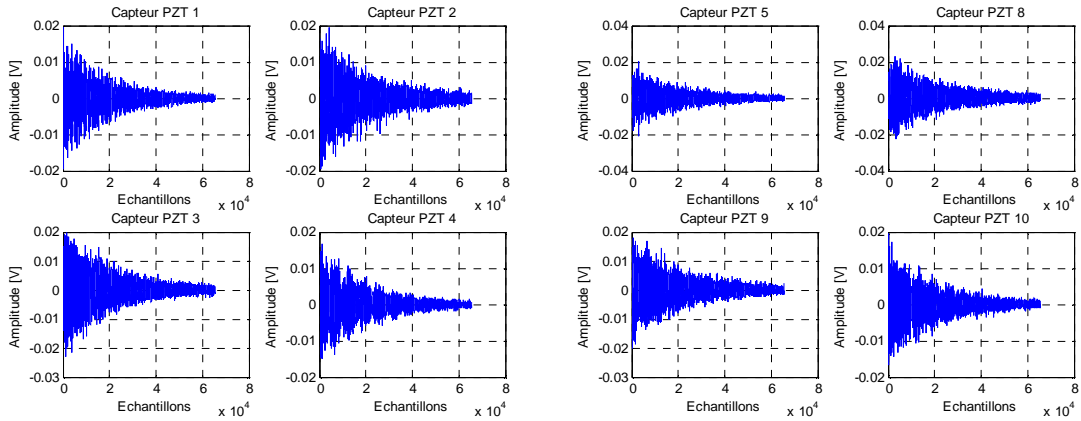


Figure 4.8 : Réponses temporelles simulées des capteurs piézoélectriques de la plaque saine

Remarque 4.4

Rappelons que pour les simulations présentées dans cette section, nous travaillons sur une plaque composite à l'état **sain**, et comme nous avons deux matrices : \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$, nous obtenons une borne β_{ACP} et non pas une borne inférieure et supérieure.

En utilisant les deux matrices \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$, nous avons appliqué l'algorithme 4.1 pour calculer la borne β_{ACP} et le résidu DI_{ACP} . En fixant le seuil à 98%, nous avons retenu **six** composantes principales ($n_r = 6$). Le tableau 4.2 montre le calcul de la borne β_{ACP} et du résidu DI_{ACP} . Nous remarquons que le résidu DI_{ACP} est inférieur à la borne β_{ACP} , les simulations vérifient le théorème de Wedin.

Tableau 4. 2 : Calcul de la borne et du résidu de la méthode ACP sur un modèle EF de plaque composite dans l'état sain (bruits simulés gaussiens)

	DI_{ACP}	β_{ACP}
<i>Plaque simulée à l'état sain</i>	0.009	0.03

4.7.1.2 Simulation de bruits non gaussiens

Analysons maintenant le comportement de la borne β_{ACP} associée au résidu DI_{ACP} dans le cas d'un bruit **non gaussien**. Pour étudier ce comportement, il faut que les matrices \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$ soient entachées par des bruits **non gaussiens**, à cet effet, nous avons généré plusieurs types de bruits, parmi lesquels un bruit laplacien (Kay 2010).

Ce bruit a été choisi, car il est similaire à celui que nous avons mesuré expérimentalement (voir § 3.8).

La variance des bruits dans les matrices \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$ représentent respectivement **0.5%** et **1%** de la variance de chaque signal mesuré sans bruit.

De la même manière que dans le cas gaussien, nous avons appliqué l'algorithme 4.1, et en fixant le seuil à 98%, nous avons retenu **six** composantes principales ($n_r = 6$). Le tableau 4.3 montre le calcul de β_{ACP} et DI_{ACP} .

Tableau 4. 3 : Calcul de la borne et du résidu de la méthode ACP sur un modèle EF de plaque composite à l'état sain (bruits simulés laplaciens)

	DI_{ACP}	β_{ACP}
<i>Plaque simulée à l'état sain</i>	0.009	0.04

4.7.2 Discussion des résultats obtenus

Les tableaux 4.2 et 4.3 montrent que quelque soit le cas envisagé, le rapport de détection est R_{ACP} inférieur à 1. Ceci vient du fait que la structure est à l'état sain.

Dans le cas gaussien et dans le cas non gaussien, la borne vaut respectivement : **0.03** et **0.04**. Comme la borne établie dans le cas gaussien est petite *par rapport à celle obtenue dans le cas non gaussien*, le rapport de détection défini dans l'équation (4.74) sera **plus important** sur des structures dont les mesures sont **gaussiennes**.

Notre objectif dans ce qui suit est d'analyser les causes de la faible valeur de la borne dans le cas gaussien. Pour effectuer cette analyse, nous procédons en trois étapes, suivies d'une analyse.

- **Première étape : isolation du numérateur de la borne β_{ACP}**

La borne que nous avons proposée est obtenue par une analyse en composantes principales appliquée aux matrices de mesures simulées \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$:

$$\beta_{ACP} = \frac{\varepsilon}{(\eta + \delta)n_r} \quad (4.80)$$

où

n_r est le nombre de composantes principales retenues,

$$\varepsilon = \max (\|\mathbf{R}_{11}\|, \|\mathbf{R}_{21}\|), \mathbf{R}_{11} = -\delta \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s, \mathbf{R}_{21} = -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s = -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s = \mathbf{W}_{ACP}^s + \delta \mathbf{W}_{ACP}^s.$$

Le nombre ε représente l'**amplitude** de l'écart entre 2 simulations de la structure à l'état sain.

Précédemment, nous avons montré que la borne peut être réglée par le seul paramètre $\eta + \delta$, et que nous avons fixé à $\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)/2$.

Lors de l'application de la méthode ACP sur ces simulations, nous avons retenu dans le cas gaussien $n_r = 6$ et dans le cas non gaussien $n_r = 6$. Pour être indépendant de n_r , nous multiplions β_{ACP} par ce nombre :

$$\beta_{ACP} n_r = \frac{\varepsilon}{\eta + \delta} \quad (4.81)$$

Si β_{ACP} est faible, alors le nombre $\beta_{ACP} n_r$ l'est aussi.

En théorie et en absence de perturbation, ce nombre ($\beta_{ACP} n_r$) est égal à zéro sous la condition suivante :

$$(\beta_{ACP} n_r) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0 \quad (4.82)$$

si et seulement si :

$$\eta + \delta \leq \vartheta \quad (4.83)$$

où ϑ est un nombre réel mais **strictement positif**.

D'après le théorème de Wedin, le nombre $\eta + \delta$ est toujours régi par l'inégalité suivante

$$\eta + \delta \leq \sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s) \quad (4.84)$$

L'intérêt dans l'introduction de la condition (4.82) est d'analyser seulement le numérateur de l'équation (4.81). C'est l'objet de la seconde étape.

- **Seconde étape : analyse du numérateur ε de la borne β_{ACP} .**

Dans les simulations présentées ici, la faible valeur de ($\beta_{ACP} n_r$) dans le cas gaussien est la conséquence d'une faible valeur de $\varepsilon = \max (\|\mathbf{R}_{11}\|, \|\mathbf{R}_{21}\|)$, par rapport à celle obtenue dans un cas non gaussien.

Rappelons que :

$$\mathbf{R}_{11} = -\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s \quad (4.85)$$

$$\mathbf{R}_{21} = -(\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s = -(\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s)^T \quad (4.86)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP}}^s = \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s + \delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s \quad (4.87)$$

Nous tirons profit de ces rappels pour énoncer l'analyse suivante :

Une faible valeur de ε dans le cas gaussien est due à une faible valeur de la norme $\|\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s\|_2$, par rapport à celle obtenue dans un cas non gaussien.

Cette analyse est vraie, car rappelons le : la matrice $\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ représente l'écart entre 2 simulations de la structure à l'état sain.

- **Troisième étape: dépouillement des résultats de la simulation**

Les simulations illustrées aux § 4.7.1.1 et § 4.7.1.2 nous ont permis de constater que la borne β_{ACP} calculée dans le cas gaussien (tableau 4.2) est plus faible que celle du cas non gaussien (tableau 4.3). D'après l'analyse faite à l'étape 2, cette faible valeur de la borne (du cas gaussien) vient du fait que la norme 2 de la matrice $\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ est plus faible que celle du cas non gaussien :

Dire que la norme 2 de la matrice $\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ est faible, implique que les matrices $\tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ sont très proches l'une de l'autre :

Le calcul des matrices $\tilde{\mathbf{W}}_{\text{ACP}}^s$ et $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ est issu respectivement l'application de l'ACP aux matrices de mesures simulées \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$.

L'analyse en composantes principales est la **meilleure estimée de la matrice de sources et la matrice de séparation** (sous l'hypothèse que les sources sont gaussiennes et iid). Cela veut dire que lorsque nous nous répétons encore une fois la simulation (avec la matrice $\tilde{\mathbf{Y}}^s$), l'ACP va donner un résultat similaire à celui obtenu dans la précédente simulation (avec la matrice \mathbf{Y}^s).

Afin d'étayer ces explications, nous avons effectué plusieurs simulations avec des bruits gaussiens et non gaussien de variance égale à : 1%, 1.5 %, 2%, 2.5% et 3%. Une ACP a été appliquée à chacune de ces matrices de mesures, et nous avons calculé la matrice de séparation.

Chacune des matrices de séparation (correspondant à chacune des matrices de mesures simulées) a été comparée par rapport à la matrice $\mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$. Rappelons que cette matrice a été obtenue avec un bruit de mesures égal à 0.5% de la variance des signaux sans bruits. Le tableau 4.4 montre le calcul de la norme 2 de la matrice $\delta \mathbf{W}_{\text{ACP}}^s$ pour le cas gaussien et non gaussien.

Tableau 4. 4 : Calcul de la norme des matrices $\delta \mathbf{W}_{ACP}^{s,i}$ pour un bruit gaussien et laplacien

Variance du bruit	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
$\ \delta \mathbf{W}_{ACP}^{s,i}\ _2$: bruit gaussien	91.18	135.39	178.53	220.78	262.34
$\ \delta \mathbf{W}_{ACP}^{s,i}\ _2$: bruit laplacien	93.73	137.28	179.77	223.37	264.29

Nous constatons au niveau de la **seconde ligne** du tableau 4.4, qu'au fur et à mesure que la variance du bruit augmente, la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACP}^{s,i}\|_2$ augmente, ceci est logique car l'amplitude du bruit est **plus importante**. Cette constatation est aussi valable pour la **troisième ligne** de ce tableau.

Maintenant, analysons chacune des **colonnes** du tableau 4.4. Dans ce cas, nous constatons que pour chaque bruit étudié (gaussien et laplacien), la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACP}^{s,i}\|_2$ obtenue dans le cas gaussien est toujours plus faible que celle obtenue dans le cas laplacien. D'après l'analyse faite dans la seconde étape, la borne \mathcal{B}_{ACP} sera donc plus faible dans le cas gaussien (*par rapport à celle obtenue dans un cas non gaussien*).

Pour valider cela, nous avons calculé pour chaque bruit étudié, la borne β_{ACP} . Les résultats sont illustrés au tableau 4.5.

Tableau 4. 5 : Calcul de la borne β_{ACP} associée à la méthode ACP pour un bruit gaussien et laplacien

Variance du bruit	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
β_{ACP} : bruit gaussien	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11
β_{ACP} : bruit laplacien	0.04	0.07	0.09	0.13	0.16

- **Analyse des conséquences**

Les résultats du tableau 4.5 montrent que le raisonnement que nous avons suivi dans les trois étapes est valide, ce que nous avons stipulé au début du §4.7.2 est vrai. Effectivement, en comparant chaque colonne du tableau 4.5, nous constatons que la borne β_{ACP} obtenue dans le cas gaussien est plus faible que celle obtenue pour le cas non gaussien. D'ailleurs, dans le cas gaussien, la borne inférieure et supérieure valent respectivement : $\text{Inf}_{\mathcal{B},ACP} = \mathbf{0.04}$, $\text{Sup}_{\mathcal{B},ACP} = \mathbf{0.09}$. Dans le cas non gaussien la borne inférieure et supérieure valent respectivement : $\text{Inf}_{\mathcal{B},ACP} = \mathbf{0.05}$, $\text{Sup}_{\mathcal{B},ACP} = \mathbf{0.13}$. Nous déduisons que lors de l'application de notre méthode de détection par l'ACP sur des mesures gaussiennes (structure à l'état sain et d'une structure dans un état inconnu), le rapport de détection sera meilleur, comparé à l'application de notre méthode sur des mesures non gaussiennes.

4.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode de détection de l'endommagement par l'ACP. A travers cette méthode, nous avons proposé un résidu indicateur d'endommagement, celui-ci est basé sur le changement du vecteur d'angles entre le sous-espace engendré par les matrices de séparation, ces dernières sont extraites à partir des mesures transmises par les capteurs piézoélectriques de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu.

La particularité du résidu que nous avons proposé réside dans le fait qu'il **ne nécessite pas la connaissance du modèle mécanique de la structure à surveiller**, de plus, il permet de **quantifier** la présence de l'endommagement en lui associant une valeur numérique bien déterminée.

Une fois le résidu défini, nous lui avons associé une borne, celle-ci est issue de la théorie des perturbations des matrices, théorie développée par Wedin (1972). Notre valeur ajoutée de cette théorie est son applicabilité dans le contexte SHM.

Les deux points forts de la borne que nous avons proposée proviennent du fait que nous avons cherché à nous abstenir des **hypothèses** statistiques (mise à part l'ergodicité pour estimer sa borne inférieure et supérieure). D'autre part, la borne est **adaptative**.

Les résultats expérimentaux illustrés au tableau 4.1 ont montré que les endommagements de type impact et le décollement du réseau d'antennes ont **bien été détectés** par la méthode de détection. Nous avons aussi proposé un algorithme de localisation pour localiser l'endommagement de type impact et le délaminage local du capteur PZT1.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté deux techniques de séparation de sources : l'ACP et l'ACI, nous avons montré à travers l'information mutuelle que l'ACP permet de résoudre le problème de séparation à condition que les sources soient **iid et gaussiennes**.

Les expériences que nous avons effectuées sur les structures composites intelligentes ont montré que le bruit mesuré n'est **pas gaussien et peut donc contribuer à la non gaussianité des sources**. Ceci laisse à penser que l'ACI peut mieux détecter l'endommagement. Mais avant de passer au chapitre 5 qui traite la méthode de détection par l'ACI, nous avons effectué pour valider notre réflexion, des simulations sur un modèle EF de la plaque composite à l'état sain. A travers les simulations faites et d'une analyse, nous avons montré que la borne inférieure et supérieure sont faibles dans le cas de bruits gaussiens, comparé au cas non gaussien. Donc les deux rapports de détection (calculées par rapport à la borne inférieure et supérieure) seraient plus grands si nous travaillons avec des mesures non gaussiennes, ceci est le cas des mesures expérimentales.

L'objet du chapitre suivant est de présenter notre seconde méthode de détection, celle-ci est basée sur l'analyse de composantes indépendantes (ACI).

CHAPITRE 5

DETECTION DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES PAR L'ACI

L'objet de ce chapitre est de présenter la méthode de détection de l'endommagement par l'ACI. En première partie, nous commençons par décrire quelques méthodes de détection basées sur cette approche, et cela dans le cadre de la surveillance des systèmes et des structures. Nous passons ensuite au développement de notre méthode de détection de l'endommagement. Nous appliquons cette méthode dans le cadre expérimental des structures composites (plaques et lame antennaire), et nous comparons les résultats obtenus par rapport à ceux de la méthode ACP. Afin de mettre en évidence cette comparaison, nous analysons la borne développée pour la méthode ACI et ACP sur le modèle EF de la plaque composite à l'état sain. Ensuite, nous passons à l'estimation de la sévérité de l'endommagement de manière expérimentale, et nous tirons profit du modèle EF pour estimer de manière numérique la sévérité d'un autre type d'endommagement : changement de rigidité. Enfin, nous proposons une approche pour prédire l'évolution de l'endommagement.

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté notre démarche pour détecter l'endommagement par l'ACP, et les résultats étaient concluants. Cependant, nous avons montré à travers la simulation de la plaque composite saine que la borne β_{ACP} est plus grande lorsque le bruit suit une distribution non gaussienne (de même variance que la distribution gaussienne). Ce comportement rend donc le rapport de détection de l'endommagement **plus faible**.

Dans notre travail, *l'hypothèse de gaussianité* n'est pas vérifiée pour les bruits mesurés. D'ailleurs, nous avons quantifié ces bruits en utilisant la néguentropie, et nous avons constaté que leur néguentropie est différente de zéro. Cette constatation nous amène dans ce chapitre à développer la méthode de l'analyse en composantes indépendantes (ACI).

Pour bien positionner notre travail par rapport à ceux développés dans la littérature, nous commençons par présenter quelques méthodes de détection par l'ACI.

5.2 Surveillance des systèmes et des structures par ACI

L'application de l'ACI dans le cadre de la surveillance des systèmes et des structures est récente. C'est grâce aux travaux de Zang et al. (2004) que cette méthode a été appliquée dans le cadre SHM.

Rappelons le modèle ACI établi au § 3.7.2 :

$$\mathbf{R}_{ACI} = \mathbf{W}_{ACI} \mathbf{Y} \quad (5.1)$$

où

$\mathbf{R}_{ACI} \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$ est la matrice de sources (matrice des composantes indépendantes),

$\mathbf{W}_{ACI} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ est la matrice de séparation.

Pour la surveillance de l'intégrité des structures, Zang et al. (2004) ont combiné l'ACI et les réseaux de neurones pour détecter un changement de rigidité d'une structure :

A partir des mesures temporelles de la structure saine et de la structure endommagée, (plusieurs changements de rigidité ont été réalisés), Zang et al. (2004) ont appliqué l'ACP pour réduire les données, puis ils ont extrait la matrice de *séparation* par la méthode ACI, et ils l'ont appliqué comme une entrée d'un réseau de neurones, la sortie de ce réseau leur a permis de statuer sur l'état de santé de la structure.

Au lieu d'utiliser les réseaux de neurones comme une façon de statuer sur l'état de santé de la structure, Song et al. (2005) ont utilisé la méthode : Machines à Support de Vecteurs.

Dans le cadre du diagnostic des systèmes, Villegas et al. (2010) ont proposé l'indicateur de défaut suivant :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|_2^2 \quad (5.2)$$

où $\tilde{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ est le vecteur de sources à l'instant k ,

n_r est le nombre de sources retenus après une étape de réduction faite par l'ACP.

5.3 Méthode proposée pour la détection de l'endommagement par l'ACI

5.3.1 Caractéristique de fonctionnement

Pour détecter l'endommagement par l'ACI, nous suivons le même raisonnement que celui fait pour l'ACP. Effectivement, comme la séparation de sources par l'ACI est basée sur la seule connaissance de la matrice de mesures, la modification de cette dernière due à la présence d'un endommagement va donc modifier le résultat de la séparation, c.à.d. la matrice de mélange/de séparation et la matrice de sources indépendantes.

Ces matrices ont été définies dans l'équation (3.89), et elles ont été calculées à partir de la minimisation de l'information mutuelle (voir § 3.7.2.3).

L'algorithme 3.1 illustre la démarche que nous avons suivie pour calculer la matrice de mélange/de séparation et la matrice de sources indépendantes.

La matrice de séparation et de sources indépendantes issues des mesures de la structure à l'état sain et d'une structure dans l'état inconnu sont définies comme suit :

$$\mathbf{R}_{ACI}^s = \mathbf{W}_{ACI}^s \mathbf{Y}^s \quad (5.3)$$

$$\mathbf{R}_{ACI}^u = \mathbf{W}_{ACI}^u \mathbf{Y}^u \quad (5.4)$$

où $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^u, \mathbf{R}_{ACI}^s, \mathbf{R}_{ACI}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times N}$, $\mathbf{W}_{ACI}^s, \mathbf{W}_{ACI}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$,

n_y et N sont respectivement le nombre de mesures et le nombre d'échantillons.

5.3.2 Résidu indicateur d'endommagement par ACI

La séparation de sources par l'ACI passe tout d'abord par une étape de réduction et de blanchiment, faite par l'ACP.

Au § 4.3, nous avons vu que l'ACP permet de réduire le nombre de composantes principales. Et pour réduire ce nombre, nous avons choisi la méthode du pourcentage cumulé de la variance totale (Malinowsk 1991). Si la réduction est possible, la SVD de la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI}^s est donnée par :

$$\mathbf{W}_{ACI}^s = [\mathbf{U}_1^s \quad \mathbf{U}_2^s] \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2^s \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1^s \quad \mathbf{V}_2^s]^T = \mathbf{W}_{ACI1}^s + \mathbf{W}_{ACI2}^s \quad (5.5)$$

où

$\mathbf{W}_{ACI1}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{\Gamma}_1^s = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_r}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $\mathbf{V}_1^s = [\underline{\mathbf{v}}_{11}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1i}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1n_r}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$, $\mathbf{U}_1^s = [\underline{\mathbf{u}}_{11}^s \cdots \underline{\mathbf{u}}_{1i}^s \cdots \underline{\mathbf{u}}_{1n_r}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$ sont respectivement la matrice de séparation, la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits, la matrice des vecteurs singuliers gauches, associées à *l'espace principal* de la structure à l'état **sain**,

$\mathbf{W}_{ACI2}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{\Gamma}_2^s = \text{diag}(\sigma_{n_r+1} \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y}) \in \mathbb{R}^{(n_y-n_r) \times (n_y-n_r)}$,

$\mathbf{V}_2^s = [\underline{\mathbf{v}}_{2(n_r+1)}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2i}^s \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2n_y}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-n_r)}$, $\mathbf{U}_1^s = [\underline{\mathbf{u}}_{2(n_r+1)}^s \cdots \underline{\mathbf{u}}_{2i}^s \cdots \underline{\mathbf{u}}_{2n_y}^s] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-n_r)}$

sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice de séparation, la matrice des vecteurs singuliers droits, la matrice des vecteurs singuliers gauches, associées à *l'espace résiduel* de la structure à l'état **sain**.

De la même manière, nous réécrivons la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI}^u de la structure dans l'état inconnu sous la forme suivante :

$$\mathbf{W}_{ACI}^u = [\mathbf{U}_1^u \quad \mathbf{U}_2^u] \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2^s \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1^u \quad \mathbf{V}_2^u]^T = \mathbf{W}_{ACI1}^u + \mathbf{W}_{ACI2}^u \quad (5.6)$$

où

$\mathbf{W}_{ACI1}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{\Gamma}_1^u = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_r}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $\mathbf{V}_1^u = [\underline{\mathbf{v}}_{11}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1i}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{1n_r}^u] \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$, $\mathbf{U}_1^u = [\underline{\mathbf{u}}_{11}^u \cdots \underline{\mathbf{u}}_{1i}^u \cdots \underline{\mathbf{u}}_{1n_r}^u]$ sont respectivement la matrice de séparation, la matrice des valeurs singulières, la matrice des vecteurs singuliers droits, la matrice des vecteurs singuliers gauches, associées à *l'espace principal* de la structure dans l'état **inconnu**,

$\mathbf{W}_{ACI2}^u \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\mathbf{\Gamma}_2^u = \text{diag}(\sigma_{n_r+1} \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n_y}) \in \mathbb{R}^{(n_y-n_r) \times (n_y-n_r)}$

$\mathbf{V}_2^u = [\underline{\mathbf{v}}_{2(n_r+1)}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2i}^u \cdots \underline{\mathbf{v}}_{2n_y}^u] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-n_r)}$, $\mathbf{U}_1^u = [\underline{\mathbf{u}}_{2(n_r+1)}^u \cdots \underline{\mathbf{u}}_{2i}^u \cdots \underline{\mathbf{u}}_{2n_y}^u] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_y-n_r)}$ sont respectivement la matrice des valeurs singulières, la matrice de séparation, la matrice des vecteurs singuliers droits, la matrice des vecteurs singuliers gauches, associées à *l'espace résiduel* de la structure dans l'état **inconnu**.

Le paramètre n_r représente le nombre de composantes principales retenues en appliquant l'ACP.

Le résidu indicateur d'endommagement est calculé en **combinant** le sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image de la matrice $(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T$ et celui de la matrice $(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T$ (nous notons ce vecteur d'angles : $\underline{\boldsymbol{\varphi}}[R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}]$) et le sinus du vecteur d'angles entre le sous-espace image de la matrice \mathbf{W}_{ACI1}^s et celui \mathbf{W}_{ACI1}^u (nous notons ce vecteur d'angles : $\underline{\boldsymbol{\theta}}[R\{\mathbf{W}_{ACI1}^u\}, R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}]$).

La norme 2 du vecteur d'angles entre le sous-espace image de la matrice \mathbf{W}_{ACI1}^u et celui \mathbf{W}_{ACI1}^s est défini par :

$$\begin{aligned} DI_{ACI}^1 &= \left\| \sin \underline{\theta} [R\{\mathbf{W}_{ACI1}^u\}, R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}] \right\|_2 = \left\| \mathbf{P}_{R\{\mathbf{W}_{ACI1}^u\}^\perp} \mathbf{P}_{R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}} \right\|_2 \\ &= \left\| \left(\mathbf{I}_{n_r} - \mathbf{P}_{R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}} \right) \mathbf{P}_{R\{\mathbf{W}_{ACI1}^u\}} \right\|_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

La norme 2 du vecteur d'angles le sous-espace image de la matrice $(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T$ et celui $(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T$ est défini par (voir §4.4.2) :

$$\begin{aligned} DI_{ACI}^2 &= \left\| \sin \underline{\varphi} [R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}] \right\|_2 = \left\| \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}^\perp} \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T\}} \right\|_2 \\ &= \left\| \left(\mathbf{I}_{n_r} - \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}} \right) \mathbf{P}_{R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T\}} \right\|_2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

où $\mathbf{P}_{R\{\mathbf{A}\}}$ et $\mathbf{P}_{R\{\mathbf{A}^T\}}$ sont respectivement les matrices de projections orthogonales associées à une matrice \mathbf{A} et de sa transposée (voir définition 4.3).

Des équations (4.55) et (4.69), la norme 2 du vecteur d'angles entre le sous-espace $R\{\mathbf{W}_{ACI}^u\}$ et $R\{\mathbf{W}_{ACI}^s\}$, et celle du vecteur d'angles entre le sous-espace $R\{(\mathbf{W}_{ACI}^u)^T\}$ et $R\{(\mathbf{W}_{ACI}^s)^T\}$ s'écrit :

$$\left\| \sin \underline{\theta} [R\{\mathbf{W}_{ACI1}^u\}, R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}] \right\|_2 = \left\| [\mathbf{I}_{n_r} - \mathbf{V}_1^s (\mathbf{V}_1^s)^T] \mathbf{V}_1^u (\mathbf{V}_1^u)^T \right\|_2 \quad (5.9)$$

$$\left\| \sin \underline{\varphi} [R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^u)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}] \right\|_2 = \left\| [\mathbf{I}_{n_r} - \mathbf{V}_1^s (\mathbf{V}_1^s)^T] \mathbf{V}_1^u (\mathbf{V}_1^u)^T \right\|_2 \quad (5.10)$$

Dans le cas où la structure dans l'état inconnu est à l'état endommagé, la présence de l'endommagement est reflétée à travers la variation du sinus des deux vecteurs d'angles, définis dans l'équation (5.9) et (5.10). Nous proposons ainsi le résidu DI_{ACI} suivant :

Proposition 5.1 : Résidu indicateur d'endommagement par ACI (Hajrya et al. 2011b)

Soit une structure intelligente munie de n_y capteurs, la détection de l'endommagement de cette structure par l'ACI peut être réalisée par le résidu suivant :

$$DI_{ACI} = \frac{\sqrt{DI_{ACI}^1 DI_{ACI}^2}}{n_r} \quad (5.11)$$

où

n_r est le nombre de composantes principales retenues.

Le résidu que nous proposons est calculé en combinant les termes DI_{ACI}^2 et DI_{ACI}^1 , définis respectivement dans les équations (5.8) et (5.7). Ce résidu est normalisé par rapport au nombre n_r .

Maintenant que nous avons défini l'indicateur d'endommagement de la méthode ACI, nous allons le rendre **robuste** aux perturbations environnementales. C'est l'objet de la section suivante.

5.3.3 Résidu robuste

Dans la méthode ACP, nous avons associé au résidu DI_{ACP} une borne. Cette dernière est régie par le théorème de Wedin (1972). Nous allons maintenant utiliser ce théorème pour définir une borne pour le résidu DI_{ACI} .

Notre démarche est réalisée en deux étapes, une proposition et une prise de décision. Les deux premières étapes nous permettent de réutiliser le théorème de Wedin dans le cadre de la méthode ACI.

- **Première étape : comparaison entre deux essais sur la structure intelligente à l'état sain**

Considérons la variation $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s$ que la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI}^s subit à cause des perturbations. Pour décrire cette variation $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s$, nous effectuons **un second** essai sur la structure à **l'état sain**, nous appliquons la méthode ACI (voir algorithme 3.1), et nous déterminons la nouvelle matrice de séparation, que nous notons $\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s$.

La matrice $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s$ est définie par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s = \mathbf{W}_{ACI}^s + \delta \mathbf{W}_{ACI}^s \quad (5.12)$$

La SVD de la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y \times n_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{I}}_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_1^s & \tilde{\mathbf{V}}_2^s \end{bmatrix}^T = \tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s + \tilde{\mathbf{W}}_{ACI2}^s \quad (5.13)$$

Nous définissons les matrices résiduelles \mathbf{R}_{11} , \mathbf{R}_{21} suivantes (Wedin 1972) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{W}_{ACI}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s - \tilde{\mathbf{U}}_1^s \tilde{\mathbf{I}}_1^s = \mathbf{W}_{ACI}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s - \tilde{\mathbf{U}}_1^s \left[(\tilde{\mathbf{U}}_1^s)^T \mathbf{W}_{ACI}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s \right] \\ &= -\delta \mathbf{W}_{ACI}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= (\mathbf{W}_{ACI}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s - \tilde{\mathbf{U}}_1^s \tilde{\mathbf{I}}_1^s = (\mathbf{W}_{ACI}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s - \tilde{\mathbf{V}}_1^s \left[(\tilde{\mathbf{V}}_1^s)^T (\mathbf{W}_{ACI}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s \right] \\ &= -(\delta \mathbf{W}_{ACI}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s \end{aligned} \quad (5.15)$$

Prenons la norme 2 de chacune des matrices résiduelles \mathbf{R}_{11} , \mathbf{R}_{21} :

$$\|\mathbf{R}_{11}\|_2 = \|\delta \mathbf{W}_{ACI}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s\|_2 = \left\| \delta \mathbf{W}_{ACI}^s \mathbf{P}_{R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s)^T\}} \right\|_2 \quad (5.16)$$

$$\|\mathbf{R}_{21}\|_2 = \|(\delta \mathbf{W}_{ACI}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s\|_2 = \left\| \mathbf{P}_{R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s\}} \delta \mathbf{W}_{ACI}^s \right\|_2 \quad (5.17)$$

et définissons le nombre positif ε_1 : ce nombre représente l'amplitude de l'écart entre deux matrices de séparation de la structure à l'état sain :

$$\varepsilon_1 = \max(\|\mathbf{R}_{11}\|_2, \|\mathbf{R}_{21}\|_2) \quad (5.18)$$

- **Seconde étape** : élaboration de la borne

Nous utilisons encore une fois le théorème de Wedin, et que nous rappelons :

Théorème de Wedin : théorie des perturbations (Wedin 1972)

Si $\exists \eta_1 \geq 0$ et $\delta_1 > 0$, tels que :

$$\eta_1 \leq \sigma_{\max}(\mathbf{W}_{ACI2}^s) = \|\mathbf{W}_{ACI2}^s\|_2 \quad (5.19)$$

$$\eta_1 + \delta_1 \leq \sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s) = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^{s\top}\|_2} \quad (5.20)$$

alors :

$$\widetilde{DI}_{ACI}^1 = \|\sin \underline{\theta}[R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s\}, R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}]\|_2 \leq \frac{\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^2}{\eta_1 + \delta_1} \quad (5.21)$$

$$\widetilde{DI}_{ACI}^2 = \|\sin \underline{\varphi}[R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s)^T\}, R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}]\|_2 \leq \frac{\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^1}{\eta_1 + \delta_1} \quad (5.22)$$

où

\widetilde{DI}_{ACI}^1 est la norme 2 associée au vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s\}$ et le sous-espace image $R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}$,

\widetilde{DI}_{ACI}^2 est la norme 2 associée au vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s)^T\}$ et sous-espace $R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}$.

Le nombre ε_1 est défini dans l'équation (5.18).

Maintenant, nous allons établir notre proposition pour rendre le résidu DI_{ACI} robuste.

Proposition 5.2 : Borne proposée pour le résidu

Rappelons le résidu DI_{ACI} défini à l'équation (5.11) :

$$DI_{ACI} = \frac{\sqrt{DI_{ACI}^1 DI_{ACI}^2}}{n_r} \quad (5.23)$$

Remarquons que ce résidu est calculé à partir de la matrice de séparation **principale** \mathbf{W}_{ACI1}^s de la structure à l'état sain et \mathbf{W}_{ACI1}^u de la structure dans un état inconnu, tandis que les deux termes \widetilde{DI}_{ACI}^1 et \widetilde{DI}_{ACI}^2 "équations (5.21) et (5.22)" sont calculés à partir de la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI1}^s de la structure à l'état sain et $\tilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s$ de la structure à l'état sain, mais issue d'un **second** essai. Dans ce cas, le terme

$$\widetilde{DI}_{ACI} = \frac{\sqrt{\widetilde{DI}_{ACI}^1 \widetilde{DI}_{ACI}^2}}{n_r} \text{ satisfaisait l'inégalité suivante :}$$

$$\widetilde{DI}_{ACI} \leq \frac{1}{(\eta_1 + \delta_1)n_r} \sqrt{(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^2)(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^1)} \quad (5.24)$$

Pour rendre l'inégalité (5.24) stricte, nous fixons :

$$\eta_1 + \delta_1 < \sigma_{\min}(\widetilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s) \quad (5.25)$$

La **borne** que nous proposons est définie par :

$$\beta_{ACI} = \frac{1}{(\eta_1 + \delta_1)n_r} \sqrt{(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^2)(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^1)} \quad (5.26)$$

- **Troisième étape : Prise de décision**

De la même façon que la méthode de détection par l'ACP, le résidu DI_{ACI} et la borne β_{ACI} qui lui est associée sont quantifiés numériquement. Nous pouvons donc calculer un rapport de détection R_{ACI} par la relation suivante :

$$R_{ACI} = \frac{DI_{ACI}}{\beta_{ACI}} \quad (5.27)$$

La décision sur la présence ou non d'un endommagement est donnée par :

Si $R_{ACI} > 1$

Alors la structure dans l'état inconnu est **à l'état endommagé**

Sinon la structure dans l'état inconnu est **à l'état sain**.

Fin

5.3.4 Discussion sur le choix du résidu proposé

Pour définir le résidu DI_{ACI} , nous avons proposé la matrice de séparation comme une façon de définir les *caractéristique de fonctionnement*, cette approche a été utilisée par Zang et al. (2004) et Song et al. (2005) pour développer leur méthode de détection. Cependant, notre méthode se distingue par rapport à leurs travaux en deux points. D'une part, le résidu que nous proposons est **quantifié numériquement**, d'ailleurs, nous allons l'utiliser afin de quantifier l'endommagement et pour estimer sa sévérité. D'autre part, Zang et al. (2004) utilisent des réseaux de neurones afin statuer sur l'état de santé de la structure. Cette façon d'entreprendre la détection de l'endommagement nécessite une base d'apprentissage *assez importante*, reflétant la structure à l'état sain et des structures comportant plusieurs types d'endommagement.

Pour notre part, nous décidons de l'état de santé de la structure grâce à la borne β_{ACI} . Celle-ci ne nécessite aucune **hypothèse** statistique sur la nature des perturbations, elle est **seulement** basée sur un apprentissage de la **structure à l'état sain**.

Concernant les travaux de Villegas et al. (2010), la détection du défaut s'effectue séquentiellement, approche que nous avons décrite dans le chapitre 4 comme irréalisable dans le cadre de notre travail.

5.4 Application aux structures composites

Dans cette section, nous procédons à l'application de notre méthode de détection dans le cadre des structures composites, présentées au chapitre 2.

Pour résumer la méthode de détection par ACI, nous l'avons décrite par l'algorithme 5.1.

Algorithme 5.1 : Algorithme de détection de l'endommagement par la méthode ACI

Etape 1 : essais sur la structure à l'état sain et dans l'état inconnu

- 1.1. Effectuer un premier essai de la structure à l'état **sain**,
- 1.2. Effectuer n autres essais de la structure à l'état **sain**,
- 1.3. Effectuer un seul essai de la structure dans l'état **inconnu**,
- 1.4. Construire la matrice de mesures de la structure à l'état sain \mathbf{Y}^s ,
- 1.5. Construire les matrices de mesures pour les n essais de la structure à l'état sain $\tilde{\mathbf{Y}}_i^s, i = 1 \dots n_1$,
- 1.6. Construire la matrice de mesures de la structure dans l'état inconnu \mathbf{Y}^u .

Etape 2 : calcul du résidu DI_{ACI}

- 2.1. Appliquer une ACI à la matrice de mesures \mathbf{Y}^s selon l'algorithme 3.1,
- 2.2. Extraire la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI}^s de cet algorithme,
- 2.3. Appliquer une SVD à la matrice \mathbf{W}_{ACP}^s selon l'équation (4.52), et en fixant le seuil à 98%,
- 2.4. Appliquer une ACI à la matrice de mesures \mathbf{Y}^u selon l'algorithme 3.1,
- 2.5. Extraire la matrice de séparation \mathbf{W}_{ACI}^u de cet algorithme,
- 2.6. Appliquer une SVD à la matrice \mathbf{W}_{ACP}^u selon l'équation (4.53), et en fixant le seuil à 98%,
- 2.7. Calculer le résidu DI_{ACI} selon la proposition 5.1.

Etape 3 : calcul de la borne $\mu_{B,ACI}$ associée au résidu DI_{ACI}

3.1 Reprendre le calcul 2.3

3.2 **Pour** $i=1 : n$

Appliquer une ACI à chacune des matrices $\tilde{\mathbf{Y}}_i^s$ selon l'algorithme 4.1,
Extraire les matrices de séparation $(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s)^i, i = 1 \dots n$, de cet algorithme,
Appliquer une SVD à la matrice $\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s{}^i$ selon l'équation (4.52), et en fixant le seuil à 98%,
Calculer la variation $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s{}^i$ par la relation suivante :

$$\delta \mathbf{W}_{ACI}^s = \mathbf{W}_{ACI}^s - \tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s{}^i$$

Calculer la borne $\mathcal{B}_{i,ACI}$ selon l'équation (5.26).

Fin

3.3 Calculer la moyenne de la borne $\mu_{B,ACI}$

$$\mu_{B,ACI} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{i,ACI}$$

3.4 Calculer l'intervalle de confiance à 95% de certitude $[Inf_{ACI} \quad Sup_{ACI}]$:

$$Inf_{ACI} = \mu_{B,ACI} - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sigma_{B,ACI}$$

$$Sup_{ACI} = \mu_{B,ACI} + \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sigma_{B,ACI}$$

Etape 4 : Prise de décision sur la présence ou non d'un endommagement

$$\text{Si } R_{ACI} = \frac{DI_{ACI}}{Inf_{ACI}} > 1 \text{ et } R_{ACI} = \frac{DI_{ACI}}{Sup_{ACI}} > 1$$

*Alors la structure dans un état inconnu est dans un état **endommagé**,*

*Sinon la structure est à l'état **sain**.*

Fin

5.4.1 Détection de l'endommagement

L'algorithme 5.1 a été appliqué aux plaques composites et à la lame 2 (lame composite *antennaire*) pour détecter respectivement l'endommagement de type **impact** (figure 2.4) et le **décollement du réseau d'antennes** (figure 2.22).

Le nombre de capteurs dans le cas des plaques composites et de la lame antennaire est respectivement égal $n_y = 8$ et $n_y = 6$.

D'après le seuil fixé dans le chapitre 4, nous ne pouvons pas réduire le nombre de composantes principales (*dans le cadre expérimental*). Dans le cas des plaques composites $n_r = n_y = 8$, et pour la lame antennaire (lame 2), $n_r = n_y = 6$.

Dans ce cas, les matrices de séparation considérées pour définir la méthode de détection par l'ACI s'écrivent :

$$\mathbf{W}_{ACI2}^{s,u} = \tilde{\mathbf{W}}_{ACI2}^{s,u} = \mathbf{0}_{n_y \times n_y}, \mathbf{W}_{ACI1}^{s,u} = \mathbf{W}_{ACI}^{s,u} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, \tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s = \tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}.$$

D'après les équations (5.19) et (5.20), le nombre η vaut zéro, quant au nombre δ , nous le fixons égal à $\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s)/2$.

Les figures 5.1 et 5.2 montrent respectivement la première source (1^{ère} composante indépendante) de la plaque saine/endommagée et de la lame antennaire saine/endommagée. Nous constatons que la présence de l'endommagement a modifié les sources extraites à partir des mesures de la structure à l'état sain.

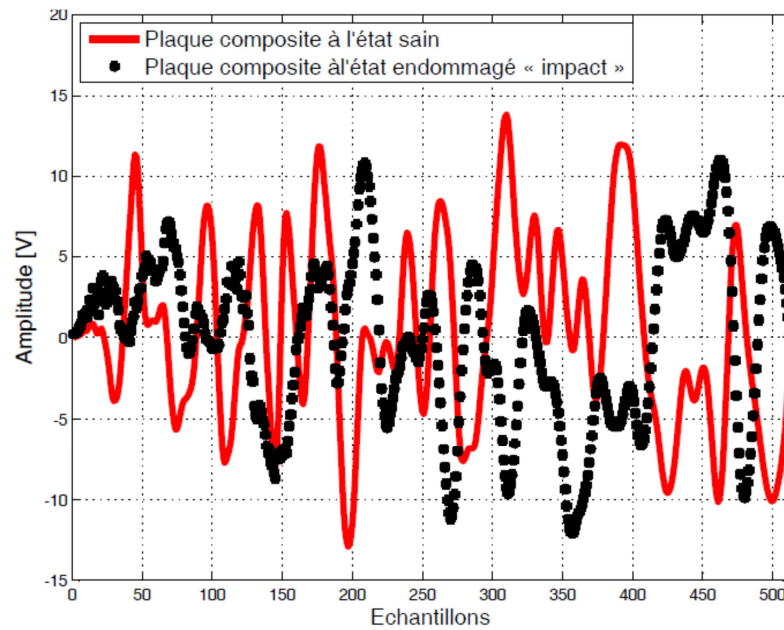


Figure 5.1 : Source n°1 obtenue par ACI dans le cas de la plaque saine et endommagée

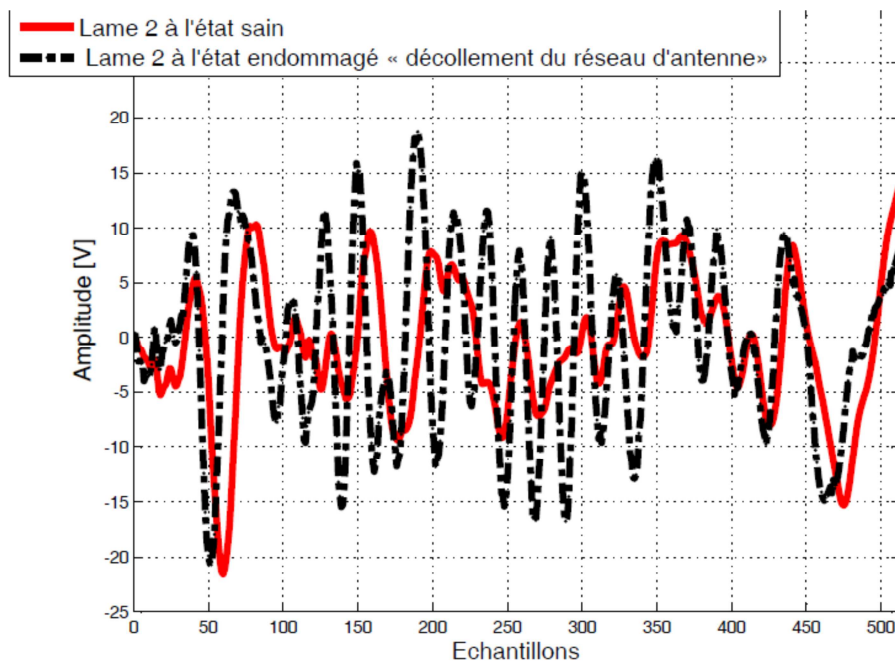


Figure 5.2 : Source n°1 dans le cas de la lame saine et endommagée

Le tableau 5.1 montre les résultats de la détection de l'endommagement de type **impact** et du **décollement du réseau d'antennes**.

Dans le cas de l'endommagement de type *impact*, le résidu $DI_{ACI} = 0.33$, il est bien supérieur à la borne $Inf_{ACI} = 0.003$ et à la borne $Sup_{ACI} = 0.004$, d'ailleurs, le rapport de détection $\frac{DI_{ACI}}{Inf_{ACI}} = 110$ et $\frac{DI_{ACI}}{Sup_{ACI}} = 82.5$.

Dans ce tableau, nous remarquons que pour le *décollement du réseau d'antennes*, le résidu $DI_{ACI} = 0.42$, et il est supérieur à la borne $Inf_{ACI} = 0.02$ et à la borne $Sup_{ACI} = 0.028$, d'ailleurs, le rapport de détection $\frac{DI_{ACI}}{Inf_{ACI}} = 21$ et $\frac{DI_{ACI}}{Sup_{ACI}} = 15$.

Tableau 5. 1 : Détection de l'endommagement des deux structures composite par la méthode ACI

	DI_{ACI}	$\mu_{B,ACI}$	$\sigma_{B,ACI}$	Inf_{ACI}	Sup_{ACI}
<i>Plaque dans l'état endommagé</i>	0.33	0.004	0.0004	0.003	0.004
<i>Lame 2 dans l'état endommagé</i>	0.42	0.025	0.0031	0.02	0.028

Ces calculs permettent d'affirmer que l'impact de la plaque et le décollement du réseau d'antennes de la lame 2 ont bien été détectés par la méthode ACI.

5.4.2 Localisation de l'endommagement

Pour localiser l'endommagement de type impact, nous suivons la même démarche que celle établie au § 4.6.2. L'algorithme 5.2 permet de résumer l'étape de localisation par l'ACI.

Algorithme 5.2 : Algorithme de localisation de l'endommagement par la méthode ACI

<p>Etape 1 : essais sur la structure à l'état sain et de la structure à l'état endommagé</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.1. Reprendre la matrice de mesures de la structure à l'état sain (étape 1.4 de l'algorithme 5.1), 1.2. Reprendre la matrice de mesures de la structure dans l'état endommagé (étape 1.6 : cette structure était dans un état inconnu avant détection de l'endommagement). <p>Etape 2 : calcul du résidu DI_{ACI}</p> <p>Pour $i=1 : n_y$</p> <p style="padding-left: 40px;">Retirer un capteur des matrices \mathbf{Y}^s et \mathbf{Y}^u,</p> <p style="padding-left: 40px;">calculer le résidu DI_{ACI}^i, en reprenant l'étape 2 de l'algorithme 5.1,</p> <p>Fin</p> <p>Etape 3 : Analyse des résultats</p> <ol style="list-style-type: none"> 3.1 Construire le vecteur $\underline{DI}_{ACI} = [DI_{ACI}^1 \cdots DI_{ACI}^i \cdots DI_{ACI}^{n_y}]^T$, 3.2 Trianguler l'endommagement en prenant 3 indices i, dont les résidus DI_{ACI}^i sont les plus faibles.
--

Cette procédure de localisation a été appliquée pour localiser l'impact de la plaque composite, les résultats sont illustrés à la figure 5.3. Nous constatons que lorsque nous retirons un à un les capteurs, les trois résidus DI_{ACI}^i les plus faibles correspondent aux capteurs PZT 1, 2, 4. Rappelons que lors des retraits de ces trois capteurs dans la méthode de localisation par l'ACP (voir algorithme 4.2), les résidus correspondant sont aussi les plus faibles.

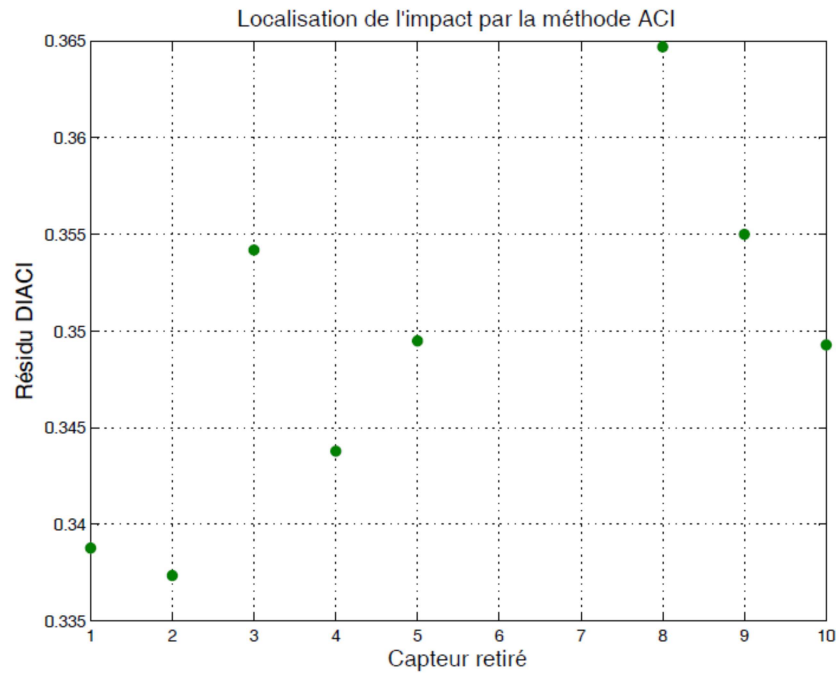


Figure 5.3 : Application de l'algorithme de localisation ACI à la plaque composite avec impact

La figure 5.4 montre la région à surveiller.

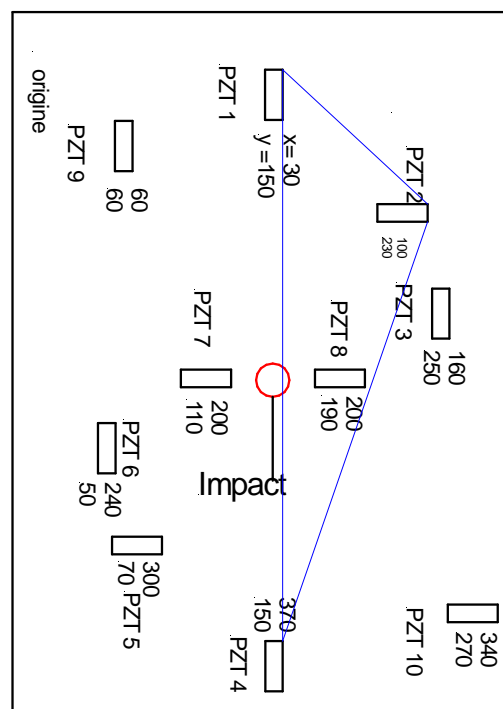


Figure 5.4 : Localisation de l'impact par la méthode ACI

A titre indicatif, nous avons testé l'algorithme de localisation 5.2 pour localiser l'endommagement du capteur PZT 1, les résultats sont illustrés sur la figure 5.5. Cette figure

montre que lorsque l'on retire le capteur PZT1, le résidu DI_{ACI} correspondant à ce retrait est le plus faible. Donc cet endommagement est localisé.

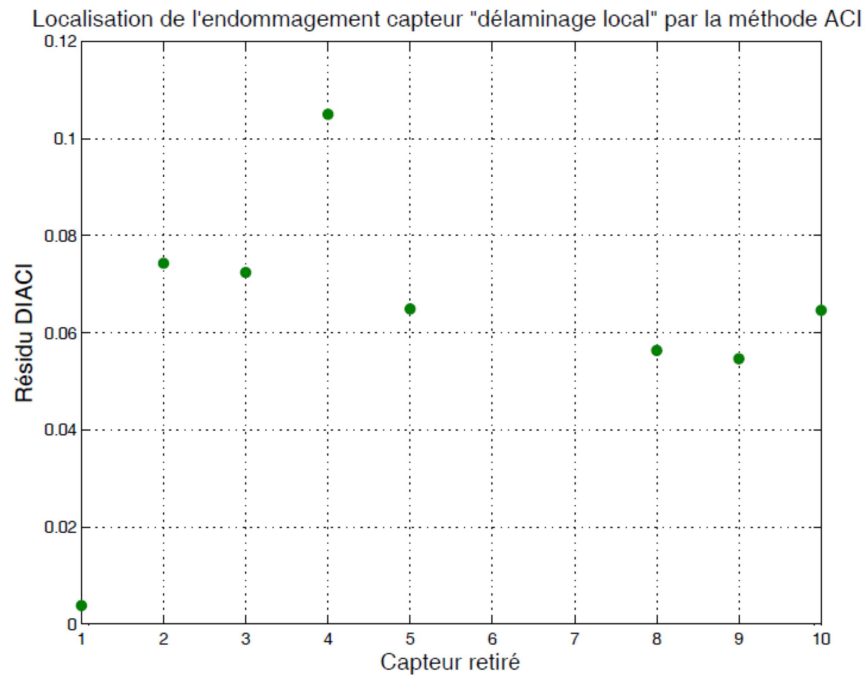


Figure 5.5 : Application de l'algorithme de localisation par ACI

5.4.3 Comparaison entre la méthode ACI et ACP

Dans cette partie, nous allons reprendre les résultats de la détection de l'endommagement de l'impact et du décollement du réseau d'antennes par la méthode ACP et ACI, établis respectivement dans les tableaux 4.1 et 5.1. Nous rappelons ces résultats aux tableaux 5.2 et 5.3.

Tableau 5. 2 : Comparaison entre la méthode ACI et ACP pour la détection de l'endommagement de type impact

Plaque à l'état endommagé (impact)	Résidu DI	Moyenne de la Borne μ_B	Ecart type de la borne σ_B	$\frac{DI}{Inf}$	$\frac{DI}{Sup}$
Détection par ACP	0.33	0.009	0.001	41.25	33
Détection par ACI	0.33	0.004	0.0004	110	82.5

Tableau 5. 3 : Comparaison entre la méthode ACI et ACP pour la détection de l'endommagement de type décollement du réseau d'antennes

Lame 2 à l'état endommagé (décollement du réseau d'antennes)	Résidu DI	Moyenne de la Borne μ_B	Ecart type de la borne σ_B	$\frac{DI}{Inf}$	$\frac{DI}{Sup}$
Détection par ACP	0.42	0.009	0.005	14	11.05
Détection par ACI	0.42	0.02	0.003	21	15

Les résultats ci-dessus montrent que la méthode de détection par ACI est la plus sensible à la présence des deux endommagements, car, les rapports de détection issus de cette méthode sont les plus grand. Ces forts rapport de détection sont la conséquence de la faible valeur de la borne Inf_{BACI} et Sup_{BACI} comparées à celles associées à la méthode ACP. Ce que nous avons prédit au § 4.7 est donc vrai. De plus, l'écart type de la borne est plus faible dans la méthode ACI que celui de la méthode ACP.

Pour comprendre la faible valeur de la borne inférieure et supérieure, comparées à celles obtenues à partir de la méthode ACP, nous reprenons le modèle EF de la plaque composite saine. C'est l'objet de la section suivante.

5.5 Analyse des bornes sur le modèle EF de la plaque composite

5.5.1 Simulation de bruits non gaussiens

L'analyse en composantes indépendantes permet de résoudre un problème de séparation sous l'hypothèse que les sources sont **non gaussiennes et iid**. La non gaussianité du bruit peut contribuer à la non gaussianité des sources. Pour cela, nous reprenons l'étude faite sur des mesures simulées et entachées par un bruit laplacien (voir § 4.7.1.2).

Avant d'aller à l'analyse détaillée de la borne β_{ACI} , nous avons cherché à voir si celle-ci est faible comparée à la borne β_{ACP} .

Pour cela, nous avons appliqué une ACI aux matrices \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$ (matrices définies § 4.7.1.2) et nous avons calculé la borne β_{ACI} selon l'étape 3 de l'algorithme 5.1. Rappelons que dans ce cas, nous obtenons une borne, et non pas une pas une borne inférieure et supérieure.

En utilisant les matrices \mathbf{Y}^s et $\tilde{\mathbf{Y}}^s$ (matrices définies § 4.7.1.2), nous avons appliqué l'algorithme 5.1 pour calculer le résidu DI_{ACI} et la borne β_{ACI} . En fixant le seuil à 98%, nous avons retenu **six** composantes principales ($n_r = 6$). Le tableau 5.4 montre le calcul de la borne β_{ACI} et du résidu DI_{ACI} . Nous remarquons que le résidu DI_{ACI} est inférieur à la borne β_{ACI} , les simulations vérifient théorème de Wedin.

Tableau 5. 4 : Calcul de la borne et du résidu de la méthode ACI sur un modèle EF de plaque composite à l'état sain (bruits simulés laplaciens)

	DI_{ACI}	β_{ACI}
Plaque simulée à l'état sain	0.009	0.03

Le tableau 5.5 montre le calcul du résidu DI_{ACP} et de la borne β_{ACP} issus de la méthode ACP (résultats établis au § 4.7.1.2).

Tableau 5. 5 : Calcul de la borne et du résidu de la méthode ACP sur un modèle EF de plaque composite à l'état sain (bruits simulés laplaciens)

	DI_{ACP}	β_{ACP}
Plaque simulée à l'état sain	0.009	0.04

Notons que nous sommes sur une étude de la structure à l'état sain. Nous nous intéressons donc aux bornes β_{ACP} et β_{ACI} , et non pas aux résidus DI_{ACP} et DI_{ACI} .

Lors de l'application de la méthode ACI sur des mesures simulées non gaussiennes (bruit laplacien), la borne vaut **0.03**, quant à la méthode ACP, la borne vaut **0.04**.

Ces simulations renforcent la réflexion que nous avons tenue § 5.4.3 : la borne associée à la méthode ACI est plus faible que celle associée à la méthode ACP : le rapport de détection sera meilleur sur des simulations d'une structure dans l'état inconnu, dont les bruits sont non gaussiens (contribution à la non gaussianité des sources).

5.5.2 Discussion des résultats obtenus

Notre objectif dans cette section est d'analyser les causes de la faible valeur de la borne β_{ACI} par rapport à la borne β_{ACP} :

La borne β_{ACI} est définie par (voir proposition 5.2) :

$$\beta_{ACI} = \frac{1}{(\eta_1 + \delta_1)n_r} \sqrt{(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^2)(\varepsilon_1 + \eta_1 \widetilde{DI}_{ACI}^1)} \quad (5.28)$$

où

n_r est le nombre de composantes principales retenues,

Le nombre ε_1 représente l'amplitude de l'écart entre deux matrices de séparation de la structure à l'état sain, obtenues par la méthode **ACI** :

$$\varepsilon_1 = \max (\|\mathbf{R}_{11}\|, \|\mathbf{R}_{21}\|), \mathbf{R}_{11} = -\delta \mathbf{W}_{ACI}^s \widetilde{\mathbf{V}}_1^s, \mathbf{R}_{21} = -(\delta \mathbf{W}_{ACI}^s)^T \widetilde{\mathbf{U}}_1^s,$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{ACI}^s = \mathbf{W}_{ACI}^s + \delta \mathbf{W}_{ACI}^s, \eta_1 + \delta_1 = \frac{\sigma_{\min}(\widetilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s)}{2},$$

\widetilde{DI}_{ACI}^1 est la norme 2 associée au vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{\widetilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s\}$ et le sous-espace image $R\{\mathbf{W}_{ACI1}^s\}$,

\widetilde{DI}_{ACI}^2 est la norme 2 associée au vecteur d'angles entre le sous-espace image $R\{(\widetilde{\mathbf{W}}_{ACI1}^s)^T\}$ et sous-espace $R\{(\mathbf{W}_{ACI1}^s)^T\}$.

Quant à la borne β_{ACP} , nous rappelons aussi sa définition (voir proposition 4.2) :

$$\beta_{ACP} = \frac{\varepsilon}{(\eta + \delta)n_r} \quad (5.29)$$

où

$$\varepsilon = \max (\|\mathbf{R}_{11}\|, \|\mathbf{R}_{21}\|), \mathbf{R}_{11} = -\delta \mathbf{W}_{ACP}^s \tilde{\mathbf{V}}_1^s, \mathbf{R}_{21} = -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T \tilde{\mathbf{U}}_1^s = -(\delta \mathbf{W}_{ACP}^s)^T$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ACP}^s = \mathbf{W}_{ACP}^s + \delta \mathbf{W}_{ACP}^s, \eta + \delta = \frac{\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{W}}_{ACP1}^s)}{2}.$$

Le nombre ε représente l'amplitude de l'écart entre deux matrices de séparation de la structure à l'état sain, obtenue par la méthode **ACP**.

Au § 4.7.2, nous avons étudié la borne β_{ACP} , en **isolant son numérateur**, c.-à-d. le nombre ε . (voir étape 1 de § 4.7.2). Pour étudier la borne \mathcal{B}_{ACI} , nous procédons de la même façon que dans l'étape une du § 4.7.2, et nous isolons le nombre ε_1 .

Une faible valeur de ε_1 est due à une faible valeur de la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACI}^s\|_2$, par rapport à la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACP}^s\|_2$ (matrice définie dans l'équation (4.57)).

Afin de renforcer cette réflexion, nous reprenons les simulations faites avec des bruits laplaciens de variance égale à 1%, 1.5 %, 2%, 2.5% et 3% de la variance des signaux. Une ACI a été appliquée à chacune de ces matrices de mesures, puis nous avons calculé la matrice de sources et le matrice de séparation.

Chacune des matrices de séparation (correspondant à chacune des matrices de mesures simulées) a été comparée par rapport à la matrice \mathbf{W}_{ACI}^s , cette dernière a été obtenue avec un bruit *laplacien* égal à 0.5% de la variance des signaux sans bruits. Le tableau 5.6 montre le calcul de la norme 2 de la matrice $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s$ pour le cas non gaussien.

Tableau 5. 6 : Calcul de la norme des matrices $\delta \mathbf{W}_{ACI}^s$ pour un bruit laplacien

Variance du bruit laplacien	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
$\ \delta \mathbf{W}_{ACI}^s\ _2$	79.63	116.75	152.05	185.66	217.71

Pour comparer les résultats du tableau 5.6, nous reprenons ceux obtenus lors de l'étude de la borne β_{ACP} dans le cas d'un bruit laplacien.

Tableau 5. 7 : Calcul de la norme des matrices $\delta \mathbf{W}_{ACP}^s$ pour un bruit laplacien

Variance du bruit laplacien	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
$\ \delta \mathbf{W}_{ACP}^s\ _2$	89.73	133.28	175.77	217.37	258.29

Nous constatons au niveau de la **seconde ligne** du tableau 5.6, qu'au fur et à mesure que la variance du bruit augmente, la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACI}^s\|_2$ augmente, ceci est logique car l'amplitude du bruit est **plus importante**.

Maintenant, analysons les **colonnes** du tableau 5.6 et 5.7. Dans ce cas, nous constatons que pour chaque variance du bruit, la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACI}^s\|_2$ issue de la méthode ACI est plus faible que la norme $\|\delta \mathbf{W}_{ACP}^s\|_2$ obtenue par de la méthode ACP. Donc, la borne \mathcal{B}_{ACI} sera plus faible que la borne \mathcal{B}_{ACP} .

Pour valider cela, nous avons calculé la borne \mathcal{B}_{ACI} pour chaque variance du bruit, et nous l'avons comparé par rapport à la borne \mathcal{B}_{ACP} (résultats établis au §4.7.2).

Tableau 5.8 : Calcul de la borne β_{ACP} et β_{ACI} pour un bruit laplacien

Variance du bruit laplacien	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
β_{ACP}	0.04	0.07	0.09	0.13	0.16
β_{ACI}	0.03	0.05	0.07	0.08	0.1

Le tableau 5.8 montre qu'au fur et à mesure que la variance du bruit augmente, les bornes β_{ACP} et β_{ACI} augmentent. Cependant, en comparant les colonnes de ce tableau, *nous constatons que quelle que soit la variance du bruit, la borne β_{ACI} est plus faible que la borne β_{ACP} .*

5.5.3 Conséquences

Les résultats du tableau 5.8 montrent que le raisonnement que nous avons suivi au § 4.7 est valide. Effectivement, en comparant chaque colonne du tableau 5.8, nous constatons que la borne β_{ACI} est toujours plus faible que la borne β_{ACP} . D'ailleurs, *la borne inférieure et supérieure valent respectivement : $\text{Inf}_{\mathcal{B},ACI} = 0.04$, $\text{Sup}_{\mathcal{B},ACI} = 0.09$ et dans le cas de l'ACP, la borne inférieure et supérieure valent respectivement : $\text{Inf}_{\mathcal{B},ACP} = 0.05$, $\text{Sup}_{\mathcal{B},ACP} = 0.13$.*

L'analyse en composantes indépendantes pourra mieux détecter l'endommagement, car la borne inférieure et supérieure qui lui est associées sont plus faibles que celles de la méthode ACP (rapport de détection plus grand).

5.6 Sévérité de l'endommagement

Le développement d'un système SHM complet passe par plusieurs étapes (voir figure 1.9 du chapitre 1), allant de l'acquisition des données jusqu'au pronostic, ces étapes sont

complémentaires, et elles ne peuvent se réaliser qu'à condition que l'endommagement a bien **été détecté**.

Dans le chapitre 4 et dans les sections précédentes de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la détection de l'endommagement par la méthode ACP et ACI, et nous avons montré que les endommagements de type impact et décollement du réseau d'antennes *ont bien été détectés*.

Dans cette section, nous allons étudier les résidus développés par ces deux méthodes pour estimer la sévérité de l'endommagement de manière **expérimentale**. La difficulté à générer des endommagements sur la structure intelligente réelle, nous a conduit à choisir l'endommagement du capteur (**délaminage local**) comme une façon d'étudier la sévérité de l'endommagement expérimentalement. Comme il a été présenté au § 2.1.1.3 du chapitre 2, cet endommagement concerne le *changement progressif de la surface totale du capteur* PZT 1 (figure 2.13). Cette surface a été modifiée par un facteur variant de **0.975 à 0.4**. Pour chaque sévérité de cet endommagement, nous avons effectué des essais et nous leur avons associé les résidus DI_{ACP} et DI_{ACI} . Pour calculer ces résidus, nous avons appliqué l'étape 2 des algorithmes de détection par ACP et ACI " respectivement algorithme 4.1 et 5.1". Rappelons que la borne inférieure et supérieure ont été calculées précédemment (voir § 4.6.1 et 5.4.1). Les résultats de l'étude de sévérité sont illustrés aux tableaux 5.9 et 5.10.

Pour la méthode ACP, l'analyse du tableau 5.9 montre qu'au fur et à mesure que la surface du capteur **diminue**, le résidu DI_{ACP} **augmente**. Ceci montre que la méthode ACP permet d'attribuer à chaque résidu calculé, une taille correspondant à l'endommagement détecté. De plus, nous remarquons que la méthode ACP ne détecte pas le défaut capteur si la surface modifiée du capteur est inférieure à **5%** de la surface totale du capteur.

Tableau 5. 9 : Etude de la sévérité du défaut capteurs par la méthode ACP

Facteur de modification de la surface du capteur PZT 1	DI_{ACP}	$\mu_{B,ACP}$	$[Inf_{ACP} \quad Sup_{ACP}]$	Rapport de détection : $\frac{DI_{ACP}}{Inf_{ACP}}$	Rapport de détection : $\frac{DI_{ACP}}{Sup_{ACP}}$	Décision
0.975	0.004	0.009	[0.008 0.01]	0.6	0.48	Non detection
0.96	0.006	-	-	0.81	0.65	Non detection
0.95	0.007	-	-	0.95	0.76	Non detection
0.9	0.013	-	-	1.68	1.35	Detection
0.8	0.024	-	-	3.03	2.43	Detection
0.7	0.033	-	-	4.22	3.38	Detection
0.6	0.042	-	-	5.28	4.23	Detection
0.5	0.049	-	-	6.23	4.99	Detection
0.4	0.056	-	-	7.08	5.67	Detection

Quant à la méthode ACI, nous remarquons d'après le tableau 5.10 que cette méthode permet aussi d'estimer la sévérité de l'endommagement. A l'inverse de la méthode ACP, où l'endommagement ne peut être détecté qu'à partir de 5%, la méthode ACI permet de détecter toutes les sévérités envisagées.

Tableau 5. 10 : Etude de la sévérité du défaut capteur par la méthode ACI

Facteur de modification de la surface du capteur PZT 1	DI_{ACI}	$\mu_{B,ACI}$	$[Inf_{ACI} \quad Sup_{ACI}]$	Rapport de détection : $\frac{DI_{ACI}}{Inf_{ACI}}$	Rapport de détection : $\frac{DI_{ACI}}{Sup_{ACI}}$	Décision
0.975	0.004	0.004	[0.003 0.004]	1.6	1.2	Détection
0.96	0.006	-	-	2.13	1.6	Détection
0.95	0.007	-	-	2.5	1.87	Détection
0.9	0.013	-	-	4.4	3.3	Détection
0.8	0.023	-	-	7.9	5.92	Détection
0.7	0.032	-	-	10.96	8.22	Détection
0.6	0.041	-	-	13.66	10.25	Détection
0.5	0.048	-	-	16	12	Détection
0.4	0.054	-	-	18.06	13.55	Détection

La figure 5.6 montre le rapport de détection de chacune des méthodes (étude faite par rapport à la borne supérieure). D'après cette figure, nous remarquons que quelque soit la taille du délaminage local (facteur de modification de la surface du capteur PZT 1), le rapport de détection $\frac{DI_{ACI}}{Sup_{ACI}}$ est toujours supérieur au rapport $\frac{DI_{ACP}}{Sup_{ACP}}$. Notons que nous avons obtenu des résultats analogue avec la borne inférieure. *La méthode ACI permet donc de mieux estimer la sévérité de l'endommagement capteur. Notons que nous avons obtenu des résultats analogues par le biais de la borne inférieure.*

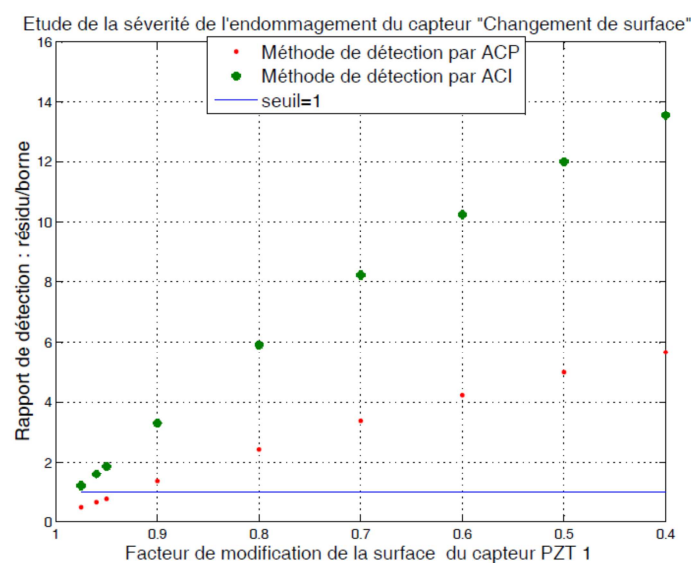


Figure 5.6 : Comparaison de la méthode ACP et ACI en terme de sévérité du défaut capteur

5.7 De la détection à l'estimation de la sévérité de l'endommagement

Au § 5.6.1, nous avons montré que les résidus DI_{ACP} et DI_{ACI} permettent d'estimer la sévérité de l'endommagement capteur (délaminage local) pour un changement de surface de 0.975 à 0.4. Dans cette section, nous allons chercher à **prédire** la sévérité de cet endommagement pour des changements de surface **0.3, 0.2 et 0.1** de la surface totale du capteur.

Pour établir cette étude, nous nous basons sur les résultats des tableaux 5.4 et 5.5 afin de calculer deux fonctions d'interpolations associées respectivement aux résidus DI_{ACP} , et DI_{ACI} , ces deux fonctions sont des polynômes d'ordre 4 et 3, et elles sont données par les équations suivantes :

$$DI_{ACP}^{interpolé}(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i \quad (5.30)$$

$$DI_{ACI}^{interpolé}(x) = \sum_{i=0}^3 b_i x^i \quad (5.31)$$

où x représente la surface du capteur modifié : **0.975 à 0.4**.

Les figures 5.7 et 5.8 montrent respectivement les courbes d'interpolation obtenues en utilisant respectivement le résidu DI_{ACP} et DI_{ACI} .

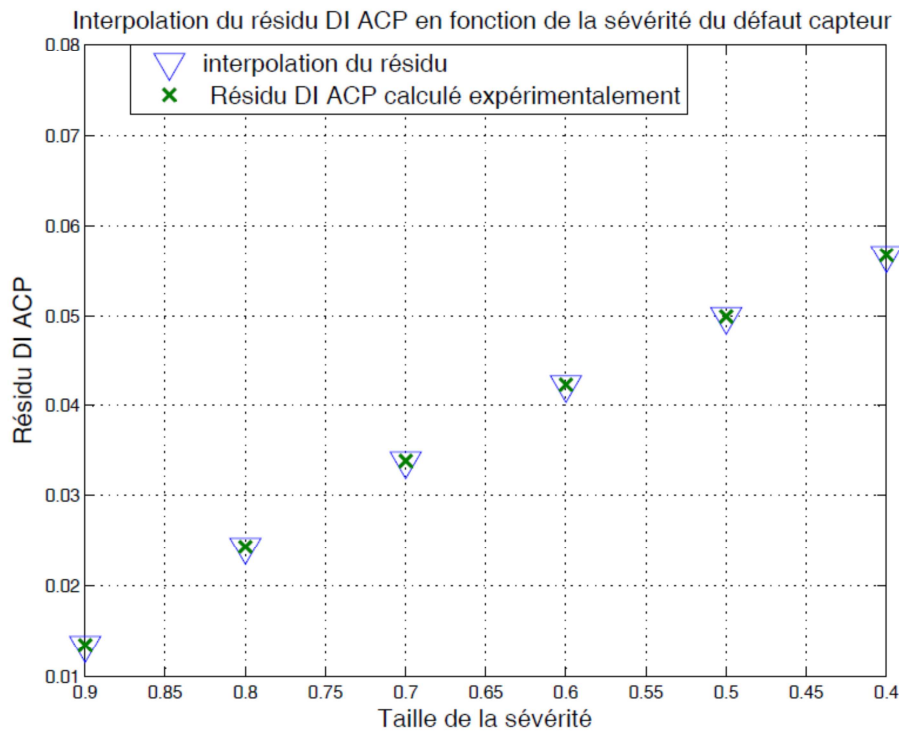


Figure 5.7 : Interpolation du résidu DI_{ACP} en fonction de la sévérité du défaut capteur

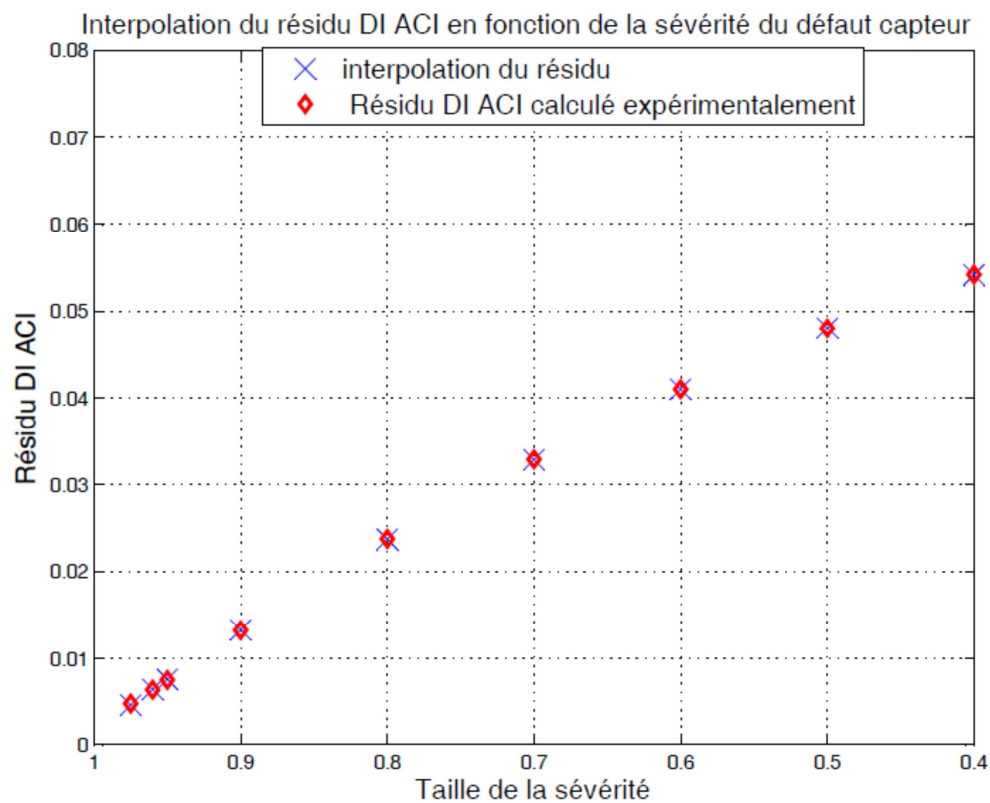


Figure 5.8 : Interpolation du résidu DI_{ACI} en fonction de la sévérité du défaut capteur

A partir des deux fonctions (5.30) et (5.31), nous pouvons prédire la sévérité de l'endommagement pour les tailles 0.3, 0.2 et 0.1 (qui ne sont pas dans les figures 5.7 et 5.8). Pour réaliser les résultats de cette prédiction, nous avons effectué des essais pour ces 3 sévérités, et nous avons comparé les résidus DI_{ACP} et DI_{ACI} , par rapport à ceux calculés par extrapolation, les tableaux 5.11 et 5.12 montrent ces comparaisons.

Tableau 5. 11 : Estimation de la sévérité des défauts capteurs par la méthode ACP

Facteur multiplicatif (changement de surface du capteur 1)	DI_{ACP}	$DI_{ACP}^{\text{extrapolé}}$
0.3	0.0628	0.0626
0.2	0.0684	0.0676
0.1	0.0736	0.0712

Tableau 5. 12 : Estimation de la sévérité des défauts capteurs par la méthode ACI

Facteur multiplicatif (changement de surface du capteur 1)	DI_{ACI}	$DI_{ACI}^{\text{extrapolé}}$
0.3	0.0596	0.0594
0.2	0.0644	0.0637
0.1	0.0686	0.0673

Les résultats ci-dessus montrent que l'erreur de prédiction est petite, que ce soit pour le résidu DI_{ACI} ou pour le résidu DI_{ACP} . Nous pouvons donc utiliser ces deux résidus afin de prédire l'évolution de l'endommagement.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre méthode de détection de l'endommagement par l'ACI. Le développement du résidu et le calcul de la borne associée à cette méthode ont suivi le même raisonnement que celui fait pour la méthode ACP. Les résultats expérimentaux illustrés au tableau 5.1 ont montré que l'endommagement des structures composites a **bien été détecté** par la méthode ACI.

Nous avons comparé les deux méthodes proposées (ACP et ACI) en fonction du rapport de détection, et nous avons montré que la méthode ACI est **plus sensible** à la présence de l'endommagement que la méthode ACP, car la borne inférieure et supérieure associées à la méthode ACI sont **plus faibles** que celle issues de la méthode ACP.

Dans le but de mieux comprendre cette faible valeur des deux bornes de la méthode ACI, nous avons effectué des simulations sur un modèle EF de la plaque composite saine. Par ces simulations, nous avons appliqué l'algorithme 4.1 et 5.1 pour calculer respectivement les bornes des méthodes ACP et ACI. Les résultats obtenus ont permis de montrer encore une fois que les deux bornes de la méthode ACI sont plus faibles que la méthode ACP.

C'est donc la méthode ACI que nous recommandons pour réaliser la méthode de surveillance d'une structure complexe.

Le temps de calcul de la méthode ACP et la méthode ACI est respectivement égal à 1.091s et 1.7112 s.

De plus, nous avons étudié la sévérité d'un endommagement : délaminage local (changement de surface du capteur). Les résultats issus de ces deux études ont montré encore une fois que la méthode ACI est plus sensible à la présence d'un endommagement.

Grâce aux deux résidus que nous avons développés, nous avons prédit l'évolution du délaminage local du capteur PZT1, et les résultats sont encourageants. Puisque c'est la méthode ACI que nous recommandons, nous pourrions envisager le résidu DI_{ACI} afin de prédire l'évolution d'autres types d'endommagements.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons contribué dans le cadre du projet MSIE du pôle ASTech au développement de deux méthodes de détection de l'endommagement pour les structures composites antennaires : *l'Analyse en Composantes Principales (ACP)* et *l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI)*. Profitant de l'utilisation croissante des structures composites dans l'industrie aéronautique, le projet MSIE avait pour but d'étudier l'intégration effective de systèmes antennaires à ces structures, et ainsi à réduire leur nombre. Cette intégration passe aussi par une fiabilisation de la structure antennaire. Ce qui nécessite de munir la structure par des capteurs et actionneurs afin d'obtenir une structure antennaire *intelligente* capable de fournir les informations utiles pour surveiller son état de santé.

Le domaine du contrôle santé des structures (SHM) est un domaine vaste, où se croisent et interagissent plusieurs disciplines, allant de la science des matériaux, à la mécanique des structures, en passant par la technologie capteur jusqu'au traitement du signal. Ainsi, une étude bibliographique a été présentée **au chapitre 1**. Dans cette étude, nous avons défini les étapes d'un système SHM (figure 1.9). Chacune de ces étapes a bénéficié d'un développement technologique et technique considérable de la part de la communauté scientifique du domaine SHM et des industries concernées. Nous avons présenté la technologie piézoélectrique et nous avons examiné quelques méthodes de détection de l'endommagement.

Au chapitre 2, nous avons détaillé nos bancs d'essais. Ces derniers comportent deux plaques et une lame antennaire en matériau composite. La première plaque est à l'état sain, la seconde comporte un endommagement de type **impact**. La lame possède un réseau d'antennes. Elle a servi de référence, puis le **décollement partiel du réseau d'antennes** a été provoqué.

Les structures étudiées sont munies d'un réseau de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques. Le placement des capteurs et actionneurs sur chacune des structures a été optimisé en utilisant une approche basée sur la maximisation des grammiens de gouvernabilité et d'observabilité. L'application de cette méthode de placement a été faite en utilisant des modèles éléments finis (EF) des structures étudiées. Grâce aux résultats obtenus, nous avons collé de manière optimale des éléments piézoélectriques sur les plaques composites et sur la lame antennaire.

Afin de mesurer la réponse dynamique de ces structures, nous avons choisi un élément piézoélectrique en mode actionneur, tandis que les autres sont en mode capteur. Par le biais d'une électronique bien spécifique aux éléments piézoélectriques et du logiciel d'acquisition dSPACE®, nous avons excité l'actionneur avec un signal rectangulaire. Ce signal a été choisi parmi tant d'autres pour deux raisons. D'une part sa brièveté, permettant ainsi de tenir compte de la minimisation de l'énergie lors de l'intégration de nos méthodes de détection sur un système embarqué. D'autre part, la bande passante de ce signal correspondait à celle de la taille des endommagements étudiés : impact et décollement.

Une fois les informations issues des capteurs enregistrées, nous les avons concaténées dans des matrices de mesures. Ces matrices constituent le point de départ pour aborder la troisième étape d'un système SHM, qui est l'extraction de *caractéristiques de fonctionnement*.

Au chapitre 3, nous avons présenté l'étape d'extraction des caractéristiques de fonctionnement. Cette étape est essentielle, car elle oriente le choix d'un résidu indicateur endommagement. Pour définir cette étape, nous étions à l'écoute des attentes de l'industriel concernant l'application de nos méthodes de détection sur des structures aéronautiques de *forme complexe*.

Par conséquent, nous avons orienté l'étape d'extraction de caractéristiques vers les techniques de **séparation aveugle de sources**, l'ACP et l'ACI. Ce sont de méthodes traitant des observations vectorielles (multivariées). Ce choix vient de la disponibilité de plusieurs capteurs et du fait que ces techniques sont des approches statistiques qui *ne nécessitent pas la connaissance d'un modèle mécanique précis* de la structure à surveiller. Les approches retenues seront donc facilement transposables à des structures de forme complexe.

Dans ce chapitre, nous sommes restés dans un cadre général du problème de la SAS. Ainsi, après avoir décrit notre choix pour le modèle de séparation **linéaire**, nous avons rappelé les hypothèses qui lui sont associées. A partir de ces hypothèses, nous avons introduit le concept de l'ACP et de l'ACI. Pour résoudre le problème de séparation, nous avons utilisé une mesure de non gaussianité (*la néguentropie*) et une mesure d'indépendance statistique (*l'information mutuelle*).

Les méthodes ACP et ACI ont été appliquées aux mesures obtenues sur les structures étudiées pour extraire la matrice de mélange/séparation et la matrice de sources. Et nous avons opté pour l'utilisation de la **matrice de séparation** comme *caractéristiques de fonctionnement* de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu.

Partant des matrices de séparation extraites par l'ACP, nous avons entrepris **au chapitre 4**, la méthode de détection par l'ACP. Pour cette méthode, nous avons défini le résidu DI_{ACP} . Cette dernière repose sur la comparaison entre le sous-espace engendré par la matrice de séparation

de la structure dans un état inconnu, avec celui engendré par la matrice de séparation de la structure à l'état sain. La particularité du résidu proposé est qu'il est quantifié numériquement, permettant ainsi d'associer une valeur bien précise à l'endommagement détecté.

Une fois le résidu défini, un intervalle de confiance doit lui être associé, ce dernier permet de statuer sur l'état de santé de la structure.

*Une originalité de ce travail est la définition d'une borne qui ne tient compte d'aucune hypothèse sur la **nature statistique** du résidu. Pour calculer cette borne, nous nous sommes inspirés des travaux de Wedin sur la théorie des perturbations.*

Pour formaliser la méthode de détection par l'ACP, nous avons établi l'algorithme 4.1 qui a permis de détecter l'endommagement de type impact et le décollement du *réseau d'antennes* sur **des mesures expérimentales**.

L'ACP est une solution de la séparation de sources, sous l'hypothèse que les sources soient *statistiquement indépendantes, et identiquement distribuées et gaussiennes*. Dans le cadre de notre travail, nous avons cherché à développer une seconde méthode de détection en relâchant l'hypothèse de gaussianité des sources. De plus, une étude statistique a été faite sur les bruits mesurés par les capteurs. En utilisant la néguentropie, nous avons montré que le bruit mesuré n'est pas gaussien. Ce qui nous a conduit à méthode qui pourrait intégrer l'information non gaussienne, c'est la méthode ACI, et qui elle a fait l'objet du **chapitre 5**.

La comparaison entre la matrice de séparation de la structure à l'état sain et de la structure dans un état inconnu a permis de définir le résidu DI_{ACI} . Cette procédure de détection a été schématisée dans l'algorithme 5.1, et a été appliquée expérimentalement avec efficacité pour détecter l'endommagement de type impact et le décollement du réseau d'antennes.

Nous avons comparé les deux méthodes développées (ACP et ACI) grâce au rapport de détection, et nous avons montré que la méthode ACI est **plus sensible** à la présence d'un endommagement que la méthode ACP. De plus, nous avons estimé par le biais de ces deux méthodes, la sévérité d'un délaminage local d'un capteur.

Perspectives

Pour conclure, les travaux présentés dans ce manuscrit ouvrent la voie à plusieurs développements. Ainsi, un premier travail serait de tester les deux méthodes de détection sur *des structures composites industrielles de forme complexe*.

Si ces formes complexes sont simulables avec précision, alors des modèles EF pourraient prendre en compte différents modèles d'endommagement et le comportement

électromagnétique des antennes (ce travail est en cours par une autre équipe du projet). Nous pourrions envisager de tester ces méthodes pour :

- ✓ La localisation précise l'endommagement,
- ✓ **La classification** des différents types d'endommagements tels que, le délaminage, l'impact, la rupture des fibres, le décollement d'une partie de la structure ou de ses composants,
- ✓ L'évaluation de la durée de vie restante de la structure. En effet, **le pronostic** représente la dernière étape d'un système SHM. Il s'agirait de développer une méthode fiable pour estimer la durée de vie de la structure intelligente.

Les chercheurs de notre équipe appartiennent à des disciplines diverses : *science des matériaux, dynamique des structures, modélisation mécanique, contrôle actif et traitement du signal*. Et l'interaction entre ces chercheurs nous permettra à long terme de définir un système **complet de surveillance**, allant de l'étape 1 à l'étape 9 de la figure 1.9.

A long terme, nous pouvons envisager un contrôle actif de la directivité, du rendement et du gain des structures antennaires. En effet, l'intégration des diagrammes de rayonnement dans un système SHM pour évaluer l'impact de la présence d'un endommagement sur le comportement électromagnétique de la structure antenne. Le but serait de mettre en œuvre des structures antennaires reconfigurables, c'est-à-dire capables de maintenir leurs performances (rendement, directivité) lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations environnementales ou des endommagements détectés.

BIBLIOGRAPHIE

- Acellent Technologies, I. (2011). "Sunnyvale,CA,USA." www.acellent.com.
- Achard, S., and Jutten, C. (2005). "Identifiability of Post-nonlinear Mixtures." *IEEE Signal Processing Letters*, 12 (5) : 423-426.
- AFNOR (1999). "Association Française de Normalisation. Spécification Générique pour les Capteurs à Fibres Optiques, Norme NF EN 61757-1". *Association Française de Normalisation*. Paris, France.
- Akhras, G. (2012). "Des Matériaux Intelligents et des Systèmes Intelligents pour l'Avenir". *Revue Militaire Canadienne*, www.journal.forces.gc.ca/vol/no3/doc/7-14-fra.pdf.
- Allemang, R. J., and Brown, D. L. (1982). "Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis". *Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit*. New York, USA.
- Ans, B., Héroult, J., and Jutten, C. (1985). "Adaptive Neural Architectures: Detection of Primitives" *Proceedings of COGNITIVA'85*. Paris, France.
- Antoni, J. (2005). "Blind Separation of Vibration Components: Principles and Demonstrations." *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19 (6) : 1166-1180.
- Antoni, J., and Menad, S. (2004). "Contrôle et Diagnostic à Partir des Signaux Acoustiques et Vibratoires". *Conférence sur les Méthodes de Surveillance et Techniques de Diagnostic Acoustiques et Vibratoire*. Senlis, France.
- Baker, A. A., Dutton, S., and Kelly, W. D. (2003). "Composite Materials for Aircraft Structures". *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. New York, USA.
- Balageas, D. (2006). "Structural Health Monitoring, Chapter 1, Introduction to Structural Health Monitoring" *ISTE*. London, UK.
- Balageas, D., Chapuis, B., Deban, G., and Passilly, F. (2010). "Evaluation Quantitative de l'Amélioration Apportée par la méthode TSR à la détection de Défauts par Thermographie Stimulée Impulsionnelle. Cas d'un patch composite instrumenté" *Congrès Français de Thermique Energies et Transports durables*. Le Touquet, France.
- Balas, M. J. (1978). "Active Control of Flexible Systems." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 25 (3) : 415-436.
- Balmes, E., Bianchi, J. E., and Leclère, J. M. (2008). "Structural Dynamics Toolbox User's Guide". Paris, France.

Bar-Ness

- , Y., Carlin, J. W., and Steinberger, M. L. (1982). "Bootstrapping Adaptive Interference Cancelers-Some Practical Limitations". *Global Telecommunications Conference*, 3 : 1251-1255.
- Baruh, H. (1992). "Placement of Sensors and Actuators in Structural Control". *Control and Dynamic Systems*, 52 : 359-390.
- Basseville, M. (1996). "Information : Entropies, Divergences et Moyennes". *Publication interne*, N° 1020. INRIA. Rennes, France.
- Basseville, M., Abdelghani, M., and Benveniste, A. (2000). "Subspace-Based Fault Detection Algorithms for Vibration Monitoring". *Automatica*, 36 (1) : 101-109.
- Beaumont, P. W. R., Dimant, R. A., and Shercliff, H. R. (2006). "Failure Processes in Composite Materials: Getting Physical". *Journal of Materials Science*, 41 (20) : 6526-6546.
- Bendat, J. S., and Piersol, A. G. (2000). "Random Data: Analysis and Measurement Procedures" *Wiley-Interscience*. New York, USA.
- Bent, A. A., Hagood, N. W., and Rodgers, J. P. (1995). "Anisotropic Actuation with Piezoelectric Fiber Composites". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 6 (3) : 338-349.
- Boller, C., Chang, F. K., and Fujino, Y. (2009). "Encyclopedia of Structural Health Monitoring". *John Wiley & Sons*. New York, USA.
- Box, G. E. P. (1954). "Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems I: Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification". *Annals of Mathematical Statistics*, 25 (2) : 290-302.
- Brissaud, M. (2007). "Matériaux Piézoélectriques : Caractérisation, Modélisation et Vibration". *Presses Polytechniques et Universitaire Romandes*. Lausanne, Suisse.
- Bruant, I., Gallimard, L., and Nikoukar, S. (2010). "Optimal Piezoelectric Actuator and Sensor Location for Active Vibration Control, using Genetic Algorithm". *Journal of Sound and Vibration*, 329(10), 1615-1635.
- Cardoso, J. F. (2001). "The Three Easy Routes to Independent Component Analysis, Contrasts And Geometry". In: *Proceedings of ICA 2001*. San Diego, USA.
- Cardoso, J. F. (1998). "Blind signal separation: Statistical Principles". *Proceedings of the IEEE*, 86 (10) : 2009-2025.
- Cardoso, J. F. (1989). "Source Separation using Higher Order Moments". *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. San Francisco, USA.
- Castillo, E. (1998). "Extreme Value Theory in Engineering". *Academic Press Series in Statistical Modeling and Decision Science*. San Diego, USA.
- Cawley, P., and Adams, R. D. (1979). "Location of Defects in Structures From Measurements of Natural Frequencies". *J Strain Anal Eng Des*, 14(2) : 49-57.

- Chang, F. K. (2011). "Preface" *Edit in Chef of the International Workshop on Structural Health Monitoring* 2011. Stanford, USA.
- Chang, F. K., Markmiller, J. F. C., Ihn, J. B., and Cheng, K. Y. (2007). "A Potential Link from Damage Diagnostics to Health Prognostics of Composites through Built-in Sensors" *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 129 (6) : 718-729.
- Chapuis, B. (2010). "Contrôle Santé Intégré par Méthode Ultrasonore des Réparations Composites Collées sur des Structures Métalliques" *Thèse de Doctorat, Université Paris 7*. France.
- Charkani, N. (1996). "Séparation Auto-Adaptative de Sources pour les Mélanges Convolutifs. Application à la Téléphonie Mains-Libres dans les Voitures". *Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Grenoble*. France.
- Cho, J. H., Lee, J. M., Choi, S. W., Lee, D., and Lee, I. B. (2005). "Fault Identification for Process Monitoring using Kernel Principal Component Analysis" *Chemical Engineering Science*, 60 (1) : 279-288.
- Comon, P. (1990). "Analyse en Composantes Indépendantes et Identification Aveugle" *Traitement du Signal*, 7 (5) : 435-450.
- Comon, P., and Jutten, C. (2010). "Handbook of Blind Source Separation". *Elsevier Ltd*. Burlington, USA.
- Comon, P. (1994). "Independent Component Analysis, A new Concept?". *Signal Processing*, 36 (3) : 287-314(3).
- Cover, T. M., and Thomas, J. A. (2006). "Elements of Information Theory". *John Wiley & Sons*. New Jersey, USA.
- Croux, C., and Ruiz-Gazen, A. (2005). "High Breakdown Estimators for Principal Components: The Projection-Pursuit Approach Revisited". *Journal of Multivariate Analysis*, 95 (1) : 206-226.
- Cugnoni, J. (2004). "Identification par Recalage Modal et Fréquentiel des Propriétés Constitutives de Coques en Matériaux". *Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*. Suisse.
- Darmois, G. (1953). "Analyse Générale des Liaisons Stochastique" *Revue de l'Institut Internationale de Statistiques*, 21 : 2-8.
- Daszykowski, M., Kaczmarek, K., Vander Heyden, Y., and Walczak, B. (2007). "Robust Statistics in Data Analysis - A Review, Basic Concepts". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 85(2), 203-219.
- Davis, C., and Kahan, W. M. (1970). "The Rotation of Eigenvectors by a Perturbation". *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 7 (1) : 1-46.
- De Boe, P., and Golinval, J. C. (2003). "Principal Component Analysis of a Piezosensor Array for Damage Localization". *Structural Health Monitoring*, 2 (2) : 137-144.

- De Coulon, F. (1998). "Théorie et Traitement des Signaux". *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*. Lausanne, Suisse.
- De Lathauwer, L., Castaing, J., and Cardoso, J. F. (2007). "Fourth-Order Cumulant-Based Blind Identification of Underdetermined Mixtures". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55 (II) : 2695-2973.
- De Lathauwer, L., De Moor, B., and Vandewalle, J. (2000). "Fetal Electrocardiogram Extraction by Blind Source Subspace Separation". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47 (5) : 567-572.
- De Rosnay, J. (1984). "Biologie et Informatique: l'Entrée dans l'Ere des Machines Moléculaires". *Cité des Sciences et de l'Industrie*. Paris, France.
- Donoho, D. (1981). "On Minimum Entropy Deconvolution". *Applied Time Series Analysis II*, 565-609.
- Dunia, R., Qin, S. J., Edgar, T. F., and McAvoy, T. J. (1996). "Identification of Faulty Sensors Using Principal Component Analysis". *AIChE Journal*, 42 (10) : 2797-2811.
- Duplessis, Y. K. (2007). "Etude Expérimentale et Numérique de la Fissuration Intralaminaire et de l'Initiation du Délaminage de Bord Libre dans les Structures Stratifiées Pseudo-Tissées". *Thèse de Doctorat, Mines ParisTech*. France.
- Ewins, D. J. (2000). "Modal Testing Theory, Practice and Application". *Research Studies Press Ltd*. Philadelphia, USA.
- Farrar, C. R., and Lieven, N. A. J. (2007). "Damage Prognosis: The Future of Structural Health Monitoring". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (1851) : 623-632.
- Fassois, S. D., and Sakellariou, J. S. (2007). "Time-Series Methods for Fault Detection and Identification in Vibrating Structures". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (1851) : 411-448.
- Ferroperm (2009). "Material Data Based on Typical Values for Piezoceramic". <http://www.ferroperm-piezo.com/>.
- Flynn, E. B., and Todd, M. D. (2010). "A Bayesian Approach to Optimal Sensor Placement for Structural Health Monitoring with Application to Active Sensing". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24 (4) : 891-903.
- Friswell, M. I., and Inman, D. J. (2000). "Sensor Validation for Smart Structures". *Intelligent Material Systems and Structures*, 10 (12) : 973-982.
- Fritzen, C. P. (2006). "Structural Health Monitoring, Chapter 2, Vibration-Based Techniques for Structural Health Monitoring". *ISTE*. London, UK.
- Gaeta, M., and Lacoume, J.-L. (1990). "Estimateurs du Maximum de Vraisemblance Etendus à la Séparation de Sources Non Gaussiennes". *Traitement du Signal*, 7 : 419-434.
- Gavert, H., Hurri, J., Sarela, J., and Hyvarinen, A. (2005). "FastICA Matlab Package". *Laboratory of Computer and Information Science*. Aalto, Finland.

- Gawronski, W. (1998). "Dynamics and Control of Structures: a Modal Approach." *Springer*. New York, USA.
- Gawronski, W. (1997). "Actuator and Sensor Placement for Structural Testing and Control". *Journal of Sound and Vibration*, 208 (1) : 101-209.
- Gay, D. (2005). "Matériaux Composites". *Lavoisier*. Paris, France.
- Giurgiutiu, V, Xu, B., and Liu, W. (2010). "Development and Testing of High-Temperature Piezoelectric Wafer Active Sensors for Extreme Environments". *Structural Health Monitoring*, 9 (6) : 513-525.
- Giurgiutiu, V, Zagrai, A., and Bao, J. J. (2002). "Piezoelectric Wafer Embedded Active Sensors for Aging Aircraft Structural Health Monitoring". *Structural Health Monitoring*, 1 (1) : 41-61.
- Gmür, T. (2008). "Dynamique des structures - Analyse Modale Numérique." *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*. Lausanne, Suisse.
- Golub, G. H., and Van Loan, C. F. (1983). "Matrix Computation." *Johns Hopkins University Press*. Baltimore, USA.
- Grattan, K. T. V., and Sun, T. (2000). "Fiber Optic Sensor Technology: An overview". *Sensors and Actuators, A: Physical*, 82 (1) : 40-61.
- Guénin, G. (2012). "Matériaux Actifs et Intelligents: Alliage à Mémoire de Forme" *Techniques de l'Ingénieur*, Paris, France.
- Hajrya, R, Mechbal, N, and Vergé, M. (2010). "Active Damage Detection and Localization Applied to a Composite Structure Using Piezoceramic Patches." *IEEE Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*. Nice, France.
- Hajrya, R, Mechbal, N., and Vergé, M. (2011a). "Enhanced Multivariate Based Approach for SHM using Hilbert Transform". *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society 2011*, Montreal, Quebec, Canada, September, 2011.
- Hajrya, R, Mechbal, N, and Vergé, M (2011b). "Damage Detection of Composite Structure Using Independent Component Analysis". *International Workshop on Structural Health Monitoring 2011*. Stanford, USA.
- Harkat, M. F., Mourot, G., and Ragot, J. (2006). "An Improved PCA Scheme for Sensor FDI: Application to an air Quality Monitoring Network". *Journal of Process Control*, 16(6), 625-634.
- Hartemann, P. (2012). "Effets et Matériaux Magnétostrictifs". *Techniques de l'Ingénieur*. Paris, France.
- Hérault, J., Jutten, C., and Ans, B. (1986). "Space or Time Adaptive Signal Processing by Neural Network Models". Utah, USA.
- Hérault, J. M., Jutten, C., and Ans, B. (1985). "Détection de Grandeurs Primitives dans un Message Composite par une Architecture de Calcul Neuromimetique en Apprentissage non Supervisé" *10ème Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*. Nice, France.

- Hill, J. L., and Culler, D. E. (2002). "Mica: A Wireless Platform for Deeply Embedded Networks". *IEEE Micro*, 22 (6) : 12-24.
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Snin, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C., and Liu, H. H. (1998). "The Empirical Mode Decomposition and the Hubert spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis". *Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454 (1971) : 903-995.
- Hvam, L., Beate, C., and Cardoso, J. F. (1993). "Séparation Adaptative de Sources en Aveugle. Implantation Complexe sans Contraintes". *14^o Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*. Juan Les Pins, France.
- Hyvärinen, A. (1998). "New Approximations of Differential Entropy for Independent Component Analysis and Projection Pursuit". In *Advances in Neural Information Processing Systems*, 10 : 273-279.
- Hyvärinen, A. (1997). "Independent Component Analysis Using Mutual Information." *Report N° A 46, Department of Computer Science, University of Helsinki*. Finland.
- Hyvärinen, A. (1999). "Fast and robust fixed-point algorithms for Independent Component analysis". *IEEE Transactions on Neural Networks*, 10(3), 626-634.
- Ihn, J. B., and Chang, F. K. (2004). "Detection and Monitoring of Hidden Fatigue Crack Growth Using a Built-In Piezoelectric Sensor/Actuator Network: Part I. Diagnostics" *Smart Materials and Structures*, 13 (3) : 609-620.
- Jolliffe, I. T. (1986). "Principal Component Analysis." *Springer*. New York, USA.
- Jones, M. C., and Sibson, R. (1987). "What is Projection Pursuit ?." *Royal Statistical Society, ser. A* (150) : 1-36.
- Jutten, C., and Comon, P. (2007). "Séparation de Sources 1 : Concepts de Base et Analyse en Composantes Indépendantes." *Lavoisier*. Paris, France.
- Jutten, C., and Gribonval, R. (2003). "L'Analyse en Composantes Indépendantes : un Outil Puissant pour le Traitement de l'Information". *19^{ème} Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*. Paris, France.
- Jutten, C., and Herault, J. (1988). "Independent Component Analysis Versus PCA". *International Conference EUSIPCO*. Grenoble, France.
- Kailath, T. (1980). "Linear Systems." *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, USA.
- Kano, M., Hasebe, S., Hashimoto, I., and Ohno, H. (2001). "A New Multivariate Statistical Process Monitoring Method using Principal Component Analysis". *Computers and Chemical Engineering*, 25 (7) : 1103-1113.
- Kay, S. M. (2010). "Course on Practical Statistical Signal Processing using MATLAB". *Applied Technology Institute*. Maryland, USA.
- Kerschen, G., Poncelet, F., and Golinval, J. C. (2007). "Physical Interpretation of Independent Component Analysis in Structural Dynamics". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 (4) : 1561-1575.

- Kessler, S. S, Spearing, S. M., and Soutis, C. (2002). "Damage Detection in Composite Materials using Lamb Wave Methods". *Smart Materials and Structures*, 11 (2) : 269-278.
- Keye, S., Rose, M., and Sachau, D. (2001). "Localizing Delamination Damages in Aircraft Panels from Modal Damping Parameters". *Proc Int Modal Anal Conf IMAC*, 1, 412-417.
- Kosambi, D. (1943). "Statistics in Function Space". *Journal of Indian Mathematical Society*, 7, 76-88.
- Krempf, P., Schleinzner, G., and Wallnöfer, W. (1997). "Gallium Phosphate, GaPO₄: A New Piezoelectric Crystal Material for High-Temperature Sensorics". *Sensors and Actuators A: Physical*, 61 (1-3) : 361-363.
- Lacoume, J.-L, Amblard, P.-O, and Comon, P. (1999). "Statistiques d'Ordres Supérieurs" *Rapport de l'INRIA*. Sophia-Antipolis, France.
- Lacoume, J. J, and Ruiz, P. (1988). "Sources Identification: A solution Based on the Cumulants". *Fourth Annual ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*. Minneapolis, USA.
- Lemistre, M. B., and Balageas, D. L. (2002). "Health Monitoring System for Composite Material using Electromagnetic Field Measurement". *Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering*. San Diego, CA, USA.
- Lin, M., and Chang, F. K. (2002). "The Manufacture of Composite Structures with a Built-in Network of Piezoceramics". *Composites Science and Technology*, 62(7-8) : 919-939.
- Liu, L, and Yuan, F. G. (2008). "Wireless Sensors with Dual-Controller Architecture for Active Diagnosis in Structural Health Monitoring". *Smart Materials and Structures*, 17(2) : 1-11.
- Liu, Y, Mechbal, N., and Vergé, M (2011). "Damage Monitoring Based on Wave Illumination of Structures". *International Workshop on Structural Health Monitoring 2011*. Stanford, USA.
- Lynch, J. P, and Loh, K. J. (2006). "A Summary Review of Wireless Sensors and Sensor Networks for Structural Health Monitoring". *The Shock and Vibration Digest*, 38 : 91-128.
- Malinowski, E. R. (1991). "Factor Analysis in Chemistry". *Wiley-Interscience*. New York, USA.
- Mallat, S. (2011). "Une Exploration des Signaux en Ondelettes". *Ecole Polytechnique*. Palaiseau, France.
- Maronna, R. (2005). "Principal Components and Orthogonal Regression Based on Robust Scales". *Technometrics*, 47(3) : 264-273.

- Mechbal, N., Vergé, M., Coffignal, G., and Ganapathi, S. (2006). "Application of a Combined Active Control and Fault Detection Scheme to an Active Composite Flexible Structure". *International Journal of Mechatronics, Elsevier*, 16 (3-4) : 193-208.
- Metis Design Corporation (2011). "San Francisco, CA, USA". www.metisdesign.com.
- Meyer, C. D. (2001). "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra". *SIAM*. Philadelphia, USA.
- Mix, P. E. (2005). "Introduction to Nondestructive Testing". *Wiley Interscience*. New Jersey, USA.
- Monkhouse, R. S. C, Wilcox, P. D and Cawley, P. (1997). "Flexible Interdigital PVDF Transducers for the Generation of Lamb Waves in Structures". *Ultrasonics*, 35 (7) : 489-498.
- Montalvão, D., Ribeiro, A. M. R., and Duarte-Silva, J. (2009). "A Method for the Localization of Damage in a CFRP Plate Using Damping". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (6) : 1846-1854.
- Moussaoui, S, Brie, D, Carteret, C, and Djafari, A. M. (2004).
"Application of Bayesian Non-negative Source Separation to Mixture Analysis in Spectroscopy". 24th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, MAXENT 2004. Garching Bei München, Germany.
- MSIE (2009). "Présentation du Projet MSIE". *INEO*. Paris, France
- Nuzillard, D, and Bijaoui, A. (2000). "Blind Source Separation and Analysis of Multispectral Astronomical Images". *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147(1) : 129-138.
- Papadimitriou, C. (2005). "Pareto Optimal Sensor Locations for Structural Identification" . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) : 1655-1673.
- Park, G., Sohn, H., Farrar, C. R., and Inman, D. J. (2003). "Overview of Piezoelectric Impedance-Based Health Monitoring and Path Forward". *Shock and Vibration Digest*, 35 (6) : 451-463.
- Pham, D. T. (2004). "Fast Algorithm for Estimating Mutual Information, Entropies and Score Functions". *Signal Processing, IEEE Transactions*, 52 : 2690-2700.
- Poncelet, F, Kerschen, G, Golinval, J. C., and Verhelst, D. (2007). "Output-Only Modal Analysis Using Blind Source Separation Techniques." *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6) : 2335-2358.
- Qin, S. J., and Dunia, R. (1998). "Determining the Number of Principal Components for Best Reconstruction". *IFAC DYCOPS'98*. Greece.
- Raghavan, A., and Cesnik, C. E. S. (2007). "Review of Guided-Wave Structural Health Monitoring". *Shock and Vibration Digest*, 39 (2) : 91-114.
- Ragot, J, Mourot, G., Benaïcha, A, and Benothman, K. (2011). "Application de l'ACP par Intervalles au Diagnostic". *Conférence Qualita 2011*. Angers. France.

- Renard, J., and Nimdum, P. (2012). "Contrôle Santé des Structures Composites Antennaires". *Rapport de Synthèse du projet MSIE, Centre des Matériaux des Mines ParisTech*. Paris, France.
- Roach, D., and Neidigk, S. (2011). "Does the Maturity of Structural Health Monitoring Technology Match User Readiness?". *International Workshop on Structural Health Monitoring 2011*. Stanford, USA.
- Roll, J. L. (1981). "Contribution à la Proprioception Musculaire, à la Perception et au Contrôle du Mouvement Chez l'Homme". *Thèse de Doctorat. Université d'Aix-Marseille*. France .
- Rousseeuw, P. J., Debruyne, M, Engelen, S., and Hubert, M. (2006). "Robustness and Outlier Detection in Chemometrics". *Critical Reviews in Analytical Chemistry*, 36(3-4), 221-242.
- Rytter, A. (1993). "Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures". *Ph. D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University*. Denmark.
- Saeed, K. (2010). "Contribution à la Surveillance de l'Intégrité des Structures.", *Thèse de Doctorat, Arts et Métiers ParisTech*. France.
- Saporta, G. (2006). "Probabilités, Analyse des Données et Statistique". *Technip*. Paris, France.
- Schölkopf, B, Smola, A, and Muller, K. R. (1998). "Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem." *Neural Computation*, 10 (5) : 1299-1319.
- Shannon, C. E. (1948). "A Mathematical Theory of Communication." *Bell System Technical*, 27 : 379-423.
- Sohn, H, Park, G., Wait, J. R., Limback, N. P and Farrar, C. R. (2004). "Wavelet-Based Active Sensing for Delamination Detection in Composite structures". *Smart Materials and Structures*, 13 (1) : 153-160.
- Song, H, Zhong, L., and Han, B. (2005). "Structural Damage Detection by Integrating Independent Component Analysis and Support Vector machine". *Advanced Data Mining and Applications*, 3584: 670-677.
- Staszewski, W. J. (2002). "Intelligent Signal Processing for Damage Detection in Composite Materials." *Composites Science and Technology*, 62 (7-8) : 941-950.
- Staszewski, W. J., and Robertson, A. N. (2007). "Time-Frequency and Time-Scale Analyses for Structural Health Monitoring". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (1851) : 449-477.
- Su, Z, Wang, X, Chen, Z, Ye, L, and Wang, D. (2006). "A Built-in Active Sensor Network for Health Monitoring of Composite Structures". *Smart Materials and Structures*, 15 (6): 1939-1949.
- Su, Z, and Ye, L. (2009). "Identification of Damage using Lamb Wave". *Springer*. Berlin, Germany.

- Tharrault, Y. (2008). "Diagnostic de fonctionnement par Analyse en Composantes Principales : Application à une station de Traitement des eaux usées". *Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine*. Nancy, France.
- Tharrault, Y., Mourot, G., Ragot, J., and Maquin, D. (2008). "Fault Detection and Isolation with Robust Principal Component Analysis". *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(4), 429-442.
- Tibshirani, R. (1992). "Principal Curves Revisited". *Statistics and Computing*, 2 (4) : 183-190.
- Valle, S., Li, W., and Qin, S. J. (1999). "Selection of the Number of Principal Components: The Variance of the Reconstruction Error Criterion with a Comparison to Other Methods". *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 38(11), 4389-4401.
- Vanlanduit, S, Parloo, E, Cauberghe, B, Guillaume, P, and Verboven, P. (2005). "A Robust Singular Value Decomposition for Damage Detection under Changing Operating Conditions and Structural Uncertainties". *Journal of Sound and Vibration*, 284 (3-5) : 1033-1050.
- Viktorov, I. A. (1967). "Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications". *Plenum Press*. New York, USA.
- Villegas, T, Fuente, M. J, and Sainz-Palmero, G. I. (2010). "Fault Diagnosis in a Wastewater Treatment Plant using Dynamic Independent Component Analysis". *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10-Conference Proceedings*. Marrakech, Morocco.
- Wedin, P. (1972). "Perturbation Bounds in Connection with Singular value Decomposition". *Numerical Mathematics*, 12(1) : 99-111.
- West, W. M. (1986). "Illustration of the Use of Modal Assurance Criterion to Detect Structural Changes in an Orbiter Test Specimen". *International Modal Analysis Conference*. Los Angeles, USA.
- Wold, S. (1978). "Cross-validatory Estimation of the Number of Components in Factor and Principal Components Models". *Technometrics*, 20 : 397-405.
- Wu, G. G., Liang, Y. C, Lin, W. Z., Lee, H. P., and Lim, S. P. (2003). "A note on Equivalence of Proper Orthogonal Decomposition Methods". *Journal of Sound and Vibration*, 265(5), 1103-1110.
- Wu, M. C, Rogowski, R. S, and Tedjojuwono, K. K. (2002). "Fabrication of Extremely Short Length Fiber Bragg Gratings for Sensor Applications". *Proceedings of IEEE Sensors*, 1(1), 49-55.
- Wubbeler, G., Ziehe, A., and Mackert, B. M. (2000). "Independent Component Analysis of Noninvasively Recorded Cortical Magnetic DC-Fields in Humans". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47 (5) : 594 : 599.
- Yang, J. N, Lei, Y, Lin, S., and Huang, N. (2004). "Hilbert-Huang Based Approach for Structural Damage Detection". *Journal of Engineering Mechanics*, 130 (1) : 85-95.

- Ye, L, Lu, Y., Su, Z., and Meng, G. (2005). "Functionalized Composite Structures for New Generation Airframes: A review". *Composites Science and Technology*, 65 : 1436-1446.
- Yuan, S, Lai, X, Zhao, X., Xu, X., and Zhang, L. (2006). "Distributed Structural Health Monitoring System Based on Smart Wireless Sensor and Multi-Agent Technology". *Smart Mater. Struct*, 15 : 1-8.
- Yue, H. H., and Qin, S. J. (2001). "Reconstruction-Based Fault Identification Using a Combined Index". *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 40 (20) :4403-4414.
- Zang, C, Friswell, M. I., and Imregun, M. (2004). "Structural Damage Detection using Independent Component Analysis". *Structural Health Monitoring*, 3 (1) : 69-83.
- Zarzoso, V, Nandi, A. K., and Bacharakis, E. (1997). "Maternal and Foetal ECG Separation using Blind Source Separation Methods". *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 14(3), 207-225.
- Zhao, X, Gao, H, Zhang, G, Ayhan, B, Yan, F, Kwan, C, and Rose, J. L. (2007). "Active Health Monitoring of an Aircraft Wing with Embedded Piezoelectric Sensor/actuator Network: I. Defect detection, Localization and Growth Monitoring". *Smart Materials and Structures*, 16(4), 1208-1217.
- Zou, Y, Tong, L, and Steven, G. P. (2000). "Vibration-Based Model-Dependent Damage (delamination) Identification and Health Monitoring for Composite Structures - a Review". *Journal of Sound and Vibration*, 230(2), 357-378.

ANNEXE

**ETUDE DE LA DEFORMATION STATIQUE D'UNE STRUCTURE
COMPOSITE ANTENNAIRE**

Dans le cadre du projet MSIE, nous avons aussi travaillé sur la lame composite 1, structure décrite brièvement dans le chapitre 2. Son étude et réalisation a été faite en collaboration avec trois membres du projet MSIE : l'IUT de ville d'Avray et les industriels SATIMO et INEO, et elle visait deux objectifs. D'une part, mesurer les déformations statiques de la lame 1 par le biais de capteurs piézoélectriques (figure A.1). D'autre part, vérifier s'il existe un **couplage** entre les effets **électromagnétiques** et les **informations électriques** transmises par les capteurs piézoélectriques lors de la déformation de la lame 1.

Cette collaboration nous a permis de montrer que :

- ✓ Les matériaux piézoélectriques peuvent être utilisés pour mesurer les déformations statiques de la structure en **flexion** et en **torsion** (figure A.2, A.3), la répétabilité des mesures a été vérifiée, *à condition que les conditions aux limites de la structure restent inchangées*.
- ✓ Il n'existe aucun couplage entre le comportement électromagnétique de la structure antennaire et les informations électriques transmises par les capteurs piézoélectriques : les mesures effectuées chez SATIMO ont permis de montrer que les deux phénomènes peuvent coexister au même temps sans *aucune interaction* (figure A.4).

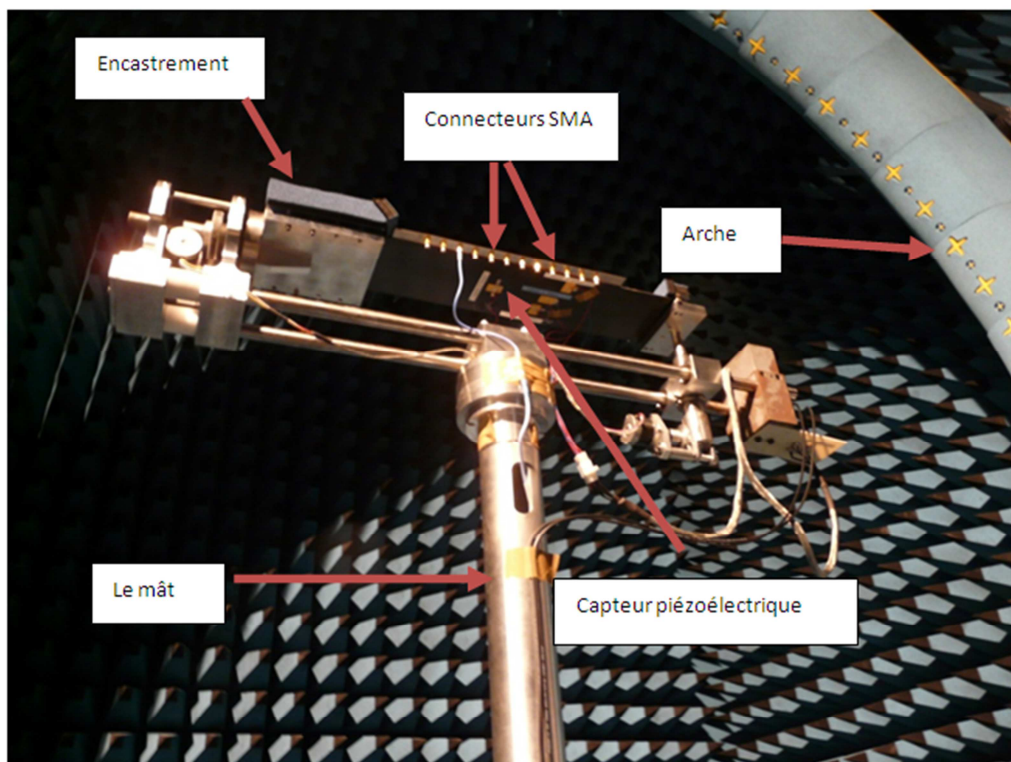


Figure A.1: Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite au repos »

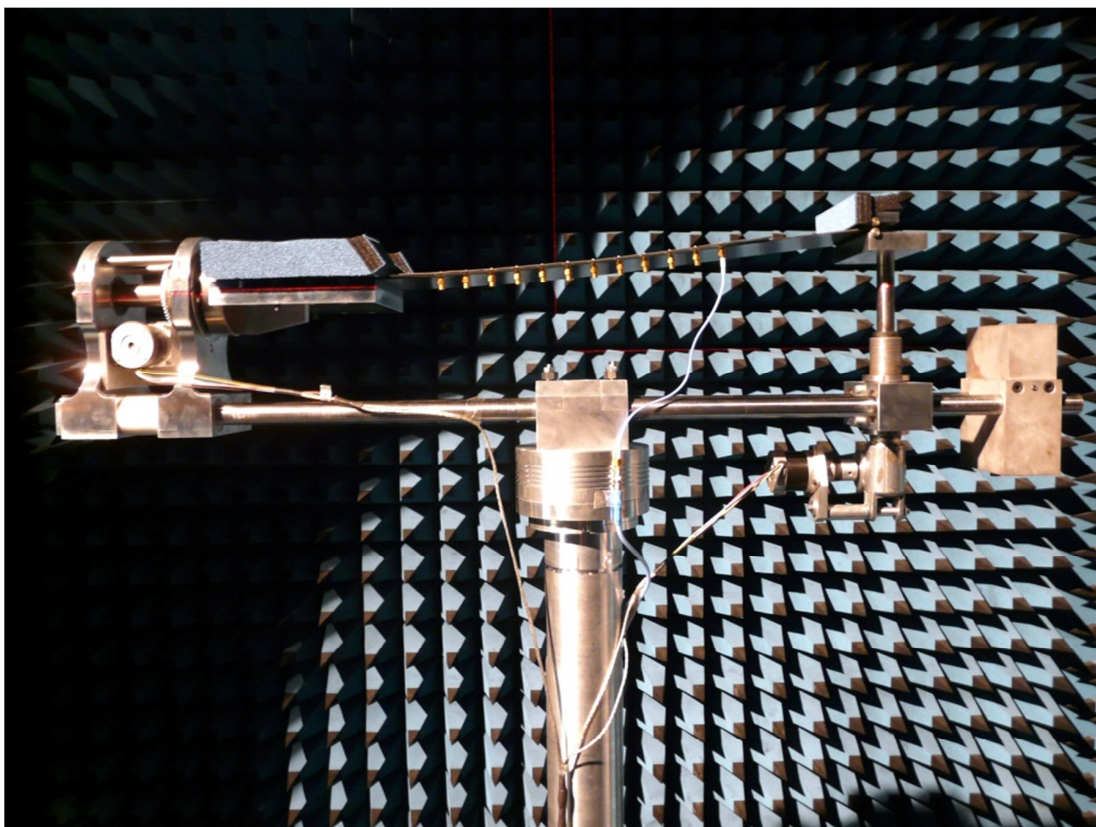


Figure A.2 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite fléchie à +50mm »

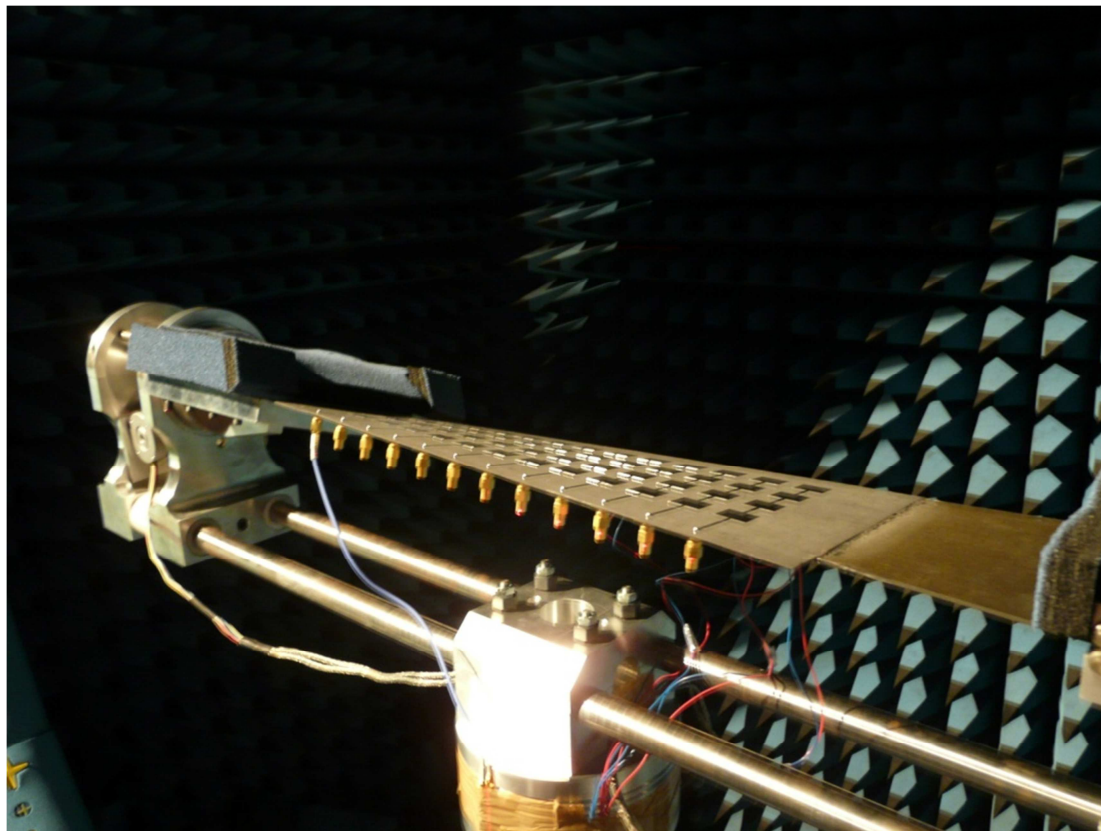


Figure A.3 : Banc d'essais monté dans une chambre anéchoïque « lame composite tordue à +20° »

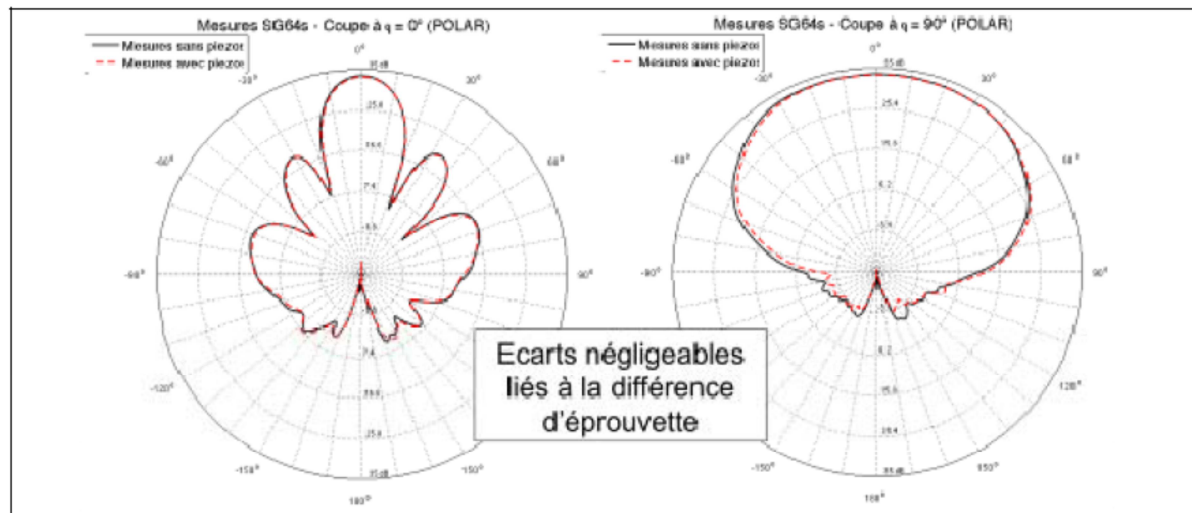


Figure A.4 : Mesures comparatives réalisées en flexion "-50 mm" obtenues pour la lame antennaire disposée de capteurs piézoélectriques « trait discontinu » puis pour la lame sans capteurs piézoélectriques « trait continu » : (MSIE 2009)

Contrôle Santé des Structures Composites :

Approche Expérimentale et Statistique

RÉSUMÉ : L'industrie aéronautique utilise des matériaux toujours plus performants pour ses avions et systèmes spatiaux. Ainsi, pour réaliser les communications, les aviateurs souhaiteraient aller vers une réelle intégration des structures antennaires à la structure de l'avion et donc de passer de la structure antennaire vue comme équipement embarqué à la structure antennaire devenue équipement intégré. Notre travail de thèse se situe dans le cadre du projet MSIE (Matériaux et Structures Intelligentes pour l'Electromagnétisme). L'objectif de ce projet est de répondre aux demandes du secteur aéronautique, en évaluant le concept de nouveaux matériaux susceptibles de permettre la réalisation de *structures antennaires* conformées, compactes et reconfigurables. Cette adaptabilité suppose que ces structures soient reconfigurables et donc capables, une fois munies de capteurs/actionneurs, de réaliser un contrôle actif de la directivité, du rendement et du gain des structures antennaires. Il est alors apparu nécessaire d'adjoindre à ces futures structures, une fonction de *Contrôle santé* ou *Structural Health Monitoring "SHM"*, de manière à pouvoir détecter d'éventuels endommagements (*impact, délaminage entre le réseau d'antennes et la structure composite, rupture des fibres, etc...*) susceptibles de se produire au cours du vol ou au cours du *vieillissement de la structure*. C'est dans le développement de la fonction SHM que s'inscrit ce travail de thèse. A cet effet, nous avons réalisé des *dispositifs expérimentaux* en tenant compte des demandes de l'industriel. Ces dispositifs comportent des *structures composites antennaires* munies de *capteurs et d'actionneurs piézoélectriques*. A travers les informations transmises par les capteurs, nous avons développé deux méthodes de détection de l'endommagement à base d'*Analyse en Composantes Principales (ACP)* et d'*Analyse en Composantes Indépendantes (ACI)*. Ces deux méthodes sont des approches statistiques qui ne nécessitent pas la connaissance du modèle mécanique de la structure à surveiller. Il s'agit de méthodes traitant des observations vectorielles (multivariées) transmises par les capteurs piézoélectriques, afin d'en extraire des *caractéristiques de fonctionnement* de la structure à l'*état sain* et de la structure dans un *état inconnu*. La comparaison entre ces caractéristiques nous a permis de calculer pour chacune des deux méthodes, un *résidu indicateur d'endommagement*. Nous avons complété ce résidu par une robustification de la prise de décision et cela par le calcul d'une borne, au-delà de laquelle l'endommagement est détecté.

Mots clés : *Contrôle santé des structures, indicateur d'endommagement, matériaux composites antennaires, technologie piézoélectrique, analyse en composantes principales et indépendantes, statistique d'ordre supérieur, théorie des perturbations, prise de décision robuste.*

Structural Health Monitoring of Composite Structures: Statistical and Experimental Approach

ABSTRACT: The aviation industry uses materials always more effective for its aircraft and space systems. The aircraft are equipped with antenna arrays to make communications. Our thesis falls within the MSIE project (Matériaux et Structures Intelligentes pour l'Electromagnétisme). The objective of this project is to meet the demands of the aviation industry, to evaluate the concept of new materials that enable the realization of *compact and reconfigurable antenna composite structures*. This adaptability assumes that these structures are also equipped with sensors/actuators able to perform an active control. It then necessary to add to these future structures a *Structural Health Monitoring systems (SHM)* to detect possible damage (*impact, delamination between the host structure and the antenna array, fiber breakage, etc...*), which may occur during the flight or during the aging of the structure. The development of the SHM systems is the core of our thesis. For this purpose, we have built *experimental tests* that took into account the industrial requirements. These experimental tests include *antenna composite structures* equipped with *piezoelectric sensors and actuators*. Through the information received from the sensors, we developed two damage detection methodologies, based on *Principal Component Analysis (PCA)* and *Independent Component Analysis (ICA)*. These methods are *statistical approaches*, which have the particularity of not requiring any knowledge of the *mechanical model* of the structure to be monitored. These two methods are a way to extract features from the piezoelectric sensors of the structure in a *healthy and in an unknown state*. The comparison between these characteristics allowed us to calculate for each method, a *damage index*. Furthermore, to robustify the decision, we have associated to this damage index, a bound that decides if the structure is in healthy or damaged state. We have successfully applied the two methods to detect damage in *antenna composite structures*, namely: *impact, delamination* of the composite structures.

Keywords : *Structural health monitoring, damage index, antenna composite materials, principal component analysis, independent component analysis, higher-order statistics, perturbation theory, robust decision making.*