

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	v
I Une construction de la méthode de Boltzmann sur réseau	1
1 L'équation de Boltzmann et ses limites hydrodynamiques	5
1.1 Introduction à l'équation de Boltzmann	5
1.1.1 Un niveau de description mésoscopique	5
1.1.2 Expression des quantités macroscopiques	6
1.1.3 L'opérateur de collision et ses invariants	8
1.2 Changement d'échelle : du mésoscopique vers le macroscopique	9
1.2.1 Lois d'évolution macroscopique et problème de fermeture	9
1.2.2 Notion d'équilibre cinétique et distribution de Maxwell-Boltzmann .	10
1.2.3 L'opérateur BGK	11
1.2.4 L'équation de Boltzmann adimensionnelle	12
1.3 Limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann	14
1.3.1 Éléments de théorie cinétique	15
1.3.2 Le développement de Chapman-Enskog	17
1.3.3 Commentaires sur la limite hydrodynamique obtenue	20
2 De l'équation de Boltzmann à l'équation de Boltzmann sur réseau	23
2.1 L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes	23
2.1.1 Développement en polynômes de Hermite et moments de la fonction de distribution	24
2.1.2 Discrétisation de l'espace des vitesses	26
2.1.3 Choix d'une quadrature : quel critère retenir ?	28
2.1.4 Erreurs introduites pour des quadratures de degré 5	32
2.2 L'équation de Boltzmann sur réseau	35
2.2.1 Résolution numérique : discrétisation spatiale et temporelle	35
2.2.2 Passage dimensionnel-adimensionnel en LBM	39
2.2.3 Développement de Taylor/Chapman-Enskog	40
2.3 Compléments sur les limites hydrodynamiques du schéma LBM-BGK	45

2.3.1	Catégorisation des termes d'erreur	45
2.3.2	Scaling acoustique et diffusif	46
2.3.3	Rôle des erreurs d'invariance galiléenne	47
2.3.4	Influence du réseau pour les quadratures de degré 5	48
2.3.5	Autres types de développements asymptotiques pour l'équation de Boltzmann sur réseau : une comparaison	49
Conclusion		53
II La méthode de Boltzmann sur réseau pour l'aéroacoustique		57
3 Modélisation de la collision : stabilité et propriétés acoustiques		61
3.1 Analyse linéaire de Von Neumann		61
3.1.1 Cas des équations de Navier Stokes 3D faiblement compressibles		61
3.1.2 Cas des schémas Navier-Stokes d'ordre élevé et LBM-BGK		62
3.1.3 Conséquences sur la stabilité numérique		65
3.2 Modèles à temps de relaxation multiples		66
3.2.1 Modèles de type MRT : structure algébrique		67
3.2.2 Modèles de type MRT : influence acoustique de la relaxation des moments d'ordre 2		71
3.2.3 Modèles de type Cascaded et Cumulant		76
3.2.4 Modèles régularisés.		78
3.3 Choix d'un modèle à temps de relaxation multiple		80
3.3.1 Présentation d'un opérateur de type MRT alternatif : le modèle MRT^H		81
3.3.2 Propriétés de dispersion et dissipation d'une onde plane pour le modèle MRT^H		82
3.3.3 Applications numériques : comparaison avec d'autres opérateurs		83
3.4 Entropic Lattice Boltzmann Method (ELBM)		87
3.4.1 Construction de la fonction d'équilibre local		87
3.4.2 Étape de collision : stabilisations entropiques		89
3.4.3 Influence du stabilisateur entropique sur les propriétés acoustiques du schéma		92
3.4.4 Controverses sur les liens entre la stabilisation entropique et le théorème H de Boltzmann		92
3.5 Filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau		94
3.5.1 Construction des modèles avec filtrage sélectif		94
3.5.2 Dispersion, dissipation et propriétés acoustiques		96
4 Développement d'un filtrage sélectif compact alternatif : étude acoustique et turbulente		97
4.1 Développement du filtrage compact simplifié		98
4.1.1 Choix et étude d'un filtre explicite compact		98
4.1.2 Filtrage de la fonction de distribution hors-équilibre		100
4.1.3 Simplification : filtrage des moments hors équilibre d'ordre 2		102
4.1.4 Quel modèle LBM filtrer ?		104
4.2 Propriétés acoustiques de dispersion et de dissipation		104
4.2.1 Distinction entre l'onde libre et l'onde forcée		104
4.2.2 Dissipation effective pour une onde libre		105
4.2.3 Atténuation acoustique d'une onde forcée		107

4.3 Utilisation comme méthode LES implicite : développement temporel d'une couche de mélange	110
4.3.1 LES implicite : une courte introduction	110
4.3.2 Développement temporel d'une couche de mélange à haut Reynolds : description du cas test	111
4.3.3 Modèles utilisés pour l'étude comparative	112
4.3.4 Autosimilarité et spectres turbulents	113
Conclusion	121
III Maillages non-uniformes en aéroacoustique avec la méthode de Boltzmann sur réseau	123
5 Développement d'une méthode de splitting directionnel : article publié dans Physical Review E	127
5.1 Introduction à l'article	127
5.2 Commentaires complémentaires : erratum	145
6 Étude et amélioration d'un algorithme cell-vertex classique	147
6.1 Présentation et commentaires sur l'algorithme de base utilisé	147
6.1.1 Introduction : configuration géométrique	147
6.1.2 Algorithme de base cell-vertex	148
6.2 Détails sur les étapes de l'algorithme de base	150
6.2.1 Rescaling	150
6.2.2 Transfert du maillage fin vers le maillage grossier : filtrage et rescaling	151
6.2.3 Transfert du maillage grossier vers le maillage fin : rescaling et interpolations	153
6.3 Transfert du maillage fin vers le maillage grossier : développement d'une méthode de propagation partielle	155
6.3.1 Motivations	155
6.3.2 Description de la méthode	156
6.3.3 Compléments sur le transfert fin → grossier	157
6.4 Commentaires complémentaires et perspectives d'améliorations	158
6.4.1 Remarques sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement	158
6.4.2 Vers un rescaling à deux niveaux ?	159
6.4.3 Remarques sur le repliement spectral aux transitions	160
6.5 Applications numériques	160
6.5.1 Liste des modèles comparés	160
6.5.2 Pulse de pression acoustique	161
6.5.3 Convection d'un tourbillon à travers une transition de résolution . .	161
Conclusion	165
IV Applications aéroacoustiques industrielles de la méthode de Boltzmann sur réseau	167
7 Écoulement dans un conduit en aval d'une plaque perforée	173
7.1 Présentation du cas test	173

7.2 Comparaisons calcul/mesure	175
7.2.1 Visualisations de l'écoulement	175
7.2.2 Résultats aéroacoustiques	176
8 Écoulement autour d'un véhicule complet (Chapitre confidentiel)	183
Conclusion	185
Conclusion générale	187
Annexes	191
A Le développement de Hilbert	193
B Éléments de traitement du signal pour l'aéroacoustique	199
B.1 Calcul de densités spectrales de puissance	199
B.1.1 Transformées de Fourier	199
B.1.2 Densités spectrales de puissance	200
B.2 Quelques spectres théoriques utiles en aéroacoustique	201
B.2.1 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'une onde plane	201
B.2.2 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'un champ acoustique diffus	201
B.2.3 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'un champ aérodynamique de Corcos	203
Bibliographie	205

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier les capacités de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) dans un cadre numériquement contraignant : celui de la simulation aéroacoustique en maillage non-uniforme, à très haut nombre de Reynolds et à nombre de Mach non négligeable ($Ma > 0.1$), appliquée à l'automobile. La problématique industrielle est celle du calcul du bruit intérieur d'origine aérodynamique, dont le calcul du champ de pression pariétal instationnaire sur le vitrage conducteur est la première étape décisive. Il a été constaté qu'un manque de précision sur la faible part acoustique du champ de pression total sur le vitrage, provenant très probablement d'erreurs au niveau des transitions de résolution du maillage, était la cause d'une surestimation du bruit intérieur.

Nous présentons d'abord une construction cohérente et unifiée de la méthode de Boltzmann sur réseau à partir de l'équation de Boltzmann, dans un cadre athermal faiblement compressible. Nous insistons particulièrement sur la cohérence des adimensionnements ainsi que sur la question de la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzman sur réseau.

Nous étudions ensuite en détail les propriétés aéroacoustiques de la LBM, en parcourant toutes les grandes familles d'opérateurs de collision de la littérature. Une variante de modèle à temps de relaxation multiples, utilisable pour l'aéroacoustique, est présentée et testée. Les modèles basés sur un filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau sont aussi étudiés. Un modèle alternatif simplifié de filtrage sélectif, rapide et compact, est développé et validé numériquement. Une étude préliminaire est également menée pour utiliser l'hyperviscosité introduite par ce dernier dans le cadre de calculs LES (Large Eddy Simulation), avec des résultats prometteurs.

La problématique des maillages non-uniformes est abordée. Un recensement exhaustif des études LBM menées dans ce cadre dans la littérature montre qu'aucune ne correspond à nos contraintes. Un algorithme alternatif est développé pour traiter les problèmes observés aux transitions de résolution. Nous apportons également des modifications à un algorithme plus classique, validées numériquement.

Enfin, des applications industrielles sont réalisées à l'aide des modèles développés dans le mémoire, en particulier sur un véhicule complet. Le potentiel impact positif sur la qualité du champ aéroacoustique en maillage non-uniforme de la stratégie LES basée sur l'hyperviscosité du filtrage sélectif est discuté.

Abstract

The main goal of this work is to study the capacities of the Lattice Boltzmann Method in a constrained numerical framework : that of numerical simulation in automotive aeroacoustics with non-uniform meshes, at high Reynolds number and non negligible Mach number ($Ma > 0.1$). The industrial problem is the computation of the interior aerodynamic noise, which includes as its first decisive step the computation of the unsteady wall pressure field on the car windows. It was observed that a lack of precision on the weak acoustic part of the total pressure field on the driver-side window, which is most probably due to errors at mesh refinement interfaces, caused an overestimation of the interior noise.

We first present a coherent and unified construction of the Lattice Boltzmann Method from the Boltzmann equation, in an athermal weakly compressible framework. We particularly insist on the coherence of the non-dimensionalization process, as well as on the question of the hydrodynamic limit of the Lattice Boltzmann Equation.

Then, we study in details the aeroacoustic properties of the LBM by reviewing all the main families of collisional operators that exist in the literature. A variant of multiple relaxation time operator that can be used for aeroacoustics is presented and tested. Lattice Boltzmann Equations with selective viscosity filters are also studied. A simplified alternative selective filter, fast and compact, is developed and numerically validated. A preliminary study is also carried out so as to use the hyperviscosity stemming from the filtering process for LES (Large Eddy Simulation) computations, showing promising results.

The problem of non-uniform meshes is discussed. An exhaustive review of the LBM studies that have been carried out within that framework shows that none of them corresponds to our constraints. An alternative algorithm is developed in order to try and treat these transition interface issues. We also make modifications to a more standard algorithm, which are numerically validated.

Finally, all the developed models of this work are applied to industrial cases, notably on a Renault vehicle. The potentially positive impact on the quality of the aeroacoustic field with non-uniform meshes of our hyperviscosity-based LES strategy is discussed.

Rapport-Gratuit.com

Introduction

Contexte industriel

Le bruit perçu par l'utilisateur d'un véhicule automobile à l'intérieur de l'habitacle provient de sources variées. Parmi elles on peut citer entre autres le bruit de roulement lié au contact sol/pneu, le bruit issu du moteur et le bruit d'origine aérodynamique, lié à l'écoulement de l'air autour du véhicule en mouvement. C'est à cette dernière composante que s'intéresse notre étude. En effet, cette source devient à haute vitesse la source prépondérante de bruit perçue dans le véhicule.

Plusieurs solutions s'offrent alors aux industriels pour maîtriser ce phénomène et tenter de limiter son impact. La première est d'effectuer des tests en soufflerie sur véhicule complet (ou maquette) durant la phase de conception. Toutefois, de tels essais sont extrêmement coûteux. Par ailleurs, les modifications à effectuer sur le véhicule suite à ces essais donnent lieu à d'autant plus de frais que le projet est dans une phase avancée (il peut être question de centaine de milliers, voire de millions d'euros). La deuxième consiste à prédire le bruit intérieur entièrement par le calcul numérique. Depuis plusieurs années, de nombreux efforts sont mis en œuvre par les constructeurs dans ce domaine complexe, afin d'intervenir en amont sur le design du véhicule via une maquette numérique de ce dernier, pour respecter le cahier des charges acoustique.

Origine physique du bruit aérodynamique

La grande majeure partie du bruit d'origine aérodynamique est liée aux fluctuations de pression qui s'exercent sur le vitrage conducteur, dues à l'écoulement turbulent créé par le rétroviseur et le montant de baie. Ces fluctuations vont engendrer une réponse vibratoire de la vitre créant ainsi des ondes acoustiques à l'intérieur de l'habitacle. Ces fluctuations de pression peuvent se classer en deux catégories :

- **Les fluctuations de nature aérodynamique** : elles se propagent en première approximation à la vitesse globale de l'écoulement (de l'ordre de la vitesse du véhicule) et ont une amplitude relativement importante (jusqu'à plusieurs dizaines de Pascals en basse fréquence). Cette amplitude dépend bien sûr de la vitesse et de la configuration de l'écoulement.
- **Les fluctuations de nature acoustique** : leur vitesse de propagation est très supérieure (si l'on se place dans le cas de l'automobile, dans lequel le nombre de Mach dépasse rarement 0.1) puisqu'il s'agit de la célérité des ondes sonores (environ 340 m/s dans les conditions classiques de pression et température). Leur amplitude est également bien plus faible que les précédentes. Par ailleurs, pour donner un ordre de grandeur, une fluctuation de pression acoustique efficace d'amplitude 0.05

Pa correspond à un volume sonore en dB SPL (sound pressure level) de 68 dB, équivalent environ à celui d'une conversation animée.

La difficulté principale est que les fluctuations de nature acoustique se révèlent être bien plus efficaces que leurs homologues de grande amplitude dans la réponse vibratoire du vitrage. Elles sont donc la principale cause, malgré leur faible intensité, du bruit intérieur perçu par les passagers. Il est donc nécessaire de pouvoir séparer ces deux contributions de nature différente dans les fluctuations de pression totale sur le vitrage. Au vu des constats effectués plus haut, on voit qu'il est possible de les distinguer en effectuant une analyse dans le domaine des nombres d'onde. En effet, pour un nombre de Mach faible, les nombres d'onde dits "aérodynamiques" $k = \omega/U_c$ (U_c vitesse de convection, de l'ordre de la vitesse de l'écoulement) sont bien plus faibles à fréquence donnée que ceux dits "acoustiques" $k_0 = \omega/c_0$ (c_0 célérité des ondes sonores). Tout l'enjeu de la simulation numérique de l'écoulement turbulent autour du véhicule est donc d'être suffisamment précis pour capter ces ondes acoustiques de très faible amplitude, et surtout de connaître cette dernière de façon fiable. Afin d'en savoir plus concernant ces deux types d'excitations pariétales, il s'agit de s'intéresser aux études déjà menées sur le sujet dans la littérature.

Éléments quantitatifs sur les fluctuations de pression pariétales acoustiques et aérodynamiques dans la littérature

Plusieurs méthodes existent pour effectuer une séparation entre part acoustique et turbulente dans un champ de pression fluctuant. Parmi elles on peut citer les études spectrales dans le domaine des nombre d'onde (WFS, pour Wavenumber Frequency Spectrum, voir par exemple [HO12] pour un cas d'application automobile) et la méthode POD (Proper Orthogonal Decomposition, voir [Gau+14] ou encore [DHR13]). Certains auteurs ont déjà tenté de quantifier le niveau de la part acoustique dans les fluctuations pariétales sur des cas concrets, soit par l'expérience soit par le calcul numérique.

Du point de vue expérimental, Arguillat [Arg06] étudie dans sa thèse plusieurs cas intéressants pour notre étude. Dans un premier temps, elle trouve que l'excitation acoustique est 13 à 16 dB inférieure sur l'ensemble de la plage fréquentielle à l'excitation aérodynamique dans le cas d'une couche limite sur plaque plane dans une veine fermée à un nombre de Mach de 0.1. Toujours en veine fermée, elle obtient dans le cas d'un écoulement derrière une marche montante oblique (reproduisant une sorte de montant de baie) 3 à 10 dB d'écart sur les spectres de pression en basses fréquences et 15 à 20 en hautes fréquences, dans la zone recollée et toujours à Mach 0.1. Toutefois, l'auteur précise que l'effet de confinement et des possibles réflexions acoustiques (malgré les traitements effectués) dans la veine fermée peuvent laisser penser que ces valeurs sont surestimées.

Du point de vue numérique, De Jong & al. [DBL01] ont effectué une corrélation entre le bruit calculé à l'intérieur d'un véhicule par la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) obtenu à l'aide un spectre synthétique de fluctuations de pression sur le vitrage conducteur et des mesures en soufflerie. Il faut donc noter qu'il ne s'agit pas d'un calcul direct de l'écoulement autour du véhicule mais qu'il est intéressant dans le cadre de notre étude puisqu'il s'agit d'une vraie configuration automobile. Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque la part acoustique du spectre synthétique était inférieure de 25 à 35 dB à sa part aérodynamique.

Enfin, un cas très intéressant est celui des calculs de Gloerfelt [GB13] pour la couche limite sur plaque plane. Il s'agit donc cette fois d'une simulation numérique LES (Large Eddy Simulation) de l'écoulement turbulent et de l'acoustique qui y est produite par une

discrétisation en différences finies d'ordre élevé des équations de Navier-Stokes. Ces calculs sont effectués à Mach 0.5 avec des conditions aux limites "silencieuses" et permettent d'observer une composante acoustique d'environ 40 dB inférieure à l'excitation aérodynamique lors de l'étude des spectres de pression pariétale. Ce calcul est un cas unique dans la littérature sur le sujet.

A partir de ces premiers constats, si l'on prend par exemple comme référence un écart de l'ordre de 30 dB entre les deux composantes spectrales des fluctuations totales, on obtient après un rapide calcul qu'il existerait un rapport 30 entre les amplitudes de la composante acoustique et de la composante aérodynamique dans le cas d'une configuration automobile (rapport 100 pour si l'on prend un écart de 40 dB pour la couche limite sur plaque plane). Si l'on se place à une fréquence relativement haute de 1kHz (afin de séparer au mieux les domaines des nombres d'onde acoustiques et aérodynamiques), des calculs sur véhicule montrent que le niveau spectral des fluctuations de pression totale est d'environ 90 dB, soit une amplitude de pression fluctuante qui correspondrait à 0.6 Pa. Si l'on fait l'hypothèse d'un niveau acoustique 30 dB inférieur à cette fréquence, on obtient 0.02 Pa comme amplitude de pression acoustique. Une telle valeur est 5 millions de fois plus faible que la pression de référence du calcul et une surestimation de 0.01 Pa de cette valeur se traduirait par 3.5 dB d'augmentation sur le spectre. Au vu des ordres de grandeur en jeu, on comprend mieux le besoin de précision qui s'exprime pour les simulations numériques en aéroacoustique.

Outils numériques pour simuler l'aéroacoustique

Il existe différentes classes de méthodes utilisées pour simuler l'aéroacoustique dans un écoulement turbulent. Une première consiste à utiliser ce que l'on appelle des **méthodes hybrides**. Elles sont nommées ainsi car leur utilisation requiert l'utilisation de deux solveurs différents : un solveur pour l'écoulement hydrodynamique, et un pour la propagation de l'acoustique. Les deux phénomènes sont donc séparés à des degrés divers selon la méthode et les hypothèses simplificatrices éventuellement choisies. Ces méthodes sont basées sur ce qu'on nomme des **analogies aéroacoustiques**. Elles visent à réarranger les équations de Navier-Stokes de façon à obtenir des équations sur la propagation des ondes acoustiques dans le fluide, mettant en évidence dans le membre de droite les diverses sources de bruit.

Une première famille de méthodes hybrides regroupe celles basées sur les travaux de **Lighthill** [Lig52][Lig54]. Dans sa version originale, cette méthode permet de déduire directement des équations de Navier-Stokes (de façon exacte) une équation de propagation reliant l'évolution de la masse volumique à un tenseur dit de Lighthill, apparaissant comme terme source dans l'équation d'onde inhomogène obtenue. On peut déduire de cette équation une formulation intégrale permettant de calculer les fluctuations de masse volumique d'origine acoustique en champ lointain, via la connaissance du tenseur de Lighthill dans une région volumique du fluide contenant l'ensemble des sources de bruit aérodynamique. Dans sa version originale, les sources comme par exemple les parois solides ne sont pas prises en compte et la propagation se fait dans un milieu homogène au repos. L'évaluation du tenseur de Lighthill complet est difficile et des hypothèses simplificatrices doivent généralement être faites. Ffowcs-Williams et Hawkings [FH69] ont étendu cette méthode à la présence de surfaces solides, fixes ou mobiles, dans l'écoulement. La théorie intégrale de Kirchoff (1883) donne une formulation permettant de remplacer les calculs intégraux sur le "volume source" par une intégrale surfacique. On pourra se référer à [PR01] pour

une meilleure compréhension de ces méthodes.

Il faut noter toutefois que ces formulations supposent que le fluide est au repos à l'extérieur du volume contenant l'ensemble des sources acoustiques, hypothèse qui peut se révéler assez forte (pas de réfraction de l'acoustique par la turbulence, etc...). Si l'on englobe pas correctement toutes les sources de bruit et autres effets de convection, des erreurs non négligeables peuvent apparaître. De plus, il s'agit là de connaître l'acoustique rayonnée en champ lointain et non la part acoustique des fluctuations de pression sur une paroi solide au sein même de l'écoulement turbulent, comme c'est le cas sur un vitrage automobile. Ces méthodes peuvent toutefois être très efficaces en termes de temps de calcul, en particulier bien sûr à faible nombre de Mach. Il est également possible de déduire des formulations variationnelles de l'analogie de Lighthill, afin d'effectuer la propagation acoustique avec un solveur de type éléments finis. Dans ce cas, une discrétisation complète du volume dans lequel a lieu la propagation acoustique est nécessaire. Cette méthode est plus coûteuse mais peut se révéler très intéressante dans des cas d'écoulements confinés, lorsque les sources acoustiques ne sont pas compactes ou lorsque les géométries sont plus complexes. Il est possible de prendre en compte d'avantage de couplages entre l'écoulement turbulent, les obstacles qui y sont éventuellement présents et l'acoustique qui s'y propage.

Une deuxième famille de méthodes hybrides regroupe les méthodes basées sur les **quantités perturbées**. Chacune d'elles met en lumière la physique de la propagation acoustique de manière différente, selon l'expression des termes sources. Des hypothèses peuvent donc être faites selon les besoins en négligeant tel ou tel terme source. Elles ont surtout pour différence majeure avec les analogies présentées précédemment le fait de prendre en compte les effets de convection par l'écoulement moyen au sein même de l'opérateur de propagation (c'est-à-dire dans le membre de gauche des équations d'onde), et non dans les termes sources. Ces effets sont donc calculés directement dans le solveur acoustique : cela permet de réduire l'étendue du "volume source" qui est simulé par une méthode CFD bien résolue, et économiser ainsi du temps de calcul. Certaines de ces méthodes sont basées sur les équations d'Euler linéarisées (par exemple par Bogey et *al.* dans [BBJ02]), d'autres sur les équations dites PCE (Perturbed Compressible Equations [SM05]), ou encore APE (Acoustic Perturbed Equations [ES03]). Pour ces deux dernières, des versions linéarisées ont été développées, qui permettent de traiter certaines sources d'instabilités hydrodynamiques rencontrées dans les méthodes basées sur les équations PCE ou sur les équations d'Euler linéarisées.

Au delà des méthodes hybrides, il y a bien sûr les méthodes de **simulation directe**. Basées en majeure partie sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes compressibles, elles ont pour avantage de simuler via un seul et unique solveur à la fois l'aérodynamique et l'acoustique et leurs effets couplés. On distinguera bien sûr les simulations LES (Large Eddy Simulation) dans lesquelles les hypothèses faites sur la façon de modéliser la turbulence auront un impact important sur la gestion de l'acoustique, des simulations dites DNS (Direct Numerical Simulation) dans lesquelles toutes les échelles de la turbulence sont résolues. Ces dernières sont toutefois hors de portée pour des calculs industriels (par exemple autour d'un véhicule automobile), et servent uniquement de calculs de référence pour des comparaisons sur des cas tests académiques. Il faut aussi noter que, contrairement aux formulations hybrides, les fluctuations de pression acoustique ne seront pas obtenues directement avec ces méthodes, seules les fluctuations de pression totale sont obtenues : un post-traitement est donc nécessaire pour en extraire la part acoustique, en particulier bien sûr si la zone d'étude se situe en milieu turbulent (ce qui en l'occurrence sera notre cas si l'on étudie des fluctuations de pression pariétales).

Après ce tour d'horizon rapide des méthodes de calcul pour l'aéroacoustique, une question vient immédiatement : pourquoi serait-il intéressant dans notre cas d'utiliser la simulation directe par la méthode de Boltzmann sur réseau ? C'est à cette interrogation légitime que nous allons à présent répondre.

Pourquoi s'intéresser à la méthode de Boltzmann sur réseau pour l'aéroacoustique ?

La méthode de Boltzmann sur réseau (ou LBM pour Lattice Boltzmann Method) est assez récente, en comparaison de celles citées dans le paragraphe précédent. L'expression "sur réseau" désigne en fait une méthode particulière de discréétisation de l'équation de Boltzmann (1872). Apparue au début des années 1990, cette méthode peut être vue comme le prolongement de travaux en physique statistique de la fin du 19ème siècle et de la première moitié du 20ème, ainsi que sur l'étude sur les automates cellulaires et la théorie des gaz sur réseau dans la deuxième moitié du 20ème siècle.

Il ne s'agit plus ici de s'intéresser directement aux quantités macroscopiques mais plutôt aux particules composant le fluide et à leurs collisions : les variables macroscopiques ne sont retrouvées que dans un deuxième temps, on parle donc de modélisation *mésoscopique*. Chapman et Enskog ont montré, dès les années 1916-1917, qu'il était possible d'établir un lien théorique entre l'équation de Boltzmann régissant des collisions de particules à l'échelle mésoscopique et les équations de Navier-Stokes instationnaires faiblement compressibles [CC70]. La méthode de discréétisation dite *sur réseau* de l'équation de Boltzmann, sur laquelle nous reviendrons largement, est tout à fait différente des méthodes de discréétisation de l'équation de Navier-Stokes. Elle a pour conséquence parmi d'autres l'obtention de maillages cartésiens formés de cubes (pour les modèles les plus courants). Des conditions limites de type *frontières immergées* ont été bâties sur cette particularité et rendent les maillages de géométries complexes bien plus aisés que dans les autres méthodes (et en particulier très automatisables). De plus, la simplicité de l'algorithme de Boltzmann sur réseau le rend rapide et parallélisable de façon efficace. D. Ricot a étudié en détail la méthode de Boltzmann sur réseau en vue d'applications aéroacoustique [Ric02]. S. Marié [Mar08] a effectué une analyse très complète des avantages de la méthode pour l'aéroacoustique, que ce soit d'un point de vue physique ou du point de vue du coût calcul, en la comparant aux discréétisations d'ordre élevé pour les équations de Navier-Stokes compressibles (voir aussi [MRS09]). Il en ressort que la méthode de Boltzmann est, à ordre de précision comparable, bien moins dissipative pour les ondes acoustiques et bien moins coûteuse en temps de calcul. Marié note tout de même que cet aspect faiblement dissipatif peut être toutefois la source d'instabilités, dont certaines sont étudiées et traitées dans son mémoire.

Dans le contexte industriel qui est le nôtre, la méthode de Boltzmann sur réseau est donc intéressante à plus d'un titre pour simuler l'aéroacoustique à faible nombre de Mach. Un seul solveur est nécessaire, les géométries complexes peuvent être traitées de façon automatisée, le tout en assurant une parallélisation efficace et des propriétés acoustiques avantageuses par rapport aux méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes.

Par ailleurs, l'intérêt est loin d'être seulement industriel, il est aussi académique. Il n'existe par exemple aucune étude précise en aéroacoustique sur les fluctuations de pressions pariétales au pied d'une couche limite turbulente simulée avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Ne serait-ce qu'avec des méthodes basées sur les équations de Navier-

Stokes, les calculs de X.Gloerfelt pour l'aéroacoustique de la couche limite turbulente sur plaque plane font figure de cas unique [GB13]. De plus de nombreux champs de recherche existant pour les équations de Navier-Stokes, par exemple ceux concernant les conditions d'entrée turbulentes (qui plus est "silencieuses" du point de vue acoustique) restent à étudier sous le prisme de la méthode de Boltzmann sur réseau. On peut également citer la problématique importante des raffinements de maillages en LBM : les grilles de calcul n'étant constitués que de cubes, chaque déraffinement provoque un changement de résolution spatial (et temporel, les deux étant proportionnels) d'un facteur au moins deux, ce qui peut avoir de grandes conséquences sur l'hydrodynamique et d'autant plus sur l'aéroacoustique. Ce dernier sujet est crucial tant du point de vue académique (par exemple pour calculer de manière précise l'acoustique d'une couche limite turbulente sur plaque plane) qu'industriel (pour effectuer des simulations propres sur des voitures ou des avions complets). Leur influence sur l'aéroacoustique d'un écoulement turbulent n'a jamais été étudiée.

En résumé il n'existe aucune étude précise sur des cas numériques turbulents concrets (comprenant déraffinements successifs, en trois dimensions, avec conditions limites silencieuses) pour l'aéroacoustique pariétale avec la méthode de Boltzmann sur réseau.

Organisation du mémoire

Dans un premier temps nous nous attarderons sur la construction théorique de la méthode de Boltzmann sur réseau, qui servira de base à toutes les études ultérieures. Nous en synthétiserons les grandes étapes, en insistant tout particulièrement sur la cohérence des adimensionnements tout le long du raisonnement. Ce point est capital, autant sur le plan théorique que pratique.

Dans une deuxième partie, nous étudierons plus spécifiquement les capacités aéroacoustiques de la méthode de Boltzmann sur réseau. En particulier, nous étudierons quelles sont les techniques permettant de stabiliser les calculs LBM sans sacrifier la propagation des ondes sonores. Une variante de modèle à temps de relaxation multiple sera présentée et testée, de même qu'un filtrage sélectif alternatif, rapide et compact. La partie est cloturée par l'application de ce filtrage sélectif à un calcul LES à haut Reynolds : le développement temporel d'une couche de mélange.

La troisième partie est consacrée à la problématique des raffinements de maillage. Elle débute par un article, publié dans Physical Review E, faisant office d'introduction détaillée au sujet et présentant un algorithme alternatif. Ce dernier n'étant pas utilisable à court terme industriellement, nous repartons ensuite d'un algorithme plus classique et lui apportons des modifications, validées numériquement.

La dernière partie consiste en l'application des modèles développés et étudiés dans le mémoire à des simulations industrielles complexes : l'écoulement en aval d'une plaque perforée dans un conduit et un écoulement autour d'un véhicule réel. Ce deuxième cas est gardé confidentiel et n'apparaît pas dans ce mémoire.

Première partie

Une construction de la méthode de Boltzmann sur réseau

Introduction

Nous allons à présent montrer comment cette méthode numérique qu'est la LBM peut nous permettre de simuler des écoulements de fluides et ce dans quelles limites, voire sous quelles approximations. Pour cela, il est nécessaire de comprendre comment elle a été construite, en synthétisant les différentes étapes qui permettent de passer d'une description microscopique d'un fluide à sa description macroscopique, en particulier via la physique statistique et l'équation de Boltzmann. Ce modèle devra ensuite être simplifié pour pouvoir être traité numériquement, tout en maintenant un niveau de précision suffisant.

En résumé, il s'agira d'effectuer les opérations suivantes :

1. Démontrer qu'il est possible de simuler un fluide obéissant aux équations de la dynamique des fluides à partir de l'équation de Boltzmann (via un développement dit de Chapman-Enskog) en précisant sous quelles conditions
2. Simplifier l'équation de Boltzmann, d'abord dans la gestion des collisions inter-particulaires (via l'opérateur dit BGK), puis pour obtenir des modèles à *vitesses discrètes* (ou DVBE pour Discrete Velocity Boltzmann Equation).
3. Utiliser la discrétisation particulière *sur réseau* avec l'équation DVBE pour pouvoir la traiter numériquement.
4. Montrer que l'on peut toujours simuler un fluide obéissant aux équations de la dynamique des fluides à partir des équations DVBE et Boltzmann sur réseau (à nouveau par un développement de Chapman-Enskog), en insistant sur les nouvelles limitations qu'introduisent ces deux discrétisations successives.

Nous ferons le pont entre l'équation de Boltzmann continue et l'équation de Boltzmann sur réseau en passant par leurs équations de conservation associées, le tout dans un formalisme entièrement uniifié. L'intérêt sera de pouvoir en permanence faire le lien entre tous les différents types d'adimensionnements (que les grandeurs de référence soient physiques ou relatives à des caractéristiques de maillage) et les expressions dimensionnelles, en particulier lors du développement de Chapman-Enskog pour l'équation de Boltzmann sur réseau. En ce sens, notre approche sera différente de celles usuellement rencontrées. Nous insisterons également sur les différences qui existent entre les développements asymptotiques de Hilbert et de Chapman-Enskog.

Nous distinguerons ensuite les modes hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann et ses modes non physiques (appelés modes *fantômes* dans la littérature). Ces derniers sont spécifiques à l'équation de Boltzmann sur réseau (et à la DVBE), ils ne sont pas présents dans les équations de Navier-Stokes et sont la cause de nombreuses instabilités numériques.

À partir de ces développements et en guise de conclusion, nous serons en mesure de déduire un court guide pratique de mise en place d'un calcul LBM.

Chapitre 1

L'équation de Boltzmann et ses limites hydrodynamiques

1.1 Introduction à l'équation de Boltzmann

1.1.1 Un niveau de description mésoscopique



FIGURE 1.1 – *Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906)*

La dynamique d'un gaz ou d'un fluide est régie à l'échelle particulière par les équations de Newton. Pour pouvoir passer de cette description dite **microscopique** du mouvement individuel de chaque particule vers un niveau **macroscopique** et ses équations classiques de l'hydrodynamique, il y a un niveau intermédiaire : l'échelle **mésoscopique**. Cette description permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté du système de base décrivant les trajectoires de toutes les particules : c'est à cette échelle que se situe l'**équation de Boltzmann**. Pour un grand nombre de particules, pour un gaz/fluide suffisamment peu dense et en ajoutant une hypothèse dite de *chaos moléculaire*, on peut arriver à réduire le système microscopique à une équation d'évolution sur la densité de probabilité mésoscopique $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ de présence d'une particule en un point \mathbf{x} à un temps t , ayant pour vitesse \mathbf{c} . Cette densité de probabilité f , positive ou nulle par définition, est appelée **fonction de distribution**. Tandis que nous nous intéresserons uniquement ici à la façon de passer du mésoscopique vers le macroscopique, il est bon de savoir qu'une démonstration mathématique rigoureuse du passage du microscopique vers le mésoscopique est possible, au moins pour certains types de collision (voir la Hierarchie BBGKY [[Vil02](#) ; [SKC02](#)]). Par la suite, nous utiliserons par abus de langage le terme *microscopique* pour

désigner le niveau de description de la théorie cinétique de Boltzmann.

À partir d'une équation bilan intégrale de conservation des particules et de plusieurs hypothèses régissant leurs collisions, on obtient l'équation régissant l'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution. Il s'agit de l'**équation de Boltzmann**, qui s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \Omega(f)} . \quad (1.1)$$

L'opérateur gradient ∇ s'applique uniquement aux variables d'espace et non aux vitesses particulières (un terme de gradient sur l'espace des vitesses microscopiques apparaît toutefois si l'on ajoute l'effet d'une force externe). Ω est appelé **opérateur de collision** et représente, comme son nom l'indique, l'effet des collisions entre les particules (section 1.1.3). Pour notre étude, nous définissons f comme densité de probabilité *massique*, dont l'unité est le $\text{kg.m}^{-3} \cdot (\text{m.s}^{-1})^{-3}$ (certains auteurs utilisent une fonction de distribution en *nombre de particules* en $\text{m}^{-3} \cdot (\text{m.s}^{-1})^{-3}$ et multiplient ensuite formellement par la masse particulaire m en kg lorsque nécessaire).

1.1.2 Expression des quantités macroscopiques

À partir de la connaissance de f , on peut déduire les quantités macroscopiques usuelles de la mécanique des milieux continus, ou *observables*, qui ne dépendent plus des vitesses particulières \mathbf{c} . Elles sont obtenues en calculant ce que l'on appelle les **moments** de f . Sauf mention contraire pour la suite, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Soient $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ et P_n un polynôme de degré n en c_1, c_2, c_3 ($P_n \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$). Un **moment continu** d'ordre n de f est défini comme étant la quantité

$$m^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} P_n f \, d\mathbf{c} . \quad (1.2)$$

Par définition même de la fonction de distribution f , on obtient la masse volumique (qui est un moment d'ordre 0), la quantité de mouvement (trois moments d'ordre 1 regroupés dans un vecteur) et à l'énergie interne e (moment d'ordre 2) par

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f \, d\mathbf{c} , \quad (1.3)$$

$$\rho \mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}^3} f \mathbf{c} \, d\mathbf{c} , \quad (1.4)$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f |\mathbf{c}|^2 \, d\mathbf{c} . \quad (1.5)$$

Pour la suite, on définit le produit tensoriel de n vecteurs quelconques ($n \geq 2$) par

$$(\mathbf{a}^{(1)} \otimes \mathbf{a}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{(n)})_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_n}^{(n)} , \quad (1.6)$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, 3\}$, dont le résultat est un tenseur d'ordre n .

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ se définit habituellement en mécanique des fluides comme un flux de quantité de mouvement. Ainsi, en adoptant un formalisme dit "centré" sur le repère lié à la vitesse locale \mathbf{u} , on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{c} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{c} - \mathbf{u}) f \, d\mathbf{c} , \quad (1.7)$$

Ce tenseur des contraintes est symétrique à valeurs réelles. On montre après quelques calculs algébriques simples que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3}\rho e \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (1.8)$$

en identifiant au terme de pression la partie sphérique du tenseur des contraintes et en notant $\boldsymbol{\tau}$ la partie déviatorique, c'est à dire

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}, \quad (1.9)$$

qui est par définition un tenseur de trace nulle. On a ainsi

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{\mathbb{R}^3} f \left((\mathbf{c} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{c} - \mathbf{u}) - \frac{1}{3}|\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 \mathbf{I} \right) d\mathbf{c}. \quad (1.10)$$

La pression s'exprime par

$$p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} f |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 d\mathbf{c}. \quad (1.11)$$

Le flux de chaleur \mathbf{q} se définit naturellement par le flux d'énergie

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 (\mathbf{c} - \mathbf{u}) d\mathbf{c}, \quad (1.12)$$

et est donc un moment d'ordre 3. Il est issu de la contraction du tenseur d'ordre 3 \mathbf{Q} , défini par

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{c} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{c} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{c} - \mathbf{u}) f d\mathbf{c}, \quad (1.13)$$

avec, en adoptant la convention de sommation d'Einstein

$$q_i = \frac{1}{2} Q_{ijk} \delta_{jk} = \frac{1}{2} Q_{ijj}. \quad (1.14)$$

qui s'écrit tensoriellement $\mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} : \mathbf{I}$.

Il est intéressant de définir enfin le tenseur $\mathbf{\Pi}$, qui sera fréquemment utile en pratique

$$\mathbf{\Pi} = \int_{\mathbb{R}^3} f \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} d\mathbf{c}. \quad (1.15)$$

On déduit de ce qui précède la formule suivante

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (1.16)$$

A ce stade, toutes ces définitions sont purement mathématiques et faites *a priori*. Elles paraissent toutefois parfaitement intuitives pour les moments d'ordre 0, 1 voire 2 mais bien moins pour les moments au delà de l'ordre 3. La logique de ces définitions prendra tout son sens dans les sections suivantes, lorsqu'il s'agira de retrouver les équations de conservation macroscopiques à partir de la description microscopique du gaz.

1.1.3 L'opérateur de collision et ses invariants

Le terme de collision $\Omega(f)$ a une expression générale complexe qu'il n'est pas utile de mentionner ici, même lorsque le modèle de collision utilisé est simple. Il est toutefois important de mentionner les hypothèses fondamentales sur lesquelles la construction de cet opérateur repose.

1. On considère un gaz dans lequel la distance d'interaction entre les molécules est faible devant le libre parcours moyen (c'est-à-dire la distance parcourue en moyenne par une molécule entre deux collisions)
2. On suppose que les collisions ne concernent que deux molécules à la fois : elles sont qualifiées de **binaires**. Cela n'est possible que si le gaz est relativement **peu dense**.
3. La quantité de mouvement et l'énergie sont conservées par les collisions : on parle de **collisions élastiques**. Ceci n'est valable que si le gaz est monoatomique et qu'il n'y a pas d'ionisation ou de réaction chimique lors des collisions.
4. On peut faire une hypothèse de **chaos moléculaire** : juste avant les collisions, les vitesses des molécules ne sont pas corrélées. Cela n'est possible que si chaque molécule subit un nombre relativement faible de collisions [Mou04], ce qui est le cas en vertu de l'hypothèse 2 de faible densité. Cette hypothèse introduit une notion d'irréversibilité dans l'évolution du gaz.

Ces hypothèses sont suffisantes dans notre cas, mais l'étude de l'opérateur de collision de Boltzmann s'étend bien sûr à des cas plus complexes (gaz polyatomique, mélanges de gaz etc...). Notons par ailleurs que celles-ci nous placent dans le cadre du **gaz parfait monoatomique**. Toutefois, pour ce qui est de la méthode numérique de Boltzmann sur réseau (qui sera étudiée plus loin dans ce mémoire), l'hypothèse de gaz monoatomique voire même de gaz parfait pourra être relaxée. Nous verrons même qu'il est possible d'utiliser la méthode de Boltzmann sur réseau pour simuler des solides. À ce stade, le chemin vers l'équation de Boltzmann sur réseau est encore long et nous en restons à l'équation de Boltzmann.

Il existe à partir de ces seules hypothèses des propriétés fondamentales que tout opérateur de collision vérifie. Il s'agit de propriétés liées à ce que l'on appelle des **invariants de collision**. A partir de la forme mathématique la plus générale de Ω pour des collisions élastiques, on peut démontrer formellement que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Omega \, d\mathbf{c} = 0 , \quad (1.17)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c} \Omega \, d\mathbf{c} = 0 , \quad (1.18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\mathbf{c}|^2 \Omega \, d\mathbf{c} = 0 . \quad (1.19)$$

On remarque que l'on a pris ici des moments de l'opérateur Ω , respectivement d'ordre 0, 1 et 2. Par définition, 1, \mathbf{c} et $\frac{|\mathbf{c}|^2}{2}$ sont appelés *invariants de collision*. De façon plus générale, il en découle que toute combinaison linéaire de ces cinq (en 3D) invariants en est un aussi. Le sens physique de ces relations sera mis en lumière dans la partie suivante, dans laquelle nous allons déduire du comportement microscopique du gaz et des collisions entre les molécules ses équations de conservation macroscopiques.

Des modèles pourtant d'apparence simpliste comme celui des *boules de billard*, c'est-à-dire de chocs binaires élastiques de sphères dures entre elles, respectent ces conditions

fondamentales et ont donné lieu à des travaux mathématiques très avancés. Il existe bien sûr d'autres types de collisions, encore plus complexes, comme les interactions coulombiennes. Pour une synthèse plus détaillée, on pourra se référer aux très bonnes premières pages introducives de la thèse de Mouhot [Mou04].

1.2 Changement d'échelle : du mésoscopique vers le macroscopique

1.2.1 Lois d'évolution macroscopique et problème de fermeture

Pour retrouver les équations macroscopiques, on prend les moments d'ordre respectivement 0, 1 et 2 de l'équation de Boltzmann continue. Sachant que l'opérateur gradient ∇ n'agit que sur l'espace physique et non sur l'espace des vitesses microscopiques \mathbf{c} , on peut écrire $\mathbf{c} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (\mathbf{c}f)$. On obtient alors, en utilisant les propriétés des invariants collisionnels

$$\frac{\partial \int_{\mathbb{R}^3} f \, d\mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c}f \, d\mathbf{c} \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \Omega \, d\mathbf{c} = 0 , \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c}f \, d\mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{c})f \, d\mathbf{c} \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{c}\Omega \, d\mathbf{c} = 0 , \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2 f \, d\mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2 \mathbf{c}f \, d\mathbf{c} \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2 \Omega \, d\mathbf{c} = 0 . \quad (1.22)$$

Le sens physique des invariants de collision est maintenant évident : l'opérateur Ω a pour propriétés de conserver la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. On retrouve donc du point de vue macroscopique les hypothèses effectuées au départ sur les collisions binaires à l'échelle particulaire. Compte tenu des définitions vues auparavant, on obtient le système macroscopiques suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 , \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}) &= 0 , \\ \frac{\partial(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) &= 0 . \end{aligned} \quad (1.23)$$

On obtient des équations qui ressemblent en apparence aux équations de Navier-Stokes, mais à une différence majeure près : pour le moment ce système d'équations n'est pas fermé et rien n'indique que le tenseur des contraintes, par exemple, est similaire à celui des équations usuelles de la mécanique des fluides. Son expression en fonction des variables physiques conservatives ρ , \mathbf{u} et e (ou p), ainsi que celle du flux de chaleur est encore inconnue à ce stade. Si l'on souhaitait obtenir une équation de transport sur le tenseur des contraintes, il faudrait multiplier tensoriellement par \mathbf{c} l'équation (1.21) : on voit qu'on introduirait alors un moment d'ordre 3 de f qu'on ne saurait guère exprimer davantage. Le système n'est pas solvable sous cette forme et de nouvelles hypothèses doivent être formulées sur la fonction de distribution pour y parvenir. C'est ce que nous ferons plus loin, en nous intéressant aux méthodes de développement asymptotiques autour de l'état d'équilibre local : les méthodes de Hilbert et de Chapman-Enskog. Il est donc important de définir avant tout la notion d'état d'équilibre cinétique local.

1.2.2 Notion d'équilibre cinétique et distribution de Maxwell-Boltzmann

En physique statistique, on définit l'entropie S comme

$$S(t) = k_B \ln(W) , \quad (1.24)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et W le *nombre de configurations microscopiques* du système.

On se place dans un domaine spatial \mathcal{D} . À partir de la définition de l'entropie et de quelques calculs de dénombrement, Boltzmann définit une fonction H telle que

$$H(t) = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \ln(f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)) \, d\mathbf{c} \, d\mathbf{x} , \quad (1.25)$$

qui peut être reliée directement à l'entropie de façon affine :

$$S(t) = -k_B H(t) + \alpha . \quad (1.26)$$

Toute fonction f solution de l'équation de Boltzmann avec des conditions limites dites *spéculaires* (réflexion élastique sans échange d'énergie avec la paroi) vérifie le **Théorème H** de Boltzmann :

$$\frac{d}{dt} H(t) \leq 0 \quad (1.27)$$

Il est également possible de démontrer ce théorème pour d'autres types de conditions limites.

On peut à présent s'intéresser à la fonction qui minimisent H (et maximisent donc l'entropie) en chaque point et à chaque instant. On peut montrer mathématiquement qu'elle est de façon équivalente celle qui annule l'opérateur de collision. Cette fonction s'appelle la **distribution d'équilibre cinétique local**. Dans le cadre des hypothèses fondamentales présentées plus haut, il s'agit de la fameuse *distribution de Maxwell Boltzmann*, ou *Maxwellienne* que l'on écrira f^{eq}

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \frac{\rho}{(2\pi rT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2}{2rT}\right) \quad (1.28)$$

avec $\Omega(f^{eq}) = 0$.

Les moments continus de cette distribution peuvent être calculés analytiquement. La distribution de Maxwell-Boltzmann étant par hypothèse solution de l'équation de Boltzmann, on retrouve bien sûr

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} \, d\mathbf{c} = \rho , \quad (1.29)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} \mathbf{c} \, d\mathbf{c} = \rho \mathbf{u} , \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} |\mathbf{c}|^2 \, d\mathbf{c} = \frac{3}{2} \rho rT + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 . \quad (1.31)$$

L'énergie interne est directement reliée à la température par $e = \frac{3}{2}rT$ dans un gaz parfait monoatomique. Les trois moments ci-dessus sont identiques à ceux de la fonction de distribution : cela s'explique par le fait que les collisions conservent la masse, la quantité de mouvement et l'énergie par hypothèse de construction. On notera ainsi que la fonction

d'équilibre est localement entièrement définie par la densité, la vitesse macroscopique et la température : elle est entièrement définie par les moments d'ordre 0, 1 et 2 de la fonction de distribution.

Il est d'ores et déjà possible de calculer les moments d'ordre supérieur de la maxwellienne de façon analytique. Par des manipulations intégrales, on montre que

$$\boldsymbol{\sigma}^{eq} = p\mathbf{I}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{q}^{eq} = 0. \quad (1.33)$$

L'exposant *eq* est ajouté pour signifier que ces moments n'étant pas des quantités conservées par les collisions, ils diffèrent pour la fonction de la distribution et la fonction d'équilibre.

Pour un gaz qui serait en tout point et à tout temps localement à l'équilibre thermodynamique, le système des lois de conservation macroscopiques (1.23) est désormais fermé : on reconnaît les **équations d'Euler** compressibles. Notons que cette distribution d'équilibre est indépendante du modèle de collision élastique utilisé.

Nous avons donc fait le pont entre la physique à l'échelle microscopique et le comportement macroscopique d'un fluide compressible mais non visqueux. Les effets visqueux peuvent ainsi être interprétés comme une conséquence d'un écart à l'équilibre thermodynamique, qui doit être pris en compte pour obtenir les équations de Navier-Stokes. Dès 1916-1917, Chapman et Enskog montrent qu'il est possible de faire le lien entre Boltzmann et Navier-Stokes, mais l'opérateur de collision utilisé est très complexe. Afin de simplifier l'analyse, nous allons nous intéresser au plus simple et au plus populaire des opérateurs de collision, qui se révèle déjà très efficace pour de nombreuses applications : il s'agit de l'opérateur BGK.

1.2.3 L'opérateur BGK

Du nom de ses inventeurs, Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P. Gross et Max Krook en 1954 [BGK54], l'opérateur de collision BGK est le modèle le plus simple d'opérateur de collision linéarisé. Il respecte tous les principes fondamentaux de conservation énoncés précédemment. Si on considère une évolution très proche de l'équilibre de la forme $f = f^{eq} + df$, on peut écrire un développement de Taylor de la forme

$$\Omega(f) = \Omega(f^{eq}) + \frac{\partial\Omega}{\partial f}(f - f^{eq}) + \mathcal{O}(df^2). \quad (1.34)$$

On rappelle que la fonction d'équilibre annule Ω . Si on considère un état proche de l'équilibre, on peut linéariser l'opérateur de collision :

$$\Omega(f) \simeq \frac{\partial\Omega}{\partial f}(f - f^{eq}). \quad (1.35)$$

Si on considère que la relaxation autour de l'équilibre ne dépend que d'un seul paramètre τ indépendant de \mathbf{c} , vu comme le temps caractéristique entre deux collisions, on peut considérer que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial f} \simeq \frac{-1}{\tau}. \quad (1.36)$$

Ainsi, l'**opérateur BGK** est défini par

$$\Omega(f)^{BGK} = \frac{-1}{\tau}(f - f^{eq}). \quad (1.37)$$

L'équation de Boltzmann-BGK s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq})} \quad (1.38)$$

Le temps τ , inverse de la fréquence de collision, pourra ultérieurement être relié directement à la viscosité du fluide. Ce temps est choisi indépendant de la vitesse particulaire \mathbf{c} : on comprend bien qu'il s'agit là d'une simplification.

Par construction de la fonction d'équilibre, on avait vu que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} \, d\mathbf{c} = \rho , \quad (1.39)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \mathbf{c} \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} \mathbf{c} \, d\mathbf{c} = \rho \mathbf{u} , \quad (1.40)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f |\mathbf{c}|^2 \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} |\mathbf{c}|^2 \, d\mathbf{c} = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 . \quad (1.41)$$

On vérifie ainsi immédiatement que l'opérateur BGK obéit aux contraintes de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie, nécessaires à l'obtention des lois de conservation macroscopiques.

Cet opérateur étant très simplifié par rapport à celui de l'équation de Boltzmann d'origine, on peut s'attendre à ne pas retrouver les mêmes équations de comportement macroscopique si l'on utilise le modèle Boltzmann-BGK. Nous verrons plus loin les conséquences d'un tel choix sur les lois de conservation.

Afin d'étudier les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann-BGK, nous nous proposons à présent d'en chercher un équivalent adimensionnel.

1.2.4 L'équation de Boltzmann adimensionnelle

Pour établir cette équation, attardons nous quelque peu sur ce que l'on appelle le *libre parcours moyen* d'une particule. Cette grandeur, notée λ , correspond à la distance moyenne que parcourt une particule dans un gaz ou un fluide entre deux collisions. Pour un modèle de chocs élastiques de sphères dures, on peut estimer son ordre de grandeur de la façon suivante (chapitre V dans [Cer88]) :

$$\lambda = \frac{m}{\rho_0 \pi r_m^2} , \quad (1.42)$$

avec m la masse d'une particule, ρ_0 la masse volumique du gaz et r_m le rayon d'une molécule. Par exemple, dans l'air et dans les conditions normales de température et de pression, on a λ de l'ordre de 10^{-7} m, malgré un nombre de particules par centimètres cubes de 10^{19} . Cette notion interviendra de façon prépondérante par la suite.

Introduisons une longueur L et un temps t_0 caractéristiques pour un écoulement donné. Il nous faut à présent une vitesse caractéristique de l'agitation moléculaire. La vitesse $c_0 = \sqrt{rT_0}$ correspond physiquement à la vitesse du son pour une évolution isotherme à la température de référence T_0 . Celle-ci est proportionnelle à la vitesse du son pour une évolution isentropique $c_0^{is} = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec γ la constante de Laplace ($\gamma = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique). Nous choisirons par commodité d'utiliser la vitesse du son isotherme pour l'adimensionnement, ce qui ne change en rien les conclusions qui vont suivre. Ce choix est motivé par le fait que nous étudierons davantage le cas d'une température

fixe par la suite. Suivant ce choix, on peut former les variables adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{c} = \frac{c}{c_0} ; \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} ; \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0} ; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} . \quad (1.43)$$

De même, la définition de la fonction de distribution et l'écriture de son premier moment nous donne

$$\tilde{f} = \frac{c_0^3}{\rho_0} f . \quad (1.44)$$

Ces adimensionnements fournissent, en résumé,

$$\boxed{\tilde{c} = \frac{c}{c_0} ; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{c_0} ; \quad r\tilde{T} = \frac{rT}{c_0^2}} \quad (1.45)$$

On remarque ainsi que toutes les vitesses macroscopiques adimensionnelles sont équivalentes à un **nombre de Mach local**. Notons d'ores et déjà que, sous l'hypothèse d'une évolution isotherme, la température adimensionnelle se réduit à $r\tilde{T} = 1$.

Afin de simplifier l'analyse mathématique, nous considérons à partir de maintenant l'équation-modèle de Boltzmann-BGK (nous reviendrons plus loin sur les conséquences de ce choix), ce qui conduit à prendre un opérateur de collision de la forme

$$\Omega = \frac{-1}{\tau} (f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)) , \quad (1.46)$$

avec τ un temps caractéristique entre chaque collision. On peut facilement relier ce temps au libre parcours moyen

$$\tau = \frac{\lambda}{c_0} . \quad (1.47)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{t_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \frac{c_0}{L} \tilde{\mathbf{c}} \cdot \nabla \tilde{f} = \frac{-c_0}{\lambda} (\tilde{f} - \tilde{f}^{eq}) . \quad (1.48)$$

En multipliant par L/c_0 , on aboutit à l'**équation de Boltzmann-BGK adimensionnée**

$$\boxed{St \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \nabla \tilde{f} = \frac{-1}{Kn} (\tilde{f} - \tilde{f}^{eq})} \quad (1.49)$$

où apparaissent le **Nombre de Strouhal cinétique** $St = L/(c_0 t_0)$ et le **Nombre de Knudsen**

$$Kn = \lambda/L \quad (1.50)$$

Si l'on regarde un ordre de grandeur typique de λ comme celui donné précédemment, on se rend compte que pour une étude de régimes hydrodynamiques classiques (automobile par exemple), le nombre de Knudsen sera très faible. Par conséquent, nous considérerons dorénavant

$$Kn = \epsilon \ll 1 \quad (1.51)$$

Par ailleurs, on peut montrer que le libre parcours moyen est proportionnel à la viscosité dynamique [Cer88]

$$\lambda = \frac{\mu}{\rho c_0} , \quad (1.52)$$

ce qui fournit d'après (1.47)

$$\mu = \tau \rho c_0^2 . \quad (1.53)$$

Cela permet d'exprimer le nombre Knudsen de la façon suivante

$$\boxed{\epsilon = \frac{Ma}{Re}} , \quad (1.54)$$

avec Ma le nombre de Mach et Re le nombre de Reynolds. Il est donc logique, pour des écoulements turbulents à nombre de Mach faible, de considérer Kn très faible.

Concernant le nombre de Strouhal cinétique, on retrouve les équations macroscopiques classiques contenant tous les termes lorsqu'on le prend égal à 1. On peut toutefois noter qu'en étudiant d'autres types de régimes dans lesquels $St \neq 1$, on aboutira à d'autres modèles macroscopiques. Pour le reste de notre exposé, nous considérerons

$$St = 1 \Rightarrow L = c_0 t_0 \Rightarrow \epsilon = \frac{\lambda}{L} = \frac{\tau}{t_0} = \tilde{\tau} . \quad (1.55)$$

Ainsi, le temps de relaxation adimensionnel est égal au nombre de Knudsen.

Nous définissons la quantité

$$\boxed{\hat{\tau} = 1} . \quad (1.56)$$

Ce choix a priori étrange est fait uniquement dans le but d'obtenir par la suite des expressions qui soient familières au lecteur habitué de la littérature LBM : classiquement, le nombre de Knudsen et le temps de relaxation apparaissent côté à côté. En résumé, en omettant les tildes pour ne pas alourdir les expressions, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \frac{-1}{\epsilon \hat{\tau}} (f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t))} \quad (1.57)$$

en insistant sur le fait que

$$\epsilon \hat{\tau} = \epsilon = \frac{\tau}{t_0} = \tilde{\tau} . \quad (1.58)$$

En plus de [Cer88], on pourra se référer à [Son12] et à [Gol06] pour plus de précisions sur ces questions d'adimensionnement (et bien d'autres). On peut y voir que ce travail peut aussi être mené de façon rigoureuse avec l'opérateur de collision complet de Boltzmann et aboutir à l'apparition du même facteur ($1/\epsilon$). **Dans ce qui suit, sauf mention contraire, nous abandonnerons les tildes pour plus de clarté et continuerons à utiliser des grandeurs adimensionnées de façon implicite.**

1.3 Limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann

L'étape suivante consiste à obtenir des équations d'évolution reliant entre elles des quantités macroscopiques observables. Nous présenterons les grandes familles de méthodes qui permettent d'atteindre cet objectif, en gardant à l'esprit que la plupart d'entre elles ont été initialement conçues pour rechercher mathématiquement des solutions à l'équation de Boltzmann, ce qui constitue une tâche plus vaste encore qui dépasse largement le cadre de notre étude. Dans cette partie, nous nous intéresserons majoritairement aux méthodes de type *développements asymptotiques* : nous analyserons plus en détail la méthode de Hilbert et à sa variante la plus connue, celle de Chapman-Enskog. L'accent sera mis sur la différence entre ces deux approches et leurs résultats.

1.3.1 Éléments de théorie cinétique

En théorie cinétique, un des paramètres les plus influents sur la dynamique d'un écoulement est le nombre de Knudsen, défini dans la partie précédente. Pour des valeurs faibles de ce dernier, l'effet des collisions entre les particules sera dominant. Cette intuition est d'ailleurs confirmée par l'équation de Boltzmann adimensionnelle, puisqu'un facteur $1/Kn$ apparaît devant le terme de collision. À l'inverse, plus Kn sera grand plus le gaz sera dit *rarefié*. Ce nombre adimensionnel peut être vu comme une mesure d'éloignement par rapport à l'état d'équilibre. Pour $Kn = \epsilon$ faible, on peut en effet écrire instinctivement $f = f^{eq} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots$ (mais nous verrons que cela n'a rien de simple mathématiquement...). Nous montrerons par la suite en quoi les équations de Navier-Stokes correspondent à un faible écart à l'équilibre : ces dernières commencent d'ailleurs à être mises en défaut en pratique aux alentours de $Kn = 10^{-2}$ (cet ordre de grandeur est donné purement à titre indicatif). Un panorama des différents régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen est donné à titre indicatif par la figure 1.2. Pour de plus grands nombres de Knudsen, des méthodes plus fines, sur lesquelles nous reviendront succinctement, peuvent être employées pour obtenir des équations macroscopiques. Parfois, pour des régimes trop fortement hors-équilibre, il devient bien trop complexe de chercher à obtenir des modèles macroscopiques : on peut alors soit résoudre directement l'équation de Boltzmann, étudier des schémas cinétiques (GKS, UGKS, DUGKS [GXW13]), ou employer une méthode stochastique comme la simulation directe de Monte-Carlo (DSMC en anglais). Ces méthodes reviennent à une description détaillée de la fonction de distribution. Elles sont valables sur une plus large gamme de nombre de Knudsen (voire sur toute la gamme) et sont donc clairement plus coûteuses. De plus, la résolution d'équations purement cinétiques sans tentatives de les relier à un modèle macroscopique ne permettent pas de comprendre qualitativement la dynamique d'une écoulement : les couplages entre les différents champs physiques, ou les phénomènes observables comme la viscosité, la turbulence ou les transferts thermiques y restent masqués car ils n'apparaissent directement que dans des équations macroscopiques.

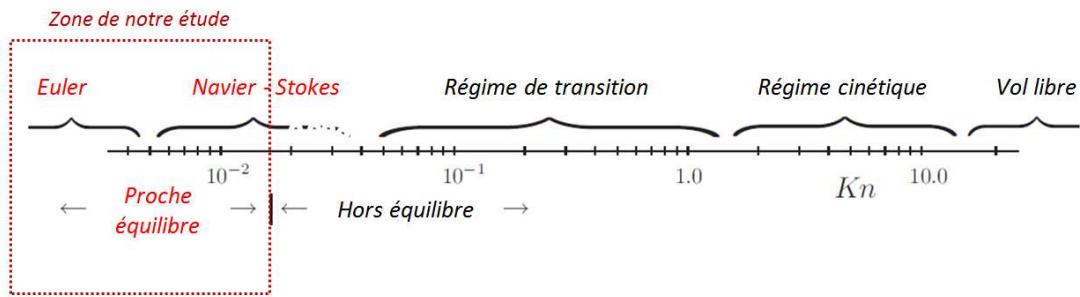


FIGURE 1.2 – Différents régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen

En conclusion, il est clair que notre domaine d'étude va se concentrer sur des états *proches de l'équilibre*. Nous effectuerons tout de même dans cette introduction une incursion en territoire hors-équilibre.

Il existe plusieurs familles de méthodes permettant de déduire des modèles macroscopiques à partir de l'équation de Boltzmann. Notons toutefois que les techniques que nous allons aborder n'ont pas été développées dans le but premier de fournir des équations macroscopiques mais de trouver des solutions à l'équation de Boltzmann.

La première famille de méthodes s'appuie sur des **développements asymptotiques en puissances du nombre de Knudsen** : on peut citer les approches de Hilbert et Chapman-Enskog, qui se proposent de rechercher des solutions dites *normales* de l'équation de Boltzmann. Pour ce qui est de la déduction de modèles macroscopiques, l'approche la plus populaire pour les écoulements faiblement hors-équilibre est celle de Chapman-Enskog : elle suffira pour retrouver les équations de Navier-Stokes par un développement d'ordre 1. Nous détaillerons plus loin les distinctions qui existent entre les méthodes de Hilbert et de Chapman-Enskog. Poussé au delà, le développement de Chapman-Enskog aboutit à des équations macroscopiques controversées [SYC06 ; Vil00], dites de Burnett, voire Super-Burnett. Néanmoins, il est important de préciser que sous certaines conditions et dans certains régimes d'écoulement, les équations de type Burnett peuvent tout de même fournir des résultats bien meilleurs que les équations de Navier-Stokes. On pourra se référer au très bon article de synthèse critique de Garcia-Colin *et al.* sur le sujet [GVU08]. Par ailleurs de nombreux auteurs ont tenté d'introduire des corrections à ces équations pour élargir leur spectre d'efficacité. D'autres méthodes font apparaître des développements asymptotiques, contenant aussi le nombre de Knudsen, comme la méthode de Chen-Rao-Spiegel [CRS00 ; CRS01], synthétisée également par Dellar [Del07]. Cette méthode est proche de la méthode de Chapman et Enskog mais fournit des résultats différents de cette dernière à l'ordre 2 en nombre de Knudsen. Les équations macroscopiques obtenues sont, d'après les auteurs, valides sur une plus grande gamme de nombre de Knudsen que l'équation de Navier Stokes et bien plus satisfaisantes que les équations originales de Burnett.

La deuxième famille correspond aux méthodes issues de la **théorie de Grad** et de ses célèbres équations aux 13 moments [Gra49 ; Gra58] (voir aussi [SYC06 ; GVU08 ; ST03]). Il s'agit de trouver des équations de conservation sur la masse volumique, les 3 composantes de la vitesse, les trois composantes du flux de chaleur et les six composantes du tenseur symétrique des contraintes, le tout en prenant les moments de l'équation de Boltzmann. La fermeture du système est cette fois obtenue par un développement en polynômes de Hermite de la fonction de distribution. Cette idée capitale est à la base de la théorie de l'équation de Boltzmann à vitesse discrètes, sur laquelle nous reviendrons largement puisqu'elle constitue un fondement du lien entre la théorie cinétique continue et la méthode de Boltzmann sur réseau. Ces équations de Grad sont bien plus complexes mais surtout bien plus précises que nécessaire pour notre cas : elles peuvent être utiles pour étudier les *régimes de transition*. Il n'est donc pas envisagé de les utiliser pour nos objectifs industriels en aéroacoustique automobile. De nombreux liens peuvent être tissés entre le système de Grad et les modèles macroscopiques déduits par les théories asymptotiques : en effet, il est possible de montrer que le système de Grad contient les équations de Navier-Stokes et de Burnett.

On pourra également citer la méthode dite de l'*itération Maxwellienne* [IT56] qui fournit un résultat similaire à celui de Chapman et Enskog à la première itération mais diffère au delà. Ce type de méthodes est à classer dans la catégorie des *itérations différentielles* : elles cherchent à trouver la solutions d'un système différentiel par dérivations successives [IT56]. Les seules hypothèses sur lesquelles repose l'itération Maxwellienne sont l'existence et la différentiabilité des moments. Il n'est pas question de développement asymptotique, mais d'une hiérarchie infinie d'équations différentielles aux moments. De même, l'intérêt de ce type de méthodes est davantage lié aux écoulements de gaz raréfiés, dépassant largement le cadre de notre étude et de nos applications.

Afin de se concentrer sur les régimes proches de l'équilibre, nous nous intéresserons

uniquement à la première famille de méthodes citée plus haut : celle des développements asymptotiques en puissances du nombre de Knudsen. Pour une synthèse des grands enjeux du problème de la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann, on pourra se référer à la première partie de [Vil00] ou encore à [SYC06 ; GVU08 ; ST03].

1.3.2 Le développement de Chapman-Enskog

Historiquement, les travaux mathématiques sur les méthodes asymptotiques en nombre de Knudsen ont été initiés par Hilbert en 1912 [Hil12]. Son idée de base est de chercher des solutions de l'équation de Boltzmann sous la forme suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \quad (1.59)$$

où ϵ serait un "petit" paramètre, identifiable au nombre de Knudsen. Il est régulier de voir des auteurs de la communauté LBM introduire un développement qu'ils nomment *de Chapman-Enskog* alors qu'ils réalisent en fait un faux développement de Hilbert, dont le résultat final est présenté équivalent au résultat de Chapman-Enskog, ce qui n'est pourtant pas le cas à un ordre de troncature fini. Il peut être intéressant d'étudier un peu plus en détail la différence entre les deux approches lorsqu'une troncature à un ordre fini est considéré : le lecteur est renvoyé notamment à l'annexe A pour plus de détails sur le développement de Hilbert à l'ordre 1.

Quelques années plus tard, autour des années 1916-1917, Chapman et Enskog développèrent (indépendamment l'un de l'autre et dans des formalismes différents) une autre méthode asymptotique proche de celle de Hilbert. Celle-ci est très largement détaillée dans le livre de Chapman et Cowling [CC70] et comparée mathématiquement à la méthode de Hilbert dans le travail de Grad [Gra58]. Les développements de Chapman-Enskog et Hilbert fournissent des résultats asymptotiquement équivalents (c'est à dire lorsque le développement en série en puissances de ϵ n'est pas tronqué) mais diffèrent à tout ordre fini. Toutefois, y compris asymptotiquement, des différences peuvent subsister pour le traitement des conditions limites et aux abords de chocs [Gra58]. On pourra également se référer aussi au livre de Cercignani [Cer88] pour les aspects mathématiques. Dans notre cas, nous utiliserons l'équation de Boltzmann-BGK et non celle de Boltzmann, et nous ne traiterons que d'une troncature à un ordre fini.

L'idée principale de Chapman et Enskog est donc toujours d'effectuer un développement de la fonction de distribution, mais sous la forme

$$f[\rho(\mathbf{x}, t), \rho\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \rho e(\mathbf{x}, t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)}[\rho(\mathbf{x}, t), \rho\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \rho e(\mathbf{x}, t)] \quad , \quad (1.60)$$

très différent de celui de Hilbert sur le plan mathématique. La différence majeure est que les quantités conservées (masse, quantité de mouvement et énergie) n'y sont pas développées en série mais gardées complètes et considérées comme connues (et régulières). La fonction de distribution est posée comme dépendant explicitement des moments hydrodynamiques conservés complets (ρ , $\rho\mathbf{u}$, ρe) [Vil00] [Gol06]. Surtout, on voit que la dépendance temporelle de la fonction de distribution n'intervient que par l'intermédiaire des moments conservés. Sur ce point technique, nous pouvons notamment nous référer à

l'explication de Grad [Gra58] : ce type de dépendance pour la fonction de distribution est prouvé par un théorème d'unicité de Hilbert, issu de son développement asymptotique. Ce théorème montre que toute solution f de l'équation de Boltzmann, développable sous la forme d'une série en nombre de Knudsen comme considéré par Hilbert, est déterminée de manière unique par les variables d'état du fluide et leurs gradients. La différence essentielle entre le développement de Hilbert et celui de Chapman-Enskog est donc que ce dernier *postule* l'existence d'une dépendance fonctionnelle de f en ρ , $\rho\mathbf{u}$, ρe et leurs gradients qui soit développable en série dépendant du petit paramètre ϵ , tandis que Hilbert *déduit* la dépendance nécessaire de f vis à vis de ρ , $\rho\mathbf{u}$, ρe en supposant que ces variables sont développables en ϵ . Cette distinction est précisément ce qui rend la méthode de Chapman-Enskog plus pratique pour déduire des modèles macroscopiques.

Pour mettre en place une telle méthode, Enskog introduit également un développement particulier de l'opérateur de dérivée temporelle qui n'apparaît pas dans le cas de Hilbert :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial t} \quad (1.61)$$

Par exemple, on écrira

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^{(0)} \rho}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^{(1)} \rho}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.62)$$

Si on introduit (1.60) et (1.61) dans l'équation de Boltzmann-BGK adimensionnée (1.57), on obtient en identifiant les termes par ordre de puissance en ϵ

$$0 = \frac{-1}{\hat{\tau}} (f^{(0)} - f^{eq}) \quad (n=0) \quad (1.63)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^{(k)} f^{(n-1-k)}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f^{(n-1)} = \frac{-1}{\hat{\tau}} f^{(n)} \quad (n \geq 1) \quad (1.64)$$

Ce résultat est déjà différent de celui obtenu pour la méthode de Hilbert. En particulier, on a à présent

$$\frac{\partial^{(0)} f^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f^{(0)} = \frac{-1}{\hat{\tau}} f^{(1)} \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial^{(1)} f^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f^{(1)} = \frac{-1}{\hat{\tau}} f^{(2)} \quad (1.66)$$

L'équation (1.63) nous montre que $f^{(0)}$ est à nouveau une Maxwellienne. Toutefois, contrairement au cas de Hilbert (eq. (A.16) en annexe), il s'agit cette fois de la fonction d'équilibre locale définie à partir des moments non développés.

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi rT)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2}{2rT}\right) \quad (1.67)$$

La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie par l'opérateur BGK implique cette fois pour $k \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{(k)} \psi \, d\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1.68)$$

avec $\psi = (1, \mathbf{c}, |\mathbf{c}|^2/2)$. Les relations (1.68) sont aussi nommées *conditions de solvabilité*. Elles correspondent à la recherche de solutions *normales* de l'équation de Boltzmann.

En arrêtant le développement de Chapman-Enskog à l'ordre 0, c'est-à-dire en prenant $f = f^{(0)} = f^{eq}$, l'étude de l'approximation d'ordre 0 de l'équation de Boltzmann (en prenant les moments d'ordre 0,1 et 2 de (1.65)) mène aux **équations d'Euler**, soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(0)}\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial^{(0)}\rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial^{(0)}(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{u} + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \mathbf{q}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{u} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

avec, en reprenant les notations de notre étude

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \rho r T \mathbf{I} = p \mathbf{I}, \quad (1.70)$$

$$\mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{0}. \quad (1.71)$$

Si l'on souhaite pousser le développement de f jusqu'à l'ordre 1, il faut calculer $f^{(1)}$ grâce à (1.65) puis s'intéresser aux moments de l'équation (1.66). On utilise l'équation (1.69) pour remplacer dans (1.65) les dérivées temporelles des variables macroscopiques par des dérivées spatiales lors de la différenciation de la Maxwellienne. On obtient

$$f^{(1)} = -\hat{\tau} f^{eq} \left(\nabla T \cdot \mathbf{v} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2rT^2} - \frac{5}{2T} \right) - \frac{1}{rT} [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{3} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{I}] : \nabla \mathbf{u} \right), \quad (1.72)$$

avec $\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{u}$. Des calculs sur les intégrales gaussiennes permettent de vérifier qu'une telle expression est bien compatible avec les conditions de solvabilité (1.68). L'étude des moments d'ordre 0,1 et 2 de (1.66) donne respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(1)}\rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^{(1)}\rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial^{(1)}(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{q}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{u} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

avec cette fois-ci

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = -\hat{\tau} \rho r T \left(\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \quad (1.74)$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = -\frac{5}{2} \hat{\tau} r^2 T \nabla T \quad (1.75)$$

Ces équations correspondent à la contribution d'ordre 1 en ϵ dans l'équation de conservation globale. En conclusion, si l'on étudie un développement de l'équation de Boltzmann-BGK jusqu'à l'ordre 1 par la méthode de Chapman-Enskog, c'est-à-dire (1.69) + ϵ (1.73) + $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, on obtient les **équations de Navier-Stokes**. Elles correspondent au développement tronqué à l'ordre 1 de f et de l'opérateur de dérivée temporelle, faisant apparaître des termes d'erreur d'ordre 2. Toutefois, on peut montrer analytiquement que toutes les

contributions d'ordre supérieur ou égal à 1 dans la dérivée temporelle de la densité pour l'équation de conservation de la masse sont nulles, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{u} + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{u} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \epsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \quad (1.77)$$

$$= p \mathbf{I} - \mu \left(\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \quad (1.78)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{(0)} + \epsilon \mathbf{q}^{(1)} \quad (1.79)$$

$$= -\kappa \nabla T \quad (1.80)$$

et les coefficients de viscosité μ et de conductivité thermique κ donnés par

$$\mu = \epsilon \hat{\tau} \rho r T = \epsilon \hat{\tau} p \quad (1.81)$$

$$\kappa = \frac{5}{2} \epsilon \hat{\tau} \rho r^2 T = \frac{5}{2} \epsilon \hat{\tau} r p \quad (1.82)$$

On peut notamment faire apparaître dans l'expression des contraintes le tenseur des déformations \mathbf{S} défini par

$$\mathbf{S} = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}}{2} \quad (1.83)$$

Remarque : passage dimensionnel-adimensionnel

Les systèmes macroscopiques obtenus l'ont été à partir de l'équation de Boltzmann-BGK adimensionnelle. Il est donc normal qu'apparaisse ϵ dans le tenseur des contraintes et dans le flux de chaleur.

L'équation de Boltzmann dimensionnelle s'obtient simplement en remplaçant $\epsilon \hat{\tau}$ par τ dans le terme de collision.

$$\epsilon \hat{\tau} \longleftrightarrow \tau \quad (1.84)$$

On en déduit que pour obtenir les équations de Navier-Stokes en unités réelles, il n'y a qu'à effectuer cette même substitution dans (1.76), tout en considérant toutes les variables physiques comme étant dimensionnelles. Ce faisant, on retrouve bien les équations de conservation usuelles.

1.3.3 Commentaires sur la limite hydrodynamique obtenue

On peut remarquer que le développement de Chapman-Enskog sur l'équation de Boltzmann BGK fournit une **viscosité de volume nulle** (on se réfère à la définition de la viscosité de volume au sens de Dellar [Del01], qui reprend celle de Landau et Lifshitz et nous semble être la plus pertinente, notamment d'un point de vue acoustique). Dit autrement, le gaz ainsi modélisé vérifie l'**hypothèse de Stokes**. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est donc, en cohérence avec les définitions (1.3)-(1.5), de trace nulle. Ces mêmes remarques peuvent être faites si

l'on regarde le résultat d'un développement de Chapman-Enskog effectué sur l'équation de Boltzmann complète.

En revanche, la forme simplifiée de l'opérateur de collision BGK fournit d'un nombre de Prandtl tel que $Pr_{BGK} = 1$ alors que l'on obtient $Pr = \frac{2}{3}$ pour l'équation de Boltzmann avec un modèle de collisions élastiques de sphères dures. En effet, pour un gaz parfait monoatomique on a la relation $\frac{c_p}{r} = \frac{5}{2}$ avec c_p la capacité thermique massique à pression constante, ce qui donne dans le cas BGK

$$Pr_{BGK} = \frac{\mu c_p}{\kappa} = \frac{2pc_p}{5rp} = 1 \quad (1.85)$$

Il existe des modèles qui, pour corriger cela, utilisent une autre formulation de la fonction d'équilibre : c'est le cas du BGK-ES [Hol65]. En dehors de cette difficulté liée au nombre de Prandtl et en ce qui concerne uniquement l'obtention des équations de Navier-Stokes, il n'y a pas de différence notable entre l'opérateur de collision de Boltzmann et l'opérateur BGK en ce qui concerne la limite hydrodynamique à l'ordre 1 en nombre de Knudsen. Les termes d'erreur d'ordre ϵ^2 auront en revanche des expressions très différentes, ce qui n'est pas sans conséquence. Il faut garder à l'esprit que les solutions de l'équation de Boltzmann obtenues avec ce terme de collision BGK ont un domaine de validité relativement restreint. Cet opérateur est effectivement très simple, plus encore que *l'opérateur de collision linéarisé* de Boltzmann, très étudié par les mathématiciens. On verra par la suite que l'opérateur BGK fournit, dans le cadre de l'équation de Boltzmann sur réseau, un schéma numérique peu stable bien que très utile dans bien des situations peu complexes.

Au delà de l'obtention correcte des équations de Navier-Stokes avec une précision d'ordre 2, le développement de Chapman-Enskog possède, vis à vis de son homologue de Hilbert, d'autres avantages mathématiques et physiques concernant son domaine de validité (applicabilité du développement au sein de la couche limite visqueuse etc...). Pour une synthèse plus mathématique mais très succincte des différences entre ces deux approches et leurs résultats, on pourra se référer à [GK03]. Bien que plus précis, il souffre tout de même d'inconsistances mathématiques à la traversée de certaines zones d'écoulement comme les chocs, ou pour l'établissement de conditions initiales (des explications bien plus détaillées peuvent être trouvées dans [Cer88]). De manière générale, ces développements asymptotiques ne sont pas forcément toujours convergents à ϵ fixé. On remarque en effet qu'un développement à l'ordre n fera apparaître des dérivées d'ordre n de la fonction d'équilibre, ce qui demande pour ϵ fixé un haut degré de régularité de la solution macroscopique pour obtenir un résultat valide. Ce type de développement ne peut donc représenter qu'une classe de solutions très particulières, mais suffit toutefois amplement à notre besoin : nous voulons déduire un modèle macroscopique à partir de l'équation de Boltzmann et non de trouver des solutions analytiques uniformément valides de cette dernière.

Chapitre 2

De l'équation de Boltzmann à l'équation de Boltzmann sur réseau

Après avoir montré que l'on retrouve un comportement macroscopique classique de dynamique des fluides à partir du modèle Boltzmann-BGK, nous allons à présent montrer comment rendre toutes ces conclusions exploitables numériquement. La première étape consiste à obtenir une formulation de l'équation de Boltzmann possédant les bonnes limites hydrodynamiques à l'ordre 1, mais avec un ensemble des vitesses microscopiques de cardinal fini. Cela permettra notamment de remplacer les intégrations sur \mathbb{R}^3 par des sommes discrètes dans le calcul des moments. C'est justement la notion de développement en polynômes de Hermite introduite par Grad qui est à la base de toute la théorie qui va suivre.

Notre objectif est ici de synthétiser tout le cheminement théorique menant de l'équation de Boltzmann à l'équation de Boltzmann sur réseau, en suivant la méthode de Shan *et al.* [SYC06 ; SH98], que nous allons introduire ci-dessous. Un soin tout particulier sera apporté pour préserver la continuité des procédures d'adimensionnement dans toutes les étapes du raisonnement.

2.1 L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

Historiquement, les premiers modèles à vitesses discrètes pour l'équation de Boltzmann ont été introduits par Broadwell en 1964 [Bro64], ou encore plus tard par Gatignol [Gat75]. À l'époque, il n'y avait pas de cadre théorique précis justifiant le fait de restreindre l'espace des vitesses microscopiques, cette discrétisation est posée telle qu'elle dès le départ. Très en avance sur son temps, cette simplification ne permettait pas de déduire de manière systématique, générale et correcte des modèles macroscopiques de type Navier-Stokes. Elle a en revanche conduit à de nombreuses conclusions et résultats intéressants.

Plus tardivement et assez indépendamment de l'équation de Boltzmann continue, la méthode de Boltzmann sur réseau est née autour des années 1990, dans le prolongement des travaux sur la théorie des gaz sur réseaux et des automates cellulaires [MZ88 ; QdL92]. Ces modèles étaient par construction basés sur un ensemble discret de vitesses mais étaient, à l'origine, paramétrés *a posteriori* pour retrouver les propriétés macroscopiques souhaitées. Certaines zones d'ombre théoriques persistaient également, par exemple concernant le degré de troncature du polynôme y représentant la fonction d'équilibre. Il faut également

préciser qu'il s'agit d'une méthode numérique, c'est-à-dire que dans ses équations constitutives le temps et l'espace y sont aussi discrétisés (ce qui n'est pas le cas des modèles à vitesses discrètes de Broadwell et Gatignol).

Jusque dans la fin des années 90, il n'était donc pas établi de lien solide reliant la théorie cinétique continue, les modèles à vitesses discrètes et la méthode de Boltzmann sur réseau. En 1998, Shan et He [SH98] montrent qu'il est possible de discréteriser l'espace des vitesses microscopiques en se basant sur les travaux de Grad et ses équations aux moments. La troncature d'un développement en polynôme de Hermite de la fonction de distribution y est vue comme équivalente à la résolution de l'équation de Boltzmann sur un ensemble discret de vitesses. Ces dernières se révèlent être exactement les abscisses d'une quadrature de Gauss-Hermite. Pour obtenir une description macroscopique correcte, l'objectif est alors de démontrer que l'on peut former des moments discrets qui soient strictement égaux à leurs équivalents continus jusqu'à un ordre donné. C'est cette approche, développée de façon complète et rigoureuse dix ans plus tard dans l'article de Shan *et al.* [SYC06] que nous allons synthétiser ici.

2.1.1 Développement en polynômes de Hermite et moments de la fonction de distribution

Nous nous plaçons dans un cadre adimensionnel, toujours défini par le système (1.44)-(1.45).

Introduisons d'abord la fonction de pondération $\omega(\mathbf{c})$ qui s'écrit en dimension d

$$\omega(\mathbf{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp(-|\mathbf{c}|^2/2) \quad (2.1)$$

On remarque déjà que cette fonction est, à des facteurs d'adimensionnement près, la distribution de Maxwell-Boltzmann. Toute fonction $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ de carré intégrable sur l'espace de Hilbert des vitesses microscopiques $L^2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle a, b \rangle^\omega = \int \omega(\mathbf{c}) a(\mathbf{c}) b(\mathbf{c}) \, d\mathbf{c} , \quad (2.2)$$

pour a et b quelconques dans $L^2(\mathbb{R})$ (c'est à dire que, en particulier, on a la condition $\int \phi^2 \omega(\mathbf{c}) \, d\mathbf{c} < +\infty$), peut se décomposer sur la base orthogonale des polynômes de Hermite

de la façon suivante

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \phi, \mathcal{H}_i^{(n)} \rangle^\omega \mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{c}) \quad (2.3)$$

où $\mathcal{H}^{(n)}$ est un tenseur symétrique d'ordre n , représentant le polynôme de Hermite de degré n en \mathbf{c} obtenu par la formule de Rodrigues

$$\mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) = \frac{(-1)^n}{\omega(\mathbf{c})} \nabla^n \omega(\mathbf{c}) \quad (2.4)$$

et où i et j en caractères gras regroupent les n indices d'un tenseur d'ordre n . La répétition d'indices entraîne une sommation implicite. Par exemple pour deux tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} d'ordre 2, on obtiendra

$$A_i B_i = A_{ij} B_{ij} = \mathbf{A} : \mathbf{B} \quad (2.5)$$

Pour les premiers polynômes, on obtient

$$\mathcal{H}^{(0)} = 1 , \quad (2.6)$$

$$\mathcal{H}_i^{(1)} = c_i , \quad (2.7)$$

$$\mathcal{H}_i^{(2)} = c_i c_j - \delta_{ij} , \quad (2.8)$$

$$\text{ou écrit autrement, } \mathcal{H}^{(2)} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{I} , \quad (2.9)$$

et

$$\mathcal{H}_i^{(3)} = c_i c_j c_k - c_i \delta_{jk} - c_j \delta_{ik} - c_k \delta_{ij} . \quad (2.10)$$

Si on suppose que la fonction $\phi = f/\omega$ avec f la fonction de distribution vérifie la condition d'intégrabilité, on peut écrire,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \omega(\mathbf{c}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f, \mathcal{H}_i^{(n)} \rangle^1 \mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{c}) , \quad (2.11)$$

avec pour deux fonctions a et b de $L^2(\mathbb{R})$ quelconques,

$$\langle a, b \rangle^1 = \int a(\mathbf{c}) b(\mathbf{c}) d\mathbf{c} . \quad (2.12)$$

On obtient ainsi,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \omega(\mathbf{c}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{c}) \quad (2.13)$$

avec

$$a_i^{(n)} = \langle f, \mathcal{H}_i^{(n)} \rangle^1 . \quad (2.14)$$

Grâce à cette formulation, on repère une vertu fondamentale des polynômes de Hermite vis à vis de la fonction de distribution : les tenseurs $\mathbf{a}^{(n)}$ correspondent aux moments d'ordre n . Par exemple, on peut écrire pour les premiers moments :

$$\mathbf{a}^{(0)} = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{c} = \rho \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} f \mathbf{c} d\mathbf{c} = \rho \mathbf{u} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(2)} &= \int_{\mathbb{R}^3} f (\mathbf{c} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{I}) d\mathbf{c} = \mathbf{\Pi} - \rho \mathbf{I} \\ &= \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho(rT - 1) \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Rappelons également que pour une évolution isotherme, la température adimensionnelle vaut $rT = 1$. Le fait de voir apparaître des termes dépendant de l'écart à la température de référence est lié à la méthode d'adimensionnement de \mathbf{c} . Si l'on choisit rT comme valeur de référence au lieu de $rT_0 = c_0^{-2}$ comme ici, le développement de Hermite aurait été bien plus complexe, si ce n'est impossible, car \mathbf{c} doit être indépendant de T (voir [SYC06]).

2.1.2 Discrétisation de l'espace des vitesses

On a vu que la description macroscopique du fluide était déterminée par les coefficients de projection de f sur une base de polynômes de Hermite. Or, en notant f^N le développement tronqué à l'ordre $N \geq n$, on peut écrire d'après (2.13)

$$f^N(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) = \omega(\mathbf{c}) \pi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t), \quad (2.18)$$

avec π un polynôme en \mathbf{c} avec $\deg(p) = n + N \leq 2N$. Par ailleurs, d'après les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Hermite, on a

$$\mathbf{a}^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathcal{H}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^N(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathcal{H}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{c}, \quad (2.19)$$

avec toutes les contributions d'ordre supérieur à n nulles par orthogonalité, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^3} [f^{k+1} - f^k](\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathcal{H}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{c} = 0, \quad (2.20)$$

pour tout $k \geq n$. Ainsi, on obtient d'après (2.18) et (2.19)

$$\mathbf{a}^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{c}) \pi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathrm{d}\mathbf{c}. \quad (2.21)$$

Sous cette forme, il est possible d'exprimer la dernière intégrale par une simple somme discrète à l'aide d'une **méthode de quadrature** : celle de Gauss-Hermite dans notre cas. Une quadrature de Gauss-Hermite est dite de degré Θ , si pour un polynôme P quelconque de degré Θ l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{c}) P(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \mathrm{d}\mathbf{c} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \omega_{\alpha} P(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}), \quad (2.22)$$

avec ω_{α} et \mathbf{c}_{α} respectivement les *poids* et *œuds* (ou *abscisses*) de la quadrature, pour $\alpha = 0..q-1$. q représente le nombre de points nécessaire pour obtenir une quadrature exacte : il dépend de Θ et du nombre de dimensions de l'espace. Ainsi il est possible, pour un ordre de précision donné, de remplacer les intégrales par des sommes discrètes, c'est à dire remplacer l'ensemble infini des vitesses $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ par un ensemble fini discret de q vitesses, $\{\mathbf{c}_{\alpha}, \alpha = 0..q-1\}$. On l'appelle usuellement l'ensemble des **vitesses discrètes**.

Pour une quadrature donnée de degré suffisant, c'est à dire pour $\Theta \geq n + N$, on peut écrire par application de (2.22) au polynôme p

$$\mathbf{a}^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{c}) \frac{f^N(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\omega(\mathbf{c})} \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}) \mathrm{d}\mathbf{c} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \omega_{\alpha} \frac{f^N(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)}{\omega(\mathbf{c}_{\alpha})} \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}_{\alpha}). \quad (2.23)$$

Si on pose

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \omega_{\alpha} \frac{f^N(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)}{\omega(\mathbf{c}_{\alpha})}, \quad (2.24)$$

on obtient la relation fondamentale

$$\mathbf{a}^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}_{\alpha}) \quad (2.25)$$

qui donne les **moments discrets d'ordre n de f au sens des polynômes de Hermite**. Pour la suite, nous utiliserons la notation simplifiée suivante pour les valeurs des polynômes de Hermite aux coordonnées \mathbf{c}_α

$$\mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha^{(n)} . \quad (2.26)$$

On désignera à partir de maintenant implicitement $\mathcal{H}^{(n)}$ comme étant le vecteur de taille q dont les composantes dans l'espace des vitesses discrètes sont les tenseurs $\mathcal{H}_\alpha^{(n)}$. De même, on désignera par la notation \mathbf{a} , pour une fonction scalaire a quelconque, le vecteur de taille q dont les composantes sont

$$(\mathbf{a})_\alpha = a_\alpha , \quad (2.27)$$

pour $\alpha = 0..q - 1$. Nous appliquerons en particulier cette notation à la fonction de distribution.

Notons que plus généralement et hors du seul cadre des moments de Hermite, on définit un moment discret par analogie avec les moments continus (voir Eq. (1.2)) comme suit : soient $\{\mathbf{c}_\alpha = (c_{\alpha,1}, c_{\alpha,2}, c_{\alpha,3}), \alpha = 0..q - 1\}$ un ensemble de vitesses discrètes et $P_{n,\alpha}$ un polynôme quelconque de degré n en $c_{\alpha,1}, c_{\alpha,2}, c_{\alpha,3}$ ($P_n \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$). D'après nos notations, un moment discret d'ordre n de f peut se définir comme étant la quantité

$$m_{discr}^{(n)} = \langle \mathbf{P}_n, \mathbf{f} \rangle^1 = \sum_{\alpha=0}^{q-1} P_{n,\alpha} f_\alpha , \quad (2.28)$$

avec, de façon analogue au cas continu, les produit scalaires discrets pour un tenseur \mathbf{B} dans l'espace des vitesses discrètes, d'ordre quelconque,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{B} \rangle^1 = \sum_{\alpha=0}^{q-1} f_\alpha \mathbf{B}_\alpha , \quad (2.29)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{B} \rangle^\omega = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \omega_\alpha f_\alpha \mathbf{B}_\alpha . \quad (2.30)$$

On peut alors réécrire (2.25) comme suit :

$$\mathbf{a}^{(n)} = \langle \mathbf{f}, \mathcal{H}^{(n)} \rangle^1 \quad (2.31)$$

Ainsi, le développement en polynômes de Hermite de f_α tronqué à l'ordre N s'écrit via

$$f_\alpha = \omega_\alpha \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \mathbf{a}_i^{(n)} \mathcal{H}_{i,\alpha}^{(n)} \quad (2.32)$$

où apparaît pour chaque n la contraction de deux tenseurs d'ordre n . Pour une quadrature de degré suffisant, on retrouve les mêmes premiers moments que (2.15)-(2.17).

Les moments de Hermite $\mathbf{a}_0^{(n)}$ de la fonction d'équilibre s'obtiennent de même par la projection

$$\mathbf{a}_0^{(n)} = \langle \mathbf{f}^{eq}, \mathcal{H}^{(n)} \rangle^1 \quad (2.33)$$

Pour les moments d'ordre 0 et 1, ils sont bien sûr identiques à (2.15)-(2.16) d'après la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Pour le tenseur des contraintes (moment non conservé), on a son expression à l'équilibre qui s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0^{(2)} &= \boldsymbol{\Pi}^{eq} - \rho \mathbf{I} \\ &= \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho(rT - 1) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.34)$$

On a également, par exemple,

$$\mathbf{a}_0^{(3)} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \rho(rT - 1) \mathbf{I} \mathbf{u} . \quad (2.35)$$

Le développement en polynômes d'Hermite tronqué à l'ordre 3 de la Maxwellienne en dimension d donne alors

$$\begin{aligned} f_\alpha^{eq} = & \omega_\alpha \rho \left(1 + \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} [(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - |\mathbf{u}|^2 + (rT - 1)(|\mathbf{c}_\alpha|^2 - d)] \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{6} [(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - 3|\mathbf{u}|^2 + 3(rT - 1)(|\mathbf{c}_\alpha|^2 - d - 2)] \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il est important pour la suite d'écrire la relation d'orthogonalité entre les polynômes de Hermite par rapport au produit scalaire pondéré \langle , \rangle^ω : on a, pour une quadrature de degré $\Theta \geq n + m$

$$\langle \mathcal{H}_i^{(m)}, \mathcal{H}_j^{(n)} \rangle^\omega = \delta_{mn} \delta_{ij}^{perm} , \quad (2.37)$$

où δ_{ij}^{perm} est un tenseur d'ordre $m + n$ dont une composante n'est égale à 1 que si les indices $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ sont une permutation des indices $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$ et 0 sinon. Pour prendre un cas concret simple et utile pour la suite,

$$\langle \mathcal{H}_{pq}^{(2)}, \mathcal{H}_{rs}^{(2)} \rangle^\omega = (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) . \quad (2.38)$$

Grâce à ces outils, l'équation de Boltzmann-BGK peut être simplifiée pour devenir **l'équation de Boltzmann-BGK à vitesses discrètes** adimensionnelle (ou DVBE pour Discrete Velocity Boltzmann Equation).

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = \frac{-1}{\epsilon \tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad (2.39)$$

pour $\alpha = 0..q - 1$.

2.1.3 Choix d'une quadrature : quel critère retenir ?

Imaginons dans un premier temps que nous souhaitions retrouver les équations de Navier Stokes compressibles (incluant l'équation d'énergie) à partir de cette équation de Boltzmann à vitesses discrètes : quel degré Θ de quadrature doit-on choisir ? La contrainte maximale sur la précision de la quadrature vient nécessairement de l'équation de conservation de l'énergie : des trois équations de conservation, c'est elle qui fait apparaître les moments d'ordre le plus élevé. L'équation DVBE montre que pour connaître l'équation d'évolution de l'énergie (moment d'ordre 2), il faut calculer un moment d'ordre 3 de f . Pour trouver un critère physique pour déterminer Θ , nous nous basons sur l'analyse fournie dans l'étude de Shan *et al.* qui préconise l'utilisation d'une analyse de type Chapman-Enskog (nous reviendrons plus en détail sur ce choix dans le paragraphe *réflexions complémentaires* en fin de section).

De même qu'un développement de Chapman-Enskog s'effectue, nous l'avons vu, sur l'équation de Boltzmann, il peut être entrepris sur l'équation DVBE de manière extrêmement similaire, la seule différence étant le remplacement des moments continus par des moments discrets (voir [SYC06]). Or un développement de Chapman-Enskog sur l'équation DVBE à l'ordre ϵ^k montre que, pour calculer un moment d'ordre n de f , il faut

pouvoir calculer exactement un moment d'ordre $N^{(0)} = n + k$ de f^{eq} . Les équations de Navier-Stokes correspondant à l'ordre ϵ^1 , il faut être capable de calculer un moment d'ordre $N^{(0)} = 3 + 1 = 4$ de f^{eq} [SYC06] si l'on souhaite traiter l'équation d'énergie. D'après les développements effectués plus haut, nous en déduisons que le degré de la quadrature à adopter doit être $\Theta \geq 2N^{(0)}$, soit $\Theta \geq 8$, avec une fonction d'équilibre tronquée à l'ordre 4.

Pour simuler les équations de Navier Stokes sans équation d'énergie (soit toujours ϵ^1), la contrainte est plus faible : seule l'évolution des moments d'ordre 1 de f doit être connue. Par conséquent, seuls les moments d'ordre $n = 2$ de f doivent être calculés, ce qui demande de pouvoir calculer des moments d'ordre $N^{(0)} = 2 + 1 = 3$ de f^{eq} . Nous en déduisons dans ce cas que le degré de la quadrature à adopter vaut $\Theta \geq 2N^{(0)}$, soit $\Theta \geq 6$, avec une fonction d'équilibre tronquée à l'ordre 3.

En première approximation, on peut dire que plus le degré de quadrature requis est élevé, plus l'ensemble des vitesses discrètes est grand. Il existe un nombre important de formules de quadrature, dont les principales sont recensées dans [SYC06]. Il est utile, notamment pour la construction de la méthode numérique de Boltzmann sur réseau, d'utiliser des formules dont les abscisses se situent sur une grille cartésienne. De manière générale, en dimension d , une formule de quadrature à q vitesses discrètes (c'est à dire q noeuds et poids associés) sera nommée $DdQq$. On citera parmi elles et en deux dimensions, la formule de degré 5 utilisant 9 noeuds, qui mène au modèle D2Q9, et celle de degré 7 utilisant 17 noeuds, qui mène au modèle D2Q17. En trois dimensions, on obtient des formules à 15, 19 et 27 points pour une précision de degré 5 (D3Q15, D3Q19, D3Q27). On représente sur la figure 2.1 les abscisses de la quadrature D3Q19, qui se situent sur une grille cartésienne régulière. C'est cette quadrature qui sera utilisée en pratique dans nos calculs ultérieurs. Bon nombre de formules de quadratures ne possèdent pas cette particularité de pointer sur une grille cartésienne (D2Q7, D3Q13 etc...) : on peut cependant "forcer" pour un degré de précision donné les abscisses à se situer sur un tel maillage. On pourra citer par exemple le D3Q39 pour une précision de degré 7, implémenté dans [SYC06].

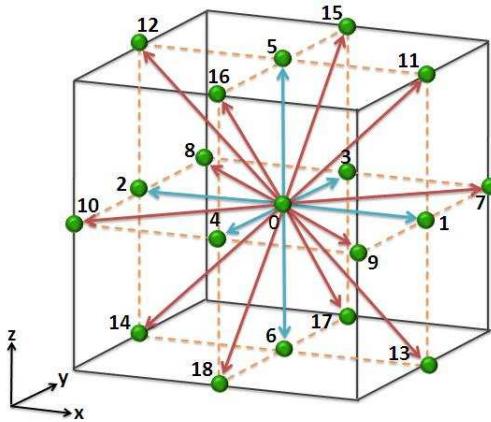


FIGURE 2.1 – Abscisses de la quadrature D3Q19, qui coïncident avec une grille cartésienne régulière.

Ainsi, on peut résumer dans la table 2.1 les poids et noeuds des quadratures les plus utilisées en trois dimensions : les modèles D3Q19 et D3Q27. Ces quadratures sont de degré 5 : comme nous l'avons vu, l'équation de Navier-Stokes (avec ou sans équation d'énergie) ne peut être retrouvée avec une telle quadrature. Pourtant, nous montrerons dans la section

CHAPITRE 2. DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN À L'ÉQUATION DE BOLTZMANN SUR RÉSEAU

suivantes qu'elles peuvent l'être pour le cas sans équation d'énergie, moyennant l'apparition d'un terme d'erreur dans le tenseur des contraintes.

TABLE 2.1 – *Quadratures les plus utilisées pour des modèles non-thermiques en trois dimensions dans le système d'unités de la DVBE. Ces quadratures sont de degré 5.*

Indices	Vitesses \mathbf{c}_α (permutations)	Poids ω_α D3Q19	Poids ω_α D3Q27
$\alpha = 0$	$(0, 0, 0)$	$1/9$	$8/27$
$\alpha = 1..6$	$(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$	$1/18$	$2/27$
$\alpha = 7..18$	$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, 0)$	$1/36$	$1/54$
$\alpha = 19..26$	$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$	-	$1/216$

Rappelons enfin que nous utilisons des grandeurs implicitement adimensionnées (dans la table 2.1, les vitesses discrètes sont adimensionnées par rapport à c_0). Les grandeurs de référence n'ayant pas changé pour le moment depuis l'établissement de l'équation de Boltzmann BGK adimensionnée, on a toujours les relations suivantes entre les grandeurs adimensionnées et dimensionnelles, transposées à l'équation DVBE

$$\tilde{\mathbf{c}}_\alpha = \frac{\mathbf{c}_\alpha}{c_0} \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{c_0} \quad r\tilde{T} = \frac{rT}{c_0^2} . \quad (2.40)$$

Pour ce qui est de f_α , on rappelle que

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} \tilde{f}_\alpha = \tilde{\rho} . \quad (2.41)$$

Si on définit en unités dimensionnelles

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} f_\alpha = \rho , \quad (2.42)$$

alors on a nécessairement

$$\tilde{f}_\alpha = \frac{f_\alpha}{\rho_0} . \quad (2.43)$$

Ainsi, l'unité de f_α est différente de celle de f , pour laquelle on rappelle que $\tilde{f} = fc_0^3/\rho_0$. Cette différence provient de subtilités d'unités lors du passage à la quadrature (équations (2.22)-(2.23)) : en unités dimensionnelles, on trouve que, si on considère les poids de quadrature ω_α sans unité, l'unité de la fonction de pondération $\omega(\mathbf{c})$ est nécessairement le $(\text{m s}^{-1})^{-3}$ en 3D.

Réflexions complémentaires : degré de précision et choix de quadrature

Un des points très intéressants du travail de Shan *et al.* [SYC06] réside dans leur utilisation du développement de Chapman-Enskog. En effet, les auteurs proposent d'utiliser la procédure de Chapman-Enskog non pas dans le but de déduire des équations macroscopiques, mais pour créer des modèles cinétiques dont les moments de Hermite seront compatible avec une mesure théorique d'éloignement de l'équilibre : le nombre de Knudsen ϵ . Shan *et al.* précisent dans leur article qu'en restant ainsi au niveau cinétique, le modèle créé ne souffre pas des problèmes de fermeture rencontrés par les équations macroscopiques au delà de l'ordre 1 en ϵ . Le nombre de Knudsen n'est donc ici qu'un outil mesurant l'éloignement de l'équilibre. Rappelons la règle générale établie dans [SYC06] :

pour un éloignement de l'équilibre d'ordre ϵ^k au sens de Chapman-Enskog, le calcul des moments d'ordre n de f exige une quadrature d'ordre suffisant pour calculer exactement les moments d'ordre $N^{(0)} = n + k$ de f^{eq} . Il est ainsi clair que plus k est choisi grand, plus le nombre de vitesses discrètes imposé par la quadrature sera grand, plus la distribution d'équilibre discrète se rapprochera de la Maxwellienne continue et plus les moments discrets deviendront proche des moments continus. C'est la somme $N^{(0)}$ qui détermine le nombre de vitesses discrètes du modèle cinétique.

Toutefois, un point intéressant et sujet à réflexion, non abordé dans le travail de Shan *et al.*, réside dans le fait que cette "règle générale" dépend de deux paramètres : n et k . Or il y a exactement $N^{(0)} + 1$ combinaisons différentes de n et de k fournissant la même somme $N^{(0)}$, c'est à dire le même modèle cinétique à vitesses discrètes. Très concrètement, exiger un degré de précision ϵ^2 (Burnett) pour simuler un écoulement hydrodynamique non-thermique (4 équations aux moments en 3D, $n = 1$) fournit le même modèle cinétique qu'en exigeant un degré de précision ϵ^1 (Navier-Stokes) pour un écoulement incluant les effets thermiques (5 équations aux moments en 3D, $n = 2$) : en effet, dans les deux cas, $N^{(0)} = 3$. Ainsi, selon ce principe, imposer un degré plus important d'éloignement de l'équilibre revient à résoudre un plus grand système d'équations aux moments.

Sans se risquer à une conclusion hâtive sur un sujet aussi technique et complexe de théorie cinétique, il semble tout de même qu'au moins un parallèle non totalement dénué de sens puisse être tracé entre cette situation et celle des équations aux moments liées à la théorie (continue) de Grad [Gra49 ; Gra58] évoquée précédemment, d'autant que les travaux de Shan *et al.* en sont directement inspirés. Une question pratique se pose en effet aux auteurs qui utilisent des systèmes aux moments continus : quel critère détermine le nombre de moments à conserver et le degré de la troncature ? Pourquoi 13 moments ? 13 moments sont-ils suffisants pour étudier tel ou tel phénomène physique fortement hors équilibre ? Lors de la construction de son système, Grad a conservé les 13 premiers moments car ceux-ci ont une interprétation physique connue (masse, quantité de mouvement, énergie, tenseur des contraintes...). Ce choix était en soi arbitraire. Or l'expérience montre que pour décrire des écoulements fortement hors-équilibre (grand nombre de Knudsen), il est souvent nécessaire d'en considérer bien davantage que 13, jusqu'à atteindre au delà de la centaine [ST03 ; MRW03 ; MR05].

La question du critère sur lequel s'appuyer pour conserver tel ou tel nombre de moment est abordée notamment dans [GVU08 ; ST03 ; MR05]. Dans [GVU08], l'auteur avance qu'un critère supplémentaire, sous la forme d'un petit paramètre physique (en l'occurrence le nombre de Knudsen), doit être utilisé pour choisir comment tronquer le système de moments (ce qui a même été mentionné par Grad lui-même d'après les auteurs de [GVU08]). De même, un développement de type Chapman-Enskog sur le système aux moments est utilisé par Struchtrup et Torrilhon [ST03] pour en retenir le nombre adéquat. L'une des études les plus détaillées sur la question est sans doute celle de Müller *et al.* [MRW03]. Les auteurs montrent, à partir d'un modèle BGK, qu'apparaît naturellement dans les moments de Hermite une notion d'*ordre de grandeur* (pouvant d'ailleurs être reliée au nombre de Knudsen, comme indiqué dans l'introduction de [ST03]). Ainsi, en notant τ le temps de relaxation BGK et ϕ un moment hydrodynamique (quantité de mouvement ou température par exemple), l'auteur considère les expressions en facteur de termes tels que

$$\left(\tau \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^n, \text{ ou } \tau^n \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}, \quad (2.44)$$

dans les moments comme étant physiquement *d'ordre n*. Le lien entre ordre tensoriel et ordre de grandeur du moment est tout à fait non trivial [MRW03], mais cette notion permet

de confirmer analytiquement la tendance instinctive suivante : les moments d'ordre tensoriel élevé sont tendanciellement d'ordre n élevé au sens de l'Eq. (2.44)[MRW03]. Ainsi, en fonction du phénomène à étudier, on obtient le critère suivant : plus on souhaite résoudre un écoulement fortement hors équilibre (forts gradients, variations complexes...), plus on demandera un *ordre n* élevé, ce qui fournira analytiquement l'ordre de la troncature à adopter sur les moments. Ce critère est donc obtenu sans introduction d'un développement de type Chapman-Enskog *a posteriori* mais s'en approche tout à fait dans l'esprit. Il fournit de manière systématique le nombre d'équations aux moments à résoudre pour une précision donnée et l'ordre de troncature à adopter : la troncature n'est plus arbitraire comme pour le système aux moments de Grad.

Ainsi, il est clair qu'un lien existe entre les critères de type Chapman-Enskog/ordre de grandeur pour les systèmes continus aux moments [ST03 ; MR05] et le critère de type Chapman-Enskog utilisé par Shan *et al.* [SYC06] dans l'approche à vitesses discrète.

2.1.4 Erreurs introduites pour des quadratures de degré 5

En pratique, les modèles les plus utilisés industriellement sont basés sur des quadratures de degré 5 comme le D2Q9 ou le D3Q19/D3Q27. Le choix d'utiliser des quadratures à faible nombre de points, pour des raisons de coût calcul, a plusieurs conséquences que nous allons passer en revue.

L'approximation isotherme/athermale.

Avec une quadrature de degré 5, l'équation de la chaleur ne peut être résolue. On fait l'hypothèse que l'écoulement est isotherme, c'est à dire que $T = T_0$ constante. Plus rigoureusement, on parle d'hypothèse athermale : l'équation d'énergie étant entièrement remplacée par une contrainte scalaire, **la température n'a plus aucune existence physique dans de tels modèles**. Ainsi, la température adimensionnelle devient

$$rT = 1 . \quad (2.45)$$

Cette hypothèse étant assez forte et non sans conséquences, nous allons analyser plus en détail. Le lecteur pourra également se référer à l'article de Dellar [Del01].

Sauf dans quelques cas purement théoriques et intéressants en pratique, un écoulement rigoureusement isotherme n'existe pas. Une première façon de cerner le problème est d'effectuer le développement de Chapman-Enskog sur l'équation de Boltzmann et en considérant $T = T_0$ dans les relations de fermeture obtenues (voir [Del01]). On observe que le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ devient de trace non nulle, ce qui entre en contradiction avec les définitions (1.3)-(1.5), puisque celles-ci impliquaient nécessairement $tr(\boldsymbol{\tau}) = 0$: ainsi, l'énergie n'est tout simplement plus conservée par les collisions. Concrètement, sous approximation isotherme/athermale, on obtient

$$\boldsymbol{\tau} = -2\mu\mathbf{S} , \quad (2.46)$$

soit

$$tr(\boldsymbol{\tau}) = -2\mu\nabla \cdot \mathbf{u} . \quad (2.47)$$

Notons $\nu = \mu/\rho$ la visosité cinématique. L'expression précédente fait donc apparaître une viscosité de volume non nulle,

$$\xi = \frac{2}{d}\nu , \quad (2.48)$$

avec d la dimension de l'espace.

Autrement, en partant du point de vue macroscopique, on peut remarquer qu'il existe dans la loi de conservation de l'énergie un terme source de production de chaleur par la viscosité et par la compressibilité du fluide qui ne disparaît pas lorsque l'on considère $T = T_0$ (ou encore $e = cte$). Il correspond dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement au terme puits de dissipation visqueuse et à celui de la pression. Lorsque l'on remplace entièrement l'équation de la chaleur par la contrainte $T = T_0$, l'énergie dissipée par la viscosité est alors tout simplement perdue.

Pour comprendre quel type d'évolution pourrait rigoureusement être considérée isotherme (et ainsi avoir une estimation du domaine de validité de "l'approximation" isotherme), on peut remanier l'équation de l'énergie (1.22). On montre que cette dernière peut se mettre sous la forme suivante, utilisée par [SYC06], mais où l'on considère la trace non nulle du tenseur des contraintes visqueuses (par rapport à [SYC06], notre définition du flux de chaleur est différente à un facteur $(1/2)$ près) :

$$\rho \frac{\partial e(1 - \epsilon \frac{2\hat{\tau}}{3} \nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} + \rho \nabla \cdot [e(1 - \epsilon \frac{2\hat{\tau}}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{c}|^2 \Omega \mathrm{d}\mathbf{c} \quad (2.49)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{I} - 2\epsilon\hat{\tau}\rho\mathbf{S} \quad (2.50)$$

On a vu que classiquement $\int |\mathbf{c}|^2 \Omega \mathrm{d}\mathbf{c} = 0$ car, par définition en régime thermique, la trace de la partie déviatorique du tenseur des contraintes est nulle (la partie déviatorique correspond à la partie hors équilibre du tenseur des contraintes). En régime athermal on a donc à présent pour l'opérateur BGK, d'après l'équation (2.47)

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{c}|^2 \Omega \mathrm{d}\mathbf{c} = \frac{-1}{2\epsilon\hat{\tau}} \mathrm{tr}(-2\epsilon\hat{\tau}\rho\mathbf{S}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} . \quad (2.51)$$

Pour $T = cte$ (soit $e = cte$, ou encore $rT = cte = 1$), le développement de Chapman Enskog à l'ordre 1 donne $\mathbf{q} = 0$. En écriture adimensionnelle athermale, on a également $p = \rho$ et $e = 3/2$. Si on considère $\epsilon = cte$ et en remarquant que

$$\mathbf{S} : \nabla \mathbf{u} = \mathbf{S} : \mathbf{S} = |\mathbf{S}|^2 \quad (2.52)$$

on obtient après un calcul rapide

$$-\epsilon\hat{\tau} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} - \epsilon\hat{\tau} \nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] + \nabla \cdot \mathbf{u} - \epsilon 2\hat{\tau} |\mathbf{S}|^2 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.53)$$

dont on peut séparer les échelles par ordre de puissance en ϵ . L'ordre ϵ^0 impose une contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. L'ordre 1 imposerait alors $\epsilon\hat{\tau}|\mathbf{S}|^2 = 0$, c'est à dire soit un écoulement inviscide, soit un écoulement possédant un tenseur des déformations nul (écoulement uniforme ou rotation en bloc, cas physiquement irréalistes ou intérressants). Strictement parlant, on retrouve ici le résultat établi pour les équations de Navier-Stokes : **une évolution rigoureusement isotherme n'est possible que pour un fluide parfait incompressible**. Une viscosité nulle étant proscrite avec l'opérateur BGK du fait de la présence du facteur $1/\tau$, il faudra se contenter d'une viscosité faible et de gradients de vitesses raisonnables.

En résumé, ces limitations sont équivalentes à la condition de faible nombre de Knudsen $\epsilon = Ma/Re$: un nombre de Mach faible (pour obtenir un écoulement faiblement compressible), mais aussi très faible devant le nombre de Reynolds. Cela permet de rappeler qu'un nombre de Mach trop haut n'est pas la seule source d'erreur possible en approximation athermale : un nombre de Reynolds trop proche du nombre de Mach l'est aussi.

Étant donné notre objectif industriel, nous choisissons d'utiliser cette approximation pour la suite de ce travail.

Remarque : conséquences sur l'acoustique.

L'apparition d'une viscosité de volume ξ non nulle a nécessairement une conséquence sur l'acoustique. On montre en effet que la dissipation en champ libre des ondes acoustiques s'effectue au taux $\Gamma_{ac}^{NS} = -(\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{2}\xi)|\mathbf{k}|^2$ dans les équations de Navier-Stokes compressibles, avec \mathbf{k} le nombre d'onde. Pour un écoulement régi par l'équation de Boltzmann à vitesses discrète BGK sous hypothèse athermale, impliquant $\xi = \frac{2}{3}\nu$ en 3D, on aura ainsi $\Gamma_{ac}^{BGK,atherm} = -\nu|\mathbf{k}|^2$, contre $\Gamma_{ac}^{BGK,therm} = -\frac{2}{3}\nu|\mathbf{k}|^2$ sans cette hypothèse. Cette différence est très faible, et complètement négligeable pour des simulations aéroacoustiques en automobile.

Erreur de troncature pour les quadratures d'ordre faible

Nous avons vu plus haut que pour retrouver avec une précision d'ordre 2 en nombre de Knudsen les équations de Navier-Stokes sans équation d'énergie, une quadrature de degré 6 était nécessaire. Utiliser une quadrature de degré 5 relève donc d'une autre approximation, totalement indépendamment de l'approximation athermale : un terme d'erreur apparaît dans le calcul des moments d'ordre 2 de f , plus précisément dans le tenseur des contraintes visqueuses : ce dernier devient en effet

$$\boldsymbol{\tau} = -2\mu\mathbf{S} + \epsilon\hat{\tau}\nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \quad (2.54)$$

Cette expression montre l'apparition d'un terme non physique d'ordre $\mathcal{O}(Ma^3)$, qui induit une erreur sur la viscosité effective d'ordre $\mathcal{O}(Ma^2)$ [Del14; SYC06]. L'ordre de grandeur de ce terme reste donc raisonnable pour des écoulements faiblement compressibles à bas nombre de Mach. Son expression sera retrouvée analytiquement avec le développement de Chapman-Enskog effectué sur l'équation de Boltzmann sur réseau dans la partie suivante. Cette erreur à l'ordre dominant constitue une **rupture d'invariance galiléenne** [Del14] à l'ordre dominant, et d'autres erreurs de ce type peuvent apparaître aux ordres supérieurs. Nous reviendrons sur ce point important lors de l'étude des schémas de Boltzmann sur réseau.

En résumé, une quadrature de degré 5 comme le D2Q9, D3Q19 ou D3Q27 ne permettra de simuler qu'une version dite **faiblement compressible** des équations de Navier-Stokes, sans équation d'énergie. De plus, une erreur en $\mathcal{O}(Ma^3)$ apparaît dans le tenseur des contraintes, provoquant une erreur en $\mathcal{O}(Ma^2)$ sur la viscosité. Le nombre de Mach sera donc contraint de rester faible, tout en conservant $Ma \ll Re$. Nous insistons sur le fait que ces erreurs sont introduites avant même toute discréétisation spatio-temporelle : ces erreurs préexistent aux schémas numériques de Boltzmann sur réseau. Toutefois, nous verrons que l'un des objectifs des schémas modernes est de corriger certaines de ces erreurs, tout en maintenant le même degré de quadrature. C'est en particulier le cas de l'erreur d'invariance galiléenne. Toutefois, il est important de préciser que les erreurs d'invariance galiléenne pour la limite hydrodynamique ne sont jamais entièrement supprimées : elles ne sont que repoussées à des ordres supérieurs.

2.2 L'équation de Boltzmann sur réseau

Avant de discréteriser le système d'équations de Boltzmann à vitesses discrètes, tisons parti de l'hypothèse d'isothermie pour reformuler son adimensionnement. Les formules de quadrature menant aux modèles D2Q9 et D3Q19 disposent d'abscisses réparties sur une grille cartésienne régulière formée de carrés (respectivement de cubes) de côté (ou d'arête) de longueur adimensionnelle valant $\sqrt{3}$ (voir [SYC06]). Il sera bien plus simple pour la suite de reformuler notre problème de façon à obtenir une longueur de 1. Il suffit de remplacer dans (1.43) l'échelle de longueur L par $L\sqrt{3}$, puis de poser dans l'équation de Boltzmann adimensionnelle $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/(c_0\sqrt{3})$ et conserver ce changement dans l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. Cela est équivalent à prendre pour vitesse de référence c_0/c_s avec $c_s = 1/\sqrt{3}$. Dans ce nouveau système d'unités LBM (appelé *Lattice Units* en anglais), on obtient, par comparaison au système d'adimensionnement précédent (Eq. (2.40))

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}}_\alpha^{LBM} &= \frac{\mathbf{c}_\alpha c_s}{c_0} = c_s \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \quad ; \quad \tilde{\rho}^{LBM} = \frac{\rho}{\rho_0} = \tilde{\rho} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{u}}^{LBM} = \frac{\mathbf{u} c_s}{c_0} = c_s \tilde{\mathbf{u}} \\ r\tilde{T}^{LBM} &= \frac{rT c_s^2}{c_0^2} = c_s^2 r\tilde{T},\end{aligned}\tag{2.55}$$

avec

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}.\tag{2.56}$$

Pour la suite et pour des raisons évidentes de clarté, nous omettrons le sigle *LBM* et prendrons ce système d'unités comme référence. On peut résumer les poids et les nœuds des quadratures D3Q19 et D3Q27 avec ce nouveau système d'unités LBM dans la table 2.2.

TABLE 2.2 – Quadratures les plus utilisées pour des modèles non-thermiques en trois dimensions dans le système d'unités LBM (*Lattice Units*).

Indices	Vitesses $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$ (permutations)	Poids ω_α D3Q19	Poids ω_α D3Q27
$\alpha = 0$	$(0, 0, 0)$	$1/9$	$8/27$
$\alpha = 1..6$	$(\pm 1, 0, 0)$	$1/18$	$2/27$
$\alpha = 7..18$	$(\pm 1, \pm 1, 0)$	$1/36$	$1/54$
$\alpha = 19..26$	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$	-	$1/216$

Dans le cadre de l'approximation athermale, on obtient donc $r\tilde{T} = r\tilde{T}_0 = c_s^2$ au lieu de 1 auparavant : la loi des gaz parfaits adimensionnelle prend alors la forme

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} c_s^2 ,\tag{2.57}$$

en lieu et place de $\tilde{p} = \tilde{\rho}$.

2.2.1 Résolution numérique : discréétisation spatiale et temporelle

Il s'agit d'abord de trouver des grandeurs de référence pour les pas de temps et d'espace du schéma numérique, en cohérence avec ce nouveau système d'unités adimensionnel défini plus haut. On pose donc

$$\tilde{\Delta x} = \frac{\Delta x}{L\sqrt{3}} = \frac{\Delta x c_s}{L} \quad ; \quad \tilde{\Delta t} = \frac{\Delta t}{t_0}\tag{2.58}$$

avec Δx le pas d'un maillage cartésien régulier (2D ou 3D) et Δt le pas de temps du schéma. Nous allons dans un premier temps obtenir des équations adimensionnelles avec des temps et des longueurs de référence liées, comme toujours jusqu'à présent, à la physique (c'est à dire t_0 et L). L'objectif sera ensuite de transcrire les résultats obtenus en adimensionnement numérique (c'est à dire avec pour référence Δx et Δt). Afin d'éviter toute confusion, nous reprendrons la notation "tilde" pour toute variable adimensionnelle dans cette partie.

Notons la dérivée convective

$$\frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla \tilde{f}_\alpha = \frac{d\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t)}{dt} \quad (2.59)$$

En intégrant la dérivée convective le long d'une caractéristique de direction \mathbf{c}_α , notée $(\mathbf{v}(s), w(s))$ avec $\mathbf{v}(s) = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha s$ et $w(s) = s$, on peut écrire de façon exacte

$$\int_0^{\tilde{\Delta}t} \frac{d\tilde{f}_\alpha(\mathbf{v}(s), w(s))}{ds} ds = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.60)$$

Ainsi, en intégrant entre les mêmes bornes le membre de droite des équations DVBE (2.39) (adimensionnelles toujours), on trouve

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\tilde{\Delta}t} \frac{-1}{\epsilon \hat{\tau}} \left(\tilde{f}_\alpha(\mathbf{v}(s), w(s)) - \tilde{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{v}(s), w(s)) \right) ds. \quad (2.61)$$

On utilise la méthode des trapèzes pour calculer le membre de droite, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \frac{-\tilde{\Delta}t}{2\epsilon \hat{\tau}} \left(\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}t^3). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ce schéma est implicite : afin de le rendre explicite, on effectue le changement de variable suivant

$$\tilde{g}_\alpha = \tilde{f}_\alpha + \frac{\tilde{\Delta}t}{2\epsilon \hat{\tau}} (\tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\alpha^{eq}). \quad (2.63)$$

On en déduit l'**équation de Boltzmann sur réseau** pour l'opérateur BGK

$$\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{-\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g} \left(\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}t^3) \quad (2.64)$$

avec $\tilde{\tau}_g = \epsilon \hat{\tau} + \tilde{\Delta}t/2 = \tilde{\tau} + \tilde{\Delta}t/2$ et $\tilde{g}_\alpha^{eq} = \tilde{f}_\alpha^{eq}$.

Notons que ce changement de variable entre f et g peut également être déduit de l'établissement de l'équation de Boltzmann sur réseau par la méthode de *Strang splitting*, comme démontré par Dellar [Del13].

Par définitions de f et f^{eq} , on a également

$$\tilde{\rho} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \tilde{g}_\alpha \quad (2.65)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \mathbf{c}_\alpha \tilde{g}_\alpha \quad (2.66)$$

Afin de pouvoir effectuer concrètement une simulation numérique sur un réseau cartésien, on utilise l'équation (2.64) pour déduire la relation reliant le pas d'espace et pas de temps dimensionnels. Pour un réseau cartésien, on souhaite imposer la contrainte géométrique

$$|\tilde{\mathbf{c}}_\alpha| \tilde{\Delta t} = \tilde{\Delta x} , \quad (2.67)$$

pour $\alpha = 1..6$ en D3Q19 et D3Q27 (afin d'obtenir la longueur de l'arrête du cube). Or par construction du modèle, $|\tilde{\mathbf{c}}_\alpha| = 1$ pour $\alpha = 1..6$ (voir deuxième ligne de la table 2.2). On obtient donc

$$\frac{\Delta t}{t_0} = \frac{\Delta x c_s}{L} . \quad (2.68)$$

Rappelons que depuis le début, nous étudions des régimes tels que le nombre de Strouhal cinétique vaut 1, c'est à dire tels que

$$\frac{L}{c_0 t_0} = St = 1 . \quad (2.69)$$

On en déduit alors la contrainte suivante, assimilable à une condition CFL pour le calcul :

$c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad (2.70)$

où c_0 correspond à la vitesse du son physique utilisée dans le calcul. Celle-ci est ajustable librement dans le cas d'applications strictement aérodynamiques tant que la condition CFL reste respectée (pour maximiser le pas de temps, dans la limite de la stabilité, afin d'économiser du temps de calcul). En revanche, dans le cas particulier de l'aéroacoustique, c_0 est doit être fixée à sa valeur physique dans l'air.

En choisissant $t_0 = \Delta t$ (ce qui entraîne nécessairement $L/c_s = \Delta x$ d'après (2.68)), on obtient une version numérique/informatique de l'équation LBM, directement implémentable dans un solveur de calcul, issue d'une équation DVBE dans laquelle les variables d'espace et de temps (donc aussi les gradients) seraient adimensionnés par rapport aux paramètres du maillage, et non plus par rapport à L et t_0 caractéristiques de l'écoulement. Avec ce changement de grandeurs de référence, il est important de noter qu'en revanche, les relations (2.55) demeurent inchangées. Par ailleurs, une des propriétés remarquables de la formule (2.64) est que le terme en facteur de la partie hors équilibre de g est invariant pour tout temps de référence t_0 (et longueur de référence L). En effet, en rappelant que le nombre de Knudsen peut se réécrire $\epsilon = \lambda/L = \tau/t_0$ et que $\hat{\tau} = 1$, ce terme s'exprime par

$$\frac{\tilde{\Delta t}}{\epsilon \hat{\tau} + \frac{\tilde{\Delta t}}{2}} = \frac{\Delta t/t_0}{\frac{\tau}{t_0} + \frac{\Delta t}{2t_0}} = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta t}{\tau_g} = \frac{1}{\bar{\tau}_g} . \quad (2.71)$$

On obtient alors

$\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, t + 1) - \tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{\bar{\tau}_g} (\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) , \quad (2.72)$

avec $\bar{\tau}_g = \tau/\Delta t + 1/2$.

Notons que le schéma numérique ainsi obtenu peut être interprété comme un algorithme dit de **collision-propagation** (*collide and stream* ou *stream-collide* sont des expressions

*CHAPITRE 2. DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN À L'ÉQUATION DE
BOLTZMANN SUR RÉSEAU*

fréquemment rencontrées dans la littérature). On définit l'étape de collision comme l'opération locale visant à calculer la fonction \tilde{g}_α^* , appelée **fonction de collision** et définie par

$$\tilde{g}_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = \tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} (\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)). \quad (2.73)$$

Une fois la collision effectuée, on effectue l'étape de **propagation**, définie par

$$\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, t + 1) = \tilde{g}_\alpha^*(\mathbf{x}, t)$$

(2.74)

L'équation précédente est donc identique à l'équation (2.72).

Une conséquence du choix $t_0 = \Delta t$ comme temps de référence pour l'adimensionnement est que cette équation **ne peut être utilisée ni pour effectuer une étude de convergence en maillage, ni en nombre de Knudsen**. En effet, certains nombres caractéristiques de l'écoulement deviennent dépendants du maillage, ce qui est totalement non-physique : bien que ce ne soit pas le cas du nombre de Mach, nous verrons que c'est le cas du nombre de Reynolds, et donc nécessairement du nombre de Knudsen. On peut en effet voir dès maintenant que pour $t_0 = \Delta t$, $\epsilon = Ma/Re = \tau/\Delta t$.

De plus, cet adimensionnement implique $\mathcal{O}(\tilde{\Delta t}^3) = \mathcal{O}(1)$ (c'est pourquoi nous ne l'avons pas fait apparaître dans l'équation). Le vrai intérêt de cette formulation est qu'elle permet de déduire facilement des modèles non-dimensionnels à implanter dans un solveur.

Réécrivons les premiers polynômes de Hermite avec le nouvel adimensionnement. Pour des raisons pratiques, nous définissons les polynômes de degré n à une constante c_s^n près, de façon à obtenir, en omettant les tildes pour plus de clarté

$$\mathcal{H}_\alpha^{(0)} = \mathbf{1}_\alpha, \quad (2.75)$$

$$\mathcal{H}_\alpha^{(1)} = \mathbf{c}_\alpha, \quad (2.76)$$

$$\mathcal{H}_\alpha^{(2)} = \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I}. \quad (2.77)$$

Le développement de la fonction d'équilibre en polynômes de Hermite tronqué à l'ordre 2 correspondant devient,

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n! c_s^{2n}} \mathbf{a}_0^{(n)} \mathcal{H}_\alpha^{(n)}. \quad (2.78)$$

Ainsi, on obtient, toujours sous hypothèse athermale

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} [(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - c_s^2 |\mathbf{u}|^2] \right). \quad (2.79)$$

En guise de conclusion, précisons qu'il existe bien sûr d'autres méthodes de discréttisation de l'équation DVBE. L'application de différentes techniques de discréttisation classiques a ainsi donné naissance à des méthodes dérivées. On peut citer par exemples les correspondances suivantes :

- Volumes finis → Finite Volume Lattice Boltzmann Method (FVLBM).
Voir par exemple [Pen+99 ; Gel+06 ; TKM06 ; STK06].
- Différences finies → Finite Difference Lattice Boltzmann Method (FDLBM).
Voir par exemple [MS98 ; FL15 ; Tsu12].

- Éléments finis → Finite Element Lattice Boltzmann Method (FELBM).
Voir par exemple [Gel+06]

Notons que l'association du qualificatif *sur réseau* à ces méthodes relève en fait de l'abus de langage, puisque la discréttisation n'est justement pas effectuée sur un réseau. L'algorithme qui en découle n'est pas un algorithme simple de *propagation-collision* (ou *stream-collide*), ce qui a pour conséquence l'obtention de méthodes plus difficiles à mettre en œuvre et surtout bien plus coûteuses. En revanche, certains gains en stabilité sont possibles, notamment en maillage non-uniforme. D'autres techniques intermédiaires existent : on pourra citer par exemple la formulation volumétrique de Chen [Che98] ainsi que la méthode *Discrete Unified Gas Kinetic Scheme* (DUGKS) de Guo & al. [GXW13].

2.2.2 Passage dimensionnel-adimensionnel en LBM

Un développement de Chapman-Enksog (voir partie suivante) montre que l'on peut retrouver les équations de Navier-Stokes à condition d'exprimer la viscosité par

$$\tilde{\mu} = \frac{\tau}{\Delta t} \tilde{\rho} c_s^2 = (\bar{\tau}_g - \frac{1}{2}) \tilde{\rho} c_s^2 . \quad (2.80)$$

À partir de (2.80), de la condition CFL et des règles d'adimensionnement (2.55), on trouve rapidement

$$\tilde{\nu} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tau c_0^2 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu , \quad (2.81)$$

où ν est bien conforme à la relation (1.53). On en déduit que l'expression du temps de relaxation numérique du modèle BGK en fonction de la valeur physique de la viscosité s'écrit

$$\boxed{\bar{\tau}_g = \frac{\tilde{\nu}}{c_s^2} + \frac{1}{2} = \frac{\nu \Delta t}{c_s^2 \Delta x^2} + \frac{1}{2}} \quad (2.82)$$

En combinant (2.55) et la condition CFL (2.70) pour trouver la relation liant vitesse dimensionnelle et adimensionnelle en unités LBM, on peut récapituler les formules de passage ainsi :

$$\boxed{\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \quad c_s = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \frac{\Delta t}{\Delta x} ; \quad \tilde{\nu} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu} \quad (2.83)$$

On notera également que la vitesse adimensionnelle qui apparaît dans les codes de calcul est, conformément à l'équation (2.55), une mesure directe du nombre de Mach réel :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \mathbf{u} \frac{c_s}{c_0} = c_s Ma . \quad (2.84)$$

Une question importante demeure : quid de la pression ? On a vu que celle-ci s'exprime de façon adimensionnelle par $\tilde{p} = \tilde{\rho} c_s^2$. Cette équation correspond à une loi d'état d'un gaz isotherme avec un coefficient $\gamma = 1$, qui est donc celle simulée par l'algorithme LBM. Si on distingue parties moyennes et parties fluctuantes, on trouve ainsi pour de petites fluctuations $\tilde{p} = \rho_0 c_s^2 + \tilde{p}' c_s^2$. Retranscrit directement en unités dimensionnelles, on trouve

$$p = \rho c_0^2 = \rho_0 c_0^2 + \rho' c_0^2 = p_0^{(1)} + \rho' c_0^2 . \quad (2.85)$$

Cette équation correspond exactement à l'équation d'état de l'acoustique linéaire, valable pour de faibles perturbations [Vig14a]. Toutefois on remarque que la pression de référence $p_0^{(1)} = \rho_0 c_0^2$ ne correspond pas, avec $c_0 \simeq 340 \text{ m/s}$, à la valeur de la pression atmosphérique p_0 attendue par l'utilisateur industriel. En effet, on a physiquement dans l'air $p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ avec $\gamma = 1.4$. On remarque donc que pour l'acoustique linéaire, la valeur de γ n'influe que sur la valeur de la pression de référence : or celle-ci n'est d'aucune importance physique ou numérique puisque la pression n'intervient dans les lois macroscopiques de la LBM que par son gradient. L'utilisateur peut donc choisir de recentrer arbitrairement les valeurs de la pression autour de p_0 au lieu de $p_0^{(1)}$. Ainsi, pour un γ quelconque, l'expression qui relie la valeur adimensionnelle de la densité à la valeur dimensionnelle de la pression, quantité observée par l'utilisateur industriel, se déduit immédiatement de (2.85) en remplaçant $p_0^{(1)}$ par $p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$:

$$p = \rho_0 c_0^2 \left(\frac{1 - \gamma}{\gamma} + \tilde{\rho} \right). \quad (2.86)$$

En conclusion, nous remarquerons que le ratio $\Delta x / \Delta t$ (et donc la vitesse du son) étant constant en LBM pour tout pas de temps ou taille de maille si la valeur de c_0 est fixée, les valeurs adimensionnelles des vitesses et de la masse volumique (ou de la pression) à l'ordre dominant sont indépendantes du maillage **pour un nombre de Mach donné**. Par conséquent, **la valeur de la distribution d'équilibre adimensionnelle est indépendante du maillage pour un nombre de Mach donné** car le temps de relaxation (ou de manière équivalente la viscosité) en *lattice units* n'y apparaît pas. Les polynômes de Hermite adimensionnels reste eux inchangés.

Toutefois, ce n'est pas le cas de la valeur de la viscosité comme on peut le voir dans l'équation (2.81) : celle-ci est dépendante du maillage, même à nombre de Mach fixé. Il s'agit d'une propriété importante, en particulier pour traiter le cas des raffinements de maillage. De plus, cela montre que si les grandeurs de référence sont choisies comme étant Δx et Δt , le nombre de Reynolds devient dépendant du maillage, entraînant également la dépendance au maillage du nombre de Knudsen. Une étude de convergence avec de telles grandeurs caractéristiques de la physique d'un écoulement est proscrite. Pour une étude correcte des limites hydrodynamiques et des caractéristiques de convergence de l'équation de Boltzmann sur réseau, nous utiliserons l'équation sous sa forme (2.64).

2.2.3 Développement de Taylor/Chapman-Enskog

Afin de savoir si l'on retrouve les lois macroscopiques attendues, effectuons un développement de Chapman-Enskog sur le système LBM-BGK obtenu. La procédure est assez différente du cas continu pour plusieurs raisons : la maxwellienne est cette fois discrète et approximée par une troncature à l'ordre 2, et la fonction dont on étudie les variations n'est plus la fonction f originale de la DVBE, mais g . L'approche présentée est différente de celles que l'on peut trouver dans la littérature, dans la mesure où elle se place entièrement dans la continuité de l'établissement de l'équation DVBE par intégration le long des caractéristiques. Le formalisme utilisé est compact, simple, et fait clairement la distinction entre le développement multi-échelle par rapport au nombre de Knudsen et ceux par rapport aux pas de temps et d'espace.

Nous repartons de l'équation adimensionnelle (2.64), dans laquelle on rappelle que

$$\tilde{\Delta}t = \Delta t/t_0$$

$$\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) - \tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{-\tilde{\Delta}t}{\epsilon\hat{\tau} + \frac{\Delta t}{2}} (\tilde{g}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\tilde{\Delta}t^3). \quad (2.87)$$

Sauf mention contraire ultérieure, nous omettrons les tildes dans ce qui suit pour plus de clarté.

Introduisons l'opérateur D , défini par

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_\alpha). \quad (2.88)$$

À l'aide d'un développement de Taylor du membre de gauche de (2.87), on trouve

$$\Delta t D g_\alpha + \frac{\Delta t^2}{2} D^2 g_\alpha = \frac{-\Delta t}{\epsilon\hat{\tau} + \frac{\Delta t}{2}} (g_\alpha - g_\alpha^{eq}) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (2.89)$$

Revenons à des expressions utilisant f , la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann et de la DVBE. D'après (2.63), on a immédiatement

$$g_\alpha - g_\alpha^{eq} = (1 + \frac{\Delta t}{2\epsilon\hat{\tau}})(f_\alpha - f_\alpha^{eq}). \quad (2.90)$$

Si on effectue un développement classique de f en puissances du nombre de Knudsen tel que $f_\alpha = f_\alpha^{eq} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$, on trouve

$$g_\alpha - g_\alpha^{eq} = (1 + \frac{\Delta t}{2\epsilon\hat{\tau}})(\epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3)), \quad (2.91)$$

ou encore

$$g_\alpha = f_\alpha^{eq} + \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.92)$$

Pour retrouver les équations de Navier-Stokes, un étude jusqu'à l'ordre ϵ est suffisante. La procédure de Chapman-Enksog comprend également un développement de l'opérateur de dérivée temporelle selon

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^{(1)}}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.93)$$

Nous introduisons ainsi les opérateurs D_0 et D_1 tels que

$$D = D_0 + \epsilon D_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.94)$$

$$D_0 = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_\alpha), \quad (2.95)$$

$$D_1 = \frac{\partial^{(1)}}{\partial t}. \quad (2.96)$$

Cela implique, après division de (2.89) par Δt

$$\begin{aligned} & (D_0 + \epsilon D_1) \left(f_\alpha^{eq} + \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(2)} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left(D_0^2 + \epsilon(D_0 D_1 + D_1 D_0) \right) \left(f_\alpha^{eq} + \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} f_\alpha^{(2)} \right) \\ & = \frac{-1}{\hat{\tau}} (f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(2)}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.97)$$

*CHAPITRE 2. DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN À L'ÉQUATION DE
BOLTZMANN SUR RÉSEAU*

42

Comme dans le cas continu, on étudie séparément les équations classées par ordre en puissances ϵ . Pour les ordres ϵ^0 et ϵ^1 , on trouve alors respectivement

$$D_0 f_\alpha^{eq} + \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} A_0 = \frac{-1}{\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) , \quad (2.98)$$

$$D_1 f_\alpha^{eq} + D_0 f_\alpha^{(1)} + \frac{\Delta t}{2\hat{\tau}} A_1 = \frac{-1}{\hat{\tau}} f_\alpha^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) , \quad (2.99)$$

avec

$$A_0 = D_0 f_\alpha^{(1)} + \hat{\tau} D_0^2 f_\alpha^{eq} , \quad (2.100)$$

$$A_1 = D_1 f_\alpha^{(1)} + D_0 f_\alpha^{(2)} + \hat{\tau} D_0^2 f_\alpha^{(1)} + \hat{\tau} (D_0 D_1 + D_1 D_0) f_\alpha^{eq} . \quad (2.101)$$

Nous allons à présent montrer que $A_0 = \mathcal{O}(\Delta t)$ et $A_1 = \mathcal{O}(\Delta t)$. Par application de l'opérateur D_0 à l'équation (2.98), on trouve

$$D_0^2 f_\alpha^{eq} = -\frac{D_0}{\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta t) , \quad (2.102)$$

ce qui montre immédiatement le résultat pour A_0 . Concernant A_1 on a, par application de l'opérateur D_1 à l'équation (2.98) et D_0 à (2.99)

$$(D_0 D_1 + D_1 D_0) f_\alpha^{eq} = -\frac{1}{\hat{\tau}} (D_0 f_\alpha^{(2)} + D_1 f_\alpha^{(1)}) - D_0^2 f_\alpha^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta t) , \quad (2.103)$$

Insérer ce résultats dans l'expression de A_1 montre directement le résultat attendu.

Ainsi, on obtient les équations simplifiées, correspondant respectivement à l'ordre ϵ^0 et ϵ^1

$$D_0 f_\alpha^{eq} = \frac{-1}{\hat{\tau}} f_\alpha^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) , \quad (2.104)$$

$$D_1 f_\alpha^{eq} + D_0 f_\alpha^{(1)} = \frac{-1}{\hat{\tau}} f_\alpha^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) . \quad (2.105)$$

Cherchons les équations macroscopiques correspondantes, en prenant les moments d'ordre 0 et 1 de chacune des deux relations ci-dessus. On rappelle de plus que l'on recherche des solutions dites *normales* en approximation isotherme, c'est à dire qui vérifient

$$\sum_{\alpha} \psi f_{\alpha}^{(1)} = \mathbf{0} \quad ; \quad \sum_{\alpha} \psi f_{\alpha}^{(2)} = \mathbf{0} , \quad (2.106)$$

avec $\psi = (1, \mathbf{c}_\alpha)$.

Pour la conservation de la masse à l'ordre ϵ^0 , le moment d'ordre 0 de (2.104) donne

$$\frac{\partial^{(0)} \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) = 0 . \quad (2.107)$$

Pour la conservation de la masse à l'ordre ϵ^1 , le moment d'ordre 0 de (2.105) donne

$$\frac{\partial^{(1)} \rho}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = 0 . \quad (2.108)$$

Pour la conservation de la quantité de mouvement à l'ordre ϵ^0 , les moments d'ordre 1 de (2.104) donnent

$$\frac{\partial^{(0)} \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^{eq} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = 0 . \quad (2.109)$$

La quadrature de degré 5 conservant bien l'égalité entre les moments continus et discrets d'ordre 2, on a $\mathbf{\Pi}^{eq} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho c_s^2 \mathbf{I}$.

Pour la conservation de la quantité de mouvement à l'ordre ϵ^1 , les moments d'ordre 1 de (2.105) donnent

$$\frac{\partial^{(1)} \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = 0 , \quad (2.110)$$

avec $\mathbf{\Pi}^{(1)} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)}$.

Pour obtenir les équations de conservation complètes à l'ordre 1 en nombre de Knudsen, on écrit comme pour le cas continu, [(2.107) + ϵ (2.108)] et [(2.109) + ϵ (2.110)]. On obtient finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}^{eq} + \epsilon \mathbf{\Pi}^{(1)}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 . \quad (2.112)$$

Ce système n'est toutefois pas encore fermé : nous devons exprimer $\mathbf{\Pi}^{(1)}$ en fonction des variables macroscopiques et/ou leurs gradients.

Calcul de $\mathbf{\Pi}^{(1)}$

Pour effectuer cette opération, on utilise l'équation (2.104). On écrit donc

$$f_{\alpha}^{(1)} = -\hat{\tau} \left(\left[\frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_{\alpha}) \right] f_{\alpha}^{eq} \right) . \quad (2.113)$$

On retrouve le fait que pour connaître un moment d'ordre N de f tronquée à l'ordre 1 en ϵ , il faut pouvoir calculer un moment d'ordre $N + 1$ de f^{eq} . Les conditions de solvabilité permettent d'écrire

$$\mathbf{\Pi}^{(1)} = \sum_{\alpha} (\mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha} - c_s^2 \mathbf{I}) f_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} \mathcal{H}_{\alpha}^{(2)} . \quad (2.114)$$

On en déduit que le calcul de $\mathbf{\Pi}^{(1)}$ revient à une projection de l'équation (2.113) sur $\mathcal{H}_{\alpha}^{(2)}$. En reprenant les notations de la partie 2.1.1, on écrit

$$\Pi_{ij}^{(1)} = < \mathbf{f}^{(1)}, \mathcal{H}_{ij}^{(2)} >^1 . \quad (2.115)$$

Une formule de récurrence classique sur les polynômes de Hermite rappelée dans [SYC06] permet d'écrire, en unités LBM

$$\mathbf{c}_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}^{(1)} = \mathcal{H}_{\alpha}^{(2)} + \mathbf{I} c_s^2 \quad (2.116)$$

$$c_{i,\alpha} \mathcal{H}_{jk,\alpha}^{(2)} = \mathcal{H}_{ijk,\alpha}^{(3)} + (\delta_{ik} \mathcal{H}_{j,\alpha}^{(1)} + \delta_{ij} \mathcal{H}_{k,\alpha}^{(1)}) c_s^2 . \quad (2.117)$$

Ainsi, on obtient

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -\hat{\tau} \left[\frac{\partial^{(0)}}{\partial t} \left(< \mathbf{f}^{eq}, \mathcal{H}_{ij}^{(2)} >^1 \right) \right. \quad (2.118)$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(< \mathbf{f}^{eq}, \mathcal{H}_{mij}^{(3)} >^1 + c_s^2 (< \mathbf{f}^{eq}, \delta_{mj} \mathcal{H}_i^{(1)} >^1 + < \mathbf{f}^{eq}, \delta_{mi} \mathcal{H}_j^{(1)} >^1) \right) \right] . \quad (2.119)$$

Le terme où apparaît la projection sur $\mathcal{H}^{(3)}$ est à l'origine de l'**erreur de troncature** que nous avions évoqué plus haut. En effet, pour une quadrature de degré 5, la fonction d'équilibre est tronquée à l'ordre 2 (D2Q9, D3Q19, D3Q27) : par conséquent, ce terme est nul. Or pour une quadrature de degré 7, la fonction d'équilibre aurait pu être tronquée à l'ordre 3 : serait alors apparu un terme en $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$.

Une quadrature de degré 5 permet bien un calcul exact des moments discrets d'ordre 2 de la Maxwellienne : on a ainsi immédiatement $\langle \mathbf{f}^{eq}, \mathcal{H}_{ij}^{(2)} \rangle^1 = \rho u_i u_j$ et $\langle \mathbf{f}^{eq}, \mathcal{H}_i^{(1)} \rangle^1 = \rho u_i$, on obtient

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -\hat{\tau} \left[\frac{\partial^{(0)} \rho u_i u_j}{\partial t} + c_s^2 \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.120)$$

En utilisant (2.107) et (2.109) pour substituer dérivées spatiales et temporelles, on trouve

$$\boxed{\mathbf{\Pi}^{(1)} = -2\hat{\tau} \rho c_s^2 \mathbf{S} + \mathcal{O}(Ma^3)} \quad (2.121)$$

avec \mathbf{S} le tenseur des déformations défini par (1.83). Le terme d'erreur d'ordre 3 vaut

$$\mathcal{O}(Ma^3) = \hat{\tau} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) . \quad (2.122)$$

Il correspond à l'erreur de troncature, évoquée auparavant. Ce terme indésirable cause la perte de la propriété dite d'*invariance galiléenne* dans le tenseur des contraintes. Nous y reviendrons en détail dans la section 2.3.

On peut désormais écrire les équations de conservation adimensionnelles finales à partir des équations (2.111) et (2.112). Ainsi, en unités LBM, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) = 0 \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho c_s^2 \mathbf{I} - 2\mu (\mathbf{S} + \mathcal{O}(Ma^3))) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (2.124)$$

où on identifie la viscosité μ selon

$$\mu = \epsilon \hat{\tau} \rho c_s^2 . \quad (2.125)$$

On rappelle que $\hat{\tau} = 1$. En adimensionnement *numérique* (unités LBM), nous avons vu que le temps de référence t_0 vaut $t_0 = \Delta t$, fournissant immédiatement $\epsilon = \tau / \Delta t = \bar{\tau} = \bar{\tau}_g - 1/2$: ainsi, on obtient à partir de (2.125)

$$\mu = \bar{\tau} \rho c_s^2 = (\bar{\tau}_g - \frac{1}{2}) \rho c_s^2 . \quad (2.126)$$

Nous avons ainsi prouvé que l'équation de Boltzmann sur réseau permet de simuler les équations de Navier-Stokes sous hypothèse athermale et de faible compressibilité, avec une précision d'ordre 2 par rapport au pas de temps (et d'espace, ceux-ci étant proportionnels) ainsi qu'au nombre de Knudsen. Pour plus de détails sur les différents niveaux de convergence qui coexistent dans cette limite hydrodynamique, on se référera à la section 2.3.

Enfin, il est intéressant d'écrire le développement à l'ordre 2 en polynômes de Hermite de la fonction de distribution tronquée à l'ordre 1 en nombre de Knudsen. Puisque l'on connaît à présent l'expression du tenseur des contraintes, on peut écrire en utilisant l'adimensionnement *numérique* défini précédemment

$$f_\alpha = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathcal{H}_\alpha^{(2)} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - 2\bar{\tau}\rho c_s^2 \mathbf{S})}{2c_s^4} \right). \quad (2.127)$$

Il peut être utile de séparer la partie à l'équilibre de la partie hors équilibre dans cette expression, ce qui donne

$$f_\alpha = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathcal{H}_\alpha^{(2)} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) - \omega_\alpha \rho \frac{\bar{\tau}}{c_s^2} \mathcal{H}_\alpha^{(2)} : \mathbf{S}. \quad (2.128)$$

Cette expression diffère si on remplace f par g . Si on identifie, conformément au développement de Chapman-Enskog à l'ordre 1, la partie hors équilibre de f_α à $\epsilon f_\alpha^{(1)}$, on a

$$\epsilon f_\alpha^{(1)} = \frac{g_\alpha - g_\alpha^{eq}}{1 + \frac{1}{2\bar{\tau}}}. \quad (2.129)$$

On obtient ainsi en adimensionnement *numérique* l'expression tronquée à l'ordre 2

$$g_\alpha = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathcal{H}_\alpha^{(2)} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) + \omega_\alpha \frac{\mathcal{H}_\alpha^{(2)} : \mathbf{\Pi}_g^{(1)}}{2c_s^4} \quad (2.130)$$

avec

$$\mathbf{\Pi}_g^{(1)} = \sum_\alpha (g_\alpha - g_\alpha^{eq}) \mathcal{H}_\alpha^{(2)} \quad (2.131)$$

On en déduit que pour g ,

$$\mathbf{\Pi}_g^{(1)} = -2\bar{\tau}_g \rho c_s^2 \mathbf{S} + \mathcal{O}(Ma^3) \quad (2.132)$$

Par conséquent, on obtient de manière purement locale une information sur les gradients de vitesse à partir de la partie hors équilibre de g . Tout cela fournit une nouvelle expression de la fonction de distribution tronquée à l'ordre 2

$$g_\alpha = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathcal{H}_\alpha^{(2)} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) - \omega_\alpha \rho \frac{\bar{\tau}_g}{c_s^2} \mathcal{H}_\alpha^{(2)} : \mathbf{S} \quad (2.133)$$

avec toujours

$$g_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} [(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - c_s^2 |\mathbf{u}|^2] \right) \quad (2.134)$$

Ce sont ces équations qui seront utiles en pratique pour le codage, puisque c'est g qui est manipulée lorsque l'on utilise l'équation de Boltzmann sur réseau.

2.3 Compléments sur les limites hydrodynamiques du schéma LBM-BGK

2.3.1 Catégorisation des termes d'erreur

Nous avons vu que le schéma de Boltzmann BGK convergeait vers une version athermale et faiblement compressible des équations de Navier-Stokes (2.123)-(2.124). Toutefois, de nombreux termes d'erreur de nature différente apparaissent et il s'agit de mieux comprendre *de quelle façon* les schémas LBM-BGK D3Q19 ou D3Q27 convergent vers cette équation. On peut distinguer trois grands types d'erreurs :

- Les erreurs temporelles en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.
- Les erreurs en nombre de Knudsen $\mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathcal{O}((Ma/Re)^2)$
- Les erreurs d'invariance galiléenne, dont l'une apparaît à l'ordre dominant : l'erreur en $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathcal{O}(Ma^3)$ dans le tenseur des contraintes

Les deux dernières catégories d'erreur sont souvent regroupées, accompagnées de l'amplitude des fluctuations de pression acoustique $\rho' = \mathcal{O}(Ma^2)$, sous la dénomination d'**erreurs de compressibilité** [RS95]. En effet, lorsque $Ma \rightarrow 0$ à Reynolds fixé et que $\Delta t \rightarrow 0$, le système (2.123)-(2.124) converge vers les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ainsi, à nombres de Mach et de Reynolds fixé, ces termes $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\mathcal{O}(Ma^3)$ et $\mathcal{O}(Ma^2)$ constituent une déviation par rapport aux équations de Navier Stokes incompressibles y compris lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

Dans notre cas, nous ne considérons pas les fluctuations de pression acoustique comme des erreurs, puisque notre objectif n'est pas de converger vers les équations de Navier-Stokes incompressibles. En revanche, du fait de travailler à des nombres de Mach et Reynolds finis, les deux autres termes en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ et $\mathcal{O}(Ma^3)$ demeurent parasites même lorsque l'on ne souhaite modéliser qu'une version faiblement compressible (aussi appelée *super-acoustique*) des équations de Navier-Stokes.

Plusieurs techniques sont utilisées dans la littérature pour modifier la convergence des schémas de Boltzmann. Deux points importants seront abordés ici : la notion de scaling acoustique et diffusif, et la possibilité ou non de corriger la rupture d'invariance galiléenne (au moins à l'ordre dominant) lorsque l'on utilise des quadratures de degré 5. Ensuite, nous verrons que malgré des équations limites identiques à l'ordre dominant, les quadratures de degré 5 D3Q15, D3Q19 et D3Q27 peuvent fournir des résultats assez différents. Enfin, nous discuterons des autres méthodes utilisées dans la littérature pour déduire des équations macroscopiques à partir de l'équation de Boltzmann sur réseau et leurs liens avec la méthode mixte Taylor/Chapman-Enskog présentée ici.

2.3.2 Scaling acoustique et diffusif

Deux types de relations entre pas de temps et pas d'espace sont utilisées dans la communauté LBM. La première, la relation dite *acoustique* (*acoustic scaling*), donne $\Delta x \propto \Delta t$, tandis que la seconde dite *diffusive* (*diffusive scaling*) fournit $\Delta x^2 \propto \Delta t$ [JKL05]. Or quelque soit le lien entre pas de temps et pas d'espace, la relation CFL (2.70) est toujours vraie et c_s est toujours une constante fixée. Cela signifie que pour le scaling diffusif, la vitesse du son physique c_0 dépend du pas de maillage. On trouve immédiatement $c_0 = \mathcal{O}(\Delta x^{-1})$, soit $Ma = \mathcal{O}(\Delta x)$. Pour le scaling acoustique, le nombre de Mach ne varie

pas selon la résolution. Ainsi, il est le seul qu'il faut utiliser, comme son nom l'indique, pour une étude acoustique. Nous verrons de plus que le scaling diffusif pose des difficultés lorsque des raffinements de maillage sont utilisés, y compris pour des études non-acoustiques.

L'intérêt du scaling diffusif est qu'il est le seul qui permette une convergence en maillage de la solution hydrodynamique du schéma de Boltzmann sur réseau vers les équations de Navier Stokes incompressibles. En effet, le fait d'avoir $Ma = \mathcal{O}(\Delta x)$ implique $\mathcal{O}(Ma^2) = \mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}(\Delta t)$ et $\mathcal{O}(Ma^3) = \mathcal{O}(\Delta x^3) = \mathcal{O}(\Delta t^{\frac{3}{2}})$. De plus pour un nombre de Reynolds fixé, on obtient immédiatement $\mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}(\Delta t)$. On en déduit que sous scaling diffusif, le schéma de Boltzmann-BGK converge en maillage vers les équations de Navier Stokes incompressibles avec une précision d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps.

Avec le scaling acoustique, les termes $\mathcal{O}(Ma^3)$ et $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ne tendent pas vers 0 lorsque la résolution spatio-temporelle est augmentée. On obtient ainsi une convergence d'ordre 2 en espace-temps vers les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles, jusqu'à ce que ces termes d'ordre élevé deviennent dominants et empêchent la convergence. Nous allons montrer qu'il est possible sous certaines conditions de supprimer le terme $\mathcal{O}(Ma^3)$. Nous verrons que les effets de ce terme d'erreur en apparence faible peuvent être non-négligeables.

2.3.3 Rôle des erreurs d'invariance galiléenne

Nous traiterons majoritairement ici du terme violant l'invariance galiléenne apparaissant à l'ordre dominant, c'est à dire le terme en $\mathcal{O}(Ma^3)$, tout en gardant à l'esprit que d'autres sont cachés dans les termes d'ordre supérieurs en ϵ . La partie précédente montre que ce terme peut tendre vers 0 avec l'augmentation de la résolution, sous réserve d'utiliser le scaling diffusif. Comme nous utiliserons le scaling acoustique, il demeure problématique. Nous avons vu que les modèles D2Q9, D3Q19 et D3Q27 étaient basés sur une quadrature ne permettant pas de retrouver correctement les moments d'ordre 3 de la fonction d'équilibre, ce qui provoque l'apparition de ce terme $\mathcal{O}(Ma^3)$. Toutefois, Dellar [Del14] a montré qu'une correction complète de ce terme d'erreur (ou plutôt sa relégation à l'ordre $\mathcal{O}(Ma^5)$) était possible avec le D2Q9 et le D3Q27 à partir d'un simple modèle BGK (en D3Q19, seule les composantes diagonales du tenseur des contraintes peuvent être corrigées). Au delà du problème de l'invariance galiléenne en soi, la forme de cette erreur peut se révéler source d'instabilités. En effet, si l'on prend par exemple une composante diagonale du tenseur des contraintes comme $\Pi_{xx}^{(1)}$, celle-ci s'écrit d'après (2.121) et (2.122)

$$\begin{aligned}\epsilon\Pi_{xx}^{(1)} &= -2\epsilon\hat{\tau}\rho c_s^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \epsilon\hat{\tau} \frac{\partial \rho u_x^3}{\partial x} \\ &= -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + 3\epsilon\hat{\tau}\rho u_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \epsilon\tau u_x^3 \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &= -2\mu(1 - \frac{3u_x^2}{2c_s^2}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho c_s^2} u_x^3 \frac{\partial \rho}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2.135)$$

Pour un nombre de Mach peu élevé, on considère classiquement $\partial_x \rho = \mathcal{O}(Ma^2)$, ce qui rend le dernier terme d'ordre $\mathcal{O}(Ma^5)$. Ainsi, la viscosité effective selon la direction xx vaut

$$\mu_{xx}^{eff} = \mu \left(1 - \frac{3u_x^2}{2c_s^2}\right) = \mu \left(1 - \frac{3Ma^2}{2}\right). \quad (2.136)$$

On remarque que pour toute vitesse u_x , la viscosité effective est plus faible que la viscosité moléculaire dans cette direction, ce qui augmente les risques d'instabilités numériques. Pour $Ma \simeq 0.58$, la viscosité effective vaut la moitié de la viscosité moléculaire.

Pour corriger ces termes diagonaux, Dellar introduit un temps de relaxation spécifique pour ces composantes diagonales du tenseur des contraintes

$$\bar{\tau}_{ii} = \frac{\bar{\tau}}{1 - 3u_i^2/(2c_s^2)} \quad (2.137)$$

Le lecteur est renvoyé à [Del14] pour plus de détails.

Pour corriger les termes non diagonaux, une fonction d'équilibre incluant des termes en $\mathcal{O}(Ma^3)$ est utilisée, mais seulement valable pour le D2Q9 et le D3Q27. En étudiant

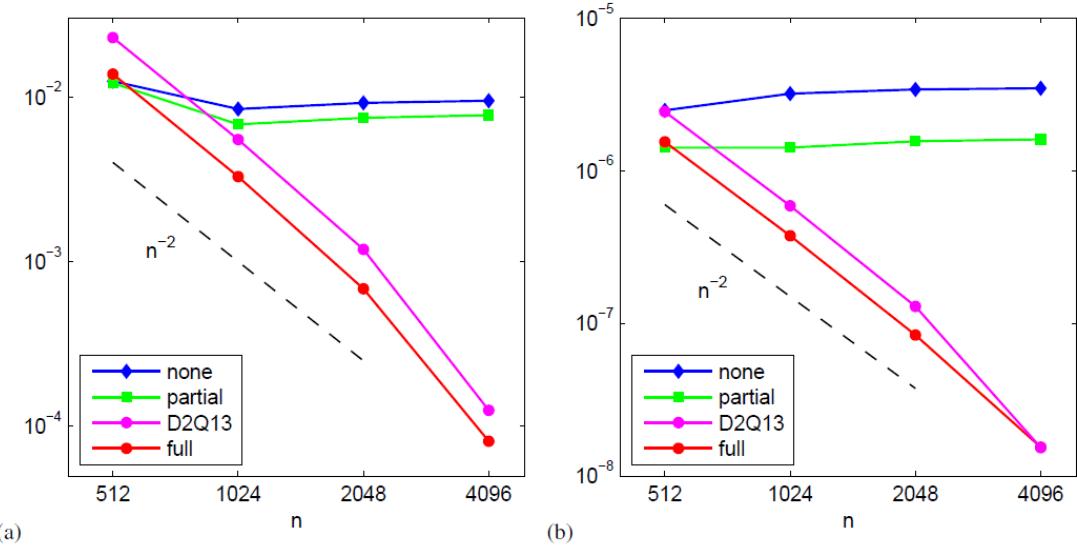


FIGURE 2.2 – Erreurs sur a) la vorticité et b) la densité pour une double couche de cisaillement périodique en 2D, comparées à une solution de référence, pour des grilles de taille $n \times n$ successives. Ici, $Ma = 0.1$ et $Re = 2000$. Sont comparés 4 modèles : un D2Q9 sans correction, un D2Q9 avec seulement les composantes hors diagonales du tenseur des contraintes corrigées, un D2Q13 dans lequel le terme $\mathcal{O}(Ma^3)$ est naturellement absent, puis un D2Q9 dans lequel la totalité du tenseur des contraintes est corrigée. Extrait de [Del14].

un écoulement non-linéaire connu pour sa capacité à mettre en difficulté les algorithmes instables, la double couche de cisaillement périodique, Dellar montre qu'à un nombre de Mach fini $Ma = 0.1$, le terme en $\mathcal{O}(Ma^3)$ peut devenir dominant et empêcher la convergence en maillage s'il n'est pas corrigé. Les résultats sont montrés figure 2.2. Toutefois, il est clair que pour un nombre de Mach plus élevé et/ou un nombre de Reynolds plus faible (c'est à dire un nombre de Knudsen plus élevé), la convergence en maillage pourrait toujours être perturbé par les termes en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (appelé parfois terme de *Burnett*, en référence aux équations de Burnett évoquées dans la section 1.3). Gardons également à l'esprit qu'il s'agit uniquement de convergence en ordre et non en absolu : il est possible dans certains cas que des termes d'ordre supérieur à 2 dominent en valeur absolue les termes d'ordre dominant et imposent donc une convergence d'ordre supérieur. Un exemple typique pour le cas de la convergence en maillage est donné figure 2.2 pour $n = 4096$.

Des modèles de collision plus avancés que le simple BGK, que nous étudierons dans la partie II, tentent de traiter entre autres du problème de l'invariance galiléenne : un lecteur pressé pourra se référer dès maintenant aux résumés effectué par Geier sur ce sujet dans [Gei06 ; Gei+15].

2.3.4 Influence du réseau pour les quadratures de degré 5

Nous avons vu que les quadratures de degré 5 fournissaient nécessairement le même modèle macroscopique à l'ordre dominant. En revanche, les termes d'erreurs liés aux moments d'ordre élevé sont différents. Nous nous intéresserons ici aux modèles 3D.

Le D3Q15 souffre d'instabilités importantes, en particulier le *checkerboard effect* (effet de damier) [Kan+99 ; Mei+00]. Par conséquent, ce modèle n'est quasiment jamais utilisé car jugé trop peu fiable.

Le D3Q19 et le D3Q27 sont les modèles les plus utilisés. Toutefois, de nombreuses études tendent à montrer de plus en plus clairement la supériorité du D3Q27 sur le D3Q19, et ce pour deux raisons principales. La première est l'impossibilité de corriger complètement le terme dominant d'erreur d'invariance galiléenne $\mathcal{O}(Ma^3)$ en D3Q19 [Del14], et la seconde se situe dans les simulations turbulentes d'écoulements axisymétriques [WC11 ; KH13]. La nette supériorité du D3Q27 sur les D3Q19 et D3Q15 en matière d'invariance rotationnelle y est clairement démontrée.

Le pendant 2D du modèles D3Q27 est le modèle D2Q9, qui est de loin le plus utilisé pour des applications faiblement compressibles.

2.3.5 Autres types de développements asymptotiques pour l'équation de Boltzmann sur réseau : une comparaison

Pour notre étude, nous avons utilisé une combinaison entre la méthode de Chapman-Enskog et les développements de Taylor pour obtenir le modèle macroscopique limite. Si la forme que nous avons employée diffère de bon nombre d'études, le principe de cette procédure mixte n'en est pas moins classique. Toutefois, certains auteurs (qui restent, il se trouve, minoritaires) utilisent d'autres techniques.

En particulier, certains numériciens n'utilisent aucunement le lien qui peut être établi entre la théorie cinétique et l'équation de Boltzmann sur réseau et utilisent exclusivement les développements de Taylor, comme dans la méthode des *équations équivalentes* de Dubois [Dub07 ; Dub08 ; Dub09 ; Fév14], présentée en 2D, notamment D2Q9, et sous scaling acoustique. Au regard des équations fournies par l'auteur, ces développements permettraient de montrer que le schéma LBM-BGK sous scaling acoustique converge vers les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles athermales à l'ordre 2 en espace-temps. Or nous avons vu que d'après notre méthode, d'autres termes d'erreur indépendants de l'erreur en maillage subsistaient. Comme il n'y a aucunement lieu de soupçonner la présence d'erreurs de calcul dans les développements de Dubois, il s'agit de comprendre la raison de ces différences apparentes.

Concernant l'absence chez Dubois du terme d'erreur d'invariance galiléenne en $\mathcal{O}(Ma^3)$, elle s'explique simplement par le fait que Dubois tronque à l'ordre $\mathcal{O}(Ma^2)$ le calcul de ses *défauts de conservation* (qui correspondent aux moments hors équilibre d'ordre 2 et plus) : en particulier, le défaut de conservation lié au tenseur des contraintes est tronqué à l'ordre 2.

En revanche, l'explication de l'absence explicite du nombre de Knudsen et surtout l'absence apparente des termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ est un peu plus subtile. En réalité, elle est aussi liée à la troncature à l'ordre $\mathcal{O}(Ma^2)$ des défauts de conservation. Toutefois, pour commencer, il s'agit de remarquer que le nombre de Knudsen apparaît bien dans les équations de Dubois, comme il apparaît dans tout modèle macroscopique issu de l'équation de Boltzmann sur réseau. Dubois utilise une formulation à temps de relaxation multiples (ce que nous étudierons dans le prochain chapitre) : afin de retrouver le modèle BGK, il suffit de définir dans les notations de Dubois $s_i = s$ pour $i = 0..8$. Comparé à nos

notations, on a alors

$$s = \frac{\Delta t}{\tau_g} = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} . \quad (2.138)$$

Par ailleurs, en dehors de la fréquence de relaxation s , précisons que les équations de Dubois sont dimensionnelles. Il définit également $\lambda = \Delta x / \Delta t$. Ainsi, il exprime la viscosité selon

$$\nu = \Delta t \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda^2}{3} . \quad (2.139)$$

Sachant que nous avons défini $c_s^2 = 1/3$, un rapide calcul montre que l'on retrouve bien, comme dans notre cas,

$$\nu = \tau c_0^2 . \quad (2.140)$$

Nous avons vu qu'une étude de convergence par rapport à des nombres sans dimension caractéristiques de la physique d'un écoulement ne pouvait se faire qu'en étudiant des équations adimensionnées par rapport à des grandeurs de référence dépendant intrinsèquement l'écoulement (et non de la taille de maille par exemple). Ainsi en reprenant les grandeurs caractéristiques $L = c_0 t_0$ et une vitesse caractéristique U , on peut adimensionner le temps de relaxation de Dubois comme suit

$$\frac{\Delta t}{t_0} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{t_0} \frac{\nu}{c_0^2} = \frac{\nu}{L c_0} = \frac{\nu U}{U L c_0} = \frac{Ma}{Re} = \epsilon . \quad (2.141)$$

Ainsi, comme attendu, le nombre de Knudsen apparaît bien dans les équations de Dubois adimensionnelles. Pour expliquer l'absence explicite d'un terme $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ dans les équations de Dubois, il faut à nouveau invoquer le fait que l'auteur cherche des équations très faiblement compressibles. Prenons l'exemple du défaut de conservation θ_3 de Dubois, qu'il exprime par

$$\theta_3 = \frac{\partial m_3^{eq}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-2\rho + \frac{3}{\lambda^2 \rho_0} |\rho \mathbf{u}|^2 \right) \quad (2.142)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{6|\rho \mathbf{u}|}{\lambda^2 \rho_0} \frac{\partial |\rho \mathbf{u}|}{\partial t} . \quad (2.143)$$

et qui correspond à la trace du tenseur des contraintes visqueuses (dans notre formalisme, il s'agirait de $\Pi_{xx}^{(1)} + \Pi_{yy}^{(1)}$). L'expression de la dérivée temporelle de la densité est connue d'après ses calculs précédents. Dubois effectue également l'approximation $m_3^{eq} \simeq -2\rho$, ce qui lui permet de fermer le système puisque les dérivées temporelles des moments d'ordre 1 (quantité de mouvement) ne sont pas connues à ce stade.

Or c'est précisément ici, d'après notre intuition, qu'apparaîtraient les erreurs d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. En effet, pour un nombre de Mach plus élevé, comment fermer le système sans négliger le terme $\mathcal{O}(|\rho \mathbf{u}|^2)$? Il nous semble que l'auteur se verrait obligé de recourir à une version discrète de la technique d'itération Maxwellienne, évoquée précédemment dans le cas des hiérarchies d'équations aux moments continus. Cela reviendrait à écrire une équation de transport sur les défauts de conservation θ . Toutefois, on retrouve la même question que dans le cas des systèmes continus (notamment les moments de Grad) : quel critère physique de troncature choisir pour fermer le système? D'après le travail bibliographique sur le sujet effectué dans la partie 2.1.2, la réponse est double : soit par une recherche d'*ordres de grandeur* au sens de Müller [MRW03] dans les moments, soit par un développement de Chapman-Enskog [GVU08 ; ST03]. Ainsi, le remplacement des dérivées temporelles des moments d'ordre 1 par les dérivées spatiales ferait apparaître, comme dans

le cas du développement de Chapman-Enskog, selon l'ordre du développement, des termes en

$$\mathcal{O}\left(\tilde{\Delta t}^n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right)^n\right) = \mathcal{O}(\epsilon^n), \quad (2.144)$$

avec $n \geq 2$.

Pour appuyer notre propos, nous pouvons citer une étude récente [YZL+16] dans laquelle une application aux vitesses discrètes de l'itération de Maxwell, couplée à des développements de Taylor pour la partie spatio-temporelle, est utilisée pour retrouver l'équation macroscopique de Navier-Stokes faiblement compressible en D2Q9. Les équations d'Euler sont retrouvées à la première itération et les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles athermales le sont à la seconde, le tout avec pour seul *petit* paramètre Δt . Dans cette étude, plusieurs affirmations de l'auteur interpellent. La première consiste à justifier l'utilisation de l'itération de Maxwell sous prétexte que "le nombre de Knudsen ne peut pas être tiré de l'équation de Boltzmann sur réseau et qu'il doit être introduit artificiellement". Au vu du paragraphe ci-dessus et plus généralement de tout ce début de manuscrit, cette affirmation nous semble pour le moins très téméraire. De plus, l'auteur déclare que, dans son formalisme, " Δt est le seul *petit* paramètre dans l'équation de Boltzmann sur réseau" : cette affirmation est fausse. En effet, les viscosités dans les Eqs. (39) ainsi que l'Eq. (25) de [YZL+16] font bien sûr apparaître, comme dans le cas de Dubois (et comme dans tous les cas), le temps de relaxation de l'équation (2.141). Or nous avons vu que ce dernier, exprimé sous une forme adimensionnelle correcte, est une mesure directe du nombre de Knudsen. Si les termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ n'apparaissent pas dans cette étude, c'est simplement parce que l'auteur a arbitrairement stoppé son calcul à la deuxième itération de Maxwell (ce qu'il est en droit de faire puisqu'il ne cherche que le modèle macroscopique à l'ordre 1). Cette troncature est une approximation légitime mais n'en reste pas moins une approximation. L'écriture de la troisième itération (de niveau Burnett), montrerait l'apparition, exactement comme dans le cas continu [MRW03], de termes d'ordre 2 au sens de Müller/Chapman-Enskog ($\mathcal{O}(\tilde{\tau}^2) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$). Ainsi, l'équation de Navier-Stokes faiblement compressible athermale déduite par itération Maxwellienne contient bien intrinsèquement le nombre de Knudsen ainsi que des termes d'erreur en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Nous mentionnons également une étude très récente de Otomo *et al.* [OBD17], dans laquelle l'auteur se propose de comparer la méthode de Chapman-Enskog à celle des purs développements de Taylor pour les équations de Burgers, Korteweg-de Vries, et Kuramoto-Sivashinsky.

En résumé, toutes ces approches sont complémentaires les unes des autres. Toutefois, la morale à retenir de cette discussion est la suivante : chassez le nombre de Knudsen par la porte et il reviendra par la fenêtre.

Conclusion

Dans cette section, nous allons synthétiser la mise en oeuvre d'une simulation numérique par la méthode de Boltzmann sur réseau, puis en rappeler les caractéristiques numériques et physiques principales.

La LBM en pratique : un algorithme type

Concernant la mise en place du schéma numérique, on peut distinguer les principales étapes de l'algorithme dans sa forme la plus simple (collision BGK, hors conditions limites...) :

1. Initialisation : l'utilisateur définit un champ physique $\rho(\mathbf{x}, t = 0)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0)$ dans tout le domaine. Ces données sont converties en unités adimensionnelles via la section 2.2.2. La fonction de distribution est souvent initialisée à sa valeur à l'équilibre donnée par (2.134). Les vitesses discrètes \mathbf{c}_α et les poids ω_α sont donnés par la table 2.2. Une connaissance analytique du tenseur des déformations à $t = 0$ peut permettre d'initialiser également la partie hors équilibre. Un choix de pas de maillage et d'une vitesse de propagation physique des ondes sonores c_0 impose le pas de temps par la condition CFL (2.70).
2. Collision : à un temps t donné, on calcule la fonction dite de collision, qui s'écrit pour l'opérateur BGK

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\bar{\tau}_g}(g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) , \quad (2.145)$$

où $\bar{\tau}_g$ est donné par (2.82).

3. Propagation : on effectue tout simplement l'opération $g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^*(\mathbf{x}, t)$ pour tous les α .
4. Calcul des variables macroscopiques : on obtient les nouvelles variables macroscopiques à partir des fonctions de distributions à $t+1$ par (2.65) et (2.66). On peut convertir ces dernières en leur valeur physique grâce à la section 2.2.2. On reprend ensuite à l'étape 2.

Enseignements principaux de la partie I

On retiendra que la méthode de Boltzmann sur réseau peut être analysée selon deux angles complémentaires : soit comme un schéma purement numérique dont on peut adapter les coefficients et l'équilibre pour, *a posteriori*, obtenir un comportement macroscopique

**CHAPITRE 2. DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN À L'ÉQUATION DE
BOLTZMANN SUR RÉSEAU**

54

de type fluide, soit comme une intégration particulière d'un système issu de l'équation de Boltzmann qui régit l'évolution cinétique des gaz peu denses. Toutefois, l'utilisation de techniques issues de la première des deux écoles permet la simulation de liquides, voire même de solides [ONB12], via notamment des modifications de la fonction d'équilibre.

Dans ce manuscrit, nous avons privilégié l'approche issue de l'équation de Boltzmann. Pour la simplicité des développements, nous avons utilisé le modèle de collision simple BGK. Pour déduire l'équation de Boltzmann sur réseau BGK de l'équation de Boltzmann-BGK, deux grandes étapes sont à retenir :

- Afin de restreindre l'ensemble continu des vitesses particulières à un espace discret et de cardinal fini, une méthode de quadrature de Gauss-Hermite est employée. Celle-ci fournit l'**équation de Boltzmann à vitesses discrètes** (DVBE). En fonction de la nature de l'écoulement à simuler et en particulier de son caractère hors-équilibre (représenté par le nombre de Knudsen $\epsilon = Ma/Re$), la quadrature sera plus ou moins précise, donnant lieu à un modèle possédant plus ou moins de vitesses discrètes. En fonction du degré de la quadrature apparaîtront ou non des erreurs de troncature. Les modèles D2Q9, D3Q15, D3Q19 et D3Q27, basés sur des quadratures de degré 5, permettent de simuler un fluide régi par les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles sous hypothèse athermale. Cette hypothèse fait apparaître une viscosité de volume non-nulle. Le degré de ces quadratures implique l'apparition d'un terme d'erreur dans le tenseur des contraintes d'ordre $\mathcal{O}(Ma^3)$, provoquant une rupture d'invariance galiléenne. Cette erreur peut être entièrement corrigée à l'ordre dominant en D2Q9 et D3Q27 mais pas en D3Q19. De manière générale, une quadrature de degré 5 ne doit être utilisée que pour des nombres de Mach et Knudsen faibles. De plus, toutes les quadratures de degré 5 ne sont pas équivalentes, de par la constitution différente de leurs termes d'erreur d'ordre élevé : en particulier de nombreux auteurs observent de grandes instabilités sur le D3Q15, ainsi que des problèmes sur les écoulements axisymétriques en D3Q19 (turbulence dans des tuyaux, écoulement de jet circulaire etc...). En somme, le D3Q27 est la plus coûteuse des quadratures de degré 5 mais est aussi logiquement la meilleure. Le D3Q19 reste tout à fait satisfaisant mais est déconseillé pour l'étude d'écoulements axisymétriques.
- Une fois la discréttisation de l'espace des vitesses effectuée, il s'agit d'obtenir une discréttisation spatio-temporelle qui fournit un schéma numérique. Une intégration particulière de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes donne naissance à l'**équation de Boltzmann sur réseau** (LBE, Lattice Boltzmann Equation). Celle-ci fait apparaître des termes d'erreur spatio-temporels distincts des erreurs en nombres de Mach et de Knudsen. Ce schéma est particulièrement simple, de type différences finies.

Une fois ce schéma obtenu se pose la question de sa limite hydrodynamique, c'est à dire l'équation fluide que la méthode permet de simuler à l'ordre dominant. Pour une étude acoustique, celle-ci doit s'étudier en utilisant le *scaling acoustique*, qui veut que $\Delta x \propto \Delta t$. Pour un scaling acoustique en D3Q19 (ou en D2Q9 et D3Q27 sans correction d'invariance galiléenne à l'ordre dominant), il existe trois niveaux de convergence vers les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles

- la convergence en maillage : les schéma de Boltzmann sur réseau possèdent des termes d'erreur spatio-temporels d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

- la convergence en nombre de Mach : un terme d'erreur en $\mathcal{O}(Ma^3)$ existe dans le tenseur des contraintes, provoquant une erreur d'ordre $\mathcal{O}(Ma^2)$ sur la viscosité dont la forme dépend de la direction de l'espace. Il ne disparaît pas en augmentant la résolution spatio-temporelle du calcul.
- la convergence en nombre de Knudsen : des termes d'erreur d'ordre $\mathcal{O}((Ma/Re)^2)$ existent et ne disparaissent pas non plus en augmentant la résolution spatio-temporelle du calcul.

En fonction des régimes d'écoulement, l'un ou l'autre de ces différents termes d'erreur prendra le dessus. Il existe donc des cas où quoiqu'il arrive, une augmentation de la résolution n'améliore pas la précision.

Le *scaling diffusif* $\Delta x^2 \propto \Delta t$ est le seul permettant une convergence entièrement en maillage (d'ordre 2 en espace et 1 en temps) : il provoque la décroissance des termes d'erreur en nombres de Mach et de Knudsen avec l'augmentation de la résolution. Toutefois, ceci repose sur le fait que le nombre de Mach est rendu dépendant du pas d'espace/temps : le nombre de Mach diminue alors avec l'augmentation de la résolution. Les schémas de Boltzmann sur réseau sous scaling diffusif convergent ainsi en maillage vers l'équation de Navier-Stokes incompressible : on en déduit que cette méthode n'est pas adaptée à une étude aéroacoustique.

Deuxième partie

La méthode de Boltzmann sur réseau pour l'aéroacoustique

Introduction

Nous avons étudié dans la partie précédente une construction la méthode de Boltzmann sur réseau, en insistant sur ses liens avec l'équation de Boltzmann et les équations de Navier Stokes. Il s'agit à présent de se poser les questions suivantes :

- Dans quelle mesure un tel schéma numérique est-il adapté pour la simulation numérique directe de l'aéroacoustique ?
- Quels sont ses avantages et ses inconvénients par rapport à des méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes ?
- Dans quelle mesure la modélisation de l'opérateur de collision influe-t-elle à la fois sur la stabilité du schéma et sur ses propriétés acoustiques ?
- Quel opérateur de collision choisir pour nos simulations industrielles et quelles sont ses capacités acoustiques ainsi que de gestion de la turbulence ?

La simulation numérique directe en aéroacoustique se heurte à plusieurs difficultés, dont la plupart sont communes à tous les schémas numériques. Il s'agit premièrement de capter un phénomène physique, l'acoustique, qui se révèle être de très faible amplitude face aux fluctuations aérodynamiques.

Deuxièmement, il s'agit de préserver au mieux les propriétés physiques de l'onde acoustique : on se référera ainsi aux erreurs de **dissipation** et de **dispersion**. Pour une onde donnée, l'erreur de dissipation représente la capacité du schéma à représenter correctement l'évolution de son énergie, quand l'erreur de dispersion concerne sa vitesse de propagation à une fréquence donnée.

Ce point influe sur la question de la stabilité numérique. En effet, un schéma numérique pour l'aéroacoustique se doit d'être faiblement dissipatif, afin de permettre la propagation des ondes sonores. Nous verrons que les schémas de Boltzmann sur réseau standards sont particulièrement peu dissipatifs et donc assez instables. De plus, l'étude de l'aéroacoustique rend inutilisable les techniques de stabilisation numérique les plus couramment utilisées dans la littérature en LBM, ce qui rajoute une difficulté supplémentaire.

Nous citerons enfin, qui plus est dans un cadre industriel, le souci primordial du temps de restitution du calcul et de la parallélisation. En effet, les méthodes de simulation directe en aéroacoustique donnent souvent lieu à des simulations coûteuses.

Il s'agit, dans un premier temps, d'étudier les enseignements que nous livre une analyse linéaire dite de Von Neumann du schéma LBM-BGK, ainsi que sa comparaison avec des méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes : cette méthode fournit des renseignements sur les propriétés de dissipation, de dispersion et de stabilité du schéma.

Nous nous attarderons ensuite sur les opérateurs de collision plus avancés existant dans la littérature et leur impact sur l'acoustique. Nous étudierons en particulier la grande famille des opérateurs dits à "temps de relaxation multiples" (dans laquelle nous incluons les méthodes Cascaded, Cumulant et les opérateurs dits *régularisés*) ainsi que les méthodes dites "entropiques" et de filtrage sélectif. Nous introduirons aussi une réalisation alternative d'un opérateur de collision à temps de relaxation multiples, permettant la propagation acoustique tout en obtenant des gains de stabilité numérique.

Enfin, nous introduirons un filtrage sélectif alternatif, plus rapide, compact et donc aisément implantable et parallélisable. Son effet sur la propagation acoustique sera étudié. Nous aborderons la question de savoir quel opérateur de collision doit-on filtrer dans

*CHAPITRE 2. DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN À L'ÉQUATION DE
BOLTZMANN SUR RÉSEAU*

60

un contexte industriel : nous verrons qu'il est sensé de coupler, sur les cas complexes, le filtrage sélectif à l'opérateur à temps de relaxation multiple alternatif évoqué plus haut. En conclusion, nous nous intéresserons à la capacité de ce nouveau schéma à servir de méthode *LES implicite* pour rendre compte de la turbulence. Nous effectuerons pour cela des comparaisons numériques sur le cas du développement temporel d'une couche de mélange à très haut nombre de Reynolds.

Pour ces analyses, les grandeurs de référence seront la longueur d'onde λ et la vitesse de phase c , auxquelles on relie le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ et la pulsation $\omega = \mathcal{D}(k)$ avec \mathcal{D} la *relation de dispersion* (qui est généralement complexe). On utilisera fréquemment pour les analyses de schéma le nombre d'onde réduit $k^* = k\Delta x$ et la pulsation réduite $\omega^* = \omega\Delta t$ dont les valeurs sont, conformément au théorème d'échantillonnage de Shannon, toujours comprises dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Chapitre 3

Modélisation de la collision : stabilité et propriétés acoustiques

3.1 Analyse linéaire de Von Neumann

Afin de mieux comprendre les capacités aéroacoustiques de la méthode de Boltzmann sur réseau, il est intéressant de considérer la méthode de l'analyse linéaire de Von Neumann. L'analyse de Von Neumann consiste à chercher les solutions sous forme d'onde plane d'une équation linéarisée : cette méthode peut être appliquée soit à un schéma numérique (LBM ou autre), soit à une équation continue non-linéaire (typiquement, les équations de Navier Stokes compressibles ou l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes). Elle vise à la fois à étudier les propriétés physiques de dissipation/dispersion (pour l'acoustique comme pour le cisaillement) d'un schéma où d'une équation continue, ainsi que la stabilité numérique des schémas numériques.

Nous synthétiserons ici les résultats importants obtenus par plusieurs auteurs sur cette question décisive ([MRS09 ; Mar08], ainsi que [Ric+09]).

3.1.1 Cas des équations de Navier Stokes 3D faiblement compressibles

Soit $\mathbf{U} = (\rho, \rho\mathbf{u}, p) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}'$ un vecteur solution (de taille 5 en 3D) des équations de Navier Stokes 3D faiblement compressibles. Plus précisément, une approximation isotherme est utilisée afin de pouvoir ultérieurement se comparer aux schémas de Boltzmann [Mar08]. Après linéarisation des équations, la partie fluctuante du vecteur solution est recherchée sous forme d'onde plane d'extension infinie, c'est à dire qu'on cherche \mathbf{U}' sous la forme

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} \hat{\rho}' \\ \rho_0 \hat{u}'_x \\ \rho_0 \hat{u}'_y \\ \rho_0 \hat{u}'_z \\ \hat{p}' \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (3.1)$$

où une variable sous un chapeau peut prendre des valeurs complexes. On obtient alors un problème aux valeurs propres qui possède une solution analytique. Cinq relations de

dispersion sont classiquement identifiées :

$$\text{N-S} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 + |\mathbf{k}|c_0 - i|\mathbf{k}|^2\mathcal{N} \\ \omega_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - |\mathbf{k}|c_0 - i|\mathbf{k}|^2\mathcal{N} \\ \omega_3 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - i|\mathbf{k}|^2\nu \\ \omega_4 = \omega_3 \\ \omega_5 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 , \end{array} \right. \quad (3.2)$$

avec $\mathcal{N} = \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{2}\xi$ (ν et ξ étant respectivement les viscosités de cisaillement et de volume) et \mathbf{u}_0 le champ moyen. Un terme en $(|\mathbf{k}|\mathcal{N}/c_0)^2$ a été négligé ici dans la partie dispersive des modes acoustiques, pour des raisons détaillées dans [MRS09]. Ces pulsations correspondent aux trois modes physiques identifiés par Kovasznay [Kov12 ; SC08] :

1. le **mode de vorticité** $\omega_3 = \omega_4$, se propageant à la vitesse $|\mathbf{u}_0| \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{u}_0})$ et dissipé au taux $-|\mathbf{k}|^2\nu$, avec $\widehat{\mathbf{k}\mathbf{u}_0}$ l'angle entre les vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{u}_0
2. les **modes acoustiques** ω_1 et ω_2 (respectivement ascendant et descendant), se propageant à la vitesse $c_{\pm} = |\mathbf{u}_0| \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{u}_0}) \pm c_0 \sqrt{1 - (\frac{|\mathbf{k}|\mathcal{N}}{c_0})^2}$ et dissipés au taux $-|\mathbf{k}|^2\mathcal{N}$
3. le **mode entropique** ω_5 qui, en conséquence de l'hypothèse isotherme, est convecté passivement et sans dissipation. Il est donc sans intérêt pour notre étude.

Cette solution peut-être prise comme référence pour la comparaison avec des schémas numériques basés sur les équations de Navier-Stokes 3D faiblement compressibles ou les schémas de Boltzmann sur réseau.

3.1.2 Cas des schémas Navier-Stokes d'ordre élevé et LBM-BGK

Nous synthétisons ici les résultats des études de Marié *et al.* [MRS09 ; Mar08] sur deux cas :

- les schémas aéroacoustiques basés sur les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles 3D, où la discrétisation spatiale est traitée par différences finies et la discrétisation temporelle par des schémas de Runge-Kutta. Plusieurs variantes sont testées : schéma d'ordre 2 avec 3 étapes de Runge-Kutta en temporel, schéma DRP optimisé de Tam et Webb à 3 étapes temporelles [TW93] et un schéma d'ordre 6 optimisé avec une discrétisation temporelle à 6 étapes optimisées [BBB06].
- le schéma de Boltzmann sur réseau BGK dans sa version D3Q19.

Pour l'étude des schémas numériques Navier-Stokes, le problème aux valeurs propres obtenu dans la partie précédente est modifié par la discrétisation spatiale et temporelle. Il ne possède plus de solution analytique et doit être résolu numériquement.

Pour la discrétisation d'équations basées sur des fonctions de distribution comme l'équation de Boltzmann BGK, il s'agit de chercher des solutions sous la forme

$$f_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha^{(0)} + f'_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

où sont séparées valeurs moyennes et fluctuantes. La partie fluctuante est également recherchée sous la forme d'une onde plane

$$f'_\alpha(\mathbf{x}, t) = \hat{A}_\alpha \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (3.4)$$

Cette fois, le procédé de Von Neumann implique également la linéarisation de la distribution d'équilibre. En effet, même si l'on prend par exemple le cas simple de l'opérateur de collision BGK, les équations obtenues ne sont linéaires qu'en apparence : la fonction d'équilibre cinétique, elle, n'est pas linéaire vis à vis des variables macroscopiques. Une fois le procédé de linéarisation effectué, un nouveau problème aux valeurs propres est obtenu et également résolu numériquement (notons que ce problème a été résolu analytiquement en 2D par Lallemand et Luo [LL00], au moyen d'approximations successives en nombre d'onde). En résumé, on retrouve pour les modes acoustiques et le mode de vorticité, conformément à l'analyse de la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann sur réseau :

$$\text{schéma LBM} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 + |\mathbf{k}|c_0 - i|\mathbf{k}|^2\mathcal{N} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \omega_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - |\mathbf{k}|c_0 - i|\mathbf{k}|^2\mathcal{N} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \omega_3 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - i|\mathbf{k}|^2\nu + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où le terme d'erreur d'invariance galiléenne en $\mathcal{O}(Ma^2)$ dans la viscosité a été négligé (puisque nous sommes dans un cadre linéaire). Seule l'expression de \mathcal{N} change par rapport au schéma Navier-Stokes vu plus haut (pour le schéma LBM-BGK par exemple, $\mathcal{N} = \nu$), ainsi que les termes d'erreur d'ordre élevé. On pourra se référer à [Krü+17; Vig14b] pour les relations de dispersion des modes acoustiques à un ordre plus élevé (en unités LBM).

Il est capital de remarquer que la matrice du problème aux valeurs propres dans le cas LBM D3Q19 est de **dimension 19** (de manière générale, de dimension q pour un DdQ q). Ainsi, dans les schémas de type Boltzmann sur réseau, des degrés de liberté supplémentaires existent et donnent naissance à ce que l'on appelle des **modes non-hydrodynamiques** (ou encore *modes fantômes*). Les termes qui les constituent n'apparaissent pas directement dans la limite hydrodynamique à l'ordre dominant, mais y sont couplés via les termes d'erreur d'ordre élevé. Ils influent grandement sur la stabilité numérique du schéma. Le lecteur pourra se référer à [DEL02; LL00] pour une étude détaillée. Nous reviendrons toutefois plus loin sur ce point crucial, dans la section sur les modèles de collision à temps de relaxation multiples. Le fait pour un schéma numérique d'engendrer des modes correspondant à des degrés de liberté supplémentaires est une caractéristique qui n'est pas exclusive aux schémas de Boltzmann sur réseau. Ce phénomène apparaît également dans les méthodes aux éléments finis, dans les méthodes pseudo-spectrales ou encore dans les méthodes implicites.

Plusieurs enseignements importants peuvent être tirés de telles comparaisons. Le premier est en rapport aux propriétés de dispersion et dissipation des différents types de schémas. La figure 3.1, extraite de [MRS09], compare les résultats des schémas Navier-Stokes cités plus haut et l'algorithme de Boltzmann-BGK pour un écoulement moyen uniforme le long de l'axe x avec un nombre de Mach $Ma = 0.2$, la solution de référence correspondant au système (3.2).

En matière de dissipation, les résultats sont très clairement en faveur de la LBM. Le seul cas dans lequel l'erreur de dissipation pour un schéma Navier-Stokes est légèrement plus faible que pour la LBM est le cas du mode de cisaillement pour le schéma d'ordre 6 optimisé. Concernant l'erreur de dispersion, la LBM fait indéniablement mieux qu'un schéma Navier-Stokes du même ordre (c'est à dire, rappelons le, d'ordre 2). Son comportement se rapproche de celui du schéma DRP optimisé d'ordre 3. On remarquera même que la LBM fait mieux dans les grands nombres d'onde pour la dispersion du mode acoustique ($k\Delta x > \pi/3$).

Toutefois, cette première série de comparaisons n'a d'intérêt pratique que si elle est complétée d'une seconde : celle liée aux nombres d'opérations CPU nécessaires par unités

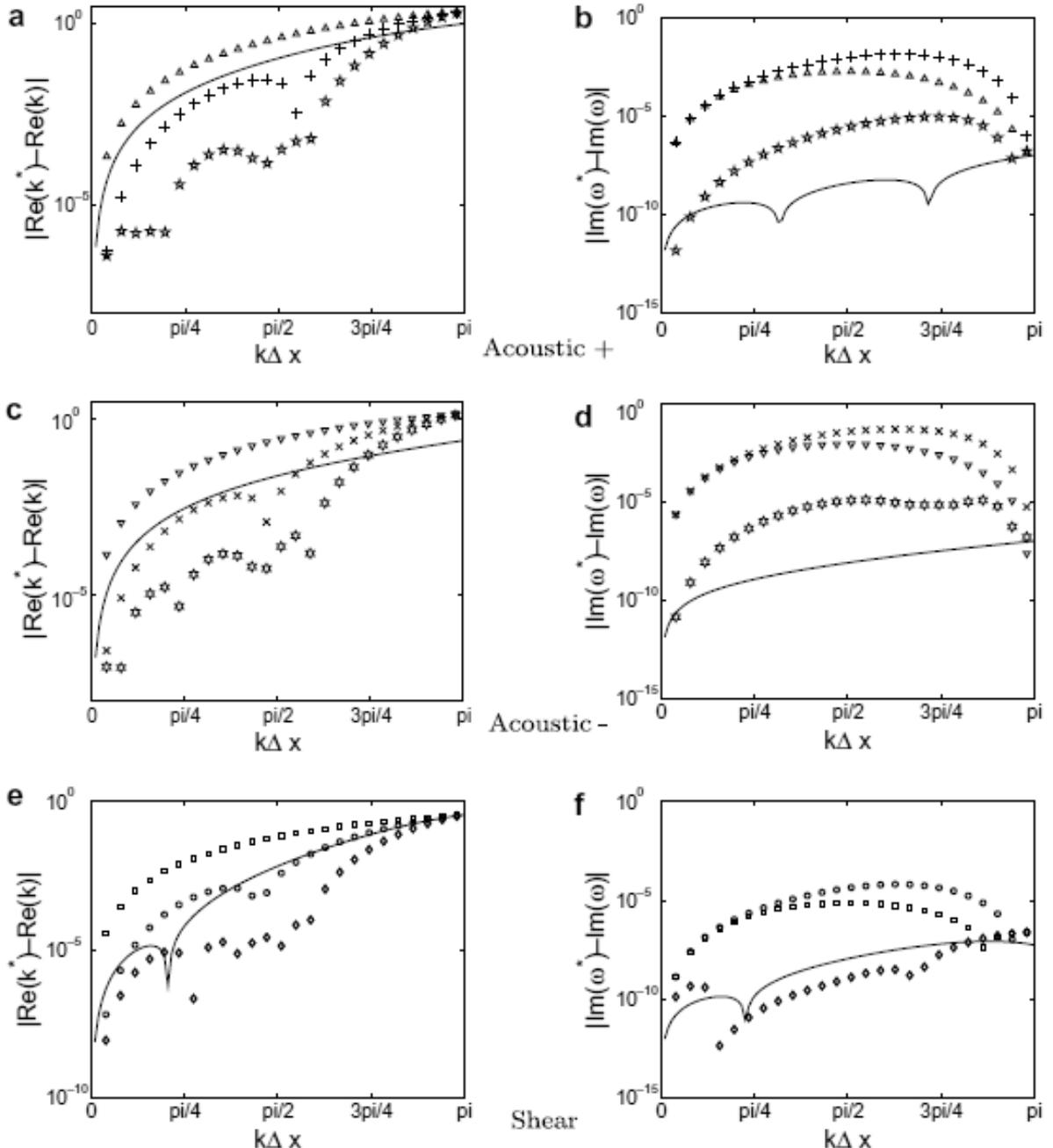


FIGURE 3.1 – Erreurs de (a)(c)(e) dispersion et (b)(d)(f) dissipation pour $Ma = 0.2$. (—) LBM-BGK; ($\Delta \nabla \square$) Navier Stokes 2nd ordre; (+ $\times \circ$) DRP optimisé; ($\star \diamond \lozenge \lozenge$) Navier Stokes ordre 6 optimisé. Extrait de [MRS09]. Pour la colonne de gauche, une erreur apparaît dans la légende de l'axe des ordonnées : ce n'est pas $\Re(k^*)$ ni $\Re(k)$ mais $\Re(\omega^*)$ et $\Re(\omega)$.

de temps physique. Sur ce point, l'étude de [MRS09 ; Mar08] cherche à déterminer la rapidité des algorithmes pour un taux d'erreur de dispersion donné. Une fois de plus, les conclusions sont claires : la LBM est nettement plus rapide que tous les schémas Navier-Stokes considérés (tant que l'erreur de dispersion reste supérieure à 0.01%). Le seul schéma compétitif par rapport à la LBM sur le critère cité plus haut est le schéma DRP optimisé d'ordre 3. Toutefois, cette affirmation doit-être tempérée : en effet, si l'on prend en compte

également l'erreur de dissipation, la LBM devient à nouveau bien plus avantageuse. De plus, la compacité et la simplicité d'implémentation du schéma LBM en particulier sur des configurations industrielles complexes ajoute de sérieux argument en sa faveur, en particulier pour ce qui est du calcul massivement parallèle.

Notons en conclusion qu'une analyse linéaire comparative très détaillée, centrée sur la problématique de l'acoustique, est disponible dans la thèse de Viggen [Vig14b] et dans [Krü+17].

3.1.3 Conséquences sur la stabilité numérique

Un schéma peu dissipatif a toutes les chances d'être instable. Ce dernier sera d'autant moins dissipatif que la viscosité sera faible, c'est à dire que $\bar{\gamma}$ sera proche de 1/2. Sur le plan théorique de l'analyse linéaire, une instabilité survient si, pour un mode, un nombre d'onde et une orientation du vecteur d'onde donnée, le taux de dissipation correspondant est négatif. Suivant la convention adoptée ici pour la recherche de solutions en ondes planes, cela correspond à ce qu'il existe pour la relation de dispersion d'au moins un mode i , un ensemble \mathcal{K} de vecteurs d'onde tel que pour $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$, $\Im(\omega_i(\mathbf{k})) > 0$ (la partie imaginaire de ω est l'opposé du taux de dissipation). Si un tel point de l'espace spectral est excité, une instabilité survient, dont le taux de croissance dans le temps dépend de $\Im(\omega_i(\mathbf{k}))$. Plus un schéma est numériquement dissipatif, moins il est probable que de telles zones de dissipation négative existent.

Concernant les schémas Navier-Stokes d'ordre élevé, la diminution du nombre CFL permet d'améliorer la stabilité numérique mais se fait au détriment du temps de calcul, déjà en défaveur de ces derniers par rapport à la LBM. Une augmentation du nombre CFL jusqu'à des valeurs s'approchant de 1 provoque des instabilités sur les schémas d'ordre élevé. Un filtrage d'ordre élevé (stencils très larges : 9, 11, 13 points par direction ou plus) est généralement ajouté pour n'ajouter de la dissipation que dans les nombres d'onde les plus élevés. L'objectif est de garder les bonnes propriétés du schéma sur la gamme de longueur d'onde la plus grande, tout en s'affranchissant des instabilités numériques de haut nombre d'onde. Les coefficients de ces filtres sont parfois optimisés dans l'espace spectral pour minimiser la dissipation sur un intervalle de nombre d'ondes donné (le lecteur pourra se référer par exemple à [BB04 ; BB06a]). Notons ici que ce type de technique est également utilisé pour prendre en compte les effets de la turbulence dans le cadre de calculs LES [Mat+03 ; MFF06 ; BB06b]. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Pour les schémas de Boltzmann sur réseau où le CFL est rappelons le fixé ($CFL = 1/\sqrt{3} \simeq 0.58$), il a clairement été déterminé que l'opérateur de collision BGK produit un schéma numérique assez instable aussi bien en 2D qu'en 3D, en particulier pour des hauts nombres de Reynolds et des nombres de Mach modérés. L'étude de Ricot *et al.* s'intéresse à ces instabilités sur un modèle LBM-BGK D2Q9. Cette quadrature étant de même degré que celle du D3Q19, ce modèle constitue une simplification 2D pertinente. La figure 3.2 montre que les zones d'instabilités dépendent de l'orientation θ du vecteur d'onde et se situent au delà de $|\mathbf{k}| = \pi/2$ (4 points par longueur d'onde). Ainsi, il s'agit d'instabilités se produisant plutôt dans les hauts nombres d'onde.

Cette étude établit également que certaines des instabilités majeures observées sont la conséquence d'un couplage entre le mode de cisaillement et le mode acoustique. L'instabilité en question provient de la discréttisation spatio-temporelle : elle n'apparaît pas lorsqu'une analyse de Von Neumann est effectuée sur l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. Cela montre que l'interaction entre les modes non-hydrodynamiques et les modes physiques est d'une grande importance.

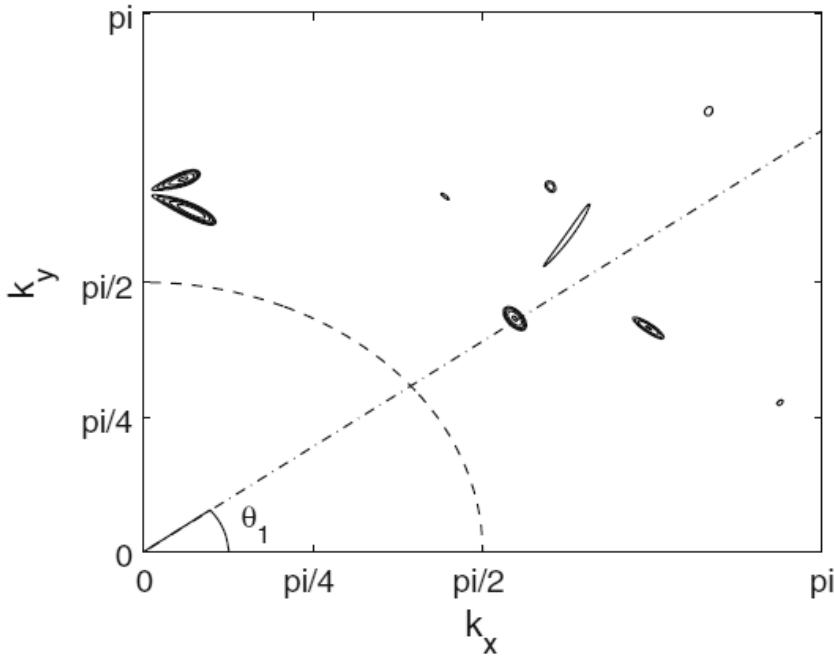


FIGURE 3.2 – Valeurs maximales de $\Im(\omega(\mathbf{k}))$ dans les régions où $\Im(\omega(\mathbf{k})) > 0$, avec $U_0 = U_x = 0.2$ pour un modèle LBM-BGK D2Q9. Les nombres d'onde sont adimensionnels. Isocontours de 0.001 à 0.02 par pas de 0.004. θ correspond à l'orientation du vecteur d'onde. Les régions ainsi représentées correspondent à des zones d'instabilité, puisque le taux de dissipation y est négatif. Extrait de [Ric+09].

En conclusion, il est nécessaire de faire appel à des modélisations de la collision plus avancées que le simple opérateur BGK. En effet, sa stabilité numérique pour des écoulements à faible viscosité n'est pas satisfaisante : les problèmes identifiés dans cette section ne correspondent qu'à des cas extrêmement simples (écoulement moyen uniforme, absence de parois solides etc...), ce qui rend l'application de l'opérateur BGK à des écoulements industriels complexes illusoire. Toutefois, il faudra examiner avec prudence les caractéristiques des modèles de collision avancés, afin de conserver les bonnes propriétés aéroacoustiques de la LBM.

3.2 Modèles à temps de relaxation multiples

Cette catégorie de méthodes introduit des temps de relaxation supplémentaires par rapport au modèle BGK, qui n'en comporte qu'un seul : $\bar{\tau}_g$. Nous tenterons ici de faire la distinction entre plusieurs familles de modèles à temps de relaxation multiples : celles basées sur les travaux historiques de D'Humières sur l'équation de Boltzmann généralisée, donnant naissance aux modèles "de type MRT" (Multiple Relaxation Time), les modèles Cascaded Lattice Boltzmann et Cumulant Lattice Boltzmann, ainsi que ceux reposant sur une approche dite régularisée. Nous verrons également dans quelle mesure tous ces modèles peuvent être unifiés, justifiant ainsi de les classer dans une seule et même grande famille.

3.2.1 Modèles de type MRT : structure algébrique

Le tout premier travail portant sur les modèles à temps de relaxation multiples a été effectué en 1992 par Dominique D'Humières [DHu92]. Ce travail s'organise autour de la notion d'**équation de Boltzmann sur réseau généralisée** (Generalized Lattice Boltzmann Equation, GLBE) et a donné naissance à un des plus célèbres modèles de collision : le modèle MRT (Multiple relaxaion time) [DHu02 ; LL00]. Précisons d'emblée que la dénomination MRT au sens strict fait appel à une formulation bien précise [DHu02 ; LL00], et non à n'importe quelle formulation à temps de relaxation multiples inspirée de la GLBE. C'est pourquoi nous ferons souvent référence à la catégorie des modèles "de type MRT" pour désigner des modèles directement inspirés du formalisme de D'Humières mais qui ne sont pas à proprement parler le modèle MRT.

Pour toute la suite, on notera pour tout vecteur \mathbf{a} de taille n quelconque, $a_\alpha = [\mathbf{a}]_\alpha$ pour $\alpha = 0..n - 1$. On désignera aussi fréquemment la partie hors équilibre d'une quantité par l'exposant neq par opposition à eq pour la partie à l'équilibre. Par exemple, pour la fonction de distribution, $\mathbf{g}^{neq} = \mathbf{g} - \mathbf{g}^{eq}$.

Pour présenter la GLBE, réécrivons l'équation de Boltzmann sur réseau adimensionnelle pour un opérateur de collision de forme plus générale (nous nous affranchissons également des tildes d'adimensionnement, par souci de clarté) :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha, t + 1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{g}^{eq}(\mathbf{x}, t)) . \quad (3.6)$$

La matrice de collision \mathbf{A} , associée à un opérateur de collision donné, est supposée diagonalisable. L'ensemble des vecteurs propres pour un opérateur de collision donné est décrit ici par $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ et les valeurs propres associées par $\{s_\alpha\}$ (pour une discréttisation en vitesses discrètes de type $DdQq$, on a $\alpha = 0..q - 1$ et chaque vecteur \mathbf{e}_α est de taille q). Pour des raisons de stabilité, on a la condition nécessaire $s_\alpha \in [0; 2]$ [LL00]. À ce stade du raisonnement, la fonction d'équilibre n'est pas encore spécifiée, mais devra assurer dans notre cas les propriétés de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de l'opérateur de collision. En effet, le raisonnement que fait D'Humières pour établir le schéma de Boltzmann sur réseau dont la limite est hydrodynamique est différent de celui que nous avons établi dans notre première partie. Le raisonnement de D'Humières ne s'inspire pas, contrairement à nous, de l'équation de Boltzmann continue (il puise davantage sa source dans les travaux liés aux *gaz sur réseau*). On peut dire qu'il s'agit davantage d'une approche *a posteriori*, en comparaison de celle basée sur l'équation de Boltzmann qui a vocation à être un approche *a priori*.

Ensuite, il s'agit de projeter l'opérateur de collision et les fonctions de distribution sur ce choix de base de vecteurs propres pour en obtenir ce que l'on appelle les *moments*. Ainsi, pour la fonction de distribution g de taille q , on a la projection

$$\mathbf{g} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|^2} \mathbf{e}_\alpha , \quad (3.7)$$

où le produit \cdot avec un vecteur quelconque \mathbf{a} est défini par $\mathbf{g} \cdot \mathbf{a} = \sum_{k=0}^{q-1} g_k a_k$. La quantité

$$m_\alpha = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\alpha , \quad (3.8)$$

est nommée *moment* de la fonction de distribution relativement à la base de vecteurs propres choisie. Il y a ainsi q moments. Il est important de noter qu'à cette étape très générale dans le raisonnement, un moment de la fonction de distribution correspond uniquement à la coordonnée de sa projection sur un vecteur de base *pour une base donnée* :

les quantités macroscopiques ($\rho, \rho\mathbf{u}$ etc...) ne sont des moments de la fonction de distribution qu'à l'égard de vecteurs issus *d'une certaine famille* de bases, sur laquelle nous reviendrons ci-après. Ainsi, les moments que nous avons évoqués dans la première partie ne sont qu'une concrétisation particulière de ce concept très général.

D'après l'équation (3.8), il existe une matrice carrée \mathbf{M} , de taille $q \times q$, composée des vecteurs propres de l'opérateur de collision (c'est à dire des q vecteurs \mathbf{e}_α définis précédemment), qui transforme la fonction de distribution en ses moments selon

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{g} , \quad (3.9)$$

$$\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^{eq} . \quad (3.10)$$

Cette matrice est couramment appelée *matrice de transformation*. Elle correspond également à une matrice de changement de base (ou matrice de passage) pour l'opérateur de collision et est inversible. L'opérateur de collision étant supposé diagonal dans l'espace des moments, on peut définir une matrice diagonale \mathbf{S} dite *matrice de relaxation*, formée des q valeurs propres s_α et telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} . \quad (3.11)$$

La fonction post-collision \mathbf{g}^* et les moments post-collision \mathbf{m}^* s'écrivent alors dans l'espace des moments

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)) , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)) . \quad (3.13)$$

Ainsi, dans ce modèle, la collision est diagonale dans l'espace des moments (nous verrons que certains autres modèles de collision ne reposent pas sur cette hypothèse). L'opérateur BGK correspond au cas particulier où la matrice de relaxation se réduit à $\mathbf{S} = diag(1/\bar{\tau}_g)$, dont la valeur est imposée, on l'a vu, par la viscosité de cisaillement : il s'agit donc d'un modèle à un seul temps de relaxation.

Il est important de faire la distinction entre trois types de moments et leur comportement au cours du processus de collision :

- Les **moments conservés** : ce sont ceux qui, comme leur nom l'indique, sont conservés par la collision, c'est à dire pour lesquels $\mathbf{m}^* = \mathbf{m}$. Pour le cas qui nous concerne, la LBM athermale en D3Q19, les moments conservés sont la densité et la quantité de mouvement.
- Les **moments non conservés hydrodynamiques** : ces moments ne sont pas conservés par les collisions mais apparaissent dans les équations fluides limites à l'ordre dominant. Des considérations physiques imposent donc la valeur du temps de relaxation associé à ces moments. En l'occurrence, dans notre cas, ces moments sont les moments d'ordre 2, liés au tenseur des contraintes. Les temps de relaxation associés à ces moments sont donc liés à la viscosité.
- Les **moments non conservés non hydrodynamiques** : ces moments ne sont pas conservés par les collisions et n'apparaissent pas dans les équations fluides limites à l'ordre dominant. Les temps de relaxation associés à ces moments sont donc, a priori, des *paramètres libres*. On les appelle aussi **temps de relaxation non-hydrodynamiques**.

L'idée des modèles à temps de relaxation multiples est précisément de modifier la valeur de ces paramètres de relaxation non-hydrodynamiques, afin d'optimiser la stabilité numérique ou certaines propriétés d'ordre supérieur du schéma.

Pour déterminer une classification des modèles à temps de relaxation multiples, il s'agit de s'intéresser à présent à la base de vecteurs propres choisie pour décrire l'opérateur de collision. En ce sens, il est intéressant de faire d'abord référence à la classification de Ginzburg [Gin05], que nous restreindrons ensuite par souci de simplicité

- Les bases de type **MRT** (Multiple Relaxation Time) : celles-ci ont pour but de fabriquer des moments qui correspondent à des quantités physiques observables, comme la masse et la quantité de mouvement par exemple. Les vecteurs de base sont des polynômes des composantes des vitesses discrètes. La composition précise de la base dépend du modèle considéré, mais on trouvera par exemple communément le vecteur de base $e_0 = \mathbf{1}$ sur lequel la projection de la fonction de distribution donnera naissance au moment ρ , puis ceux donnant naissance à la quantité de mouvement, etc...

En l'occurrence, nous apporterons ici des précisions par rapport à la classification de Ginzburg, dans laquelle les bases de type MRT sont décrites comme étant orthogonales : il est en réalité tout à fait possible d'utiliser des bases non-orthogonales [Fév14] pour développer un modèle à temps de relaxation multiples : il n'y a en effet pas d'argument clair en faveur de l'orthogonalisation, comme souligné également par Geier dans [Gei+15].

La dénomination MRT au sens strict fait référence aux bases popularisées par D'Humières [DHu02] ainsi que Lallemand et Luo [LL00], qui sont effectivement orthogonales. Par conséquent, toutes les bases qui diffèrent de ces dernières mais qui restent construites dans l'esprit de l'équation de Boltzmann généralisée et avec pour conséquence la création d'un modèle à temps de relaxation multiples seront placées dans la catégorie des bases "de type" MRT.

Précisons également que la notion d'orthogonalité est relative à un produit scalaire donné. Pour les bases MRT originelles [DHu02 ; LL00], il s'agit du produit scalaire dit **non-pondéré**, c'est à dire défini pour deux vecteurs quelconques par

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k b_k . \quad (3.14)$$

Or il existe d'autres bases "de type MRT" orthogonales vis à vis du produit scalaire **pondéré** (par exemple chez Dellar [DEL02 ; Del03 ; Del06] en 2D, Adhikari et Succi [AS08] en 2D et 3D, ou encore Fakhari *et al.*[FBL17] en 3D), c'est à dire le produit

$$\mathbf{a} \cdot^\omega \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{q-1} \omega_k a_k b_k , \quad (3.15)$$

avec ω_k les poids de quadrature définis dans la partie précédente.

- La base **link-type** (ou L-Type) : la base utilisée se fonde sur les paires de vitesses discrètes de sens opposés pour un réseau donné. Il y a $(q - 1)/2$ paires de vitesses pour un $DdQq$, à laquelle on rajoute la vitesse d'indice 0. Concrètement, la base est formée des vecteurs propres dits *pairs* $e_\alpha^+ = \delta_\alpha + \delta_{\bar{\alpha}}$ et *impairs* $e_\alpha^- = \delta_\alpha - \delta_{\bar{\alpha}}$ pour chaque paire, où $\bar{\alpha}$ désigne la direction opposée à α sur le réseau ($c_{\bar{\alpha}} = -c_\alpha$), avec δ le symbole de

Kronecker. On rajoute aux vecteurs propres *pairs* le vecteur $e_0 = 2\delta_0$ pour compléter la base. Cette base aboutit naturellement à un opérateur de collision qui décompose la fonction de distribution hors équilibre en ses parties symétrique et antisymétrique :

$$[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}^{neq}]_\alpha = s_\alpha^+ g_\alpha^{neq+} + s_\alpha^- g_\alpha^{neq-}, \quad (3.16)$$

où

$$g_\alpha^{neq\pm} = (g_\alpha^{neq} \pm g_\alpha^{neq})/2. \quad (3.17)$$

Cette famille de bases coïncide avec la base MRT de d'Humières lorsque seuls deux temps de relaxation sont utilisés, ou plus précisément lorsque pour $\alpha = 0..q - 1$

$$s_\alpha^+ = s^+, \quad (3.18)$$

$$s_\alpha^- = s^-. \quad (3.19)$$

Il s'agit de la seule base L-type capable de fournir un modèle macroscopique où masse et quantité de mouvement sont conservées [Gin05] : c'est par conséquent le seul cas que nous retenons pour la suite. Ainsi est obtenu le fameux modèle **TRT** (Two Relaxation Time) pour lequel la fonction de collision s'écrit

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - (s^+ g_\alpha^{neq+} + s^- g_\alpha^{neq-}). \quad (3.20)$$

Nous insistons sur le fait que, comme pour le sigle MRT, l'appellation TRT fait référence à un modèle précis (celui de Ginzburg [Gin05 ; KGT15] présenté ici) et non simplement à une méthode à deux temps de relaxation.

- Ces deux familles de base coïncident avec la base **BGK** de [Gin05] lorsqu'un unique temps de relaxation est utilisé.

Ginzburg a également introduit et étudié en détail des bases mixtes mélangeant MRT et base L-type [Gin05 ; Gin13], que nous n'étudierons pas ici.

En résumé, les bases de type MRT sont celles qui concentreront notre attention, puisqu'elles regroupent à la fois les modèles de type MRT (dont le MRT de D'Humières et le TRT de Ginzburg) et le modèle BGK.

Si on prend le cas du modèle de D'Humières D3Q19 [DHu02], la matrice de transformation \mathbf{M} s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccccccccccccccc} \rho & 1 \\ e & -30 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \epsilon & 12 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_x & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_y & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ q_y & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ j_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ q_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ p_{xx} & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ \pi_{xx} & 0 & -4 & -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ p_{ww} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{ww} & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ p_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ m_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (3.21)$$

Dans la colonne séparée de gauche, nous avons fait apparaître les moments générés par les vecteurs de base correspondants. Ici, ρ désigne la densité, \mathbf{j} la quantité de mouvement et les quantités p_{**} ainsi que e les moments d'ordre 2 (nous avons exactement repris les notations de D'Humières). Toutes les autres quantités sont des moments non hydrodynamiques. On se référera à [DHu02] pour l'expression polynomiale des vecteurs de base.

À noter qu'en fonction de l'ordre des indices des vitesses discrètes choisi, les colonnes peuvent avoir un ordre différent en fonction des modèles.

3.2.2 Modèles de type MRT : influence acoustique de la relaxation des moments d'ordre 2

Nous étudions ici l'influence sur l'acoustique du choix de la base de moments et des paramètres de relaxation associés. Nous avons vu que les méthodes à temps de relaxation multiples donnaient naissance à une famille de modèles que nous avons nommés "de type MRT". Sans entrer dans le détail dans la partie précédente, nous avons montré qu'au sein même de cette famille, plusieurs bases de moments coexistaient. Notre objectif est d'étudier l'équation fluide à l'ordre dominant (soit l'ordre "Navier-Stokes", ou plus précisément l'ordre 1 en nombre de Knudsen) : par conséquent, seuls les moments hydrodynamiques, c'est à dire d'ordre inférieur ou égal à 2, seront utiles pour cette tâche.

Les moments d'ordre inférieur ou égal à 1 correspondent à des moments conservés et sont identiques dans tous les modèles de type MRT. Ces moments ne nécessitant pas de relaxation, les temps de relaxation associés à ces moments dans la matrice diagonale \mathbf{S} sont fréquemment fixés, arbitrairement, à une valeur nulle. C'est par exemple le cas du MRT classique de D'Humières ou Lallemand et Luo [DHu02 ; LL00]. Notons par parenthèse que cette valeur acquiert une importance particulière dans le cas où une force externe est ajoutée à l'équation de Boltzmann sur réseau [DHu02] : dans ce cas, il faut fixer ces temps de relaxation à la valeur $\bar{\tau}_g$ qui pilote la viscosité de cisaillement.

Nous en déduisons que seuls les vecteurs de base générant les moments d'ordre 2 nous importent ici, ce qui semble logique puisqu'ils correspondent aux composantes du tenseur des contraintes visqueuses. Les fréquences de relaxation impactent les propriétés acoustiques du schéma par deux biais :

- Selon les méthodes, les moments d'ordre 2 sont traités différemment. Cela occasionne pour beaucoup d'entre elles l'existence d'un temps de relaxation lié à la **viscosité de volume** ξ . Par ce biais, le paramétrage usuel de nombreux modèles augmente artificiellement de façon très importante la valeur de la viscosité de volume, sacrifiant du même coup la propagation des ondes acoustiques comme nous le verrons juste après.
- Les temps de relaxation associés aux moments d'ordre supérieur à 2 (non hydrodynamiques) ont une influence sur les **propriétés de dissipation et de dispersion du schéma dans les hauts nombres d'onde**. Par conséquent, le comportement des modes acoustiques comme du mode de vorticité seront affectés par ces paramètres "libres" pour de longueurs d'onde proches des limites de résolution du schéma.

Le premier point constitue un effet d'ordre dominant puisqu'il modifie directement un coefficient de transport de l'équation de Navier-Stokes, tandis que le second correspond à une propriété d'ordre élevé du schéma : par conséquent, nous nous focaliserons principalement sur le premier.

La viscosité en volume possède une importance cruciale en aéroacoustique. Pour les équations de Navier-Stokes et la limite hydrodynamique LBM-BGK, le mode de vorticité est dissipé via la seule viscosité de cisaillement alors que les modes acoustiques sont dissipés selon le taux

$$\Gamma_{ac} = -\left(\frac{2}{3}\nu + \frac{1}{2}\xi\right)|\mathbf{k}|^2, \quad (3.22)$$

(voir section 3.1.1). Nous avons vu que pour les fluides Newtoniens, les équations de Navier-Stokes compressibles sont généralement associées à l'hypothèse de Stokes, qui induit $\xi = 0$. Concernant la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes BGK sous hypothèse athermale, nous avons établi dans le chapitre précédente que $\xi = \frac{2}{3}\nu$ (voir Eq. 2.48), puis montré que ce résultat était transposable à l'ordre dominant pour le schéma de Boltzmann sur réseau BGK. Ainsi, on obtient comme taux de dissipation à l'ordre dominant

$$\Gamma_{ac}^{\text{BGK}, \text{atherm}} = -\nu|\mathbf{k}|^2, \quad (3.23)$$

qui sera notre taux de référence pour la suite. Pour alléger la notation, nous omettrons pour le reste de la section la mention *athermal* qui apparaît ici en exposant, puisque nous étudierons exclusivement ce type de modèles.

Pour le modèle BGK, la totalité des moments d'ordre 2 (6 en 3D, 3 en 2D) sont relaxés avec le même temps de relaxation $\bar{\tau}_g$ lié à la viscosité de cisaillement. En revanche, pour les bases de type MRT, on peut distinguer trois types de combinaisons liant moments d'ordre 2 et temps de relaxation associés :

- Celles inspirées du MRT de D'Humières [DHu02 ; LL00] : **seuls 5 moments d'ordre 2 sont considérés comme hydrodynamiques** (2 en 2D) et sont relaxés avec $\bar{\tau}_g$ (dans le D3Q19 de [DHu02] par exemple, $1/\bar{\tau}_g = s_9 = s_{13}$). Le moment d'ordre 2 restant, qui fait apparaître la trace du tenseur des contraintes, est relaxé avec une fréquence de relaxation considérée comme un **paramètre libre** (numérotée s_1 dans le D3Q19 de [DHu02]), qui est **explicitement relié à la valeur de la viscosité de volume**. Pour le D3Q19 de D'Humières par exemple, en reprenant les numérotations de l'article original, on a les correspondances suivantes pour les vecteurs de base φ_i liés aux moments d'ordre 2 et leurs temps de relaxation associés :

$$(\varphi_1)_\alpha = 19(c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2) - 30 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_1} = \frac{9\xi}{5 - 9c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

$$(\varphi_9)_\alpha = 2c_{\alpha x}^2 - c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_9} = \bar{\tau}_g = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

$$(\varphi_{11})_\alpha = c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_9} = \bar{\tau}_g \quad (3.26)$$

$$(\varphi_{13})_\alpha = c_{\alpha x}c_{\alpha y} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_9} = \bar{\tau}_g \quad (3.27)$$

$$(\varphi_{14})_\alpha = c_{\alpha y}c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_9} = \bar{\tau}_g \quad (3.28)$$

$$(\varphi_{15})_\alpha = c_{\alpha x}c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_9} = \bar{\tau}_g \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

Dans [DHu02], la valeur conseillée pour le paramètre libre s_1 est $s_1 = 1.19$. Cette valeur n'est pas universelle : de nombreux auteurs s'en démarquent, de sorte qu'en moyenne

on trouve dans la littérature $1 < s_1 < 1.5$. Ces valeurs étant peu proches de 2 (qui correspondrait à une viscosité nulle), on se doute qu'en réalité dans ces modèles la viscosité de volume est très largement augmentée dans le but de stabiliser les calculs, au détriment de toute possibilité de propagation acoustique correcte [MRS09].

Pour fixer les idées, nous allons exprimer le rapport des viscosités de volume et de cisaillement dans ces cas : pour ce faire, nous repassons ici en unités dimensionnelles. En utilisant un pas d'espace Δx , la condition CFL 2.70 ainsi que la règle d'adimensionnement 2.81 pour les viscosités, on obtient dans le cas du D3Q19 de D'Humières

$$\left[\frac{\xi}{\nu}\right]^{\text{MRT}} = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{2}}{\nu} \frac{c_0 \Delta x}{\sqrt{3}}, \quad (3.31)$$

On remarque déjà que pour s_1 fixé, la viscosité de volume est proportionnelle au pas de maillage. Pour mieux saisir la portée de cette équation, une application numérique est éclairante : prenons des valeurs, correspondant à celles de l'air, de $c_0 = 340 \text{ m/s}$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et par exemple $\Delta x = 0.005 \text{ m}$, le tout avec $s_1 = 1.19$. On obtient pour ce jeu de valeurs $[\xi/\nu]^{\text{MRT}} \simeq 22270$ et pour $s_1 = 1$, $[\xi/\nu]^{\text{MRT}} \simeq 32716$, rapport qui augmente proportionnellement à la taille de maille. Pour un écoulement de longueur caractéristique L et le nombre de Knudsen ϵ , on peut réexprimer le rapport des viscosités par

$$\left[\frac{\xi}{\nu}\right]^{\text{MRT}} = \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{2}\right) \frac{Re}{Ma} \frac{2c_s \Delta x}{3L} = \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\epsilon} \frac{2\Delta x}{3L\sqrt{3}}. \quad (3.32)$$

Ainsi, même à résolution spatiale fixée, plus on se rapproche du cas idéal $\epsilon \rightarrow 0$ plus la viscosité de volume est artificiellement augmentée pour des besoins de stabilité numérique. Le mode acoustique est en effet un facteur d'instabilités important en LBM, comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 3.1.3. On obtient finalement

$$\Gamma_{ac}^{\text{MRT}} = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{L\sqrt{3}} \right] \Gamma_{ac}^{\text{BGK}}, \quad (3.33)$$

avec ϵ proche de 0. Ce très grand facteur multiplicateur se retrouve également (avec une expression légèrement différente) pour le MRT 2D (Lallemand et Luo [LL00]). Notons par parenthèse que Dellar [Del03] a montré que la constance des paramètres de relaxation des moments non-hydrodynamiques dans les modèles de type MRT (ce qui inclut donc, dans le cas du MRT classique, le temps lié à ξ) empêche l'existence d'une limite incompressible à l'équation de Boltzmann sur réseau pour $Ma \rightarrow 0$. Pire, une divergence en $\mathcal{O}(Ma^{-1})$ est même observée pour Ma suffisamment faible. La solution apportée par Dellar consiste à assigner à chaque moment non-hydrodynamique un *nombre de Reynolds fantôme*, très petit devant le nombre de Reynolds de l'écoulement (ou vu autrement, une *viscosité fantôme* constante et très grande devant la viscosité de cisaillement). Par conséquent, les temps de relaxation non-hydrodynamiques deviennent dépendants du pas d'espace/temps exactement comme $\bar{\tau}_g$ et la divergence est supprimée. Appliqué au MRT de D'Humières, cela aurait pour effet de garder constante (mais toujours à une valeur potentiellement très grande) la viscosité de volume par rapport au pas d'espace/temps.

Ajoutons que ce type de relaxation des moments d'ordre 2 avec son paramétrage à forte viscosité de volume associé se retrouve également dans les études en D3Q27 à temps de relaxation multiples (voir [Sug+15 ; Sti+11 ; KS16] entre autres). Il est aussi important de noter que cette organisation de la collision n'est pas seulement liée au produit scalaire utilisé pour l'orthogonalisation de la base des moments : elle est également retrouvée

dans des modèles de type MRT pour lesquels l'orthogonalisation est fondée sur le produit scalaire pondéré (en lieu et place du produit scalaire non pondéré pour le MRT classique). Le lecteur pourra se référer au travail récent de Fakhari *et al.* en D3Q27 [FBL17] pour s'en convaincre.

Précisons tout de même qu'il existe une étude de Xu et Sagaut [XS11], étudiant le MRT D2Q9 classique [LL00] dans le cas particulier où la viscosité de volume est choisie égale à la viscosité de cisaillement. Les auteurs de l'article observent une très grande instabilité du MRT avec un tel paramétrage. L'objectif de ce travail est d'optimiser, via une analyse linéaire, les paramètres libres du MRT afin de minimiser les erreurs de dissipation, le tout sous la contrainte de garder une faible viscosité de volume. Les paramètres obtenus sont très différents en fonction de la présence ou non d'un écoulement moyen. Sans écoulement de base et pour une viscosité de volume et cisaillement très faibles, la relaxation est quasi équivalente à la relaxation TRT décrite plus bas. Bien que cette étude soit restreinte au cas du D2Q9, les résultats n'en sont pas moins intéressants et mériteraient une extension en trois dimensions et pour d'autres systèmes de moments que celui des MRT inspirés de D'Humières.

- Celle de la méthode TRT : comme nous avons vu que les bases TRT et MRT coïncidaient, la seule différence avec la famille de combinaisons décrite au premier point réside dans les temps de relaxation. **En TRT, les 6 moments d'ordre 2 du MRT sont relaxés avec le même temps de relaxation hydrodynamique $\bar{\tau}_g$** , fixé par la viscosité de cisaillement. Par analogie avec le point précédent, on peut écrire

$$(\varphi_1)_\alpha = 19(c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2) - 30 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

$$(\varphi_9)_\alpha = 2c_{\alpha x}^2 - c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.35)$$

$$(\varphi_{11})_\alpha = c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.36)$$

$$(\varphi_{13})_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha y} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.37)$$

$$(\varphi_{14})_\alpha = c_{\alpha y} c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.38)$$

$$(\varphi_{15})_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

On en déduit immédiatement

$$\left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{TRT}} = \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{BGK}} = \frac{2}{3}, \quad (3.41)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{TRT}} = \Gamma_{ac}^{\text{BGK}}. \quad (3.42)$$

En TRT, tous les tenseurs d'ordre pair (incluant donc les composantes du tenseur des contraintes) sont relaxés avec $\tau^+ = \bar{\tau}_g$, tandis que les tenseurs impairs le sont avec un temps non-hydrodynamique τ^- , fixé par des considérations numériques. On rappelle que pour le modèle TRT, la collision s'écrit

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - (s^+ g_\alpha^{neq+} + s^- g_\alpha^{neq-}) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_g} g_\alpha^{neq+} + \frac{1}{\tau^-} g_\alpha^{neq-} \right), \quad (3.43)$$

avec $g_\alpha^{neq\pm}$ défini par l'équation (3.17). Les paramètres de relaxation sont liés, en unités LBM, par

$$\Lambda = \left(\tau^+ - \frac{1}{2} \right) \left(\tau^- - \frac{1}{2} \right) = \frac{\nu}{c_s^2} \left(\tau^- - \frac{1}{2} \right), \quad (3.44)$$

où Λ est une constante nommée *paramètre magique*, dont la valeur détermine certaines propriétés numériques du schéma : on peut choisir $\Lambda = \frac{1}{4}$ pour une stabilité "optimale" [KGT15] ou encore $\Lambda = \frac{3}{16}$ comme dans [Luo+11].

- Celles inspirées par les polynômes de Hermite : **les 6 moments d'ordre 2 sont considérés comme hydrodynamiques** (3 en 2D) et son relaxés avec $\bar{\tau}_g$. Ce type de base peut être trouvé dans plusieurs études à temps de relaxation multiples de type MRT, comme les modèles de Dellar [DEL02 ; Del03 ; Del06] en 2D et Adhikari et Succi [AS08] en 2D et 3D. On peut exprimer leurs vecteurs de base correspondant à ces moments d'ordre 2 "de Hermite", en les notant φ (dans l'ordre proposé dans le D3Q19 de [AS08]) et faire apparaître leurs temps de relaxation associés comme suit :

$$(\varphi_{xx})_\alpha = \frac{1}{c_s^2} (c_{\alpha x}^2 - c_s^2) \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

$$(\varphi_{yy})_\alpha = \frac{1}{c_s^2} (c_{\alpha y}^2 - c_s^2) \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.46)$$

$$(\varphi_{zz})_\alpha = \frac{1}{c_s^2} (c_{\alpha z}^2 - c_s^2) \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.47)$$

$$(\varphi_{xy})_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha y} \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.48)$$

$$(\varphi_{yz})_\alpha = c_{\alpha y} c_{\alpha z} \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.49)$$

$$(\varphi_{xz})_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha z} \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

Aucun moment lié au tenseur des contraintes n'est relaxé avec un paramètre libre. Ceci provient du fait que, comme nous l'avons vu dans la première partie, les moments hors équilibre générés par les polynômes de Hermite du second degré sont proportionnels aux les composantes du tenseur des contraintes visqueuses : le comportement nécessairement isotrope de ce dernier impose que ses 6 composantes indépendantes (en 3 en 2D) soient relaxées avec un même paramètre, fixé de fait par la viscosité de cisaillement.

Il vient immédiatement le rapport entre viscosités de volume et de cisaillement pour les modèles dont les moments d'ordre 2 coïncident avec les moments de Hermite :

$$\left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{MRT,Herm}} = \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{BGK}} = \frac{2}{3}, \quad (3.52)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{MRT,Herm}} = \Gamma_{ac}^{\text{BGK}}. \quad (3.53)$$

Nous en concluons que du point de vue de l'acoustique à l'ordre dominant, ces modèles sont équivalents au BGK et ne sacrifient donc pas la propagation acoustique.

Par la suite, d'autres modèles à temps de relaxation multiples ont émergé, faisant apparaître des formes de collision assez différentes des modèles de la famille MRT. Ce sont ces modèles que nous allons étudier à présent. Toutefois, nous verrons que des idées directrices issues du formalisme historique de l'équation de Boltzmann généralisée y sont bien sûr reprises. Chaque auteur construisant son modèle avec des motivations qui lui sont propres, cela aboutit à l'apparition de nouveaux formalismes parfois éloignés en apparence de celui dont nous venons de discuter. Toutefois, nous verrons que certains auteurs ont montré, par un travail unificateur, qu'il était bien souvent possible de réinterpréter ces méthodes selon le formalisme de l'équation de Boltzmann généralisée (ou selon une généralisation de cette dernière). Ce travail est malheureusement trop peu fréquent, ce qui complique la tâche de comparaison des divers modèles entre eux.

3.2.3 Modèles de type Cascaded et Cumulant

De nouveaux opérateurs de collision sont apparus dans les années 2000 sous l'impulsion de Geier : nous aborderons ici successivement la méthode **Cascaded Lattice Boltzmann** [GGK06 ; Gei06 ; GGK07] (ensuite corrigée pour donner naissance à la méthode **Factorized Central Moments** [GGK09a ; PB11]) et **Cumulant Lattice Boltzmann** [Gei+15].

Structure algébrique : moments centrés et cumulants.

Afin de tenter une correction des erreurs d'invariance galiléenne des schémas de Boltzmann sur réseau standards, le concept de moments dits *centrés* (**central moments**) est introduit pour la méthode Cascaded et réutilisée dans la méthode Cumulant. Pour m, n, p entiers positifs, les moments centrés discrets $\hat{\kappa}$, d'ordre $m + n + p$ sont définis par Geier comme

$$\hat{\kappa}_{x^m y^n z^p} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} (c_{\alpha x} - u_x)^m (c_{\alpha y} - u_y)^n (c_{\alpha z} - u_z)^p g_{\alpha}, \quad (3.54)$$

avec $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_x, u_y, u_z)$ la vitesse locale du fluide. On pourra également écrire les moments non-centrés comme

$$\kappa_{x^m y^n z^p} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} c_{\alpha x}^m c_{\alpha y}^n c_{\alpha z}^p g_{\alpha}. \quad (3.55)$$

Il y a a priori une infinité de combinaisons de valeurs de m, n, p pour le choix des moments : toutefois, sur un réseau $DdQq$, seuls q moments devront être retenus pour former une base (qui est a priori non orthogonale). Cet aspect est abondamment discuté dans la thèse de Février [Fév14].

Nous aborderons dans un premier temps le cas de la méthode **Cascaded Lattice Boltzmann**. Cette méthode a été reliée au MRT de d'Humières par Asinari [Asi08] : la méthode Cascaded y est réinterprétée comme un modèle MRT comportant une fonction d'équilibre généralisée dépendant à la fois des moments conservés et non conservés. Dans sa thèse, Février [Fév14] intègre cette méthode dans une famille plus générale : celle dite des **schémas à vitesses relatives**.

Nous synthétisons ici les grands axes de construction du modèle Cascaded. Pour cet opérateur, la collision s'écrit, en s'allégeant des coordonnées temporelles et spatiales

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g} + {}^t \mathbf{K} \cdot \mathbf{k} \quad (3.56)$$

où \mathbf{k} est un vecteur de relaxation vers l'équilibre qui devra être déterminé ultérieurement (nous utilisons la notation de l'auteur). La matrice \mathbf{K} est une matrice $q \times q$ représentant la collision. En 2D, les vecteurs qui la composent correspondent à ceux des moments utilisés par Lallemand et Luo [LL00] mais réordonnés différemment (voir [PB09]). Il s'agit donc d'une matrice orthogonale. En 3D (D3Q27), la matrice \mathbf{K} est également obtenue par un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt avec le produit scalaire non-pondéré [PB11] : on retrouve donc une matrice équivalente à celles de modèles de type MRT D3Q27, réordonnée différemment [Sug+15]. Toutefois, il est capital de souligner que, contrairement aux modèles de type MRT, la matrice de collision \mathbf{K} n'est pas la matrice des moments : en effet, ses coordonnées ne correspondent aucunement à la base formée par les polynômes utilisés pour former les moments $\hat{\kappa}$ utilisés dans la méthode Cascaded, ni même à celle formée par les κ . Dans sa thèse, Geier y fait d'ailleurs référence comme étant la matrice des *vecteurs de collision*. Son rôle est de "réordonner" les moments lors de la collision :

on pourrait donc la voir comme une deuxième matrice de changement de base, dont l'espace de départ serait l'espace des moments. Elle est choisie par Geier pour ses propriétés d'invariance de translation et de rotation sur les moments (point largement discuté dans [Gei06]).

C'est précisément cette différence entre \mathbf{K} et la matrice des moments qui cause l'apparition d'une *cascade* pour la collision. Concrètement, la collision est effectuée sur chaque moment par ordre croissant, la collision pour un moment numéroté α dépendant de tous les ordres précédents ($0.. \alpha - 1$). Mathématiquement, cela signifie que **la collision n'est pas diagonale dans l'espace des moments** : plus précisément, la matrice de collision est triangulaire inférieure dans l'espace des moments $\hat{\kappa}$. Par parenthèse, Février montre [Fév14] qu'il est possible de choisir une base de moments telle que la collision aux moments centrés soit diagonale, c'est à dire sans phénomène de *cascade*. Toutefois, les deux modèles ne seraient pas algébriquement équivalents.

Chaque élément de \mathbf{k} (qui est formé d'arrangements de moments centrés hors équilibre) est relaxé à une fréquence qui lui est propre : une fois de plus, certaines fréquences seront contraintes par la viscosité, les autres resteront libres et seront choisies arbitrairement égales à 1 (mise à l'équilibre à chaque itération), ce qui en fait indirectement un modèle à temps de relaxation multiple. Pour plus d'arguments, le lecteur pourra consulter [Gei08 ; GGK07 ; Gei06] concernant le phénomène d'*aliasing* en LBM.

Une fois la collision en cascade effectuée, le vecteur \mathbf{k} est entièrement déterminé et l'étape d'advection peut suivre. Notons enfin qu'une hyperviscosité non-physique a été découverte par Geier dans sa version originelle du modèle (au niveau des moments à l'équilibre) : sa correction a donné naissance à la méthode dite **Factorized Central Moments** [GGK09a ; PB11]. Par ailleurs, il s'agit d'une méthode vouée à être appliquée en *D3Q27* et non en *D3Q19*.

Le modèle **Cumulant Lattice Boltzmann** se base également sur les moments centrés. Cette méthode englobe la précédente : négliger certains termes dans les moments d'ordre élevé permet de déduire le modèle Factorized Central Moments. Les cumulants sont des quantités classiques en statistiques et en théorie des probabilités, qui satisfont des propriétés d'indépendance statistique entre les différents degrés de liberté du système et, par construction, d'invariance par changement de repère. Les cumulants sont identiques aux moments centrés jusqu'à l'ordre 3 et s'obtiennent à l'ordre 4 et au delà par une formule de récurrence les liant à ces derniers [Smi95]. Dans la méthode Cumulant Lattice Boltzmann, ce sont des cumulants qui sont relaxés vers un équilibre. Par conséquent, il y a deux étapes supplémentaires par rapport à la méthode Cascaded : une première pour transformer les moments centrés en cumulants, et une seconde pour effectuer la transformation inverse après la collision. À nouveau, certains cumulants seront relaxés à l'équilibre à chaque itération.

Influence sur l'acoustique de la relaxation des moments centrés d'ordre 2 pour les modèles Cascaded et Cumulant.

Concernant la méthode **Cascaded**, nous avons vu que la matrice de collision \mathbf{K} qui réordonne les moments centrés lors de la collision, correspondait en 2D comme en 3D à une matrice de moments de type MRT D3Q27, orthogonalisée avec le produit scalaire non pondéré. De la même façon que pour la famille des modèles inspirés du MRT classique, on retrouve pour le cascaded le fait que **seuls 5 moments d'ordre 2 sont considérés comme hydrodynamiques** (2 en 2D) et son relaxés avec $\bar{\tau}_g$. Une fois de plus, la viscosité de volume est contrôlée par un paramètre libre (que nous nommerons ici s_b), généralement

fixé à une valeur unité [GGK06 ; PB11 ; GUK13 ; Gei+15]. Nous écrivons ici les vecteurs de collision d'ordre 2 tels que présentés dans [PB11] en 3D. Conformément à cette étude, nous les notons \mathbf{K}_i ($i = 4..9$). On obtient ainsi les correspondances suivantes

$$(\mathbf{K}_4)_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha y} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.57)$$

$$(\mathbf{K}_5)_\alpha = c_{\alpha x} c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.58)$$

$$(\mathbf{K}_6)_\alpha = c_{\alpha y} c_{\alpha z} \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.59)$$

$$(\mathbf{K}_7)_\alpha = c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.60)$$

$$(\mathbf{K}_8)_\alpha = c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 - 2c_{\alpha z}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}_g \quad (3.61)$$

$$(\mathbf{K}_9)_\alpha = (c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2) - 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s_b} = \frac{9\xi}{5 - 9c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (3.62)$$

Si on considère égaux les paramètres libres s_1 de D'Humières et s_b de Geier, il vient immédiatement :

$$\left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{Casc}} = \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{MRT}}, \quad (3.63)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{Casc}} = \Gamma_{ac}^{\text{MRT}}. \quad (3.64)$$

Les paramètres de relaxation standards de la méthode Cascaded impliquent que seuls les moments liés à $\mathbf{K}_4..K_8$ sont relaxés avec un temps de relaxation différent de 1. Il en résulte en particulier que $s_b = 1$: ainsi, la viscosité de volume y est encore plus élevée que pour le paramétrage standard du MRT de D'Humières ($s_1 = 1.19$). Ainsi, la méthode Cascaded, dans son paramétrage usuel, sacrifie aussi la propagation acoustique. À notre connaissance, aucun auteur n'a étudié la stabilité d'un tel modèle en prenant $1/s_b = \bar{\tau}_g$, permettant de retrouver une viscosité de volume identique à celle du modèle BGK.

Pour le modèle **Cumulant**, le constat est identique : en effet, cumulants et moments centrés sont égaux jusqu'à l'ordre 3 et leur relaxation est similaire à celle du Cascaded. On retrouve bien dans l'analyse asymptotique de [Gei+15] le temps de relaxation lié à la viscosité de volume, pris égal à 1 dans les simulations. Ainsi,

$$\left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{Cum}} = \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{Casc}}, \quad (3.65)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{Cum}} = \Gamma_{ac}^{\text{Casc}}, \quad (3.66)$$

ce qui montre que le modèle Cumulant, dans son paramétrage usuel, sacrifie également la propagation acoustique.

3.2.4 Modèles régularisés.

Structure algébrique.

Le terme de *régularisation* correspond, dans le vocabulaire de la communauté LBM, à la mise à l'équilibre à chaque itération d'un ou plusieurs moments hors équilibre d'ordre supérieur à 2 (c'est à dire non-hydrodynamique). Par définition, du point de vue d'un formalisme de type MRT, ceci correspond à l'utilisation d'un temps de relaxation unitaire pour ces moment lors de la collision (voir Eq. 3.13). Cela revient également à annuler (on

lit souvent le terme *filtrer*, par abus de langage) un ou plusieurs moments hors équilibre dans la projection de la fonction de distribution avant d'appliquer une collision BGK.

Latt et Chopard ont présenté un premier modèle dit *régularisé* [LC06 ; Lat07]. Les premiers vecteurs de base de ce modèle ne sont autres que les polynômes de Hermite de degré inférieur ou égal à 2 : en réalité, ce modèle régularisé est exactement équivalent au modèle utilisé par Dellar [DEL02 ; Del03 ; Del06] ou Adhikari et Succi [AS08] cités plus haut, dans lesquels tous les temps de relaxation non-hydrodynamiques seraient pris égaux et de valeur unité [Lat07]. Cela correspond à la mise à l'équilibre (c'est à dire à la valeur 0 puisque la fonction d'équilibre n'est développée qu'à l'ordre 2) de tous les moments non-hydrodynamiques lors de la collision. N'utiliser que deux temps de relaxation implique ici que la connaissance exacte des vecteurs de base au delà des moments d'ordre 2 n'est pas nécessaire. Ce modèle fait donc indirectement partie de la famille des modèles "de type MRT" : nous avons choisi par souci de clarté de l'en séparer, car il n'a pas été construit dans cet esprit. Toutefois, il s'agit bien indirectement d'un modèle à temps de relaxation multiples.

Un travail récent de Mattila *et al.* [MPH17] propose encore une approche différente, basée sur une régularisation *récursive*. Ce travail est à placer dans la lignée des travaux de He et Luo [HL97], Shan *et al.* [SYC06 ; SC07] ou encore Zhang *et al.* [ZSC06] sur les relations entre les modèles de Boltzmann sur réseau et l'équation de Boltzmann à vitesse discrète via les développements en polynômes de Hermite. Il consiste également en une extension du modèle LBM régularisé de Latt et Chopard. Alors que ces derniers régularisent la totalité des moments hors équilibre d'ordre supérieur à 2, Mattila *et al.* proposent de séparer partie advective et partie diffusive des moments hors équilibre d'ordre élevé, puis de régulariser la seule partie diffusive. Cette séparation est faite grâce, à nouveau, à un formalisme de moments centrés : en effet, ceci permet d'isoler la partie diffusive des moments puisqu'elle soustrait par définition au moment complet sa partie advective. Un exemple simple se trouve avec le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Pi}_g$ en LBM : on a

$$\boldsymbol{\Pi}_g = \sum_{\alpha} (\mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha}) g_{\alpha} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} + 2\epsilon\mu \mathbf{S} + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \mathcal{O}(Ma^3), \quad (3.67)$$

où $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ représente la partie advective. Si on étudie à présent le tenseur des contraintes centré $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$,

$$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_g = \sum_{\alpha} (\mathbf{c}_{\alpha} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{c}_{\alpha} - \mathbf{u}) g_{\alpha} = p \mathbf{I} + 2\epsilon\mu \mathbf{S} + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \mathcal{O}(Ma^3). \quad (3.68)$$

Ce procédé fait apparaître une relation de récurrence entre moments hors équilibre à un ordre n et ceux des ordres inférieurs, d'où le nom de régularisation *récursive* : le moment d'ordre 2 $\boldsymbol{\Pi}_g^{(1)}$ est utilisé pour reconstruire les moments hors équilibre d'ordre supérieurs. Grâce à ces relations, la fonction de distribution hors équilibre est reconstruite tout en régularisant (c'est à dire en annulant) les parties diffusives des moments hors équilibre d'ordre supérieur à 2. Notons que ces modèles reposent sur une propriété remarquable des réseaux D2Q9 et D3Q27 : il est possible dans ces deux cas de construire une base entièrement constituée de polynômes de Hermite, ce qui est impossible pour le D3Q15 ou le D3Q19 [Mal15].

Une telle méthode peut bien sûr être réécrite selon le formalisme des schémas à vitesses relatives (ce travail dépasse le cadre de notre étude). Elle pourrait très probablement aussi être réinterprétée (nous n'avons pas entrepris ici la démonstration) en tant que modèle de type MRT avec fonction d'équilibre généralisée, comme a pu l'être le modèle Cascaded [Asi08].

Influence de la relaxation régularisée sur l'acoustique.

Dans ces modèles, les vecteurs correspondant aux moments d'ordre 2 coïncident avec les polynômes de Hermite de degré 2, comme dans le cas de certaines approches de type MRT citées plus haut. Ainsi, les **6 moments d'ordre 2 sont considérés comme hydrodynamiques** (3 en 2D) et son relaxés avec $\bar{\tau}_g$. Aucun moment lié au tenseur des contraintes n'est relaxé avec un paramètre libre. On obtient immédiatement

$$\left[\frac{\xi}{\nu}\right]^{\text{Reg,Herm}} = \left[\frac{\xi}{\nu}\right]^{\text{MRT,Herm}} = \left[\frac{\xi}{\nu}\right]^{\text{BGK}} = \frac{2}{3}, \quad (3.69)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{Reg,Herm}} = \Gamma_{ac}^{\text{MRT,Herm}} = \Gamma_{ac}^{\text{BGK}}. \quad (3.70)$$

La propagation acoustique n'y est donc pas dégradée à l'ordre dominant par rapport au modèle BGK.

3.3 Choix d'un modèle à temps de relaxation multiple

L'objectif de cette section est de sélectionner un modèle à temps de relaxation multiple, parmi ceux décrits ci-dessus, qui sera utilisé pour la suite de notre étude. Nous n'étudierons pas ici les modèles basés sur la régularisation récursive ni les modèles Cascaded ou Cumulant.

Dans un premier temps, nous établirons la liste des modèles D3Q19 que nous comparerons. En particulier, nous introduirons une réalisation particulière de modèles à temps de relaxation multiple de type MRT, dont nous vérifierons numériquement les propriétés de dispersion et de dissipation effectives pour une onde acoustique. Ensuite, nous comparerons les modèles pré-sélectionnés en nous basant avant tout sur un critère de stabilité. Cette composante est absolument cruciale du point de vue industriel. Nous utiliserons pour ce faire deux cas test : la classique double couche de cisaillement périodique [MB97; Ric+09; Del14] ainsi que la propagation d'un pulse acoustique sous-résolu dans un domaine périodique avec la présence d'un champ moyen à $Ma = 0.2$.

Nous évaluerons ici les capacités des modèles D3Q19 suivants (auxquels nous ajouterons, par principe, le modèle BGK) :

- Le modèle TRT (équation (3.43)) avec $\Lambda = 3/16$ [Luo+11].
- Le modèle MRT de D'humières [DHu02] dans lequel la fréquence de relaxation libre s_1 liée à la viscosité de volume est prise intentionnellement égale à $s_9 = 1/\bar{\tau}_g$. Les autres paramètres de relaxation sont pris à leur valeur conseillée dans [DHu02]. Il s'agit donc d'un modèle MRT "modifié", que nous nommerons **MRT^{mod}**.
- Le modèle régularisé de Latt et Chopard [LC06; Lat07].
- Un modèle alternatif de type MRT, noté **MRT^H** dans la suite, dans lequel la combinaison entre moments d'ordre 2 et temps de relaxation associés est inspirée des polynômes de Hermite (que nous introduirons dans la section 3.3.1). Nous étudierons également ses propriétés acoustiques.

Le point commun entre ces modèles est que leur viscosité de volume à l'ordre dominant est identique à celle du modèle BGK, c'est à dire que ces modèles ne sacrifient pas la propagation acoustique pour des raisons de stabilisation numérique.

3.3.1 Présentation d'un opérateur de type MRT alternatif : le modèle MRT^H

Ce modèle est basé sur la matrice de transformation donnée dans l'article de Adhikari et Succi [AS08], que nous reportons ci-dessous (3.71). Nous nommons cette matrice \mathbf{M} et donnons, dans la colonne séparée à gauche, le nom des moments qu'ils génèrent. Rappelons que $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$. On obtient, en D3Q19,

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccccccccccccccc} \rho & 1 \\ j_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_y & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ j_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \Pi_{xx} & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \Pi_{yy} & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \Pi_{zz} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \Pi_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \Pi_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho' & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j'_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j'_y & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ j'_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \rho'' & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j''_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j''_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ j''_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \rho''' & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (3.71)$$

Pour une version D2Q9 de cette matrice, on pourra se référer à [AS08 ; DEL02].

Les vecteurs correspondant aux quantités "primées" sont ceux qui génèrent les moments non-hydrodynamiques. Adhikari et Succi remarquent que ces vecteurs se divisent en deux catégories : ceux générant ce qu'ils nomment des *densités fantômes* (ρ' , ρ'' et ρ''') et ceux générant des *quantités de mouvement fantômes* ($j'_{x,y,z}$ et $j''_{x,y,z}$). La dénomination *densité fantôme* est justifiée par le fait que de tels moments possèdent les mêmes symétries qu'une quantité scalaire, et que les *quantités de mouvement fantômes* représentent les flux de ces moments. Le lecteur pourra se référer à l'article original pour de plus amples informations [AS08].

Avec cette matrice, la collision s'écrit classiquement dans le formalisme MRT par

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)) , \quad (3.72)$$

avec $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{g}$, $\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M}\mathbf{g}^{eq}$ et \mathbf{S} la matrice diagonale des fréquences relaxation. La matrice de transformation est construite de façon à ce que les vecteurs de base générant les moments d'ordre 2 coïncident avec les 6 polynômes de Hermite de degré 2 (ce qui justifie l'appellation MRT^H). Il en résulte que les 6 moments hors équilibre d'ordre 2, liés aux 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes visqueuses, peuvent être relaxés par la même fréquence s liée à la viscosité de cisaillement

Concernant les moments non-hydrodynamiques, nous faisons le choix d'assigner un temps de relaxation identique pour toutes les densités fantômes, ainsi qu'un autre distinct pour toutes les quantités de mouvement fantômes. Ceci est un choix arbitraire mais a pour intérêt de limiter le coût calcul tout en tirant parti intuitivement des symétries du modèle. On obtient ainsi

$$\mathbf{S} = \text{diag}(0, 0, 0, 0, s, s, s, s, s, s, s, s_{\rho'}, s_{j'}, s_{j'}, s_{j'}, s_{j'}, s_{j'}, s_{j'}, s_{\rho'}) \quad (3.73)$$

De nombreux tests nous ont amené à retenir les valeurs $s_{\rho'} = 1.2$ et $s_{j'} = 1.9$, avec toujours $s = 1/\bar{\tau}_g = \nu/c_s^2 + 1/2$ en unités LBM. La distribution d'équilibre est choisie égale à sa valeur classique, c'est à dire à son développement en polynôme de Hermite tronqué à l'ordre 2.

Pour cette collision, on a bien

$$\left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{MRT}^H} = \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{\text{BGK}}, \quad (3.74)$$

et

$$\Gamma_{ac}^{\text{MRT}^H} = \Gamma_{ac}^{\text{BGK}}, \quad (3.75)$$

ce qui permet de ne pas sacrifier la propagation acoustique tout en améliorant grandement la stabilité.

Notons que le modèle régularisé de Latt et Chopard correspond rigoureusement à un modèle MRT^H pour lequel on choisirait tous les temps de relaxation non-hydrodynamiques égaux à 1. De même, si tous les temps de relaxation du modèle MRT^H sont pris égaux à s , alors on retrouve rigoureusement le modèle BGK.

3.3.2 Propriétés de dispersion et dissipation d'une onde plane pour le modèle MRT^H

Nous vérifions dans un premier temps les propriétés linéaires liées à la dispersion et à la dissipation temporelle d'une onde plane infinie. Il s'agit de la situation étudiée par l'analyse linéaire de Von Neumann, que l'on trouve par exemple dans l'étude de Marié *et al.* [MRS09]. Nous effectuons ce premier test sans champ moyen et pour une onde dirigée selon l'axe x . Pour tracer les courbes de viscosité effective (dissipation) et de vitesse du son effective (dispersion), nous utilisons exactement la méthode de [MRS09 ; Mar08].

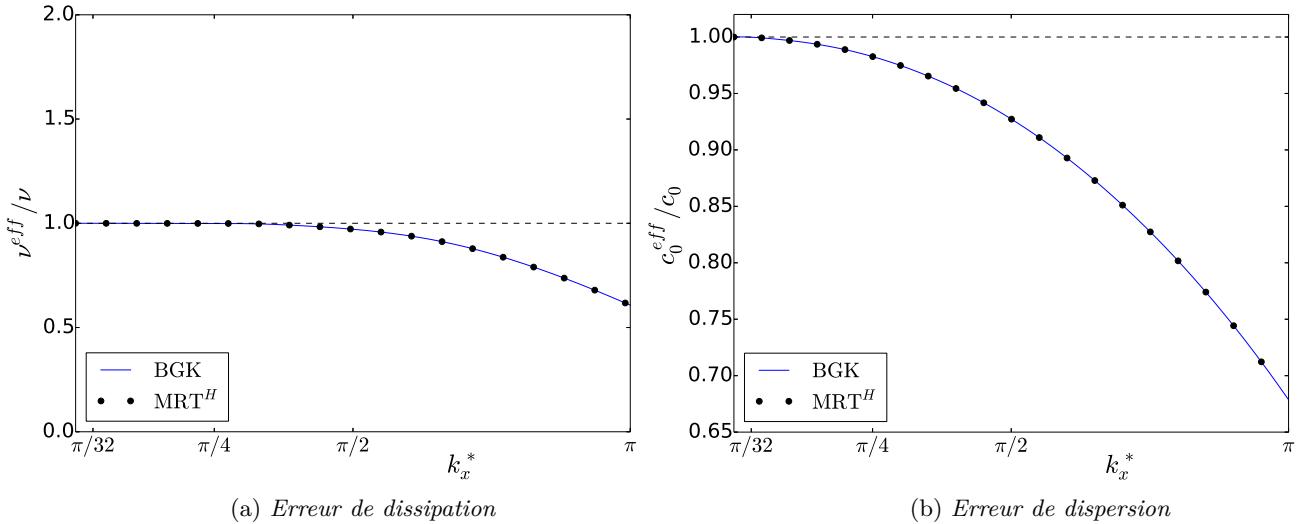


FIGURE 3.3 – Erreurs de dissipation (viscosité effective du calcul par rapport à la viscosité moléculaire) et de dispersion (vitesse du son effective du calcul par rapport à la vitesse du son standard) pour les modèles BGK et MRT^H, en fonction du nombre d'onde longitudinal $k_x^* = k_x \Delta x$.

On retrouve exactement sur la figure 3.3 les prédictions théoriques de [MRS09] concernant le modèle BGK. Les courbes se superposent aussi parfaitement avec celles du modèle

MRT^H. Notons toutefois que ce cas de l'onde plane dirigée selon un axe et sans écoulement moyen fait figure de cas particulier. Si la dissipation du mode acoustique n'est pas modifiée à l'ordre dominant, elle peut l'être à des ordres supérieurs, pour d'autres orientations du vecteur d'onde et avec la présence d'un champ moyen important. Nous n'avons pas étudié ces cas dans ce mémoire. Quoiqu'il arrive, il s'agit d'effets apparaissant uniquement pour les grands nombres d'onde.

3.3.3 Applications numériques : comparaison avec d'autres opérateurs

Nous étudions d'abord la double couche de cisaillement périodique [MB97; Ric+09; Del14]. Pour ce cas test classique de stabilité non-linéaire, nous utilisons un domaine pseudo bidimensionnel périodique de taille $[128\Delta x, 128\Delta x, \Delta x]$ avec $\Delta x = 1/128$ m. On choisit $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$ m²/s et une vitesse de référence u_0 en unités LBM telle que $Ma = 0.2$, soit $u_0 = 0.2c_s$. On obtient, par la condition CFL, $\Delta t \simeq 9.0 \cdot 10^{-4}$ s. On note également $t^* = t/\Delta t$. Ces données fournissent $\bar{\tau}_g = 1/2 + 2.22 \cdot 10^{-3}$. La mise en donnée initiale est celle utilisée par Minion et Brown [MB97; Ric+09; Del14], transcrive en unités LBM

$$\begin{cases} u_x(x, y, t_0) = u_0 \tanh(\kappa(y - 1/4)), & y \leq \frac{1}{2} \\ & = u_0 \tanh(\kappa(3/4 - y)), & y > \frac{1}{2} \\ u_y(x, y, t_0) = \delta u_0 \sin(2\pi(x + 1/4)) \\ u_z(x, y, t_0) = 0 \\ \rho(x, y, t_0) = 1 \end{cases} \quad (3.76)$$

avec

$$\delta = 0.05 \quad \kappa = 80 \quad u_0 = 0.2c_s . \quad (3.77)$$

Nous affichons sur les figures 3.4 et 3.5 la norme de la vorticité Ω à deux pas de temps différents pour les 5 modèles considérés.

La figure 3.5 ne fait plus apparaître que deux modèles, les autres ayant divergé antérieurement. Une des conclusions que l'on peut tirer de ce premier cas test est que le modèle MRT^{mod} s'avère être le plus instable, il est le premier à diverger. Viennent ensuite le modèle BGK et le modèle TRT. À $t^* = 1250$, le modèle régularisé de Latt commence à se comporter de manière très non-physique et finit par diverger rapidement. Seul le modèle MRT^H reste indéfiniment stable dans cette simulation. Notons également que pour une telle valeur de $\bar{\tau}_g$ proche de $1/2$, le modèle TRT est quasi insensible à la valeur de Λ . Seule une valeur de Lambda quasi nulle (c'est à dire proche de sa valeur coïncidant avec le modèle BGK, bien loin des valeurs usuelles $3/16$ ou $1/4$) change de manière visible le résultat.

Nous étudions ensuite le cas d'un pulse de pression sous écoulement moyen à $Ma = 0.2$. Pour ce cas test, nous nous plaçons en conditions réelles, c'est à dire avec une viscosité cinématique $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m²/s et la vitesse du son $c_0 = 340$ m/s. Le domaine est pseudo bidimensionnel périodique de taille $[200\Delta x, 200\Delta x, \Delta x]$ avec $\Delta x = 0.2$ m. Ces données fournissent $\Delta t \simeq 3.4 \cdot 10^{-4}$ s et $\bar{\tau}_g = 1/2 + 3.82 \cdot 10^{-7}$, ce qui nous permet de se placer volontairement au limites de la stabilité de la méthode. Le profil initial à $t_0 = 0$ est donné, en unité LBM, par

$$\begin{cases} \rho(t_0) = 1 + \rho'(t_0) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (3.78)$$

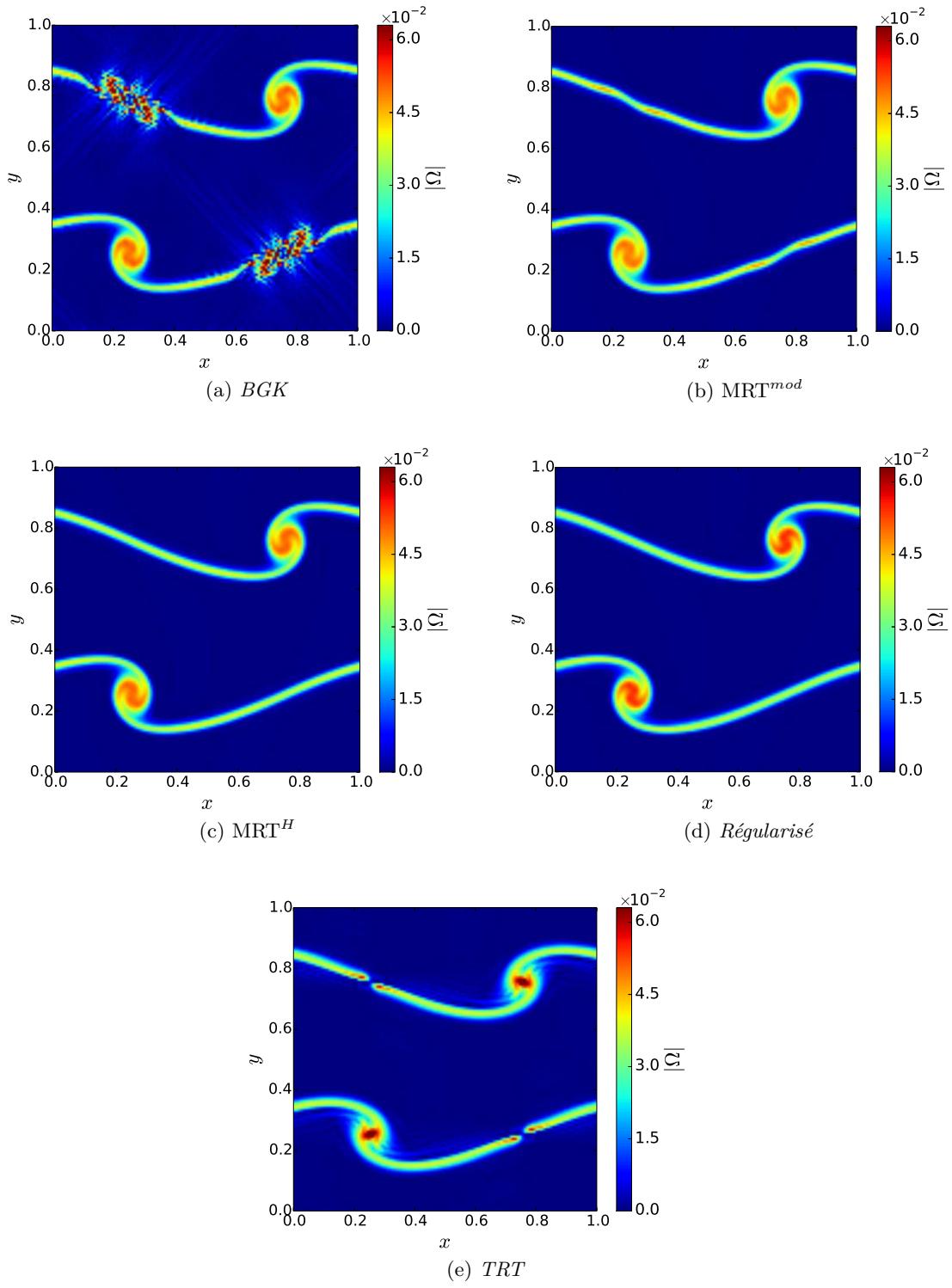


FIGURE 3.4 – Double couche de cisaillement périodique à $t^* = 750$.

avec

$$\begin{aligned} \rho'(x, y, t_0) &= \epsilon \exp(-\alpha r^2), \quad \epsilon = 2 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha = \frac{\ln(2)}{b^2}, \\ b &= 0.2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

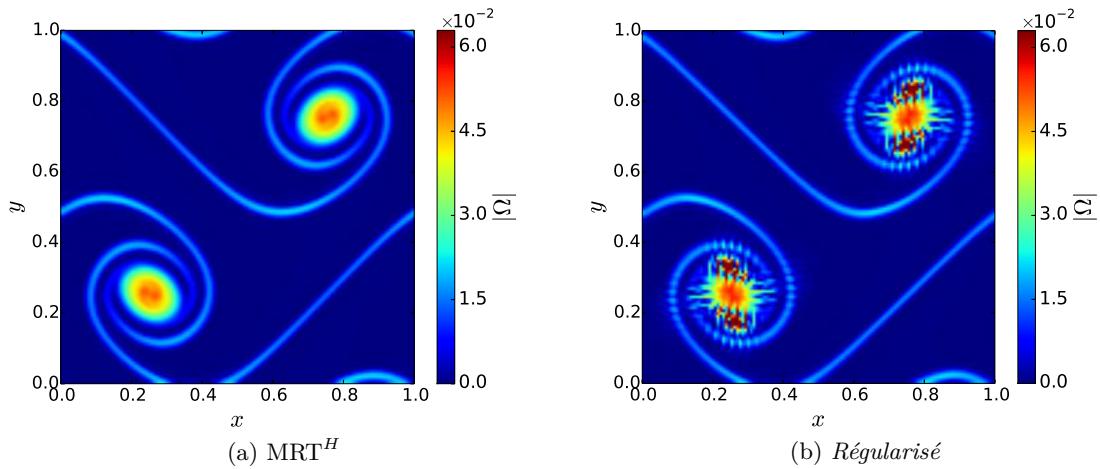


FIGURE 3.5 – Double couche de cisaillement périodique à $t^* = 1250$. Les modèles BGK, MRT^{mod} et TRT ont divergé à une itération antérieure. Le modèle régularisé est proche de la divergence. Le modèle MRT^H reste stable dans cette simulation.

L'écoulement moyen \mathbf{u}_0 est choisi tel que $Ma = 0.2$, c'est à dire, en unités LBM, $|\mathbf{u}_0| = u_0 = 0.2c_s$. Nous étudierons deux cas :

- Un écoulement moyen le long de l'axe x , $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0)_x = (u_0, 0, 0)$.
 - Un écoulement moyen de direction diagonale xy , $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0)_{xy} = (u_0/\sqrt{2}, u_0/\sqrt{2}, 0)$.

Cette mise en donnée est volontairement particulièrement sous-résolue. Nous résumons dans la table 3.1, pour chacune des directions de l’écoulement moyen, les limites de stabilité des modèles de collision testés. Nous désignons par N_{NaN} l’itération à laquelle la simulation diverge. Nous représentons également le champ de densité pour les différents modèles dans les premières itérations sur la figure 3.6, pour le cas de l’écoulement moyen diagonal.

Modèle	$N_{NaN} (\mathbf{u}_0)_x$	$N_{NaN} (\mathbf{u}_0)_{xy}$
BGK	2000	2400
MRT ^H	14700	24300
MRT ^{mod}	800	800
Régularisé	1400	1500
TRT	> 100000	1900

TABLE 3.1 – Itération de divergence du calcul pour le pulse de pression dans un champ moyen à $Ma = 0.2$, en fonction de la direction du champ moyen.

Il est intéressant de noter que, même s'il diverge très rapidement dans le cas de l'écoulement moyen diagonal, le modèle TRT se comporte de façon excellente sur les premières itérations. De même que pour le cas de la double couche périodique, les résultats du modèle TRT sont quasi insensibles à la valeur de Λ pour une telle valeur de $\overline{\tau}_q$.

En conclusion, ce test montre que le modèle MRT^H que nous proposons est à nouveau, de loin, le plus satisfaisant : c'est donc ce modèle à temps de relaxation multiples qui sera conservé pour la suite de notre étude.

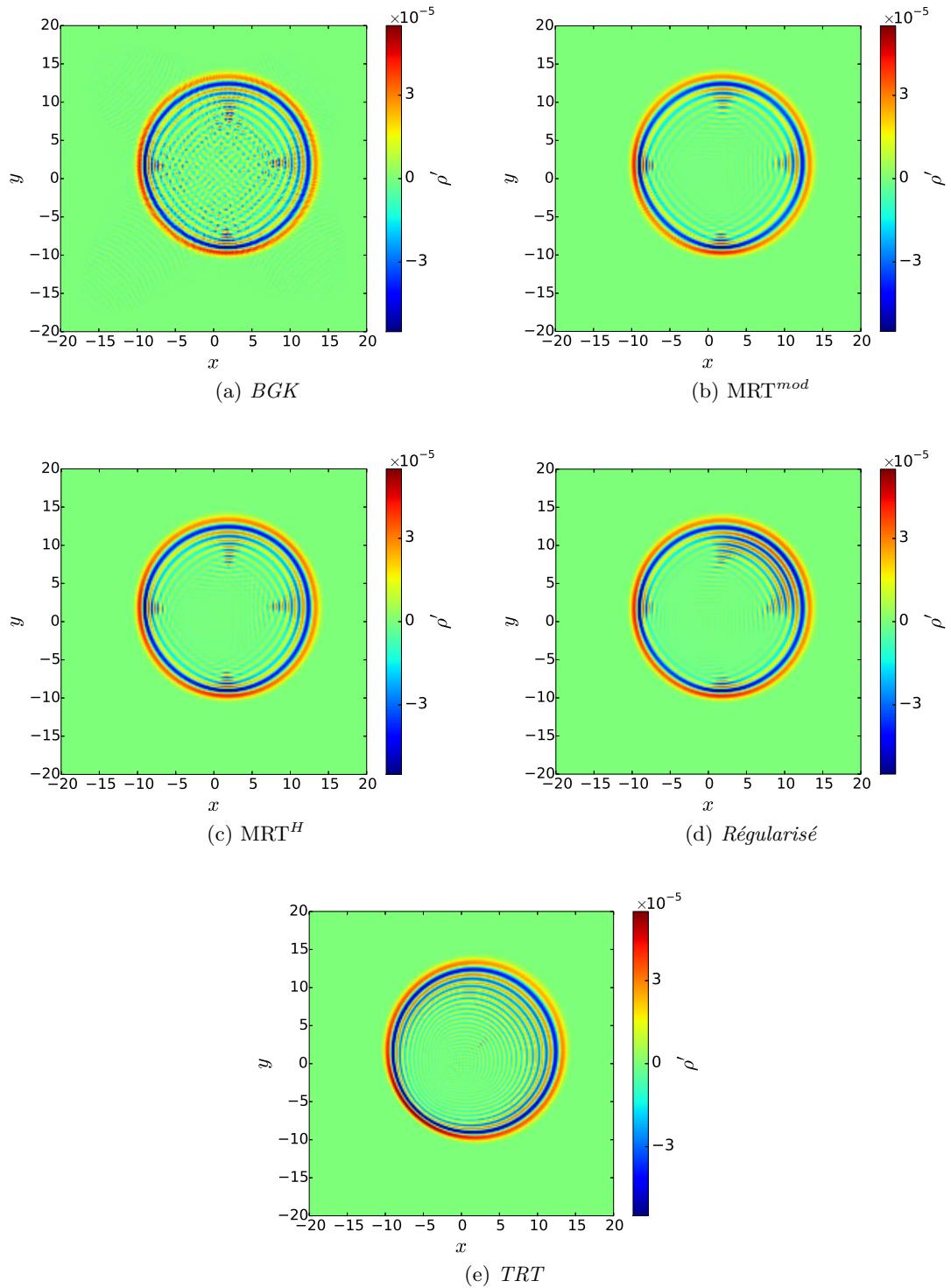


FIGURE 3.6 – Pulse de pression sous-résolu avec un écoulement moyen dans la direction diagonale tel que $Ma = 0.2$, à $t^* = 100$.

3.4 Entropic Lattice Boltzmann Method (ELBM)

Les premiers travaux sur les méthodes entropiques de Boltzmann sur réseau datent du tournant des années 2000, sous l'impulsion de deux groupes distincts : Karlin *et al.* [Kar+98 ; KFÖ99] (formant *l'école de Zürich*) et Boghosian *et al.* [Bog+01 ; Bog+03] (formant *l'école de Boston*). On pourra également citer le travail de Wagner [Wag98] parmi les études fondatrices. Ces travaux ont été menés dans le but ultime d'obtenir des modèles LBM inconditionnellement stables, y compris pour de grands nombres de Reynolds. L'appellation *entropique* tient au fait que les auteurs exploitent dans ces modèles les liens entre l'équation de Boltzmann sur réseau et l'équation continue de Boltzmann, et plus particulièrement la notion d'entropie qui intervient dans le Théorème H de Boltzmann (voir section 1.2.2 pour un aperçu très rapide).

Une des motivations, parmi d'autres, se trouve dans l'aspect défini positif de la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann : étant donnée la forme de la fonction H (Eq. (1.25)), toute solution de l'équation f de Boltzmann est nécessairement strictement positive. Or il s'avère en pratique que dans les algorithmes de Boltzmann sur réseau, la fonction de distribution n'est pas toujours strictement positive, ce qui est intuitivement non-physique et, qui plus est, source d'instabilités. Les auteurs des modèles entropiques ont donc tenté de fonder leur approche sur une version discrète du théorème H de Boltzmann, sensée corriger une fois pour toutes les problèmes de stabilité de la méthode de Boltzmann sur réseau, le tout basé sur des arguments "physiques".

Dans un premier temps, nous présenterons la construction des approches entropiques. Elle se décompose en deux grandes étapes, que nous synthétiserons successivement : la première consiste à trouver l'expression de la fonction d'équilibre en s'inspirant du théorème H de Boltzmann continu, la seconde consiste à imposer comme contrainte la vérification par la fonction de distribution d'une version discrète du théorème H, afin de garantir la stabilité : il s'agit du procédé dit de *stabilisation entropique*. Ensuite, nous discuterons des propriétés acoustiques à l'ordre dominant des différentes familles de modèles entropiques non-thermiques. Enfin, nous clôturerons cette section sur une discussion concernant les vives controverses que ces modèles ont pu susciter, en particulier sur l'utilisation du terme *entropie* et sur les liens de ces méthodes avec le théorème H.

3.4.1 Construction de la fonction d'équilibre local

Pour la recherche de la fonction d'équilibre, l'idée de base repose sur la théorie cinétique classique : l'équilibre local est vu comme le minimum d'une fonction convexe H , soumis à des contraintes sur la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et/ou de l'énergie [KFÖ99 ; Wag98]. Pour un réseau $DdQq$, cette fonction H prend la forme [KFÖ99 ; Wag98]

$$H[\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)] = \sum_{\alpha=0}^{q-1} h_\alpha[g_\alpha(\mathbf{x}, t)], \quad (3.80)$$

où les h_α sont des fonctions convexes positives. La minimisation sous contrainte s'effectue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (1 multiplicateur par contrainte). Par exemple, pour des modèles non-thermiques, on aura, avec $h'_\alpha(s) = \partial h_\alpha / \partial s$

$$h'_\alpha(g_\alpha^{eq}) = \beta_\rho + \boldsymbol{\beta}_{\rho u} \cdot \mathbf{c}_\alpha , \quad (3.81)$$

avec β_ρ et $\beta_{\rho u}$ les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Cela fournit l'équation

$$g_\alpha^{eq} = h_\alpha'^{-1}(\beta_\rho + \beta_{\rho u} \cdot \mathbf{c}_\alpha) . \quad (3.82)$$

Il s'agit à présent d'obtenir l'expression des fonctions h_α (donc de H), et c'est à partir d'ici que les écoles de Zürich et de Boston se distinguent.

- L'école de Boston, par des considérations de symétrie du réseau, aboutit à une fonction H sous la forme d'une entropie de Tsallis [Bog+03]. Cette fonction tend vers la fonction H de Boltzmann dans certains cas limites bien précis mais en est très différente [Kea+07].
- L'école de Zürich procède selon deux approches distinctes, menant toutes deux en définitive à la même fonction H (et donc à la même fonction d'équilibre), différente de celle de l'école de Boston. La première méthode [KFÖ99] consiste à imposer une contrainte supplémentaire à la fonction d'équilibre : la vérification du moment d'ordre 2 à l'équilibre fournissant une expression correcte pour les équations de Navier-Stokes, c'est à dire $\Pi^{eq} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho c_s^2 \mathbf{I}$. Pour obtenir une expression explicite, Karlin *et al.* effectuent un développement limité des multiplicateurs de Lagrange permettant d'obtenir une solution précise à l'ordre $\mathcal{O}(Ma^4)$, puis d'en déduire les fonctions h_α et enfin la fonction d'équilibre. La seconde approche repose sur la discrétisation de la fonction H de Boltzmann continue par une quadrature de Gauss-Hermite [AKÖ03]. Ceci permet d'obtenir directement les fonctions h_α . Concrètement, on a

$$H[\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)] = \sum_{\alpha=0}^{q-1} g_\alpha(\mathbf{x}, t) \ln \left[\frac{g_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\omega_\alpha} \right] . \quad (3.83)$$

La fonction d'équilibre est obtenue par la minimisation de cette fonction sous contrainte de conservation de masse et quantité de mouvement, sans avoir besoin d'invoquer la contrainte supplémentaire sur le tenseur des contraintes.

En définitive, ces deux constructions fournissent une même fonction d'équilibre, qui a pour particularité d'être non polynomiale (elle peut d'ailleurs être reformulée sous une forme semi-exponentielle) : on obtient en trois dimensions

$$g_\alpha^{eq} = \rho \omega_\alpha \prod_{i=x,y,z} \left(2 - \sqrt{1 + 3u_i^2} \right) \left(\frac{2u_i + \sqrt{1 + 3u_i^2}}{1 - u_i} \right)^{c_{\alpha,i}} , \quad (3.84)$$

avec ω_α les poids définis dans la table 2.2. Cette distribution d'équilibre fournit également le terme d'erreur en $\mathcal{O}(Ma^3)$ dans le tenseur hors équilibre des contraintes visqueuses. De plus, un terme d'erreur en $\mathcal{O}(Ma^4)$ apparaît dans la partie à l'équilibre du tenseur des contraintes, qui n'est donc plus exacte, contrairement aux fonctions d'équilibre polynomiales classiques. Par exemple, un calcul direct donne

$$\Pi_{xx}^{eq} = \rho u_x^2 - \frac{3}{4} \rho u_x^4 , \quad (3.85)$$

aussi bien en D3Q27 que D3Q19. En revanche, les moments d'ordre 0 et 1 (masse et quantité de mouvement) sont exacts.

Les approches de l'école de Boston et de Zürich ont ensuite été unifiées par Keating *et al.* [Kea+07] : ils montrent que pour retrouver un tenseur des contraintes de type

Navier-Stokes, la méthode de l'entropie de Tsallis est incorrecte. Par conséquent, nous ne traiterons plus dans la suite que de la méthode de Zürich. Ces derniers montrent également qu'en pratique, la différence entre l'utilisation de l'équilibre (3.84) et l'équilibre polynomial classique (2.134) est très faible.

3.4.2 Étape de collision : stabilisations entropiques

La seconde étape du raisonnement consiste à imposer des contraintes supplémentaires à l'opérateur de collision pour garantir la stabilité de l'équilibre local. Un outil très puissant pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques est la notion de **stabilité de Lyapunov**. Pour un équilibre g_α^{eq} donné, une fonction V est dite *fonction de Lyapunov* du système s'il existe un voisinage de l'équilibre sur lequel

1. $V(g_\alpha) > V(g_\alpha^{eq})$.
2. $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Si une telle fonction de Lyapunov existe pour le système, alors l'équilibre g_α^{eq} est stable. Or la fonction H vérifie la première condition puisque g_α^{eq} est par définition son minimum. H est alors dite *candidate de Lyapunov*. Ainsi, pour assurer la stabilité de l'équilibre au sens de Lyapunov (c'est à dire une condition très forte de stabilité non-linéaire), il faut forcer la fonction de distribution à vérifier

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 . \quad (3.86)$$

Au sens discret, cela signifie que les collisions à chaque pas de temps ne doivent pas augmenter H . Pour mieux comprendre comment forcer l'opérateur de collision à vérifier cette condition, il faut s'intéresser aux trajectoires vers l'équilibre dans la collision de Boltzmann sur réseau. Pour simplifier l'étude, nous considérons le cas de l'opérateur BGK.

Rappelons que la collision BGK s'écrit pour un paramètre de relaxation adimensionnel s

$$g_\alpha^* = g_\alpha - s(g_\alpha - g_\alpha^{eq}) . \quad (3.87)$$

Rappelons aussi que $0 \leq s \leq 2$. La relaxation BGK est donc une relaxation dans la direction de l'équilibre : pour $s = 1$, le résultat de la collision est exactement l'équilibre local, $g_\alpha^* = g_\alpha^{eq}$. Pour $s = 0$, il y a absence de collision, $g_\alpha^* = g_\alpha$. Ces observations permettent de distinguer plusieurs régimes de relaxation :

1. $0 \leq s \leq 1$: régime de **sous-relaxation**. Exprimé avec des temps de relaxation, ce régime équivaut, en écriture dimensionnelle, à $\Delta t \leq \tau_g < +\infty$ (on rappelle que $\tau_g = \nu/c_0^2 + \Delta t/2$). Ce régime de relaxation n'existe que si le pas de temps est extrêmement faible pour un écoulement à faible nombre de Knudsen, ou si le nombre de Knudsen est très grand. En pratique, pour des écoulements automobiles ou aéronautiques, on a toujours $\tau_g \ll \Delta t$: le régime de sous-relaxation n'est jamais rencontré.
2. $1 < s \leq 2$: régime de **sur-relaxation**. Il s'agit du régime classique pour les écoulements industriels à faible nombre de Knudsen. On a généralement dans ces cas τ_g très proche de $\Delta t/2$, soit $s \simeq 2$.

Pour mieux saisir en quoi la distinction entre ces deux régimes a une importance fondamentale, on se réfère à la figure 3.7, inspirée de [KFÖ99 ; SKC02].

Nous y avons représenté une projection 2D des iso-valeurs de la fonction H (H est une fonction de q variables réelles en $DdQq$: seule sa projection en dimension 2 est présentée

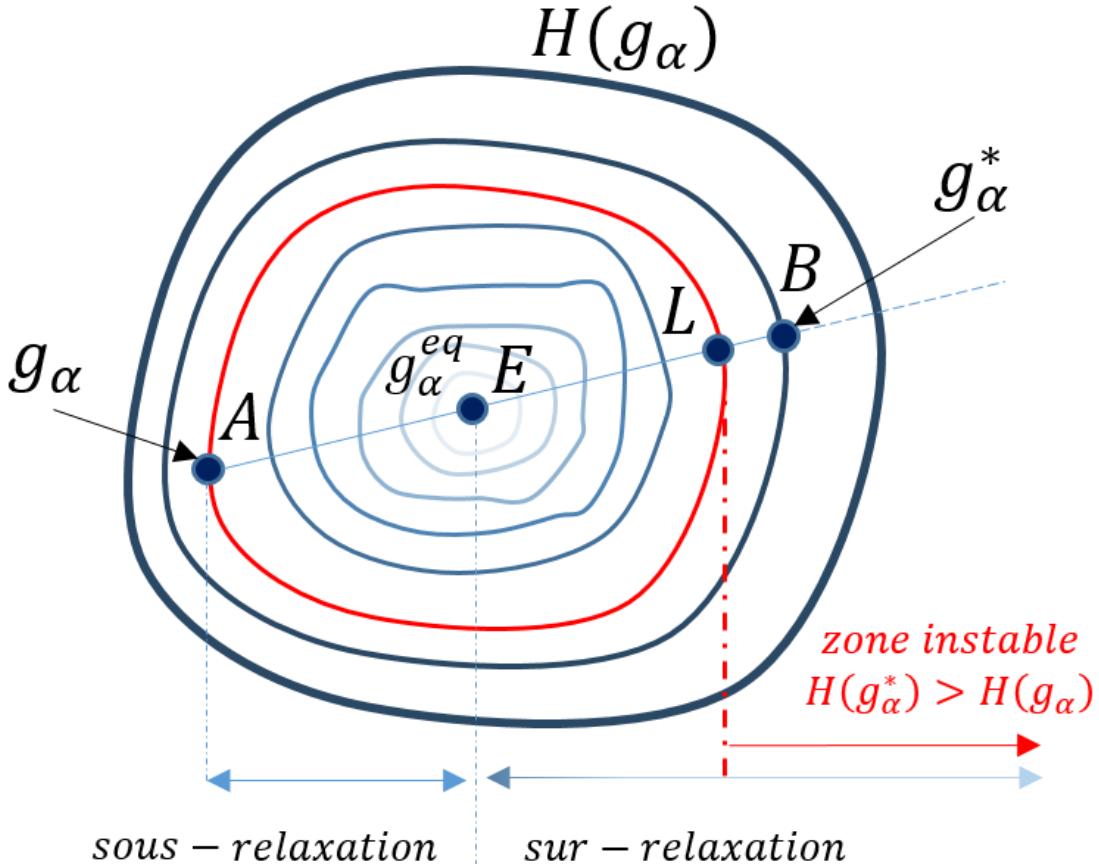


FIGURE 3.7 – Représentation du processus de collision BGK en un point et à un instant donné et isovaleurs de la fonction H associée. Le minimum de la fonction H est par définition la fonction d'équilibre. La fonction pré-collision se situe au point A et celle post-collision, dans le cas particulier présenté sur cette figure, au point B . Dans le cas de sur-relaxation présenté ici, la stabilité au sens de Lyapunov n'est pas respectée.

ici par souci de clarté), ainsi qu'un exemple de trajectoire vers l'équilibre lors de l'étape de collision, à un instant et en un point donné, matérialisé par le segment [AB]. Le point E représente le minimum de la fonction H , c'est à dire la fonction d'équilibre. On remarque que pour un régime de sur-relaxation, la contrainte de stabilité de Lyapunov peut être violée : la valeur de H peut potentiellement augmenter avec la collision sur-relaxée. Le point L représente la sur-relaxation limite admissible pour respecter la non-augmentation de H . Il s'agit précisément de cette propriété qui est utilisée par Karlin *et al.* pour la construction des modèles entropiques. L'idée consiste à effectuer une collision forçant g_α^* à rester dans le segment [AL] via un paramètre dit de *stabilisation entropique* $\gamma(\mathbf{x}, t)$, et ce quelque soit la valeur imposée pour la viscosité cinématique. De façon générale pour tous les modèles entropiques, on définit l'*état miroir entropique*, état post-collisionnel fictif noté \mathbf{g}^{mire} , tel que

$$H(\mathbf{g}) = H(\mathbf{g}^{mire}), \quad (3.88)$$

qui correspond à une collision fictive menant au point L. Dans toutes les variantes de

modèles entropiques, la collision est effectuée comme suit :

$$\boxed{\mathbf{g}^* = (1 - \beta)\mathbf{g} + \beta\mathbf{g}^{mیر}} . \quad (3.89)$$

Le paramètre $\beta \in [0; 1]$ pondère la collision sur le segment [AL] et sera fixé en fonction de la viscosité cinématique souhaitée. Le paramètre $\gamma(\mathbf{x}, t)$ intervient dans la définition de l'état miroir entropique. Deux grandes familles d'états miroirs entropiques, apparues dans l'ordre chronologique, existent dans la littérature. Elles mènent à des modèles très différents, c'est pourquoi nous les étudierons dans l'ordre.

Dans la première version des modèles entropiques [KFÖ99 ; AK00 ; AK02], le paramètre de stabilisation entropique γ_1 est défini en tout point et à tout instant comme la racine non-triviale (c'est à dire non-nulle) de l'équation

$$H(\mathbf{g}) = H(\mathbf{g} - \gamma_1(\mathbf{g} - \mathbf{g}^{eq})) . \quad (3.90)$$

Cela revient à définir l'état miroir entropique comme

$$g_\alpha^{mirr,1} = g_\alpha - \gamma_1(g_\alpha - g_\alpha^{eq}) , \quad (3.91)$$

pour $\alpha = 0..q - 1$. Notons que dans la limite d'un calcul parfaitement résolu, $\gamma_1 \rightarrow 2$. Ceci fournit dans cette première version des modèles entropiques

$$g_\alpha^* = g_\alpha - \gamma_1\beta(g_\alpha - g_\alpha^{eq}) . \quad (3.92)$$

Le paramètre β est lié à la viscosité cinématique par $1/\beta = 2/s = 2\nu/c_s^2 + 1$. Point important, la forme présente de la relaxation montre que la viscosité effective du calcul $\nu^{eff,1}$ est différente de ν : en particulier,

$$\nu^{eff,1} = \nu \iff \gamma_1 = 2 , \quad (3.93)$$

c'est à dire que la viscosité effective à l'ordre dominant n'est correcte que dans le cas d'un calcul parfaitement résolu, où la collision entropique se réduit explicitement à la collision BGK. Pour tous les cas de figure courants, on aura en réalité une viscosité effective valant

$$\nu^{eff,1} = \frac{4\nu + c_s^2(2 - \gamma_1)}{2\gamma_1} . \quad (3.94)$$

Notons que de manière a priori contre-intuitive, le paramètre γ peut également prendre des valeurs supérieures à 2, c'est à dire induire une hyperviscosité négative par endroits [Kar+15]. Quoiqu'il arrive, le procédé de stabilisation conduit à un ajout automatique de viscosité à l'ordre dominant, dépendant du comportement de $\gamma_1(\mathbf{x}, t)$. Une telle propriété rend ce modèle peu satisfaisant, aussi stable qu'il puisse être.

Dans un deuxième temps, Karlin *et al.* ont proposé une autre version de leur stabilisation entropique qui, cette fois, ne modifie pas la viscosité cinématique [KBC14 ; BCK15 ; Dor+16a]. L'idée est de ne faire agir la stabilisation entropique que sur les moments d'ordres supérieurs non liés au tenseur des contraintes, c'est à dire ceux dont la relaxation est pilotée par des paramètres "libres" dans les modèles MRT. Pour ce faire, la fonction de distribution est divisée en différentes contributions. En reprenant les notations des auteurs, on a :

$$g_\alpha = k_\alpha + s_\alpha + h_\alpha \quad (3.95)$$

où k_α (*kinetic part*) ne dépend que des moments conservés (qui ne sont donc pas affectés par la collision), s_α (*shear part*) représente la partie liée au tenseur des contraintes (relaxée selon la viscosité cinématique) et h_α (*higher order part*) représente les moments non-hydrodynamiques (précisons que h_α ne représente plus une partie de la fonction H comme dans le début de la section. Ces notations sont celles des auteurs eux-mêmes). Les auteurs proposent également des réalisations dans lesquelles un moment d'ordre 3 est inclus dans s_α [BCK15]. Le nouvel état miroir entropique est défini comme

$$g_\alpha^{mirr,2} = k_\alpha + 2(s_\alpha - s_\alpha^{eq}) + \gamma_2(h_\alpha - h_\alpha^{eq}) \quad (3.96)$$

avec γ_2 le stabilisateur entropique, solution de l'équation (3.88) pour $g_\alpha^{mirr} = g_\alpha^{mirr,2}$. Ensuite, on effectue la collision (3.89) sur ce nouvel état miroir. La valeur 2 en facteur de la partie hors équilibre du tenseur des contraintes montre que la collision entropique n'impose cette fois pas de facteur limitant sur la partie liée au tenseur des contraintes : par conséquent on a ici, pour toute valeur de γ_2

$$\nu^{eff,2} = \nu . \quad (3.97)$$

Pour un calcul parfaitement résolu, on a toujours $\gamma_2 \rightarrow 2$ et la collision entropique se réduit à nouveau à une collision BGK.

3.4.3 Influence du stabilisateur entropique sur les propriétés acoustiques du schéma

Le cas de la première version des modèles entropiques est trivial. Ce modèle étant équivalent à celui d'une collision BGK dont le temps de relaxation dépendrait de l'espace et du temps, la viscosité de volume est modifiée exactement de la même façon que la viscosité de cisaillement :

$$\xi^{\text{ELBM},1} = \frac{4\xi^{\text{BGK}} + c_s^2(2 - \gamma_1)}{2\gamma_1} . \quad (3.98)$$

On a potentiellement, pour $\gamma_1 \rightarrow 0$, $\xi^{\text{ELBM},1} \rightarrow +\infty$, et donc de même pour le taux de dissipation des ondes acoustique. Par conséquent, ce modèle ne doit pas non plus être utilisé pour une étude acoustique précise.

La situation est différente pour la deuxième version de la collision entropique. La question devient la même que pour les modèles de la famille MRT : il s'agit de savoir quelle est la combinaison de vecteurs de base et de temps de relaxation qui opère la relaxation des moments d'ordre 2. La réponse à cette question est entièrement donnée et développée dans l'étude [BCK15]. Différentes réalisations de la collision entropique y sont présentées avec, selon les cas, modification spatio-temporelle ou non de la viscosité de volume. Notons qu'en pratique, en dehors de cette étude, les auteurs de ces modèles choisissent souvent d'utiliser les versions qui contiennent une modification de la viscosité de volume [Dor+16a ; Dor+16b].

3.4.4 Controverses sur les liens entre la stabilisation entropique et le théorème H de Boltzmann

La première question que soulève les modèles entropiques provient de leur appellation même. En effet, par exemple dans le cas athermal, comment un modèle dans lequel la température n'a pas d'existence physique et dans lequel l'énergie n'est pas conservée par

les collisions pourrait-il avoir un rapport avec la notion thermodynamique d'entropie ? Les auteurs présentent la stabilisation entropique comme un procédé visant à imposer des critères basés sur la physique du second principe de la thermodynamique (augmentation de l'entropie thermodynamique, c'est à dire respect du théorème H de Boltzmann) à la fonction de distribution [BCK15 ; Dor+16a], alors que ce dernier n'a par définition aucune existence dans les modèles non-thermiques. Cette confusion est soulignée dans [Luo12]. La question revient donc à déterminer le réel statut de la fonction H dans les modèles ELBM et ses liens ou non avec l'entropie thermodynamique de Boltzmann continue (qui est l'opposé de la fonction H de Boltzmann continue). Plus particulièrement, la stabilisation ELBM est-elle liée au respect d'un *théorème H discret* ou à une technique déconnectée de toute physique ?

Wagner [Wag98] a étudié plus en détail le cas du théorème H discret. Il a montré qu'il était possible de démontrer un théorème H discret pour l'opérateur BGK sous réserve de sous-relaxation et de l'utilisation d'un équilibre non-polynomial (voir aussi les remarques de [YL05]). Ceci garantit la stabilité inconditionnelle du schéma au sens de Lyapunov. Comme souligné également dans [YL03 ; YL05], il ne peut exister de théorème H discret pour des fonctions d'équilibres polynomiales, qui sont les seules à permettre de retrouver explicitement et exactement les moments d'ordre 0, 1 et 2 de la distribution d'équilibre compatibles avec les équations de Navier-Stokes. Pour un équilibre non-polynomial mais dépendant explicitement des quantités conservées, il est impossible, sur un réseau discret, de retrouver exactement les équations fluides à l'ordre dominant : comme nous l'avons vu, c'est en particulier le cas de l'équilibre (3.84), qui inclut un terme d'erreur dans le tenseur des contraintes à l'équilibre. De plus les approximations visant à rendre explicite l'expression de la distribution d'équilibre non-polynomiale en fonction des quantités conservées [KFÖ99] empêchent le respect inconditionnel d'un théorème H discret. Enfin, dans la mesure où le théorème H continu n'a pas d'existence lorsque l'énergie n'est pas conservée par les collisions, il en est naturellement de même pour toute version discrète de ce théorème.

En conclusion, les modèles entropiques non-thermiques ne respectent pas le théorème H de Boltzmann, ni même une version discrète de ce dernier. On peut voir la stabilisation entropique comme une méthode approchant une forme de théorème H discret, sous la forme d'une approximation du théorème de stabilité de Lyapunov. En résumé, il s'agit d'un algorithme approximativement inconditionnellement stable au sens de Lyapunov, permettant de retrouver, moyennant d'autres approximations sur les moments à l'équilibre de la fonction de distribution, les équations de Navier-Stokes. Concernant les modèles thermiques, la situation est encore plus complexe et ne sera pas étudiée ici.

Malgré toutes ces confusions et ces controverses, la méthode ELBM, du moins dans sa deuxième version, n'est pas à disqualifier pour autant. En effet, l'ordre de grandeur des termes d'erreur d'approximation est élevé (d'ordre 4 dans les moments d'ordre 2 de la distribution d'équilibre local). Bien que l'argument physique du théorème H soit irrecevable, la stabilisation approchée au sens de Lyapunov est une méthode intéressante en soi. De plus, force est de constater que la stabilisation entropique est effective et ne nécessite pas, contrairement aux modèles de type MRT, de fixer arbitrairement des paramètres libres.

Toutefois, une analyse de stabilité linéaire complète du modèle n'a pas encore été publiée à notre connaissance, rendant les propriétés de dispersion et dissipation de la stabilisation entropique plus incertaines que celles des modèles MRT. La question du coût calcul potentiellement grand de la méthode est également en débat. Par ailleurs, un des arguments contre la collision ELBM réside dans le fait que pour un calcul parfaitement résolu, celle-ci tend vers la collision BGK (moyennant une fonction d'équilibre dont les

moments d'ordre supérieur à 2 sont non-nuls, contrairement aux équilibres polynomiaux classiques). Ceci sous-entendrait que la méthode BGK constitue un outil efficace de DNS (Direct Numerical Simulation), or cet argument a été contredit par une étude comparative de Peng *et al.* [Pen+10]. La méthode BGK peut être utilisé pour la DNS mais se révèle, à précision équivalente, plus coûteuse que des méthodes spectrales. De plus, le champ de pression en DNS-BGK peut se révéler fortement parasité par des oscillations haute fréquence [Pen+10], pouvant se répercuter sur le champ de vitesse. La stabilité est donc loin d'être le seul critère à prendre en compte.

3.5 Filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau

3.5.1 Construction des modèles avec filtrage sélectif

Une dernière catégorie de méthodes vise à appliquer un filtrage spatial explicite à l'équation de Boltzmann sur réseau. Cette méthode est présentée dans l'étude de Ricot *et al.* [Ric+09] et se base sur un filtrage du modèle LBM-BGK. L'objectif est d'obtenir une méthode qui permettrait une plus grande stabilité numérique tout en conservant la simplicité de l'opérateur BGK et ses propriétés de faible dissipation acoustique sur la plus grande gamme de nombres d'onde possible. Ce filtrage a pour but d'augmenter la dissipation de certains modes de l'équation de Boltzmann sur réseau BGK dans les hauts nombres d'onde, afin d'empêcher en particulier d'empêcher le couplage instable du mode acoustique et du mode de vorticité (voir section 3.1.3 et [Ric+09]).

Si on note $\langle \rangle$ un opérateur de filtrage spatial explicite, on a classiquement pour une variable v quelconque sur un réseau $DdQq$ en unités dimensionnelles :

$$\langle v(\mathbf{x}) \rangle = v(\mathbf{x}) - \sigma \sum_{j=1}^d \sum_{n=-N}^N d_n v(\mathbf{x} + n\mathbf{e}_j \Delta x) , \quad (3.99)$$

où \mathbf{e}_j désigne le vecteur unitaire dans la direction j et $\sigma \in [0; 1]$ un coefficient contrôlant la force du filtrage. N pilote le nombre de points du filtre par direction et les d_n sont des coefficients de pondération. Il en résulte un filtre utilisant $2dN + 1$ points distincts. Classiquement, les coefficients d_n sont choisis afin de ne pas introduire d'erreur de dispersion [TWD93] (on a toujours $d_n = d_{-n}$) : l'approche standard consiste à choisir ces valeurs afin d'annuler des termes successifs dans le développement de Taylor de $\langle v \rangle$ [VLM98 ; Fal13]. Un filtrage tel que $\langle v \rangle = v + \mathcal{O}(\Delta x^p)$ sera dit d'ordre p . Il est par ailleurs possible de prendre en compte d'autres considérations que l'ordre formel du filtre pour déterminer les coefficients : on peut par exemple tenter de minimiser l'erreur de dissipation dans les hauts nombres d'onde, via la minimisation d'une erreur intégrale dans l'espace de Fourier par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [TWD93 ; BB04 ; TH04]. Ce choix se paye généralement par une dégradation de l'erreur de dissipation dans les bas nombres d'onde.

Un inconvénient du filtrage de l'équation (3.99), utilisé par exemple dans [Ric+09], réside dans le fait que les composantes diagonales ne sont pas filtrées. Si on définit $k_i^* = k_i \Delta x$ le nombre d'onde réduit pour chaque direction ($i = 1, 2, 3$ ou encore $i = x, y, z$), on peut calculer via une transformation de Fourier la fonction de transfert $\widehat{F}(k_x^*, k_y^*, k_z^*)$ pour un filtre donné. En deux dimensions, la fonction de transfert d'un filtre défini par l'équation (3.99) montre une absence de filtrage pour les directions diagonales du vecteur d'onde [Fal13]. Pire, en trois dimensions, la fonction de transfert montre même une amplification des ondes dans les directions des diagonales du cube dans le réseau. Par exemple, pour un filtrage complet ($\sigma = 1$), le facteur d'amplification vaut 2, ce qui peut constituer un

problème majeur pour la stabilité numérique. Cette situation est illustrée sur la figure 3.8 en dimensions 2 et 3 pour $N = 4$, mais cette amplification des ondes diagonales tridimensionnelles dans les hauts nombres d'onde est valable quelque soit la valeur de N.

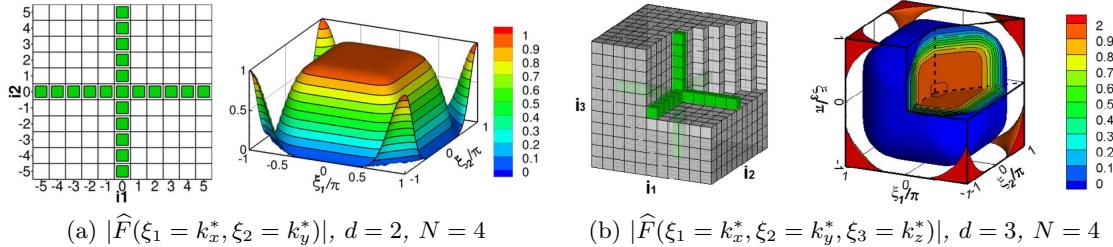


FIGURE 3.8 – Fonctions de transfert dans l'espace des nombres d'onde de filtres définis par l'équation avec $\sigma = 1$ (3.99) en deux et trois dimensions pour $N = 4$. L'image (b) montre en particulier que des oscillations mailles à mailles dans la direction de la diagonale du cube sur le réseau sont amplifiées avec un facteur 2 pour ce filtrage. Ceci est valable pour toute valeur de N en 3D. Extrait de [Fal13].

Appliqué à l'équation de Boltzmann sur réseau BGK, Ricot *et al.* distinguent trois utilisations du filtrage sélectif (voir [Ric+09] pour une description moins synthétique) pour le calcul de la fonction de collision :

- **Le filtrage des fonctions de distribution.** On obtient la nouvelle équation

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = \langle g_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle - \frac{1}{\tau_g} \left(\langle g_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.100)$$

où les variables macroscopiques dans la fonction d'équilibre \tilde{g}_α^{eq} sont calculées à partir des fonctions de distribution filtrées. Il faut donc filtrer, en $DdQq$, q variables selon d directions, soit $q \times d$ opérations de filtrage.

- **Le filtrage des variables macroscopiques** pour le calcul de l'équilibre. On a

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} \left(g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \tilde{g}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.101)$$

où les variables macroscopiques sont filtrées dans le calcul de l'équilibre \tilde{g}_α^{eq} . Ainsi, seules la masse et la quantité de mouvement sont filtrées dans cette approche, soit $d + 1$ variables dans d directions. Cette méthode est donc beaucoup moins coûteuse que la précédente.

- **Le filtrage de l'opérateur de collision.** On a cette fois

$$g_\alpha^*(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} \langle g_\alpha^{neq}(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (3.102)$$

Cela revient à filtrer à nouveau q variables selon d directions.

Une fois la fonction de collision calculée, l'étape de propagation est effectuée normalement.

3.5.2 Dispersion, dissipation et propriétés acoustiques

Ricot *et al.* étudient les propriétés de dispersion et de dissipation de ces trois équations pour le cas particulier du réseau D2Q9 avec un filtrage pour lequel $N = 3$ et $\sigma = 0.1$, à l'aide d'une analyse linéaire de Von Neumann. Il y apparaît bien sur une dissipation supérieure des modes de l'équation de Boltzmann sur réseau, croissante avec le nombre d'onde et dont la fréquence de coupure varie selon laquelle des trois stratégies présentée est utilisée. Dans tous les cas, la viscosité effective dépendra du nombre d'onde, mais restera égale à sa valeur nominale dans la limite $k^* \rightarrow 0$. Dans le cas particulier du schéma avec filtrage de l'opérateur de collision, il est possible d'obtenir une formule approchée fiable pour la viscosité effective en fonction du nombre d'onde [Ric+09] (en unités LBM) :

$$\nu^{eff}(k^*) = c_s^2 \left(\frac{\bar{\tau}_g}{\hat{F}(k^*)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\nu + c_s^2[1 - \hat{F}(k^*)]}{2\hat{F}(k^*)}. \quad (3.103)$$

Ainsi, le taux de dissipation acoustique effectif $-\nu^{eff}|\mathbf{k}|^2$ du modèle BGK est modifié de la même façon.

Pour un filtre défini par l'équation (3.99), on a toujours $\hat{F}(k^*)$ strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$ avec $\hat{F}(0) = 1$ et $\hat{F}(\pi) = 1 - \sigma$. Par conséquent, pour $\sigma = 1$, la viscosité effective est infinie pour $k^* = \pi$ mais vaut toujours ν dans la limite $k^* \rightarrow 0$. Notons aussi que de manière générale, plus le filtre est d'ordre élevé (N grand), plus sa fréquence de coupure sera élevée et moins la viscosité dans les bas nombres d'onde sera affectée.

Dans [Ric+09], les auteurs montrent que c'est le filtrage complet des fonctions de distribution qui mène au schéma le plus dissipatif (fréquence de coupure du mode de vorticité et des modes acoustiques la plus basse) et le filtrage de l'opérateur de collision qui mène au schéma le moins dissipatif. Dans une étude plus récente, Marié et Gloerfelt montrent qu'un filtrage plus compact est possible, via une procédure dynamique de calcul du coefficient de force σ .

Ainsi, pourvu que l'opérateur de collision sur lequel est basée l'équation de Boltzmann sur réseau filtrée préserve les propriétés acoustiques du schéma, les méthodes de filtrage sélectif constituent une alternative intéressante. Ces techniques permettent un gain en stabilité tout en préservant les propriétés acoustiques du schéma de base dans les bas nombres d'onde. Pour une modèle BGK filtré, il est donc possible d'obtenir des propriétés acoustiques satisfaisantes en basse et moyenne fréquence. Selon l'ordre du filtre et la stratégie de filtrage utilisée, il sera plus ou moins possible d'obtenir un comportement correct à haute-fréquence. Pour obtenir une fréquence de coupure élevée, il est généralement préférable d'utiliser des filtres d'ordre élevé. Toutefois, une stratégie basée sur le filtrage de l'opérateur de collision permet d'obtenir une fréquence de coupure similaire avec un filtre d'ordre plus faible par rapport à un filtrage des fonctions de distribution ou des variables macroscopiques.

Concernant le coût calcul, un filtrage d'ordre élevé demandera davantage d'opérations. De manière générale, les méthodes de filtrage sélectif possèdent l'inconvénient de limiter l'efficacité de la parallélisation du schéma : en effet, le schéma numérique qui en résulte est beaucoup moins compact.

Chapitre 4

Développement d'un filtrage sélectif compact alternatif : étude acoustique et turbulente

Comme nous l'avons vu, une des manières de stabiliser la méthode de Boltzmann sur réseau est la technique du filtrage spatial (variables macroscopiques, fonction de distribution ou opérateur de collision). Nous introduisons dans cette section une méthode alternative de filtrage sélectif compact, avec pour objectif une application aéroacoustique sur des géométries industrielles complexes, à haut nombre de Reynolds et à nombre de Mach important (toujours dans la limite faiblement compressible). Cette méthode est basée à la fois sur une extension et une simplification du filtrage de l'opérateur de collision présenté dans [Ric+09]. Dans le formalisme présenté ici, le filtrage de l'opérateur de collision apparaît comme un cas particulier. Pour cette partie, nous nous imposons de travailler avec des filtres compacts, c'est à dire qui ne nécessitent pas davantage de points que ceux du réseau D3Q19 lui-même. C'est la raison pour laquelle nous étudions une extension du filtrage de l'opérateur de collision et non le filtrage des variables macroscopiques ou des fonctions de distribution : en effet, le filtrage de l'opérateur de collision fournit, pour un même filtre, une fréquence de coupure plus élevée. Cela permet d'utiliser un filtre d'ordre plus faible tout en conservant une fréquence de coupure correcte.

Dans un premier temps, nous choisirons un filtre compact et étudierons ses caractéristiques. Nous montrerons ensuite que le filtrage de l'opérateur de collision peut être vu comme le cas particulier d'un filtrage plus général, basé sur la totalité de la fonction hors équilibre. L'intérêt de cette extension est qu'elle fournit, pour une même forme de filtre, un filtrage d'ordre plus élevé que celui de l'opérateur de collision, et ce sans aucun surcoût. Nous montrerons ensuite que ces deux méthodes (le filtrage de l'opérateur de collision et celui de la fonction de distribution hors équilibre) peuvent être drastiquement simplifiées tout en conservant la même limite hydrodynamique à l'ordre 1 en nombre de Knudsen, ce qui permet de grandes économies en matière de coût calcul. Nous préciserons aussi leurs propriétés de dispersion et de dissipation acoustique. Dans un deuxième temps, nous montrerons que les schémas numériques obtenus peuvent faire office de modèle de LES implicite, permettant la simulation de la turbulence.

Ces modèles sont simples à mettre en œuvre, stables, et aisément parallélisables de par leur grande compacité. Nous insisterons également sur les limites en conditions industrielles réelles d'un tel filtrage compact, en particulier sur l'aspect de la dissipation acoustique dans les hauts nombres d'onde.

4.1 Développement du filtrage compact simplifié

4.1.1 Choix et étude d'un filtre explicite compact

Dans cette partie et pour la suite, nous nommerons \mathcal{R} l'opération de filtrage. Notre objectif étant d'obtenir une opération la plus compacte et la moins coûteuse possible, nous choisissons de nous orienter vers un filtre d'ordre 2. Cependant, nous choisissons aussi de ne pas utiliser un filtre défini par l'équation (3.99) et utilisé dans [Ric+09], pour les raisons d'anisotropie évoquées précédemment (voir figure 3.8). Nous choisissons d'utiliser la discréétisation sur le réseau D3Q19 de l'opérateur Laplacien, comme utilisée localement au niveau des raffinements de maillage dans [TRL14 ; Gen+17]. Une étude complète sur la discréétisation de l'opérateur Laplacien sur un réseau est disponible dans [Tha+13]. En résumé, l'opérateur \mathcal{R} est choisi, en unités dimensionnelles, comme

$$\mathcal{R} = \mathbf{I} + \frac{\sigma^{*2} \Delta x^2}{2} \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{L}}, \quad (4.1)$$

où $\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{L}}$ représente la discréétisation sur le réseau D3Q19 de l'opérateur Laplacien, trouvable dans [Tha+13]. Pour une quantité $v(\mathbf{x}, t)$ quelconque, un calcul rapide [TRL14 ; Tha+13] donne, toujours en unités dimensionnelles

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v(\mathbf{x}, t)) &= v(\mathbf{x}, t) + \sigma^{*2} \Delta x^2 \left[-2v(\mathbf{x}, t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12} \left(2 \sum_{\beta=1}^6 v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\beta} \Delta t, t) + \sum_{\beta=7}^{18} v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\beta} \Delta t, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On obtient bien un filtrage d'ordre 2 par rapport au pas d'espace (et donc au pas de temps par la condition CFL). De plus, il est montré dans [Tha+13] que sous cette forme particulière, on a

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.3)$$

avec $\boldsymbol{\Delta}$ l'opérateur Laplacien, et que \mathcal{R} ainsi défini est isotrope jusqu'à l'ordre 4.

En résumé, écrit en unités LBM, on obtient

$$\mathcal{R}(v(\mathbf{x}, t)) = v(\mathbf{x}, t) + \sigma^{*2} \left[-2v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{12} \left(2 \sum_{\beta=1}^6 v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\beta}, t) + \sum_{\beta=7}^{18} v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\beta}, t) \right) \right]. \quad (4.4)$$

Vient à présent la question du coefficient σ^* . Dans [TRL14 ; Gen+17], la valeur $\sigma^* = \sqrt{3/7}$ est choisie. Dans ces études, l'application du filtrage demeure très locale. Dans la mesure où ici, ce dernier a vocation à être appliqué en tout point, nous étudions un peu plus en détail son influence par l'intermédiaire de sa fonction de transfert dans l'espace de Fourier $\hat{F}(\mathbf{k}^*)$ [Fal13] en fonction du coefficient σ^* . On a $\mathbf{k}^* \in [0; \pi]^3$. Pour simplifier la représentation de la fonction de transfert, nous représentons ses valeurs le long de trois directions : le long d'un axe (nous choisirons l'axe x , les résultats sont indifférents à ce choix), le long d'une diagonale bidimensionnelle (nous choisirons xy), et le long d'une diagonale tridimensionnelle (xyz). Ceci correspond aux directions des ondes 1D, 2D et 3D définies dans [Fal13] (voir figure 4.1). Cela revient à représenter $\hat{F}(k_x^*, k_y^* = 0, k_z^* = 0)$, $\hat{F}(k_x^* = k_y^*, k_z^* = 0)$ et $\hat{F}(k_x^* = k_y^* = k_z^*)$. Nous montrons sur la figure 4.2 les résultats pour $\sigma^* = \sqrt{3/7}$ et $\sigma^* = \sqrt{3/8}$, cette dernière valeur ayant été retenue après avoir exploré l'ensemble des valeurs possibles.

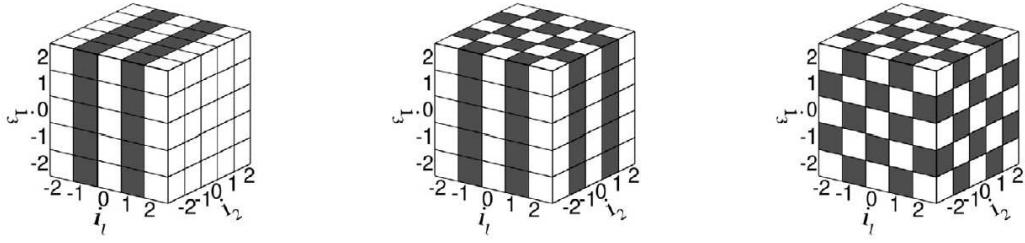


FIGURE 4.1 – Ondes d’instabilités 1D, 2D et 3D telles que définies dans [Fal13]. Sur ce dessin, elles correspondent aux ondes de plus petite longueur d’onde admissible selon chacune des directions en question (le long de l’axe x et des diagonales xy et xyz). Le code couleur noir et blanc représente schématiquement, à un instant donné, la fluctuation d’une quantité entre deux valeurs (la densité par exemple), qui se propage dans l’espace.

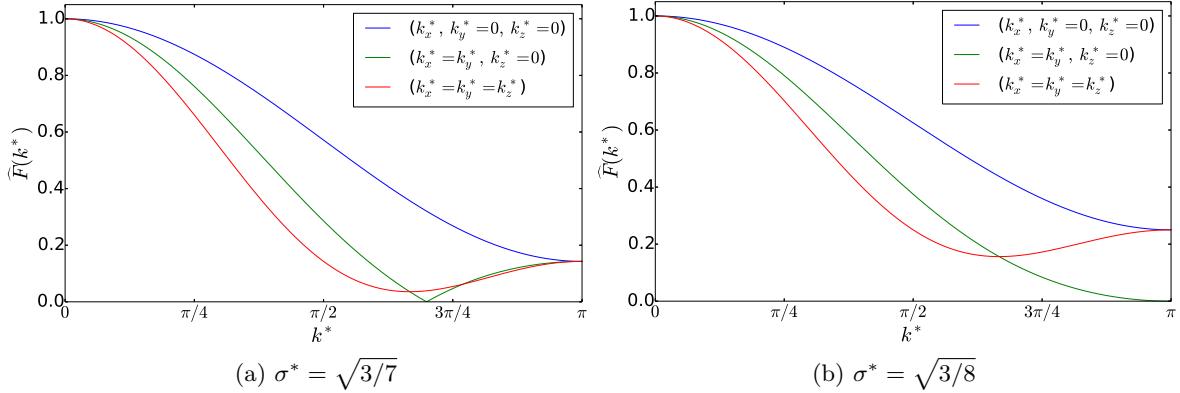


FIGURE 4.2 – Fonctions de transfert dans l’espace des nombres d’onde de filtres définis par l’équation (4.4) selon les trois types d’ondes (1D, 2D et 3D) définis sur la figure 4.1 [Fal13], pour deux valeurs de σ^* .

Nous imposons $\sigma^* \leq \sigma_{max}^* = \sqrt{3/8}$, qui est donc défini comme étant la force maximale de notre filtrage. Nous introduisons $\sigma_L \in [0; 1]$ tel que $\sigma_L = (\sigma^*/\sigma_{max}^*)^2$, ce qui produit la formule suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v(\mathbf{x}, t)) &= v(\mathbf{x}, t) + \sigma_L \left[-\frac{3}{4}v(\mathbf{x}, t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{16} \sum_{\beta=1}^6 v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) + \frac{1}{32} \sum_{\beta=7}^{18} v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En particulier, on a l’expression suivante, qui sera utile pour la suite :

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} - \mathbf{I})[v(\mathbf{x}, t)] &= \sigma_L \left[-\frac{3}{4}v(\mathbf{x}, t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{16} \sum_{\beta=1}^6 v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) + \frac{1}{32} \sum_{\beta=7}^{18} v(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ainsi, pour $\sigma_L = 1$, cette formule fournit exactement le même résultat que l’équation (4.4) avec $\sigma^* = \sqrt{3/8}$.

Remarquons que ce filtrage ne nécessite l'utilisation d'aucun point extérieur au réseau D3Q19. Cette compacité permet la construction d'algorithmes aisément parallélisables, bien davantage que ceux basés sur des filtrages nécessitant 3×5 , 3×7 points ou plus. L'opération de filtrage en est d'autant plus simplifiée qu'elle n'implique aucune adaptation de la forme du filtre près des parois, près du bord du domaine ou près d'une transition de résolution en maillage non uniforme (en dehors des points de transition eux mêmes, qui sont quoiqu'il arrive des points au traitement particulier, sujet sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant), ce qui n'est pas le cas des filtrages non compacts.

4.1.2 Filtrage de la fonction de distribution hors-équilibre

Réécrivons d'abord l'équation (2.145) avec son terme d'erreur classique issu de l'intégration le long des caractéristiques, dans sa forme BGK et en omettant les tildes, pour des raisons de clarté :

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} (\mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (4.7)$$

Rappelons qu'il s'agit bien ici de τ_g et non sa valeur réduite $\bar{\tau}_g = \tau_g/\Delta t$. L'opération de filtrage de l'opérateur de collision telle qu'utilisée dans [Ric+09] s'écrit

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} \mathcal{R}(\mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.8)$$

où, d'après la section précédente

$$\mathcal{R} = \mathbf{I} + \eta \Delta t^2 \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{L}}, \quad (4.9)$$

avec $\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{L}}$ l'opérateur Laplacien discréétisé sur le réseau D3Q19 et η une constante. En particulier, on note que $\mathcal{R} - \mathbf{I} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

En plus du filtrage de l'opérateur de collision, nous souhaitons introduire la possibilité de filtrer la totalité de la fonction de distribution hors équilibre pré-collision, c'est à dire que nous souhaitons pouvoir étudier la situation où

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{eq}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}\right) \mathcal{R}(\mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (4.10)$$

Notons que cette opération n'implique aucun surcoût calcul par rapport au filtrage de l'opérateur de collision. Par "pré-collision" nous entendons le fait de filtrer la partie hors équilibre de la fonction de distribution avant de lui faire subir la collision. Ce procédé est bien distinct du filtrage de l'opérateur de collision (dans lequel seule la partie hors équilibre "qui apparaît dans l'opérateur de collision" est filtrée).

Pour établir une démonstration synthétique et claire, nous reprenons l'équation (4.8) à un plus haut niveau de généralité afin d'englober les trois situations suivantes en une seule équation : celle du schéma LBM-BGK standard, celle du filtrage de la fonction de distribution hors équilibre complète et celle du filtrage de l'opérateur de collision. Nous écrivons ainsi

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} \left[\frac{\tau_g}{\Delta t} \mathcal{T}' - \mathcal{R}' \right] \mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (4.11)$$

où les opérateurs \mathcal{T}' et \mathcal{R}' sont définis de manière différente selon les trois cas suivants

- Le schéma LBM-BGK standard : $\mathcal{T}' = 0$ et $\mathcal{R}' = \mathbf{I}$.

- Le schéma avec opérateur de collision filtré [Ric+09] : $\mathcal{T}' = 0$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$.
- Le schéma avec fonction hors-équilibre entièrement filtrée : $\mathcal{T}' = \mathcal{R} - \mathbf{I}$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$.

On note aussi

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R}' - \frac{\tau_g}{\Delta t} \mathcal{T}' , \quad (4.12)$$

de sorte que l'équation (4.11) devient

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} \mathcal{Q}(\mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) . \quad (4.13)$$

Grâce à cette simplification, nous pouvons opérer comme dans [Ric+09] et considérer la matrice de relaxation (qui se réduit pour l'opérateur BGK à $-\Delta t/\tau_g$) non plus comme une constante mais comme un opérateur : on peut ainsi définir dans notre cas un temps de relaxation effectif

$$\tau_g^{eff} = \frac{\tau_g}{\mathcal{Q}} , \quad (4.14)$$

tel que

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g^{eff}} \mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) . \quad (4.15)$$

Pour le cas particulier du filtrage de l'opérateur de collision, $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$: on retrouve exactement le temps effectif $\tau_g^{eff} = \tau_g/\mathcal{R}$ de [Ric+09], dont est déduit une viscosité effective en fonction de la fonction de transfert du filtre (voir l'équation (3.103)). Afin de mieux comprendre les effets du filtrage sur la précision du schéma et sur la viscosité effective, nous étudions à présent le cas général (4.15). Pour cela, nous nous plaçons, comme toujours pour les études d'ordre de convergence, en unités adimensionnelles (et non en unités LBM), mais en omettant les tildes. Ainsi, on rappelle que $\tau_g = \epsilon \hat{\tau} + \Delta t/2$ avec $\nu = \epsilon \hat{\tau} \rho c_s^2$. Pour bien prendre en compte à la fois les effets du pas de temps et du nombre de Knudsen, nous cherchons à obtenir un développement asymptotique de $\epsilon \hat{\tau}^{eff} = \tau_g^{eff} - \Delta t/2$, qui représente directement la viscosité effective. L'équation (4.14) donne

$$\tau_g^{eff} = \epsilon \hat{\tau}^{eff} + \frac{\Delta t}{2} = \frac{\epsilon \hat{\tau} + \frac{\Delta t}{2}}{\mathbf{I} + (\mathcal{R}' - \mathbf{I}) - \frac{\mathcal{T}'}{2} - \epsilon \frac{\hat{\tau} \mathcal{T}'}{\Delta t}} . \quad (4.16)$$

Comme $\mathcal{R} - \mathbf{I} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$ et que, pour $\mathcal{T}' \neq 0$, $\mathcal{T}' = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, nous pouvons effectuer un développement limité de \mathcal{Q}^{-1} pour $\Delta t \rightarrow 0$. Celui-ci fournit, en se limitant à l'ordre 3 en temps

$$\epsilon \hat{\tau}^{eff} + \frac{\Delta t}{2} = \left(\epsilon \hat{\tau} + \frac{\Delta t}{2} \right) \left\{ \mathbf{I} - \left[(\mathcal{R}' - \mathbf{I}) - \frac{\mathcal{T}'}{2} - \epsilon \frac{\hat{\tau} \mathcal{T}'}{\Delta t} \right] + \left(\epsilon \frac{\hat{\tau} \mathcal{T}'}{\Delta t} \right)^2 + w(\epsilon, \Delta t, \mathcal{T}', \mathcal{R}' - \mathbf{I}) \right\} , \quad (4.17)$$

où nous avons, par souci de clarté, noté w une fonction des termes d'ordre supérieur à Δt^3 . On en déduit que

$$\epsilon \hat{\tau}^{eff} = \epsilon \hat{\tau} \left\{ \mathbf{I} - \left[(\mathcal{R}' - \mathbf{I}) - \mathcal{T}' \right] \right\} + \epsilon^2 \hat{\tau}^2 \frac{\mathcal{T}'}{\Delta t} + w_1(\epsilon, \Delta t, \mathcal{T}', \mathcal{R}' - \mathbf{I}) , \quad (4.18)$$

avec w_1 une autre fonction des termes d'ordre supérieur à Δt^3 . En particulier, on peut tirer certains enseignements pour les trois cas évoqués plus haut

- Pour le cas LBM-BGK standard, on retrouve évidemment $\epsilon\hat{\tau}^{eff} = \epsilon\hat{\tau}$.
- Pour le cas du filtrage de l'opérateur de collision, l'équation (4.11) s'écrit

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} \mathcal{R}(\mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.19)$$

et on trouve pour le temps de relaxation effectif lié à la viscosité

$$\epsilon\hat{\tau}^{eff} = \epsilon\hat{\tau} [\mathbf{I} - (\mathcal{R} - \mathbf{I}) + \mathcal{O}((\mathcal{R} - \mathbf{I})^2)]. \quad (4.20)$$

On en déduit qu'un filtrage d'ordre 2 de l'opérateur de collision ne dégrade pas la précision du schéma LBM.

- Pour le cas du filtrage de la totalité de la fonction de distribution hors équilibre,

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \left[\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_g} \right) \mathcal{R} - \mathbf{I} \right] \mathbf{g}^{neq}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.21)$$

et on trouve pour le temps de relaxation effectif lié à la viscosité

$$\epsilon\hat{\tau}^{eff} = \epsilon\hat{\tau} + \epsilon^2 \hat{\tau}^2 \frac{\mathcal{R} - \mathbf{I}}{\Delta t} + w_2(\epsilon, \Delta t, \mathcal{R} - \mathbf{I}), \quad (4.22)$$

avec w_2 une fonction des termes d'ordre supérieur à Δt^3 . Un filtrage d'ordre 2 de la fonction de distribution hors équilibre ne dégrade donc pas non plus la précision du schéma. Plus intéressant, cette équation montre qu'à l'ordre 1 en nombre de Knudsen (c'est à dire à l'échelle des équations de Navier-Stokes), ce filtrage est d'ordre plus élevé que le filtrage de l'opérateur de collision, et ce pour une même forme de filtre et pour un surcoût quasi nul.

Notons pour finir que le filtrage de la totalité de la fonction hors-équilibre pré-collision est utilisé dans les techniques de raffinement de maillage, par exemple dans [TRL14; Lag+12]. La partie qui précède constitue donc indirectement une analyse de cette méthode de filtrage pour les maillages non-uniformes.

4.1.3 Simplification : filtrage des moments hors équilibre d'ordre 2

Que nous choisissons de filtrer l'opérateur de collision ou la totalité de la fonction hors équilibre, les opérations présentées dans la section précédente impliquent, en $DdQq$, le filtrage de q quantités selon d directions (g_α^{neq} pour $\alpha = 0..q-1$). On obtient donc une méthode assez coûteuse.

Partant de ce constat, nous introduisons dans cette partie une technique de simplification : il s'agit de ne plus filtrer les q composantes de g_α^{neq} mais seulement les moments hors équilibre intervenant à l'échelle des équations de Navier-Stokes, c'est à dire les moments d'ordre 2 liés au tenseur des contraintes visqueuses. Plus précisément, nous faisons le choix de filtrer les $d(d-1)/2 + d$ composantes indépendantes du tenseur $\mathbf{\Pi}^{neq} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha (g_\alpha - g_\alpha^{eq}) = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha g_\alpha^{neq}$ (3 en 2D, 6 en 3D). Notons que nous utilisons la notation $\mathbf{\Pi}$ en lieu et place de $\mathbf{\Pi}_g$ (présente dans la première partie du mémoire) afin d'alléger les notations.

Nous choisissons d'écrire la collision dans l'espace des moments, puisqu'il est naturellement le plus approprié pour notre objectif. Comme nous faisons le choix de filtrer les 6 composantes indépendantes en 3D du tenseur hors équilibre d'ordre 2, nous utilisons la

matrice de transformation \mathbf{M} (3.71) du formalisme MRT^H introduit à la section 3.3.1. Rappelons que, dans l'espace des moments, la collisions sans filtrage s'écrit

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}^{neq}(\mathbf{x}, t), \quad (4.23)$$

avec $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{g}$, $\mathbf{m}^{neq} = \mathbf{M}\mathbf{g}^{neq}$ et \mathbf{S} la matrice diagonale des fréquences de relaxation.

Ainsi, on se propose d'écrire les équations filtrées dans les deux cas étudiés dans la section précédente. Pour un filtrage \mathcal{R} en D3Q19, on note

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}^{neq} = & \left(0, 0, 0, 0, (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{xx}^{neq}], (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{yy}^{neq}], (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{zz}^{neq}], \right. \\ & \left. (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{xy}^{neq}], (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{xz}^{neq}], (\mathcal{R} - \mathbf{I})[\Pi_{yz}^{neq}], 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

On a alors

- dans le cas du filtrage des moments d'ordre 2 dans l'opérateur de collision

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{m}^{neq}(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{m}}^{neq}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (4.25)$$

qui est l'équivalent simplifié du filtrage (4.19), dans un formalisme MRT.

- dans le cas du filtrage de la totalité des moments hors équilibre d'ordre 2

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{m}^{neq}(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{m}}^{neq}(\mathbf{x}, t) \right) + \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{m}}^{neq}(\mathbf{x}, t), \quad (4.26)$$

qui est l'équivalent simplifié du filtrage (4.21), dans un formalisme MRT.

Ces opérations reviennent exactement à remplacer $\mathbf{\Pi}^{neq}$ par sa version filtrée $\mathcal{R}(\mathbf{\Pi}^{neq})$ dans le système aux moments (4.23), soit uniquement dans l'opérateur de collision, soit dans tout le membre de droite.

Le cas particulier d'une relaxation BGK à collision filtrée se retrouve en prenant $\mathbf{S} = \text{diag}(s, \dots, s)$ avec $s = 1/\bar{\tau}_g = \nu/c_s^2 + 1/2$ en unités LBM.

Ainsi, il est immédiatement établi que pour un même filtre \mathcal{R} , cette méthode simplificatrice fournira strictement la même équation macroscopique à l'ordre 1 en nombre de Knudsen (échelle Navier-Stokes) que celle des équations (4.19) et (4.21), le tout avec seulement $d(d-1)/2 + d$ quantités à filtrer, soit 6 en 3D au lieu de 19. En effet, les moments d'ordre supérieurs contenus dans la fonction hors équilibre, qu'ils soient filtrés ou non, n'interviennent pas dans les équations de Navier-Stokes.

Notons que dans cette méthode, le nombre de quantités à filtrer ne dépend pas du réseau de vitesse pour une dimension donnée : la réduction de coût est donc d'autant plus grande que le réseau comporte un nombre important de vitesses discrètes. Pour obtenir le coût calcul le plus faible possible, il est conseillé de se placer dans une représentation aux moments, c'est à dire dans laquelle seuls la fonction de collision, les moments ρ , $\rho\mathbf{u}$ ainsi que les moments hors équilibre de la fonction de distribution sont stockés en chaque point.

Un filtrage compact a également été introduit par Marié et Glocerfelt dans [MG17]. Toutefois, les auteurs n'y introduisent pas la restriction aux moments hors équilibre d'ordre 2 du filtrage de l'opérateur de collision. Par ailleurs, le filtre utilisé souffre des défauts d'isotropie évoqués plus haut. Il est néanmoins tout à fait envisageable de combiner la méthode présentée ici avec celle du calcul dynamique du coefficient de force du filtrage présentée dans [MG17].

4.1.4 Quel modèle LBM filtrer ?

Classiquement, les modèles à filtrage sélectif traitent de l'équation de Boltzmann sur réseau BGK. Toutefois, on peut légitimement se demander s'il ne serait pas judicieux de filtrer un meilleur opérateur de collision que le simple BGK. En effet, pour des calculs industriels complexes, le besoin de stabilité est maximal. De plus, la mise en place d'un modèle à temps de relaxation multiple par rapport à un modèle BGK n'implique qu'un surcoût relativement modéré compte tenu des gains en stabilité apportés.

Filtrer l'équation BGK revient à considérer indirectement que celle-ci constitue un bon modèle de DNS (Direct Numerical Simulation), c'est à dire dans les cas les mieux résolus spatialement et temporellement. En effet, pour une taille de maille suffisamment faible, le filtrage sélectif devient inactif car il n'y a plus d'énergie à filtrer : l'équation BGK filtrée se réduit à la simple équation de Boltzmann sur réseau BGK. Cette interrogation est la même que dans le cas des modèles entropiques, évoqué précédemment. Or, comme nous l'avons vu, il a été démontré que le modèle LBM-BGK ne constitue pas un bon modèle de DNS, en particulier en ce qui concerne le champ de pression (ce qui est donc mauvais sur le plan acoustique) [Pen+10].

Le modèle MRT^H, quant à lui, se prête parfaitement à notre filtrage compact, car les 6 moments d'ordre 2 indépendants y sont bien présents. Cela revient à utiliser l'équation (4.25) ou (4.26) avec les matrices \mathbf{M} et \mathbf{S} de la partie 3.3.1. De plus, notons que le filtrage compact proposé et les temps de relaxation non-hydrodynamiques du modèle MRT^H agissent sur des moments linéairement indépendants. Par conséquent, les deux actions stabilisantes se complètent parfaitement.

Ainsi, dans la suite, nous utiliserons indistinctement le modèle BGK filtré ou MRT^H filtré lorsque ceux-ci donnent des résultats identiques (par exemple sur le cas de l'onde plane longitudinale dans la partie suivante), mais préférerons l'opérateur MRT^H filtré pour les cas les plus exigeants en matière de stabilité. Nous avons pu observer en pratique, sur des cas complexes industriels à très hauts nombre de Reynolds et à nombres de Mach importants, que ce choix était justifié.

Nous n'avons pas pu comparer les temps de restitution réels de ce modèle avec d'autres approches stabilisées comme les modèles Cascaded, Cumulant et les méthodes entropiques. Il nous semblerait toutefois logique que cette approche soit parfaitement compétitive sur ce point, voire même plus rapide, de par sa simplicité et sa compacité.

4.2 Propriétés acoustiques de dispersion et de dissipation

Les propriétés de dispersion du schéma restent rigoureusement inchangées par les filtres symétriques [TWD93 ; Ric+09] : ainsi, notre méthode n'introduit naturellement aucune erreur de dispersion. En revanche, les propriétés de dissipation sont modifiées (c'est l'objectif même du filtrage). Dans cette section, nous n'étudierons donc que la dissipation effective.

4.2.1 Distinction entre l'onde libre et l'onde forcée

Le seul cas physiquement réaliste correspond à celui de l'**onde forcée**, en opposition à l'**onde libre** utilisée dans le cadre de l'analyse linéaire de Von Neumann et des figures 3.3. Cette distinction subtile mais capitale est étudiée en détail dans [Kru+17 ; Vig14b] : en résumé, l'étude de l'onde libre se concentre sur la décroissance *temporelle* de l'amplitude d'une onde plane d'extension infinie, tandis que l'étude de l'onde forcée se concentre sur la décroissance *spatiale* de l'amplitude d'une onde émise à une fréquence donnée en un point

source donné. En particulier, c'est ω qui est un nombre réel et \mathbf{k} un nombre imaginaire pour l'onde forcée et l'inverse pour l'onde libre. L'onde forcée est donc la seule qui possède une réalité physique : l'onde libre n'est qu'un outil d'analyse, mais qui reste nécessaire car il est le seul auquel on puisse appliquer, de par son aspect parfaitement périodique et infini, les techniques de l'analyse de Fourier indispensables à la méthode de Von Neumann. De plus, elle se prête très bien aux calculs numériques, grâce à la possibilité d'implémenter très simplement des conditions aux limites périodiques. Néanmoins, si l'onde libre n'a pas de réalité physique concrète, elle permet de déduire certains paramètres physiques utiles car partagés avec l'onde forcée : c'est en particulier le cas de la viscosité effective, que nous chercherons à déterminer dans les sections suivantes.

En effet, que l'onde soit libre ou forcée, on montre (voir [Krü+17 ; Vig14b]) que l'atténuation d'une onde sonore dépend de la quantité

$$\mathcal{N} = \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{2}\xi , \quad (4.27)$$

avec, on le rappelle, ξ la viscosité cinétique de volume. Dans un calcul LBM-BGK (ou dans tout modèle LBM ne modifiant pas la viscosité de volume du modèle BGK), la quantité effective \mathcal{N}^{eff} vaut $\mathcal{N}^{eff} = \nu^{eff}$, car on rappelle que $\xi = (2/3)\nu$ en BGK. Par conséquent ondes libres et forcées dépendent dans notre cas du même paramètre $\mathcal{N}^{eff} = \nu^{eff}$.

4.2.2 Dissipation effective pour une onde libre

En première analyse, nous pouvons estimer le surplus de viscosité apporté par le filtrage en utilisant le cas de l'onde plane infinie dans la direction x , déjà présenté dans la section 3.3 et dans [MRS09 ; Mar08], qui correspond donc au cas de l'onde libre.

Quelques notations sont introduites dans la table 4.1 en vue de présenter des comparaisons numériques entre différents types de filtrage pour le cas de l'onde libre. Dans cette table, les filtres utilisés pour $sfLap$ et $sfLap2$ correspondent à la formule (4.6). Les filtres $sf5$ et $sf7$ sont définis et utilisés dans [Ric+09] : ils correspondent à l'équation (3.99) pour $d = 3$ et respectivement $N = 2$ et $N = 3$. Nous présentons dans les deux dernières lignes, sans notation associée, les résultats pour l'utilisation de $sf5$ et $sf7$ sur l'opérateur de collision, comme utilisés dans [Ric+09]. Pour notre étude, un filtre est défini comme compact s'il ne nécessite pas d'autres points que ceux du réseau D3Q19. Les données présentées dans cette table ne dépendent pas de l'opérateur de collision utilisé. Nous faisons aussi apparaître le nombre d'opérations en fonction de la méthode de filtrage, défini comme le produit du nombre de quantités à filtrer par le nombre de points du filtre, le tout en 3D. On y voit que le fait de restreindre le filtrage de l'opérateur de collision seulement aux 6 moments hors équilibre d'ordre 2 induit un gain en coût calcul très important en comparaison du filtrage de l'opérateur de collision complet utilisé dans [Ric+09].

Nous présentons des résultats numériques pour plusieurs types de filtrage, définis dans les 3 premières lignes de la table 4.1 : le filtrage compact de l'opérateur de collision introduit dans la partie précédente, ainsi que le filtrage des variables macroscopiques développé dans [Ric+09] et dans la section 3.5 pour des filtres d'ordre 4 ($sf5$) et 6 ($sf7$).

Nous affichons sur la figure 4.3 le rapport de la viscosité effective sur la viscosité moléculaire (imposée ici à sa valeur physique dans l'air, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$), en fonction du nombre d'onde, pour les modèles présentés dans la table 4.1. Rappelons que nombre d'onde longitudinal $k_x^* = k_x \Delta x$ est une mesure directe de la résolution du calcul pour l'onde en question : très sous-résolu pour $k_x^* \rightarrow \pi$, infiniment résolu pour $k_x^* \rightarrow 0$.

Notation	Quantité filtrée	Nombre de points	Nombre d'opérations	Filtre compact
BGK^{sfLap}	Moments hors équilibre (Opérateur de collision), Eq. (4.25)	19	114	Oui
BGK^{sfLap2}	Moments hors équilibre, Eq. (4.26)	19	114	Oui
BGK^{sf5}	Quantités macroscopiques, Eq. (3.101)	13	52	Non
BGK^{sf7}	Quantités macroscopiques, Eq. (3.101)	19	76	Non
-	Opérateur de collision, Eq. (3.102), $sf5$	13	247	Non
-	Opérateur de collision, Eq. (3.102), $sf7$	19	361	Non

TABLE 4.1 – Notation pour les filtrages testés dans cette partie.

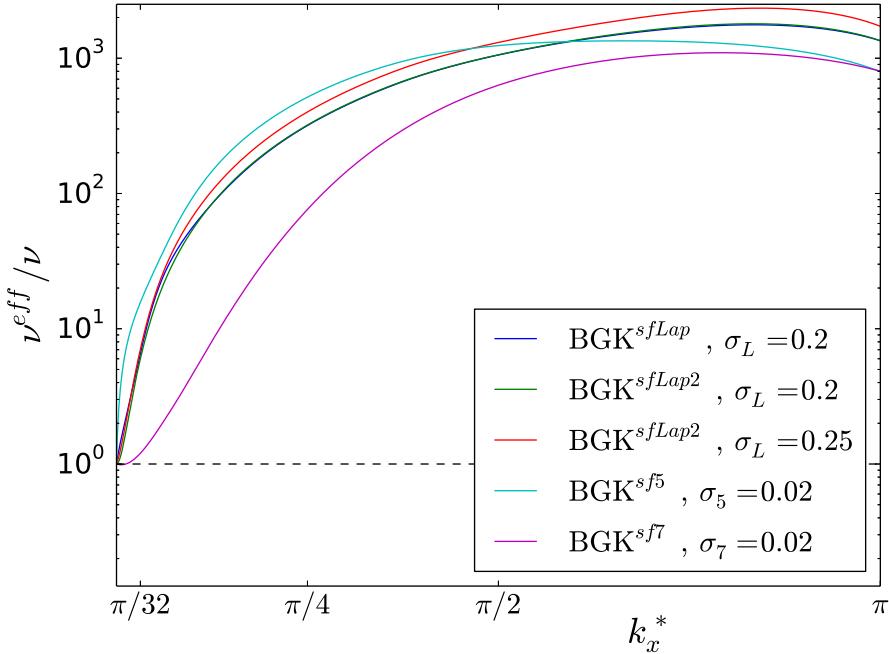


FIGURE 4.3 – Viscosité effective pour une onde libre plane unidimensionnelle dans une simulation LBM-BGK filtrée. Comparaison pour plusieurs valeurs de σ_L avec les deux méthodes alternatives simplifiées de ce chapitre, ainsi qu'avec une méthode de filtrage des variables macroscopiques, pour des filtres sélectifs sur 5 et 7 points (légende table 4.1). Les courbes correspondent à une interpolation polynomiale entre plusieurs points de mesure (non représentés pour ne pas surcharger la figure), à savoir $k_x^* \in \{\pi/256; \pi/64; \pi/32; \pi/16; \pi/8; \pi/4; \pi/3; 2\pi/5; \pi/2; 2\pi/3; \pi\}$. Les résultats sont identiques pour un modèle MRT^H filtré.

Nous observons un résultat attendu, comparé à la courbe théorique sans filtrage (figure 3.3) : la viscosité effective est augmentée dans les grands nombres d'onde, tout en restant

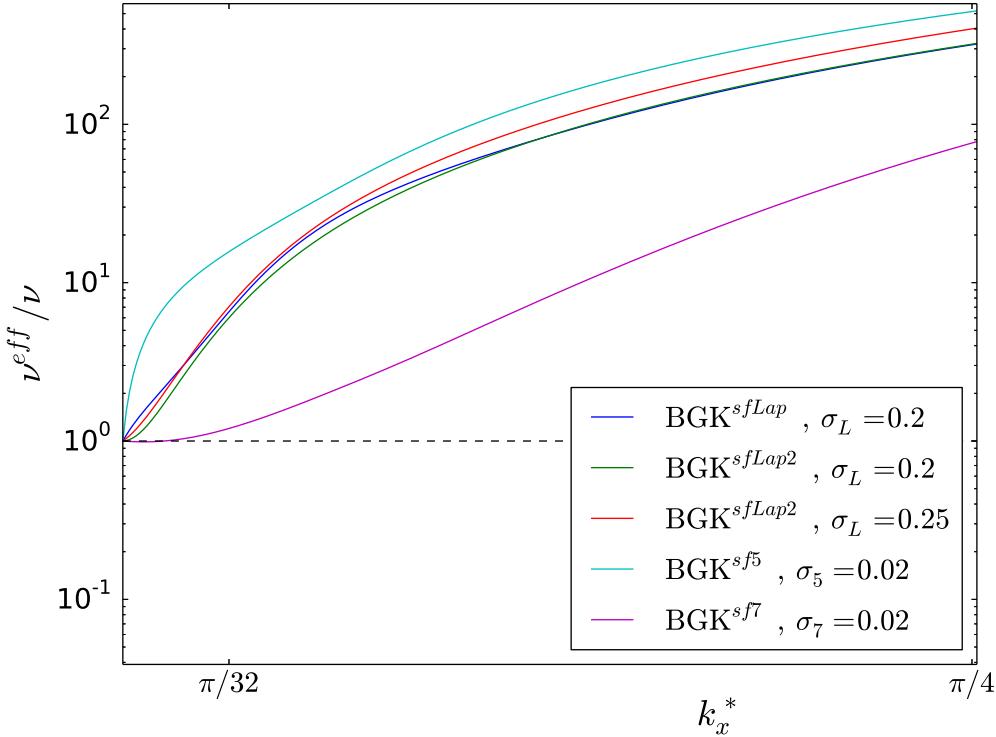


FIGURE 4.4 – Zoom sur la figure 4.3.

égale à sa valeur nominale pour des cas très bien résolus. Pour un même coefficient de filtrage, on observe une très grande différence entre les filtrages *sf5* et *sf7* pour le filtrage des variables macroscopiques. Concernant les filtrages *sfLap* et *sfLap2*, on confirme le fait que, pour un même coefficient de filtrage, le filtrage *sfLap2* est moins dissipatif dans les bas nombres d'onde du fait de l'annulation du terme d'erreur d'ordre 2 en temps dans la viscosité effective. Ceci, à défaut d'avoir un immense impact pour l'acoustique (hors propagation en champ "très lointain"), peut avoir une grande influence sur le nombre de Reynolds effectif dans un écoulement turbulent. Nous étudierons ce point dans la section 4.3.

Le coefficient multiplicateur obtenu sur la viscosité peut paraître très élevé pour certaines longueurs d'ondes, et laisse craindre une trop grande dissipation des ondes acoustiques en pratique. Toutefois, cette inquiétude doit être très largement tempérée par les éléments qui vont suivre.

4.2.3 Atténuation acoustique d'une onde forcée

Cherchons à quantifier l'effet d'atténuation des ondes sonores pour un filtrage donné dans des cas réalistes, c'est à dire dans le cas d'une onde forcée.

Pour l'onde forcée, Viggen [Krü+17; Vig14b] montre que l'équation de dispersion LBM pour le mode acoustique positif s'écrit à l'ordre 4, pour une onde de pulsation ω donnée et unidimensionnelle d'axe x :

$$k_x = \frac{\omega}{c_0} + \frac{\omega^3 \Delta t^2}{c_0} + i \frac{\omega^2 \mathcal{N}}{c_0^3} \left(1 + \frac{5\omega^2 \Delta t^2}{12} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.28)$$

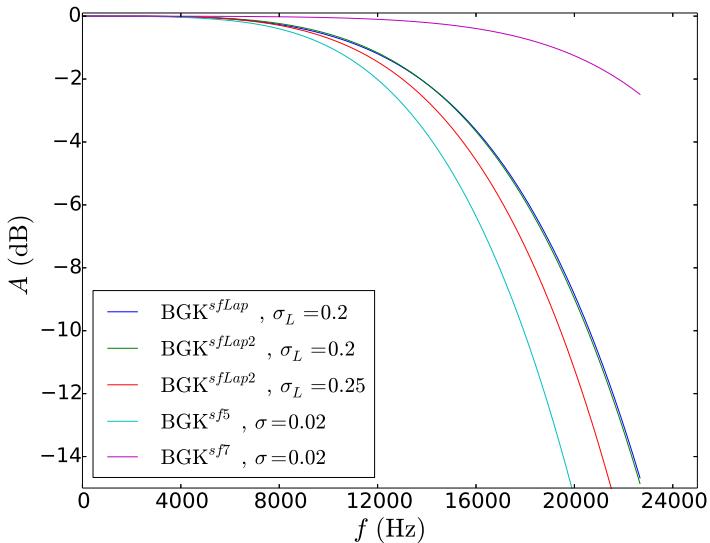
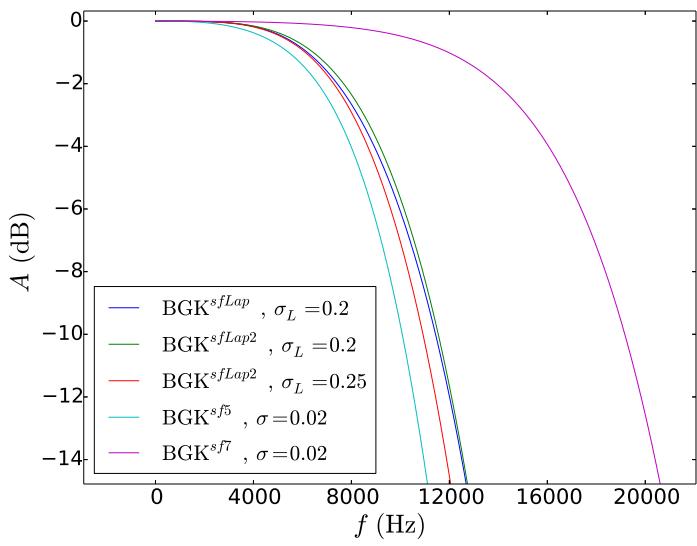
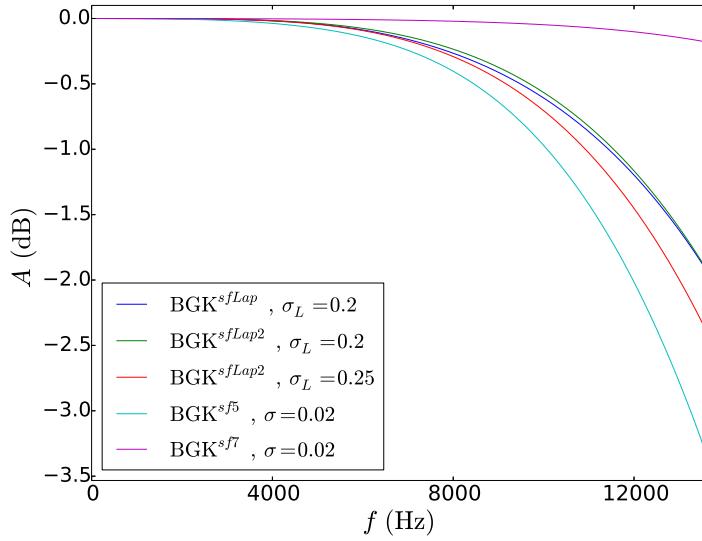
(a) $\Delta x = 1.5 \text{ mm}, L = 1 \text{ m}$ (b) $\Delta x = 1.5 \text{ mm}, L = 10 \text{ m}$

FIGURE 4.5 – Atténuation des ondes acoustiques forcées unidimensionnelles en fonction de la fréquence dans des simulations LBM-BGK filtrées avec $\Delta x = 1.5 \text{ mm}$ et $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, pour deux distances au point source. Seules les fréquences correspondant à $k_x^* < \pi/5$ sont affichées (limitation de l'erreur de dispersion à 1%). Les résultats sont identiques pour un modèle MRT^H filtré.

(notre convention de signe pour l'onde plane est inversée par rapport à celle de Viggen) où le nombre de Knudsen apparaît comme étant $\epsilon = \omega\mathcal{N}/c_0^2$, ce qui est parfaitement cohérent avec notre étude du chapitre précédent. Le modèle de Boltzmann utilisé pour établir (4.28) est le D1Q3 BGK, sans aucun filtrage supplémentaire : comme précisé par Viggen [Vig14a], les modèles tridimensionnels possèdent tous le D1Q3 comme projection unidimensionnelle, ce qui rend l'étude du D1Q3 tout à fait rigoureuse pour le cas particulier d'une onde unidimensionnelle. L'équation (4.28) est le pendant, pour un des modes acous-

FIGURE 4.6 – Gros plan sur l’atténuation en fonction de la fréquence à $L = 1$ m

tiques, de l’équation (3.5) pour l’onde forcée. L’étude de la partie imaginaire de la relation de dispersion de ce mode acoustique donne son taux de dissipation : soit $k_x = k'_x + ik''_x$, on a

$$\Im(k_x) = k''_x = \frac{\omega^2 \mathcal{N}}{c_0^3} \left(1 + \frac{5\omega^2 \Delta t^2}{12} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.29)$$

ce qui permet d’écrire pour l’évolution de la densité de l’onde forcée d’amplitude initiale $\widehat{\rho}'$

$$\widehat{\rho}' = \widehat{\rho}'_0 \exp[i(k_x x - \omega t)] = \widehat{\rho}'_0 \exp(-k''_x x) \exp[i(k'_x x - \omega t)]. \quad (4.30)$$

On voit que k''_x détermine la dissipation de l’onde à mesure qu’elle se propage depuis son point source. On peut définir, pour une distance L au point source, l’atténuation A (exprimée en décibels) pour l’énergie d’une onde forcée comme

$$A = 20 \log(e^{-k''_x L}) \quad (4.31)$$

Il est donc possible d’utiliser la valeur $\mathcal{N}^{eff} = \nu^{eff}$ obtenue dans le cas du calcul sur l’onde libre pour étudier la dissipation de l’onde forcée, en remplaçant \mathcal{N} par \mathcal{N}^{eff} dans (4.29) pour chaque fréquence. Le fait que l’équation (4.29) ait été établie pour un modèle BGK non filtré ne pose pas de problème : en effet, nous avons montré que les méthodes de filtrage introduites dans ce chapitre (filtrage de l’opérateur de collision ou de la fonction de distribution hors équilibre pré-collision) sont rigoureusement équivalentes à un modèle BGK dans lequel le temps de relaxation effectif dépendrait du nombre d’onde (et donc, pour une onde acoustique donnée, de la fréquence). Or le temps de relaxation BGK est, nous l’avons vu maintes fois, directement relié à la viscosité, c’est à dire à \mathcal{N} . Par conséquent, substituer \mathcal{N} par \mathcal{N}^{eff} dans (4.29) pour chaque fréquence revient bien à substituer le modèle filtré étudié au modèle non filtré. Ces considérations ne sont en revanche pas rigoureusement valables dans le cas où ces variables macroscopiques sont filtrées (par exemple avec des filtres sur 5 ou 7 points par direction), puisque ce type de filtrage ne se réinterprète pas comme un modèle BGK à temps de relaxation effectif. Pour ces filtrages, la substitution restant néanmoins correcte à l’ordre dominant ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$ et $\mathcal{O}(\epsilon^2)$) du fait

de leur ordre élevé, nous utiliserons cette approximation pour en montrer les grandes tendances.

En résumé, l'expression (4.31) permet, pour une onde acoustique forcée d'une fréquence donnée, pour une simulation LBM à Δt (où, de façon équivalente par la condition CFL, Δx) donné et \mathcal{N}^{eff} donné, de connaître la dissipation de l'onde sonore après avoir parcouru une distance L depuis sa source.

Si on ne se concentre que sur une plage de fréquence où l'erreur de dispersion est très faible (c'est à dire où la vitesse de propagation des ondes sonores vaut $c \simeq c_0$), la relation entre la fréquence réelle et le nombre d'onde en unités LBM $k_x^* = k_x \Delta x$ est donnée immédiatement par

$$f = \frac{k_x^* c_0}{2\pi \Delta x}. \quad (4.32)$$

Ici, nous nous limiterons à $k_x^* < \pi/5$, ce qui fournit une erreur de dispersion inférieure à 1% (voir figure 3.3) et assure la validité de la relation (4.32). Ce choix de se limiter à des fréquences faibles nécessite tout de même l'inclusion du terme en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ dans l'expression (4.29). En effet, $\pi/5$ est certes une valeur faible par rapport à π , mais non négligeable. En dehors même des aspects de résolution spatiale et temporelle du calcul (pilotée par k_x^*), le terme en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ dans (4.29) nous limite de toute façon à étudier des fréquences raisonnables. Les fréquences étudiées en aéroacoustiques dans l'air ($f < 20$ kHz) ne posent cependant aucun problème en LBM athermale pour ce qui est de la limitation liée aux faibles nombre de Knudsen : seule la résolution du calcul est un facteur limitant. Cette restriction aux fréquences "faibles" (pouvant néanmoins monter largement au dessus de 20 kHz, selon la résolution spatio-temporelle choisie) permet également de rendre raisonnable l'approximation évoquée plus haut par rapport aux filtrages sur les variables macroscopiques. Quoi qu'il arrive, la méthode LBM athermale n'est pas faite pour étudier les ondes à ultra hautes fréquences

Nous présentons sur la figure 4.5 l'atténuation effective des ondes sonores longitudinales pour des calculs LBM-BGK filtrés, le tout en l'absence de champ moyen et dans des conditions réelles plausibles ($\Delta x = 1.5$ mm et $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m²/s) et deux distances au point source différentes. Seule la plage de fréquence correspondant à $k_x^* < \pi/5$ est affichée. Cette figure nous montre que le coefficient du filtrage doit être, quelle que soit la méthode de filtrage choisie, calibré avec prudence en fonction de l'application aéroacoustique visée (propagation en champ très proche, proche ou lointain). Dans notre cas particulier, nous nous situons bien plus proche de $L = 1$ m que de $L = 10$ m. Notons enfin que les courbes de la figure 4.5 sont identiques si c'est l'opérateur MRT^H qui est filtré. Les variations entre BGK et MRT^H filtrés surviennent pour d'autres orientations du vecteur d'onde et aussi sans doute avec l'application d'un champ de vitesse moyen. Nous n'avons pas étudié ces cas dans ce mémoire.

4.3 Utilisation comme méthode LES implicite : développement temporel d'une couche de mélange

4.3.1 LES implicite : une courte introduction

Dans cette section, nous testons l'utilisation de ce filtrage compact comme méthode LES implicite (souvent abrégé en ILES pour Implicit Large Eddy Simulation). Ces techniques permettent une simulation d'écoulements turbulents sans inclusion explicite d'un terme de sous-maille [GMR07 ; MRG06]. Plusieurs auteurs utilisent, dans les schémas basés sur les équations de Navier-Stokes pour l'aéroacoustique, des techniques de filtrage sélec-

tif qui permettent indirectement de simuler correctement la turbulence [BB06b ; Ber+11 ; BBB08]. Nous verrons également dans la partie III en quoi une méthode LES implicite par filtrage peut indirectement avoir un intérêt dans le cadre de maillages non-uniformes (voir section 6.4.3).

Concernant l'existence de ce genre de stratégies appliquées à la méthode de Boltzmann sur réseau, citons d'abord les travaux effectués avec la méthode Cascaded Lattice Boltzmann [GGK06 ; GUK13] ou Cumulant Lattice Boltzmann [Kia+17 ; Far+16 ; GPS17]. Nous pouvons également citer le travail de Malaspinas et Sagaut sur le portage en LBM du modèle ADM (Approximate Deconvolution Model), basé sur un filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau [MS11] (en l'occurrence, il s'agit d'un filtrage de la totalité de la fonction de distribution). Un travail récent de Marié et Gloerfelt [MG17] montre également comment le filtrage sélectif (sur l'opérateur de collision ou sur les variables macroscopiques) peut être utilisé pour des simulations turbulentes.

Notre objectif dans la section qui va suivre est de déterminer si l'hyperviscosité introduite dans les hauts nombres d'onde par notre filtrage compact permet la simulation des comportements turbulents. En particulier, nous concentrerons notre analyse sur le développement temporel d'une couche de mélange turbulente tridimensionnelle à très haut nombre de Reynolds ($Re = 10^6$).

Toutefois, précisons d'emblée qu'il s'agit là d'une **étude préliminaire**. Des efforts théoriques supplémentaires seront requis pour relier plus rigoureusement l'hyperviscosité introduite par le filtrage et la dissipation dans les équations fluides équivalentes. On pourra se référer aux travaux de Borue et Orszag concernant l'utilisation de l'hyperviscosité pour la simulation de la turbulence [BO95a ; BO95b]. Il s'agira à l'avenir de fournir une méthode de calcul bien plus rigoureuse du coefficient de force du filtrage.

Précisons aussi que **l'une des motivations principale de cette partie de notre travail est liée à nos recherches sur les maillages non-uniformes**, comme nous le montrerons dans la partie III. En effet, la méthode de l'hyperviscosité, introduite par filtrage sélectif, permet de décaler le comportement spectral de la dissipation vers les hautes fréquences et ainsi minimiser le phénomène de repliement spectral aux transitions de résolution du maillage. Ces points seront largement discutés dans la partie III.

4.3.2 Développement temporel d'une couche de mélange à haut Reynolds : description du cas test

Ce cas test est étudié en détail, entre autres, dans les études de Vreman *et al.* [VGK97] et Terracol *et al.* [TSB03], ainsi que dans [MS11 ; MS12]. Nous introduisons une vitesse de référence U , une densité de référence ρ_0 ainsi que des longueur L et δ_0 (δ_0 est nommée *épaisseur de vorticité* initiale [VGK97 ; TSB03]). Pour décrire la mise en donnée, nous faisons appel au système adimensionnel suivant :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad ; \quad \tilde{L} = \frac{L}{\delta_0/2} \quad ; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad ; \quad \tilde{x} = \frac{x}{\delta_0/2} \quad ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta_0/2} \quad ; \quad \tilde{z} = \frac{z}{\delta_0/2} \quad (4.33)$$

À la manière de Vreman *et al.*, le domaine est défini de taille $[0; \tilde{L}] \times [-\tilde{L}/2; \tilde{L}/2] \times [0; \tilde{L}]$ avec $\tilde{L} = 120$. La résolution est de $120 \times 120 \times 120$, ce qui implique $\Delta x = \delta_0/2$. L'état

initial est défini comme

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = \tanh(\tilde{y}) + \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \tilde{u}_y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \tilde{\rho} = 1 \end{cases} \quad (4.34)$$

où $\mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = b(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\exp(-\tilde{y}^2/4)$, avec b un bruit blanc d'amplitude 0.05. Notons que l'amplitude du bruit blanc initial, permettant la déstabilisation de la couche de mélange, a une grande influence : si celle-ci est trop importante, l'écoulement évolue de façon non physique. Le nombre de Reynolds est basé sur la demie épaisseur de vorticité initiale : $Re = U\delta_0/(2\nu)$ avec ν la viscosité cinématique. Le nombre de Mach est défini comme $Ma = U/c_0 = U\Delta t/(c_s\Delta x)$. Nous fixons $Re = 10^6$ et $Ma = 0.2$. Le nombre de Mach détermine directement, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la vitesse en unités LBM. Avec ces choix, δ_0 et Δt sont des paramètres libres. Nous choisissons $\delta_0 = 1$ m, soit $\Delta x = 0.5$ m et $\Delta t = 0.005$ s. Ceci qui fournit $\bar{\tau}_g = 0.5 + 7 \cdot 10^{-9}$, soit un cas non-idéal de forte sur-relaxation.

Notons que pour de tels nombres de Reynolds, la viscosité nominale ν n'a plus qu'un effet négligeable : la dissipation est contrôlée soit par le terme de sous-maille lorsqu'il existe, soit par la dissipation numérique intrinsèque du schéma, soit par les méthodes additionnelles de filtrage sélectif [TSB03].

4.3.3 Modèles utilisés pour l'étude comparative

Nous présentons ici l'ensemble des modèles que nous avons utilisés pour les comparaisons de la section suivante. Nous utiliserons pour toutes les simulations LBM le modèle de collision MRT^H présenté dans la section 3.3. À partir de ce modèle, nous testerons les combinaisons suivantes :

- Le modèle MRT^H avec filtrage sélectif compact basé sur la discrétisation du Laplacien sur 19 points (les méthodes *sfLap* et *sfLap2* développées dans la section précédente), que nous nommerons **MRT^{H,sfLap}** et **MRT^{H,sfLap2}**. Il s'agit donc d'une méthode LES implicite.
- Le modèle MRT^H associé à un terme de sous-maille explicite de type **Smagorinsky** pour la gestion de la turbulence, que nous nommerons **MRT^{H,Smag}**. L'ajout du terme de sous-maille se fait via la modification du temps de relaxation lié à la viscosité : $\bar{\tau}_g$. Ce dernier devient

$$\bar{\tau}_g = \frac{\nu + \nu_t}{c_s^2} + \frac{1}{2}, \quad (4.35)$$

avec ν_t la viscosité turbulente et, en notant \mathbf{S} le tenseur des contraintes visqueuses et $|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, toujours en unités LBM,

$$\nu_t = (C_s\Delta x)^2 |\bar{\mathbf{S}}|. \quad (4.36)$$

C_s est la constante de Smagorinsky, choisie à une valeur classique, $C_s = 0.18$. Dans notre implémentation, nous calculons simplement le tenseur des contraintes via un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 sur le champ de vitesse. Notons qu'il est courant d'utiliser une implémentation qui exploite le lien entre le tenseur des contraintes et le tenseur hors équilibre Π^{neq} [MS12].

- Le modèle MRT^H associé à un terme de sous-maille explicite de type **SISM** (Shear improved Smagorinsky) [Lév+07; TRL14] que nous nommerons **MRT^{H,SISM}**. Ce modèle s'écrit

$$\nu_t = (C_s \Delta x)^2 \left(|\bar{\mathbf{S}}| - |<\bar{\mathbf{S}}>| \right), \quad (4.37)$$

où $C_s = 0.18$ et $<>$ désigne une moyenne d'ensemble. En pratique, l'opérateur $<>$ est choisi comme un filtre temporel récursif, détaillé dans [Cah+10] et utilisé dans [TRL14]. Les meilleurs résultats sont obtenus dans notre cas pour une fréquence du filtre $f_c \leq 1$ Hz : nous la fixons à $f_c = 1$ Hz [Cah+10]. L'objectif du modèle SISM est de réduire la dissipation excessive introduite par le modèle de Smagorinsky dans les écoulements fortement cisaillés, en retranchant l'effet du cisaillement moyen. Nous calculons $|\bar{\mathbf{S}}|$ avec la même méthode que pour notre implémentation du modèle de Smagorinsky.

Nous résumons les notations dans la table 4.2.

Notation	Filtrage sélectif	Modèle de sous-maille	Paramètres du modèle
MRT ^{H,sfLap}	Eq. (4.25)	-	$\sigma_L = 0.2$
MRT ^{H,sfLap2}	Eq. (4.26)	-	$\sigma_L = 0.2, \sigma_L = 0.25$
MRT ^{H,Smag}	-	Smagorinsky	$C_s = 0.18$
MRT ^{H,SISM}	-	SISM	$C_s = 0.18, f_c = 1$ Hz
Terracol Smag [TSB03]	-	Smagorinsky	$C_s = 0.18$
Terracol ML [TSB03]	-	Smagorinsky (*)	$C_s = 0.18$

TABLE 4.2 – Notations introduites dans cette partie en vue des applications numériques. Les filtres utilisés pour sfLap et sfLap2 correspondent à la formule (4.6). (*) Dans ce modèle, la fermeture avec un modèle de Smagorinsky intervient sur le niveau le plus fin de la simulation multi-niveaux.

À un nombre de Reynolds aussi élevé, il n'existe bien entendu aucune DNS à laquelle se mesurer. Nous nous comparerons donc aux calculs LES quasi-inviscidés de Terracol et al. [TSB03], qui font appel à des schémas basés sur les équations de Navier-Stokes. Nous comparerons nos résultats à l'implémentation du modèle de Smagorinsky de Terracol et al. (abrégé HiMix-LES dans [TSB03] et Smag ici), ainsi qu'à leurs résultats obtenus avec un modèle multi-niveaux (abrégé HiMix-ML dans [TSB03] et ML ici) dont la fermeture est obtenue, au niveau le plus fin, par un modèle de Smagorinsky.

4.3.4 Autosimilarité et spectres turbulents

En guise d'illustration, nous affichons sur la figure 4.7 le tracé de la valeur absolue de la vorticité pour le cas du modèle MRT^{H,sfLap2} avec $\sigma_L = 0.25$, à un temps $\tau = 300$.

Le développement temporel d'une couche de mélange possède des propriétés d'autosimilarité [V GK97 ; TSB03]. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_m . On définit cette quantité par

$$\delta_m(t) = \frac{1}{4} \int_{-\tilde{L}/2}^{\tilde{L}/2} \left(1 - <\tilde{u}_x>_{xz}^2 \right) d\tilde{y}, \quad (4.38)$$

où $<>_{xz}$ désigne l'opération de moyennage, pour \tilde{y} donné, sur les plans xz . On trace classiquement son évolution par rapport à la variable réduite $\tau = 2tU/\delta_0$ où t représente le

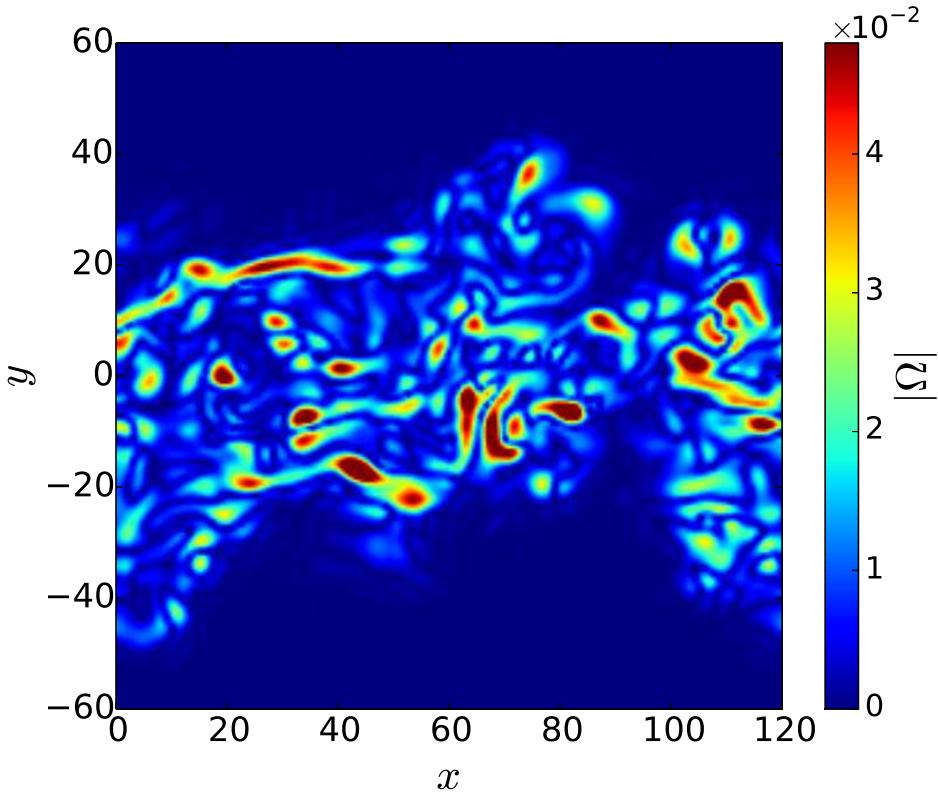


FIGURE 4.7 – Tracé de la vorticité à $\tau = 300$ et sur le plan $\tilde{z} = \tilde{L}/2 = 60$: exemple du modèle MRT^{*H,sfLap2*} avec $\sigma_L = 0.25$.

temps, tracée ici sur la figure 4.8. Une évolution linéaire ou quasi-linéaire par morceaux de l'épaisseur de quantité de mouvement est attendue à mesure que les tourbillons s'apparent. L'instant auquel démarre la transition vers la turbulence dépend du schéma numérique et du modèle de turbulence s'il existe : du point de vue turbulent, seule la pente après le début de la transition a une importance. En l'occurrence, on remarque sur la figure 4.8 que les modèles testés possèdent un comportement tout à fait satisfaisant.

L'instant auquel démarre la transition peut en revanche renseigner sur la dissipation introduite par les divers modèles en phase laminaire : selon ce critère, on voit, comme attendu, que le modèle SISM est moins dissipatif en phase laminaire que le modèle de Smagorinsky. De même, comme on pouvait aussi s'y attendre, les modèles *sfLap* et *sfLap2* sont moins dissipatifs que le modèle de Smagorinsky en phase laminaire. En effet, le filtrage sélectif fait apparaître des dérivées d'ordre supérieur à 2 de $\boldsymbol{\Pi}^{neq} \sim \rho \boldsymbol{S}$: or, en régime cisaillé laminaire, ces dérivées d'ordre élevé de \boldsymbol{S} sont nulles. On remarque que *sfLap2* est moins dissipatif que *sfLap* en phase laminaire : cela confirme une nouvelle fois le fait que le filtrage *sfLap2* est d'ordre plus élevé que *sfLap*. L'hyperviscosité induite par le terme d'ordre 2 en temps présent dans la viscosité effective théorique de *sfLap* (Eq. 4.20) a un effet bien visible ici. À noter que le comportement du modèle SISM est moins satisfaisant si f_c est augmentée (c'est à dire si la dissipation de sous maille est diminuée).

Dans un second temps, nous testons l'autosimilarité de la vitesse moyenne longitudinale, notée $\langle \tilde{u}_x \rangle$. Celle-ci est tracée à plusieurs instants en fonction de τ . Une super-

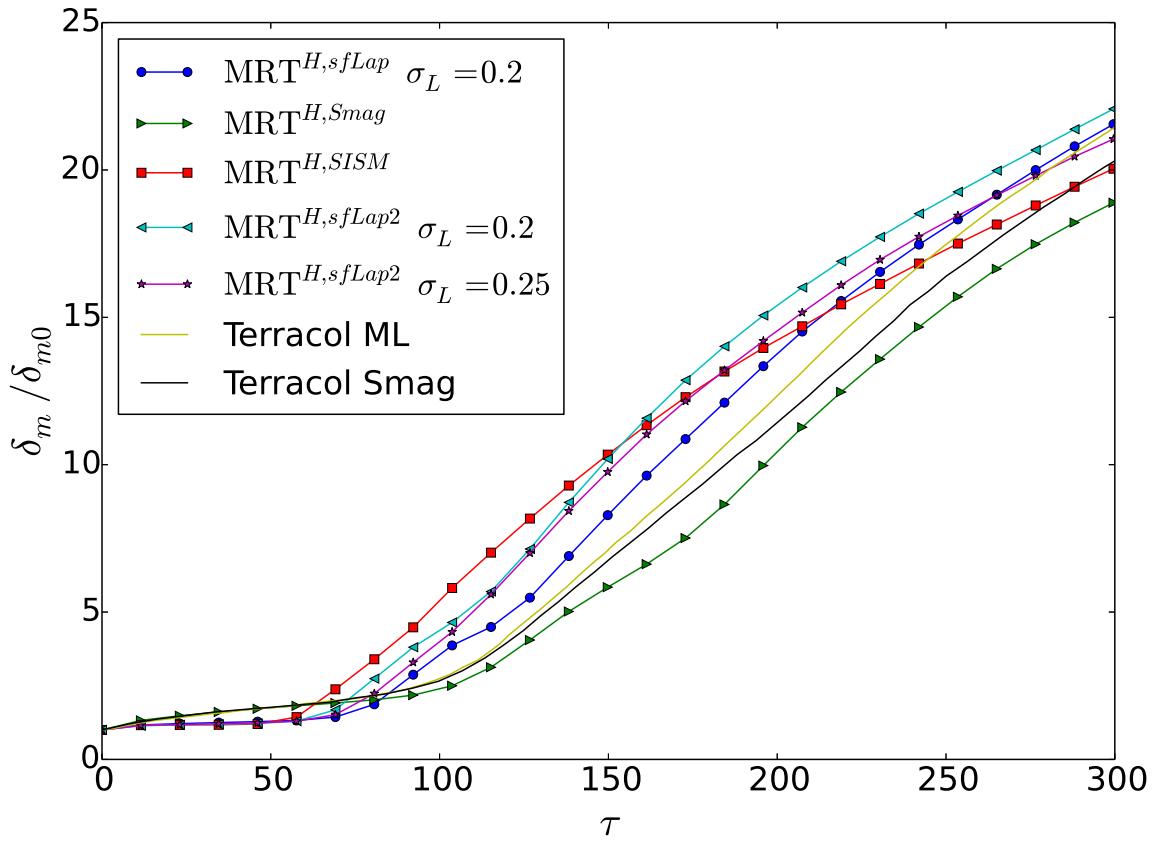


FIGURE 4.8 – Profils d'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement (réduite par rapport à sa valeur initiale δ_{m0}) en fonction de $\tau = 2tU/\delta_0$.

position des profils est attendue, confirmée pour toutes nos simulations LBM sur la figure 4.9. Notons que pour chaque modèle, l'intervalle sur lequel les tracés sont présentés varie : cela est dû au fait que les phases autosimilaires ne surviennent pas aux même instants puisque l'instant de la transition turbulente est différent selon le modèle. De plus, l'état autosimilaire n'est pas unique : il dépend des conditions initiales (qui ici sont aléatoires).

On teste aussi classiquement la superposition des profils de fluctuations RMS (Root Mean Square, racine de la valeur moyenne des carrés) de la vitesse longitudinale. Le tout est tracé sur la figure 4.11

Nous pouvons enfin tracer le spectre turbulent longitudinal $E(k_x^*)$ au centre du domaine ($\tilde{y} = 0$), lorsque la couche de mélange est pleinement développée. Ce spectre est calculé selon la formule

$$E(k_x^*) = \frac{1}{N_x} < |\mathcal{F}(\tilde{u}'_x)|^2 >_{xz} \quad (4.39)$$

avec \mathcal{F} la transformée de Fourier discrète, $N_x = 120$, $\tilde{u}'_x = \tilde{u}_x - < \tilde{u}_x >_{xz}$. Un profil classique en $(k_x^*)^{-5/3}$ est attendu. Notons que nos simulations sont moins résolues spatialement que les simulations de [TSB03], puisque dans [TSB03] le maillage est raffiné dans la couche de cisaillement au centre du domaine. Cela ne nous empêche pas d'obtenir des spectres très satisfaisants sur la figure 4.10. On remarque que le modèle SISM est, comme attendu, le moins dissipatif dans les hauts nombres d'onde. Le modèle implicite avec filtrage *sfLap* est légèrement plus dissipatif que les autres : on retrouve à nouveau le fait que la méthode

CHAPITRE 4. DÉVELOPPEMENT D'UN FILTRAGE SÉLECTIF COMPACT
116 ALTERNATIF : ÉTUDE ACOUSTIQUE ET TURBULENTE

sfLap est d'ordre inférieur à *sfLap2*. Pour le reste, les spectres obtenus avec *sfLap2* et le modèle de Smagorinsky sont quasi superposés : ceci est tout à fait rassurant puisque pour les très hauts nombres de Reynolds, le modèle de Smagorinsky fournit le bon taux de dissipation en turbulence pleinement développée [TSB03].

On peut conclure de ces analyses que le filtrage compact proposé possède des propriétés intéressantes dans le cadre d'une simulation implicite de la turbulence. Pour la suite, nous conserverons le modèle *sfLap2* avec $\sigma_L = 0.25$. Celui-ci fournit des résultats très satisfaisants et bien moins dissipatifs que le modèle de Smagorinsky en phase laminaire, ce qui ouvre la possibilité d'applications à plus bas nombres de Reynolds. De plus, sur des configurations industrielles complexes à très haut nombre de Reynolds, le modèle SISM, sans filtrage additionnel, est trop peu dissipatif (même pour f_c faible) et tend à donner des simulations instables.

Bien entendu, fournir une réponse complète à la question de savoir à quel point le modèle *sfLap2* est pertinent pour une méthode ILES demanderait des analyses complémentaires. Il y a toutefois manifestement de bonnes raisons de penser qu'un tel filtrage du tenseur des contraintes fournit un modèle satisfaisant, notamment si l'on prend en compte sa grande robustesse, son coût calcul très largement réduit par rapport à la méthode classique de filtrage de l'opérateur de collision et sa simplicité d'implémentation.

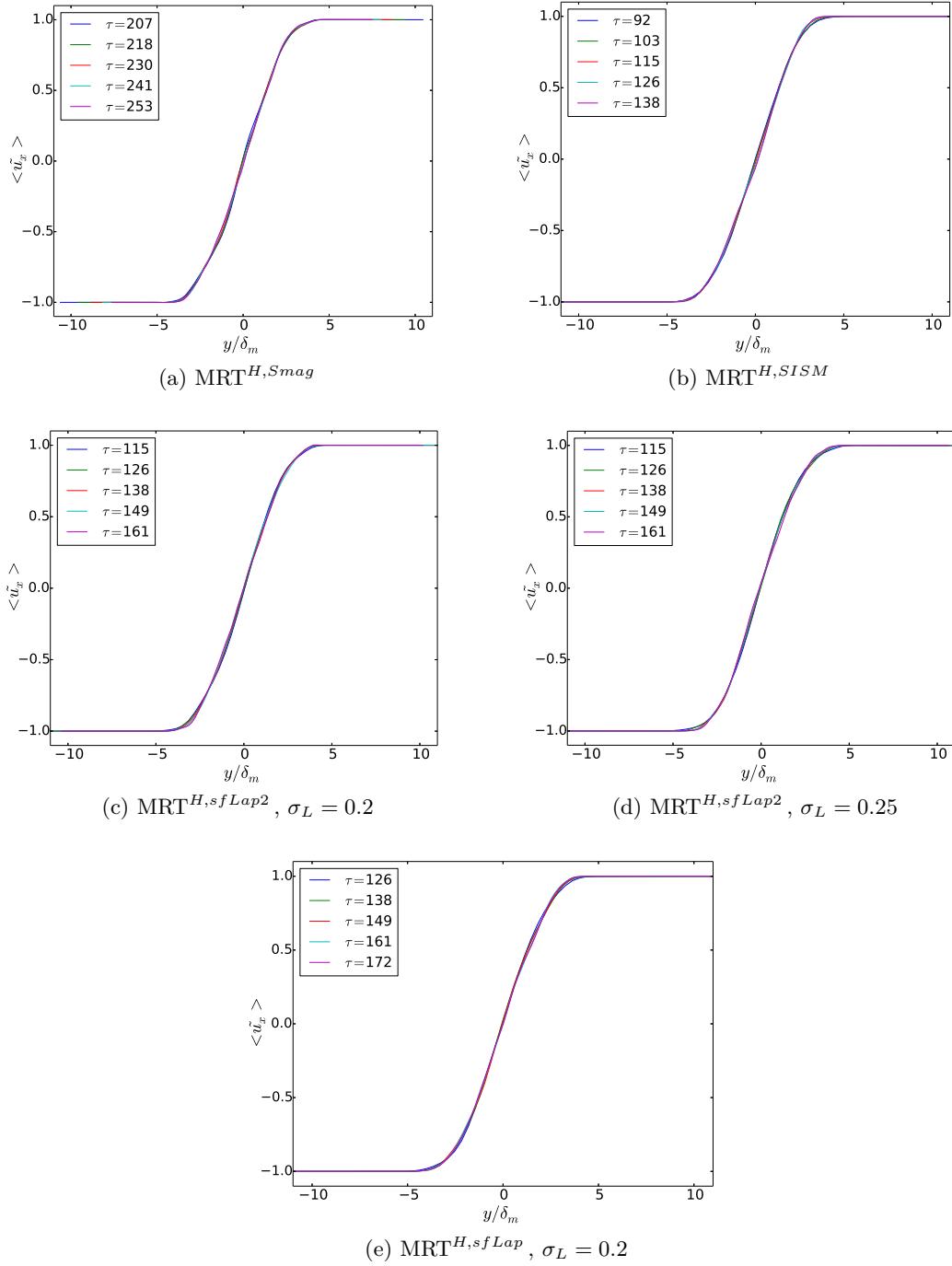
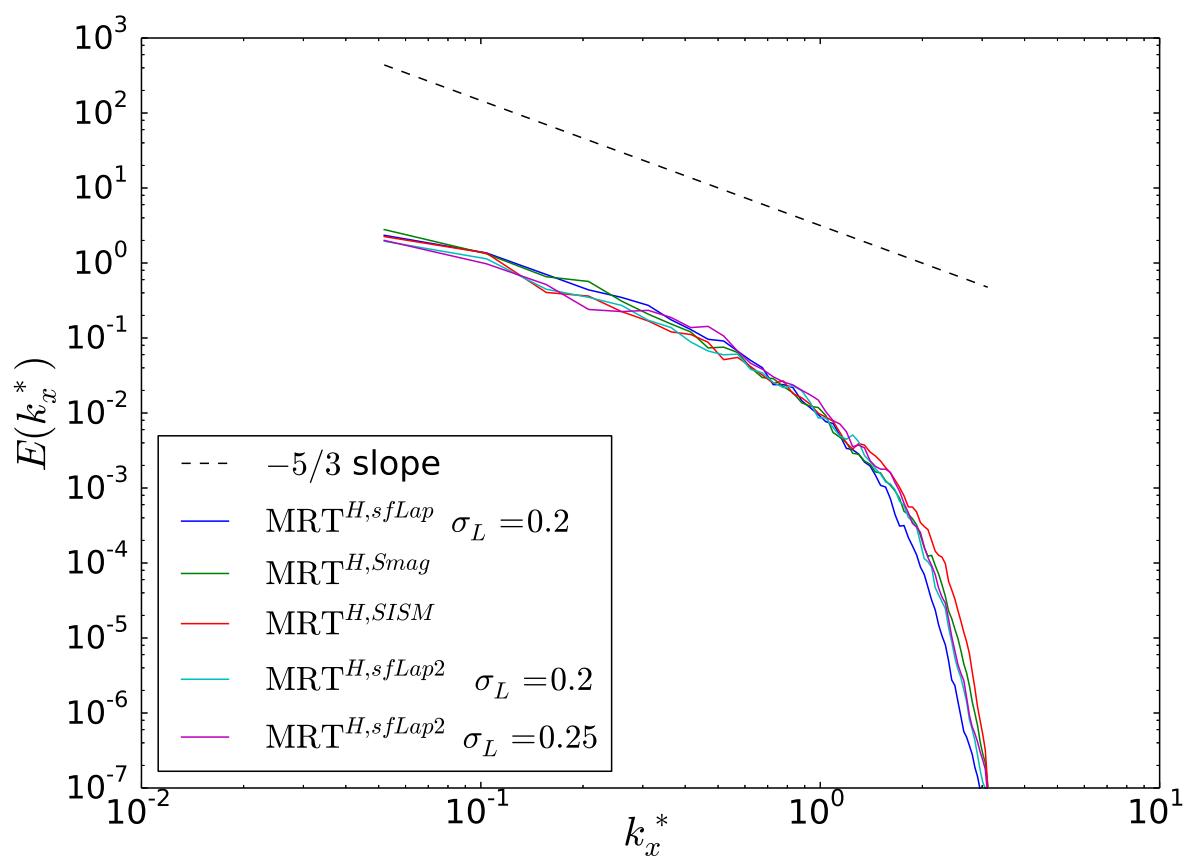


FIGURE 4.9 – Profils autosimilaires de vitesse moyenne longitudinale en fonction des variables réduites y/δ_m et $\tau = 2tU/\delta_0$.

FIGURE 4.10 – Spectres turbulents à $\tau = 254$

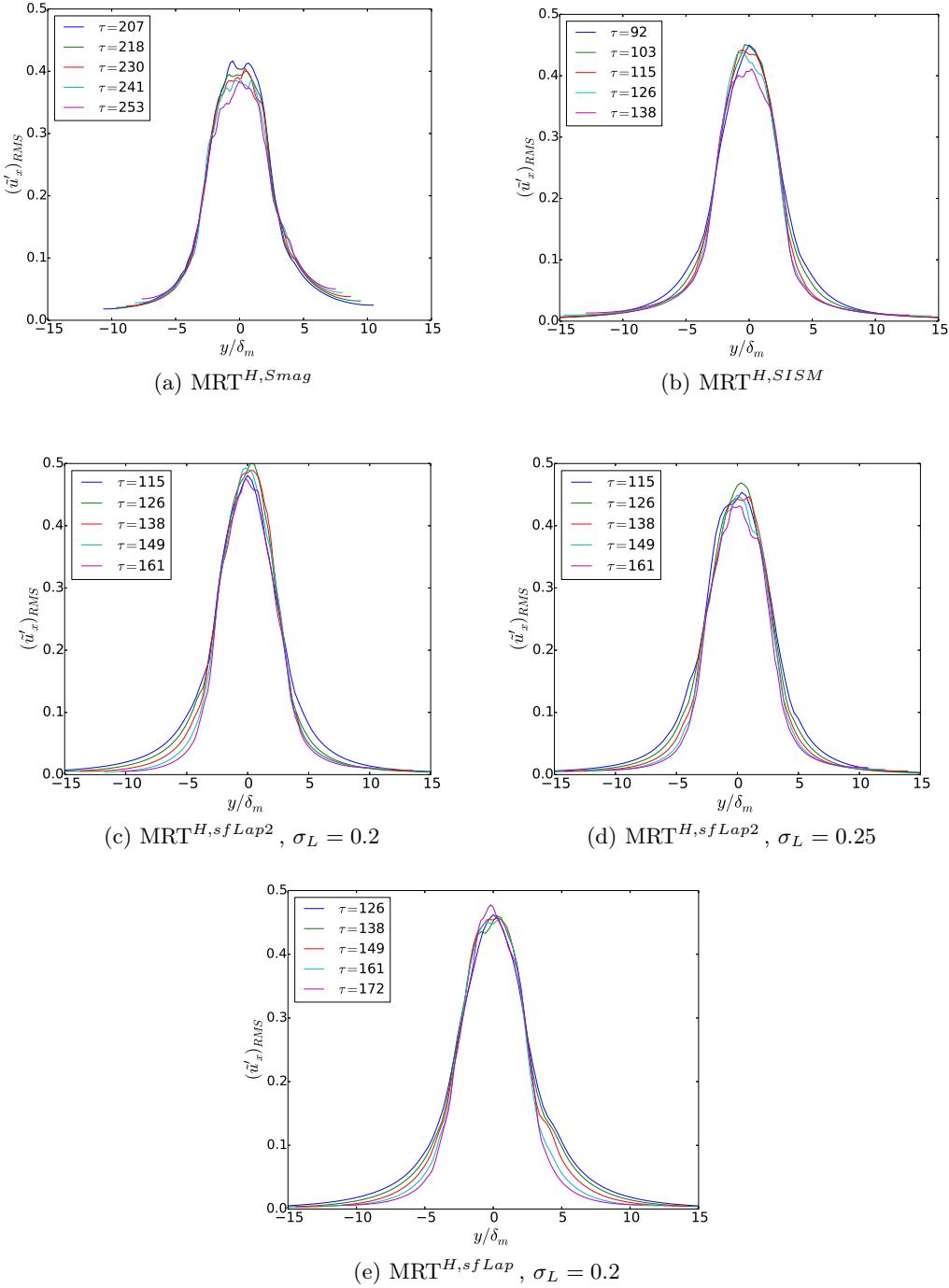


FIGURE 4.11 – Profils autosimilaires de fluctuations RMS de la vitesse longitudinale, en fonction des variables réduites y/δ_m et $\tau = 2tU/\delta_0$.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons vu en quoi le modèle de collision BGK n'était pas satisfaisant, du fait de sa grande instabilité. Nous avons cherché à synthétiser la construction des grandes familles de méthodes apportant des réponses à ce problème, à savoir les méthodes à temps de relaxation multiples (incluant les fameux modèles MRT, TRT, Cascaded, Cumulant et régularisés) ainsi que les approches dites entropiques et celles à filtrage sélectif.

Dans un premier temps, nous avons montré l'importance capitale de la méthode de relaxation des moments d'ordre 2, c'est à dire ceux liés au tenseur des contraintes. Celle-ci détermine, en fonction des paramètres de relaxation et des vecteurs de collision, l'ajout ou non d'une forte **viscosité de volume aux effets stabilisants**, mais qui peut **rendre impossible un calcul acoustique fiable**. Nous avons pu voir qu'une grande partie des modèles utilisés dans la littérature ne permettent pas d'étude aéroacoustique. Il est difficile d'établir une liste exacte des modèles dont la relaxation est compatible avec une étude acoustique, étant donné le nombre de variantes définies par les différents auteurs. Toutefois, une telle tentative a été effectuée lors de notre étude des maillages non uniformes pour l'aérocoustique [Gen+17], présentée dans son intégralité dans la partie qui suit (chapitre 5).

Ensuite, nous avons introduit une **réalisation particulière d'un opérateur de collision de type MRT**. En particulier, nous avons vu que ce modèle pouvait être utilisé pour des études aéroacoustiques car la valeur de la viscosité de volume qu'il implique est égale à celle du modèle BGK, ce qui n'est pas le cas du modèle MRT historique de D'Humières dans son paramétrage standard [DHu02], très populaire dans la littérature. Nous avons ensuite vérifié les propriétés acoustiques de notre modèle de type MRT sur une onde plane et établi sa supériorité en matière de stabilité numérique par rapport à plusieurs autres modèles à temps de relaxation multiples, dont le paramétrage permet la propagation acoustique (c'est à dire dans lesquels la viscosité de volume a été choisie à une valeur faible, égale à celle du modèle BGK).

Les modèles dits entropiques ont été étudiés. Nous retiendrons que certaines méthodes entropiques sont potentiellement utilisables pour l'aérocoustique, selon si la stabilisation entropique agit ou non sur la viscosité de cisaillement et de volume à l'ordre dominant. Les controverses portant sur le statut des méthodes entropiques ont aussi fait l'objet d'une attention particulière.

Enfin, les méthodes de filtrage sélectif ont été présentées. Celles-ci permettent assez simplement de s'attaquer aux problèmes d'instabilités qui apparaissent dans les hauts nombres d'onde, sans pour autant sacrifier la viscosité effective à l'ordre dominant.

Dans un deuxième temps, nous avons introduit une **méthode alternative de filtrage spatial sélectif** qui généralise la méthode de filtrage de l'opérateur de collision, introduit dans [Ric+09]. Notre technique alternative simplifiée réduit drastiquement le nombre de

quantités à filtrer, tout en fournissant le même résultat sur la limite hydrodynamique que la méthode classique et pour un coût calcul très largement réduit. Nous avons aussi montré que le filtrage des moments hors équilibre pré-collision fournit un filtrage d'ordre plus élevé que le filtrage classique de l'opérateur de collision, et ce sans surcoût. Nous avons utilisé un **filtre compact** d'ordre 2, qui rend l'implémentation facile et la parallélisation aisée car aucun point en dehors de ceux du réseau D3Q19 n'est nécessaire. Nous avons également expliqué en quoi, au delà de simples considérations de stabilité numérique, il pouvait être intéressant de filtrer notre équation LBM de type MRT et non l'équation LBM-BGK comme c'est le cas classiquement.

Nous avons ensuite testé les **propriétés acoustiques** de ces deux méthodes simplifiées de filtrage sélectif (filtrage de l'opérateur de collision simplifié et filtrage de la partie hors équilibre pré-collision simplifié), en les comparant à d'autres méthodes de filtrage sélectif, comme par exemple le filtrage d'ordre élevé (non compact) des variables macroscopiques qui servent au calcul de la fonction d'équilibre. Nous avons en particulier étudié l'effet du filtrage sur la dissipation spatiale d'une onde forcée. Nous en retiendrons que la force du filtrage sélectif doit-être choisie avec prudence en fonction de l'application visée. En effet, une force de filtrage trop forte aura un impact important sur les très hautes fréquences du spectre audible, qui plus est dans des cas de propagation en champ lointain ou pour des calculs sous-résolus.

Enfin, nous avons testé les capacités de ces filtrages sélectifs alternatifs à servir de méthode **LES implicite** pour la gestion d'**écoulements turbulents** à très haut nombre de Reynolds. Ceci ne constitue qu'une étude préliminaire : en effet, il sera nécessaire à l'avenir de mieux maîtriser l'hyperviscosité introduite par le filtrage, en effectuant une étude théorique de la dissipation correspondante dans les équations fluides équivalentes. Nous avons comparé notre méthode à des calculs LBM incorporant des modèles de sous-maille explicites (Smagorinsky et SISM) ainsi qu'à des calculs issus de la littérature pour des schémas de type Navier-Stokes sur un cas test de référence : le développement temporel d'une couche de mélange. Il en ressort que les filtrages alternatifs ont des capacités prometteuses pour servir en tant que méthode LES implicite. En particulier, la nouvelle méthode de filtrage des moments hors-équilibre pré-collision simplifiée fournit les meilleurs résultats parmi les algorithmes développés dans cette partie. Il faudra toutefois veiller à la dissipation acoustique induite par le coefficient de filtrage : en effet, celui-ci est relativement important (de l'ordre de $\sigma_L = 0.25$) dans le cas où la gestion de la turbulence par le filtrage est requise. Pour un tel coefficient, les très hautes fréquences peuvent être affectées, qui plus est pour une propagation en champ lointain ou pour des calculs trop peu résolus.

Pour la suite de ce mémoire, nous utiliserons à la fois le filtrage compact simplifié des moments hors équilibre d'ordre 2 pré-collision et notre modèle à temps de relaxation multiples alternatif. Il s'agira de déterminer si ces modèles sont stables sur des configurations industrielles complexes et si les résultats en termes turbulents et aéroacoustiques sont aussi prometteurs que sur les cas académiques étudiés ici. Toutefois, avant de pouvoir effectuer une étude industrielle, il est nécessaire d'étudier les procédures de raffinement de maillage et leur compatibilité avec les modèles de collision retenus : c'est l'objet de la partie qui suit.

Troisième partie

Maillages non-uniformes en aéroacoustique avec la méthode de Boltzmann sur réseau

Introduction

Il est inenvisageable, pour des simulations industrielles tridimensionnelles, d'effectuer des calculs en maillage uniforme. C'est pourquoi dans cette partie, nous traiterons de la problématique des maillages non-uniformes pour la méthode de Boltzmann sur réseau. Cette problématique, déjà complexe en soi, est spécialement difficile dans le cas de la simulation numérique directe de l'aéroacoustique. Nous insistons sur le terme *directe*, par opposition aux méthodes hybrides (analogies acoustiques, etc...). La méthode de Boltzmann sur réseau étant déjà plus difficilement stabilisable dans le cadre aéroacoustique (comme nous l'avons vu, le levier de la viscosité de volume classiquement utilisé en aérodynamique pure ne peut être actionné), elle l'est encore plus lorsque des transitions de résolution apparaissent. En effet, les noeuds situés dans ces zones ne possèdent pas tous les voisins requis pour effectuer l'algorithme de propagation classique. Ainsi, ces noeuds sont traités par un algorithme différent de l'algorithme standard, introduisant du même coup des inhomogénéités qui perturbent l'écoulement. Nous verrons que les transitions de résolution sont de plus très brutales avec la méthode de Boltzmann sur réseau, car le raffinement progressif est impossible. Les mailles devant impérativement rester cubiques en LBM, il existe au minimum un facteur 2 les tailles de maille de part et d'autre de l'interface de raffinement. Précisons également que nous ne traitons que de la méthode de Boltzmann sur réseau au sens strict du terme, et non de ses dérivées inspirées des méthodes aux différences finies, volumes finis ou encore éléments finis.

Dans le cadre aéroacoustique en maillage non-uniforme, la question de la stabilité numérique, pourtant déjà très complexe, n'est pas la plus difficile à traiter. Le problème majeur est que la moindre erreur sur le champ aérodynamiques, aussi invisible soit-elle de prime abord, peut avoir des effets dévastateurs sur le champ acoustique. Cela est dû au fait que les fluctuations de pression acoustique sont d'amplitude très inférieure aux fluctuations aérodynamiques, comme nous l'avons vu en introduction de ce mémoire. De telles erreurs sont particulièrement susceptibles de survenir aux zones de transition de résolution, à cause du traitement non-standard de ces noeuds. Ainsi, un champ aérodynamique en apparence très bon peut cacher un champ aéroacoustique de piètre qualité. À l'heure actuelle, aucune étude LBM détaillée du comportement d'un algorithme de raffinement en régime turbulent et à nombre de Mach non-négligeable n'existe dans le cadre de l'aéroacoustique. Seules des études industrielles basées sur des codes commerciaux (c'est à dire dont l'algorithme de raffinement est maintenu secret) se placent dans ce cas difficile.

Dans cette partie nous aborderons deux points principaux. Le premier est résumé dans un article, que nous avons publié dans la revue Physical Review E, que nous introduirons en français au début du chapitre suivant et que nous complèterons en fin de chapitre par quelques remarques. Cet article porte sur la conception d'un algorithme alternatif de raffinement de maillage, issu d'un couplage à l'interface de transition entre une méthode aux différences finies et la méthode de Boltzmann sur réseau. L'étude est centrée, comme l'ensemble de ce mémoire, sur les modèles LBM non-thermiques. Nous nous plaçons également, comme dans tout le reste de ce mémoire, dans une structure de donnée de type *cell-vertex* (données situées aux coins des cellules) par opposition aux méthodes *cell-centered* (données au centre des cellules). Nous verrons au cours de cette partie ainsi que dans l'article, en quoi ceci a une importance particulière. Concluons en précisant que l'algorithme alternatif développé dans cet article ne sera pas utilisé pour les calculs ultérieurs pour des raisons d'implémentation industrielle à court terme. Il s'agit toutefois de la première étude LBM sur le comportement d'algorithmes de raffinement

CHAPITRE 4. DÉVELOPPEMENT D'UN FILTRAGE SÉLECTIF COMPACT
126 ALTERNATIF : ÉTUDE ACOUSTIQUE ET TURBULENTE

en régime tourbillonnaire pour l'aéroacoustique à un nombre de Mach non négligeable (jusqu'à $Ma = 0.2$).

Dans un deuxième temps, nous tenterons d'apporter des améliorations à un algorithme classique (celui là même auquel notre article dans Physical Review E se compare). Nous testerons numériquement leurs effets sur le même cas test que celui étudié dans l'article, à savoir celui d'un tourbillon convecté à un nombre de Mach jusqu'à $Ma = 0.2$ et traversant une transition de résolution. Le champ acoustique parasite émis au niveau des transitions de résolution sera étudié. L'objectif est de déterminer les ingrédients que nous ajouterais à l'algorithme classique pour le rendre plus fiable, avant de passer aux simulations industrielles dans la dernière partie.

Chapitre 5

Développement d'une méthode de splitting directionnel : article publié dans Physical Review E

5.1 Introduction à l'article

Cet article contient une introduction synthétique au problème des transitions de résolution dans le cadre des modèles LBM non-thermiques. En particulier, les prérequis pour concevoir une méthode de raffinement de maillage pour l'aéroacoustique sont résumés et une analyse bibliographique exhaustive est faite en regard de ces critères. Nous apportons par ce biais la confirmation que la plupart des études contenant des algorithmes de maillage non-uniformes sont effectuées dans un cadre empêchant toute transposition directe à des calculs aéroacoustiques. Cela est fréquemment dû à la très importante viscosité de volume stabilisante apportée par les modèles de collision utilisés (qu'ils soient à temps de relaxation multiples ou entropiques).

De plus, le champ aéroacoustique résultant d'un écoulement tourbillonnaire en maillage non-uniforme, non idéalement résolu et à un nombre de Mach non infinitésimal n'a jamais été étudié à l'exception notable de la thèse de Hasert [HR14]. On peut voir dans les calculs de Hasert que le champ aéroacoustique dans un tel cas est très pollué par les erreurs acoustiques issues des zones de transition de résolution, prouvant ainsi la grande difficulté de ce type de calculs.

Dans cet article, les relations classiques valables pour tout algorithme de raffinement sont rappelées. Nous entreprenons ensuite le développement d'un algorithme alternatif de raffinement de maillage, basé sur un couplage à l'interface de transition entre une méthode aux différences finies et la méthode de Boltzmann sur réseau. Les équations sont obtenues à partir d'une intégration particulière de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes, dans laquelle le terme de gradient normal à l'interface est séparé des autres. Des considérations importantes sont également analysées concernant la problématique de l'interpolation et de la procédure de transfert des données du maillage fin vers le maillage grossier. Les liens entre les formulations cell-vertex et cell-centered sont également évoqués.

Nous comparons enfin notre méthode alternative à un algorithme cell-vertex classique [Lag+12 ; TRL14] et montrons que notre méthode alternative permet une réduction importante de l'acoustique parasite sur toute la gamme de nombre de Mach étudiée ($0.04 \leq Ma \leq 0.2$).

Grid refinement for aeroacoustics in the lattice Boltzmann method: A directional splitting approach

Félix Gendre,^{1,2,*} Denis Ricot,^{1,†} Guillaume Fritz,^{1,‡} and Pierre Sagaut^{2,§}

¹Renault, Technocentre, 1 av. du Golf, 78280 Guyancourt, France

²Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, 13451 Marseille, France

(Received 9 June 2017; published 29 August 2017)

This study focuses on grid refinement techniques for the direct simulation of aeroacoustics, when using weakly compressible lattice Boltzmann models, such as the D3Q19 athermal velocity set. When it comes to direct noise computation, very small errors on the density or pressure field may have great negative consequences. Even strong acoustic density fluctuations have indeed a clearly lower amplitude than the hydrodynamic ones. This work deals with such very weak spurious fluctuations that emerge when a vortical structure crosses a refinement interface, which may contaminate the resulting aeroacoustic field. We show through an extensive literature review that, within the framework described above, this issue has never been addressed before. To tackle this problem, we develop an alternative algorithm and compare its behavior to a classical one, which fits our in-house vertex-centered data structure. Our main idea relies on a directional splitting of the continuous discrete velocity Boltzmann equation, followed by an integration over specific characteristics. This method can be seen as a specific coupling between finite difference and lattice Boltzmann, locally on the interface between the two grids. The method is assessed considering two cases: an acoustic pulse and a convected vortex. We show how very small errors on the density field arise and propagate throughout the domain when a vortical flow crosses the refinement interface. We also show that an increased free stream Mach number (but still within the weakly compressible regime) strongly deteriorates the situation, although the magnitude of the errors may remain negligible for purely aerodynamic studies. A drastically reduced level of error for the near-field spurious noise is obtained with our approach, especially for under-resolved simulations, a situation that is crucial for industrial applications. Thus, the vortex case is proved useful for aeroacoustic validations of any grid refinement algorithm.

DOI: [10.1103/PhysRevE.96.023311](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.023311)

I. INTRODUCTION

Due to its high computational efficiency and to its low dissipative behavior, the lattice Boltzmann method (LBM) has been successfully applied in many turbulent flow simulations for thermal and nonthermal flows during the past two decades [1–5]. It has also been shown that this method had interesting properties for computational aeroacoustics at low Mach number [6,7]. Its *stream and collide* algorithm relies on a Cartesian grid, which makes the meshing of complex geometries straightforward. Since the computational cost of three dimensional industrial simulations with a uniform mesh would be prohibitive, grid refinement is a crucial issue in lattice Boltzmann simulations. However, it frequently causes numerical instabilities and nonphysical noise. We will show that this issue is crucial for direct simulation of aeroacoustics (which is the subject of this work, as opposed to hybrid methods with Ffowcs Williams and Hawkings integration, etc.), especially when vortical structures cross refinement interfaces.

In aeroacoustics, the physical key point is the distinction between two types of density or pressure fluctuations: the so-called *acoustic* and *hydrodynamic* (or *vortical*) fluctuations. They can be distinguished by their propagation speed (or equivalently by their wave number domains) and by their amplitude. The main problem is that the acoustic pressure fluctuations in a realistic flow are several orders of magnitude

weaker than the hydrodynamic fluctuations, a difference that depends on the nature of the flow and on the Mach number [8–10]. These considerations have two consequences: first, small spurious currents or errors on the density field can have great negative consequences on the resulting aeroacoustic field and, second, these spurious fluctuations cannot be seen on the instantaneous density field unless a precise closeup is performed.

In order to study the impact on aeroacoustics of a grid refinement algorithm with LBM, we choose to restrain ourselves to weakly compressible models in order to keep a low computational cost. In the literature review that follows, we will not consider numerical methods that are not based on the standard *stream and collide* lattice Boltzmann algorithm: this means we will not study the finite difference lattice Boltzmann method (FDLBM) [11–13], the finite volume lattice Boltzmann method (FVLBM) [12,14–16], nor the volumetric formulation of Chen *et al.* [17,18]. We also only consider papers in which nonuniform meshes are used. As far as the grid refinement algorithm itself is concerned, we will obviously not consider methods in which the speed of sound is not kept constant during the refinement process: this is the case when the so-called *diffusive scaling* [19] is used, such as in the work of Rheinländer [20].

The main characteristics that have to be taken into account to determine whether an existing study corresponds to our goals and constraints are the following:

(i) *The data structure: cell-centered or vertex-centered (also called cell vertex).* This feature has a major influence on the geometry of the refinement area, as well as on the interpolation and filtering schemes. Since our solver is based on a vertex-centered data structure, we choose this approach for this study.

*felix.gendre@renault.com

†denis.ricot@renault.com

‡guillaume.fritz@renault.com

§pierre.sagaut@univ-amu.fr

(ii) *The spatial interpolation method.* All the LBM grid refinement methods rely somehow (see Sec. IV B for more details) on spatial interpolations (and sometimes also on temporal interpolations). As far as our subject is concerned, they can be grouped in three categories: *linear* interpolations (or bilinear/trilinear), *compact* interpolations [21–23], *polynomial* interpolations (Lagrange), and cubic *splines*. However, Guzik *et al.* [24] also use a constrained least-square algorithm. As we will show later, the spatial interpolation method may have an impact on the density field. Regarding time interpolation, its effect on the density field is less investigated. Several authors do not use time interpolation at all thanks to specific cell-centered algorithms [21,25–27]. These issues will be addressed in Sec. IV B.

(iii) *The value of the bulk viscosity.* Many multiple relaxation time methods use relaxation parameters that highly increase the value of the bulk viscosity, which yields a much more stable scheme. Although it is very useful for purely aerodynamic studies, it prevents any accurate work on

aeroacoustics, as shown in the article of Marié *et al.* [6]. For more clarifications on that matter, the reader may refer to the end of Sec. III B.

(iv) *The presence of a fine-to-coarse filtering method.* When transferring data from the fine mesh to the coarse mesh, a filtering method is sometimes applied. We will show in Sec. IV C why this item is important, particularly in the case of aeroacoustic studies.

(v) *The presence of acoustic wave propagation tests.* In such benchmarks, refinement areas are not crossed by vortices but only by acoustic waves.

(vi) *The presence of an aeroacoustic study in a vortical regime.* We mean by vortical regimes that vortices have to cross refinement interfaces during the simulation. In these cases, the Mach number (M) of the vorticity mode is of paramount importance in the context of aeroacoustics on nonuniform meshes, as we will show later.

In the light of this criteria list, we summarize our literature review in Table I.

TABLE I. This table summarizes our literature review on numerical studies with LBM on nonuniform meshes in the light of the above defined criteria. CC: cell centered; CV: cell vertex; ✓: the criterion is fulfilled; ~: the criterion is fulfilled in several sections of the study; -: the criterion is not fulfilled; ?: no information available.

Article	Data structure	Spatial interpolation method	Unmodified bulk viscosity	Fine-to-coarse filtering	Acoustic validation	Aeroacoustics with vortical flow
Stiebler <i>et al.</i> [28]	CV	Polynomial	-	-	-	-
Geller <i>et al.</i> [12,26]	CV	Polynomial	-	-	-	-
Dorschner <i>et al.</i> [29]	CV	Polynomial	-	-	-	-
Kuwata <i>et al.</i> [30]	CV	Polynomial	-	-	-	-
Peng <i>et al.</i> [31]	CV	Polynomial	-	-	-	-
Pellerin <i>et al.</i> [32]	CV	Polynomial	-	✓	-	-
Eitel-Amor <i>et al.</i> [33]	CC	Linear	-	✓	-	-
Geier [21]	CC	Compact	-	✓	-	-
Geier <i>et al.</i> [27]	CC	Compact	-	✓	-	-
Chen <i>et al.</i> [34]	CV	Spline	~	-	-	-
Yu <i>et al.</i> [35,36]	CV	Polynomial	✓	-	-	-
Liu <i>et al.</i> [37]	CV	Spline	✓	-	-	-
Crouse [38] (Ph.D. thesis)	CV	Polynomial	✓	-	-	-
Filipova <i>et al.</i> [39,40]	CV	Polynomial	✓	-	-	-
Dupuis <i>et al.</i> [41]	CV	Polynomial	✓	-	-	-
Qi <i>et al.</i> [22]	CC	Compact	✓	✓	-	-
Touil <i>et al.</i> [42]	CV	Polynomial	✓	✓	-	-
Rohde <i>et al.</i> [43]	CC	Linear	✓	✓	-	-
Yu <i>et al.</i> [44]	CC	Linear	✓	✓	-	-
Lagrava <i>et al.</i> [45]	CV	Polynomial	✓	✓	-	-
Guzik <i>et al.</i> [24]	CC	Linear & constrained least-squares	~ ^a	✓	✓ ^a	-
Marié [7] (Ph.D. thesis)	CV	Linear	✓ ^b	-	✓	-
Pasquali [46] (Ph.D. thesis)	CC	Compact	?	✓	-	✓
						(Very low M , very highly resolved case ^c)
Hasert [47] (Ph.D. thesis)	CC	Linear	?	✓	✓	✓
						($M_{\max} = 0.15$, high levels of spurious acoustics ^d)

^aFor the acoustic pulse case, Sec. 4.3, the collision model used is not specified. Hence, the value of the bulk viscosity is unknown. Comparisons to low-viscosity or inviscid analytical solutions are not given.

^bThe viscosity is modified only for high wave numbers, due to the use of *selective viscosity* filters [48].

^cSection 3.3.4. Besides, the value of the bulk viscosity is not specified.

^dSection 9.5. Besides, the value of the bulk viscosity is not specified.

This table reveals that only two studies focus on our present subject: the theses of Pasquali [46] and Hasert [47]. In the case of Pasquali (Sec. 3.3.4 of [46]), very few details are given on the simulation and on the results: we can only say that the Mach number based on the inlet velocity in the pipe is very low ($M \simeq 0.01$) and that the mesh is very highly resolved, which is quite close to an ideal situation. However, it is indeed one of the rare studies in which a near-field acoustic spectrum is given with a vortical flow in a multidomain LBM simulation. As far as the work of Hasert is concerned, there are many more details and validations (although the crucial value of the bulk viscosity is never mentioned for the MRT simulations). Very interestingly, he shows that despite good standard aeroacoustic validations (i.e., without vortices crossing a refinement area), a highly overestimated far-field acoustic noise is obtained in his more realistic benchmark, compared to experimental data (part 9.5 of [47]). He concludes that “a possible source might be the errors introduced near the grid level interfaces.” Considering the snapshots that are shown in this study, this hypothesis seems very plausible. We also point out that the presented snapshot (Fig 9.10.b) of the pressure is a highly precise closeup ($\simeq 0.001\%$ of the reference pressure). His benchmark also shows that a vortical velocity field free from artifacts does not guarantee a correct underlying aeroacoustic field.

On the other hand, simulations that exactly correspond to our goal (higher Mach number, high Reynolds number vortical flows crossing multiple grid refinement areas with athermal approximations, . . .) are carried out in several papers but performed with commercial lattice Boltzmann solvers. The reader can refer to [49–52] amongst others. However, using commercial softwares does not allow any detailed study of the grid coupling algorithm. That is why we chose to develop a different grid refinement algorithm and compare it to the one of [45] on that matter. Our method is based on a specific coupling between a finite difference approximation and the lattice Boltzmann method on the refinement interface: it allows to better take into account the gradients normal to the interface in vertex-centered algorithms.

The structure of this work is as follows. We first describe the lattice Boltzmann method used as a basis, regardless of any mesh refinement issue. After that, we derive formally the equations used in our model in Sec. III, with the simple Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) collision operator. We also show that this work can be extended to multiple relaxation times models. In Sec. IV, we remind the reader of several basic relations implied by a change of grid size, before describing our grid-coupling algorithm. We also address the question of interpolations, initialization, and local filtering for fine-to-coarse transfers. Finally, we compare in Sec. V our approach to a slightly improved version of the one presented in [45], also used in [42] (see Sec. IV for more details). Two benchmark cases are studied: the acoustic pulse and a convected source of vorticity. In this section, the second order accuracy of the method is demonstrated, while the full theoretical proof is given in Appendix A. For the vortex case, the effect of grid refinement on aeroacoustics is shown by calculating near-field density spectra. The influence of the free stream Mach number is also highlighted.

II. LATTICE BOLTZMANN METHOD

In this section, we briefly summarize the steps that lead from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann numerical scheme since it is useful for the derivation of our model. We start from the original Boltzmann equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \Omega(f), \quad (1)$$

with Ω the collision operator, \mathbf{c} the particle velocity, and $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ the distribution function.

Following the choices of Shan *et al.* in [53], we can write a fully dimensionless system by using a characteristic time t_0 , length l_0/c_s , density ρ_0 , and speed c_0/c_s (c_0 corresponds to the “isothermal” speed of sound $c_0^2 = rT_0$), with the constant $c_s = 1/\sqrt{3}$. The distribution function is normalized by ρ_0 . We use the standard D3Q19 velocity set (valid for athermal and weakly compressible simulations) to discretize the velocity space of the Boltzmann equation (see [53]). This set is defined by the following dimensionless expressions with respect to c_0/c_s :

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} (0,0,0), & \alpha = 0 \\ (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1), & \alpha = 1 \dots 6 \\ (\pm 1,\pm 1,0), (\pm 1,0,\pm 1), (0,\pm 1,\pm 1), & \alpha = 7 \dots 18 \end{cases} \quad (2)$$

with the weights

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 1/3, & \alpha = 0 \\ 1/18, & \alpha = 1..6 \\ 1/36, & \alpha = 7..18. \end{cases} \quad (3)$$

If the relation $l_0/c_0 t_0 = 1$ is verified (kinetic Strouhal number equal to unity), we obtain the following scaling of the discrete velocity Boltzmann equation (DVBE), which we write here using the BGK collision operator

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = \frac{-1}{\tilde{\tau}} (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}), \quad (4)$$

where $\tilde{\tau} = \tau/t_0$ is the dimensionless relaxation time. It can be related to the physical value of the viscosity by performing a Chapman-Enskog expansion, which yields

$$\mu = \tau \rho c_0^2. \quad (5)$$

In this paper, we use the BGK collision operator for all the formal derivations and numerical applications. However, we show in Secs. III B and IV A that this approach can be extended to multiple relaxation time models. After integrating this set of equations along characteristics of direction \mathbf{c}_α (see [54] for the details), we can obtain the lattice BGK equation, where $\tilde{\Delta}t$ is the dimensionless time step with respect to t_0 :

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \tilde{\Delta}t, t + \tilde{\Delta}t) \\ = \widehat{g}(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tau_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] + O(\tilde{\Delta}t^3), \end{aligned} \quad (6)$$

with

$$\tilde{\tau}_g = \tilde{\tau} + \frac{\tilde{\Delta}t}{2}, \quad (7)$$

$$g_\alpha = f_\alpha + \frac{\tilde{\Delta}t}{2(\tilde{\tau}_g - \frac{\tilde{\Delta}t}{2})}(f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}), \quad (8)$$

$$g_\alpha^{\text{eq}} = f_\alpha^{\text{eq}},$$

$$g_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha \rho \left\{ 1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} [(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - c_s^2 |\mathbf{u}|^2] \right\} \quad (9)$$

for the D3Q19 athermal model. We call $\hat{g}(\mathbf{x}, t)$ the *collision function*. In order for the lattice nodes to coincide with the mesh nodes, we have the constraint $\tilde{\Delta}x = |\mathbf{c}_\alpha| \tilde{\Delta}t$ for $\alpha = 1 \dots 6$, which yields the necessary condition

$$c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = c_s. \quad (10)$$

Choosing $t_0 = \Delta t$ and $l_0/c_s = \Delta x$ yields $\tilde{\Delta}t = \tilde{\Delta}x = 1$, so that Eq. (6) becomes

$$g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha, t + 1) - g_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{\tilde{\tau}_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (11)$$

with

$$\overline{\tau}_g = \frac{\tau_g}{\Delta t} = \bar{\tau} + \frac{1}{2} = \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{1}{2}. \quad (12)$$

This particular dimensionless system of units is usually called *lattice units*.

The zero and first order macroscopic moments are given by

$$\rho = \sum_\alpha g_\alpha, \quad (13)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha g_\alpha. \quad (14)$$

A Chapman-Enskog procedure performed on this lattice Boltzmann equation (LBE) gives the following expression for the stress tensor S_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{-1}{2\tilde{\tau}_g \rho c_s^2} \sum_\alpha c_{\alpha,i} c_{\alpha,j} (g_\alpha - g_\alpha^{\text{eq}}), \quad (15)$$

the relation between $\overline{\tau}_g$ and the dynamic shear viscosity $\overline{\mu}$ (related to a time scale Δt)

$$\overline{\mu} = \rho c_s^2 (\overline{\tau}_g - \frac{1}{2}), \quad (16)$$

the expression of the bulk viscosity $\overline{\xi}$, which determines, in association with $\overline{\mu}$, the dissipation rate of the sound waves [55]

$$\overline{\xi} = 2\rho c_s^4 (\overline{\tau}_g - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \overline{\mu}, \quad (17)$$

as well as the so-called athermal equation of state

$$p = \rho c_s^2. \quad (18)$$

To retrieve the dimensional quantities, one has to multiply the dimensionless velocities by $c_0/c_s = \Delta x/\Delta t$ [see Eq. (10)] and the density by ρ_0 , consistently with the nondimensionalization approach we used at the beginning. From now on, we will omit the tildes and overlines for simplicity.

III. DIRECTIONAL SPLITTING OF THE LATTICE BOLTZMANN EQUATION

A. A numerical scheme on the refinement interface

In this section we derive the equations used for our grid-coupling algorithm. Let us suppose that the transition interface is locally a plane of normal \mathbf{e}^\perp . We start from the DVBE (4) but we write it the following way:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \cdot \nabla^\parallel f_\alpha = \frac{-1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) - c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha \quad (19)$$

with $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{c}_\alpha^\parallel + c_\alpha^\perp \mathbf{e}^\perp$ and $\nabla = \nabla^\parallel + \nabla^\perp \mathbf{e}^\perp$. Following the approach used, for example, in [54], we integrate this equation along characteristic lines. However, unlike the traditional approach, we use the characteristics directed by $\mathbf{c}_\alpha^\parallel$ instead of \mathbf{c}_α .

Hereafter, we take $\mathbf{e}^\perp = \mathbf{e}_y$ for the sake of simplicity, without any loss of generality. This give us $\mathbf{c}_\alpha^\parallel = c_{\alpha,1} \mathbf{e}_x + c_{\alpha,3} \mathbf{e}_z$. We can therefore write for a dimensionless time step Δt and for $\mathbf{v}^\parallel(s) = \mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel s$ and $w(s) = s$:

$$\begin{aligned} & f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{-1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{v}^\parallel(s), w(s)) - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{v}^\parallel(s), w(s)) + \tau F_\alpha] ds \end{aligned} \quad (20)$$

with

$$F_\alpha = (\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{e}_y) \nabla_y f_\alpha = c_{\alpha,2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}. \quad (21)$$

We use the classical trapezium rule to approximate the right-hand side of Eq. (20) and obtain

$$\begin{aligned} & f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{-\Delta t}{2\tau} \{ f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) \\ &\quad - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) + f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \tau [F_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) + F_\alpha(\mathbf{x}, t)] \} + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (22)$$

which yields

$$\begin{aligned} & g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} F_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \Delta t, t + \Delta t) \\ &= g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] - \frac{\Delta t}{2} F_\alpha + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (23)$$

This scheme is implicit: in order to make it explicit, we use the following change of variable:

$$h_\alpha = g_\alpha + \frac{\Delta t}{2} F_\alpha, \quad (24)$$

which implies

$$h_\alpha^{\text{eq}} = g_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2} F_\alpha^{\text{eq}}, \quad (25)$$

$$F_\alpha^{\text{eq}} = c_{\alpha,2} \frac{\partial f_\alpha^{\text{eq}}}{\partial y}. \quad (26)$$

With these notations, we can write a *stream and collide* algorithm for the nodes of the transition interface: after some algebra, we obtain from Eq. (22), written in lattice units and without the error term,

$$\begin{aligned} h_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel, t + 1) &= h_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} [h_\alpha(\mathbf{x}, t) - h_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2\tau_g} - 1 \right) F_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2\tau_g} F_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) \right] \\ &= \hat{h}_\alpha(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (27)$$

with

$$h_\alpha = g_\alpha + \frac{1}{2} F_\alpha, \quad (28)$$

$$h_\alpha^{\text{eq}} = g_\alpha^{\text{eq}} + \frac{1}{2} F_\alpha^{\text{eq}}. \quad (29)$$

This scheme requires the computation of two spatial gradient terms, F_α and F_α^{eq} . Equations (23) and (10) show that a second order approximation is sufficient: we chose a simple second order centered finite difference stencil. This step requires interpolations, which are discussed in Secs. IV and IV B.

In order to save computational time, we can write a derived scheme for which only F_α is needed. After some algebra, we obtain a relation between the collision functions

$$\hat{h}_\alpha = \hat{g}_\alpha - \frac{1}{2} F_\alpha. \quad (30)$$

Calculating $\hat{h}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ is now equivalent to

- (i) converting $h_\alpha(\mathbf{x}, t)$ into $g_\alpha(\mathbf{x}, t)$ via Eq. (28),
- (ii) computing $\hat{g}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ with Eq. (6) and the macroscopic variables,
- (iii) converting $\hat{g}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ into $\hat{h}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ with Eq. (30).

However, does this equation allow to simulate a fluid governed by the same macroscopic equations than with the lattice Boltzmann equation (6)? A Chapman-Enskog analysis of Eq. (23) [or equivalently of Eq. (27)] confirms that we obtain at leading order the same macroscopic equations compared to the classical LBE, with second order accuracy in time, space, and Knudsen number, provided that the F_α gradient term is evaluated with, at least, a second order approximation (see Appendix A for the full proof).

We remind the reader that the so-called *acoustic scaling* is used in this work ($\Delta x \propto \Delta t$): this means that the Knudsen number error $O(\epsilon^2) = O[(M/\text{Re})^2]$ does not vanish with decreasing mesh size and time step. As said in the Introduction to this work, several authors use the *diffusive scaling* ($\Delta x^2 \propto \Delta t$) [19], which yields $M \propto \Delta x$ and $\epsilon^2 \propto \Delta x^2 \propto \Delta t$. This makes the Knudsen number error vanish at second order rate in space (so first order rate in time). It also makes the $O(M^3)$ error in the strain rate tensor vanish with increasing resolution. However, because of Eq. (10), this scaling yields a nonconstant physical speed of sound [$c_0 = O(\Delta x^{-1})$] which cannot be used for aeroacoustics, as also explained in Ref. [25].

As far as external forces are concerned, their implementation is straightforward: one simply needs to incorporate the forcing term during the classical computation of \hat{g}_α and modify the value of the macroscopic variables accordingly, following for instance the method of Guo *et al.* [56].

B. Extension to multiple relaxation time operators

All the previous derivations are extendable to multiple relaxation time operators. As can be seen in Ref. [54], it is indeed possible to start from a DVBE that uses a general collision matrix Ω , so that

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = -\Omega_{\alpha\beta}(f_\beta - f_\beta^{\text{eq}}). \quad (31)$$

For a BGK equation, we have $\Omega = (1/\tau)\mathbf{I}$.

After integration along the classical characteristics, this gives in lattice units

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha, t + 1) &= g_\alpha(\mathbf{x}, t) - [\Omega(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Omega)^{-1}]_{\alpha\beta} \\ &\quad \times [g_\beta(\mathbf{x}, t) - g_\beta^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (32)$$

with

$$g_\alpha = f_\alpha + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}(f_\beta - f_\beta^{\text{eq}}). \quad (33)$$

It is thus also possible to start from a splitted version of Eq. (31):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \cdot \nabla^\parallel f_\alpha = -\Omega_{\alpha\beta}(f_\beta - f_\beta^{\text{eq}}) - c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha. \quad (34)$$

We can see that the splitted term on the right-hand side is still completely independent of the collision operator. This means that all the previous conversion formulas between distribution functions and between collision functions are still valid, provided the f_α that appear in the gradient term F_α are computed this time with Eq. (33). This implies that we need to find the value of Ω as a function of the relaxation parameters. For example, if one wants to use the D3Q19 moment basis of D'Humières *et al.* [57], we immediately deduce from Eq. (32) that

$$\Omega(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Omega)^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{M} \quad (35)$$

with \mathbf{M} the orthogonal transformation matrix and $\widehat{\mathbf{S}}$ the diagonal relaxation matrix.

This gives

$$\Omega = \mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{M}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{M})^{-1}. \quad (36)$$

The only remaining question is the invertibility of the matrix $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{M}$. We first remark that

$$\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{S}} \quad (37)$$

which is a diagonal matrix. Provided that $s_i \neq 2$ for all i , this matrix is invertible. This means that, under this condition, \mathbf{A} is invertible since

$$(\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}. \quad (38)$$

The rescaling formula for the distribution functions between a fine and a coarse grid are also affected by the collision model (see Sec. IV A).

However, it is well known that popular multiple relaxation time models, such as the one of D'Humières *et al.* [57], rely on the addition of a substantial amount of bulk viscosity that stabilizes the simulations but strongly dissipates the acoustic field. Although this technique is very useful in purely

aerodynamic cases, it prevents any correct aeroacoustic study as shown by Marié *et al.* [6]. A possible solution is to use the two relaxation times (TRT) model (see [47,58]), which does not modify the bulk viscosity compared to the BGK model.

The same effect appears in multiple relaxation times methods based on other collision operators such as the cascaded lattice Boltzmann method [59] or the cumulant lattice Boltzmann method [27], when used with their suggested default set of nonhydrodynamic relaxation frequencies (i.e., all set to unity). It also exists in variants of the entropic lattice Boltzmann method, such as in [60]. In order to better understand the effect of the relaxation times on the bulk viscosity for those models, the reader may refer to [46,61], to the appendices of [27] and to [29] [Eq. (2.10)].

IV. GRID-COUPING ALGORITHM FOR THE DIRECTIONAL SPLITTING METHOD

We begin this section by a few useful definitions:

(1) *Transition interface*: set containing the nodes that do not have all the 19 required neighbors required by the standard LBM streaming algorithm. It is seen as the interface between the coarse and the fine grids (nodes pictured \blacksquare).

(2) *Inner fine nodes*: set containing all the fine nodes that have their 19 required neighbors nodes (pictured \blacktriangle).

(3) *Inner coarse nodes*: set containing all the coarse nodes that have their 19 required neighbors nodes (pictured \bullet).

(4) *Fine transition nodes*: fine nodes that belong to the transition interface (pictured \blacksquare^f).

(5) *Coarse transition nodes*: coarse nodes that belong to the transition interface (pictured \blacksquare^c). These nodes always have a colocated fine node.

(6) *Ghost layer nodes (only for our approach)*: nodes that are computed by interpolation, outside the transition interface on the coarse grid side. These values are used for the calculation of the gradient term (with a two-point centered finite difference stencil). Two categories are distinguished, Δ and Δ^t , that require different interpolation patterns (see Sec. IV B for the details).

We display on Fig. 1 the geometrical configuration of the grid refinement region with its different type of nodes defined above.

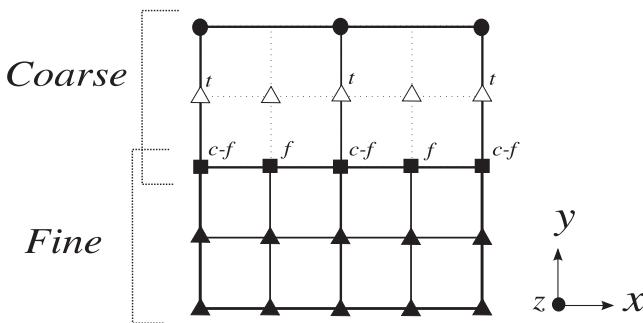


FIG. 1. Geometrical configuration of our grid refinement method. \bullet : inner coarse nodes; \blacktriangle : inner fine nodes; \triangle and Δ^t : fine ghost layer nodes; \blacksquare^f : fine transition nodes; \blacksquare^{c-f} : overlapping region where a \blacksquare^c and a \blacksquare^f are colocated.

We present here a two dimensional figure for clarity, but only one type of fine nodes is added when dealing with a three dimensional configuration. These nodes are located on the center of the face of the transition coarse cells (behind \blacksquare^f in the e_z direction) and are computed with our modified algorithm as any fine transition node.

A. Zonal grid refinement: Conversion relations

We summarize here very shortly the classical relations between the time steps, grid spacings, relaxation times, and nonequilibrium parts of the distribution functions when a change in grid size occurs. These relations are still valid with our approach and will be used in practice in our algorithm. More details can be found in Refs. [41,45]. We denote with a superscript f any quantity that relates to the *fine* grid, which grid size Δx^f relates to that of the so-called *coarse* grid, Δx^c , by the relation $\Delta x^c = 2\Delta x^f$. Since we choose to keep the speed of sound constant between the grids, the condition (10) gives $\Delta t^c = 2\Delta t^f$.

For the relaxation times, we thus have $\tau_g^f = \frac{\tau}{\Delta t^f} + \frac{1}{2}$ and $\tau_g^c = \frac{\tau}{2\Delta t^f} + \frac{1}{2}$. Imposing the continuity of the viscosity across the refinement interface leads to

$$\tau_g^f = 2\tau_g^c - \frac{1}{2}. \quad (39)$$

We also remark, thanks to Eq. (8), that the function g is not continuous under a change of resolution whereas the original f from the DVBE is. Writing this relation on a coarse and on a fine grid and combining them gives the following conversion formula between fine and coarse nonequilibrium functions:

$$g_\alpha^c - g_\alpha^{\text{eq}} = \frac{2\tau_g^c}{\tau_g^f} (g_\alpha^f - g_\alpha^{\text{eq}}), \quad (40)$$

which is identical to the classical one of Dupuis and Chopard [41] and ensures the continuity of the stress tensor S_{ij} . The equilibrium distribution does not require any rescaling since it only depends on the macroscopic quantities.

The rescaling method in moment-based formulations (such as the D3Q19 MRT) is slightly different but well explained in [34].

B. Interpolation schemes

All the refinement algorithms rely somehow on interpolations on the interface, even if not explicitly said. For example, cell-centered algorithms rely on an *averaging* of the neighboring fine cells (also called *homogeneous redistribution* or *coalescence* procedure) during the fine-to-coarse step: this is equivalent to a linear interpolation. An interesting situation is the coarse-to-fine procedure of [43], called *homogeneous redistribution of particle densities from coarse to fine grid cells*: this step is in fact equivalent to an extrapolation. Such coarse-to-fine extrapolation techniques appear in other cell-centered algorithms, such as in the work of Yu and Fan [44] or that of Chen *et al.* [17] (which is not based on standard *stream and collide* LBM but worth to be mentioned [18]).

In our case, we need to fill a ghost layer of fine nodes on the coarse side at each fine time step by interpolations. This layer is represented by \triangle and Δ^t nodes on Fig. 1. Equation (6) shows that an interpolation of at least third order in space

and time on g_α is necessary. Computational evidences of this necessity are given in [45], where this matter is also discussed. Numerical comparisons lead us to choose, when possible, a fourth order four-point symmetric stencil for spatial interpolation. To summarize, we used two different stencils for space interpolation:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t) = & \frac{2}{5}f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_y \Delta x, t) + 2f_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{e}_y \Delta x, t) \\ & - 2f_\alpha(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_y \Delta x, t) + \frac{3}{5}f_\alpha(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_y \Delta x, t) \\ & + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (41)$$

for nodes Δ^t ,

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t) = & \frac{9}{16}[f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_x \Delta x, t) + f_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{e}_x \Delta x, t)] \\ & - \frac{1}{16}[f_\alpha(\mathbf{x} + 3\mathbf{e}_x \Delta x, t) + f_\alpha(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_x \Delta x, t)] \\ & + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (42)$$

for nodes Δ . For time interpolation, we used at odd time steps (see Sec. IV E)

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t) = & \frac{-1}{8}f_\alpha(\mathbf{x}, t - 3\Delta t) + \frac{3}{4}f_\alpha(\mathbf{x}, t - \Delta t) \\ & + \frac{3}{8}f_\alpha(\mathbf{x}, t + \Delta t) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (43)$$

Interpolation can be either done on g or f distribution functions, depending on the chosen implementation. We note that with our method, there are no interpolated distribution functions that are directly used in any collision or streaming step. As we will see hereafter, the interpolated ghost layer of fine nodes is computed for the sole purpose of calculating the gradient F_α .

For this study, we used Eqs. (42) and (43) for both our model and the algorithm of Lagrava [45], in order to make correct comparisons. The situation in which Eq. (41) has to be used does not exist in Ref. [45]. The stencil (42) is also used in the recent study of Doschner *et al.* [60] and in the work of Stiebler *et al.* [28], which are also implemented in a vertex-centered data structure (all the details and the interpolation stencils of Ref. [28] can be found in the thesis of Crouse [38]). We also tested a linear time interpolation, as in Refs. [28,38], which showed no improvement in any of our simulations.

We also point out that studies in which a compact interpolation is employed, for example, in Refs. [21,26] (see also Ref. [23] for the mathematical concept), use a linear interpolation for the density and a higher order interpolation for the velocity field. Good results are obtained with compact interpolation by authors that only focus on aerodynamics and the method is promising. However, the authors are not aware of any evidence that a linear interpolation on the density is suitable for aeroacoustics, even if it is coupled to a higher order method for the velocity field (which obviously makes compact interpolation different than a linear interpolation on the whole distribution function). A linear interpolation on the whole distribution is equivalent to a linear interpolation on all its moments, which means that the density field is interpolated linearly as well. It has been shown in the work of Lagrava [45] that a linear interpolation on the whole distribution function, although having a quadratic $O(\Delta x^2)$ error term, can lead to discontinuities on the density field, and our own experience leads to the same conclusion. Evidence of this phenomenon can be found in Refs. [13,62] using FDLBM.

Also, several authors who use compact interpolations do not use any time interpolation at all, thanks to specific cell-centered algorithms, such as in Refs. [21,25–27]. However, the above mentioned issue regarding the presence or absence of discontinuities on the density field is not investigated.

C. Local filtering strategy

As emphasized by Lagrava *et al.*, a local filtering strategy is mandatory for grid refinements at the locations where information is transferred from the *fine* to the *coarse* grid. This is especially true when there is no artificial bulk viscosity added through the collision model, which, as we said earlier, must be the case when studying aeroacoustics.

For example, the stable results obtained in Refs. [28,60], in which this filtering step does not appear, can be explained by such an increase of the bulk viscosity, which prevents stability issues near the interface (as well as away from it). In the case of Stiebler *et al.* [28], this is simply made through the relaxation rates of the MRT model. It is less obvious in the work of Doschner *et al.* [60]. However, the proof can be found in Ref. [29] [Eq. (2.10)], cited by the authors themselves, in which the entropic stabilizer γ is explicitly related to the value of the bulk viscosity for the model used in Ref. [60]. Thanks to the equation cited above, we can see that the figure showing the spatial evolution of γ in the turbulent channel of Ref. [60] indicates that the value of the bulk viscosity is particularly increased near the refinement interfaces on the coarse side, where instabilities are the most likely to appear. In addition to the fact that Lagrava *et al.* use only a single relaxation time, this may explain why the authors of Ref. [60] claim that “in contrast to the algorithm of Lagrava *et al.*,” they do not need a box filter to maintain stability with grid refinements. However, this feature also dismisses the use of this model for aeroacoustics.

On the other hand, for a low and constant value of the bulk viscosity, suitable for aeroacoustics, we confirm the observations of Lagrava *et al.*: the absence of a local fine-to-coarse filtering step leads to unstable results.

This filtering procedure is not only mandatory for numerical stability reasons: it also relies on purely physical grounds. Due to the factor 2 between the coarse and fine time steps and mesh sizes, reduced wave numbers and frequencies above $\pi/2$ on the fine grid are not supported by the coarse grid. An ideal filter would be a time and space box filter in Fourier space, with an infinitely sharp cutoff at $k^f = \pi/2$ and $\omega^f = \pi/2$ (where k^f and ω^f are the reduced wave numbers and frequencies, respectively, in fine lattice units), applied to the whole distribution function. This ideal case is of course unreachable in our situation. It is also very important to note that more or less sophisticated filtering steps appear in the majority of the existing grid refinement algorithms, although often not explicitly written: for example, the procedure that consists in computing the coarse cell by averaging the neighboring fine cells (which is very common in cell-centered algorithms, see Sec. IV B) acts of course indirectly as a basic spatial filter. More generally, any *fine-to-coarse* procedure that relies on the use of neighboring fine cells acts as a filter. In our case, we choose to filter the nonequilibrium part of the distribution

function because it yields a clearly less dissipative scheme than filtering the whole distribution function, as we will see after.

We therefore apply a *restriction* filter (denoted \mathcal{R}) to the nonequilibrium part of the precollision distribution function, where information is transferred from the fine level to the coarse level. The collision Eq. (6) is filtered in the following way:

$$\hat{g}^f(\mathbf{x}, t) = g_\alpha^f(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g} [\mathcal{R}(g_\alpha^{\text{neq}, f})(\mathbf{x}, t)]. \quad (44)$$

The expression of our filter \mathcal{R} is derived from the one used in the work of Touil *et al.* [42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t)] &= \frac{1}{7} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{14} \sum_{\beta=1}^6 g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \\ &\quad + \frac{1}{28} \sum_{\beta=7}^{18} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t). \end{aligned} \quad (45)$$

This operation is mass and momentum conserving because

$$\sum_{\alpha=0}^{18} \mathcal{R}[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t)] = 0, \quad (46)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{18} \mathbf{c}_\alpha \mathcal{R}[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{0}. \quad (47)$$

This is obtained by noticing that, for any indices a and b , it follows by definition of the nonequilibrium part of the distribution function at a fixed location that

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{18} \sum_{\beta=a}^b g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \\ = \sum_{\beta=a}^b \sum_{\alpha=0}^{18} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{18} \mathbf{c}_\alpha \sum_{\beta=a}^b g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \\ = \sum_{\beta=a}^b \sum_{\alpha=0}^{18} \mathbf{c}_\alpha g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (49)$$

The construction of this restriction operator is based on a lattice discretization of the Laplacian that we note Δ^L : it is defined in dimensional units as [42]

$$\mathcal{R} = \mathbf{I} + \frac{(\sigma^* \Delta x^f)^2}{2} \Delta^L. \quad (50)$$

Equation (45) corresponds to the special case $\sigma^* = \sqrt{3/7}$ [42]. Equation (45) can also be interpreted as a volumetric average with weights 1, 0.5, and 0.25 for the center, face, and edge nodes, respectively, together with a normalization factor [42]. A full study on discretized Laplacians in 2D and 3D, including lattice discretizations Δ^L on the D2Q9, D3Q15, D3Q19, and D3Q27 lattices, is available in Ref. [63].

This operation acts as a filter on the collision operator, exactly as extensively studied in [48]. Therefore, the viscosity

in the zero-wave-number limit is not modified, but is wave number dependent for high \mathbf{k} . A linear analysis [Eq. (25) in Ref. [48]] shows that if \mathcal{R} is a filter of order n (in our case $n = 2$), then the viscosity follows the same transfer function of order n . As far as its effect on the shear mode is concerned, the study of Ricot *et al.* [48] clearly shows that filtering the nonequilibrium part yields a higher order filter (which means less dissipative) than if it was applied to the whole distribution function: we can estimate that, since the present restriction is a second order filter on the viscosity, it yields a fourth order filter on the shear mode {the dissipation rate becomes $-\nu + O(|\mathbf{k}|^2)|\mathbf{k}|^2 = -\nu|\mathbf{k}|^2 + O(|\mathbf{k}|^4)$ }. However, as we said before, when transferring data from a fine site to a coarse site, only the additional dissipation in the range $k^f \in [0; \pi/2]$ matters since the remaining wave numbers up to π do not exist on the coarse lattice.

Such a locally filtered collision operator preserves the second order accuracy of the scheme in the acoustic scaling: the proof is given in Appendix B. This 3D filter is used for the modified algorithm of Lagrava *et al.* in order to make fair comparisons.

However, as we will see in the next section, we need in the case of our method to perform this operation on nodes that belong to the transition interface, which do not possess all their 19 neighbors, unlike in Refs. [42,45]. On the interface, a 3D symmetric stencil is never available: a 2D symmetric equivalent of this stencil is used when a plane containing nine neighbors is available. This nine-point plane stencil corresponds to the D2Q9 stencil. By denoting \mathcal{F} the so called “face” links (corresponding to $\alpha = 1 \dots 4$ in conventional D2Q9 LBM) and \mathcal{E} the “edge” links ($\alpha = 5 \dots 8$ in D2Q9 LBM) [63], we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{2D}}[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t)] \\ = \frac{1}{4} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \sum_{\beta \in \mathcal{F}} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t) \\ + \frac{1}{16} \sum_{\beta \in \mathcal{E}} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\beta, t). \end{aligned} \quad (51)$$

This can also be derived from Eq. (50) along with the D2Q9 discretization of the Laplacian [63] in the special case $\sigma^* = \sqrt{9/20}$.

On complex refinement geometries, there are a few configurations for which a plane containing nine neighbors cannot be found: one can then use a simple three-point average in 1D if needed. This 1D stencil corresponds to the one of the D1Q3: by denoting $c_1 = 1$ and $c_2 = -1$ its two nonzero discrete velocities, the average writes

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{1D}}[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t)] &= \frac{1}{2} g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} [g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} + 1, t) \\ &\quad + g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x} - 1, t)]. \end{aligned} \quad (52)$$

This is also a second order filter in 1D, as shown in the study of Falissard [64]. Higher order stencils in 1D, 2D, and 3D can be found in Ref. [64]. Both 2D and 1D restriction filters defined above are also mass and momentum conserving and preserve the second order accuracy of the scheme: the proof is straightforward and is obtained using the same arguments as in the 3D case.

A conversion from the fine scale to the coarse scale of this restricted distribution function is obtained by expression (40) when needed.

D. Initialization of the distribution functions

For a given initial macroscopic field, we need to initialize the value of the distribution functions on the whole grid. A Chapman-Enskog expansion at first order in Knudsen number yields the following expression for the distribution function, in lattice units:

$$g_\alpha = g_\alpha^{\text{eq}} - \omega_\alpha \rho \frac{\bar{t}_g}{c_s^2} \mathcal{H}_\alpha^{(2)} : S, \quad (53)$$

where $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$, $\mathcal{H}_\alpha^{(2)} = \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha - c_s^2 \mathbf{I}$, and S is the strain rate tensor, given by

$$S = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}}{2}. \quad (54)$$

In our numerical tests, analytical expressions of the initial velocity fields are known: therefore, the strain tensor is computed analytically at initialization step. We used Eq. (53) (often called the *regularized* expression [65]) to compute the initial populations.

From these values, it is easy to compute the initial field for h_α , using Eq. (28).

E. Proposition of a detailed algorithm

In this section, we use the equations previously derived in order to propose a grid-coupling algorithm, based on the notations of Fig. 1. We note that the transition interface between the fine and the coarse grid is the only zone where both regions overlap, through nodes \blacksquare^{c-f} .

We start from an initial state $t = t_0$: all the macroscopic variables and distribution functions g_α are initialized by the user everywhere on the fine and on the coarse grid. Since $\Delta t^c = 2\Delta t^f$, we count time separately on the fine and on the coarse grid, in fine time scale units. With this convention, we describe here the algorithm in three parts: initialization, odd and even time steps.

(1) Fine grid: $t = t_0$, coarse grid: $t = t_0$, initialization step:

(a) Compute the ghost fine layer with Eq. (41) for nodes Δ^t and then Eq. (42) for nodes Δ . When using coarse values, use Eq. (40) for conversion into fine scale.

(b) Calculate F_α by converting all the g_α needed into f_α with the help of Eq. (8).

(c) Collide g_α everywhere using Eq. (6).

(d) Convert \hat{g}_α into \hat{h}_α with Eq. (30).

(2) Fine grid: $t = t_0 + 1$, coarse grid: $t = t_0 + 2$, odd time step:

(a) Stream \hat{g}_α on all the inner fine and coarse nodes and \hat{h}_α on the interface.

$g_\alpha(t_0 + 1)$ is now obtained on every inner fine node, and $h_\alpha(t_0 + 1)$ are obtained on the fine transition nodes. $g_\alpha(t_0 + 1)$ on the fine transition nodes is missing, and needed to compute macroscopic quantities. We also know $g_\alpha(t_0 + 2)$ on every inner coarse node.

(b) Compute the ghost fine layer (step 1a). At odd time steps, a temporal interpolation on inner coarse nodes [Eq. (43)] is needed for nodes Δ^t .

(c) Compute F_α .

(d) Convert h_α into g_α by Eq. (28) and compute the macroscopic variables on the fine transition nodes.

(e) Collide g_α using the filtered collision on the fine transition nodes (Sec. IV C), and using Eq. (6) on the inner fine nodes.

(f) Convert \hat{g}_α into \hat{h}_α with Eq. (30).

(3) Fine grid: $t = t_0 + 2$, coarse grid: $t = t_0 + 2$, even time step:

(a) Stream \hat{g}_α on all the inner fine nodes and \hat{h}_α on the interface.

$g_\alpha(t + 2)$ is now obtained on every inner fine node and $h_\alpha(t + 2)$ is obtained on the fine transition nodes. We need to compute $g_\alpha(t_0 + 2)$ on the fine transition nodes.

(b) Compute the ghost fine layer (repeat step 1a). At even time steps, no temporal interpolation is needed.

(c) Repeat steps 2c to 2f.

(d) Compute $g_\alpha^c(\blacksquare^c, t + 2)$ from its colocated fine value using Eq. (40).

(e) Collide $g_\alpha^c(\blacksquare^c, t + 2)$.

(4) Loop over steps 2a to 3e until the end.

V. NUMERICAL VALIDATIONS

In this section, we present numerical computations on two different cases: the acoustic pulse and a convected source of vorticity. Our computational domains are pseudo-two-dimensional, which means that their extension in the z direction is of only one coarse mesh size. Moreover, our domains are always chosen periodic in the z direction. Therefore, we neglect the influence of the z coordinate although our algorithm and our solver are in fact three dimensional. We use throughout the whole section a reference length $L = 1$ m for the dimensions of the computational domains and the corresponding dimensionless variables $x^* = x/L$, $y^* = y/L$, and $\Delta x^* = \Delta x/L$. Since we have $L = 1$ m, we consider these three dimensionless values as equal to their dimensional

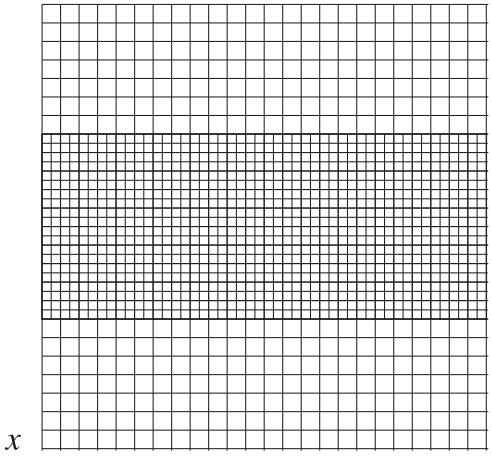


FIG. 2. Grid strategy for the acoustic pulse test case.

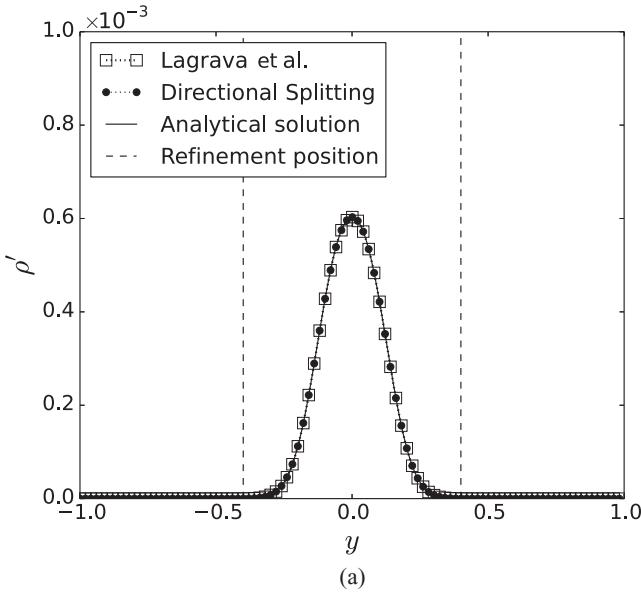
counterpart. We also note t^* the time step number, so that $t = t^* \Delta t^f$.

For the whole section, we set c_0 the speed of sound to $c_0 = 343.2$ m/s and the reference density to $\rho_0 = 1$ kg/m³ for simplicity.

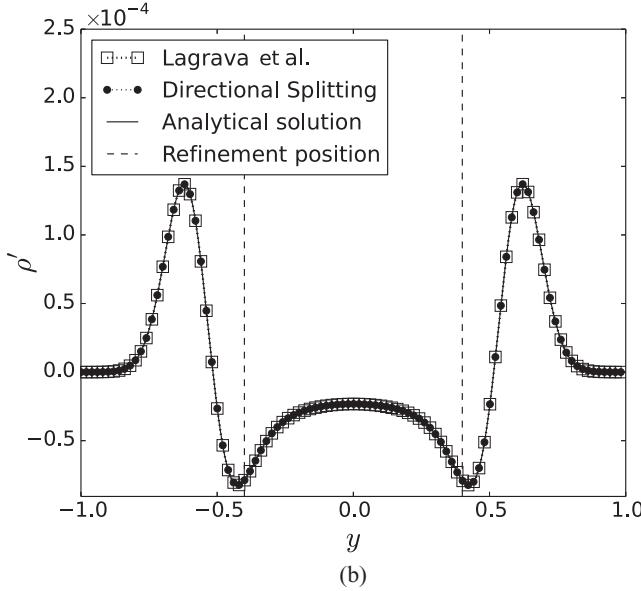
A. Acoustic pulse

We first consider a pseudo-2D acoustic pulse. This is the most standard and easy aeroacoustic test case. We work at very low viscosity, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m²/s. The initial profile at $t = t_0 = 0$ is given as follows:

$$\begin{aligned} \rho(t_0) &= \rho_0[1 + \rho'(t_0)], \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (55)$$



(a)



(b)

FIG. 3. Value of the perturbation ρ' at (a) $t^* = 10$ and (b) $t^* = 100$ compared to the analytical Euler fluctuation ρ'_{th} .

with

$$\begin{aligned} \rho'(x, y, t_0) &= \epsilon \exp(-\alpha r^2), \quad \epsilon = 10^{-3}, \quad \alpha = \frac{\ln(2)}{b^2}, \\ b &= 10^{-1}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

Assuming that the effect of a very low viscosity is negligible on acoustic waves (especially on short distances), and that the amplitude of the acoustic perturbation is small, the density fluctuation $\rho'(x, y, t)$ can be compared to an analytical solution $\rho'_{\text{th}}(x, y, t)$ that comes from the resolution of the linearized Euler equations [66]:

$$\rho'_{\text{th}}(x, y, t) = \frac{\epsilon}{2\alpha} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-s^2}{4\alpha}\right) \cos(c_0 ts) J_0(rs) s ds, \quad (57)$$

where J_0 is the Bessel zeroth order function of the first kind.

Our first computational domain is a pseudo-2D fully periodic box of size $[2, 2, \Delta x^c]$ with $\Delta x^c = 0.02 = 2\Delta x^f$. The pulse is initialized at the center of the box. Refinement regions are located at $y = -2/5$ and $2/5$. The geometrical configuration is summarized on Fig. 2, drawn with a coarser mesh size for clarity.

We first compare for two different time steps the density function between our model, the algorithm of Lagrava *et al.* [45], and the analytical solution on Fig. 3.

We see that there is a very good match between both models and the analytical solution. To have a better quantitative assessment of the magnitude of the error on the density, we computed its L_2 norm for three different mesh resolutions (the size of the domain is kept fixed). We define the normalized L_2 error as

$$\|\delta\rho\|_{L_2}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{x,y} [\rho'(x, y, t) - \rho'_{\text{th}}(x, y, t)]^2}{\sum_{x,y} \rho'_{\text{th}}(x, y, t)^2}}. \quad (58)$$

We denote by N the equivalent number of fine cells in both x and y directions (so that $L = 1 = N * \Delta x^f$). For three different resolutions, we compute the error norm at time $t^* = 100$ in order to take into account the effect of refinement and plot the results on Fig. 4.

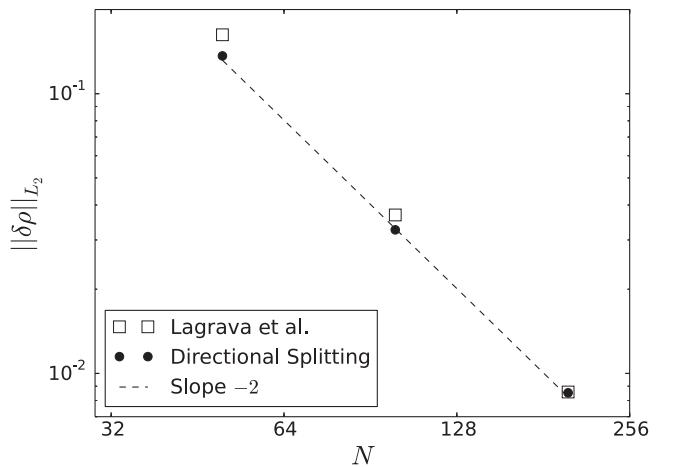


FIG. 4. Relative L_2 norm of the error on the density fluctuations for the acoustic pulse: comparison at $t^* = 100$.

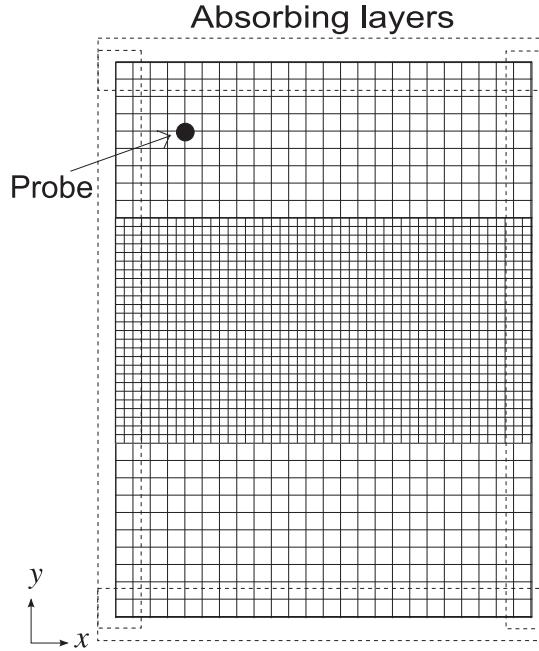


FIG. 5. Grid strategy for the vortex test case, with absorbing buffer zones on the x and y boundaries and a probe used later for PSD computation.

We can see that our approach also exhibits a second order global convergence in space and time for the density. In the next section, we demonstrate that such acoustic wave propagation cases are not sufficient to validate a grid refinement method for aeroacoustics.

B. Convection of a vortex

As a second benchmark, we study the convection of a Gaussian source of vorticity. The first problem is the computation of the initial states that would allow us to study precisely the evolution of the density. An incorrect initialization for this quantity would lead to the emission of

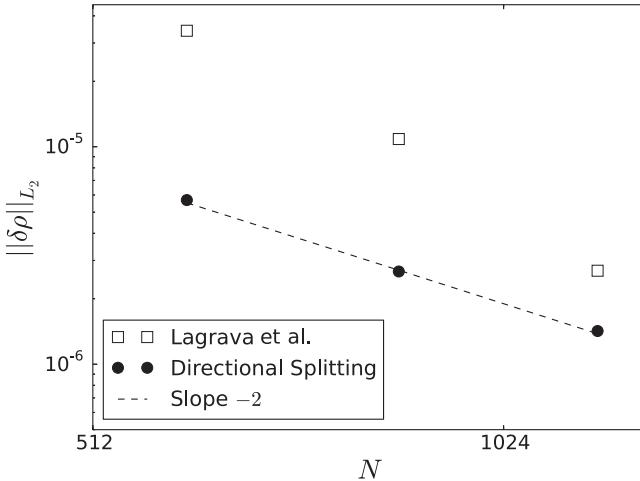


FIG. 6. Relative L_2 norm of the error on the density fluctuations for the vortex case: comparison between the Lagrava *et al.* algorithm and the directional splitting approach at $t^* = 21\,000$.

a very strong spurious acoustic wave at $t = 0$. We take care of this issue in Appendix C. We choose a vortex of medium strength, which yields a more realistic simulation. In order to get stable conditions with the simple BGK model, we take a viscosity of $\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

We summarize the initial states considered here, with V_0 the free stream velocity and $\gamma = 1.4$; it writes (see Appendix C)

$$\begin{aligned} u(x, y, t_0) &= -\epsilon c_0 \frac{y}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ v(x, y, t_0) &= V_0 + \epsilon c_0 \frac{x}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ \rho_1(x, y, t_0) &= -\frac{\rho_0 \epsilon^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \\ \rho(x, y, t_0) &= \rho_0 + \rho_1 + \frac{1}{2\gamma\rho_0} \rho_1^2, \\ \rho'(x, y, t_0) &= \rho(x, y, t_0) - \rho_0. \end{aligned} \quad (59)$$

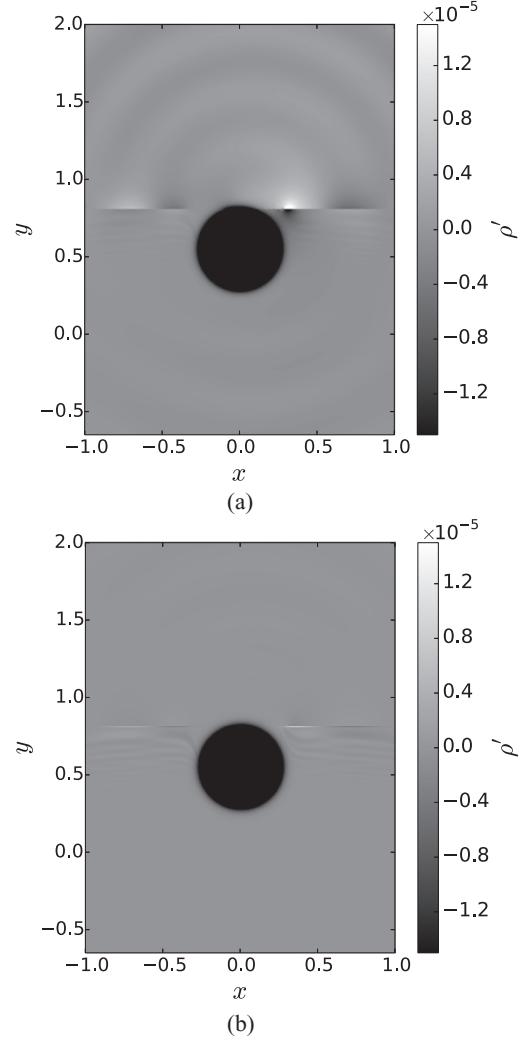


FIG. 7. Density field ρ' at time $t^* = 9500$ (very precise closeup) for (a) the algorithm of Lagrava *et al.* and (b) the directional splitting method. The transition interface is located at $y = 0.8$, the coarse mesh being above the interface. The vortex is convected upwards.

For the simulations we chose, with M the free stream Mach number

$$\frac{V_0}{c_0} = M, \quad \epsilon = 0.14, \quad R = 0.1. \quad (60)$$

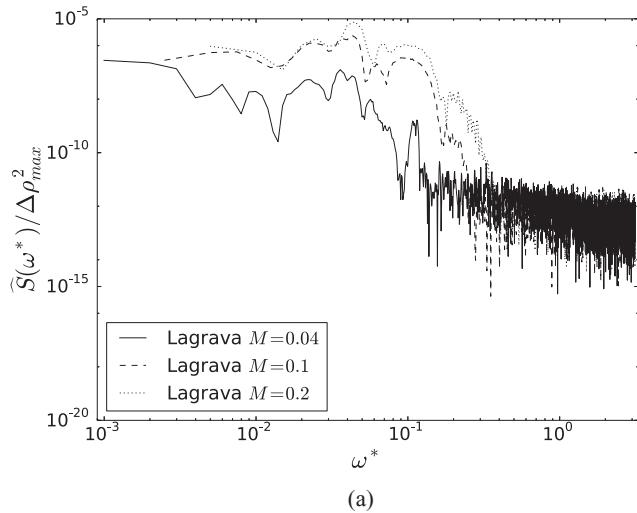
The vortex is thus convected upwards along the y axis at a speed V_0 . We also define $\Delta\rho_{\max} = \rho_0 - \rho(x = 0, y = 0, t = 0) \simeq 2.7 \times 10^{-2}$, which represents the initial density drop across the vortex. For the study of the L_2 convergence, we take a highly refined ($\Delta x = 0.001$) simulation on a uniform mesh as a reference. The density fluctuation in this reference simulation is denoted $\rho'_{\text{ref}}(x, y, t) = \rho_{\text{ref}}(x, y, t) - \rho_0$, so that the L_2 error can be redefined here as

$$\|\delta\rho\|_{L_2}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{x,y} [\rho'(x, y, t) - \rho'_{\text{ref}}(x, y, t)]^2}{\sum_{x,y} \rho'_{\text{ref}}(x, y, t)^2}}. \quad (61)$$

Our fluid domain is of size $[3, 4, \Delta x^c]$, bordered by nonreflecting zones (the simple *type II* model of Ref. [67] with thickness $\delta = 0.2$ and absorbing parameter $\chi = 1.999$) in order to minimize any reflection of spurious acoustics on the boundaries. In this benchmark, there is no interaction between the vortex and the absorbing layer. The domain is represented on Fig. 5 with a coarse mesh size for clarity. We denote by N the equivalent number of fine cells in the x direction and impose the velocity at $\mathbf{u} = V_0 \mathbf{e}_y$ on all the boundaries in the x and y directions.

First of all, we run three simulations with $M = 0.04$ and $\Delta x^f \in \{0.0025, 0.0035, 0.005\}$ for both our model and the Lagrava algorithm, in order to study the grid convergence. The results are plotted on Fig. 6.

The second order convergence is rigorously recovered with our approach, whereas a fortuitous superconvergent behavior is observed for the Lagrava algorithm, as well as a higher level of error, especially for under-resolved simulations. The ability of a grid refinement algorithm to treat under-resolved vortices is crucial for any industrial applications. The shape of the curve for the Lagrava algorithm can be explained by third or fourth order interpolation error terms on the interface that radiate in the near field and dominate, in amplitude, the standard second



order error terms of the LBM. However, despite very low L_2 errors (below 0.005% for all the simulations on Fig. 6), we show hereafter that this cannot guarantee an aeroacoustically correct simulation.

Let us now compare the corresponding instantaneous density field of the most refined case $\Delta x^f = 0.0025$ ($N = 1200$), displayed on Fig. 7.

The values are intentionally plotted with an amplitude of $\Delta\rho = \pm 1.5 \times 10^{-5}$, which is 18 000 times smaller than $\Delta\rho_{\max}$. It shows that very low amplitude spurious acoustic waves emerge from the refinement interface when crossed by the vortex and that this phenomenon is largely reduced with our directional splitting approach. Although these errors are often not visible on the pressure field because of their very low amplitude compared to hydrodynamic fluctuations, they are of paramount importance for aeroacoustics.

In order to have a better insight into these spurious fluctuations, we compute an estimation of the power spectral density (PSD) for the density at the probe location shown on Fig. 5. The PSD \widehat{S} is computed using samples picked at each time step on the coarse grid between $t^* = 8400$ and 21 000, in order to let the vortex entirely cross the transition interface: this gives us $N_s = 6300$ samples. We use a simple periodogram estimator and a Hanning window (with energy correction), which yields

$$\widehat{S}(\omega^*) = \frac{1}{N_s} |\mathcal{F}(\rho - \rho_0)(\omega^*)|^2, \quad (62)$$

where \mathcal{F} represents the window-corrected discrete Fourier transform and ω^* the nondimensional angular frequency ($0 \leq \omega^* \leq \pi$).

Theoretically, a convected vortex alone does not emit noise, which is another reason why this benchmark is interesting: the theoretical value of the density fluctuation at the location of our probe is simply $\rho'_{\text{th}}(t) = 0$. This was also numerically verified by studying the density field of our very fine reference simulation. Therefore, one does not need to compare the numerical results to any experimental data when using this benchmark.

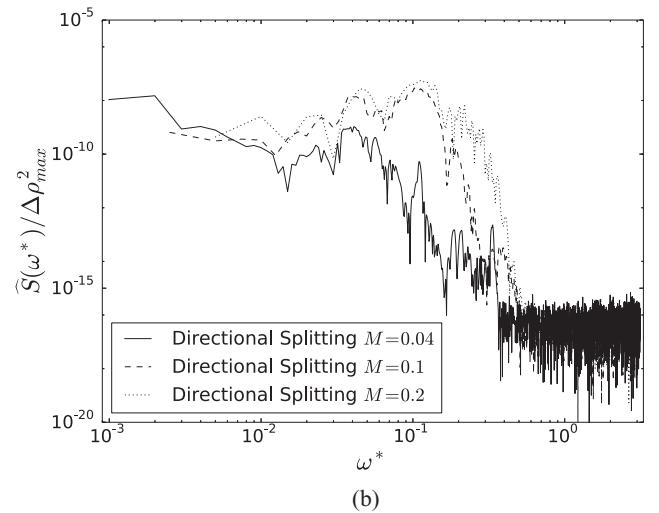


FIG. 8. Nondimensional power spectral densities of the spurious density fluctuations at a near-field location (see Fig. 5) for (a) the method of Lagrava *et al.* and (b) our directional splitting approach.

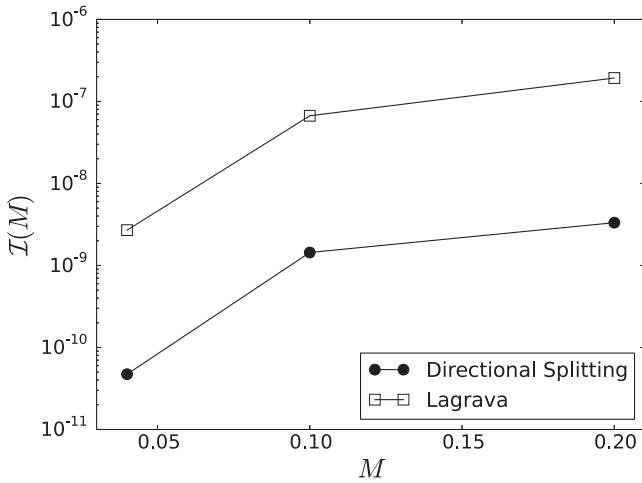


FIG. 9. Integrated power spectral densities of the spurious density fluctuations over the whole frequency spectrum, as a function of the convective Mach number.

Our results are displayed on Fig. 8 using a logarithmic scaling. In order to better compare the level of the fluctuations to the density drop across the vortex, the periodograms are normalized by $\Delta\rho_{\max}^2$ (see Sec. V B). We also show on Fig. 9 the values of the corresponding integrated spectra (integration is made on the whole frequency domain, using a trapezium rule), as a function of the Mach number. These integrated spectra are computed as

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi \hat{S}(\omega^*) / \Delta\rho_{\max}^2 d\omega^*, \quad (63)$$

for each algorithm and at the same Mach numbers than in Fig. 8.

Even in the worst case (the Lagrava algorithm at $M = 0.2$), these figures show that the spurious fluctuations have a very low power level compared to the vortex itself, which is why they often cannot be seen “at first” on the density or pressure field. Second, we see that our approach provides a clearly better spectral behavior on the whole spectrum. Figure 9 reveals that the power of the spurious near-field noise is reduced approximately by a factor 55 for free stream Mach numbers from 0.04 to 0.2 on this benchmark. It is also obvious that increased Mach numbers strongly deteriorate the spectra, even if the overall behavior remains better with our method.

VI. CONCLUSION

In this paper, we developed a vertex-centered approach for treating grid refinements in the lattice Boltzmann method within the framework of aeroacoustics. This approach is based on a directional splitting of the discrete velocity Boltzmann equation. We used a simple BGK equation as a basis but showed that this work could be extended to multiple relaxation time operators. However, independently from grid refinement considerations, we emphasized on the fact that the relaxation parameters of multiple relaxation time models had to be chosen very carefully for aeroacoustic studies, so that nonphysical bulk viscosity is not added. We also recalled that the same issue appears in several variants of the entropic lattice Boltzmann

method. As far as mesh refinement is concerned, the crucial questions of interpolations and fine-to-coarse filtering were also addressed.

To assess the method, we considered two benchmark cases: the acoustic pulse propagation and the convected pseudoisentropic vortex. For these simulations, we compared the results to those of the Lagrava algorithm [45]. The six main conclusions that can be drawn thanks to this work are thus the following:

(i) Standard sound propagation benchmarks are not sufficient for an aeroacoustic validation of a grid refinement algorithm.

(ii) When a refinement interface is crossed by a vortical flow, nonphysical noise can emerge from it and propagate throughout the domain, especially in under-resolved areas. Considering the energy levels involved, these spurious fluctuations may be negligible for purely aerodynamic studies but must be taken care of for aeroacoustics.

(iii) The energy level of this spurious noise is even higher as the convective Mach number is increased.

(iv) Our approach exhibits a better behavior as far as the spectral content of the spurious interface noise is concerned: the power of the spurious acoustic noise for the vortex benchmark is reduced by a factor ≈ 55 for convective Mach numbers from 0.04 up to 0.2.

(v) Our method is second order accurate in time, space, and Knudsen number, which was shown both numerically and analytically.

(vi) Most importantly, we believe that the procedure described in Sec. V B constitutes a useful benchmark for any validation of a grid refinement algorithm for aeroacoustics.

APPENDIX A: CHAPMAN-ENSKOG EXPANSION FOR THE DIRECTIONAL SPLITTING MODEL

We start from the dimensionless splitted DVBE [Eq. (19)]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \cdot \nabla^\parallel f_\alpha = \frac{-1}{\tilde{\tau}}(f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) - c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha, \quad (\text{A1})$$

with $\tilde{\tau} = \tau/t_0$.

In this Appendix, we choose to write the same equation in a slightly different way: by introducing the mean free path $\lambda = \tau c_0$, a characteristic length $l_0 = c_0 t_0$ (kinetic Strouhal number equal to 1), the Knudsen number $\epsilon = \frac{\lambda}{l_0} = \frac{\tau}{t_0} \ll 1$ and the quantity $\tilde{\tau} = 1$, we have

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \cdot \nabla^\parallel f_\alpha = \frac{-1}{\epsilon \tilde{\tau}}(f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) - c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha. \quad (\text{A2})$$

The classical Chapman-Enskog expansion can be performed on this continuous system by taking

$$f[\rho(\mathbf{x}, t), \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)}[\rho(\mathbf{x}, t), \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{A3})$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial t}. \quad (\text{A4})$$

From Eq. (A2), it is possible to make all the derivations of Sec. III that lead to the splitted lattice Boltzmann equation by

simply replacing $\tilde{\tau}$ by $\epsilon\tilde{\tau}$. We obtain immediately

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \tilde{\Delta t}, t + \tilde{\Delta t}) &+ \frac{\tilde{\Delta t}}{2} F_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha^\parallel \tilde{\Delta t}, t + \tilde{\Delta t}) \\ &= g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta t}}{\frac{\tilde{\Delta t}}{2} + \epsilon\tilde{\tau}} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \\ &\quad - \frac{\tilde{\Delta t}}{2} F_\alpha + O(\tilde{\Delta t}^3) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

with

$$F_\alpha = c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha. \quad (\text{A6})$$

We now introduce the operators

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_\alpha) = D^\parallel + D^\perp, \quad (\text{A7})$$

$$D^\parallel = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^\parallel \cdot (\mathbf{c}_\alpha^\parallel), \quad (\text{A8})$$

$$D^\perp = c_\alpha^\perp \nabla^\perp, \quad (\text{A9})$$

which gives

$$F_\alpha = D^\perp f_\alpha. \quad (\text{A10})$$

This means that for recovering the expansion of the original lattice Boltzmann equation, one simply has to take $D = D^\parallel$ and $D^\perp = 0$ in what follows.

A second order Taylor expansion of the left-hand side of Eq. (A5) yields

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta t} D^\parallel g_\alpha + \frac{\tilde{\Delta t}^2}{2} D^\parallel{}^2 g_\alpha \\ = \frac{-\tilde{\Delta t}}{\epsilon\tilde{\tau} + \frac{\tilde{\Delta t}}{2}} (g_\alpha - g_\alpha^{\text{eq}}) - \frac{\tilde{\Delta t}}{2} F_\alpha + O(\tilde{\Delta t}^3), \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

with

$$g_\alpha - g_\alpha^{\text{eq}} = \left(1 + \frac{\tilde{\Delta t}}{2\epsilon\tilde{\tau}}\right) (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}). \quad (\text{A12})$$

Equation (A12) shows that there is a difference of one order of magnitude in ϵ between f_α^{neq} and g_α^{neq} . Moreover, the term $\tilde{\Delta t}/(\tilde{\Delta t}/2 + \epsilon\tilde{\tau})$ in Eq. (A11) is not of order $1/\epsilon$. The Chapman-Enskog expansion can therefore not be safely performed on the discrete system with g_α the exact same way it is for the continuous case with f_α . We note that this remark is also valid for a Chapman-Enskog expansion of the discrete velocity Boltzmann equation in its original form.

From now on, we omit the tildes for clarity. In order to recover the Navier-Stokes equations, a first order Chapman-Enskog expansion in ϵ is sufficient. We therefore introduce other operators for simplicity:

$$D = D_0 + \epsilon D_1 + O(\epsilon^2), \quad (\text{A13})$$

$$D_0 = D_0^\parallel + D_0^\perp, \quad (\text{A14})$$

$$D_0^\parallel = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_\alpha^\parallel), \quad (\text{A15})$$

$$D_0^\perp = c_\alpha^\perp \nabla^\perp = D^\perp, \quad (\text{A16})$$

$$D_1 = \frac{\partial^{(1)}}{\partial t}. \quad (\text{A17})$$

If we expand f_α as $f_\alpha = f_\alpha^{\text{eq}} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^3)$, we obtain

$$g_\alpha = f_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(2)} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A18})$$

This gives us

$$\begin{aligned} (D_0^\parallel + \epsilon D_1) &\left(f_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(2)} \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2} (D_0^\parallel + \epsilon D_1)^2 \left(f_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{(2)} \right) \\ &+ \left[D_0^\perp + \frac{\Delta t}{2} (D_0^\parallel + \epsilon D_1) D_0^\perp \right] (f_\alpha^{\text{eq}} + \epsilon f_\alpha^{(1)}) \\ &= \frac{-1}{\tau} (f_\alpha^{(1)} + \epsilon f_\alpha^{(2)}) + O(\Delta t^2) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

By separating the different contributions in powers of ϵ , we derive for order ϵ^0

$$(D_0^\parallel + D_0^\perp) f_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2\tau} (A_\alpha^{(0)} + B_\alpha^{(0)}) = \frac{-1}{\tau} f_\alpha^{(1)} + O(\Delta t^2), \quad (\text{A20})$$

with

$$A_\alpha^{(0)} = D_0 f_\alpha^{(1)} + \tau D_0^2 f_\alpha^{\text{eq}}, \quad (\text{A21})$$

$$B_\alpha^{(0)} = -D_0^\perp f_\alpha^{(1)} - \tau (D_0^\perp{}^2 + D_0^\parallel D_0^\perp) f_\alpha^{\text{eq}}, \quad (\text{A22})$$

and for order ϵ^1

$$\begin{aligned} D_1 f_\alpha^{\text{eq}} + (D_0^\parallel + D_0^\perp) f_\alpha^{(1)} &+ \frac{\Delta t}{2\tau} (A_\alpha^{(1)} + B_\alpha^{(1)}) \\ &= \frac{-1}{\tau} f_\alpha^{(2)} + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

with

$$A_\alpha^{(1)} = (D_1 + \tau D_0^2) f_\alpha^{(1)} + D_0 f_\alpha^{(2)} + 2\tau D_0 D_1 f_\alpha^{\text{eq}}, \quad (\text{A24})$$

$$B_\alpha^{(1)} = -D_0^\perp f_\alpha^{(2)} - \tau (D_0^\perp{}^2 + D_0^\parallel D_0^\perp) f_\alpha^{(1)} - \tau D_0^\perp D_1 f_\alpha^{\text{eq}}. \quad (\text{A25})$$

For the original lattice Boltzmann equation, the terms $B_\alpha^{(i)}$ are not present.

As far as the $A_\alpha^{(i)}$ are concerned, they are both of order $O(\Delta t)$, which guarantees the second order accuracy in time and space of the original LBE. For $A_\alpha^{(0)}$, the result is obtained immediately by applying the operator D_0 to Eq. (A20). For $A_\alpha^{(1)}$, we obtain by applying the operator D_0 to Eq. (A23)

$$D_0^2 f_\alpha^{(1)} = -\frac{D_0}{\tau} f_\alpha^{(2)} - D_0 D_1 f_\alpha^{\text{eq}} + O(\Delta t). \quad (\text{A26})$$

According to Eq. (A20) we also have

$$D_0 D_1 f_\alpha^{\text{eq}} = -\frac{D_1}{\tau} f_\alpha^{(1)} + O(\Delta t). \quad (\text{A27})$$

Inserting Eqs. (A26) and (A27) into Eq. (A24) ends the proof for $A_\alpha^{(1)}$.

This conclusion also applies to the $B_\alpha^{(i)}$. Applying the operator D_0^\perp to Eq. (A20) and inserting the resulting expression $D_0^\perp f_\alpha^{(1)}$ of into Eq. (A22) proves that $B_\alpha^{(0)}$ is of order $O(\Delta t)$. For $B_\alpha^{(1)}$, applying the operator D_0^\perp to Eq. (A23) and inserting

the resulting expression $D_0^\perp f_\alpha^{(2)}$ of into Eq. (A25) ends the proof. In the end, this gives us for order ϵ^0

$$D_0 f_\alpha^{\text{eq}} = \frac{-1}{\tau} f_\alpha^{(1)} + O(\Delta t^2), \quad (\text{A28})$$

and for order ϵ^1

$$D_1 f_\alpha^{\text{eq}} + D_0 f_\alpha^{(1)} = \frac{-1}{\tau} f_\alpha^{(2)} + O(\Delta t^2), \quad (\text{A29})$$

which is exactly the result obtained with the original LBE.

The fluid equations are obtained by calculating the discrete moments of Eqs. (A20) and (A23). The conservation equation for mass at first order in Knudsen number corresponds to the sum of the zeroth order moment of Eqs. (A20) and (A23). The same principle is followed in order to obtain the momentum conservation, but with the first order moments.

For the conservation of mass at order ϵ^0 , we have

$$\frac{\partial^{(0)} \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + O(\Delta t^2) = 0. \quad (\text{A30})$$

For the conservation of mass at order ϵ^1 , we obtain

$$\frac{\partial^{(1)} \rho}{\partial t} + O(\Delta t^2) = 0. \quad (\text{A31})$$

For the conservation of momentum at order ϵ^0 , we have

$$\frac{\partial^{(0)} \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}^{\text{eq}} + O(\Delta t^2) = 0, \quad (\text{A32})$$

with $\boldsymbol{\Pi}^{\text{eq}} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho c_s^2 \mathbf{I}$.

For the conservation of momentum at order ϵ^1 , we have

$$\frac{\partial^{(1)} \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(1)} + O(\Delta t^2) = 0, \quad (\text{A33})$$

with $\boldsymbol{\Pi}^{(k)} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha f_\alpha^{(k)}$.

Finally, we obtain the full fluid equations by summing the contributions of order ϵ^0 and ϵ^1 {i.e., [(A30)+ ϵ (A31)] and [(A32)+ ϵ (A33)]}, which gives us a solution equivalent to a first order Chapman-Enskog expansion:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + O(\Delta t^2) + O(\epsilon^2) = 0, \quad (\text{A34})$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\Pi}^{\text{eq}} + \epsilon \boldsymbol{\Pi}^{(1)}) + O(\Delta t^2) + O(\epsilon^2) = 0, \quad (\text{A35})$$

with

$$\epsilon \boldsymbol{\Pi}^{(1)} = -2\epsilon \tau \rho c_s^2 [\mathbf{S} + O(\text{Ma}^3)] = -2\mu [\mathbf{S} + O(\text{Ma}^3)], \quad (\text{A36})$$

in which \mathbf{S} is the strain rate tensor, given by

$$\mathbf{S} = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}}{2}. \quad (\text{A37})$$

This shows that the Navier-Stokes equations are, within the framework of an athermal or weakly compressible approxi-

mation, retrieved with a second order accuracy in time, space, and Knudsen number, provided that the gradient term F_α is evaluated with, at least, a second order approximation.

Several convergence studies (such as Refs. [56,68]) show nondimensional equations with a viscous term written as

$$\mu = \Delta t \left(\bar{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) \rho c_s^2, \quad (\text{A38})$$

which yields an apparently first order in time fluid equation. However, the nondimensional relaxation parameter $\bar{\tau} = \bar{\tau}_g - \frac{1}{2}$ scales as $O(\frac{M}{\text{Re}\Delta t}) = O(\epsilon/\Delta t)$ [54], so the viscosity of Eq. (A38) reduces to a $O(\epsilon)$ effect, equivalently as in Eqs. (A35) and (A36). The difference between those convergence studies and ours is therefore purely formal and comes from the fact that it is not $\bar{\tau} = \bar{\tau}_g - \frac{1}{2}$ that appears in Eq. (A36) but $\tau = \tau_g - \frac{\Delta t}{2} = \Delta t \bar{\tau}$ instead.

APPENDIX B: INFLUENCE OF THE RESTRICTION FILTER ON ACCURACY

In acoustic scaling, we can write the restricted collision by modifying Eq. (44) with its error term, according to Eq. (50), Ref. [63], Eq. (10), and by denoting Δ the Laplacian operator:

$$\begin{aligned} \widehat{g}^f(\mathbf{x}, t) &= g_\alpha^f(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g} [\mathcal{R}(g_\alpha^{\text{neq}, f})(\mathbf{x}, t)] + O(\tilde{\Delta}t^3) \\ &= g_\alpha^f(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g} \left[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t) + \frac{(\sigma^* \tilde{\Delta}x)^2}{2} \Delta g_\alpha^{\text{neq}, f} \right. \\ &\quad \left. + O(\tilde{\Delta}x^4) \right] + O(\tilde{\Delta}t^3) \\ &= g_\alpha^f(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g} \left[g_\alpha^{\text{neq}, f}(\mathbf{x}, t) + \frac{(c_0 \sigma^* \tilde{\Delta}t)^2}{2c_s^2} \Delta g_\alpha^{\text{neq}, f} \right. \\ &\quad \left. + O(\tilde{\Delta}t^4) \right] + O(\tilde{\Delta}t^3). \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

Since $\tilde{\tau}_g$ depends on $\tilde{\Delta}t$, we cannot instantly prove that the accuracy of the scheme remains unaffected by the filter.

Let us define $\eta = (c_0 \sigma^*)^2 / (2c_s^2)$ and drop the time and space variables for clarity. We obtain with a Taylor expansion and with the operator defined in Eq. (A7) (without the parallel and orthogonal decomposition)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}t D g_\alpha^f + \frac{\tilde{\Delta}t^2}{2} D^2 g_\alpha^f &= \frac{\tilde{\Delta}t}{\epsilon \tilde{\tau} + \frac{\tilde{\Delta}t}{2}} [g_\alpha^{\text{neq}, f} + \eta \Delta g_\alpha^{\text{neq}, f} \tilde{\Delta}t^2 \\ &\quad + O(\tilde{\Delta}t^4)] + O(\tilde{\Delta}t^3). \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

We do not expand the left-hand side of Eq. (B2) thanks to Eq. (A12) since it is already the one that appears in the Taylor expansion of the original lattice Boltzmann equation. We are only interested in the right-hand side, where the modifications due to the filter appear. Thanks to Eq. (A12) we have

$$\Delta g_\alpha^{\text{neq}, f} = \left(1 + \frac{\tilde{\Delta}t}{2\epsilon \tilde{\tau}} \right) \Delta f_\alpha^{\text{neq}, f}. \quad (\text{B3})$$

Equations (B2), (B3), and (A12) yield

$$\begin{aligned} Dg_\alpha^f + \frac{\tilde{\Delta t}}{2} D^2 g_\alpha^f \\ = \frac{1}{\epsilon \tilde{\tau}} [f_\alpha^{\text{neq}, f} + \eta \Delta f_\alpha^{\text{neq}, f} \tilde{\Delta t}^2 + O(\tilde{\Delta t}^4)] + O(\tilde{\Delta t}^2), \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

so that we finally have

$$Dg_\alpha^f + \frac{\tilde{\Delta t}}{2} D^2 g_\alpha^f = \frac{1}{\epsilon \tilde{\tau}} f_\alpha^{\text{neq}, f} + O(\tilde{\Delta t}^2), \quad (\text{B5})$$

which is exactly what is obtained for the original lattice Boltzmann equation. This shows that the accuracy of the lattice Boltzmann scheme remains unaffected by the restriction filter on the collision operator.

APPENDIX C: PSEUDOSENTROPIC VORTEX

There are several analytical solutions for vortex evolutions in fluid mechanics. However, our D3Q19 velocity discretization simulates a fluid that does not correspond to any of these situations: the equivalent macroscopic system of our LBE is an athermal and weakly compressible version of the Navier-Stokes equations. It implies that temperature does not exist in our approach since no equation for energy conservation is solved. However, we can try to find a way around and obtain an approximate solution in order to, at least, initialize the case properly.

We take as a starting point the isentropic vortex solution of the compressible Euler equations, studied by Yee *et al.* [69] or Shu *et al.* [70]. The initial states are given in terms of velocity and temperature fluctuations, which yields the pressure fluctuations. We again write the fluctuations with primed variables. The strength of the vortex is controlled by a parameter ϵ . We also note $\mathbf{u} = (u, v)$. We pose $u = u'$, $v = V_0 + v'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T = T_0 + T'$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, and R a characteristic radius. We obtain the following system, equivalent to the one of [69] with their parameter α taken as $\alpha = 1/2$:

$$\begin{aligned} u'(x, y, t_0) &= -\epsilon c_0 \frac{y}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ v'(x, y, t_0) &= \epsilon c_0 \frac{x}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ T'(x, y, t_0) &= -\epsilon^2 c_0^2 \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

In accordance with [69], this system is associated to the equation $p = \rho T$ for a perfect gas. This yields the expression of the reference pressure $p_0 = \rho_0 T_0$. The gas has an isentropic evolution, we thus have the relation $p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ with γ the isentropic constant, which yields

$$p(x, y, t_0) = p_0 \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (\text{C2})$$

The exact solution with given initial states is a passive convection of the vortex with V_0 .

We can seek for an approximation of this solution in the limit of weakly compressible and nearly inviscid flows. If we perform a first order Taylor expansion around one on the obtained pressure for very small T' , we have

$$\begin{aligned} p(x, y, t_0) &= p_0 \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T'}{T_0}\right) + O\left(\frac{T'^2}{T_0^2}\right) \\ &= p_0 - \frac{\rho_0 \epsilon^2 c_0^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

We now need to adapt this expression to be used with a lattice Boltzmann D3Q19 solver. The dimensional athermal equation of state of our LBM gives

$$p = \rho c_0^2 \Rightarrow p_0 = \rho_0 c_0^2. \quad (\text{C4})$$

This is equivalent to setting the value of the nonphysical constant T_0 to $T_0 = c_0^2$, which allows us to obtain the following expression for the density:

$$\rho(x, y, t_0) = \rho_0 \left[1 - \frac{\epsilon^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] + O(\epsilon^4). \quad (\text{C5})$$

Finally, we get, with V_0 the free stream velocity

$$\begin{aligned} u(x, y, t_0) &= -\epsilon c_0 \frac{y}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ v(x, y, t_0) &= V_0 + \epsilon c_0 \frac{x}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ \rho(x, y, t_0) &= \rho_0 - \frac{\rho_0 \epsilon^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

In order to reduce even more the amplitude of the initial acoustic wave, one should expand (C2) to higher orders: in our work, we chose to use a second order expansion, which clearly reduced the initial emission. We obtain

$$\begin{aligned} u(x, y, t_0) &= -\epsilon c_0 \frac{y}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ v(x, y, t_0) &= V_0 + \epsilon c_0 \frac{x}{R} \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right], \\ \rho_1(x, y, t_0) &= -\frac{\rho_0 \epsilon^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \\ \rho(x, y, t_0) &= \rho_0 + \rho_1 + \frac{1}{2\gamma\rho_0} \rho_1^2 \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

with $\gamma = 1.4$.

- [1] C. K. Aidun and J. R. Clausen, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42**, 439 (2010).
- [2] O. Malaspinas and P. Sagaut, *J. Fluid Mech.* **700**, 514 (2012).
- [3] C. Van Treeck, E. Rank, M. Krafczyk, J. Tölke, and B. Nachtwey, *Comput. Fluids* **35**, 863 (2006).
- [4] K. Suga, Y. Kuwata, K. Takashima, and R. Chikasue, *Comput. Math. Appl.* **69**, 518 (2015).
- [5] E. K. Far, M. Geier, K. Kutscher, and M. Krafczyk, *Comput. Fluids* **140**, 222 (2016).
- [6] S. Marié, D. Ricot, and P. Sagaut, *J. Comput. Phys.* **228**, 1056 (2009).
- [7] S. Marié, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008.
- [8] B. Arguillat, D. Ricot, C. Bailly, and G. Robert, *J. Acoust. Soc. Am.* **128**, 1647 (2010).
- [9] X. Gloerfelt and J. Berland, *J. Fluid Mech.* **723**, 318 (2013).
- [10] X. Gloerfelt and P. Lafon, *Comput. Fluids* **37**, 388 (2008).
- [11] M. Tsutahara, *Fluid Dyn. Res.* **44**, 045507 (2012).
- [12] S. Geller, M. Krafczyk, J. Tölke, S. Turek, and J. Hron, *Comput. Fluids* **35**, 888 (2006).
- [13] A. Fakhari and T. Lee, *Comput. Fluids* **107**, 205 (2015).
- [14] G. Peng, H. Xi, C. Duncan, and S.-H. Chou, *Phys. Rev. E* **59**, 4675 (1999).
- [15] M. Tsutahara, T. Kondo, and K. Mochizuki, in *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)* (AIAA, Reston, VA, 2006), p. 2570.
- [16] M. Stiebler, J. Tölke, and M. Krafczyk, *Comput. Fluids* **35**, 814 (2006).
- [17] H. Chen, O. Filippova, J. Hoch, K. Molvig, R. Shock, C. Teixeira, and R. Zhang, *Phys. A (Amsterdam)* **362**, 158 (2006).
- [18] H. Chen, *Phys. Rev. E* **58**, 3955 (1998).
- [19] M. Junk, A. Klar, and L.-S. Luo, *J. Comput. Phys.* **210**, 676 (2005).
- [20] M. Rheinländer, *J. Stat. Phys.* **121**, 49 (2005).
- [21] M. Geier, A. Greiner, and J. Korvink, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **171**, 173 (2009).
- [22] J. Qi, H. Klimach, and S. Roller, *Comput. Math. Appl.* (2016).
- [23] J. Tölke and M. Krafczyk, *Comput. Math. Appl.* **58**, 898 (2009).
- [24] S. M. Guzik, T. H. Weisgraber, P. Colella, and B. J. Alder, *J. Comput. Phys.* **259**, 461 (2014).
- [25] M. Schönherr, K. Kucher, M. Geier, M. Stiebler, S. Freudiger, and M. Krafczyk, *Comput. Math. Appl.* **61**, 3730 (2011).
- [26] S. Geller, S. Uphoff, and M. Krafczyk, *Comput. Math. Appl.* **65**, 1956 (2013).
- [27] M. Geier, M. Schönherr, A. Pasquali, and M. Krafczyk, *Comput. Math. Appl.* **70**, 507 (2015).
- [28] M. Stiebler, M. Krafczyk, S. Freudiger, and M. Geier, *Comput. Math. Appl.* **61**, 3475 (2011).
- [29] B. Dorschner, F. Bösch, S. S. Chikatamarla, K. Boulouchos, and I. V. Karlin, *J. Fluid Mech.* **801**, 623 (2016).
- [30] Y. Kuwata and K. Suga, *J. Comput. Phys.* **311**, 348 (2016).
- [31] Y. Peng, C. Shu, Y.-T. Chew, X. Niu, and X.-Y. Lu, *J. Comput. Phys.* **218**, 460 (2006).
- [32] N. Pellerin, S. Leclaire, and M. Reggio, *Comput. Math. Appl.* **70**, 3001 (2015).
- [33] G. Eitel-Amor, M. Meinke, and W. Schröder, *Comput. Fluids* **75**, 127 (2013).
- [34] S. Chen, C. Peng, Y. Teng, L.-P. Wang, and K. Zhang, *Comput. Fluids* **136**, 228 (2016).
- [35] D. Yu, R. Mei, and W. Shyy, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **39**, 99 (2002).
- [36] D. Yu and S. S. Girimaji, *Phys. A (Amsterdam)* **362**, 118 (2006).
- [37] H. Liu, J. G. Zhou, and R. Burrows, *Comput. Fluids* **38**, 1108 (2009).
- [38] B. Crouse, Ph.D. thesis, TU München, 2003.
- [39] O. Filippova, S. Succi, F. Mazzocco, C. Arrighetti, G. Bella, and D. Hänel, *J. Comput. Phys.* **170**, 812 (2001).
- [40] O. Filippova and D. Hänel, *J. Comput. Phys.* **147**, 219 (1998).
- [41] A. Dupuis and B. Chopard, *Phys. Rev. E* **67**, 066707 (2003).
- [42] H. Touil, D. Ricot, and E. Lévêque, *J. Comput. Phys.* **256**, 220 (2014).
- [43] M. Rohde, D. Kandhai, J. Derksen, and H. Van den Akker, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **51**, 439 (2006).
- [44] Z. Yu and L.-S. Fan, *J. Comput. Phys.* **228**, 6456 (2009).
- [45] D. Lagrava, O. Malaspinas, J. Latt, and B. Chopard, *J. Comput. Phys.* **231**, 4808 (2012).
- [46] A. Pasquali, Ph.D. thesis, TU Braunschweig, 2016.
- [47] M. Hasert and S. P. Roller, Ph.D. thesis, Fakultät für Maschinewesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2014.
- [48] D. Ricot, S. Marié, P. Sagaut, and C. Bailly, *J. Comput. Phys.* **228**, 4478 (2009).
- [49] P.-T. Lew, L. Mongeau, and A. Lyrintzis, *J. Acoust. Soc. Am.* **128**, 1118 (2010).
- [50] D. Casalino, A. F. Ribeiro, E. Fares, and S. Nölting, *AIAA J.* **52**, 1232 (2014).
- [51] K. Habibi and L. Mongeau, *Appl. Acoust.* **87**, 153 (2015).
- [52] A. de Jong, H. Bijl, A. Hazir, and J. Wiedemann, *J. Sound Vib.* **332**, 1687 (2013).
- [53] X. Shan, X.-F. Yuan, and H. Chen, *J. Fluid Mech.* **550**, 413 (2006).
- [54] P. J. Dellar, *J. Comput. Phys.* **190**, 351 (2003).
- [55] P. J. Dellar, *Phys. Rev. E* **64**, 031203 (2001).
- [56] Z. Guo, C. Zheng, and B. Shi, *Phys. Rev. E* **65**, 046308 (2002).
- [57] D. D'Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **360**, 437 (2002).
- [58] F. Dubois and P. Lallemand, *Comput. Math. Appl.* **61**, 3404 (2011).
- [59] M. Geier, A. Greiner, and J. G. Korvink, *Phys. Rev. E* **73**, 066705 (2006).
- [60] B. Dorschner, N. Frapolli, S. S. Chikatamarla, and I. V. Karlin, *Phys. Rev. E* **94**, 053311 (2016).
- [61] K. N. Premnath and S. Banerjee, *Phys. Rev. E* **80**, 036702 (2009).
- [62] A. Fakhari and T. Lee, *Phys. Rev. E* **89**, 033310 (2014).
- [63] S. P. Thampi, S. Ansumali, R. Adhikari, and S. Succi, *J. Comput. Phys.* **234**, 1 (2013).
- [64] F. Falissard, *J. Comput. Phys.* **253**, 344 (2013).
- [65] J. Latt and B. Chopard, *Math. Comput. Simul.* **72**, 165 (2006).
- [66] C. K. Tam and J. C. Webb, *J. Comput. Phys.* **107**, 262 (1993).
- [67] H. Xu and P. Sagaut, *J. Comput. Phys.* **245**, 14 (2013).
- [68] F. Dubois, *Comput. Math. Appl.* **55**, 1441 (2008).
- [69] H. C. Yee, N. D. Sandham, and M. Djomehri, *J. Comput. Phys.* **150**, 199 (1999).
- [70] C.-W. Shu, in *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations* (Springer, Berlin, 1998), pp. 325–432.

5.2 Commentaires complémentaires : erratum

Nous avons réalisé après publication qu'une erreur s'était glissée dans l'équation (44). En effet, ce n'est pas cette équation qui a été utilisée dans nos calculs et qui permet d'obtenir des résultats stables. L'équation utilisée dans nos calculs de l'article est très légèrement différente dans la forme, mais ce changement a une influence notable :

$$\hat{g}_\alpha^f(\mathbf{x}, t) = g_\alpha^{eq,f}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g}\right) [\mathcal{R}(g_\alpha^{neq,f})(\mathbf{x}, t)] + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (5.1)$$

La différence est que dans cette formule, qui n'est en fait autre que la formule classique de [Lag+12 ; TRL14], est que c'est la totalité de la fonction hors équilibre pré-collision qui est filtrée et non uniquement l'opérateur de collision. Cette situation a été entièrement traitée sur le plan analytique dans la section 4.1.2.

En matière de stabilité, un filtrage de l'opérateur de collision lors de la procédure de transfert du maillage fin vers le maillage grossier (Eq. (44) de l'article) fournit un schéma instable, alors que l'équation (5.1) fournit un schéma bien plus stable, et ce avec la même limite hydrodynamique à l'ordre 1 en nombre de Knudsen et à l'ordre 2 en espace-temps. Le lecteur est renvoyé à la section 4.1.2 pour une comparaison entre les effets de l'équation (44) de l'article et ceux de l'équation (5.1) en matière d'ordre de précision et de viscosité effective.

La formule (41) est également erronnée, elle est à remplacer par

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, t) = & \frac{2}{5} f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_y \Delta x, t) + 2 f_\alpha(\mathbf{x} - 2\mathbf{e}_y \Delta x, t) - 2 f_\alpha(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_y \Delta x, t) \\ & + \frac{3}{5} f_\alpha(\mathbf{x} - 4\mathbf{e}_y \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Chapitre 6

Étude et amélioration d'un algorithme cell-vertex classique

6.1 Présentation et commentaires sur l'algorithme de base utilisé

6.1.1 Introduction : configuration géométrique

Tout algorithme de raffinement basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau au sens strict (algorithme collision-propagation sur un réseau) implique, on l'a vu, l'utilisation de grilles cartésiennes formées de cubes (carrés en 2D). Par conséquent, si on note avec l'exposant c les quantités liées au maillage grossier (coarse) et f celles liées au maillage fin, on a nécessairement $\Delta x^c = 2^n \Delta x^f$ avec un entier $n \geq 1$. Le cas $n = 1$ étant déjà très violent numériquement, on choisit toujours $\Delta x^c = 2\Delta x^f$.

L'algorithme de raffinement sur lequel nous basons notre travail pour la suite de ce mémoire est celui utilisé par Touil *et al.* dans [TRL14]. Le même algorithme existe avec une fonction de transfert du maillage fin vers le maillage grossier différente dans le travail de Lagrava *et al.* [Lag+12].

Ces algorithmes sont basés sur une structure de données de type *cell-vertex* (données situées au coin des cellules), par opposition aux structures de données de type *cell-centered* (données situées au centre des cellules). Si la manière d'organiser les données n'affecte pas l'algorithme en maillage uniforme standard, l'impact sur la physique et l'algorithme de la procédure de raffinement est important. Nous présentons les deux géométries sur la figure 6.1. Les géométries sont affichées en deux dimensions pour plus de clarté. La géométrie tri-dimensionnelle ne présente pas de spécificité particulière et est trouvable dans [TRL14]. Il apparaît clairement que pour un maillage donné, la géométrie du raffinement est très différente entre les deux architectures. On remarque en particulier que dans le cas d'une structure cell-vertex, certains noeuds du maillage fin (*fine*) et grossier (*coarse*) sont co-localisés.

Notre solveur étant basé sur une formulation cell-vertex, nous avons pour contrainte d'utiliser cette structure de donnée. Nous utilisons une formulation dite "à une maille grossière de recouvrement" (ce qui est aussi classiquement le cas dans les algorithmes cell-centered), c'est à dire que les maillages fins et grossiers se chevauchent sur une distance équivalente à Δx^c (voir figure 6.1). Notons que notre article dans Physical Review E présenté auparavant, qui repose sur une structure cell-vertex, n'est pas basé sur ce principe.

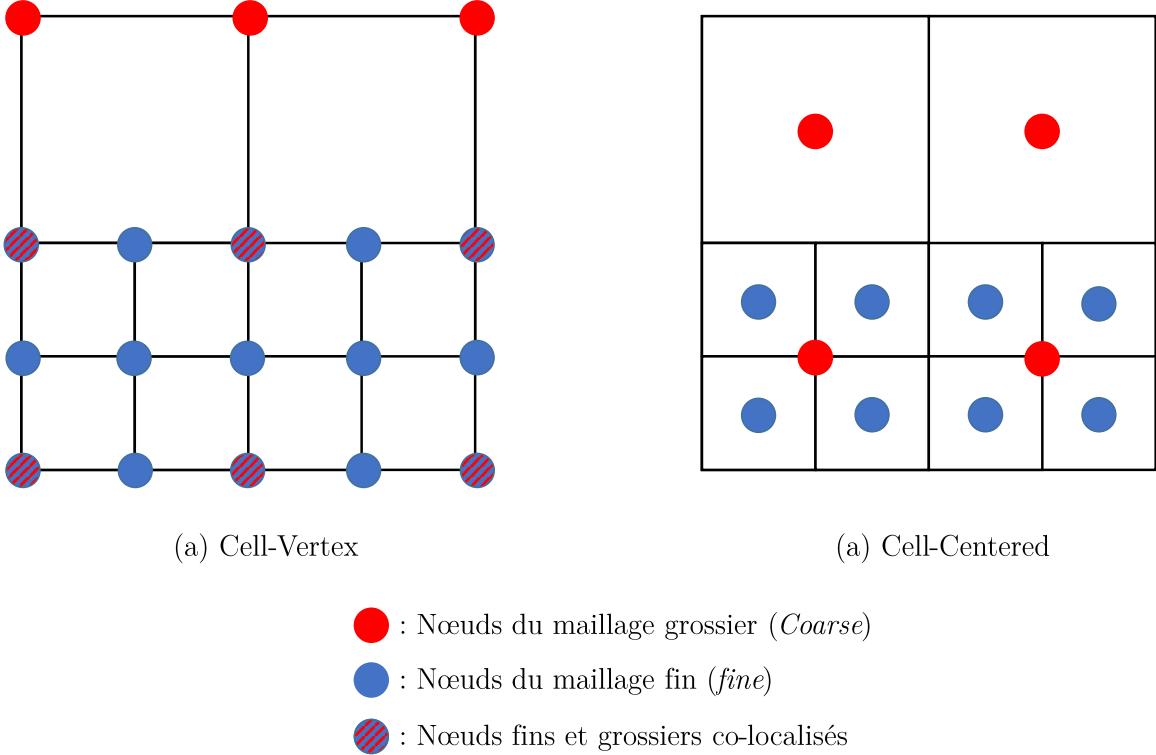


FIGURE 6.1 – Géométrie 2D d'un raffinement de maillage pour les structures de données cell-vertex et cell-centered. Ces deux cas correspondent à des structures dites "à une maille grossière de recouvrement".

6.1.2 Algorithme de base cell-vertex

Nous résumerons dans cette section l'algorithme utilisé et en détaillerons les étapes dans les sections suivantes. Nous présentons sur la figure 6.2 les symboles et les codes couleur que nous utiliserons pour décrire l'algorithme

L'algorithme classique de [TRL14; Lag+12] sera résumé ici. En dehors des spécificités liées aux méthodes d'interpolation et de transfert du maillage fin vers le maillage grossier qui peuvent varier d'un modèle à l'autre, le principe de base de cet algorithme se retrouve dans tout algorithme de type cell-vertex.

Nous partons d'un état de référence t_0 où les fonctions de collision sont connues en tout point du maillage. Cette situation englobe le cas particulier où t_0 est le pas de temps initial. Le principe des algorithmes de raffinement est que les grilles fines et grossières ne sont synchronisées qu'un pas de temps sur deux. En effet, en vertu de la condition CFL en scaling acoustique, $\Delta x^c = 2\Delta x^f$ implique $\Delta t^c = 2\Delta t^f$. Il faut donc deux fois plus d'itérations sur le maillage fin que sur le maillage grossier pour un même temps physique simulé. L'itération à laquelle les deux grilles sont synchronisées sera nommée *itération paire* et celle où le maillage grossier est en avance d'un pas de temps sur le maillage fin sera nommée *itération impaire*. Pour cet algorithme, nous comptons le temps à l'échelle du maillage fin, c'est à dire que pour un entier n quelconque, $t + n$ correspond, en unités dimensionnelles, à $t + n\Delta t^f$.

Pour un réseau $DdQq$, nous appelons *nœuds internes* l'ensemble des nœuds possédant

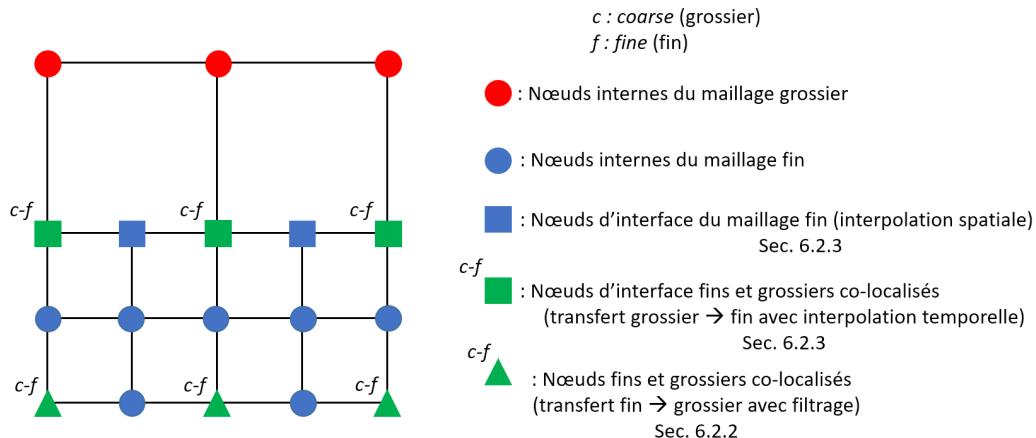


FIGURE 6.2 – Géométrie 2D d'un raffinement de maillage pour la structure cell-vertex et familles de nœuds utiles à la description de l'algorithme.

leurs q voisins et obéissant à l'algorithme de collision-propagation LBM standard : il s'agit des nœuds ●, ● et ▲^f. Bien qu'ils obéissent aussi à l'algorithme LBM standard, nous excluons les nœuds ■^c de cette catégorie car ils font géométriquement partie de l'interface et ne sont donc pas à proprement parler *internes*.

Rappelons enfin que chaque étape de propagation pour un maillage donné utilise les échelles spatiales et temporelles qui lui correspondent : par exemple pour l'échelle spatiale, $\mathbf{c}_1 = (0, 0, 1)$ correspond à $(0, 0, \Delta x^f)$ pour une propagation sur un nœud fin, mais à $(0, 0, \Delta x^c = 2\Delta x^f)$ pour une propagation sur un nœud grossier. De même, pour un temps t quelconque, l'étape de propagation pour un nœud grossier utilise les fonctions de collision voisines à t pour calculer la fonction de distribution à $t + 2$, contre respectivement t et $t + 1$ pour un nœud fin.

1. **État de référence** → Grille fine : $t = t_0$; Grille grossière : $t = t_0$
 - a) Les fonctions de collision sont connues en tout point. Au cas où t_0 est l'étape initiale, on initialise souvent les fonctions de collision à leur valeur à l'équilibre (éventuellement, on peut utiliser une formule régularisée [Gen+17]).
2. **Itération impaire** → Grille fine : $t = t_0 + 1$; Grille grossière : $t = t_0 + 2$
 - a) Propagation pour les nœuds internes (fins et grossiers) ainsi que pour les nœuds ■^c.
 - b) Calcul des fonctions de distribution à $t = t_0 + 1$ aux nœuds ■^f par rescaling et interpolation temporelle (Sec. 6.2.2).
 - c) Calcul des fonctions de distribution à $t = t_0 + 1$ aux nœuds ■^f par interpolation spatiale à l'aide des nœuds ■^f (Sec. 6.2.2).
 - d) Calcul des fonctions de collision pour tous les nœuds fins.
3. **Itération paire** → Grille fine : $t = t_0 + 2$; Grille grossière : $t = t_0 + 2$
 - a) Propagation pour tous les nœuds fins internes.
 - b) Calcul des fonctions de distribution à $t = t_0 + 2$ aux nœuds ■^f par rescaling de l'information du nœud ■^c (Sec. 6.2.2).

- c) Calcul des fonctions de distribution à $t = t_0 + 2$ aux nœuds  par interpolation spatiale à l'aide des nœuds  f (Sec. 6.2.2).
 - d) Calcul des fonctions de distribution aux noeuds  c par filtrage et rescaling à partir du nœud  f et des nœuds  voisins (Sec. 6.2.3).
 - e) Calcul des fonctions de collision en tout point.
4. Répéter les étapes (2) et (3) jusqu'à la fin du calcul.

6.2 Détails sur les étapes de l'algorithme de base

6.2.1 Rescaling

Nous détaillons d'abord cette procédure car elle est commune à la fois aux étapes de transfert fin \rightarrow grossier et grossier \rightarrow fin. Elle a pour but d'assurer la continuité du tenseur des contraintes à travers l'interface de raffinement. Nous reprenons très synthétiquement les résultats déjà récapitulés dans la section IV.A de notre article [Gen+17].

Les temps de relaxation non dimensionnels utilisés dans les collisions sur le maillage fin et le maillage grossier sont adimensionnés respectivement par Δt^f et Δt^c . Ainsi, afin de garder la continuité de la viscosité entre les deux grilles, $\bar{\tau}_g^c$ et $\bar{\tau}_g^f$ sont nécessairement liés par la relation

$$\bar{\tau}_g^c = \frac{1}{2} \bar{\tau}_g^f + \frac{1}{4}. \quad (6.1)$$

Cette contrainte implique également, pour le cas BGK et à un temps t quelconque

$$g_\alpha^c(\mathbf{▲}^c, t) = g_\alpha^{eq}(\mathbf{▲}^f, t) + \frac{2\bar{\tau}_g^c}{\bar{\tau}_g^f} (g_\alpha^{neq,f}(\mathbf{▲}^f, t)). \quad (6.2)$$

Pour un algorithme de type MRT, cette formule de rescaling est différente et plus coûteuse [Che+16]. Toutefois, la formule (6.2) est satisfaisante y compris pour une collision à temps de relaxation multiple et sera utilisée pour la suite dans notre travail. Nos travaux n'ont pas mis en évidence de différence sensible entre le rescaling MRT et celui de l'équation ci-dessus.

La formule (6.2) implique immédiatement une relation entre $\boldsymbol{\Pi}^{neq,f}$ et $\boldsymbol{\Pi}^{neq,c}$, où on rappelle que

$$\boldsymbol{\Pi}^{neq} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} (\mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha) g_\alpha^{neq}. \quad (6.3)$$

On a

$$\boldsymbol{\Pi}^{neq,f}(\mathbf{■}^f, t) = \frac{\bar{\tau}_g^f}{2\bar{\tau}_g^c} \boldsymbol{\Pi}^{neq,c}(\mathbf{■}^c, t). \quad (6.4)$$

Cette dernière formule reste valable dans le cadre de modèles de type MRT dans lesquels la viscosité de volume n'est pas modifiée.

Le rescaling affecte uniquement la partie hors équilibre de la fonction de distribution pré-collision. La fonction d'équilibre, quant à elle, ne nécessite pas de conversion car elle dépend uniquement de quantités qui sont invariantes par changement de taille de maille (densité et quantité de mouvement) : on a $g_\alpha^{eq,c} = g_\alpha^{eq,f} = g_\alpha^{eq}$.

Il est important de préciser que, rigoureusement, ce rescaling de la partie hors équilibre n'est en fait valable que pour les termes d'ordre 1 en nombre de Knudsen dans le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}$. Par ailleurs, comme nous en discuterons par la suite, l'affirmation selon laquelle la fonction d'équilibre ne nécessite pas de rescaling n'est vraie qu'à l'ordre dominant : les termes d'erreur en temps contenus dans les moments conservés sont bien entendu différents entre le maillage fin et le maillage grossier.

6.2.2 Transfert du maillage fin vers le maillage grossier : filtrage et rescaling

Cette section concerne le calcul des nœuds \blacktriangle^c . Cette procédure se déroule en deux étapes : d'abord, une fonction de distribution filtrée est calculée à partir des nœuds \blacktriangle^f et des nœuds \bullet voisins. Ensuite, une opération dite de *rescaling* est effectuée sur cette fonction de distribution, afin d'assurer la continuité du tenseur des contraintes entre la grille fine et la grille grossière. Conformément à l'algorithme présenté plus haut, il n'est nécessaire d'effectuer ces traitements qu'à $t = t_0 + 2$, c'est à dire uniquement à l'itération paire. Ces deux étapes classiques sont décrites en détail dans [TRL14; Lag+12] et de nombreuses précisions sont aussi données dans notre article [Gen+17] (partie, IV.A pour le rescaling, partie IV.C pour le filtrage). Pour cette raison, nous resterons ici très synthétiques dans leur description.

Les données au temps $t + 2$ aux nœuds \blacksquare^c sont obtenues par l'algorithme de collision-propagation standard à l'aide des données au temps t des nœuds voisins \blacktriangle^c , \blacksquare^c et \bullet (étape 2.(a) de l'algorithme).

Filtrage

L'immense majorité des algorithmes de raffinement reposent, explicitement ou implicitement, sur une telle étape de filtrage (en cell-vertex aussi bien qu'en cell-centered). Les seuls algorithmes dont il est prouvé qu'ils parviennent à maintenir la stabilité numérique sans un quelconque filtrage de la fonction de distribution reposent sur des stratégies stabilisantes empêchant l'étude aéroacoustique (via un ajout de viscosité de volume) [Gen+17].

Pour un modèle BGK, l'opération de filtrage en $\boldsymbol{x} = \blacktriangle^f$ s'écrit à la manière de [TRL14; Lag+12] comme suit :

$$\hat{g}_\alpha^f(\blacktriangle^f, t) = g_\alpha^{eq,f}(\blacktriangle^f, t) + \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}t}{\tilde{\tau}_g}\right) [\mathcal{R}(g_\alpha^{neq,f})(\blacktriangle^f, t)] , \quad (6.5)$$

ce qui est équivalent à un filtrage de la partie hors équilibre de la fonction de distribution pré-collision, exactement comme pour les équations (4.21), (4.10) et (5.1). La procédure s'effectue de manière totalement similaire si un opérateur de type MRT est utilisé : il suffit toujours de remplacer la partie hors équilibre pré-collision par sa version filtrée dans l'équation de collision.

Concernant le filtre \mathcal{R} , plusieurs possibilités existent dans la littérature. Une première est un simple moyennage spatial : en D3Q19, il s'écrit en unités LBM [Lag+12]

$$\mathcal{R}(g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f, t)) = \frac{1}{19} \sum_{\beta=0}^{18} g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f + \mathbf{c}_\beta, t) . \quad (6.6)$$

Il existe également la méthode basée sur la discrétisation du Laplacien (que nous avons retenue pour ce mémoire, voir partie 4.1.1 et [TRL14; Gen+17]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f, t)) &= g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f, t) + \sigma^{*2} \left[-2g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left(2 \sum_{\beta=1}^6 g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f + \mathbf{c}_\beta, t) + \sum_{\beta=7}^{18} g_\alpha^{neq,f}(\blacktriangle^f + \mathbf{c}_\beta, t) \right) \right] . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Cette équation n'est autre que l'adaptation de (4.4) à notre cas présent. Dans [TRL14; Gen+17], la valeur $\sigma^* = \sqrt{3/7}$ est choisie, tandis que nous avons, pour ce mémoire, choisi

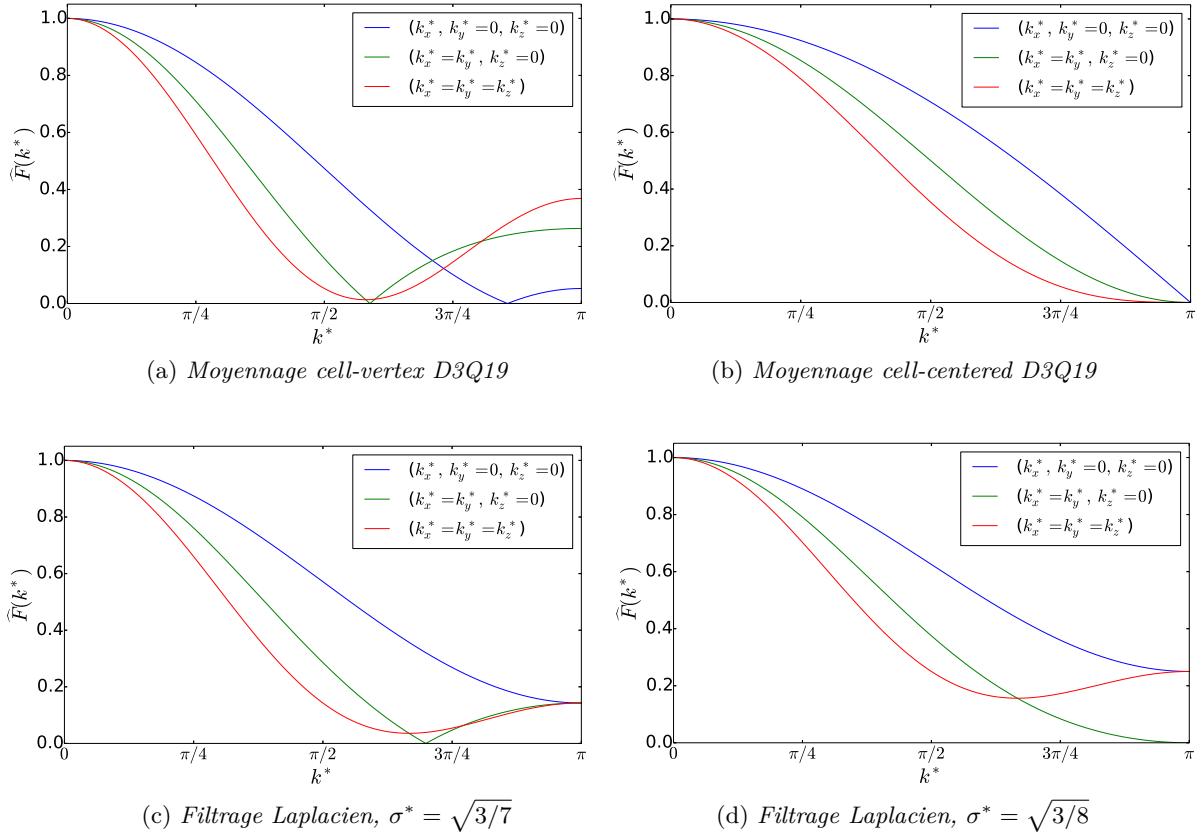


FIGURE 6.3 – Fonctions de transfert en valeur absolue de quatre filtrages différents : moyennage spatial des voisins les plus proches en D3Q19 pour les structures cell-centered et cell-vertex, puis le filtrage gaussien en D3Q19 pour deux valeurs du coefficient σ^* . On se réfère à la méthode de tracé abordée en détail dans la partie 4.1.1.

$\sigma^* = \sqrt{3/8}$ (voir Eq. (4.5)). Nous traçons les fonctions de transfert de ces trois types de filtres sur la figure 6.3. Nous y ajoutons également la fonction de transfert d'un filtrage par simple moyennage spatial dans le cas d'une structure cell-centered, à titre de comparaison : il s'agit de la moyenne des 8 valeurs aux nœuds fins les plus proches (4 en 2D). Pour ces structures de données, il s'agit de la procédure classique de transfert du maillage fin vers le maillage grossier.

La figure 6.3 montre que le simple moyennage spatial en cell-vertex possède des propriétés d'isotropie assez mauvaises. En revanche, on trouve pour le cas du moyennage cell-centered une propriété particulièrement intéressante. En plus de n'utiliser que 8 points au lieu de 19 en 3D, sa fonction de transfert s'annule en $k^* = \pi$ dans les trois directions (ondes 1D, 2D et 3D) : cela signifie que la totalité de l'énergie est filtrée pour la longueur d'onde la plus faible supportée par le maillage fin. Ceci limite nécessairement le repliement spectral lors du transfert vers le maillage grossier [Gen+17]. Il apparaît ainsi clairement que les structures de données cell-centered possèdent un avantage sur ce point.

Pour notre étude (cell-vertex), nous utilisons le filtrage basé sur la discréttisation du Laplacien avec $\sigma^* = \sqrt{3/8}$. Cela fournit l'analogue de l'équation (4.5) avec $\sigma_L = 1$: on

applique donc, à l'itération paire

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(g_{\alpha}^{neq,f}(\Delta^f, t_0 + 2)\right) &= \frac{1}{4}g_{\alpha}^{neq,f}(\Delta^f, t_0 + 2) + \frac{1}{16} \sum_{\beta=1}^6 g_{\alpha}^{neq,f}(\Delta^f + \mathbf{c}_{\beta}, t_0 + 2) \\ &\quad + \frac{1}{32} \sum_{\beta=7}^{18} g_{\alpha}^{neq,f}(\Delta^f + \mathbf{c}_{\beta}, t_0 + 2). \end{aligned} \quad (6.8)$$

La fonction d'équilibre local, quant à elle, n'est pas modifiée.

Rescaling

On utilise directement les résultats de la section 6.2.1, afin de calculer $g_{\alpha}^c(\Delta^c, t_0 + 2)$ à partir de $g_{\alpha}^f(\Delta^f, t_0 + 2)$.

6.2.3 Transfert du maillage grossier vers le maillage fin : rescaling et interpolations

Cette section concerne le calcul des noeuds \square^f et \square . La région concernée est donc l'interface de transition. La première étape consiste d'abord en un rescaling des données issues du maillage grossier. Ensuite, une interpolation temporelle est effectuée dans le cas de l'itération impaire, et un transfert pur et simple des données pour le cas de l'itération paire. On obtient ainsi les données aux noeuds \square^f . Dans un dernier temps, à toutes les itérations, les noeuds \square sont calculés par interpolation spatiale.

Nous préciserons en particulier les quantités qui sont mises à l'échelle et interpolées dans notre travail : nous privilégierons une interpolation des moments d'ordre inférieur ou égal à 2 puis une reconstruction de la fonction de distribution grâce à son expression dite régularisée. Nous détaillerons ce point dans cette section. Pour toutes les méthodes d'interpolation, nous utiliserons dès que possible une interpolation dont le terme d'erreur est d'ordre supérieur ou égal à $\mathcal{O}((\Delta t)^3)$. En effet, plusieurs études ont montré qu'une interpolation d'ordre plus faible induisait des discontinuités sur le champ de vitesse et de pression [Lag+12 ; Gen+17].

Cas des noeuds fins de l'interface de transition : rescaling et interpolation des moments d'ordre faible et reconstruction de la fonction de distribution

Classiquement, les calculs d'interpolation et de rescaling sont effectués sur la totalité de la fonction de distribution, ou, de façon équivalente, sur la totalité de ses moments. Par parenthèse, notons que nous n'avons pas observé d'amélioration en effectuant ces traitements sur les fonctions de collision. Au cours de nos travaux, nous avons remarqué, dans le cas particulier de l'interface de transition, qu'une reconstruction dite *régularisée* de la fonction de distribution après interpolation des moments d'ordre inférieur ou égal à 2 fournissait un résultat très légèrement meilleur qu'une interpolation de la totalité de la fonction de distribution. Plus concrètement, nous avons choisi d'interpoler, à chaque itération et en chaque point où ceci est nécessaire, les moments ρ , $\rho\mathbf{u}$ et Π^{neq} , puis de reconstruire la fonction de distribution grâce à la formule *régularisée*, équivalente à une troncature à l'ordre 2 en polynômes de Hermite :

$$g_{\alpha} = \omega_{\alpha}\rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha} - c_s^2 \mathbf{I}) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}{2c_s^4} \right) + \omega_{\alpha} \frac{(\mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha} - c_s^2 \mathbf{I}) : \Pi^{neq}}{2c_s^4}. \quad (6.9)$$

Pour utiliser rigoureusement cette reconstruction (6.9), il faudrait également interpoler le tenseur $\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ et non reconstruire ce dernier à l'aide de l'interpolation de $\rho\mathbf{u}$ comme nous le faisons. En effet, l'interpolation d'un produit n'est pas identique au produit de deux interpolations. Toutefois, nous avons observé que notre façon de faire n'avait pas d'impact négatif sur les simulations et permettait d'économiser encore du coût calcul.

En dehors de cette problématique de l'interpolation du tenseur $\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, effectuer une collision (BGK ou MRT) sur une telle fonction de distribution régularisée (6.9) fournit un résultat identique à l'application d'une collision régularisée au sens de Latt [LC06; Lat07] à la fonction de distribution entièrement interpolée. Notre méthode revient donc à annuler les moments non-hydrodynamiques des fonctions de distribution de l'interface. Il en résulte une hétérogénéité de traitement de la collision entre le cœur du fluide et les noeuds fins de l'interface de transition. Le fait que la régularisation sur les noeuds fins de l'interface de transition fournit un meilleur résultat en dépit de cette hétérogénéité de traitement indique que l'interpolation des moments non-hydrodynamique pose problème à l'interface. Des tests préliminaires que nous avons effectué montrent que les moments non-hydrodynamiques sont, ne serait-ce qu'en maillage uniforme, spatialement très sensibles à la taille de maille pour un écoulement donné. Ceci peut expliquer pourquoi ils sont d'autant plus sensibles à une transition de résolution. Nous n'avons toutefois pas pu pousser cette analyse plus ni apporter de solution plus satisfaisante que la simple régularisation.

Rescaling

Dans un premier temps, on utilise directement les résultats de la section 6.2.1, afin de calculer $g_\alpha^f(\mathbf{x}^f, t_0 + 2\Delta t^f)$ à partir de $g_\alpha^c(\mathbf{x}^c, t_0 + 2\Delta t^f)$. Cette dernière est bel et bien connue dès l'itération impaire, d'après l'étape 2.a) de l'algorithme (la grille grossière est en avance sur la grille fine).

Interpolation temporelle

Le schéma d'interpolation temporelle utilisé pour une quantité quelconque $v(\mathbf{x}, t)$ au pas de temps impair, écrit ici en unités dimensionnelles pour faire apparaître explicitement le terme d'erreur, est le suivant :

$$v(\mathbf{x}^f, t_0 + \Delta t^f) = \frac{-1}{3}v(\mathbf{x}^f, t_0 - \Delta t^f) + v(\mathbf{x}^f, t_0) + \frac{1}{3}v(\mathbf{x}^f, t_0 + 2\Delta t^f) + \mathcal{O}((\Delta t^f)^3). \quad (6.10)$$

Dans notre cas, nous appliquons cette formule aux quantités ρ , $\rho\mathbf{u}$ et Π^{neq} . Précisons que d'autres formules d'interpolation ont été testées, sans obtenir d'amélioration intéressante.

Au pas de temps pair, l'interpolation temporelle n'est pas nécessaire puisque les deux grilles sont synchronisées. Par conséquent, seul le rescaling est appliqué.

Interpolation spatiale

Le schéma d'interpolation spatiale utilisé pour une quantité quelconque $v(\mathbf{x}, t)$ à tous les pas de temps, écrit ici en unités dimensionnelles pour faire apparaître explicitement le terme d'erreur, est identique à un de ceux utilisé dans [Gen+17] et à ceux de [Lag+12; TRL14]. Écrit dans le cas d'une interpolation le long de l'axe x de vecteur unitaire \mathbf{e}_x , on obtient

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= \frac{9}{16} \left(v(\mathbf{x} + \mathbf{e}_x \Delta x^f, t) + v(\mathbf{x} - \mathbf{e}_x \Delta x^f, t) \right) \\ &\quad - \frac{1}{16} \left(v(\mathbf{x} + 3\mathbf{e}_x \Delta x^f, t) + v(\mathbf{x} - 3\mathbf{e}_x \Delta x^f, t) \right) + \mathcal{O}((\Delta x^f)^4). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dans notre cas, nous appliquons cette formule aux quantités ρ , $\rho\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\Pi}^{neq}$. D'autres formules d'interpolation ont été testées, sans obtenir d'amélioration intéressante. Dans le cas où deux directions d'interpolation sont disponibles, nous effectuons la moyenne des deux interpolations. Dans les quelques situations de maillage où les 4 points requis ne sont pas disponibles, nous utilisons une interpolation linéaire sur 2 points comme suit

$$v(\blacksquare, t) = \frac{1}{2} \left(v(\blacksquare + \mathbf{e}_x \Delta x^f, t) + v(\blacksquare - \mathbf{e}_x \Delta x^f, t) \right) + \mathcal{O}((\Delta x^f)^2). \quad (6.12)$$

Remarques complémentaires sur la précision de l'interpolation

Comme nous l'avons indiqué, diverses études ont montré qu'une interpolation spatiale d'ordre 2 (c'est à dire linéaire, bilinéaire ou trilinéaire) provoque des discontinuités, en particulier sur le champ de pression [Lag+12 ; Gen+17]. Pour une interpolation de la fonction de distribution complète, un ordre minimum de 3 est requis pour assurer la continuité des champs macroscopiques à l'interface. Ceci se déduit d'ailleurs logiquement de l'équation de collision (4.7), dans laquelle le terme d'erreur issu de l'intégration le long des caractéristiques est d'ordre 3. Toutefois, une interpolation d'ordre au moins 3 est-elle nécessaire pour tous les moments de la fonction de distribution ?

En l'occurrence, une interpolation d'ordre 2 (moyenne spatiale sur deux points par direction) est exactement équivalente à un filtrage d'ordre 2 particulier. Or, nous avons montré dans la section 4.1.2 qu'un filtrage d'ordre 2 de la partie hors équilibre de la fonction de distribution n'affectait pas la précision des schémas de Boltzmann sur réseau. Il en résulte qu'une interpolation d'ordre 2 est possible pour les moments hors équilibre de la fonction de distribution. Une telle affirmation est donnée sans démonstration dans l'étude [GGK09b] sur l'interpolation dite *compacte*. Toutefois, l'interpolation compacte repose également sur une interpolation d'ordre 2 pour la densité (qui n'est donc pas un moment hors équilibre), ce qui ne semble pas en conformité avec l'ordre de précision requis. Il n'est d'ailleurs pas prouvé à ce jour que l'interpolation compacte est satisfaisante sur le plan aéroacoustique.

Pour d'autres précisions sur la question des interpolations spatiales et temporelles, on se référera à notre article [Gen+17] (en particulier à la section IV.B dédiée).

6.3 Transfert du maillage fin vers le maillage grossier : développement d'une méthode de propagation partielle

6.3.1 Motivations

L'étape qui consiste à convertir et propager une fonction de collision du maillage fin vers le maillage grossier est capitale. Il s'agit en effet du premier maillon de la chaîne de calcul des données manquantes à l'interface de transition. En effet, si on résume dans l'ordre l'algorithme classique, la fonction de collision filtrée aux noeuds \blacktriangle^c est propagée vers les noeuds \blacksquare^c , puis cette dernière est convertie et interpolée temporellement (ou simplement transférée, selon l'itération) pour ensuite être elle-même utilisée dans l'interpolation spatiale. Il est donc clair que toute erreur trop importante lors de cette première étape se répercute sur tout le reste de la chaîne de traitement de l'interface, ainsi que sur le maillage grossier. Pour en avoir le cœur net il suffit, sans bien sûr ajouter de viscosité de volume via un modèle de collision particulier, de supprimer l'étape de filtrage au noeud \blacktriangle^c : la plupart des calculs à basse viscosité deviennent totalement instables.

En bref, l'objectif de cette section est de déterminer une méthode pour améliorer la "compatibilité" entre la fonction de collision au nœud Δ^c et les fonctions de collision du maillage grossier.

6.3.2 Description de la méthode

L'objectif général est identique à celui de l'algorithme classique lors de l'étape de transfert des données du maillage fin vers le maillage grossier en cell-vertex : calculer, pour tous les indices α , $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$.

L'idée est d'utiliser le moins possible d'information issue du maillage fin pour reconstruire la fonction de collision au nœud Δ^c . Concrètement, il s'agit de propager vers le nœud Δ^c les fonctions de collision (calculées au pas de temps précédent) issues de tous les nœuds grossiers Δ^c et \square^c voisins disponibles, au lieu de calculer intégralement la fonction de distribution au pas de temps courant par un filtrage des données voisines du maillage fin (nœuds \bullet et Δ^f). Puisque, par définition, les nœuds Δ^c sont des nœuds grossiers, la propagation partielle a lieu à l'échelle du maillage grossier, c'est à dire à l'échelle de $\Delta x^c = 2\Delta x^f$. Une fois ces propagations effectuées, toutes les fonctions de distribution manquantes (c'est à dire les indices α pour lesquels $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$ reste inconnue, appelés aussi *directions* manquantes, en rapport à l'orientation du vecteur \mathbf{c}_α correspondant) sont calculées par la méthode classique de filtrage et de rescaling à partir des nœuds fins voisins.

On rappelle que l'étape de propagation à l'échelle du maillage grossier s'écrit, toujours en comptant le temps par unités de Δt^f , $g_\alpha^c(\mathbf{x}, t) = g_\alpha^{*c}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha, t - 2)$, où g_α^* est la fonction de collision. Rappelons que nous nous plaçons en un point $\mathbf{x} = \Delta^c = \Delta^f$. Nous définissons deux ensembles d'indices α pour une fonction de distribution $g_\alpha^c(\mathbf{x}, t)$ donnée :

- Les indices $\alpha \in \mathcal{P}$ sont ceux pour lesquels il existe au point $\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha$ un nœud grossier (Δ^c ou \square^c). L'ensemble est appelé \mathcal{P} car il correspond à tous les indices pour lesquels la fonction de distribution sera calculée via une étape de propagation à partir des nœuds grossiers voisins disponibles. Il contient toujours l'indice $\alpha = 0$, quelque soit la géométrie de l'interface de transition.
- Les indices $\alpha \in \mathcal{F}$ sont ceux pour lesquels il n'existe pas de nœud grossier au point $\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha$. L'ensemble est appelé \mathcal{F} car il correspond à tous les indices qui seront calculés via la procédure de filtrage de l'algorithme standard. \mathcal{F} est bien sûr le complémentaire de \mathcal{P} dans l'ensemble des indices des vitesses discrètes.

L'algorithme de propagation partielle revient à subdiviser l'étape 3.d) de l'algorithme (calcul des nœuds Δ^c) en plusieurs parties :

1. Une étape de **propagation**, durant laquelle les fonctions de collision rentrantes issues des nœuds grossiers Δ^c et \square^c voisins disponibles (indices $\alpha \in \mathcal{P}$) sont utilisées pour calculer la fonction de distribution g_α^f pour $\alpha \in \mathcal{P}$.

Il s'agit simplement d'effectuer

$$g_\alpha^c(\Delta^c, t) = g_\alpha^{*c}(\Delta^c - \mathbf{c}_\alpha, t - 2) \quad (6.13)$$

pour $\alpha \in \mathcal{P}$.

2. Il s'agit ensuite de calculer $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$ pour $\alpha \in \mathcal{F}$, par un **filtrage et un rescaling** de $g_\alpha^f(\Delta^f, t)$. On effectue

$$g_\alpha^c(\Delta^c, t) = g_\alpha^{eq}(\Delta^f, t) + \frac{2\tau_g^{-c}}{\tau_g^{-f}} \mathcal{R}(g_\alpha^{neq,f}(\Delta^f, t)) \quad (6.14)$$

pour $\alpha \in \mathcal{F}$.

3. À partir de la fonction de distribution obtenue, maintenant connue pour tous les indices α , on calcule la **fonction d'équilibre** correspondant à $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$: celle-ci est obtenue en calculant les variables macroscopiques de manière totalement identique à la méthode standard. Nous nommons cette fonction d'équilibre $g_\alpha^{eq,2}(\Delta^c, t)$.

6.3.3 Compléments sur le transfert fin → grossier

Il est intéressant de noter que les grandeurs macroscopiques calculées à partir de $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$ après propagation partielle ne correspondent pas à celles calculées localement à partir de $g_\alpha^f(\Delta^f, t)$ avant propagation partielle, phénomène que nous noterons, par exemple pour la densité, $\sum_{\alpha=0}^{q-1} g_\alpha^c(\Delta^c, t) = \rho^c(\Delta^c, t) \neq \rho^f(\Delta^f, t) = \sum_{\alpha=0}^{q-1} g_\alpha^f(\Delta^f, t)$. Or dans le cas de l'étape de filtrage et rescaling de l'algorithme standard, on a $\rho^c(\Delta^c, t) = \rho^f(\Delta^f, t)$. Toutefois, ceci n'est en rien problématique puisque, pour les raisons que nous allons expliquer ci-dessous, c'est le cas d'égalité qui constitue nécessairement une erreur.

L'algorithme LBM, nous l'avons vu, possède une précision spatio-temporelle d'ordre 2 vis à vis des équations de Navier-Stokes athermales faiblement compressibles, qui constituent leur limite hydrodynamique. Nous notons ρ^{NS} la solution donnée par ces équations limites. Nous négligeons, sans aucune incidence sur le raisonnement, les termes d'erreur liés au nombre de Mach et au nombre de Knudsen. Considérons, pour un écoulement donné, deux discrétisations en maillage uniforme distinctes telles que $\Delta t = \Delta t^f$ pour la première et $\Delta t = \Delta t^c = 2\Delta t^f$ pour la seconde. Focalisons nous sur l'évolution d'une quantité conservée par le schéma LBM en un point x donné, par exemple la densité ρ . On a alors $\rho^f = \rho^{NS} + \mathcal{O}[(\Delta t^f)^2]$ et $\rho^c = \rho^{NS} + \mathcal{O}[(\Delta t^c)^2]$. Or bien entendu, $\mathcal{O}[(\Delta t^f)^2] \neq \mathcal{O}[(\Delta t^c)^2]$ ce qui implique immédiatement $\rho^f \neq \rho^c$. Un cas d'égalité peut exister pour un écoulement entièrement uniforme et stationnaire (situation sans intérêt pratique).

Pour notre étude de l'étape de transfert entre le maillage fin et le maillage grossier, cela montre que la valeur "idéale" de $\rho^c(\Delta^c, t)$ (c'est à dire pour un algorithme de transfert fin → grossier parfait) ne peut pas être $\rho^f(\Delta^f, t)$. Or, dans l'algorithme standard sans propagation partielle, on a $\rho^c(\Delta^c, t) = \rho^f(\Delta^f, t)$. Ce constat se fait identiquement pour la quantité de mouvement.

Cela ne prouve en rien que l'étape de propagation partielle soit exacte pour autant (elle ne l'est d'ailleurs pas, puisque la propagation n'est que "partielle"). Néanmoins, nous avons l'intuition (ce qui sera confirmé lors des applications numériques) que le fait de mélanger de l'information venant du maillage grossier avec celle venant du maillage fin, fournissant une fonction d'équilibre "hybride", permet de mieux prendre en compte le fait qu'idéalement, $g_\alpha^c(\Delta^c, t)$ serait une fonction de distribution entièrement issue d'un calcul sur un maillage grossier uniforme.

Précisons en conclusion qu'une méthode de propagation partielle peut également être utilisée pour le calcul des fonctions de distribution fines au niveau de l'interface (c'est à dire celles qui sont calculées par interpolation). En effet, certaines directions α pourraient être calculées par une étape de propagation à partir des noeuds fins internes voisins. Toutefois, cette méthode a été testée dans le cadre de notre travail et a fourni des résultats insatisfaisants, c'est pourquoi nous ne l'avons pas retenue.

6.4 Commentaires complémentaires et perspectives d'améliorations

6.4.1 Remarques sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement

En maillage uniforme, la méthode de Boltzmann sur réseau conserve rigoureusement la masse et la quantité de mouvement puisqu'en tout point et à tout instant, d'après les propriétés fondamentales de l'opérateur de collision, $\sum_{\alpha=0}^{q-1} g_{\alpha}^* = \sum_{\alpha=0}^{q-1} g_{\alpha}$ et $\sum_{\alpha=0}^{q-1} c_{\alpha} g_{\alpha}^* = \sum_{\alpha=0}^{q-1} c_{\alpha} g_{\alpha}$. En maillage non-uniforme, la situation est très différente entre le cas cell-vertex et cell-centered.

Bien que ce type de structure de données ne corresponde pas aux contraintes techniques de la réalisation de ce mémoire, nous pouvons dire deux mots des maillages cell-centered. Dans ce cas, la conservation globale de la masse et de la quantité de mouvement est tout à fait simple à assurer puisque la cellule grossière de recouvrement se subdivise en 4 cellules fines en 2D (voir figure 6.1) et 8 cellules fines en 3D : pour le transfert fin \rightarrow grossier, effectuer la moyenne des 8 fonctions de collision de ces cellules fines pour obtenir la fonction de distribution grossière conserve très naturellement la masse et la quantité de mouvement [Che+06 ; Roh+06]. Dans le cas du transfert grossier \rightarrow fin, assurer la conservation de la masse et de la quantité de mouvement n'est pas non plus complexe. Notons toutefois, en prenant par exemple le cas de l'algorithme conservatif cell-centered de Chen [Che+06] que la partie hors équilibre de la fonction de distribution ne subit pas de rescaling, et qu'il existe dans l'algorithme une étape de propagation sans collision dans la couche de recouvrement (ce qui est équivalent à une collision avec $\bar{\tau}_g = +\infty$, c'est à dire une viscosité infinie). Par conséquent, cela soulève un certain nombre d'interrogations quant à la précision de ce type d'approche dans des cas complexes, qui plus est en aéroacoustique.

En ce qui concerne le cas cell-vertex, la situation est bien moins aisée. Pour le transfert fin \rightarrow grossier, l'étape de filtrage et rescaling classique n'assure pas la conservation globale de la masse ni de la quantité de mouvement (elle en assure en revanche la conservation locale, étant donné que le filtrage n'est effectué que sur la partie hors équilibre de la fonction de distribution). L'étape de transfert grossier \rightarrow fin, qui comprend des interpolations, peut aussi violer ces contraintes de conservation. Il n'existe pas à notre connaissance de méthode de raffinement cell-vertex conservative.

Toutefois, il convient de se poser la question suivante : sur le plan numérique, rechercher à tout prix la conservation globale de la masse et de la quantité de mouvement en maillage non-uniforme est-il absolument souhaitable ? Pour répondre à cette question, imaginons la simulation numérique suivante. Soit un maillage unidimensionnelle d'axe x tel que pour $x < 0$, $\Delta x = \Delta x^f$ et $\Delta t = \Delta t^f$, puis pour $x > 0$, $\Delta x = \Delta x^c = 2\Delta x^f$ et $\Delta t = \Delta t^c = 2\Delta t^f$. La transition de résolution se situe donc en $x = 0$. Imaginons par exemple une perturbation du champ de densité se propageant dans le sens des x croissants, dont la source se situerait quelque part dans les $x < 0$: cette onde est donc vouée à percuter la transition de résolution. Nous considérons, dans le temps de la simulation, la dissipation visqueuse et négligeable. Soit m' le surplus de masse apporté au domaine par cette perturbation lors de son émission et concentrons nous sur la problématique de la conservation globale de la masse (le raisonnement se généralise aussi à la quantité de mouvement). Soit $k^{*f} = k\Delta x^f$ le nombre d'onde réduit à l'échelle du maillage fin (nous nous concentrerons sur l'aspect spatial pour plus de clarté, mais les mêmes conclusions peuvent être tirées sur le plan temporel). Choissons $k_p^{*f} \in]\pi/2; \pi]$ comme le nombre d'onde correspondant à notre perturbation. Nous savons (voir partie IV.C de notre article [Gen+17]) que les seuls nombres d'onde

pouvant exister dans le maillage grossier sont les nombres d'onde $k^{*c} = [0; \pi]$, soit $k^{*f} = [0; \pi/2]$. Par conséquent, notre perturbation ne peut exister dans le maillage grossier.

Un algorithme de raffinement conservant rigoureusement la masse ne peut produire dans notre cas que deux situations, qui sont toutes deux non-physiques : soit la perturbation traverse bien la transition mais change nécessairement de nombre d'onde (pour s'adapter à la contrainte $k^{*c} = [0; \pi]$) par effet de repliement spectral, soit celle-ci rebondit sur la transition et change de direction de propagation tout en gardant la même amplitude. Pour éviter ces deux effets, la seule solution (idéale) serait que l'onde correspondant à k_p^{*f} soit entièrement "absorbée" (filtrée) par la transition de résolution lors de son passage : ceci correspond bien sûr à un algorithme non-conservatif puisqu'il cause une perte de masse globale équivalente à m' . En résumé, un algorithme idéal sur le plan numérique nous paraît être celui que nous avons évoqué dans la partie IV.C de [Gen+17], à savoir un filtrage spatio-temporel de type "porte" avec une pente infinie en $k^{*f} = \pi/2$ et $\omega^{*f} = \pi/2$, qui resterait donc rigoureusement conservatif sur l'intervalle $[0; \pi/2]$ à la transition : néanmoins, comme nous l'avons précisé dans [Gen+17], ce filtrage est en pratique impossible à obtenir. Cependant, tout ceci montre que la conservation globale de la masse et de la quantité de mouvement en maillage non-uniforme ne doit pas être traitée de façon dogmatique comme un impératif catégorique, puisqu'elle peut elle aussi mener à des situations tout à fait non-physiques en pratique. Conservatisme et précision sont deux concepts bien distincts pour un schéma numérique donné, l'un n'impliquant pas nécessairement l'autre. La question de la stabilité d'un algorithme rigoureusement conservatif serait également à traiter dans le détail.

6.4.2 Vers un rescaling à deux niveaux ?

Jusqu'à présent, nous avons toujours traité la question du rescaling comme toutes les autres études sur les maillages non-uniformes, c'est à dire en considérant le phénomène de rescaling comme agissant uniquement à *l'ordre dominant*. Ceci avait pour conséquence de considérer les variables non dimensionnelles conservées par le schéma ($\rho, \rho\mathbf{u}$) comme indépendantes de la taille de maille d'après les règles d'adimensionnement. Ainsi, à l'ordre dominant, seule la viscosité (et donc la partie hors équilibre de la fonction de distribution) nécessitait un rescaling.

Or nous avons montré dans la section précédente que du fait des termes d'erreur en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ intrinsèques à la LBM, tous les moments transportés par le schéma ont vocation à prendre des valeurs différentes en un point donné, selon que le calcul est effectué sur un maillage fin ou grossier (rien que pour les termes d'erreur d'ordre 2, par exemple, $(\Delta t^c)^2 = 4(\Delta t^f)^2$). En résumé, il existe en fait deux niveaux de rescaling pour chaque quantité transportée pour le schéma :

- Celui à l'ordre dominant, qui n'affecte que les moments hors équilibre de la fonction de distribution. C'est le rescaling tel qu'il est traité classiquement.
- Celui des termes d'erreur de la méthode, qui lui affecte tous les moments de la fonction de distribution. À ce jour, celui-ci n'a jamais été traité ni, à notre connaissance, abordé dans une étude.

Dans l'absolu, l'impact du premier rescaling est largement supérieur à celui du second. En effet, pour une viscosité faible, rappelons que $2\bar{\tau}_g^c/\bar{\tau}_g^f \simeq 2$. Néanmoins, il y a fort à parier que pour des applications nécessitant beaucoup de précision tout en faisant appel à des maillages fréquemment sous résolus (l'aéroacoustique industrielle en est un bon exemple), l'absence de rescaling sur les termes d'erreur se fasse ressentir. Cela implique

qu'il faudrait, dans l'idéal, trouver un moyen d'effectuer un rescaling des termes d'erreur sur tous les moments, c'est à dire y compris sur ρ et $\rho\mathbf{u}$, en plus du rescaling classique de la partie hors équilibre. Cela reviendrait à effectuer pour chaque moment une estimation de son terme d'erreur puis de le corriger, tout en s'assurant que cette correction soit stable. À ce stade de notre travail, nous n'avons pas développé une telle méthode.

6.4.3 Remarques sur le repliement spectral aux transitions

Comme nous l'avons vu précédemment ainsi que dans [Gen+17], toute énergie présente dans le maillage fin pour $k^{*f} > \pi/2$ est susceptible de donner lieu à du repliement spectral lors de son passage par une transition de résolution. En pratique, on observe bel et bien une aggravation de l'acoustique parasite émise aux transitions à mesure que l'écoulement s'enrichit dans les hautes-fréquences. Une manière détournée d'atténuer le problème est d'augmenter, pas seulement localement lors du transfert fin → grossier mais de manière uniforme dans tout le fluide, le taux de dissipation du schéma dans les hautes fréquences. Ceci peut se faire par l'intermédiaire de techniques de filtrage. En l'occurrence, c'est même précisément ce qui nous a conduit, en premier lieu, à développer notre filtrage sélectif du chapitre 4 et à tenter de l'utiliser dans une méthode LES implicite.

Il nous fallait donc un moyen de maximiser la force du filtrage tout en conservant un comportement raisonnablement dissipatif. Utiliser un filtrage fort en plus d'un modèle de turbulence (Smagorinsky, SISM) fournissait un modèle trop dissipatif. C'est pourquoi nous avons tenté d'étudier le cas où nous nous affranchirions du modèle de sous-maille, afin du même coup de diminuer l'erreur aux transitions due au phénomène de repliement spectral. Notons qu'un filtrage d'ordre plus élevé (mais moins compact et plus coûteux) permettrait d'atténuer de dissiper davantage l'énergie contenue dans les hautes fréquences tout en préservant au maximum les basses fréquences. Ceci permettrait d'utiliser une force de filtrage forte tout en conservant un modèle de sous-maille qui agit sur la viscosité à l'ordre dominant. Pour des raisons de performances CPU, ce n'est pas l'option que nous avons retenu pour ce mémoire.

6.5 Applications numériques

6.5.1 Liste des modèles comparés

Nous comparerons dans toute cette section trois combinaisons de modèles de collision et de raffinement, toujours basés sur l'algorithme de maillage non-uniforme classique décrit dans la section 6.1.2 : le modèle MRT^H , le modèle MRT^H avec filtrage compact des moments hors équilibre pré-collision d'ordre 2 et l'ajout à ce dernier modèle de la procédure de propagation partielle. Nous résumons ceci dans la table 6.1.

Notation	Filtrage sélectif	Paramètres de filtrage	Propagation partielle
MRT^H	-	-	-
$\text{MRT}^{H,sfLap2}$	Eq. (4.26)	$\sigma_L = 0.25$	-
$\text{MRT}^{H,sfLap2} + \text{PP}$	Eq. (4.26)	$\sigma_L = 0.25$	oui

TABLE 6.1 – Notations pour l'étude comparative de la section 6.5. Nous désignons par PP l'algorithme de propagation partielle.

Notons que pour les modèles filtrés (*sfLap2*) en maillage non-uniforme, le filtrage n'est appliqué qu'aux noeuds internes.

6.5.2 Pulse de pression acoustique

Dans cette section, nous étudions la propagation d'un pulse acoustique dans un maillage non-uniforme. Dans un premier temps, nous nous intéressons à un calcul bien résolu et effectuerons une étude de convergence en maillage. Nous comparons diverses méthodes de collision et montrons l'impact de l'algorithme de propagation partielle. Ensuite, nous étudierons l'effet de la propagation partielle sur la propagation d'un pulse acoustique fortement sous-résolu, situation très fréquente sur le plan industriel.

La mise en données et le maillage du cas sont identiques à ceux de notre article [Gen+17] (section V.A). Nous traçons sur la figure 6.4 la convergence de l'erreur L_2 sur les fluctuations de densité, conformément aux équations (55)-(58) de [Gen+17], c'est à dire en se comparant à une solution analytique inviscide issue des équations d'Euler. Pour un domaine de taille $[L, L, 2\Delta x^f]$ avec $L = 2$, on note N le nombre de mailles par demi-longueur de domaine, soit $N = L/(2\Delta x^f)$: il s'agit donc d'une mesure directe de la résolution spatio-temporelle du calcul.

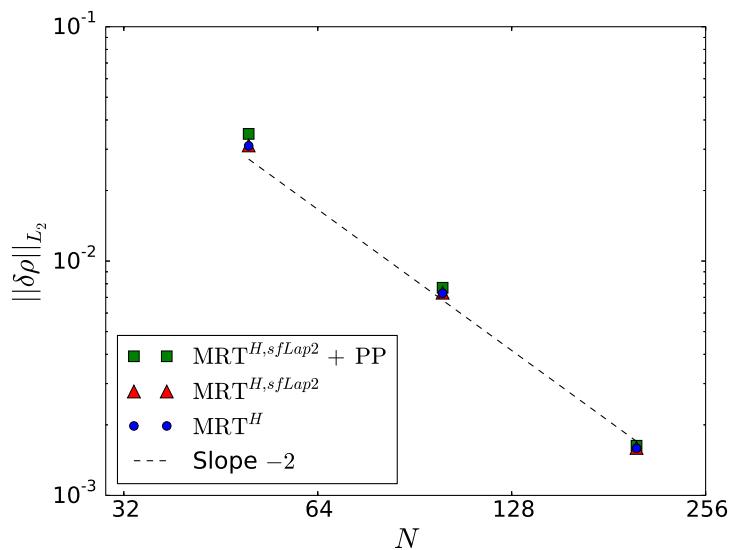


FIGURE 6.4 – Convergence en maillage de l'erreur L_2 sur les fluctuations de densité pour le cas du pulse de pression acoustique en maillage non-uniforme.

La figure 6.4 montre que les trois modèles comparés permettent de retrouver la convergence classique d'ordre 2 en maillage. Sur la figure 6.5, nous montrons l'effet de la propagation partielle sur la traversée de la zone de transition par l'onde sonore dans le cas d'un calcul particulièrement sous-résolu. On peut voir que la propagation partielle a pour effet de réduire la réflexion non-physique de l'onde au niveau de la transition de résolution.

6.5.3 Convection d'un tourbillon à travers une transition de résolution

Dans cette section, nous reprenons la mise en donnée (et le maillage associé) déjà étudiée dans notre article [Gen+17] (section V.B) : la convection d'un tourbillon dans un maillage non-uniforme. L'unique différence est que nous choisissons de fixer la viscosité

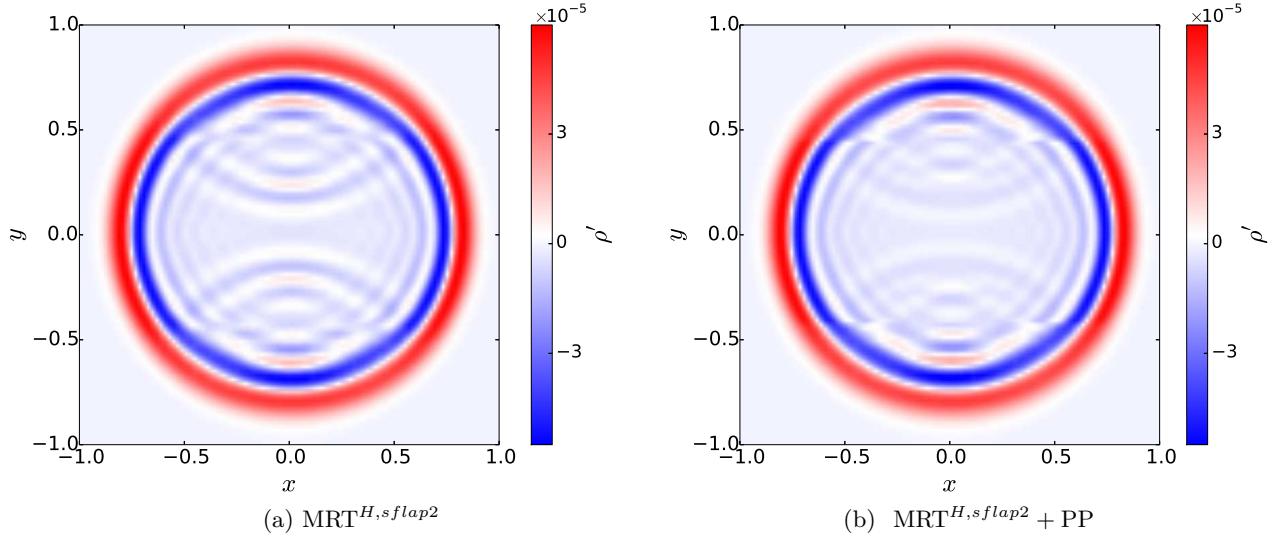


FIGURE 6.5 – *Effet de la propagation partielle sur les fluctuations de densité pour un cas de pulse de pression sous-résolu en maillage non-uniforme. Le maillage fin est situé entre $-0.4 \leq y \leq 0.4$ et le maillage grossier au delà.*

cinématique à sa valeur dans l'air, c'est à dire $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ au lieu de $\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ dans [Gen+17]. La trop grande instabilité du modèle BGK rendait en effet impossible l'étude de ce cas test pour de trop faibles résolutions spatiales avec $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Nous traçons sur la figure 6.6 la convergence en maillage pour le cas du tourbillon. Rappelons que nous désignons par N le nombre de mailles fines dans la direction x . La largeur du domaine valant $L_x = 3$, on a $N = 3/\Delta x^f$. Pour le calcul de l'erreur L_2 , la comparaison s'effectue toujours par rapport à un calcul très raffiné ($N = 3000$) en maillage uniforme, effectué cette fois avec le modèle de collision MRT^H sans filtrage additionnel. On constate que pour les trois modèles testés, la convergence d'ordre 2 est retrouvée avec une marge d'erreur très faible. En revanche, il est important de noter les disparités observées quant à la valeur absolue de l'erreur. Il apparaît clairement que la propagation partielle possède un effet très bénéfique. On peut observer une réduction d'environ un facteur 5 de l'erreur pour $N = 1200$ entre le modèle MRT^H et sa version agrémentée du filtrage compact et de la propagation partielle.

Pour un aspect plus visuel, nous traçons le champ de fluctuation de densité sur la figure 6.8 pour deux échelles différentes ($\Delta\rho = \pm 1 \times 10^{-2}$ et $\Delta\rho = \pm 9 \times 10^{-5}$), en comparant les modèles $\text{MRT}^{H,sfLap2}$ avec et sans propagation partielle à l'interface. Rappelons que la fluctuation maximale de densité (au cœur du vortex) est $\Delta\rho_{max} = 2.7 \times 10^{-2}$. Nous avons vu dans [Gen+17] que les fluctuations en champ proche, mais hors du tourbillon lui-même, sont théoriquement nulles. On observe bien la grande réduction des erreurs attendue au vu du graphe de convergence en maillage. En dehors des erreurs en champ proche, on voit dans le cas du plus fort zoom et en l'absence de propagation partielle que le tourbillon apparaît déformé.

Afin de mieux mettre en évidence toute l'énergie parasite dégagée au niveau de la zone de transition de résolution, nous traçons sur la figure 6.7, de la même façon que dans [Gen+17], les spectres intégrés des fluctuations de densité pour trois nombres de Mach différents, avec $N = 1200$. Nous ajoutons également le modèle BGK sur cette figure, car

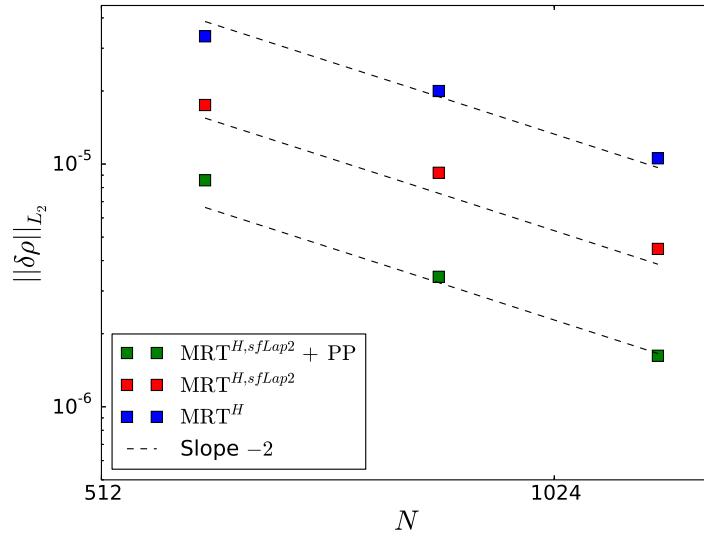


FIGURE 6.6 – Convergence en maillage de l’erreur L_2 sur les fluctuations de densité pour le cas de la convection du tourbillon en maillage non-uniforme.

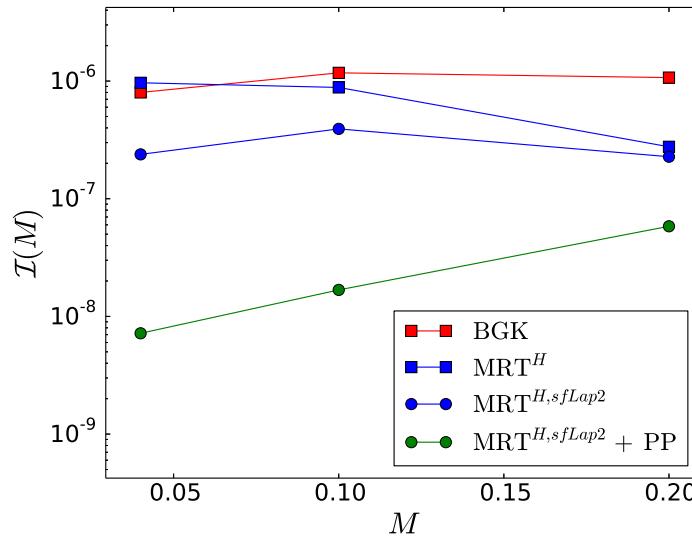


FIGURE 6.7 – Spectres de fluctuation de pression intégrés pour la sonde ponctuelle [Gen+17]. Le nombre de Mach est désigné ici par M .

ce modèle demeure stable pour cette résolution assez haute. Les spectres intégrés sont calculés conformément aux formules (62)-(63) de [Gen+17] et dans les mêmes conditions (même nombre d’échantillons temporels, même sonde ponctuelle pour l’enregistrement temporel des fluctuations de densité).

Le net apport de l’algorithme de propagation partielle est encore une fois confirmé. On observe une réduction d’un facteur allant d’environ 3.5 à 36 de la puissance des fluctuations de densité parasites sur la gamme de nombres de Mach considérée lors de l’activation de l’algorithme de propagation partielle.

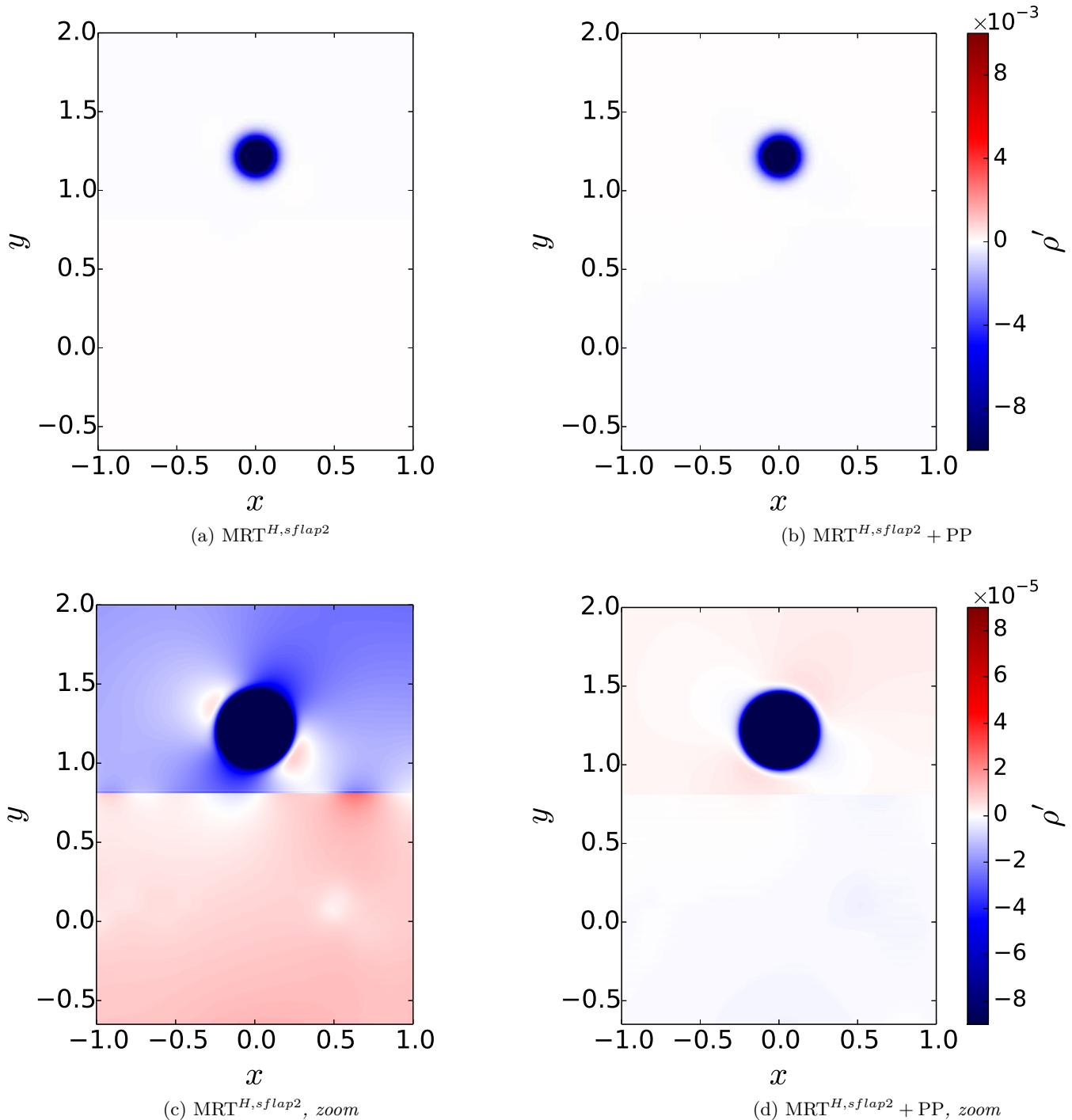


FIGURE 6.8 – Effet de la propagation partielle sur la forme du vortex et les fluctuations de densité en champ proche après sa traversée de la transition de résolution (située à $y = 0.8$) pour $N = 1200$ et $Ma = 0.04$. Les figures (c) et (d) correspondent respectivement aux figures (a) et (b) où un fort zoom sur l'échelle de fluctuation de densité a été appliqué.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé la problématique des maillages non-uniformes pour l'aéroacoustique avec la méthode de Boltzmann sur réseau. L'article du chapitre 5 a servi d'introduction à la problématique. Nous y avons passé en revue tous les éléments importants à prendre en compte pour des algorithmes en maillage uniforme. En particulier, nous retiendrons qu'une partie très importante de ces méthodes réside dans l'étape de transfert du maillage fin vers le maillage grossier : il est possible de diminuer l'ampleur des difficultés numériques aux transitions de résolution liées au phénomène de **repliement spectral** au prix d'une augmentation de la dissipation spatio-temporelle dans les hauts nombres d'ondes (et dans les hautes fréquences). Un compromis est donc à trouver entre la résolution du problème de repliement spectral et le taux effectif de dissipation dans le fluide (ou localement dans les lieux de transfert de l'information du maillage fin vers le maillage grossier) : une augmentation trop importante de ce dernier nuira à la qualité de l'écoulement aérodynamique, voire atténuerait trop fortement la propagation des ondes acoustiques.

Par une étude bibliographique exhaustive, synthétisée dans un tableau, nous avons montré qu'il n'existe pas d'étude détaillée d'un algorithme de raffinement dans le cadre de la méthode de Boltzmann sur réseau qui soit appliquée au calcul aéroacoustique direct en régime turbulent ou même simplement tourbillonnaire. C'est précisément ce que nous avons tenté de faire dans la suite de cet article, en comparant un **algorithme alternatif** à un algorithme classique sur un cas où une source de vorticité traverse une transition de résolution pour des nombres de Mach allant jusqu'à 0.2. Notre étude montre que le cas test du tourbillon est particulièrement utile pour l'étude aéroacoustique des raffinements de maillage. On y voit en effet que la convection d'une source de vorticité à travers une zone de transition de résolution provoque l'apparition de fluctuations de pression non-physiques qui se propagent dans le domaine de calcul. Ces fluctuations nuisent gravement à la qualité du champ aéroacoustique, et cet effet est renforcé avec l'augmentation du nombre de Mach et la baisse de la viscosité. L'algorithme alternatif que nous avons proposé apporte, sur le cas du tourbillon convecté, une réduction de la puissance acoustique parasite rayonnée par l'interface d'un facteur environ 55 avec une collision BGK.

Toutefois, ce dernier n'est **pas applicable aisément à court terme** dans notre structure de donnée pour des cas de nature industrielle (raffinements autour de géométries quelconques, intersection des raffinements avec des parois fixes et mobiles, etc...). Nous avons donc choisi de prendre comme base un algorithme de raffinement plus classique [TRL14; Lag+12] pour la suite de notre étude. Par conséquent, dans un deuxième temps, nous avons entrepris une description de cet algorithme et tenté d'y apporter des améliorations. En particulier, nous avons introduit le concept de **propagation partielle** dans l'étape de transfert des données du maillage fin vers le maillage grossier. Nous avons

également évoqué certaines perspectives pour de futurs travaux. La première question traitée a été celle de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour les algorithmes de raffinement. Nous avons montré que cette contrainte (qui peut être assurée assez naturellement dans le cadre cell-centered) n'assure pas nécessairement la précision du modèle, élément tout à fait capital en aéroacoustique. Enfin, nous avons évoqué la problématique du rescaling. Nous avons souligné que les termes d'erreur intrinsèques à la LBM pouvaient avoir un rôle à jouer, non mesuré à l'heure qu'il est, et impliquer la nécessité d'un second type de rescaling qui affecterait également les moments conservés par le schéma.

Dans un dernier temps, nous avons effectué des **études numériques** sur les mêmes cas tests que pour notre article du chapitre 5, c'est à dire pour la propagation d'un pulse acoustique et la convection d'un tourbillon (avec une viscosité plus faible que dans l'article pour le cas du tourbillon). Nous avons choisi de nous baser sur les équations de collision développées dans les parties précédentes tout en étudiant l'effet de l'activation de l'étape de propagation partielle. Nous avons pu observer son effet très bénéfique sur les fluctuations de pression non-physiques émises lors du passage du tourbillon à travers la zone de transition de résolution. On retiendra en particulier une réduction d'un facteur allant d'environ 3.5 à 36 de la puissance des fluctuations de densité parasites sur la gamme de nombres de Mach considérée ($0.04 \leq Ma \leq 0.2$) lors de l'activation de l'algorithme de propagation partielle. L'erreur L_2 globale sur l'ensemble du domaine est aussi nettement réduite en valeur absolue. Il reste à présent à étudier l'effet de ces algorithmes en conditions réelles, c'est à dire pour des calculs industriels complexes.

Quatrième partie

Applications aéroacoustiques industrielles de la méthode de Boltzmann sur réseau

Introduction

L'objectif de cette partie est d'appliquer l'ensemble des développements acquis précédemment à des simulations aéroacoustiques industrielles tridimensionnelles de complexité croissante, utilisées en pratique chez Renault. Dans un premier temps, nous étudierons le cas d'un écoulement dans un canal parallélépipédique, coupé en son milieu par une plaque perforée. Nous observerons les spectres acoustiques en aval de la plaque, près des parois. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à la simulation autour d'un véhicule complet.

Ainsi, dans ces deux cas-tests, un élément nouveau et déterminant fait son apparition : les parois solides. Les techniques utilisées pour tenir compte de cette donnée en LBM ne sont pas traitées dans le cadre de ce mémoire. Par nécessité, nous présenterons succinctement dans la section suivante la façon dont elles sont implémentées dans le code qui a servi de base à notre travail : le logiciel LaBS.

Présentation synthétique du logiciel LaBS

Les détails concernant les modèles physiques et numériques inclus dans la version standard du logiciel LaBS n'étaient d'aucune importance jusqu'à cette partie du mémoire. En effet, dans les parties précédentes, nous nous sommes attachés à construire et à détailler analytiquement chacun des modèles utilisés, pour ensuite les coder dans l'infrastructure informatique de LaBS. Il est toutefois nécessaire ici de balayer synthétiquement les modèles présents dans la version standard du logiciel LaBS, et ce pour deux raisons. La première, nous l'avons évoquée plus haut, vient du fait que nous devons utiliser des modèles de gestion des parois solides, dont l'étude n'est pas l'objet de notre mémoire. La deuxième est que nous obtenons ainsi, grâce au logiciel LaBS, la possibilité de comparer les modèles étudiés voire développés par nos soins dans les parties précédentes à des modèles ayant été préalablement validés en détail par ailleurs, sur des cas académiques et industriels.

En guise d'introduction, nous rappelerons brièvement dans quel contexte est utilisé LaBS en aéroacoustique chez Renault.

Utilisation pour le calcul du bruit intérieur d'origine aérodynamique et difficultés industrielles

Le logiciel LaBS constitue l'un des premiers maillons de la chaîne dans le processus de calcul qui vise à déterminer le bruit intérieur d'origine aérodynamique dans le véhicule. Ce calcul du bruit intérieur s'effectue en plusieurs étapes :

- Une maquette numérique du véhicule est établie. Pour le calcul aéroacoustique, seule la "peau" extérieure du véhicule est nécessaire (en particulier, les entrées d'air à l'avant sont bouchées, la partie sous-capot ne fait pas partie du domaine de calcul).
- Le logiciel LaBS est utilisé pour simuler l'écoulement instationnaire autour du véhicule. En particulier, on récupère le champ de pression instationnaire totale en chaque point du vitrage conducteur. Ce champ contient donc à la fois les fluctuations de pression aérodynamique (forte amplitude) et acoustique (faible amplitude).
- Ce champ de pression instationnaire est projeté sur un modèle structure de vitrage (accompagné de conditions aux limites modélisant les pièces environnantes), qui est ensuite utilisé dans un calcul vibratoire. L'objectif est d'obtenir en sortie les vitesses vibratoires en chaque point du vitrage. Comme nous l'avons précisé en introduction

de ce mémoire, rappelons que ce sont principalement les fluctuations de pression acoustique de très faible amplitude, contenues dans le champ de pression totale, qui sont efficaces pour faire rayonner le vitrage.

- Enfin, à partir de ces vitesses vibratoires, la puissance acoustique rayonnée par le vitrage vers l'intérieur du véhicule est déduite d'un calcul par la méthode de l'intégrale de Rayleigh [WM82].

Le problème industriel concret réside dans le fait qu'il a été montré sur un modèle véhicule, dont le nom de code est B91, que les vitesses vibratoires du vitrage sont surestimées par rapport aux mesures expérimentales. Il en résulte une surestimation de la puissance acoustique rayonnée. Or il a également été montré qu'a priori, les mesures sur les vitesses vibratoires peuvent être considérées comme fiables, de même que le calcul vibratoire et le calcul de puissance acoustique rayonnée. Il en résulte que le biais provient nécessairement du calcul aéroacoustique. En particulier, de nombreux calculs ont montré que le passage d'un écoulement turbulent sous-résolu à travers des transitions de résolution dans le maillage conduit à l'apparition de sources acoustiques parasites. Ce phénomène a été jugé comme étant une source majeur de la surestimation du champ de pression acoustique sur le vitrage conducteur, et donc des vitesses vibratoires et de la puissance acoustique rayonnée vers l'intérieur du véhicule.

Gestion des parois et de la turbulence : Wall Model LES (WMLES)

La méthode utilisée dans LaBS pour le couplage entre le calcul LES et la paroi est le principe dit *Wall Model LES*, abrégé WMLES. En résumé, la méthode WMLES implantée dans LaBS comprend deux aspects : le calcul de la fonction de distribution à la première maille fluide via une loi de paroi, ainsi que le calcul d'une viscosité turbulente à la première maille.

Concernant le calcul de la fonction de distribution à la première maille, une méthode de reconstruction analogue à celle de [VM10] est utilisée, combinée à une loi de paroi. Soit une paroi plane de normale locale dirigée selon un axe y . En définissant $u_\tau = \sqrt{\nu \partial u / \partial y}$ sur la paroi comme étant la vitesse de frottement, on obtient les variables réduites $u^+ = u/u_\tau$ et $y^+ = yu_\tau/\nu$. Dans notre cas, u_τ est estimé par une méthode que nous ne dévoilerons pas pour des raisons de confidentialité. Dans les régions où c'est nécessaire, la vitesse de glissement u^+ à la première maille est calculée par une loi-log du type

$$u^+(y^+) = \left(\frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C^+ \right) + D, \quad (6.15)$$

où, κ et C^+ sont prises à leurs valeurs classiques $\kappa \simeq 0.4$ et $C^+ \simeq 5$. Le terme correctif D prend en compte les effets de la courbure pariétale, des gradients de pression adverses et de la rugosité. La densité à la première maille est estimée par interpolation. Pour la reconstruction de la partie hors-équilibre, le tenseur des contraintes est calculé par des schémas aux différences finies.

Quant à la viscosité turbulente ν_t à la première maille, elle est déduite de la loi de paroi via un modèle de longueur de mélange : on utilise

$$\nu_t = \nu \kappa y^+ \left(1 - \exp(y^+/19) \right)^2. \quad (6.16)$$

Ces méthodes offrent un bon compromis entre stabilité et précision pour des calculs industriels complexes. En effet, bon nombre d'algorithmes étudiés dans la littérature LBM et considérés comme plus précis se sont révélés très instables sur des configurations réelles

au cours du développement de LaBS. Notons que la méthode WMLES à la première maille proche paroi sera utilisée dans tous nos calculs sans exception, y compris dans les cas où le modèle de sous-maille est désactivé dans le cœur du fluide au profit du seul filtrage sélectif. Le premier nœud proche paroi ne possédant pas ses 19 voisins, le filtrage ne lui est pas appliqué.

Concernant le modèle de sous-maille, il est basé sur un modèle de type SISM (pour plus de détails, voir section 4.3.3). Il a été validé dans le cadre du projet LaBS, par exemple dans [TRL14].

Gestion de la collision

Le modèle de collision de LaBS a vocation à évoluer. Toutefois, dans la version à laquelle nous nous comparons, il s'agit d'un modèle à double temps de relaxation dans le même esprit que ce que l'on trouve chez Dellar [Del03]. Plus précisément, la collision au sens strict est exactement équivalente à celle de notre modèle MRT^H avec $s_{\rho'} = s_{j'}$. Afin d'assurer la robustesse du schéma en situation industrielle, tout en conservant de bonnes propriétés acoustiques, un filtrage sélectif d'ordre élevé sur les variables macroscopiques est également utilisé [Ric+09].

Gestion des transitions de résolution

La gestion des transitions de résolution est exactement similaire à celle présentée dans la section 6.1. Cet algorithme a été utilisé avec succès pour valider aérodynamiquement un grand nombre de cas, dont l'étude de Touil *et al.* [TRL14]. Des problèmes ont en revanche été observés sur la partie aéroacoustique, comme nous l'avons montré dans la partie précédente ainsi que dans [Gen+17]. Ces perturbations mènent usuellement à une surestimation du niveau acoustique, en particulier dans les cas très turbulents et sous résolus. Le phénomène empire avec l'augmentation du nombre de Mach.

Modèles utilisés pour les études comparatives de cette partie.

Nous reprenons globalement les modèles étudiés dans la section 4.3.3. Toutefois, l'interaction entre les modèles de paroi et le modèle de type MRT introduit dans la partie II, le MRT^H, a donné lieu à une **modification des "paramètres libres" de ce dernier** (c'est à dire de ses temps de relaxation non-hydrodynamiques). Il est en fait ressorti des études industrielles que le "meilleur" paramétrage en matière de stabilité obtenu en l'absence de parois solides, fourni dans la partie II, provoque des artefacts numériques à la paroi sur les cas les plus difficiles ou les moins bien résolus, en particulier lorsque le nombre de Mach est plus élevé. Ces artefacts se révèlent parfois numériquement instables, ce qui constitue industriellement une condition radicalement éliminatoire pour un paramétrage donné. Nous avons donc été contraints d'utiliser une version dégradée de notre paramétrage MRT^H pour pallier ce comportement imprévu, découvert tardivement dans le processus de développement et de test de nos schémas. Ainsi, nous avons opté pour le paramétrage $s_{\rho'} = 1.5$ et $s_{u'} = 1.83$ en lieu et place de $s_{\rho'} = 1.2$ et $s_{u'} = 1.9$.

Nous résumons les notations associées aux modèles utilisés dans la table 6.2.

La notation "LaBS" désigne la version industrielle du logiciel LaBS, que nous avons présenté plus haut. Cette configuration est donc inédite jusqu'à présent pour ce qui est de ce manuscrit. Nous ajoutons une deuxième configuration inédite, que nous nommons

Notation	Filtrage sélectif	Modèle de sous-maille	Paramètres du modèle	Propagation partielle
LaBS	Eq. (3.101)	SISM	$C_s = 0.18, f_c = 30 \text{ Hz}$	non
MRT ^{H,sfLap2}	Eq. (4.26)	-	$\sigma_L = 0.25$	non
MRT ^{H,Smag}	-	Smagorinsky	$C_s = 0.18$	non
MRT ^{H,sfLap2} SISM	Eq. (4.26)	SISM	$C_s = 0.18, f_c = 30 \text{ Hz}$ $\sigma_L = 0.04$	non
MRT ^{H,sfLap2} + PP	Eq. (4.26)	-	$\sigma_L = 0.25$	oui
MRT ^{H,Smag} + PP	-	Smagorinsky	$C_s = 0.18$	oui
MRT ^{H,sfLap2} SISM + PP	Eq. (4.26)	SISM	$C_s = 0.18, f_c = 30 \text{ Hz}$ $\sigma_L = 0.04$	oui

TABLE 6.2 – Notations utilisées dans cette partie en vue des applications numériques industrielles. Les filtres utilisés pour *sfLap* et *sfLap2* correspondent, comme pour les parties précédentes, à la formule (4.6). De même, la notation *PP* correspond à l'activation de l'algorithme de propagation partielle au niveau des transitions de résolution (voir section 6.3).

MRT^{H,sfLap2} SISM. Cette configuration a pour intérêt d'être particulièrement proche de la configuration LaBS, en ceci qu'elle contient également un modèle explicite de sous-maille SISM accompagné par une méthode de filtrage. La distinction avec la configuration LaBS se fait à deux niveaux : le modèle de collision ainsi que la méthode de filtrage sélectif sont différents. Notons que l'utilisation d'un modèle de sous-maille en plus d'un filtrage sélectif demande quelques précautions : un filtrage d'intensité beaucoup plus faible doit être choisi, afin de ne pas être sur-dissipatif. Nous avons sélectionné $\sigma_L = 0.04$ afin de retrouver un niveau de dissipation quasi équivalent à celui de la configuration LaBS.

En résumé, la table 6.2 montre que nous étudierons principalement 4 combinaisons de modèles. Pour chacun des cas, à l'exception de la configuration LaBS que nous laisserons intacte, il sera intéressant d'étudier l'effet de l'activation ou non de l'étape de propagation partielle au niveau des transitions de résolution. Ceci porte le nombre total d'alternatives à 7, soit le nombre de lignes du tableau.

Chapitre 7

Écoulement dans un conduit en aval d'une plaque perforée

7.1 Présentation du cas test

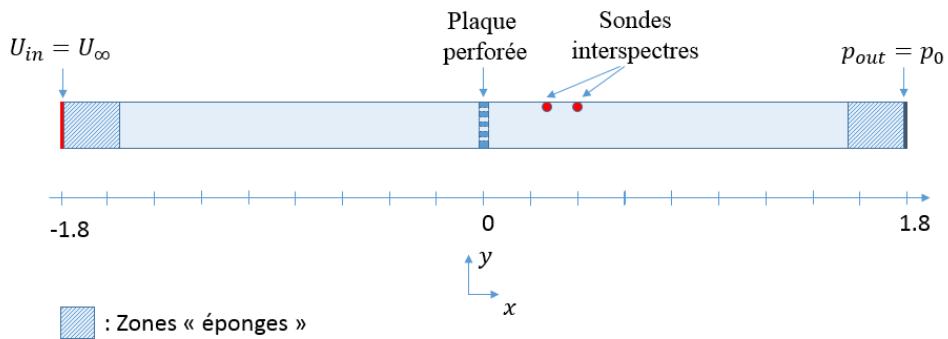


FIGURE 7.1 – Géométrie schématique du canal avec sa plaque perforée (plan de coupe longitudinal). L’unité de longueur est le mètre.

Nous étudions ici le cas d'un écoulement dans un conduit rectangulaire, perturbé en son milieu par la présence d'une plaque perforée de trous circulaires. La géométrie schématique (vue en coupe) de ce cas test est présentée sur la figure 7.1, et la plaque perforée (vue dans l'interface du logiciel LaBS) sur la figure 7.2. La vitesse d'entrée dans le canal est fixée à $\mathbf{U}_{in} = (U_{in}, 0, 0)$ avec $U_{in} = 10 \text{ ms}^{-1}$. Cette valeur a été établie par Renault afin d'assurer un débit dans le canal le plus proche possible de celui mesuré dans une campagne d'expérimentations effectuée sur cette même géométrie, à laquelle nous comparerons nos résultats. Le canal est borné par des zones absorbantes afin de limiter les réflexions acoustiques, similairement à [Gen+17]. La condition de sortie est à pression imposée, à la valeur $p_0 = 101325 \text{ Pa}$. Les conditions de paroi solide (canal, plaque perforée) sont de type loi de paroi, comme présenté plus haut. La vitesse et la pression initiales dans le domaine sont respectivement choisies à \mathbf{U}_{in} et p_0 . La vitesse du son vaut $c_0 = 343.204 \text{ ms}^{-1}$ et la viscosité est prise à sa valeur dans l'air, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.

Afin d'étudier l'influence de la résolution du calcul sur la solution obtenue, nous avons également représenté sur la figure 7.3 les deux maillages avec lesquels nous travaillons. La taille de maille minimale dans les deux cas est identique et vaut $\Delta x = 0.28 \text{ mm}$, ce qui

fournit un pas de temps minimal de $\Delta t = 4.71027 \cdot 10^{-7}$ s. La seule différence entre les deux cas est que la zone de résolution la plus élevée est agrandie dans le cas du maillage dit "fin" en bas sur la figure 7.3. Par conséquent, le sillage de l'écoulement en aval des trous y est mieux résolu.

Dans le but de mesurer le champ acoustique créé dans le conduit par l'écoulement turbulent engendré par la plaque perforée, des sondes de pression ont été placées en proche paroi (en rouge sur la figure 7.1), au même emplacement que lors de la campagne expérimentale évoquée plus haut. Ces deux points sont suffisamment éloignés du sillage qui se forme en aval de la plaque perforée pour considérer que les fluctuations de pression qu'ils captent sont, avec une bonne approximation, dues uniquement à la propagation d'ondes acoustiques.

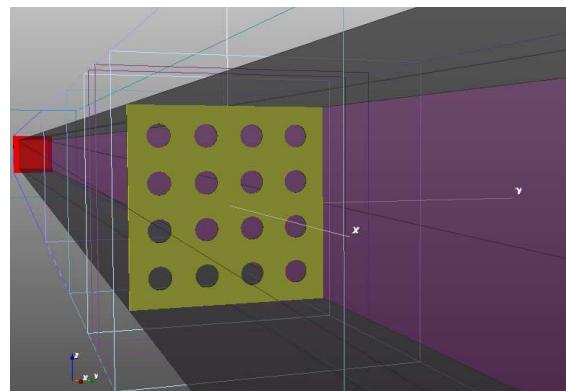


FIGURE 7.2 – Plaque perforée dans le canal, visualisée dans le logiciel LaBS.

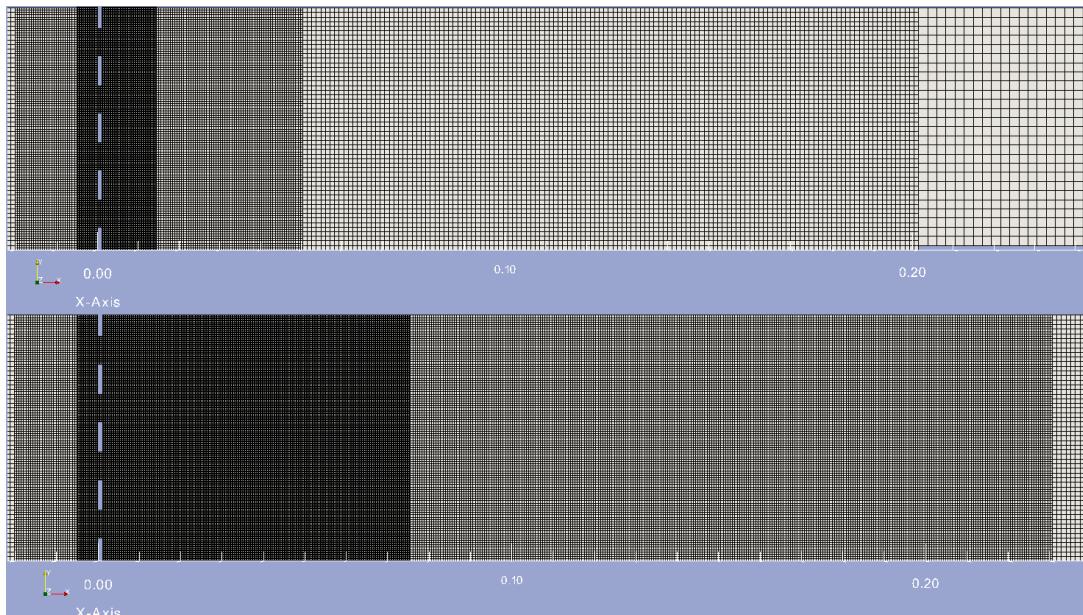
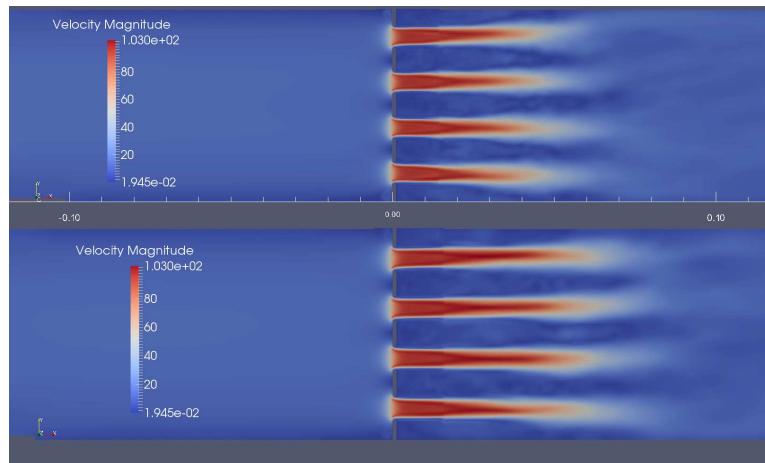


FIGURE 7.3 – Maillages étudiés. En haut : maillage 1 (grossier). En bas : maillage 2 (fin). L'unité de longueur est le mètre.

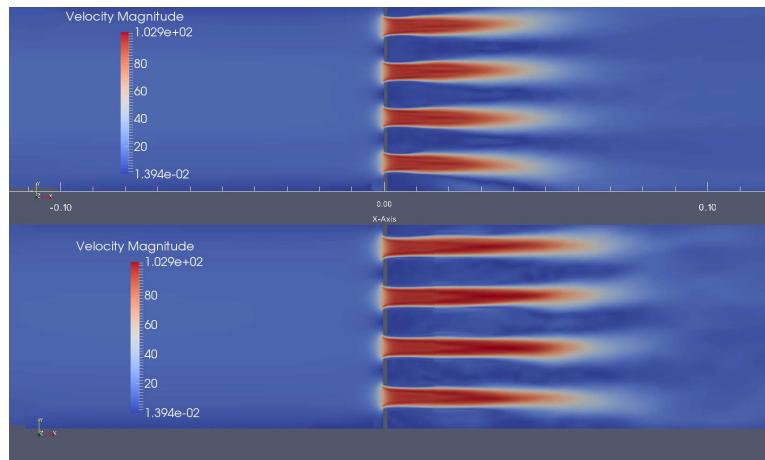
7.2 Comparaisons calcul/mesure

7.2.1 Visualisations de l'écoulement

Afin de rester concis, nous ne présentons pas de visualisation de l'écoulement pour la totalité des modèles. Nous montrons des champs moyens et instantanés pour deux types de modèles, à savoir ceux qui fournissent les résultats les plus différents : les modèles $MRT^{H,sfLap2} SISM$ et $MRT^{H,sfLap2}$. Le moyennage est effectué entre $t = 0.1$ s et $t = 0.3$ s.



(a) *Maillage 1 (grossier)*



(b) *Maillage 2 (fin)*

FIGURE 7.4 – *Champs de vitesse moyens pour (a) le maillage grossier et (b) le maillage fin, et ce pour deux modèles : pour chaque figure, en haut le modèle $MRT^{H,sfLap2} SISM$, en bas le modèle $MRT^{H,sfLap2}$*

On retiendra des champs moyens et instantanés que le sillage est spatialement moins rapidement déstabilisé dans le schéma dont la dissipation est majoritairement pilotée par le filtre sélectif, c'est à dire $MRT^{H,sfLap2}$. Rappelons que la valeur $\sigma_L = 0.25$ pour le cas $MRT^{H,sfLap2}$ a été choisie de façon à obtenir un taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement pour le développement temporel d'une couche de mélange qui soit similaire, à très haut nombre de Reynolds, à celui donné par un calcul LES basé sur les équations de Navier-Stokes utilisant un modèle de Smagorinsky (voir section 4.3.4). En effet, le cas du modèle de Smagorinsky fournit exactement, dans cette situation, le bon taux de dissipation de sous-maille.

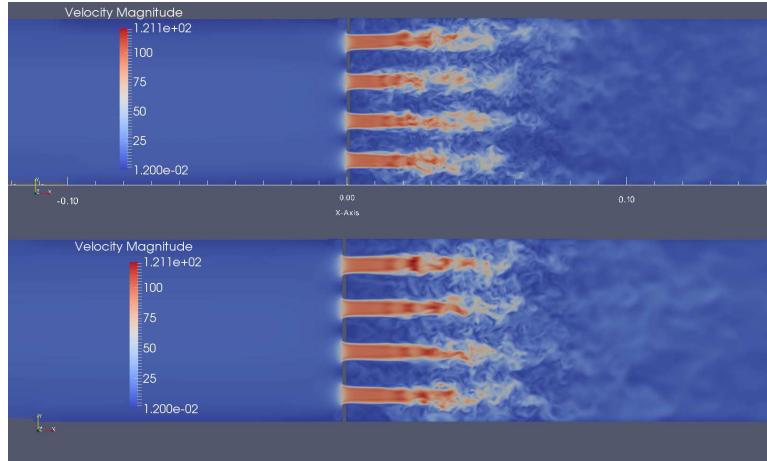


FIGURE 7.5 – Champs de vitesse instantanés pour le maillage fin. En haut le modèle $MRT^{H,sfLap2} SISM$, en bas le modèle $MRT^{H,sfLap2}$

On aperçoit malgré tout ici qu'en pratique, il est possible que ce coefficient soit trop élevé et que le schéma soit, en définitive, légèrement trop dissipatif du point de vue turbulent. Rappelons toutefois que cette utilisation du filtrage sélectif du tenseur hors équilibre n'est présentée ici que sous une forme préliminaire. Des améliorations restent à effectuer pour obtenir un modèle définitif. Nous verrons en revanche que, sur le plan acoustique, le problème d'une éventuelle sur-dissipation ne se pose pas ici.

Nous noterons également que la structure de la plaque perforée implique, malgré la faible vitesse du fluide en amont, une **vitesse maximale en aval particulièrement importante** pour un calcul LBM (on enregistre des vitesses pouvant dépasser un nombre de Mach $Ma = 0.35$). Par conséquent, ce cas test en apparence simple met en réalité à rude épreuve les schémas de Boltzmann sur réseau, ainsi que les algorithmes de raffinement de maillage.

7.2.2 Résultats aéroacoustiques

Afin d'étudier l'aéroacoustique dans le conduit, nous nous intéressons au calcul d'un interspectre réalisé entre les deux points de mesure indiqués sur la figure 7.1. Intéressons nous d'abord au **maillage 1 (grossier)**. Ces interspectres sont calculés sur un temps physique d'enregistrement de 0.2 s, le tout assisté d'un traitement de fenêtrage (Hanning) et d'un moyennage par bloc avec un recouvrement temporel de 40% (voir section B.1.2 en annexe). Le nombre de blocs est de 12, avec un pas fréquentiel de 32 Hz.

Nous représentons sur la figure 7.6 (a) l'amplitude de l'interspectre jusqu'à environ 3 kHz pour différents modèles, soit la zone où la comparaison avec l'expérimentation est jugée pertinente industriellement. On peut observer une surestimation importante du niveau acoustique sur bande de fréquence considérée. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ce problème. L'interaction du sillage avec la première transition du maillage se faisant dans une zone où l'écoulement est particulièrement énergétique, la première piste d'explication serait une nouvelle fois celle d'une surestimation du niveau due à un problème d'algorithme de raffinement. Cette hypothèse n'est bien entendu pas à exclure mais n'est certainement pas la seule. En effet, un point nous interpelle : la courbe correspondant au modèle $MRT^{H,sfLap2}$ (LES implicite avec filtrage sélectif fort) montre une surestimation encore plus importante de l'acoustique. Or nous avons pu constater sur

de nombreuses simulations qu'en ce qui concerne le strict problème de l'acoustique parasite aux transitions de résolution, ce type de modèle fournit habituellement un comportement meilleur que ses concurrents. Il est donc tout à fait envisageable que cette surestimation soit due à l'écoulement lui-même, ou plus précisément à la structure de celui-ci telle qu'elle est simulée par le modèle MRT^{H,sfLap2} en configuration sous-résolue, et non à un problème aux transitions de résolution. Un certain nombre de problèmes peuvent être dûs à l'aspect légèrement sur-dissipatif du modèle en l'état actuel. On observe classiquement pour des calculs LES trop dissipatifs une perturbation de la cascade d'énergie vers les petites échelles, impliquant le fait que les grandes échelles conservent trop d'énergie, ainsi qu'une trop grande cohérence du signal. Le comportement aéroacoustique des algorithmes de paroi, qui plus est en configuration sous-résolue, est également un point problématique possible.

Une autre remarque est à noter : le niveau acoustique est légèrement plus faible (donc plus proche de l'expérience) dans le cas où un modèle de turbulence de type Smagorinsky est utilisé.

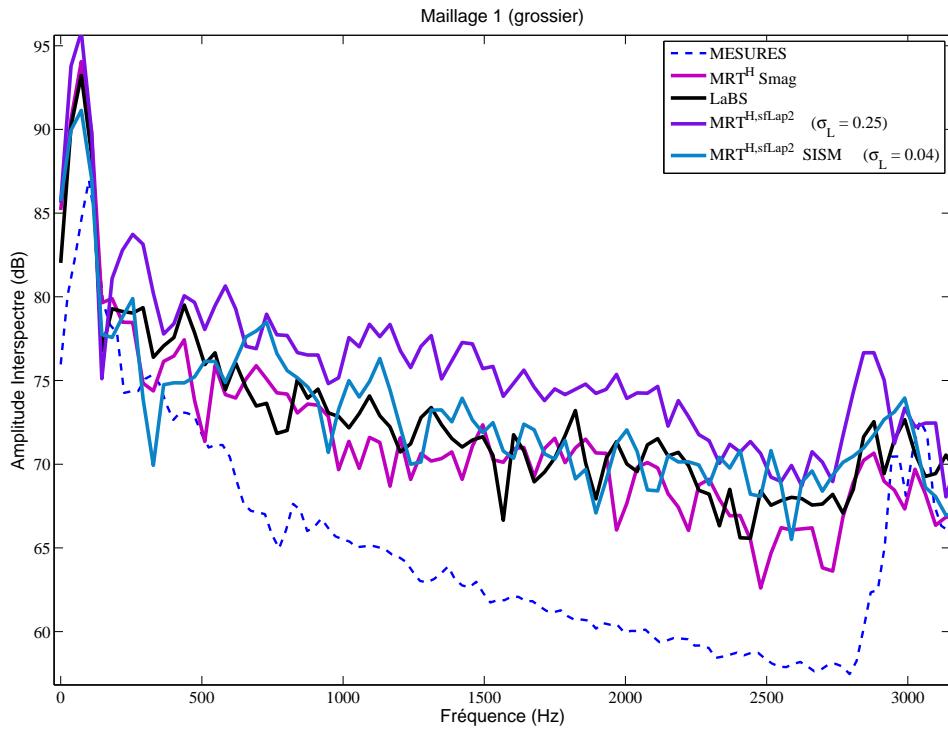
Par ailleurs, on note que les pics en fréquence sont légèrement décalés par rapport à la courbe expérimentale. La raison en est à ce jour inconnue mais pourrait venir soit d'un biais dans la mise en données, soit dans l'expérimentation (corrélations des débits d'entrée, etc...). En effet, des calculs menés avec d'autres logiciels montrent un décalage exactement similaire.

La figure 7.6 (b) montre le comportement très haute fréquence de ce même interspectre. On y voit que l'effet atténuateur du filtrage sélectif fort du modèle MRT^{H,sfLap2} sur l'acoustique n'intervient véritablement qu'au niveau de fréquences proches voire au delà de la limite du spectre audible. L'effet atténuateur devient très important au delà de 25 kHz.

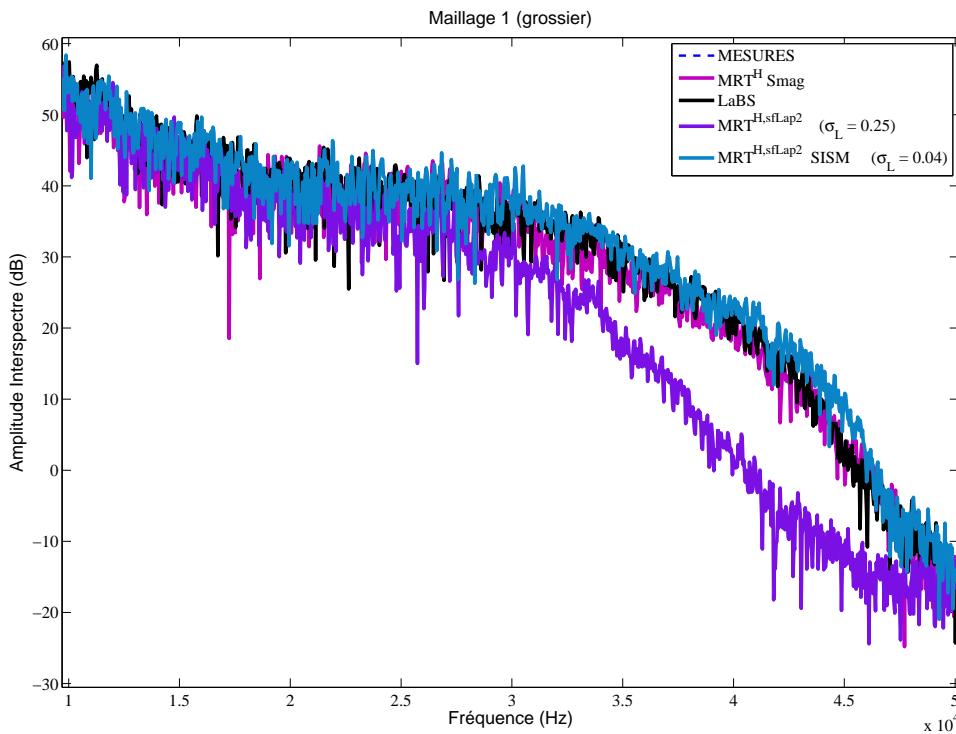
Dans un second temps, nous représentons sur la figure 7.7 l'effet de l'activation de l'algorithme de propagation partielle pour différents couples de modèles. Nous en retiendrons qu'il est malheureusement assez difficile de conclure quant à l'efficacité de ce dispositif sur ce cas test. Seul un effet positif sur les fréquences inférieures à 500 Hz dans le cas du modèle MRT^{H,sfLap2} est à noter, ce qui ne constitue pas une donnée suffisante pour trancher.

Sur la figure 7.8, nous représentons les amplitudes d'interspectre pour le **maillage 2 (fin)**, sur les mêmes intervalles fréquentiels que précédemment. Nous remarquons que l'augmentation de la résolution a un effet spectaculaire pour l'ensemble des modèles considérés. Tous ont à présent un comportement très proche les uns des autres, et également bien plus satisfaisant par rapport à l'expérience. Cela confirme la capacité de tous les modèles à simuler l'aéroacoustique pour un tel cas test.

Nous regardons aussi l'effet de l'algorithme de propagation partielle, cette fois pour le maillage fin, avec la figure 7.9. Il en ressort le même type d'observations que pour le cas du maillage grossier : l'impact de la propagation partielle est extrêmement faible sur le champ aéroacoustique pour ce cas test. Aucune véritable leçon ne peut donc être tirée quant à son efficacité à ce stade.



(a) Comportement jusqu'à 3 kHz



(b) Comportement très haute fréquence

FIGURE 7.6 – Interspectre acoustique proche paroi dans le canal, calculé à partir des deux sondes proche paroi (voir figure 7.1) pour le maillage 1 (grossier).

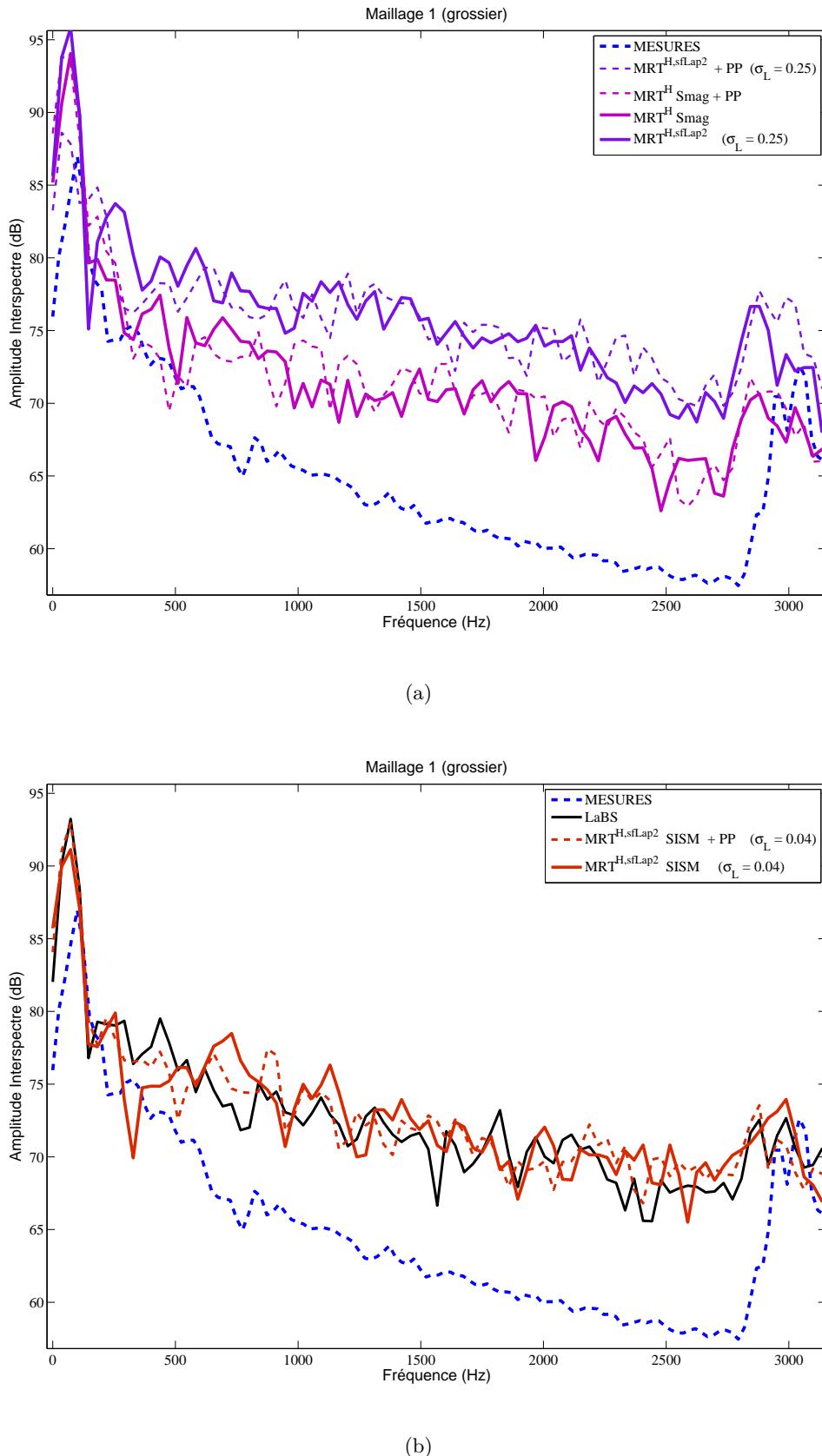
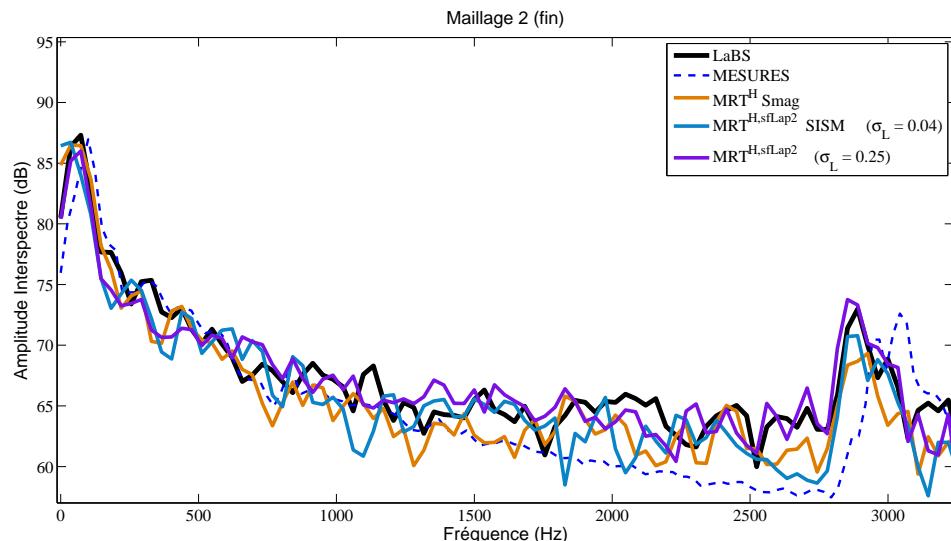
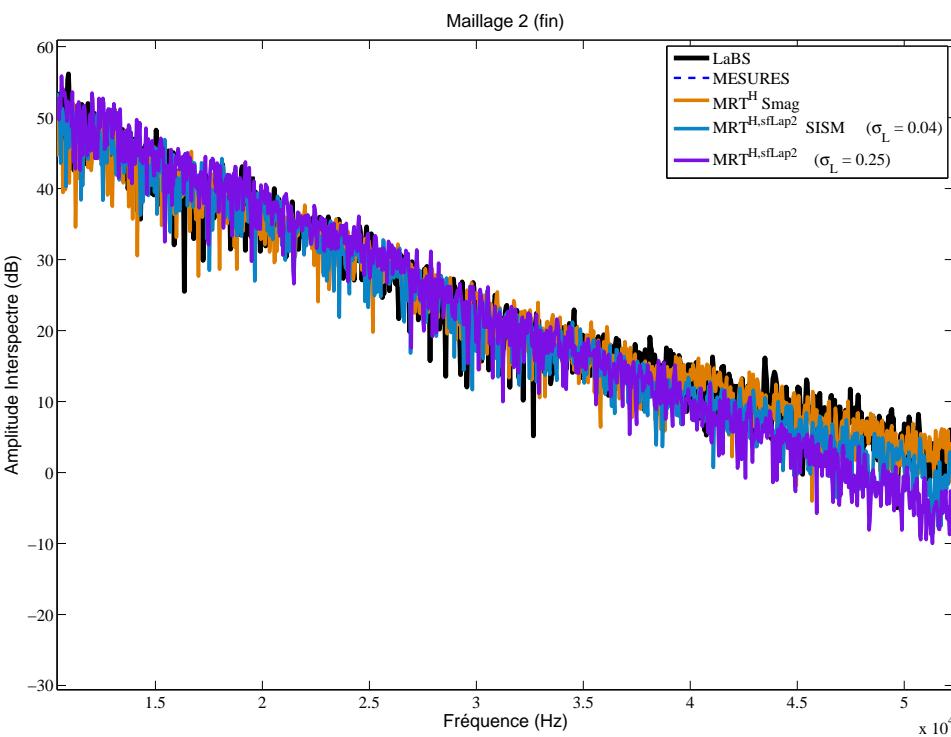


FIGURE 7.7 – Effet de l'algorithme de propagation partielle sur plusieurs couples de modèles, pour le maillage 1 (grossier). En particulier, une comparaison entre la configuration LaBS et son homologue $MRT^{H,sfLap2}$ SISM, avec et sans propagation partielle aux transitions, est effectuée sur la figure (b).



(a) Comportement jusqu'à 3 kHz



(b) Comportement très haute fréquence

FIGURE 7.8 – Interspectre acoustique proche paroi dans le canal, calculé à partir des deux sondes proche paroi (voir figure 7.1) pour le maillage 2 (fin).

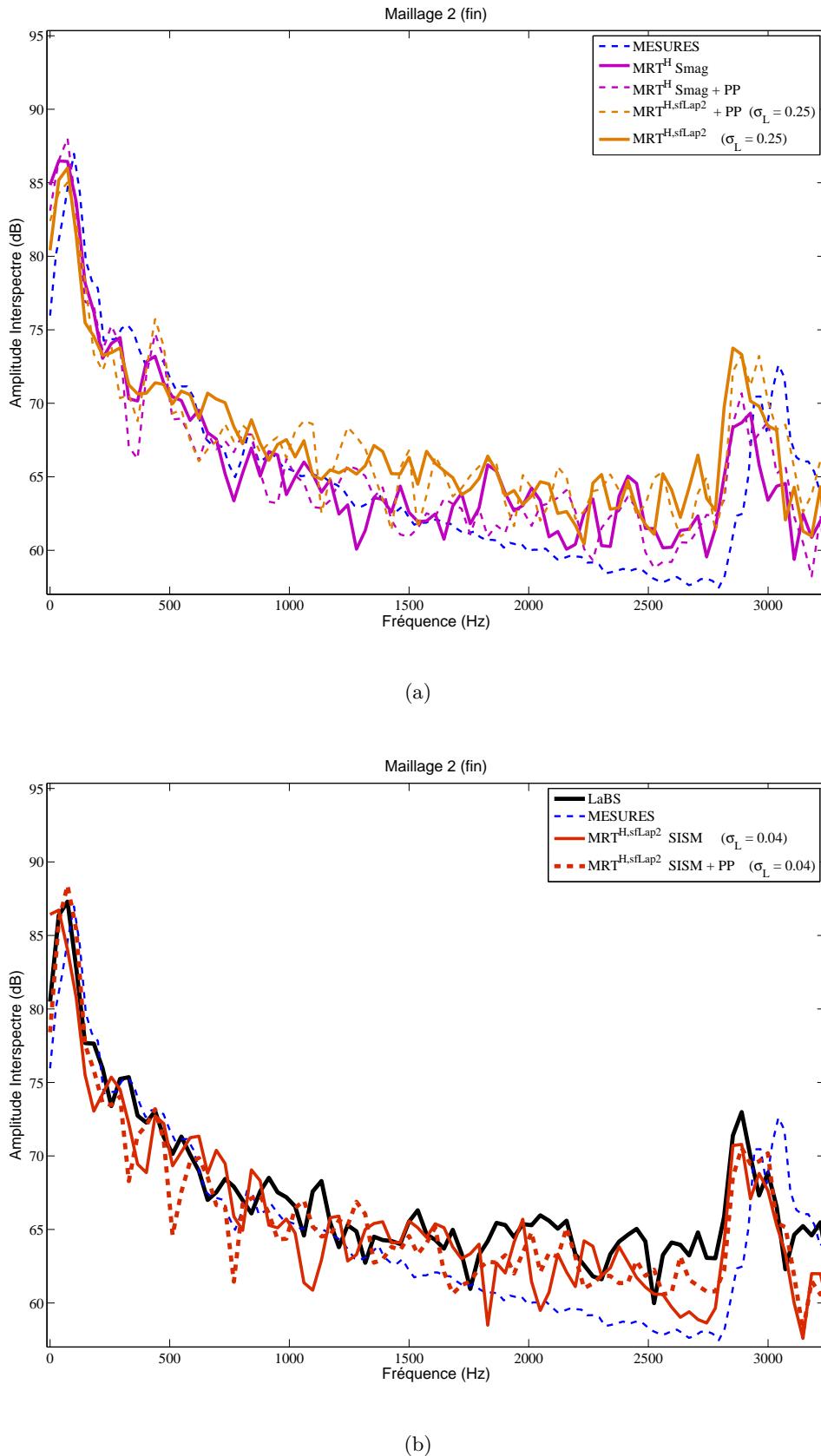


FIGURE 7.9 – Effet de l'algorithme de propagation partielle sur plusieurs couples de modèles, pour le maillage 2 (fin). En particulier, une comparaison entre la configuration LaBS et son homologue MRT^{H,sfLap2} SISM, avec et sans propagation partielle aux transitions, est effectuée sur la figure (b).

Chapitre 8

Écoulement autour d'un véhicule complet (Chapitre confidentiel)

Conclusion

Cette section a donné l'occasion d'appliquer l'ensemble des modèles développés au cours de notre mémoire à deux cas complexes aéroacoustiques de nature industrielle : une plaque perforée au centre d'un conduit et un véhicule réel. Nous avons pu effectuer des comparaisons entre nos modèles, ceux du logiciel industriel LaBS et parfois des mesures expérimentales.

Le constat établi avant le début de notre travail était que logiciel LaBS surestimait le champ aéroacoustique pariétal sur le vitrage conducteur, utilisé dans le calcul du bruit intérieur d'origine aérodynamique. L'une des causes privilégiées de cette surestimation avait été établie comme étant liée au passage d'écoulements très turbulents et sous-résolus à travers les transitions de résolution du maillage. Par conséquent, l'un des objectifs principaux était ici de vérifier dans quelle mesure notre intention d'atténuer les problèmes de repliement spectral aux transitions en décalant la structure spectrale de la dissipation vers les hauts nombres d'onde, le tout en conservant un taux global le plus correct possible, pouvait être pertinente. Cette tentative préliminaire correspond au modèle que nous avons appelé MRT^{H,sfLap2}, avec filtrage sélectif et sans modèle explicite de sous-maille. La robustesse numérique des divers schémas, point capital dans l'industrie, a également pu être testée.

On observe toujours une assez forte surestimation du bruit aéroacoustique dans la configuration la moins résolue de la plaque perforée. Toujours dans cette situation particulière, notre modèle implicite basé sur un fort filtrage sélectif semble trop modifier la structure de l'écoulement et aboutit à une surestimation encore plus élevée du niveau acoustique. Notons toutefois qu'une augmentation de la résolution en maillage fait converger de façon assez satisfaisante tous les modèles vers les valeurs obtenues lors des essais expérimentaux. Le cas du véhicule B91 est gardé confidentiel.

L'effet des algorithmes de paroi sur l'aéroacoustique est également un autre grand sujet, non traité dans ce travail, qui mériterait une attention particulière à l'avenir. Les paramètres de la loi de paroi pilotant les décollements de couche limite, en particulier les termes correctif pour la courbure pariétale, avaient fait l'objet d'un calage industriel précis dans le cas du modèle LaBS, travail qui n'a pas été entrepris à ce stade pour le modèle MRT^{H,sfLap2}. Ceci peut également expliquer une part des disparités observées entre celui-ci et le modèle LaBS.

Concernant l'effet en situation réelle de **l'algorithme de propagation partielle, le constat est assez mitigé**. Tandis que son apport était impressionnant sur le cas de la convection du tourbillon (partie III), il est assez incertain sur le cas de la plaque perforée. Des constatations à ce point contrastées selon les cas montrent qu'un phénomène complexe est à l'œuvre et que de plus amples investigations doivent être menées. En particulier, le cas du tourbillon convecté de la partie III est probablement à utiliser avec précaution lorsque la viscosité est très faible.

Nous retiendrons donc que les modèles développés dans ce mémoire sont bien en capacité de simuler de façon robuste l'aéroacoustique pour des écoulements turbulents complexes sur le plan numérique. On rappellera par exemple que le nombre de Mach maximal dans le sillage de la plaque perforée dépasse $Ma = 0.3$, et que le cas du véhicule B91 à $Ma = 0.13$ est particulièrement sous résolu par endroits. Des analyses complémentaires sont à mener, à la fois pour mieux maîtriser l'hyperviscosité introduite par le filtrage sélectif et pour s'assurer que la moindre surestimation acoustique observée correspond bien à l'atténuation d'artefacts acoustiques aux transitions, et non à une modification des sources acoustiques physiques. Toutefois, les comparaisons des spectres acoustiques et turbulents pour les différents modèles permettent d'être relativement optimistes. Elles tendent à confirmer la possibilité de minimiser le repliement spectral aux transitions, via la gestion de la turbulence par l'introduction d'hyperviscosité avec un filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau.

Conclusion générale

L'objectif général de ce mémoire est l'étude et le développement de méthodes de Boltzmann sur réseau (LBM) pour l'aéroacoustique, en vue d'applications automobiles chez Renault. La totalité de ce travail a été réalisée en collaboration avec le laboratoire M2P2 de l'Université d'Aix-Marseille. Tous les développements numériques effectués dans ce mémoire ont été codés dans la structure du logiciel industriel LaBS. Ce logiciel LBM est utilisé au quotidien dans les projets véhicules, pour effectuer des calculs aussi bien aéroacoustiques qu'aérodynamiques et thermiques. En aéroacoustique, il constitue le premier maillon de la chaîne de simulations numériques menant au calcul du **bruit intérieur d'origine aérodynamique**, source de bruit dominante à haute vitesse du point de vue d'un passager du véhicule.

L'une des problématiques principales pour Renault réside dans le constat suivant : il a été montré qu'un manque de précision dans la simulation de l'écoulement externe était la cause d'une **surestimation du bruit intérieur**. Celui-ci est calculé à partir du champ de pression instationnaire sur le vitrage conducteur, et est tout particulièrement sensible aux fluctuations de pression acoustiques, d'amplitude pourtant quasi-négligeable par rapport aux fluctuations de pression totale. Or, en maillage non-uniforme, le passage d'un écoulement turbulent et sous-résolu au travers de transitions de résolution fait apparaître dans ces zones des sources acoustiques non-physiques : ceci a été identifié comme la cause la plus probable de la surestimation du niveau acoustique. Il n'existe toutefois aucun article de recherche traitant du comportement aéroacoustique de la LBM en maillage non uniforme pour des écoulements tourbillonnaires ou turbulents.

Afin d'aborder au mieux cette problématique complexe, notre étude s'est divisée en plusieurs points. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à présenter une **construction mathématique cohérente et unifiée de la méthode de Boltzmann sur réseau** à partir de l'équation de Boltzmann, dans un cadre athermal faiblement compressible. Nous avons particulièrement insisté sur la cohérence des adimensionnements entre toutes les étapes du raisonnement, point très important sur le plan pratique et pour la compréhension fine des modèles. Cette étude nous a également permis d'approfondir, sur les plans théoriques et pratiques, le problème de la **limite hydrodynamique** de l'équation de Boltzmann sur réseau.

Dans un second temps, nous avons étudié les capacités aéroacoustiques de la LBM. Nous avons montré en quoi cette méthode, malgré de nombreuses qualités, souffre d'instabilités numériques pour des nombres de Reynolds élevés et des nombres de Mach non négligeables. La difficulté principale est que les techniques les plus efficaces et répandues pour les traiter rendent impossible une étude acoustique correcte. Nous avons cherché à établir quels critères permettaient de qualifier les modèles LBM utilisables en aéroacoustique, le tout en balayant toutes les grandes familles d'opérateurs existant dans la littérature. Ceci nous a amené à proposer une **variante particulière d'opérateur** à

temps de relaxation multiples, dont nous avons testé les propriétés acoustiques et de stabilité. Nous avons également étudié les techniques de filtrage sélectif de l'équation de Boltzmann sur réseau, applicables à l'aéroacoustique. Ceci nous a permis de développer un **filtrage sélectif alternatif**, compact et rapide, propriétés essentielles pour des applications industrielles massivement parallèles. Nous avons ensuite utilisé l'hyperviscosité introduite par ce filtrage pour simuler des écoulements turbulents, en l'occurrence le développement temporel d'une couche de mélange à très haut nombre de Reynolds et à un nombre de Mach $Ma = 0.2$, tout en effectuant des comparaisons avec des modèles bien établis. Les résultats ont été jugés très satisfaisants. L'objectif indirect de l'utilisation du filtrage pour les calculs LES (Large Eddy Simulation) en LBM était de déplacer la structure spectrale de la dissipation vers les hauts nombres d'onde, tout en conservant un taux global correct, afin d'atténuer les problèmes de repliement spectral aux transitions de résolution en maillage non-uniforme.

Cette question des maillages non-uniformes a fait l'objet de la troisième partie. Nous avons rédigé un article contenant un recensement exhaustif des études LBM menées dans ce cadre, montrant qu'aucune d'entre elles ne s'était attardée en détail sur le cas de l'aéroacoustique des écoulements tourbillonnaires ou turbulents en maillage non-uniforme et à un nombre de Mach non négligeable. Nous y avons mis en évidence que dans cette situation, des artefacts numériques pouvaient émerger des zones de transition de résolution lorsque celles-ci sont traversées par des sources de vorticité, du moins pour des maillages de type cell-vertex. Nous avons proposé un **algorithme alternatif aux transitions de résolution**, réduisant nettement les problèmes observés. Cet algorithme n'étant pas utilisable aisément à court terme dans un contexte industriel et dans la structure actuelle de LaBS, nous avons cherché ensuite à étudier et améliorer un algorithme classique. Nous avons proposé une méthode de **propagation partielle**, testée avec succès sur le cas académique aéroacoustique développé pour notre article : la convection d'un tourbillon à travers une transition de résolution.

Enfin, nous avons appliqué ces modèles à deux simulations aéroacoustiques industrielles : l'écoulement en aval d'une plaque perforée dans un conduit, puis un véhicule réel. Concernant la méthode de propagation partielle, son impact est incertain dans le cas de la plaque perforée. Des conclusions aussi contrastées selon les cas montrent qu'un phénomène plus complexe est à l'œuvre (certaines pistes de réflexion sont évoquées dans la troisième partie). Une surestimation du niveau acoustique est toujours observée dans les cas les moins bien résolus pour la plaque perforée, mais l'augmentation de la résolution permet une bonne corrélation avec la mesure. Le cas du véhicule complet est gardé confidentiel.

Quoiqu'il arrive, le phénomène de repliement spectral aux transitions de résolution étant en pratique inévitable, il y aura toujours un compromis à trouver entre le taux de dissipation des petites structures turbulentes et l'émergence de sources acoustiques parasites aux transitions de résolution.

Perspectives

De nombreuses perspectives émergent de ce travail. Tout d'abord, concernant la méthode de filtrage sélectif des moments hors équilibre d'ordre 2 introduite dans la deuxième partie, elle n'est présentée ici que dans un stade relativement préliminaire sur le plan de la gestion de la turbulence en LES. Des modifications restent à effectuer pour établir plus rigoureusement le paramétrage de l'hyperviscosité introduite par le filtrage sélectif, en particulier en étudiant sur le plan théorique la dissipation introduite par le filtrage dans l'équation hydrodynamique à l'ordre dominant. D'un point de vue purement LBM,

il pourra également être intéressant d'utiliser ces moments d'ordre 2 filtrés en conjonction avec les méthodes dites de "reconstruction récursive" par les propriétés des polynômes de Hermite, afin d'obtenir une version indirectement filtrée des moments d'ordre supérieur ou égal à 3 de la fonction de distribution. Ce développement mènerait à un nouveau type d'opérateur de collision avec filtrage sélectif. Rappelons que théoriquement, la reconstruction récursive en trois dimensions n'est pleinement utilisable qu'à partir du D3Q27, les réseaux D3Q15 et D3Q19 ne possédant pas de base vectorielle entièrement exprimable sous la forme de polynômes de Hermite.

Il va également de soi que l'étude dans un cadre aéroacoustique d'autres opérateurs de collision aurait un grand intérêt, comme les méthodes Cascaded Lattice Boltzmann, Cumulant Lattice Boltzmann, Entropic Lattice Boltzmann ou encore avec les modèles dits "régularisés", pourvu que leurs paramètres de relaxation permettent l'étude aéroacoustique.

Concernant les maillages non-uniformes, le chantier est encore très vaste. La validation éventuelle, à l'avenir, de l'impact positif de notre stratégie basée sur l'hyperviscosité pour atténuer les problèmes acoustiques aux transitions de résolution ne traite qu'une partie du problème. La question du rescaling des erreurs de troncature de part et d'autre de la transition, évoquée dans la troisième partie, devra faire l'objet d'une attention particulière. Il sera nécessaire de mieux comprendre l'impact de notre algorithme de propagation partielle et d'en proposer une version aux résultats moins variables. Par ailleurs, une étude détaillée de l'effet des algorithmes basés sur une structure de type cell-centered devra être effectuée, dans un cadre aéroacoustique du même type que celui de ce mémoire. Ces derniers permettent de tenir compte de façon bien plus naturelle de contraintes intéressantes, comme la conservation de la masse ou de la quantité de mouvement à l'interface. Cependant, une étude préliminaire menée en interne nous a montré que le simple fait d'utiliser une structure et un algorithme cell-centered ne garantit pas l'obtention de résultats satisfaisants.

L'impact du réseau de vitesses discrètes sur les erreurs aux raffinements de maillage mériterait aussi d'être étudié.

Enfin, sur un plan davantage lié à la théorie cinétique, il serait intéressant d'approfondir les liens évoqués dans la première partie entre le critère de type Chapman-Enskog utilisé par Shan *et al.* [[SYC06](#)] dans leur approche à vitesses discrètes et ceux liés à la définition d'un "ordre de grandeur" pour les moments, que l'on peut trouver en théorie cinétique continue chez Müller *et al.* [[MRW03](#) ; [MR05](#)].

Annexes

Annexe A

Le développement de Hilbert

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \quad (\text{A.1})$$

où ϵ serait un "petit" paramètre, identifiable au nombre de Knudsen.

Nous choisissons volontairement dans cette partie de détailler cette méthode avant celle de Chapman et Enskog. Pourtant, cette dernière fournit un résultat plus clair, meilleur et de façon plus systématique mais est régulièrement confondue à tort avec son homologue de Hilbert dans la littérature. Il est régulier de voir des auteurs introduire un développement qu'ils nomment *de Chapman-Enskog* alors qu'ils réalisent en fait un développement de Hilbert. Or il est important de saisir la différence entre les deux approches car elles fournissent des résultats assez différents si elles sont menées de manière rigoureuse.

Un point important est que la fonction d'équilibre local f^{eq} dépend des variables macroscopiques. Or on peut écrire, par exemple pour la masse volumique

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)} \, d\mathbf{c} \quad (\text{A.2})$$

La méthode de Hilbert introduit donc un développement des quantités macroscopiques de la manière suivante :

$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \rho^{(k)}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \mathbf{u}^{(k)}, \quad (\text{A.4})$$

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k T^{(k)}, \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\rho^{(k)} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{(k)} \, d\mathbf{c}, \quad (\text{A.6})$$

$$\rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{(k)} \mathbf{c} \, d\mathbf{c}, \quad (\text{A.7})$$

$$\rho^{(k)} e^{(k)} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} f^{(k)} |\mathbf{c}|^2 \, d\mathbf{c}. \quad (\text{A.8})$$

D'après le principe de conservation de la masse par l'opérateur BGK, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)} \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq} \, d\mathbf{c}. \quad (\text{A.9})$$

Il est alors nécessaire d'effectuer également un développement de la fonction d'équilibre de la même manière :

$$f^{eq} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{eq,(k)}. \quad (\text{A.10})$$

En introduisant cette expression dans (A.9), on identifie les moments de ce nouveau développement par ordre de puissance de ϵ . On obtient par conséquent pour la masse volumique

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{(k)} \, d\mathbf{c} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{eq,(k)} \, d\mathbf{c} = \rho^{(k)}, \quad (\text{A.11})$$

et de même pour la vitesse et la température. En particulier on peut noter que pour pour $k \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{-1}{\tau} (f^{(k)} - f^{eq,(k)}) \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.12})$$

avec $\boldsymbol{\psi} = (1, \mathbf{c}, \frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2)$ le vecteur des invariants de collision.

Ceci détermine entièrement le développement de la distribution d'équilibre en fonction des différentes contributions d'ordre k de chaque moment conservé pour tout k entier positif ou nul :

$$f^{eq,(k)} = \frac{\rho^{(k)}}{(2\pi r T^{(k)})^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{c} - \mathbf{u}^{(k)}|^2}{2rT^{(k)}}\right). \quad (\text{A.13})$$

Si on introduit le développement de Hilbert dans l'équation (1.57), on obtient en identifiant les termes en fonction de leur ordre en puissance de ϵ :

$$0 = \frac{-1}{\tau} (f^{(0)} - f^{eq,(0)}) \quad (n = 0), \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f^{(n-1)} = \frac{-1}{\tau} (f^{(n)} - f^{eq,(n)}) \quad (n \geq 1). \quad (\text{A.15})$$

L'équation (A.14) nous montre que $f^{(0)}$ est une Maxwellienne. Plus précisément, il s'agit l'approximation d'ordre 0 $f^{eq,(0)}$ de la distribution d'équilibre local f^{eq} :

$$f^{eq,(0)} = \frac{\rho^{(0)}}{(2\pi r T^{(0)})^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{c} - \mathbf{u}^{(0)}|^2}{2rT^{(0)}}\right) \quad (\text{A.16})$$

En tronquant le développement de Hilbert à l'ordre 0, $f = f^{(0)} = f^{eq,(0)}$, l'étude des moments de l'équation (A.15) pour $n=1$ on montre que $\rho^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ et $T^{(0)}$ vérifient les **équations d'Euler**

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)}) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial(\rho^{(0)} e^{(0)} + \frac{1}{2} \rho^{(0)} |\mathbf{u}^{(0)}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho^{(0)} e^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} + \frac{1}{2} \rho^{(0)} |\mathbf{u}^{(0)}|^2 \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{q}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \right) = 0, \quad (\text{A.19})$$

avec, en reprenant les notations de notre étude

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \rho^{(0)} r T^{(0)} \mathbf{I} = p^{(0)} \mathbf{I}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{q}^{(0)} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Il est possible de pousser le développement de Hilbert jusqu'à l'ordre 1 (voir [GD87] pour l'opérateur BGK). A partir des résultats obtenus à l'ordre 0, on peut calculer les moments de la fonction $f^{(1)}$ pour calculer les expressions du tenseur des contraintes et du flux de chaleur à l'ordre 1 en ϵ , et ainsi en déduire des équations d'évolution macroscopiques. Pour cela, on dérive la Maxwellienne $f^{(0)}$ dans le membre de gauche de (A.15) (avec $n = 1$) en on y remplace toutes les dérivées temporelles de $\rho^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ et $T^{(0)}$ qui apparaissent par des dérivées spatiales, en utilisant le fait que les approximations d'ordre 0 des variables macroscopiques vérifient les équations d'Euler. En effet, l'objectif est d'obtenir des expressions du tenseur des contraintes et du flux de chaleur qui ne contiennent plus de dérivées temporelles, puisqu'elles n'en contiennent pas dans l'équation de Navier-Stokes. On obtient finalement

$$f^{(1)} = f^{eq,(1)} - \tau f^{eq,(0)} \left(\nabla T^{(0)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} \left(\frac{|\mathbf{v}^{(0)}|^2}{2rT^{(0)2}} - \frac{5}{2T^{(0)}} \right) - \frac{1}{rT^{(0)}} [\mathbf{v}^{(0)} \otimes \mathbf{v}^{(0)} - \frac{1}{3} |\mathbf{v}^{(0)}|^2 \mathbf{I}] : \nabla \mathbf{u}^{(0)} \right), \quad (\text{A.22})$$

où l'on a noté $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{c} - \mathbf{u}^{(k)}$. Les divers moments de cette fonction $f^{(1)}$ permettront de calculer $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ et $\mathbf{q}^{(1)}$. En notant avec des tildes les développements tronqués à l'ordre 1, on a en effet

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \epsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \quad (\text{A.23})$$

$$= p^{(0)} \mathbf{I} + \epsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)}. \quad (\text{A.24})$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{(0)} + \epsilon \mathbf{q}^{(1)} \quad (\text{A.25})$$

$$= \epsilon \mathbf{q}^{(1)}. \quad (\text{A.26})$$

Par identification des termes d'ordre ϵ dans le calcul du tenseur des contraintes et du flux de chaleur, on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{(1)} \mathbf{v}^{(0)} \otimes \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{c}, \mathbf{q}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f^{(1)} |\mathbf{v}^{(0)}|^2 \mathbf{v}^{(0)} d\mathbf{c}. \quad (\text{A.27})$$

Si on définit \tilde{p} de la façon suivante

$$\tilde{p} r \tilde{T} \mathbf{I} = \rho^{(0)} r T^{(0)} \mathbf{I} + \epsilon (\rho^{(0)} r T^{(1)} \mathbf{I} + \rho^{(1)} r T^{(0)} \mathbf{I}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.28})$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \epsilon (\rho^{(0)} r T^{(1)} + \rho^{(1)} r T^{(0)}) \mathbf{I} \quad (\text{A.29})$$

$$= p^{(0)} \mathbf{I} + \epsilon p^{(1)} \mathbf{I} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.30})$$

$$= \tilde{p} \mathbf{I} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{A.31})$$

on trouve, en passant sous silence les longs calculs intermédiaires de moments d'ordre élevé

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = p^{(1)} \mathbf{I} - \tau \rho^{(0)} r T^{(0)} \left(\nabla \mathbf{u}^{(0)} + {}^T \nabla \mathbf{u}^{(0)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$= p^{(1)} \mathbf{I} - \mu^{(0)} \left(\nabla \mathbf{u}^{(0)} + {}^T \nabla \mathbf{u}^{(0)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{I} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = -\frac{5}{2} \tau R^2 T^{(0)} \nabla T^{(0)} \quad (\text{A.34})$$

$$= -\kappa^{(0)} \nabla T^{(0)}, \quad (\text{A.35})$$

avec les coefficients de viscosité μ et de conductivité thermique κ donnés par

$$\mu^{(0)} = \tau \rho^{(0)} r T^{(0)} = \tau p^{(0)}, \quad (\text{A.36})$$

$$\kappa^{(0)} = \frac{5}{2} \tau R^2 T^{(0)} = \frac{5}{2} \tau R p^{(0)}. \quad (\text{A.37})$$

Afin de mettre en évidence les problèmes qui vont se poser, il serait nécessaire d'écrire la lourde équation à laquelle obéissent les termes macroscopiques d'ordre 1. Nous pouvons toutefois la réécrire de manière très concise : si on note \mathcal{E}^l_1 l'opérateur d'Euler linéarisé qui agit sur les termes d'ordre 1 et \mathcal{S}_1 un terme contenant uniquement des contributions d'ordre 0 (que nous pouvons donc considérer comme un terme source de l'équation de l'ordre 1, puisque les termes d'ordre 0 sont considérés connus) [Cer88], on obtient

$$\mathcal{E}^l_1(\rho^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, e^{(1)}) = \mathcal{S}_1(\rho^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, e^{(0)}). \quad (\text{A.38})$$

Pour obtenir l'évolution des quantités d'ordre 1, il faut donc résoudre des équations d'Euler inhomogènes (il en sera de même pour les ordres suivants, avec des termes source différents) ce qui mène à bon nombre de difficultés mathématiques.

Finalement, on montre que si on considère le développement de Hilbert à l'ordre 1 (c'est-à-dire (A.18) + ϵ (A.38) + $\mathcal{O}(\epsilon^2)$), les développements des quantités tronquées à l'ordre 1 vérifient les équations suivantes

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{u}}|^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\tilde{\rho} \tilde{e} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \quad (\text{A.41})$$

avec le tenseur des contraintes et le flux de chaleur définis respectivement par

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \epsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.42})$$

$$= \tilde{p} \mathbf{I} - \epsilon \mu^{(0)} \left(\nabla \mathbf{u}^{(0)} + {}^T \nabla \mathbf{u}^{(0)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{I} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{A.43})$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\epsilon \kappa^{(0)} \nabla T^{(0)}. \quad (\text{A.44})$$

Ces équations sont assez proches de celles de **Navier-Stokes**. Toutefois, on remarque dans un premier temps que ce ne sont pas les quantités macroscopiques complètes qui y figurent, mais seulement un développement tronqué. Pire, les coefficients de transport du modèle sont exprimés en fonction de l'approximation d'ordre 0 de la pression : or cette quantité ne vérifie pas les équations de Navier-Stokes, mais seulement les équations d'Euler, et il en va de même pour toutes les variables présentes dans le tenseur des contraintes et dans le flux de chaleur. Il est donc clair qu'une partie des phénomènes physiques de l'équation de Navier-Stokes ne seront pas représentés par ce type de développement tronqué.

Au delà de ces premières observations, on peut voir que ce type de développement ne mène pas de manière très naturelle et simple aux équations de conservations : toutes les variables macroscopiques disposant de leur propre contribution à l'équation finale à chaque ordre en puissance de ϵ , les expressions deviennent rapidement assez volumineuses

et perdent en clarté. Ce n'est qu'une fois la somme de l'ordre 0 et de l'ordre 1 (dont l'équation complète n'est pas présentée ici) effectuée que l'on peut voir se dessiner une équation de conservation de forme classique.

On pourrait alors poser la question suivante : pourquoi certains auteurs de la communauté LBM aboutissent-ils tout de même aux équations de Navier-Stokes sur les quantités macroscopiques complètes en développant seulement f , et sans développer l'opérateur de dérivée temporelle (c'est à dire en pratiquant une sorte d'hybridation de Hilbert/Chapman-Enskog) ? Procéder ainsi mène à établir l'équation d'Euler à l'ordre 0 ($f = f^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon)$) pour ρ , $\rho\mathbf{u}$ et ρe (non tronquées !), puis à utiliser cette même équation pour remplacer dérivées spatiales et temporelles qui apparaissent après différenciation de la Maxwellienne (équation (A.15) pour $n = 1$). Tout cela conduit à obtenir l'équation de Navier-Stokes pour des variables macroscopiques qui vérifieraient déjà ... les équations d'Euler ! Une telle démarche mène ainsi à une contradiction importante.

En conclusion, nous avons vu que la méthode de Hilbert n'est pas satisfaisante pour retrouver les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann. Si de plus on considère cette méthode comme un outil pour trouver des solutions de l'équation de Boltzmann et non pas simplement pour déduire un modèle macroscopique, de nombreuses critiques peuvent être formulées à son encontre (dont bon nombre d'entre elles resteront aussi valables pour celle de Chapman et Enskog, car communes aux méthodes de recherche de solutions dites *normales* de l'équation de Boltzmann) : on pourra se référer à [Cer88] pour plus de détails.

Annexe B

Éléments de traitement du signal pour l'aéroacoustique

B.1 Calcul de densités spectrales de puissance

B.1.1 Transformées de Fourier

Nous définissons la transformée de Fourier en fréquence $U(f)$ d'une fonction du temps $u(t)$ définie sur \mathbb{R} de la façon suivante :

$$U(f) = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{B.1})$$

Pour exprimer cette **même** définition de la transformée (c'est à dire avec le facteur 2π dans l'exponentielle) en fonction d'une pulsation *omega*, il s'agit de remplacer littéralement f par $2\pi f$. On obtient ainsi

$$U(2\pi f) = U(\omega) = \frac{1}{2\pi} U(f)$$

Il est en effet très important d'exprimer la transformée de Fourier en pulsation à partir de la même définition que la transformée en fréquence. En effet, dans Python, c'est une définition similaire à B.1 qui est codée nativement dans l'algorithme de transformée rapide *fft* : elle ne pourra donc pas être modifiée et f devra être considérée comme une variable purement muette.

De la même façon, nous aurons besoin de la transformée de Fourier $U(\vec{k})$ d'une fonction de l'espace $u(\vec{x})$.

$$U(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

Le facteur $1/2\pi$ provient du fait que les nombres d'onde sont des pulsations spatiales (et non des fréquences spatiales). Ainsi, de la même façon que pour le domaine temporel, un tel facteur apparaît si l'on prend B.1 pour définition de base. On notera l'absence du signe "-" dans l'exponentielle. Il s'agit en effet respecter les règles de signe pour les onde progressives, pour lesquelles les fréquences spatiales et temporelles ont toujours un signe opposé dans l'exponentielle complexe décrivant l'onde.

La transformée de Fourier rapide *FFT*(T) d'un tableau de nombre T de taille N utilise comme définition la transformée de Fourier discrète qui suit :

$$\text{FFT}(T)[m] = \sum_{n=1}^N T(n) e^{\frac{-i2\pi nm}{N}} \quad (\text{B.2})$$

La fonction native *fft* de Python n'étant pas modifiable par l'utilisateur, il s'agit de repérer les différences qui peuvent exister entre les définitions mathématiques des transformées et la définition B.2, afin de les prendre en compte dans notre macro fonction de transformée de Fourier (voir plus loin). On peut déjà remarquer que pour une fonction *u* donnée, les définition B.1 et B.2 renvoient des résultats avec une unité différente (il n'y a pas le *dt* ou le *dx* dans la transformée discrète). Afin de faciliter le codage, nous avons donc utilisé les "équivalences" suivantes pour écrire notre macro fonction de transformée de Fourier. En notant *TF* la définition B.1 et *FFT* la définition B.2, on a :

$$TF(u)(f) \iff FFT(u)\Delta t \text{ pour une transformée en fréquence}$$

$$TF(u)(k) \iff \frac{1}{2\pi}FFT(u)\Delta x \text{ pour une transformée en nombres d'onde}$$

De plus, pour les transformées spatiales, une opération de renversement sera effectuée sur le tableau de nombre résultant pour prendre en compte la convention de signe des ondes progressives.

À partir de maintenant, nous noterons simplement *U* la transformée de Fourier d'une fonction *u*.

B.1.2 Densités spectrales de puissance

L'objectif est d'estimer à partir d'une série temporelle de valeurs de pression la densité spectrale de puissance de ce signal. De manière rigoureuse, un signal temporel de pression turbulente peut être considéré comme un processus stochastique (ou fonction aléatoire) à temps discret $\{X_n\}$, dont une observation au cours du temps, représenté par l'indice *n*, est appelée "trajectoire" du processus. Nous ferons plusieurs hypothèses sur la nature de ce processus. Il sera considéré stationnaire (aux propriétés statistiques invariantes par translation temporelle) et ergodique (la moyenne temporelle converge presque sûrement vers l'espérance statistique). Il est ainsi possible de considérer une observation du signal sur une fenêtre temporelle donnée comme une réalisation indépendante du processus stochastique.

Un estimateur de la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal *u(t)* observé sur une durée *T* est obtenu par la formule suivante :

$$S(f) = \frac{1}{T}E[|U(f)|^2]$$

Celle-ci est obtenue grâce à la relation de Wiener-Khintchine, qui stipule que la densité spectrale de puissance d'un processus stochastique stationnaire au sens large est analogue à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation correspondante. Pour une densité spectrale de puissance en nombres d'onde à une dimension et sur un domaine d'étendue *L*, on a donc

$$S(k) = \frac{2\pi}{L}E[|U(k)|^2]$$

Durant ce stage, cette espérance a été calculée en appliquant la méthode dite de "Welch" pour les signaux temporels. Elle consiste à effectuer des moyennes de spectres sur un nombre *N_{win}* de segments de durée *T_{win}*, en pondérant chaque série temporelle par une fonction *w* (appelée également fenêtre). La méthode de Welch permet également à ces blocs temporels de se chevaucher les uns les autres (c'est le "recouvrement"). Durant ce stage, nous avons utilisé la fenêtre dite de Hanning. On obtient

$$S(f) = \frac{1}{B} \frac{1}{N_{win}T_{win}} \sum_{j=1}^{N_{win}} |TF(uw)^{(j)}(f, T_{win})|^2 \quad (\text{B.3})$$

avec $B = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w(n)^2$ un facteur correctif. Si u est un signal de pression en Pascal, on obtient du Pa²/Hz comme unité pour $S(f)$.

Pour obtenir les versions discrétisées de ces formules et les coder dans Python, il suffit tout simplement d'utiliser les équivalences définies dans la partie précédente.

Pour une transformée en nombre d'onde (sans fenêtrage spatial),

$$S(k) = \frac{2\pi}{N_{win}D} \sum_{j=1}^{N_{win}} |U^{(j)}(k)|^2 \quad (\text{B.4})$$

Notre signal dépend à la fois des deux dimensions de l'espace et du temps. La densité spectrale de puissance en fréquence et nombre d'onde du signal de pression $u(\vec{x}, t)$ est finalement calculée par la formule suivante, avec w la fenêtre de Hanning :

$$\Phi(\vec{k}, f) = \frac{1}{T_{win}B} \frac{(2\pi)^2}{N_{win}D} \sum_{j=1}^{N_{win}} |TF(uw)^{(j)}(\vec{k}, f, T_{win})|^2 \quad (\text{B.5})$$

D est la taille du domaine spatial en m². Si u est un signal de pression en Pascal, on obtient du Pa²m²/Hz comme unité pour $\Phi(\vec{k}, f)$.

B.2 Quelques spectres théoriques utiles en aéroacoustique

Nous allons ici présenter l'allure de trois spectres théoriques concernant les ondes acoustiques et les fluctuations de pression aérodynamiques : l'onde plane rasante, le champ diffus, et le spectre de Corcos. Les résultats de cette partie sont tirés de [Arg06].

B.2.1 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'une onde plane

Une onde plane d'amplitude A (en Pa), de fréquence f_0 et se propageant avec un angle α par rapport s'écrit

$$p(\vec{x}, t) = A \cos(\omega_0 t - k_0(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)))$$

avec $k_0 = 2\pi f_0/c_0$ le nombre d'onde acoustique et c_0 la célérité des ondes sonores. On obtient analytiquement la densité spectrale de puissance en fréquence nombre d'onde :

$$\Phi(k_x, k_y, \omega) = \frac{A^2}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \omega_0) \delta(k_x - k_0 \cos(\alpha)) \delta(k_y - k_0 \sin(\alpha))$$

Ce spectre est représenté sur la figure B.1, avec l'effet d'un fenêtrage rectangulaire (créant des lobes secondaires)

À partir de la position du Dirac dans le plan (k_x, k_y) , on peut savoir dans quelle direction et quel sens se propage l'onde (ici vers les x croissants et avec un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'axe \vec{x}).

B.2.2 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'un champ acoustique diffus

L'expression théorique du spectre d'un champ diffus est

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}, \omega) &= \frac{A(\omega)}{2\pi k_0^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{|\vec{k}|^2}{k_0^2})}} \text{ si } |\vec{k}| < k_0 \\ &= 0 \text{ si } |\vec{k}| > k_0 \end{aligned}$$

**ANNEXE B. ÉLÉMENS DE TRAITEMENT DU SIGNAL POUR
L'AÉROACOUSTIQUE**

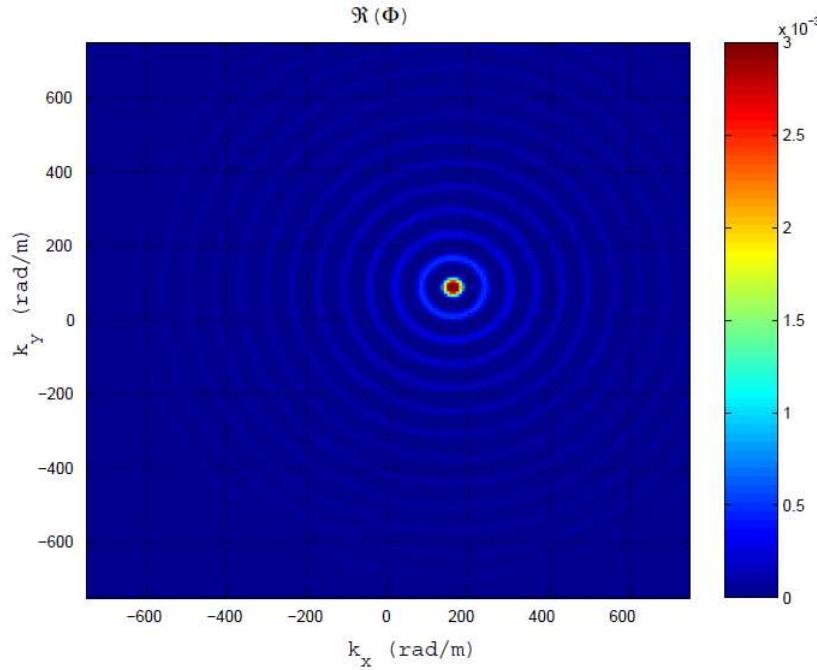


FIGURE B.1 – Spectre en nombre d'onde d'une onde plane d'amplitude $A = 1 \text{ Pa}$, de direction $\alpha = 29^\circ$ et de fréquence 10 kHz avec fenêtrage rectangulaire

Ce spectre est représenté sur la figure B.2.

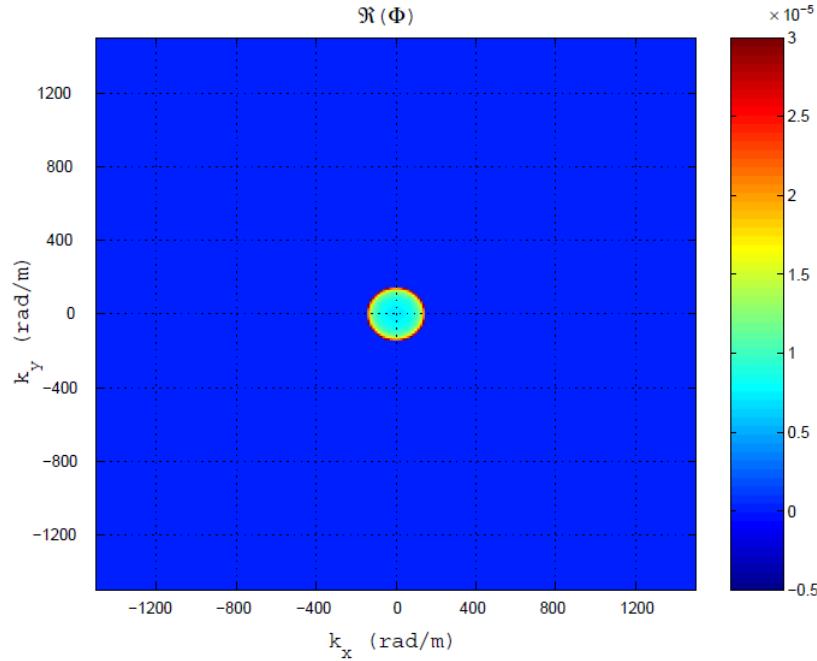


FIGURE B.2 – Spectre en nombre d'onde d'un champ diffus d'amplitude $A = 1 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$

On peut voir ici que le spectre n'est pas nul pour les nombres d'onde $k < k_0$, c'est à dire, à une fréquence donnée, pour des nombres d'onde supersoniques. Cela est dû à l'effet

de l'incidence des ondes du champ diffus : des ondes non rasantes sont perçues comme supersoniques du point de vue du traitement du signal. Encore une fois, on se reportera à [Arg06] pour plus de détails.

B.2.3 Spectre en fréquence et nombre d'onde d'un champ aérodynamique de Corcos

Un modèle empirique d'interspectre pour décrire les fluctuations de pressions aérodynamiques a été proposé par Corcos [Cor63]. Les structures turbulentes y sont convectées de façon globale à une vitesse moyenne U (prise selon l'axe x), de l'ordre de la vitesse de l'écoulement.

Le spectre en nombre d'onde du modèle de Corcos se calcule analytiquement :

$$\Phi(k_x, k_y, \omega) = \frac{A(\omega)}{\pi^2} \frac{\alpha k_a}{k_a^2 + \alpha^2(k_x - k_a)^2} \frac{\beta k_a}{k_a^2 + \beta^2 k_y^2}$$

avec $k_a = \omega/U$, α et β caractérisant la perte de cohérence spatiale respectivement dans la direction de l'écoulement et dans la direction transverse.

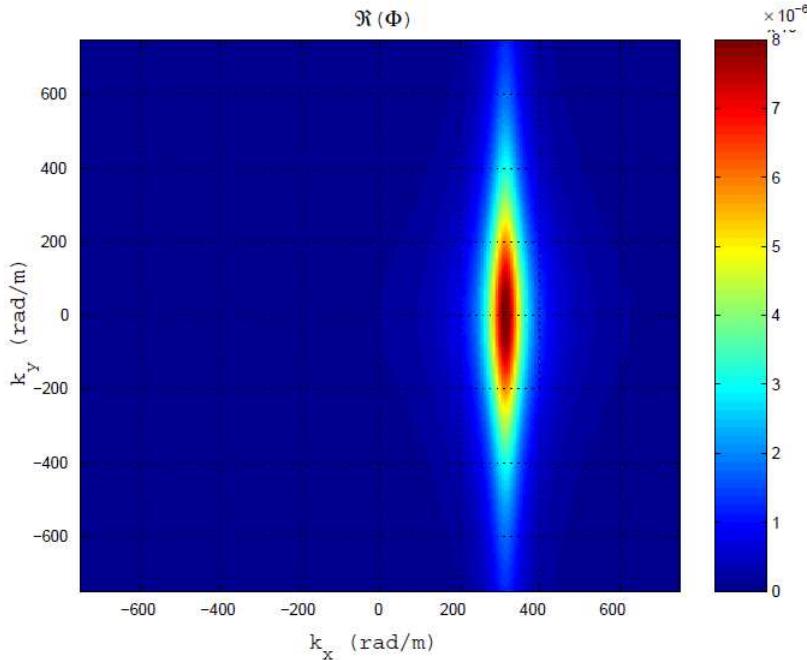


FIGURE B.3 – Spectre en nombre d'onde de Corcos pour $A = 1 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$ $\alpha = 8$, $\beta = 1$, $U = 40 \text{ m/s}$

Pour un écoulement à bas nombre de Mach, $U \ll c_0$. Par conséquent, pour une même fréquence temporelle f , le nombre d'onde aérodynamique $k_a \simeq 2\pi f/U$ est très supérieur au nombre d'onde acoustique k_0 . Cela signifie que dans un écoulement réel, pour une fréquence donnée, les tâches spectrales acoustiques et aérodynamiques apparaissent toutes les deux mais occupent des domaines de nombre d'onde distincts. Ceci est d'autant plus vrai que le nombre de Mach est bas et que la fréquence est élevée. Par conséquent, on en déduit que la séparation spectrale entre la partie acoustique et la partie aérodynamique est particulièrement difficile dans la situation inverse, c'est à dire pour des nombres de Mach élevés et à basse fréquence. On pourra se référer à l'étude de couche limite turbulente effectuée dans [GB13] pour bien plus de détails.

Bibliographie

- [AS08] Ronojoy ADHIKARI et Sauro SUCCI. “Duality in matrix lattice Boltzmann models”. In : *Physical Review E* 78.6 (2008), p. 066701 (cf. p. 69, 75, 79, 81).
- [AK00] Santosh ANSUMALI et Ilya V KARLIN. “Stabilization of the lattice Boltzmann method by the H theorem : A numerical test”. In : *Physical Review E* 62.6 (2000), p. 7999 (cf. p. 91).
- [AK02] Santosh ANSUMALI et Ilya V KARLIN. “Single relaxation time model for entropic lattice Boltzmann methods”. In : *Physical Review E* 65.5 (2002), p. 056312 (cf. p. 91).
- [AKÖ03] Santosh ANSUMALI, Ilya V KARLIN et Hans Christian ÖTTINGER. “Minimal entropic kinetic models for hydrodynamics”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 63.6 (2003), p. 798 (cf. p. 88).
- [Arg06] Blandine ARGUILLAT. “Étude expérimentale et numérique de champs de pression pariétale dans l'espace des nombres d'onde, avec application aux vitrages automobiles”. Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2006 (cf. p. vi, 201, 203).
- [Asi08] Pietro ASINARI. “Generalized local equilibrium in the cascaded lattice Boltzmann method”. In : *Physical Review E* 78.1 (2008), p. 016701 (cf. p. 76, 79).
- [BBB06] Julien BERLAND, Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge–Kutta algorithm”. In : *Computers & Fluids* 35.10 (2006), p. 1459-1463 (cf. p. 62).
- [BBB08] Julien BERLAND, Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “Investigation using statistical closure theory of the influence of the filter shape on scale separation in large-eddy simulation”. In : *Journal of Turbulence* 9 (2008), N21 (cf. p. 111).
- [Ber+11] Julien BERLAND, Philippe LAFON, Frédéric DAUDE, Fabien CROUZET, Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “Filter shape dependence and effective scale separation in large-eddy simulations based on relaxation filtering”. In : *Computers & Fluids* 47.1 (2011), p. 65-74 (cf. p. 111).
- [BGK54] P L BHATNAGAR, E P GROSS et M KROOK. “A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems”. In : *Physical review* 94.3 (1954), p. 511 (cf. p. 11).
- [BB04] Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations”. In : *Journal of Computational physics* 194.1 (2004), p. 194-214 (cf. p. 65, 94).
- [BB06a] Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering”. In : *Computers & fluids* 35.10 (2006), p. 1344-1358 (cf. p. 65).

- [BB06b] Christophe BOGEY et Christophe BAILLY. “Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model”. In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27.4 (2006), p. 603-610 (cf. p. 65, 111).
- [BBJ02] Christophe BOGEY, Christophe BAILLY et Daniel JUVÉ. “Computation of flow noise using source terms in linearized Euler’s equations”. In : *AIAA journal* 40.2 (2002), p. 235-243 (cf. p. viii).
- [Bog+01] Bruce M BOGHOSIAN, Jeffrey YEPEZ, Peter V COVENEY et Alexander WAGNER. “Entropic lattice Boltzmann methods”. In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 457. 2007. The Royal Society. 2001, p. 717-766 (cf. p. 87).
- [Bog+03] Bruce M BOGHOSIAN, Peter J LOVE, Peter V COVENEY, Ilya V KARLIN, Sauro SUCCI et Jeffrey YEPEZ. “Galilean-invariant lattice-Boltzmann models with H theorem”. In : *Physical Review E* 68.2 (2003), p. 025103 (cf. p. 87, 88).
- [BO95a] Vadim BORUE et Steven A ORSZAG. “Forced three-dimensional homogeneous turbulence with hyperviscosity”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 29.9 (1995), p. 687 (cf. p. 111).
- [BO95b] Vadim BORUE et Steven A ORSZAG. “Self-similar decay of three-dimensional homogeneous turbulence with hyperviscosity”. In : *Physical Review E* 51.2 (1995), R856 (cf. p. 111).
- [BCK15] Fabian BÖSCH, Shyam S CHIKATAMARLA et Ilya V KARLIN. “Entropic multi-relaxation lattice Boltzmann models for turbulent flows”. In : *Physical Review E* 92.4 (2015), p. 043309 (cf. p. 91-93).
- [Bro64] James E BROADWELL. “Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 19.03 (1964), p. 401-414 (cf. p. 23).
- [Cah+10] Adrien CAHUZAC, Jérôme BOUDET, Pierre BORGnat et Emmanuel LÉVÈQUE. “Smoothing algorithms for mean-flow extraction in large-eddy simulation of complex turbulent flows”. In : *Physics of fluids* 22.12 (2010), p. 125104 (cf. p. 113).
- [Cer88] Carlo CERCIGNANI. *The Boltzmann equation and its applications*. Springer, 1988 (cf. p. 12-14, 17, 21, 196, 197).
- [CC70] Sidney CHAPMAN et T G COWLING. *The mathematical theory of non-uniform gases : an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Cambridge university press, 1970 (cf. p. ix, 17).
- [Che98] Hudong CHEN. “Volumetric formulation of the lattice Boltzmann method for fluid dynamics : Basic concept”. In : *Physical Review E* 58.3 (1998), p. 3955 (cf. p. 39).
- [Che+06] Hudong CHEN, Olga FILIPOVA, J. HOCH, Kim MOLVIG, R. SHOCK, C. TEIXEIRA et R. ZHANG. “Grid refinement in lattice Boltzmann methods based on volumetric formulation”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 362.1 (2006), p. 158-167 (cf. p. 158).
- [Che+16] Songying CHEN, Cheng PENG, Yihua TENG, Lian-Ping WANG et Kun ZHANG. “Improving lattice Boltzmann simulation of moving particles in a viscous flow using local grid refinement”. In : *Computers & Fluids* 136 (2016), p. 228-246 (cf. p. 150).

- [CRS00] Xinzong CHEN, Hongling RAO et Edward A SPIEGEL. “Macroscopic equations for rarefied gas dynamics”. In : *Physics Letters A* 271.1 (2000), p. 87-91 (cf. p. 16).
- [CRS01] Xinzong CHEN, Hongling RAO et Edward A SPIEGEL. “Continuum description of rarefied gas dynamics. I. Derivation from kinetic theory”. In : *Physical Review E* 64.4 (2001), p. 046308 (cf. p. 16).
- [Cor63] GM CORCOS. “Resolution of pressure in turbulence”. In : *Journal of the Acoustical Society of America* 35.2 (1963), p. 192-199 (cf. p. 203).
- [DHu92] Dominique D'HUMIÈRES. “Generalized lattice Boltzmann equations”. In : *Rarefied gas dynamics : theory and simulations*. Sous la dir. de B. D. SHIZGAL et D. P. WEAVER. Progress In Astronautics et Aeronautics, 1992, p. 450-458 (cf. p. 67).
- [DHu02] Dominique D'HUMIÈRES. “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 360.1792 (2002), p. 437-451 (cf. p. 67, 69-72, 80, 121).
- [DBL01] Richard G DEJONG, T BHARJ et J LEE. “Vehicle Wind Noise Analysis Using a SEA Model with Measured Source Levels”. In : *SAE Technical Paper* 2001-01-1629 (2001) (cf. p. vi).
- [DEL02] P. J. DELLAR. “Nonhydrodynamic modes and a priori construction of shallow water lattice Boltzmann equations”. In : *Physical Review E* 65.3 (2002), p. 036309 (cf. p. 63, 69, 75, 79, 81).
- [Del01] Paul J DELLAR. “Bulk and shear viscosities in lattice Boltzmann equations”. In : *Physical Review E* 64.3 (2001), p. 031203 (cf. p. 20, 32).
- [Del03] Paul J DELLAR. “Incompressible limits of lattice Boltzmann equations using multiple relaxation times”. In : *Journal of Computational Physics* 190.2 (2003), p. 351-370 (cf. p. 69, 73, 75, 79, 171).
- [Del06] Paul J DELLAR. “Non-hydrodynamic modes and general equations of state in lattice Boltzmann equations”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 362.1 (2006), p. 132-138 (cf. p. 69, 75, 79).
- [Del07] Paul J DELLAR. “Macroscopic descriptions of rarefied gases from the elimination of fast variables”. In : *Physics of Fluids* 19.10 (2007), p. 107101 (cf. p. 16).
- [Del13] Paul J DELLAR. “An interpretation and derivation of the lattice Boltzmann method using Strang splitting”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 65.2 (2013), p. 129-141 (cf. p. 36).
- [Del14] Paul J DELLAR. “Lattice Boltzmann algorithms without cubic defects in Galilean invariance on standard lattices”. In : *Journal of Computational Physics* 259 (2014), p. 270-283 (cf. p. 34, 47-49, 80, 83).
- [Dor+16a] Benedikt DORSCHNER, Fabian BÖSCH, Shyam CHIKATAMARLA, Konstantinos BOULOUCHOS et Ilya V KARLIN. “Entropic multi-relaxation time lattice Boltzmann model for complex flows”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 801 (2016), p. 623-651 (cf. p. 91-93).
- [Dor+16b] Benedikt DORSCHNER, Nils FRAPOLLI, Shyam CHIKATAMARLA et Ilya V KARLIN. “Grid refinement for entropic lattice Boltzmann models”. In : *Physical Review E* 94.5 (2016), p. 053311 (cf. p. 92).

- [DHR13] Philippe DRUAULT, Abbas HEKMATI et Denis RICOR. “Discrimination of acoustic and turbulent components from aeroacoustic wall pressure field”. In : *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), p. 7257-7278 (cf. p. vi).
- [Dub07] Francois DUBOIS. “Une introduction au schéma de Boltzmann sur réseau”. In : *ESAIM : Proceedings*. T. 18. EDP Sciences. 2007, p. 181-215 (cf. p. 49).
- [Dub08] François DUBOIS. “Equivalent partial differential equations of a lattice Boltzmann scheme”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 55.7 (2008), p. 1441-1449 (cf. p. 49).
- [Dub09] François DUBOIS. “Third order equivalent equation of lattice Boltzmann scheme”. In : *Discrete Contin. Dyn. Syst* 23.1-2 (2009), p. 221-248 (cf. p. 49).
- [ES03] Roland EWERT et Wolfgang SCHRÖDER. “Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering”. In : *Journal of Computational Physics* 188.2 (2003), p. 365-398 (cf. p. viii).
- [FBL17] Abbas FAKHARI, Diogo BOLSTER et Li-Shi LUO. “A weighted multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for multiphase flows and its application to partial coalescence cascades”. In : *Journal of Computational Physics* 341 (2017), p. 22-43 (cf. p. 69, 74).
- [FL15] Abbas FAKHARI et Taehun LEE. “Numerics of the lattice boltzmann method on nonuniform grids : Standard LBM and finite-difference LBM”. In : *Computers & Fluids* 107 (2015), p. 205-213 (cf. p. 38).
- [Fal13] Fabrice FALISSARD. “Genuinely multi-dimensional explicit and implicit generalized Shapiro filters for weather forecasting, computational fluid dynamics and aeroacoustics”. In : *Journal of Computational Physics* 253 (2013), p. 344-367 (cf. p. 94, 95, 98, 99).
- [Far+16] Ehsan Kian FAR, Martin GEIER, Konstantin KUTSCHER et Manfred KRAFCZYK. “Simulation of micro aggregate breakage in turbulent flows by the cumulant lattice Boltzmann method”. In : *Computers & Fluids* 140 (2016), p. 222-231 (cf. p. 111).
- [Fév14] Tony FÉVRIER. “Extension et analyse des schémas de Boltzmann sur réseau : les schémas à vitesse relative”. Thèse de doct. Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, 2014 (cf. p. 49, 69, 76, 77).
- [FH69] John E FLOWCS WILLIAMS et D L HAWKINGS. “Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 264.1151 (1969), p. 321-342 (cf. p. vii).
- [GVU08] Leopoldo S GARCÍA-COLÍN, Rosa M VELASCO et Francisco J URIBE. “Beyond the Navier–Stokes equations : Burnett hydrodynamics”. In : *Physics Reports* 465.4 (2008), p. 149-189 (cf. p. 16, 17, 31, 50).
- [GD87] V GARZÓ et J DE LA RUBIA. “The hilbert expansion of the BGK equation”. In : *Chemical physics letters* 135.1-2 (1987), p. 143-146 (cf. p. 195).
- [Gat75] Renée GATIGNOL. *Théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesses*. Springer verlag, 1975 (cf. p. 23).
- [Gau+14] Éric GAUDARD, Philippe DRUAULT, Régis MARCHIANO et François VAN HERPE. “About the POD application for separating acoustic and turbulent fluctuations from wall pressure synthesised field”. In : *International Journal of Aerodynamics* 4.1-2 (2014), p. 108-133 (cf. p. vi).

- [Gei06] Martin GEIER. “Ab initio derivation of the cascaded Lattice Boltzmann Automaton”. Thèse de doct. University of Freiburg–IMTEK, 2006 (cf. p. 48, 76, 77).
- [Gei08] Martin GEIER. “De-aliasing and stabilization formalism of the cascaded lattice Boltzmann automaton for under-resolved high Reynolds number flow”. In : *International journal for numerical methods in fluids* 56.8 (2008), p. 1249-1254 (cf. p. 77).
- [GGK06] Martin GEIER, Andreas GREINER et Jan G KORVINK. “Cascaded digital lattice Boltzmann automata for high Reynolds number flow”. In : *Physical Review E* 73.6 (2006), p. 066705 (cf. p. 76, 78, 111).
- [GGK07] Martin GEIER, Andreas GREINER et Jan G KORVINK. “Properties of the cascaded lattice Boltzmann automaton”. In : *International Journal of Modern Physics C* 18.04 (2007), p. 455-462 (cf. p. 76, 77).
- [GGK09a] Martin GEIER, Andreas GREINER et Jan G KORVINK. “A factorized central moment lattice Boltzmann method”. In : *The European Physical Journal-Special Topics* 171.1 (2009), p. 55-61 (cf. p. 76, 77).
- [GGK09b] Martin GEIER, Andreas GREINER et Jan G KORVINK. “Bubble functions for the lattice Boltzmann method and their application to grid refinement”. In : *The European Physical Journal-Special Topics* 171.1 (2009), p. 173-179 (cf. p. 155).
- [GPS17] Martin GEIER, Andrea PASQUALI et Martin SCHÖNHERR. “Parametrization of the cumulant lattice Boltzmann method for fourth order accurate diffusion Part II : Application to flow around a sphere at drag crisis”. In : *Journal of Computational Physics* (2017) (cf. p. 111).
- [Gei+15] Martin GEIER, Martin SCHÖNHERR, Andrea PASQUALI et Manfred KRAFCZYK. “The cumulant lattice Boltzmann equation in three dimensions : Theory and validation”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 70.4 (2015), p. 507-547 (cf. p. 48, 69, 76, 78).
- [GUK13] Sebastian GELLER, Sonja UPHOFF et Manfred KRAFCZYK. “Turbulent jet computations based on MRT and Cascaded Lattice Boltzmann models”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 65.12 (2013), p. 1956-1966 (cf. p. 78, 111).
- [Gel+06] Sebastian GELLER, Manfred KRAFCZYK, Jonas TÖLKE, Stefan TUREK et Jaroslav HRON. “Benchmark computations based on lattice-Boltzmann, finite element and finite volume methods for laminar flows”. In : *Computers & Fluids* 35.8 (2006), p. 888-897 (cf. p. 38, 39).
- [Gen+17] Félix GENDRE, Denis RICOT, Guillaume FRITZ et Pierre SAGAUT. “Grid refinement for aeroacoustics in the lattice Boltzmann method : A directional splitting approach”. In : *Physical Review E* 96.2 (2017), p. 023311 (cf. p. 98, 121, 149-155, 158-163, 171, 173).
- [Gin05] Irina GINZBURG. “Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation”. In : *Advances in Water resources* 28.11 (2005), p. 1171-1195 (cf. p. 69, 70).
- [Gin13] Irina GINZBURG. “Multiple anisotropic collisions for advection-diffusion Lattice Boltzmann schemes”. In : *Advances in water resources* 51 (2013), p. 381-404 (cf. p. 70).

- [GB13] Xavier GLOERFELT et Julien BERLAND. “Turbulent boundary-layer noise : direct radiation at Mach number 0.5”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 723 (2013), p. 318-351 (cf. p. vi, x, 203).
- [Gol06] François GOLSE. “The Boltzmann equation and its hydrodynamic limits”. In : *Handbook of Differential Equations : Evolutionary Equations* 2 (2006), p. 159-301 (cf. p. 14, 17).
- [GK03] Alexander N GORBAN et Ilya V KARLIN. “Methods of nonlinear kinetics”. In : *arXiv preprint cond-mat/0306062* (2003) (cf. p. 21).
- [Gra49] Harold GRAD. “On the kinetic theory of rarefied gases”. In : *Communications on pure and applied mathematics* 2.4 (1949), p. 331-407 (cf. p. 16, 31).
- [Gra58] Harold GRAD. “Principles of the kinetic theory of gases”. In : *Thermodynamik der Gase/Thermodynamics of Gases*. Springer, 1958, p. 205-294 (cf. p. 16-18, 31).
- [GMR07] Fernando F GRINSTEIN, Len G MARGOLIN et William J RIDER. *Implicit large eddy simulation : computing turbulent fluid dynamics*. Cambridge university press, 2007 (cf. p. 110).
- [GXW13] Zhaoli GUO, Kun XU et Ruijie WANG. “Discrete unified gas kinetic scheme for all Knudsen number flows : Low-speed isothermal case”. In : *Physical Review E* 88.3 (2013), p. 033305 (cf. p. 15, 39).
- [HO12] Michael HARTMANN et Joerg OCKER. “Wind Noise caused by the A-Pillar and the Side Mirror flow of a Generic Vehicle Model”. In : *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (Colorado Springs, CO)*. 2012 (cf. p. vi).
- [HR14] Manuel HASERT et Sabine P ROLLER. “Multi-scale lattice Boltzmann simulations on distributed octrees”. Thèse de doct. Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2014 (cf. p. 127).
- [HL97] Xiaoyi HE et Li-Shi LUO. “Theory of the lattice Boltzmann method : From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation”. In : *Physical Review E* 56.6 (1997), p. 6811 (cf. p. 79).
- [Hil12] David HILBERT. “Begründung der kinetischen Gastheorie”. In : *Mathematische Annalen* 72.4 (1912), p. 562-577 (cf. p. 17).
- [Hol65] Lowell H HOLWAY JR. “Kinetic theory of shock structure using an ellipsoidal distribution function”. In : *Rarefied Gas Dynamics, Volume 1*. T. 1. 1965, p. 193 (cf. p. 21).
- [IT56] Ernest IKENBERRY et Clifford TRUESDELL. “On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell’s kinetic theory, I”. In : *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 5.1 (1956), p. 1-54 (cf. p. 16).
- [JKL05] Michael JUNK, Axel KLAR et Li-Shi LUO. “Asymptotic analysis of the lattice Boltzmann equation”. In : *Journal of Computational Physics* 210.2 (2005), p. 676-704 (cf. p. 46).
- [Kan+99] Drona KANDHAI, Antti KOPONEN, Alfons HOEKSTRA, M KATAJA, J TIMONEN et PMA SLOOT. “Implementation aspects of 3D lattice-BGK : boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method”. In : *Journal of Computational Physics* 150.2 (1999), p. 482-501 (cf. p. 48).

- [KH13] Shin K KANG et Yassin A HASSAN. “The effect of lattice models within the lattice Boltzmann method in the simulation of wall-bounded turbulent flows”. In : *Journal of Computational Physics* 232.1 (2013), p. 100-117 (cf. p. 49).
- [KBC14] Ilya V KARLIN, F BÖSCH et Shyam S CHIKATAMARLA. “Gibbs’ principle for the lattice-kinetic theory of fluid dynamics”. In : *Physical Review E* 90.3 (2014), p. 031302 (cf. p. 91).
- [KFÖ99] Ilya V KARLIN, A FERRANTE et Hans Christian ÖTTINGER. “Perfect entropy functions of the lattice Boltzmann method”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 47.2 (1999), p. 182 (cf. p. 87-89, 91, 93).
- [Kar+98] Ilya V KARLIN, Alexander N GORBAN, Sauro SUCCI et Vinicio BOFFI. “Maximum entropy principle for lattice kinetic equations”. In : *Physical Review Letters* 81.1 (1998), p. 6 (cf. p. 87).
- [Kar+15] Ilya V KARLIN, Fabian BÖSCH, Shyam S CHIKATAMARLA et Sauro SUCCI. “Entropy-Assisted Computing of Low-Dissipative Systems”. In : *Entropy* 17.12 (2015), p. 8099-8110 (cf. p. 91).
- [Kea+07] Brian KEATING, George VAHALA, Jeffrey YEPEZ, Min SOE et Linda VAHALA. “Entropic lattice Boltzmann representations required to recover Navier-Stokes flows”. In : *Physical Review E* 75.3 (2007), p. 036712 (cf. p. 88).
- [KGT15] Siarhei KHIREVICH, Irina GINZBURG et Ulrich TALLAREK. “Coarse-and fine-grid numerical behavior of MRT/TRT lattice-Boltzmann schemes in regular and random sphere packings”. In : *Journal of Computational Physics* 281 (2015), p. 708-742 (cf. p. 70, 75).
- [Kia+17] Ehsan KIAN FAR, Martin GEIER, Konstantin KUTSCHER et Manfred KRAFCZYK. “Implicit Large Eddy Simulation of Flow in a Micro-Orifice with the Cumulant Lattice Boltzmann Method”. In : *Computation* 5.2 (2017), p. 23 (cf. p. 111).
- [Kov12] Leslie SG KOVASZNAY. “Turbulence in supersonic flow”. In : *Journal of the Aeronautical Sciences* (2012) (cf. p. 62).
- [Krü+17] Timm KRÜGER, Halim KUSUMAATMAJA, Alexandr KUZMIN, Orest SHARDT, Goncalo SILVA et Erlend Magnus VIGGEN. *The Lattice Boltzmann Method*. Springer, 2017 (cf. p. 63, 65, 104, 105, 107).
- [KS16] Yoshiaki KUWATA et Kazuhiko SUGA. “Imbalance-correction grid-refinement method for lattice Boltzmann flow simulations”. In : *Journal of Computational Physics* 311 (2016), p. 348-362 (cf. p. 73).
- [Lag+12] Daniel W LAGRAVA SANDOVAL, Orestis MALASPINAS, Jonas LATT et Bastien CHOPARD. “Advances in multi-domain lattice Boltzmann grid refinement”. In : *Journal of Computational Physics* 231.14 (2012), p. 4808-4822 (cf. p. 102, 127, 145, 147, 148, 151, 153-155, 165).
- [LL00] Pierre LALLEMAND et Li-Shi LUO. “Theory of the lattice Boltzmann method : Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability”. In : *Physical Review E* 61.6 (2000), p. 6546 (cf. p. 63, 67, 69, 71-74, 76).
- [Lat07] Jonas LATT. “Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations”. Thèse de doct. University of Geneva, 2007 (cf. p. 79, 80, 154).
- [LC06] Jonas LATT et Bastien CHOPARD. “Lattice Boltzmann method with regularized pre-collision distribution functions”. In : *Mathematics and Computers in Simulation* 72.2 (2006), p. 165-168 (cf. p. 79, 80, 154).

- [Lév+07] Emmanuel LÉVÈQUE, Federico TOSCHI, Liang SHAO et Jean-Pierre BERTOGLIO. "Shear-improved Smagorinsky model for large-eddy simulation of wall-bounded turbulent flows". In : *Journal of Fluid Mechanics* 570 (2007), p. 491-502 (cf. p. 113).
- [Lig52] Michael J LIGHTHILL. "On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory". In : *Proceedings of the Royal Society of London* 211.1107 (1952), p. 564-587 (cf. p. vii).
- [Lig54] Michael J LIGHTHILL. "On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound". In : *Proceedings of the Royal Society of London* 222.1148 (1954), p. 1-32 (cf. p. vii).
- [Luo12] Li-Shi LUO. "Reply to "Comment on "Numerics of the lattice Boltzmann method : Effects of collision models on the lattice Boltzmann simulations""". In : *Physical Review E* 86.4 (2012), p. 048701 (cf. p. 93).
- [Luo+11] Li-Shi LUO, Wei LIAO, Xingwang CHEN, Yan PENG, Wei ZHANG et al. "Numerics of the lattice Boltzmann method : Effects of collision models on the lattice Boltzmann simulations". In : *Physical Review E* 83.5 (2011), p. 056710 (cf. p. 75, 80).
- [Mal15] Orestis MALASPINAS. "Increasing stability and accuracy of the lattice Boltzmann scheme : recursivity and regularization". In : *arXiv preprint arXiv :1505.06900* (2015) (cf. p. 79).
- [MS11] Orestis MALASPINAS et Pierre SAGAUT. "Advanced large-eddy simulation for lattice Boltzmann methods : The approximate deconvolution model". In : *Physics of Fluids* 23.10 (2011), p. 105103 (cf. p. 111).
- [MS12] Orestis MALASPINAS et Pierre SAGAUT. "Consistent subgrid scale modelling for lattice Boltzmann methods". In : *Journal of Fluid Mechanics* 700 (2012), p. 514-542 (cf. p. 111, 112).
- [MRG06] Len G MARGOLIN, William J RIDER et Fernando F GRINSTEIN. "Modeling turbulent flow with implicit LES". In : *Journal of Turbulence* 7 (2006), N15 (cf. p. 110).
- [Mar08] Simon MARIÉ. "Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique." Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008 (cf. p. ix, 61, 62, 64, 82, 105).
- [MG17] Simon MARIÉ et Xavier GLOERFELT. "Adaptive filtering for the lattice Boltzmann method". In : *Journal of Computational Physics* 333 (2017), p. 212-226 (cf. p. 103, 111).
- [MRS09] Simon MARIÉ, Denis RICOT et Pierre SAGAUT. "Comparison between lattice Boltzmann method and Navier-Stokes high order schemes for computational aeroacoustics". In : *Journal of Computational Physics* 228.4 (2009), p. 1056-1070 (cf. p. ix, 61-64, 73, 82, 105).
- [MFF06] Joseph MATHEW, Holger FOYSI et Rainer FRIEDRICH. "A new approach to LES based on explicit filtering". In : *International journal of heat and fluid flow* 27.4 (2006), p. 594-602 (cf. p. 65).
- [Mat+03] Joseph MATHEW, Richard LECHNER, Holger FOYSI, Joern SESTERHENN et Rainer FRIEDRICH. "An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows". In : *Physics of fluids* 15.8 (2003), p. 2279-2289 (cf. p. 65).

- [MPH17] Keijo K MATTILA, Paulo C PHILIPPI et Luiz A HEGELE JR. “High-order regularization in lattice-Boltzmann equations”. In : *Physics of Fluids* 29.4 (2017), p. 046103 (cf. p. 79).
- [MZ88] Guy R McNAMARA et Gianluigi ZANETTI. “Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata”. In : *Physical review letters* 61.20 (1988), p. 2332 (cf. p. 23).
- [MS98] Renwei MEI et Wei SHYY. “On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates”. In : *Journal of Computational Physics* 143.2 (1998), p. 426-448 (cf. p. 38).
- [Mei+00] Renwei MEI, Wei SHYY, Dazhi YU et Li-Shi LUO. “Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary”. In : *Journal of Computational Physics* 161.2 (2000), p. 680-699 (cf. p. 48).
- [MB97] Michael L MINION et David L BROWN. “Performance of under-resolved two-dimensional incompressible flow simulations, II”. In : *Journal of Computational Physics* 138.2 (1997), p. 734-765 (cf. p. 80, 83).
- [Mou04] Clément MOUHOT. “Étude mathématique de quelques équations cinétiques collisionnelles”. Thèse de doct. Ecole normale supérieure de Lyon-ENS LYON, 2004 (cf. p. 8, 9).
- [MR05] Ingo MÜLLER et Daniel REITEBUCH. “Consistent order extended thermodynamics and its application to light scattering”. In : *Trends and Applications of Mathematics to Mechanics* (2005), p. 127-139 (cf. p. 31, 32, 189).
- [MRW03] Ingo MÜLLER, Daniel REITEBUCH et W WEISS. “Extended thermodynamics—consistent in order of magnitude”. In : *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 15.2 (2003), p. 113-146 (cf. p. 31, 32, 50, 51, 189).
- [ONB12] Gareth S O’BRIEN, Tarje NISSEN-MEYER et Christopher J BEAN. “A lattice Boltzmann method for elastic wave propagation in a Poisson solid”. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 102.3 (2012), p. 1224-1234 (cf. p. 54).
- [OBD17] Hiroshi OTOMO, Bruce M BOGHOSIAN et François DUBOIS. “Two complementary lattice-Boltzmann-based analyses for nonlinear systems”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 486 (2017), p. 1000-1011 (cf. p. 51).
- [Pen+99] Gongwen PENG, Haowen XI, Comer DUNCAN et So-Hsiang CHOU. “Finite volume scheme for the lattice Boltzmann method on unstructured meshes”. In : *Physical Review E* 59.4 (1999), p. 4675 (cf. p. 38).
- [Pen+10] Yan PENG, Wei LIAO, Li-Shi LUO et Lian-Ping WANG. “Comparison of the lattice Boltzmann and pseudo-spectral methods for decaying turbulence : Low-order statistics”. In : *Computers & Fluids* 39.4 (2010), p. 568-591 (cf. p. 94, 104).
- [PB09] Kannan N PREMNATH et Sanjoy BANERJEE. “Incorporating forcing terms in cascaded lattice Boltzmann approach by method of central moments”. In : *Physical Review E* 80.3 (2009), p. 036702 (cf. p. 76).
- [PB11] Kannan N PREMNATH et Sanjoy BANERJEE. “On the three-dimensional central moment lattice Boltzmann method”. In : *Journal of Statistical Physics* 143.4 (2011), p. 747-794 (cf. p. 76-78).

- [PR01] Jean PRIEUR et Gilles RAHIER. “Aeroacoustic integral methods, formulation and efficient numerical implementation”. In : *Aerospace Science and Technology* 5.7 (2001), p. 457-468 (cf. p. [vii](#)).
- [QdL92] Yuehong QIAN, Dominique D'HUMIÈRES et Pierre LALLEMAND. “Lattice BGK models for Navier-Stokes equation”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 17.6 (1992), p. 479 (cf. p. [23](#)).
- [RS95] Marc B REIDER et James D STERLING. “Accuracy of discrete-velocity BGK models for the simulation of the incompressible Navier-Stokes equations”. In : *Computers & fluids* 24.4 (1995), p. 459-467 (cf. p. [46](#)).
- [Ric02] Denis RICOT. “Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur réseau et application au toit ouvrant de véhicules automobiles”. Thèse de doct. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2002 (cf. p. [ix](#)).
- [Ric+09] Denis RICOT, Simon MARIÉ, Pierre SAGAUT et Christophe BAILLY. “Lattice Boltzmann method with selective viscosity filter”. In : *Journal of Computational Physics* 228.12 (2009), p. 4478-4490 (cf. p. [61](#), [66](#), [80](#), [83](#), [94-98](#), [100](#), [101](#), [104](#), [105](#), [121](#), [171](#)).
- [Roh+06] Martin ROHDE, Drona KANDHAI, Jacobus DERKSEN et Harry E A VAN DEN AKKER. “A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice-Boltzmann schemes”. In : *International journal for numerical methods in fluids* 51.4 (2006), p. 439-468 (cf. p. [158](#)).
- [SC08] Pierre SAGAUT et Claude CAMBON. *Homogeneous turbulence dynamics*. T. 10. Cambridge University Press Cambridge, 2008 (cf. p. [62](#)).
- [SM05] Jung-Hee SEO et Young J MOON. “Perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at low mach numbers”. In : *AIAA journal* 43.8 (2005), p. 1716-1724 (cf. p. [viii](#)).
- [SC07] Xiaowen SHAN et Hudong CHEN. “A general multiple-relaxation-time Boltzmann collision model”. In : *International Journal of Modern Physics C* 18.04 (2007), p. 635-643 (cf. p. [79](#)).
- [SH98] Xiaowen SHAN et Xiaoyi HE. “Discretization of the velocity space in the solution of the Boltzmann equation”. In : *Physical Review Letters* 80.1 (1998), p. 65 (cf. p. [23](#), [24](#)).
- [SYC06] Xiaowen SHAN, Xue-Feng YUAN et Hudong CHEN. “Kinetic theory representation of hydrodynamics : a way beyond the Navier-Stokes equation”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 550.1 (2006), p. 413-441 (cf. p. [16](#), [17](#), [23-25](#), [28-30](#), [32-35](#), [43](#), [79](#), [189](#)).
- [Smi95] Peter J SMITH. “A recursive formulation of the old problem of obtaining moments from cumulants and vice versa”. In : *The American Statistician* 49.2 (1995), p. 217-218 (cf. p. [77](#)).
- [Son12] Yoshio SONE. *Kinetic theory and fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. [14](#)).
- [STK06] Maik STIEBLER, Jonas TÖLKE et Manfred KRAFCZYK. “An upwind discretization scheme for the finite volume lattice Boltzmann method”. In : *Computers & fluids* 35.8 (2006), p. 814-819 (cf. p. [38](#)).

- [Sti+11] Maik STIEBLER, Manfred KRAFCZYK, Sören FREUDIGER et Martin GEIER. “Lattice Boltzmann large eddy simulation of subcritical flows around a sphere on non-uniform grids”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 61.12 (2011), p. 3475-3484 (cf. p. 73).
- [ST03] Henning STRUCHTRUP et Manuel TORRILHON. “Regularization of Grad’s moment equations : derivation and linear analysis”. In : *Physics of Fluids* 15.9 (2003), p. 2668-2680 (cf. p. 16, 17, 31, 32, 50).
- [SKC02] Sauro SUCCI, Ilya V KARLIN et Hudong CHEN. “Colloquium : Role of the H theorem in lattice Boltzmann hydrodynamic simulations”. In : *Reviews of Modern Physics* 74.4 (2002), p. 1203 (cf. p. 5, 89).
- [Sug+15] Kazuhiko SUGA, Yoshiaki KUWATA, K TAKASHIMA et R CHIKASUE. “A D3Q27 multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for turbulent flows”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 69.6 (2015), p. 518-529 (cf. p. 73, 76).
- [TH04] Christopher KW TAM et Fang Q HU. “An optimized multi-dimensional interpolation scheme for computational aeroacoustics applications using overset grids”. In : *AIAA paper* 2812 (2004), p. 2004 (cf. p. 94).
- [TW93] Christopher KW TAM et Jay C WEBB. “Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics”. In : *Journal of computational physics* 107.2 (1993), p. 262-281 (cf. p. 62).
- [TWD93] Christopher KW TAM, Jay C WEBB et Zhong DONG. “A study of the short wave components in computational acoustics”. In : *Journal of Computational Acoustics* 1.01 (1993), p. 1-30 (cf. p. 94, 104).
- [TSB03] Marc TERRACOL, Pierre SAGAUT et Claude BASDEVANT. “A time self-adaptive multilevel algorithm for large-eddy simulation”. In : *Journal of Computational Physics* 184.2 (2003), p. 339-365 (cf. p. 111-113, 115, 116).
- [Tha+13] Sumesh P THAMPI, Santosh ANSUMALI, Ronojoy ADHIKARI et Sauro SUCCI. “Isotropic discrete Laplacian operators from lattice hydrodynamics”. In : *Journal of Computational Physics* 234 (2013), p. 1-7 (cf. p. 98).
- [TRL14] Hatem TOUIL, Denis RICOT et Emmanuel LÉVÈQUE. “Direct and large-eddy simulation of turbulent flows on composite multi-resolution grids by the lattice Boltzmann method”. In : *Journal of Computational Physics* 256 (2014), p. 220-233 (cf. p. 98, 102, 113, 127, 145, 147, 148, 151, 154, 165, 171).
- [Tsu12] Michihisa TSUTAHARA. “The finite-difference lattice Boltzmann method and its application in computational aero-acoustics”. In : *Fluid Dynamics Research* 44.4 (2012), p. 045507 (cf. p. 38).
- [TKM06] Michihisa TSUTAHARA, Takamasa KONDO et Kazumasa MOCHIZUKI. “Direct Simulation of Acoustic Waves by Finite Volume Lattice Boltzmann Method”. In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*. 2006, p. 2570 (cf. p. 38).
- [VLM98] Oleg V VASILEYEV, Thomas S LUND et Parviz MOIN. “A general class of commutative filters for LES in complex geometries”. In : *Journal of Computational Physics* 146.1 (1998), p. 82-104 (cf. p. 94).
- [VM10] Joris CG VERSCHAEVE et Bernhard MÜLLER. “A curved no-slip boundary condition for the lattice Boltzmann method”. In : *Journal of Computational Physics* 229.19 (2010), p. 6781-6803 (cf. p. 170).

- [Vig14a] Erlend Magnus VIGGEN. “Acoustic equations of state for simple lattice Boltzmann velocity sets”. In : *Physical Review E* 90.1 (2014), p. 013310 (cf. p. 39, 108).
- [Vig14b] Erlend Magnus VIGGEN. “The lattice Boltzmann method : Fundamentals and acoustics”. Thèse de doct. 2014 (cf. p. 63, 65, 104, 105, 107).
- [Vil00] Cédric VILLANI. “Limites hydrodynamiques de l’équation de Boltzmann”. In : *Séminaire Bourbaki* 43 (2000), p. 365-405 (cf. p. 16, 17).
- [Vil02] Cédric VILLANI. “A review of mathematical topics in collisional kinetic theory”. In : *Handbook of mathematical fluid dynamics* 1.71-305 (2002), p. 3-8 (cf. p. 5).
- [VGK97] Bert VREMAN, Bernard GEURTS et Hans KUERTEN. “Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 339 (1997), p. 357-390 (cf. p. 111, 113).
- [Wag98] Alexander J WAGNER. “An H-theorem for the lattice Boltzmann approach to hydrodynamics”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 44.2 (1998), p. 144 (cf. p. 87, 93).
- [WC11] Alexander Thomas WHITE et Chuh Khiun CHONG. “Rotational invariance in the three-dimensional lattice Boltzmann method is dependent on the choice of lattice”. In : *Journal of Computational Physics* 230.16 (2011), p. 6367-6378 (cf. p. 49).
- [WM82] Earl G WILLIAMS et Julian D MAYNARD. “Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 72.6 (1982), p. 2020-2030 (cf. p. 170).
- [XS11] Hui XU et Pierre SAGAUT. “Optimal low-dispersion low-dissipation LBM schemes for computational aeroacoustics”. In : *Journal of Computational Physics* 230.13 (2011), p. 5353-5382 (cf. p. 74).
- [YL03] Wen-An YONG et Li-Shi LUO. “Nonexistence of H theorems for the athermal lattice Boltzmann models with polynomial equilibria”. In : *Physical Review E* 67.5 (2003), p. 051105 (cf. p. 93).
- [YL05] Wen-an YONG et Li-Shi LUO. “Nonexistence of H theorem for some lattice Boltzmann models”. In : *Journal of statistical physics* 121.1 (2005), p. 91-103 (cf. p. 93).
- [YZL+16] Wen-An YONG, Weifeng ZHAO, Li-Shi LUO et al. “Theory of the Lattice Boltzmann method : Derivation of macroscopic equations via the Maxwell iteration”. In : *Physical Review E* 93.3 (2016), p. 033310 (cf. p. 50, 51).
- [ZSC06] Raoyang ZHANG, Xiaowen SHAN et Hudong CHEN. “Efficient kinetic method for fluid simulation beyond the Navier-Stokes equation”. In : *Physical Review E* 74.4 (2006), p. 046703 (cf. p. 79).