Table des matières

Introduction

Une grande partie des études des propriétés statistiques des systèmes dynamiques (SD) est basée sur l'existence d'un trou spectral pour l'opérateur de transfert du système dynamique, sur un espace fonctionnel bien choisi. Pour une étude élégante de cet opérateur nous nous réfèrons aux livres de : Boyarsky et Gora [17], Baladi [12]. Ces ouvrages s'appuient sur l'existence d'une mesure de probabilité invariante et absolument continue (PIAC) et pour plus d'informations nous citons par exemple [17, 39]. Les théorèmes limites centrales (TLC) [1, 3, 8, 10, 15, 21, 36], la décroissance des corrélations (DC) [9, 12, 18, 40], les lois stables (LS), les lois du logarithme itérées (LLI), le principe des grandes déviations (PGD) [5], le principe d'invariance presque sûr (PIPS) [22, 25, 27, 29, 42, 46], les lemmes dynamiques de Borel Cantelli (LDBC) et les inégalités de concentration (IK)[4, 16, 19, 28] sont les propriétés statistiques les plus connues.

Poincaré est le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques. Dès la fin du XIX ième siècle, il a introduit une étude qualitative des solutions d'équations différentielles qu'il ne pouvait pas résoudre explicitement, en particulier celles des équations régissant le mouvement des planètes. Cette théorie fournit une description qualitative des phénomènes naturels tels que l'étude des systèmes de particules sur un réseau ou sur un seul site. La particule est assujettie à une dynamique déterministe locale, mais elle peut sauter d'un site à un autre aléatoirement, voir [39]. L'évolution de ces phénomènes est modélisée par une transformation de l'espace des états possibles du système.

Un système dynamique aléatoire peut être vu comme une composition aléatoire d'applications agissant sur un même espace de probabilités $(X, \mathcal{A}, \mu)$, où les applications sont choisies selon un processus stationnaire. On obtient une chaîne de Markov d'espaces d'états X lorsque ce processus consiste en une suite indépendante et identiquement distribuée d'applications. Plus précisement, si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, et $T_\omega : X \to X,\ \omega \in \Omega$ est une famille d'applications telle que $(\omega, x) \mapsto T_\omega x$ est mesurable, on peut définir une chaîne de Markov (Y_n) par

$$\begin{cases} Y_0 \sim \mu \\ Y_{n+1} = T_{\omega_{n+1}}(Y_n), \end{cases}$$

où $(\omega)_n$ est une suite i.i.d. des variables aléatoires à valeurs dans Ω, de loi commune $\mathbb{P}$, et μ est une mesure de probabilité quelconque (stationnaire ou non) sur X. On s'intéressera dans notre étude aux orbites aléatoires $T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} x$, où x est choisi aléatoirement suivant la loi μ. Dans la suite pour tout $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ on posera

$$T^n_{\underline{\omega}} = T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}.$$

Kifer a étudié de façon intensive le cas d'un processus i.i.d. dans son livre [35], tandis que le cas général est abordé dans le livre d'Arnold [7].

L'existence d'une mesure stationnaire absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue a d'abord été examinée par Pelikan [45] et Morita [44] pour des systèmes unidimensionnels, et dans la thèse de Hsieh [32] pour le cas mulidimensionnel. Ces systèmes possèdent plusieurs propriétés statistiques.

Théorèmes limites centrales

Les théorèmes limites pour les systèmes dynamiques aléatoires se divisent en deux catégories : d'une part, les résultats de type annealed, où l'aléa porte à la fois sur le choix de la condition initiale et le choix des applications itérées, et les résultats de type quenched, où l'aléa porte seulement sur le choix de la condition initiale, et qui sont valides pour presque tout choix des applications itérées.

L'étude de théorèmes limites annealed est basé sur l'analyse spectrale de l'opérateur de transfert en moyenne, généralisant ainsi l'approche utilisée pour les systèmes déterministes. Dans ce sens, on peut citer les articles de Baladi [11], Baladi et Young [14] et Ishitani [33]. Par contre, l'étude de théorème limite quenched est très difficile. La décroissance quenched des corrélations a été étudiée grâce aux cônes de Birkhoff dans [13, 18, 38], tandis qu'un théorème de la limite centrale et une loi du logarithme itéré quenched sont démontrés par Kifer [36] en utilisant une approximation par des martingales. Ces résultats concernent des processus quelconques, non nécessairement i.i.d., où l'existence d'une mesure stationnaire absolument continue n'est plus assurée. Dans le cadre i.i.d., on peut citer les articles [9, 8] sur les automorphismes aléatoires du tore.

Dans cette partie, l'étude de la version quenched du théorème de la limite centrale revient à étudier la convergence en loi des sommes de la forme suivante

$$S_n(x, \omega_1, \omega_2, \cdots) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T_{\omega_k} \cdots T_{\omega_1} x),$$

où $\varphi : X \to \mathbb{R}$ un observable vérifiant $\int_X \varphi \, d\mu = 0$ et les applications T_ω sont des transformations tirées au hasard d'un espace X. Cela a fait l'objet de nombreuses œuvres au cours des années précédentes, voir [8, 3, 10, 36, 52] et ses références.

Nous examinerons les résultats de [3] sur les versions annealed et quenched du théorème de la limite centrale pour les systèmes dynamiques aléatoires (SDA) qui présentent une dilatation uniforme sous un cadre fonctionnel abstrait. En important une technique issue du domaine des marches aléatoires en environnement aléatoire, Ayer, Liverani et Stenlund [8] ont démontré un théorème de la limite centrale quenched pour les automorphismes aléatoires du tore. Leur démarche consiste à établir l'existence d'un trou spectral à la fois pour le système initial, et pour le système dit "doublé" agissant sur X^2 via les applications $\widehat{T}_\omega(x, y) = (T_\omega x, T_\omega y)$, et dirigé par le même processus aléatoire donné par $(\Omega, \mathbb{P})$, pour les choix des applications. Ensuite nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour le quenched théorème de la limite centrale sans centrage aléatoire à tenir. Plus précisement, nous allons caractériser la convergence de $\frac{S_n(x,\omega_1,\omega_2,\cdots)}{\sqrt{n}}$ vers une loi normale pour presque toutes les séquences ω_1, ω_2, $\cdots$ où φ est BV de moyenne nulle par rapport à la probabilité stationnaire absolument continue du système. Nous résumons ce résultat dans le théorème suivant, et nous renvoyons au deuxième chapitre pour les hypothèses exactes sur l'espace de Banach $\mathcal{B}$, la classe d'observables $\mathcal{B}_0$ ainsi que la signification précise de terme "trou spectral". Nous mentionnerons seulement que ce théorème s'applique pour des observables à variation bornée, dans le cas d'une famille finie d'applications dilatantes et $\mathcal{C}^2$ par morceaux , qui possèdent la propriété du recouvrement aléatoire, c'est à dire que tout intervalle non trivial recouvrira l'espace tout entier avec probabilité non nulle en un temps fini.

Théorème 0.1. *Soit $\{T_\omega\}_\omega$ une famille finie d'applications uniformmément dilatantes et $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $[0,1]$. On suppose que le système possède la propriété de recouvrement, et on note μ l'unique mesure stationnaire absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ à variation bornée. Alors φ satisfait le quenched théorème de la limite centrale, c'est à dire*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(T^k_{\underline{\omega}}) - n\int_X \varphi\, d\mu\Big) \to \mathcal{N}(0,\sigma^2), \qquad \textit{quand } n \to \infty$$

sous la probabilité μ, pour $\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}$-presque tout $\underline{\omega}$, où σ^2 est la variance asymptotique annealed de φ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega^{\mathbb{N}}}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}x)\, d\mu(x) - \int_X \varphi d\mu\Big)\Big\}^2 d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) \;=\; 0.$$

Il faut souligner que, contrairement à [8, 3], nous n'assumons pas que toutes les applications T_ω préservent une mesure commune. Néanmoins, nous montrerons par un contre-exemple que notre condition nécessaire et suffisante peut échouer lorsque les applications conservent des mesures différentes, ce qui suggère de rechercher une formulation différente du théorème de limite centrale éteinte, avec un centrage aléatoire. Nous en reparlerons dans le paragraphe 2.3.3.

Principe d'invariance presque sûr

Nous considérons la dynamique aléatoire engendrée par une mesure inversible qui préserve la transformation σ de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans lui même appelée transformation de base. Les trajectoires dans l'espace de phase X sont formées par des concaténations $T^n_\omega := T_{\sigma^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ T_{\sigma\omega} \circ T_\omega$ d'une famille d'applications $T_\omega : X \to X$, $\omega \in \Omega$. Pour un traitement systématique de ces systèmes, nous nous référons à [7]. Pour des observables bornés suffisamment réguliers $\psi_\omega : X \to \mathbb{R}$, un principe d'invariance presque sûr garantit que les variables aléatoires $\psi_{\sigma^n\omega} \circ T^n_\omega$ peuvent être associées à des trajectoires d'un mouvement brownien, l'erreur étant négligeable par rapport à la longueur de la trajectoire. Dans le troisième chapitre, nous considérons que les observables sont définies sur un certain espace de mesure (X, m) qui est muni d'une notion de variation. En particulier, nous considérons des exemples où les observables sont des fonctions à variation bornée. Nous soulignerons que notre approche est assez similaire à celui de [18], où les applications T_ω s'appellent les applications aléatoires Lasota-Yorke.

Dans un contexte plus général et sous des hypothèses appropriées, Kifer a prouvé des théorèmes de la limite centrale (TLC) et des lois du logarithme itéré dans [[36] en référence aux techniques de Philip et Stout [46]. Nous présenterons ici une preuve du (PIPS) pour notre classe de transformations aléatoires, selon une méthode récemment proposée par Cuny et Merlèvede [22]. Cette méthode est particulièrement puissante lorsqu'elle est appliquée aux systèmes dynamiques non stationnaires. Les auteurs de l'article [29] ont prouvé le (TLC) pour une grande classe des systèmes séquentiels par cette méthode.

Nous soulignerons que les systèmes dynamiques aléatoires ω-fibrés décrits ci-dessus sont également non stationnaires puisque nous utilisons des mesures fibrées ω-dépendantes (voir ci-dessous) sur l'espace de probabilité sous-jacent.

La technique de Cuny et Merlèvede est basée sur l'approximation des martingales ; c'était montré dans [29] comment satisfaire une des hypothèses principales [22] en utilisant un résultat de Sprindzuk [50], qui consiste essentiellement à obtenir une limite presque sûre lorsque ce dernier est connu en norme L^1. Pour prouver un tel résultat, nous avons également besoin de deux autres conditions : (i) l'erreur dans l'approximation avec les martingales doit être bornée dans un espace de Banach approprié ; (ii) La décroissance quenched des corrélations par rapport aux mesures fibrées doit être estimée par un taux sommable.

Nous comparons maintenant nos hypothèses et nos résultats avec ceux de l'article de Kifer [36]. Kifer a utilisé une approximation avec les martingales, mais l'erreur d'approximation martingale dans [36] est donnée en termes de séries infinies (voir l'erreur dans l'équation (4.18) dans [36]), ce qui semble difficile à estimer sous des hypothèses générales. Au lieu de cela, notre terme d'erreur est explicitement donné en terme de somme finie (voir l'égalité(3.25)), et comme mentionné ci-dessus, nous pouvons l'estimer facilement. En outre, Kifer a invoqué un taux de mélange, mais pour y faire face, il a supposé des conditions fortes (ϕ-mélange et α-mélange), qui sont très difficiles à vérifier sur des exemples concrets. Nous utilisons une décroissance quenched des corrélations sur un espace d'observables réguliers, par exemple, des fonctions à variation bornée (la décroissance exponentielle a été démontrée par Buzzi [18]), avec une addition : la constante qui mesure la norme de l'observable dans le taux de décroissance est indépendante du bruit ω ; Nous pouvons alors satisfaire les hypothèses du résultat de Sprindzuk.

Le taux que nous obtiendrons en rapprochant notre processus avec une somme de variables gaussiennes i.i.d est d'ordre $n^{1/4}$, ce qui correspond à des corrections logarithmiques prés un taux précédemment obtenu pour des systèmes déterministes uniformément dilatants [27]. Le (PIPS) est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.2. *Considérons $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ la famille d'applications aléatoires de Lasota-Yorke uniformément satisfaite. Alors, la variance τ_n^2 augmentera linéairement comme $\tau_n^2 \sim n\Sigma^2$ et deux cas présenteront :*

(i) soit $\Sigma = 0$, ce qui équivaut à l'existence de $\phi \in L^2(\Omega \times X)$ tel que (condition de cobord)

$$\widetilde{\psi} = \phi - \phi \circ F,$$

(ii) ou $\Sigma^2 > 0$ et dans ce cas pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$ et $d \in (0,1)$, en élargissant l'espace de probabilité $(X, \mathcal{G}, \mu_\omega)$ si nécessaire, il est possible de trouver une séquence $(Z_k)_k$ de variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes telle que

$$\sup_{1\le k\le n} |\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k) - \sum_{k=1}^{n} Z_k| = o\Big(\Big[n^{\frac{1}{2}+d}(|\log n^{\frac{1}{2}-d}| + \log\log n^{\frac{1}{2}+d})\Big]^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s.$$

Décroissance des corrélations

Nous étudions des compositions aléatoires de la forme $T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1}$, où chaque application est $\mathcal{C}^2$ par morceaux de l'intervalle unité dans lui même sans points critiques (i.e. $T'_{\omega_i} \neq 0$ partout), tirée indépendamment des autres d'un ensemble $\{T_{\omega_1},\, \omega_1 \in \Omega\}$ selon une distribution de probabilité $\mathbb{P}(\omega_1)$. Nous assurons que toutes les applications sont uniformément dilatantes vérifiant $\lambda(T_{\omega_i}) > 2$.

Nous prouvons des propriétés statistiques, y compris l'existence d'une mesure invariable absolument continue et da décroissance des corrélations. Les études antérieures impliquant des modèles similaires incluent [18, 37, 43, 45].

Nous avons également appris les travaux très récents [3] sur le sujet. Tout d'abord, nous souhaitons explorer la pertinence de la méthode de couplage dans le contexte cidessus des applications aléatoires uniformément dilatantes. Cette méthode est un outil souple pour établir des propriétés statistiques relatives aux problèmes de perte de mémoire et de la décroissance des corrélations. Dans le domaine des systèmes dynamiques, il a été mis en oeuvre dans divers travaux tels que [20, 51, 53, 57] et bien d'autres. Une introduction élégante au couplage pour les systèmes dynamiques (dans la configuration la plus élémentaire) est trouvée dans [54]. Nous étudions la décroissance des corrélations pour notre système dynamique dans 4.8 et 4.9 sous certaines hypothèses.

Plan de la thèse

Le plan de notre travail est composé :

- ⋄ Le premier chapitre est consacré aux systèmes dynamiques et à la théorie ergodique ainsi que à l'analyse spectrale de l'opérateur de transfert.
- ⋄ Dans le deuxième chapitre nous introduisons six hypoyhèses du (H_1) au (H_6) sous lesquelles l'opérateur de transfert P possède un trou spectral sur un espace de Banach $\mathcal{B}$. Nous montrons ensuite des résultats annealed pour les applications uniformément dilatantes $\mathcal{C}^2$ par morceaux. Enfin nous établissons une condition de validité nécessaire et suffisant pour laquelle la version quenched du théorème de la limite centrale est satisfaite en dimension 1.
- ⋄ Dans le troisième chapitre nous étudions le (PIPS) pour les application aléatoires dilatantes par morceaux. Nous présentons certaines hypothèses sous lesquelles le (PIPS) est vérifiée en se basant sur la méthode d'approximation des martingales de Cuny et Merlèvede. Nous étudions aussi le théorème de Sprindzuk et ses conséquences.
- ⋄ Nous présentons dans le chapitre quatre le modèle précisément et introduisons des préliminaires mathématiques nécessaires pour comprendre les résultats et les preuves dans le reste du chapitre en utilisant la méthode de couplage.
- ⋄ Dans le dernier chapitre nous allons rappeler des notions classiques sur la théorie de la mesure et des probabilités, ainsi que quelques notions de base concernant les processus stochastiques et une petite présentation sur l'espace des fonctions à variation bornée.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques (SDA) et théorie ergodique

La théorie des systèmes dynamiques fournit une description qualitative des phénomènes naturels. Pour décrire l'évolution de ces phénomènes, on a besoin de deux choses :

1. Un ensemble dont les éléments représentent les états possibles du système dynamique aléatoire considéré, appelé espace de phases.
2. Une transformation de l'espace de phases dans lui même décrivant cette évolution temporelle.

On étudiera dans la suite la théorie déterministe à temps discret, c'est à dire le futur du système est parfaitement déterminé dès lors que l'on connaît son état initial. Nous allons brièvement rappeler les définitions et les propriétés de base qui nous serviront tout au long de cette étude. Pour une introduction complète de la théorie ergodique ou des systèmes dynamiques on pourra consulter par exemple [17].

1.1 Systèmes dynamiques métriques

Définition 1.1. Un système dynamique mesurable (SD) discret est la donnée d'un triplet $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta)$ tel que

1. $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$ est un espace mesurable,
2. $\theta : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ est une application mesurable.

Dans ce cas $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'applications mesurables de $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$ dans lui-même vérifiant

1. $\theta^0 = Id_{\widetilde{\Omega}}$,
2. Pour tous $n,\ m \in \mathbb{N}$, on a
$$\theta^{n+m} = \theta^n \circ \theta^m.$$

Définition 1.2. Un système dynamique $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta)$ est dit métrique, noté $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$, s'il munit d'une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$ telle que

$$\theta\,\widetilde{\mathbb{P}} = \widetilde{\mathbb{P}}.$$

Dans ce cas, on dit aussi que la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ est θ-invariante. Cette invariance de la mesure est caracterisée par :

Propriété 1.3. *soit $\widetilde{\mathbb{P}}$ une mesure de probabilité sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$. $\widetilde{\mathbb{P}}$ est θ-invariante si et seulement si, pour toute fonction réelle $\Phi \in L^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$ on a*

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \Phi \circ \theta \, d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_{\widetilde{\Omega}} \Phi \, d\widetilde{\mathbb{P}}.$$

Cette caractérisation des mesures invariantes nous dit que quel que soit l'observable Φ d'espérance finie, sa moyenne ne dépend plus du temps. Du point de vue des moyennes d'ensemble, le régime asymptotique est atteint.
En utilisant différentes mesures invariantes pour distinguer différents régimes de la dynamique. C'est aussi une façon de sélectionner certaines conditions initiales.

Définition 1.4. Soit $A \subset \widetilde{\Omega}$. On dit que A est invariant si $\theta^{-1}A = A$. De même, lorsque A est mesurable, on dit qu'il est invariant modulo zéro si $\widetilde{\mathbb{P}}[(\theta^{-1}A) \triangle A] = 0$.

Classer les différentes orbites de notre système revient en fait à trouver des ensembles invariants sur lesquels la dynamique est semblable. Pour cela nous introduirons la notion d'ergodicité pour notre système dynamique métrique $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$.
Dans toute la suite, on notera par $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ un système dynamique métrique.

1.2 Théorie ergodique

Définition 1.5. Soit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ un système dynamique. On dit que la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ est ergodique si les seuls ensembles invariants modulo zéro sont les ensembles de mesure 0 ou 1.

Les mesures ergodiques sont donc les mesures de probabilité qui se concentrent sur des ensembles que l'on ne peut plus subdiviser. En fait, toute mesure invariante est une combinaison convexe de mesures ergodiques.

Remarque 1.6. On dit que $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ est un système ergodique si la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ est ergodique.

On ne pourra plus parler de mesures invariantes si l'on n'avait pas au moins un exemple existant, voyons donc l'exemple suivant :

Exemple 1.7. Supposons qu'il existe un point $\omega \in \widetilde{\Omega}$ périodique, de période n, i.e. n est le plus petit entier naturel tel que $\theta^n(\omega) = \omega$. Alors la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ définie par

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\theta^i \omega},$$

est invariante et ergodique.

Revenons sur la notion d'ergodicité par un rappel sur un résutlat intéressant donné par :

Théorème 1.8. *(théorème de Birkhoff) Soit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ un système ergodique et $\varphi \in L^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$, alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^i(\omega) \longrightarrow \int \varphi \, d\widetilde{\mathbb{P}}, \quad p.p. \omega \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.1}$$

Remarquons qu'avec $X_i = \varphi \circ \theta^i$, on a par invariance de $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_{\widetilde{\Omega}} \varphi \circ \theta^i \, d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_{\widetilde{\Omega}} \varphi \, d\widetilde{\mathbb{P}}.$$

Le théorème du Birkhoff nous donne une première propiété :

Proposition 1.9. *Soit* $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *est ergodique par rapport à* θ *si* $\varphi \circ \theta = \varphi$ *est constante* $\widetilde{\mathbb{P}}$*-presque partout.*

Une deuxième propriété du théorème de Birkhoff est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 1.10. $\widetilde{\mathbb{P}}$ *est ergodique par rapport à* θ *ssi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\mathbb{P}}(\theta^{-i} A \cap B) = \widetilde{\mathbb{P}}(A)\widetilde{\mathbb{P}}(B),\ \forall\, A,\ B \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Définition 1.11. On dit qu'un endomorphisme mesurable θ de l'espace $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ est non singulier lorsque $\theta\widetilde{\mathbb{P}} << \widetilde{\mathbb{P}}$, i.e.

$$\widetilde{\mathbb{P}}(E) = 0 \Rightarrow \widetilde{\mathbb{P}}(\theta^{-1}E) = 0,\ \forall\, E \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Définition 1.12. On dit que le système $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ est faiblement mélangeant si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\widetilde{\mathbb{P}}(\theta^{-k} A \cap B) - \widetilde{\mathbb{P}}(A)\widetilde{\mathbb{P}}(B)| = 0,\ \forall\, A,\ B \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Définition 1.13. On dit que le système $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ est mélangeant si

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}(\theta^{-n} A \cap B) - \widetilde{\mathbb{P}}(A)\widetilde{\mathbb{P}}(B) = 0,\ \forall\, A,\ B \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Remarque 1.14. On voit tout de suite que $\widetilde{\mathbb{P}}$ mélangeante $\Rightarrow$ $\widetilde{\mathbb{P}}$ faiblement mélangeante $\Rightarrow$ $\widetilde{\mathbb{P}}$ ergodique.

On donne maintenant des caractérisations fonctionnelles de ces notions ; pour cela on utilise habituellement l'opérateur d'évolution de Koopman.

Définition 1.15. Soit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ un système dynamique. On appelle opérateur d'évolution (ou de Koopman) l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\ :\ L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})\ &\to\ L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}) \\ g &\mapsto g \circ \theta\ . \end{aligned}$$

Remarque 1.16. Il est facile de montrer que l'opérateur $\mathcal{U}$ est un opérateur continu de $L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$ dans lui même, c'est à dire pour tout $g \in L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$, on a $\|\mathcal{U}g\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$.

Théorème 1.17. *[47] Soit* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ *un système dynamique.*

(i) La mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ *est ergodique par rapport à* θ *si*

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\widetilde{\Omega}} f\, \mathcal{U}_{\theta}^{k} g\, d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_{\widetilde{\Omega}} f\, d\widetilde{\mathbb{P}} \int_{\widetilde{\Omega}} g\, d\widetilde{\mathbb{P}},\ \forall f \in L^{1}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}),\ g \in L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}).$$

(ii) La mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ *est faiblement mélangeante par rapport à* θ *si*

$$\lim_{n\infty} |\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\widetilde{\Omega}} f\, \mathcal{U}_{\theta}^{k} g\, d\widetilde{\mathbb{P}} - \int_{\widetilde{\Omega}} f\, d\widetilde{\mathbb{P}} \int_{\widetilde{\Omega}} g\, d\widetilde{\mathbb{P}}| = 0,\ \forall f \in L^{1}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}),\ g \in L^{\infty}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}).$$

(iii) La mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ est mélangeante par rapport à θ si

$$\lim_{n\infty} |\frac{1}{n}\int_{\widetilde{\Omega}} f\,\mathcal{U}_\theta^k g\,d\widetilde{\mathbb{P}} - \int_{\widetilde{\Omega}} f\,d\widetilde{\mathbb{P}}\int_{\widetilde{\Omega}} g\,d\widetilde{\mathbb{P}}| = 0,\ \forall f \in L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathbb{P}}),\ g \in L^\infty(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathbb{P}}).$$

On peut interpréter le mélange selon un point de vue probabiliste. On suppose que la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ est mélangeante alors asymptotiquement les ensembles $\theta^{-n}A$ et B vont devenir indépendants.
On notera que toute mesure mélangeante est ergodique. Nous pouvons remarquer que la mesure de Lebesgue m sur le cercle unité $\mathcal{S}^1$ est mélangeante pour $\theta\omega = 2\omega$ alors qu'elle n'est jamais mélangeante pour $\theta\omega = \omega + a$ (quelque soit $a \in \mathbb{R}$).

Remarque 1.18. Le mélange et le mélange faible sont des invariants métriques.

Lorsque la mesure est mélangeante, on peut étudier la vitesse de convergence pour laquelle la suite précédente va converger vers sa limite dépend du système étudié mais aussi des fonctions f et g. Nous rappelons ainsi la notion de décroissance des corrélations :

Définition 1.19. Soit $(E, \|\|_E)$ un espace vectoriel normé tel que $E \subseteq L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathbb{P}})$. Soit $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{n\to\infty}\Psi(n) = 0$. On dit que le système $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathbb{P}},\theta)$ a une décroissance des corrélations de vitesse Ψ par rapport aux observables de E si

$$|\int g \circ \theta^n\ f\,d\widetilde{\mathbb{P}} - \int f\,d\widetilde{\mathbb{P}}\int g\,d\widetilde{\mathbb{P}}| \leq \Psi(n)\|f\|_E\|g\|_E,$$

pour toutes fonctions $f : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ et $g : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ appartenant à E.

Remarque 1.20. Dans cette thèse, nous allons s'intéresser seulement aux deux espaces vectoriels $(L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathbb{P}}), \|.\|_1)$ et $(L^\infty(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathbb{P}}), \|.\|_\infty)$ où $\widetilde{\mathbb{P}}$ est la mesure de Lebesgue sur $\widetilde{\Omega}$.

1.3 Opérateur de Perron-Frobenius et analyse spectrale

Dans ce paragraphe, nous allons définir un outil très intéressant et essentiel pour construire des mesures invariantes et en étudier les propriétés statistiques des systèmes dynamiques ainsi engendrés, c'est l'opérateur de Perron-Frobenius. Nous allons présenter notre cadre de travail en prenant les applications inversibles par morceaux. On référera par exemple aux livres suivants : [17, 31, 34].

Définition 1.21. Un système pondéré est la donnée d'un quadruplet $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{T}},\theta,\varphi)$ tel que

(i) $\theta : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ est un endomorphisme inversible par morceaux,

(ii) $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ est un potentiel,

avec $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}$.

φ est appelé potentiel par analogie avec la mécanique statistique. En fait beaucoup de termes de systémes dynamiques sont issus de la thermodynamique.

Définition 1.22. On dit que la mesure de probabilité m sur $\widetilde{\Omega}$ est une mesure conforme pour le système pondéré $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{T}},\theta,\varphi)$ si $A \in \widetilde{\mathcal{T}}$ où $\theta_{|A}$ est une injection,

$$m(\theta A) = \int_A \exp(-\varphi)\,dm.$$

Grâce à la conformité de la mesure m, la dérivée de Radon-Nykodim de m par rapport à la mesure itérée θm est égale à $\exp(-\varphi)$. Les mesures conformes ont des propriétés intéressantes qui sont bien exprimées avec un opérateur dual à la dynamique, c'est l'opérateur de Perron-Frobenius, appelé aussi opérateur de transfert.

Définition 1.23. L'opérateur de Perron-Frobenius du système pondéré $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta, \varphi)$ est formellement donné par :

$$Pf(\omega) = \sum_{\theta(\omega')=\omega} exp(\varphi(\omega'))f(\omega').$$

Remarque 1.24. Tout d'abord, on rappelle qu'une partition mesurable de $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ est une famille d'ensembles mesurables $\mathcal{W} = \{W_\alpha \in \mathcal{A};\ \alpha \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable telle que :

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\Omega} \setminus \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha) = 0 \quad et \quad \widetilde{\mathbb{P}}(W_{\alpha_1} \cap W_{\alpha_2}) = 0 \quad si \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

On peut donc écrire l'opérateur de transfert en utilisant la partition de la façon suivante

$$Pf = \sum_{W \in \mathcal{W}_\alpha} exp(\varphi \circ \theta^{-1}_{|W}) f \circ \theta^{-1}_{|W}) 1_{\theta W}.$$

Proposition 1.25. *[47] Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) m est une mesure conforme,

(ii) pour tout ensemble A sur lequel θ est une application injective,

$$m(A) = \int P(1_A) dm,$$

(iii) pour toute fonction $f \in L^1(\widetilde{\Omega}, m)$,

$$\int f\, dm = \int Pf\, dm,$$

(iv) pour toutes fonctions $f \in L^1(\widetilde{\Omega}, m)$ et $g \in L^\infty(\widetilde{\Omega}, m)$,

$$\int Pf\, g\, dm = \int f\, g \circ \theta\, dm.$$

La dernière égalité est appelée relation de dualité qui nous permet de déterminer l'opérateur dual, noté $\mathcal{U}$, de l'opérateur de transfert, donné par $\mathcal{U}g = g \circ \theta$. $\mathcal{U}$ sera appelé l'opérateur d'évolution, appelé aussi opérateur de Koopman ou opérateur de composition dans certain ouvrage [47].

Proposition 1.26. *L'opérateur de transfert P agissant sur $L^1(\widetilde{\Omega}, m)$ dans lui-même possède les propiétés suivantes :*

(a) P est un opérateur linéaire,

(b) P est un opérateur positif, au sens que pour toute application $f : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+$, Pf est positif,

(c) P préserve l'intégrale, i.e.

$$\int_{\widetilde{\Omega}} Pf\, dm = \int_{\widetilde{\Omega}} f\, dm,$$

(*d*) *P est une contraction sur* $L^1(\widetilde{\Omega}, m)$*, c'est à dire pour tout* $f \in L^1(\widetilde{\Omega}, m)$*, on a*

$$\|Pf\|_{L^1_m} \leq \|f\|_{L^1_m},$$

(*e*) *P satisfait la propriété de composition, c'est à dire si l'on note* P_{θ_i} *l'opérateur associé à l'aplication* θ_i *avec* $i \in \{1, 2\}$*, alors* $P_{\theta_1} \circ P_{\theta_2} f = P_{\theta_1 \circ \theta_2} f$*.*

Corollaire 1.27. (*i*) *L'opérateur P est continu ;*

(*ii*) *on a :* $P_{\theta^n} f = P^n_\theta f$*.*

Les mesures conformes, ayant un lien très fort avec la dynamique, ne sont pas invariantes en général. Nous introduisons donc le théorème suivant pour mettre l'accent sur le critère qui nous permet d'affirmer l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à une mesure conforme.

Théorème 1.28. *[47] Soit* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta, \varphi)$ *un système pondéré et m une mesure conforme. Une mesure de probabilité* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *absolument continue par rapport à m, de densité h positive, est invariante ssi* $Ph = h$*.*

Remarque 1.29. Les mesures invariantes absolument continues par rapport à une mesure conforme, sont donc exactement les mesures dont les densités sont les points fixes de l'opérateur de Perron Frobenius, c'est à dire la densité h de la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ est les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$.

on a alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.30. *Une mesure conforme est invariante si et seulement si* $P\boldsymbol{1} = \mathbf{1}$*.*

Voyons qu'il existe une relation très forte entre la valeur propre 1 pour l'opérateur de Perron Frobenius et les mesures conformes ; mais le reste du spectre va aussi nous donner plusieurs informations sur la dynamique. En particulier, on s'intéressera au cas où l'on pourra montrer que l'opérateur de Perron-Frobenius est quasi-compact.

Définition 1.31. On dira que l'opérateur de Perron-Frobenius P du système $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta, \varphi)$ est quasi-compact (ou qu'il possède un trou spectral) sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ lorsqu'il vérifie les propositions suivantes :

(*i*) P n'a qu'un nombre fini de valeurs propres dont 1 sur le cercle unité : $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ de multiplicité finie : $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$.

(*ii*) P admet la décomposition suivante :

$$P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i + Q,$$

où Q est un opérateur linéaire de rayon spectral strictement inférieur à 1 et les Π_i sont les projecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i, vérifiant : $\Pi_i \Pi_j = 0$ pour tous $i \neq j$ et $\Pi_i Q = Q \Pi_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$.

Proposition 1.32. *[47]*
Supposons que $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \theta, \varphi)$ *possède une mesure conforme m et que l'opérateur de Perron-Frobenius associé, noté P, ait un trou spectral sur un sous-espace de Banach dense avec injection continue. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) 1 appartient au spectre de P , et si l'on que $\lambda_1 = 1$, alors $h = \Pi_1 \lambda_1$ est un point fixe de P, de plus c'est une densité ($h \geq 0$ et $m(h) = 1$). La mesure $\widetilde{\mathbb{P}} = h\, m$ est donc une probabilité invariante, absolument continue par rapport à m.

(ii) Les projections Π_j, P et donc Q ont une unique extension sur L^1. De plus, pout tout $j = 1, \cdots, k$, $\Pi_j(L^1_m) \subset \mathcal{B}$, et pour tout $f \in L^1_m$, $Q^n f \to 0$ dans L^1_m quand $n \to \infty$.

(iii) Il y a exactement α_1 mesures invariantes ergodiques absolument continues par rapport à m. De plus, μ définie au (i) est la "plus grande" mesure invariante absolument continue, c'est-à-dire que toute mesure invariant absolument continue par rapport à m est également absolument continue par rapport à $\widetilde{\mathbb{P}}$.

(iv) Le spectre périphérique de P est complètement cyclique : pour tout $|\lambda| = 1$ et f tel que $Pf = \lambda f$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $((\frac{f}{|f|})^k |f|, \lambda^k)$ sont des éléments propres de P. En particulier l'ensemble $G = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ des valeurs propres de module 1 est un sous-groupe du cercle unité de dimension finie, ce qui implique que toute le valeurs propre de module 1 est une puissance entière d'une racine de l'unité.

(v) il existe une partition de X (modulo $\widetilde{\mathbb{P}}$) $W_{j,l} | j = 1, \cdots, \alpha_1$, $l = 0, \cdots, L_j - 1$ telle que tous les ensembles vérifient $TW_{j,l} = W_{j,l+1\, mod L_j}$ et telle que pour tous $j = 1, \cdots, \alpha_1$ et $l = 0, \cdots, L_j - 1$ le système $(W_{j,l}, T^{L_j}, \widetilde{\mathbb{P}}_{W_{j,l}})$ est mélangeant, où $\widetilde{\mathbb{P}}_{W_{j,l}}$ est la mesure restreinte à $W_{j,l}$ normalisée.

La quasi-compacité nous apporte donc plusieurs informations sur le sytème, mais vérifier cette propriété directement peut être très délicat et difficile, pour cela le théorème de **Ionescu-Tulcea et Marinescu** [56] (voir aussi le théorème de Hennion [30]) sera précieux pour nos analyses spectrales puisqu'il nous assure la quasi-compacité de toute une classe d'opérateurs.

Théorème 1.33. ***(Ionescu-Tulcea et Marinescu)****[56]*
Soient $(E, \|.\|_1)$ et $(F, \|.\|_2)$ deux espaces de Banach avec $E \subset F$ et un opérateur $\widetilde{P} : E \to E$, on prend la norme :

$$\|\widetilde{P}\|_E = \sup \Big\{ \frac{\|Pf\|_2}{\|f\|_2};\ f \in E;\ f \neq 0 \Big\}.$$

On suppose que

(i) Si $f_n \in E$, $f \in F$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ et $\|f_n\|_1 \leq C$ pour tout n, alors $f \in E$ et $\|f\|_1 \leq C$;

(ii) $H = \sup_{n\geq 0} \|\widetilde{P}^n\|_E < \infty$;

(iii) Il existe $k \geq 1$, $0 < r < 1$ et $R < \infty$ tels que pour tout $f \in E$:

$$\|\widetilde{P}^k f\|_1 \leq r\|f\|_1 + R\|f\|_2;$$

(iv) Si E_1 est un sous-ensemble borné de $(E, \|.\|_1)$ alors la fermeture de $\widetilde{P}^k E_1$ est compacte dans $(F, \|.\|_2)$.

Alors si toutes les hypothèses sont verifées, $\widetilde{P}$ est un opérateur quasi-compact sur E.

Les cas qui vont nous intéresser le plus souvent sont les suivants :

Corollaire 1.34. *Si l'on prend $E = BV$ ou $E = V_\alpha$ et $F = L^1_m$ munis de leurs normes usuelles, et que l'on considère l'opérateur de Perron-Frobenius pour $\widetilde{P}$ alors il suffit de vérifier l'hypothèse (iii) pour assurer la quasi-compacité de celui-ci.*

Remarque 1.35. L'hypothèse (iii) est généralement appelée inégalité du type Lasota-Yorke.

On introduira au deuxième chapitre des hypothèses qui permettent d'appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu précédent, assurant l'existence de trou spectral pour des applications uniformément dilatantes en dimension 1 qui sont définies de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui même en prenant les espaces à variation bornée en dimension quelconque ou les espaces quasi-Hölder. La technique employée consiste à considérer le système induit sur un certain sous-ensemble, est susceptible de posséder un trou spectral.

1.4 Systèmes dynamiques aléatoires

Les systèmes aléatoires évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régisse, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps. Nous nous limitons au cas d'un temps discret. Prenons un système dynamique métrique défini dans le premier paragraphe $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ avec θ est une application inversible. Considérons X un espace métrique compact qui jouera le rôle d'espace de phases que l'on munit de sa σ-algèbre de Borel $\mathcal{A}$.

Définition 1.36. Un système dynamique aléatoire (SDA) discret sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ à valeurs dans $(X, \mathcal{A})$ est la donnée d'un couple (θ, T) tel que

1. $\theta : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ est une application mesurable et $\theta\,\widetilde{\mathbb{P}} = \widetilde{\mathbb{P}}$,
2. $T : \widetilde{\Omega} \times X \to X$ est une application mesurable.

Définition 1.37. Le (SDA) (θ, T) est dit de classe $\mathcal{C}^k$ si X est une variété différentielle et si pour tout $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$, l'application

$$\begin{aligned} T_{\underline{\omega}} : X &\to X \\ x &\mapsto T_{\underline{\omega}} x, \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X.

Etant donné un (SDA) discret (θ, T), on lui associe l'équation d'itération aléatoire (EIA) suivante :

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\underline{\omega}) = T_{\theta^n \underline{\omega}} Y_n(\underline{\omega}) \\ Y_0(\underline{\omega}) = x \in X, \end{cases} \tag{1.2}$$

qui admet une solution unique (qui dépend de n, $\underline{\omega}$ et x) et qu'on note

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} \times \widetilde{\Omega} \times X &\to X \\ (n, \underline{\omega}, x) &\mapsto \varphi(n, \underline{\omega}, x). \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$, on note par

$$\begin{aligned} \varphi^n_{\underline{\omega}} : X &\to X \\ x &\mapsto \varphi(n, \underline{\omega}, x). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\varphi^n_{\underline{\omega}} = \begin{cases} T_{\theta^{n-1}\underline{\omega}} \circ \ldots \circ T_{\underline{\omega}} & si\ n \geq 1 \\ Id_X & si\ n = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

On remarque que φ vérifie la propriété du cocycle, i.e.

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}) : \quad \varphi^{n+1}_{\underline{\omega}} = \varphi^n_{\theta\underline{\omega}}\, o\, \varphi^1_{\underline{\omega}}. \tag{1.4}$$

Définitions 1.38. 1. L'orbite aléatoire partante de $x \in X$ est définie par $\varphi^n_{\underline{\omega}} x$ pour tout $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$,

2. (θ, T) s'appelle SDA généré par des applications aléatoires $\{T_{\underline{\omega}}\}_{\underline{\omega}\in\widetilde{\Omega}}$ sur le SD $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \theta)$ à valeurs dans $(X, \mathcal{A})$.

Une représentation forte utile de tels systèmes est donnée par l'application suivante

$$\begin{aligned} F\ :\ \widetilde{\Omega} \times X\ &\rightarrow\ \widetilde{\Omega} \times X \\ (\underline{\omega}, x) &\mapsto (\theta\underline{\omega}, T_{\underline{\omega}} x). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$F^n(\underline{\omega}, x) = (\theta^n \underline{\omega}, T_{\theta^{n-1}\underline{\omega}} \circ \ldots \circ T_{\theta\underline{\omega}} \circ T_{\underline{\omega}} x),$$

pour tous $n \geq 1$, $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ et $x \in X$. Donc

$$F^n(\underline{\omega}, x) = (\theta^n \underline{\omega}, \varphi^n_{\underline{\omega}} x)$$

Définition 1.39. L'application F, est appelée produit oblique associé au système (θ, T).

Remarque 1.40. On remarque que l'application F est un système dynamique déterministe et on observe que la mesurabilité de (θ, T) entraine donc la mesurabilité de l'application F. Réciproquement, toute application construite comme un produit oblique définit sur sa seconde coordonnée un système dynamique aléatoire mesurable (on cite [7] par exemple). Ainsi, on peut étudier les propriétés statistiques du système dynamique aléatoire (θ, T) en utilisant le système dynamique déterministe F sur lequel on peut appliquer les résultats classiques de la théorie ergodique.

Nous allons introduire un objet très intéressant qui nous permet de décrire le comportement à long terme d'un système dynamique aléatoire donné, autrement dit une adaptation des mesures invariantes au cas aléatoire. Prenons donc une mesure ν invariante pour le système dynamique $(\widetilde{\Omega} \times X, \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A}, F, \nu)$ et la projection canonique définie par

$$\begin{aligned} \pi_{\widetilde{\Omega}}\ :\ \widetilde{\Omega} \times X\ &\rightarrow\ \widetilde{\Omega} \\ (\underline{\omega}, x) &\mapsto \underline{\omega}. \end{aligned}$$

Soit ν une mesure de probabilité sur $(\widetilde{\Omega} \times X, \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A})$ qui est F-invariante, i.e.

$$F\nu = \nu.$$

Il est alors clair que

$$\theta((\pi_{\widetilde{\Omega}})\nu) = \pi_{\widetilde{\Omega}}\nu,$$

c'est à dire que la mesure marginale de ν sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$ doit être θ-invariante. Dans cette situation l'aléa est donné à priori, il convient donc de se limiter aux mesures invariantes qui vérifient

$$\pi_{\widetilde{\Omega}}\nu = \widetilde{\mathbb{P}}.$$

Définition 1.41. Une mesure de probabilité ν sur $(\widetilde{\Omega} \times X, \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A})$ est dite T-invariante si

1. $F\nu = \nu$,
2. $(\pi_{\widetilde{\Omega}})\nu = \widetilde{\mathbb{P}}$.

Dans toute la suite, on notera par
$\mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X)$ l'ensemble de toutes les probabilités sur $(\widetilde{\Omega} \times X, \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A})$ de marginale $\widetilde{\mathbb{P}}$ et

$$\mathcal{I}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(T) := \Big\{\nu \in \mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X) : \nu \; est \; T - invariante\Big\}.$$

Dans le cas général, une mesure de probabilité ν invariante pour le produit oblique ne s'écrit pas comme un produit. En particulier l'invariance peut être exprimée en termes de désintégration par rapport à l'aléa. Commençons par rappeler un résultat de théorie de la mesure et on référa au livre d'Arnold [7] pour plus d'informations :

Proposition 1.42. *[7]*
Toute mesure de probabilité ν sur $(\widetilde{\Omega} \times X, \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A})$ de marginale $\widetilde{\mathbb{P}}$ se désintègre de la façon suivante : il existe une application

$$\begin{array}{rcll} \nu_{\cdot}(.) : & \widetilde{\Omega} \times \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ & (\underline{\omega}, B) & \mapsto & \nu_{\underline{\omega}}(B) \end{array}$$

telle que pour $\widetilde{\mathbb{P}}$-presque tout $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$:

(i) $\nu_{\underline{\omega}}$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$,

(ii) $\underline{\omega} \mapsto \nu_{\underline{\omega}}$ est $\widetilde{\mathcal{T}}$-mesurable pour tout $B \in \mathcal{A}$,

(iii) pour tout $A \in \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_{\widetilde{\Omega}} \int_X 1_A(\underline{\omega}, x)\nu_{\underline{\omega}}(dx)\widetilde{\mathbb{P}}(d\underline{\omega}). \tag{1.5}$$

De plus cette décomposition est $\widetilde{P}$-presque-sûrement unique.

Remarques 1.43. 1. La formule (1.5) s'écrit symboliquement :

$$\nu(d\underline{\omega}, dx) = \nu_{\underline{\omega}}(dx)\widetilde{\mathbb{P}}(d\underline{\omega}),$$

2. (iii) est équivalente à chacune des trois propriétés suivantes :
   (a) pour tous $C \in \widetilde{\mathcal{T}}$, $B \in \mathcal{A}$, on a
   $$\nu(C \times B) = \textstyle\int_{\widetilde{\Omega}} 1_C(\underline{\omega})\nu_{\underline{\omega}}(B)\widetilde{\mathbb{P}}(d\underline{\omega}),$$
   (b) pour tout $A \in \widetilde{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A}$, on a
   $$\mu(A) = \textstyle\int_{\widetilde{\Omega}} \nu_{\underline{\omega}}(A_{\underline{\omega}})\widetilde{\mathbb{P}}(d\underline{\omega}),$$
   où
   $$A_{\underline{\omega}} := \Big\{x \in X : (\underline{\omega}, x) \in A\Big\},$$
   (c) Pour tout f $\in L^1(\mu)$
   $$\textstyle\int_{\widetilde{\Omega}\times X} f d\nu = \int_{\widetilde{\Omega}} \Big(\int_X f(\underline{\omega}, x)\nu_{\underline{\omega}}(dx)\Big)\widetilde{\mathbb{P}}(d\underline{\omega}).$$

En appliquant cette désintégration au produit oblique F il est alors possible de caractériser l'invariance d'une mesure dans le cas aléatoire :

Lemme 1.44. *[7]*
Soit $\nu \in \mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X)$. Alors la factorisation de $F\mu$ est donnée par

$$\Big(F\nu\Big)_{\underline{\omega}} = T_{\theta^{-1}\underline{\omega}}\nu_{\theta^{-1}\underline{\omega}}; \ \ p.s.$$

Théorème 1.45. *[7]*
Soit $\nu \in \mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\nu \in \mathcal{I}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(T)$,
2. $\mathbb{E}\Big(T_{.}\nu_{.}|\theta^{-1}\widetilde{\mathcal{T}}\Big)_{\underline{\omega}} = \nu_{\theta\underline{\omega}}, \qquad p.s.$
3. $T_{\underline{\omega}}\nu_{\underline{\omega}} = \nu_{\theta\underline{\omega}}. \qquad\qquad p.s.$

Soient $\nu \in \mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\widetilde{\mathcal{T}}$. Alors la factorisation de la restriction de ν *sur* $\mathcal{G} \otimes \mathcal{A}$ par rapport à la restriction de $\widetilde{\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{G}$ est appelée probabilité conditionnelle de ν par rapport à $\mathcal{G}$.
Soit $(\underline{\omega}, B) \to F_{\underline{\omega}}(B)$, une telle factorisation. En appliquant la définition et l'unicité de la factorisation, on voit que

$$F_{\underline{\omega}}(B) = \mathbb{E}\Big(\nu_{\underline{\omega}}(B)|\mathcal{G}\Big) := \mathbb{E}\Big(\nu_{.}|\mathcal{G}\Big)_{\underline{\omega}}(B).$$

Exemple 1.46. Soit μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$. Alors

$$\nu := \widetilde{\mathbb{P}} \otimes \mu,$$

est un élément de $\mathcal{P}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{\Omega} \times X)$. De plus, on a

- ◇ la factorisation de ν est donnée par $\nu_{\underline{\omega}} = \nu$, pour presque tout $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$,
- ◇ la mesure ν est T-invariante si et seulement si

$$\mathbb{E}(T_{.}\mu|\theta^{-1}\widetilde{\mathcal{T}}) = \mu; \ \ p.s. \tag{1.6}$$

On suppose que les sous-ensembles $T_{.}$ et $\theta^{-1}\widetilde{\mathcal{T}}$ sont indépendants.
Il est facile de vérifier que les sous-ensembles $(T_{\underline{\omega}}\mu)(B)$ et $\theta^{-1}\widetilde{\mathcal{T}}$ sont indépendants où

$$(T_{\underline{\omega}}\mu)(B) = \int_X 1_B(T_{\underline{\omega}}x)\mu(dx).$$

Alors (1.6) devient

$$\mathbb{E}(T_{.}\mu)(B) = \int_X \widetilde{\mathbb{P}}\{\underline{\omega} \, : \, T_{\underline{\omega}}x \in B\}\mu(dx) = \mu(B),$$

autrement

$$\mathbb{E}(T_{.}\,\nu) = \nu.$$

1.5 Relation entre chaîne de Markov et SDA généré par des applications aléatoires mesurables i.i.d

Nous considérons le système dynamique (θ, T). Un cas particulièrement intéressant est celui de systèmes dynamiques aléatoires générés par la composition d'applications aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Plus précisement on prend une famille de dynamiques indexées sur l'espace des aléas. Soit X un espace métrique compact qui jouera le rôle d'espace de phases que l'on munit de sa σ-algèbre de Borel $\mathcal{A}$. Étant donné un processus (ω_n) i.i.d sur Ω de loi commune $\widetilde{\mathbb{P}}$ et l'on définit l'orbite aléatoire d'un point $x \in X$ par :

$$T^n_{\underline{\omega}} = T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1} x.$$

On commençons par un premier exemple très simple des systèmes dynamiques i.i.d engendré par une suite récurrente aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exemple 1.47. On considère un réel positif a et une suite $(\omega_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, on définit donc (X_n) par

$$X_{n+1} = a\,X_n + \omega_{n+1},$$

X_0 étant donné. On distingue donc trois cas :

Premier cas : Si $a = 1$ alors il s'agit d'une marche aléatoire classique unidimensionnelle. Dans la suite, on peut voir que la suite (X_n) obtenue comme composition de deux applications affines $T_1(x) = ax - 1$ et $T_2(x) = ax + 1$, chacune étant choisie avec la même probabilité $p = 1/2$.

Deuxième cas : $a > 1$ il est facile de voir que

$$\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} X_n = \pm\infty\} = 1,$$

en écrivant $X_n = a^n X_0 + a^{n-1}\omega_{n-1} + a^{n-2}\omega_{n-2} + \cdots + \omega_n$.

Troisième cas : Supposons que $a \in (0, 1)$. On peur écrire alors pout tout n positif

$$X_n = a_n X^0 + Y_n \quad \text{où} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\omega_k.$$

Posons $Z_n = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}\omega_k$; le processus (ω_n) étant donné i.i.d, Y_n et Z_n ont la même loi et le fait que $a \in (0, 1)$, Z_n converge presque sûrement vers une variable Z_∞ supportée sur $[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}]$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ; alors par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[-\frac{1}{1-a} - |X_0|, \frac{1}{1-a} - |X_0|]$ et donc puisque

$$|(X_n - a^n X_0) - X_n| \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

nous avons

$$|f(X_n - a^n X_0) - f(X_n)| \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée et le fait que $X_n - a^n X_0$ a la même la loi que Z_n on a alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(Z_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(Z_\infty)).$$

Ainsi, Z_n converge en loi vers Z_∞. Notons F_a la fonction de répartition de cette variable $Z\infty$ et μ_a sa loi. On peut montrer que F_a est continue partout (on réfère par exemple [23]), en particulier on peut montrer que :

$$F_a(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t).$$

On présente un deuxième exemple :

Exemple 1.48. Soient

- $\diamond$ $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$: Un espace de probabilité,
- $\diamond$ $(\widetilde{T}_\omega)_{\omega \in \Omega}$: Une famille de transformations mesurables de X (*i.e.* $\widetilde{T}_\omega : X \to X$ mesurable pour tout $\omega \in \Omega$).

On pose alors $\widetilde{\Omega} = \Omega^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans Ω, $\pi_n : \Omega^{\mathbb{N}} \to \Omega$ la projection canonique d'indice $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{\mathcal{T}} = \sigma(\pi_n : n \in \mathbb{N})$ la plus petite tribu rendant mesurables tous les π_n, $n \in \mathbb{N}$.
Il existe alors d'aprés le théorème d'extension de Kolomogrov une unique mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}$ telle que : Pour tous $k \geq 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{T}$:

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\pi_{n_1} \in A_1, \ldots, \pi_{n_k} \in A_k] = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_k).$$

En particulier $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires i.i.d de loi commune $\mathbb{P}$.
Soit maintenant $\widetilde{\sigma}$ le décalage complet sur $\widetilde{\Omega}$, i.e.

$$\widetilde{\sigma}(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) = (\omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots). \tag{1.7}$$

Il est alors clair que $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{\sigma})$ est un système dynamique métrique.
Enfin, pour tout $\underline{\omega} \in \widetilde{\Omega}$, on définit $T_{\underline{\omega}} : X \to X$ par

$$T_{\underline{\omega}} := \widetilde{T}_{\pi_1(\omega)}.$$

En d'autres termes

$$T_{(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)} = \widetilde{T}_{\omega_1}.$$

Ainsi $(\widetilde{\sigma}, T)$ est un système dynamique aléatoire discret. Il est associé aux variables aléatoires i.i.d (π_n).

Dans la suite de ce chapitre supposons que $(\widetilde{\sigma}, T)$ est un système dynamique aléatoire i.i.d sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{\sigma})$, donc les mesures de probabilité invariantes du produit oblique associé sur lesquelles nous nous concentrerons seront des mesures produits au travers de la proposition suivante :

Proposition 1.49. $\nu = \widetilde{\mathbb{P}} \otimes \mu$ *est une mesure invariante pour le produit oblique F si et seulement si*

$$\mathbb{E}((T_\cdot) * \mu)(B) = \int_X \mathbb{P}\{\omega \in \Omega;\, T_\omega x \in B\}\, d\mu(x) = \mu(B).$$

Ce cas est d'autant plus intéressant que les orbites aléatoires sont alors des processus de Markov. Rappelons tout d'abord la définition générale d'une probabilité de transition :

Définition 1.50. On appelle noyau Markovien de X dans X toute application

$$\Gamma : X \times \mathcal{A} \to [0, 1]$$

$$(x, B) \mapsto \Gamma(x, B),$$

vérifiant

1. $x \mapsto \Gamma(x, B)$ *est $\mathcal{A}$ – mesurable pour tout $B \in \mathcal{A}$,*
2. $B \mapsto \Gamma(x, B)$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$ pour tout $x \in X$.

De plus si $\Gamma(x, A) = 1$, pour tout x, Γ est une probabilité de transition de X dans X.

Proposition 1.51. *[41] Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $X_n = T_{\omega_n}(X_{n-1})$ où $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus i.i.d. de loi commune $\mathbb{P}$ est un processus de Markov homogène de probabilité de transition*

$$\Gamma(x, B) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega;\ T_\omega x \in B\}.$$

Tout système dynamique aléatoire i.i.d. définit donc un processus de Markov homogène. Est ce que nous pouvons construire des applications aléatoires i.i.d à partir d'un processus de Markov ? Dans un cadre très général il est toujours possible de construire un processus de Markov comme la composition d'applications aléatoires mesurables. Toute la difficulté de ce problème surgit lorsque l'on tente de maîtriser la régularité de ces applications. La proposition suivante nous donne une idée sur la construction et pour voir plus d'informations on se réfèra sur [41] et [35].

Proposition 1.52. *Pour toute famille de probabilité de transition $\{\Gamma(x, .)\}_{x\in X}$ on peut construire des applications boréliennes T_ω de X dans lui-même qui satisfont l'équation :*

$$\Gamma(x, B) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega;\ T_\omega x \in B\}.$$

On revient au cas général d'un système i.i.d. ; on en déduit que la mesure $\nu = \mathbb{P}\otimes\mu$ est F-invariante si et seulement si μ est une mesure stationnaire du processus de Markov ainsi défini. On utilise la mesure marginale μ de ν sur l'espace de phases $(X, \mathcal{A})$ pour étudier le comportement à long terme des orbites aléatoires.

Définition 1.53. Une telle mesure μ sera par extension appelée mesure stationaire du système dynamique aléatoire.

On peut caratériser la propriété de stationnarité par :

Proposition 1.54. *Une mesure de probabilité μ sur $(X, \mathcal{A})$ est stationnaire pour le système dynamique aléatoire $(\widetilde{\sigma}, T)$ si et seulement si*

$$\mu(A) = \int_\Omega \mu(T_\omega^{-1}(A))d\mathbb{P}(\omega),\ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. L'invariance de $\mathbb{P}\otimes\mu$ par F est équivalente à

$$\mathbb{P}\otimes\mu(F^{-1}(B\times A)) = \mathbb{P}(B)\mu(A),$$

pour tous ensembles $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{T}$. Or, pour de tels ensembles, on a

$$F^{-1}(\Omega\times A) = \{(\omega, x)|\ \omega \in \widetilde{\sigma}^{-1}(B),\ x \in T_\omega^{-1}(A)\} = \Omega\times K.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\otimes\mu(F^{-1}(B\times A)) &= \int_{\widetilde{\sigma}^{-1}(B)} \mu(T_\omega^{-1}(A))d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega d\mathbb{P}(\omega)\int_K d\mathbb{P}(\omega)\mu(T_\omega^{-1}(A)) \\
&:= \mathbb{P}(B)\int_\Omega \mu(T_\omega^{-1}(A))d\mathbb{P}(\omega),
\end{aligned}$$

d'où lemme. □

Cette proposition assure que les mesures stationnaires sont donc celles qui sont invariantes en moyenne sur la famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.
Pour mettre l'accent sur les systèmes dynamiques aléatoires i.i.d. qui engendrent des processus de Markov nous rappelons les principaux objets utilisés dans ce cadre. Il est usuel de définir un opérateur de transition $\widehat{\mathcal{T}}$ agissant sur les fonctions g réelles bornées par :

$$\widehat{\mathcal{T}}g(x) = \int_X g(y)\,\Gamma(x,dy),$$

et son opérateur adjoint $\widehat{\mathcal{T}}^*$ défini sur l'espace des mesures μ signées finies par : pour tout $B \in \mathcal{A}$

$$\widehat{\mathcal{T}}^*(B) = \int_X \Gamma(x,dy)\,d\mu(x).$$

Un cas particulier intéressant est celui des processus de Markov dont la probabilité de transition est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons $p(x,.)$ sa densité. Il est alors pratique de définir une version $\overline{\mathcal{T}}$ de $\widehat{\mathcal{T}}^*$ agissant directement sur les densités des mesures absolument continues par :

$$\overline{\mathcal{T}}f(x) = \int_X p(z,x)\,g(z)\,dz.$$

Proposition 1.55. *Si la probabilité de transition du processus de Markov est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors toutes les mesures stationnaires du système dynamique aléatoire associé sont également absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et de plus les densités de celles-ci sont les points fixes de l'opérateur* $\overline{\mathcal{T}}$.

Démonstration. On suppose que $P(x,.) << m$, pour tout x et soit A un borélien tel que $m(A) = 0$, alors si μ est une mesure stationnaire, elle vérifie

$$\mu(A) = \int_X P(x,A)d\mu(x) = \int_M \underbrace{\int_A p(x,y)\,dy}_{=0}\,d\mu(x) = 0.$$

Le fait que les densités de mesures stationnaires soient les points fixes de l'opérateur de transfert aléatoire découle directement du fait que la dualité entre celui-ci et l'opérateur d'évolution est conservée (voir la proposition suivante). □

Exemple 1.56. On reprend un exemple simple de processus de Markov sur l'intervalle $(0,1)$ introduit dans [23] défini comme suit : si le processus est dans l'état x, on tire au sort l'un des deux intervalles $(0,x)$ ou $(x,1)$, chacun affecté de la même probabilité $\frac{1}{2}$ et ensuite nous choisissons un point y au hasard dans cet intervalle. La densité de la probabilité de transition est alors :

$$h(x,y) = \frac{1}{2x}\mathbf{1}_{(0,x)}(y) + \frac{1}{2(1-x)}\mathbf{1}_{(x,1)}(y).$$

On suppose qu'il existe une mesure stationnaire de densité g (le théorème 1 de [23]) montre qu'il existe une unique mesure stationnaire pour ce type de systèmes) alors g doit vérifier :

$$g(y) = \int_0^1 h(x,y)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_y^1 \frac{g(x)}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{g(x)}{1-x}\,dx.$$

On obtient

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right).$$

Soit

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}},$$

ce qui correspond à une distribution du type arcsinus puisque la fonction de répartition est alors

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{t}.$$

Les auteurs de cet exemple précisent qu'il est possible de reconstruire ce processus comme la composition des applications aléatoires suivantes :

$$T^1_\omega(x) = \omega\, x \quad et \quad T^2_\omega(x) = X + (1-\omega)\, x.$$

Les applications T^1 et T^2 étant chacune choisie avec probabilité $1/2$ et ω est uniforme sur l'intervalle $(0,1)$.

On revient à la famille d'applications $T_{\omega\omega\in\Omega}$. On a rappelé dans les paragraphes 1.1 et 1.2 les objets fondamentaux utilisés en systèmes dynamqiues et théorie ergodique classique pour étudier chacune d'entre elles du point de vue de la dynamique qu'elle engendre. On va définir ici les analogues de ces objets qui nous assureront l'étude de la famille complète dans le cadre du système dynamique aléatoire. Sur le modèle de la définition des mesures stationnaires on va utiliser : On suppose que l'espace $(X, \mathcal{A})$ muni d'une mesure de probabilité m.

Définition 1.57. La transformation $T_\omega : X \to X$ est appelée non singulière si $m(A) = 0$ pour tous $\omega \in \Omega$ et $A \in \mathcal{A}$ tel que $m(T_\omega^{-1}A) = 0$.

On va montrer l'existence et les propriétés statistiques de mesures stationnaires absolument continues. Pour cela on a besoin d'introduire les opérateurs de transfert et Koopman. On rappelle ici brièvement leur définition, et on renvoie vers les livres de Baladi [12] et de Boyarsky et Göra [17].

Définitions 1.58. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour toute transformation T_ω non-singulière on a

1) On définit l'opérateur P de $L^1(m)$ dans $L^1(m)$ par la formule suivante

$$Pf(x) = \int_\Omega P_\omega f(x) d\mathbb{P}(\omega), \ \forall\, f \in L^1(m). \tag{1.8}$$

2) On définit l'opérateur U de $L^\infty(m)$ dans $L^\infty(m)$ par la formule suivante

$$Ug(x) = \int_\Omega U_\omega g(x) d\mathbb{P}(\omega), \ \forall\, g \in L^\infty(m)$$

Lemme 1.59. *Pour tout $g \in L^\infty(m)$*

$$U^n g(x) = \int_{\Omega^n} g(T_{\omega_n} \dots T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}^{\otimes n}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{\widetilde{\Omega}} g(T_{\omega_n} \dots T_{\omega_1} x) d\widetilde{\mathbb{P}}(\underline{\omega}). \tag{1.9}$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence pour prouver ce lemme.
Pour $n = 1$ il est évident que (1.9) est juste.
Supposons que (1.9) est juste à l'ordre n et montrons qu'elle aussi juste à l'ordre $(n+1)$

$$\begin{aligned} U^{n+1}g(x) &= \int_{\Omega^{n+1}} g(T_{\omega_{n+1}} \dots T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}^{\otimes n+1}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \\ &= \int_{\Omega^{n+1}} (g \circ T_{\omega_{n+1}})(T_{\omega_n} \dots T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}^{\otimes n+1}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$g \circ T_{\omega_{n+1}} \in L^\infty(m),$$

et que

$$d\mathbb{P}^{\otimes n+1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) = \Pi_{i=1}^{n+1} d\mathbb{P}(\omega_i).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} U^{n+1}g(x) &= \int_\Omega \Big(\int_{\Omega^n} (g \circ T_{\omega_{n+1}})(T_{\omega_n} \ldots T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}^{\otimes n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \Big) d\mathbb{P}(\omega_{n+1}) \\ &= \int_{\Omega^n} (g \circ T_{\omega_{n+1}})(T_{\omega_n} \ldots T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}^{\otimes n}(\omega_1, \ldots, \omega_n). \end{aligned}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence on trouve

$$\begin{aligned} U^{n+1}g(x) &= \int_{\widetilde{\Omega}} (g \circ T_{\omega_{n+1}})(T_{\omega_n} \ldots T_{\omega_1} x) d\widetilde{\mathbb{P}}(\underline{\omega}) \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} g(T_{\omega_{n+1}} T_{\omega_n} \ldots T_{\omega_1} x) d\widetilde{\mathbb{P}}(\underline{\omega}). \end{aligned}$$

Ainsi (1.9) est juste à l'ordre $(n+1)$. D'où le résultat. □

Remarque 1.60. On prend dans le lemme précedent $n = 1$ donc

$$\int_\Omega g(T_{\omega_1} x) d\mathbb{P}(\omega_1) = U^1 g(x) = Ug(x) = \int_\Omega U_{\omega_1} g(x) d\mathbb{P}(\omega_1),$$

par conséquent pour tout $g \in L^\infty(m)$

$$U_{\omega_1} g = g \circ T_{\omega_1}, \tag{1.10}$$

pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.

Il est alors facile de vérifier que U est l'opérateur dual de P, qui est

$$\int_X Ug(x) f(x) dm(x) = \int_X g(x) Pf(x) dm(x), \tag{1.11}$$

pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$.

Lemme 1.61. *Pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$, on a*

$$\int_X U^n g(x) f(x) dm(x) = \int_X g(x) P^n f(x) dm(x). \tag{1.12}$$

Démonstration. Pour prouver (1.12) on utilise le raisonnement par récurrence.
Pour $n = 0$ et pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$, on a

$$\int_X U^0 g(x) f(x) dm(x) = \int_X g(x) f(x) dm(x) = \int_X f(x) g(x) dm(x) = \int_X g(x) P^0 f(x) dm(x),$$

donc (1.12) est vrai.
Supposons que (1.12) est vrai pour n. i.e. pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$, on a

$$\int_X U^n g(x) f(x) dm(x) = \int_X g(x) P^n f(x) dm(x).$$

Et montrons que (1.12) est vrai pour $(n+1)$. i.e. pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$

$$\int_X U^{n+1} g(x) f(x) dm(x) = \int_X g(x) P^{n+1} f(x) dm(x).$$

On a

$$\int_X U^{n+1}g(x)f(x)dm(x) = \int_X U^n(Ug)(x)f(x)dm(x).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour $g(x) = Ug(x)$ on obtient

$$\int_X U^{n+1}g(x)f(x)dm(x) = \int_X Ug(x)P^n f(x)dm(x).$$

Et puisque $P^n f(x) \in L^1(m)$ et d'aprés (1.11) on trouve

$$\begin{aligned} \int_X U^{n+1}g(x)f(x)dm(x) &= \int_X g(x)P(P^n f)(x)dm(x) \\ &= \int_X g(x)P^{n+1}f(x)dm(x). \end{aligned}$$

D'où (1.12) est vrai pour $(n+1)$. □

Nous avons alors d'une part des opérateurs définis à partir du processus de Markov et d'autre part les opérateurs que nous venons de définir en utilisant directement la famille $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Ces différents opérateurs ayant le même but : décrire la dynamique aléatoire à long terme, assuro nous qu'ils sont équivalents :

Proposition 1.62. *[41] On a*

(i) Pour toute fonction $g \in L^\infty(X,m)$, $Ug = \widehat{\mathcal{T}}g$;

(ii) Pour toute fonction $f \in L^1(X,m)$, $\overline{\mathcal{T}}f = Pf$.

Chapitre 2

Version quenched du théorème de la limite centrale

Dans ce chapitre, nous présenterons des résultats sur les théorèmes limites pour les systèmes aléatoires issus de l'article [1] écrit en collaboration avec Romain Aimino, et publié dans Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical. Tout d'abord, nous introduirons notre cadre de travail. Ensuite, nous présenterons deux méthodes qui nous permettront de prouver l'annealed théorème de la limite centrale issus du papier [3] : la première est dite la méthode perturbative de Nagaëv et la deuxième est dite la méthode d'approximation par des martingales due à Gordin. Enfin, nous terminerons ce chapitre par la présentation de notre résultat principal : quenched théorème de la limite centrale et par une discussion sur la validité de ce dernier en utilisant un résultat abstrait sur le quenched théorème de la limite centrale pour les automorphismes aléatoires du tore démontré par Ayer, Liverani et Stenlund dans [8].

2.1 Cadre du travail : Définitions, hypothèses et exemples

2.1.1 Cadre de travail

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, où $\mathbb{P} = \{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est un vecteur de probabilité avec $p_\omega > 0$ pour tous $\omega \in \Omega$. Soit $T = \{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ une famille d'applications i.i.d. telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $T_\omega : X \to X$ est une application définie sur un espace polonais $(X, \mathcal{A})$.
Pour une suite $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$, on note par $T^n_{\underline{\omega}}$ la composition d'applications aléatoires $T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}$. La chaîne de Markov correspondante est définie par :

$$\begin{cases} Y_0 \sim \mu \\ Y_{n+1} = T_{\omega_{n+1}}(Y_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

où μ est une mesure de probabilité sur X et $(\omega_n)_n$ est une suite indépendnate identiquement distribuée (i.i.d.) des variables aléatoires, de loi commune $\mathbb{P}$. La mesure μ est stationnaire si Y_n est distribuée selon μ pour tout n. Nous pouvons relier ce processus stochastique à un système dynamique déterministe F défini par le produit oblique comme suit :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \Omega^{\mathbb{N}} \times X & \to & \Omega^{\mathbb{N}} \times X \\ & & (\underline{\omega}, x) & \mapsto & (\sigma\underline{\omega}, T_{\omega_1} x), \end{array} \tag{2.2}$$

où $\sigma : \Omega^{\mathbb{N}} \to \Omega^{\mathbb{N}}$ est le décalge à gauche. On a $F^n(\underline{\omega}, x) = (\sigma^n \underline{\omega}, T^n_{\underline{\omega}} x)$, pour tout $n \geq 0$. La mesure de probabilité μ sur X est stationnaire si et seulement si la mesure $\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu$ est invariante sous F (voir premier chapitre).
Dans la suite, nous supposerons que l'espace X est muni d'une mesure de probabilité de référence m telle que chaque application T_ω n'est pas singulière par rapport à m. Nous serons intéressé par l'existence et les propriétés statistiques de la mesure de probabilité invariante et absolument continue par rapport à m. Dans ce cas, chaque application T_ω admet un opérateur de transfert $P_\omega : L^1(m) \to L^1(m)$ satisfaisant la relation de dualité donnée par :

$$\int_X (P_\omega f)\, g\, dm = \int_X f\,(g \circ T_\omega)\, dm,$$

pour tous $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$.

Définition 2.1. L'opérateur de transfert moyenné $P : L^1(m) \to L^1(m)$, associé au système dynamique aléatoire (σ, T), est défini par :

$$P = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega P_\omega.$$

Lemme 2.2. *Soit μ une mesure de probabilité, de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue m, invariante et absolument continue. μ est stationnaire si et seulement si $Pf = f$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la relation de dualité. □

Pour garantir l'existence d'un trou spectral, nous introduirons les hypothèses suivantes sur P :

2.1.2 Hypothèses

Nous supposerons qu'il existe un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|.\|)$ inclus dans $L^1(m)$ sur lequel P possède les propriétés spectrales suivantes :

(H_1) L'espace $\mathcal{B}$ s'injecte d'une façon compacte dans $L^1(m)$;

(H_2) Les fonctions constantes se trouvent dans $\mathcal{B}$;

(H_3) $\mathcal{B}$ est un treillis de Banach complexe, i.e. pour tout $f \in \mathcal{B}$ alors $|f|$, $\overline{f} \in \mathcal{B}$;

(H_4) $\mathcal{B}$ est stable sous l'opérateur P, i.e.$P(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, et P agit continument sur $\mathcal{B}$;

(H_5) P satisfait l'inégalité de Lasota-Yorke (LY), i.e. $\exists N > 1$, $\rho < 1$ et $K \geq 0$ tels que

$$\|P^N f\| \leq \rho \|f\| + K \|f\|_{L^1_m}, \quad \text{pour } f \in \mathcal{B}. \tag{2.3}$$

D'après Théorème de **Ionescu-Tulcea et Marinescu** (voir aussi le théorème de Hennion [30]), ces hypothèses impliquent que le rayon spectrale essentiel de P agit comme opérateur sur $\mathcal{B}$. D'une part, d'après l'inégalité de (LY) le rayon spectral est inférieur ou égal à 1. D'autre part, la mesure m, qui appartient au dual topologique de $\mathcal{B}$, est un point fixe de P^*. Ceci implique que le rayon spectral est supérieur ou égal à 1. D'où le rayon spectral est égal à 1. Par conséquent P est quasi-compact de type diagonal sur $\mathcal{B}$ (voir[30]). En particulier P admet la décomposition spectrale suivante :

$$P = \sum_i \lambda_i \Pi_i + Q, \text{ tel que } \Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i, \; Q\Pi_i = \Pi_i Q = 0$$

où les λ_i sont des valeurs propres de P de module 1, Π_i sont des projecteurs de rang fini sur les espaces propres associés à λ_i et Q est un opérateur borné de rayon spectral strictement inférieur à 1. De plus, P admet un nombre fini des valeurs propres isolées, de multiplicité finie et de module 1. Les autres valeurs propres de P appartiennent à un disque de rayon strictement inférieur à 1. D'après Corollaire III.4 de [30], la suite $h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k\mathbf{1}$ converge vers $h \in \mathcal{B}$ vérifiant $Ph = h$. h est un vecteur propre associé à $\lambda = 1$, $h > 0$ et $\int_X h(x)dm(x) = 1$. D'où l'existence d'une mesure stationnaire absolument continue de densité appartient à $\mathcal{B}$.
L'ensemble des valeurs propres de module 1 consiste en un nombre fini des groupes cycliques [49]. On introduit une hypothèse qui nous permet d'éliminer la possibilité d'avoir du spectre périphérique autre que 1 :

(H_6) 1 est l'unique valeur propre de module 1 simple de P sur le cercle unité.

(H_6) nous garantit l'unicité de la mesure stationnaire absoluement continue notée μ de densité h.

Proposition 2.3. *Si* $(H_1) - (H_6)$ *sont satisfaites alors le système* $(\Omega^{\mathbb{N}} \times X, F, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$ *est exact. En particulier,* $(\Omega^{\mathbb{N}} \times X, F, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$ *ergodique et mélangeant.*

Démonstration. Par les hypothèses (H_1) à (H_6), P^n converge pour la norme d'opérateur sur $\mathcal{B}$ vers le projecteur Π sur l'espace engendré par h avec $\Pi(f) = (\int_X fdm)h$.
Comme $\{P^n - \Pi\}_n$ forme une famille équicontinue d'opérateurs sur $L^1(m)$. $\{P^n - \Pi\}_n$ converge vers 0 sur le sous-espace $\mathcal{B}$ dense dans $L^1(m)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - \Big(\int_X fdm\Big)h\|_{L^1_m} = 0,\ \forall f \in L^1(m).$$

Soit $\phi \in L^1(m)$, ψ mesurable borné. On définit $\Phi \in L^1(\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$ par :

$$\Phi(\underline{\omega}, x) = \phi(x)\psi(\omega_1, \cdots, \omega_k).$$

D'après Lemme 1.1.2 dans [2], il existe $\chi \in L^1(m)$ tel que

$$\mathcal{L}^k\phi(\underline{\omega}, x) = \chi(x) \quad p.p.$$

Par Lemme 1.1.3 dans [2], on obtient

$$\mathcal{L}^{n+k}\Phi(\underline{\omega}, x) = P^n\chi(x) \quad p.p.$$

Comme

$$\int_X \chi\, dm = \int_{\Omega^{\mathbb{N}}\times X} \mathcal{L}^k\Phi d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu = \int_{\Omega^{\mathbb{N}}\times X} \Phi d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu,$$

il en résulte que $\mathcal{L}^n\Phi$ converge vers $(\int_{\Omega^{\mathbb{N}}\times X} \Phi d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)h$ pour la norme $L^1(\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$.
Puisque l'espace engendré par les Φ considérés est dense dans $L^1(\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$, le même argument d'équicontinuité que précédemment montre que cette convergence a lieu pour n'importe quel $\Phi \in L^1(\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu)$. En particulier, $\mathcal{L}^n\Phi$ converge pour $(\Omega^{\mathbb{N}} \times X, F)$ et termine la preuve puisque $\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu << \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes m$. $\square$

Remarque 2.4. Dans de nombreux cas, les deux hypothèses (H_4) et (H_5) peuvent être déduites des hypothèses correspondantes pour l'opérateur P_ω si les constantes apparaissant dans les inégalités de Lasota-Yorke sont uniformes vis-à-vis de ω. Néanmoins, il est possible de les établir lorsque l'un des opérateurs P_ω ne satisfait pas une inégalité de Lasota-Yorke (généralement lorsque T_ω n'est pas uniformément dilatante), comme on va le voir avec la classe d'exemples suivante.

2.1.3 Les Applications dilatantes et lisses par morceaux en dimension 1

Définition 2.5. L'application Lasota-Yorke est une application $T : [0,1] \to [0,1]$ $\mathcal{C}^2$ par morceaux pour $\lambda := \inf |T'| > 0$.

On note par P_T l'opérateur de transfert (qui respecte la mesure de Lebesgue) associé à T. On a

$$P_T f(x) \;=\; \sum_{Ty=x} \frac{f(y)}{|T'(y)|},$$

pour tout $f \in L^1(m)$.
Nous analyserons les propriétés de spectre de P_T agissant sur l'espace de fonctions à variation bornée. Pour cela on commence par :

Définition 2.6. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est à variation bornée si sa variation totale définit par la formule suivante

$$Var(f) \;=\; \sup\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \;:\; n \geq 1,\; 0 = x_0 \leq \ldots \leq x_n = 1\}.$$

Pour une classe d'équivalence $f \in L^1(m)$, on définit donc

$$Var(f) \;=\; \{Var(g)/\; f = g\; m - presque\; tout\}.$$

La L^1_m-norme de f par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par

$$\|f\|_{L^1_m} = \int_{[0,1]} |f| dm.$$

L'espace

$$BV := \{f \in L^1(m)/\; Var(f) < +\infty\}$$

muni de sa norme donnée par

$$\|f\|_{BV} \;=\; \|f\|_{L^1_m} \;+\; Var(f), \tag{2.4}$$

est un espace de Banach satisfaisant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) ci-dessus.
Si T est une application de Lasota-Yorke alors on obtient l'inégalité suivante :

Proposition 2.7. *(Inégalité de Lasota Yorke [39])*
Pour tout $f \in BV$, on a

$$Var(P_T f) \;\leq\; \frac{2}{\lambda(T)} Var(f) \;+\; A(T)\|f\|_{L^1_m}, \tag{2.5}$$

où $A(T)$ est une constante finie dépend que de T.

Soit Ω un ensemble fini, conjointement avec un vecteur de probabilité $\mathbb{P} = \{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ et un nombre fini d'applications de Lasota-Yorke $T = \{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Nous supposons que

$$p_\omega > 0,$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition 2.8. Le système (σ, T) est appelé un système Lasota-Yorke aléatoire.

Le système Lasota-Yorke aléatoire (σ, T) est dit dilatant en moyenne si

$$\Lambda := \sum_{\omega \in \Omega} \frac{p_\omega}{\lambda(T_\omega)} < 1.$$

L'opérateur de transfert moyenné associé au système (σ, T) est donné par

$$P = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega P_{T_\omega},$$

et satisfait

$$P^n = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n P_{T_{\underline{\omega}}^n}, \tag{2.6}$$

où $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $p_{\underline{\omega}}^n = p_{\omega_1} \dots p_{\omega_n}$ et $T_{\underline{\omega}}^n = T_{\omega_n} \dots T_{\omega_1}$.

Proposition 2.9. *Si le système (σ, T) dilatant en moyenne alors certaines itérations de l'opérateur de transfert moyenné satisfait une inégalité Lasota-Yorke sur BV.*

Démonstration. En remplaçant P_T par $P_{T_{\underline{\omega}}^n}$ dans (2.5) on obtient

$$Var(P_{T_{\underline{\omega}}^n} f) \leq \frac{2}{\lambda(T_{\underline{\omega}}^n)} Var(f) + A(T_{\underline{\omega}}^n) \|f\|_{L_m^1}, \tag{2.7}$$

ceci nous donne

$$Var(P^n f) = Var(\sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n P_{T_{\underline{\omega}}^n}) = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n Var(P_{T_{\underline{\omega}}^n} f).$$

En utilisant (2.7) on obtient donc

$$\begin{aligned} Var(P^n f) &\leq \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n \Big(\frac{2}{\lambda(T_{\underline{\omega}}^n)} Var(f) + A(T_{\underline{\omega}}^n) \|f\|_{L_m^1} \Big) \\ &\leq 2 \Big(\sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n \frac{1}{\lambda(T_{\underline{\omega}}^n)} \Big) Var(f) + \Big(\sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n A(T_{\underline{\omega}}^n) \Big) \|f\|_{L_m^1}. \end{aligned}$$

En prenant

$$\theta_n = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} \frac{p_{\underline{\omega}}^n}{\lambda(T_{\underline{\omega}}^n)} \quad et \quad A_n = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} p_{\underline{\omega}}^n A(T_{\underline{\omega}}^n).$$

En utilisant l'inégalité suivante qu'elle est évidante (raisonnement par réccurence)

$$\lambda(T_{\underline{\omega}}^n) \geq \lambda(T_{\omega_n}) \dots \lambda(T_{\omega_1}),$$

ceci nous implique

$$\theta_n = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} \frac{p_{\underline{\omega}}^n}{\lambda(T_{\underline{\omega}}^n)} \leq \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^n} \frac{p_{\omega_1} \dots p_{\omega_n}}{\lambda(T_{\omega_n}) \dots \lambda(T_{\omega_1})} = \Lambda^n.$$

Pour que le système (σ, T) est dilatant en moyenne il faut que

$$\Lambda := \sum_{\omega \in \Omega} \frac{p_\omega}{\lambda(T_\omega)} < 1,$$

ceci nous signifie que

$$2\theta^n \leq 1,$$

pour n suffisamment grand, tandis que A_n est fini, donc on obtient

$$Var(P^n f) \leq 2\theta_n Var(f) + A_n \|f\|_{L_m^1},$$

pour tout $f \in BV$. $\square$

Remarque 2.10. Pelikan ([45]) a montré qu'on peut avoir l'inégalité (2.3) (l'inégalité de Lasota-Yorke) précédente toujours sous une hypothèse plus faible :

Hypothèse 2.11. Soit une application aléatoire T de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \ \ i \in \{1,\ldots,n\}, \ \ T(x) = T_\omega(x)\,(prob.\,\omega),$$

où chaque T_ω vérifie (2.3).

D'après Théorème 1.33, il en résulte que l'opérateur de transfert moyenné a la décomposition spectrale suivante :

$$P \,=\, \sum_i \lambda_i \Pi_i \,+\, Q,$$

où tous les λ_i sont les valeurs propres de P de module 1 et les Π_i sont les projecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i vérifiant

$$\Pi_i\Pi_j \,=\, \delta_{ij}\Pi_i,$$

et Q est un opérateur borné de rayon spectral strictement inférieur à 1 vérifiant

$$Q\Pi_i \,=\, \Pi_i Q \,=\, 0.$$

Cela implique l'existence d'une mesure fixe absolument continue, avec une densité appartenant à BV. Les techniques standard montrent que 1 est une valeur propre et que le spectre périphérique est totalement cyclique. Nous allons donner un critère concret veiller à ce que 1 est une valeur propre simple de P, et qu'il n'y a pas d'autre valeur propre périphérique. Dans ce cas, nous dirons que (σ, T) est un mélange.

Définition 2.12. Le système aléatoire Lasota-Yorke (σ, T) possède la propriété de recouvrement aléatoire (RA) si pour tout sous-intervalle non trivial $I \subset [0,1]$ il existe $n \geq 1$ et $\underline{\omega} \in \Omega^n$ tels que

$$T^n_{\underline{\omega}}(I) = [0,1].$$

Proposition 2.13. *Si le système (σ, T) est dilatant en moyenne et possède la propriété (RA) alors (σ, T) est un mélange et la densité de sa mesure absolument continue stationnaire unique est bornée loin de 0.*

Démonstration. Comme le spectre périphérique de P se compose d'une union finie de groupes cycliques finis, il existe alors $k \geq 1$ tel que 1 est l'unique valeur propre périphérique de P^k.

Il suffit alors de montrer que l'espace propre correspondant est unidimensionnel. C'est à dire on montre qu'il existe une base de vecteurs propres positifs pour ce sous-espace, avec des supports disjoints.

Soit une fonction $h \in BV$ non nulle vérifiant

(i) $h \geq 0$;

(ii) $P^k h = h$.

Il existe un intervalle non-trivial $I \subset [0,1]$ et $\alpha > 0$ tels que

$$h \geq \alpha 1_I.$$

On choisit $n \geq 1$ et $\underline{\omega}^\star \in \Omega^{nk}$ tels que

$$T^{nk}_{\underline{\omega}^\star}(I) = [0,1],$$

car le système (σ, T) possède la propriété de recouvrement aléatoire.
Pour $x \in [0,1]$, on a

$$h(x) = P^{nk}h(x) \geq \alpha P^{nk} 1_I(x).$$

En utilisant (2.6) on obtient donc

$$P^{nk} 1_I(x) = \sum_{\underline{\omega}^\star \in \Omega^{nk}} p^{nk}_{\underline{\omega}^\star} P_{T^{nk}_{\underline{\omega}^\star}} 1_I(x),$$

or on a

$$P_{T^{nk}_{\underline{\omega}^\star}} 1_I(x) = \sum_{T^{nk}y=x} \frac{1_I(y)}{|(T^{nk}_{\underline{\omega}^\star})'(y)|}, \tag{2.8}$$

on en déduit que

$$P^{nk} 1_I(x) = \sum_{\underline{\omega}^\star \in \Omega^{nk}} p^{nk}_{\underline{\omega}^\star} \sum_{T^{nk}y=x} \frac{1_I(y)}{|(T^{nk}_{\underline{\omega}^\star})'(y)|} \geq p^{nk}_{\underline{\omega}^\star} \sum_{T^{nk}y=x} \frac{1_I(y)}{|(T^{nk}_{\underline{\omega}^\star})'(y)|}.$$

D'où

$$h(x) \geq \alpha p^{nk}_{\underline{\omega}^\star} \sum_{T^{nk}y=x} \frac{1_I(y)}{|(T^{nk}_{\underline{\omega}^\star})'(y)|},$$

ceci nous montre que

$$h(x) \geq \alpha \frac{p^{nk}_{\underline{\omega}^\star}}{\|(T^{nk}_{\underline{\omega}^\star})'\|_{\sup}} > 0,$$

car il existe toujours un $y \in I$ avec $T^{nk}y = x$.
Cela implique que h possède un support complet.
Puisque

$$P^k h = 1.h > 0,$$

donc

(a) h est un vecteur propre positif associé à la valeur propre 1 et comme $h \in BV$ alors BV est un sous espace propre unidimensionnel de X associé à la valeur propre 1 composé des vecteurs propres positifs ;

(b) $d\mu = h\,dm$ est une mesure stationnaire de probabilité unique absolument continue dont sa densité h est bornée et loin de 0.

□

2.1.4 Les Applications dilatantes et lisses par morceaux en dimension supérieure

On décrit une classe d'applications dilatantes et lisses par morceaux en dimension finie quelconque introduite par Saussol [48]. On considère m_d la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle, d(.,.) la distance euclidienne et par γ_d le m_d-volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.
Soit M un ensemble compact regulier de $\mathbb{R}^d$ et $T : M \to M$ une application telle qu'il existe une famille d'ensembles ouverts disjoints $U_i \subset M$ et V_i avec $\overline{U_i} \subset V_i$ et les applications $T_i : V_i \to \mathbb{R}^d$ satisfont pour certaines $0 < \alpha \leq 1$ et pour certaines $\epsilon_0 > 0$ assez petit :

(1) $m_d(M \cup_i U_i) = 0$,

(2) pour tout i, la restriction de U_i de T et T_i coincident et $B_{\epsilon_0}(TU_i) \subset T_i(V_i)$,

(3) pour tout i, T_i est un C^1-difféomorphisme de V_i dans T_iV_i et pour tous x, $y \in V_i$

$$|\det DT_i(x) - \det DT_i(y)| \leq c|\det DT_i(x)|\, d(T_i(x), T_i(y))^\alpha,$$

avec $d(T_i(x), T_i(y)) \leq \epsilon_0$ et pour une constante $c > 0$ indépendante de i, x et y,

(4) il existe $s < 1$ tel que pour tous x, $y \in V_i$ avec $d(T_i(x), T_i(y)) \leq \epsilon_0$, on a

$$d(x, y) \leq s\, d(T_i(x), T_i(y)),$$

(5) supposons que les frontières de U_i sont incluses dans un des sous-variétés compactes embarquées C^1 codimension par morceaux. On définit

$$Y = \sup_x \sum_i \sharp\{morceaux\ lisses\ \ coupant\ \ \partial\ \ U_i\ \ et\ \ contenant\ x\}.$$

Et

$$\eta_0 = s^\alpha + \frac{4s}{1-s} Y \frac{\gamma_{d-1}}{\gamma_d}.$$

Alors $\eta_0 < 1$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Pour un borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, on définit

$$osc(f, A) = ess \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ l'application

$$x \mapsto osc(f, B_\epsilon(x)),$$

est une fonction sémi-continue inférieure positive. Alors l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} osc(f, B_\epsilon(x))dx,$$

est bien définie.

Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $0 < \alpha \leq 1$, on définit

$$|f|_\alpha \ = \sup_{0<\epsilon<\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} osc(f, B_\epsilon(x))dx.$$

Pour un ensemble compact regulier $M \subset \mathbb{R}^d$ on définit

$$V_\alpha(M) \ = \ \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) / \ supp(f) \subset M,\ |f|_\alpha < \infty\},$$

muni d'une norme donnée par

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_{L^1_m} + |f|_\alpha,$$

avec m est la mesure de Lebesgue normalisée de telle sorte que $m(M) = 1$.

Proposition 2.14. *[48, Lemma 4.1]*
Il existe $\eta < 1$ et $D < \infty$ tels que pour tout $f \in V_\alpha$

$$|P_T f|_\alpha \leq \eta |f|_\alpha \ + \ D\|f\|_{L^1_m}. \tag{2.9}$$

Supposons maintenant que Ω est un ensemble fini, $\mathbb{P} = \{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ un vecteur de probabilité et $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ une famille finie d'applications dilatantes par morceaux sur $M \subset \mathbb{R}^d$. On choisit ϵ_0 assez petit de telle sorte que les hypothèses rappelées auparavant soient satisfaites par toutes les applications T_ω pour le même ϵ_0 et tel que

$$|P_{T_\omega} f|_\alpha \leq \eta |f|_\alpha \, + \, D_\omega \|f\|_{L^1_m},$$

pour tout $f \in V_\alpha$ avec $\eta_\omega < 1$ et $D_\omega < \infty$. on pose $\eta = \max \eta_\omega$ et $D = \max D_\omega$ alors $\eta < 1$ et $D < \infty$. Puisque $P = \sum_\omega p_\omega P_\omega$, on en déduit immédiatement $|Pf|_\alpha \leq \eta |f|_\alpha + \|f\|_{L^1_m}$, ce qui entraine les hypothèses (H_4) et (H_5). Pour vérifier l'hypothèse (H_6), on peut procéder comme dans le cas unidimensionnel, en introduisant l'hypothèse de recouvrement :

Proposition 2.15. *[2, Proposition 1.1.3.2]* Si (σ, T) possède la propriété de recouvrement, c'est à dire pour toute boule $B \subset M$, il existe $n \geq 1$ et $\underline{\omega} \in \Omega^n$ tels que $T^n_{\underline{\omega}}(B) = M$, alors l'hypothèse (H_6) est vérifiée, et de plus la densité de l'unique mesure stationnaire absolument continue est bornée inférieurement par une constante $c > 0$.

2.2 Version annealed du théorème de la limite centrale

Dans cette section, on examine les résultats de [3] sur les théorèmes de limites annealed. On suppose que le SDA satisfait les hypothèses (H_1) - (H_6) avec un espace Banach $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur X qui sont absolument continues par rapport à m, avec une densité dans $\mathcal{B}$.
Soit $\mathcal{B}_0 \subset L^1(m)$ un algèbre de Banach muni d'une norme $\|.\|_0$ pour laquelle il existe $C > 0$ telle que

$$\|f\, g\|_0 \leq C \, \|f\|_0 \, \|g\|, \quad \forall f \in \mathcal{B}_0, \; g \in \mathcal{B}. \tag{2.10}$$

Comme $1 \in \mathbb{B}$, on voit que cela implique que $\mathcal{B}_0$ s'injecte continuement dans $\mathcal{B}$. Cette hypothèse est satisfaite par $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est un algèbre de Banach, ce qui est le cas lorsque $\mathcal{B}$ est l'espace des fonctions à variation bornée en dimension 1, ou l'espace Quasi-Hölder en dimension quelconque. Dans le cas où $\mathcal{B}$ est l'espace des fonctions à variation bornée en dimension supérieure, on peut prendre $\mathcal{B}_0 = Lip$ pour plus des détails voir [[55], lemme 6.4]. Dans la suite de ce paragraphe nous allons définir

$$X_k(\underline{\omega}, x) = \varphi(T_{\omega_k} \circ \cdots \circ T_\omega x) \quad et \quad S_n(\underline{\omega}, x) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k,$$

avec φ est un obsevable borné de X vers $\mathbb{R}$ et X_k est défini sur $\Omega^{\mathbb{N}} \times X$. Soit une mesure de probabilité $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Commençons pour expliquer deux méthodes qui nous permettent de garantir l' annealed théorème de la limite centrale :

2.2.1 Méthode d'approximation par des martingales :

Les auteurs ont pris une mesure stationnaire μ est équivalente à la mesure de référence m et une famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, l'application T_ω : $X \to X$ est non-singulière par rapport à μ, ce qui nous permet de définir l'opérateur de transfert moyenné P_μ du système dynamique aléatoire par rapport à la mesure μ. Il vérifie l'égalité suivante

$$P_\mu(f) = \frac{P(hf)}{h},$$

pour tout $f \in L^1(\mu)$, avec h est la densité de μ, P est l'opérateur de transfert défini par rapport à m et X est un espace polonais.
Nous rappelons que l'opérateur de Koopman agit sur les fonctions définies sur X par $Uf(x) = \int_\Omega f(T_\omega x) d\mathbb{P}(\omega)$. Nous associons à U une probabilité de transition sur X donnée par $U(x, A) = U(\mathbf{1}_A)(x) = \mathbb{P}(\{\omega | T_\omega x \in A\})$. Nous rappelons aussi que la mesure stationnaire μ vérifie $\mu U = U$ par définition. Nous pouvons alors associer à U et μ une chaîne de Markov canonique de la façon suivante.
Soit $\Omega^* = X^{\mathbb{N}_0} = \{\underline{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)\}$, muni de la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les cylindres. Comme X est polonais, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne associée à la topologie produit sur Ω^*. Théorème 1.33 montre qu'il existe une unique mesure de probabilité sur Ω^* telle que

$$\int_{\Omega^*} f(\underline{x}) d\mu_c(\underline{x}) = \int_X \mu(dx_0) \int_X U(x_0, dx_1) \cdots \int_X U(x_{n-1,dx_n} f(x_0, \cdots, x_n)$$

pour tout n et toute fonction mesurable bornée $f : \Omega^* \to \mathbb{R}$ qui ne dépend que de $x_0, \cdots, x_n$. Si on dénote par x_n l'application qui à chaque $\underline{x}$ associe sa n-ième coordonnée, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov définie sur l'espace probabilisé $(\Omega^*, \mathcal{F}, \mu_c)$, avec distriubtion initiale μ_c et probabilité de transition U. Par stationnarité de mesure μ, chaque x_n est distribué suivant la loi μ.
Soit τ le déclage à gauche sur Ω^*. Par stationnarité, $\mu_c \tau = \mu_c$. Soit F le produit oblique défini par $F(\underline{\omega}, x) = (\sigma\underline{\omega}, T_{\omega_1} x)$, où σ est le décalage à gauche sur $\Omega^{\mathbb{N}}$. F préserve $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu$. On peut relier ce système produit oblique au système symbolique τ sur Ω^*. En effet, l'application mesurable $\Phi : \Omega^{\mathbb{N}} \times X \to \Omega^*$ défini par $\Phi(\underline{\omega}, x) = (x, T_{\omega_1} x, \cdots, T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1} x, \cdots) = \{p(F^n(\underline{\omega}, x))\} = x$, envoie $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu$ sur μ_c et vérifie $\Phi \circ F = \tau \circ \Phi$. En d'autres termes, $(\Omega^{\otimes \mathbb{N}} \times X, F, \mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu)$ est une extension de (Ω^*, τ, μ_c).
Soit $\pi_n : \Omega^* \to X$ la projection définie par $\pi_n(x_0, \cdots, x_n, \cdots) = x_n$ et $\pi = \pi_0$. On relève chaque fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ en une fonction ϕ_π sur Ω^* par $\phi_\pi = \phi \circ \pi$. On a alors $\mathbb{E}_\mu(\phi) = \mathbb{E}_{\mu_c}(\phi_\pi)$. On remarque aussi que $\pi_n = \pi \circ \tau^n$ et $p \circ F^n = \tau_n \circ \Phi$.
Soit un observable borné à valeurs réelles, appartenant à $\mathcal{B}_0$, tel que $\int_X \varphi d\mu = 0$.
On définit $X_k = \varphi \circ p \circ F^k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. On a alors $X_k = \varphi \circ \pi_k \circ \Phi = \varphi_\pi \circ \tau^k \circ \Phi$. Ainsi, $S_n = (\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_\pi \circ \tau^k) \circ \Phi$, et donc la loi de S_n sous la probabilité $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu$ est la loi de la n-ième somme de Birkhoff de l'observable φ_π pour le système symbolique (Ω^*, τ, μ_c). Pour démontrer un TLC pour S_n, il suffit de le démontrer pour l'observable φ_π et le système (Ω^*, τ, μ_c). Pour cela, on va utiliser l'opérateur de Koopman $\overline{U}$ et l'opérateur de transfert $\overline{P}$ associés au système (Ω^*, τ, μ_c). Comme $\tau \mu_c = \mu_c$, ces opérateurs satisfont les relations $\overline{P}^k \overline{U}^k f = f$ et $\overline{U}^k \overline{P}^k f = \mathbb{E}_{\mu_c}(f | \mathcal{F}_k)$ pour tout $f \in L^1(\mu_c)$, où $\mathcal{F}_k = \tau^{-k} \mathcal{F} = \sigma(x_k, x_{k+1}, \cdots)$.
Les deux opérateurs P et P_μ sont liés de la façon suivante :

Lemme 2.16. [[*3*], *Lemme* 33] *Pour tout $\phi \in L^1(\mu)$, on a*

$$\overline{P}(\phi_\pi) = (P\phi)_\pi.$$

Nous introduirons le lemme suivant correspondant pour l'opérateur P_F, associé au système produit oblique $(\Omega^{\mathbb{N}} \times X, F, \mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu)$. Pour un observable $\phi \in L^1(\mu)$, nous introduisons la notation $\phi_p = \phi \circ p \in L^1(\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu)$.

Lemme 2.17. [[*3*], *Lemme* 34]

$$P_F(\phi \circ p) = (P_\mu \phi) \circ p.$$

2.2.2 La méthode de Nagaëv :

On observe que S_n correspond à la somme de Birkhoff classique du système produit-gauche déterministe $(\Omega^{\mathbb{N}} \times X, F, \mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu)$ pour l'observable φ vérifiant $\varphi(\underline{\omega}, x) = \varphi(x)$. On supposera sans perte de généralité que $\int_X \varphi d\mu = 0$ et φ borné. La première étape est de prouver l'existence de la variance asymptotique.

Proposition 2.18. *(Formule de Green-Kubo)[[3], Proposition 14]*
La limite $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X S_n^2 \, d\mu \, d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}$ *existe et est égale à*

$$\sigma^2 = \int_X \varphi^2 \, d\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X \varphi \, U^n \varphi \, d\mu. \tag{2.11}$$

Le critère suivant nous permet de caractériser la situation dans laquelle la variance σ^2 est nulle.

Proposition 2.19. *(cobord aléatoire)*[[*3*], *Proposition* 16]
La variance asymptotique σ^2 *satisfait* 0 *si et seulement s'il existe* $\psi \in L^2(\mu)$ *tel que pour* $\mathbb{P}$*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, on a* $\varphi = \psi - \psi \circ T_\omega$*,* μ*-presque par tout. Dans ce cas,* φ *est un cobord aléatoire.*

On introduit les opérateurs de Laplace. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit l'opérateur P_z par $P_z(f) = P(e^{z\varphi} f)$. Grâce à notre hypothèse sur $\mathcal{B}_0$, P_z est un opérateur bien défini et borné sur $\mathcal{B}$, et de plus l'application $z \mapsto P_z$ est complexe-analytique sur $\mathbb{C}$. En effet ; si on définit $C_n(f) = P(\varphi^n f)$, on a $P_z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n} C_n$ et cette série converge sur $\mathbb{C}$ le fait que $C_n(f) \leq (C\|\varphi\|_0)^n \|P\|$. on a une première relation fondamentale :

Lemme 2.20. [[*3*], *Lemme* 19] *Pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $f \in \mathcal{B}$*, on a*

$$\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X e^{zS_n(\underline{\omega},x)} f(x) dm(x) d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}) = \int_X P_z^n(f) dm.$$

Si $f \in \mathcal{B}$ est la densité de la mesure $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ par rapport à m, alors d'après Lemme précédent, la fonction génératrice des moments de S_n sous la probabilité $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \nu$ est donnée par $\int_X P_z^n(f) dm$, ce qui nous permet d'étudier le comportement asymptotique des itérés des opérateurs de Laplace P_z. On remarque que $z \mapsto P_z$ est une perturbation analytique de l'opérateur quasi-compact P. Le lemme suivant nous permet de caractériser l'opérateur P_z :

Lemme 2.21. ([*3*], *Lemme* 20)
Il existe $\epsilon_1 > 0$*,* $\eta_1 > 0$*,* $\eta_2 > 0$ *et des fonctions complexes-analytiques* $\lambda(.)$*,* $h(.)$*,* $m(.)$*,* $Q(.)$*, toutes définies sur* $\mathbb{D}_{\epsilon 1} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < \epsilon_1\}$*, prenant leurs valeurs respectivement dans* $\mathbb{C}$*,* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{B}^*$*,* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ *et satisfaisant pour tout* $z \in \mathbb{D}_{\epsilon_1}$ *;*

(1) $\lambda(0) = 1$*,* $h(0) = 1$*,* $m(0) = m$*,* $Q(0) = Q$ *;*

(2) $P_z(f) = \lambda(z)\langle m(z), f\rangle h(z) + Q(z)f$ *pour tout* $f \in \mathcal{B}$ *;*

(3) $\langle m(z), h(z)\rangle = 1$ *;*

(4) $Q(z)h(z) = 0$ *et* $m(z)Q(z) = 0$ *;*

(5) $|\lambda(z)| > 1 - \eta_1$ *;*

(6) $\|Q(z)^n\| \leq C(1 - \eta_1 - \eta_2)^n$*.*

De plus pour tous $f \in \mathcal{B}$ et $z \in \mathbb{D}_{\epsilon_1}$

$$|\langle m, Q(z)^n f\rangle| \le |z|(1-\eta_1-\eta_2)^n \|f\|.$$

Pour $n \ge 0$, on remarque que $P_z^n(f) = \lambda(z)^n\langle m(z), f\rangle h(z) + Q(z)^n f$. Ainsi, le comportement asymptotique de P_z^n est lié à celui de la valeur propre dominante $\lambda(z)$ dans un voisinage. Cette dernière satisfait les propriétés suivantes : $\lambda'(0) = \int_X \varphi d\mu = 0$ et $\lambda''(0) = \sigma^2 \ge 0$. D'après le lemme précédent, on a

$$\lambda(\frac{it}{\sqrt{n}})^n = 1 - \frac{\lambda^2 t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})^n \ \to\ e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}, \quad si \quad n \to \infty,$$

ainsi, on en déduit que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\nu}(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}S_n}) = \lambda(\frac{it}{\sqrt{n}})^n\langle m(\frac{it}{\sqrt{n}}), f\rangle\langle m, h(\frac{it}{\sqrt{n}})\rangle + \langle m, Q(\frac{it}{\sqrt{n}})\rangle \ \to\ e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}, \quad si \quad n \to \infty,$$

Ces deux méthodes nous permettent facilement de prouver le théorème de la limite centrale pour plus des détails voir [2, 3].

Théorème 2.22. *[[3], Théorème 3.5] (Annealed théorème de la limite centrale)*
Pour toute mesure de probabilité $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, le processus $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \nu$.

En conséquence de la preuve de [3], on va estimer la vitesse de convergence de la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$:

Lemme 2.23. *[3, Lemme 3.10]* Pour tout $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$,

$$\left|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\nu}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n}) - e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1+|t|^3}{\sqrt{n}}\right),$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \ge 1$ tel que $\frac{t}{\sqrt{n}}$ est assez petit.

La variance asymptotique σ^2 peut être exprimée à partir de n'importe quelle loi initiale $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$:

Lemme 2.24. Pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$,

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{\Omega^{\mathbb{N}}}\int_X S_n^2\, d\nu\, d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}.$$

Démonstration. Soit $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ une mesure de probabilité dont sa densité est donnée par f. En utilisant la propriété de dualité pour les opérateurs de transfert, on obtient

$$\iint_{\Omega^{\mathbb{N}}\times X} S_n^2\, d\nu\, d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} - \iint_{\Omega^{\mathbb{N}}\times X} S_n^2\, d\mu\, d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{n-1}\int_X \varphi^2 P^k(f-h)\, dm + 2\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n-1}\int_X \varphi P^{j-i}(\varphi P^i(f-h))\, dm.$$

Puisque $\int_X f\, dm = \int_X h\, dm = 1$, on a

$$\left|\int_X \varphi^2 P^k(f-h)\, dm\right| \le \|\varphi\|_\infty^2 \|P^k(f-h)\|_{L^1_m} \le C\|\varphi\|_\infty^2\|Q^k(f-h)\| \le C\|\varphi\|_\infty^2 \lambda^k,$$

D'une autre part,

$$\int_X \varphi P^{j-i}(\varphi P^i(f-h))\,dm = \int_X \varphi \left(\int_X \varphi P^i(f-h)\,dm \right) h\,dm + \int_X \varphi Q^{j-i}(\varphi P^i(f-h))\,dm,$$

et puisque

$$\int_X \varphi h\,dm = \int_X \varphi\,d\mu = 0,$$

et

$$\|Q^{j-i}(\varphi P^i(f-h))\|_{L^1_m} \le C\lambda^{j-i}\|\varphi\|_0 \|P^i(f-h)\| \le C\|\varphi\|_0 \lambda^j,$$

on obtient

$$\left| \int_X \varphi P^{j-i}(\varphi P^i(f-h))\,dm \right| \le C\|\varphi\|_0 \lambda^j,$$

d'où le résultat après la sommation. □

On va également utiliser une estimation pour les grandes déviations annealed :

Lemme 2.25. Pour tout $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ assez petit,

$$\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \nu(|S_n| > n\epsilon) \le Ce^{-C\epsilon^2 n}.$$

Ce lemme est une conséquence directe du principe des grandes déviations [[3], Théorème 3.6], voir aussi [[2], Lemme 1.2.17]. On l'en déduit de la décroissance exponentielle annealed des corrélations [[3], Proposition 3.1] et de l'approche martingale de Gordin décrite dans [[6], Proposition 2.5] (voir [[3], paragraphe 4] pour la construction des martingales).

2.3 Version quenched du théorème de la limite centrale

Dans ce paragraphe, on va étudier la version quenched du théorème de la limite centrale (TLC), c'est à dire à un on va montrer un TLC valable pour presque tout choix de $\underline{\omega}$. Plus précisement, on étudie les lois limites pour la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k_{\underline{\omega}}$, pour $\underline{\omega}$ fixé, mais générique.

2.3.1 Un approch général

On décrit ici un résultat abstrait, démontré par Ayer. Liverani et Stenlund [8], qui sera notre outil principal pour étudier le quenched (TLC). On considère ici un système dynamique aléatoire i.i.d. $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ agissant sur X, avec une mesure stationnaire μ. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ un observable avec $\int_X \varphi d\mu = 0$, et on définit $X_k(\underline{\omega}, x) = \varphi(T^k_{\underline{\omega}} x)$ et $S_n(\underline{\omega}, x) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\underline{\omega}, x)$. On aura besoin d'introduire un système auxiliaire, défini de la façon suivante. L'espace probabilisé est toujours $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Les applications, que l'on dénotera par $\widetilde{T}_\omega$, agissent sur X^2 par $\widetilde{T}_\omega(x,y) = (T_\omega x, T_\omega y)$. On définit un nouvel observable $\widetilde{\varphi} : X^2 \to \mathbb{R}$ pour ce système auxiliaire par $\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y)$, et on désigne par $\widetilde{S}_n$ sa somme de Birkhoff associée.

Théorème 2.26. *On suppose qu'il existe $\sigma^2 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \ge 1$ avec $\frac{t}{\sqrt{n}}$ assez petit,*

(1) $\left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\mu}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n}) - e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \right| \le C\frac{1+|t|^3}{\sqrt{n}},$

(2) $\left|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes(\mu\otimes\mu)}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_n}) - e^{-t^2\sigma^2}\right| \leq C\frac{1+|t|^3}{\sqrt{n}}$.

On suppose de plus que pour tout $n \geq 1$, et tout $\epsilon > 0$ assez petit,

(3) $\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq Ce^{-C\epsilon^2 n}$.

Alors, le quenched (TLC) est vérifié pour $\widetilde{\mathbb{P}}$ - presque toute suite $\underline{\omega} \in \Omega^{\mathbb{N}}$, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T_{\underline{\omega}}^k}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

On peut vérifier les hypothèses de ce théorème en procédant de la façon suivante :
Étape 1 On démontre que le système aléatoire $(\Omega, \mathbb{P}, T)$, qui nous intéresse, vérifie les hypothèses (H_1) à (H_6) décrit au paragraphe 2.1.2 avec un espace Banach $\mathcal{B}$. On vérifie alors que φ appartient à un espace Banach $\mathcal{B}_0$ satisfaisant à la condition (2.10). Ainsi, le SDA $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ admet une unique mesure stationnaire μ absolument continue par rapport à m. En faisant l'hypothèse que φ n'est pas un cobord aléatoire, par Théorème 2.22, Lemmes 2.23 et 2.25, on sait qu'il existe σ^2 tel que les points (1) et (3) du Théorème 2.26 sont vérifiés.
Étape 2 On démontre que le système auxiliaire $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{T})$ vérifie les hypothèses (H_1) à (H_6), avec un espace fonctionnel $\widetilde{\mathcal{B}}$ de fonctions définies sur X^2 , avec $\widetilde{m} = m \otimes m$ mesure de référence . Ainsi, ce système admet une unique mesure stationnaire μ_2 absolument continue par rapport à m_2. L'observable $\widetilde{\varphi}$ doit appartenir à un espace $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ qui vérifie la condition (2.10) au début du paragraphe 2.2, et la mesure $\mu\otimes\mu$ doit appartenir à $\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}}$, c'est à dire $h \otimes h \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Il est évident de voir que les marginales de $\widetilde{\mu}$ sont absolument continues par rapport à m et sont stationnaires pour le système $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{T})$. Comme μ est l'unique mesure stationnaire absolument continue pour le système considéré, on en déduit que les marginales de $\widetilde{\mu}$ sont toutes deux égales à μ, et donc $\int_{X^2} \widetilde{\varphi} d\widetilde{\mu} = 0$. Sous ces hypothèses et par Lemme 2.23, on sait qu'il existe $\widehat{\sigma}^2 > 0$ (la stricte positivité découle en fait de l'étape 3) tel que

$$\left|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes(\mu\otimes\mu)}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\widetilde{S}_n}) - e^{-t^2\sigma^2}\right| \leq C\frac{1+|t|^3}{\sqrt{n}},$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ avec $\frac{t}{\sqrt{n}}$ assez petit.
Étape 3 On démontre que $\widetilde{\sigma}^2 = 2\sigma^2$. Ceci entraine que l'hypothèse (2) du Théorème 2.26 est validée. Les systèmes aléatoires que les on considère dans tout ce chapitre satisfont les hypothèses (H_1) à (H_6), donc l'étape 1 est ici inexistante. L'étape 2 ne présente pas en général que des difficultés d'ordre technique : le système aléatoire auxiliaire agit sur un espace de dimension deux fois plus grande que celle du système d'origine, ce qui nécessite d'utiliser un espace fonctionnel $\widetilde{\mathcal{B}}$ plus compliqué que $\mathcal{B}$. Ceci est particulièrement vrai lorsque $X = [0, 1]$: en effet, dans ce cas, $\mathcal{B}$ est l'espace BV en dimension 1, tandis que l'on devra choisir pour $\widetilde{\mathcal{B}}$ l'espace QuasiHölder (ou n'importe quelle autre alternative comme BV en dimension quelconque). On devra alors tenir compte de l'accumulation des discontinuités, un phénomène qui n'apparait qu'en dimension supérieure ou égale à 2. Néanmoins, la structure particulièrement simple des applications $\widetilde{T}_\omega$ (des produits directs) et des partitions de régularité (composées de rectangles) entraine que les hypothèses classiques où la dilatation l'emporte sur la complexité sont souvent vraies. Toute la difficulté réside en réalité dans l'étape 3. Pour démontrer que $\widetilde{\sigma}^2 = 2\sigma^2$, on utilisera la formule de Green-Kubo qui nous donne une expression explicite pour les variances asymptotiques.
On démontrera dans les sous-paragraphes suivants que cette hypothèse sur les variances est satisfaite dans le cas où toutes les applications $\widetilde{T}_\omega$ préservent la mesure μ. On discutera aussi un cas général (et ouvert) où la mesure μ n'est pas nécessairement préservée

par toutes les applications. Avant de terminer ce sous-paragraphe, on démontre le lemme suivant qui nous donne une condition nécessaire pour obtenir le quenched (TLC).

Lemme 2.27. *[3, Lemma 7.2]* En utilisant les mêmes notations précédentes, si on suppose qu'il existe $\sigma^2 > 0$ et $\widetilde{\sigma}^2 > 0$ tel que

1. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \mu$,
2. $\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \widetilde{\sigma}^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}} \otimes (\mu \otimes \mu)$,
3. pour $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}$-p.t. $\underline{\omega}$, $\frac{S_n(\underline{\omega}, \cdot)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ sous la probabilité μ.

Alors $\widetilde{\sigma}^2 = 2\sigma^2$.

2.3.2 Systèmes unidimentionnels : Condition suffisante et non nécessaire

Dans ce paragraphe, on va utiliser Théorème 2.26 pour fournir un conditionnement concret et suffisant pour que le quenched théorème de la limite centrale sans centrage aléatoire est vérifié pour le (SDA) dilatant en dimension 1. Bien que la stratégie puisse être appliquée de manière égale aux systèmes à dimension supérieure, on se concentre sur le cas unidimensionnel afin de maintenir la technicité à un niveau raisonnable.
Soit Ω un ensemble fini, $\mathbb{P} = \{p_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ un vecteur de probabilité avec $p_\omega > 0$ pour chaque $\omega \in \Omega$, et $T = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille finie d'applications de Lasota-Yorke sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes les applications sont uniformément dilatantes. On suppose aussi que $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ possède la propriété de recouvrement. Par les résultats du paragraphe 2.1.3, on sait qu'il existe une unique mesure stationnaire μ absolument continue.
Soit $\varphi \in BV$ avec $\int_X \varphi d\mu = 0$, qui n'est pas un cobord aléatoire au sens de la Proposition 2.19 . Par Théorème 2.22, φ satisfait l'annealed (TLC), dont la variance asymptotique $\sigma^2 > 0$.

Théorème 2.28. Le quenched (TLC) est vérifié (i.e. $\frac{S_n(\underline{\omega}, \cdot)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour p.t. $\underline{\omega}$) si et seulement si :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi \circ T_{\underline{\omega}}^k \, d\mu \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}) = 0.$$

Remarques 2.29. (1) La condition du Théorème 2.28, même s'il semble difficile à vérifier en pratique, a avantage sur la condition $\widetilde{\sigma}^2 = 2\sigma^2$ d'impliquer uniquement des quantités associées au (SDA) qui on est étudié et non un système auxiliaire.

(2) Cette condition est trivialement satisfaite si toutes les applications préservent la même mesure μ. On a généralisé le résultat de [3].

(3) On verra dans la prochaine section que, pour une grande classe de (SDA), chaque fois que les applications ne préservent pas une mesure invariante commune, nous pouvons toujours construire un observable pour lequel cette condition n'est pas satisfaite.

Démonstration. La preuve de ce théorème se fait en 3 étapes :
Étape 1. D'après le paragraphe 2.1.3, l'opérateur de transfert P du système $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ admet un trou spectrale sur $\mathcal{B} = BV$. Et puisque $\mathcal{B}$ est un algèbre de Banach et $\varphi \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, on en déduit l'étape 1.
Étape 2. On va prouver que l'opérateur de transfert en moyenne $\widetilde{P}$ du système auxiliaire admet un trou spectrale sur l'espace Quasi-Hölder $\widetilde{\mathcal{B}} = V_1(X^2)$. Comme $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{B}}_0 = \widetilde{\mathcal{B}}$, ceci entraine que l'étape 2 est validée. On commence par la preuve d'une inégalité de Lasota-Yorke .

On rappelle les notations du paragraphe 2.1.4 (pour plus des détails voir[48]). On considère que le cas $\alpha = 1$. Soit $S : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur un compact régulier $M \subset \mathbb{R}^d$, avec une partition de régularité et injectivité $\{U_i\}_i$ qui satisfait les hypothèses (PEi), $i = 1, 2, 3, 4$ de [48] avec une constante $\epsilon_0(S) > 0$, $c(S)$ et $s(S) < 1$ correspondantes. Il est facile de voir que si T est une application uniformément dilatante C^2 par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$, alors $S = \widetilde{T} = T \times T$ satisfait ces hypothèses sur $M = [0, 1]^2$ et $s(S) = \lambda(T)^{-1}$.
On définit, pour tout $0 \le \delta \le \epsilon_0(S)$

$$G_{\widetilde{T}}(\epsilon, \delta) = \sup_x \sum_i \frac{m_d(\widetilde{T}_i^{-1} B_\epsilon(\partial \widetilde{T} U_i) \cap B_{(1-s(\widetilde{T}))\delta}(x))}{m_d(B_{(1-s(\widetilde{T}))\delta}(x))},$$

et $\eta_{\widetilde{T}}(\delta) = s(\widetilde{T}) + 2\left(\sup_{0<\epsilon\le\delta} \frac{G_{\widetilde{T}}(\epsilon,\delta)}{\epsilon}\right)\delta$. On rappelle que $B_\epsilon(A)$ désigne le ϵ-voisinage de A pour la distance euclidienne.
Soit $V_1(M)$ l'espace Quasi-Hölder sur M. On rappelle que la définition de cet espace fait intervenir un paramètre ϵ_0. L'espace $V_1(M)$ ne dépend que du choix de ϵ_0, mais la sémi-norme elle en dépend, bien que deux choix de ϵ_0 donneront deux sémi-nomres équivalentes. On notera la sémi-norme $|.|_{\epsilon_0}$ pour souligner la dépendance en ϵ_0. L'opérateur de transfert P_S de S satisfait l'inégalité de Lasota-Yorke suivante sur $V_1(M)$:

Proposition 2.30. *[48, Lemme 4.1]* Sous les conditions précédentes, pour tout $0 < \epsilon_0 \le \epsilon_0(\widetilde{T})$ et $f \in V_1(M)$, on a

$$|P_{\widetilde{T}} f|_{\epsilon_0} \le \left(1 + c(\widetilde{T}) s(\widetilde{T}) \epsilon_0\right) \eta_{\widetilde{T}}(\epsilon_0) |f|_{\epsilon_0} + A(\widetilde{T}, \epsilon_0) \|f\|_{L^1_{m_d}},$$

avec $A(\widetilde{T}, \epsilon_0)$ est une constante finie qui ne dépend que de S and ϵ_0.

On va donne une estimation de la fonction G_S dans le cas où $S = T \times T$, avec T est une application de type Lasota-Yorke sur $[0, 1]$. Si $\{I_i\}_i$ est la partition associée à T, alors la partition de S est donnée par $\{I_i \times I_j\}_{i,j}$.

Lemme 2.31. Soit $T : [0, 1] \to [0, 1]$ une application uniformément dilatante de classe C^2 par morceaux et $S = T \times T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$. Alors il existe $\delta(T) > 0$ tl que pour tout $0 < \epsilon \le \delta \le \delta(T)$, on

$$G_{\widetilde{T}}(\epsilon, \delta) \le \frac{64 s(\widetilde{T})}{\pi(1 - s(\widetilde{T}))} \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Démonstration. On désigne par $B_\epsilon^\infty(A)$ le ϵ-voisinage de A pour la distance l^∞. On a $B_\epsilon(A) \subset B_\epsilon^\infty(A)$. Pour tout i et j, on a $\widetilde{T}(I_i \times I_j) = TI_i \times TI_j$, qui est un rectanagle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Ainsi,

$$B_\epsilon(\partial \widetilde{T}(I_i \times I_j)) \subset B_\epsilon^\infty(\partial \widetilde{T}(I_i \times I_j)),$$

ce qui donne

$$\widetilde{T}_{i,j}^{-1} B_\epsilon(\partial \widetilde{T}(I_i \times I_j)) \subset B^\infty_{s(\widetilde{T})\epsilon}(\partial I_i \times I_j).$$

L'inclusion provient de la structure produit de S. On a alors

$$\widetilde{m}(\widetilde{T}_{i,j}^{-1} B_\epsilon(\partial \widetilde{T}(I_i \times I_j)) \cap B_{(1-s(\widetilde{T}))\delta}(x)) \le \widetilde{m}(B^\infty_{s(\widetilde{T})\epsilon}(\partial I_i \times I_j) \cap B_{(1-s(\widetilde{T}))\delta}(x)) \le 16 s(\widetilde{T}) \epsilon (1 - s(\widetilde{T})) \delta$$ [1]

1. Pour tout disque D de rayon R et tout rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ dans le plan, on a $\widetilde{m}(D \cap B_r^\infty(\partial \mathcal{R}) \le 16rR$ for any $r > 0$.

Pour tout δ assez petit, en fonction de T, toute boule $B_{(1-s(\widetilde{T}))\delta}(x)$ ne recontra qu'au plus 4 éléments $\widetilde{T}_{i,j}^{-1}B_\epsilon(\partial\widetilde{T}(I_i \times I_j)$, d'où le lemme. □

On peut montrer une inégalité de Lasota-Yorke sur $V_1([0,1]^2)$ pour l'opérateur $\widehat{P}$ associé au système auxiliare $(\Omega, \mathbb{P}, S)$, avec $S = \{S_\omega\}_{\omega\in\Omega} = \{\widehat{T}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. On remarque d'abord que $S_{\underline{\omega}}^n = T_{\underline{\omega}}^n \oplus T_{\underline{\omega}}^n$. On sait aussi qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\lambda(T_\omega) > \lambda$ pour tout ω, et donc

$$s(S_\omega) = \lambda(T_\omega)^{-1} \leq \lambda^{-1}.$$

Lemme 2.32. Il existe $n \geq 1$, $\epsilon_0 > 0$, $\theta < 1$ et $K > 0$ tel que pour tout $f \in V_1(X^2)$, on a

$$|\widetilde{P}^n f|_{\epsilon_0} \leq \theta|f|_{\epsilon_0} + K\|f\|_{L^1_{\widetilde{m}}}.$$

Démonstration. Soit $\epsilon_0^{(n)} > 0$ plus petit que $\epsilon_0(\widetilde{T}_{\underline{\omega}}^n)$, $\frac{1}{c(\widetilde{T}_{\underline{\omega}}^n)}$ et $\delta(T_{\underline{\omega}}^n)$ pour tout $\underline{\omega} \in \Omega^n$. En sommant les inégalités données par la Proposition 2.30 combiné au Lemme 2.31 pour chaque $S_{\underline{\omega}}^n$, on obtient

$$|\widetilde{P}^n f|_{\epsilon_0^{(n)}} \leq (1+\lambda^{-n})\left(\lambda^{-n} + \frac{128\lambda^{-n}}{\pi(1-\lambda^{-n})}\right)|f|_{\epsilon_0^{(n)}} + A(\epsilon_0^{(n)})\|f\|_{L^1_{\widetilde{m}}},$$

où $A(\epsilon_0^{(n)})$ est une constante finie que ne dépend que de $\epsilon_0^{(n)}$. Comme le terme en face de $|f_{\epsilon_0^{(n)}}|$ tend vers, il suffit de prendre n assez grnad pour obtenir le lemme. □

Proposition 2.33. Si $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ possède la propriété de recouvrement, c'est à dire pour toute boule $B \subset M$, il existe $n \geq 1$ et $\underline{\omega} \in \Omega^n$ tels que $T_{\underline{\omega}}^n(B) = M$, alors l'hypothèse (H_6) est vérifiée, et de plus la densité de l'unique mesure stationnaire absolument continue est bornée inférieurement par une constante $c > 0$.

Ceci montre que l'opérateur $\widetilde{P}$ vérifie les hypothèses (H_1) à (H_5) du paragraphe 2.1.2. Il nous reste à vérifier (H_6), donc il suffit de prouver que le sysème auxiliaire possède la propriété de recouvrement et d'appliquer la Proposition 2.33.

Lemme 2.34. *Le système $(\Omega, \mathbb{P}, S)$ possède la propriété de recouvrement : pour toute boule $B \subset [0,1]^2$, il existe $n \geq 1$ et $\underline{\omega} \in \Omega^n$ tels que $S_{\underline{\omega}}^n(B) = [0,1]^2$.*

Démonstration. Soit $B \subset [0,1]^2$ une boule. Il existe deux intervalles non triviaux I et J inclus dans $[0,1]$ tels que $I \times J \subset B$. Comme le système $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ possède la propriété de recouvrement, il existe $n_1 \geq 1$ et $\underline{\omega}^{(1)} \in \Omega^{n_1}$ tels que $T_{\underline{\omega}^{(1)}}^{n_1}(I) = [0,1]$. Soit $K \subset T_{\underline{\omega}^{(1)}}^{n_1}(J)$ un intervalle non trivial. Par la propriété de recouvrement, il existe $n_2 \geq 1$ et $\underline{\omega}^{(2)} \in \Omega^{n_2}$ tels que $T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}(K) = [0,1]$, et donc

$$T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}(T_{\underline{\omega}^{(1)}}^{n_1}(J)) = [0,1].$$

En particuleir, $T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}$ est surjective. On pose $n = n_1 + n_2$ et $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(2)}\underline{\omega}^{(1)}$. On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{\underline{\omega}}^n(I \times J) &= T_{\underline{\omega}}^n(I) \times T_{\underline{\omega}}^n(J) \\
&= T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}(T_{\underline{\omega}^{(1)}}^{n_1}(I)) \times T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}(T_{\underline{\omega}^{(1)}}^{n_1}(J)) \\
&= T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}([0,1]) \times [0,1] \\
&= [0,1]^2,
\end{aligned}$$

puisque $T_{\underline{\omega}^{(2)}}^{n_2}$ est surjective. □

Ainsi, l'opérateur de transfert $\widetilde{P}$ admet un trou spectral sur $V_1(X^2)$, ce qui termine l'étape 2.
Étape 3. D'après Lemme 2.24 le quenched (TLC) est satisfait si et seulement si $\widetilde{\sigma}^2 = 2\sigma^2$. Le lemme suivant prouve que que la condition au-dessus est équivalente à la condition donnée par Théorème 2.28, ce qui en termine la preuve.

Lemme 2.35. *On a $\widehat{\sigma}^2 = 2\sigma^2$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi \circ T^k_{\underline{\omega}}\, d\mu \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) = 0.$$

Démonstration. Comme la densité $h \otimes h$ de la mesure $\mu \otimes \mu$ appartient à $\widehat{B} = V_1(X^2)$, on a d'après Lemme 2.24

$$\widetilde{\sigma}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\mu\otimes\mu}(\widetilde{S}_n^2).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\mu\otimes\mu}(\widetilde{S}_n^2) &= \sum_{k,l=0}^{n-1} \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \int_X \widetilde{\varphi}(\widetilde{T}^k_{\underline{\omega}}(x,y)) \widetilde{\varphi}(\widetilde{T}^l_{\underline{\omega}}(x,y)) d\mu(x) d\mu(y) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) \\
&= \sum_{k,l=0}^{n-1} \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \int_X \Big(\varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) - \varphi(T^k_{\underline{\omega}}y)\Big) \Big(\varphi(T^l_{\underline{\omega}}x) - \varphi(T^l_{\underline{\omega}}y)\Big) d\mu(x) d\mu(y) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}).
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \int_X \Big(\varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) - \varphi(T^k_{\underline{\omega}}y)\Big) \Big(\varphi(T^l_{\underline{\omega}}x) - \varphi(T^l_{\underline{\omega}}y)\Big) d\mu(x) d\mu(y) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) \\
&= \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) \varphi(T^l_{\underline{\omega}}x) d\mu(x) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) - \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) d\mu(x) \right) \left(\int_X \varphi(T^l_{\underline{\omega}}y) d\mu(y) \right) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) \\
&- \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}y) d\mu(x) \right) \left(\int_X \varphi(T^l_{\underline{\omega}}x) d\mu(y) \right) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) + \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}y) \varphi(T^l_{\underline{\omega}}y) d\mu(y) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\mu\otimes\mu}(\widetilde{S}_n^2) &= 2 \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \int_X \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) \right)^2 d\mu(x) d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) - 2 \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi(T^k_{\underline{\omega}}x) d\mu(x) \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}) \\
&= 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\mu}(S_n^2) - 2 \int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi \circ T^k_{\underline{\omega}} d\mu \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}(\underline{\omega}),
\end{aligned}$$

d'où lemme, le fait que

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}}\otimes\nu}(S_n^2),$$

par la formule de Green-Kubo. □

□

2.3.3 Un contre exemple

On montre par un contre-exemple que le quenched CLT n'est pas toujours vérifié dès qu'on ne suppose plus que la mesure stationnaire est préservée par toutes les applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. On considèrera deux applications T_0 et T_1 de type Lasota-Yorke, uniformément dilatantes, et possédant toutes les deux la propriété de recouvrement. Par conséquent, elles admettent chacune une unique mesure absolument continue et invariante, que l'on notera respectivement μ_0 et μ_1. On supposera que $\mu_0 \neq \mu_1$. On suppose aussi qu'il existe $C > 0$ et $\lambda < 1$ tels que pour toute suite (ω_n) dans $\{0, 1\}$, tout $n = 1$ et toute fonction $f \in BV$ d'intégrale nulle par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\|P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f\|_{BV} \leq C\lambda^n \|f\|_{BV}.$$

Cette hypothèse, dite de perte de mémoire exponentielle (voir chapitre 2 de [2]). Elle est satisfaite dans plusieurs cas, comme par exemple si T_0 et T_1 sont suffisamment proches dans une topologie convenable, ou si T_0 et T_1 sont deux β-transformations, avec des β assez proches.
On considère alors le système aléatoire de Lasota-Yorke donné par $\Omega = \{0, 1\}$, et $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Il admet lui aussi la propriété de recouvrement, et donc admet une unique mesure stationnaire absolument continue μ. On considère un observable ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que

$$\int_X \psi d\mu_0 \neq \int_X \psi d\mu_1,$$

et on pose

$$\varphi = \psi - \int_X \psi d\mu.$$

On va montrer que φ ne vérifie pas le quenched (TLC). D'après Théorème 2.28, il s'agit de montrer que

$$\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \int_X \varphi \circ T_{\omega_k} \circ \dots T_{\omega_1} \, d\mu}{\sqrt{n}} \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}) \tag{2.12}$$

ne tend pas vers 0.
En changeant la direction du temps, c'est-à-dire en remplaçant $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ par $(\omega_n, \cdots, \omega_1)$ et en appliquant l'opérateur de transfert, (2.12) se réécrit

$$\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \int_X \varphi P_{\omega_k} \dots P_{\omega_n} h \, dm}{\sqrt{n}} \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}), \tag{2.13}$$

où h est la densité de μ. Pour toute suite $\underline{\omega}$, on a grâce la propriété de perte de mémoire exponentielle

$$\|P_{\omega_1} \dots P_{\omega_n} h - P_{\omega_1} \dots P_{\omega_n} P_{\omega_{n+1}} h\|_{\mathrm{BV}} \leq C\lambda^n.$$

Par conséquent, $P_{\omega_1} \dots P_{\omega_n}$converge exponentiellement vite vers une fonction$h_{\underline{\omega}} \in BV$: il existe $C > 0$ et $\lambda < 1$ telles que pour tout $n = 1$ et tout $\underline{\omega}$,

$$\|P_{\omega_1} \dots P_{\omega_n} h - h_{\underline{\omega}}\|_{\mathrm{BV}} \leq C\lambda^n.$$

Soit σ le décalage à gauche sur l'espace des suites infinies $\Omega^{\mathbb{N}}$. L'équation (2.13) se réécrit alors

$$\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_X \varphi h_{\sigma^{k-1}\underline{\omega}} \, dm + \mathcal{O}(\lambda^{n-k}) \right]}{\sqrt{n}} \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}).$$

On pose

$$G(\underline{\omega}) = \int_X \varphi \, h_{\underline{\omega}} \, dm.$$

La fonction G est Lipschitz sur $\Omega^{\mathbb{N}}$ pour la distance symbolique $d_\lambda(\underline{\omega}, \underline{\omega}') = \lambda^{s(\underline{\omega}, \underline{\omega}')}$ avec

$$s(\underline{\omega}, \underline{\omega}') = \inf\{n \geq 1 \, : \, \omega_n \neq \omega'_n\}.$$

En effet, si $\omega_1 = \omega_1', \ldots, \omega_n = \omega_n'$, alors

$$\begin{aligned}
|G(\underline{\omega}) - G(\underline{\omega}')| &\leq \|\varphi\|_\infty \|h_{\underline{\omega}} - h_{\underline{\omega}'}\|_{\mathrm{BV}} \\
&\leq \|h_{\underline{\omega}} - P_{\omega_1} \ldots P_{\omega_n} h\|_{\mathrm{BV}} \\
&+ \|(P_{\omega_1} \ldots P_{\omega_n} - P_{\omega_1'} \ldots P_{\omega_n'}) h\|_{\mathrm{BV}} \\
&+ \|P_{\omega_1'} \ldots P_{\omega_n'} h - h_{\underline{\omega}'}\|_{\mathrm{BV}} \\
&\leq C\lambda^n.
\end{aligned}$$

Cette fonction G nous permet de réécrire (2.13) comme

$$\int_{\Omega^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\mathcal{O}(1) + \sum_{k=0}^{n-1} G(\sigma^k \underline{\omega})}{\sqrt{n}} \right)^2 d\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}(\underline{\omega}).$$

Si la fonction G était de moyenne non nulle, alors le théorème de Birkhoff pour σ (et $\widetilde{\mathbb{P}}$) assurerait que l'équation précédente exploserait, et on aurait gagné. En fait, G est de moyenne nulle (sa moyenne est l'intégrale de φ pour la mesure stationnaire), donc il faut travailler un peu plus. Comme G est Hölder, elle satisfait un théorème de la limite centrale pour σ. Si ce théorème limite est non dégénéré, la variance asymptotique est non nulle, et on obtient (2.12). Reste à exclure le cas dégénéré. En ce cas, la fonction G serait un cobord et même un cobord Hölder (résultat classique de régularité automatique). En particulier, G devrait être nulle sur les points fixes de F, et donc $G(0, 0, 0, \cdots) = G(1, 1, 1, \cdots) = 0$. Comme

$$h(0, 0, 0, \cdots) = \lim_n P_0^n h,$$

est la densité de la mesure stationnaire μ_0 pour T_0, on a

$$G(0, 0, 0, \cdots) = \int_X \varphi d\mu_0 \quad et \quad G(1, 1, 1, \cdots) = \int_X \varphi d\mu_1.$$

Ainsi,

$$\int \varphi \, d\mu_0 = \int \varphi \, d\mu_1 (= 0).$$

C'est absurde, car cela contredit le choix de notre fonction φ.

2.4 Conclusions

L'exemple de contre-exemple précédent suggère fortement que, dans la situation générique où la mesure stationnaire μ n'est pas préservée par toutes les applications T_ω, le quenched (TLC) sans centrage aléatoire n'est pas toujours vérifiée. On pourrait alors être tenté de conjecturer qu'il faut un centrage aléatoire nécessaire, i.e. que pour $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$,

$$\frac{S_n(\underline{\omega}, .) - \mu(S_n(\underline{\omega}, .))}{\sqrt{n}} \Rightarrow_\mu \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Un indice dans cette direction est donné par Théorème 2.28, car il affirme que le quenched (TLC) sans centrage aléatoire est valable si et seulement si $\frac{\mu(S_n(\underline{\omega}, .))}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{P}^{\mathbb{N}})$, c'est-à-dire si et seulement si la différence entre les deux formulations est négligeable en L^2.

Dans un article récent de Dobbs et Stenlund [24], l'importance du centrage a été mise en évidence dans le contexte des systèmes dynamiques quasistatiques et en particulier le fait que la régularité de la distribution initiale joue un rôle pour déterminer si un centrage est admissible ou non, voir la section 3.2 et la discussion après Théorème 3.6.

Chapitre 3

Principe d'invariance presque sûr pour les applications aléatoires dilatantes par morceaux

Dans ce chapitre, on présentera des résultats sur les théorèmes limites pour les applications aléatoires dilatantes par morceaux issues de l'article [25] soumis dans Arxiv. J'avais callaboré avec Mr. Vaienti tout au début de cette recherche en l'aidant à construire la martingale qui suivera. Mr. Vaienti m'a donc autorisé à utiliser une partie des résultats de [25] qui j'adapterai aux applications de l'intervalle de type Lasota-Yorke. On introduira un cadre fonctionnel abstrait sous lequel on démontrera l'existence d'une mesure de probabilité invariante absolument continue. Ensuite, on construira la martingale inverse et établira diverses estimations utiles qui joueront un rôle important dans le reste. Puis, on étudiera le théorème de Sprindzuk et leurs conséquences. On terminera ce chapitre par la présentation de notre résultat principal : Principe d'invariance presque sûr pour les applications aléatoires dilatantes par morceaux.

3.1 Préliminaires

On présente dans cette section les applications fibrées et les espaces de fonctions associés qu'on les utilisera pour former la concaténation aléatoire. On va les appeler des transformations aléatoires dilatantes, ou applications aléatoires de Lasota-Yorke. On va se référer à et utiliser les hypothèses générales pour ces applications, telles que proposées par Buzzi [18] afin d'utiliser ses résultats sur la décroissance quenched des corrélations. Cependant, on renforcera quelques-unes de ces hypothèses dans le but d'obtenir des théorèmes de limites. Les conditions supplémentaires proposées par les auteurs [25] sont semblables à celles appelées Dec et Min dans l'article [21], et ont servi à établir une propriété semblable à la quasi-compacité pour la composition des opérateurs de transfert.
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit une transformation inversible $\sigma : \Omega \to \Omega$ qui préserve la mesure $\mathbb{P}$. On supposera que $\mathbb{P}$ est ergodique. On prendra comme $(X, \mathcal{A})$ l'intervalle unité muni de la sigma-algèbre de Borel. On considérira l'espace d'observables donné par les fonctions à variation bornée. Cette espace est caractérisé par la variation notée par $Var : L^1(X, m) \to [0, \infty]$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- (V_1) $\|h\|_\infty \leq C_{Var}(\|h\|_1 + Var(h))$ pour certaine constante $1 \leq C_{Var} < \infty$;
- (V_2) $\{h : X \to \mathbb{R}_+ : \ \|h\|_1 = 1 \ et \ Var(h) < \infty\}$ est $L^1(m)$-dense dans $\{h : X \to \mathbb{R}_+ : \|h\|_1 = 1\}$.

On considère la norme suivante

$$\|h\|_{BV} = Var(h) + \|h\|_1,$$

sur l'espace BV. Nous considérons également la norme suivante

$$\|h\|_{var} = Var(h) + \|h\|_\infty,$$

sur l'espace BV qu'est (bien que différente) équivalente à la norme $\|.\|_{BV}$. Il est évident que

$$\|h\|_{BV} \leq \|h\|_{var}. \tag{3.1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on considère

$$T^n_\omega = T_{\sigma^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ T_\omega, \tag{3.2}$$

et

$$P^n_\omega = P_{\sigma^{n-1}\omega} \cdots \circ P_\omega. \tag{3.3}$$

Définition 3.1. Une famille d'applications aléatoires de Lasota-Yorke $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est dite uniformément satisfaite si :

(A_1) L'application $(\omega, x) \mapsto (P_\omega H(\omega, .))(x)$ est $\mathbb{P} \times m$-mesurable pour toute function $\mathbb{P} \times m$-mesurable H telle que $H(\omega, .) \in L^1(m)$ pour p.t. $\omega \in \Omega$;

(A_2) il existe $C > 0$ tel que

$$\|P_\omega \phi\|_{BV} \leq C\,\|\phi\|_{BV},$$

pour $\phi \in BV$ et $\mathbb{P}$-p.t.$\omega \in \Omega$;

(A_3) $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{n\geq 0} \|\phi_{n+1} \circ T_{\sigma^{n+1}(\omega)}\|_{BV} < \infty,$$

avec $\{(\phi_n)_{n\geq 0}\} \subset BV$ et $\sup_n \|\phi_n\|_{BV} < \infty$;

(A_4) il existe K, $\lambda > 0$ tel que

$$\|P^n_\omega \phi\|_{BV} \leq K e^{-\lambda n} \|\phi\|_{BV},$$

pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$ et $\phi \in BV$ tel que $\int_X \phi\, dm = 0$;

(A_5) il existe $c > 0$ tel que

$$P^n_\omega 1_X \geq c,$$

pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$.

On introduit l'exemple suivant :

Exemple 3.2. (Application Lasota-Yorke aléatoire)
On prend $X = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur $[0, 1]$ et m la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On considère

$$Var(g) = \inf_{h=g(mod\, m)} \sup_{0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1} \sum_{k=1}^{n} |h(s_k) - h(s_{k-1})|.$$

On sait bien que Var satisfait les propriétés (V_1) et (V_2) où C_{Var}, $K_{Var} = 1$. Pour une application $T : [0, 1] \to [0, 1]$ C^2 par morceaux, on considère

$$\delta(T) = essinf_{x\in[0,1]} |T'|.$$

On considère maintenant une application mesurable et à valeurs finies, $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, C^2 par morceaux sur $[0,1]$ vérifiant (A_1) telle que

$$\sup_{\omega\in\Omega} N(T_\omega) =: N < \infty, \quad \inf_{\omega\in\Omega} \delta(T_\omega) =: \delta > 1, \quad et \quad \sup_{\omega\in\Omega} |T''_\omega|_\infty =: D < \infty.$$

Il est prouvé dans [18] que la famille $\omega \to T_\omega$, $\omega \in \Omega$ satisfait (A_2) avec

$$C = 4\Big(\frac{N}{\delta}\bigvee 1\Big)\Big(\frac{D}{\delta^2}\bigvee 1\Big)\Big(\frac{1}{\delta}\bigvee 1\Big), \tag{3.4}$$

pour deux fonctions à valeurs réelles g_1 et g_2 telles que

$$g_1 \bigvee g_2 = \max\{g_1, g_2\}.$$

Il est évident que $Var(\frac{1}{T'}) \leq \frac{D}{\delta^2}$. On note que depuis N, la condition (A_3) est vérifiée.
La décroissance des corrélations (A_5) a été traitée dans les Propositions 2.10 et 2.11 dans [21]. Là, des conditions suffisantes ont été énoncé pour les systèmes dynamiques séquentiels, mais ces conditions peuvent être facilement adaptées à notre approche aléatoire. Conze et Raugi [21] ont proposé deux types de conditions, dont l'un l'hyopthèse (A_4). Le premier type local requiert l'existence d'une application de fibres, applée T_0, dont l'opérateur de transfert P_0 est quasi compact et exact. On définit une distance entre deux opérateurs de transfert P_1 et P_2 par

$$d(P_1, P_2) := \sup_{\phi\in BV \|\phi\|_{BV}<1} \|P_1\phi - P_2\phi\|.$$

Il a été démontré dans [21] qu'il existe un voisinage U_0 de P_0 tel que toutes les concaténations autorisées d'opérateurs de transfert tirées de U_0 vérifient (A_4).
Pour établir (A_4) pour le deuxième type, plus général, la dynamique aléatoire non locale, on requiert deux conditions :

(a) Recouvrement aléatoire : Soit A_ω désigné la collection d'intervalles de monotonie pour l'application T_ω et défini par $A_\omega = \bigvee_{j=0}^{n-1}(T^j_\omega)^{-1}A_{\sigma^j\omega}$. On dit que les applications aléatoires Lasota-Yorke $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ couvrent $[0,1]$ si pour chaque $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$ et $J \in A^n_\omega$ il existe n_0 tel que $T^{n_0}_\omega(J) = [0,1]$.

(b) Inégalité de Lasota-Yorke uniforme : il existe $n \in \mathbb{N}$, $0 < \rho < 1$ et $B > 0$ tels que pour p.t.$\omega \in \Omega$, $\|P^n_\omega T\|_{BV} \leq \rho\|T\|_{BV} + B\|T\|_1$.

Pour qu'une application de Lasota-Yorke possède la propriété de recouvrement, Liverani [[40], Théorème 3.6] a établi dans [[40], Lemme 4.2] une décroissance exponentielle des corrélations pour des fonctions à variation bornée, en utilisant des techniques de cône et la propriété que la seule densité aléatoire invariante est uniformément bornée. Ces résultats, en particulier [[40], Lemme 3.5], qui déterminent le taux de décroissance des corrélations, sont directement applicables dans notre composition aléatoire. Une conséquence directe de cette décroissance des corrélations résulte de l'exactitude des seuites $(T_{\sigma^j\omega})_{j\geq 0}$ pour chaque $\omega \in \Omega$. C'est-à-dire pour tout $\varphi \in BV$ avec $\int \varphi\, dm = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|P^n_\omega\varphi\|_1 = 0$; voir par exemple la preuve de la Proposition 3.6 dans [26].
La preuve de l'hypothèse (A_4) maintenant est similaire à la preuve de [[21], Proposition 2.11]. En effet, l'exactitude, avec la condition de compacité (pour chaque suite $(P_{\omega_j})_{j\in\mathbb{N}}$, nous garentie l'existence d'une sous-suite convergente) assurent que pour tous $\varepsilon_0 > 0$ et $\omega \in \Omega$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $\varphi \in BV$ avec $\int \varphi\, dm = 0$ et $j \in \mathbb{N}$, $\|P^q_{\sigma^j\omega}\varphi\|_1 \leq \varepsilon_0\|\varphi\|_{BV}$, par un argument diagonal. Cette propriété avec l'inégalité de Lasota-Yorke uniforme nous donnent (A_4) essentiellement comme dans la preuve de [[21],

Proposition 2.7].
On en déduit par la Proposition 2 dans [4] que l'hypothèse (A_5) est satisfaite en utilisant la propriété de recouvrement aléatoire et la conditions uniforme de Lasota-Yorke introduite ci-dessus, et en supposant $esssup_{\omega\in\Omega}|T'_\omega| \leq C'$. Conze et Raugi ont démontré (A_5) dans [21] pour des compositions de β-transformations avec β sélectionné à partir des valeurs d'un intervalle approprié, et que les auteurs de l'article [29] ont déclaré des conditions suffisantes pour (A_5) pour des suites d'applications Lasota-Yorke qui sont des translations d'une application fixe de Lasota-Yorke ou des petites perturbations d'une application fixe de Lasota-Yorke.

Dans la suite on peut prouver l'existence d'une unique mesure de probabilité invariante absolument continue dont sa densité donnée par : $h : \Omega \times X \to \mathbb{R}$, où les fibres h_ω sont uniformément bornées en utilisant (A_1), (A_2) et (A_4).

3.2 Existence d'une unique mesure de probabilité invariante absolument continue

On présente ici une nouvelle preuve de l'existence des mesures conditionnelles adaptées de l'article [25] ; il s'agit d'une preuve alternative à celle contenue dans l'article [18].

Proposition 3.3. *Soit $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ une famille d'applications de Lasota-Yorke uniformément satisfaite sur X. Alors il existe une unique fonction mesurable et non négative $h : \Omega\times X \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes*

$$h_\omega := h(\omega, .) \in BV, \; P(h_\omega) = h_{\sigma\omega} \;\; et \;\; \int_X h_\omega \, dm \, = \, 1.$$

De plus, pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$, on a

$$esssup_{\omega\in\Omega}\|h_\omega\|_{BV} < \infty. \tag{3.5}$$

Démonstration. Soit

$$Y = \Big\{ v : \Omega \times X \to \mathbb{R} : \; v \; mesurable, \; v_\omega := v(\omega, .) \in BV \; et \; esssup_{\omega\in\Omega}\|v_\omega\|_{BV} < \infty \Big\}.$$

Alors, Y est un espace de Banach sous la norme

$$\|v\|_\infty := esssup_{\omega\in\Omega}\|v_\omega\|_{BV}.$$

En plus, soit Y_1 un ensemble de tout $v \in Y$ tel que

$$\int_X v_\omega dm = 1,$$

pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$. On peut montrer facilement que Y_1 est un ensemble fermé de Y et aussi qu'est un espace métrique complet. On définit une application $P : Y_1 \to Y_1$ par

$$(P(v))_\omega = P_{\sigma^{-1}\omega} V_{\sigma^{-1}\omega}, \quad v \in Y_1.$$

En utilisant l'hypothèse (A_2), donc on obtient

$$\|P(v)\|_\infty = esssup_{\omega\in\Omega}\|(P(v))_\omega\|_{BV} \leq C esssup_{\omega\in\Omega}\|v_{\sigma^{-1}\omega}\|_{BV} = C\|v\|_\infty.$$

D'une part, en utilisant l'inégalité suivante

$$\int (P(v))_\omega \, dm = \int P_{\sigma^{-1}\omega} v_{\sigma^{-1}\omega} \, dm = \int v_{\sigma^{-1}\omega} \, dm = 1,$$

pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$, on en déduit que P est bien défini. D'autre part on obtient la continuité de P grâce à l'inégalité suivante donnée par

$$\|P(v) - P(\omega)\|_\infty \leq C \, \|v_\omega\|_\infty, \quad pour \ v, \, \omega \in Y_1.$$

Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$Ke^{-\lambda n_0} < 1.$$

On choisit arbitrairement v, $\omega \in Y_1$ et en utilisant (A_4), on obtient

$$\|P_{n_0}(v) - P_{n_0}(w)\|_\infty \leq Ke^{-\lambda n_0} esssup_{\omega\in\Omega} \|v_{\sigma^{-n_0}\omega} - \omega_{\sigma^{-n_0}\omega}\|_{BV} = Ke^{-\lambda n_0} esssup_{\omega\in\Omega} \|v - \omega\|_\infty.$$

Ceci nous donne que P^{n_0} est une contraction sur Y_1. Par conséquent, il admet un seul point fixe $\widetilde{h} \in Y_1$. On considère

$$h_\omega := \frac{1}{n_0}\widetilde{h}_\omega + \frac{1}{n_0} P_{\sigma^{-1}\omega}(\widetilde{h}_{\sigma^{-1}\omega}) + \cdots + \frac{1}{n_0} P_{\sigma^{-1(n_0-1)}\omega}(\widetilde{h}_{\sigma^{-(n-1)}\omega}), \quad \omega \in \Omega.$$

On remarque que la densite h est mesurable, non négative et $\int h_\omega \, dm = 1$ et un simple calcul nous donne

$$P(h_\omega) = h_{\sigma\omega}.$$

Finalement, en utilisant (A_4) on obtient alors

$$esssup_{\omega\in\Omega} \|h_\omega\|_{BV} \leq \frac{C^{n_0} - 1}{n_0(C-1)} esssup_{\omega\in\Omega} \|\widetilde{h}_\omega\|_{BV} < \infty.$$

Ainsi, on a établi l'existence de h. L'unicité est évidente car chaque h, satisfaisant l'assertion du théorème, est un point fixe de P et donc aussi de P^{n_0} ce qui implique qu'il doit être unique. □

On note que dans l'article [18] Buzzi a prouvé le résultat ci-dessus avec un contrôle plus faible sur les propriétés de T_ω, et a montré l'existence d'une mesure de probabilité invariante absoulement continue, dont sa densité $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ alternative sous moins des conditions restrictives. En effet, ce résultat est satisfait avec $C = C(\omega)$ tel que $\log C \in L^1(\mathbb{P})$ sans les conditions (A_2) et (A_4).
Soit μ_ω la mesure de probabilité sur X, dont sa densité h_ω, donnée par $d\mu_\omega = h_\omega dm$ pour $\omega \in \Omega$. On étudiera dans le reste de cette section les propriétés de la mesure μ_ω. Tout d'abord on va montrer que la densité h_ω posséde une borne inférieure uniforme grâce à la condition (A_5). Puis on utilise l'hypothèse (A_4) pour établir la décroissance des corrélations pour les applications Lasota-Yorke qui sera utilisée plus tard.

Lemme 3.4. *(Borne inférieure bornée) On a*

$$\frac{c}{2} \leq essinf h_\omega, \quad pour \ \ p.t.\omega \in \Omega. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit μ_ω une mesure de probabilité dont la densité h_ω donnée par

$$h_\omega = P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1_X - (P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1_X - h_\omega).$$

D'après l'hypothèse (A_5) on a d'une part

$$essinf h_\omega \geq c - \|P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1 - h_\omega\|_\infty \geq c - C_{var}\|P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1 - h_\omega\|_{BV}. \tag{3.7}$$

D'une autre part, on a d'après (A_4)

$$\|P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1 - h_\omega\|_{BV} = \|P^n_{\sigma^{-n}\omega}(1 - h_{\sigma^{-n}\omega})\|_{BV} \leq K e^{-\lambda n}\|1 - h_{\sigma^{-n}\omega}\|_{BV},$$

le fait que $1 - h_{\sigma^{-n}\omega} \in BV$ et par l'inégalité (3.5), on obtient

$$\|P^n_{\sigma^{-n}\omega} 1 - h_\omega\|_{BV} \leq \widetilde{K} e^{-\lambda n},$$

pour certaine constante $\widetilde{K} > 0$. Il suffit de choisir un entier n tel que

$$C_{Var}\widetilde{K} e^{-\lambda n} \leq \frac{c}{2}.$$

D'où lemme. □

Lemme 3.5. *(Décroissance des corrélations) Il existe $K > 0$ et $\rho \in (0,1)$ tels que*

$$\Big|\int P^n_\omega(\phi h_\omega)\,\psi\, dm - \int \phi\, d\mu_\omega \,.\int \psi\, d\mu_{\sigma^n\omega}\Big| \leq K\rho^n \|\psi\|_\infty.\|\phi\|_{var}, \tag{3.8}$$

pour tous $n \geq 0$, $\psi \in L^\infty(X,m)$ et $\phi \in BV(X,m)$.

Démonstration. On commence par un cas simple où

$$\int_X \phi\, d\mu_\omega = \int_X \phi h_\omega\, dm = 0,$$

donc

$$\Big|\int P^n_\omega(\phi h_\omega)\,\psi\, dm - \int \phi\, d\mu_\omega \,.\int \psi\, d\mu_{\sigma^n\omega}\Big| \leq \|\psi\|_\infty\, \|P^n_\omega(\phi h_\omega)\|_{BV}.$$

En utilisant (A_4), on obtient

$$\Big|\int P^n_\omega(\phi h_\omega)\,\psi\, dm - \int \phi\, d\mu_\omega \,.\int \psi\, d\mu_{\sigma^n\omega}\Big| \leq K\|\psi\|_\infty.\|\phi\, h_\omega\|_{BV}.$$

Finalement, l'inégalité (3.8) est satisfaite d'après (5.21). Généralement, on suppose que

$$\int_X \phi\, d\mu_\omega \neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big|\int P^n_\omega(\phi h_\omega)\,\psi\, dm - \int \phi\, d\mu_\omega \,.\int \psi\, d\mu_{\sigma^n\omega}\Big| &\leq \|\psi\|_\infty \,.\int \Big|\Big(P^n_\omega(\phi h_\omega)\, dm - \Big[\int \phi\, h_\omega\, dm\Big] h_{\sigma^n\omega}\Big)\Big|\, dm \\
&= \|\psi\|_\infty \,.\Big|\int \phi\, h_\omega\, dm\Big|.\int \Big|P^n_\omega(\Phi - h_\omega)\Big|\, dm \\
&\leq \|\psi\|_\infty \,.\Big|\int \phi\, h_\omega\, dm\Big|.\|P^n_\omega(\Phi - h_\omega)\|_{BV},
\end{aligned}$$

avec

$$\phi\, h_\omega = \Big(\int \phi\, h_\omega\, dm\Big)\Phi.$$

Notons que

$$\int (\Phi - h_\omega)\, dm = 0,$$

et en utilisant (A_4), on a donc

$$\|\psi\|_\infty \,.\, \Big| \int \phi\, h_\omega\, dm \Big| . \|P_\omega^n(\Phi - h_\omega)\|_{BV} \leq K e^{-\lambda n} \|\psi\|_\infty \,.\, \Big\| \Big(\phi - \int \phi\, h_\omega\, dm\Big)\, h_\omega \Big\|_{BV}.$$

D'après les deux inégalités (5.21) et (3.5), on obtient

$$\Big| \int P_\omega^n(\phi h_\omega)\, dm - \int \phi\, d\mu_\omega \,.\, \int \psi\, d\mu_{\sigma^n(\omega)} \Big| \leq K' \rho^n \|\psi\|_\infty . \|\phi\|_{BV},$$

pour certaine constante $K' > 0$. D'où lemme d'après l'inégalité (3.1). □

Dans la suite, on va étudier le principe d'invariance presque sûr par la méthode de martingale aus sens inverse. Pour cela, on considère un observable $\psi : \Omega \times X \to \mathbb{R}$. Soit $\psi_\omega = \psi(\omega, .),\ \omega \in \Omega$ et supposons que

$$\sup \|\psi_\omega\|_{BV} < \infty. \tag{3.9}$$

On considère la somme de Birkhoff donnée par $\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k \omega} \circ T_\omega^k$, associée à l'observable centrée $\widetilde{\psi}_\omega = \psi_\omega - \int \psi_\omega\, d\mu_\omega$, dont la variance donnée par $\tau_n^2 = \mathbb{E}_\omega \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k \omega} \circ T_\omega^k \Big)^2$.

3.3 Construction de martingale au sens inverse

Dans cette section, On étudie certaines caractérestiques des mesures fibrées. Puis, on construit la martingale inverse et on établit diverses estimations utiles qui joueront un rôle important dans le reste du chapitre. Pour $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{T}_\omega^k := (T_\omega^k)^{-1}(\mathcal{A}).$$

On introduit une relation trés importante :

Définition 3.6. (relation de dualité) Pour tous $\phi \in L^1(X, m)$ et $\psi \in L^\infty(X, m)$

$$\int_X (P_\omega \phi)\, \psi\, dm = \int_X \phi\, (\psi \circ T_\omega)\, dm. \tag{3.10}$$

Lemme 3.7. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\phi \in L^1(X, m)$ et $\psi \in L^\infty(X, m)$, on a*

$$\int_X (P_\omega^n \phi)\, \psi\, dm = \int_X \phi\, (\psi \circ T_\omega^n)\, dm. \tag{3.11}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. L'égalité (3.11) est satisfaite pour $n = 1$ d'après l'égalité (3.10). Supposons que l'égalité (3.11) est vérifiée à l'ordre n, i. e.

$$\int_X (P_\omega^n \phi)\, \psi\, dm = \int_X \phi\, (\psi \circ T_\omega^n)\, dm.$$

Et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $(n+1)$. D'après l'égalité (3.3) on a

$$\int_X (P_\omega^{n+1} \phi)\, \psi\, dm = \int_X P_{\sigma^n \omega}(P_\omega^n \phi)\, \psi\, dm.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité (3.2), on obtient

$$\int_X P_{\sigma^n \omega}(P_\omega^n \phi)\, \psi\, dm = \int_X \phi\, (\psi \circ T_{\sigma^n \omega}) \circ T_\omega^n\, dm = \int_X \phi\, (\psi \circ T_\omega^{n+1})\, dm.$$

D'où lemme. □

On présente une relation entre la dynamique et son opérateur de transfert donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.8. *On a*

$$P_\omega((\psi \circ T_\omega)\phi) = \psi P_\omega \phi,$$

pour tous $\phi \in L^1(X, m)$ et $\psi \in L^\infty(X, m)$.

Démonstration. Soit $g \in L^\infty(X, m)$. Puisque

$$(\psi \circ T_\omega)\phi \in L^1(X, m),$$

et d'après la relation (3.10) on obtient donc

$$\int_X P_\omega((\psi \circ T_\omega)\phi) g \, dm = \int_X (\psi \circ T_\omega) \, \phi (g \circ T_\omega) dm = \int_X ((\psi g) \circ T_\omega)\phi \, dm = \int_X (\psi P_\omega \phi) g \, dm,$$

ce qui prouve immédiatement le lemme. □

Un lien existe entre la mesure de Lebesgue m et les mesures fibrées $\mu_{\sigma^n\omega}$ pour tout $\omega \in \Omega$ donné par l'égalité suivante :

$$\int_X \phi \, h_{\sigma^j\omega} \, dm = \int_X \phi \, d\mu_{\sigma^j\omega}. \tag{3.12}$$

Lemme 3.9. *Pour tout $\phi : X \to \mathbb{R}$, on a*

$$\int_X \phi \circ T_\omega \, d\mu_\omega = \int_X \phi \, d\mu_{\sigma\omega}. \tag{3.13}$$

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{A}$. D'après le troisième point du Théorème 1.45 on obtient

$$\mu_{\sigma\omega}(B) = T_\omega \mu_\omega(B),$$

ceci équivalent à

$$\int_B d\mu_{\sigma\omega}(\eta) = \int_B T_\omega(\xi) d\mu_\omega(\xi) \Longleftrightarrow \int_X 1_B(\eta) \, d\mu_{\sigma\omega}(\eta) = \int_X 1_B(T_\omega \xi) \, d\mu_\omega(\xi).$$

Ainsi (3.13) est satisfaite pour $\phi = 1_B$. Ensuit il suffit de suivre les étapes de la théorie d'intégration, c'est à dire :

(i) On prend une suite d'observables étagés $(\phi_{\theta\omega})_n$ qui converge vers 1_B quand $n \to \infty$,

(ii) ϕ est un observable positif,

(iii) $\phi \in L^1(X, \mu_{\sigma\omega})$.

D'où lemme. □

On présente un lemme qui généralise Lemme précédent.

Lemme 3.10. *Pour tout observable $\phi : X \to \mathbb{R}$, on a*

$$\int_X \phi \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega = \int_X \phi \, d\mu_{\sigma^n\omega}. \tag{3.14}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, l'égalité (3.14) est satisfaite en utilsant Lemme 3.9. Supposons que (3.14) est vérifiée à l'ordre n, i.e.

$$\int_X \phi \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega \;=\; \int_X \phi \, d\mu_{\sigma^n\omega}. \tag{3.15}$$

Et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n+1$. D'après l'égalité (3.2) on a

$$\int_X \phi \circ T_\omega^{n+1} \, d\mu_\omega \;=\; \int_X (\phi \circ T_{\sigma^n\omega}) \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence puis Lemme 3.9 on obtient

$$\int_X (\phi \circ T_{\sigma^n\omega}) \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega = \int_X \phi \circ T_{\sigma^n\omega} \, d\mu_{\sigma^n\omega} = \int_X \phi \, d\mu_{\sigma^{n+1}\omega}.$$

D'où lemme. □

Lemme 3.11. *Pour tous $\phi : X \to \mathbb{R}$, $0 \le l \le n$ et $\omega \in \Omega$ on a*

$$\int_X (\phi \circ T_\omega^l).(1_B \circ T_\omega^n) \, d\mu_\omega = \int_X \phi.(1_B \circ T_{\sigma^l\omega}^{n-l}) \, d\mu_{\sigma^l\omega}. \tag{3.16}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. L'égalité (3.16) est vérifiée pour $n = l$; en effet

$$\int_X (\phi \circ T_\omega^n).(1_B \circ T_\omega^n) \, d\mu_\omega = \int_X (\phi.1_B) \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega = \int_B \phi \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega.$$

D'après Lemme 3.10 on obtient

$$\int_B \phi \circ T_\omega^n \, d\mu_\omega = \int_B \phi \, d\mu_{\sigma^n\omega} = \int_X (\phi.1_B) \, d\mu_{\sigma^n\omega}.$$

Supposons que l'égalité (3.16) est satisfaite à l'ordre $(n-l)$, i. e.

$$\int_X (\phi \circ T_\omega^l).(1_B \circ T_\omega^n) \, d\mu_\omega = \int_X \phi.(1_B \circ T_{\sigma^l\omega}^{n-l}) \, d\mu_{\sigma^l\omega}.$$

Et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $(n+1) - l$. Par un calcul simple on a

$$\int_X \phi.(1_B \circ T_{\sigma^l\omega}^{(n+1)-l}) \, d\mu_{\sigma^l\omega} \;\;=\;\; \int_X \phi.\Big[(1_B \circ T_{\sigma^{n+1}\omega}) \circ T_{\sigma^l\omega}^{n-l}\Big] d\mu_{\sigma^l\omega}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_X \phi.\Big[(1_B \circ T_{\sigma^{n+1}\omega}) \circ T_{\sigma^l\omega}^{n-l}\Big] d\mu_{\sigma^l\omega} &= \int_X (\phi \circ T_\omega^l).(1_B \circ T_{\sigma^{n+1}\omega} \circ T_\omega^n) \, d\mu_\omega \\ &= \int_X (\phi \circ T_\omega^l).(1_B \circ T_\omega^{n+1}) \, d\mu_\omega. \end{aligned}$$

D'où lemme. □

Lemme 3.12. *On a :*

$$\mathbb{E}_\omega(\phi \circ T_\omega^l | \mathcal{T}_\omega^n) \;=\; \Big(\frac{P_{\sigma^l\omega}^{n-1}(h_{\sigma^l\omega}\phi)}{h_{\sigma^n\omega}}\Big) \circ T_\omega^n. \tag{3.17}$$

Démonstration. On a $\left(\frac{P^{n-1}_{\sigma^l\omega}(h_{\sigma^l\omega}\phi)}{h_{\sigma^n\omega}}\right) \circ T^n_\omega$ est $\mathcal{T}^n_\omega$-mesurable. On prend maintenant un borélien arbitraire $A = (T^n_\omega)^{-1}B \in \mathcal{T}$ pour certain $B \in \mathcal{A}$. On a donc

$$\int_A \phi \circ T^l_\omega \, d\mu_\omega = \int_X (\phi \circ T^l_\omega) \, 1_A \, d\mu_\omega = \int_X (\phi \circ T^l_\omega).(1_B \circ T^n_\omega) \, d\mu_\omega \tag{3.18}$$

En utilisant Lemme 3.11 on a donc

$$\int_X (\phi \circ T^l_\omega) \, 1_A \, d\mu_\omega = \int_X (\phi \circ T^l_\omega).(1_B \circ T^n_\omega) \, d\mu_\omega = \int_X (h_{\sigma^l\omega}\phi).(1_B \circ T^{n-1}_{\sigma^l\omega}) \, dm. \tag{3.19}$$

D'après Lemme 3.7, on obtient

$$\int_X (h_{\sigma^l\omega}\phi).(1_B \circ T^{n-1}_{\sigma^l\omega}) \, dm = \int_X \frac{P^{n-l}_{\sigma^l\omega}(h_{\sigma^l\omega}\phi)}{h_{\sigma^n\omega}} \, 1_B \, d\mu_{\sigma^n\omega}. \tag{3.20}$$

En appliquant de nouveau Lemme 3.11 on en déduit que

$$\int_X \frac{P^{n-l}_{\sigma^l\omega}(h_{\sigma^l\omega}\phi)}{h_{\sigma^n\omega}} \, 1_B \, d\mu_{\sigma^n\omega} = \int_A \left[\left(\frac{P^{n-1}_{\sigma^l\omega}(h_{\sigma^l\omega}\phi)}{h_{\sigma^n\omega}}\right) \circ T^n_\omega\right] d\mu_\omega. \tag{3.21}$$

Ainsi la preuve est terminée d'après les inégalités (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21). □

On considère M_n et G_k définis par

$$M_n = \widetilde{\psi}_{\sigma^n\omega} + G_n - G_{n+1} \circ T_{\sigma^n\omega}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

où $G_0 = 0$ et

$$G_{k+1} = \frac{P_{\sigma^k\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} h_{\sigma^k\omega} + G_k h_{\sigma^k\omega})}{h_{\sigma^{k+1}\omega}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Proposition 3.13. *On a*

$$\mathbb{E}_\omega(M_n \circ T^n_\omega | \mathcal{T}^{n+1}_\omega) = 0.$$

Démonstration. En appliquant Lemme 3.12 on obtient donc

$$\mathbb{E}_\omega(M_n \circ T_\omega | \mathcal{T}^{n+1}_\omega) = \left(\frac{P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega}M_n)}{h_{\sigma^{n+1}\omega}}\right) \circ T^{n+1}_\omega. \tag{3.24}$$

En utilisant (3.22) on a donc

$$\frac{P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega}M_n)}{h_{\sigma^{n+1}\omega}} = \frac{P_{\sigma^n\omega}[h_{\sigma^n\omega}\widetilde{\psi}_{\sigma^n\omega} + h_{\sigma^n\omega}G_n - h_{\sigma^n\omega}(G_{n+1} \circ T_{\sigma^n\omega})]}{h_{\sigma^{n+1}\omega}}.$$

En appliquant Lemme 3.8 pour $\phi = h_{\sigma^n\omega}$, $\psi = G_{n+1}$ puis Proposition 3.3, on obtient

$$P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega}(G_{n+1} \circ T_{\sigma^n\omega})) = G_{n+1} P_{\sigma^n\omega} h_{\sigma^n\omega} = G_{n+1} h_{\sigma^{n+1}\omega}.$$

D'après l'inégalité (3.23) on a

$$\frac{P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega}M_n)}{h_{\sigma^{n+1}\omega}} = 0.$$

D'où lemme. □

Lemme 3.14. *on a*

$$\sup_{n \geq 0} \|G_n\|_{BV} < \infty.$$

Démonstration. En itérant (3.23), on obtient

$$G_n = \frac{1}{h_{\sigma^n\omega}} \sum_{j=0}^{n-1} P_{\sigma^j\omega}^{n-1}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega} h_{\sigma^j\omega}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

En utilisant (A_4) et l'égalité (3.12) on a

$$\Big\| \sum_{j=0}^{n-1} P_{\sigma^j\omega}^{n-1}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega} h_{\sigma^j\omega}) \Big\|_{BV} \leq K \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda(n-j)} \|\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega} h_{\sigma^j\omega}\|_{BV},$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ qui est combiné avec les inégalités (5.20), (5.21), (3.5), (3.7) et (3.9) impliquent la conclusion du lemme. □

Lemme 3.15.

$$\sup \|M_n^2\|_{BV} < \infty.$$

Démonstration. En utilisant (A_3) et Lemme 3.14 donc on obtient

$$\sup \|G_{n+1} \circ T_{\sigma^n\omega}\|_{BV} < \infty,$$

le fait que $\{(G_n)_{n\geq 0}\} \subset BV$. D'après (3.9), (3.22) et Lemme 3.14, on en déduit que

$$\sup \|M_n^2\|_{BV} < \infty.$$

D'où lemme. □

Lemme 3.16. *On a*

$$\sup_{n\geq 0} \|\mathbb{E}_\omega(M_n^2 \circ T_\omega^n | \mathcal{T}_\omega^{n+1})\|_\infty < \infty.$$

Démonstration. En utilisant Lemme 3.12 on obtient

$$\mathbb{E}_\omega(M_n^2 \circ T_\omega^n | \mathcal{T}_\omega^{n+1}) = \Big(\frac{P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega} M_n^2)}{h_{\sigma^{n+1}\omega}}\Big),$$

et d'après (3.6) on a

$$\sup_{n\geq 0} \|\mathbb{E}_\omega(M_n^2 \circ T_\omega^n | \mathcal{T}_\omega^{n+1})\|_\infty \leq \frac{1}{c} \|P_{\sigma^n\omega}(h_{\sigma^n\omega} M_n^2)\|_\infty.$$

En prenant en compte (5.21), (A_2), (3.5) et Lemme 3.15 et le fait que $\|.\|_\infty \leq C_{var}\|.\|_{BV}$ (voir (V_1)). D'où lemme. □

3.4 Théorème de Sprindzuk et conséquences

L'outil principal pour établir le principe d'invariance presque sûr est le Théorème 3.21 introduit au paragraphe 3.5. Toutefois, afin de vérifier les hypothèses de ce théorème, nous devrons d'abord appliquer le résultat classique suivant en raison de Sprindzuk [50].

Théorème 3.17. ***(Inégalité de Gal-Kosma)****[50]*
Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ *un espace probabilisé et soit* $(f_k)_{\{k\geq 0\}}$ *une suite de fonctions positives et mesurables sur* Ω*. Cependant, soient* $(g_k)_k$*,* $(h_k)_k$ *deux suites bornées de nombres réels telles que*

$$0 \leq g_k \leq h_k \leq M,$$

pour tous $k \geq 1$ *et certain* $M > 1$*. Supposons qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{m \leq k \leq n} (f_k(\omega) - g_k) \Big)^2 d\mu(\omega) \leq C \sum_{m \leq k \leq n} h_k, \tag{3.26}$$

pour les entiers naturels arbitraires m *et* n *tels que* $m < n$*. Alors, pour chaque* $\epsilon > 0$

$$\sum_{1 \leq k \leq n} f_k(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq n} g_k + O\Big(\Theta^{\frac{1}{2}}(n) log^{\frac{3}{2}+\epsilon}\Theta(n)\Big),$$

pour μ*.p.t.* $\omega \in \Omega$ *où* $\Theta(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} h_k$*.*

On définit dans la suite les quantités suivantes :

$$(GK) = \int \Big[\sum_{m < k \leq n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1}) - \sum_{m < k \leq n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k) \Big]^2 d\mu_\omega,$$

et

$$(DC) := \int \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i | \mathcal{T}_\omega^{i+1}) \, \mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j | \mathcal{T}_\omega^{j+1}) \, d\mu_\omega.$$

Une estimation nécessaire de la quantité $(DC) - \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i).\mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j)$ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.18. *Pour tous* $i < j$*, on a*

$$\Big|(DC) - \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i).\mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j)\Big| \leq K\rho^{j-i+1} \Big\| \frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big\|_\infty . \|M_i^2\|_{var}.$$

Démonstration. En utilisant Lemme 3.12 on a pour tout $i < j$

$$(DC) = \int \Big[\Big(\frac{P_{\sigma^i\omega}(h_{\sigma^i\omega} M_i^2)}{h_{\sigma^{i+1}\omega}} \Big) \circ T_\omega^{i+1} \Big] . \Big[\Big(\frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big) \circ T_\omega^{j+1} \Big] d\mu_\omega.$$

En utilisant Lemme 3.10 on obtient

$$(DC) = \int \Big(\frac{P_{\sigma^i\omega}(h_{\sigma^i\omega} M_i^2)}{h_{\sigma^{i+1}\omega}} \Big) . \Big[\Big(\frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big) \circ T_{\sigma^{i+1}\omega}^{j-i} \Big] d\mu_{\sigma^{i+1}\omega}.$$

D'après Lemme 3.7 on a

$$(DC) = \int P_{\sigma^i\omega}^{j-i+1}(h_{\sigma^i\omega} M_i^2) . \Big(\frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big) dm,$$

En utilisant Lemme 3.10, l'égalité (3.12) et Lemme 3.7 on en déduit que

$$\mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j) = \int P_{\sigma^j\omega}(M_j^2 \, h_{\sigma_\omega^j}) dm = \int \frac{P_{\sigma^j\omega}(M_j^2 \, h_{\sigma^j\omega})}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} d\mu_{\sigma^{j+1}\omega},$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (DC) - \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i).\mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j) &= \int P_{\sigma^i\omega}^{j-i+1}(h_{\sigma^i\omega} M_i^2) . \Big(\frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big) dm \\ &- \int M_i^2 \, d\mu_{\sigma^i\omega} . \frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} d\mu_{\sigma^{j+1}\omega}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.8) on en déduit que

$$\Big|(DC) - \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i).\mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j)\Big| \leq K\rho^{j-i+1} \Big\| \frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big\|_\infty . \|M_i^2\|_{var},$$

en remplaçant ψ, φ, ω et n respectivement par $\frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}}$, $\varphi = M_i^2$, $\sigma^n\omega$ et $j - i + 1$. D'où lemme. □

Lemme 3.19. *Pour chaque $\epsilon > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k) + O\Big(\Theta^{\frac{1}{2}}(n)\, log^{\frac{3}{2}+\epsilon}\Theta(n)\Big),$$

pour μ.p.t. $\omega \in \Omega$ où

$$\Theta(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k) + \|M_k^2\|_{var}). \tag{3.27}$$

Démonstration. En fixant $\omega \in \Omega$. On veux appeler Théorème 3.17 à

$$f_k = \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1}) \quad et \quad g_k = \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k).$$

Un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned}(GK) \;&=\; \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\Big)^2 d\mu_\omega + \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big)^2 d\mu_\omega \\ &-\; 2\int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\Big) d\mu_\omega \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big) d\mu_\omega.\end{aligned}$$

En permettant somme et intégrale on obtient

$$\int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big) d\mu_\omega = \sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k),$$

Et par suite

$$\begin{aligned}(GK) \;&=\; \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\Big)^2 d\mu_\omega + \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big)^2 \\ &-\; 2\Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big) \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\Big) d\mu_\omega,\end{aligned}$$

or $M_k^2 \circ T_\omega^k$ est $\mathcal{T}_\omega^{k+1}$-mesurable donc d'après la formule (5.17) on a

$$\mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1}) = \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k),$$

on en déduit que

$$(GK) \;=\; \int \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\Big)^2 d\mu_\omega - \Big(\sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k)\Big)^2.$$

En developpant la somme qui est à l'intérieure de l'intégrale, on a donc

$$\begin{aligned}(GK) \;&\le\; \int \sum_{m<k\le n} \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})^2\, d\mu_\omega \qquad (3.28) \\ &+\; 2 \sum_{m<i<j\le n} \int \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i | \mathcal{T}_\omega^{i+1})\, \mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j | \mathcal{T}_\omega^{j+1})\, d\mu_\omega \\ &-\; 2 \sum_{m<i<j\le n} \mathbb{E}_\omega(M_i^2 \circ T_\omega^i)\, \mathbb{E}_\omega(M_j^2 \circ T_\omega^j).\end{aligned}$$

(3.29)

En plus d'après la formule (5.17) on obtient

$$\int \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1}) \le \|\mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\|_\infty . \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k).$$

En utilisant Lemme 3.18 et l'inégalité (3.28), donc on a

$$\begin{aligned}(GK) \quad &\le \quad \sum_{m<k\le n} \|\mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k | \mathcal{T}_\omega^{k+1})\|_\infty \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k) \\ &+ \quad 2K \sum_{m<i<j\le n} \rho^{j-i+1} \Big\| \frac{P_{\sigma^j\omega}(h_{\sigma^j\omega} M_j^2)}{h_{\sigma^{j+1}\omega}} \Big\|_\infty . \|M_i^2\|_{var}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.26) est satisfaite en combinant l'hypothèse (A_2), les inégalités (3.5), (3.6) et Lemmes 3.15 et 3.16 avec

$$h_k = \mathbb{E}_\omega(M_k^2 \circ T_\omega^k) + \|M_k^2\|_{var}.$$

Finalement le lemme est vérifié directement en appliquant Théorème 3.17. □

3.5 Principe d'invariance presque sûr

On décrit ici un résultat abstrait, démontré par Cuny and Merlevède [22], qui sera notre outil principal pour étudier le principe d'invariance presque sûr qui est une correspondance des trajectoires du système dynamique avec un mouvement brownien de telle sorte que l'erreur est négligeable par rapport à la somme de Birkhoff. On commence par la définition du (PIPS).

Définition 3.20. Pour $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, et Σ^2 $d \times d$ matrice symétrique, sémi-définie positive (éventuellement dégénérée), on dira qu'un processus $(\beta_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ satisfait le principe d'invariance presque sûr avec l'exposant d'erreur λ et la covraiance asymptotique Σ^2 s'il existe deux processus $(Y_n)_n$ et $(Z_n)_n$, définis sur un autre espace de probabilité, tels que

1. Les processus $(\beta_n)_n$ et $(Y_n)_n$ ont la même distribution ;
2. Les variables aléatoires $(Z_n)_n$ sont indépendantes et distribuées selon la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma^2)$;
3. presque surement, $|\sum_{k=0}^{n-1} Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} Z_k| = o(n^\lambda)$.

On introduit un théorème nécessaire pour montrer le (PIPS) :

Théorème 3.21. ***(Théorème de Cuny Merlevède)[22]***
Soit (X_n) une suite des variables aléatoires carrées intégrables adaptées à une filtration décroissante $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que

(i) $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}_{n+1}) = 0$ *p.s. ;*

(ii) $\sigma_n^2 := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) \to +\infty$, *quand* $n \to \infty$ *;*

(iii) $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$.

Cependant, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres positifs telle que les suites $(\frac{a_n}{\sigma_n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{a_n}{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissante et croissnate respectivement vérifiant

(A) $\sum_{k=1}^n \Big\{\mathbb{E}\Big(X_k^2|\mathcal{G}_{k+1}\Big) - \mathbb{E}\Big(Z_k^2\Big)\Big\} = o(a_n)$ $\mathbb{P}$-*p.s. ;*

(B) $\sum_{n\ge1} a_n^{-v}\, \mathbb{E}\Big(|X_k|^{2v}\Big) < +\infty$ *pour certain* $1 \le v \le 2$.

Alors élargir notre espace de probabilité si nécessaire s'est possible de trouver une suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ de variables gaussiennes centrées indépendantes avec $\mathbb{E}\Big(X_k^2\Big) = \mathbb{E}\Big(Z_k^2\Big)$ telle que

$$\sup_{1\leq k\leq n} |\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} Z_k| = o\Big(\Big\{a_n\Big[|\log(\frac{\sigma_n^2}{a_n})| + \log\log\ a_n\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

On applique Théorème 3.21 pour

$$X_n = M_n \circ T_\omega^n \quad et \quad \mathcal{G}_n = \mathcal{T}_\omega^n.$$

D'après Lemme 3.19 on a

$$\sum_{k=1}^{n}[\mathbb{E}(X_k^2|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k^2)] = O(b_n),$$

avec

$$b_n = \Theta^{\frac{1}{2}}(n) \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\Theta(n), \tag{3.30}$$

où $\Theta(n)$ est donnée par (3.27). D'une autre part, par Lemme 3.15 on obtient l'estimation suivante

$$\Theta(n) \leq Dn,$$

pour certain $D > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la condition (A) du Théorème 3.21 est satisfaite avec

$$a_n = n^{\frac{1}{2}+d}, \tag{3.31}$$

pour tout $d > 0$. Dans la suite, on prend $d \in (0, \frac{1}{2})$.
On associe à la famille $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$ le produit oblique, noté F, donné par

$$F(\omega, x) = (\sigma(\omega), T_\omega(x)). \tag{3.32}$$

Lemme 3.22. *Pour tous i, $j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$, on a*

$$\mathbb{E}_\omega(X_i X_j) = 0.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité (3.6), on en déduit que

$$\mathbb{E}_\omega(M_i \circ T_\omega^i|\mathcal{T}_\omega^{i+1}) = 0.$$

De plus, on a $M_j \circ T_\omega^j$ est mesurable par rapport la tribue $\mathcal{T}_\omega^{i+1}$ et d'après la formule (5.17) on en déduit que

$$\mathbb{E}_\omega\Big((M_j \circ T_\omega^j)(M_i \circ T_\omega^i)|\mathcal{T}_\omega^{i+1}\Big) = (M_j \circ T_\omega^j)\mathbb{E}_\omega\Big(M_i \circ T_\omega^i|\mathcal{T}_\omega^{i+1}\Big) = 0.$$

D'où lemme. □

Le lemme suivant nous permet de caractériser la variance asymptotique :

Lemme 3.23. *il existe $\Sigma^2 \geq 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k\Big)^2 = \Sigma^2, \tag{3.33}$$

pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$.

Démonstration. Par un calcul simple on obtient

$$\mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega}\circ T_\omega^k\Big)^2=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}_\omega(\widetilde{\psi}^2_{\sigma^k\omega}\circ T^k_\omega)+2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\mathbb{E}_{\sigma^i\omega}[\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega}\circ T^{j-i}_{\sigma^i\omega})].$$

D'après Théorème 1.8 on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}_\omega(\widetilde{\psi}^2_{\sigma^k\omega}\circ T^k_\omega)=\int_\Omega\int_X\widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))^2\,d\mu_\omega(x)\,d\mathbb{P}(\omega),$$

pour p.p. $\omega\in\Omega$, où μ est une mesure F-invariante. On considère

$$\Psi(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F(\omega,x))\,d\mu_\omega(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X P^n_\omega(\widetilde{\psi}_\omega h_\omega)\widetilde{\psi}_{\sigma^n\omega}dm. \tag{3.34}$$

En utilisant (3.8) et (3.9), on obtient

$$|\Psi(\omega)\leq|\sum_{n=1}^{\infty}\int_X P^n_\omega(\widetilde{\psi}_\omega h_\omega)\widetilde{\psi}_{\sigma^n\omega}dm|\leq\widetilde{K}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n=\frac{\widetilde{K}\rho}{1-\rho},$$

pour certain $\widetilde{K}$ et p.p. $\omega\in\Omega$. En particulier, $\Psi\in L^1(\Omega)$ et ainsi il est en résulte encore d'après Théorème 1.8 que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Psi(\sigma^i\omega)=\int_\Omega\Psi(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega\times X}\widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F(\omega,x))\,d\mu(\omega,x), \tag{3.35}$$

pour p.t. $\omega\in\Omega$. Pour compléter la preuve du lemme, on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\mathbb{E}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega}\circ T^{j-i}_{\sigma^i\omega}))-\sum_{i=0}^{n-1}\Psi(\sigma^i\omega)\Big)=0, \tag{3.36}$$

pour p.t. $\omega\in\Omega$. En utilisant (3.8), on a donc pour p.t. $\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\mathbb{E}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega}\circ T^{j-i}_{\sigma^i\omega}))-\sum_{i=0}^{n-1}\Psi(\sigma^i\omega)\Big| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=n-i}^{\infty}\Big|\mathbb{E}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega}\circ T^{k-i}_{\sigma^i\omega}))\Big|\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=n-i}^{\infty}\Big|\int_X P^k_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}h_{\sigma^i\omega})\widetilde{\psi}_{\sigma^{k+1}\omega}dm\\ &\leq \widetilde{K}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=n-i}^{\infty}\rho^k=\widetilde{K}\frac{\rho}{(1-\rho)^2},\end{aligned}$$

ceci implique facilment (3.36). En utilisant (3.35) et (3.36) on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}\mathbb{E}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^i\omega}(\widetilde{\psi}_{\sigma^j\omega}\circ T^{j-i}_{\sigma^i\omega}))=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega\times X}\widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F(\omega,x))\,d\mu(\omega,x),$$

pour p.t. $\omega\in\Omega$. Ainsi

$$\Sigma^2=\int_{\Omega\times X}\widetilde{\psi}(\omega,x)^2\,d\mu(\omega,x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega\times X}\widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F^n(\omega,x))\,d\mu(\omega,x). \tag{3.37}$$

D'où le lemme. □

On présente des conditions nécessaires et suffisantes pour lequelles $\Sigma^2 = 0$. On se réfère à un résultat similaire dans [[36], (2.10)] avec $\widetilde{\psi} \circ F$ au lieu de $\widetilde{\psi}$ dans l'équation (3.38).

Proposition 3.24. *On a $\Sigma^2 = 0$ si et seulement s'il existe $\phi \in L^2(\Omega \times X)$ tel que*

$$\widetilde{\psi} = \phi - \phi \circ F. \tag{3.38}$$

Démonstration. Un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))\Big)^2 d\mu(\omega,x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))^2 \, d\mu(\omega,x) \\
&+ 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(F^k(\omega,x)\widetilde{\psi}(F^j(\omega,x))\, d\mu(\omega,x) \\
&= n \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}^2(\omega,x)\, d\mu(\omega,x) \\
&+ 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))\, d\mu(\omega,x).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))\Big)^2 d\mu(\omega,x) &= n\Big(\int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}^2(\omega,x)\, d\mu(\omega,x) \\
&+ 2\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))\, d\mu(\omega,x)\Big) \\
&- 2\sum_{k=1}^{n-1} k \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\omega,x)\widetilde{\psi}(F^k(\omega,x))\, d\mu(\omega,x).
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que $\Sigma^2 = 0$. Ensuite, d'après l'égalité ci-dessus et (3.37) on a d'une part

$$\int_{\Omega\times X} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}\circ F^k\Big)^2 d\mu = -2n\sum_{k=n}^{\infty}\int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\widetilde{\psi}\circ F^k)\, d\mu - 2\sum_{k=1}^{n-1} k \int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\widetilde{\psi}\circ F^k) d\mu. \tag{3.39}$$

D'une autre part, par (3.8) l'intégrale

$$\int_{\Omega\times X} \widetilde{\psi}(\widetilde{\psi} \circ F^k),$$

converge exponentiellement rapide vers 0 quand $k \to \infty$. En utilisant l'égalité (3.39) donc la suite $(X_n)_n$ définie par

$$X_n(\omega,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}(F^k(\omega,x)), \quad \omega \in \Omega, \quad x \in X$$

est bornée dans $L^2(\Omega \times X)$. Ainsi ϕ satisfait (3.38). On a besoin de prendre $g = 1_{A\times B}$ où $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{B}$ et on observe que $g \in L^2(\Omega \times X)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} g(\widetilde{\psi} - \phi + \phi \circ F)\, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\times X} g(\widetilde{\psi} - X_{n_k} + X_{n_k} \circ \tau)\, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\times X} g(\widetilde{\psi} \circ F^{n_k}\, d\mu = 0,
\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité nous avons utilisé (3.8) à nouveau. Donc, $\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi} - \phi + \phi \circ F = 0$ qui facilement implique (3.38).
On suppose maintenant qu'il existe $\phi \in L^2(\Omega \times X)$ satisfaisant (3.38). Donc,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi} \circ F^k = \frac{1}{\sqrt{n}} (\phi - \phi \circ F^n),$$

et aussi

$$\Big\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi} \Big\|_{L^2(\Omega \times X)} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \|\phi\|_{L^2(\Omega\times X)} \to 0,$$

quand $n \to \infty$. En intégrant l'égalité du Lemme (3.23) sur Ω on en déduit que

$$\Sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \Big\|\Big\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi} \Big\|\Big\|_{L^2(\Omega\times X)} = 0.$$

Ceci conclut la preuve de la proposition. □

Dans le reste, on suppose que $\Sigma^2 > 0$ et on écrit $a_n \sim b_n$ il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

On présente un lemme qui nous permet de vérifier la condition **(ii)** du Théorème 3.21.

Lemme 3.25. *on a*

$$\sigma_n^2 \to \infty \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Démonstration. En utilisant (3.22) on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k - G_n \circ T_\omega^k. \tag{3.40}$$

Ainsi

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} X_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k\Big)^2 - 2(G_n \circ T_\omega^k)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k\Big) + (G_n^2 \circ T_\omega^k). \tag{3.41}$$

D'une part d'après Lemme 3.23 et l'hypothèse $\Sigma^2 > 0$,

$$\tau_n^2 := \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega} \circ T_\omega^k\Big)^2 \to \infty. \tag{3.42}$$

D'une autre part, d'après (3.9), (3.41) et Lemme 3.14 donc on a

$$\mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1} X_k\Big)^2 \sim \tau_n^2. \tag{3.43}$$

En utilisant Lemme 3.22 et (3.43), on obtient l'estimation suivante

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_\omega(X_k^2) = \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1} X_k\Big)^2 \sim \tau_n^2, \tag{3.44}$$

qui est combinée avec (3.42). D'où lemme. □

Le lemme suivant nous permet d'étudier la monotonie des suites $(\frac{a_n}{\sigma_n})_{n\geq n_0}$ et $(\frac{a_n}{\sigma_n^2})_{n\geq n_0}$.

Lemme 3.26. *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(\frac{a_n}{\sigma_n^2})_{n\geq n_0}$ et $(\frac{a_n}{\sigma_n})_{n\geq n_0}$ sont décroissante et croissante respectivement.*

Démonstration. En utilisant Lemme 4.6 et l'égalité (3.44) on obtient

$$\mathbb{E}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}_\omega(M_k^2\circ T_\omega^k)\Big)^2 \sim n\Sigma^2.$$

Donc l'égalité (3.31) nous donne ,

$$\frac{a_n}{\sigma_n^2}\sim\frac{n^{\frac{1}{2}+d}}{n} \quad et \quad \frac{a_n}{\sigma_n}\sim\frac{n^{\frac{1}{2}+d}}{\sqrt{n}}.$$

D'où lemme le fait que $d\in(0,1/2)$. □

Comme la conclusion du Théorème 3.21 concerne les queues de $(\frac{a_n}{\sigma_n^2})_n$ et $(\frac{a_n}{\sigma_n})_n$, elle restera valable si les hypothèses de monotonicité pour $(\frac{a_n}{\sigma_n})_n$ et $(\frac{a_n}{\sigma_n^2})_n$ teignent pour n suffisamment grand et ceux sont vérifiées dans Lemme 3.26. Enfin, on montrera que la condition **(B)** staisfait pour $v = 2$.

Lemme 3.27. *On a*

$$\sum_{n\geq 1}a_n^{-2}\mathbb{E}_\omega(|X_n|^4)<\infty$$

Démonstration. Puisque

$$\sup_n\|M_n\|_\infty<\infty,$$

on a donc

$$\sup_n\|X_n\|_\infty<\infty,$$

et ainsi

$$\sum_{n\geq 1}a_n^{-2}\mathbb{E}_\omega(|X_n|^4)\leq C\sum_{n\geq 1}a_n^{-2}<\infty.$$

□

Maintenant, on présente le résultat principal de ce chapitre donné par :

Théorème 3.28. *Considérons $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ la famille d'applications aléatoires de Lasota-Yorke uniformément satisfaite. Alors, la variance τ_n^2 augmentera linéairement lorsque $\tau_n^2\sim n\Sigma^2$ et deux cas présenteront :*

(i) soit $\Sigma = 0$, ce qui équivaut à l'existence de $\phi\in L^2(\Omega\times X)$ tel que (condition de cobord)

$$\widetilde{\psi}=\phi-\phi\circ F,$$

(ii) ou $\Sigma^2>0$ et dans ce cas pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega\in\Omega$ et $d\in(0,1)$, en élargissant l'espace de probabilité $(X,\mathcal{A},\mu_\omega)$ si nécessaire, il est possible de trouver une suite $(Z_k)_k$ de variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes telle que

$$\sup_{1\leq k\leq n}|\sum_{k=1}^n(\widetilde{\psi}_{\sigma^k\omega}\circ T_\omega^k)-\sum_{k=1}^n Z_k| = o\Big(\Big[n^{\frac{1}{2}+d}(|\log n^{\frac{1}{2}-d}|+\log\log n^{\frac{1}{2}+d})\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)\quad p.s.$$

Démonstration. En utilisant Théorème 3.21, on obtient le principe d'invariance presque sûr pour la suite

$$(X_k)_k = (M_k \circ T_\omega^k)_k.$$

D'après Lemme 3.14 et l'égalité (3.40), on en déduit que le principe d'invariance presque sûr satisfait pour la suite $(Z_k)_k$

$$Z_k = \widetilde{\psi} \circ T_\omega^k.$$

D'ou la preuve du Théorème 3.28 est terminée. □

3.6 Conclusion

Les théorèmes limites tels que les théorèmes de la limite centrale, le théorème de la limite centrale fonctionnelle et la loi du logarithme itéré transfert de la motion brownienne aux séries chronologiques générées par les observations sur le système dynamique : ces derniers résultats seront donc des conséquences immédiates de la preuve du principe d'invariance presque sûr pour les applications aléatoires de type Lasota-Yorke.

Chapitre 4

Décroissance des correlations pour les applications uniformément dilatantes par morceaux

Dans ce chapitre nous présenterons notre système dynamique engendré par des applications uniformément dilatantes $\mathcal{C}^2$ par morceaux vérifiant des hypothèses bien précises qui seront introduites dans le premier paragraphe. Ces hypothèses nous garantissent l'existence d'une mesure absoulement continue invariante dont la densité est strictement loin de zéro. Ensuite, nous utiliserons un argument de couplage pour traiter la composition des opérateurs associées à notre système dynamique. Nous nous référerons à la méthode de couplage décrit dans le papier [52] pour étudier la décroissance des corrélations de notre système pour des fonctions à variation bornée. Ce travail est en collaboration avec Romain Aimino.

4.1 Préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, où $\mathbb{P} = \{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est un vecteur de probabilité avec $p_\omega > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit $T = \{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ une famille d'applications uniformément dilatantes $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $T_\omega : X \to X$ est mesurable sur l' espace polonais $(X, \mathcal{A})$ et vérifiant $\lambda(T_{\omega_i}) = \inf |T'_{\omega_i}| > 2$. Nous nous réfèrerons au pargagraphe 1.4.
Pour une suite $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$, nous notons par $T^n_{\underline{\omega}}$ la composition d'applications aléatoires $T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}$. La chaîne de Markov, notée $(Y_n)_n$ correspondante est définie par le système d'équations (2.1). On peut relier le processus stochastique $(Y_n)_n$ à l'application F défini par l'équation (2.2). On considère $\mathcal{Q}$ l'opérateur associé à $(Y_n)_n$ donné par

$$\mathcal{Q}f(x) = \int_\Omega f(T_{\omega_1}x)d\mathbb{P}(\omega_1),\ \forall f \in L^\infty(X, m).$$

On définit aussi l'opérateur $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}g(x) = \int \mathcal{L}_{\omega_1}g(x)d\mathbb{P}(\omega_1),\ g \in L^1(X, m),$$

avec $\mathcal{L}_{\omega_i} : L^1(X, m) \to L^1(X, m)$ est l'opérateur de transfert de l'application T_{ω_i} associé à la mesure de Lebesgue m, donné par

$$\mathcal{L}_{\omega_i}g(x) = \sum_{y\in T^{-1}_{\omega_i}\{x\}} \frac{g(y)}{|T'_{\omega_i}(y)|}.$$

La dualité entre les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est donnée par

$$\int g.\mathcal{Q}f dm = \int \mathcal{P}g.f dm. \tag{4.1}$$

La mesure de probabilté μ est stationnaire pour la chaîne de Markov (Y_n) si

$$\int \mathcal{Q}f\, d\mu = \int f\, d\mu, \tag{4.2}$$

pour toute fonction mesurable f.

Lemme 4.1. *Si μ est une mesure absolument continue dont la densité ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue m alors la condition de sationnarité est réduite à*

$$\mathcal{P}\phi = \phi.$$

Démonstration. D'après la relation de dualité (4.1) on a d'une part

$$\int \phi.\mathcal{Q}g\, dm = \int \mathcal{P}\phi.g\, dm,$$

D'autre part puisque on a $\mu = \phi m$ on obtient donc

$$\int \phi.\mathcal{Q}g\, dm = \int \mathcal{Q}g\, d\mu,$$

et en utilisant l'inégalité (4.2) on obtient

$$\int \mathcal{Q}g\, d\mu = \int g\, d\mu = \int g\, \phi\, dm.$$

D'où lemme. □

Remarque 4.2. On remarque que la densité ϕ de la mesure stationnaire μ est un point fixe de l'opérateur $\mathcal{P}$ et aussi $\lambda = 1$ est une valeur propre associée au vecteur propre ϕ.

Soit un ensemble $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{E} := \{T_{\omega_i} : X \to X,\ \lambda(T_{\omega_i}) > 2 \ et\ \sup |T'_{\omega_i}(x)| < \infty\}.$$

On considère

$$\eta(T_{\omega_i}) = \frac{2}{\lambda(T_{\omega_i})},$$

et $A^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}_{k_1,\cdots,k_{n_0}}$ une partition de $[0,1]$ définie par

$$A^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}_{k_1,\cdots,k_{n_0}} = T^{-1}_{k_1,\omega_1} \circ \cdots \circ T^{-1}_{k_{n_0-1},\omega_{n_0-1}} A_{k_{n_0},\omega_{n_0}} \cap \cdots \cap T^{-1}_{k_1,\omega_1} A_{k_2,\omega_2} \cap A_{k_1,\omega_1}.$$

Définition 4.3. (Propriété de recouvrement) Il existe n_0 et $N(n_0)$ tels que :

(i) La partition $A^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}_{k_1 \cdots, k_{n_0}}$ a un diamètre moins que $\frac{1}{2K+1}$.

(ii) Pour toute suite $\omega_1, \cdots, \omega_{N(n_0)}$ et $k_1 \cdots, k_{N(n_0)}$ on a

$$T_{\omega_{N(n_0)}} \circ \cdots \circ T_{\omega_{n_0+1}} A^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}_{k_1 \cdots, k_{n_0}} = X,$$

Dans le reste de ce chapitre supposons qu'on a :

(H_1) la famille d'applications $\{T_{\omega_i}\}$ possède la propriété de recouvrement ;

(H_2) pour tout $\underline{\omega} = (\omega_1, \cdots \omega_n, \cdots)$, on a $T_{\omega_i} \in \mathcal{E}$;

(H_3) $\gamma = A\,\|\psi\|_{L^1(m)} > 1 - \eta > 0$.

Lemme 4.4. *Il existe* n_0, $N(n_0)$ *et* $K > 0$ *tels que pour toute* $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_{N(n_0)})$ *et* $\psi \geq 0$ *vérifiant*

$$Var(\psi) \leq K \quad et \quad \int \psi d\mu = 1.$$

Alors il existe un intervalle $I_\psi \in A_{k_1,\cdots,k_{n_0}}^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}$ *de diamètre* $|I_\psi| = \frac{1}{2K+1}$ *vérifiant*

$$\inf \psi|_{I_\psi} \geq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$|I_L| = \frac{1}{2K+1} \quad et \quad \inf \psi|_{I_L} < \frac{1}{2}.$$

Soit I_j un élément de $A_{k_1,\cdots,k_{n_0}}^{\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$I_j = [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}] = [\frac{j}{2K+1}, \frac{j+1}{2K+1}] \quad et \quad \sum_{j=1}^{N} Var_{I_j}(\psi) \leq Var(\psi) \leq K.$$

Alors

$$1 = \int \psi\, d\mu = \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} \psi_j\, d\mu \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\Big(\frac{1}{2} + Var_{I_j}(\psi)\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{N} Var(\psi) \leq \frac{1}{2} + \frac{K}{N} < 1,$$

ce qui est absurde. Donc il existe $j \in \{1, \cdots, N\}$ tels que

$$\inf \psi|_{I_\psi} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Lemme 4.5. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *il existe* n_0, $N(n_0)$ *et* $K > 0$ *tel que pour toute suite* $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_{N(n_0)})$ *et* $\psi \geq 0$ *vérifiant*

$$Var(\psi) \leq K \quad et \quad \int \psi d\mu = 1.$$

Alors

$$\mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(\psi) \geq \kappa = \frac{1}{2} \inf_{y \in [0,1]} \frac{1}{|(T_\omega^{N(n_0)-n_0})'(y)|} > 0.$$

Démonstration. Sous l'hypothèse (H_1) il existe $y \in I_\psi$ tel que $T_{\omega_{N(n_0)}} \circ \cdots \circ T_{\omega_{n_0+1}}(y) = x$, et on a

$$\mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(1_{I_\psi})(x) \geq 1_{I_\psi}(y).\frac{1}{|(T_\omega^{N(n_0)-n_0})'(y)|} \geq \frac{1}{|(T_\omega^{N(n_0)-n_0})'(y)|} \geq 2\kappa,$$

il suffit de prendre $\kappa = \frac{1}{2} \inf_{y \in I_\psi} \frac{1}{|(T^{N(n_0)-n_0})'(y)|}$. En utilisant Lemme 4.4, $\forall I_\psi \subset I$ on a

$$\mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(\psi) \geq \mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(1_{I_\psi}\psi) \geq \mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(\frac{1}{2}1_{I_\psi}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\omega^{N(n_0)-n_0}(1_{I_\psi}) \geq \kappa,$$

parce que $\psi \geq 0$. □

Proposition 4.6. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *il existe deux constantes finies* $A > 0$ *et* $0 < \eta < 1$ *telles que*

$$Var(\mathcal{L}_\omega^n \psi) \leq \eta^n Var(\psi) + A \int |\psi| \; dm, \; \forall n \geq 1, \; \psi \in BV$$

où $\eta = \frac{2}{\lambda}$ *et* A *est une consatnte finie dépend seulement de* T_ω*.*

Démonstration. D'après Proposition 2.7, on a

$$Var(\mathcal{L}_\omega \psi) \leq \frac{2}{\lambda(T_\omega)} Var(\psi) + A(T_\omega) \|\psi\|_{L^1_m}.$$

Donc

$$Var(\mathcal{L}_\omega^n \psi) \quad \leq \quad \frac{2}{\lambda(T_{\omega_n})} Var(\mathcal{L}_\omega^{n-1} \psi) + A(T_{\omega_n}) \|\mathcal{L}_\omega^{n-1} \psi\|_{L^1_m}.$$

Or, pour $p \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\|\mathcal{L}_\omega^p \psi\|_{L^1_{\mathbf{m}}} \leq \|\psi\|_{L^1_m},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
Var(\mathcal{L}_\omega^n \psi) \quad &\leq \quad \frac{2}{\lambda(T_{\omega_n})} Var(\mathcal{L}_\omega^{n-1} \psi) + A(T_{\omega_n}) \|\psi\|_{L^1_m} \\
&\vdots \\
&\leq \quad \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n \lambda(T_{\omega_i})} Var(\psi) + (1 + \frac{2}{\lambda(T_{\omega_n})} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{\prod_{i=2}^n \lambda(T_{\omega_i})}) A \|\psi\|_{L^1_m} \\
&\leq \quad \eta^n Var(\psi) + (1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{n-1}) A \|\psi\|_{L^1_m}.
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $B = A \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j$. D'où la proposition. □

4.2 Argument de couplage

Introduisons la notion suivante :

$$\mathcal{H}_K = \{\psi : X \to \mathbb{R} : \psi > 0, \; \int_X \psi \, d\mu = 1, \; Var(\psi) \; \leq K\},$$

avec $K > 0$.

Lemme 4.7. *Fixons tout* $K > 0$*, alors on a*

$$\widetilde{\psi} := \frac{\psi - \kappa}{1 - \kappa} \in \mathcal{H}_{K'}, \; \forall \psi \in \mathcal{H}_K,$$

où $K' = \frac{K}{1-\kappa}$*.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{H}_K$, un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned}
Var(\widetilde{\psi}) \quad &:= \quad \sup\{\sum_{i=0}^n |\widetilde{\psi}(x_{i+1}) - \widetilde{\psi}(x_i)|\} \\
&= \quad \frac{1}{1 - \kappa} \sup\{\sum_{i=0}^n |\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)|\} \\
&= \quad \frac{1}{1 - \kappa} var(\psi) \\
&\leq \quad \frac{K}{1 - \kappa} = K'.
\end{aligned}$$

D'où lemme. □

Lemme 4.8. *Soit $\psi \in \mathcal{H}_K$, pour n assez grand alors il existe $K > 0$ tel que*

$$\frac{\varphi}{1-\kappa} \in \mathcal{H}_K,$$

où $\varphi = \mathcal{L}_\omega^n \psi - \kappa$.

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{H}_K$. D'après Lemme 4.5, on a $\varphi > 0$ et $\int_X \varphi \, d\mu = 1 - \kappa$, donc $\frac{\varphi}{1-\kappa}$ est une densité de probabilité. Or on a d'après l'inégalité de Lasota-Yorke

$$Var(\mathcal{L}_\omega^n \psi) \leq \eta^n Var(\psi) + B \leq \eta^n K + B \leq K', \tag{4.3}$$

il suffit de prendre n suffisamment grand pour que $\eta^n < \frac{1}{1-\kappa}$. Donc il existe une constante $K > 0$ telle que l'inégalité (4.3) soit vérifiée. D'où lemme. □

Soient ψ^1 et ψ^2 deux densités arbitraires de $\mathcal{H}_K$. Donc d'après Lemme 4.8, on a

$$\psi_n^i \equiv \mathcal{L}_{\omega_n} \ldots \mathcal{L}_{\omega_1} \psi^i = \kappa + (1-\kappa)\widetilde{\psi}_n^i$$

où

$$\widetilde{\psi}_n^i = \frac{(\psi_n^i - \kappa)}{(1-\kappa)} \in \mathcal{H}_K. \tag{4.4}$$

Donc,

$$\|\psi_n^1 - \psi_n^2\|_{L_m^1} \leq (1-\kappa)\|\widetilde{\psi}_n^1 - \widetilde{\psi}_n^2\|_{L_m^1}.$$

Laissez-nous formaliser la procédure ci-dessus. Étant donné $K > 0$. On définit

$$\tau_0 \;=\; 0, \; et \; \tau_k = \inf\{i \geq k : \eta^i Var(\psi) + B \leq K\},$$

pour tout $k \geq 1$. Ensuite, étant donné

$$n_0 = 0 \; et \; n_k = \sum_{j=1}^{k} \tau_j, \tag{4.5}$$

pour tout $k \geq 1$ avec $n_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En particulier, en utilisant l'argument de couplage ci-dessus en combinaison avec la $L^1(m)$-contractivité de chaque $\mathcal{L}_{\omega_i}$ et le fait que

$$\|\psi^1 - \psi^2\|_{L_m^1} \leq 2,$$

on voit que l'inégalité suivante

$$\|\psi_n^1 - \psi_n^2\|_{L_m^1} \leq 2(1-\kappa)^k \quad \forall \, n \geq n_k,$$

est vérifiée pour tous ψ^1, $\psi^2 \in \mathcal{H}_K$. En alternance, en écrivant

$$N_n \;=\; \max\{k \geq 0 \; : \; n_k \leq n\},$$

pour le nombre de couplages par le temps n pour la suite ω,

$$\|\psi_n^1 - \psi_n^2\|_{L^1(\mathbf{m})} \leq 2(1-\kappa)^{N_n} \quad \forall \, n \geq 0. \tag{4.6}$$

Lemme 4.9. *Le temps de couplage augmente linéairement par rapport à n.*

Démonstration. Puisque $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est une famille d'applications uniformément dilatantes et soit τ le temps de couplage qui ne dépend pas de $\omega \in \Omega$, alors $\tau_1 = \cdots = \tau_k = \tau$. Ainsi $n_k = k\tau$ et par l'égalité (4.5) on a

$$k\tau \leq n \Rightarrow k \leq \frac{n}{\tau}.$$

Il suffit de prendre $k = [\frac{n}{\tau}]$. □

Proposition 4.10. *Fixons tout*

$$K > \frac{\gamma}{1-\eta}.$$

Alors

$$q = \eta + \frac{\gamma}{K} < 1.$$

Démonstration. Supposons

$$K > \frac{\gamma}{1-\eta} \Rightarrow \frac{1}{K} < \frac{1-\eta}{\gamma} \Rightarrow \frac{\gamma}{K} < 1-\eta \Rightarrow \eta + \frac{\gamma}{K} < 1,$$

d'où lemme. □

4.3 Décroissance des corrélations pour les observables BV

Théorème 4.11. *Il existe $\theta \in (0,1)$ et pour presque tout ω, il existe $C(\omega)$ tel que*

$$\|\mathcal{L}_{\omega_n} \ldots \mathcal{L}_{\omega_1} (\psi^1 - \psi^2)\|_{L^1(m)} \leq C(\omega) \max(\|\psi^1\|_{BV}, \|\psi^2\|_{BV}\,)\, \theta^n, \tag{4.7}$$

pour tout $n \geq 0$ et toutes densités de probabilité ψ^1, $\psi^2 \in BV$. De plus, soit une distribution de probabilité $d\nu = \psi dm$ où $\psi \in BV$, on a donc $\forall f \in BV$, $g \in L^\infty(m)$

$$\begin{aligned}\Big|\int f.\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}\, d\nu - \int f\, d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ T_{\omega_1}\, d\nu\Big| \\ \leq C(\omega)\, \|\psi\|_{BV}\, \|f\|_{BV}\, \|g\|_\infty\, \theta^n.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Théorème 4.12. *Il existe deux constantes $\theta \in (0,1)$ et $C > 0$ telles que on a*

$$\Big|\int f\,.\, \mathcal{Q}^n g\, d\mu - \int f\, d\mu \int g\, d\mu\Big| \leq C(\omega)\, \|f\|_{BV}\, \|g\|_\infty\, \theta^n, \tag{4.9}$$

pour tout $n \geq 0$ et toute fonction à valeurs complexes $f \in BV$ et $g \in L^\infty(m)$.

On démontrera les deux théorèmes précédents dans la suite.

Démonstration. Etant donné deux densités de probabilité ψ^1, $\psi^2 \in \mathcal{H}_K$, on a

$$\|\psi^1_n - \psi^2_n\|_{L^1(m)} \leq \underbrace{\int_{\{\widetilde{n}>n\}} |\psi^1_n - \psi^2_n|\, dm}_{A} + \underbrace{\int_{\{\widetilde{n}\leq n\}} |\psi^1_n - \psi^2_n|\, dm}_{B}.$$

En utilisant

$$\|\mathcal{L}^n_\omega 1\| = \int 1.1 \circ T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1} \leq 1 \quad \Rightarrow \|\mathcal{L}^n\psi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty,$$

on obtient donc

$$A \leq \Big(\|\psi^1_n\|_\infty + \|\psi^2_n\|_\infty\Big)\mathbb{P}(\{\widetilde{n} > n\}) \leq C \max(\|\psi^1\|_{BV}, \|\psi^2\|_{BV})\vartheta^n,$$

et par l'inégalité (4.6) on en déduit que

$$B \leq 2(1-\kappa)^{tn-1},$$

pour tout $n \neq \widetilde{n}$. Finalement, on peut prendre $\theta = \max((1-\kappa)^t, \vartheta)$.
Ainsi l'inégalité (4.7) est satisfaite pour la classe des densités restreintes.
Notons que

$$\chi(n) = 1_{\{n \geq \widetilde{n}\}} + (1-\kappa)^{tn-1},$$

est vérifiée pour tout $n \geq 0$. Soit une densité de probabilité arbitraire $\psi \in BV$, définie par

$$\psi_h = \frac{\psi + h}{1+h}, \quad h > 0.$$

Puisque $\psi + h > h$, on a donc

$$Var(\psi_h) = \frac{1}{1+h} Var(\psi) < \frac{1}{h} Var(\psi).$$

Ainsi

$$\psi_h \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \frac{1}{h} Var(\psi) < 1 \Rightarrow Var(\psi) < h.$$

D'après l'inégalité (4.6) on a

$$\|\psi_n^1 - \psi_n^2\|_{L^1(m)} \leq 2\,(1-k)^{[t\,n]} + 2\,\vartheta^{N_n} \leq 2\,(1-k)^{t\,n-1}.$$

Supposons que $g \in L^\infty(m)$ soit à valeurs complexes et $f \in BV$ soit à valeurs réelles avec $\int f\, dm = 0$. Définissons

$$\widetilde{f} = \frac{f + 2\,var(f)}{2\,var(f)},$$

Il est facile de vérifier que $\widetilde{f} \in \mathcal{H}_1$. Donc,

$$\begin{aligned}
\Big| \int f \,.\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}\, dm \Big| &= \Big| \int \mathcal{L}_{\omega_n} \circ \ldots \circ \mathcal{L}_{\omega_1} f \,.\, g\, dm \Big| \leq \|g\|_\infty \|\mathcal{L}_{\omega_n} \circ \ldots \circ \mathcal{L}_{\omega_1} f\|_{L^1(m)} \\
&= 2\,var(f)\,\|g\|_\infty\,\|\mathcal{L}_{\omega_n} \circ \ldots \circ \mathcal{L}_{\omega_1}(\widetilde{f} - 1)\|_{L^1(m)} \\
&= 4 var(f) \|g\|_\infty \chi(n).
\end{aligned}$$

En général, $\int f dm = 0$ échoue, auquel cas la borne précédente produit

$$\Big| \int f.g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm - \int f dm \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm \Big| \leq 4 var(f) \|g\|_\infty \chi(n).$$

On peut également modifier la mesure dans les intégrales ci-dessus. En effet, soit $\psi \in BV$ une densité de probabilité et $d\nu = \psi dm$. Alors d'après Proposition 5.32 on vérifie facilement

$$|G| = \Big| \int f.g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu - \int f d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm \Big| \leq 4 \|\psi\|_{BV} \|f\|_{BV} \|g\|_\infty \chi(n). \tag{4.10}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
|H| &= \Big| \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu - \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm \Big| \\
&= \Big| \int \psi\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm - \int \psi dm \int \psi g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm \Big| \\
&\leq 4 var(\psi)\, \|g\|_\infty \chi(n) \leq 4 \|\psi\|_{BV}\, \|g\|_\infty \chi(n).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

D'après les deux inégalités (4.10) et (4.11) on obtient

$$\begin{aligned}
|V| &= \Big|\int f.\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu - \int f\, d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu\Big| \\
&= \Big|\Big(\int f\,.\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu - \int f\, d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm\Big) \\
&- \Big(\int f\, d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} d\nu - \int f\, d\nu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} dm\Big)\Big| \\
&\leq |G| + \|f\|_{BV}|H| \leq 8\|\psi\|_{BV}\|f\|_{BV}\|g\|_\infty \chi(n).
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (4.8) est prouvée pour f fonction réelle. Pour f complexe, une borne similaire découle de celle ci-dessus avec un préfacteur plus grand. En particulier, on peut choisir $\nu = \mu$. Comme f et g sont liés, on peut donc estimer

$$\begin{aligned}
Z &= \Big|\int f.\, \mathcal{Q}^n g\, d\mu \; - \; \int f\, d\mu \int g\, d\mu\Big| \\
&= \Big|\int f\,.\, \mathcal{Q}^n g\, d\mu \; - \; \int f\, d\mu \int \mathcal{Q}^n g\, d\mu\Big| \\
&= \Big|\int f\,.\, \mathbb{E}[g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}]\, d\mu - \int f\, d\mu \int \mathbb{E}[g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}]\, d\mu\Big| \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big|\int f.\, g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}\, d\mu \; - \; \int f\, d\mu \int g \circ T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}\, d\mu\Big|\Big] \\
&\leq C\|\psi\|_{BV}\|f\|_{BV}\|g\|_\infty \mathbb{E}[\chi(n)] \\
&\leq C\|\psi\|_{BV}\|f\|_{BV}\|g\|_\infty (D'\vartheta^n + (1-k)^{tn-1}).
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (4.9) est staisfaite. □

Chapitre 5

Concepts de base de la théorie des mesures et probabilités

Dans ce chapitre nous allons rappeler des notions classiques sur la théorie des mesures et probabilités, aussi quelques notions de base concernant les processus stochastiques qui nous les utiliserons dans cette thèse.

5.1 Tribu et mesurabilité

Soit Ω un ensemble donné. Une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω est une famille de parties de Ω satisfaisant les conditions suivantes :
(i) $\Omega \in \mathcal{T}$.
(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments dans $\mathcal{T}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
(iii) Si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$ où $A^c = \Omega \backslash A$.
• Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.
• Une intersection finie ou dénombrable de tribus est une tribu.

Définition 5.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, on appelle mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application mesurable $\mu_\star : \Omega \to [0, +\infty]$ vérifiant :
(i) $\mu_\star(\emptyset) = 0$.
(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments dans $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints alors,

$$\mu_\star\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_\star(A_n).$$

(ii) Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une mesure $\mathbb{P}$ de Ω dans $[0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Dans toute la suite notons $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 5.2. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans Ω' est dite $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, pour tout $A \in \mathcal{T}'$, avec

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ \text{ tel que } \ f(\omega) \in \ A\}.$$

Une fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite borélienne si elle est $\big(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable avec $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5.3. *Soit Y est une variable aléatoire réelle et $\mathcal{T}$-mesurable. Si f est une fonction borélienne, alors $f(Y)$ est $\mathcal{T}$-mesurable. De plus, Y est la limite croissante de variables aléatoires du type $\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.*

Définition 5.4. (Fonction de répartition)

Soient Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{P}_Y$ sa loi. On appelle fonction de répartition de Y, l'application F_Y définie par

$$F_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \longmapsto F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y). \tag{5.1}$$

Si $\mathbb{P}_Y$ a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(]-\infty, y]) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, d\lambda(t). \tag{5.2}$$

Soient $\mathcal{T}$ une tribu, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On dit que $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et on note $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, si, pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ alors } \quad \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théorème 5.5. ***(Radon-Nikodym)***

Si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telles que $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, alors il existe une fonction mesurable positive f sur Ω qui est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

Proposition 5.6. *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, Z une variable aléatoire réelle et $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite des variables aléatoires. Alors, Z est dite $\sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que*

$$Z = h(Y_1, \ldots, Y_n).$$

Définition 5.7. (Fonction caractéristique)

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On appelle fonction caractéristique de Y, l'application $\varphi_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\varphi_Y(t) := \mathbb{E}\Big(\exp(itY)\Big), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout t fixé, l'application bornée $h(\omega) := \exp(itY(\omega))$ est mesurable donc $\mathbb{P}$-intégrable. Alors, φ_Y peut s'écrire sous la forme suivante

$$\varphi_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ity)\, d\mathbb{P}_Y(y). \tag{5.3}$$

Soient Y une variable aléatoire réelle définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{P}_Y$ sa loi. Alors, Y est $\mathbb{P}$-intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} \mid y \mid d\mathbb{P}_Y(y) < \infty.$$

Son espérance s'exprime par

$$\mathbb{E}(Y) := \int_{\Omega} Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} y\, d\mathbb{P}_Y(x). \tag{5.4}$$

Proposition 5.8. *La fonction caractérestique de loi normale centrée $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est donnée par*

$$\varphi_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

avec $\sigma > 0$.

5.2 Indépendance

Définition 5.9. (Indépendance d'événements)

On dit que deux événements A et B appartenant à une tribu $\mathcal{T}$ sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Soit I un ensemble quelconque d'indices. Une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants si pour tout sous-ensemble J fini de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j). \tag{5.5}$$

On note que l'indépendance mutuelle est plus forte que l'indépendance deux à deux.

Définition 5.10. (Indépendance de tribus)

Une famille $(\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{T}$ est dite indépendante si pour tout $A_1 \in F_1, \cdots, A_n \in F_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Définition 5.11. (Indépendance de variables aléatoires)

Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires indexée par I telle que pour tout $i \in I$, $Y_i : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \to (E_i, \mathcal{B}(E_i))$. On dit que $(Y_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes si pour tout sous-ensemble J fini de I, pour tout $j \in J$, $B_j \in \mathcal{B}(E_j)$, on a

$$\mathbb{P}(Y_j \in B_j, j \in J) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(Y_j \in B_j).$$

Proposition 5.12. *Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes. Alors, pour toute partie finie J de I et toute famille $\{h_j, j \in J\}$ de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que les $h_j(Y_i)$ sont $\mathbb{P}_Y$-intégrables. La variable aléatoire produit, $\prod_{j\in J} h_j(Y_i)$, est $\mathbb{P}_Y$-intégrable telle que*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} h_j(Y_i)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{E}(h_j(Y_i)). \tag{5.6}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, on dit que la variable aléatoire réelle $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est indépendante de $\mathcal{T}$ si les tribus $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ et $\mathcal{T}$ sont indépendantes, c'est-à-dire pour tout $y \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap (Y \leq y)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(Y \leq y).$$

Définition 5.13. Soient Z et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrables (i.e. $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$). Alors, on a

$$Cov(Z,Y) = \mathbb{E}\,(ZY) - \mathbb{E}\,(Z)\,\mathbb{E}\,(Y)\,. \tag{5.7}$$

$$\mathbb{V}ar(Z) = Cov(Z,Z) = \mathbb{E}(Z^2) - [\mathbb{E}(Z)]^2. \tag{5.8}$$

On dit que deux variables aléatoires réelles Z et Y de carré intégrables sont non corrélées si

$$\mathbb{E}\,(ZY) = \mathbb{E}\,(Z)\,\mathbb{E}\,(Y)\,.$$

Cette condition équivaut à $Cov\,(Z,Y) = 0$. Deux variables aléatoires indépendantes et de carré intégrable sont non corrélées et la réciproque est fausse en général.
Rappelons quelques inégalités de la théorie

5.3 Convergence de variables aléatoires et théorèmes limites

Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. La suite Y_n converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers Y (notation $Y_n \overset{p.s}{\to} Y$) si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; Y_n\,(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} Y\right\}\right) = 1. \tag{5.9}$$

2. La suite Y_n converge vers Y dans $L^p(\Omega,\mathbb{P})$ $(1 \leq p < \infty)$ (notation $Y_n \overset{L^p}{\to} Y$) si

$$\mathbb{E}\,(\mid Y_n - Y \mid^p) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{5.10}$$

3. La suite Y_n converge en probabilité vers Y (notation $Y_n \overset{prob}{\to} Y$) si pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\,(\mid Y_n - Y \mid > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{5.11}$$

4. La suite Y_n converge en loi vers Y (notation $Y_n \overset{loi}{\to} Y$) si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{Y_n}\,(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_Y\,(x)\,. \tag{5.12}$$

5. La convergence presque sûre implique la convergence dans L^p $(p \geq 1)$.
6. La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
7. La convergence dans $L^p(\Omega,\mathbb{P})$ $(p \geq 1)$ implique la convergence en probabilité.
8. La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Proposition 5.14. *(Inégalité de Jensen)*

Soit ϕ une fonction réelle convexe et Y une variable aléatoire réelle. Si Y et $\phi(Y)$ sont intégrables. Alors

$$\phi(\mathbb{E}(Y)) \leq \mathbb{E}[\phi(Y).$$

Exemple 5.15. Soit $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. D'après la proposition précédente on a donc

$$|\mathbb{E}[X]|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p],$$

le fait que $X \mapsto \phi(X) = |X|$ est une fonction convexe.

Théorème 5.16. *(Théorème de convergence dominée)*

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des vraiables aléatoires réelles intégrables qui converge en probabilité vers Y. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive Z telle que $\forall n \geq 0$; $|X_n| < Z$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

Théorème 5.17. ***(Loi faible des grands nombres)***

On suppose que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles, de même loi, de carré intégrables et deux à deux non corrélées. Alors on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \overset{prob}{\to} \mathbb{E}\left(Y_1\right). \tag{5.13}$$

Théorème 5.18. ***(Loi forte des grands nombres de Khintchine)***

On suppose que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et $\mathbb{E}\left(\mid Y_1 \mid\right) < +\infty$. Alors on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \overset{p.s}{\to} \mathbb{E}\left(Y_1\right). \tag{5.14}$$

Théorème 5.19. ***(Théorème de limite centrale)***

Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi et de carré intégrables (non p.s. constantes). Posons $m = \mathbb{E}\left(Y_1\right)$, $\sigma^2 = Var\left(Y_1\right)$. Alors

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)}{\sqrt{Var\left(S_n\right)}} = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \overset{loi}{\to} N\left(0,1\right), \tag{5.15}$$

où $\mathcal{N}\left(0,1\right)$ est la loi gaussienne centrée réduite.

Lemme 5.20. ***(Lemme de Borel-Cantelli)***
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des éléments de $\mathcal{F}$.

1. *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors pour une infinité de n*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega;\ \omega \in A_n\Big\}\Big) = 0.$$

2. *Si les A_n, sont indépendants avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors pour une infinité de n*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega;\ \omega \in A_n\Big\}\Big) = 1.$$

5.4 Espérances conditionnelles et Martingales

Théorème 5.21. *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{T}$ et $Y : \Omega \to [0, +\infty]$ une variable aléatoire. Alors il existe une unique (modulo $\mathbb{P}$) variable aléatoire $Z : \Omega \to [0, +\infty]$ telle que*

(i) Z est $\mathcal{G}$-mesurable

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{G}$ on a

$$\int_A Y \, d\mathbb{P} = \int_A Z \, d\mathbb{P} \tag{5.16}$$

Définition 5.22. La variable aléatoire Z définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$ s'appelle ésperance conditionnelle de Z sachant $\mathcal{G}$, notée par $\mathbb{X}|\mathcal{G}$.

Proposition 5.23. *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, Y et Z deux variables aléatoires positives (respectivement $\mathbb{P}$-intégrable) et a, $b \geq 0$ (respectivement a, $b \in \mathbb{R}$) et $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{T}$*

(1) $\mathbb{E}\Big((aY + bZ)|\mathcal{G}\Big) = a\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big) + b\mathbb{E}\Big(Z|\mathcal{G}\Big)$ p.s.

(2) Si $Y \leq Z$ p.s. alors $\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big) \leq \mathbb{E}\Big(Z|\mathcal{G}\Big)$ p.s.

(3) $|\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big)| \leq \mathbb{E}\Big(|Y||\mathcal{G}\Big)$ p.s.

(4) Si X et $\mathcal{G}$ (C'est à dire $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$) sont indépendantes alors $\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}(Y)$

(5) Si Y_1 est $\mathcal{G}$-mesurable alors on a

$$\mathbb{E}\Big(Y_1 Y|\mathcal{G}\Big) = Y_1 \mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big) \text{ p.s.} \tag{5.17}$$

(6) Si $\mathcal{K}$ est une sous tribu de $\mathcal{G}$ alors on a

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big)|\mathcal{K}\Big) = \mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{K}\Big) \text{ p.s.} \tag{5.18}$$

Théorème 5.24. *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, Y une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe positive et $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{T}$. Alors*

$$f\Big(\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big)\Big) \leq \mathbb{E}\Big(f(Y)|\mathcal{G}\Big) \text{ p.s.} \tag{5.19}$$

Remarque 5.25. En prenant $\mathcal{G} = \Big\{\emptyset, E\Big\}$ alors on obtient l'inégalité classique de Jensen

$$f\Big(\mathbb{E}\Big(Y|\mathcal{G}\Big)\Big) \leq \mathbb{E}\Big(f(Y)|\mathcal{G}\Big)$$

Définition 5.26. Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ trois sous tribu de $\mathcal{T}$.
On dit que $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_3$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{T}_2$ si : Pour toutes variables aléatoires positives Y_1 est $\mathcal{T}_1$-mesurable et Y_3 est $\mathcal{T}_3$-mesurable on a

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_3|\mathcal{T}_2\Big) = \mathbb{E}(Y_1|\mathcal{T}_2\Big) \, \mathbb{E}(Y_3|\mathcal{T}_2\Big) \text{ p.s.}$$

Remarque 5.27. En prenant $\mathcal{E}_2 = \Big\{\emptyset, E\Big\}$ alors on retrouve l'indépendance classique de sous tribus

$$\mathbb{E}\Big(Y_1 Y_3\Big) = \mathbb{E}(Y_1\Big) \, \mathbb{E}\Big(Y_3\Big).$$

Définition 5.28. (Martingale)

Soit $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de Ω.
Une chaîne stochastique $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est appelée martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

(a) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(|M_n|) < +\infty$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{G}_n)) = M_n$ p.s.

5.5 Espace des fonctions à variation bornée

Définition 5.29. La variation totale d'une fonction

$$\widetilde{\psi} : X \to \mathbb{R},$$

sur un intervalle $[c, b]$ est donnée par

$$var_{[c,b]}\,\widetilde{\psi} = \sup\{\sum_{i=0}^{n} |\widetilde{\psi}(x_{i+1}) - \widetilde{\psi}(x_i)| \ : \ n \geq 1,\ c = x_0 \leq \ldots \leq x_n = b\}.$$

La L^1-norme de $\widetilde{\psi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par

$$|\widetilde{\psi}|_1 = \int_X |\widetilde{\psi}| dm.$$

$BV := \{X \to \mathbb{C} \ : \ var_{[c,b]}\widetilde{\psi} < +\infty\}$ muni de sa norme donnée par

$$\|\widetilde{\psi}\|_{BV} = var_{[c,b]}\widetilde{\psi} + |\widetilde{\psi}|_1,$$

est un espace de Banach.

Définition 5.30. Soient $(X, \|.\|)$ et $(\widetilde{X}, \|.\|_e)$ deux espaces normés.
On dit que $g :\ X \to \widetilde{X}$ est une fonction Lipschitzienne s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $x,\ y \in X$

$$\|g(x) - g(y)\|_e \ \leq \ c\,\|x - y\|.$$

De plus, $\|.\|$ s'appelle la norme Lipschitzienne.

$Lip(X)$ est l'ensemble des fonctions Lipschitziennes de X à valeurs dans $\widetilde{X}$.

Exemple 5.31. $Lip(X)$ est un espace BV.

Proposition 5.32. *Pour tous f et $\psi \in BV$, on a*

$$Var(f\psi) \leq \|f\|_{BV}\|\psi\|_{BV}.$$

Démonstration. Pour tous f et $\psi \in BV$, on a

$$\begin{aligned}
Var(f\psi) &= \sup\{\sum_{i=0}^{n} |(f\psi)(x_{i+1}) - (f\psi)(x_i)|,\ 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\
&= \sup\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1})\psi(x_{i+1}) - f(x_i)\psi(x_i)|,\ 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\
&= \sup\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1})\psi(x_{i+1}) - f(x_{i+1})\psi(x_i) + f(x_{i+1})\psi(x_i) \\
&- f(x_i)\psi(x_i)|, 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\
&\leq \sup\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1})||\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)|, 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\
&+ \sup\{\sum_{i=0}^{n} |\psi(x_{i+1})||f(x_{i+1}) - f(x_i)|, 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\
&\leq \|f\|_1 Var(\psi) + \|\psi\|_1 Var(f) \\
&\leq \|f\|_1 Var(\psi) + \|\psi\|_1 Var(f) + Var(f)Var(\psi) + \|f\|_1\|\psi\|_1 = \|f\|_{BV}\|\psi\|_{BV}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.33. *Soit $\psi \in BV$ et $(I_j)_{j\in\{1,\cdots,N\}}$ une partition finie d'un intervalle $I \subset [0,1]$ tels que pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$, on a $I_j = [a_j, a_{j+1}]$. Alors*

$$\sum_{j=1}^{n} Var_{I_j}(\psi) \leq Var(\psi).$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$\sum_{j=1}^{n} Var_{I_j}(\psi) > Var(\psi).$$

ceci implique

$$\sum_{j=1}^{n} Var_{I_j}(\psi) = \sum_{j=1}^{n} \sup_j |(\psi(a_{j+1}) - \psi(a_j)| > \sup_j \sum_{j=1}^{n} |\psi(a_{j+1}) - \psi(a_j)|,$$

ce qui absurde car pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_j |(\psi(a_{j+1}) - \psi(a_j)| = \sup_j \sum_{j=1}^{n} |\psi(a_{j+1}) - \psi(a_j)|,$$

le fait que I_j et I sont des intervalles bornés avec $Var_{I_j}(\psi) = \sup_j |(\psi(a_{j+1}) - \psi(a_j)|$. Ainsi, il existe une partition finie $(I_j)_{j\in\{1,\cdots,N\}}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} Var_{I_j}(\psi) \leq Var(\psi).$$

□

Proposition 5.34. *Pour tout $f \in L^1([0,1], m)$ tel que $essinf f > 0$, alors*

$$Var(\frac{1}{f}) \leq \frac{Var(f)}{(essinf)^2}.$$

Démonstration. Pour tout $f \in L^1([0,1], m)$ tel que $essinf f > 0$ on sait bien que

$$essinf f \leq |f| \leq esssup f,$$

ceci imlpique

$$0 < \frac{1}{|f|^2} \leq \frac{1}{(essinf f)^2}. \tag{5.20}$$

Un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned} Var(\frac{1}{f}) &= \sup\{\sum_{i=0}^{n} |\frac{1}{f}(x_{i+1}) - \frac{1}{f}(x_i)|,\ 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\} \\ &= \sup\{\sum_{i=0}^{n} |\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{f(x_i)f(x_{i+1})}|,\ 0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (5.20) on obtient

$$\begin{aligned} Var(\frac{1}{f}) &\leq \frac{1}{(essinf f)^2} \sup\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,\ 0 = x_0 < \cdots < x_n \leq 1\} \\ &= \frac{Var(f)}{(essinf f)^2}. \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

Proposition 5.35. *Pour tout $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ appartenant à BV, alors*

$$\|fg\|_{BV} \leq 2\,\|f\|_{BV}\,\|g\|_{BV}. \tag{5.21}$$

Références

[1] M. Abdelkader and R. Aimino. On the quenched central limit theorem for random dynamical systems. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 49(24) :244002, 2016.

[2] R. Aimino. *Rates of mixing and limit theorems for random and non-autonomous dynamical systems*. Thèse, Université de Toulon, October 2014.

[3] R. Aimino, M. Nicol, and S. Vaienti. Annealed and Quenched Limit Theorems for Random Expanding Dynamical Systems. *Probability Theory and Related Fields*, 162(1) :233–274, 2015.

[4] R. Aimino and J. Rousseau. Concentration inequalities for sequential dynamical systems of the unit interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(8) :2384–2407, 2016.

[5] R. Aimino and S. Vaienti. A Note on the Large Deviations for Piecewise Expanding Multidimensional Maps . In Hernan Gonzalez-Aguilar and Edgardo galde, editors, *Nonlinear Dynamics New Directions : Theoretical Aspects*, volume 11 of *Nonlinear Systems and Complexity*, page 30. Springer, October 2011.

[6] J. F. Alves, J. M. Freitas, S. Luzzatto, and S. Vaienti. From rates of mixing to recurrence times via large deviations. *Advances in Mathematics*, 228(2) :1203 – 1236, 2011.

[7] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Monographs in Mathematics. Springer, 1998.

[8] A. Arvind, L. Carlangelo, and S. Mikko. Quenched clt for random toral automorphism. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 24(2) :331–348, 2009.

[9] A. Ayyer and M. Stenlund. Exponential decay of correlations for randomly chosen hyperbolic toral automorphisms. *Chaos*, 17(4) :043116, December 2007.

[10] W. Bahsoun and C. Bose. Mixing rates and limit theorems for random intermittent maps. *Nonlinearity*, 29 :1417, April 2016.

[11] V. Baladi. Correlation spectrum of quenched and annealed equilibrium states for random expanding maps. *Communications in Mathematical Physics*, 186(3) :671–700, Jul 1997.

[12] V. Baladi. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. 2000.

[13] V. Baladi, A. Kondah, and W. Szlenk. Random correlations for small perturbations of expanding maps. 1995.

[14] V. Baladi and L.-S. Young. On the spectra of randomly perturbed expanding maps. *Comm. Math. Phys.*, 156(2) :355–385, 1993.

[15] I. Berkes. Results and problems related to the pointwise central limit theorem. 12 1998.

[16] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. *Concentration inequalities. A nonasymptotic theory of independence.* Oxford University Press, 2013.

[17] A. Boyarsky and P. Gora. *Laws of chaos : invariant measures and dynamical systems in one dimension / Abraham Boyarsky, Pawel Gora.* Birkhauser Boston, Mass, 1997.

[18] J. Buzzi. Exponential decay of correlations for random lasota–yorke maps. *Communications in Mathematical Physics*, 208(1) :25–54, 1999.

[19] J.-R. Chazottes and S. Gouëzel. Optimal concentration inequalities for dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 316(3) :843–889, Dec 2012.

[20] N. Chernov. Advanced statistical properties of dispersing billiards. *Journal of Statistical Physics*, 122(6) :1061–1094, Mar 2006.

[21] J. P. Conze and A. Raugi. Limit theorems for sequential expanding dynamical systems on [0,1]. *Arithmeric, Geometry and Coding Theory - Contemporary mathematics*, 430 :89–121, 2007.

[22] C. Cuny and F. Merlevède. Strong Invariance Principles with Rate for "Reverse" Martingale Differences and Applications. *Journal of Theoretical Probability*, 28(1) :137–183, March 2015.

[23] P. Diaconis and D. Freedman. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 41(1) :45–76, March 1999.

[24] N. Dobbs and M. Stenlund. Quasistatic dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(8) :2556–2596, 2017.

[25] D. Dragicevic, G. Froyland, C. González-Tokman, and S. Vaienti. Almost sure invariance principle for random piecewise expanding maps. *ArXiv e-prints*, November 2016.

[26] G. Froyland, C. González-Tokman, and A. Quas. Stability and approximation of random invariant densities for Lasota-Yorke map cocycles. *ArXiv e-prints*, December 2012.

[27] S. Gouëzel. Almost sure invariance principle for dynamical systems by spectral methods. *Ann. Probab.*, 38(4) :1639–1671, 07 2010.

[28] S. Gouëzel and I. Melbourne. Moment bounds and concentration inequalities for slowly mixing dynamical systems. working paper or preprint, April 2014.

[29] N. Haydn, M. Nicol, A. Tôrôk, and S. Vaienti. Almost sure invariance principle for sequential and non-stationary dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(8) :5293–5316, August 2017.

[30] H. Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118(2) :627–634, 1993.

[31] F. Hofbauer. Piecewise invertible dynamical systems. *Probability Theory and Related Fields*, 72(3) :359–386, Jun 1986.

[32] L. Y. S Hsieh. *Ergodic theory of mulitidimensional random dynamical systems.* PhD thesis, 2008.

[33] H. Ishitani. Central limit theorems for the random iterations of 1-dimensional transformations (dynamics of complex systems). 2004.

[34] G. Keller. Markov extensions, zeta functions, and fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems. 1989.

[35] Y. Kifer. *Ergodic theory of random transformations.* Progress in probability and statistics. Birkhäuser, 1986.

[36] Y. Kifer. Limit theorems for random transformations and processes in random environments. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(4) :1481–1518, 1998.

[37] Y. Kifer. Thermodynamic formalism for random transformations revisited. 08, 03 2008.

[38] E. Kobre and Lai-Sang Young. Extended systems with deterministic local dynamics and random jumps. *Communications in Mathematical Physics*, 275(3) :709–720, Nov 2007.

[39] A. Lasota and J. A. Yorke. *On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations*, pages 47–54. Springer New York, New York, NY, 2004.

[40] C. Liverani. Decay of correlations for piecewise expanding maps. *Journal of Statistical Physics*, 78(3) :1111–1129, Feb 1995.

[41] P. Marie. *Propriétés statistiques des systèmes dynamiques déterministes et aléatoires*. PhD thesis, 2009. Thèse de doctorat dirigée par S. Vaienti Physique - Mathématique Aix Marseille 2 2009.

[42] I. Melbourne and M. Nicol. A vector-valued almost sure invariance principle for hyperbolic dynamical systems. *Ann. Probab.*, 37(2) :478–505, 03 2009.

[43] T. Morita. Random iteration of one-dimensional transformations. *Osaka J. Math.*, 22(3) :489–518, 1985.

[44] T. Morita. Deterministic version lemmas in ergodic theory of random dynamical systems. *Hiroshima Math. J.*, 18(1) :15–29, 1988.

[45] S. Pelikan. Invariant densities for random maps of the interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, 281(2) :813–825, 1984.

[46] W. Philipp and W.F. Stout. *Almost Sure Invariance Principles for Partial Sums of Weakly Dependent Random Variables*. American Mathematical Society : Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1975.

[47] B. Saussol. *Etude statistique de systèmes dynamiques dilatants*. PhD thesis, 1998.

[48] B. Saussol. Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps. *Israel Journal of Mathematics*, 116(1) :223–248, 2000.

[49] H. H. Schaefer. *Banach lattices and positive operators / Helmut H. Schaefer*. Springer-Verlag Berlin ; New York, 1974.

[50] V.G. Sprindžuk and R.A. Silverman. *Metric theory of diophantine approximations (Metričeskaja teorija diofantovych približenij, engl.) Transl. and ed. by Richard A. Silverman*. 1979.

[51] M. Stenlund. Non-stationary compositions of Anosov diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 24 :2991–3018, October 2011.

[52] M. Stenlund and H. Sulku. A coupling approach to random circle maps expanding on the average. *Stochastics and Dynamics*, 14(04) :1450008, 2014.

[53] M. Stenlund, L.-S. Young, and H. Zhang. Dispersing Billiards with Moving Scatterers. *Communications in Mathematical Physics*, 322 :909–955, September 2013.

[54] H. Sulku. Explicit Correlation Bounds for Expanding Circle Maps Using the Coupling Method. *ArXiv e-prints*, November 2012.

[55] D. Thomine. A spectral gap for transfer operators of piecewise expanding maps. Réalisé en tant que mémoire de Master 2. Version simplifiée d'un article de Viviane Baladi et Sébastien Gouëzel., June 2010.

[56] C. T. Ionescu Tulcea and G. Marinescu. Theorie ergodique pour des classes d'operations non completement continues. *Annals of Mathematics*, 52(1) :140–147, 1950.

[57] L. S. Young. Recurrence times and rates of mixing. *Israel Journal of Mathematics*, 110(1) :153–188, Nov 1999.