

## Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Notations</b>                                       | <b>11</b> |
| <b>1 Elasticité et capillarité</b>                     | <b>13</b> |
| 1.1 Les fondements de l'élasto-capillarité             | 13        |
| 1.1.1 La tension de surface                            | 13        |
| 1.1.2 Les courbes élastiques                           | 14        |
| 1.2 L'interaction élasto-capillaire                    | 16        |
| 1.2.1 Déformer un solide avec une goutte               | 16        |
| 1.2.2 La longueur élasto-capillaire                    | 17        |
| 1.2.3 Applications et enjeux                           | 18        |
| <b>2 Origami capillaires dynamiques</b>                | <b>23</b> |
| 2.1 Introduction                                       | 23        |
| 2.2 Le dispositif expérimental                         | 24        |
| 2.2.1 La mise en place de l'expérience                 | 24        |
| 2.2.2 Le polymère                                      | 24        |
| 2.2.3 Le support superhydrophobe                       | 25        |
| 2.3 L'origami dynamique                                | 26        |
| 2.3.1 Repliement                                       | 26        |
| 2.3.2 Sélection de forme dynamique                     | 26        |
| 2.4 Repliement d'une lamelle élastique                 | 28        |
| 2.4.1 Gravité et bistabilité                           | 28        |
| 2.4.2 La dynamique de repliement                       | 29        |
| 2.4.3 Le diagramme de phase                            | 31        |
| 2.5 Observations expérimentales                        | 32        |
| 2.5.1 Comportement de la ligne de contact              | 32        |
| 2.5.2 Relation entre $We$ et $\bar{\Delta}$            | 34        |
| 2.5.3 L'angle de contact et le mécanisme de repliement | 34        |
| 2.5.4 Deux échelles de temps                           | 35        |
| 2.5.5 Pinch-off et goutte satellite                    | 36        |
| 2.6 Conclusion   | 37        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Modélisation du repliement élasto-capillaire</b>                     | <b>39</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 39        |
| 3.2      | Vers une approche 2D . . . . .  | 39        |
| 3.2.1    | Superposition des effets dans les directions $x$ et $z$ . . . . .       | 40        |
| 3.2.2    | Aire de l'interface . . . . .   | 43        |
| 3.3      | Une première modélisation . . . . .                                     | 44        |
| 3.3.1    | Décomposition en éléments discrets . . . . .                            | 44        |
| 3.3.2    | Validation du modèle . . . . .  | 45        |
| 3.3.3    | Le problème du repliement capillaire . . . . .                          | 47        |
| 3.3.4    | Conclusion et perspectives . . . . .                                    | 52        |
| 3.4      | Un modèle plus élaboré . . . . .  | 53        |
| 3.4.1    | Les ingrédients du modèle . . . . .                                     | 54        |
| 3.4.2    | Le diagramme de phase numérique . . . . .                               | 55        |
| 3.4.3    | Conclusion . . . . .  | 57        |
| <b>4</b> | <b>Le ménisque élasto-capillaire</b>                                    | <b>59</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 59        |
| 4.2      | Longueurs caractéristiques . . . . .                                    | 60        |
| 4.3      | Le dispositif expérimental . . . . .                                    | 62        |
| 4.3.1    | Une cellule de Hele-Shaw . . . . .                                      | 62        |
| 4.3.2    | Les matériaux employés . . . . .  | 62        |
| 4.4      | Observations expérimentales : équilibre et rupture . . . . .            | 64        |
| 4.5      | Description théorique . . . . .   | 65        |
| 4.5.1    | Partie liquide . . . . .  | 66        |
| 4.5.2    | Partie élastique . . . . .  | 66        |
| 4.5.3    | Fermeture du problème . . . . .   | 68        |
| 4.5.4    | Une équation pour une seule variable . . . . .                          | 68        |
| 4.5.5    | Equations sans dimension . . . . .                                      | 69        |
| 4.6      | Comparaison entre prévisions théoriques et expériences . . . . .        | 70        |
| 4.6.1    | La forme du ménisque élasto-capillaire . . . . .                        | 70        |
| 4.6.2    | Une succession d'états d'équilibre . . . . .                            | 70        |
| 4.6.3    | L'angle critique . . . . .  | 73        |
| 4.6.4    | Le rôle de la tension de surface . . . . .                              | 75        |
| 4.7      | Comportement universel des lamelles très longues . . . . .              | 76        |
| 4.7.1    | Solution externe et couche limite . . . . .                             | 76        |
| 4.7.2    | L'élasticité seule s'oppose à la force hydrostatique . . . . .          | 77        |
| 4.7.3    | La capillarité seule s'oppose à la force hydrostatique . . . . .        | 78        |
| 4.7.4    | Capillarité et élasticité s'opposent à la force hydrostatique . . . . . | 78        |
| 4.8      | Effets tridimensionnels . . . . .                                       | 79        |
| 4.8.1    | Mesure de l'angle de contact aux parois . . . . .                       | 80        |
| 4.8.2    | Correction des équations . . . . .                                      | 81        |
| 4.8.3    | Rupture du système par invasion d'air latérale . . . . .                | 82        |
| 4.9      | Conclusion . . . . .  | 84        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Ménisque et pli : des solutions exactes</b>                                     | <b>85</b>  |
| 5.1      | Introduction . . . . .   | 85         |
| 5.2      | Le flambage d'une poutre . . . . .   | 85         |
| 5.3      | Localisation de la déformation lors du flambage . . . . .                          | 87         |
| 5.3.1    | Les équations du problème . . . . .  | 87         |
| 5.3.2    | Deux solutions exactes . . . . .   | 91         |
| 5.4      | Une solution plus générale . . . . .   | 92         |
| 5.4.1    | Le ménisque et le pli : analogies et différences . . . . .                         | 92         |
| 5.4.2    | La solution générale . . . . .   | 93         |
| 5.4.3    | Le ménisque élasto-capillaire : une portion de pli . . . . .                       | 94         |
| 5.4.4    | La famille de solutions dans le problème de flambage . . . . .                     | 94         |
| 5.5      | Conclusion . . . . .   | 95         |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>97</b>  |
| <b>A</b> | <b>Mesures expérimentales</b>  | <b>99</b>  |
| A.1      | Evaluation de $L_{ec}$ par la mesure des paramètres . . . . .                      | 99         |
| A.1.1    | Mesure de $\gamma$ . . . . .   | 99         |
| A.1.2    | Mesure de $EI$ . . . . .   | 100        |
| A.2      | Evaluation de $L_{ec}$ par la méthode de la boucle . . . . .                       | 102        |
| <b>B</b> | <b>Publications</b>  | <b>105</b> |
| B.1      | Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact . . . . . | 105        |
| B.2      | Instabilities in a drop-strip system : a simplified model . . . . .                | 111        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>133</b> |



## Notations

|          |       |                                  |
|----------|-------|----------------------------------|
| $g$      | ..... | Accélération de gravité          |
| $\rho$   | ..... | Masse volumique du fluide        |
| $\gamma$ | ..... | Tension de surface               |
| $\rho_s$ | ..... | Masse volumique du solide        |
| $E$      | ..... | Module de Young                  |
| $I$      | ..... | Moment quadratique d'une section |
| $L_{gc}$ | ..... | Longueur gravito-capillaire      |
| $L_{eg}$ | ..... | Longueur élasto-gravitaire       |
| $L_{ec}$ | ..... | Longueur élasto-capillaire       |
| $L_{eh}$ | ..... | Longueur élasto-hydrostatique    |



## 1.1 Les fondements de l'élasto-capillarité

Dans ce chapitre introductif, nous illustrons les idées qui sont à la base de l'interaction élasto-capillaire. Nous commençons par présenter séparément les deux ingrédients essentiels de ce travail, la capillarité et l'élasticité, et nous traçons ensuite les premiers éléments d'interaction élasto-capillaire, avec un aperçu des activités de recherche.

### 1.1.1 La tension de surface

Un film de savon, une goutte de pluie qui ruisselle sur la vitre, le blanc d'œuf monté en neige, une bulle d'air qui remonte à la surface d'un liquide... Tous ces phénomènes ont un point en commun : leur forme est sculptée par l'effet de la tension de surface.

La tension de surface (ou force capillaire) est la manifestation macroscopique de la force cohésive de la matière à l'état liquide. La force cohésive s'exerce à l'échelle atomique, par attraction entre molécules. A l'interface avec une autre phase (qu'elle soit solide, gazeuse ou un autre liquide), l'attraction subie par les molécules n'est pas la même que celle qui s'exerce sur les molécules à l'intérieur du volume. Il en résulte que toute interface se comporte comme si elle était mise sous tension, à l'égal d'une peau de tambour. L'intensité de cette tension, par unité de longueur, est notée  $\gamma$  : c'est la tension de surface.

Les recherches sur la capillarité sont relativement récentes. D'abord perçue comme une anomalie dans la formulation de la mécanique classique (voir, par exemple, la *query* 31 parmi les questions ouvertes laissées par Isaac Newton dans *Optiks* (Newton, 1704)), la capillarité a été l'objet des travaux précurseurs de James Jurin et Francis Hauksbee, qui ont observé la montée d'un liquide entre deux parois solides, ou dans des tubes de faible diamètre.

C'est seulement au début du XIX<sup>e</sup> siècle, avec le travail de Thomas Young et de Pierre Simon de Laplace, que se mettent en place une compréhension plus complète et le formalisme mathématique nécessaire pour décrire les phénomènes capillaires (Pomeau & Villermaux, 2006).

Young en particulier s'est intéressé aux phénomènes capillaires lors de l'interaction entre les différents états de la matière. On lui doit les premières recherches sur le problème d'un liquide en contact avec une surface solide et de l'angle de contact, comme on verra plus avant.

De son côté, Laplace a expliqué en premier la relation qui existe entre la géométrie d'une interface liquide et la contrainte qu'elle engendre, qui se traduit par la loi qui porte son nom :



plus grande que les deux autres. On peut associer à ces structures le formalisme mathématique des courbes élastiques. Ce formalisme doit ses origines à l'application du calcul différentiel et variationnel au problème élastique, application faite par Jacob et Daniel Bernoulli, et surtout par Leonard Euler (Timoshenko, 1983).

Le problème de l'*Elastica*, considéré par Euler, consiste à trouver la courbe de longueur donnée qui, par rapport à un chargement extérieur, minimise le carré de la courbure totale. Minimiser le carré de la courbure totale équivaut à minimiser l'énergie élastique de flexion, qui pour une tige de section constante et d'état naturel droit s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}B \int_0^L \kappa^2(s) ds$$

avec  $B$  le module de rigidité en flexion,  $L$  la longueur de la tige et  $s$  l'abscisse curviligne le long de la tige. Euler a été le premier à trouver l'équation différentielle qui régit la forme d'une telle courbe. Dans le cas d'une tige soumise à une charge de compression axiale  $P$ , cette équation s'écrit :

$$B\theta''(s) = -P \sin \theta(s) \quad (1.3)$$

avec  $\theta$  l'angle entre la tige et l'horizontale. Les solutions trouvées par Euler sont montrées dans la figure 1.2.

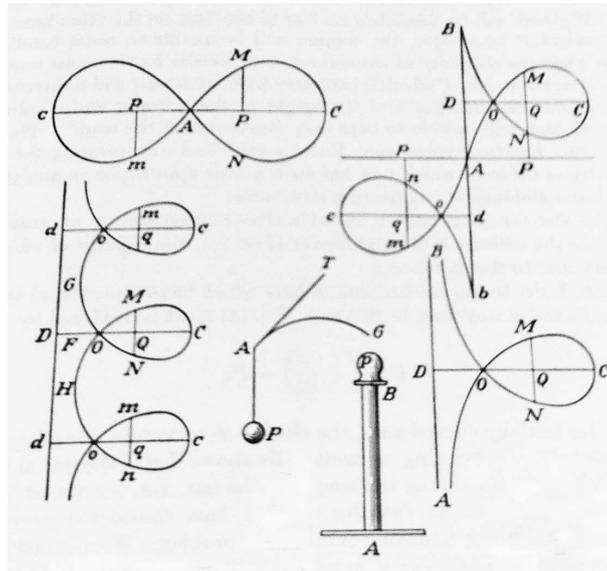


FIGURE 1.2: Illustration réalisée par Euler des déformées possibles d'une tige élastique soumise à une charge de compression axiale. L'image est prise de Timoshenko (1983).

Il est utile de s'interroger sur le problème d'une tige élastique déformée sous l'action de son propre poids. Exactement comme dans le paragraphe précédent, on peut introduire une longueur caractéristique qui définit le rapport de force entre élasticité et gravité, la *longueur élasto-gravitaire* :

$$L_{eg} := \left( \frac{B}{\rho_s S g} \right)^{1/3} \quad (1.4)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique de la tige et  $S$  l'aire d'une section droite. Si la longueur de la tige

est inférieure à  $L_{eg}$ , il est légitime de considérer négligeable la déformation élastique engendrée sur la tige par la gravité.

## 1.2 L'interaction élasto-capillaire

### 1.2.1 Déformer un solide avec une goutte

Une goutte d'eau est posée sur une surface solide parfaitement lisse. Sa dimension typique est plus petite que la longueur gravito-capillaire,  $L_{gc}$  : elle a donc la forme d'une calotte sphérique (de Gennes *et al.*, 2002). Souvent, dans les ouvrages d'introduction aux phénomènes capillaires, l'attention se focalise sur la ligne triple, là où les trois phases de la matière (solide, liquide et gazeuse) sont en contact. En tout point de la ligne triple, trois différentes tensions de surfaces agissent (figure 1.3). Un bilan des composantes horizontales des forces permet d'écrire :

$$\gamma_{sl} - \gamma_{sv} + \gamma \cos \theta = 0 \quad (1.5)$$

avec  $\gamma_{sl}$ ,  $\gamma_{sv}$  et  $\gamma = \gamma_{lv}$  les tensions de surface entre liquide et solide, solide et vapeur, et liquide et vapeur, respectivement. Cette construction a été proposée pour la première fois par Thomas Young (Young, 1805), et permet de déduire la valeur de l'angle de contact entre liquide et solide,  $\theta$ .

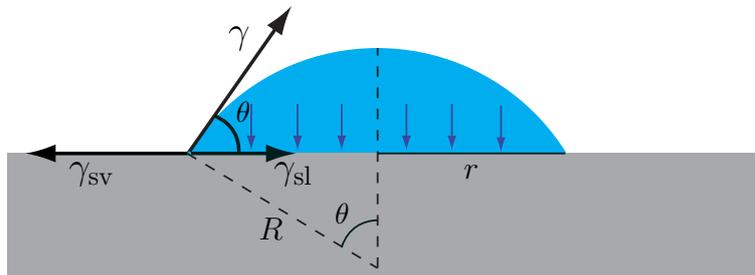


FIGURE 1.3: Schématisation d'une goutte en calotte sphérique posée sur une surface horizontale.  $\gamma_{sl}$ ,  $\gamma_{sv}$  et  $\gamma$  sont les tensions de surface entre liquide et solide, solide et vapeur, et liquide et vapeur, respectivement.  $\theta$  est l'angle de contact entre le liquide et le solide,  $R$  le rayon de courbure de l'interface liquide-air et  $2\pi r$  la longueur de la ligne de contact.

Souvent, aucune autre considération n'est faite sur le schéma de la figure 1.3. Pourtant, un regard attentif peut faire surgir une question : qu'en est-il de la composante verticale de la tension de surface ?

Faisons un pas un arrière, et cherchons à savoir quelle est la force que l'ensemble de la goutte exerce sur le solide. Dans le bilan global des forces, il faut tenir compte non seulement de la tension de surface  $\gamma$ , mais aussi de la surpression de Laplace à l'intérieur de la goutte. La goutte est une calotte sphérique, de rayon  $r$  et de courbure  $1/R$ . La courbure et le rayon sont liés par la relation  $1/R = \sin \theta / r$ , avec  $\theta$  l'angle de contact. La surpression dans la goutte, qui vaut  $2\gamma/R$ , une fois intégrée sur la surface  $\pi r^2$  donne une force verticale et dirigée vers le bas  $2\pi\gamma r \sin \theta$ . Cette force compense exactement l'action de la tension de surface  $\gamma \sin \theta$  (verticale et dirigée vers le haut) intégrée sur le périmètre  $2\pi r$ .

La résultante des forces exercées par la goutte sur le solide est donc nulle. Néanmoins, la présence de la goutte induit des déformations sur le solide.

Dans le cas d'un solide épais, la composante verticale de la tension de surface est localement compensée par une déformation élastique (Lester, 1961; Fortes, 1984). La force verticale  $\gamma \sin \theta$  engendre une contrainte  $E \delta$ , avec  $\delta$  le déplacement vertical subit par le solide et  $E$  son module d'élasticité. La taille typique du déplacement induit par la force capillaire est donc :

$$\delta \sim \frac{\gamma}{E} \quad (1.6)$$

Dans le cas d'une goutte d'eau ( $\gamma \simeq 70$  mN/m) posée sur une surface de verre ( $E \simeq 70$  GPa), ce déplacement est de l'ordre de  $10^{-12}$  m. Il est tout à fait légitime de le négliger dans une approche de milieu continu. Le déplacement devient de l'ordre du micron ( $10^{-6}$  m) et donc observable quand le substrat est très mou, comme c'est le cas de certains élastomères (Mora *et al.*, 2010).

Même si dans le cadre de cette thèse on travaille avec des élastomères à faible module d'élasticité, ce n'est pas la déformation localisée autour de la ligne de contact d'un solide massif qui nous intéresse. Dans ce manuscrit on se focalise sur un autre type de déformation induite par la tension de surface : la flexion d'une structure élancée.

On peut en effet remarquer que la distribution des forces (tension de surface et surpression de Laplace, figure 1.3) induit un moment de flexion sur le solide. Si le solide n'est pas épais, mais qu'il s'agit d'une tige de faible épaisseur, on peut facilement imaginer une flexion de toute la structure, et plus seulement une déformation localisée autour de la ligne de contact.

### 1.2.2 La longueur élasto-capillaire

La force capillaire peut être responsable d'une déformation de flexion d'une tige. Pourtant, l'intuition nous suggère qu'une lamelle métallique d'épaisseur millimétrique ne se laisse pas déformer par une goutte d'eau. Pour que la force capillaire puisse déformer une tige élastique, il faut que cette dernière soit suffisamment flexible.

Il est possible de quantifier la flexibilité nécessaire pour que la déformation ait lieu avec un argument énergétique simple (Neukirch *et al.*, 2007; Roman & Bico, 2010). Considérons une tige élastique (figure 1.4) de longueur  $2\pi R$ , avec une section rectangulaire d'épaisseur  $e$  et largeur  $w$ ; le module de rigidité en flexion est  $B = EI$ , avec  $E$  le module de Young et  $I$  le moment quadratique de la section. La tige est en contact avec un cylindre rigide, de rayon  $R$  et hauteur  $w$ , entièrement couvert d'un liquide de tension de surface  $\gamma$ .

Que se passe-t-il quand la tige entre en contact avec le cylindre ? Deux scénarios sont possibles : dans le premier, la tige est rigide et ne se déforme pas (figure 1.4-a). L'énergie du système correspond à l'énergie de surface libre  $\mathcal{E}_\gamma \sim \gamma R w$ . Dans le deuxième scénario, la tige est très flexible et se déforme pour recouvrir entièrement la surface mouillée du cylindre (figure 1.4-b). La surface libre a été éliminée, mais cela a un coût élastique : l'énergie de flexion est  $\mathcal{E}_e \sim \frac{EI}{R^2} R$ . La figure 1.5 montre, en fonction de  $R$ , l'énergie du système dans les deux cas. Tant que  $R$  est petit, le minimum d'énergie est donné par  $\mathcal{E}_\gamma$  (la tige reste droite), alors que pour de grands  $R$  le minimum correspond à  $\mathcal{E}_e$  (la tige recouvre le cylindre).

De la comparaison des deux énergies on peut extraire la taille du cylindre qui est à la limite des deux scénarios :  $R = \sqrt{EI/\gamma w}$ . Cette longueur caractéristique est appelée *longueur élasto-*

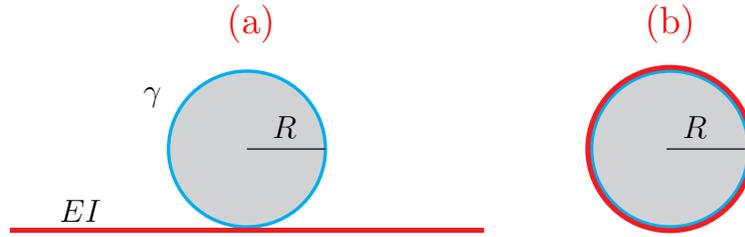


FIGURE 1.4: Deux scénarios possibles d'une tige, de longueur  $2\pi R$  et module de rigidité  $EI$ , en contact avec un cylindre de rayon  $R$  entouré d'un liquide de tension de surface  $\gamma$ . (a) : la tige reste droite, l'énergie du système est purement capillaire et vaut  $\mathcal{E}_\gamma \sim \gamma R w$ . (b) : la tige recouvre entièrement la surface du cylindre, l'énergie du système est purement élastique et vaut  $\mathcal{E}_e \sim \frac{EI}{R^2} R$ .

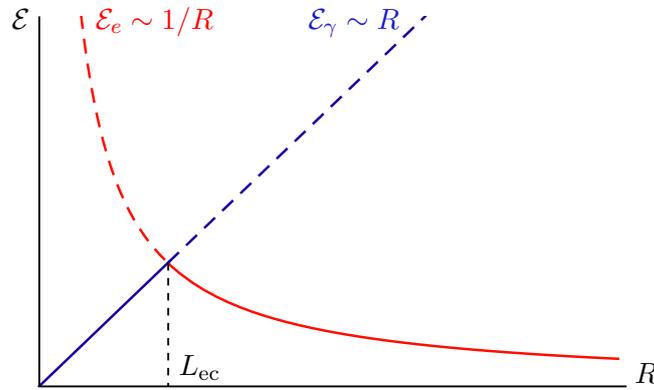


FIGURE 1.5: Courbes de l'énergie du système montré en figure 1.4 en fonction de  $R$ . L'énergie du système ouvert (figure 1.4-a) correspond à l'énergie de surface  $\mathcal{E}_\gamma \sim \gamma R w$  (courbe bleue), l'énergie du système fermé (figure 1.4-b) correspond à l'énergie élastique  $\mathcal{E}_e \sim \frac{EI}{R^2} R$  (courbe rouge). La courbe continue représente la courbe du minimum d'énergie. L'intersection entre les deux courbes a lieu pour  $R = L_{ec} = \sqrt{EI/\gamma w}$ .

capillaire :

$$L_{ec} = \sqrt{\frac{EI}{\gamma w}} \quad (1.7)$$

Un système dont la dimension typique est supérieure à la longueur élasto-capillaire est susceptible d'être déformé par la tension de surface. Au contraire, un système de taille inférieure à  $L_{ec}$  se comporte de façon plutôt rigide vis-à-vis de la force capillaire.

Pour une tige d'épaisseur  $e$  le moment quadratique est  $I \sim e^3$ , par conséquent  $L_{ec} \sim e^{3/2}$ . Cette loi d'échelle montre que la longueur élasto-capillaire décroît plus rapidement que l'épaisseur : la miniaturisation du système favorise alors le repliement élasto-capillaire.

### 1.2.3 Applications et enjeux

Les interactions élasto-capillaires se manifestent dans des contextes divers et variés. Parfois, les phénomènes d'interactions élasto-capillaires sont visibles à l'œil nu, parfois ils nécessitent de techniques d'acquisition sophistiquées (microscopes pour accéder aux échelles submillimétriques, ou outils d'imagerie rapide pour saisir les événements à très courte durée). Dans

les premières études, et surtout dans le contexte technologique, l'interaction élasto-capillaire était vue comme un phénomène parasite, à éviter à tout prix en tant que cause d'endommagement des structures sensibles (Mastrangelo & Hsu, 1993). Ce n'est que plus récemment que des études ont élargi le domaine d'application de ces interactions, et fait apparaître leur rôle constructif (Syms *et al.*, 2003; Roman & Bico, 2010).

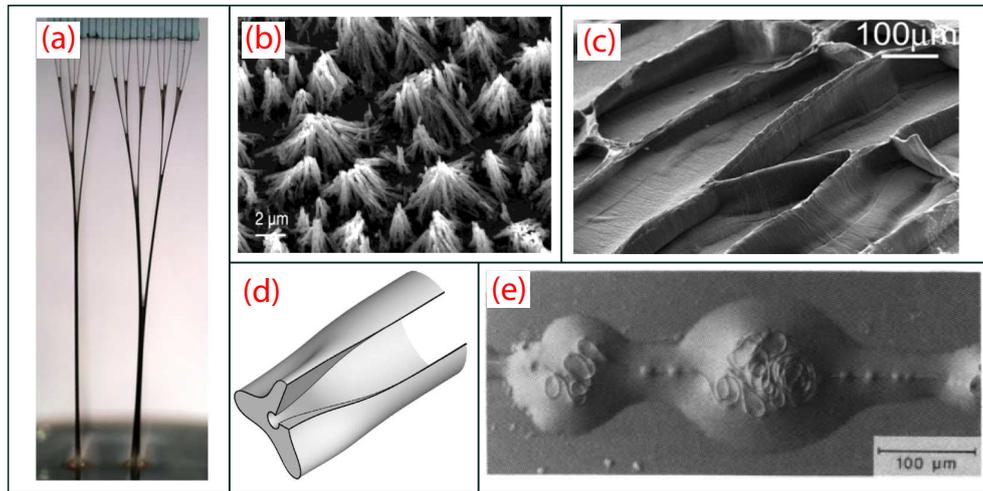


FIGURE 1.6: Exemples d'interactions élasto-capillaires : (a) cheveux mouillés à la sortie d'un bain liquide (Bico *et al.*, 2004); (b) et (c) déformation de nanotubes de carbones par flambage élasto-capillaire (Chakrapani *et al.*, 2004; Lau *et al.*, 2003); (d) simulation numérique de l'occlusion d'une voie respiratoire par instabilité élasto-capillaire (White & Heil, 2005); (e) accumulation du fil de toile d'araignée à l'intérieur de gouttelettes par effet capillaire (Vollrath & Edmonds, 1989).

La forme des cheveux mouillés qui se plient pour former des touffes (Bico *et al.*, 2004), ou encore les poils d'un pinceau à la sortie d'un pot de peinture (figure 1.6-a) sont des exemples d'interactions élasto-capillaire du quotidien. Les formes d'équilibre d'un fil élastique qui soutient un film de savon sont aussi gouvernées par une interaction élasto-capillaire (Giomi & Mahadevan, 2012).

La montée capillaire, régie par la loi de Jurin quand la conduite est rigide, réserve des surprises quand les parois du canal sont flexibles. La dépression qui existe dans le liquide par rapport à l'extérieur peut en effet induire une déformation des parois. On observe en particulier une diminution de la section du conduit, ce qui entraîne le liquide encore plus haut que ce qu'on pourrait prévoir avec une analyse classique (Kim & Mahadevan, 2006). Il en est de même pour un liquide qui imbibe un canal horizontal (Aristoff *et al.*, 2011). Parfois, la déformation des parois élastiques est telle qu'elle bouche le conduit : c'est le cas de certains système *lab-on-a-chip* avec des murs flexibles, ou de nanotubes de carbone creux et remplis de liquide (van Honschoten *et al.*, 2007; Yang *et al.*, 2010). Ce phénomène peut aussi se produire dans les voies respiratoires (White & Heil, 2005), quand la tension de surface du mucus, qui couvre les parois des bronches, forme des ponts capillaires qui obstruent le trajet de l'air (figure 1.6-d).

Dans certaines structures élancées, la déformation est la conséquence d'un flambage de poutre, sous l'action de la tension de surface, lorsque la structure cherche à percer une interface liquide (Neukirch *et al.*, 2007). C'est le cas, par exemple, d'une protéine qui croît dans une vésicule lipidique quand sa longueur excède la taille du conteneur (Cohen & Mahadevan, 2003).

On l’observe aussi, et avec un effet destructeur, sur des surfaces nanotexturées immergées dans un bain liquide qui s’évapore (Lau *et al.*, 2003; Chakrapani *et al.*, 2004) : au moment du contact avec l’interface liquide, le flambage des nanostructures détruit la distribution ordonnée en forêt et conduit à la formation d’amas de nanotubes, en forme de réseaux cellulaires ou de tente conique (figure 1.6-b-c).

L’interaction élasto-capillaire est astucieusement employée par les araignées dans la construction des toiles (Vollrath & Edmonds, 1989). Un film de liquide visqueux est déposé par l’araignée sur la soie qui constitue la toile, et ce film peut se déstabiliser en petites gouttelettes (instabilité de Rayleigh-Plateau). Lorsque la toile est mise sous tension et rapidement relâchée, par exemple après l’impact d’un insecte, on observe une accumulation du fil à l’intérieur des gouttelettes (figure 1.6-e). Cette réserve de fil stocké dans les gouttes permet à la toile d’amortir plus facilement les chocs qu’elle peut subir.

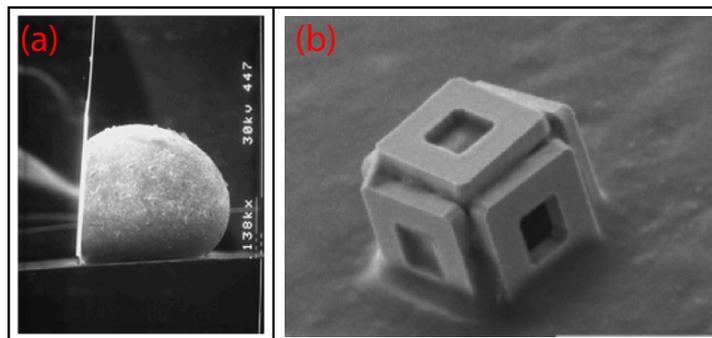


FIGURE 1.7: Deux exemples de repliement de microstructures par action capillaire d’une goutte : (a) entre deux barres rigides et (b) pour former un cube (Syms *et al.*, 2003; Leong *et al.*, 2007).

Bien que néfaste dans son action sur certains nano-systèmes, la force capillaire se révèle en revanche utile pour l’assemblage de micro- et nano-structures. La tension de surface peut être employée dans les processus d’assemblage d’objets rigides : Bowden *et al.* (1999), par exemple, montrent que l’interaction capillaire permet l’assemblage d’objets plats et hexagonaux qui flottent à la surface d’un liquide. Lewandowski *et al.* (2009) et Cavallaro *et al.* (2011) généralisent le processus aux objets de forme plus complexe, avec ou sans symétrie.

Mais la tension de surface permet aussi de plier une structure plane pour créer une forme tridimensionnelle, ce qui s’avère crucial dans la fabrication de systèmes électro-mécaniques à l’échelle microscopique (MEMS). Très souvent, dans les procédés de fabrication, on dispose d’une structure 2D, obtenue par lithographie, qu’on souhaite plier le long de charnières. Parmi les différentes techniques de repliement (*self-folding*, voir Boncheva *et al.* (2003) et Mastrangeli *et al.* (2009) pour une perspective globale), il est possible d’utiliser la tension de surface d’une goutte. Cette technique consiste à déposer une portion de matériel de soudage sur la charnière. Le matériel est fondu, de sorte à ce que la tension de surface de la goutte qui se crée vienne plier les surfaces à proximité de la charnière. Une fois la rotation réalisée, la goutte est à nouveau solidifiée, ce qui permet de bloquer la structure dans la forme 3D désirée (figure 1.7-a) (Gracias *et al.*, 2002; Syms *et al.*, 2003). Leong *et al.* (2007) ont montré que cette technique permet de créer des polyèdres de forme bien contrôlée, de taille micrométrique ou millimétrique (figure 1.7-b).

Le repliement à l’aide des charnières et du soudage reste une technique qui nécessite des outils

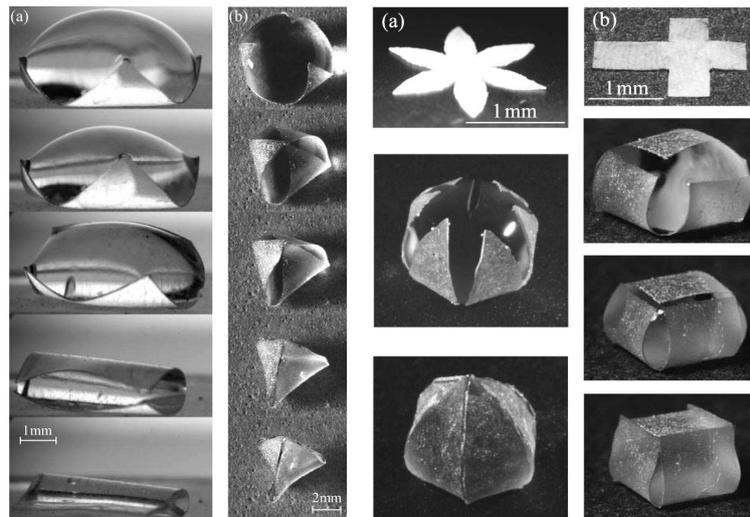


FIGURE 1.8: Repliement capillaire de membranes élastiques lors de l'évaporation d'une goutte. La configuration finale de l'*origami* ainsi formé dépend de la forme initiale du patron (Py *et al.*, 2007).

technologiques très avancés. Pourtant, l'action de la tension de surface d'une goutte peut être employée pour replier une feuille élastique qui ne présente aucune articulation prédéfinie. Cela est illustré de manière élégante dans les origami capillaires<sup>2</sup> de Py *et al.* (2007). Une goutte d'eau de taille millimétrique est posée sur une fine membrane de polymère de forme bien définie. Lors de l'évaporation, la tension de surface de la goutte induit une flexion de la membrane, qui se plie hors du plan jusqu'à enrober entièrement la goutte. Selon la géométrie de la membrane, on peut obtenir des formes finales cubiques, pyramidales ou bien d'autre nature (figure 1.8). Guo *et al.* (2009) ont employé le principe de l'origami capillaire pour former des cellules photovoltaïques 3D à partir de feuilles de silicone. Récemment, Pineirua *et al.* (2010) ont montré une technique qui permet de rendre réversible le processus de repliement, à l'aide d'un champ électrique qui traverse la goutte.

Une autre classe d'interactions élasto-capillaires est constituée par le problème d'une plaque élastique qui se trouve à la surface d'un liquide. Ici, la tension de surface ne joue pas forcément le rôle de protagoniste de la déformation, car la pression hydrostatique du liquide peut être l'effet dominant. On en a un exemple dans le problème de compression axiale d'une plaque à la surface de l'eau, qui conduit à la formation de rides ou même d'un véritable pli (Cerda & Mahadevan, 2003; Pocivavsek *et al.*, 2008). On reviendra plus tard, dans ce manuscrit (chapitre 4), sur un panorama plus complet de ce genre de problèmes.

Dans tous les problèmes ici mentionnés, l'interaction élasto-capillaire a été traitée de manière statique, en cherchant les formes d'équilibre du système. Très peu d'études concernent la dynamique élasto-capillaire. Récemment, X. Noblin et collaborateurs se sont intéressés aux mécanismes d'émission des spores dans les plantes, mécanismes qui sont essentiellement dynamiques. Chez les *Filicophytes* (fougères), il a été mis en évidence (Noblin *et al.*, 2012) l'existence d'une technique basée sur la courbure naturelle des sporanges et sur la déformation engendrée par l'évaporation de l'eau (contenue dans une rangée de cellules ancrées aux sporanges). L'émis-

2. origami est le nom japonais de l'art du pliage du papier.

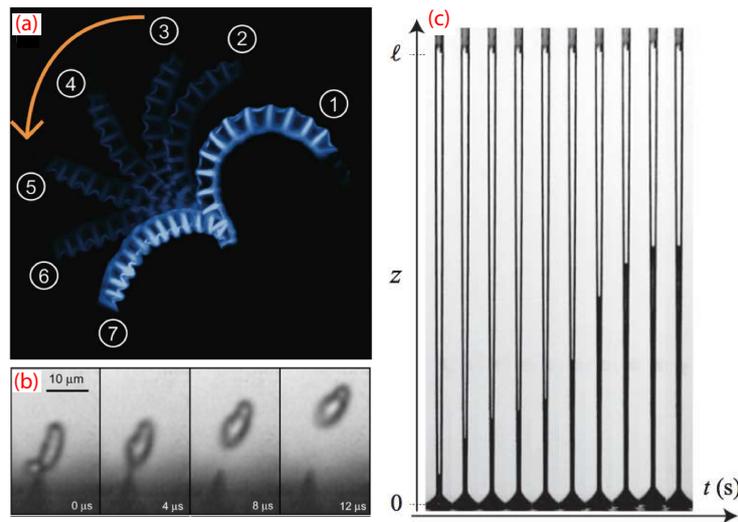


FIGURE 1.9: Trois exemples de dynamique élasto-capillaire : (a) émission de spores de *Filicophytes* par un mécanisme de catapulte élasto-capillaire (Noblin *et al.*, 2012) ; (b) émission de spores de *Auricularia auricula* par un mécanisme de coalescence d'une gouttelette d'eau et du film liquide sur la spore (Noblin *et al.*, 2009) ; (c) dynamique de la montée capillaire entre deux parois élastiques (Duprat *et al.*, 2011).

sion des spores se fait lorsque la cavitation apparaît dans l'eau et que le sporange retrouve sa forme naturelle par un mouvement très rapide de catapulte élasto-capillaire, qui projette les spores loin de la plante (figure 1.9-a). On note également l'émission des spores chez certains champignons (*Auricularia auricula*), qui se fait à travers la conversion de l'énergie de surface en énergie cinétique lors de la coalescence d'une gouttelette d'eau et d'un film liquide sur la spore (Noblin *et al.*, 2009). L'élasticité du support de la spore permet au système goutte-spore de "sauter" loin du champignon (figure 1.9-b).

Dans un autre contexte, le groupe de H. Stone s'est intéressé à l'étude, théorique et expérimentale, de la dynamique de la montée capillaire entre deux parois élastiques (figure 1.9-c), et de la dynamique d'imbibition d'un canal élastique horizontal (Aristoff *et al.*, 2011; Duprat *et al.*, 2011).

Dans les chapitres suivants, nous présenterons un nouvel exemple de dynamique élasto-capillaire, jamais étudié jusqu'à présent : le problème de repliement dynamique d'une membrane élastique à travers l'impact d'une goutte sur la membrane.

## Origami capillaires dynamiques

### 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a vu que le repliement d'une structure 2D vers une forme 3D constitue un objectif majeur dans tous les processus de micro- et nano-fabrication (Mastrangeli *et al.*, 2009). Le repliement obtenu par le biais de la tension de surface d'une goutte est une technique déjà connue et exploitée (Syms *et al.*, 2003), qui a récemment été utilisée pour replier des membranes élastiques de dimension millimétrique (Py *et al.*, 2007; Guo *et al.*, 2009). Ce type de repliement se fait lors de l'évaporation de la goutte, ce qui nécessite plusieurs minutes.

Dans ce chapitre nous montrons des expériences de repliement élasto-capillaire dynamique. Ce repliement est obtenu grâce à l'impact de la goutte sur la membrane, et le temps nécessaire pour l'observer est de quelques dixièmes de seconde.

L'impact de goutte est un problème très étudié en mécanique des fluides, dont une compréhension exhaustive est loin d'être atteinte. En effet, la richesse de phénomènes physiques présents dans le problème d'impact en fait une sorte de petit laboratoire-modèle de la mécanique des fluides, avec des questions encore ouvertes : interaction avec le gaz ambiant, rôle des couches limites visqueuses, dynamique du splash, formation de singularités, ... (Xu *et al.*, 2005; Bartolo *et al.*, 2006; Eggers *et al.*, 2010). Au-delà des aspects fondamentaux, la problématique des impacts de goutte trouve son application dans de nombreux procédés industriels, comme par exemple le dépôt de pesticides ou l'impression par jet d'encre (de Gans *et al.*, 2004). L'impact est généralement étudié sur une surface solide ou sur un bain liquide (Rein, 1993; Yarin, 2006). Très peu d'études s'intéressent à l'impact sur un solide mou, et se limitent à de petites déformations du solide (Pepper *et al.*, 2008).

Ici, nous verrons que les déformations du solide causées par l'impact sont très importantes, et peuvent amener à la fermeture de la membrane autour de la goutte. Dans la section 2.2 on présente le dispositif expérimental utilisé. On propose d'abord une réalisation complètement tridimensionnelle de l'expérience (section 2.3), et ensuite on introduit une expérience-modèle simplifiée (section 2.4). Suivront des considérations expérimentales (section 2.5), et seront la base de la modélisation décrite au prochain chapitre.

## 2.2 Le dispositif expérimental

### 2.2.1 La mise en place de l'expérience

L'expérience présentée dans tout le chapitre consiste en l'impact de goutte sur une membrane élastique (figure 2.1). La membrane élastique est posée sur une plaque de cuivre superhydrophobe (voir paragraphe consacré), qui à son tour est posée sur une table optique Thorlabs.

On utilise des gouttes d'eau, de tension de surface  $\gamma$  et de masse volumique  $\rho$ . Les gouttes sont produites par une seringue placée au-dessus de la membrane élastique, et accrochée via une pince et une barre métallique à la table optique. On peut changer la hauteur de la seringue par rapport à la table, ce qui permet de faire varier la vitesse de chute de la goutte. On dispose d'une vaste gamme d'aiguilles de la seringue, chacune avec un diamètre différent, et on peut donc changer la taille de la goutte qui est produite. On remarque qu'on ne peut pas choisir précisément le diamètre de la goutte, mais seulement mesurer la taille de la goutte qui correspond à une aiguille donnée.

On utilise des membranes élastiques en polymère, de module élastique  $E$  et d'épaisseur  $e$  (voir paragraphe suivant). La forme des membranes est variable et dépend du type de problème qu'on souhaite étudier.

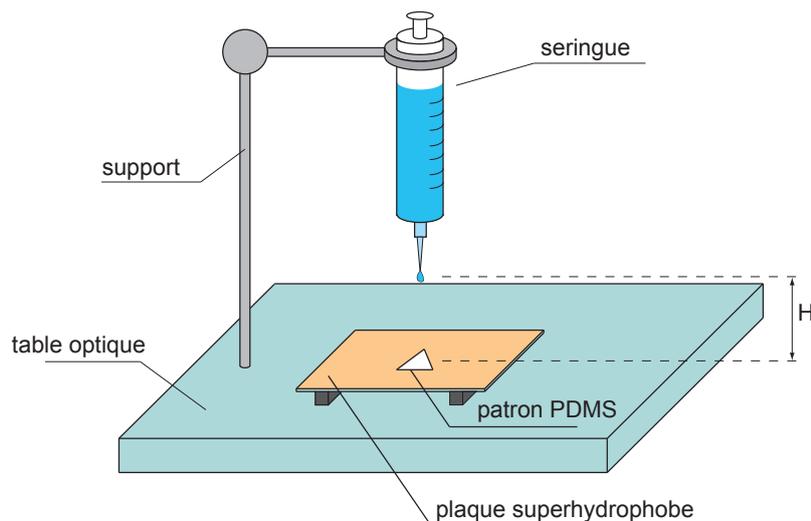


FIGURE 2.1: Schématisation du dispositif expérimental employé dans l'expérience d'origami capillaire. Une goutte d'eau est lâchée d'une seringue à une hauteur  $H$  par rapport au patron de polymère visé.

### 2.2.2 Le polymère

Pour avoir des membranes élastiques suffisamment souples, on les a fabriquées à partir d'un film très fin de polymère. Le choix retenu a été le polydiméthylsiloxane, un élastomère de la famille des silicones. Sa molécule, de formule  $(C_2H_6OSi)_n$ , est une chaîne de silicium et d'oxygène. Le polydiméthylsiloxane (PDMS) a l'avantage d'être non toxique, inerte et non inflammable.

Disponible à l'état liquide, le PDMS polymérise sous l'action d'un agent réticulant. Afin de fabriquer des membranes d'épaisseur contrôlée, on a suivi un protocole bien défini pour la fabrication de feuilles. Le PDMS utilisé est du RTV615 (fournisseur : General Electric). Le

polymère est étalé sur une lame de verre, de dimensions  $8 \times 6$  cm. La lame est ensuite posée dans un *spin-coater*, une sorte de centrifugeuse dont on contrôle avec précision la vitesse de rotation. Après une première étape de rotation à 500 tours/min pendant 10 s, la lame est mise en rotation à 1500 tours/min pendant 30 s. Entre les deux étapes, le changement de vitesse est obtenu avec une accélération angulaire de 100 tours/min/s. Le choix de la vitesse de rotation permet de contrôler finement l'épaisseur de la feuille de polymère. La relation entre vitesse de rotation et épaisseur de la feuille est donnée dans le tableau 2.1, et elle a été obtenue par mesure expérimentale au profilomètre mécanique effectuée dans le laboratoire Gulliver de l'ESPCI, à Paris. L'épaisseur de la feuille obtenue dans notre cas est de  $55 \mu\text{m}$ .

| $\Omega$ [tours/min] | $e$ (PDMS RTV) [ $\mu\text{m}$ ] | $e$ (PDMS Sylgard) [ $\mu\text{m}$ ] |
|----------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| 500                  | 153                              | -                                    |
| 750                  | 102                              | 96                                   |
| 1000                 | 80                               | 74                                   |
| 1500                 | 55                               | 38                                   |
| 2000                 | 41                               | 29                                   |

TABLE 2.1: Relation entre vitesse de *spin-coating* et épaisseur de la feuille de polymère, pour deux types de PDMS : RTV et Sylgard.

Tout de suite après, le film de PDMS est passé dans une cuve à  $70^\circ\text{C}$  pendant une heure. Il est ensuite détaché de la lame de verre. A l'aide d'un scalpel, on coupe sur la feuille la forme géométrique désirée pour la membrane.

La mesure des longueurs caractéristiques de notre film de PDMS,  $L_{eg}$  et  $L_{ec}$ , est détaillée en annexe A.

Pour finir, on pose une fine couche de talc sur les deux côtés de chaque membrane. Ce processus est nécessaire car le PDMS tout juste détaché de la lame de verre colle très facilement contre n'importe quelle surface. Ce phénomène d'adhésion est très négatif pour notre application, car il cause un frottement très important de la membrane sur le support, gênant tout processus de repliement. Il faut remarquer que la présence du talc modifie de manière substantielle les propriétés de mouillages du PDMS, comme on verra plus avant dans ce chapitre.

### 2.2.3 Le support superhydrophobe

Afin d'éviter le débordement de l'eau au delà de la membrane élastique, on pose cette membrane sur un support superhydrophobe. En contact avec ce support, l'eau recule très rapidement et reste confinée sur la membrane.

Le support superhydrophobe employé est constitué d'une plaque de cuivre, sur laquelle on dépose deux couches successives : une couche de nitrate d'argent qui permet d'ancrer ensuite une couche de thiol. Le thiol est un composé organique constitué d'un groupement  $-\text{SH}$  (groupement sulfhydryle) attaché à une chaîne d'atomes de carbone. C'est le thiol qui confère à la surface de cuivre son caractère superhydrophobe (Larmour *et al.*, 2007).

Encore une fois, on suit un procédé bien contrôlé pour réaliser ce type de support. Après avoir frotté la surface du cuivre avec du papier de verre (afin d'augmenter sa rugosité), on immerge la plaque dans une solution de 180 mg de nitrate d'argent solide ( $\text{AgNO}_3$ ) dans 100 mL d'eau, et on la laisse pendant 30 s. On rince la plaque avec de l'eau et on la laisse sécher (on envoie un

jet léger d'air comprimé pour accélérer l'évaporation de l'eau). A la sortie du bain, le cuivre a pris une coloration noire, signe que le nitrate d'argent s'est déposé sur la surface. A la suite de quoi, on immerge la plaque dans une solution de  $33\ \mu\text{L}$  de thiol en  $100\ \text{mL}$  d'éthanol, et on la laisse pendant 10 minutes. A la sortie, on la rince avec de l'éthanol et on la laisse sécher.

La surface ainsi créée présente de très bonnes propriétés hydrophobes : on peut observer un angle de contact proche de  $180^\circ$  et plusieurs rebonds complets d'une goutte d'eau après impact (Richard *et al.*, 2002). La plaque de cuivre étant rigide, elle présente aussi de bonnes propriétés mécaniques de restitution d'énergie cinétique lors de l'impact de goutte.

## 2.3 L'origami dynamique

### 2.3.1 Repliement

Lorsqu'une balle de tennis tombe par terre, son énergie cinétique est d'abord convertie en énergie élastique, et ensuite cette énergie élastique est relâchée et se transforme à nouveau (mais non intégralement, à cause de la dissipation) en énergie cinétique, ce qui se manifeste par un rebond de la balle. L'impact d'une goutte d'eau sur une surface hydrophobe est un phénomène analogue, même si plus complexe, avec la tension de surface qui joue le rôle de l'énergie élastique (Richard *et al.*, 2002)

La dynamique d'une goutte qui tombe sur une membrane élastique (de taille comparable à celle de la goutte) s'inscrit initialement dans le même registre. La figure 2.2 montre une séquence typique d'impact d'une goutte d'eau sur une membrane de PDMS de forme triangulaire. Après l'impact, la goutte s'étale sur la membrane et lors de ce processus l'énergie cinétique du liquide se transforme en énergie de surface. Durant la phase d'étalement on peut observer que l'élasticité de la membrane ne joue aucun rôle : la goutte atteint son étalement maximal sans qu'aucune déformation n'ait lieu.

Néanmoins, le comportement change dès que la tension de surface ramène à nouveau le liquide vers l'intérieur et la goutte s'apprête à rebondir. Au moment du rebond, la membrane reste en contact avec le liquide et rebondit avec la goutte. Cela est dû au fait que le PDMS est légèrement hydrophobe, mais pas hydrophobe au point de laisser l'eau glisser sur lui. On observe alors que lors du rebond la membrane élastique se déforme autour de la goutte jusqu'à donner lieu à une forme en tétraèdre. Cette forme est stable et reste inchangée quand le système retombe à nouveau sur la base. Il faut attendre l'évaporation complète du liquide pour que la membrane reprenne sa forme originale.

L'entière séquence étalement - encapsulation est complétée en 40 ms environ. Cette durée correspond à l'échelle de temps capillaire  $\tau_c = \sqrt{\rho R^3 / \gamma}$ . Ici  $R$  est le rayon de la goutte,  $\rho$  la masse volumique et  $\gamma$  la tension de surface de l'eau. Le temps capillaire est le temps typique d'une séquence étalement - rétractation lors de l'impact d'une goutte sur un support superhydrophobe (Richard *et al.*, 2002). Ce résultat suggère que le repliement est gouverné par l'inertie du liquide et par la force capillaire : la membrane est entraînée passivement par le rebond de la goutte et la force capillaire est responsable du repliement de la membrane.

### 2.3.2 Sélection de forme dynamique

On peut obtenir le repliement du patron triangulaire si la vitesse d'impact est plus grande qu'une valeur minimale (qui permet à la goutte de s'étaler suffisamment loin sur la membrane)

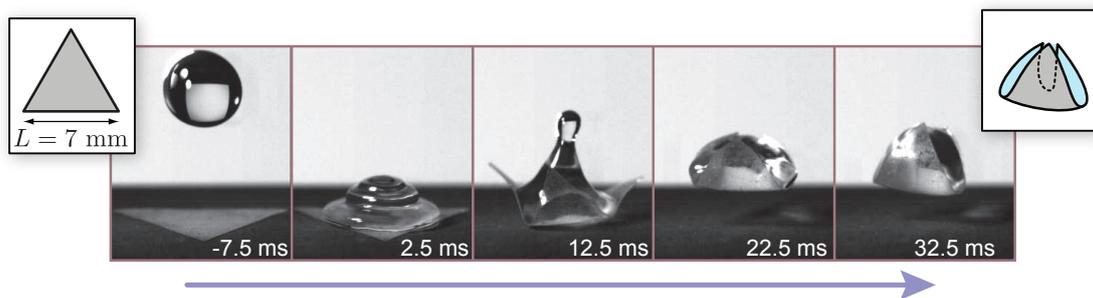


FIGURE 2.2: Repliement élasto-capillaire, obtenu à partir d'une goutte d'eau de rayon  $R = 1.57$  mm sur membrane triangulaire (côté 7 mm) d'épaisseur  $h = 55$   $\mu\text{m}$ . La vitesse d'impact est  $U = 0.53$  m/s.

et plus petite qu'une valeur maximale (qui fixe la limite du splash de la goutte). À l'intérieur de cet intervalle, le triangle se replie toujours en forme de tétraèdre. Néanmoins, il existe d'autres patrons pour lesquels la forme finale de repliement n'est pas uniquement fixée par la géométrie initiale.

La figure 2.3 montre un exemple intéressant de repliement d'un patron en forme de fleur à quatre pétales : dans le premier impact (cas *a*), la goutte engendre un repliement en forme de cylindre (les extrémités des pétales se touchent deux à deux). Dans le deuxième impact (cas *b*), la même goutte cause un repliement de la membrane en pyramide, avec les quatre extrémités qui se touchent au même point. La seule différence entre les deux impacts est la vitesse de la goutte : la goutte du cas *b* est animée d'une vitesse plus grande que celle du cas *a*. On a donc été capable de sélectionner la forme finale de l'origami par un simple changement de la vitesse d'impact, ce qui ne serait évidemment pas possible dans le cadre d'un repliement par évaporation du liquide.

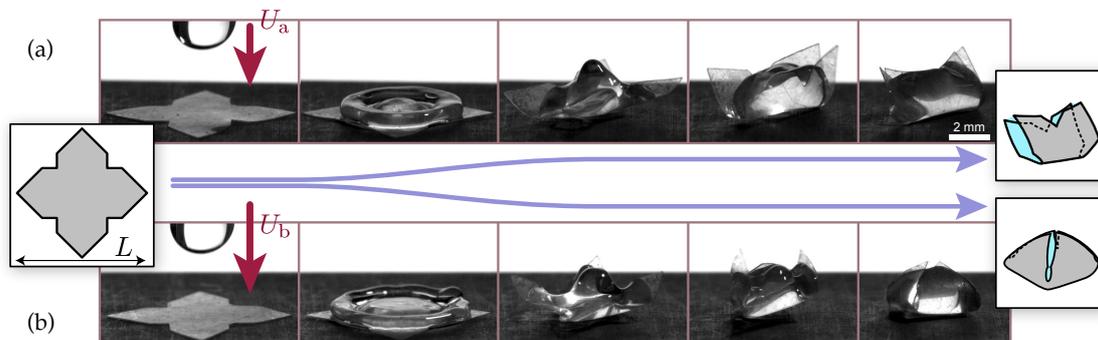


FIGURE 2.3: Impact d'une goutte d'eau sur un patron en forme de fleur. La structure 3D finale dépend de la vitesse d'impact. Ici, le rayon de la goutte est  $R = 1.55$  mm, avec  $U_b > U_a$ . (a) : À faible vitesse,  $U_a = 0.68$  m/s, la forme finale est cylindrique. (b) : À vitesse plus grande,  $U_b = 0.92$  m/s, toute la surface de la membrane est mouillée et la forme finale est pyramidale.

Les figures 2.2 et 2.3 ont donc montré qu'à travers un impact de goutte on peut déformer une membrane élastique jusqu'à observer un repliement complet de la membrane autour de la goutte, ce qui permet de réaliser une structure tridimensionnelle stable. L'apport de la dynamique, par rapport au repliement quasi-statique de *Py et al.* (2007), a permis d'obtenir un repliement de différents ordres de grandeur plus rapide. La dynamique permet aussi de sélectionner la forme finale de repliement d'un patron 2D qui présente une bistabilité des formes d'équilibre finales.

Ce problème de repliement dynamique demeure un problème assez complexe, avec un grand nombre de paramètres de contrôle. Du côté fluide, la réponse du système dépend de la taille de la goutte, de sa tension de surface, de sa masse, de sa vitesse d'impact. Du côté solide, le problème est gouverné par la dimension du patron, sa forme, son poids ainsi que son module de rigidité. De plus, dans le couplage fluide-structure, la réponse du système est très sensible au point d'impact de la goutte et à la portion de solide que la goutte arrive à explorer lors de l'étalement. Même en regroupant tous ces facteurs en un nombre plus raisonnable de paramètres sans dimension, il est très ambitieux d'effectuer une étude paramétrique complète de ce problème.

Un exemple simple peut donner la mesure de la difficulté qui existe à traiter le problème tridimensionnel de repliement. Si on souhaite replier un patron carré à travers l'évaporation d'une goutte, on observe que la membrane se déforme initialement de façon à soulever les quatre coins, comme pour former une pyramide. Pourtant, à un moment donné, ce chemin de déformation cède la place à un autre type de déformation : les coins du carré se touchent deux à deux et la forme finale de repliement est celle d'un cylindre (de Langre *et al.*, 2010). L'explication de ce processus est due au fait que pour obtenir une pyramide il est nécessaire de former un angle vif sur la membrane (Ben Amar & Pomeau, 1997; Cerda & Mahadevan, 1998). La présence de ces singularités rend la forme pyramidale très couteuse d'un point de vue énergétique, et donc inobservable dans les expériences. C'est donc une contrainte géométrique, intrinsèque à la forme carrée, qui sélectionne la forme finale de repliement.

Dans la prochaine section on propose une expérience modèle qui permet une meilleure compréhension de la dynamique de repliement et de la sélection de forme, sans avoir à affronter les difficultés liées aux aspects géométriques des formes de repliement.

## 2.4 Repliement d'une lamelle élastique

### 2.4.1 Gravité et bistabilité

On considère l'impact d'une goutte d'eau sur une structure plus simple que celles montrées plus haut : une lamelle élastique.

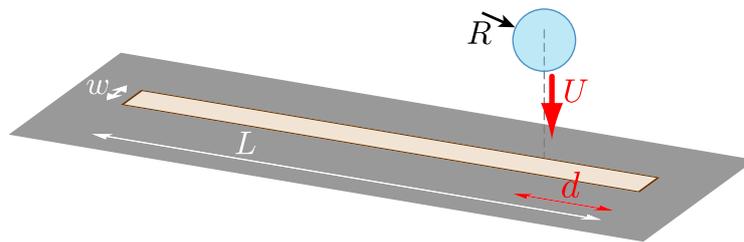


FIGURE 2.4: Schématisation de l'expérience d'impact de goutte sur une lamelle. La goutte a un rayon  $R$  et est animée d'une vitesse  $U$ . Elle tombe sur une lamelle rectangulaire, de longueur  $L$  et largeur  $w$ , à une distance  $d$  de l'extrémité droite.

Il s'agit d'un patron rectangulaire long et étroit, de dimensions  $L = 7$  cm et  $w = 2$  mm (figure 2.4). La goutte a un rayon  $R$  et une vitesse d'impact notée  $U$ . Elle tombe sur la lamelle à une distance  $d$  de l'extrémité droite.

Ce système goutte-lamelle, quoique simple, présente encore une bistabilité des formes finales d'équilibre, illustrée dans la figure 2.5. L'action de la tension de surface peut induire une légère déformation de la lamelle autour de la goutte sans qu'aucune des deux extrémités de la lamelle ne quitte le sol (2.5-*a*). Si à partir de cette configuration on accompagne la portion droite de lamelle, de longueur  $d$ , autour de la goutte de façon à l'enrober, on constate le phénomène suivant : dès que la portion droite de lamelle a touché la portion gauche le système atteint une autre configuration d'équilibre stable (2.5-*b*). Ces deux configurations d'équilibre sont séparées par une barrière d'énergie potentielle, due à la pesanteur de la lamelle. On appelle dans la suite la configuration (*a*) un "état non encapsulé" ou "ouvert", et la configuration (*b*) un "état encapsulé" ou "fermé".

Si on cherche à rouvrir une configuration encapsulée, on s'aperçoit que non seulement il faut fournir au système l'énergie nécessaire à passer la barrière d'énergie de gravité, mais il faut vaincre aussi la tension de surface, qui a tendance à garder le système fermé. Cette constatation expérimentale est due au fait que le rayon de la goutte a été choisi de manière à être plus grand que la longueur élasto-capillaire. Si on oublie pour un instant la gravité, on obtient alors que le système goutte-lamelle, comme il a été expliqué dans la définition de  $L_{ec}$ , minimise son énergie quand la lamelle est enrobée autour de la goutte (état fermé).



FIGURE 2.5: Deux configurations finales d'équilibre : (*a*) la lamelle est légèrement déformée, son extrémité libre repose sur le sol, le système est ouvert (non encapsulé) ; (*b*) la lamelle enrobe complètement la goutte, son extrémité libre est passée à gauche de la goutte, le système est fermé (encapsulé).

Etant donné que dans l'état fermé, tout comme dans l'état ouvert, l'énergie de gravité de la lamelle est presque nulle, on peut conclure que l'état d'équilibre qui correspond à une configuration encapsulée est le minimum global d'énergie potentielle du système. L'état non-encapsulé correspond seulement à un minimum local, qui est séparé du minimum global par une barrière d'énergie potentielle due à la gravité.

On cherche à utiliser cette bistabilité dans le problème d'impact de goutte. L'énergie cinétique que l'impact de la goutte transfère au système couplé goutte-lamelle pourrait permettre de passer la barrière d'énergie potentielle et d'atteindre la configuration fermée. On se demande si le seul changement de la vitesse d'impact permet de sélectionner la forme finale du système. On espère que l'énergie cinétique que l'impact de la goutte transfère au système couplé goutte-lamelle puisse permettre de passer la barrière d'énergie potentielle et d'atteindre la configuration fermée.

## 2.4.2 La dynamique de repliement

De tous les paramètres censés influencer la dynamique du système, on n'en retient que deux : la vitesse d'impact de la goutte  $U$  et la distance entre le point d'impact et l'extrémité droite de la lamelle  $d$ . On montre dans ce paragraphe les résultats expérimentaux en fonction de  $U$  et  $d$ . La taille de la goutte employée est  $R = 1.55$  mm, choisie de façon à ce que  $R > L_{ec}$ .

Dans toute la suite, on présente des expériences dans lesquelles la distance du point d'impact

de l'extrémité droite,  $d$ , est beaucoup plus petite que la distance de l'extrémité gauche,  $L - d$ . La système aura donc toujours tendance à replier le côté droit, qui est beaucoup plus léger que le côté gauche. La portion  $L - d$  de lamelle sera considérée dans la suite comme semi-infinie.

La figure 2.6 est constituée d'une séquence de six images montrant un repliement de la membrane autour de la goutte après l'impact. La vitesse d'impact de la goutte est  $U = 0.25$  m/s et la distance du bord est  $d = 8.73$  mm. On peut en particulier observer encore une fois un étalement de la goutte sur la lamelle (image 2), suivi d'un rebond du système couplé fluide-solide (images 3-4). Lors du rebond, la lamelle se déforme et enrobe la goutte (image 5) jusqu'à obtenir un état complètement encapsulé (dernière image).

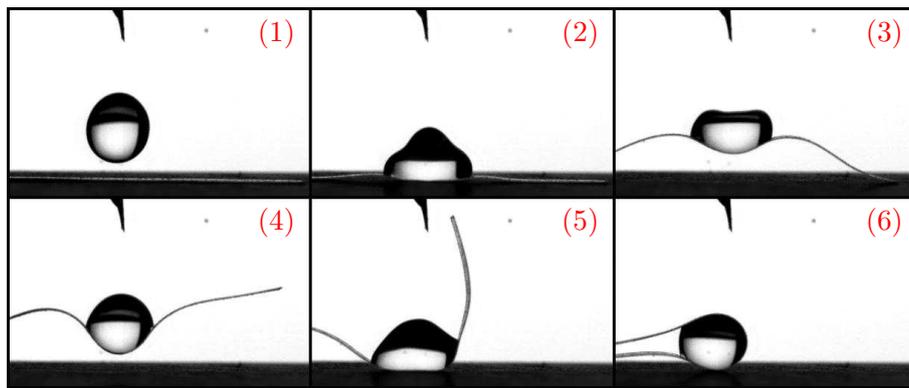


FIGURE 2.6: Séquence photographique expérimentale représentant une configuration finale fermée. La vitesse d'impact est  $U = 0.25$  m/s et la distance du bord  $d = 8.73$  mm. Les images sont prises à  $t = -9.6$ ;  $10.6$ ;  $22.8$ ;  $34.3$ ;  $53.2$ ;  $98.4$  ms ( $t = 0$  étant le moment de l'impact).

L'apport d'énergie cinétique dû à l'impact a donc permis au système de passer la barrière d'énergie de gravité et d'atteindre une configuration finale fermée. On remarque que seule la partie mouillée de la lamelle subit une véritable déformation : la portion non mouillée est presque droite lors du mouvement (figure 2.6, images 4 et 5).

La barrière de gravité que le système doit franchir pour parvenir à un état fermé dépend de la distance au bord,  $d$ . La figure 2.7 est composée de six images qui montrent différents instants d'un impact de goutte qui aboutit à un état ouvert. Par rapport à l'expérience de la figure 2.6, la vitesse d'impact ici est presque identique et vaut  $U = 0.24$  m/s, mais la distance du bord est bien plus grande et vaut  $d = 15.93$  mm. On observe que dans ce cas l'impact de goutte ne fournit pas l'énergie cinétique nécessaire pour passer la barrière de gravité. Bien qu'il y ait encore un rebond du système couplé fluide-solide (image 3), la portion libre de lamelle se déforme légèrement (images 4 et 5) avant de retomber au sol (dernière image). L'état final du système est non encapsulé.

Pour pouvoir replier des lamelles plus longues, il faut donc apporter plus d'énergie cinétique. La figure 2.8 montre un exemple : ici la distance du bord est encore plus élevée que dans le cas précédent,  $d = 18.8$  mm, mais la vitesse d'impact est bien supérieure,  $U = 0.84$  m/s. On voit alors qu'après le rebond du système (image 3) la goutte parvient à replier entièrement la portion droite de lamelle (images 4 et 5) jusqu'à l'encapsulation finale (dernière image). On peut remarquer que par rapport à l'encapsulation de la figure 2.6, ici toute la lamelle subit une déformation lors du processus de fermeture. En effet, alors que la partie mouillée se déforme

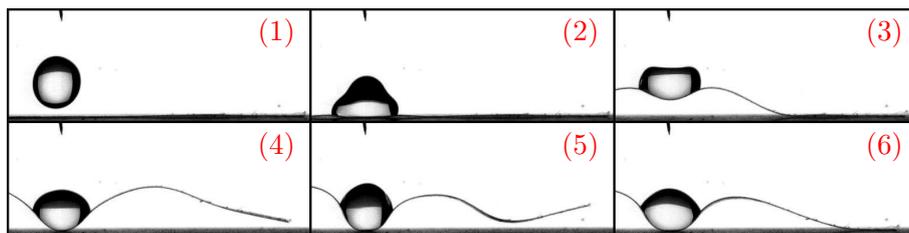


FIGURE 2.7: Séquence photographique expérimentale représentant une configuration finale ouverte. La vitesse d'impact est  $U = 0.24$  m/s et la distance du bord  $d = 15.93$  mm. Les images sont prises à  $t = -2.2; 11.8; 23.2; 41.6; 65.8; 87.8$  ms ( $t = 0$  étant le moment de l'impact).

pour enrober la goutte, la partie non mouillée se déforme aussi lors du passage de la droite vers la gauche (figure 2.7, image 4). Cela s'explique par le fait que le coût énergétique associé à cette déformation est inférieur à l'énergie potentielle qui serait nécessaire pour passer la verticale de manière rigide (comme c'était le cas dans la figure 2.6).

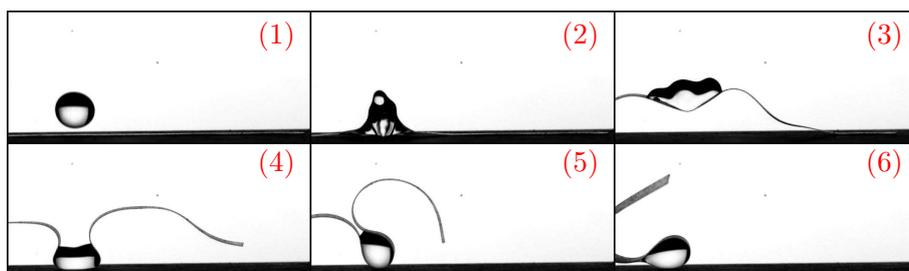


FIGURE 2.8: Séquence photographique expérimentale représentant une configuration finale fermée. La vitesse d'impact est  $U = 0.84$  m/s et la distance du bord  $d = 18.8$  mm. Par rapport à la figure 2.6, au moment de passer la verticale la lamelle est courbée sous son propre poids. Les images sont prises à  $t = -0.8; 11.6; 30; 54.2; 84.4; 143$  ms ( $t = 0$  étant le moment de l'impact).

Dans la suite on appellera ces trois différents régimes : (A) encapsulation rigide (figure 2.6), (B) non encapsulation (figure 2.8) et (C) encapsulation élastique (figure 2.7).

### 2.4.3 Le diagramme de phase

On a réalisé plusieurs expériences d'impact de goutte sur lamelle. Deux paramètres ont été variés lors des expériences : la vitesse d'impact de la goutte,  $U$ , et la distance au bord,  $d$ . Le diagramme de phase expérimental résultant, dans lequel on distingue la configuration finale du système (ouverte ou fermée), est montré dans la figure 2.9. On a choisi d'adimensionnaliser la distance au bord avec la longueur élasto-gravitaire, et la vitesse d'impact  $U$  avec une vitesse capillaire-inertielle, en faisant apparaître le nombre de Weber :

$$\text{We} = \frac{\rho R U^2}{\gamma}. \quad (2.1)$$

Le nombre de Weber compare, en général, l'énergie cinétique à l'énergie de surface. Etant donné que  $\rho$ ,  $R$  et  $\gamma$  sont constants dans notre problème, le nombre de Weber n'est rien d'autre qu'une

vitesse d'impact sans dimension.

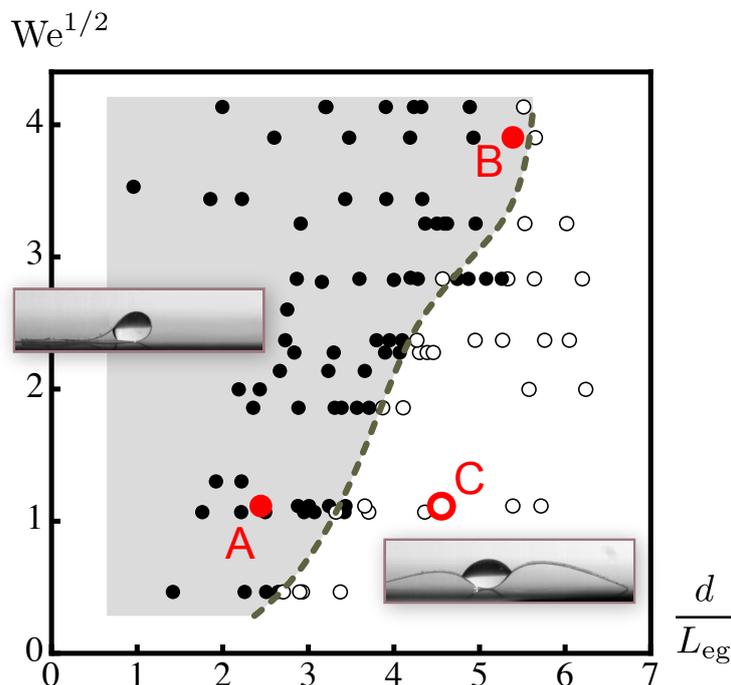


FIGURE 2.9: Diagramme de phase des états finaux en fonction de la distance du bord,  $d$ , et du nombre de Weber,  $We$ . Les cercles noirs représentent les états fermés, les cercles blancs les états ouverts. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  correspondent aux images des figures 2.6, 2.8 et 2.7.

Dans la figure 2.9, les cercles noirs représentent les états finaux encapsulés, les cercles blancs les états finaux ouverts. On a montré en rouge les position des expériences ( $A$ ), ( $B$ ) et ( $C$ ) décrites dans la section précédente. On peut identifier une frontière entre les deux régions, et on s'aperçoit que, pour la même distance  $d$ , plus la vitesse est grande et plus l'encapsulation est facile à obtenir, ce qui est tout à fait cohérent avec la vision en terme de barrière d'énergie potentielle franchie avec l'apport d'énergie cinétique.

## 2.5 Observations expérimentales

### 2.5.1 Comportement de la ligne de contact

Bien que la lamelle ait une forme rectangulaire longue et étroite, au moment de l'impact la goutte a tendance à ignorer cette forme et à s'étaler de manière axisymétrique. On doit donc s'attendre à un débordement du liquide dans les zones devant et derrière la lamelle. Pourtant, la présence du support superhydrophobe engendre une rétractation rapide de l'eau et permet de la confiner sur la lamelle. On peut donc considérer dans la suite la dynamique du fluide comme étant toujours confinée sur la lamelle élastique.

L'impact est suivi d'une phase d'étalement du liquide sur la lamelle, qui correspond à une transformation de l'énergie cinétique en énergie de surface. Une fois l'étalement complété, on observe la rétractation du liquide, qui transforme à nouveau une partie de l'énergie de surface en énergie cinétique. Néanmoins, on remarque systématiquement un accrochage de la ligne de

contact solide-liquide lorsque la phase de rétractation démarre. Cet accrochage se poursuit quand le système rebondit et que la lamelle se déforme. La figure 2.10 montre une succession d'images correspondant au moment de la rétractation qui a lieu après l'étalement, et on peut observer qualitativement l'accrochage de ligne de contact.

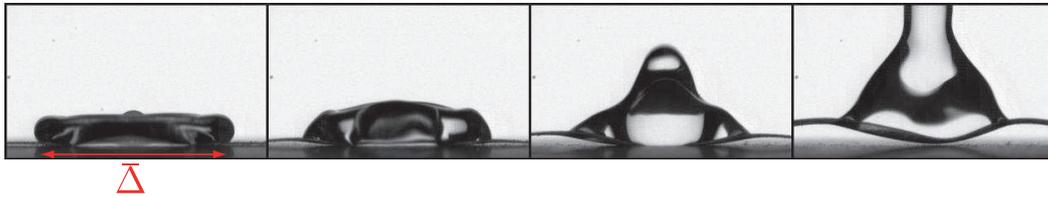


FIGURE 2.10: Séquence photographique montrant l'accrochage de la ligne de contact après la phase d'étalement. La vitesse d'impact est  $U = 0.64$  m/s. Les images sont prises à un intervalle de 5 ms.

Cet accrochage est une conséquence de la présence du talc sur la lamelle. Le fait d'avoir passé du talc sur la surface de la lamelle (section 2.2) lui a donné un aspect rugueux à l'échelle sub-millimétrique, et les imperfections du substrat solide sont souvent la cause de l'accrochage de la ligne triple (Joanny & de Gennes, 1984; de Gennes, 1985).

On note  $\Delta$  la longueur de la portion mouillée de la lamelle, et en particulier on appelle  $\bar{\Delta}$  la valeur de  $\Delta$  atteinte juste avant le rétractation du liquide. On quantifie l'accrochage de la ligne de contact en terme de variation, en fonction du temps, du rapport  $\Delta(t)/\bar{\Delta}$ , le long de l'évolution du système. La figure 2.11 montre les résultats pour trois expériences différentes (correspondant à celles montrées dans les figures 2.6, 2.7 et 2.8).

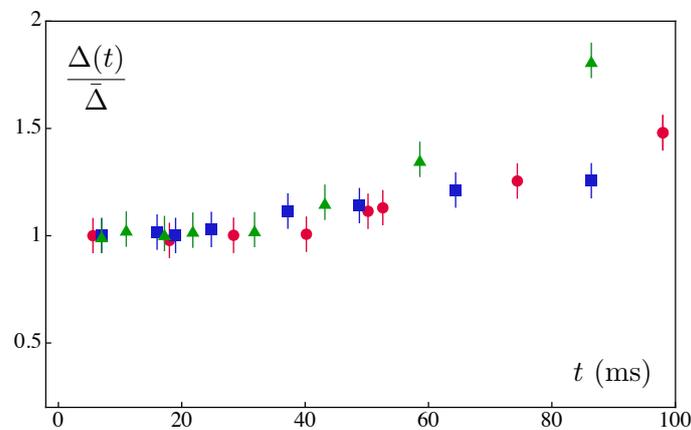


FIGURE 2.11: Longueur de la portion de lamelle mouillée par la goutte en fonction du temps,  $\Delta(t)$ , rapportée à la longueur mouillée à la fin de la phase d'étalement,  $\bar{\Delta}$ , pour trois expériences différentes. Vert (▲) :  $U = 0.25$  m/s ,  $d = 8.73$  mm ; Bleu (■) :  $U = 0.24$  m/s ,  $d = 15.93$  mm ; Rouge (●) :  $U = 0.84$  m/s ,  $d = 18.8$  mm .

On remarque que  $\Delta(t) = \bar{\Delta}$  dans la première partie de la dynamique, jusqu'à  $t = 50$  ms approximativement. Successivement,  $\Delta$  augmente, de manière plus ou moins significative selon le cas considéré. En effet, il serait plus approprié de dire que la ligne de contact ne recule jamais plutôt que de dire qu'elle est accrochée.

Le fait que la ligne de contact avance n'est pas surprenant. Dans une configuration encapsulée,

l'extension de l'interface liquide-air a été très fortement réduite, et cela se fait nécessairement avec la lamelle qui recouvre une portion de l'interface libre, ce qui explique l'avancée de la ligne de contact. Cela clarifie aussi le fait que la ligne de contact avance de manière sensible dans le cas d'une configuration encapsulée (points verts et rouges de la figure 2.11), alors qu'elle avance très peu dans le cas d'une configuration finale ouverte (points bleus de la figure 2.11).

Une conséquence directe de l'accrochage de la ligne de contact dans les instants initiaux de l'évolution est le fait de pouvoir passer d'une description en terme de vitesse d'impact à une description en terme de longueur de la portion mouillée, comme on l'explique dans le prochain paragraphe. Cet aspect sera largement exploité dans la partie de modélisation au prochain chapitre.

### 2.5.2 Relation entre We et $\bar{\Delta}$

On a consacré une série d'expérience à la mesure de la distance maximale d'étalement,  $\bar{\Delta}$ , en fonction du nombre de Weber,  $We = \rho U^2 R / \gamma$ . On a réalisé des impacts à différentes vitesses et pour différents rayons de la goutte, pour se placer dans un cadre de travail encore plus général que celui des expériences de repliement (où  $R$  est constant). Toutes les expériences ont été effectuées sur la même lamelle de PDMS.

Dans la figure 2.12 on montre l'étalement relatif  $(\bar{\Delta} - \Delta_0) / 2R$  en fonction de We. Ici,  $\Delta_0$  est l'étalement quasi-statique obtenu avec une vitesse d'impact nulle. Cet étalement quasi-statique a été calculé par extrapolation à partir des autres mesures, et non pas mesuré directement. On a trouvé  $\Delta_0 = 2.04, 2.20, 1.96, 3.68$  mm pour  $R = 1.2, 1.5, 1.6, 1.85$  mm. Les données relatives aux quatre rayons différents s'agrègent sur la même courbe, ce qui montre que We est le paramètre approprié pour décrire l'étalement.

Une loi de puissance permet d'ajuster les données :

$$\frac{\bar{\Delta} - \Delta_0}{2R} = 0.32 We^{1/2} \quad (2.2)$$

Cette loi permet d'établir une bijection entre We (ou  $U$ ) et  $\bar{\Delta}$ . L'exposant 1/2 qui apparaît dans cette relation est conforme à l'idée de conversion d'énergie cinétique  $\sim \rho U^2 R^3$  en énergie de surface  $\sim \gamma \Delta^2$ .

### 2.5.3 L'angle de contact et le mécanisme de repliement

Nous n'avons pas abordé la question de l'angle de contact entre l'eau et la lamelle. Quand on pose doucement une goutte d'eau sur une lamelle en PDMS, on observe un angle de contact  $\theta \simeq 100^\circ$ , ce qui confirme que le PDMS est légèrement hydrophobe. Cependant, l'intérêt de cette information est à relativiser. En effet, l'accrochage de ligne de contact, présenté plus haut, a pour conséquence une hystérésis de l'angle de contact.

L'observation expérimentale confirme la présence de l'hystérésis : la figure 2.13 montre l'angle de contact au moment du rebond du système, pour trois différentes vitesses d'impact, qui correspondent à trois différentes valeurs de  $\Delta$ . On voit clairement que plus  $\Delta$  augmente, plus l'angle de contact au moment du rebond diminue, ce qui s'explique facilement vu que le volume de la goutte est toujours le même.

Considérons la distribution des forces exercées sur la lamelle par la tension de surface et la pression capillaire. On a déjà remarqué que, bien qu'à l'équilibre, cette distribution provoque

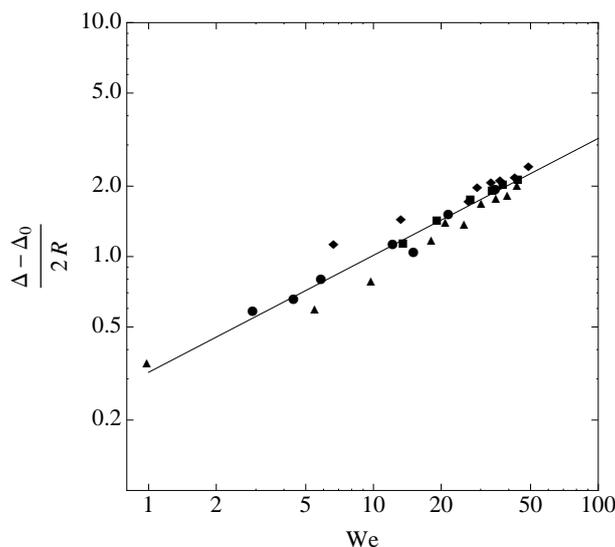


FIGURE 2.12: La longueur d'étalement adimensionnée  $(\bar{\Delta} - \Delta_0)/2R$  est tracée en fonction de  $We = \rho U^2 R / \gamma$ . Plusieurs rayons de gouttes  $R$  ont été considérés :  $R = 1.2$  mm (▲),  $1.5$  mm (●),  $1.6$  mm (■) and  $1.85$  mm (◆). La ligne droite représente l'équation (2.2).

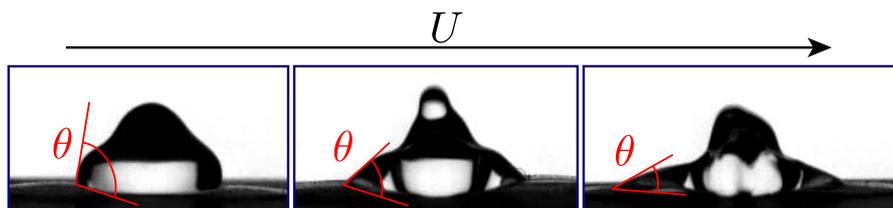


FIGURE 2.13: Angle de contact entre liquide et solide au moment de la rétraction de la goutte. Trois vitesses d'impact sont montrées :  $U = 0.25$  m/s (gauche),  $U = 0.64$  m/s (centre) et  $U = 0.84$  m/s (droite).

un moment de flexion sur la lamelle. En particulier, le moment de la force de tension de surface par rapport au point d'impact (quand la lamelle est encore horizontale) est proportionnel à la distance  $\Delta$  et à la composante verticale de la force,  $\gamma \sin \theta$ . Quand  $\Delta$  augmente le bras de levier de la force augmente aussi, mais en même temps la composante verticale de la force diminue (car  $\theta$  diminue). On peut donc imaginer l'existence d'un optimum pour ce moment de flexion.

En même temps, un autre mécanisme de déformation existe et se met en place quand  $\Delta$  augmente : la composante horizontale de la tension de surface peut engendrer le flambage de partie mouillée de lamelle. Plus  $\Delta$  est grand, plus le seuil de flambage d'Euler, qui varie en  $EI/\Delta^2$ , est faible (Timoshenko, 1940).

De manière générale, les deux mécanismes (pliage et flambage) coexistent et contribuent à la déformation de la lamelle.

#### 2.5.4 Deux échelles de temps

Dans un problème d'impact de goutte, l'échelle de temps caractéristique est l'échelle de temps capillaire  $\tau_c = \sqrt{\rho R^3 / \gamma}$ , qui est indépendante de la vitesse d'impact (Richard *et al.*, 2002). Cette échelle capillaire fixe, par exemple, la fréquence de vibration de l'interface liquide-air.

Par contraste, l'échelle de temps élastique est  $\tau_e = d^2 \sqrt{\mu / EI}$ , avec  $\mu$  la masse linéique de la

lamelle. Cette échelle fixe la fréquence de vibration de la portion libre de lamelle.

Le rapport entre ces deux échelles vaut :

$$\frac{\tau_c}{\tau_e} = \frac{\sqrt{\rho R^3/\gamma}}{d^2 \sqrt{\mu/EI}} = \frac{L_{eg}^{3/2} R^{3/2}}{L_{gc} d^2} \quad (2.3)$$

Si on l'évalue pour une longueur typique de lamelle  $d = 4L_{eg}$  (voir figure 2.9), on obtient  $\tau_c/\tau_e = 0.02$ . Ce rapport est très petit, ce qui suggère qu'il y a une séparation des échelles de temps dans le problème, et en particulier que la dynamique de la goutte est beaucoup plus rapide que la dynamique du solide.

L'observation des images expérimentales confirme l'analyse d'échelle. Si on regarde les figures 2.6, 2.7 ou 2.8, on remarque que dans les images 1, 2 et 3 de chaque figure la goutte est fortement déformée et que la lamelle est encore presque entièrement posée sur le support. Au contraire, dans les images 4, 5 et 6 de chaque figure, alors que la lamelle est en mouvement et que le processus d'encapsulation démarre, l'interface de la goutte est presque circulaire (c'est-à-dire à l'équilibre).

On peut en conclure que la dynamique du système couplé goutte-lamelle peut être séparée en deux phases distinctes. Dans la première phase, on a la dynamique fluide sur une lamelle presque immobile, avec l'impact, l'étalement du liquide et l'apparition d'ondes capillaires. Dans la deuxième phase, quand les vibrations de la goutte disparaissent, la dynamique solide démarre, avec l'apparition d'ondes élastiques et de grandes déformations de la lamelle. Cette séparation des échelles de temps est, après l'accrochage de la ligne de contact, le deuxième ingrédient-clé de la modélisation du problème qui fera l'objet du prochain chapitre.

### 2.5.5 Pinch-off et goutte satellite

On présente dans ce paragraphe un phénomène expérimental inattendu, qui modifie dans certains cas et de manière considérable la dynamique de repliement montré précédemment.

La figure 2.14 montre une séquence d'impact de goutte sur lamelle à une vitesse  $U = 0.64$  m/s et à une distance au bord  $d = 16.7$  mm. On pourrait s'attendre à une dynamique proche de celle de la figure 2.8, pourtant lors du rebond du système on observe un fort étirement de la goutte dans la direction verticale (image 2) qui conduit à l'apparition d'une singularité (image 3). Le filament liquide se casse (phénomène de *pinch-off*), ce qui donne naissance à une goutte satellite (image 4) qui survole pendant quelques instants le système d'origine. Successivement (image 5) la goutte satellite tombe sur la lamelle, juste à côté de la goutte originelle, et on observe la coalescence des deux gouttes (image 6). Après coalescence, le système atteint rapidement une configuration finale fermée (images 8 et 9).

L'apparition d'une fragmentation lors du rebond d'une goutte est un phénomène bien connu, observé déjà par Arthur M. Worthington dans ses travaux précurseurs sur l'impact des gouttes (Worthington, 1876). La singularité est due à une résonance de l'interface liquide-air qui a lieu à une valeur précise du nombre de Weber (Eggers, 1997). Dans notre problème, on observe systématiquement la formation d'une goutte satellite quand  $We \simeq 2.8$ .

Néanmoins, la formation de la goutte satellite n'est pas l'événement qui influence le plus la dynamique de repliement. On peut en effet observer que - si on oublie la petite goutte qui survole le système - la configuration des images 3 ou 4 ressemble aux configurations déjà montrées. C'est le moment de la coalescence de la goutte satellite avec la goutte originelle qui constitue

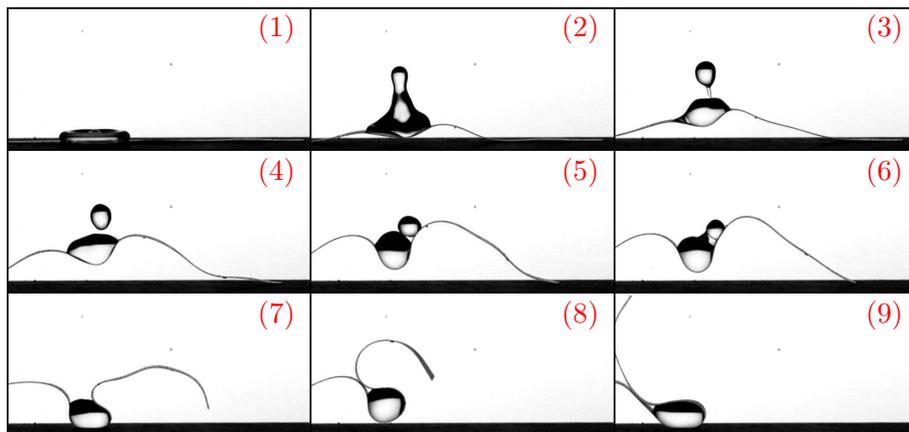


FIGURE 2.14: Séquence photographique expérimentale représentant une configuration finale fermée obtenue après coalescence d'une goutte satellite. La vitesse d'impact est  $U = 0.64$  m/s et la distance du bord  $d = 16.7$  mm. La goutte satellite se forme par *pinch-off* du ligament liquide (image 3) et coalesce avec la goutte d'origine (image 6).

un événement déterminant pour le système. Juste après la coalescence (image 6), la forme de la nouvelle goutte reconstituée est très loin d'une forme d'équilibre de goutte. En termes d'énergie, le moment de la coalescence constitue un incrément soudain d'énergie de surface, comme si une réserve d'énergie était injectée dans le système. Le liquide retrouve très rapidement une forme plus proche de l'équilibre (image 7), mais cette injection d'énergie se traduit en un rappel violent sur la lamelle, qui décolle vers une configuration encapsulée.

Ce processus permet au système d'atteindre des configurations encapsulées là où il ne serait pas possible sans l'aide de la goutte satellite. On montre un nouveau diagramme de phase (figure 2.15) dans lequel on désigne avec une étoile les configurations fermées qui ont été obtenues à partir de ce phénomène de fragmentation plus coalescence. La position du point correspondant aux images de la figure 2.14 est repéré par la lettre  $D$ . On peut remarquer que les étoiles se situent bien au-delà de la frontière entre états ouverts et fermés, preuve du fait que la coalescence de la goutte satellite constitue une véritable injection d'énergie au système.

## 2.6 Conclusion

Forts de la connaissance qu'une goutte qui s'évapore peut replier *statiquement* une membrane élastique, dans ce chapitre nous avons montré que le repliement peut aussi se faire *dynamiquement* à partir d'un impact de goutte sur la membrane. Le temps nécessaire pour obtenir un repliement par impact de goutte est de plusieurs ordres de grandeur plus petit que celui nécessaire pour le repliement par évaporation.

On peut choisir la forme finale de la structure tridimensionnelle à partir de la géométrie 2D du patron initial. On a montré néanmoins qu'il existe des géométries de patrons qui admettent plusieurs formes de repliement, et que la forme finale peut être sélectionnée de manière dynamique en changeant seulement la vitesse d'impact.

Afin de mieux comprendre la sélection de forme, on a conduit une campagne d'expériences d'impact de goutte sur une lamelle longue et étroite. Cette géométrie présente encore une bis-

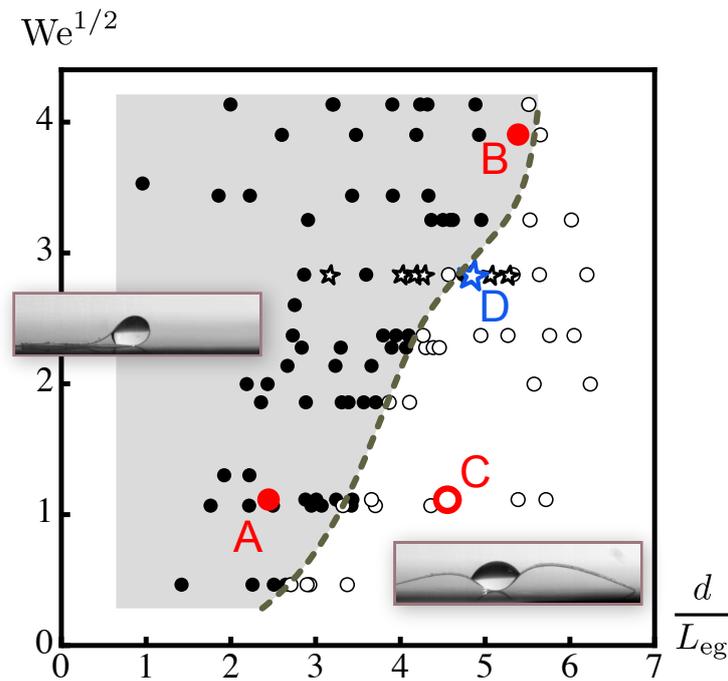


FIGURE 2.15: Diagramme de phase des états finaux du système (données identiques à la figure 2.9) dans lequel on désigne par une étoile les états finaux fermés obtenus après formation et coalescence d'une goutte satellite. Le point  $D$  correspond aux images de la figure 2.14.

tabilité des formes finales d'équilibre, liée à l'énergie potentielle de gravité qui sépare les deux états stables (état ouvert et état fermé). On a montré que l'impact de la goutte peut permettre d'atteindre la configuration au-delà de la barrière d'énergie seulement si l'apport d'énergie cinétique dû à l'impact est suffisant. On a alors construit un diagramme de phase qui décrit la forme de l'état final en fonction des paramètres expérimentaux (vitesse d'impact et distance entre le point d'impact et l'extrémité de la lamelle).

On a ensuite focalisé l'attention sur certaines observations expérimentales, comme l'accrochage de la ligne de contact dans les instants initiaux de l'évolution et la séparation des échelles de temps fluide et solide. Ces observations expérimentales sont à la base des approches qu'on introduit au prochain chapitre pour modéliser ce système afin de prédire son comportement en fonction des paramètres en jeu.

Ces expériences ouvrent une perspective intéressante dans les processus de fabrication d'objets 3D par repliement d'un patron 2D, que ce soit à l'échelle millimétrique ou sub-millimétrique. Il est possible d'imaginer l'émission d'une goutte sur un patron élastique pour une production en série d'objets 3D modelés selon la forme désirée. Il est à noter que le nombre de Weber typique dans nos expériences,  $We \sim 10$ , entre dans l'intervalle des  $We$  employés dans les impressions à jet d'encre (de Gans *et al.*, 2004), ce qui rendrait possible la technique.

## Modélisation du repliement élasto-capillaire

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose deux modèles pour prédire le comportement du système présenté dans le chapitre précédent : une goutte qui replie une membrane élastique. On se limitera au problème de repliement de la lamelle, qui sera traité comme un problème complètement 2D.

La section 3.2 justifie les hypothèses qui permettent la modélisation 2D. Ensuite, un premier modèle, basé sur une approche énergétique, est montré en section 3.3. Le deuxième modèle, plus sophistiqué et capable de reproduire la dynamique de repliement, est présenté dans la section 3.4.

### 3.2 Vers une approche 2D

Dans cette première section on justifie l'approche bidimensionnelle qui sera utilisée dans l'ensemble du chapitre.

Considérons, pour commencer, un support rigide sur lequel on pose une goutte d'eau, suffisamment petite pour qu'on puisse négliger l'effet de la gravité. Si la dimension typique de la goutte est beaucoup plus petite que la taille du support, la goutte a la forme d'une calotte sphérique et touche la surface avec un angle de contact bien défini et donné par la construction de Young. Si au contraire la goutte touche les côtés du support, la ligne de contact est alors ancrée aux côtés et la forme de la goutte n'est plus exactement une calotte sphérique. Dans les deux cas, la forme de la goutte est une surface tridimensionnelle dans l'espace, qui correspond à un minimum de l'énergie de surface obtenu avec une contrainte à respecter (angle de contact

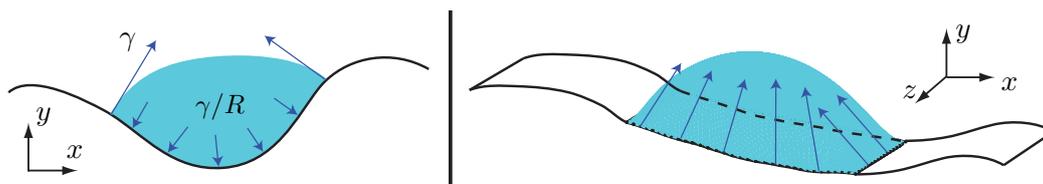


FIGURE 3.1: Schématisation d'une goutte sur une lamelle élastique dans une approche purement 2D (gauche) et dans une approche 3D (droite).

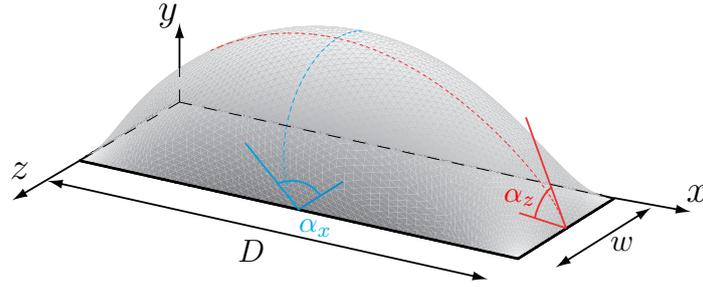


FIGURE 3.2: Une goutte est ancrée à une surface rectangulaire, de longueur  $D$  et largeur  $w$ . L'angle de contact le long de  $x$  est noté  $\alpha_x$  et l'angle de contact le long de  $z$  est noté  $\alpha_z$ .

donné ou ligne de contact fixée). Même en présence de la gravité la forme de la goutte reste une surface tridimensionnelle.

Dans le premier chapitre, on a expliqué la déformation élastique d'une lamelle sous l'action d'une goutte avec une idée purement 2D : la distribution des forces de tension de surface et de surpression capillaire provoque une flexion dans le plan  $(x, y)$  (figure 3.1-gauche). A-t-on le droit d'employer une explication si simple, face à une géométrie bien plus complexe ? De la même façon, l'hypothèse consistant à négliger les forces de tension de surface s'exerçant sur les côtés latéraux de la lamelle est-elle fondée (figure 3.1-droite) ?

Pour répondre à ces questions, on montre dans les paragraphes suivants qu'une approche bidimensionnelle est possible et qu'elle constitue une approximation acceptable du problème. On propose aussi une correction permettant de prendre en compte de manière quantitative les effets du passage du 3D au 2D.

### 3.2.1 Superposition des effets dans les directions $x$ et $z$

Afin de répondre aux questions posées plus haut, on considère le problème suivant. Une goutte, de volume  $\mathcal{V}$ , est posée sur une surface rigide  $\mathcal{S}$ , rectangulaire de dimensions  $D$  et  $w$  (voir figure 3.2). On suppose que la ligne de contact de la goutte est ancrée aux côtés de  $\mathcal{S}$ , et on néglige le rôle de la gravité dans le problème. L'absence de gravité implique que la surpression à l'intérieur de la goutte est constante en tout point et vaut  $p = \gamma\kappa = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$ , avec  $\kappa$  la courbure totale et  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  les courbures principales de l'interface liquide-air en un point quelconque. La somme des deux courbures principales est constante quel que soit le point considéré ; en revanche,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  ne sont pas constants s'ils sont pris indépendamment l'un de l'autre.

On écrit l'équilibre des forces sur la surface  $\mathcal{S}$  (surpression de Laplace et force capillaire sur les côtés) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) dS = 2\gamma \int_0^D \sin \alpha_x dx + 2\gamma \int_0^w \sin \alpha_z dz \quad (3.1)$$

On a désigné par  $\alpha_x$  et  $\alpha_z$  les angles de contact entre la goutte et le support en correspondance avec le côté  $w$  et  $D$  respectivement (figure 3.2). Comme dans ce problème la ligne de contact est ancrée, l'angle de contact n'est pas connu. On introduit l'hypothèse que les angles  $\alpha_x$  et  $\alpha_z$  sont constants le long du bord. Cela permet de passer d'une formulation intégrale à une formulation locale, qui s'écrit :

$$(\kappa_1 + \kappa_2) w D = 2D \sin \alpha_x + 2w \sin \alpha_z \quad (3.2)$$

On se demande si on peut appliquer à l'équation (3.2) le principe de superposition des effets entre les directions  $x$  et  $z$ . On pourrait alors décomposer le problème en deux problèmes et écrire en même temps :

$$\boxed{?} \begin{cases} \kappa_1 D - 2 \sin \alpha_z = 0 \\ \kappa_2 w - 2 \sin \alpha_x = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ces équations sont vérifiées de manière exacte seulement si le profil de la goutte dans les plans  $(x, y)$  et  $(z, y)$  est un arc de cercle. Dans ce cas, la surpression due à la courbure  $\kappa_1$  serait parfaitement équilibrée par la tension de surface qui agit sur les lignes  $x = 0$  et  $x = D$ ; de la même manière, pour le problème dans le plan  $(z, y)$ , la surpression due à la courbure  $\kappa_2$  serait parfaitement équilibrée par la tension de surface qui agit sur les lignes  $z = 0$  et  $z = w$ .

Pour vérifier si les équations du système (3.3) sont effectivement satisfaites, on détermine la forme de la goutte à partir d'une simulation avec Surface Evolver (Brakke, 1992). Surface Evolver permet de calculer la forme de l'interface qui minimise l'énergie capillaire quand le système est soumis à une ou plusieurs contraintes. Cette minimisation est faite à partir d'une configuration initiale et suivant la direction donnée, à chaque itération, par le gradient de l'énergie.

Pour notre problème, on fixe le volume de la goutte  $\mathcal{V} = 15.6 \text{ mm}^3$  ainsi que la largeur du support  $w = 2 \text{ mm}$  de façon à se placer dans les conditions expérimentales du chapitre précédent. On considère plusieurs longueurs  $D$  comprises dans l'intervalle expérimental  $2 < D < 6 \text{ mm}$ <sup>1</sup>. La forme finale de la goutte est obtenue à partir d'un parallélépipède initial ancré sur  $\mathcal{S}$ , sur lequel on effectue cinq raffinements successifs du maillage, et la minimisation est obtenue après 470 itérations (figure 3.3). La forme finale comporte 8192 éléments triangulaires de surface.

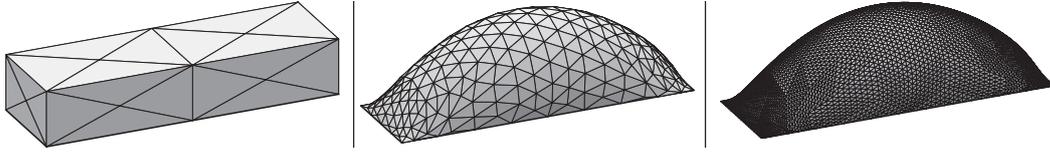


FIGURE 3.3: Maillage du problème dans Surface Evolver : (gauche) configuration de départ, 64 éléments après zéro itération ; (centre) configuration transitoire, 512 éléments après 320 itérations ; (droite) configuration finale, 8192 éléments après 470 itérations.

Une fois la minimisation effectuée, on connaît les positions des tous les vertex constituant l'interface liquide-air. On procède alors de la manière suivante : d'abord, on extrait les positions  $(x, y, z)$  des points  $P_i$  se trouvant sur un des deux plans de symétrie,  $x = D/2$  et  $z = w/2$ .

A chaque triplet de points consécutifs  $(P_{i-1}, P_i, P_{i+1})$  on associe une courbure, définie comme la courbure du cercle passant par les trois points :

$$\kappa_i = \frac{2 \sin \Delta\theta_i}{\Delta s_i} = \frac{2 \sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}\|^2} \quad (3.4)$$

avec  $\theta_i$  l'angle formé par le vecteur  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$  avec l'horizontale, et  $s_i = \sum_{j=0}^i (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})$ .

On introduit la courbure moyenne du plan de symétrie, qui est la moyenne de toutes les courbures déjà calculées :

$$\kappa = \frac{\sum_i \kappa_i \Delta s_i}{\sum_i \Delta s_i} \quad (3.5)$$

1. Sans la gravité, le problème devient purement géométrique. Les longueurs utilisées dans la simulation numérique sont à considérer adimensionnalisées avec l'échelle de référence de 1 mm.

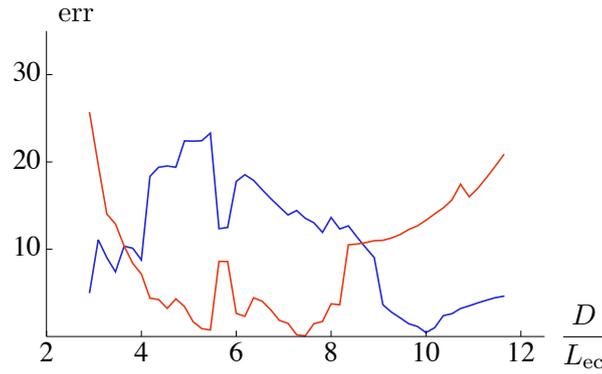


FIGURE 3.4: Erreurs en pourcentage en fonction de  $D/L_{ec}$  :  $err_1$  (bleu) et  $err_2$  (rouge). Les erreurs sont définies dans l'équation (3.7).

On fait l'hypothèse que la courbure moyenne du plan correspond à la courbure  $\kappa_1$  ou  $\kappa_2$  introduite plus haut.

Ensuite, à partir de la position des deux points du plan de symétrie  $P_0$  et  $P_1$  les plus proches du support  $\mathcal{S}$ , on calcule l'angle de contact entre la goutte et le support :

$$\alpha_x = \tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0} \right) \quad ; \quad \alpha_z = \tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (3.6)$$

La figure 3.4 montre l'erreur qui existe dans les équations du système (3.3). L'erreur en pourcentage est définie comme :

$$err_1 = 100 \frac{\kappa_1 D - 2 \sin \alpha_z}{\kappa_1 D} \quad ; \quad err_2 = 100 \frac{\kappa_2 w - 2 \sin \alpha_x}{\kappa_2 w} \quad (3.7)$$

Même si les relations du système (3.3) ne sont pas parfaitement satisfaites, l'erreur commise dans le fait d'avoir appliqué la superposition des effets ne dépasse en aucun cas 25%. Cette erreur a été considérée comme acceptable dans le cadre de la modélisation qu'on veut effectuer. Cela signifie que la forme de l'interface dans chaque plan de symétrie n'est pas loin d'un arc de cercle (la comparaison est faite dans la figure 3.5).

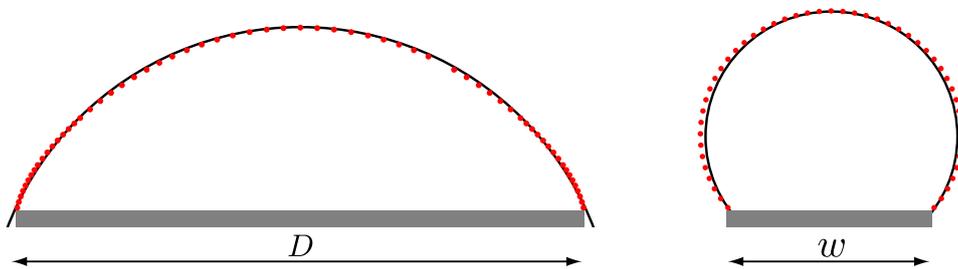


FIGURE 3.5: Forme de l'interface dans les plans de symétrie  $z = w/2$  (gauche) et  $x = D/2$  (droite). Les points rouges correspondent à la solution numérique trouvée avec Surface Evolver et la courbe noire à un profil en arc de cercle. Le cas considéré est celui d'une goutte de volume  $\mathcal{V} = 15.6 \text{ mm}^3$  ancrée à une plaque de dimensions  $D = 6 \text{ mm}$  et  $w = 2 \text{ mm}$ .

Cette possibilité de décomposer le problème dans les deux directions a des conséquences

importantes dans le problème de goutte sur une lamelle élastique étroite. En effet, l'approche 2D (schéma de la figure 3.1-gauche) est légitime, car elle ne représente que la contribution des forces dans le plan  $(x, z)$ , qui sont décomposées de celles dans le plan  $(y, z)$ .

A ce stade, la distribution des forces dans le plan  $(y, z)$  perd de l'intérêt, car expérimentalement on n'observe pas de déformation de la lamelle dans ce plan.

On peut donc conclure que, dans le cadre d'une goutte posée sur une lamelle étroite, et dans l'intervalle des paramètres montrés dans les expériences, il est légitime de négliger la contribution des forces hors du plan de symétrie  $(x, z)$ , car l'erreur commise dans cette approximation 2D est suffisamment petite. Bien entendu, cette déduction a été faite avec de nombreuses hypothèses : rôle de la gravité négligeable, angle de contact constant le long de chaque côté, courbure principale assimilée à la courbure moyenne le long du plan de symétrie. De plus, on a considéré un support rigide et purement horizontal, sans prendre en compte les changements qui pourraient exister lors d'une déformation élastique.

### 3.2.2 Aire de l'interface

Dans la suite du chapitre, on emploiera une approche énergétique pour décrire le comportement du système, et on focalisera l'attention sur l'aire de l'interface liquide-air. Il est donc légitime de se demander si l'approximation bidimensionnelle qu'on a introduite modifie de manière importante l'aire de l'interface. On a vu en particulier que le profil de la goutte dans le plan  $(x, y)$  est assimilable à un arc de cercle, la goutte est donc schématisée par une portion de cylindre. Est-ce que l'aire de ce cylindre est la même que l'aire d'une goutte 3D (figure 3.6)? Pour trouver la réponse, on utilise encore une fois Surface Evolver (Brakke, 1992).

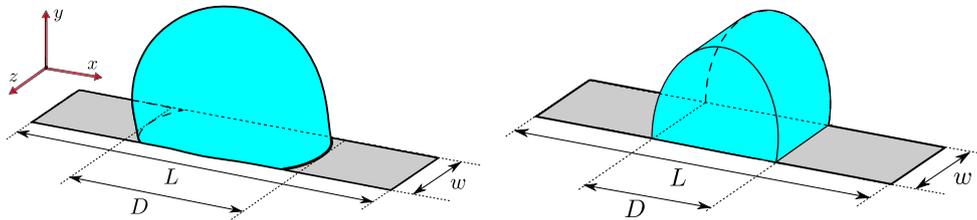


FIGURE 3.6: Une goutte posée sur une surface rectangulaire rigide. (gauche) Solution du problème 3D avec Surface Evolver (Brakke, 1992), et (droite) approximation de goutte cylindrique, dans laquelle l'interface liquide-air est une portion de cylindre (surface latérale plus deux bases).

On calcule alors la forme d'une goutte, de volume  $\mathcal{V}$ , qui mouille une portion  $D$  d'une lamelle rigide de largeur  $w$  (figure 3.6). Dans cette simulation, on ne restreint pas l'intervalle des paramètres aux seules valeurs expérimentales, mais on considère plusieurs combinaisons de  $\mathcal{V}$ ,  $w$  et  $D$ . Pour chaque cas, on compare l'aire de l'interface liquide-air du problème 3D, obtenue avec Surface Evolver, à l'aire d'une goutte cylindrique de même volume et même extension.

On remarque que la goutte cylindrique a toujours une surface plus grande que la goutte 3D. Pourtant, le rapport entre la surface 3D et la surface cylindrique ne varie pas considérablement selon les paramètres. Dans la plage de paramètres employés dans les simulations, on constate qu'une bonne approximation de ce rapport est  $\mathcal{A}_{3D}/\mathcal{A}_{cyl} \simeq 0.87$ , voir figure 3.7. On utilise alors ce coefficient pour corriger l'énergie capillaire de notre problème, avec l'hypothèse supplémentaire qu'il ne change pas lors de la flexion de la poutre.

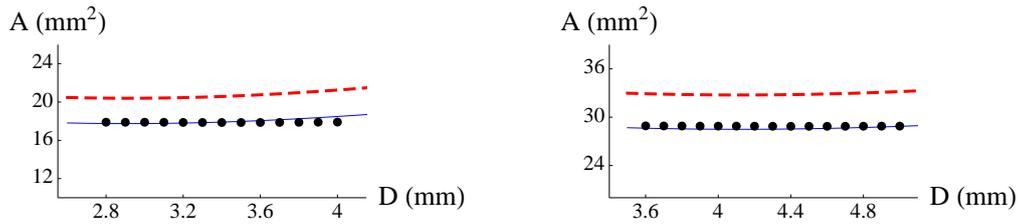


FIGURE 3.7: Aire de l'interface liquide-air pour une goutte 3D, en fonction de la longueur mouillée  $D$ , calculée avec Surface Evolver (cercles noirs) et avec l'approximation cylindrique (courbe rouge pointillée). Les paramètres sont : largeur  $w = 2 \text{ mm}$  et volume (a)  $\mathcal{V} = 10 \text{ mm}^3$ , et (b)  $\mathcal{V} = 20 \text{ mm}^3$ . La courbe bleue est obtenue par correction de la courbe rouge avec le coefficient 0.87 .

### 3.3 Une première modélisation

Dans cette section on présente un modèle pour l'interaction d'une interface liquide-air (une goutte en particulier) avec une membrane élastique. Suivant une approche énergétique, on construit ce modèle de manière à ce qu'il soit le plus simple possible mais qu'il contienne en même temps tous les ingrédients-clé pour décrire les expériences montrées au chapitre précédent. Le but est de montrer en particulier qu'on peut prédire le seuil d'encapsulation de l'expérience d'impact de goutte sur lamelle élastique du chapitre précédent en employant une tige et une goutte décrite par des formes géométriques très simples.

Dans toute la section, suivant les idées présentées plus haut, on considère un système bidimensionnel. Les idées générales du modèle sont présentées dans le paragraphe suivant ; on effectue la validation du modèle sur un problème connu (évaporation d'une goutte sur tige élastique, [Py et al. \(2007\)](#)) avant de traiter le problème d'impact de goutte.

#### 3.3.1 Décomposition en éléments discrets

Considérons, pour commencer, une poutre élastique  $\mathcal{P}$  qui se déforme sous l'action de la gravité. Son énergie totale peut s'écrire formellement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_{\text{g}} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{F}(x(s), y(s), \varphi(s)) ds \quad (3.8)$$

où  $(x(s), y(s))$  est la position dans le plan de l'élément  $ds$  de la poutre, et  $\varphi(s)$  l'angle entre la tangente à  $ds$  et l'horizontale. La variable  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la poutre. L'énergie totale est donc une fonctionnelle qui dépend des fonctions  $x(s), y(s), \varphi(s)$  ainsi que de leurs dérivées. La recherche des points stationnaires de la fonctionnelle conduit à la formulation des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f'} = 0 \quad \text{avec} \quad f = x, y, \varphi \quad (3.9)$$

Ces équations constituent un ensemble d'équations différentielles.

Pour simplifier le problème, nous allons réduire l'espace fonctionnel dans lequel les fonctions inconnues  $x(s), y(s), \varphi(s)$  se trouvent, en recherchant les inconnues comme des combinaisons linéaires de fonctions de base connues. On choisit les fonctions de base de façon à respecter les

contraintes cinématiques et physiques du problème. Cette décomposition de Galerkin permet d'écrire la courbure  $\kappa(s) = \varphi'(s)$  sous la forme :

$$\kappa(s) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

où les fonctions  $\psi_i(s)$  sont entièrement connues et seuls les coefficients  $c_i$  restent à déterminer. L'avantage de la décomposition de Galerkin consiste dans le fait que l'énergie totale est une simple fonction de  $c_i$ . Pour trouver les solutions d'équilibre il suffit alors de résoudre le système d'équations :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Dans le problème qu'on souhaite résoudre, la recherche des points d'équilibre se fait toujours en présence de contraintes, ce qui nécessite l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. Si le système présente  $m$  contraintes  $\phi_j(c_i) = 0$  avec  $j = 1, 2, \dots, m$ , on écrit le lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{E} - \lambda_j \phi_j$  (on adopte la convention de la somme sur les indices répétés) et on a  $m$  nouvelles équations dans le système :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_i} = 0 \quad \forall i \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \forall j \quad (3.12)$$

Si un ensemble de coefficients  $\mathbf{c}_0$  satisfait les équations (3.12),  $\mathbf{c}_0$  est alors une solution d'équilibre du système.

### 3.3.2 Validation du modèle

Pour que l'approche qu'on vient de présenter soit exploitable, il faut qu'elle permette de prédire des résultats suffisamment proches de ceux qu'on obtiendraient avec la résolution des équations d'Euler-Lagrange (3.9). Pour valider le modèle, on l'applique alors à un problème qui a déjà été résolu de manière exacte.

L'exemple 2D qu'on choisit a été traité dans [Py et al. \(2007\)](#) pour étudier l'interaction entre élasticité et capillarité. Une goutte, de volume  $\mathcal{V}$ , est posée sur une lamelle élastique de longueur  $L$ , épaisseur  $e$  et largeur unitaire, de façon à mouiller entièrement la lamelle (voir figure 3.8). La tension de surface tend à ramener la goutte à une forme circulaire, en pliant donc la lamelle. Il en résulte une compétition entre élasticité et capillarité. Lors de l'évaporation du liquide, le comportement du système dépend du rapport  $L/L_{ec}$ .

#### Écriture de l'énergie

Suivant les hypothèses de [Py et al. \(2007\)](#), on considère un problème purement 2D. Il en résulte que le volume de la goutte n'est rien d'autre que son aire dans le plan  $(x, y)$  :  $\mathcal{V} = A_c$  (l'aire  $A_c$  est coloriée en bleu dans la figure 3.8).

On fait ici l'hypothèse que la poutre se déforme en arc de cercle, de centre  $C_\kappa$  et courbure constante  $\kappa$ . On suppose que l'interface liquide-air de la goutte est aussi un arc de cercle, de centre  $C_R$  et rayon  $R$ . On désigne par  $2\alpha$  l'angle au centre de l'arc de cercle de la goutte et par  $2\beta$  l'angle au centre de l'arc de cercle de la poutre. Dans cette hypothèse de courbure uniforme



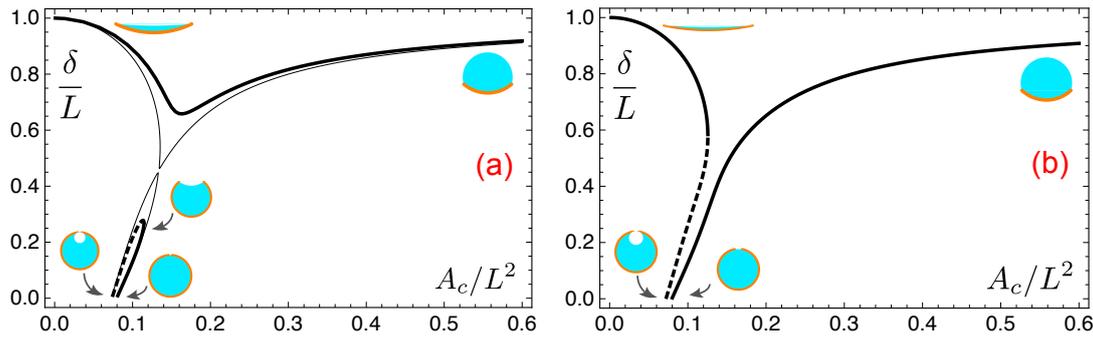


FIGURE 3.9: La distance  $\delta$  entre les extrémités de la tige (figure 3.8) est montrée en fonction du volume de liquide  $\mathcal{V} = A_c$ . Les lignes continues/pointillées représentent les solutions stables/instables. (a) courbe épaisse pour le cas  $L = 3.9 L_{ec}$  où l'évaporation conduit à une tige plate, et courbe fine pour le cas limite  $L = 4.09 L_{ec}$ . (b) cas  $L = 4.2 L_{ec}$  où l'évaporation conduit à une tige fermée.

### Solutions d'équilibre lors de l'évaporation

Il a été montré dans [Py et al. \(2007\)](#) que la forme d'équilibre et le comportement du système lors de l'évaporation du liquide dépendent du rapport  $L/L_{ec}$ . D'un côté, quand  $L/L_{ec}$  est petit, la poutre se déforme légèrement au début de l'évaporation, mais cette déformation ne persiste pas et la poutre devient droite quand le liquide s'est complètement évaporé. D'un autre côté, quand  $L/L_{ec}$  est grand, la poutre se déforme de plus en plus lors de l'évaporation jusqu'au moment où les deux extrémités se touchent et l'interface liquide-air disparaît.

Le modèle permet de reproduire ces deux comportements, comme illustré dans la figure 3.9. On montre l'évolution de la distance entre les deux extrémités de la tige,  $\delta$ , en fonction de l'aire  $A_c$ . Dans le cas  $L = 3.9 L_{ec}$ , figure 3.9(a),  $\delta$  décroît légèrement mais atteint finalement la valeur  $\delta = L$  (lamelle droite) quand tout le liquide s'est évaporé. Dans le cas  $L = 4.2 L_{ec}$ , figure 3.9(b),  $\delta$  décroît de manière monotone jusqu'à  $\delta = 0$  (extrémités qui se touchent). La transition entre les deux cas (ligne fine dans la figure 3.9(a)) a lieu pour  $L = 4.09 L_{ec}$ . Cette valeur est une bonne approximation de la valeur  $L = 3.54 L_{ec}$  trouvée dans la résolution complète de [Py et al. \(2007\)](#).

On remarque qu'un seuil de transition plus loin  $L = \sqrt{2}\pi L_{ec} \simeq 4.44 L_{ec}$  avait été trouvé dans [Langre et al. \(2010\)](#), à l'aide d'un modèle proche de celui qu'on a présenté et par simple comparaison entre les énergies des états finaux.

On peut conclure que notre modèle discret est suffisamment précis pour capturer les instabilités et les bifurcations du système physique goutte-tige.

### 3.3.3 Le problème du repliement capillaire

On cherche dans cette section à appliquer notre modèle au problème d'impact de goutte sur une lamelle élastique présenté au chapitre précédent.

#### La stabilité dynamique

Dans le problème de l'origami capillaire, comme il a déjà été expliqué au chapitre précédent, l'état encapsulé est toujours celui qui correspond au minimum d'énergie, car la dimension typique de la goutte est plus grande que la longueur élasto-capillaire. L'état ouvert représente un

minimum local, séparé du minimum global par une barrière d'énergie due à la gravité. La question n'est donc pas de savoir quel est le minimum d'énergie, mais si le système peut atteindre le minimum global. On a vu que c'est l'apport d'énergie cinétique dû à l'impact qui permet éventuellement d'atteindre le minimum global (état encapsulé).

L'impact de la goutte constitue une sorte d'excitation soudaine du système, ce qui nous amène à utiliser une approche un peu différente par rapport à celle déjà présentée. On introduit ici le concept d'excitation soudaine (*suddenly applied load*, en anglais) et de stabilité dynamique (voir e.g. chap. 12 de [Simitzes & Hodges \(2006\)](#)).

Considérons par exemple un système à un seul degré de liberté, noté  $q$ , sur lequel agit une excitation d'intensité  $P$ . Imaginons que les courbes de l'énergie potentielle du système  $U_P$  en fonction de l'excitation soient celles montrées en figure 3.10. La courbe noire correspond au cas à excitation nulle ( $P_1 = 0$ ) et elle présente un minimum d'énergie potentielle au point  $A_1$  (équilibre stable) et un maximum d'énergie au point  $B_1$  (équilibre instable). En l'absence de force, le système se trouve au point d'équilibre stable  $A_1$ . Que se passe-t-il si une force  $P$  non nulle est soudainement appliquée au système? L'idée de stabilité dynamique est là : on veut connaître la réponse (dynamique) du système qui se trouvait au point d'équilibre (au repos) et qui a été excité de manière soudaine. Considérons d'abord le cas où cette force  $P = P_2$  est faible

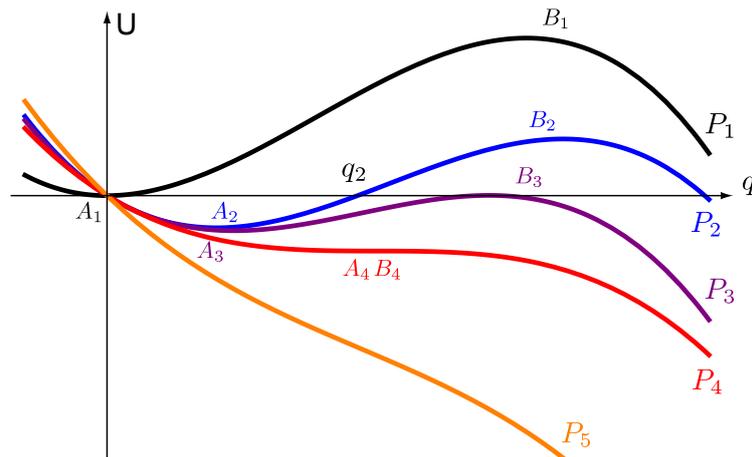


FIGURE 3.10: Energie potentielle  $U$  d'un système à un degré de liberté  $q$  sollicité soudainement par une charge  $P$ . Les cinq courbes correspondent à des valeurs croissantes de  $P$  à partir de  $P_1 = 0$  jusqu'à  $P_5$ .  $A$  désigne un minimum local et  $B$  un maximum local.

(courbe bleue). Sur la nouvelle courbe  $U_2$  le point  $A_1$  ( $q = 0$ ) n'est plus un minimum d'énergie : le système peut alors évoluer vers d'autres configurations.

Si le système est conservatif, la somme de l'énergie potentielle  $U$  et de l'énergie cinétique  $T$  est constante, et comme dans ce cas particulier le système démarre en  $A_1$  avec une énergie potentielle nulle et une vitesse nulle aussi on peut écrire :

$$U_P + T = 0 \quad (3.17)$$

L'énergie cinétique étant toujours positive, le système peut explorer toute configuration telle que  $U_P(q) < 0$ , ce qui correspond à des oscillations autour du nouveau minimum  $A_2$ . Dans le cas où le système est dissipatif, les oscillations autour de  $A_2$  s'amortissent dans le temps jusqu'à atteindre  $A_2$ .

Si on considère des forces  $P$  de plus en plus grandes, l'intervalle des oscillations croît aussi, jusqu'à atteindre la situation critique donnée par le cas  $P = P_3$  (courbe violette) pour laquelle le maximum  $B_3$  se trouve au niveau  $U(B_3) = 0$  : à ce moment, le système arrive alors au point  $B_3$  avec une énergie cinétique nulle, et peut éventuellement s'échapper vers la zone à plus grand  $q$ .  $P_3$  est donc l'excitation limite à partir de laquelle l'oscillation bornée autour d'un point d'équilibre se transforme en oscillation non bornée.

La courbe  $P_4$  correspond au moment où les points stationnaires disparaissent : à partir de ce moment il existe seulement un minimum global.

La différence entre stabilité statique et dynamique devient alors claire. Dans le cas d'une excitation soudaine, le système est capable d'atteindre le minimum global à partir de  $P = P_3$ . Si la force avait été appliquée de manière (quasi)-statique, il aurait fallu arriver à une force  $P_4 > P_3$  pour que le système puisse atteindre le minimum global.

### Ecriture de l'énergie

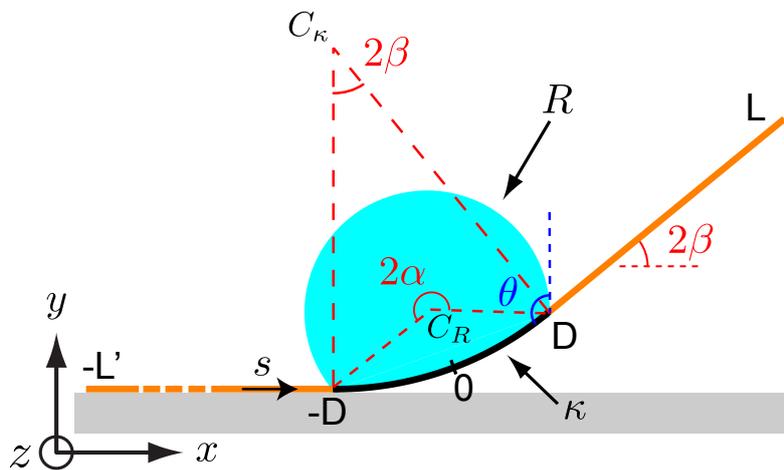


FIGURE 3.11: Modèle pour le problème de repliement dynamique d'une lamelle élastique par impact d'une goutte d'eau. La lamelle, de longueur  $L + L'$ , a une courbure uniforme  $\kappa$  dans la partie mouillée et est droite dans les parties non mouillées. La courbure de l'interface eau-air est constante et vaut  $1/R$ . L'angle de contact est  $\theta$  et est égal à  $\alpha + \beta$ .

On suppose à nouveau que l'interface liquide-air est un arc de cercle, de rayon  $R$ , centre  $C_R$  et angle au centre  $2\alpha$  (figure 3.11). La tige est divisée en trois parties différentes : la partie à gauche de la goutte,  $s \in (-L', -D)$ , la partie mouillée,  $s \in (-D, D)$  et la partie à droite de la goutte,  $s \in (D, L)$ . La partie de gauche est une droite horizontale qui ne bouge pas du support rigide sur lequel elle est posée. La partie mouillée est un arc de cercle de courbure constante  $\kappa$ , centre  $C_\kappa$  et angle au centre  $2\beta$ . Enfin, la partie de droite est un segment droit qui forme un angle  $2\beta$  (par construction géométrique) avec l'horizontale. La section de la tige dans les trois parties est supposée rectangulaire, d'épaisseur  $e$  et largeur  $w$ . On considère le système invariant par translation dans la direction  $z$ .

L'angle de contact du liquide sur la tige, noté  $\theta$ , est le même aux points  $-D$  et  $D$ . Dans le triangle  $C_R, C_\kappa, D$ , l'angle  $C_R \hat{D} C_\kappa$  est exactement égal (par rotation de  $90^\circ$ ) au complémentaire de l'angle  $\theta$ , d'où la conclusion  $\alpha + \beta = \theta$ .

On note  $E$  le module de Young de la tige et  $I = e^3 w / 12$  le moment quadratique de la section.

L'énergie élastique de la tige, due à la seule partie mouillée, s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{-D}^D EI \kappa^2(s) ds = EI \kappa^2 D \quad (3.18)$$

Pour calculer l'énergie de pesanteur de la tige, on a besoin de connaître sa déformée :

$$y_1(s) = 0 \quad \text{pour } s \in (-L'; -D) \quad (3.19)$$

$$y_2(s) = \frac{1 - \cos(\kappa s + \kappa D)}{\kappa} \quad \text{pour } s \in (-D; D) \quad (3.20)$$

$$y_3(s) = \frac{1 - \cos(2\kappa D)}{\kappa} + (s - D) \sin(2\kappa D) \quad \text{pour } s \in (D; L) \quad (3.21)$$

L'énergie de pesanteur s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_g}{\rho g e w} &= \int_{-L'}^{-D} y_1(s) ds + \int_{-D}^D y_2(s) ds + \int_D^L y_3(s) ds = \\ &= \frac{1}{\kappa} \left( 2D - \frac{\sin(2\kappa D)}{\kappa} \right) + \frac{1 - \cos(2\kappa D)}{\kappa} (L - D) + \frac{1}{2} (L - D)^2 \sin(2\kappa D) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le système se compose d'une interface solide-liquide ( $-D < s < D$ ) à laquelle on associe une énergie  $\gamma_{\text{sl}}$ , deux interfaces solide-vapeur ( $-L' < s < -D$  et  $D < s < L$ ) auxquelles on associe  $\gamma_{\text{sv}}$  et une interface liquide-vapeur (arc de cercle de centre  $C_R$ ). Toutes ces interfaces doivent être considérées de profondeur  $w$ . On écrit alors l'énergie de surface globale :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\gamma &= 0.87 \times \gamma 2\alpha R w + 2\gamma_{\text{sl}} D w + \gamma_{\text{sv}} (L + L' - 2D) w \\ &= 0.87 \times \gamma 2\alpha R w - 2\gamma D w \cos \theta_Y + \gamma_{\text{sv}} (L + L') w \end{aligned} \quad (3.23)$$

où on a utilisé la relation de Young  $\gamma_{\text{sv}} - \gamma_{\text{sl}} = \gamma \cos \theta_Y$ , avec  $\theta_Y$  l'angle de contact statique. On remarque la présence du coefficient correctif 0.87 qui tient compte du passage 3D-2D.

On peut alors écrire l'énergie totale du système :

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, R, \kappa, D) = \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_\gamma \quad (3.24)$$

Deux relations géométriques s'appliquent au système :  $(1/\kappa) \sin \beta = R \sin \alpha$  et  $D = \beta/\kappa$ , ce qui permet d'éliminer, par exemple,  $\kappa$  et  $R$  de l'équation (3.24). En outre dans ce problème le volume  $\mathcal{V}$  de la goutte est constant, ce qui permet d'écrire  $A_c w = \mathcal{V}$ , avec  $A_c$  donné par l'équation (3.15). Cette relation permet d'éliminer  $\alpha$  de l'équation (3.24).

Une dernière contrainte reste à exploiter, et elle est liée à une considération expérimentale. Au chapitre précédent (section 2.5), on a mis en évidence que la ligne de contact de la goutte reste ancrée à la tige lors des phases initiales du repliement. Cet ancrage existe tant que l'angle de contact est inférieur à une valeur critique (angle d'avancée). On dit alors que la longueur de la partie mouillée est constante et vaut  $D = D^*$  tant que l'angle de contact  $\theta$  est plus petit que l'angle d'avancée, noté  $\theta^*$ . Quand  $\theta = \theta^*$ , la ligne de contact avance, et on fait l'hypothèse que l'angle d'avancée est constant et égal à  $\theta^*$  (Joanny & de Gennes, 1984; de Gennes, 1985). On peut alors résumer en disant que  $(D - D^*)(\theta^* - \theta) = 0$ , où il faut que chaque terme soit positif quand il est non nul : la ligne de contact ne peut jamais reculer, et l'angle de contact ne peut jamais dépasser la valeur critique. La valeur critique de l'angle d'avancée a été déduite des

expériences et vaut  $\theta^* = 150^\circ$ .

Cette dernière contrainte permet d'éliminer encore une variable et d'écrire  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta)$ , avec  $D$  qui est donné par  $D = D^*$  quand la ligne de contact est fixe, et résolu à partir de  $\alpha(\beta, D) + \beta = \theta^*$  quand la ligne de contact avance.

### Prédiction du seuil d'encapsulation

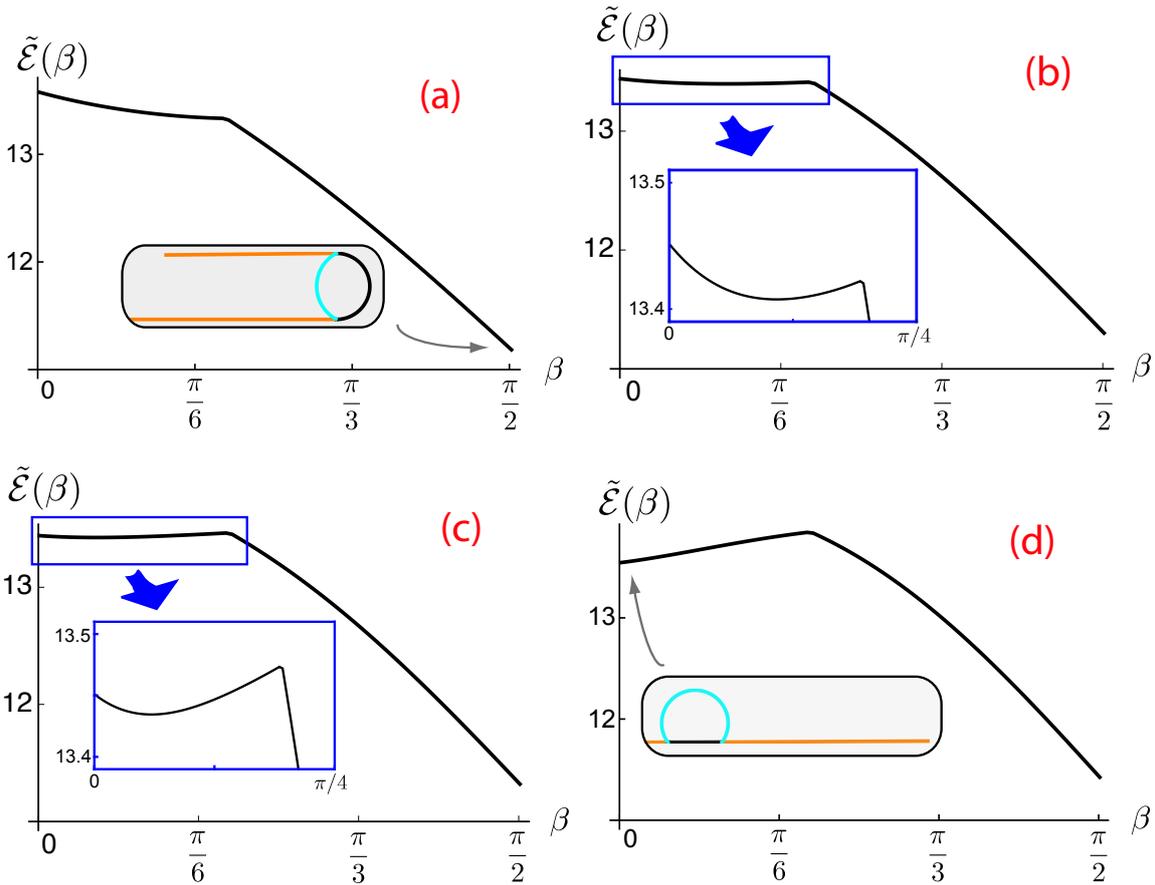


FIGURE 3.12: Courbes de l'énergie totale sans dimension  $\tilde{\mathcal{E}}(\beta) = \mathcal{E}L_{ec}/EI$  pour une goutte avec  $\mathcal{V} = 92.4 L_{ec}^3$ ,  $D^* = 2.93 L_{ec}$  et quatre différentes longueurs  $L$  : (a)  $L = 15.0 L_{ec}$ , (b)  $L = 18.4 L_{ec}$ , (c)  $L = 19.2 L_{ec}$ , et (d)  $L = 22.8 L_{ec}$ . Les figures insérées en (a) et (d) montrent la forme du système dans l'état final, alors qu'en (b) et (c) montrent un zoom de la courbe d'énergie.

Lors de l'impact la goutte s'étale sur la lamelle et transforme donc son énergie cinétique en énergie capillaire. Au moment où elle atteint son extension maximale, la tige est encore complètement horizontale et immobile. L'action de la goutte représente l'excitation soudaine sur le système. La lamelle entame donc sa dynamique  $\beta = \beta(t)$  (avec  $t$  le temps) à partir de la configuration ouverte  $\beta = 0$  avec une vitesse nulle. Le niveau  $\mathcal{E}(\beta = 0)$  représente donc l'énergie mécanique totale du système. On peut considérer le système comme légèrement dissipatif. En effet, plusieurs facteurs extérieurs contribuent à la dissipation : viscoélasticité du PDMS, viscosité du liquide, résistance aérodynamique, ...

On ne fait pas de prédiction sur l'évolution temporelle du système, et on n'est pas en mesure de calculer le temps nécessaire à la lamelle pour se replier. En revanche, on peut prédire le

comportement asymptotique du système, c'est-à-dire connaître la forme du système quand  $t \rightarrow \infty$ .

On focalise alors l'attention sur la courbe  $\mathcal{E}(\beta)$  : plusieurs cas de figure sont montrés dans la figure 3.12. On a ici considéré une goutte de volume  $\mathcal{V} = 15.6 \text{ mm}^3$  (valeur expérimentale) qui mouille initialement une portion de longueur  $2D^* = 3.22 \text{ mm}$ . Quatre valeurs différentes de  $L$  sont montrées :  $L = 8.25, 10.12, 10.56$  et  $12.54 \text{ mm}$ . Toutes ces valeurs sont en suite adimensionnées avec  $L_{ec} = 0.55 \text{ mm}$ , correspondant à une lamelle de PDMS de  $55 \mu\text{m}$  d'épaisseur mouillée par une goutte d'eau. Toutes les courbes montrent un *cusp* autour de  $\beta \simeq 0.6$  : avant ce point, la contrainte  $D = D^*$  est active car  $\theta < \theta^*$  ; après le *cusp* la contrainte  $\theta = \theta^*$  est active (et  $D > D^*$ ). Le minimum global de toutes les courbes est donné par  $\beta = \pi/2$ , car - comme on l'a déjà expliqué - la dimension typique de la zone mouillée est plus grande que la longueur élasto-capillaire. Cependant, on voit que pour certains cas il existe une barrière d'énergie potentielle et un autre point d'équilibre stable. Dans le premier cas (figure 3.12a) le maximum global est en  $\beta = 0$  : le système abandonne alors la configuration ouverte et horizontale  $\beta = 0$ , accélère et atteint l'état final  $\beta = \pi/2$ , qui correspond à un état encapsulé. Dans le deuxième cas (figure 3.12b), il existe un point d'équilibre stable autour de  $\beta \simeq 0.35$ , qui correspond à une configuration ouverte (mais pas complètement horizontale) ; comme le maximum global est toujours en  $\beta = 0$ , le système a suffisamment d'énergie totale (à condition que la dissipation ne soit pas trop forte) pour passer le point d'équilibre ainsi que la barrière d'énergie (point *cusp*), et atteindre l'état encapsulé  $\beta = \pi/2$ . Dans le troisième cas (figure 3.12c), il y a encore un point d'équilibre stable intermédiaire ( $\beta \simeq 0.2$ ), mais dans ce cas l'énergie du point *cusp* est plus grande que l'énergie du point d'origine ; l'énergie mécanique du système n'est donc pas suffisante pour passer la barrière d'énergie et atteindre le minimum global. L'état final du système est le point d'équilibre intermédiaire  $\beta \simeq 0.2$ , qui correspond à un état ouvert. Dans le dernier cas (figure 3.12d), la pente de la courbe d'énergie est positive à l'origine, le système n'a donc pas moyen de s'éloigner du point  $\beta = 0$ .

On utilise alors le critère suivant pour déterminer l'état final du système (ouvert ou encapsulé) : l'encapsulation a lieu si l'origine  $\beta = 0$  est le maximum global de la courbe  $\mathcal{E}(\beta)$ . Ce critère permet de déterminer le seuil entre les états finaux ouverts et encapsulés, quelles que soient la vitesse d'impact de la goutte et la longueur de la lamelle. On montre la prédiction basée sur ce critère dans la figure 3.13, qui compare ce seuil théorique aux données expérimentales du chapitre précédent. On remarque que l'accord entre le seuil expérimental et théorique est en général très bon, même avec un modèle simple qui ne résout pas la dynamique de la tige. La figure 3.13 montre aussi la position des quatre points correspondant aux courbes d'énergie de la figure 3.12 ; on voit que le seuil passe entre les points du cas (b) et (c).

On remarque que l'accord entre la prédiction et l'expérience est moins correct quand  $L/L_{ec} > 25$  : dans ce cas, l'hypothèse que la portion non mouillée de la lamelle est une droite est clairement loin de la réalité (les images expérimentales de la figure 2.8 le montrent). La lamelle se replie sous l'action de son propre poids, et par conséquent la barrière d'énergie de gravité construite avec ce modèle est trop grande, ce qui donne une prédiction du seuil trop pessimiste.

### 3.3.4 Conclusion et perspectives

On a présenté un modèle énergétique pour étudier l'interaction entre une goutte et une lamelle élastique. On a discrétisé la géométrie du problème introduisant un nombre très limité

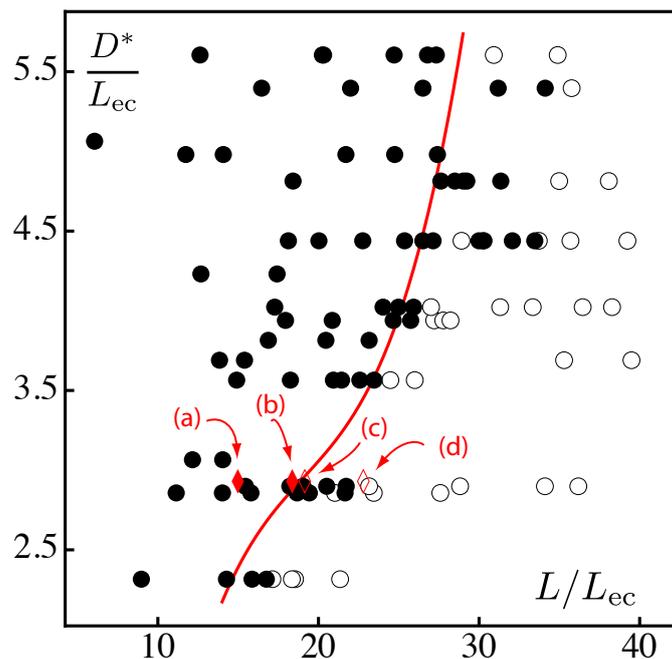


FIGURE 3.13: Diagramme de phase des états finaux du système en fonction de  $L$  et  $D^*$ . Les points noirs et blancs, correspondant à des états fermés et ouverts, sont les résultats expérimentaux (figure 2.9). La courbe rouge représente la frontière théorique entre états fermés et ouverts obtenue avec le critère énergétique. Les points (a), (b), (c) et (d) correspondent aux courbes d'énergie montrées en figure 3.12.

d'éléments de base pour décrire la forme du système. Cela nous a permis d'écrire analytiquement l'énergie du système en fonction de quelques variables, ce qui permet de trouver les configurations d'équilibre par minimisation de l'énergie à travers la solution d'un système d'équations non-linéaires. Les seuls ingrédients physiques considérés sont l'élasticité, la capillarité et la gravité (dans la lamelle). On a négligé le poids du liquide, son inertie ainsi que sa viscosité.

Après avoir validé notre approche sur un problème où seules l'élasticité et la capillarité sont en jeu, on a élargi la modélisation afin d'étudier le problème d'impact de goutte sur lamelle élastique. On a introduit l'idée de stabilité dynamique à partir de la courbe de l'énergie, ce qui nous a permis de construire un diagramme de phase des états finaux en fonction des paramètres du problème expérimental. Bien que ce modèle ne soit pas capable d'étudier la dynamique du problème d'impact, il capture très bien le comportement asymptotique du système expérimental.

Cette approche peut être généralisée pour s'adapter à d'autres problèmes d'interaction élasto-capillaire. Dans Rivetti & Neukirch (2012), nous avons considéré le problème d'une goutte qui soulève une tige pesante, avec une forme de la partie non mouillée qui est déformée par la gravité. Nous avons étudié les seuils d'encapsulation statique et dynamique, et construit un diagramme de phase universel des états possibles du système.

### 3.4 Un modèle plus élaboré

On présente maintenant une modélisation plus sophistiquée du problème de repliement capillaire d'une lamelle élastique. Ce modèle a été conçu pour prédire non seulement l'état final du système, mais aussi pour reproduire de manière qualitative toute la dynamique de repliement. Cette modélisation a été faite en collaboration avec Basile Audoly.

### 3.4.1 Les ingrédients du modèle

On choisit de reproduire la dynamique du système à partir du moment où la goutte est tombée et s'est étalée jusqu'à son extension maximale. Cette approche est possible d'abord grâce à la bijection qui existe entre la vitesse d'impact et la longueur d'étalement de la goutte (équation 2.2). Ensuite, l'approche est justifiée du fait de la séparation des échelles de temps dans le problèmes expérimental (voir section 2.5), qui nous autorise à considérer le problème de repliement comme successif au problème d'impact.

On choisit de garder tous les ingrédients physiques de la partie solide du problème : l'élasticité et la pesanteur de la tige. Inversement, on décide de simplifier considérablement le problème de dynamique de goutte, et en particulier on décide de ne garder que la force capillaire. La goutte qui apparait dans ce modèle est donc une goutte fictive, une sorte de bulle qui n'a pas de poids ou d'inertie, ni de viscosité. Cette goutte fictive déforme la lamelle à cause de la tension de surface de son interface et de la surpression de Laplace qui existe à l'intérieur.

Dans cette vision, ce modèle retient les mêmes acteurs physiques du modèle simplifié proposé dans la section précédente. Néanmoins, on ajoute un ingrédient très important : l'énergie cinétique.

Suivant les idées illustrées dans la première section de ce chapitre, le modèle construit est purement 2D.

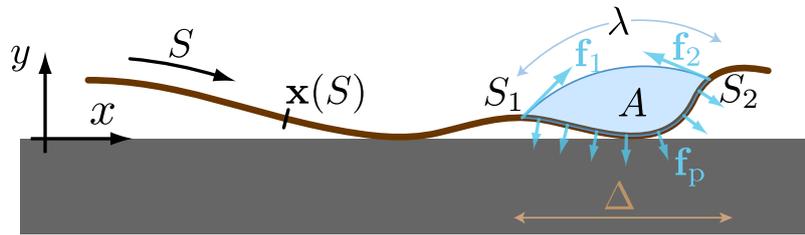


FIGURE 3.14: Schématisation du modèle numérique employé dans cette section. Une tige inextensible soumise à l'action d'une goutte d'aire  $\mathcal{A}$  ancrée aux points  $s_1$  et  $s_2$ . La goutte déforme la tige à travers les tensions de surface  $f_1$  et  $f_2$  et la surpression de Laplace  $f_p$ .

On écrit l'énergie totale du système considéré (figure 3.14). L'énergie potentielle est :

$$\mathcal{E}_p = \int_0^L \left[ \frac{B}{2} |\mathbf{x}''(s, t)|^2 + \mu g \mathbf{x}(s, t) \cdot \mathbf{e}_z \right] ds + \gamma \lambda(V, s_1, s_2, \mathbf{x}(\cdot, t)) \quad (3.25)$$

alors que l'énergie cinétique de la tige est :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \int_0^L \mu |\dot{\mathbf{x}}(s, t)|^2 ds. \quad (3.26)$$

Ici,  $L$  est la longueur de la lamelle,  $s$  l'abscisse curviligne le long de la lamelle,  $0 \leq s \leq L$ , et  $\mathbf{x}(s, t)$  est la position au temps  $t$  du point de coordonnée  $s$ . Le point désigne la dérivée par rapport au temps, et le prime par rapport à  $s$ . Les deux premiers termes qui apparaissent dans la définition de  $\mathcal{E}_p$  sont la formulation classique pour une courbe élastique soumise à la gravité ( $B = EI$  est le module de rigidité et  $\mu$  la masse linéique de la tige). L'interaction avec le fluide

apparaît dans le terme  $\gamma \lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur de l'interface liquide-air. L'interface touche la lamelle aux points de coordonnées  $s_1$  et  $s_2$ . Les points  $s_1$  et  $s_2$  sont calculés à partir de la position du point d'impact et de l'extension de la longueur mouillée :  $(s_1 + s_2)/2 = L - d$  et  $(s_2 - s_1) = \Delta$ . Par rapport à la section précédente, on n'ajoute pas la subtilité du glissement de la ligne de contact au delà de  $\theta^*$ . La longueur de la zone mouillée est donc une constante, et on peut poser  $\Delta(t) = \bar{\Delta} = \Delta$ .

La goutte est traitée de manière quasi-statique : pour toute configuration de la lamelle, l'interface liquide-air est telle qu'elle minimise sa longueur et satisfait la contrainte d'aire imposée. La forme de l'interface est donc un arc de cercle accroché aux points  $s_1$  et  $s_2$ .

A partir du lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_k$  il est possible de déterminer les équations du mouvement. Dans ce calcul, il faut considérer la présence de la contrainte d'inextensibilité de la tige ( $|\mathbf{x}'| = 1$ ) ainsi que la présence d'un support rigide sous la tige ( $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z > 0$ ). Le contact avec le support est supposé sans frottement.

La résolution du problème se fait à travers un code numérique capable d'intégrer les équations du mouvement obtenues du lagrangien. Ce code est basé sur le modèle "Discrete Elastic Rods" de Bergou *et al.* (2008), qui a déjà été validé et qui est reconnu pour sa capacité à résoudre rapidement la dynamique des tiges inextensibles. L'intégration temporelle des équations du mouvement se fait en deux étapes distinctes : une première étape d'intégration temporelle qui ne tient pas compte de la contrainte d'inextensibilité, et une deuxième étape de reconstruction de la solution inextensible par projection de la solution sans contrainte sur un espace de déformations inextensibles (*manifold projection method*, voir Bergou *et al.* (2008) pour les détails). La résolution se fait ici dans une géométrie 2D sans torsion. A chaque intégration temporelle, le profil de la goutte est reconstruit *a posteriori* à partir de la position de la tige  $\mathbf{x}(s)$ .

Dans le code, les valeurs de  $B$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  et le volume du liquide sont obtenus directement des données expérimentales. On remarque que le code demande l'aire de la goutte 2D et non pas le volume : pour passer du volume expérimental  $\mathcal{V} = 15.6 \text{ mm}^3$  à l'aire de la goutte, on a choisi de poser  $A = \mathcal{V}/L_{\text{eg}}$ . Ce choix traduit le fait que la forme ronde de la goutte la rende généralement plus large que  $w$  (la largeur de la lamelle), et donc plus proche de  $L_{\text{eg}}$  que  $w$ . Cette hypothèse sur le passage du 3D au 2D est le seul paramètre ajustable du modèle.

### 3.4.2 Le diagramme de phase numérique

Le diagramme de phase de la figure 3.15 est obtenu à partir d'une série d'environ 800 simulations, sur la même plage de vitesse  $U$  et de localisation du point d'impact  $d$  du diagramme expérimental (figure 2.9).

Dans les simulations, on impose une longueur mouillée  $\Delta$ . Pour construire le diagramme de phase, on a introduit un nombre de Weber fictif  $We_\Delta$  à partir de la relation (2.2) inversée :

$$We_\Delta^{1/2} = \frac{\Delta(U) - \Delta_0}{0.64R} \quad (3.27)$$

Pour chaque point du diagramme, on peut déduire l'état final du système à partir de l'observation, à la fin de la simulation, de la position du point  $s = L$ . On considère que l'état final est fermé si l'extrémité de la lamelle s'est déplacée à gauche du point d'impact :  $x(s = L, t = \infty) < x(s = L - d, t = \infty)$ . L'état final est ouvert dans le cas contraire. A partir de ce critère, on peut tracer une frontière entre les états encapsulés et non encapsulés du

diagramme.

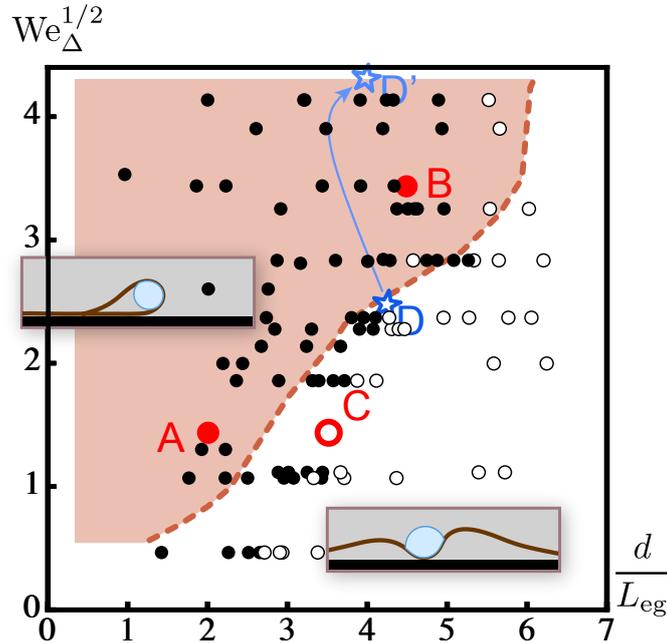


FIGURE 3.15: Diagramme de phase des états finaux du système. Les points noirs et blancs, correspondant à des états fermés et ouverts, sont les résultats expérimentaux (figure 2.9). La courbe pointillée représente la frontière numérique entre états fermés et ouverts obtenue avec le modèle dynamique. Les points A, B, C et D correspondent aux simulations numériques des figures 3.16 et 3.17.

Un bon accord entre frontière numérique et frontière expérimentale existe dans une grande région du diagramme. Seuls les points où  $We < 1$  présentent une légère différence. Dans cette région l'extension de la longueur mouillée  $\Delta$  est comparable à la largeur de la lamelle  $w = 2$  cm, ce qui fait qu'une approche complètement bidimensionnelle n'est plus très correcte.

La figure 3.16 compare la dynamique expérimentale à celle obtenue dans la simulation numérique pour les points A, B et C (dont les positions sont montrées aussi dans le diagramme de phase numérique de la figure 3.15). On remarque que même qualitativement l'accord entre expérience et modèle est satisfaisant.

Pour finir, on propose une façon d'adapter ce modèle afin de prendre en compte des effets complexes comme la coalescence de la goutte satellite (2.4). D'un côté, le fait de traiter la goutte de manière quasi-statique ne permet bien évidemment pas de reproduire une dynamique difficile comme la fragmentation du ligament liquide qui conduit à la formation de la goutte satellite, ni la coalescence des deux gouttes (figure 3.17-a). D'un autre côté, si on oublie cette complexité, et qu'on simule la dynamique du système avec une goutte quasi-statique, le résultat n'est pas du tout satisfaisant, car la forme finale de la simulation numérique est ouverte (figure 3.17-c). Ceci confirme que le rôle de la goutte satellite qui coalesce est fondamental pour l'encapsulation.

On choisit alors d'apporter une modification empirique au système numérique, et en particulier on décide de changer la localisation du point d'ancrage de la goutte quasi-statique de façon à prendre en compte l'augmentation de la longueur mouillée qui apparaît dans l'expérience juste après la coalescence. On mesure sur les images expérimentales l'extension de la longueur mouillée après coalescence, et on déplace le point d'ancrage (de droite) de la même quantité, au même instant de l'expérience. Le résultat est montré dans la figure 3.17-b : non seulement

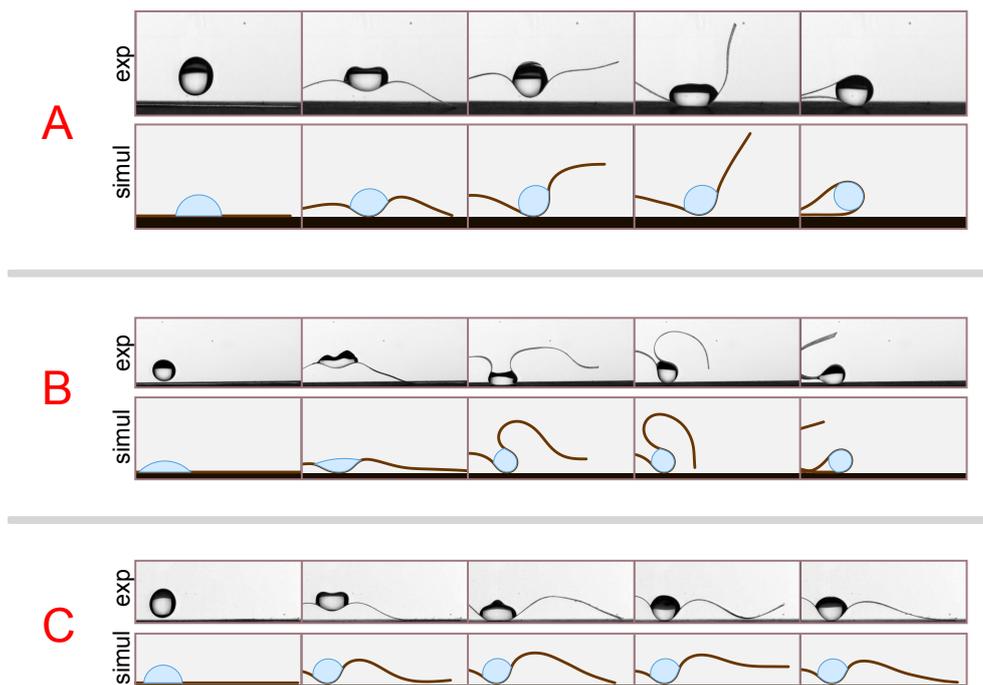


FIGURE 3.16: Comparaison entre la dynamique expérimentale et la simulation numérique pour trois points présentés dans le diagramme de phase expérimental (figure 2.9) et numérique 3.15. (A) Encapsulation à faible vitesse observée pour  $d/L_{eg} \sim 1$ ; (B) Encapsulation à grande vitesse observée pour  $d/L_{eg} > 1$ ; (C) Etat non encapsulé.

cette technique permet de restaurer la forme finale correcte, mais aussi l'accord qualitatif est étonnamment bon.

Cette technique de modification manuelle du point d'ancrage nécessite de savoir si et comment la coalescence expérimentale a lieu : elle ne permet pas de prévoir *a priori* l'état final du système. Pourtant, elle a d'abord l'avantage de consolider numériquement l'idée que la goutte satellite joue un rôle important ; ensuite, elle permet de comprendre comment la coalescence influence la dynamique : c'est par le déplacement de point d'ancrage, et donc par l'augmentation de la longueur mouillée que l'encapsulation se réalise.

Si on garde à l'esprit la bijection qui existe entre  $We$  et  $\Delta$ , on peut maintenant lier le changement de  $\Delta$  au changement de  $We$ , et interpréter la coalescence comme le résultat d'une augmentation fictive de la vitesse d'impact de la goutte. On montre dans le diagramme de phase 3.15 la position du point  $D$  avant et après la coalescence : on remarque que l'augmentation de  $\Delta$  a permis de déplacer le point à l'intérieur de la région des états finaux fermés.

### 3.4.3 Conclusion

Dans cette section on a présenté un modèle dynamique pour le problème de repliement capillaire d'une lamelle élastique. Conscients que la dynamique couplée d'une goutte qui tombe sur une lamelle élastique est un problème trop complexe pour être résolu de manière complète, nous avons choisi de nous focaliser sur la partie solide du système, c'est-à-dire la tige, et de réduire à l'essentiel la partie fluide. Cette approche est justifiée par la séparation des échelles de temps entre la dynamique de l'interface liquide-air et le repliement élastique. On a donc étudié le comportement dynamique d'une tige élastique et pesante soumise à l'action d'une goutte fictive,

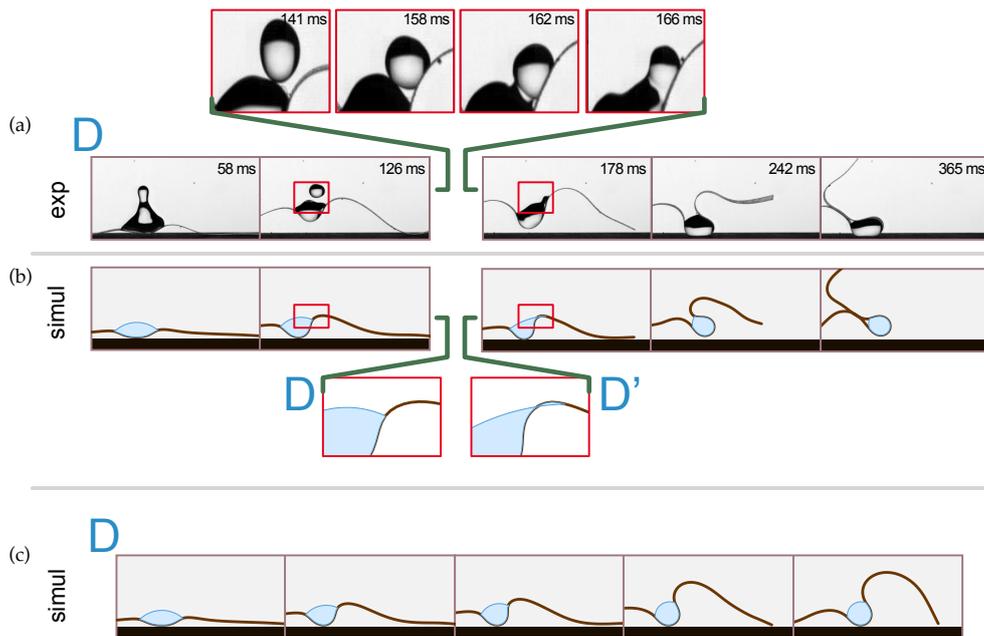


FIGURE 3.17: Comparaison entre la dynamique expérimentale et la simulation numérique pour le point  $D$  du diagramme de phase expérimental (figure 2.9) et numérique 3.15. (a) Séquence photographique expérimentale ; (b) Simulation numérique avec ajustement de la longueur mouillée pour prendre en compte la coalescence de la goutte satellite ; (c) Simulation numérique qui ne prend pas en compte la coalescence. On voit que l'accord est restauré quand on ajuste la longueur de la zone mouillée.

qui agit seulement par le biais de la tension de surface et qui n'a pas de poids ni d'inertie.

On a utilisé un code numérique capable d'intégrer les équations du mouvement d'une tige inextensible, et on a reconstruit un diagramme de phase des états finaux qui est en bon accord avec le diagramme expérimental. On a aussi montré que l'évolution du système numérique correspond très bien à l'évolution expérimentale pour les différents cas de figure du problème. Avec une petite modification *a posteriori* du modèle, nous avons été capables de reproduire très fidèlement la dynamique de la tige lors d'un repliement influencé par la coalescence d'une goutte satellite, ce qui est d'autant plus remarquable qu'on ne simule pas du tout la dynamique de la goutte.

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre et dans le suivant, on abandonne les déformations engendrées par une goutte, et on prend en considération un problème où la déformation de la structure élastique résulte d'un effet combiné de pression hydrostatique et de force capillaire exercées par une interface liquide courbe.

On constate facilement dans la vie de tous les jours que la surface libre d'un liquide au repos est plane et horizontale. Pourtant, la zone proche de la paroi du conteneur fait exception. En effet, le liquide touche la paroi rigide avec un angle de contact prescrit par la construction de Young (voir le premier chapitre), et il en résulte une forme courbée de l'interface. L'interface liquide monte ou redescend, par rapport à l'horizontale, selon que l'angle de contact est respectivement plus grand ou plus petit que  $90^\circ$ . On appelle cette portion courbée de l'interface un ménisque capillaire.

La forme exacte d'un ménisque 2D, qui résulte d'une compétition entre pression hydrostatique et tension de surface, a été décrite pour la première fois par Pierre Simon de Laplace il y a deux siècles (Laplace, 1805).

En présence d'un objet rigide à la surface du liquide, le ménisque modifie la formulation classique du théorème d'Archimède (Keller, 1998), et est responsable de l'attraction mutuelle de plusieurs objets entre eux (Nicolson, 1949; Vella & Mahadevan, 2005). Cette attraction permet de construire des protocoles d'assemblage ou d'alignement des objets selon le design désiré (Cavallaro *et al.*, 2011).

Quand un ménisque interagit avec un corps élastique, la force capillaire peut induire des déformations du solide. On a déjà mentionné les déformations qui ont lieu lorsqu'une structure élancée cherche à percer une interface liquide-air (Chakrapani *et al.*, 2004; Neukirch *et al.*, 2007) ou est extraite d'un bain liquide (Bico *et al.*, 2004).

Ici on concentre plutôt notre attention sur les déformations que subit une structure élastique qui se trouve déjà à l'interface liquide-air. Lorsque cette structure subit une compression axiale, le flambage qui peut se produire présente une longueur d'onde bien définie (Timoshenko, 1940). Si on s'intéresse au régime non linéaire post-flambage, Pocivavsek *et al.* (2008) et Audoly (2011) ont montré expérimentalement et théoriquement que la déformation transverse se localise en un pli. D'autre part, Huang *et al.* (2007) ont étudié la formation des rides sur une plaque qui se trouve entre une interface liquide et une goutte (voir aussi Vella *et al.* (2010)).

D'autres exemples de repliement élastique à la surface d'un liquide concernent les fleurs qui vivent à la surface de l'eau, qui protègent leur matériel génétique (les pistils) grâce au repliement de leur corolle. Ce mécanisme a inspiré à [Reis \*et al.\* \(2010\)](#) une technique pour saisir l'eau d'une surface libre grâce à une élasto-pipette.

Nous nous intéressons dans un premier temps au problème de l'extraction d'une plaque élastique de la surface du liquide. Ce problème avait déjà été étudié par Gay-Lussac et Laplace ([Laplace, 1805](#)) dans le cas d'un disque rigide : ils avaient montré théoriquement et expérimentalement que la force nécessaire à l'extraction du disque est équivalente au poids du disque plus le poids du volume d'eau soulevé par le disque. Bien qu'au premier regard ce résultat semble indépendant de la force capillaire, on voit en analysant plus attentivement le problème que le poids de la colonne d'eau soulevée par le disque dépend de la force capillaire. On souhaite élargir cette l'analyse à un problème d'extraction d'un solide élastique.

On introduit dans la prochaine section une nouvelle longueur caractéristique du problème. Ensuite, dans la section 4.3 on présente le montage expérimental employé pour réaliser les expériences illustrées dans la section 4.4. La description théorique du modèle est donnée en section 4.5. Les résultats sont présentés en section 4.6 pour les faibles longueurs de lamelle et en section 4.7 pour les grandes longueurs. On propose dans la section 4.8 quelques considérations sur les aspects tridimensionnels du problème.

## 4.2 Longueurs caractéristiques

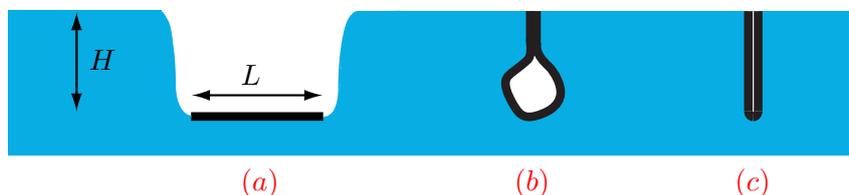


FIGURE 4.1: Un lamelle élastique, de longueur  $L$ , est plongée dans un liquide à un niveau  $H$ . Trois cas de figure sont illustrés : (a) la lamelle est complètement rigide et ne se déforme pas. (b) la lamelle se déforme avec une courbure répartie de manière quasi uniforme. (c) la lamelle se déforme avec une courbure concentrée en un point.

Considérons une lamelle élastique à section rectangulaire, de longueur  $L$ , d'épaisseur  $e$  et de largeur  $w$ . On note  $E$  son module de Young et  $I$  le moment quadratique de la section. Imaginons que la lamelle flotte à la surface de l'eau, et qu'on cherche à la plonger verticalement à l'intérieur du liquide : que se passe-t-il ? La figure 4.1 montre trois différents cas de figure. Limitons-nous, pour simplifier, à considérer une lamelle qui est plongée à un niveau  $H \sim L$ . Si la lamelle est complètement rigide, cas (a), elle plonge dans l'eau sans se déformer : l'énergie d'un tel système est purement hydrostatique et vaut  $\mathcal{E}_{(a)} \sim \rho g L H^2 w \sim \rho g L^3 w$ . Le cas opposé est celui d'un système où l'eau n'est pas déplacée et où la seule énergie en jeu est élastique. La configuration (c) représente cette limite : ici toute l'énergie élastique est concentré en un point. Ce cas est difficilement exploitable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. On montre alors en (b) une approximation où l'énergie élastique est uniformément répartie le long de la lamelle. Si on néglige le volume d'eau déplacé, l'énergie du système s'écrit  $\mathcal{E}_{(b)} \sim EI L/L^2 \sim EI/L$ .

Si on compare l'énergie du cas (a) avec celle du cas (b) on peut trouver une longueur caractéristique :

$$\left(\frac{EI}{\rho g w}\right)^{1/4} = L_{\text{ref}} \quad (4.1)$$

Cette longueur de référence  $L_{\text{ref}}$ , qui compare la charge hydrostatique à la rigidité du système, sera appelée dans la suite *longueur élasto-hydrostatique*, et notée  $L_{\text{eh}}$ . Cette longueur apparaît déjà dans le travail de H. Hertz sur la déformation des plaques flottantes, et elle est reprise par A. Föppl dans son traité de mécanique des plaques (Hertz, 1884; Föppl, 1897).

On comprends alors qu'une lamelle de longueur  $L \gg L_{\text{eh}}$  sera facilement déformée par la pression hydrostatique, alors qu'une lamelle de longueur  $L \ll L_{\text{eh}}$  sera très peu déformée par la pression hydrostatique. On peut facilement relier  $L_{\text{eh}}$  à d'autres longueurs caractéristiques déjà introduites :

$$L_{\text{eh}} = \left(\frac{EI}{\rho g}\right)^{1/4} = \left(\frac{EI}{\gamma} \frac{\gamma}{\rho g}\right)^{1/4} = \left(L_{\text{ec}}^2 L_{\text{gc}}^2\right)^{1/4} = \sqrt{L_{\text{ec}} L_{\text{gc}}}. \quad (4.2)$$

Cette définition de la longueur élasto-hydrostatique est moins précise que celle de la longueur élasto-capillaire. En effet au premier chapitre (dans la figure 1.4) on avait facilement distingué deux états pour lesquels l'énergie était purement capillaire ou purement élastique. Ici, dans le cas (b) de la figure 4.1 l'énergie du système n'est pas purement élastique, car on a négligé le volume liquide déplacé.

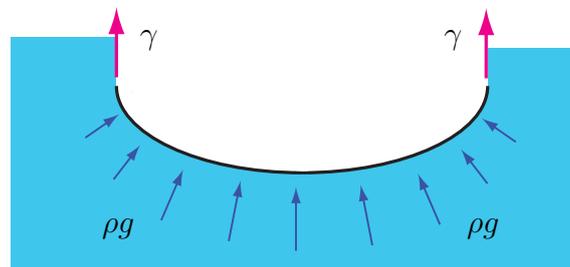


FIGURE 4.2: Une lamelle élastique plongée dans un liquide. Elle est déformée par l'action de la tension de surface,  $\gamma$ , et par l'action de la pression du liquide, proportionnelle à  $\rho g$ .

On ajoute maintenant la contribution de l'énergie de surface dans l'analyse dimensionnelle. Imaginons encore une fois une lamelle qui est plongée dans un liquide (figure 4.2) : quelle force est responsable de sa déformation ? On vient de voir que le rôle de la force hydrostatique dans la déformation est gouverné par le rapport  $L/L_{\text{eh}}$ . D'un autre côté, on a déjà vu dans les chapitres précédents que l'importance de la force capillaire sur une structure allongée est gouvernée par le rapport  $L/L_{\text{ec}}$ . On peut en conclure que le rapport de force entre pression hydrostatique et tension de surface est gouverné par le rapport  $L_{\text{eh}}/L_{\text{ec}}$ . On pose  $L_{\text{eh}}/L_{\text{ec}} = \zeta$  et on a que :

$$\begin{aligned} \text{si } \zeta \gg 1 &\Rightarrow \gamma \text{ domine} \\ \text{si } \zeta \ll 1 &\Rightarrow \rho g \text{ domine} \end{aligned}$$

## 4.3 Le dispositif expérimental

### 4.3.1 Une cellule de Hele-Shaw

Nous avons réalisé toutes les expériences à l'intérieur d'un réservoir rigide dont les dimensions rappellent celles d'une cellule de Hele-Shaw. Le réservoir est constitué de deux plaques carrées en verre, de 25 cm de côté, séparées par un joint de caoutchouc d'épaisseur 5 mm (figure 4.3).

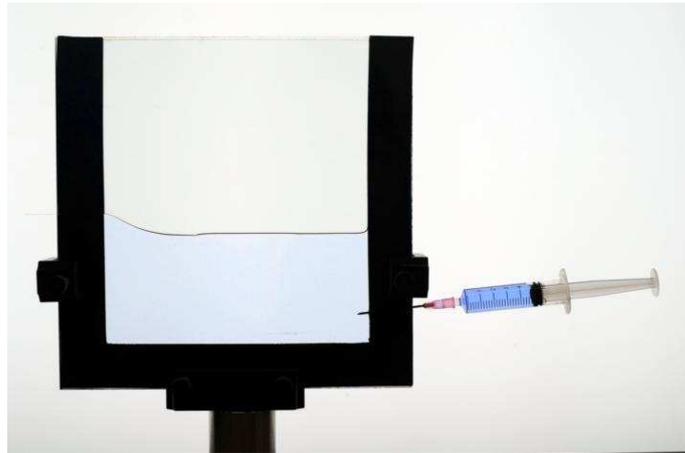


FIGURE 4.3: Photographie du montage expérimental. Le réservoir est constitué de deux plaques en verre, séparées par un joint en caoutchouc. Une lamelle est encastrée dans le joint et est posée sur l'interface eau-air. A l'aide d'une seringue on peut choisir la hauteur de l'interface par rapport à l'encastrement.

Une coupure est réalisée dans le caoutchouc de manière à constituer un encastrement. Le réservoir est ouvert en haut, et rempli d'eau jusqu'au niveau de l'encastrement. Une lamelle est ensuite fixée dans l'encastrement et posée à l'interface eau-air, de manière à être complètement horizontale. Ensuite, à l'aide d'une seringue, on aspire l'eau du réservoir de façon quasi-statique. Le niveau d'eau descend, mais le point de contact entre l'interface et la lamelle reste accroché à l'extrémité de la lamelle si celle-ci est fabriquée avec un matériau hydrophobe. On observe alors la formation d'un ménisque capillaire à l'extrémité de la lamelle.

La figure 4.4 clarifie les notations employées dans la suite. On introduit un repère cartésien centré sur l'encastrement : l'axe  $X$  est orthogonal à l'encastrement et l'axe  $Y$  est orienté selon la direction verticale. La lamelle a une longueur  $L$ , une largeur  $w$  et une épaisseur  $e$ . Le réservoir a une largeur  $d$  et une longueur  $D$ , avec  $d \ll D$  (cellule de Hele-Shaw).  $D$  est en général beaucoup plus grand que  $L$ , ce qui permet de considérer l'interface eau-air loin de la lamelle comme semi-infinie. La différence entre le niveau de l'encastrement,  $Y = 0$ , et le niveau de l'interface eau-air (loin de l'encastrement) est noté  $H$ .

### 4.3.2 Les matériaux employés

On a employé deux matériaux différents pour construire les lamelles. On a d'abord utilisé des feuilles de polyéthylène téréphtalate (PET, un polymère connu aussi sous le nom commercial de Mylar). Les lamelles ont été découpées directement à partir des rouleaux disponibles en commerce avec différentes épaisseurs.

On a ensuite utilisé du Polyvinyl siloxane (PVS), un polymère à base de silicone utilisé

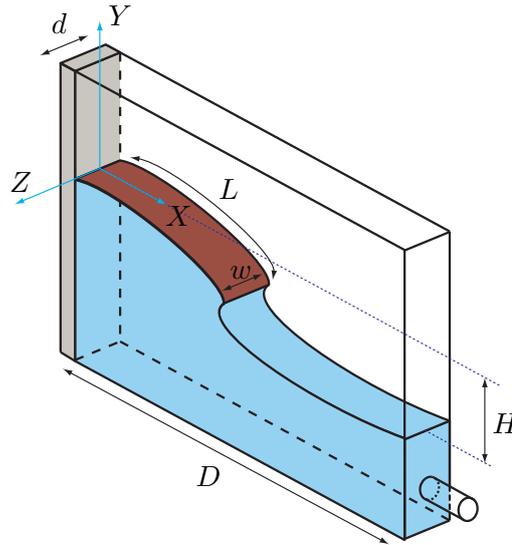


FIGURE 4.4: Schéma du dispositif expérimental, montré dans la figure 4.3, qui clarifie les notations employées. La lamelle a une longueur  $L$  et une largeur  $w$ . La hauteur totale du ménisque élasto-capillaire est notée  $H$ .

généralement comme moule dans les applications odontologiques. Ce matériau est obtenu par réticulation à partir du polymère liquide et d'un agent réticulant. Pour notre application, on laisse le mélange se solidifier à l'intérieur de deux plaques rigides, parallèles et espacées de façon à contrôler précisément l'épaisseur de la feuille polymérisée qui se solidifie entre les plaques. La lamelle est ensuite découpée dans la feuille avec un scalpel.

Toutes les expériences présentées dans la suite se réfèrent à trois types de lamelles, qu'on désigne par commodité par : Mylar fin, Mylar épais et PVS.

Pour mesurer les propriétés physiques des lamelles, on procède de la manière suivante. On fabrique une feuille carrée de 10 cm de côté qu'on pèse sur une balance de précision : le rapport entre la masse et l'aire de la feuille représente la masse surfacique de la feuille,  $\rho_s e$ . On coupe ensuite une lamelle directement sur cette feuille.

Afin de mesurer le module de rigidité, on réalise une épreuve de vibration : on place la lamelle dans une configuration encasté-libre et on l'excite de façon impulsionnelle. On mesure, à partir d'une vidéo avec la caméra rapide, la fréquence  $f$  de vibration de la lamelle. Cette fréquence est liée aux propriétés du système par la relation (Landau & Lifshitz, 1970) :

$$f = \frac{3.52}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_s e w}} \quad (4.3)$$

On peut alors inverser cette relation pour obtenir la valeur de  $EI$ . Cette technique permet d'obtenir le module de rigidité  $EI$  sans avoir à mesurer directement l'épaisseur de la lamelle.

Le tableau 4.1 résume les caractéristiques des trois lamelles qui sont utilisées dans le reste du chapitre.

| Matériau    | $\rho_{se}$ (kg/m <sup>2</sup> ) | $EI/w$ (Nm)          | $L_{ec}$ (mm) | $L_{eh}$ (mm) | $\zeta$ |
|-------------|----------------------------------|----------------------|---------------|---------------|---------|
| Mylar épais | 0.486                            | $1.76 \cdot 10^{-2}$ | 494.3         | 36.6          | 0.07    |
| Mylar fin   | 0.104                            | $1.71 \cdot 10^{-4}$ | 48.7          | 11.5          | 0.24    |
| PVS         | 0.661                            | $1.74 \cdot 10^{-5}$ | 15.5          | 6.5           | 0.48    |

TABLE 4.1: Tableau récapitulatif des propriétés physiques et des longueurs caractéristiques (par rapport à l'eau) des trois lamelles employées dans les expériences.

#### 4.4 Observations expérimentales : équilibre et rupture

La figure 4.5 montre plusieurs configurations d'équilibre pour une lamelle en Mylar fin au fur et à mesure que le niveau d'eau descend ( $H$  augmente). Le Mylar étant hydrophobe, on observe qu'un ménisque capillaire se forme et s'accroche à l'extrémité libre de la lamelle. La forme de ce ménisque évolue avec  $H$ . Considérons l'angle de contact entre la lamelle et le ménisque : quand le système est purement horizontal cet angle vaut  $180^\circ$ . Lors de l'évolution, les images montrent que l'angle diminue : il vaut approximativement  $120^\circ$  dans la dernière image de la figure 4.5.



FIGURE 4.5: Quatre images correspondant à des configurations d'équilibre pour une lamelle en Mylar fin, de longueur  $L = 21.0$  mm, pour quatre valeurs différentes de  $H$ . De la gauche vers la droite  $H = 5.0$  mm, 7.2 mm, 8.9 mm et 12.5 mm. Le trait rouge représente 10 mm.

On montre une autre expérience typique dans la figure 4.6. Ici, la lamelle élastique est réalisée en PVS et a un module de rigidité  $EI$  dix fois plus faible que le Mylar fin (voir tableau 4.1). On observe alors des déformations plus grandes, jusqu'à atteindre les états fortement non linéaires des deux dernières photos. Encore une fois on peut remarquer que le ménisque liquide reste accroché à l'extrémité de la lamelle. Par rapport à la séquence d'images de la figure 4.5, on remarque dans la figure 4.6 que l'angle de contact entre la lamelle et le ménisque croît lors de l'évolution : dans la dernière image, l'angle vaut approximativement  $225^\circ$ .

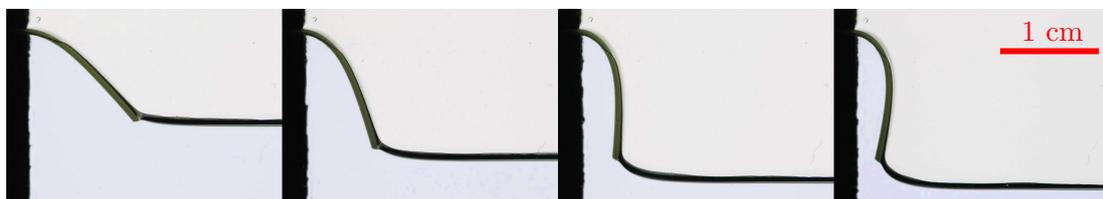


FIGURE 4.6: Quatre images correspondant à des configurations d'équilibre pour une lamelle en PVS, de longueur  $L = 15.8$  mm, pour quatre valeurs différentes de  $H$ . De la gauche vers la droite  $H = 10.7$  mm, 13.6 mm, 16.1 mm et 16.6 mm. Le trait rouge représente 10 mm.

Toutes les images des figures 4.5 et 4.6 correspondent à des configurations d'équilibre, obtenues avec une vidange quasi-statique du réservoir d'eau. Il existe néanmoins un moment, lors de l'évolution, où le système subit un changement inattendu et très rapide. Ce moment correspond

à un détachement du ménisque liquide de l'extrémité de la lamelle, suivi par une invasion d'air dans la région sous la lamelle (figure 4.7). On parlera dans la suite de rupture du système, car ce processus est irréversible : à la fin la lamelle n'est plus connectée au bain liquide et on n'a donc plus d'interaction fluide-structure. Cette rupture a lieu pour une valeur critique de la hauteur du ménisque, qui dépend des propriétés physiques et géométriques du système. On note cette valeur critique  $H = H_{cr}$ .

Le but de la modélisation de la prochaine section sera alors d'un côté de décrire les formes d'équilibre, et d'un autre côté de prévoir la hauteur de rupture du système.

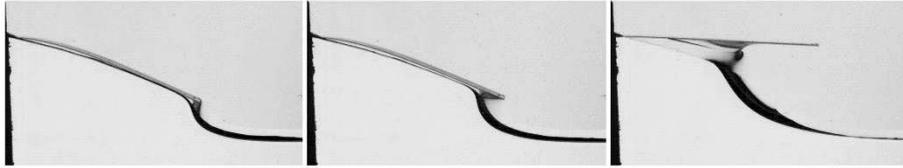


FIGURE 4.7: Séquence illustrant la rupture du ménisque élasto-capillaire : la ligne triple se détache de l'extrémité et l'air envahit la région sous la lamelle. Les images ont été enregistrées avec une caméra rapide, et l'intervalle entre deux images successives vaut 82 ms.

## 4.5 Description théorique

Dans toute la section, on limitera la description à un système 2D (figure 4.8), invariant par translation selon  $Z$ . Cette hypothèse est justifiée du fait que toutes les lamelles employées sont des structures élancées ( $L \gg w$  et  $L \gg e$ ), pour lesquelles il est légitime d'utiliser les équations des poutres. Cependant, le liquide est influencé par la forme du réservoir, et en particulier il existe un ménisque au niveau des parois latérales. Comme la cellule a une largeur du même ordre que la longueur capillaire ( $d \sim L_{gc}$ ), ce ménisque occupe entièrement la dimension transversale. On reviendra dans la section 4.8 sur le rôle de ce ménisque et en général sur les effets 3D.

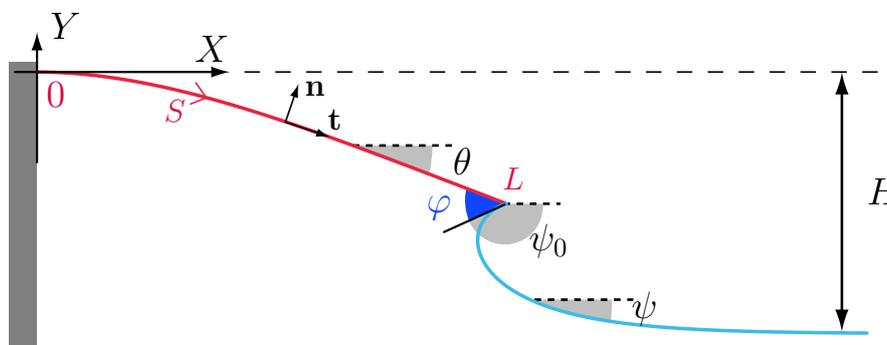


FIGURE 4.8: Schéma des notations utilisées dans la modélisation 2D de la lamelle (portion rouge) et du ménisque liquide (portion bleue). L'angle avec l'horizontale de la lamelle et celui du ménisque liquide sont notés respectivement  $\theta$  et  $\psi$  (ici,  $\theta < 0$  et  $\psi < 0$ ). On appelle  $\varphi$  l'angle de contact entre la lamelle et le ménisque.

### 4.5.1 Partie liquide

La pression en tout point du liquide est donnée par la loi hydrostatique :

$$p(Y) = p_a - \rho g(Y + H) \quad (4.4)$$

où  $p_a$  est la pression de l'air. Quand  $H \neq 0$ , toute la portion de liquide  $-H < Y < 0$  est en dépression par rapport à l'air. Au passage de l'interface eau-air, la pression passe de manière discontinue de  $p$  à  $p_a$ , et ce saut de pression est lié à la courbure  $\kappa$  de l'interface par la loi de Laplace :  $\Delta p = -\gamma\kappa$  (le signe moins apparaît ici car le liquide est en dépression par rapport à l'air, contrairement à une goutte). On introduit l'angle  $\psi$  entre la tangente à l'interface et la direction horizontale. Par convention  $\psi$  est considéré positif s'il est dans le sens trigonométrique, et il est lié à la courbure par la relation géométrique  $\kappa = \frac{d\psi}{dS} = \psi'(S)$ ,  $S$  étant l'abscisse curviligne le long de l'interface. Cette dernière relation permet de réécrire la loi de Laplace :

$$\gamma \psi'(S) = \rho g (Y_m(S) + H) \quad (4.5)$$

où on a désigné par  $Y_m$  la position verticale de l'interface. Si on constate qu'en tout point de l'interface la position verticale et l'angle sont liés par la relation  $Y'_m(S) = \sin \psi(S)$ , on peut alors écrire :

$$\psi''(S) = \frac{1}{L_{gc}^2} \sin \psi(S) , \quad (4.6)$$

qui est l'équation typique d'un ménisque liquide, où l'on a fait apparaître la longueur gravito-capillaire  $L_{gc} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ . Dans le cas d'un ménisque qui s'annule à l'infini ( $\psi(S \rightarrow \infty) = 0$ ), l'équation (4.6) peut facilement être intégrée. Une première intégration permet d'écrire la hauteur du ménisque en fonction de l'angle :

$$\psi'(S) = \frac{Y_m(S) + H}{L_{gc}^2} = -\frac{2}{L_{gc}} \sin \frac{\psi(S)}{2} , \quad (4.7)$$

et une deuxième intégration permet d'arriver à la forme de  $\psi(S)$  :

$$\psi(S) = 4 \arctan \left( \tan \frac{\psi_0}{4} \exp \frac{-S}{L_{gc}} \right) . \quad (4.8)$$

L'angle  $\psi_0$  est une constante d'intégration, dont la valeur est liée à l'angle de contact entre le liquide et la paroi. Dans notre système le ménisque présente un angle vif avec l'extrémité de la lamelle, et l'angle de contact n'est donc pas défini (on a vu dans les images expérimentales que l'angle varie en fonction du système). On verra un peu plus loin la façon dont  $\psi_0$  peut ici être déterminé.

### 4.5.2 Partie élastique

Dans l'approche 2D qu'on a décidé d'employer, la lamelle peut être décrite par des équations de poutre inextensible. On introduit l'angle  $\theta$  entre la tangente à la lamelle et la direction horizontale ( $\theta$  est positif s'il est dans le sens trigonométrique). La figure 4.6 a montré qu'il existe des configurations avec de grandes rotations de la lamelle, on choisit donc d'écrire les équations non-linéaires d'une poutre inextensible. On introduit alors le repère local de la lamelle ( $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ),

avec  $\mathbf{t} = \cos \theta(S) \mathbf{e}_x + \sin \theta(S) \mathbf{e}_y$  le vecteur unitaire tangent à la lamelle,  $\mathbf{n} = -\sin \theta(S) \mathbf{e}_x + \cos \theta(S) \mathbf{e}_y$  le vecteur unitaire normal (orienté vers la partie non mouillée) et  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{e}_z$  le vecteur binormal.

La lamelle se trouve à l'interface entre l'eau et l'air : elle est donc soumise à une pression  $p_a$  sur le côté supérieur et à une pression  $p$  sur le côté inférieur. La force distribuée effective qui est responsable de la déformation de la lamelle est (par unité de largeur)  $\mathbf{f} = -\rho g (Y + H) \mathbf{n}$ , avec  $S \in (0, L)$  l'abscisse curviligne. On néglige le poids de la lamelle car elle flotte toujours sur l'interface eau-air.

Les équations d'équilibre (équilibre des forces internes par unité de largeur  $\mathbf{F}$  et équilibre des moments internes par unité de largeur  $\mathbf{M}$ ) pour une poutre peuvent s'écrire sous la forme (équations de Kirchhoff, voir Dill (1992)) :

$$\mathbf{F}'(S) + \mathbf{f}(S) = 0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M}'(S) + \mathbf{t}(S) \times \mathbf{F}(S) = 0 \quad (4.10)$$

On peut projeter ces équations le long des trois axes (on remarque que, dans l'approche 2D, le moment interne est seulement le long de  $\mathbf{b}$ ) pour obtenir :

$$F'_x(S) = -\rho g (Y(S) + H) \sin \theta(S) \quad (4.11)$$

$$F'_y(S) = \rho g (Y(S) + H) \cos \theta(S) \quad (4.12)$$

$$EI\theta''(S) = F_x(S) \sin \theta(S) - F_y(S) \cos \theta(S) \quad (4.13)$$

Dans la dernière ligne, on a introduit la loi de comportement en flexion  $EI\theta'(S) = M(S)$ . A ce système d'équations peuvent s'ajouter deux relations géométriques entre la position d'un élément infinitésimal et l'angle qu'il forme (relation dues à l'inextensibilité de la tige) :

$$X'(S) = \cos \theta(S) \quad (4.14)$$

$$Y'(S) = \sin \theta(S) . \quad (4.15)$$

Il faut maintenant introduire des conditions limites pour ces équations différentielles. La condition d'encastrement donne d'abord  $X(0) = Y(0) = \theta(0) = 0$ . On a ensuite le fait que la courbure s'annule à l'extrémité  $L$  de la tige (il n'y a pas de moment appliqué) :  $\theta'(L) = 0$ . Deux relations supplémentaires sont données par la force capillaire qui agit en  $S = L$ . La force capillaire a une intensité  $\gamma$  et est ici orientée dans la direction du ménisque, qui forme un angle  $\psi_0$  avec l'horizontale (voir l'équation 4.8). Cela permet d'écrire que  $F_x(L) = \gamma \cos \psi_0$  et  $F_y(L) = \gamma \sin \psi_0$ .

Il est utile d'écrire les deux dernières conditions en fonction de l'angle de contact  $\varphi$  entre lamelle et ménisque. La relation entre  $\psi_0$  et  $\varphi$  est obtenue tout simplement à partir de la figure 4.8 :  $\psi_0 + \pi = \theta(L) + \varphi$ . A ce stade, l'angle  $\psi_0$  et l'angle  $\varphi$  ne sont toujours pas connus.

On résume les conditions limites du problème :

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 ; Y(0) = 0 \\ \theta(0) &= 0 ; \theta'(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$F_x(L) = -\gamma \cos (\theta(L) + \varphi) ; F_y(L) = -\gamma \sin (\theta(L) + \varphi)$$

### 4.5.3 Fermeture du problème

Comme l'angle  $\varphi$  n'est pas connu, il faut trouver une équation supplémentaire pour pouvoir résoudre le problème. Cette équation est donnée par la condition d'accrochage du ménisque liquide à l'extrémité de la lamelle :

$$Y(S = L) = Y_m(S_m = 0) \quad (4.17)$$

Autrement dit, on demande à la solution couplée du problème  $(Y(S), Y_m(S_m))$  d'être continue. On calcule d'abord  $Y_m(S_m = 0)$ . L'intégration de l'équation (4.8) permet d'écrire :

$$Y_m(0) = - \int_0^\infty \sin \psi(S_m) dS_m - H = -2L_{gc} \sin \frac{\psi_0}{2} - H. \quad (4.18)$$

Si maintenant on fait apparaître  $\varphi$ , on trouve la condition qui permet la fermeture du problème (qu'on appellera dans la suite condition de continuité) :

$$Y(L) = 2L_{gc} \cos \left( \frac{\varphi + \theta(L)}{2} \right) - H. \quad (4.19)$$

### 4.5.4 Une équation pour une seule variable

Les équations différentielles (4.11, 4.12, 4.13) peuvent être résolues avec les conditions limites (4.16). Néanmoins, pour avantager la résolution numérique, mais aussi pour une meilleure compréhension du problème, il est pratique de compacter ces équations afin d'obtenir une équation différentielle d'ordre plus élevé mais avec moins d'inconnues. On commence par dériver l'équation (4.13) par rapport à  $S$  (pour simplifier la lecture, on ne montre plus la dépendance en  $S$  des inconnues) :

$$EI \theta''' = F'_x \sin \theta - F'_y \cos \theta + \theta' (F_x \cos \theta + F_y \sin \theta) \quad (4.20)$$

On introduit dans ce résultat les équations (4.11) et (4.12) :

$$EI \theta''' = -\rho g(Y + H) + \theta' (F_x \cos \theta + F_y \sin \theta). \quad (4.21)$$

On pose :

$$\begin{aligned} u &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \quad \Rightarrow \\ u' &= F'_x \cos \theta + F'_y \sin \theta + \theta' (-F_x \sin \theta + F_y \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.22)$$

On utilise encore une fois les équations (4.11) et (4.12) pour les deux premiers termes, et l'équation (4.13) pour le dernier. On trouve :

$$u' = -EI\theta'\theta'' \quad \Rightarrow \quad u = EI\left(-\frac{1}{2}\theta'^2 + K\right) \quad (4.23)$$

Pour déterminer la constante  $K$ , on évalue (4.22) et (4.23) en  $S = L$  :

$$u(L) = EI\left(-\frac{1}{2}\theta'(L)^2 + K\right) = F_x(L) \cos \theta(L) + F_y(L) \sin \theta(L) \quad (4.24)$$

Maintenant, les conditions limites données plus haut (équation 4.16) nous sont utiles, car elles nous donnent  $\theta'(L)$ ,  $F_x(L)$  et  $F_y(L)$ . Si on les insère on trouve donc que :

$$u(L) = EI K = -\gamma \cos(\theta(L) + \varphi) \cos \theta(L) - \gamma \sin(\theta(L) + \varphi) \sin \theta(L) = -\gamma \cos \varphi \quad (4.25)$$

On peut reprendre l'équation (4.21) et écrire finalement :

$$EI \theta''' = -\rho g(Y + H) - EI \frac{1}{2} \theta'^3 - \gamma \theta' \cos \varphi \quad (4.26)$$

Il faut trouver une troisième condition limite pour cette équation, à ajouter à celles déjà écrites ( $\theta(0) = 0$  et  $\theta'(L) = 0$ ). L'équation (4.13) combinée avec les conditions limites (4.16) donne :

$$EI \theta''(L) = -\gamma \cos(\theta(L) + \varphi) \sin \theta(L) + \gamma \sin(\theta(L) + \varphi) \cos \theta(L) = \gamma \sin \varphi \quad (4.27)$$

Une ultime dérivation de cette dernière équation permet d'écrire l'évolution du système en fonction de la seule inconnue  $\theta(S)$  :

$$EI(\theta'''' + \frac{3}{2} \theta'^2 \theta'') + \gamma \theta'' \cos \varphi + \rho g \sin \theta = 0 . \quad (4.28)$$

Encore une fois, il faut ajouter une condition limite supplémentaire. On peut utiliser l'équation (4.26), évaluée en  $S = L$  :

$$EI \theta'''(L) = -\rho g(Y(L) + H) . \quad (4.29)$$

Dans la suite on utilisera, selon le besoin, l'équation (4.28) pour  $\theta$  seul, ou l'équation (4.26) couplée avec l'équation (4.15) pour  $\theta$  et  $Y$ .

### 4.5.5 Equations sans dimension

On peut maintenant procéder à l'adimensionnalisation des équations. On choisit d'utiliser l'échelle de longueur  $L_{eh}$ , ce qui permet d'introduire les variables sans dimension suivantes :

$$s = \frac{S}{L_{eh}} ; x = \frac{X}{L_{eh}} ; y = \frac{Y}{L_{eh}} ; h = \frac{H}{L_{eh}} ; \ell = \frac{L}{L_{eh}} ; \ell_{gc} = \frac{L_{gc}}{L_{eh}} \quad (4.30)$$

On utilise ces variables dans l'équation (4.28). Le fait d'avoir introduit  $L_{eh}$  dans l'adimensionnalisation permet de faire disparaître tous les coefficients de l'équation (4.28), à l'exception du terme capillaire :

$$\theta''''(s) + \frac{3}{2} \theta'(s)^2 \theta''(s) + \ell_{gc}^2 \cos \varphi \theta''(s) + \sin \theta(s) = 0 . \quad (4.31)$$

Les équations (4.14) et (4.15) sont utilisées pour reconstruire la déformée, et sont déjà sous forme adimensionnelle :

$$x'(s) = \cos \theta(s) \quad (4.32)$$

$$y'(s) = \sin \theta(s) \quad (4.33)$$

Les conditions limites du problème deviennent :

$$\begin{aligned} x(0) = 0 & \quad ; \quad y(0) = 0 & \quad ; \quad \theta(0) = 0 \\ \theta'(\ell) = 0 & \quad ; \quad \theta''(\ell) = \ell_{\text{gc}}^2 \sin \varphi & \quad ; \quad \theta'''(\ell) = -(y(\ell) + h) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Et pour finir la condition de fermeture s'écrit :

$$y(\ell) = 2 \ell_{\text{gc}} \cos \left( \frac{\varphi + \theta(\ell)}{2} \right) - h \quad (4.35)$$

Une remarque importante reste à faire : à partir de l'équation (4.2) on peut déduire que  $L_{\text{ec}} = L_{\text{eh}}^2 / L_{\text{gc}}$ . On obtient alors que :

$$\zeta = \frac{L_{\text{eh}}}{L_{\text{ec}}} = \frac{L_{\text{gc}}}{L_{\text{eh}}} = \ell_{\text{gc}}. \quad (4.36)$$

Le terme  $\ell_{\text{gc}}$  traduit donc l'importance de la force capillaire dans la déformation vis-à-vis de la pression hydrostatique. On remplace  $\ell_{\text{gc}}$  par  $\zeta$  dans la suite.

## 4.6 Comparaison entre prévisions théoriques et expériences

Le système d'équations (4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35) gouverne l'équilibre du ménisque élasto-capillaire. Dans ce problème, il reste trois paramètres sans dimensions :  $\ell$ , la longueur adimensionnée de la lamelle, qui quantifie l'importance de la force hydrostatique par rapport à la rigidité à la flexion ;  $\zeta$  compare le rôle de la tension de surface à celui des efforts de pression ;  $h$ , la hauteur sans dimension du ménisque élasto-capillaire, est le paramètre-clé du problème, qui permet de faire évoluer le système de l'état plat ( $h = 0$ ) jusqu'à l'état critique ( $h = h_{\text{cr}}$ ).

On montre d'abord la comparaison entre la forme théorique du ménisque et les photos expérimentales. Ensuite, on se concentre sur l'évolution du système, à partir de  $h = 0$ , afin d'expliquer la rupture du ménisque qui a été montrée expérimentalement dans la section 4.4. Dans tous les cas de figure, la résolution des équations a été faite numériquement avec Mathematica.

### 4.6.1 La forme du ménisque élasto-capillaire

Les images des figures 4.5 et 4.6 montraient des formes d'équilibre du ménisque élasto-capillaire. On cherche à retrouver ces formes avec le modèle théorique. Le premier cas (lamelle en Mylar fin de la figure 4.5) est repéré par les paramètres sans dimensions  $\ell = 1.83$  et  $\zeta = 0.24$ . La figure 4.9 compare les images expérimentales aux déformées théoriques. On remarque un très bon accord entre les deux déformées.

La figure 4.10 effectue la même comparaison dans le cas d'une lamelle en PVS (figure 4.6). Dans ce cas les paramètres sans dimensions sont  $\ell = 2.44$  et  $\zeta = 0.48$ . Ici, l'accord avec les expériences est moins bon, surtout pour les formes comportant de grandes rotations. On peut parler d'un accord plus qualitatif que quantitatif.

### 4.6.2 Une succession d'états d'équilibre

Quand  $h = 0$ , il existe une solution triviale du système d'équations (4.31 - 4.35) :  $y = \theta = 0$ . Cette solution correspond à une lamelle complètement plate, et à une interface liquide-air plate aussi. Dans ce cas, l'angle  $\psi_0$  est nul, ce qui implique  $\varphi = \pi$ . A partir de cet état initial, on veut

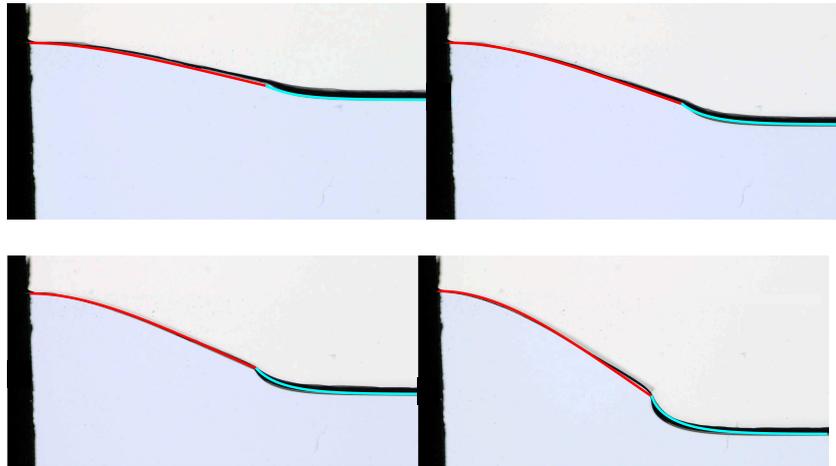


FIGURE 4.9: Comparaison entre les formes d'équilibre expérimentales (montrées dans les images de la figure 4.5) et les résultats théoriques. La lamelle a une longueur sans dimension  $\ell = 1.83$ . La hauteur sans dimension du ménisque est, de la gauche vers la droite et de haut au bas,  $h = 0.44, 0.63, 0.77$  et  $1.09$ .

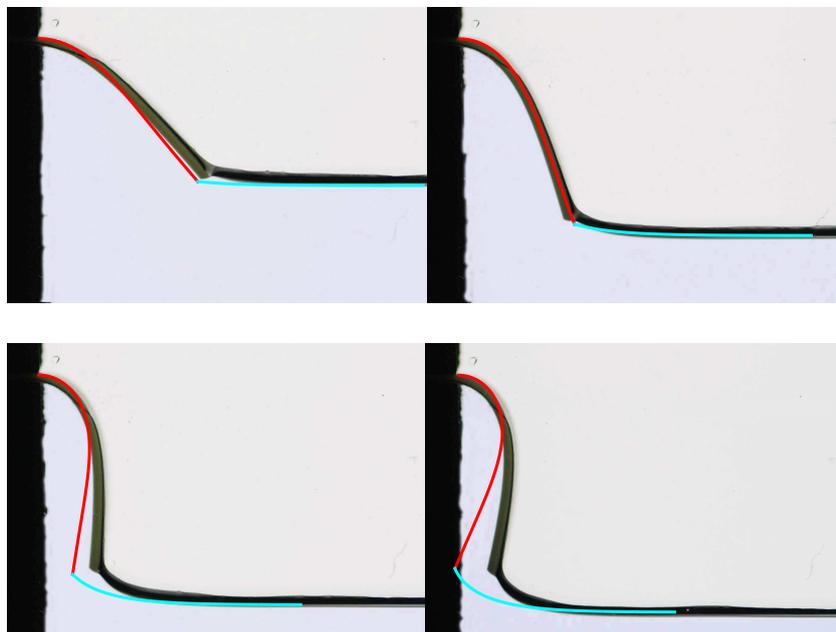


FIGURE 4.10: Comparaison entre les formes d'équilibre expérimentales (montrées dans les images de la figure 4.6) et les résultats théoriques. La lamelle a une longueur sans dimension  $\ell = 2.44$ . La hauteur sans dimension du ménisque est, de la gauche vers la droite et de haut au bas,  $h = 1.65, 2.06, 2.48$  et  $2.56$ .

connaitre l'évolution du ménisque élasto-capillaire en fonction de  $h$ . On emploie un algorithme de continuation, qui permet de suivre le chemin des solutions d'équilibre. On choisit de travailler dans le plan  $(h, \varphi)$ .

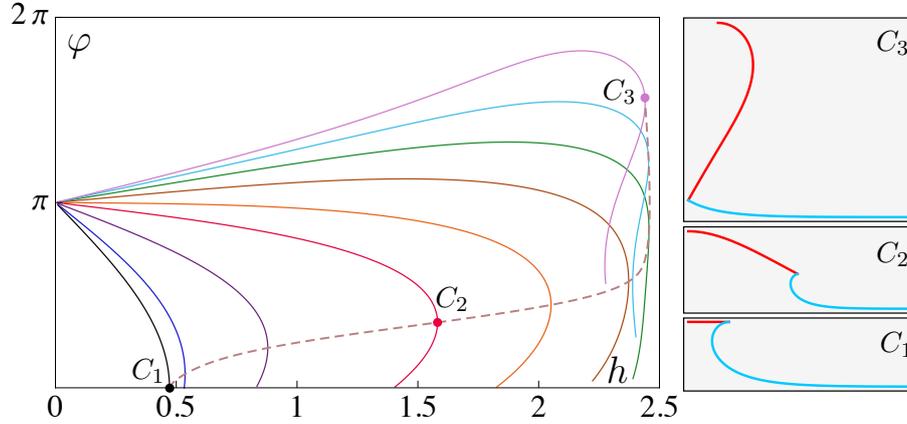


FIGURE 4.11: A gauche, chaque courbe montre l'évolution de la solution d'équilibre dans le plan  $(h, \varphi)$  en fonction de la valeur de  $\ell$ . La courbe noire ( $\bullet$ ) représente le cas limite  $\ell = 0$ . Les autres courbes représentent, dans l'ordre,  $\ell = 1$  ( $\bullet$ ),  $1.5$  ( $\bullet$ ),  $1.8$  ( $\bullet$ ),  $2$  ( $\bullet$ ),  $2.2$  ( $\bullet$ ),  $2.4$  ( $\bullet$ ),  $2.6$  ( $\bullet$ ),  $2.8$  ( $\bullet$ ). La courbe pointillée représente le lieu des points limite. A droite, la forme du ménisque élasto-capillaire aux points limite  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  est montrée.

La courbe qui représente le chemin des solutions d'équilibre dépend de  $\ell$  et  $\zeta$ . Dans un premier temps, on fixe la valeur  $\zeta = 0.24$  (valeur pour une lamelle en Mylar fin) et on se concentre sur le rôle joué par  $\ell$  lors de l'évolution. La figure 4.11 montre les courbes de continuation (une courbe pour chaque valeur de  $\ell$ ). Toutes les courbes partent du point  $(h = 0, \varphi = \pi)$ , l'état initial.

La courbe noire représente le cas limite  $\ell \simeq 0$  : les efforts de pression ne produisent aucune déformation sur la lamelle. L'évolution du système, dans ce cas, correspond à l'évolution d'un ménisque purement liquide, accroché à l'extrémité de la lamelle. A partir de  $h = 0$ , ce ménisque augmente sa hauteur jusqu'à la valeur critique  $h_{cr} = 2\ell_{gc} = 0.48$  (point  $C_1$ ). La forme du système en  $C_1$  est montrée à droite dans la figure. Au-delà de  $h_{cr} = 0.48$ , il n'existe plus de solution mathématique. Expérimentalement, si on impose  $h > 0.48$ , le ménisque n'a pas d'autre possibilité que de se détacher de la lamelle.

Les autres courbes de la figure 4.11 correspondent à d'autres valeurs de  $\ell$  comprises entre 0.5 et 2.8. Pour tous ces cas, la lamelle se déforme quand  $h > 0$ . Selon la valeur de  $\ell$ , on constate que l'angle de contact  $\varphi$  croît ou décroît avec  $h$ , comme il a déjà été montré expérimentalement. On remarque que toutes ces courbes présentent un point limite (ou *fold point*)  $(h_f, \varphi_f)$ , c'est-à-dire un point où la courbe atteint une valeur maximale de  $h$ . Les points  $C_2$  et  $C_3$  sont, par exemple, les points limite des courbes  $\ell = 1.8$  et  $\ell = 2.8$ , respectivement. On montre la forme du système aux points limite  $C_2$  et  $C_3$  à droite de la figure 4.11. Lors de l'évolution, le système atteint le point  $(h_f, \varphi_f)$  et à partir de ce moment il n'y a plus de solution mathématique possible si  $h > h_f$ .

La position  $(h_f, \varphi_f)$  du point limite varie dans le plan selon la valeur  $\ell$  considérée. Dans la figure 4.11 le lieu de tous les points limite est tracé avec une courbe pointillée. La courbe  $h_f(\ell)$  (figure 4.12) représente la hauteur du point limite en fonction de  $\ell$ . Comme on pouvait s'attendre, on voit que  $h_f$  augmente avec  $\ell$ . En effet, plus la lamelle est longue, plus elle se

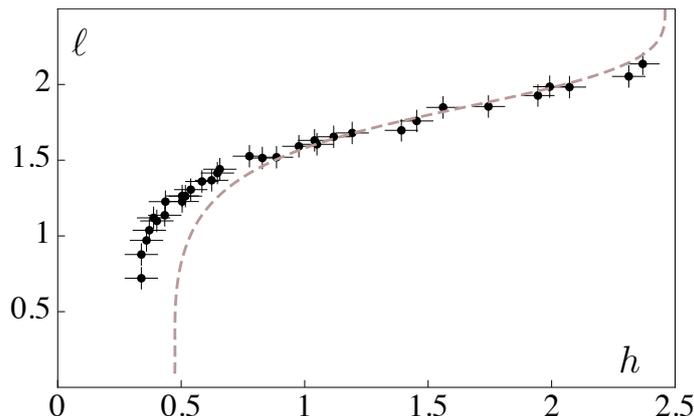


FIGURE 4.12: Mesure expérimentale (points noirs) et prévision théorique (courbe pointillée) de la hauteur de rupture du ménisque  $h_{\text{cr}}$  en fonction de la longueur de la lamelle  $\ell$ . La courbe pointillée est basée sur le lieu des points limite montré dans la figure 4.11.

déforme facilement sous l'action de la pression hydrostatique. Cette intuition est confirmée aussi par les déformées aux points critiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  qui sont montrées dans la figure 4.11.

On a compris que le point limite représente un point critique : expérimentalement, le fait d'imposer une valeur de  $h$  plus grande que  $h_f$  va nécessairement entraîner une rupture du système. En d'autres termes, la condition  $h = h_f$  est suffisante pour prévoir une rupture. Cette condition est-elle nécessaire? Est-ce que la situation de rupture expérimentale déjà montrée correspond à un système au point limite, ou est-ce qu'elle a lieu avant? Pour répondre aux questions, nous avons enregistré l'évolution du système avec une caméra, et repéré la hauteur critique à laquelle la rupture a lieu. On a effectué plusieurs expériences avec différentes longueurs de lamelle : cela nous a permis de trouver une trentaine de points expérimentaux  $(h_{\text{cr}}, \ell)$ , qu'on montre dans la figure 4.12.

L'accord entre la courbe  $h_f(\ell)$  et les points expérimentaux est assez bon. Cependant, avec un regard un peu critique, on perçoit une tendance expérimentale qui dévie de la prévision théorique quand  $\ell$  diminue. L'accord est très bon tant que  $\ell \geq 1.5$ , mais il devient de moins en moins correct quand  $\ell$  décroît. En particulier, si  $\ell < 1.5$ , on mesure une rupture pour  $h_{\text{cr}} < h_f$ , ce qui montre qu'il n'est pas nécessaire d'atteindre le point limite pour avoir une rupture. Il faut regarder dans le détail le processus de rupture pour comprendre les raisons de cette déviation.

### 4.6.3 L'angle critique

On reprend la figure représentant les courbes de continuation, et on se concentre sur la forme du ménisque élasto-capillaire au moment de la rupture. La figure 4.13 montre à nouveau les courbes de continuation de la figure 4.11, ainsi que deux images expérimentales enregistrées au moment de la rupture.

Le point  $C_4$  est le point limite de la courbe de continuation d'une lamelle avec  $\ell = 2.2$ . Ce point est le point critique pour lequel on s'attend à avoir la rupture du système. La photo en haut montre l'instant de la rupture pour une lamelle de longueur  $\ell = 2.2$ . Si le modèle est correct, on s'attend à trouver dans la photo expérimentale ce qui est prévu par la théorie, et en particulier on s'attend à un angle  $\varphi_4 = 103^\circ$ . Les lignes oranges qui sont superposées à l'image décrivent un angle de  $103^\circ$ , et on observe un très bon accord avec l'expérience. On peut en conclure qu'au

point  $C_4$  le modèle capture fidèlement le moment de la rupture.

Le point  $C_5$  est un autre point limite, pour une lamelle  $\ell = 1$ . De la même manière que le point précédent, on s'attend à avoir un angle au moment de la rupture qui vaut  $\varphi_5 = 13^\circ$ . Néanmoins, l'expérience montre cette fois (photo en bas) que la prévision théorique est largement fautive. L'angle  $\varphi$  mesuré expérimentalement au moment de la rupture vaut plutôt  $80^\circ$ .

En effet, il existe pour ce système un angle de contact critique,  $\varphi_c$ , tel que la ligne triple n'arrive plus à rester accrochée si  $\varphi < \varphi_c$ . Par conséquent, si la solution d'équilibre du système se caractérise par un angle de contact plus petit que la valeur critique, cette solution est expérimentalement instable. Dès que  $\varphi = \varphi_c$ , la ligne triple se détache de l'extrémité de la lamelle, et comme ce processus est irréversible, il a pour conséquence la rupture du système.

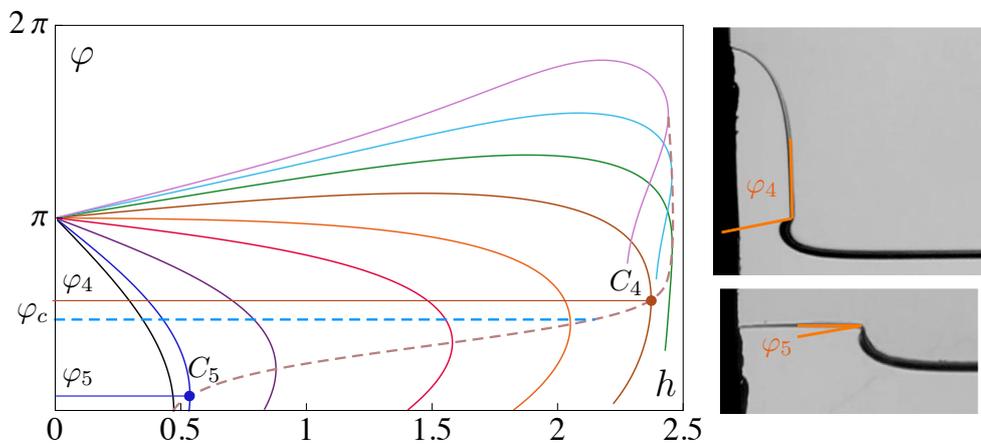


FIGURE 4.13: A gauche, les mêmes courbes de la figure 4.11. Les courbes pointillées représentent les lieux d'instabilité : en marron (●) le lieu des points limite, en bleu (●) la droite  $\varphi = \varphi_c$ .  $C_4$  et  $C_5$  sont les points limite des courbes  $\ell = 2.2$  et  $\ell = 1$  respectivement. A droite, deux images expérimentales au moment de la rupture pour  $\ell = 2.2$  (haut) et  $\ell = 1$  (bas), et les angles  $\varphi_4$  et  $\varphi_5$  correspondant aux points  $C_4$  et  $C_5$ . On remarque que  $\varphi_4$  correspond à l'angle de rupture expérimental, alors que  $\varphi_5$  est beaucoup plus petit.

La rupture due à l'avancée de la ligne triple ressemble, du point de vue expérimental, à la rupture qui a lieu au point limite. Cependant, une grande différence existe entre les deux mécanismes : la rupture à  $h = h_f$  est intrinsèque à la physique du problème, car il n'existe plus de solution mathématique d'équilibre au-delà de cette limite. La rupture à  $\varphi > \varphi_c$  est en revanche due au fait que la solution d'équilibre qui existe devient expérimentalement instable (instabilité due à une contrainte d'inégalité).

On a déduit la valeur critique de l'angle de contact à partir de plusieurs vidéos expérimentales : pour une interface eau-air et une lamelle en Mylar fin on a  $\varphi_c = 80^\circ \pm 5^\circ$ . La ligne horizontale  $\varphi = \varphi_c$  est montrée dans la figure 4.13 avec un trait pointillé bleu. Cette ligne est un nouveau lieu de points critiques. On peut encore une fois montrer cette ligne dans le plan  $(h, \ell)$  (figure 4.14). Cette nouvelle courbe représente la hauteur critique de rupture  $h_\varphi(\ell)$ , différente de  $h_f(\ell)$ , et elle est pertinente seulement si la rupture par angle critique anticipe la rupture au point limite. On voit que la courbe  $h_\varphi(\ell)$  est en très bon accord avec les données expérimentales dans toute la région où elle s'applique.

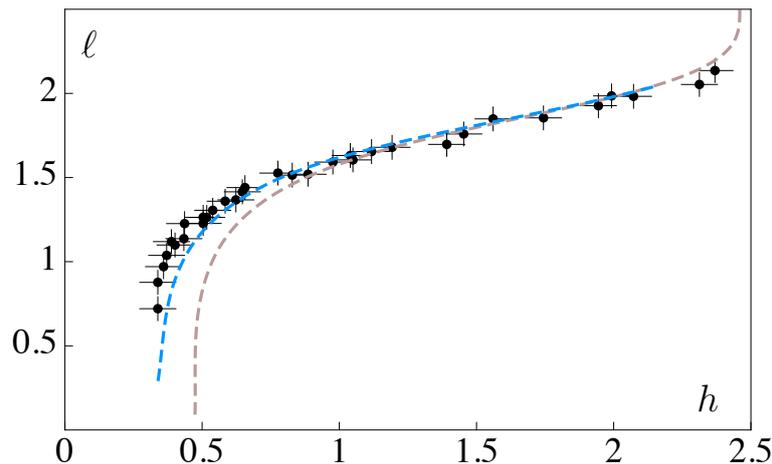


FIGURE 4.14: Comparaison entre expériences et modèle pour la hauteur de rupture en fonction de la longueur de la lamelle. Les points expérimentaux sont les mêmes que ceux présentés dans la figure 4.12. Les courbes pointillées représentent les prévisions théoriques. En marron (●), prévision basée sur le lieu des points limite ; en bleu (●), prévision basée sur la valeur critique de l'angle de contact  $\varphi = \varphi_c$ .

#### 4.6.4 Le rôle de la tension de surface

Tous les résultats montrés aux paragraphes précédents sur l'évolution du système ont été obtenus pour une valeur fixée de  $\zeta$ . On veut maintenant clarifier le rôle joué par  $\zeta$  dans notre système.

Comme on l'a déjà expliqué dans la section 4.2,  $\zeta$  quantifie le rapport entre la force capillaire et la force hydrostatique dans la déformation d'une structure allongée. La force capillaire domine la déformation quand  $\zeta \gg 1$  et est négligeable quand  $\zeta \ll 1$ .

Si on considère un problème comme le nôtre, où le liquide est toujours le même ( $L_{gc} = \text{cste}$ ), on constate à partir de l'équation (4.36) que plus une lamelle est rigide, plus  $\zeta$  devient petit. Peut-on en arriver à négliger complètement la force capillaire, et poser  $\zeta = 0$ ? Du point de vue mathématique, c'est possible : cela revient à résoudre un problème où l'interface eau-air est horizontale et n'exerce aucune force sur la lamelle. Mais du point de vue physique on est confronté à un paradoxe, car la seule raison pour que l'interface eau-air reste accrochée à l'extrémité de la lamelle est la tension de surface. Si on n'a plus du tout de tension de surface, dès que  $h > 0$  le liquide n'a plus aucun avantage, du point de vue énergétique, à rester accroché à la lamelle. Il en résulte donc que sans tension de surface la rupture du ménisque élastique est immédiate, elle a lieu à  $h = 0$ . Cette considération a déjà été faite dans le travail de [Reis et al. \(2010\)](#) : la force capillaire a été négligée dans les calculs, mais elle est en même temps l'ingrédient essentiel de la réussite de l'élasto-pipette.

Expérimentalement, on a à disposition trois types de lamelles avec trois différentes valeurs de  $\zeta$  (voir tableau 4.1). On repère la hauteur critique de rupture, en fonction de  $\ell$ , pour les trois lamelles. On montre dans la figure 4.15(a) ces points expérimentaux dans le plan  $(h, \ell)$ , comme on l'a fait au paragraphe précédent. On voit clairement que les trois séries de points sont distantes les unes des autres. Ce résultat signifie que la tension de surface a un rôle important dans le processus de rupture, même si  $\zeta < 1$ . En effet, on peut arriver à une superposition de tous les points si on fait entrer  $\zeta$  en jeu : la superposition a lieu dans le plan  $(h/\zeta, \ell)$ , figure 4.15(b).

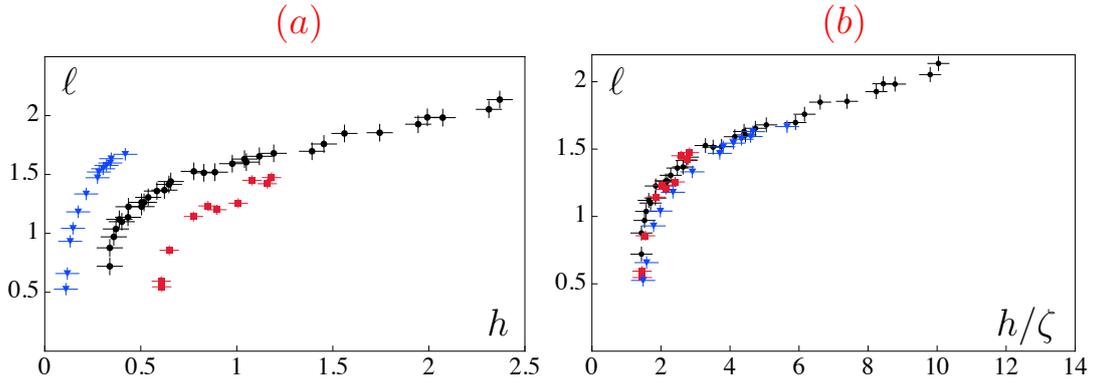


FIGURE 4.15: Mesures expérimentales de la hauteur de rupture du ménisque élasto-capillaire pour trois différentes lamelles : Mylar fin (●), Mylar épais (▼) et PVS (■). La superposition des données n'a pas lieu dans le plan  $(h, \ell)$  de la figure (a) mais elle est possible dans le cas (b), où la hauteur critique est divisée par  $\zeta$ .

## 4.7 Comportement universel des lamelles très longues

Dans toute la section précédente, on a montré (expérimentalement et théoriquement) des configurations où  $\ell \sim 1$ . On veut maintenant analyser le cas où la lamelle est très flexible par rapport à la force hydrostatique, c'est-à-dire le cas  $\ell \gg 1$ .

### 4.7.1 Solution externe et couche limite

Tout d'abord, nous proposons une mise sous forme adimensionnelle différente de celle de la section 4.5. On pose  $\tilde{s} = S/L$  et  $\tilde{y} = Y/H$ . Ce choix implique que la longueur de la lamelle est unitaire et la hauteur du ménisque l'est aussi. On travaille sur les équations (4.15) et (4.26). Leur mise sous forme sans dimension est :

$$\begin{cases} \frac{h}{\ell} \tilde{y}'(\tilde{s}) = \sin \theta(\tilde{s}) \\ \frac{1}{\ell^3 h} \left( \theta'''(\tilde{s}) + \frac{1}{2} \theta'(\tilde{s})^3 \right) + (\tilde{y}(\tilde{s}) + 1) + \frac{\zeta^2}{\ell h} \theta'(\tilde{s}) \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

où on a repris les notations  $\ell = L/L_{eh}$ ,  $h = H/L_{eh}$  et  $\zeta = \ell_{gc} = L_{gc}/L_{eh}$ .

**Solution externe :** Dans une première approximation, on fait tendre  $\ell$  à l'infini, ou bien  $1/\ell \rightarrow 0$ . Le système se simplifie :

$$\begin{cases} \sin \theta(\tilde{s}) = 0 \\ \tilde{y}(\tilde{s}) + 1 = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

On trouve une solution très simple :

$$\boxed{\tilde{y}(\tilde{s}) = -1 \quad \text{et} \quad \theta(\tilde{s}) = 0} \quad (4.39)$$

Cette solution correspond à une lamelle plate qui se trouve en  $\tilde{y} = -1$ , c'est-à-dire en  $Y = -H$ , à l'interface liquide-air. Cette solution plate se caractérise par  $\varphi = \pi$ . On remarque que cette solution est indépendante de  $\ell$  et  $\zeta$ .

Cette approximation ne satisfait pas la condition limite d'encastrement  $\tilde{y}(0) = 0$ . On a trouvé

une solution externe du problème, mais il existe aussi une couche limite interne, dans laquelle les termes qu'on a simplifiés ne sont pas négligeables.

**Solution interne :** Pour trouver la solution interne, on introduit une nouvelle variable  $s^*$  telle que  $\tilde{s} = \epsilon s^*$ , avec  $s^* = O(1)$  et  $\epsilon \ll 1$ . Si on utilise la nouvelle variable dans le système (4.37) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{h}{\ell} \frac{1}{\epsilon} \tilde{y}' = \sin \theta \\ \frac{1}{\ell^3 h} \frac{1}{\epsilon^3} \left( \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 \right) + (\tilde{y} + 1) - \frac{\zeta^2}{\ell h} \frac{1}{\epsilon} \theta' = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

A ce système s'ajoutent les conditions limites (conditions limites à la paroi et conditions de raccordement avec la solution externe) :

$$\tilde{y}(0) = 0, \theta(0) = 0, \tilde{y}(\infty) = -1, \theta(\infty) = 0 \quad (4.41)$$

Dans la première équation du système (4.40), il faut que le terme de droite soit balancé par celui de gauche, si on ne veut pas retrouver la solution externe. On trouve alors l'épaisseur de la couche limite :  $\epsilon = h/\ell$ . On peut insérer ce résultat dans la deuxième équation, et le système qui en résulte est :

$$\begin{cases} \tilde{y}' = \sin \theta \\ \frac{1}{h^4} \left( \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 \right) + (\tilde{y} + 1) - \frac{\zeta^2}{h^2} \theta' = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Si on regarde en détail la deuxième équation du système (4.42), on s'aperçoit que le terme hydrostatique est toujours d'ordre un. Quel que soit la valeur de  $h$ , il faut qu'au moins un autre terme (capillaire ou élastique) balance le terme hydrostatique, faute de quoi on retrouve la solution externe. On illustre dans les prochains paragraphes les différents scénarios.

#### 4.7.2 L'élasticité seule s'oppose à la force hydrostatique

Si on imagine que le terme capillaire est négligeable, la deuxième équation du système (4.42) se réduit à :

$$\frac{1}{h^4} \left( \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 \right) + (\tilde{y} + 1) = 0 \quad (4.43)$$

Cette équation traduit le fait que dans la couche limite la rigidité à la flexion de la lamelle s'oppose à la force hydrostatique, et cela même si  $\ell \gg 1$ . L'application du principe de moindre dégénérescence (PMD) à cette équation a comme conséquence que  $h \sim 1$ . On a résolu numériquement l'équation (4.43) et on a trouvé que les solutions existent tant que  $h < 2.83$ .

Reprenons le système (4.42) : si  $h \sim 1$ , le terme capillaire est d'ordre  $\zeta^2$ . Pour que ce terme soit négligeable il faut que  $\zeta^2 \ll 1$ .

Pour résumer, si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- on a une lamelle qui est très flexible vis-à-vis de la force hydrostatique ( $\ell \gg 1$ )
- on peut négliger l'effet de la tension de surface par rapport à l'élasticité ( $\zeta^2 \ll 1$ )

alors il existe une hauteur maximale du ménisque élasto-capillaire  $h = 2.83$  qui ne pourra jamais être dépassée. Autrement dit, même si on travaille avec une lamelle cent fois plus longue que  $L_{eh}$  (une lamelle qui est donc très flexible) le ménisque élasto-capillaire qu'on pourra observer aura au maximum une hauteur de l'ordre de  $L_{eh}$ .

### 4.7.3 La capillarité seule s'oppose à la force hydrostatique

Ce scénario est moins intuitif, car on a travaillé jusqu'à maintenant avec l'idée que la tension de surface contribuait aussi à la déformation (en mesure significative ou négligeable selon la valeur de  $\zeta$ ). Néanmoins, si dans la deuxième équation du système (4.42) on peut négliger le terme élastique, on a :

$$(\tilde{y} + 1) - \frac{\zeta^2}{h^2} \theta' = 0 \quad (4.44)$$

Si on applique le PMD à cette équation, on trouve que  $h \sim \zeta$ . Ce résultat est valable seulement si dans l'équation (4.42) le terme élastique est négligeable : comme  $h \sim \zeta$ , on en conclut que le terme élastique est négligeable si  $\zeta^4 \gg 1$ .

Une dérivation supplémentaire de l'équation (4.44) nous donne :

$$\sin \theta - \frac{\zeta^2}{h^2} \theta'' = 0 \quad (4.45)$$

Cette équation est formellement identique à l'équation (4.7) : c'est l'équation d'un ménisque liquide. En effet, puisque dans ce problème la capillarité balance la force hydrostatique, et que l'élasticité a été négligée, la forme du système est alors donnée par une équation de type ménisque. Cependant, l'élimination du terme élastique a pour conséquence que l'équation (4.44) est d'ordre un, et elle ne peut pas satisfaire toutes les conditions limites du problème interne (équation 4.41). Il existe donc une deuxième couche limite, proche de la paroi, où on est obligé de garder tous les termes de l'équation (4.42). Cela revient à résoudre le problème complet (ce qui sera fait dans le prochain paragraphe).

Pour résumer, si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- on a une lamelle qui est très flexible vis-à-vis de la force hydrostatique ( $\ell \gg 1$ )
- on peut négliger l'effet de l'élasticité par rapport à la tension de surface ( $\zeta^4 \gg 1$ )

alors la hauteur maximale du ménisque élasto-capillaire est du même ordre de grandeur que  $\zeta$ . Le ménisque élasto-capillaire a dans ce cas une forme très proche de celle d'un ménisque capillaire, à l'exception d'une petite zone proche de la paroi, où l'élasticité assure le respect des conditions d'encastrement.

### 4.7.4 Capillarité et élasticité s'opposent à la force hydrostatique

On considère le cas plus général, où aucun terme du système (4.42) ne se simplifie. On effectue une résolution numérique du système et on compare le résultat à une image expérimentale.

On a pris une lamelle en Mylar fin de longueur  $L = 12L_{eh}$ , ce qui permet d'appliquer l'approximation des lamelles très flexibles. L'image expérimentale considérée (figure 4.16) correspond à une configuration où  $H = 21.9$  mm, ce qui donne  $h = 1.91$ .

Dans la résolution numérique du système (4.42) (avec les conditions limites (4.41)) on se contente d'intégrer le système pour  $0 < \tilde{s} < 10$ . On raccorde ensuite cette solution à la solution externe (4.39). La figure 4.16 montre la comparaison entre la solution numérique et l'expérience. On remarque qu'un très bon accord existe entre les deux.



FIGURE 4.16: Comparaison entre une image expérimentale et une solution théorique, dans le cadre d'une configuration d'équilibre d'une lamelle avec  $\ell \gg 1$  (ici  $\ell = 12.2$ ). La solution théorique est composée de la solution interne (rouge) obtenue numériquement à partir de l'équation (4.42) avec  $h = 1.91$  et  $\zeta = 0.24$ , et de la solution externe (verte) donnée par l'équation (4.39).

## 4.8 Effets tridimensionnels

On cherche dans cette section à compléter le modèle par une vision tridimensionnelle du problème.

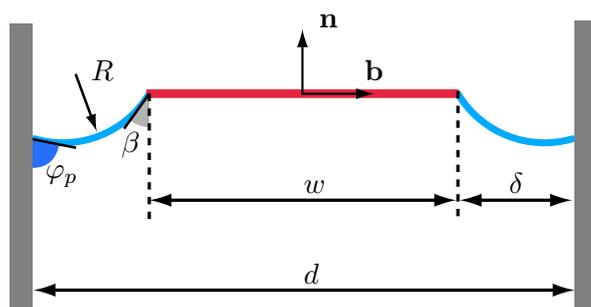


FIGURE 4.17: Schéma du ménisque élasto-capillaire vu en section orthogonale à la lamelle (c'est-à-dire dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ ). Les ménisques latéraux ont une forme en arc de cercle, de rayon  $R$  et angle de contact à la paroi  $\varphi_p$ .

Comme expliqué dans la section 4.3, il existe dans le dispositif expérimental un espacement entre la lamelle et les parois latérales qui est nécessaire si on veut éviter le frottement contre les parois. Il y a donc une très fine interface liquide-air entre la lamelle et les parois.

On se place dans le repère local de la lamelle  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , et on montre dans la figure 4.17 une vue du système dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ . L'interface latérale liquide-air y apparaît courbée. En effet, elle est soumise au saut de pression qui existe entre le liquide (pression  $p$ , donnée par l'équation (4.4)) et l'air (pression constante  $p_a$ ). Pour la loi de Laplace, cette interface a donc une courbure  $\kappa \sim \Delta p$ . On peut considérer que la seule courbure qui nous intéresse est celle qui est dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ , d'ordre  $1/\delta$ , car la courbure dans le plan  $(x, y)$  est d'ordre  $1/L$  et est donc négligeable vis-à-vis de l'autre (car  $\delta \ll L$ ). De plus, dans toutes les expériences l'espacement  $\delta$  est tel qu'on peut négliger le rôle de la gravité dans la forme de l'interface latérale (car  $\delta \ll L_{gc}$ ). Ceci a pour conséquence que le profil de l'interface dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$  est un arc de cercle.

Par la suite, on parlera d'interface latérale ou ménisque latéral. Ce ménisque est responsable de deux aspects tridimensionnels importants, d'abord parce qu'une force capillaire agit tout le long des côtés de la lamelle, ce qui n'a pas été considéré dans le modèle 2D. Ensuite, le ménisque

peut se détacher des côtés de la lamelle (de la même manière que le ménisque qui est attaché à l'extrémité) et causer une rupture du système. On illustre dans les paragraphes suivants ces différents aspects.

#### 4.8.1 Mesure de l'angle de contact aux parois

Une variable importante dont on aura besoin par la suite est l'angle de contact entre le liquide et les parois latérales, noté  $\varphi_p$ . Contrairement à l'angle  $\varphi$  entre lamelle et liquide, qui varie avec  $H$ , l'angle entre la paroi latérale et le liquide est une propriété physico-chimique du dispositif expérimental et peut être mesuré. On a décidé de mettre en œuvre une mesure de  $\varphi_p$  *in situ*, de façon à rester le plus proche possible de la géométrie du ménisque élasto-capillaire. On enlève la lamelle élastique et on garde le réservoir rempli d'eau. L'eau touche les parois latérales et forme un ménisque sur toute la largeur du réservoir. L'idée de la mesure consiste à relier de manière univoque la hauteur du ménisque à l'angle de contact.

On prend une photographie du ménisque vu latéralement. Dans cette l'image (figure 4.18), l'eau et l'air sont transparents, et seule la zone occupée par le ménisque apparaît claire, à cause des phénomènes de réfraction à la traversée d'un dioptré courbe. A partir de l'image, on a accès à la mesure de la hauteur totale du ménisque,  $h_p$ . A côté, on mesure l'espacement entre les deux parois latérales, noté  $d$  (la figure 4.18 clarifie les notations).

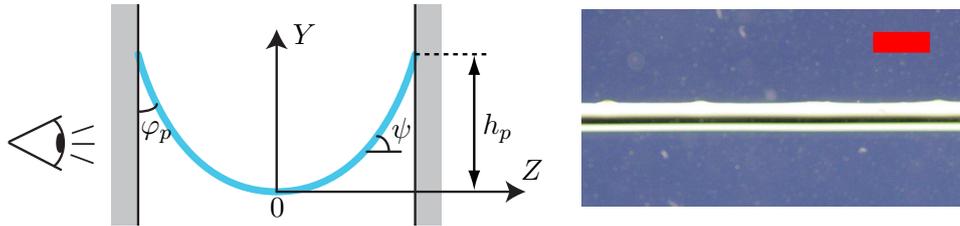


FIGURE 4.18: Mesure de l'angle de contact à la paroi  $\varphi_p$ . Gauche : Schématisation de l'expérience, la hauteur du ménisque est mesurée par observation directe. Droite : Photographie de la paroi dans laquelle on peut observer la trace laissée par le ménisque (la barre rouge représente 1 mm).

Pour relier  $h_p$  et  $d$  à l'angle  $\varphi_p$ , on reprend l'équation (4.7) qui donne la forme générale d'un ménisque liquide :

$$\psi''(s) = \frac{1}{L_{gc}^2} \sin \psi(s) \quad (4.46)$$

avec les conditions limites suivantes :  $\psi(0) = 0$  (par symétrie) et  $\psi'(0) = \kappa_0$ .

Ici  $\kappa_0$  désigne la courbure du ménisque au centre, et n'est pas connue. Il existe alors une famille de solutions  $\psi(s, \kappa_0)$ , paramétrées par  $\kappa_0$ . Parmi toutes ces solutions, on cherche celle qui décrit la forme du ménisque expérimental. Elle se caractérise par le fait que le profil du ménisque touche la paroi  $x = d/2$  à une hauteur  $y = h_p$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{s_p} \sin \psi(s, \kappa_0) ds &= y(s_p) - y(0) = h_p \\ \int_0^{s_p} \cos \psi(s, \kappa_0) ds &= x(s_p) - x(0) = \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ces deux relations permettent de trouver les valeurs de  $s_p$  et  $\kappa_0$ . Une fois la solution expérimen-

tale  $\psi(s)$  connue, l'angle de contact à la paroi est donné par  $\varphi_p = 90^\circ - \psi(s_p)$ . Pour de l'eau en contact avec une paroi en verre, on a trouvé que  $\varphi_p = 20^\circ \pm 3^\circ$ .

### 4.8.2 Correction des équations

En présence de la lamelle élastique, l'existence d'un ménisque latéral implique la présence d'une force capillaire tout le long des côtés de la lamelle. L'intensité de cette force, par unité de longueur, est  $\gamma$ . Comme toutes les équations de la section 4.5 sont écrites par unité de largeur, l'intensité de la force latérale à considérer est alors  $\hat{\gamma} = \gamma/w$ .

La figure 4.17 montre que cette force a une composante dans la direction normale et une composante dans la direction de la binormale à la lamelle. La seule qu'on prend en considération est celle située le long de  $\mathbf{n}$ , car la composante le long de  $\mathbf{b}$  est responsable d'un étirement latéral de la lamelle, nul dans le cas d'un système inextensible. Dans un premier temps on montre comment déterminer l'angle  $\beta$  qui donne la composante normale, et ensuite on corrige les équations du problème.

On a fait l'hypothèse que le ménisque latéral a une forme en arc de cercle. Le rayon du cercle,  $R$ , est déterminé par le saut de pression à l'interface (loi de Laplace) :

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{\gamma}{\Delta p} = \frac{L_{gc}^2}{Y + H} \quad (4.48)$$

On voit que  $R = R(Y)$  et que le rayon le plus petit se trouve près de l'encastrement ( $R(0)$ ). L'équation de l'arc de cercle dans le plan  $(n, b)$  peut être déterminée, car on dispose d'un nombre suffisant d'informations. Il s'agit de résoudre un problème de géométrie cartésienne dans lequel l'inconnue est le centre  $(n_c, b_c)$  du cercle qui a pour équation :

$$(n - n_c)^2 + (b - b_c)^2 = R^2 \quad (4.49)$$

Les inconnues  $b_c$  et  $n_c$  sont déterminées si on impose que :

1. le rayon du cercle est donné par  $R = L_{gc}^2/(Y + H)$ .
2. le cercle passe par le point  $(n = 0, b = w/2)$
3. le cercle doit former un angle  $\varphi_p$  avec la droite  $b = d/2$

La solution de ce problème donne accès à l'expression de  $\beta$  :

$$\beta(Y) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{-\delta + R \cos \varphi_p}{\sqrt{R^2 \sin^2 \varphi_p - \delta^2 + 2\delta R \cos \varphi_p}} \right) \quad (4.50)$$

où on a fait apparaître  $\delta = d/2 - w/2$ . Cette expression est valable seulement sous l'hypothèse (expérimentale) que  $\varphi_p < 90^\circ$ . Suivant les combinaisons des paramètres  $R(Y)$ ,  $\delta$  et  $\varphi_p$ ,  $\cos \beta$  peut être positif ou négatif, ce qui signifie que la tension de surface tire les côtés respectivement vers le bas ou vers le haut.

On peut maintenant ajouter un terme de correction 3D aux équations du problème, ce qui est simple car la force capillaire latérale agit dans la même direction normale que la pression hydrostatique. Il s'agit, d'une certaine manière, d'une correction de l'intensité de cette force. Il

en résulte donc que l'équilibre des efforts internes (équations 4.11 et 4.12) s'écrit :

$$F'_x(S) = [-\rho g (Y(S) + H) - 2\hat{\gamma} \cos \beta(S)] \sin \theta(S) \quad (4.51)$$

$$F'_y(S) = [\rho g (Y(S) + H) - 2\hat{\gamma} \cos \beta(S)] \cos \theta(S) \quad (4.52)$$

Cela nous amène à une nouvelle formulation de l'équation (4.26) :

$$EI \theta'''(S) = -\rho g (Y(S) + H) - EI \frac{1}{2} \theta'(S)^3 - \gamma \theta'(S) \cos \varphi - 2\hat{\gamma} \cos \beta(S) \quad (4.53)$$

Sa mise sous forme sans dimensions (avec le même adimensionnement de la section 4.5) devient :

$$\theta'''(S) = (Y(S) + H) - \frac{1}{2} \theta'(S)^3 - \zeta^2 \theta'(S) \cos \varphi - 2\zeta \hat{L}_{gc} \cos \beta(S) \quad (4.54)$$

où on a posé  $\hat{L}_{gc} = L_{gc}/w$ . Toutes les autres équations et conditions limites restent inchangées. On remarque qu'il n'est plus possible d'écrire une équation pour la seule variable  $\theta$ , car  $\beta = \beta(Y(S))$ , et une dérivation supplémentaire ne permet pas d'éliminer la variable  $Y$ .

La figure 4.19 montre une superposition entre profil expérimental du système et résultat théorique. On propose la même configuration de la dernière image de la figure 4.10, à laquelle on ajoute la courbe théorique corrigée par les effets 3D. On peut remarquer un meilleur accord entre modèle et expérience.



FIGURE 4.19: Superposition d'une photographie expérimentale et de deux profils théoriques, sans correction 3D (pointillé) et avec correction 3D (ligne continue). Ici,  $\ell = 2.44$ ,  $h = 2.56$ ,  $\zeta = 0.48$  et  $\hat{L}_{gc} = 0.65$ .

### 4.8.3 Rupture du système par invasion d'air latérale

On a déjà expliqué que le ménisque latéral doit supporter le saut de pression  $\Delta p$  qui existe entre liquide et air. Peut-on demander au ménisque de supporter n'importe quelle valeur de  $\Delta p$ ? L'expérience montre que non : dans la figure 4.20 une séquence d'images enregistrées à la caméra rapide illustre la rupture latérale du ménisque élasto-capillaire. On peut notamment observer l'effondrement des ménisques latéraux. L'air est en surpression par rapport au liquide, et cherche donc à pénétrer par les côtés. Ce phénomène est particulièrement important à proximité

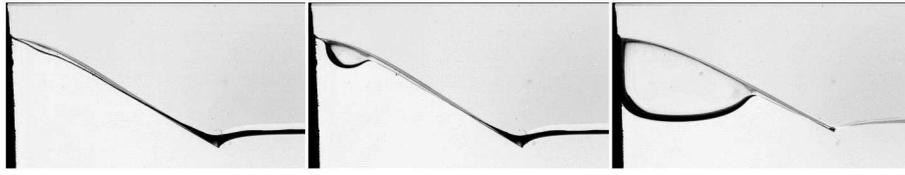


FIGURE 4.20: Séquence illustrant la rupture du ménisque élasto-capillaire par invasion d'air latérale. On peut noter la création d'une poche d'air dans une zone proche de l'encastrement. Les images ont été enregistrées avec une caméra rapide, et l'intervalle entre deux images successives est de 110 ms.

de l'encastrement, là où la dépression est la plus grande. Si la surpression est suffisamment grande, l'air peut casser les ménisques latéraux et envahir la région liquide sous la lamelle.

On peut prédire la hauteur de rupture à partir de l'équation (4.50), qui donne la valeur de  $\beta$ . À cause de la racine carrée, il existe une solution réelle tant que la quantité sous racine est positive. Le cas critique est repérée par le moment où cette quantité s'annule :

$$R^2 \sin^2 \varphi_p - \delta^2 + 2\delta R \cos \varphi_p = 0 \quad (4.55)$$

On résout cette équation avec  $R = L_{gc}^2/H$ , c'est-à-dire dans la zone proche de l'encastrement, où  $Y = 0$ . La hauteur critique vaut :

$$H_{cr} = \frac{L_{gc}^2}{\delta} (1 + \cos \varphi_p) \quad (4.56)$$

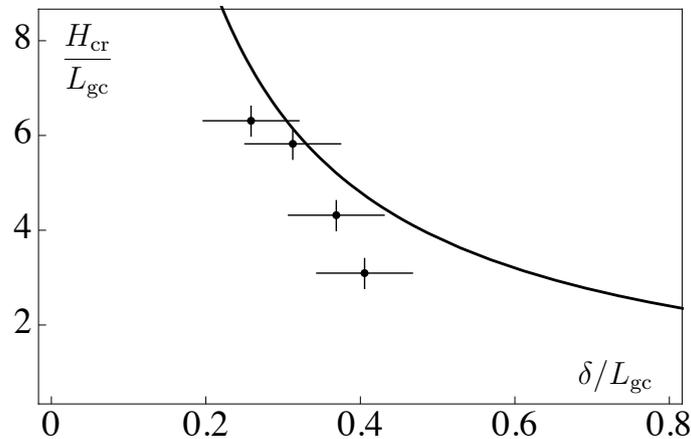


FIGURE 4.21: Hauteur critique de rupture par invasion d'air latérale,  $H_{cr}$ , en fonction de l'espacement entre lamelle et paroi,  $\delta$ . Les points représentent les mesures expérimentales, la courbe continue la prévision théorique de l'équation (4.56).

On mesure la hauteur de rupture pour des lamelles avec largeurs différentes (et donc valeurs de  $\delta$  différentes). La comparaison entre la mesure et la prévision théorique est montrée dans la figure 4.21. On voit que l'accord est acceptable, même si la rupture expérimentale a toujours lieu pour un  $H_{cr}$  plus petit que celui prévu par la théorie. Une explication possible est liée à l'incertitude sur la valeur de  $\delta$ . Il est difficile d'évaluer l'exacte valeur expérimentale de  $\delta$ , car une légère dissymétrie de la lamelle par rapport aux parois latérales implique l'existence de deux espacements différents. Si tel est le cas, la plus grande valeur de l'espacement doit alors entrer

en jeu dans la formule (4.56), ce qui a pour conséquence une plus petite valeur de  $H_{cr}$ .

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié le comportement d'une structure élastique inextensible soumise à l'action de la pression hydrostatique et de la tension de surface. On a mis en place un dispositif expérimental constitué d'une lamelle encastrée à une extrémité et posée à l'interface liquide-air à l'autre extrémité. La forme d'équilibre typique du système a suggéré le nom de *ménisque élasto-capillaire*. On a observé qu'une rupture du ménisque a lieu dès que sa hauteur dépasse une valeur critique.

On a proposé une description théorique bidimensionnelle, avec les équations d'équilibre d'une poutre inextensible en grandes rotations couplées à l'équation d'un ménisque capillaire. Cette approche nous a permis de reproduire assez fidèlement les formes d'équilibre observées dans les expériences. Elle a aussi donné accès à une plus vaste compréhension du mécanisme de rupture : on a montré qu'il existe une rupture due à l'absence de solution mathématique au delà d'un point critique, et une autre rupture due à une instabilité expérimentale de la solution d'équilibre. Les prévisions théoriques pour la valeur de la hauteur critique sont en bon accord avec les mesures expérimentales. On a aussi proposé une correction du modèle qui tient compte des effets tridimensionnels.

Pour des lamelles très flexibles, on a montré que la déformation se concentre dans une région à proximité de l'encastrement, et que la lamelle est plate ailleurs. Mathématiquement, ce problème correspond à une solution de couche limite qui se raccorde à une solution externe. On a considéré différents cas de figure et on a proposé une solution numérique de l'équation de couche limite. Ce problème fera l'objet du chapitre suivant, où on montre qu'une solution analytique de l'équation de couche limite existe, et qu'elle généralise des solutions particulières déjà connues pour d'autres problèmes physiques.

Notre analyse théorique et expérimentale permet une meilleure compréhension de l'interaction entre élasticité, capillarité et pression hydrostatique dans le cadre d'une lamelle extraite d'un bain liquide. Cette compréhension permet notamment de répondre à plusieurs interrogatifs, par exemple comment minimiser l'effort effectué lors de l'extraction de la lamelle, ou comment améliorer le design d'une pipette élastique (Reis *et al.*, 2010) afin de maximiser le volume liquide déplacé.

## Ménisque et pli : des solutions exactes

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a montré que la forme d'un ménisque élasto-capillaire est liée à la compétition entre élasticité, tension de surface et pression hydrostatique. Suivant une approche 2D, on a pu déterminer les équations exactes qui décrivent la forme du ménisque. Pour la portion élastique, il s'agit d'un système d'équations différentielles non linéaires, qu'on a pu écrire aussi comme une seule équation différentielle d'ordre quatre. On focalise désormais notre attention sur le cas d'une lamelle très longue, pour lequel on a montré l'existence d'une solution externe et d'une couche limite. Dans le chapitre précédent on avait toujours proposé une solution numérique du problème de couche limite.

Dans ce chapitre, on montre que l'équation non-linéaire de couche limite présente une solution exacte. Une conséquence immédiate est la possibilité de décrire analytiquement toute la forme du ménisque élasto-capillaire. Mais l'intérêt de cette solution va au-delà du problème du ménisque, et ceci est lié à la façon dont cette solution a été trouvée. En effet, à cause de la non-linéarité et de l'ordre élevé, on n'a pas effectué une résolution directe de l'équation différentielle. Nous nous sommes basés sur l'analogie que le problème de couche limite présentait avec un autre problème, celui du flambage d'une poutre à la surface d'un liquide. [Diamant & Witten \(2011a\)](#) ont récemment proposé une solution exacte pour la forme de flambage dans le cas d'une poutre très longue. Nous avons réussi à généraliser cette solution afin de l'adapter à notre problème. Cette nouvelle solution généralisée permet de montrer qu'il existe une famille continue de solutions exactes pour le problème de flambage.

Afin d'illustrer l'analogie entre les différents problèmes et le parcours qui nous a amenés à la solution, on trace d'abord un panorama sur le problème de flambage, et ensuite on montre la solution généralisée du problème.

### 5.2 Le flambage d'une poutre

On appelle flambage (*buckling*, en anglais) la flexion qui apparaît sur une structure élastique lorsqu'elle subit un effort de compression axiale. Il s'agit d'une manifestation de l'instabilité de la solution non déformée qui a lieu si l'effort de compression est supérieur à une valeur critique. Ce phénomène a été étudié pour la première fois de manière analytique par Leonard Euler au 18<sup>e</sup> siècle ([Timoshenko, 1983](#)).

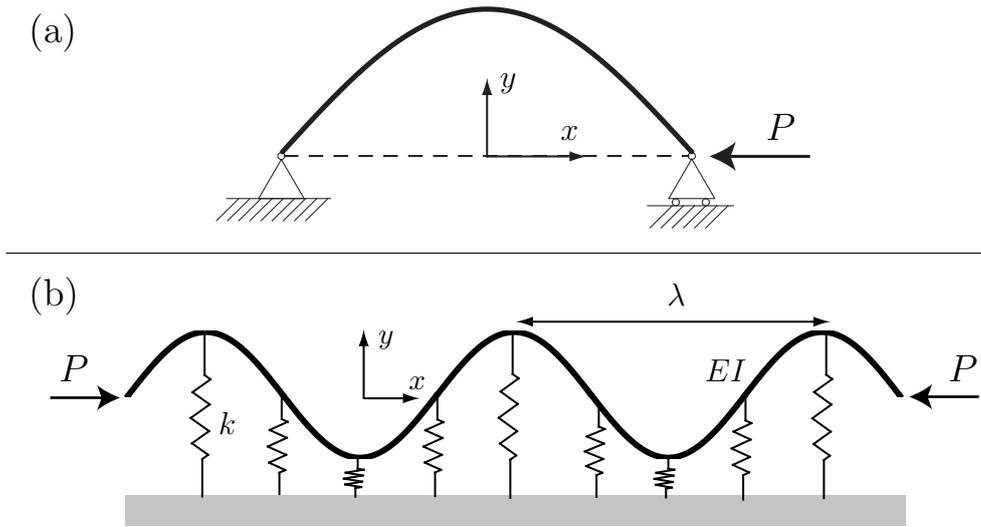


FIGURE 5.1: Deux exemple de flambage de poutre : (a) flambage d'Euler (seule l'élasticité en flexion est en jeu) et (b) flambage sur support élastique (l'élasticité en flexion de la poutre et l'élasticité en traction-compression du support sont en jeu). Dans le cas (a), le mode de flambage dépend seulement de la longueur  $L$ , alors que dans le cas (b) le mode de flambage fait apparaître une longueur d'onde  $\lambda = (EI/k)^{1/4}$ .

Euler a considéré le cas d'une barre droite (figure 5.1-a) de longueur  $L$ , soumise à une force de compression  $P$ , et a montré que la solution droite devient instable à partir de :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{c L^2} \quad (5.1)$$

où  $EI$  est le module de rigidité,  $L$  la longueur de la barre et  $c$  un coefficient qui dépend des conditions limites ( $c = 1$  si la barre est sur deux appuis simples,  $c = 4$  si la barre est encastree-libre, etc.). Dans ce problème, la force de compression critique ainsi que la longueur d'onde du profil flambé sont fixées par la taille de la barre,  $L$ .

La situation change si la barre interagit avec le milieu dans lequel elle se trouve. Le flambage d'une poutre posée sur une fondation élastique est un exemple bien connu (voir e.g. Timoshenko (1940)) : lors du flambage, il y a un incrément de l'énergie élastique lié non seulement à la flexion de la poutre, mais aussi à la déformation du milieu extérieur. Par exemple, dans le cas d'une poutre posée sur un réseau de  $N$  ressorts de rigidité  $k$  (figure 5.1-b), une déformation de la poutre dans le plan  $(x, y)$  induit une énergie de flexion  $\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 ds$  (où  $\kappa$  est la courbure locale) mais aussi une énergie de déformation des ressorts  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k y_i^2$ . Alors que l'énergie de flexion cherche à induire un mode de flambage à large longueur d'onde (afin de minimiser  $\kappa^2$ ), l'énergie de la fondation élastique favorise plutôt les faibles longueurs d'onde (afin de minimiser  $y^2$ ). Le mode final de flambage résulte alors d'un compromis entre les deux énergies, ce qui fait apparaître une longueur caractéristique du problème :

$$\lambda = \left( \frac{EI}{k} \right)^{1/4}$$

Cette longueur caractéristique fixe la valeur critique de flambage et détermine la longueur d'onde

du système flambé. Contrairement au flambage d'Euler, on observe donc que le flambage n'est plus lié à la taille du système (à condition que la longueur de la poutre  $L$  soit suffisamment grande par rapport à  $\lambda$ ).

Un cas limite de support élastique est celui constitué par un milieu fluide. Dans ce problème, la poutre engendre lors du flambage un déplacement vertical de la masse liquide, qui a comme conséquence une variation de l'énergie potentielle du liquide. Par analogie avec le problème de la fondation élastique, une longueur caractéristique peut être construite :

$$\lambda = \left( \frac{EI}{\rho g} \right)^{1/4} = L_{\text{eh}}$$

Cette longueur, qui compare le rôle de l'élasticité et de la force hydrostatique lors du flambage, n'est rien d'autre que la longueur élasto-hydrostatique introduite au chapitre précédent<sup>1</sup>. Si on considère une poutre dont la longueur  $L$  est grande par rapport à  $L_{\text{eh}}$ , on est encore dans un problème où le seuil de flambage est indépendant de la taille du système et vaut :

$$P_c = \frac{2EI}{L_{\text{eh}}^2} \quad (5.2)$$

Ce résultat peut être obtenu par une analyse de stabilité linéaire de la solution non-flambée (voir e.g. [Audoly \(2011\)](#)). L'analyse de stabilité linéaire prédit aussi la forme du système immédiatement après le seuil de flambage : la déformation est de type sinusoïdal avec une longueur d'onde  $\lambda = L_{\text{eh}}$ . Néanmoins, si la compression se poursuit bien au-delà du seuil, le système atteint un régime non décrit par l'analyse linéaire dans lequel la déformation se localise. On observe donc une transition de la déformation sinusoïdale vers un pli bien défini (*wrinkle-to-fold transition*, en anglais). Cette transition a été montrée expérimentalement pour la première fois par [Pocivavsek et al. \(2008\)](#), avec des lamelles de polyester à la surface de l'eau. [Diamant & Witten \(2011b\)](#) ont ensuite prouvé, à partir d'une conjecture sur la forme de la localisation, que la solution sinusoïdale est instable vis-à-vis de la solution localisée considérée. Peu après, [Audoly \(2011\)](#) a prouvé que cette conjecture est vraie et que la transition *wrinkle-to-fold* est une manifestation d'un phénomène plus général connu sous le nom de flambage localisé (*localized buckling*).

Très récemment, [Diamant & Witten \(2011a\)](#) ont prouvé qu'il existe une solution analytique pour la forme de la poutre en flambage localisé. On montre dans la prochaine section la façon dont cette solution a été déduite.

## 5.3 Localisation de la déformation lors du flambage

### 5.3.1 Les équations du problème

Suivant la méthode proposée par [Diamant & Witten \(2011a\)](#), on considère une lamelle inextensible, de longueur  $2L$ , d'épaisseur  $e$  et de largeur  $w$ , posée à la surface d'un liquide (la figure 5.2 clarifie les notations employées dans la suite). La lamelle est comprimée le long de la direction  $x$ , et on restreint le problème à des déformations dans le plan  $(x, y)$ . On note  $\theta$  l'angle entre la direction horizontale et la tangente à la lamelle.

1. Il faut ici considérer le moment quadratique par unité de profondeur.

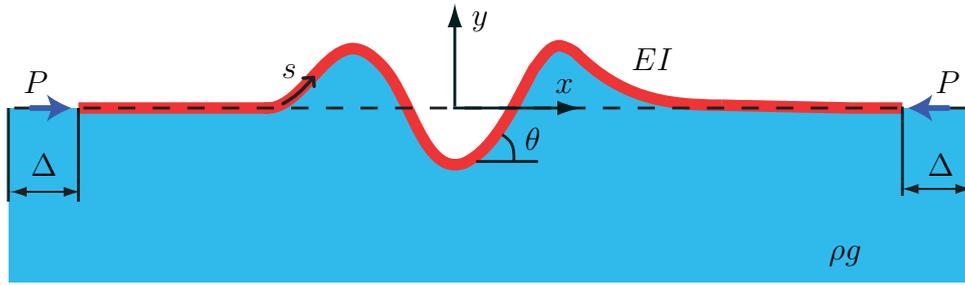


FIGURE 5.2: Schématisation des notations employées : une poutre de rigidité en flexion  $EI$  est posée à la surface d'un liquide de masse volumique  $\rho$ . La compression axiale  $P$  cause un déplacement  $\Delta$  de chaque extrémité. On note  $\theta$  l'angle entre la poutre et l'horizontale.

La condition d'inextensibilité permet d'écrire les relations géométriques :

$$x'(s) = \cos \theta(s) \quad (5.3)$$

$$y'(s) = \sin \theta(s) \quad (5.4)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la tige.

On fait l'hypothèse que la compression n'induit pas de déplacement vertical de l'extrémité de la tige et que le moment est également nul à l'extrémité (condition d'appuis simples, mais on verra dans la suite que ces hypothèses ne sont pas restrictives). On peut ensuite distinguer deux cas de figure : la compression de la tige peut se faire soit en imposant un déplacement  $\Delta$  de chaque extrémité de la tige, soit en imposant un effort de compression  $P$  à chaque extrémité. Pour l'instant on traite les deux problèmes. On écrit alors les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} y(-L) = y(L) = 0 ; \theta'(-L) = \theta'(L) = 0 \\ \text{(si depl. imp.) : } x(-L) = -L + \Delta ; x(L) = L - \Delta \\ \text{(si effort imp.) : } F_x(-L) = F_x(L) = -P \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quelles que soient les conditions aux bords, on peut toujours lier la déformation de la tige aux déplacements de ses extrémités. On peut écrire de manière générale :

$$x(s=L) - x(s=-L) = \int_{-L}^L dx(s) = \int_{-L}^L \frac{dx}{ds} ds = \int_{-L}^L \cos \theta ds \quad (5.6)$$

Or, si la tige n'est pas déformée,  $\theta = 0$  partout et on a :

$$x(L) - x(-L) = 2L = \int_{-L}^L \cos \theta ds = \int_{-L}^L ds \quad (5.7)$$

Si au contraire la tige est déformée à cause du déplacement  $\Delta$  à chaque extrémité, on a :

$$x(L) - x(-L) = 2L - 2\Delta = \int_{-L}^L \cos \theta ds \quad (5.8)$$

On peut faire la différence des deux dernières relations pour exprimer  $\Delta$  en fonction de  $\theta$  :

$$2L - (2L - 2\Delta) = 2\Delta = \int_{-L}^L (1 - \cos \theta) ds \quad (5.9)$$

Dans la suite du développement on choisit de travailler avec des variables sans dimension. Comme au chapitre précédent, on introduit  $L_{eh}$  dans l'adimensionnement afin d'éliminer les grandeurs physiques liées à l'élasticité et au poids du liquide. On veut retrouver l'équation d'équilibre pour la tige avec une approche énergétique. On écrit d'abord l'énergie élastique de flexion de la tige :

$$\mathcal{E}_e = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \theta'(s)^2 ds \quad (5.10)$$

et ensuite l'énergie potentielle liée à la masse fluide déplacée :

$$\mathcal{E}_g = \int_{-L+\Delta}^{L-\Delta} \frac{1}{2} y(x)^2 dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} y(s)^2 \cos \theta(s) ds \quad (5.11)$$

Dans le cas de figure où on impose un effort de compression il faut considérer aussi l'énergie liée au travail de chacune des forces externes  $P$ . Le travail  $W$  effectué par les forces  $P$  lorsqu'elles déplacent les extrémités de  $\Delta$  est  $W = 2P\Delta$ . On introduit la relation (5.9) pour écrire que l'énergie vaut :

$$\mathcal{E}_P = -W = -2P\Delta = - \int_{-L}^L P(1 - \cos \theta) ds \quad (5.12)$$

L'énergie totale du système est  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_g$  dans le cas où les déplacements sont imposés et  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_P$  dans le cas où les efforts sont imposés. Afin de trouver l'équation d'équilibre il faut trouver les points stationnaires de l'énergie, mais cette recherche doit se faire avec des contraintes imposées au système. D'abord, il faut considérer que les fonctions  $y$  et  $\theta$  sont liées par la relation (5.4) : il s'agit d'une contrainte locale, qui est vraie en tout point de la tige. Ensuite, dans le cas de figure où les déplacements des extrémités sont imposés, il faut aussi vérifier la contrainte globale (ou intégrale) (5.9). Le problème en arrive donc à la recherche des points stationnaires de l'action  $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} ds$ , avec :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \theta'^2 + \frac{1}{2} y^2 \cos \theta - P(1 - \cos \theta) - q(s)(\sin \theta - y') \quad (5.13)$$

où  $q(s)$  est un multiplicateur de Lagrange lié à la contrainte locale. On remarque que le terme  $P(1 - \cos \theta)$  traduit la contrainte globale dans le cas à déplacements imposés ( $P$  joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange) alors qu'il représente l'énergie de compression dans le cas à force imposée. On a donc pu écrire formellement le même lagrangien pour les deux cas de figure, ce qui permet de traiter les deux situations en même temps.

A partir de  $\mathcal{L}$  on peut écrire, par une transformation de Legendre, l'hamiltonien du problème,  $\mathcal{H} = p_\theta \theta' + p_y y' - \mathcal{L}$ , avec  $p_\theta = \partial \mathcal{L} / \partial \theta' = \theta'$  et  $p_y = \partial \mathcal{L} / \partial y' = q$ . On trouve :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{1}{2} y^2 \cos \theta + P(1 - \cos \theta) + q \sin \theta . \quad (5.14)$$

On s'intéresse maintenant à la localisation de la déformation dans une région confinée (formation d'un pli). Du point de vue mathématique, le pli constitue une zone de couche limite (présente à l'intérieur du domaine, et non plus aux bords) qui doit raccorder deux portions

externes non déformées ( $y = \theta = 0$ ). Toute l'énergie du système se concentre donc dans le pli<sup>2</sup>. Dorénavant, on peut considérer que  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  sont les solutions de couche limite à déterminer, et que  $s$  est la variable interne.

On écrit d'abord les conditions de raccordement à l'infini, qui sont les nouvelles conditions limites du problème. Comme le raccordement se fait avec une tige horizontale, il faut que la déformation s'annule à l'infini :

$$\theta(\pm\infty) = \theta'(\pm\infty) = y(\pm\infty) = 0 \quad (5.15)$$

On constate que ces nouvelles conditions limites sont vraies quelles que soient les conditions aux bords (on avait choisi de manière arbitraire en début de section  $y(\pm L) = 0$  et  $\theta'(\pm L) = 0$ ). Dans l'espace des phases  $(\theta, \theta')$ , l'orbite correspondant à la solution passe par l'origine : il s'agit de l'orbite homocline.

Il est important de remarquer que l'hamiltonien du problème (équation 5.14), ne dépend pas explicitement de  $s$  et est donc une intégrale du système. Si on l'évalue en  $s = \infty$  à l'aide des conditions limites on peut en conclure que :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\theta'^2 - \frac{1}{2}y^2 \cos \theta + P(1 - \cos \theta) + q \sin \theta = \text{cste} = 0 \quad (5.16)$$

On peut maintenant écrire les équations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{dp_\theta}{ds} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 \sin \theta + P \sin \theta + q \cos \theta = -\theta'' \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\frac{dp_y}{ds} \Rightarrow -y \cos \theta = -q' \end{cases} \quad (5.17)$$

Si on dérive la première équation et qu'on introduit la deuxième on obtient :

$$\theta' \left( \frac{1}{2}y^2 \cos \theta - q \sin \theta + P \cos \theta \right) + yy' \sin \theta + q' \cos \theta = -\theta''' \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow \theta' \left( P + \frac{1}{2}\theta'^2 \right) + y = -\theta''' \quad (5.19)$$

Le dernier passage découle de l'équation (5.16) et du fait que  $y' = \sin \theta$ .

Il est possible de montrer, à partir des conditions limites à l'infini, des équations (5.17) et (5.19), que toutes les dérivées de  $\theta$  s'annulent à l'infini. Ceci est une conséquence logique du fait que la solution de couche limite doit raccorder une portion externe non déformée.

Le système d'équations différentielles qui gouverne la forme d'équilibre d'une lamelle flambée à la surface d'un liquide s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} \theta''' + \theta' \left( P + \frac{1}{2}\theta'^2 \right) + y = 0 \\ y' = \sin \theta \\ y(\infty) = \theta^{(n)}(\infty) = 0 \end{cases}}_{\text{pli}} \quad (5.20)$$

2. Même si la force  $P$  ou le déplacement  $\Delta$  sont imposés sur les bords de la lamelle, donc à l'extérieur de la couche limite, les portions externes ne font que transmettre ces conditions vers la couche limite.

On remarque qu'à l'aide d'une dérivation supplémentaire, on peut écrire une équation différentielle pour  $\theta$  et ses dérivées (équation d'ordre quatre), et faire disparaître  $y$  :

$$\theta'''' + P\theta'' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \sin\theta = 0 \quad (5.21)$$

Néanmoins on préfère dans la suite travailler avec le système (5.20).

Dans le cas d'effort imposé, le système (5.20) (tout comme l'équation (5.21)) admet toujours la solution non-déformée  $\theta = y = 0$ . Cette solution, comme on l'a déjà anticipé, devient instable quand  $P = P_c = 2$ , ce qui engendre le flambage du système<sup>3</sup>. Dans le cas de déplacement imposé, la transition vers un état flambé à lieu dès que  $\Delta > 0$ , à cause de l'inextensibilité de la tige.

### 5.3.2 Deux solutions exactes

Pour décrire la forme du pli, [Diamant & Witten \(2011a\)](#) proposent deux expressions<sup>4</sup> pour l'angle  $\theta$  :

$$\theta_s(s) = -4 \arctan \left[ \frac{c \sin(k s)}{k \cosh(c s)} \right] \quad (5.22)$$

$$\theta_a(s) = -4 \arctan \left[ \frac{c \cos(k s)}{k \cosh(c s)} \right] \quad (5.23)$$

avec  $k = \sqrt{2 + P}/2$  et  $c = \sqrt{2 - P}/2$ . On a désigné par  $\theta_s$  la solution qui donne un profil symétrique et par  $\theta_a$  celle qui donne un profil antisymétrique. En effet, la solution  $\theta_s$  se caractérise par le fait que  $\theta$  et toutes les dérivées paires sont nulles en zéro :  $\theta_s(0) = \theta_s''(0) = \dots = 0$ . Au contraire, la solution  $\theta_a$  se caractérise par le fait que toutes les dérivées impaires sont nulles en zéro :  $\theta_a'(0) = \theta_a'''(0) = \dots = 0$ .

Par intégration, on a :

$$\begin{aligned} y_s(s) &= \int \sin \theta_s(s) ds = \\ &= \frac{4 c k [k \cos(k s) \cosh(c s) + c \sin(k s) \sinh(c s)]}{(k^2 + c^2) [k^2 \cosh^2(c s) + c^2 \sin^2(k s)]} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} y_a(s) &= \int \sin \theta_a(s) ds = \\ &= \frac{4 c k [k \sin(k s) \cosh(c s) + c \cos(k s) \sinh(c s)]}{(k^2 + c^2) [k^2 \cosh^2(c s) + c^2 \cos^2(k s)]} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Il suffit d'injecter les expressions de  $\theta$  et  $y$  dans le système (5.20) pour vérifier qu'elles sont effectivement des solutions exactes.

Ces solutions ont été proposées à partir d'une analogie entre l'équation d'équilibre pour le flambage et l'équation d'oscillation d'un pendule, et les auteurs se limitent à vérifier que ces relations satisfont effectivement le système (5.20).

3.  $P_c = 2$  est la forme sans dimension de l'équation (5.2). Cette adimensionnalisation se fait en utilisant la force de référence  $[F] = EI/L_{eh}^2$

4. Les solutions données restent solutions si on effectue un changement de signe  $\theta \rightarrow -\theta$ , ce qui implique qu'on dispose de quatre solutions, symétriques deux à deux par rapport à l'axe horizontal.

## 5.4 Une solution plus générale

### 5.4.1 Le ménisque et le pli : analogies et différences

On revient dans cette section sur le problème du ménisque élasto-capillaire de longueur infinie, et on présente les analogies et les différences qui existent entre ce problème et le problème de la localisation du pli lors du flambage.

Dans le chapitre précédent, on avait introduit l'équation de couche limite (4.42) qui décrit la forme du ménisque élasto-capillaire proche d'une paroi :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^4} \left( \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 \right) + (\tilde{y} + 1) - \frac{\zeta^2}{h^2} \theta' = 0 \\ \tilde{y}' = \sin \theta \end{cases} \quad (5.26)$$

Tout d'abord, on introduit dans cette équation l'adimensionnalisation employée dans ce chapitre (équation ??). Le système devient :

$$\begin{cases} \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 + (y + h) - \zeta^2 \theta' = 0 \\ y' = \sin \theta \end{cases} \quad (5.27)$$

Les conditions limites du problème sont  $\theta(0) = y(0) = 0$  (encastrement) et  $\theta(\infty) = 0$ ,  $y(\infty) = -h$  (raccordement à la solution externe). On adopte un changement de système de référence, en appliquant tout simplement une translation de l'axe vertical :  $y \rightarrow y - h$ . Le système devient :

$$\begin{cases} \theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 + y - \zeta^2 \theta' = 0 \\ y' = \sin \theta \end{cases} \quad (5.28)$$

avec des nouvelles conditions limites  $y(0) = h$  et  $y(\infty) = 0$ . Pour résumer :

$$\boxed{\begin{cases} \theta''' + \theta' \left( -\zeta^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 \right) + y = 0 \\ y' = \sin \theta \\ \theta(0) = 0, y(0) = h, \theta(\infty) = 0, y(\infty) = 0 \end{cases}}_{\text{ménisque}} \quad (5.29)$$

Si on compare le système (5.20) avec le système (5.29), on peut remarquer que les deux sont très proches. On se pose alors la question de savoir si les solutions  $\theta_s$  ou  $\theta_a$  (avec  $y_s$  et  $y_a$ ) peuvent aussi être solutions du système (5.29). Si la réponse était positive, on aurait trouvé une solution exacte pour le problème du ménisque élasto-capillaire en longueur infinie. La réponse est liée à trois différences qui existent entre les deux systèmes :

- Le signe devant  $P$  et  $\zeta^2$  n'est pas le même. Cela est en effet une différence physique remarquable : dans le ménisque élasto-capillaire, le tension de surface applique une force de traction à l'extrémité, alors que dans le flambage de la tige c'est un effort de compression qui crée le pli. Cependant, d'un point de vue strictement mathématique, si on remplace  $P$  par  $-\zeta^2$  dans les solutions  $\theta_s$  et  $\theta_a$ , elles sont toujours candidates à être solutions de (5.29).
- La condition limite  $\theta(0) = 0$  n'apparaît pas dans le système (5.20). Néanmoins, la solution

symétrique  $\theta_s$  est justement caractérisée par le fait que  $\theta(0) = 0$ . Elle est alors une bonne candidate à être solution du système (5.29).

- La condition limite  $y(0) = h$  est la différence la plus flagrante entre les deux systèmes, car  $h$  est un paramètre libre qui peut prendre n'importe quelle valeur (comprise entre 0 et  $h_{\max}$ , pour rester fidèle à ce qu'on a vu au chapitre précédent).

A partir de l'équation (5.24), on calcule la valeur de  $y$  en zéro :

$$y(0) = \frac{4c}{k^2 + c^2} = 2\sqrt{2 - P} = 2\sqrt{2 + \zeta^2} \quad (5.30)$$

Si on considère, par exemple, le cas  $P = 0$  on obtient que  $y(0) = 2\sqrt{2}$ . On peut en conclure que, pour  $P = 0$ , la solution  $\theta_s$  trouvée par [Diamant & Witten \(2011a\)](#) est solution du système (5.29) seulement pour  $h = 2\sqrt{2}$ , et elle ne l'est pas si  $h \neq 2\sqrt{2}$ . De manière générale, à  $P$  donné (ou  $\zeta$ ), il y a une valeur de  $y(0)$  bien précise pour laquelle  $\theta_s$  est solution.

### 5.4.2 La solution générale

On propose ici une nouvelle solution du système d'équilibre, plus générale que celle montrée par [Diamant & Witten \(2011a\)](#). On introduit dans  $\theta(s)$  un paramètre réel de déphasage  $\phi$  et on écrit :

$$\theta_d = -4 \arctan \left[ \frac{c \sin(ks)}{k \cosh(c(s - \phi))} \right] \quad (5.31)$$

On remarque que  $\phi$  apparaît uniquement dans le cosinus hyperbolique, et non pas dans le sinus : il ne s'agit donc pas d'un simple changement de variable. On a désigné cette expression par  $d$  car, en général, elle est dysymétrique. La valeur de  $y$  correspondante est :

$$\begin{aligned} y_d(s) &= \int \sin \theta_d(s) \, ds = \\ &= \frac{4ck [k \cos(ks) \cosh(c(s - \phi)) + c \sin(ks) \sinh(c(s - \phi))]}{(k^2 + c^2) [k^2 \cosh^2(c(s - \phi)) + c^2 \sin^2(ks)]} \end{aligned} \quad (5.32)$$

On peut insérer cette expression dans le système (5.29) et vérifier que  $(\theta_d, y_d)$  satisfont les équations différentielles, quel que soit  $\phi$ . En ce qui concerne les conditions limites, trois conditions sont automatiquement satisfaites :  $\theta_d(\infty) = 0$ ,  $\theta_d(0) = 0$  et  $y_d(\infty) = 0$ . Il reste à vérifier la condition limite  $y(0) = h$  :

$$y_d(0) = \frac{4c}{(k^2 + c^2 \cosh(c\phi))} = \frac{2\sqrt{2 - P}}{\cosh\left(\frac{1}{2}\phi\sqrt{2 - P}\right)} = h \quad (5.33)$$

$$\Leftrightarrow \phi = \frac{1}{c} \operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{h(c^2 + k^2)}{4c} \right) = \frac{2}{\sqrt{2 - P}} \operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{h}{2\sqrt{2 - P}} \right) \quad (5.34)$$

Avec la bonne valeur de  $\phi$ , toutes les conditions sont respectées, et on peut en conclure que  $(\theta_d, y_d)$  est une solution exacte du problème du ménisque en longueur infinie donné par le système (5.29) pour n'importe quelle valeur de  $h$ .

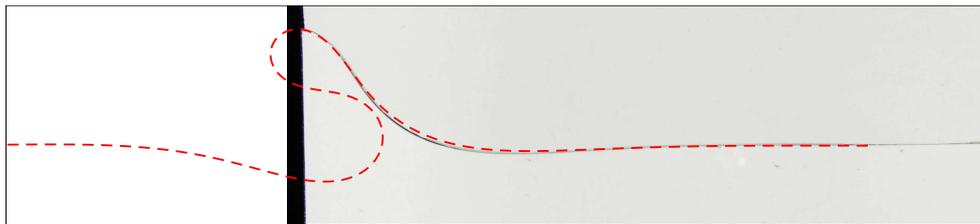


FIGURE 5.3: Comparaison entre la forme expérimentale d'un ménisque élasto-capillaire et la solution analytique. La photographie est la même que celle de la figure 4.16 ( $h = 1.91$ ,  $\zeta = 0.24$ ). La solution analytique est obtenue à partir de l'équation (5.31) avec  $c = 1.43$ ,  $k = 1.39$  et  $\phi = 1.33$ . On voit que la forme expérimentale est une portion de la solution analytique.

### 5.4.3 Le ménisque élasto-capillaire : une portion de pli

On utilise cette nouvelle solution analytique pour comparer le résultat théorique à la déformation observée expérimentalement dans le problème du ménisque. La figure 5.3 reprend la même photographie montrée au chapitre précédent (figure 4.16) et y superpose la courbe paramétrique  $(x_d(s), y_d(s))$ , où  $x_d(s) = \int_0^s \cos \theta_d(s) ds$ . Dans le dispositif expérimental  $h = 1.91$  et  $\zeta = 0.24$ , on en déduit donc que  $P = -\zeta^2 = -0.06$  et  $\phi = 1.33$  (obtenu à partir de l'équation (5.34)).

On constate qu'un très bon accord existe, et on remarque que le ménisque élastique expérimental n'est qu'une portion du pli.

Au chapitre précédent on a montré l'existence d'une hauteur maximale du ménisque élasto-capillaire. Dans le cas du ménisque semi-infini on a montré que cette hauteur dépendait du rôle de la force capillaire par rapport à l'élasticité : si elle était négligeable ( $\zeta \ll 1$ ) la hauteur était d'ordre un, si elle était dominante ( $\zeta \gg 1$ ) la hauteur était d'ordre  $\zeta$ . On avait aussi montré numériquement que  $h_{\max} = 2.83$  dans le cas  $\zeta = 0$ .

Ces résultats peuvent être déduits de l'équation (5.33), si on remplace  $P$  par  $-\zeta^2$ . On y voit d'abord que, à  $\zeta$  fixé, la plus grande valeur de  $h$  est atteinte quand  $\phi = 0$  (autrement, le dénominateur croît). Ceci signifie que la solution symétrique est celle qui permet d'avoir la hauteur du profil la plus grande. On peut alors écrire :

$$h_{\max} = 2\sqrt{2 + \zeta^2} \quad (5.35)$$

Cette relation nous donne la hauteur maximale du ménisque élasto-capillaire. On voit bien que si  $\zeta = 0$ ,  $h_{\max} = 2\sqrt{2} \simeq 2.83$ . Et aussi que si  $\zeta \gg 1$ ,  $h_{\max} \sim \zeta$ . Ces résultats analytiques confirment les prévisions obtenues par analyse dimensionnelle et calcul numérique au chapitre précédent.

### 5.4.4 La famille de solutions dans le problème de flambage

Les expressions de  $\theta_d$  et  $y_d$  données dans la section précédente satisfont les équations et les conditions limites du problème de flambage (système 5.20) quelle que soit la valeur de  $\phi$ . Cela signifie qu'il existe non pas deux mais toute une famille continue de solutions pour le problème de localisation de la déformation lors du flambage. La figure 5.4 montre, pour deux valeurs de  $P$ , neuf différents profils appartenant à la famille de solutions. On voit bien que, à côté des solutions symétriques ou antisymétriques, il existe aussi des solutions non symétriques.

On peut facilement montrer que les solutions proposées par [Diamant & Witten \(2011a\)](#) ne

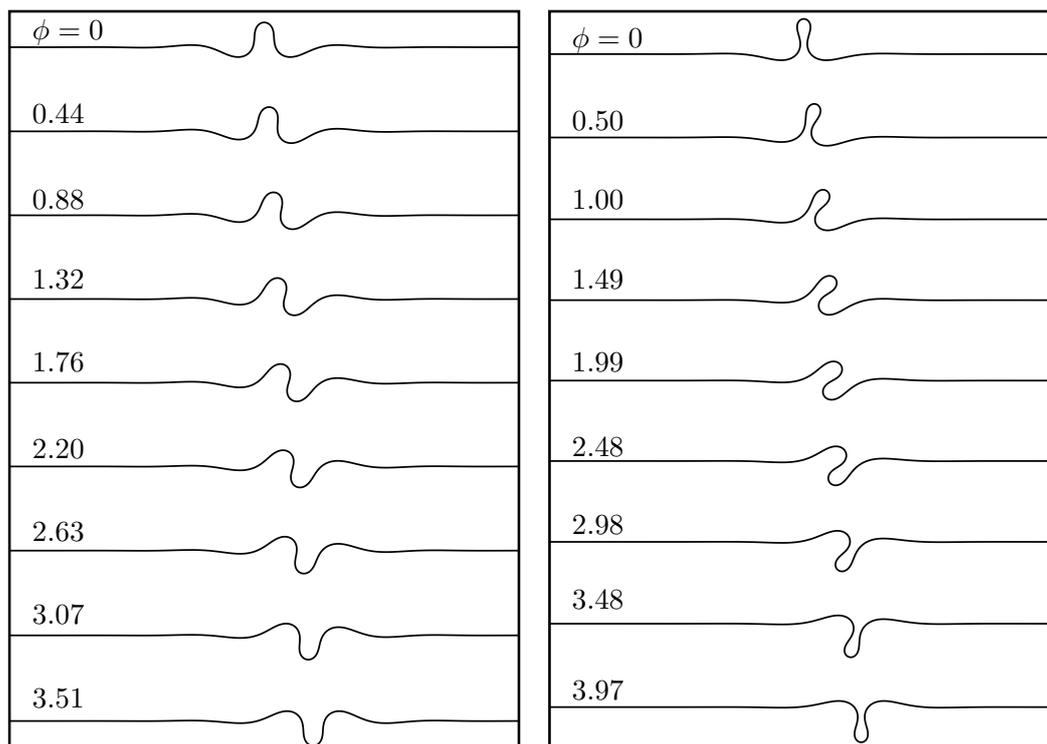


FIGURE 5.4: Profils correspondant à deux familles de solutions, pour  $P = 1.2$  (gauche) et  $P = 0.5$  (droite). Les valeurs de  $\phi$  sont données à gauche de chaque profil. On remarque la présence de profils symétriques, antisymétriques et non symétriques.

sont que des cas particuliers de la solution générale. Si en effet on adopte une translation du système curviligne  $s \rightarrow s + \phi$ , on obtient une écriture de  $\theta_d$  légèrement différente et qui est toujours solution :

$$\theta_d = -4 \tan^{-1} \left[ \frac{c \sin(k(s + \phi))}{k \cosh(cs)} \right] \quad (5.36)$$

Selon la valeur de  $\phi$ , on peut retomber sur des solutions proposées par [Diamant & Witten \(2011a\)](#). Le tableau 5.1 résume les différents cas.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons illustré les analogies et les différences qui existent entre le problème du ménisque élasto-capillaire (objet du chapitre précédent) et le problème de localisation de la déformation lors du flambage d'une poutre à la surface d'un liquide.

Bien qu'expérimentalement les deux problèmes semblent différents, nous avons montré que les formes d'équilibre sont décrites par deux équations presque identiques. Nous avons alors montré que la solution analytique, proposée par [Diamant & Witten \(2011a\)](#) pour le problème de flambage, n'est pas, en général, solution du problème du ménisque. Nous avons alors proposé une nouvelle solution plus générale.

D'un côté, la nouvelle solution décrit exactement la forme du ménisque élasto-capillaire, dans la limite où la longueur de la lamelle n'est plus un paramètre, pour n'importe quelle valeur

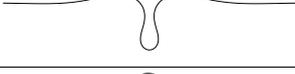
| $\phi$   | solution                    | propriété      | forme  |
|--|-----------------------------|----------------|--|
| 0  | $\theta_n \equiv \theta_s$  | symétrique     |  |
| $\frac{\pi}{2k} = \frac{\pi\sqrt{2+P}}{2+P}$   | $\theta_n \equiv \theta_a$  | antisymétrique |  |
| $\frac{\pi}{k} = \frac{2\pi\sqrt{2+P}}{2+P}$   | $\theta_n \equiv -\theta_s$ | symétrique     |  |
| $\frac{3\pi}{2k} = \frac{3\pi\sqrt{2+P}}{2+P}$ | $\theta_n \equiv -\theta_a$ | antisymétrique |  |
| $\phi \neq \frac{j\pi}{2k}, j \in \mathbb{N}$  | $\theta_n$                  | non symétrique | -  |

TABLE 5.1: Tableau résumé des propriétés des profils donnés par  $\theta_d(s)$  en fonction de la valeur de  $\phi$ .

de la hauteur du ménisque. D'un autre côté, cette solution permet de décrire des formes non symétriques dans le problème du flambage. Ces profils non symétriques n'avaient jamais été explicités analytiquement.

Dans les deux cas, la solution trouvée est valable seulement pour l'orbite homocline de l'espace de phase, c'est-à-dire dans le cas d'une lamelle de longueur infinie. Quant à savoir s'il existe une solution analytique pour les cas non homoclines, c'est-à-dire les cas d'une lamelle de longueur finie, la question reste ouverte.

Dans cette thèse, nous avons étudié des problèmes de déformations de structures élastiques engendrées par l'action de la tension de surface.

Nous avons considéré deux situations différentes : (1) le cas où une goutte d'eau replie une membrane élastique via l'action de la tension de surface, (2) le cas d'une lamelle élastique posée à la surface de l'eau et déformée par l'action combinée de la tension de surface et de la pression hydrostatique.

Nous avons montré, dans la première partie, que l'impact d'une goutte d'eau sur une membrane élastique suffisamment souple provoque le repliement de la membrane autour de la goutte. Ce processus permet d'obtenir une forme finale tridimensionnelle bien contrôlée. Nous avons montré que l'impact de goutte non seulement offre la possibilité de replier la membrane de manière beaucoup plus rapide que par évaporation, mais qu'il permet aussi de sélectionner la forme finale de repliement d'une membrane qui présente deux configurations d'équilibre. Nous avons prouvé que cette sélection est purement dynamique, car elle est basée sur la vitesse d'impact de la goutte.

Afin de clarifier le rôle des différents ingrédients physiques dans le processus de sélection de forme, nous avons réalisé une expérience-modèle sur une géométrie de membrane simplifiée (un rectangle), qui présente une sélection de forme due à la gravité. Cette expérience nous a permis de construire un diagramme de phase des formes finales en fonction de la vitesse d'impact et de la configuration de départ.

Nous avons proposé deux modèles bidimensionnels capables de capturer le comportement expérimental de ce système. Le premier modèle est basé sur une approche énergétique appliquée à une géométrie très simplifiée. Il utilise le concept de seuil de stabilité dynamique afin de prédire le comportement asymptotique du système, c'est-à-dire sa forme finale. Le deuxième modèle utilise un code de résolution numérique des équations dynamiques des tiges, et est capable de prédire non seulement les formes finales d'équilibre mais aussi toute la dynamique du système. Dans les deux modèles, l'accent est mis sur la partie solide du système (la lamelle), et le rôle de la goutte est réduit à la seule action de la tension de surface. Malgré cette simplification, les deux modèles montrent un bon accord avec les expériences.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons étudié le problème d'extraction d'une lamelle élastique d'un bain liquide. Dans ce problème l'effet principalement responsable de la

déformation est la pression hydrostatique, et la tension de surface joue un rôle plus subtil : parfois elle favorise la déformation, parfois elle s’y oppose, toujours en permettant au fluide et à la structure de rester accrochés.

Nous avons étudié les formes d’équilibre du système et prédit par un algorithme de continuation le moment où l’eau se détache de la lamelle, ce qui cause la rupture de ce ménisque élasto-capillaire.

Nous avons montré une analogie entre ce problème, dans le cas d’une lamelle très souple, et le problème de flambage d’une lamelle à la surface de l’eau, dans le cas de localisation de la déformation dans un pli. Cette analogie nous a permis de généraliser la solution analytique homocline du problème de flambage vers une famille continue de solutions homoclines, qui s’appliquent tant au problème d’extraction de lamelle qu’au problème de localisation de pli. On a mis en évidence le caractère typiquement non symétrique de ces solutions.

L’étude des interactions élasto-capillaires, qui a fortement intéressé les chercheurs ces dix dernières années, présente encore beaucoup de questions ouvertes. Parmi ces questionnements, l’étude des systèmes hors équilibre et le rôle de la dynamique représentent un des grands challenges sur lesquels l’accent n’a pas encore été mis (Roman & Bico, 2010).

Dans ce travail, nous avons cherché à faire les premiers pas dans cette direction. Nous avons montré que l’apport de la dynamique dans les problèmes d’interaction élasto-capillaire ouvre des perspectives nouvelles et inexplorables dans des systèmes statiques, comme la sélection de forme de repliement basée sur la vitesse d’impact. Bien qu’une modélisation précise d’un problème dynamique constitue, elle aussi, un défi important, nous avons montré que nous sommes capables d’avoir une prédiction correcte des résultats expérimentaux malgré les simplifications introduites dans les modèles.

## A.1 Evaluation de $L_{ec}$ par la mesure des paramètres

Cette méthode, peut-être la plus intuitive, consiste à mesurer séparément les paramètres  $EI$  et  $\gamma$ . Par contre, elle pourrait être source d'erreur car les incertitudes de deux mesures différentes vont s'ajouter.

### A.1.1 Mesure de $\gamma$

La tension de surface est mesurée à partir d'une image expérimentale d'une goutte pendante. Dans notre cas, une goutte d'eau, de masse volumique  $\rho$  et tension de surface  $\gamma$ , est accrochée à une buse circulaire, de rayon  $R_0$ . Alors que la tension de surface cherche à ramener l'interface liquide-air à une forme sphérique, l'action de la gravité tend à allonger le profil de la goutte. La forme finale résulte donc d'une compétition entre ces deux effets (figure A.1).

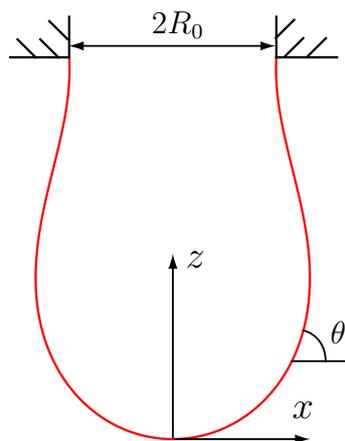


FIGURE A.1: Notations employées dans la résolution du profil d'une goutte pendante. L'angle entre la tangente à l'interface et l'horizontale est noté  $\theta$ . Le rayon de la buse est  $R_0$ .

On suppose la goutte axisymétrique. La courbure d'un point quelconque de la surface de la

goutte est donnée par (de Gennes *et al.*, 2002) :

$$\gamma\kappa(s) = \gamma\kappa_0 - \rho gz(s) \quad (\text{A.1})$$

où  $\kappa_0$  est la courbure à la base de la goutte, et  $s$  est l'abscisse curviligne le long du profil de la goutte. Si on adimensionne l'équation en utilisant le rayon de l'aiguille,  $R_0$ , on obtient :

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0 - \text{Bo } z \quad (\text{A.2})$$

où  $\text{Bo} = \frac{\rho g R_0^2}{\gamma}$  est le nombre de Bond, rapport entre la force gravitationnelle et la force capillaire.

On peut reconstruire le profil de la goutte à partir de l'équation (A.2) couplée avec les relations géométriques :

$$\kappa(s) = \theta'(s) + \frac{\sin \theta(s)}{x(s)} \quad (\text{A.3})$$

$$z'(s) = \sin \theta(s) \quad (\text{A.4})$$

$$x'(s) = \cos \theta(s) \quad (\text{A.5})$$

On remarque que dans l'équation (A.3) on a considéré la courbure due à la symétrie de révolution de la goutte. Si on résout numériquement ce système de quatre équations, on dispose du profil de l'interface paramétré par le nombre de Bond. A ce moment, on peut superposer la solution numérique au profil expérimental, et chercher la bonne valeur de  $\text{Bo}$  qui permet une superposition exacte des deux profils. La valeur qui correspond à l'image de la figure A.2 est  $\text{Bo} = 0.31$ .

A partir de la mesure de  $R_0$  faite directement sur la photographie, et en supposant  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , on trouve :

$$\gamma = 72.3 \text{ mN/m}$$

### A.1.2 Mesure de $EI$

La mesure de du module de rigidité en flexion du PDMS,  $EI$ , se fait avec une approche très proche de la mesure de  $\gamma$  présenté dans le paragraphe précédent : on prend en photographie une lamelle de PDMS encastée à une extrémité et libre à l'autre, et déformée par son propre poids. On cherche à lui superposer un profil théorique pour trouver la bonne valeur de  $EI$ . Or remarque que, comme  $L_{ec} = \sqrt{EI/\gamma w}$  est indépendant de  $w$ , la quantité qu'on est intéressé à mesurer est  $EI/w$ .

On considère une lamelle de longueur  $L$ , épaisseur  $e$  et largeur  $w$ . Elle est soumise à l'action de son poids linéique  $p = \mu g$ , avec  $\mu = \rho_s e w$  la masse linéique de la lamelle. La masse linéique est calculée à partir de l'épaisseur de la lamelle,  $e = 55 \mu\text{m}$ , et  $\rho_s = 970 \text{ kg/m}^3$ . Ceci donne  $\tilde{p} = p/w = 0.52 \text{ N/m}^2$ .



FIGURE A.2: Comparaison entre la forme expérimentale et la solution numérique (rouge) pour un profil de goutte pendante. Parmi la famille de solutions, paramétrées par le nombre de Bond, la solution qui superpose exactement le profil expérimental est repérée par  $Bo = 0.31$ .

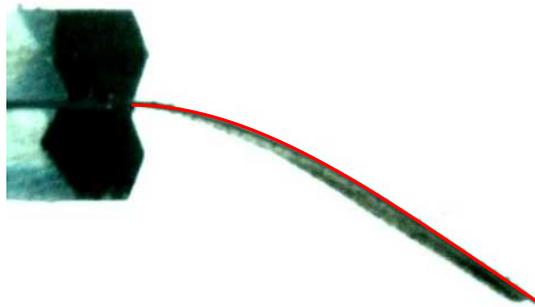


FIGURE A.3: Comparaison entre la forme expérimentale et la solution numérique (rouge) pour un profil de poutre console. Parmi la famille de solutions, paramétrées par  $L^2 / (EI/w)$ , la solution qui superpose exactement le profil expérimental est repérée par  $L^2 / (EI/w) = 2.79$ .

La forme d'équilibre pour la lamelle est donnée par les équations de Kirchhoff (Dill, 1992) :

$$\frac{EI}{w}\theta'(s) = \tilde{p}L^2(1-s)\cos\theta(s) \quad (\text{A.6})$$

$$z'(s) = \sin\theta(s) \quad (\text{A.7})$$

$$x'(s) = \cos\theta(s) \quad (\text{A.8})$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne. Toutes les longueurs sont adimensionnées par  $L$ .

On résout numériquement ce système, en fonction de  $EI/w$ , et on superpose le profil qui en résulte à l'image expérimentale A.3. La valeur de  $EI/w$  qui permet une superposition correcte est  $EI/w = 2.28 \times 10^{-8} \text{ Nm}$  (c'est la rigidité à la flexion par unité de profondeur). On peut en déduire la valeur du module de Young si on considère que  $I = e^3/12$ . On trouve  $E = 1.64 \text{ MPa}$ .

On peut maintenant obtenir, à partir de  $\gamma$  et  $EI/w$ , la valeur de la longueur élasto-capillaire :

$$L_{ec} = \sqrt{\frac{EI}{\gamma w}} = 0.56 \text{ mm} \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Evaluation de $L_{ec}$ par la méthode de la boucle

Cette méthode a été proposée par [Py et al. \(2007\)](#), et permet d'évaluer la longueur élasto-capillaire avec une seule expérience et une seule mesure.

Suivant la procédure décrite dans [Py et al. \(2007\)](#), on dépose une goutte de liquide mouillant (éthanol) sur une lamelle de PDMS de façon à ce qu'elle se referme en boucle. On se concentre sur les derniers instants de l'évaporation, quand il ne reste qu'un ménisque liquide à l'extrémité de la boucle. En considérant le poids de la lamelle négligeable, la résultante des efforts internes  $\mathbf{F}$  dans la lamelle est une constante, et l'équation de la ligne élastique est :

$$EI \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{e}_z + \mathbf{t} \times \mathbf{R} = 0 \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent à la ligne élastique et  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur perpendiculaire au plan de la boucle. Pour résoudre ce problème il faut connaître la courbure en  $s = 0$ , c'est-à-dire à l'extrémité de la boucle : [Py et al. \(2007\)](#) montrent que cette courbure vaut  $\kappa_c = \frac{\sqrt{2}}{L_{ec}}$ . De plus, ils montrent que l'ouverture maximale de la boucle est  $\delta = 0.89L_{ec}$ . On peut donc mesurer expérimentalement la distance  $\delta$  et en déduire facilement la longueur élasto-capillaire. La figure [A.4](#) montre notre réalisation expérimentale.



FIGURE A.4: Photo de la lamelle de PDMS repliée en boucle, avec le ménisque d'éthanol. L'ouverture maximale est  $\delta$ .

Cette expérience a été faite, pour des raisons de mouillage, avec de l'éthanol. La longueur élasto-capillaire qui nous intéresse est celle qui se réfère à l'eau : il faut donc corriger cette relation par le rapport des tensions de surface.

La distance mesurée est  $\delta = 0.88 \text{ mm}$ , ce qui nous donne :

$$L_{ec} = \frac{\delta}{0.89} \sqrt{\frac{\gamma_{\text{ethanol}}}{\gamma_{\text{eau}}}} = 0.55 \text{ mm} \quad (\text{A.11})$$

On remarque que cette valeur est très proche de celle trouvée par la mesure directe des paramètres, ce qui permet de valider les deux expériences et d'avoir accès à une valeur fiable de la longueur élasto-capillaire.





## **B.1 Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact**

Antkowiak A., Audoly B., Jossierand C., Neukirch S. & Rivetti M. Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact. *Proceedings of the National Academy of Sciences of America*, **108**(26), 2011

# Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact

Arnaud Antkowiak<sup>1</sup>, Basile Audoly, Christophe Josserand, Sébastien Neukirch, and Marco Rivetti

Centre National de la Recherche Scientifique and Université Pierre et Marie Curie, Unité Mixte de Recherche 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France

Edited by William R. Schowalter, Princeton University, Princeton, NJ, and approved May 12, 2011 (received for review February 1, 2011)

**A drop impacting a target cutout in a thin polymer film is wrapped by the film in a dynamic sequence involving both capillary forces and inertia. Different 3D structures can be produced from a given target by slightly varying the impact parameters. A simplified model for a nonlinear dynamic elastica coupled with a drop successfully explains this shape selection and yields detailed quantitative agreement with experiments. This first venture into the largely unexplored dynamics of elastocapillary assemblies opens up the perspective of mass production of 3D packages with individual shape selection.**

elastocapillarity | microfabrication | dynamic self-assembly | thin films | surface tension

Capillary forces exerted by a water drop are sufficient to strongly deform thin elastic objects such as carbon nanotubes or biological filaments (1, 2) or even to wrinkle thin polymer sheets (3). Elastocapillary interactions are abundant in nature and are responsible for phenomena such as lung airway collapse (4) and the clustering of insect bristles (5, 6). They are relevant to a number of applications at the micrometer or nanometer scale, such as microelectromechanical systems (7–9), mass production of nonspherical lenses (10), or drug delivery (11). On the other hand, drop impact is one of the most common illustrations of fluid mechanics in everyday life, having practical applications as diverse as pesticide delivery (12) or polymer inkjet printing for flexible electronics (13). Impact and splash of droplets have been studied for more than a century but only a few studies have addressed the case of a compliant substrate, and those are limited to small deformations (14). Here, the impact of a drop on a very flexible target is used to produce millimeter-size three-dimensional structures instantly. We show that impact allows a gain of five orders of magnitude in the fabrication time as compared to a previous method based on evaporation (15); in addition, we unveil the possibility to select the shape of the structure, by tuning the impact parameters. When scaled down and combined with inkjet technology that operates at similar dimensionless numbers, this setup opens up the possibility of mass production of individualized 3D packings at the submillimetric scale.

In our experiments, the flexible targets are cut out from thin polydimethylsiloxane (PDMS) sheets. Such polymer films, naturally exhibiting a nonwetting behavior with a water contact angle close to 110°, are treated to enhance contact line pinning (see *Materials and Methods* for fabrication details). The target is laid down on a superhydrophobic surface, which by repelling water confines the drop onto the target. A water drop of controlled volume is released from a given height, thereby allowing control of the impact velocity. For well-chosen impact parameters, we observe the formation of an instant capillary origami. This concept is demonstrated in the experiment of Fig. 1, where a drop impacts at its center a triangular target of width 7 mm with velocity  $U = 0.53 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Just after impact, the drop spreads out over the target up to a maximal extent where inertia is balanced by the restoring action of capillarity. Next, surface tension drives a flow toward the center of the drop, causing the rebound of the drop (16) and of the elastic film that sticks to it. While in free fall

above the ground, the elastic sheet quickly wraps the drop. An elastocapillary bundle with a tetrahedral shape is formed and falls down to the ground. The whole sequence takes place in 40 ms, which is the typical duration of a hydrophobic rebound (16). When mediated by drop impact, encapsulation is thus considerably faster than when driven by evaporation (15), which typically requires half an hour.

Formation of the instant origami is governed by several length scales. Let  $B = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  be the bending modulus of the film,  $E$  its Young's modulus,  $\nu$  its Poisson's ratio,  $h = 55 \text{ }\mu\text{m}$  its thickness,  $L$  its length,  $\mu = 51.8 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$  its mass per unit area,  $g$  the acceleration of gravity, and  $\gamma = 72 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$  and  $\rho = 1,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  the fluid's surface tension and density. In all our experiments, the initial drop radius is  $R = 1.55 \text{ mm}$ . Wrapping into a tightly packed structure is made possible by the fact that this radius  $R$  is both smaller than the gravitocapillary length  $\ell_{gc} = (\gamma/\rho g)^{1/2} \simeq 2.7 \text{ mm}$  for the drop to remain spherical and larger than the elastocapillary length  $\ell_{ec} = (B/\gamma)^{1/2} \simeq 0.55 \text{ mm}$  above which capillary forces can make slender objects buckle (1, 6, 15). In addition, gravity is important because the size  $L$  of the target is millimetric and comparable to the elastogravitational length  $\ell_{eg} = [B/(\mu g)]^{1/3} \simeq 3.5 \text{ mm}$  above which gravity bends a cantilever beam. These length scales are all relevant and comparable: Encapsulation results from the mixed effects of gravity, elasticity, and capillarity.

Drop impact, more than just speeding up elastocapillary wrapping, also allows for final shape control. A typical illustration of this shape selection mechanism is presented in Fig. 2 and in [Movies S1](#) and [S2](#).

In this experiment, a drop impacts a small flower-shaped film at its center. For a fixed drop radius, different folding scenarios can be observed depending on the impact velocity. At low impact speed, spreading of the drop is limited, and the final pattern is the cylindrical folding of Fig. 2A. At higher speeds, the drop quickly embraces the entire surface of the sheet, and upon retraction a pyramidal wrap is obtained; see Fig. 2B. Different instant origamis can thus be obtained by simply tuning the velocity of impact. A similar selection can be observed with other target shapes. In the case of rectangular films, we observed a competition between two folding modes, one along the length of the rectangle and another one along its width. The pattern can be selected by varying not only the velocity but also the position of impact. The role of these two parameters is investigated in detail next.

The phenomenon of dynamic elastocapillary encapsulation can be carried over to a 2D geometry where it is considerably simpler to analyze. We carried out a series of systematic experi-

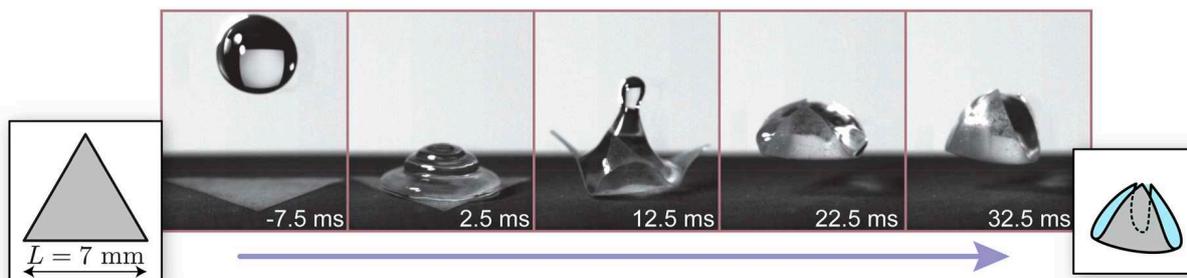
Author contributions: A.A., B.A., C.J., and S.N. designed research; A.A., B.A., S.N., and M.R. performed research; A.A., B.A., S.N., and M.R. analyzed data; and A.A., B.A., and S.N. wrote the paper.

The authors declare no conflict of interest.

This article is a PNAS Direct Submission.

<sup>1</sup>To whom correspondence should be addressed. E-mail: arnaud.antkowiak@upmc.fr.

This article contains supporting information online at [www.pnas.org/lookup/suppl/doi:10.1073/pnas.1101738108/-DCSupplemental](http://www.pnas.org/lookup/suppl/doi:10.1073/pnas.1101738108/-DCSupplemental).



**Fig. 1.** Instant capillary origami, obtained with a water droplet of radius  $R = 1.55$  mm impacting a thin triangular polymer sheet with thickness  $h = 55$   $\mu\text{m}$  at velocity  $U = 0.53$   $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . This time sequence reveals that encapsulation results from the interplay between the motion of fluid interface by capillary forces, and the large, dynamic deformations of the film.

ments using as a target a long and narrow rectangular strip of width  $w = 2$  mm, length  $L = 5$  cm, such that  $h \ll w \ll L$ . For this narrow strip,  $L/\ell_{\text{eg}} = 14.3$ . This 2D setting, sketched in Fig. 3A, simplifies the geometry by suppressing the 3D aspects of folding such as the formation of singular cones and ridges visible in the final frame in Fig. 2B. Moreover, in this setting, the fluid and solid time scales separate, as we show next.

Remarkably, shape selection can still be observed in 2D: The phase diagram in Fig. 3B reveals a competition between wrapped and nonwrapped final configurations. This diagram was obtained by systematically varying the distance  $x$  from the point of impact to the end of the strip and the impact velocity  $U$ . For the purpose of plotting, the position of impact  $x$  was measured in units of  $\ell_{\text{eg}}$ , and  $U$  in units of the capillary velocity  $(\gamma/\rho R)^{1/2}$ : The resulting dimensionless velocity is the square root of the Weber number  $We = \rho U^2 R/\gamma$ . In our experiments, the Weber number varies\* from 0.21 to 15, which is the typical value at which the inkjet technology operates.

Qualitatively, the process of encapsulation requires passing a gravitational energy barrier with the aid of the initial kinetic energy. The outcome of a particular experiment reflects the efficiency of this energy transfer. Indeed, because both  $L$  and  $R$  are larger than  $\ell_{\text{ec}}$ , the strip is flexible enough to bend around the drop and the energy is always minimum in the encapsulated state. However, for drops that are too slow, or impact too far from the edge, the barrier associated with lifting up the strip prevents the system from reaching this global minimum. When the drop is deposited near the end (small  $x$ ), encapsulation involves lifting a short segment of the strip, making the barrier lower. For small enough values of  $x$ , encapsulation can even be observed after nearly quasi-static deposition of the drop. For larger values of  $x$ , however, the barrier is higher and some amount of kinetic energy is required, which explains the existence of a threshold for the velocity  $U$  allowing encapsulation and the increase of this threshold with  $x$ . This qualitative reasoning is consistent with the orientation of the boundary obtained in the experimental diagram; see Fig. 3B. It is now turned into a fully quantitative model, which requires to first analyze the time scales.

During the fast initial spreading of the drop, part of the incident kinetic energy is quickly and irreversibly transferred into surface energy. Irreversibility is here a consequence of contact line pinning: Due to the roughness of the substrate, the contact line never recedes; it remains anchored to its maximal extent in all our experiments. This maximal extent, denoted  $\Delta$ , is directly set by the impact parameters.  $\Delta$  is a key mechanical quantity that determines how the capillary forces are distributed and how efficiently they bend the film during the subsequent folding.  $\Delta$  was measured in a separate series of experiments using the same film (see *SI Appendix*). We found that, in our range of

parameters, spreading is well described by the empirical law  $\frac{\Delta(U) - \Delta_0}{2R} = 0.32 We^{1/2}$ . The parameter  $\Delta_0 = \Delta(U = 0)$  represents the amount of spreading for quasi-static deposition, as we are in partial wetting conditions. Note that the exponent  $1/2$  is consistent with a conversion of kinetic energy  $\sim \rho U^2 R^3$  into surface energy  $\sim \gamma \Delta^2$ . A simple scaling analysis explains why the spreading takes place on a much faster time scale, denoted  $\tau_c$ , than the time scale  $\tau_e$  for the subsequent elastic deformation. The capillary time scale  $\tau_c = \sqrt{\rho R^3/\gamma}$  is independent of the impact velocity (16). By contrast, the elastic time scale is given by the natural period of vibration of the free end of the strip,  $\tau_e \sim x^2 (\frac{\rho}{B})^{1/2}$ . The ratio  $\frac{\tau_c}{\tau_e} \sim (\frac{R^3}{\ell_{\text{ec}}^2 \ell_{\text{eg}}})^{1/2} / (x/\ell_{\text{eg}})^2 \sim 0.02$  is small, when evaluated with the typical value  $x = 4\ell_{\text{eg}}$  of the 2D experiments.

With the aim to predict encapsulation, we consider a mechanical model for the slow folding dynamics of the strip following the initial drop spreading. In this model, the two contact lines are anchored and separated by a prescribed curvilinear distance  $\Delta$ . The value of  $\Delta$  captures the initial transfer of kinetic into surface energy, and the rest of the motion is driven solely by capillary forces. The dynamics of the strip is governed by the following potential energy:

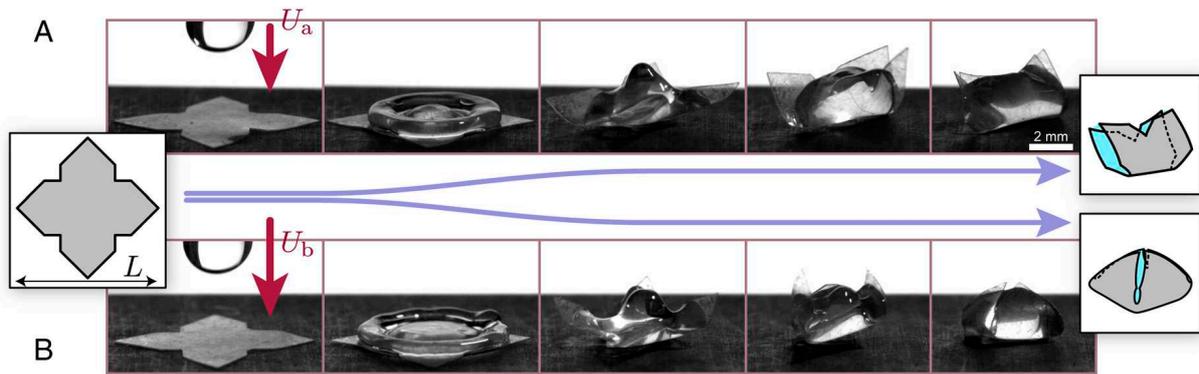
$$\mathcal{U} = \int_0^L \left[ \frac{\hat{B}}{2} |\mathbf{x}''(S,t)|^2 + \hat{\mu} g \mathbf{x}(S,t) \cdot \mathbf{e}_z \right] dS + \hat{\gamma} \lambda(\mathbf{x}(\cdot, t), A, x, \Delta) \quad [1]$$

and kinetic energy

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \hat{\mu} |\dot{\mathbf{x}}(S,t)|^2 dS. \quad [2]$$

Here,  $S$  is the arc length along the strip ( $0 \leq S \leq L$ ), and  $\mathbf{x}(S,t)$  is the position of the centerline. Deformations take place in the  $(x,z)$  plane, and  $\mathbf{e}_z$  is the unit vector pointing upward. Dots denote derivation with respect to time, and primes with respect to arc length  $S$ . The integrals in the potential and kinetic energies  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{T}$  are the classical ones for an elastic curve of bending modulus  $\hat{B} = (Bw)$  and mass per unit length  $\hat{\mu} = (\mu w)$ , subjected to gravity  $g$ : The two first terms in  $\mathcal{U}$  are the elastic energy of bending, proportional to curvature squared, and the potential energy due to gravity. Coupling with the fluid is achieved by the capillary energy  $(\hat{\gamma}\lambda)$ , where  $\hat{\gamma} = (\gamma w)$  is the line tension of the fluid-air interface and  $\lambda$  its perimeter; see Fig. 3C. This interface contacts the strip at points whose arc length coordinates  $S_1$  and  $S_2$  are prescribed in terms of two impact parameters,  $x$  and  $\Delta$ :  $S_1 = L - x - \Delta/2$  and  $S_2 = L - x + \Delta/2$ . Owing to the separation of time scales  $\tau_c \ll \tau_e$ , the drop is treated quasi-statically. For any configuration of the strip  $\mathbf{x}(S,t)$ , the shape of the drop is found by minimizing the interfacial length  $\lambda$  under the constraint of a prescribed area  $A$ . The result is a circular cap attached to the fixed endpoints  $S_1$  and  $S_2$ , whose radius and perimeter  $\lambda$  can be

\*For the volume of the drop to be well controlled, the drop should not touch the target before it detaches from the syringe. This constraint sets a minimal release height, corresponding to a lower bound  $We = 0.21$  in the experiments.



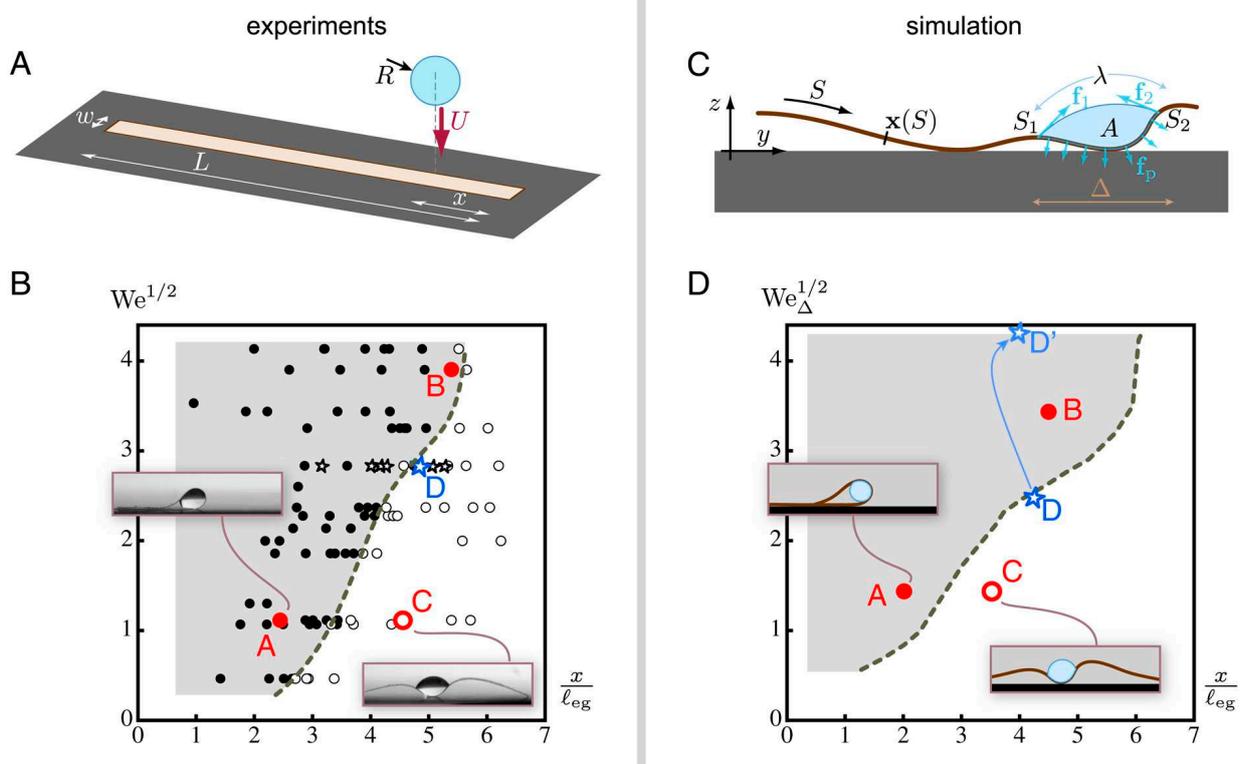
**Fig. 2.** A flower-shaped target reveals the possibility of pattern selection based on impact velocity  $U$ . Radius of the drop is  $R = 1.55$  mm in both experiments, target width is  $L = 10$  mm, and  $U_b > U_a$ . (A) For low impact velocity,  $U_a = 0.68$  m·s<sup>-1</sup>, a cylindrical bundle is formed, having twofold symmetry. (B) At higher velocity,  $U_b = 0.92$  m·s<sup>-1</sup>, the drop spreads more widely and almost wets the entire surface of the film; a pyramidal wrap is formed, having fourfold symmetry.

computed geometrically in terms of the current configuration of the strip:  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}(\cdot, t), A, x, \Delta)$  (see *SI Appendix*).

Our numerical code integrates in time the equations of motion obtained by applying Lagrangian mechanics to our Lagrangian  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ . In deriving these equations, we consider the inextensibility constraint  $|\mathbf{x}'| = 1$  and the presence of an impenetrable ground  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$ . Fluid incompressibility is used during the reconstruction of  $\lambda(\mathbf{x}(\cdot, t), A, x, \Delta)$ . The resulting equations of motion are the classical equations for the dynamics of a 2D Elastica subjected to gravity forces, to frictionless reaction from the ground in the event of contact, and to capillary forces (see *SI Appendix* for details). The capillary forces tend to make the potential energy  $\mathcal{U}$  lower. They do so by bending the strip around

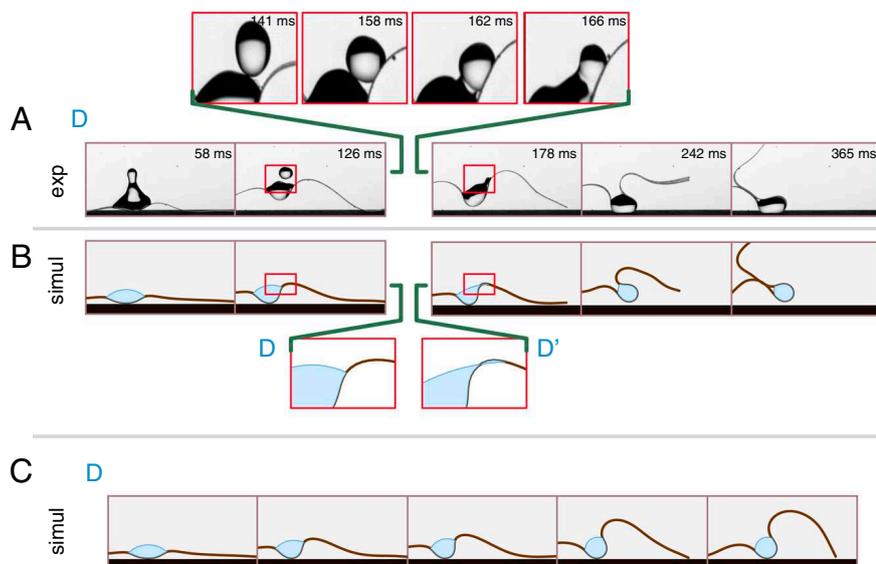
the drop, thereby reducing the interfacial length  $\lambda$  while preserving the imposed area  $A$ .

The numerical phase diagram in Fig. 3D has been obtained by varying the impact parameters systematically in a series of simulation runs. The positions of the endpoints  $S_1$  and  $S_2$  of the wet region were sampled, restricted to  $0 < S_1 < S_2 < L$ . In each simulation run, the values of  $S_1$  and  $S_2$  are recorded, as well as the outcome of the numerical experiment, encapsulated or nonencapsulated (the exact criterion for encapsulation is described in *Materials and Methods*). Each pair of values  $S_1$  and  $S_2$  is translated into impact parameters  $\Delta = |S_2 - S_1|$  and  $x = L - \frac{S_1 + S_2}{2}$ . For the purpose of comparison with the experiments, the impact parameter  $\Delta$  is then converted into an



**Fig. 3.** Comparison of experiments (A and B) and simulations (C and D) in a 2D geometry. (A) In these experiments, a drop impacts a long, thin polymer strip laying down on a substrate, at a variable distance  $x$  from its end, and with variable impact velocity  $U$ . Strip dimensions are  $L = 5$  cm and  $w = 2$  mm, and drop radius is  $R = 1.55$  mm. (B) Phase diagram showing the outcome of the experiment: nonencapsulated drop (O), encapsulated drop (●), or encapsulated drop with the help of a secondary drop obtained by pinch-off (☆). (C) Numerical model of a 2D dynamic Elastica coupled with a quasi-static, incompressible fluid with surface tension. (D) Phase diagram for the Elastica model. In B and D, typical final shapes are shown in inset. The time sequences of a few selected experiments, labeled A, B, C, and D here, are compared in Figs. 4 and 5. During the simulation run labeled D in part D of the figure, the impact parameters are changed to account for the capture of a secondary drop, as shown by the light-blue arrow.





**Fig. 5.** Encapsulation aided by a topology change of the drop. (A) In the experiments, a secondary drop appears transiently by pinch-off and coalescence when  $We^{1/2} \approx 2.8$ . This detachment leads to encapsulation in a region where it would otherwise not be possible: The impact parameters for this experiment are denoted by the star labeled D, located to the right of the boundary in the phase diagram of Fig. 3B. (B) This transient topology change is accounted for by extending the footprint  $\Delta$  of the drop in the middle of the simulation (Inset D'), by an amount measured from the experimental frames. As a result, simulation correctly predicts encapsulation and matches the experimental movie frame by frame. (C) When this footprint  $\Delta$  is left unchanged, simulation fails to predict encapsulation.

dissipated by viscosity. This energy ends up in selecting the final shape among competing equilibria. We studied in detail a 2D setting, where well-controlled experiments were found in quantitative agreement with a tractable model. In this 2D setting, multistability arises from gravity. The dynamical shape selection uncovered here works also at smaller scales, where gravity becomes unimportant. Indeed, there are other sources of multistability, such as nonlinear elasticity of thin films or the follower character of capillary forces. As a matter of fact, numerical experiments confirmed the persistence of shape selection in the absence of gravity (see *SI Appendix* and *Movie S3*). Robustness of the selection mechanism opens up the perspective of scaling down the experiment to the size of an inkjet drop.

### Materials and Methods

The thin elastic sheets were made of PDMS (RTV615 from General Electric). The polymer was spun on a glass microscope slide at 1,500 rpm for 40 s on a SUSS MicroTec spin-coater (after an initial spreading stage of 10 s at 500 rpm—each change in angular velocity being achieved over 5 s with a linear ramp) and cured at 70 °C for 1 h. The resulting thickness was 55  $\mu\text{m}$ . The thin polymer films were peeled off from the glass using a surgical blade and further cut out to the desired shape. The pattern was then deposited onto a rigid copper substrate warranting a high-restitution coefficient upon impact. To make the copper superhydrophobic we used electroless galvanization (17): The copper was first coated with a textured metallic layer ( $\text{AgNO}_3$ ) and then covered with a low-surface-energy self-assembled monolayer (1H,1H,2H,2H-perfluorodecanethiol). The polymer patterns were powdered with talc to prevent self-adhesion; talc was found to enhance contact line pinning. All

sequences were recorded using a high-speed camera Photron SA-5 at 5,000 frames per second.

The numerical simulations are based on the “Discrete Elastic Rods” model of Bergou et al. (18), which have been validated against analytical reference solutions. Here, we used it in a 2D geometry where twist is absent. We used the codebase developed by M. Bergou and E. Grinspun at Columbia University, New York, which has kindly been made available to us. Its robust and efficient treatment of the inextensibility constraint allows for fast simulations, taking typically less than 30 s even at the highest resolution. Details on the implementation of our model are provided in the *SI Appendix*. In the simulations, we used the experimental values of  $\hat{\mu} = \mu w$ ,  $\hat{B} = Bw$ , and  $\hat{\gamma} = \gamma w$  for the meniscus force, and we set  $A = V/\ell_{eg}$ . This choice of  $A$  reflects the observation that the rounded shape of the drop makes it wider than  $w$ ; as a result, its width is clearly closer to  $\ell_{eg}$  than to  $w$ . These experimental values were made dimensionless because we used units such that gravity  $g$ , lineic mass  $\hat{\mu}$ , and bending modulus  $\hat{B}$  all have the value 1. In such units, the line tension  $\hat{\gamma}^* = 40$  and the area of the 2D drop is  $A^* = 0.36$ .

The criterion for encapsulation used both in experiments and numerical simulations was to test whether the endpoint of the free edge  $S = L$  had been moved to the left of the point at the center of impact  $S = L - x$ : Encapsulation corresponds to  $y(L, t = \infty) < y(L - x, t = \infty)$ .

**ACKNOWLEDGMENTS.** We thank José Bico and Benoît Roman for useful discussions and general help when starting the experiments, Marie Le Merrer for helping us in setting up superhydrophobic surfaces, Fabrice Monti and Nicolas Bremond for providing the thin PDMS samples. We are extremely grateful to Miklós Bergou and Eitan Grinspun (Columbia University, New York) for making available their numerical code. L'Agence Nationale de la Recherche through its Grant “DEFORMATION” ANR-09-JCJC-0022-01 is acknowledged for its financial support.

- Cohen AE, Mahadevan L (2003) Kinks, rings, and rackets in filamentous structures. *Proc Natl Acad Sci USA* 100:12141–12146.
- Chakrapani N, Wei B, Carrillo A, Ajayan PM, Kane RS (2004) Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams. *Proc Natl Acad Sci USA* 101:4009–4012.
- Huang J, et al. (2007) Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science* 317:650–653.
- Heil M (1999) Minimal liquid bridges in non-axisymmetrically buckled elastic tubes. *J Fluid Mech* 380:309–337.
- Eisner T, Aneshansley DJ (2000) Defense by foot adhesion in a beetle (*Hemisphaerota cyanea*). *Proc Natl Acad Sci USA* 97:6568–6573.
- Bico J, Roman B, Moulin L, Boudaoud A (2004) Adhesion: Elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature* 432:690.
- Syms RRA, Yeatman EM, Bright VM, Whitesides GM (2003) Surface tension-powered self-assembly of microstructures—the state-of-the-art. *J Microelectromech Syst* 12:387–417.
- Leong TG, Lester PA, Koh TL, Call EK, Gracias DH (2007) Surface tension-driven self-folding polyhedra. *Langmuir* 23:8747–8751.
- Raccurt O, Tardif F, d'Avitaya FA, Vareine T (2004) Influence of liquid surface tension on stiction of SOI MEMS. *J Micromech Microeng* 14:1083–1090.
- O'Neill FT, Sheridan JT (2002) Photoresist reflow method of microlens production. Part I: Background and experiments. *Optik* 113:391–404.
- Soppimath KS, Aminabhavi TM, Kulkarni AR, Rudzinski WE (2001) Biodegradable polymeric nanoparticles as drug delivery devices. *J Control Release* 70:1–20.
- Rein M (1993) Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dyn Res* 12:61–93.
- de Gans BJ, Duineveld P, Schubert U (2004) Inkjet printing of polymers: State of the art and future developments. *Adv Mater* 16:203–213.
- Pepper RE, Courbin L, Stone HA (2008) Splashing on elastic membranes: The importance of early-time dynamics. *Phys Fluids* 20:082103.
- Py C, et al. (2007) Capillary origami: Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. *Phys Rev Lett* 98:156103.
- Richard D, Clanet C, Quere D (2002) Surface phenomena: Contact time of a bouncing drop. *Nature* 417:811.
- Larmour IA, Bell SEJ, Saunders GC (2007) Remarkably simple fabrication of superhydrophobic surfaces using electroless galvanic deposition. *Angew Chem Int Ed Engl* 119:1740–1742.
- Bergou M, Wardetzky M, Robinson S, Audoly B, Grinspun E (2008) Discrete elastic rods. *ACM Trans Graph* 27:63.1–63.12.

## B.2 Instabilities in a drop-strip system : a simplified model

Rivetti M. & Neukirch S. Instabilities in a drop-strip system : a simplified model. *Proceedings of the Royal Society A*, **468**(2141), 2012

# Instabilities in a drop-strip system: a simplified model

BY MARCO RIVETTI<sup>1,2,\*</sup> AND SÉBASTIEN NEUKIRCH<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>UPMC Univ Paris 06, and <sup>2</sup>CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond  
d'Alembert, 75005 Paris, France

We study the deformation of an elastic strip by a liquid drop. At small enough scales, capillarity is the dominant fluid effect and surface tension forces may be sufficient to fold the beam, resulting in the wrapping of the drop by the beam. However, wrapping of the drop can be inhibited by the weight of the beam, which creates an energy barrier. The barrier can be overcome by input of kinetic energy in the form of impact of the drop. We introduce a semi-analytical model to study equilibria and their stability in three drop-beam systems: evaporation of a drop wetting and bending an elastic beam; impact of a drop on an elastic beam; lifting of a heavy elastic beam by a drop and we show the model reproduces experimental data. In relevant cases, we use the concept of suddenly applied load to discuss dynamic instabilities.

**Keywords:** capillarity; one-dimensional elasticity; bifurcation; variational approach

## 1. Introduction

Classical fluid–structure interactions take place in set-ups where fluid flows apply stress on elastic structures, thereby inducing vibrations of these structures. At small scales and in quasi-static set-ups, surface tension is the source of another type of fluid–structure interaction as an elastic structure may be soft enough to experience strong deformations due to capillary forces (Roman & Bico 2010). Recent examples involve wet filaments forming bundles (Bico *et al.* 2004), liquid–air interfaces buckling an elastic strut (Cohen & Mahadevan 2003; Neukirch *et al.* 2007), liquids rising inside elastic walls and deforming the walls (Kim & Mahadevan 2006; Aristoff *et al.* 2011; Duprat *et al.* 2011), liquid drops deposited on floating thin films and inducing the wrinkling of the film (Huang *et al.* 2007; Vella *et al.* 2010). These *elasto–capillary* interactions appear in a wide range of problems and have been studied intensively over the past few years.

The evaporation of a drop lying on a thin elastic sheet may result in the folding of the sheet around the drop (Py *et al.* 2007). Use of this ‘capillary origami’ phenomenon has been proposed for the fabrication of three-dimensional photovoltaic cells (Guo *et al.* 2009) or even smaller objects. As a matter of fact, capillary driven self-folding mechanisms have been shown to be useful in the fabrication of microelectromechanical systems (MEMSs) to achieve three-dimensional structures that are otherwise complicated to realize (Gracias

\*Author for correspondence ([rivetti@ida.upmc.fr](mailto:rivetti@ida.upmc.fr)).

*et al.* 2002; Syms *et al.* 2003; Leong *et al.* 2007; Mastrangeli *et al.* 2009). Recent experiments have shown that elasto-capillary wrapping can be achieved using drop impact on millimetric and centimetric scales (Antkowiak *et al.* 2011). The success of the wrapping has been shown to depend on several parameters, as elasticity, capillarity and gravity all come into play.

In this paper, we develop a model to understand the interactions between these three effects and show that a simple theory can reproduce experimental data and shed light on the wrapping instability. Our goal is to understand the mechanisms underlying the behaviour of the system, predict equilibrium shapes and their stability. We also discuss the differences between static and dynamic instability, the latter involving dynamics of the system and basin of attraction of equilibrium points.

The paper is organized as follows. We first introduce some general hypotheses of our framework in §2, and we then validate our model in §3 with a problem involving only elasticity and capillarity. In §4, we use the concept of suddenly applied load and dynamic stability to show our model can reproduce experimental data, and we give a detailed study on static and dynamic stability of an heavy elastic strip lifted by the capillary action of a drop in §5.

## 2. Main hypotheses

In this section, we introduce some typical length scales of the problem, explain the simplifications we perform and describe how we compute equilibrium points and their stability.

### (a) Different length scales

Elasticity of structures involves no typical length scale, but once coupled with capillarity or gravity length scales arise. An elastic beam loaded axially will buckle once the force exceeds a threshold. If  $L$  is the length of the beam and  $EI$  its bending stiffness, the buckling threshold scales like  $EI/L^2$ . We note  $E$  the Young's modulus and  $I$  the second moment of area of the cross section. In the present case of a beam of thickness  $h$  and width  $w$ , with  $h \ll w$ , we have  $I = h^3w/12$ , and the beam preferentially bends in the plane orthogonal to  $w$ . If the extremity of such a beam is brought to contact with a liquid–air interface, then capillary forces scaling like  $2(h+w)\gamma \simeq 2\gamma w$  are exerted, where  $\gamma$  is the surface energy of the interface. Such forces are sufficient to induce buckling if  $L \gtrsim L_{ec}$ , with

$$L_{ec} = \sqrt{\frac{EI}{\gamma w}}, \quad (2.1)$$

where  $L_{ec}$  is referred to as the elasto-capillary length (Cohen & Mahadevan 2003; Bico *et al.* 2004).

In the same manner, equating buckling forces with the total weight of the beam, we introduce the gravito-elastic length,  $L_{eg}$

$$L_{eg} = \left( \frac{EI}{\rho ghw} \right)^{1/3}, \quad (2.2)$$

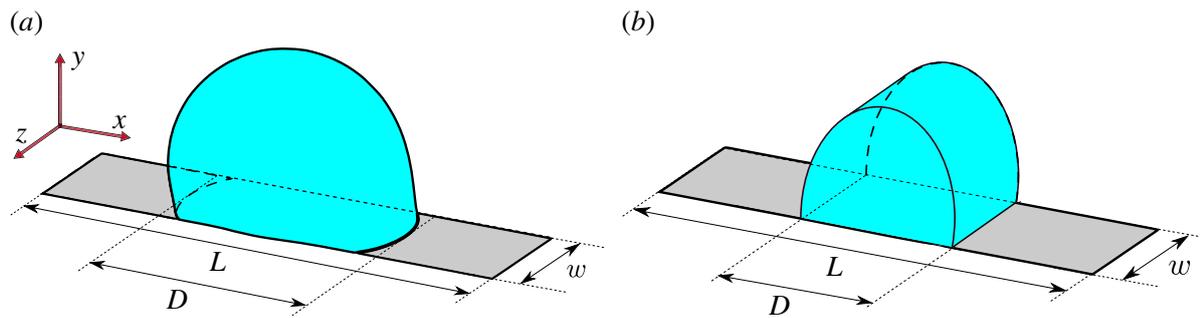


Figure 1. A liquid drop lies on a rigid rectangular surface. (a) Solution of the surface evolver (Brakke 1992) problem and (b) the approximation used here, where the liquid–air interface is cylindrical. (Online version in colour.)

where  $\rho$  is the density of the beam and  $g$  is the acceleration of gravity. Beams that are longer than  $L_{eg}$  are significantly deformed by gravity.

In this paper, we concentrate our attention on the problem of a drop lying on a slender beam. On the one hand, the radius  $R$  of the drop has to be larger than  $L_{ec}$  to observe significant bending. On the other hand, drop radius is limited by gravity and one has to keep  $R < L_{gc}$  for the drop to remain spherical,  $L_{gc} = (\gamma/\rho_L g)^{1/2}$  being the gravito-capillary length (here  $\rho_L$  denotes the liquid density). Therefore, we work with drops of radii  $L_{ec} < R < L_{gc}$ , neglecting the weight of the drop, and also its inertia and viscosity.

### (b) Two-dimensional model of a three-dimensional problem

In the physical problem we consider, the drop profile is roughly a spherical cap and the strip behaves as an elastic plate because its thickness  $h$  is very small when compared with its other two dimensions ( $w, L$ ). Therefore, we face a native three-dimensional problem and a complete resolution would necessitate complex numerics solving both liquid and solid phases. The goal of this study being to find a simple model predicting the general behaviour of the system, we introduce several simplifications of the problem.

First of all as  $h \ll w \ll L$  (figure 1), one expects bending in the  $x$ – $y$  plane to be dominant with respect to other planes. Invariance in the  $z$ -direction leads to consider the strip as a (one-dimensional) beam. Even if the strip is invariant in the  $z$ -direction, the drop still has a three-dimensional shape. However, as we will introduce an energy-based model, only the area of the liquid–air interface will matter. As the width  $w$  of the strip is chosen to be somewhat smaller than the drop size, the drop will primarily extend in the  $x$ – $y$  plane, leaving the  $z$ -direction approximatively invariant. We therefore approximate the shape of the drop with a cylindrical surface, invariant in the  $z$ -direction and bounded by two planar caps (figure 1). In order to assess the approximation involved in this simplification, we numerically solve, using *surface evolver* (Brakke 1992), for the shape and area of a drop of volume  $V$  constrained to lie on a rigid flat strip of length  $D$  and width  $w$ . For several combinations of  $V$ ,  $w$  and  $D$ , we compare the extent of the liquid–air interface given by the simulation with that of a cylindrical drop and we find that, even if the cylindrical drop always has a larger area, then the ratio between the area of the three-dimensional shape and the cylindrical surface

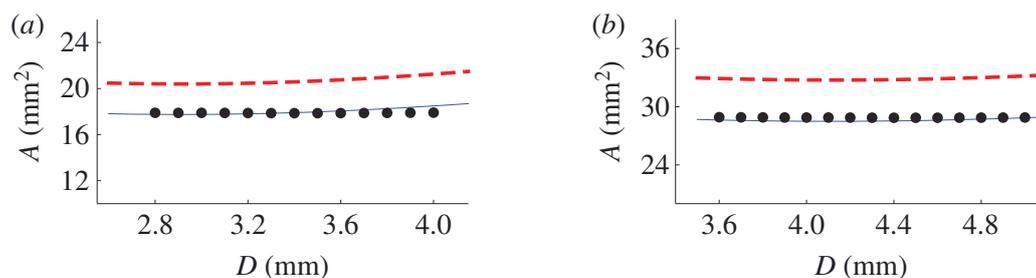


Figure 2. Area of the liquid–air interface for a three-dimensional drop calculated with *surface evolver* (discs) and with the cylindrical interface approximation (dashed line), as function of the drop base extent  $D$ . Parameters are: width  $w = 3 \text{ mm}$  and liquid volumes (a)  $V = 10 \text{ mm}^3$  and (b)  $V = 20 \text{ mm}^3$ . Solid line is obtained by scaling the dashed line by a corrective factor 0.87. (Online version in colour.)

(plus caps) does not vary much with parameters. In the parameter range we are interested in, a good approximation is  $A_{\text{three-dimensional}}/A_{\text{cyl}} \simeq 0.87$  (figure 2). In §4, where we compare our model results with experimental data, we use this correction coefficient, making the further hypothesis that it does not change as the strip bends.

### (c) Discrete energy approach

We use an energy approach to find equilibrium shapes and their stability. Total potential energy  $\mathcal{E}$  of the system is given by the sum of elastic ( $\mathcal{E}_{\text{el}}$ ), capillary ( $\mathcal{E}_{\gamma}$ ) and gravitational ( $\mathcal{E}_{\text{g}}$ ) energies. In the case of a one-dimensional beam problem, this could be formally written as

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_{\gamma} + \mathcal{E}_{\text{g}} = \int_{\text{beam}} \mathcal{F}(x(s), y(s), \varphi(s)) \, ds, \quad (2.3)$$

where  $(x(s), y(s))$  is the deformed position of the beam in the plane,  $\varphi(s)$  is the angle between the horizontal axis and the tangent of the beam, and  $\varphi'(s) = \kappa(s)$  is the curvature of the beam. The variable  $s$  is the arc-length along the beam. Looking for stationary points of this functional leads to classical Euler–Lagrange equations. This exact resolution requires to solve a system of differential equations with boundary conditions. In order to simplify the problem, we strongly restrict the functional space in which the unknown functions  $(x(s), y(s), \varphi(s))$  live, that is we choose the shape of the deformations, leaving amplitudes unknown. This Galerkin-type reduction is performed in such a way that the kinematics and physical constraints are satisfied. The unknown function  $\kappa(s)$  is, for example, approximated as

$$\kappa(s) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

where the basis functions  $\psi_i(s)$  are given. This introduces unknown variable coefficients  $c_i$  and changes the total energy (2.3) from being a functional to being a mere function of the  $c_i$ :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{c})$ , with  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Looking for

extremums of the energy (i.e. equilibrium points) now requires to solve only a (possibly nonlinear) system of equations

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

In the problems considered in the following sections, we minimize  $\mathcal{E}(\mathbf{c})$  in the presence of  $m$  constraints  $\phi_\alpha(\mathbf{c}) = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ . We therefore introduce Lagrange multiplier(s)  $\lambda_\alpha$  and the Lagrangian function  $\mathcal{L} = \mathcal{E} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \phi_\alpha$ . Lagrangian multipliers add new equilibrium equations to the system

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha. \quad (2.6)$$

Once an equilibrium point  $\mathbf{c}^0$  satisfying the constraints  $\phi_\alpha(\mathbf{c}^0) = 0 \quad \forall \alpha$  is found, we test its stability. The equilibrium solution  $\mathbf{c}^0$  is said to be stable, if it locally minimizes  $\mathcal{E}$  among all admissible variations  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^0 + \epsilon \delta \mathbf{c}$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{c}^0) < \mathcal{E}(\mathbf{c}^0 + \epsilon \delta \mathbf{c}) \quad \forall \delta \mathbf{c} \quad \text{such that} \quad \phi_\alpha(\mathbf{c}^0 + \epsilon \delta \mathbf{c}) = 0 \quad \forall \alpha, \quad (2.7)$$

where  $\epsilon \ll 1$ . A variation  $\delta \mathbf{c}$  is said admissible if  $\phi_\alpha(\mathbf{c}^0 + \epsilon \delta \mathbf{c}) = 0$ . Because we already have  $\phi_\alpha(\mathbf{c}^0) = 0$ , this requires  $\delta \mathbf{c} \cdot \partial \phi_\alpha / \partial \mathbf{c} = 0$ ,  $\forall \alpha$ . Consequently, we compute the Hessian matrix

$$H = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{c}} \quad (2.8)$$

and evaluate  $H^0 = H(\mathbf{c}^0)$ . Stable solutions are such that  $\delta \mathbf{c} \cdot H^0 \cdot \delta \mathbf{c} > 0$  for all admissible variations  $\delta \mathbf{c}$ . It can be shown that this is equivalent to having only positive eigenvalues for the ‘projected’ Hessian (Luenberger 1973)

$$H' = K^T \cdot H^0 \cdot K, \quad (2.9)$$

where the columns of the matrix  $K$  are the vectors of the basis of the kernel of the matrix whose lines are  $\partial \phi_\alpha / \partial \mathbf{c}$ . The ‘projected’ Hessian  $H'$  is a square matrix of dimension  $(n - m) \times (n - m)$ .

### 3. Evaporation of a drop bound to an elastic strip

In figure 3, a liquid drop is brought into contact with an elastic strip of length  $L$ . Surface tension tends to make the drop circular, thereby bending the strip and resulting in a trade-off between elastic and capillary energies. As the drop evaporates, the quasi-static evolution of the system is monitored and the final configuration of the system depends on the ratio  $L/L_{ec}$  (Py *et al.* 2007). We show that our simplified discrete model can capture the different responses of the system, allowing us to draw bifurcation diagrams and give an approximation value for the threshold ratio  $L/L_{ec}$  computed by Py *et al.* (2007) with the continuous model. As in Py *et al.* (2007), the gravitational energy is not considered here.

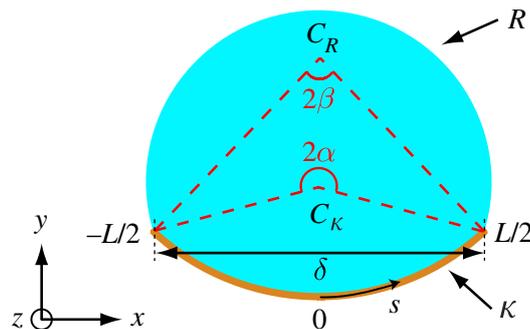


Figure 3. Model for the capillary adhesion of a drop and an elastic strip. The strip has length  $L$  and constant curvature  $\kappa$ . The interface between the drop and the air has curvature  $1/R$ . The system is invariant along the direction  $z$  and has depth  $w$ . The shaded (blue) region has area  $A_c$ , see equation (3.3). (Online version in colour.)

(a) Model

As shown in figure 3, in the present model, the strip centre line is a circular arc of radius  $1/\kappa$ , centre  $C_\kappa$  and central angle  $2\beta$ ; the liquid–air interface is a circular arc of radius  $R$ , centre  $C_R$  and central angle  $2\alpha$ . In this approximation of uniform curvature  $\kappa$ , the elastic deformation energy of the elastic strip is then

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI\kappa^2(s) \, ds = \frac{1}{2} EI\kappa^2 L. \quad (3.1)$$

During evaporation of the liquid, the drop remains pinned to the extremities of the elastic strip, leaving the area of the liquid–solid interface constant. We then have to consider only the energy of the liquid–air interface. In our cylindrical model approximation (figure 1), this interface consists of three parts: the arc of cylinder (of axis  $z$  and radius  $R$ ) from  $s = -L/2$  to  $s = +L/2$ , and the two planar caps in the  $x$ – $y$  plane, bounded by the strip and the circular arc of radius  $R$  (figure 3). The interface energy is then

$$\mathcal{E}_\gamma = \iint_{\partial V} \gamma \, dA = \gamma(2\alpha wR + 2A_c), \quad (3.2)$$

where  $A_c$  is the area of a planar cap

$$A_c = \frac{1}{\kappa^2} \left( \beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + R^2 \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right). \quad (3.3)$$

The total energy of the system is

$$\mathcal{E}(\kappa, \alpha, \beta, R) = \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_\gamma. \quad (3.4)$$

We make use of the two geometric constraints  $(1/\kappa) \sin \beta = R \sin \alpha$  and  $L = 2\beta/\kappa$  (figure 3) to reduce the set of variables to  $\{\kappa, \alpha\}$ . For each fixed value  $V_i$  of the liquid volume  $V = wA_c(\kappa, \alpha)$ , we look for stable equilibrium solutions

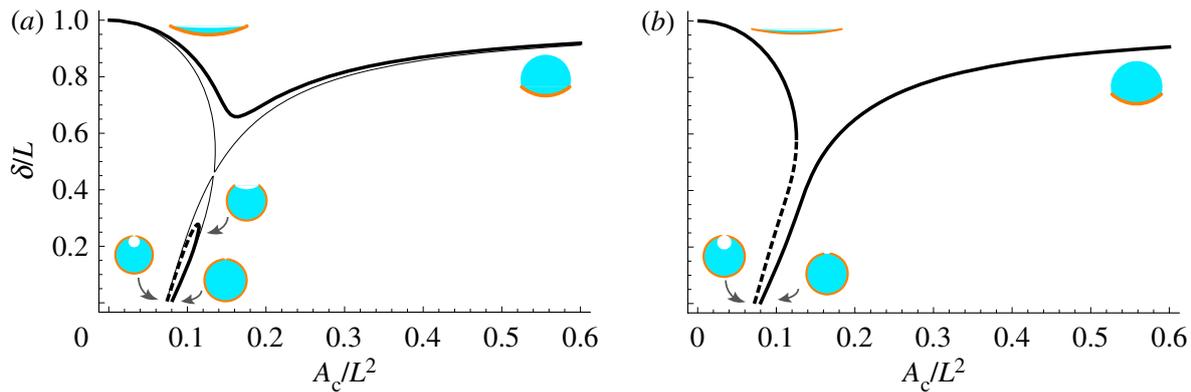


Figure 4. Bifurcation diagram for system in figure 3. The distance  $\delta$  between the two ends of the strip is plotted as a function of liquid volume  $V = A_c w$ . Paths of stable (solid curves) and unstable (dashed curves) configurations are shown. (a) Thick curves are for  $L = 3.9 L_{ec}$  for which evaporation ends with an open system. Thin lines are for the limiting case  $L = 4.09 L_{ec}$ . (b) Case with  $L = 4.2 L_{ec}$  where evaporation ends with an encapsulated system. (Online version in colour.)

by minimizing the energy  $\mathcal{E}$  under the constraint  $\phi = V - V_i = 0$ , using the Lagrangian  $\mathcal{L} = \mathcal{E} - \lambda\phi$

$$\mathcal{L}(\kappa, \alpha) = \frac{1}{2} EI \kappa^2 L + 2\gamma \alpha w \frac{\sin(L\kappa/2)}{\kappa \sin \alpha} - \lambda(wA_c(\kappa, \alpha) - V_i), \quad (3.5)$$

where the constant  $2\gamma A_c$  has been removed. Equilibria are found by numerically solving equation (2.6), here  $(\partial/\partial\kappa, \partial/\partial\alpha, \partial/\partial\lambda)\mathcal{L} = 0$ , and their stability is assessed with the corresponding projected Hessian matrix.

### (b) Results

Equilibria and stability are shown in figure 4, where the distance  $\delta$  between the extremities of the strip is plotted as a function of the liquid volume. As already shown in Py *et al.* (2007), depending on the ratio  $L/L_{ec}$ , two different behaviours exist during evaporation of the drop. We start with a drop gently bending the strip (large values of  $A_c = V/w$ ) and let evaporation take place (i.e. decreasing  $A_c$ ). On the one hand, when  $L/L_{ec}$  is small, the strip first starts to bend but eventually becomes flat as the volume vanishes (figure 4a). On the other hand, if  $L/L_{ec}$  is large enough, the strip progressively bends and the liquid–air interface decreases to finally vanish when the extremities of the strip touch, like the right-most curve of figure 4b. The transition between these two regimes happens at  $L = 4.09 L_{ec}$  (thin line in figure 4a), where a transcritical bifurcation takes place. The present value is an approximation of the value found in the full resolution,  $L = 3.54 L_{ec}$  Py *et al.* (2007). A similar model was introduced by de Langre *et al.* (2010), where a more distant value of the threshold  $L = \sqrt{2\pi} L_{ec} \simeq 4.44 L_{ec}$  was obtained by merely comparing energies of closed and open configurations.

We conclude that our discrete model is precise enough to capture instabilities and bifurcations of drop-strip systems, and we now use it to compute the encapsulation threshold of an impacting drop.

#### 4. Encapsulation of an impacting drop

In Antkowiak *et al.* (2011), a water droplet of volume  $V_0$  falls and impacts a strip lying on a rigid support. The impact point lies at distance  $L$  from the right end of the strip, and at distance  $L'$  from the left end, with  $L' \gg L$ . These authors study the influence of the impact velocity  $U$  and of the length of the free end  $L$  on the final configuration of the system. Two different final states exist: (i) an encapsulated state where the free end of the strip has flipped over and wrapped the drop and (ii) an open state in which the strip is only slightly deformed by the drop.

We use our discrete model to predict the final state of the drop-strip system with an energy criterion. It was shown in Antkowiak *et al.* (2011) that the three-dimensional experiment could be correctly described with two-dimensional calculations. During impact, the drop spreads on the strip until it reaches a maximum extent  $\Delta$ . At this point, most of the initial kinetic energy has been transformed into surface energy (Clanet *et al.* 2004; Eggers *et al.* 2010), and it is experimentally observed that the contact line will not recede but will remain pinned to the strip (Antkowiak *et al.* 2011). As a consequence, capillary forces, striving for a reduction of the extent of the liquid–air interface, tend to fold the strip, thereby increasing the elastic energy. Moreover, as the strip flips over the drop, gravitational energy of the strip is also increased. This amount of elastic and gravitational energy acts as an energy barrier that has to be compared with the initially available kinetic energy in order to predict the final state of the system.

##### (a) Model

In the experimental set-up (Antkowiak *et al.* 2011), the maximal extent of the drop  $\Delta$  is related to impact velocity  $U$  with the empirical law

$$\frac{\Delta - \Delta_0}{2R} = 0.32 We^{1/2}, \quad (4.1)$$

where  $We = \rho R U^2 / \gamma$  is the Weber number and  $\Delta_0$  is the extent of the wet region when  $U = 0$ . In subsequent dynamics, the contact line never recedes and may advance only if the dynamic contact angle  $\theta$  reaches the critical value  $\theta^*$ . We therefore have  $D = \Delta/2$  as long as  $\theta < \theta^*$  (see figure 5 for notations). Moreover, as the length  $L' - D$  is very large, the left-end tail is considered immobile. Impact of the drop and dynamics of the system take place in milliseconds and, therefore, the volume  $V$  of the drop stays constant,  $V = V_0$ , as no evaporation occurs.

As in §4, the liquid–air interface is a circular arc of radius  $R$ , centre  $C_R$  and central angle  $2\alpha$  (figure 5).

However, in the present model, the strip has total length  $(L + L')$  and is only partly wetted. The left tail  $s \in (-L'; -D)$  lies flat on a rigid support, whereas the wetted part  $s \in (-D; D)$  and the right tail  $s \in (D; L)$  are free to move. In the wetted region, the strip centre line is a circular arc of radius  $1/\kappa$ , centre  $C_\kappa$  and central angle  $2\beta$ . The right tail is a straight segment of inclination  $2\beta$ . As configurations are symmetric with regard to the axis passing through points  $C_R$  and  $C_\kappa$ , the wetting angle  $\theta$  (between the strip and the liquid–air interface) is

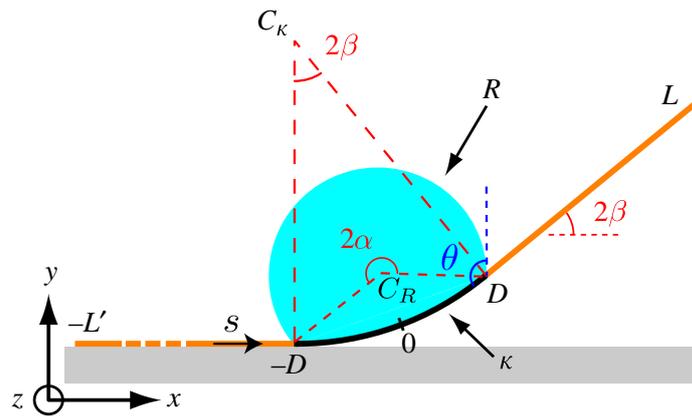


Figure 5. Model of a drop partially wetting an elastic strip. The strip, of length  $L + L'$ , has uniform curvature  $\kappa$  in the wetted region, and is straight otherwise. The liquid–air interface has uniform curvature  $1/R$ . The Young contact angle  $\theta$  is equal to  $\alpha + \beta$ . The weight of the strip is accounted for and a rigid support prevents the system from globally falling down. The system is invariant along the  $z$  direction and has depth  $w$ . (Online version in colour.)

the same at  $s = D$  and at  $s = -D$ . The elastic deformation energy of the elastic strip is then

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{-D}^D EI\kappa^2(s) \, ds = EI\kappa^2 D. \quad (4.2)$$

The weight of the strip, responsible for the energy barrier, is now accounted for. The elevation of the strip in the three different regions is

$$y_1(s) = 0 \quad \text{for } s \in (-L'; -D), \quad (4.3)$$

$$y_2(s) = \frac{1 - \cos(\kappa s + \kappa D)}{\kappa} \quad \text{for } s \in (-D; D) \quad (4.4)$$

and

$$y_3(s) = \frac{1 - \cos(2\kappa D)}{\kappa} + (s - D) \sin(2\kappa D) \quad \text{for } s \in (D; L). \quad (4.5)$$

We integrate to obtain the gravitational energy ( $\mathcal{E}_g$ )

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_g}{\rho g w h} &= \int_{-L'}^{-D} y_1(s) \, ds + \int_{-D}^D y_2(s) \, ds + \int_D^L y_3(s) \, ds \\ &= \frac{1}{\kappa} \left( 2D - \frac{\sin(2\kappa D)}{\kappa} \right) + \frac{1 - \cos(2\kappa D)}{\kappa} (L - D) + \frac{1}{2} (L - D)^2 \sin(2\kappa D). \end{aligned} \quad (4.6)$$

As in §4, we employ a cylindrical approximation for the drop so that the liquid–air interface comprises three parts: the arc of cylinder (of axis  $z$  and radius  $R$ ) from  $s = -D$  to  $s = D$ , and the two planar caps in the  $x$ – $y$  plane, bounded by the strip and the circular arc of radius  $R$  (figure 5). As the contact line may move, we also have to consider the surface energy  $2\gamma_{\text{sl}}Dw$  associated with the solid–liquid interface (spanning from  $s = -D$  to  $s = +D$ ) as well as the surface energy  $\gamma_{\text{sv}}w(L - D) + \gamma_{\text{sv}}w(L' - D)$  associated with the solid–air interface, for  $|s| \geq D$ .

Then, the surface energy can be written as

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\gamma &= 0.87 \iint_{\partial V} \gamma \, dA + 2\gamma_{\text{sl}}Dw + \gamma_{\text{sv}}(L + L' - 2D)w \\ &= 0.87\gamma(2\alpha R w + 2A_c) - 2\gamma Dw \cos \theta_Y + \gamma_{\text{sv}}(L + L')w,\end{aligned}\quad (4.7)$$

where we make use of the Young construction  $\gamma_{\text{sv}} - \gamma_{\text{sl}} = \gamma \cos \theta_Y$ , where  $\theta_Y$  is the static contact angle. Note the presence of the 0.87 correction factor introduced in §2*b*. The two constant terms  $\gamma_{\text{sv}}w(L + L')$  and  $2 \times 0.87\gamma A_c$  are withdrawn from the energy expression. Adding the energies (4.2), (4.6) and (4.7), we obtain

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, R, \kappa, D) = \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_{\text{g}} + \mathcal{E}_\gamma. \quad (4.8)$$

We have to study the energy  $\mathcal{E}$  subjected to the following constraints. The first two constraints are geometrical relations linking the variables, namely  $(1/\kappa) \sin \beta = R \sin \alpha$ ,  $D = \beta/\kappa$ . These two relations are used to eliminate  $\kappa$  and  $R$  from the energy (4.8). The constraint of constant liquid volume,  $V = A_c$  and  $w = V_0$  with  $A_c$  given by equation (3.3), is used to (numerically) eliminate the variable  $\alpha$  from the energy. The energy (4.8) is then a function of the two remaining variables:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta, D)$ . The last constraint is due to the pinning of the contact line. Pinning of the contact line happens whenever a drop is deposited on a non-ideal surface where chemical and physical defects are present. In this case, the static contact angle  $\theta$  is not unique and takes values in an interval around  $\theta_Y$ , that is, the contact line is immobile as long as  $\theta$  remains larger than the receding angle and smaller than the advancing angle (de Gennes 1985). In our case, we never observed retraction of the contact line, and will consider only its advancing when  $\theta$  reaches  $\theta^*$ , the advancing contact angle. We introduce the distance  $D^*$ , which is the extent of the wet region at the beginning of the dynamics when the strip is flat, computed from equation (4.1) with  $D^* = \Delta/2$ . The contact angle is  $\theta = \alpha + \beta$  and the pinning leads to  $D = D^*$  as long as  $\theta < \theta^*$ . Furthermore, we assume that once the contact line advances, the angle is constant and equal to  $\theta^*$  (de Gennes 1985). This can be summarized in the form  $(D - D^*)(\theta^* - \theta) = 0$ , where we have to be careful that both terms must be positive when not zero: the contact angle cannot exceed  $\theta^*$  and the contact line never retracts. This last constraint makes the energy  $\mathcal{E}$  a function of only one variable:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta)$  with  $D$  either given by  $D = D^*$  (during contact line pinning) or solved from  $\alpha(\beta, D) + \beta = \theta^*$  (during advancing of the contact line).

### (b) Results

We start our study of the evolution of the system right after the maximal spreading of the impacting drop. There, the kinetic energy is zero, and we compute the potential energy  $\mathcal{E}(\beta)$  and use its graph to predict the final state of the system. The impact of the drop is viewed as a suddenly applied load (Simitsev & Hodges 2006, ch. 12), and we look for basin of attraction of final states in the presence of dissipation. This dynamical point of view is different from the one seen in §3, where we were looking at a quasi-static succession of equilibrium points, during evaporation. The strip starts its dynamics  $\beta = \beta(t)$  ( $t$  is physical time) with no speed (i.e. no kinetic energy) at the flat configuration  $\beta(0) = 0$ , evolves and eventually reaches its final state, either flat  $\beta(+\infty) = 0$ , folded around

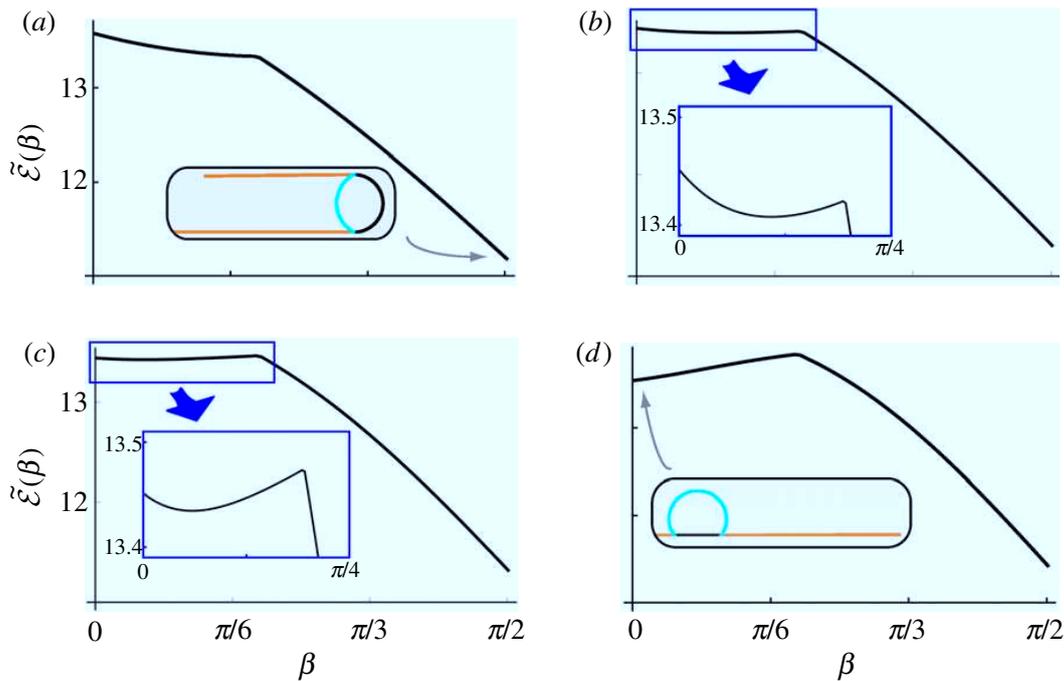


Figure 6. Non-dimensional total energy  $\tilde{\mathcal{E}}(\beta) = \mathcal{E}L_{ec}/EI$  for a drop with  $V = 92.4 L_{ec}^3$  and  $D^* = 2.93 L_{ec}$ , for different lengths: (a)  $L = 15.0 L_{ec}$ , (b)  $L = 18.4 L_{ec}$ , (c)  $L = 19.2 L_{ec}$ , and (d)  $L = 22.8 L_{ec}$ . Insets in (a) and (d) give the shape of the system at the final state, whereas insets in (b) and (c) show a zoom of the energy curve. (Online version in colour.)

the drop  $\beta(+\infty) = \pi/2$  (encapsulated configuration) or in an intermediate state. The level  $\mathcal{E}(0)$  represents the initial total mechanical energy of the system and as we here assume the presence of a small amount of dissipation,  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$  for all time  $t$ . As we do not compute the time evolution of the system, we do not give any information on the duration of the encapsulation time, but we nevertheless show that we can predict the asymptotic dynamics ( $t \rightarrow +\infty$ ) of the system. We use experimentally measured  $\theta_Y = 110^\circ$  and  $\theta^* = 150^\circ$ . We use  $L_{ec} = 0.55$  mm and  $L_{eg} = 3.6$  mm (Antkowiak *et al.* 2011).

Figure 6 shows the shape of the total potential energy  $\mathcal{E}(\beta)$  for given volume  $V = 92.4 L_{ec}^3$  and wetted region extent  $D^* = 2.93 L_{ec}$ , and for four different values of the length  $L = 15.0, 18.4, 19.2,$  and  $22.8 L_{ec}$ . Energy curves all exhibit a tip point at  $\beta \simeq 0.6$ . Before the tip point, the constraint  $D = D^*$  is active and  $\theta < \theta^*$ ; after the tip point, the constraint  $\theta = \theta^*$  is active and  $D > D^*$ . As the volume of the drop has been chosen in such a way that its radius exceeds the elasto-capillary length, all curves have their global energy minimum for the encapsulated state  $\beta = \pi/2$ . Nevertheless, we see in the following that in some cases there can be alternative stable final state and that an energy barrier can arise. In the first case (figure 6a), the global maximum is at  $\beta = 0$ . The system then starts its dynamics with a flat configuration  $\beta = 0$ , accelerates and reaches the final state  $\beta = \pi/2$  where the strip encapsulate the drop. In the second case (figure 6b), an intermediate stable equilibrium state lies at  $\beta \simeq 0.35$ , corresponding to a open configuration. As the global energy maximum still lies at  $\beta = 0$ , the system will pass the tip point and evolves towards the state at  $\beta = \pi/2$ , provided dissipation is not too strong. In the third case (figure 6c), there still is an intermediate equilibrium state (at  $\beta \simeq 0.2$ ) and this time the energy level of the tip point is above the energy level

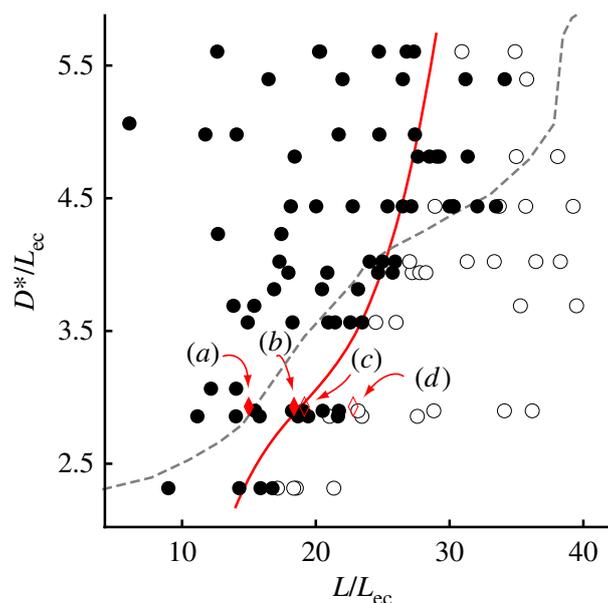


Figure 7. Comparison between theoretical and experimental phases diagram. Experiments: filled circles (respectively, open circles) correspond to encapsulated (respectively, non-encapsulated) final states. Model: solid line is the boundary between the two final states. Rhombs situate the four configurations described in figure 6. The dotted curve corresponds to the boundary found in Antkowiak *et al.* (2011) using numerical simulations. (Online version in colour.)

of the origin. In this case, the initial mechanical energy is not large enough for the system to achieve encapsulation. The final state of the system will be at  $\beta \simeq 0.2$ , on the intermediate equilibrium state. In the fourth case (figure 6*d*), no intermediate equilibrium exists and as the slope of the energy curve is strictly positive at the origin, the system will not depart from  $\beta = 0$ .

In conclusion, we use the following criterion: encapsulation occurs if the origin is the global maximum of the energy  $\mathcal{E}(\beta)$ , and we plot in figure 7 the threshold between encapsulated and open final states as function of the length  $L$  and of the initial extent of the wet region  $D^*$ . We compare our theoretical curve with the experimental data of Antkowiak *et al.* (2011) and find good agreement. Also shown on the figure are the four cases (a)–(d) of figure 6 with the threshold curve passing between cases (b) and (c). Finally, we note that the agreement between experiment and model is less good when  $L/L_{ec} > 25$ : for such  $L$ , the hypothesis of straight tail is clearly violated as the beam become largely bent in the tail region  $s \in (D; L)$ , owing to its own weight. Consequently, the gravitational barrier computed with the present model is too large, resulting in a threshold curve being too pessimistic.

## 5. Drop lifting a heavy elastic strip

In previous sections, we first studied the competition between capillary and elastic energies (§3), and we then introduced the gravitational energy of the strip and used the concept of dynamical instability (§4). We now consider a heavy elastic strip that deforms under capillarity and gravity (figure 8), and we discuss the difference between static and dynamic instabilities.

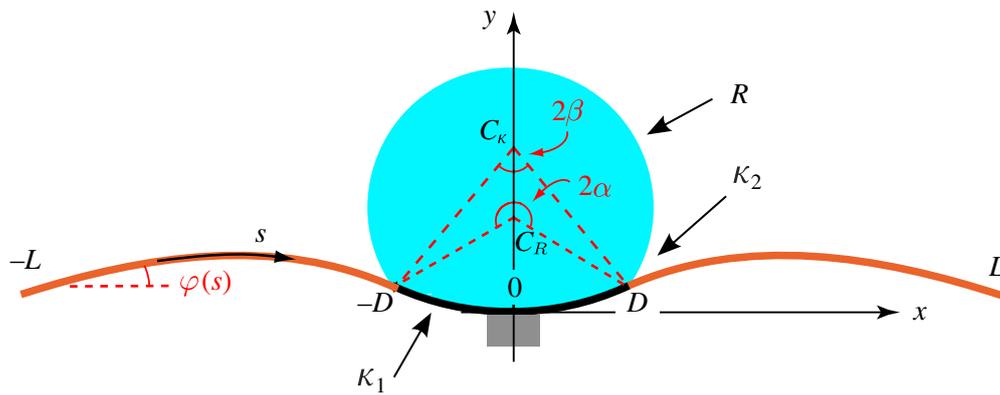


Figure 8. An elastic strip of length  $2L$  is bent by capillary forces and self-weight. The drop is wetting the strip along a fixed distance  $2D$ . The model for the deformation of the elastic strip is such that the curvature is uniform in the wetted region  $s \in (-D; D)$  and linearly decreasing in the two dry regions  $s \in (D; L)$  and  $s \in (-L; -D)$ . (Online version in colour.)

(a) Model

The strip is divided into two regions (i) a wetted region that has uniform curvature and (ii) a dry region with linearly decreasing curvature. Both regions are subjected to gravity. The wet part spans over  $s \in (-D; D)$ , and for simplicity, we work with strong contact line pinning and keep  $D$  fixed, irrespective of the contact angle. Finally, we consider only shapes symmetric on the  $y$ -axis, and we fix the point  $s=0$  at the origin, thereby preventing the entire system from falling down during the energy minimization procedure. As in §4, the wetted region,  $s \in (-D; D)$ , is a circular arc of radius  $1/\kappa_1$ , centre  $C_\kappa$  and central angle  $2\beta$  (figure 8). For the first region, the elastic and gravitational energies are as follow

$$\mathcal{E}_{\text{el},1} = 2 \int_0^D \frac{1}{2} EI \kappa_1^2 ds = EID\kappa_1^2 \quad (5.1)$$

and

$$\mathcal{E}_{\text{g},1} = 2 \int_0^D \rho g S y(s) ds = 2\rho g S \frac{\kappa_1 D - \sin(\kappa_1 D)}{\kappa_1^2}. \quad (5.2)$$

For the second region, the approximation of straight tails was used in §4, valid in the case of short tails  $(L - D) \ll L_{\text{eg}}$ . We here relax this constraint and for  $s \in (D; L)$  (and symmetrically for  $s \in (-L; -D)$ ), we assume a shape where curvature  $\kappa(s)$  varies linearly from  $\kappa(D) = \kappa_2$  to  $\kappa(L) = 0$ , zero curvature at  $s = \pm L$  being consistent with the absence of external moment at the strip ends. The curvature in this second region then reads

$$\kappa(s) = \frac{\kappa_2(L - s)}{L - D}. \quad (5.3)$$

The deflection angle  $\varphi(s)$  and height of the strip  $y(s)$  are then found by integrating  $\varphi'(s) = \kappa(s)$  and  $y'(s) = \sin \varphi(s)$ . We obtain

$$\varphi(s) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{L-s}{c_1} \right)^2 + c_2, \quad \text{with } c_1 = \sqrt{\frac{\pi(D-L)}{\kappa_2}} \quad \text{and} \quad c_2 = \beta - \frac{1}{2}\kappa_2(D-L) \quad (5.4)$$

and

$$y(s) = \frac{1 - \cos \beta}{\kappa_1} - c_1 \cos c_2 \left[ \mathcal{S} \left( \frac{L-s}{c_1} \right) - \mathcal{S} \left( \frac{L-D}{c_1} \right) \right] - c_1 \sin c_2 \left[ \mathcal{C} \left( \frac{L-s}{c_1} \right) - \mathcal{C} \left( \frac{L-D}{c_1} \right) \right], \quad (5.5)$$

where these formulas have been written for  $\kappa_2 < 0$  (similar formulas can be written in the case  $\kappa_2 > 0$ ), and where  $\mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin(\pi y^2/2) dy$  and  $\mathcal{C}(x) = \int_0^x \cos(\pi y^2/2) dy$  are Fresnel integrals. The elastic and gravitational energies for the second region are then

$$\mathcal{E}_{\text{el},2} = 2 \int_D^L \frac{1}{2} EI \kappa^2(s) ds = \frac{1}{3} EI (L-D) \kappa_2^2 \quad (5.6)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{g},2} &= 2 \int_D^L \rho g S y(s) ds \\ &= 2 \rho g S (L-D) \left( \frac{1}{\kappa_1} (1 - \cos \beta) + \frac{1}{\kappa_2} \left[ \cos \beta - \cos \left( \beta + \frac{1}{2} \kappa_2 (L-D) \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

As in the previous sections, the liquid–air interface is a circular arc of radius  $R$ , centre  $C_R$  and central angle  $2\alpha$  (figure 8). In the present case of strong contact line pinning, where the wet region spans from  $s = -D$  to  $s = +D$  irrespective of the contact angle, the surface energy simplifies to

$$\mathcal{E}_\gamma = 2\gamma\alpha R w, \quad (5.8)$$

adding the energies (5.1), (5.2), (5.6), (5.7), and (5.8), we obtain

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, R, \kappa_1, \kappa_2) = \mathcal{E}_{\text{el},1} + \mathcal{E}_{\text{g},1} + \mathcal{E}_{\text{el},2} + \mathcal{E}_{\text{g},2} + \mathcal{E}_\gamma \quad (5.9)$$

subjected to two geometrical constraints  $\kappa_1 = \beta/D$  and  $R = D(\sin \beta / \beta \sin \alpha)$ , and to the drop volume conservation  $V = V_0$ . The first two constraints are used to eliminate  $\kappa_1$  and  $R$  from the variables, leading to an energy that is the function of three variables:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha, \beta, \kappa_2)$ .

### (b) Results

We first study equilibrium solutions and their stability for different values of the parameters. Using  $L_{\text{ec}}$  as unit-length and  $EI/L_{\text{ec}}$  as unit-energy, the problem has four independent parameters:  $L$ ,  $D$ ,  $L_{\text{eg}}^3 = EI/(\rho g S)$  and  $V = w A_c$  the volume of the drop, with  $A_c$  being given by equation (3.3) with  $\kappa = \kappa_1$ . We introduce the

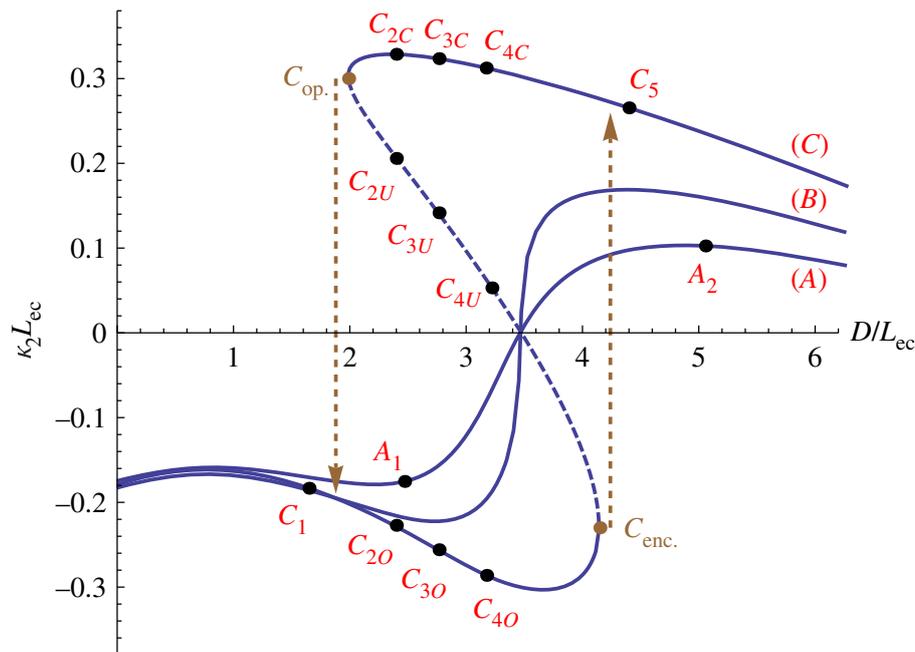


Figure 9. Bifurcation diagram for the drop-strip system of figure 8. Solid (respectively dotted) paths correspond to stable (respectively unstable) states. On each path, the length  $L$  is fixed, with  $L/L_{ec} = 14$  for path (A), 16 for path (B) and 20 for path (C). Instabilities occurring at fold points  $C_{enc.}$  and  $C_{op.}$  are indicated by arrows. Fixed parameters are  $R_0/L_{ec} = 2$ ,  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$ . (Online version in colour.)

equivalent radius  $R_0$  such that  $V_0 = \pi w R_0^2$ , and use the parameter  $R_0$  instead of  $V_0$ . We therefore use the following Lagrangian

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \kappa_2) = \mathcal{E}(\alpha, \beta, \kappa_2) - \lambda(A_c(\alpha, \beta) - \pi R_0^2) \quad (5.10)$$

and study equilibrium and stability as explained in §2. Results for  $R_0/L_{ec} = 2$ ,  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$  are shown in figure 9, where the curvature  $\kappa_2$  is plotted as a function of the extent of the wet region  $D$ . Configurations with negative  $\kappa_2$  are called *open* (see e.g. configuration  $A_1$  in figure 10), and configurations with positive  $\kappa_2$  are called *encapsulated* or *closed* (see e.g. configuration  $A_2$  in figure 10). For each value of the three different lengths  $L/L_{ec} = 14, 16$  and  $20$  chosen, we start with an open configuration having small  $D$  (e.g. configuration  $A_1$  or  $C_1$  in figure 10). On the one hand, we see in figure 9 that curve (A) contains only stable configurations, which means that in the case of small lengths, increasing  $D$  gradually leads to encapsulated configurations without going through instability. On the other hand, we see that curve (C) contains both stable and unstable configurations. Hence, in the case of large lengths, increasing  $D$  leads to an instability at the fold point  $C_{enc.}$ , where the system jumps from being open to encapsulated. If one were to decrease  $D$  from that point, the way back would be different with an opening instability happening at the other fold point  $C_{op.}$ , i.e. hysteresis would be observed. This phenomenon is the signature of a cusp catastrophe (Poston & Stewart 1996). To illustrate this, we plot in figure 11 the loci of the fold points  $C_{enc.}$  (upper curve) and of the fold points  $C_{op.}$  (lower curve), both curves meeting at the cusp point  $(L, D)/L_{ec} \simeq (16.1, 3.46)$ , near curve (B). The encapsulating (respectively,

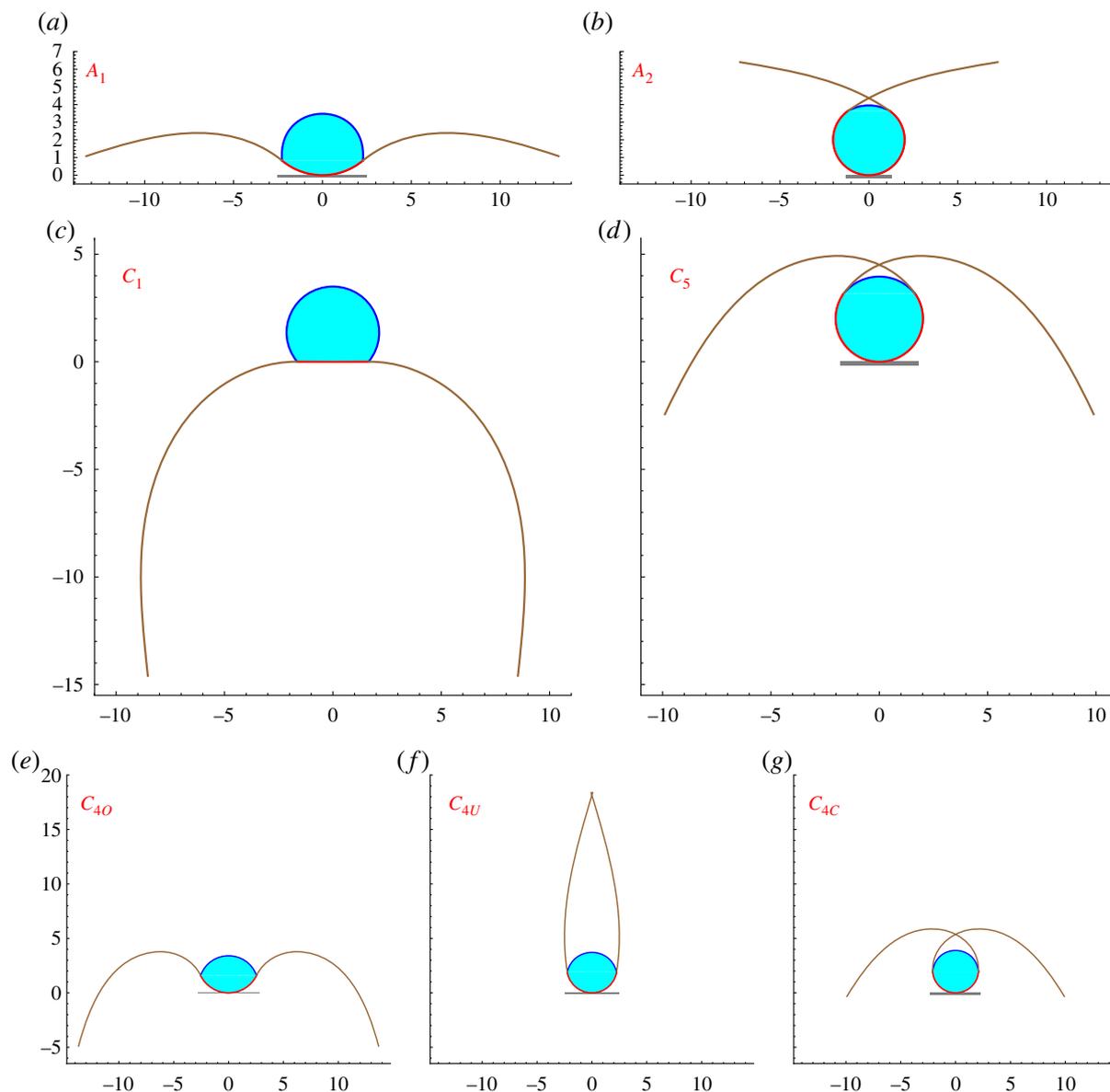


Figure 10. Equilibrium shapes for the drop-strip system of figure 8 for the points (a)  $A_1$ , (b)  $A_2$ , (c)  $C_1$ , (d)  $C_5$ , (e)  $C_{4O}$ , (f)  $C_{4U}$ , and (g)  $C_{4C}$  of figure 9. Fixed parameters are  $R_0/L_{ec} = 2$ ,  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$ . The length is  $L/L_{ec} = 14$  for configurations  $A_i$ , and  $L/L_{ec} = 20$  for configurations  $C_i$ . All configurations are stable, except  $C_{4U}$ . (Online version in colour.)

opening) instability happens when the system crosses the ( $SI_{enc.}$ ) (respectively ( $SI_{op.}$ )) curve towards low  $L$  values (see arrows in figure 11).

We now investigate how these two curves change when the volume of the drop (i.e.  $R_0$ ) and the weight of the elastic strip (i.e.  $L_{eg}$ ) vary. We compute these two curves for various values of  $R_0/L_{ec}$  in the range  $1.2 \leq R_0/L_{ec} \leq 4$  and of  $L_{eg}/L_{ec}$  in the range  $200^{1/3} \leq L_{eg}/L_{ec} \leq 10\,000^{1/3}$  and plot them in figure 12. The axes of the figure have been re-scaled in such a way that the (nearly 50) curves approximately collapse on a master curve. We conclude that (i) if  $(L - D)/L_{eg} \lesssim 2$ , only one equilibrium solution exists and no instability occurs; (ii) if  $2 \lesssim (L - D)/L_{eg} \lesssim 3.3$ , one or two equilibrium states can exist and instabilities can occur; and (iii) if  $3.3 \lesssim (L - D)/L_{eg}$ , two states exist and no instability occurs. These instabilities are quasi-static instabilities occurring when a parameter (e.g.  $D$  or  $L$ ) is slowly varied.

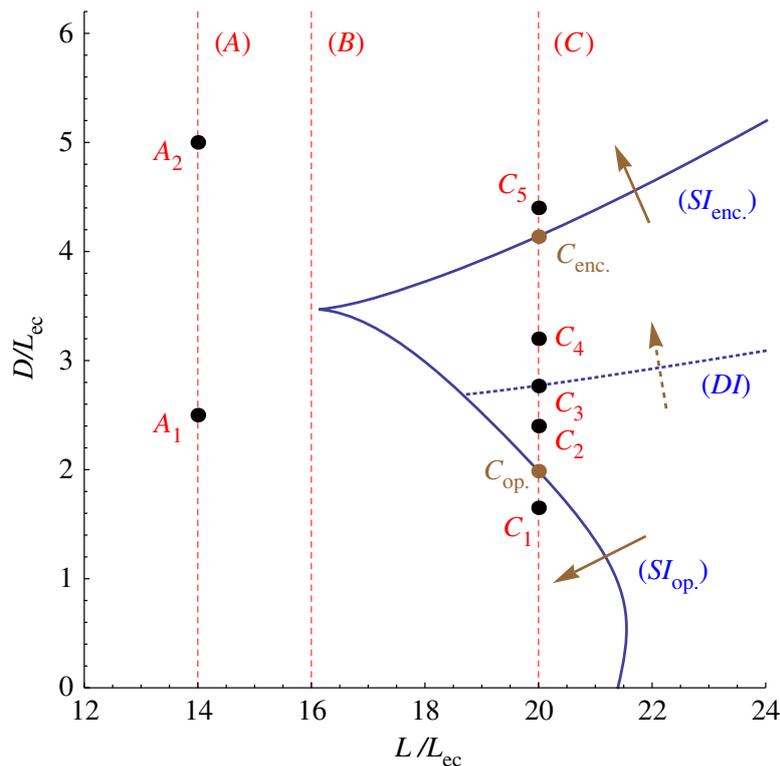


Figure 11. Phases diagram for the drop-strip system of figure 8. The vertical dotted lines correspond to the paths in figure 9. The lower (respectively upper) solid curve  $SI_{op.}$  (respectively  $SI_{enc.}$ ) corresponds to fold points where opening (respectively encapsulation) occurs. The dotted curve  $DI$  corresponds to the locus of dynamic instability. Fixed parameters are  $R_0/L_{ec} = 2$ , and  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$ . (Online version in colour.)

We now consider a different kind of set-up where instability in the dynamics occurs. For the same parameter values  $R_0/L_{ec} = 2$ ,  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$  and  $L/L_{ec} = 20$ , we consider a set-up where a drop is deposited on a flat strip. For different values of the extent  $D$  of the wetted region, we look for the long time evolution of the system. As in §4, we are in the case of a suddenly applied load (Simitse & Hodges 2006) where instabilities and shape selection are no longer given by stability properties of equilibria, but rather by energy-level curves and basins of attraction. To illustrate the phenomenon, we plot energy landscapes of the system for several values of  $D$ . Using the constraint  $A_c(\alpha, \beta) = \pi R_0^2$ , we (numerically) eliminate  $\alpha$  from the energy  $\mathcal{E}(\alpha, \beta, \kappa_2)$  and end up with an unconstrained energy function of only two variables  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta, \kappa_2)$ . For each point  $C_1$ – $C_5$  of figure 11, we plot in figure 13 curves of constant energy level  $\mathcal{E}(\beta, \kappa_2) = G$  for several values of the constant  $G$ . For each level set plot, stable and unstable equilibrium points are shown, and the level set corresponding to  $\mathcal{E}(0, 0) = G_0$  is distinguished. Upon deposition of the drop on the flat strip, the system starts its dynamics at the origin  $(\beta, \kappa_2) = (0, 0)$ , and owing to dissipation the dynamics may evolve only towards regions where the energy is lower: the evolution is possible only inside the level set  $G_0$ , i.e. for points  $(\beta, \kappa_2)$  such that  $\mathcal{E}(\beta, \kappa_2) \leq G_0$ . The system will eventually stabilize on (one of) the stable equilibrium point(s) present inside the level set  $G_0$ . In case  $C_1$ , there is only one stable equilibrium point corresponding to an open configuration. Going to case  $C_2$ , we cross the  $(SI_{op.})$  curve in figure 11, that is two equilibria are created in a saddle–node bifurcation. The energy plot of

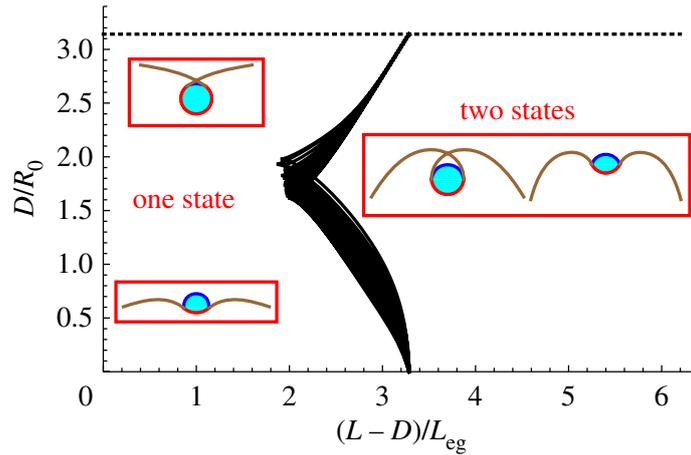


Figure 12. Phases diagram of figure 11 for various values of volume of the liquid drop,  $1.2 \leq R_0/L_{ec} \leq 4$  and weight of the strip,  $200 \leq (L_{eg}/L_{ec})^3 \leq 10\,000$ . The chosen scaling of the axes is such that all the curves nearly collapse of a master curve which separates two regions: on the left only one equilibrium solution exists, whereas on the right two equilibrium solutions coexist. (Online version in colour.)

figure 13*b* therefore exhibits two new equilibria, one stable  $C_{2C}$  and one unstable  $C_{2U}$ , a saddle point. There are now two competing stable equilibria  $C_{2C}$  and  $C_{2O}$ , but only  $C_{2O}$  lies inside the  $E_0$  level set and therefore the system will stabilize on this point. As we move from  $C_2$  to  $C_3$  (and further), the level set  $G_0$  encloses wider regions of the  $(\beta, \kappa_2)$  plane. In case  $C_3$  precisely,  $G_0$  reaches point  $C_{3U}$ , giving the system access to the second stable equilibrium point during the dynamics. Consequently, in case  $C_4$ ,  $G_0$  encloses both  $C_{4C}$  and  $C_{4O}$  and the dynamics may evolve towards an encapsulated or an open configuration. The value of  $D$  corresponding to case  $C_3$  is then the threshold above which the system can evolve towards encapsulation. This new instability from open to encapsulated configurations takes place during the dynamics of the system. We have plotted the locus of this dynamic instability in figure 11, see curve  $(DI)$ . Going from case  $C_4$  to case  $C_5$ , we cross the  $(SI_{enc.})$  curve in figure 11, that is the encapsulated and unstable states merge and disappear in a saddle–node bifurcation. Case  $C_5$  in figure 13*e* consequently exhibits only one (stable) equilibrium on which the system always stabilizes.

### (c) Discussion

We have not specifically studied the behaviour of the system during an evaporation experiment, in particular whether an open (respectively, encapsulated) system may become encapsulated (respectively, open) through instability, as evaporation takes place. Partial answer can be sought for in figure 13 where we see that upon evaporation (i.e. decreasing  $R_0 = \sqrt{V/(\pi w)}$ ), an open system initially lying on the right and under the upper instability curve could cross it, thereby experiencing an encapsulation instability. The possibility of encapsulated systems undergoing an opening instability during evaporation remains to be studied.

In the impacting drop experiment of Antkowiak *et al.* (2011), the behaviour of the encapsulation threshold curve as the impact speed  $U$  (or Weber number  $We$ ) vanishes is not given: fig. 3 of Antkowiak *et al.* (2011) stops at  $\sqrt{We} \sim 0.4$ .

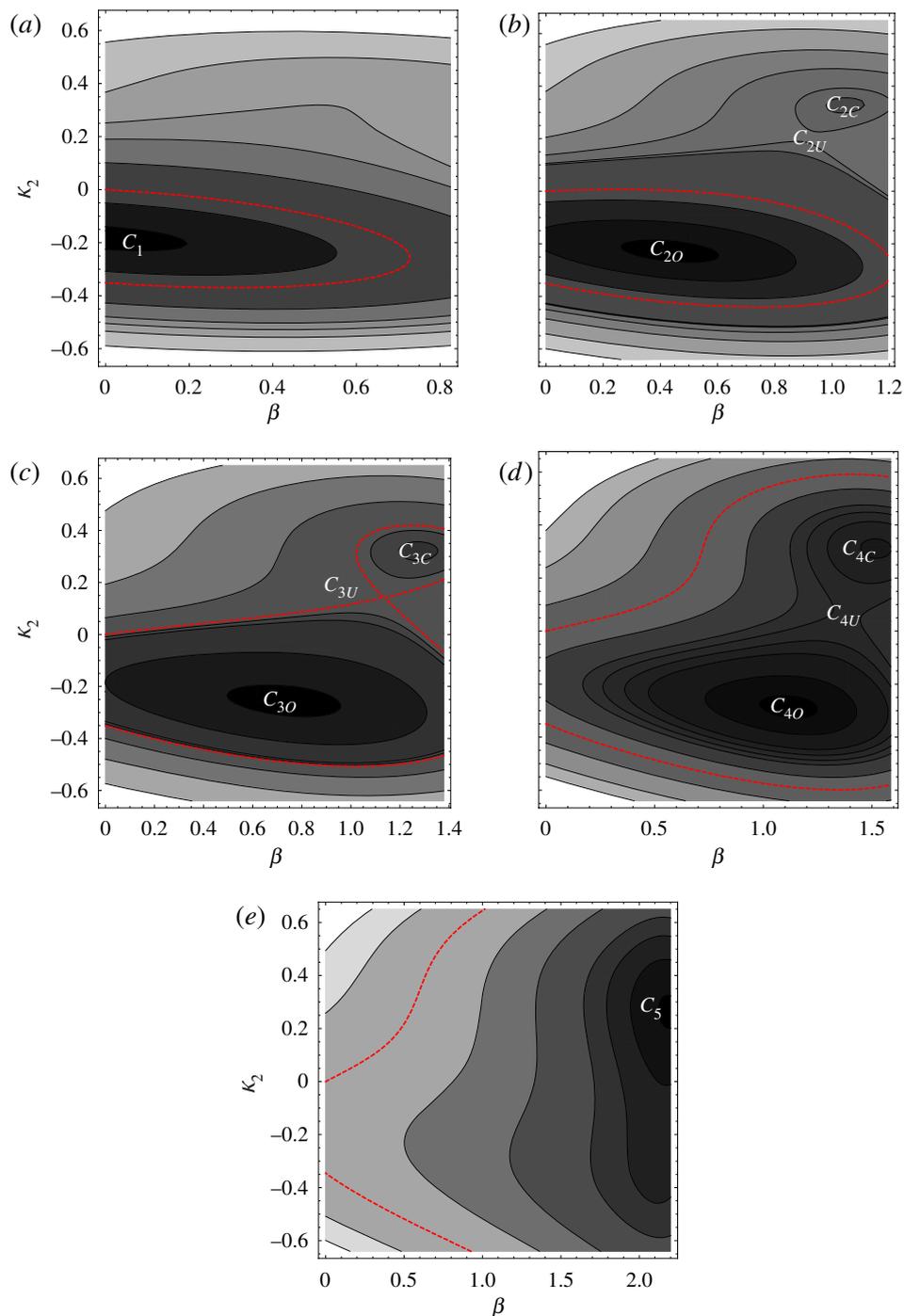


Figure 13. Level sets of the energy  $\mathcal{E}(\beta, \kappa_2)$  for the fixed parameters:  $R_0/L_{ec} = 2$ ,  $L_{eg}/L_{ec} \simeq 6.51$ , and  $L/L_{ec} = 20$ . The different cases correspond to point (a)  $C_1$ , (b)  $C_2$ , (c)  $C_3$ , (d)  $C_4$ , and (e)  $C_5$  of figure 11. The level set  $\mathcal{E}(0, 0)$  is drawn in thick dotted lines. (Online version in colour.)

The present results can be used to infer the curve behaviour as  $We \rightarrow 0$ . From equation (4.1), we see that as  $We \rightarrow 0$  the extent  $\Delta = 2D$  of the wetted region goes to  $\Delta_0$ . On the one hand, if  $D = \Delta_0/2$  is larger than the cusp value  $D/R_0 \sim 2$ , there is a threshold value in  $L$  under which the system will encapsulate (given the curve  $SI_{enc.}$  or  $DI$  of figure 11). Consequently, the behaviour of the encapsulation threshold curve will be as in figure 14a. On the other hand, if  $D = \Delta_0/2$  is smaller

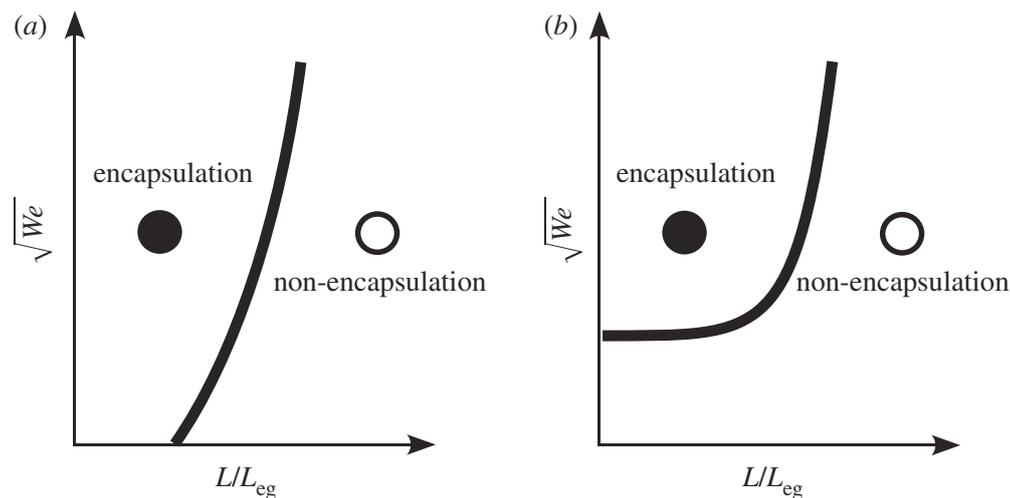


Figure 14. Behaviour of the encapsulation threshold of Antkowiak *et al.* (2011) as the impacting speed vanishes (i.e. small  $We$  numbers) (a) in the case where  $\Delta_0/2R_0 \gtrsim 2$  and (b) in the case where  $\Delta_0/2R_0 \lesssim 2$ .

than the cusp value  $D/R_0 \sim 2$ , no encapsulating instability is possible as the length  $L$  is decreased. As a result, the behaviour of the encapsulation threshold curve will be as in figure 14*b*.

Finally, we note that the present discrete model can be extended to include dynamics of the strip by adding the kinetic energy

$$\frac{1}{2}\rho wh \int_{\text{beam}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) ds \quad (5.11)$$

in the Lagrangian.

## 6. Conclusion

We have introduced a simplified model for the interaction of an elastic beam with a liquid drop. In the scales considered here, the dominant fluid effect is surface tension, and liquid weight, inertia and viscosity are altogether neglected. The deformations of the elastic beam are also simplified in such a way that equilibrium and stability of the system are found by minimizing a potential energy function of a small number of variables. We have applied our model to three different case studies. In the first one, where a liquid drop bending an elastic strip is let to evaporation, we have found an approximation of the critical length separating the two different behaviours of the system. In the second one, where a drop impacts an elastic strip and depending on the impact speed wrapping of the drop by the strip is achieved or not, we have reproduced the experimental threshold separating encapsulation and non-encapsulation. In the third one, where a drop lifts a heavy elastic strip, we have computed the static and dynamic thresholds for encapsulation, obtaining a universal phases diagram showing the possible states of the system.

We thank A. Antkowiak for discussions. This work was supported by ANR grant no. ANR-09-JCJC-0022-01. Financial support from ‘La Ville de Paris - Programme Émergence’ is also gratefully acknowledged.

## References

- Antkowiak, A., Audoly, B., Josserand, C., Neukirch, S. & Rivetti, M. 2011 Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **108**, 10 400–10 404. (doi:10.1073/pnas.1101738108)
- Aristoff, J. M., Duprat, C. & Stone, H. A. 2011 Elastocapillary imbibition. *Int. J. Nonlinear Mech.* **46**, 648–656. (doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2010.09.001)
- Bico, J., Roman, B., Moulin, L. & Boudaoud, A. 2004 Adhesion: elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature* **432**, 690. (doi:10.1038/432690a)
- Brakke, K. A. 1992 The surface evolver. *Exp. Math.* **1**, 141–165.
- Clanet, C., Béguin, C., Richard, D. & Quéré, D. 2004 Maximal deformation of an impacting drop. *J. Fluid Mech.* **517**, 199–208. (doi:10.1017/S0022112004000904)
- Cohen, A. E. & Mahadevan, L. 2003 Kinks, rings, and rackets in filamentous structures. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **100**, 12 141–12 146. (doi:10.1073/pnas.1534600100)
- Duprat, C., Aristoff, J. M. & Stone, H. A. 2011 Dynamics of elastocapillary rise. *J. Fluid Mech.* **679**, 641–654. (doi:10.1017/jfm.2011.173)
- Eggers, J., Fontelos, M., Josserand, C. & Zaleski, S. 2010 Drop dynamics after impact on a solid wall: theory and simulations. *Phys. Fluids* **22**, 062101. (doi:10.1063/1.3432498)
- de Gennes, P.-G. 1985 Wetting: statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **57**, 827–863. (doi:10.1103/RevModPhys.57.827)
- Gracias, D. H., Kavthekar, V., Love, J. C., Paul, K. E. & Whitesides, G. M. 2002 Fabrication of micrometer-scale, patterned polyhedra by self-assembly. *Adv. Mater.* **14**, 235–238. (doi:10.1002/1521-4095(20020205)14:3<235::AID-ADMA235>3.0.CO;2-B)
- Guo, X., Li, H., Yeop Ahn, B., Duoss, E. B., Hsia, K. J., Lewis, J. A. & Nuzzo, R. G. 2009 Two- and three-dimensional folding of thin film single-crystalline silicon for photovoltaic power applications. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **106**, 20 149–20 154. (doi:10.1073/pnas.0907390106)
- Huang, J., Juszkiwicz, M., de Jeu, W. H., Cerda, E., Emrick, T., Menon, N. & Russell, T. P. 2007 Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science* **317**, 650–653. (doi:10.1126/science.1144616)
- Kim, H.-Y. & Mahadevan, L. 2006 Capillary rise between elastic sheets. *J. Fluid Mech.* **548**, 141–150. (doi:10.1017/S0022112005007718)
- de Langre, E., Baroud, C. & Reverdy, P. 2010 Energy criteria for elasto-capillary wrapping. *J. Fluids Struct.* **26**, 205–217. (doi:10.1016/j.jfluidstructs.2009.10.004)
- Leong, T. G., Lester, P. A., Koh, T. L., Call, E. K. & Gracias, D. H. 2007 Surface tension-driven self-folding polyhedra. *Langmuir* **23**, 8747–8751. (doi:10.1021/la700913m)
- Luenberger, D. G. 1973 *Introduction to linear and nonlinear programming*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Mastrangeli, M., Abbasi, S., Van Hoof, C., Celis, J.-P. & Bohringer, K. F. 2009 Self-assembly from milli- to nanoscales: methods and applications. *J. Micromech. Microeng.* **19**, 083001. (doi:10.1088/0960-1317/19/8/083001)
- Neukirch, S., Roman, B., de Gaudemaris, B. & Bico, J. 2007 Piercing a liquid surface with an elastic rod: buckling under capillary forces. *J. Mech. Phys. Solids* **55**, 1212–1235. (doi:10.1016/j.jmps.2006.11.009)
- Poston, T. & Stewart, I. 1996 *Catastrophe theory and its applications*. Mineola, NY: Dover.
- Py, C., Reverdy, P., Doppler, L., Bico, J., Roman, B. & Baroud, C. N. 2007 Capillary origami: spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 156103. (doi:10.1103/PhysRevLett.98.156103)
- Roman, B. & Bico, J. 2010 Elasto-capillarity: deforming an elastic structure with a liquid droplet. *J. Phys. Condensed Matter* **22**, 493101. (doi:10.1088/0953-8984/22/49/493101)
- Simitzes, G. J. & Hodges, D. H. 2006 *Fundamentals of structural stability*. New York, NY: Elsevier.
- Syms, R. R. A., Yeatman, E. M., Bright, V. M. & Whitesides, G. M. 2003 Surface tension-powered self-assembly of microstructures: the state-of-the-art. *J. Microelectromech. Syst.* **12**, 387–417. (doi:10.1109/JMEMS.2003.811724)
- Vella, D., Adda-Bedia, M. & Cerda, E. 2010 Capillary wrinkling of elastic membranes. *Soft Matter* **6**, 5778–5782. (doi:10.1039/c0sm00432d)

## Bibliographie

- Aristoff J.M., Duprat C. & Stone H.A. Elastocapillary imbibition. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **46**(4), 648–656 2011.
- Audoly B. Localized buckling of a floating elastica. *Physical Review E*, **84**(1), 011605– 2011.
- Bartolo D., Josserand C. & Bonn D. Singular jets and bubbles in drop impact. *Physical Review Letters*, **96**(12), 124501 2006.
- Ben Amar M. & Pomeau Y. Crumpled paper. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **453**(1959), 729–755 1997.
- Bergou M., Wardetzky M., Robinson S., Audoly B. & Grinspun E. Discrete elastic rods. In *ACM SIGGRAPH ASIA 2008 courses*, SIGGRAPH Asia '08, (pages 14 :1–14 :12) (ACM, New York, NY, USA, 2008).
- Bico J., Roman B., Moulin L. & Boudaoud A. Adhesion : Elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature*, **432**(7018), 690–690 2004.
- Boncheva M., Bruzewicz D.A. & Whitesides G.M. Millimeter-scale self-assembly and its applications. *Pure and Applied Chemical*, **75**(5), 621 – 630 2003.
- Bowden N., Choi I.S., Grzybowski B.A. & Whitesides G.M. Mesoscale self-assembly of hexagonal plates using lateral capillary forces : Synthesis using the capillary bond. *Journal of the American Chemical Society*, **121**(23), 5373–5391 1999.
- Brakke K.A. The surface evolver. *Experimental Mathematics*, **1**(2) 1992.
- Cavallaro M., Botto L., Lewandowski E.P., Wang M. & Stebe K.J. Curvature-driven capillary migration and assembly of rod-like particles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **108**(52), 20923–20928 2011.
- Cerda E. & Mahadevan L. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Physical Review Letters*, **80**(11), 2358–2361 1998.
- Cerda E. & Mahadevan L. Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letters*, **90**(7) 2003.

- Chakrapani N., Wei B., Carrillo A., Ajayan P.M. & Kane R.S. Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **101**(12), 4009–4012 2004.
- Cohen A.E. & Mahadevan L. Kinks, rings, and rackets in filamentous structures. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **100**(21), 12141–12146 2003.
- Diamant H. & Witten T.A. Compression induced folding of a sheet : An integrable system. *Physical Review Letters*, **107**(16), 164302– 2011a.
- Diamant H. & Witten T.A. Instability of infinitesimal wrinkles against folding. *arXiv :1009.2487v2* 2011b.
- Dill E.H. Kirchhoff's theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences*, **44**, 1–23 1992.
- Duprat C., Aristoff J.M. & Stone H.A. Dynamics of elastocapillary rise. *Journal of Fluid Mechanics*, **679**, 641–654 2011.
- Eggers J. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Reviews of Modern Physics*, **69**(3), 865–930 1997.
- Eggers J., Fontelos M.A., Josserand C. & Zaleski S. Drop dynamics after impact on a solid wall : Theory and simulations. *Physics of Fluids*, **22**(6), 062101 2010.
- Föppl A. *Vorlesungen über technische Mechanik* (B. G. Teubner, Leipzig, 1897).
- Fortes M.A. Deformation of solid surfaces due to capillary forces. *Journal of Colloid and Interface Science*, **100**(1), 17 – 26 1984.
- de Gans B.J., Duineveld P.C. & Schubert U.S. Inkjet printing of polymers : State of the art and future developments. *Advanced Materials*, **16**(3), 203–213 2004.
- de Gennes P.G. Wetting : statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*, **57**(3), 827–863 1985.
- de Gennes P.G., Brochard-Wyart F. & Quéré D. *Gouttes, Bulles, Perles et Ondes* (Springer, 2002).
- Giomi L. & Mahadevan L. Minimal surfaces bounded by elastic lines. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, **468**(2143), 1851–1864 2012.
- Gracias D.H., Kavthekar V., Love J.C., Paul K.E. & Whitesides G.M. Fabrication of micrometer-scale, patterned polyhedra by self-assembly. *Advanced Materials*, **14**(3), 235–238 2002.
- Guo X., Li H., Yeop Ahn B., Duoss E.B., Hsia K.J., Lewis J.A. & Nuzzo R.G. Two- and three-dimensional folding of thin film single-crystalline silicon for photovoltaic power applications. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **106**(48), 20149–20154 2009.
- Hertz H. Über das gleichgewicht schwimmender elastischer platten. *Annalen der Physik*, **258**(7), 449–455 1884.
- van Honschoten J.W., Escalante M., Tas N.R., Jansen H.V. & Elwenspoek M. Elastocapillary filling of deformable nanochannels. *Journal of Applied Physics*, **101**(9), 094310 –094310–7 2007.

- Huang J., Juskiewicz M., de Jeu W.H., Cerda E., Emrick T., Menon N. & Russell T.P. Capillary Wrinkling of Floating Thin Polymer Films. *Science*, **317**(5838), 650–653 2007.
- Joanny J.F. & de Gennes P.G. A model for contact angle hysteresis. *The Journal of Chemical Physics*, **81**(1), 552–562 1984.
- Keller J.B. Surface tension force on a partly submerged body. *Physics of Fluids*, **10**(11), 3009–3010 1998.
- Kim H.Y. & Mahadevan L. Capillary rise between elastic sheets. *Journal of Fluid Mechanics*, **548**, 141–150 2006.
- Landau L. & Lifshitz E. *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, 1970).
- de Langre E., Baroud C. & Reverdy P. Energy criteria for elasto-capillary wrapping. *Journal of Fluids and Structures*, **26**(2), 205 – 217 2010.
- Laplace P.S. *Traité de mécanique céleste. Supplément au livre X* (Courcier, Paris, 1805).
- Larmour I., Bell S. & Saunders G. Remarkably simple fabrication of superhydrophobic surfaces using electroless galvanic deposition. *Angew Chem Int Ed Engl*, **119**, 1740 – 1742 2007.
- Lau K.K.S., Bico J., Teo K.B.K., Chhowalla M., Amaratunga G.A.J., Milne W.I., McKinley G.H. & Gleason K.K. Superhydrophobic carbon nanotube forests. *Nano Letters*, **3**(12), 1701–1705 2003.
- Leong T.G., Lester P.A., Koh T.L., Call E.K. & Gracias D.H. Surface tension-driven self-folding polyhedra. *Langmuir*, **23**(17), 8747–8751 2007.
- Lester G. Contact angles of liquids at deformable solid surfaces. *Journal of Colloid Science*, **16**(4), 315 – 326 1961.
- Lewandowski E.P., Bernate J.A., Tseng A., Searson P.C. & Stebe K.J. Oriented assembly of anisotropic particles by capillary interactions. *Soft Matter*, **5**, 886–890 2009.
- Mastrangeli M., Abbasi S., Van Hoof C., Celis J.P. & Bohringer K.F. Self-assembly from milli- to nanoscales : methods and applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **19**(8) 2009.
- Mastrangelo C.H. & Hsu C.H. Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces. i. basic theory. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **2**(1), 33–43 1993.
- Mora S., Phou T., Fromental J.M., Pismen L.M. & Pomeau Y. Capillarity driven instability of a soft solid. *Physical Review Letters*, **105**(21), 214301– 2010.
- Neukirch S., Roman B., de Gaudemaris B. & Bico J. Piercing a liquid surface with an elastic rod : Buckling under capillary forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **55**(6), 1212 – 1235 2007.
- Newton I. *Opticks, or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light* (printed for S. Smith and B. Walford, London, 1704).
- Nicolson M.M. The interaction between floating particles. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45**(02), 288–295 1949.

- Noblin X., Rojas N.O., Westbrook J., Llorens C., Argentina M. & Dumais J. The fern sporangium : A unique catapult. *Science*, **335**(6074), 1322 2012.
- Noblin X., Yang S. & Dumais J. Surface tension propulsion of fungal spores. *Journal of Experimental Biology*, **212**(17), 2835–2843 2009.
- Pepper R.E., Courbin L. & Stone H.A. Splashing on elastic membranes : The importance of early-time dynamics. *Physics of Fluids*, **20**(8), 082103 2008.
- Pineirua M., Bico J. & Roman B. Capillary origami controlled by an electric field. *Soft Matter*, **6**, 4491–4496 2010.
- Pocivavsek L., Dellsy R., Kern A., Johnson S., Lin B., Lee K.Y.C. & Cerda E. Stress and fold localization in thin elastic membranes. *Science*, **320**(5878), 912–916 2008.
- Pomeau Y. & Villermaux E. Two hundred years of capillary research. *Physics Today*, **59**(3), 39 2006.
- Py C., Reverdy P., Doppler L., Bico J., Roman B. & Baroud C.N. Capillary origami : Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. *Physical Review Letters*, **98**(15), 156103–4 2007.
- Rein M. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dynamics Research*, **12**(2), 61 – 93 1993.
- Reis P.M., Hure J., Jung S., Bush J.W.M. & Clanet C. Grabbing water. *Soft Matter*, **6**, 5705–5708 2010.
- Richard D., Clanet C. & Quere D. Surface phenomena : Contact time of a bouncing drop. *Nature*, **417**(6891), 811–811 2002.
- Rivetti M. & Neukirch S. Instabilities in a drop-strip system : a simplified model. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, **468**(2141), 1304–1324 2012.
- Roman B. & Bico J. Elasto-capillarity : deforming an elastic structure with a liquid droplet. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **22**(49) 2010.
- Simitises G.J. & Hodges D.H. *Fundamentals of Structural Stability* (Elsevier, 2006).
- Syms R., Yeatman E., Bright V. & Whitesides G. Surface tension-powered self-assembly of microstructures - the state-of-the-art. *Journal of Microelectromechanical Systems*, **12**(4), 387 – 417 2003.
- Timoshenko S.P. *Strength of Materials* (D. van Nostrand, New York, 1940).
- Timoshenko S.P. *History of Strength of Materials* (Dover Publications, New York, 1983).
- Vella D., Adda-Bedia M. & Cerda E. Capillary wrinkling of elastic membranes. *Soft Matter*, **6**, 5778–5782 2010.
- Vella D. & Mahadevan L. The cheerios effect. *American Journal of Physics*, **73**(9), 817 2005.
- Vollrath F. & Edmonds D.T. Modulation of the mechanical properties of spider silk by coating with water. *Nature*, **340**(6231), 305–307 1989.

- White J.P. & Heil M. Three-dimensional instabilities of liquid-lined elastic tubes : A thin-film fluid-structure interaction model. *Physics of Fluids*, **17**(3), 031506–17 2005.
- Worthington A.M. On the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proceedings of the Royal Society of London*, **25**(171-178), 261–272 1876.
- Xu L., Zhang W.W. & Nagel S.R. Drop splashing on a dry smooth surface. *Physical Review Letters*, **94**(18) 2005.
- Yang Y., Gao Y.F., Sun D.Y., Asta M. & Hoyt J.J. Capillary force induced structural deformation in liquid infiltrated elastic circular tubes. *Physical Review B*, **81**(24), 241407– 2010.
- Yarin A. Drop impact dynamics : Splashing, spreading, receding, bouncing... *Annual Review of Fluid Mechanics*, **38**(1), 159–192 2006.
- Young T. An essay on the cohesion of fluids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **95**, 65–87 1805.

