

Table des matières

Introduction générale	1
1 Tests de la gravitation à l'échelle du Système Solaire	3
1.1 La théorie de la Relativité Générale et ses extensions en champ faible	4
1.2 Confrontation de la Relativité Générale aux expériences à grande échelle . .	8
1.3 La mission Outer Solar System	11
2 Accéléromètre à biais corrigé pour missions interplanétaires	17
2.1 Présentation du Gravity Advanced Package	18
2.1.1 Accélérométrie spatiale pour la physique	18
2.1.2 Présentation générale	20
2.1.3 Architecture de l'accéléromètre MicroSTAR	22
2.1.4 Description détaillée de l'instrument	23
2.2 Principe de fonctionnement de MicroSTAR	26
2.2.1 Fonctionnement mécanique de l'accéléromètre	26
2.2.2 Force électrostatique dans le cas unidimensionnel	29
2.2.3 Mesures effectuées par l'accéléromètre	31
2.3 Performance de l'accéléromètre électrostatique	33
2.3.1 Facteur d'échelle, facteur quadratique et couplage	34
2.3.2 Biais de l'instrument	35
2.3.3 Bruit de mesure	35
2.3.4 Termes parasites	37
2.4 Platine rotative pour correction du biais	39
2.4.1 Principe de la correction du biais	39
2.4.2 Incertitude de mesure introduite par la platine rotative	40
2.4.3 Décentrage de l'accéléromètre par rapport à la platine rotative . . .	42
2.4.4 Transfert de moment cinétique	43
3 Traitement du signal pour une mesure d'accélération sans biais	47
3.1 Position du problème	49

3.1.1	Mesures effectuées par l'instrument	49
3.1.2	Linéarisation du problème	51
3.1.3	Solution générale	52
3.2	Correction du biais de l'accéléromètre	52
3.2.1	Conditions pour la correction du biais	53
3.2.2	Spécification des matrices de projection	56
3.2.3	Approche par la méthode des moindres carrés	57
3.2.4	Masquage	58
3.2.5	Signaux de modulation	58
3.3	Quantités démodulées	62
3.3.1	Estimations du signal et du biais	62
3.3.2	Caractérisation des mesures d'accélération	62
3.3.3	Caractérisation des mesures de biais	66
3.3.4	Caractérisation avec les moindres carrés généralisés	67
3.4	Utilisation des mesures d'accélération sans biais	68
3.4.1	Mesure de la moyenne	68
3.4.2	Variations sinusoïdales	69
3.5	Discussion	71
3.5.1	Optimisation du signal de modulation	71
3.5.2	Filtrage avant numérisation	72
3.5.3	Spécifications sur la platine rotative	72
3.5.4	Connaissance des facteurs d'échelle	74
3.5.5	Orthogonalité des axes de mesure	74
3.6	Correction du biais sur trois axes	75
3.6.1	Nombre de rotations nécessaires	75
3.6.2	Conditions pour la correction du biais	76
3.6.3	Exemples de signaux de modulation	77
4	Validation expérimentale de la correction du biais	81
4.1	Montage expérimental	82
4.1.1	Système de mesure	83
4.1.2	Pendule asservi horizontalement	85
4.2	Méthode expérimentale et traitement des données	87
4.2.1	Modélisation de l'expérience	87
4.2.2	Description des mesures	88
4.2.3	Traitement des données	89
4.3	Résultats et discussion	89
4.3.1	Détermination de l'orientation relative	89
4.3.2	Validation expérimentale du principe de démodulation	89
4.3.3	Précision des mesures	93
4.4	Conclusion	94

5	Restitution d'orbite avec mesure des accélérations non-gravitationnelles	97
5.1	Principes généraux de la trajectographie	98
5.1.1	Position du problème	99
5.1.2	Simulation d'une trajectoire et équations variationnelles	102
5.1.3	Optimisation non-linéaire	104
5.1.4	Précision sur les paramètres déterminés	105
5.2	Incorporation de l'accélération non-gravitationnelle	106
5.2.1	Exemple de missions spatiales	106
5.2.2	Généralisation de la modélisation dynamique	106
5.2.3	Précision sur les paramètres déterminés	107
5.3	Détection d'une anomalie gravitationnelle	108
5.3.1	Présentation de la méthodologie	108
5.3.2	Modèle d'anomalie de gravitation	108
5.3.3	Résultats	109
5.3.4	Mesure de distance	111
5.4	Discussion sur l'exactitude des paramètres déterminés	111
5.4.1	Remarques générales	111
5.4.2	Apport de la mesure des accélérations non-gravitationnelles	112
5.5	Conclusion	113
	Conclusion générale	115
	Annexe A Temps – fréquence : les transformations de Fourier	119
A.1	Transformée de Fourier	120
A.2	Transformée de Fourier à temps discret	121
A.3	Transformée de Fourier discrète	124
A.4	Liens entre les transformations de Fourier	125
	Annexe B Processus stochastiques	127
B.1	Processus stochastiques continus	128
B.1.1	Fonction de corrélation	128
B.1.2	Densité spectrale de puissance	128
B.1.3	Covariance	131
B.1.4	Dérivée d'un processus stochastique	132
B.2	Processus stochastiques discrets	133
B.2.1	Fonction de corrélation	133
B.2.2	Densité spectrale de puissance	133
B.2.3	Covariance	134
	Annexe C Méthode des moindres carrés et filtrage optimal	137
C.1	Position du problème	138
C.1.1	Processus de mesure et paramétrisation	138

C.1.2 Définitions et résultats généraux	139
C.2 Solution générale par la méthode des moindres carrés	140
C.3 Moindres carrés usuels	141
C.4 Moindres carrés généralisés (MCG)	141
C.4.1 Influence de la connaissance de la densité spectrale de puissance . . .	143
C.4.2 Filtrage optimal	143
Communications	145
Bibliographie	147
Index	159

Introduction générale

La Relativité Générale, description théorique actuelle du phénomène de gravitation qui a été formalisée au début du 20^e siècle, permet de décrire avec une précision inégalée les effets de la gravitation. Cependant, c'est une théorie classique et toutes les tentatives pour l'unifier avec la description quantique des trois autres interactions fondamentales de la Nature suggèrent l'existence d'une théorie plus complète de la gravitation. Du point de vue expérimental, si les expériences aux échelles de l'ordre de l'unité astronomique fournissent des contraintes fortes sur une potentielle déviation à la Relativité Générale, des possibilités de déviation aux courtes distances et aux longues distances sont encore ouvertes. La validité de la Relativité Générale doit aussi être évaluée à l'aune des observations cosmologiques. En effet, la rotation des galaxies ainsi que la relation entre le décalage vers le rouge et la luminosité des supernovæ diffèrent des prédictions théoriques. Ces anomalies sont interprétées comme révélant la présence de « matière noire » et d'« énergie noire », qui représenteraient respectivement 23% et 73% du contenu de l'Univers. Malgré leur prédominance, ces composantes n'ont été observées que par leur manifestation gravitationnelle. Il est donc légitime d'envisager la possibilité que la Relativité Générale ne décrive pas parfaitement la gravitation à ces échelles.

Tester la gravitation sur des distances les plus grandes possibles est donc essentiel pour compléter les tests expérimentaux faits jusqu'ici. Ce type d'expérience a été réalisé par la NASA avec les sondes Pioneer 10 et 11 lancées en 1972 et 1973 respectivement. Le résultat de cette expérience est la mesure d'une accélération anormale dirigée vers le Soleil dont l'amplitude est de l'ordre de $8 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$. C'est l'un des rares signaux expérimentaux présentant une possible déviation à la Relativité Générale. Étant donné l'ensemble des mesures réalisées par les sondes Pioneer, ce signal peut être aussi bien un artefact expérimental qu'une mesure d'une anomalie de gravitation dans le Système Solaire. Concernant cette deuxième explication, des travaux théoriques ont montré qu'une telle déviation pourrait être compatible avec les autres tests de la gravitation dans le Système Solaire. Pour discriminer une explication de l'autre, il aurait été nécessaire de mesurer l'accélération non-gravitationnelle des sondes.

Face à ce constat, plusieurs missions ont été proposées pour améliorer l'expérience faite

par les sondes Pioneer. Une idée centrale de ces missions est d'embarquer un instrument mesurant l'accélération non-gravitationnelle de la sonde, afin de lever l'ambiguïté du résultat de l'analyse des données des sondes Pioneer. C'est dans ce contexte de test de la gravitation utilisant la trajectoire d'une sonde spatiale que s'inscrit cette thèse. Pour une telle expérience, qui demande de restituer une orbite hyperbolique, il est nécessaire d'effectuer ces mesures sans biais. L'idée est d'ajouter à un accéléromètre électrostatique, qui repose sur une technologie ayant fait ses preuves en orbite terrestre, une platine rotative permettant de moduler le signal extérieur et donc de le séparer fréquemment du biais de mesure. Cet instrument, appelé Gravity Advanced Package, est à la base des objectifs de physique fondamentale de la mission Outer Solar System (OSS) proposée à l'ESA en décembre 2010.

Pour couvrir les différents aspects d'un test de la gravitation dans le Système Solaire utilisant la trajectoire d'une sonde interplanétaire, cette thèse commence par une présentation rapide de la confrontation de la Relativité Générale à l'expérience en mettant l'accent sur la mission OSS. Après ce chapitre de rappel du contexte, on en viendra au travail réalisé pendant cette thèse. Dans le chapitre 2, l'instrument est présenté dans son ensemble, en s'attachant à ses performances. Le chapitre suivant décrit comment utiliser l'instrument composé d'un accéléromètre électrostatique et d'une platine rotative pour effectuer des mesures sans biais. Dans ce chapitre, on s'attache aussi à déterminer la précision qu'il est possible d'obtenir sur les mesures d'accélération non-gravitationnelle de la sonde. Dans le chapitre 4, l'approche théorique développée au chapitre 3 est validée expérimentalement. Enfin, le dernier chapitre s'intéresse à l'utilisation, lors de la restitution d'orbite, des mesures d'accélération non-gravitationnelle. La méthodologie développée pour introduire ces mesures permet de calculer la précision avec laquelle il est possible de mesurer le champ de gravité et donc de détecter une éventuelle anomalie gravitationnelle.

Chapitre 1

Tests de la gravitation à l'échelle du Système Solaire

Sommaire

1.1	La théorie de la Relativité Générale et ses extensions en champ faible	4
1.2	Confrontation de la Relativité Générale aux expériences à grande échelle	8
1.3	La mission Outer Solar System	11

Au début du 20^e siècle, la physique classique semble proposer une description complète de la Nature à travers les lois de la thermodynamique, la description newtonienne de la gravitation et les lois de Maxwell. La théorie de Newton [1], qui fait la synthèse des travaux de Copernic, Kepler et Galilée entre autres, s'appuie sur le calcul différentiel développé par Fermat et Leibniz pour formaliser la description du phénomène de gravitation. Cette formalisation s'appuie sur des systèmes de coordonnées absolues et la notion de référentiel galiléen. Mais la physique classique se heurte à un problème théorique important : la non-invariance des équations de Maxwell par les transformations de Galilée. Pour pallier ce problème ainsi que celui de la propagation de la lumière en tant qu'onde, le concept d'éther comme support de la propagation du champ électromagnétique est utilisé. Il est cependant incompatible avec les expériences de Michelson et Morley [2, 3] et de Kennedy-Thorndike [4, 5] qui montrent que la vitesse de la lumière est isotrope quel que soit le référentiel.

En 1905, Einstein propose la théorie de la Relativité Restreinte [6] qui refonde la physique classique en laissant de côté la gravitation : alors que l'information ne peut se propager qu'à une vitesse inférieure à celle de la lumière dans le monde relativiste, la gravitation newtonienne est une force à distance instantanée. La Relativité Restreinte, qui lève le problème de l'éther, nécessite donc de repenser la gravitation pour en donner une description relativiste. L'effort déployé dans cette direction donne naissance à la théorie de la Relativité Générale qui généralise le principe de relativité en y incluant la gravitation.

1.1 La théorie de la Relativité Générale et ses extensions en champ faible

Il faut une dizaine d'années pour formaliser une description relativiste de la gravitation [7, 8]. La difficulté essentielle est que le champ gravitationnel dont dérive la force de gravitation ne peut être traité comme les autres champs, tel que le champ électromagnétique. Ce caractère singulier est déjà visible dans la formulation newtonienne. Pour une particule de masse inertielle m_i et de charge q dans un potentiel électrique ϕ_e , la deuxième loi de Newton s'écrit

$$m_i \underline{a} = q \underline{\nabla} \phi_e, \quad (1.1)$$

où $\underline{a}$ est l'accélération tridimensionnelle de la particule et $\underline{\nabla}$ est l'opérateur gradient. Pour cette même particule de masse gravifique m_g plongée dans le potentiel gravitationnel ϕ_g , on a

$$m_i \underline{a} = m_g \underline{\nabla} \phi_g. \quad (1.2)$$

Les constantes q et m_g caractérisent le couplage de la particule avec le champ électrique et le champ gravitationnel respectivement. La masse inertielle m_i caractérise quant à elle la réponse de la particule à toute force exercée sur elle. L'égalité entre m_i et m_g , qui caractérise l'interaction gravitationnelle, apparaît comme une coïncidence inexplicable pour la physique classique. Cette propriété, érigée comme base de la Relativité Générale, conduit

à énoncer le principe d'équivalence, qui postule que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels.

En Relativité Générale, la gravitation est décrite par la géométrie de l'espace-temps. Cette théorie s'appuie sur un domaine des mathématiques récent au début du 20^e siècle, celui des variétés différentiables, qui permet de décrire des espaces courbes grâce à une métrique. Dans ce sens, la Relativité Générale est une théorie métrique de la gravitation [9].

Introduction à la théorie de la Relativité Générale

La Relativité Générale repose sur le principe que la géométrie qui nous entoure n'est pas euclidienne mais courbe. Cette courbure est créée par la répartition de masse-énergie. Il est donc nécessaire de relier la géométrie de l'espace-temps à la distribution de matière, c'est-à-dire de relier le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ au tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. L'action qui décrit la dynamique du champ gravitationnel est l'action d'Einstein-Hilbert

$$S[g_{\mu\nu}] = \int \left[\frac{c^4}{16\pi\mathcal{G}} R + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{|g|} d^4x \quad (1.3)$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation¹, c est la vitesse de la lumière², g est le déterminant du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et $\mathcal{L}_m$ est le Lagrangien des champs de matière. R est la courbure scalaire³ donnée par $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, où $R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma$ est le tenseur de Ricci avec $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ les symboles de Christoffel déduits de la métrique de la manière suivante

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (1.4)$$

En considérant la variation de l'action pour une variation infinitésimale de la métrique, l'extrémisation de l'action d'Einstein-Hilbert conduit aux équations d'Einstein

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

avec $E_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion défini par

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.6)$$

Les équations d'Einstein permettent de calculer la métrique de l'espace-temps lorsque la répartition d'énergie est connue.

Il reste à déterminer le mouvement d'une particule dans cet espace-temps. Considérons un système dont les coordonnées (ct, x, y, z) sont notées $q^i(\tau)$, avec $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$. La dérivée de $q^i(\tau)$ par rapport au temps propre τ est notée $\dot{q}^i(\tau)$. La trajectoire effectivement suivie par

1. $\mathcal{G} = 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ [10, 11]

2. $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (exact) [10, 11]

3. Dans les formules, la convention de sommation d'Einstein a été adoptée : lorsqu'un même indice apparaît une fois en position supérieure et une fois en position inférieure, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice.

le système entre τ_1 et τ_2 , les q^i en τ_1 et τ_2 étant fixées, est celle qui vérifie les équations d'Euler-Lagrange. Ceci permet de montrer que le mouvement d'une particule libre est décrit par une courbe auto-parallèle paramétrée par le temps propre τ . On dit alors que la particule suit une géodésique ou une trajectoire géodésique. Soient x^k les coordonnées curvilignes de la particule et t^k les coordonnées du vecteur tangent, c'est-à-dire

$$t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.7)$$

une courbe C est dite auto-parallèle si

$$t^\mu \nabla_\mu t^\nu = 0 \quad (1.8)$$

où ∇_μ représente la dérivation covariante de Levi-Civita. Cette opération est une application, définie sur une variété différentiable, qui associe un tenseur de type ⁴ $(k, l+1)$ à tout tenseur de type (k, l) . Elle est définie de la manière suivante

$$\nabla_i P^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots k_q} = \partial_i P^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots k_q} + \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_{i\alpha}^{j_\alpha} P^{j_1 \dots l \dots j_p}_{k_1 \dots k_q} - \sum_{\beta=1}^q \Gamma_{ik_\beta}^l P^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots l \dots k_q} \quad (1.9)$$

et a la particularité d'être compatible avec la métrique, c'est-à-dire que $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$.

La solution de Schwarzschild

Si l'on s'intéresse aux tests de la gravitation dans le Système Solaire, une description simple consiste à étudier le cas d'un espace-temps déformé par un corps sphérique et statique de masse $M_\odot$. Il est possible de calculer exactement la métrique statique et à symétrie sphérique, dite de Schwarzschild. En coordonnées sphériques (ct, r, θ, ϕ) et dans la jauge isotrope d'Eddington [12, 13], la métrique s'écrit

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2 dt^2 + g_{rr}(r) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (1.10)$$

avec

$$g_{00}(r) = - \left(\frac{1 - \Phi(r)/2}{1 + \Phi(r)/2} \right)^2 \quad \text{et} \quad g_{rr}(r) = \left(1 + \frac{\Phi(r)}{2} \right)^4 \quad (1.11)$$

où $\Phi(r) = -\frac{GM_\odot}{rc^2}$ est le potentiel newtonien de la physique classique normalisé par la vitesse de la lumière au carré.

La gravitation dans le Système Solaire peut être traitée dans la limite des champs faibles. Cette limite suppose que le potentiel newtonien est petit devant 1, c'est-à-dire $\Phi \ll 1$. $M_\odot$ étant la masse du système solaire, on a $\Phi(1 \text{ UA}) \approx 1 \times 10^{-8} \ll 1$. Une description cohérente de la métrique dans cette limite nécessite de développer g_{00} à l'ordre Φ^2 , g_{0i} à l'ordre $\Phi^{3/2}$ et g_{ij} à l'ordre Φ [14, sec. 3.2]. La solution de Schwarzschild dans la

4. Un tenseur de type (k, l) est un tenseur k fois contravariant et l fois covariant.

jauge d'Eddington devient alors

$$ds^2 = [-1 + 2\Phi - 2\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3)] c^2 dt^2 + [1 + 2\Phi + \mathcal{O}(\Phi^2)] [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]. \quad (1.12)$$

Le formalisme « Parameterized Post-Newtonien »

Dans toutes les théories métriques de la gravitation, malgré l'existence possible d'autres champs, le seul champ qui joue un rôle dans les équations du mouvement est la métrique de l'espace-temps à travers l'équation (1.8). Les autres champs qui peuvent exister interviennent seulement dans le calcul de cette métrique. Ainsi, la métrique et les équations du mouvement sont les seuls éléments utiles pour le calcul d'effets observables, dans l'optique de tests de la gravitation.

Dans la limite des champs faibles, la comparaison des théories métriques de la gravitation devient, grâce au formalisme « Parameterized Post-Newtonian » (PPN), particulièrement simple. Dans ce formalisme, la métrique est exprimée comme une expansion de Taylor en terme du potentiel newtonien réduit Φ introduit précédemment. Il apparaît que, dans la limite des champs faibles, la métrique prédite par de nombreuses théories métriques de la gravitation rentre dans le formalisme PPN [14, p. 28].

Dans le cas général, le formalisme PPN fait intervenir 10 paramètres. Chacun d'entre eux mesure un effet particulier qui peut conduire à une violation de la Relativité Générale. Dans le cadre considéré dans la section précédente, à savoir pour une métrique statique et isotrope, l'extension PPN fait intervenir deux paramètres seulement, β et γ , de la manière suivante

$$\begin{cases} g_{00}(r) = -1 + 2\Phi(r) - 2\beta\Phi(r)^2 & (1.13a) \\ g_{rr}(r) = 1 + 2\gamma\Phi(r) & (1.13b) \end{cases}$$

En comparant ces deux équations à la métrique de Schwarzschild (1.12), on s'aperçoit que $\beta = \gamma = 1$ en Relativité Générale. De manière générale, le paramètre γ mesure la courbure de l'espace produite par une masse au repos et le paramètre β mesure la non-linéarité de la loi de la gravitation.

La dépendance d'échelle

En 1986, suite à une réanalyse détaillée des expériences d'Eötvös [15], l'existence d'une cinquième force de la nature fut suggérée [16]. Elle se manifesterait comme une modification du potentiel newtonien Φ en lui ajoutant un potentiel de type Yukawa

$$\Phi(r) + \delta\Phi(r) = -\frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}) \quad (1.14)$$

où α mesure l'intensité de ce potentiel et λ mesure sa portée.

Du point de vue phénoménologique, l'ajout de ce potentiel permet de paramétrer une déviation au potentiel newtonien dépendante de l'échelle grâce au paramètre λ , ce que ne permet pas le formalisme PPN. De point de vue théorique, ce potentiel de Yukawa peut être interprété comme décrivant l'existence d'une particule couplée au champ de gravité ayant une masse m reliée à la portée λ par la relation de Yukawa $mc = h/\lambda$, où h est la constante de Planck⁵.

Extensions métriques de la Relativité Générale en champs faible

Une approche plus générale permet d'englober les deux types d'extension présentés ci-dessus. Il s'agit d'une extension de la relation d'Einstein (1.5) produite naturellement par des corrections radiatives à la Relativité Générale [17]. La relation de proportionnalité entre le tenseur d'Einstein et le tenseur énergie-impulsion est généralisée par une relation linéaire dans le domaine de Fourier [18, 19]

$$E_{\mu\nu}[k] = \chi_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}[k] T_{\rho\sigma}[k]. \quad (1.15)$$

où k est le vecteur d'onde quadri-dimensionnel et $\chi_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$ le tenseur de proportionnalité.

Dans le cas du Système Solaire, cette généralisation génère des perturbations à la métrique de Schwarzschild (1.10). La métrique peut alors être paramétrée par deux potentiels supplémentaires $\delta\Phi_N(r)$ et $\delta\Phi_P(r)$ tels que [20–23]

$$\begin{cases} g_{00}(r) = -1 + 2\Phi(r) + 2\delta\Phi_N(r) & (1.16a) \\ g_{rr}(r) = 1 + 2\Phi(r) + 2\delta\Phi_N(r) - 2\delta\Phi_P(r) & (1.16b) \end{cases}$$

Le potentiel $\delta\Phi_N(r)$ représente une modification du potentiel newtonien. Les expériences de « cinquième force » présentées précédemment rentrent dans ce cadre. Le second potentiel $\delta\Phi_P(r)$ fait passer le paramètre PPN γ du statut de constante à celui de fonction dépendante de la distance au Soleil. La fonction $\delta\Phi_N(r)$ est très contrainte expérimentalement par les mouvements des planètes. Quant au potentiel $\delta\Phi_P(r)$, il a, comme le paramètre γ , une influence sur la propagation de la lumière. Ainsi, les expériences de déflexion [24–26] de la lumière par le Soleil donnent des contraintes sur ce potentiel.

1.2 Confrontation de la Relativité Générale aux expériences à grande échelle

Dans la section précédente, différents cadres théoriques permettant de tester la gravitation dans le Système Solaire ont été présentés. Ils permettent de confronter les mesures expérimentales dans un cadre unifié. Un bref récapitulatif de ces expériences est présenté maintenant, en considérant d'abord les mesures dans le Système Solaire, puis les observations à plus grande échelle.

5. $h = 6,626\,068\,96(33) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ [10, 11]

À l'échelle du Système Solaire

Sur le plan théorique, la Relativité Générale s'imposa par sa cohérence interne et par sa capacité à faire vivre la gravitation dans un monde relativiste. Sur le plan expérimental, elle reçut très tôt deux confirmations éclatantes. L'avance du périhélie de Mercure était un problème non résolu en mécanique céleste depuis sa découverte par Le Verrier en 1859. La valeur moderne de cette avance par rapport aux prédictions de la théorie classique est de 43 arc-secondes par siècle. La théorie de la Relativité Générale rend compte de cette valeur de manière naturelle en préservant l'accord de la théorie avec les observations des autres planètes. Aujourd'hui, les mesures de la position du périhélie de Mercure permettent de contraindre les valeurs des paramètres PPN. Einstein proposa aussi de mesurer la déviation de rayons lumineux par un corps massif. La prédiction de la Relativité Générale fut confirmée expérimentalement par l'astronome britannique Eddington en 1919 [27].

Aujourd'hui, les expériences de déflexion de la lumière permettent de contraindre la valeur du paramètre PPN γ . Mais la meilleure mesure de ce paramètre vient de la mesure de la variation du délai Shapiro due à la présence d'un corps massif. Cette expérience, faite avec la sonde Cassini lors d'une conjonction solaire [26], a montré que

$$\gamma = 1 + (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}. \quad (1.17)$$

Le suivi de la distance Terre-Lune grâce au « Lunar Laser Ranging » (LLR) permet de mesurer le paramètre PPN β [28, 29]. Mais ce sont les éphémérides des planètes [30, 31] qui produisent les meilleures contraintes sur ce paramètre, à savoir

$$0,99995 < \beta < 1,0002. \quad (1.18)$$

À l'heure actuelle, aucune de ces mesures n'a montré d'écart à la Relativité Générale.

Concernant les expériences de type « cinquième force », les limites obtenues à ce jour sur les paramètres α et λ du potentiel de Yukawa sont données dans la figure 1.1. De nombreuses mesures expérimentales sont disponibles pour des distances comprises entre le millimètre et l'échelle de distance du Système Solaire. À l'inverse, pour $\lambda < 1$ mm et $\lambda > 10^4$ UA, des fenêtres restent ouvertes pour des déviations au potentiel newtonien⁶. Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt se porte sur les distances de l'ordre de la taille de l'orbite des planètes externes du Système Solaire. L'idée principale pour tester la gravitation à ces échelles est d'observer les mouvements des objets dans le Système Solaire et de les comparer aux prédictions théoriques. En particulier, il est possible d'utiliser une sonde spatiale comme une masse test. Cette approche a un avantage majeur par rapport à l'observation des planètes : la possibilité d'avoir des instruments à bord de la sonde spatiale qui permettent de connaître sa trajectoire de manière précise.

Ce type d'expérience a été réalisé par la NASA lors de l'extension des missions Pioneer 10 et 11 lancées le 3 mars 1972 et le 5 avril 1973 respectivement [34, 35]. Le résultat est la

6. 1 UA = 149 597 870 691 m [33]

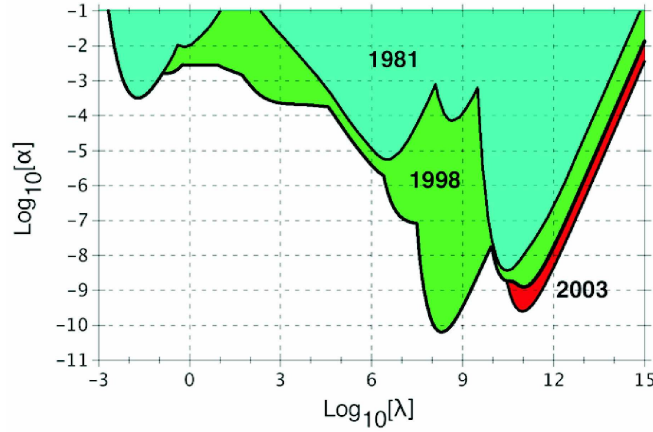


FIGURE 1.1 – Les régions en couleur correspondent aux couples (α, λ) paramétrant une déviation au potentiel newtonien du type potentiel de Yukawa (cf. eq. (1.14)) exclus expérimentalement. D'après [32], figure réalisée par J. Coy, E. Fischbach, R. Hellings, C. Talmadge et E. M. Standish.

mesure d'une accélération anormale dirigée vers le Soleil avec une amplitude de l'ordre de $8 \times 10^{-10} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ [36, 37], l'un des rares signaux expérimentaux présentant une possible déviation à la Relativité Générale [38, 39]. Un signal similaire d'amplitude $26,7 \times 10^{-10} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ dirigé vers le Soleil a été observé avec la sonde Cassini [40]. L'expérience réalisée avec les sondes Pioneer a donné lieu à une importante mobilisation concernant l'analyse des données [41–43] et des signaux périodiques ont aussi été mis en évidence [44–49]. Malgré les efforts de la communauté scientifique, l'origine de cette anomalie n'est toujours pas expliquée [50] : elle peut être un artefact expérimental [51–60] comme un indice important pour la physique fondamentale [32, 61]. En effet, un tel signal pourrait résulter d'une dépendance d'échelle de la loi de la gravitation, dont pourraient rendre compte les extensions métriques de la Relativité Générale discutées à la section 1.1 ou des extensions faisant intervenir d'autres champs [62–64]. Quoi qu'il en soit, les modélisations actuelles de l'accélération non-gravitationnelle des sondes sont limitées à une incertitude de l'ordre du $\text{nm}\cdot\text{s}^{-2}$: pour lever cette limitation, une mesure directe de cette accélération est nécessaire.

Aux échelles cosmologiques

Ces études doivent être inscrites dans un contexte où d'autres considérations poussent à s'interroger quant à la validité de la Relativité Générale aux échelles cosmologiques. Il s'agit de la matière noire et de l'énergie noire, deux notions distinctes introduites empiriquement pour expliquer les observations astronomiques. La matière noire, qui représente 23 % [65] du contenu de l'Univers, a été introduite pour expliquer les courbes de rotation des galaxies [66]. Elle est observée également dans les expériences de « lentilles gravitationnelles » et est nécessaire pour les modèles de formation des galaxies. L'énergie noire, qui représente 73 %

[65] du contenu de l'Univers, a été introduite pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'Univers [67, 68]. Malgré leur prévalence dans l'Univers, elles n'ont jamais été observées par un autre moyen que des mesures gravitationnelles. Même si la physique des particules propose des particules candidates au statut de matière noire et d'énergie noire [69–71], l'hypothèse selon laquelle la Relativité Générale n'est pas une description exacte de la gravitation à ces échelles doit être explorée [72–75].

Unification des interactions fondamentales

Au delà des considérations observationnelles présentées ci-dessus, une autre motivation d'ordre théorique pousse à continuer à tester la Relativité Générale. Il s'agit du fait que c'est une théorie classique. À l'inverse, les trois autres interactions fondamentales (interaction forte, faible et électromagnétique) sont décrites par le Modèle Standard, qui s'appuie sur une description quantique de la Nature. Cette incapacité à fondre dans une même théorie une description quantique de la Nature avec la compréhension actuelle de la gravitation suggère de modifier la Relativité Générale. Les modèles théoriques candidats pour unifier la gravitation avec les trois autres interactions fondamentales donnent naissance à des déviations aux prédictions de la Relativité Générale. Dans cette optique, tester la gravitation à l'échelle du Système Solaire, comme le propose la mission Outer Solar System, peut conduire à des résultats expérimentaux essentiels pour faire progresser la compréhension de la loi de gravitation.

1.3 La mission Outer Solar System

La mission Outer Solar System (OSS) [76] a été proposée à l'ESA et à la NASA en décembre 2010 dans le cadre de l'appel à proposition Cosmic Vision pour une mission de taille M avec un lancement aux alentours de 2022. Elle fait suite à la proposition Odyssey [77], qui a été soumise à l'ESA en 2007, et a fait l'objet d'une étude par le CNES [78]. La mission OSS a été portée à la connaissance de la NASA qui a reconnu que ses objectifs étaient en phase avec les objectifs scientifiques du *2010 Science Plan for NASA's Science Mission Directorate* [79].

Cette mission combine des objectifs de planétologie et de physique fondamentale, suivant ainsi la recommandation de l'ESA [80]. Les objectifs scientifiques allient une exploration du système de Neptune et d'un objet de la ceinture de Kuiper à des tests de la gravitation à l'échelle du Système Solaire. Dans les deux paragraphes suivants, ces deux catégories d'objectifs sont décrites avec les instruments mis en œuvre pour les atteindre. Ensuite, le profil de la mission est rapidement étudié. Bien que la mission OSS n'ait pas été retenue par l'ESA lors d'une compétition avec de nombreuses autres propositions, les expériences de physique fondamentale portées par la mission OSS ont été jugées être des objectifs scientifiques de premier plan. Ces objectifs sont d'ailleurs repris dans la feuille de route de l'ESA pour les missions de physique fondamentale dans l'espace [80].

Physique fondamentale

La partie « physique fondamentale » de la mission OSS est organisée autour de deux objectifs scientifiques qui ont trait aux tests de la gravitation. Le premier objectif est de dresser une cartographie du champ de gravité sur la trajectoire de la sonde afin d'effectuer des comparaisons avec les prédictions théoriques et de détecter une éventuelle anomalie. Le second concerne la mesure du paramètre PPN γ .

Plusieurs concepts de mission ont déjà été proposés pour tester la gravitation dans le Système Solaire [77, 81–86], en améliorant l'expérience faite avec les sondes Pioneer 10 et 11. L'idée centrale est de mesurer les forces non-gravitationnelles agissant sur la sonde afin de résoudre l'ambiguïté du signal Pioneer.

La sonde OSS embarque les instruments nécessaires à la radio-science. Ces instruments permettent de mesurer l'accélération de la sonde grâce au décalage Doppler du lien radio. Lors de la phase de restitution d'orbite, ces mesures sont utilisées pour reconstituer la trajectoire. Dans un cadre post-newtonien, le lien radio donne l'accélération Doppler de la sonde le long de la ligne de visée, $a_{Doppler}$. Cette accélération Doppler inclut l'accélération non-gravitationnelle de la sonde, $\underline{a}_{NG}$, et un terme a_{autre} . Ce dernier terme contient l'accélération de la sonde due à la courbure de l'espace-temps, l'interaction du lien radio avec le champ gravitationnel, le mouvement de la station sur Terre suivant la sonde, et les effets d'aberration. Soit $\underline{u}$ le vecteur unitaire dirigeant la ligne de visée, on a la formule simplifiée suivante

$$a_{Doppler} = \underline{a}_{NG} \cdot \underline{u} + a_{autre} \quad (1.19)$$

Lorsque $a_{Doppler}$ est l'unique observable, il est nécessaire d'utiliser des modèles pour corriger $\underline{a}_{NG} \cdot \underline{u}$ afin d'accéder à a_{autre} . Cette approche est celle utilisée actuellement pour toutes les sondes interplanétaires [87, 88]. Mais la restitution d'orbite est alors entachée d'erreurs dues à l'incertitude des modèles. Et même si l'accélération non-gravitationnelle moyenne était correctement modélisée, ses fluctuations temporelles ne seraient pas prises en compte.

Le Gravity Advanced Package (GAP) [89], accéléromètre électrostatique avec correction de biais, qui est présenté en détail dans le chapitre 2, mesure le long de deux axes perpendiculaires (dirigés par les vecteurs unitaires $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$) la valeur sans biais de l'accélération non-gravitationnelle de la sonde $\underline{a}_{NG}$. Les techniques utilisées pour faire une mesure sans biais d'accélération et la précision des mesures sont présentées aux chapitres 3 et 4. Lorsque $\underline{u}$ est dans le plan généré par $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$, on peut récupérer la quantité a_{autre} en combinant l'accélération Doppler et les mesures du GAP. Ces mesures supplémentaires améliorent la restitution d'orbite pour trois raisons. Tout d'abord, elles suppriment des paramètres à estimer. Ensuite, elles mesurent les fluctuations temporelles aléatoires qui ne peuvent pas être prises en compte par les modèles. Enfin, elles permettent de supprimer des corrélations qui apparaissent entre les quantités déterminées lors de la restitution d'orbite. Cet aspect de la mission OSS est abordé en détail au chapitre 5.

Concernant le paramètre PPN γ , la mesure la plus précise à l'heure actuelle est celle

effectuée par la sonde Cassini lors d'une occultation [26]. La mission OSS propose de réitérer cette expérience en utilisant un lien laser. L'amélioration de la précision de la mesure provient du fait que les fréquences optiques sont supérieures aux fréquences radio et sont, par conséquent, moins sujettes à la dispersion dans le plasma solaire. De plus, comme expliqué ci-dessus, la sonde OSS bénéficiera d'une trajectographie améliorée. L'objectif de la mission OSS est de mesurer γ avec une précision de 10^{-7} .

Planétologie

L'objectif scientifique principal de la mission OSS en planétologie est le système de Neptune. Cet objectif se décline en plusieurs thèmes qui touchent à la compréhension dans son ensemble de Neptune et de son environnement. Après le survol par Voyager 2 en 1989 [90], un nouveau survol permettrait de faire des observations avec des instruments plus précis, mais aussi d'analyser les changements qui ont pu apparaître depuis la mission Voyager.

Dans ce contexte, la trajectoire de la sonde et les instruments scientifiques permettent tout d'abord d'améliorer la compréhension du système d'anneaux autour de Neptune et de son interaction avec les petits satellites [91]. En effet, alors que les systèmes anneaux-satellite étaient supposés être stables sur des durées de plus de 10^6 ans, des observations récentes ont montré que la dynamique de ces systèmes est beaucoup plus rapide [92].

Concernant l'observation de Neptune, plusieurs aspects sont étudiés. Tout d'abord, la trajectoire de la sonde permet de contraindre les modèles de structure interne. À l'heure actuelle, l'intérieur de Neptune est supposé être composé de roche et de glace [93, 94] mais il est mal connu [95]. Une autre problématique est celle de l'atmosphère : Voyager a révélé l'existence d'une atmosphère très dynamique [96, 97] alors même que Neptune est très distant du Soleil. La mission OSS permet d'améliorer la compréhension de la dynamique de l'atmosphère en observant la turbulence atmosphérique avec une résolution impossible à atteindre avec des télescopes placés sur Terre [98]. Enfin, le dipôle magnétique de Neptune, comme celui d'Uranus, est très penché et est déporté par rapport au centre de la planète [99–101]. Cela conduit à ce que le champ magnétique subisse des modifications très importantes avec la rotation de la planète dans le vent solaire [102]. Le survol de Neptune par OSS permet de comprendre la dynamique du champ magnétique et peut fournir des indications sur la période de rotation de l'intérieur de Neptune et sur la composition du plasma dans la magnétosphère [103, 104].

La mission OSS survole aussi le satellite Triton, qui est probablement le seul grand satellite du Système Solaire à ne pas s'être formé autour de sa planète comme en atteste son orbite rétrograde très inclinée. L'exploration de Triton a donc pour objectif de comprendre son origine et son histoire, et de fournir des éléments sur la formation et l'évolution du Système Solaire. De même que pour Neptune, la dynamique de l'atmosphère est étudiée, avec une attention particulière portée sur sa variabilité saisonnière [105, 106]. Enfin, la trajectoire de la sonde OSS permet de déterminer la structure interne de Triton [107] et si

un océan est présent sur Triton comme cela a été avancé [108], ce qui en ferait une cible de choix pour l'astrobiologie.

Enfin, un objet de la ceinture de Kuiper est visité. La compréhension de l'histoire du Système Solaire a été révolutionnée par la découverte de la ceinture de Kuiper [109]. Les objets la composant présentent une diversité remarquable de leurs propriétés [110]. L'objectif pour cette phase de la mission est de collecter suffisamment de données pour comparer Triton avec l'objet de la ceinture de Kuiper survolé.

Pour remplir ces différents objectifs, la sonde est équipée des instruments suivants : une caméra haute résolution et une caméra grand angle avec un imageur dans le proche infrarouge, un magnétomètre, un instrument de mesure des ondes dans les plasmas, un spectromètre dans l'ultra-violet, un imageur thermique et un détecteur de poussières.

Description de la mission

La capacité à mener à bien les objectifs scientifiques décrits ci-dessus dépend fortement de la conception de la sonde spatiale et de la trajectoire choisie. Le profil de mission retenu doit permettre de mettre en orbite une sonde de 500 kg (masse prenant en compte l'ensemble de la sonde spatiale, les instruments scientifiques et les ergols) sur une trajectoire interplanétaire. De plus, la mission doit respecter les critères de coût : une enveloppe de 470 M€ sans les instruments est allouée par l'ESA plus une contribution similaire de la NASA, principalement pour le lanceur.

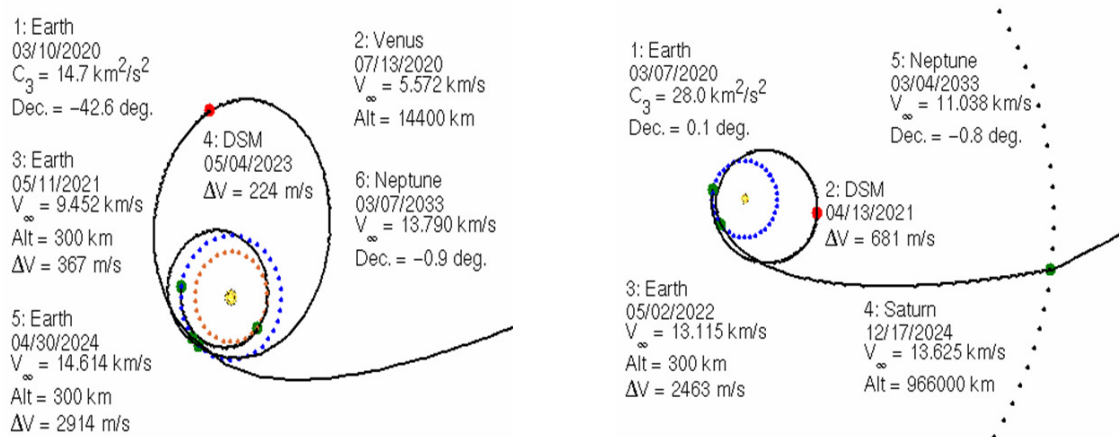


FIGURE 1.2 – Deux orbites possibles pour la mission OSS avec un lancement en 2020 avec des fly-by de Venus, de la Terre et de Saturne [76].

La trajectoire retenue doit permettre de visiter Neptune et Triton ainsi qu'un objet de la ceinture de Kuiper, avec une durée maximale du transfert jusqu'à Neptune fixée à 13 ans. Par ailleurs, l'optimisation de trajectoire a été effectuée avec l'objectif de minimiser la quantité d'ergol à bord ainsi que la vitesse à l'infini initiale. Au vu de ces contraintes, les deux trajectoires présentées en figure 1.2 ont été retenues. Dans les deux cas, des rebonds

gravitationnels sont prévus pour que la sonde spatiale acquiert l'énergie suffisante pour aller à Neptune : cette approche évite d'utiliser un lanceur puissant et donc coûteux, mais allonge la durée de la mission. Concernant la visite d'un objet de la ceinture de Kuiper, le rebond gravitationnel sur Neptune doit permettre de choisir parmi de nombreux objets [111]. Neptune étant hors du plan de l'écliptique, les conjonctions solaires utilisées pour la mesure du paramètre PPN γ ont lieu au début de la mission à 2,1 UA et à 4,3 UA. Enfin, pour les tests de la gravitation à l'échelle du Système Solaire, ils sont effectués durant les phases balistiques interplanétaires.

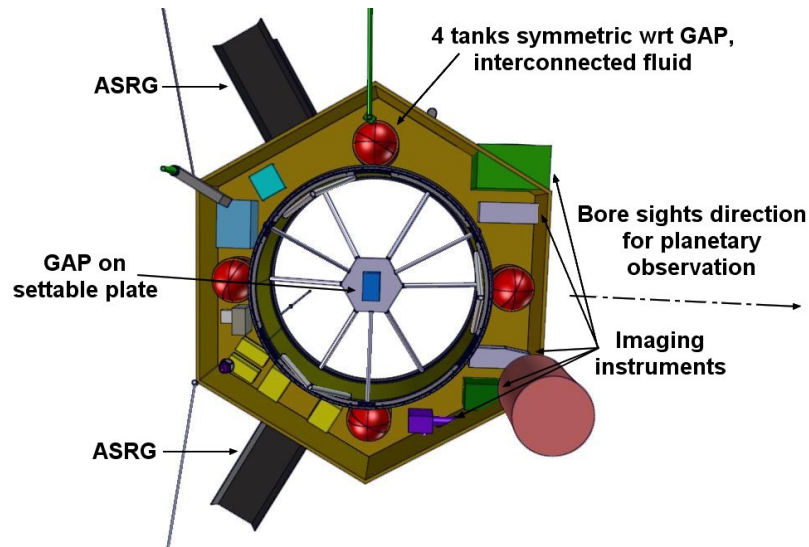


FIGURE 1.3 – Intérieur de la sonde OSS vu de dessus [76].

L'architecture de la sonde est présentée en figure 1.3. L'électricité à bord est fournie par deux réacteurs nucléaires ASRG (Advanced Stirling Radioisotope Generator) [112], qui produisent 146 W en début de vie et 125 W après 14 ans. L'organisation de la sonde est contrainte par les besoins des instruments en terme de positionnement. Par exemple, les instruments d'imagerie doivent être placés sur la face de la sonde qui aurait pointer vers la surface de la planète lors des survols. Une attention particulière est accordée au positionnement des ASRG afin de minimiser leur impact sur le reste de la sonde. Les contraintes les plus sévères viennent du Gravity Advanced Package. En effet, la force de gravité de la sonde sur le GAP, ainsi que les accélérations d'entraînement et de Coriolis, sont mesurées par l'instrument. La configuration optimale est donc que le centre de gravité de la sonde et des ergols soit confondu avec le point d'application des forces non-gravitationnelles et le GAP, afin d'annuler ces signaux parasites. Pour répondre à cette contrainte, le Gravity Advanced Package est placé au centre de la sonde spatiale et les quatre réservoirs d'hydrazine [113] (un monergol d'impulsion spécifique égal à 220 s) sont répartis symétriquement autour. Un système permet de transférer des ergols d'un réservoir à l'autre afin de contrôler la position du centre de gravité. Il est aussi important d'assurer un alignement stable entre le GAP et l'antenne qui est utilisée pour la radio-science puisque les données de ces deux

instruments sont utilisées conjointement pour la restitution d'orbite.

Deux modes de fonctionnement sont envisagés durant la mission : un mode où la sonde est stabilisée suivant les trois axes et un mode spinné pendant les périodes d'hibernation. L'attitude de la sonde est asservie par des capteurs stellaires et des gyromètres, et contrôlée par des roues de réaction.

Chapitre 2

Accéléromètre à biais corrigé pour missions interplanétaires

Sommaire

2.1	Présentation du Gravity Advanced Package	18
2.1.1	Accélérométrie spatiale pour la physique	18
2.1.2	Présentation générale	20
2.1.3	Architecture de l'accéléromètre MicroSTAR	22
2.1.4	Description détaillée de l'instrument	23
2.2	Principe de fonctionnement de MicroSTAR	26
2.2.1	Fonctionnement mécanique de l'accéléromètre	26
2.2.2	Force électrostatique dans le cas unidimensionnel	29
2.2.3	Mesures effectuées par l'accéléromètre	31
2.3	Performance de l'accéléromètre électrostatique	33
2.3.1	Facteur d'échelle, facteur quadratique et couplage	34
2.3.2	Biais de l'instrument	35
2.3.3	Bruit de mesure	35
2.3.4	Termes parasites	37
2.4	Platine rotative pour correction du biais	39
2.4.1	Principe de la correction du biais	39
2.4.2	Incertitude de mesure introduite par la platine rotative	40
2.4.3	Décentrage de l'accéléromètre par rapport à la platine rotative	42
2.4.4	Transfert de moment cinétique	43

Avec l'amélioration constante de la précision des instruments de mesure, l'espace est devenu un endroit privilégié pour tester les deux théories fondamentales de la physique : la Relativité Générale et la Mécanique Quantique [114]. C'est dans ce cadre que la mission OSS, présentée au chapitre précédent, a été pensée. Son principal objectif concernant la physique fondamentale est de fournir une mesure du champ de gravité à l'échelle du Système Solaire. Pour cela, le lien radio entre la sonde et les stations terrestres est utilisé afin de déterminer la trajectoire de la sonde. Cette mesure effectuée avec le lien radio dépend non seulement de la métrique dans le Système Solaire mais aussi des forces non-gravitationnelles qui s'appliquent sur la sonde. Pour exploiter au mieux cette mesure, il est donc nécessaire de mesurer par ailleurs l'accélération non-gravitationnelle de la sonde. Comme la sonde est sur une trajectoire hyperbolique, ces accélérations doivent être mesurées sans biais.

Le Gravity Advanced Package [89] est un instrument conçu pour remplir cet objectif. Destiné à être embarqué sur la mission OSS, il a aussi été proposé sur la mission Laplace [115]. Il est composé de l'accéléromètre électrostatique MicroSTAR, qui effectue les mesures d'accélération, et d'une platine rotative, appelée historiquement Bias Rejection System, qui permet de corriger le biais de mesure de MicroSTAR. Dans ce chapitre, on commence par présenter en détail le Gravity Advanced Package conçu et développé à l'Onera. Ensuite, le principe de fonctionnement de MicroSTAR est détaillé. Les défauts de l'accéléromètre sont aussi discutés et le bruit de mesure est caractérisé. Enfin, le Bias Rejection System est étudié en détail du point de vue de la performance de l'instrument.

2.1 Présentation du Gravity Advanced Package

Dans cette section, une présentation générale du Gravity Advanced Package est faite après une brève description de l'accélérométrie spatiale pour la physique.

2.1.1 Accélérométrie spatiale pour la physique

Un accéléromètre placé dans une sonde spatiale mesure l'accélération non-gravitationnelle de celle-ci. Cette accélération provient, entre autres, des forces de frottement qui s'exercent sur la sonde, de la pression de radiation solaire et du rayonnement thermique anisotrope. Le principe de la mesure accélérométrique est de mesurer l'accélération relative d'une masse d'épreuve libre par rapport à une cage solidaire de la sonde. La mesure de cette accélération non-gravitationnelle peut être effectuée de différentes manières.

Une première configuration consiste simplement à observer la position de la masse d'épreuve : aucune force n'est appliquée pour la maintenir au centre de la cage. Cette mesure de position est utilisée pour asservir la trajectoire de la sonde. En pratique, l'information de position relative de la masse d'épreuve par rapport à la cage est injectée dans la boucle de contrôle des propulseurs qui agissent de telle sorte que la sonde spatiale suive exactement la même trajectoire que la masse d'épreuve. De cette manière, la masse d'épreuve et la sonde suivent une trajectoire géodésique. Cette configuration a été retenue pour la mission

LISA [116–118] qui est destinée à détecter des ondes gravitationnelles [119].

Une deuxième possibilité consiste à asservir la masse d'épreuve pour qu'elle reste au centre de la cage et à utiliser la sortie de l'accéléromètre pour asservir les propulseurs de sorte que la sonde suive une trajectoire géodésique. Cette configuration a été retenue pour le satellite Microscope [120–125] qui est destiné à tester le Principe d'Équivalence avec une précision relative de 10^{-15} .

Un autre cas de figure est celui où la masse d'épreuve est asservie sans que la trajectoire de la sonde ne soit asservie sur les mesures de l'accéléromètre. Dans ce cas, les mesures Doppler permettent d'estimer l'accélération totale de la sonde et les mesures de l'accéléromètre fournissent l'accélération non-gravitationnelle de celle-ci. En utilisant conjointement ces deux mesures, il est possible d'obtenir le mouvement géodésique de la sonde. Cette configuration est celle retenue pour la mission OSS : comparée aux deux autres configurations présentées précédemment, cette solution est la plus simple car elle ne nécessite pas de propulseurs délivrant des poussées très précises. Elle est donc beaucoup mieux adaptée à une mission interplanétaire avec des contraintes de masse très sévères.

On peut aussi envisager des accéléromètres sans asservissement de la masse d'épreuve, par exemple un système masse-ressort où la variation de position donne, via la constante de raideur du ressort, l'accélération non gravitationnelle du satellite.

L'accélérométrie spatiale peut aussi être utilisée pour la géodésie, c'est-à-dire pour l'étude de la forme de la Terre. En effet, la trajectoire d'un satellite autour de la Terre dépend du potentiel gravitationnel de la Terre ainsi que des forces non-gravitationnelles telles que la pression de radiation solaire, l'albédo terrestre et les frottements atmosphériques. De même que pour les missions de physique fondamentale, un accéléromètre permet de mesurer ces forces afin de récupérer la trajectoire géodésique du satellite. La mission CHAMP (CHAllenging Minisatellite Payload) [126] a été lancée en 2000 pour améliorer la connaissance de la traînée atmosphérique. Mais l'apport de cette mission sur la connaissance du potentiel terrestre est rapidement apparu [127, 128]. La mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) [129] a fait suite à la mission CHAMP avec des objectifs spécifiques de géodésie. Elle a été lancée en 2002. Cette mission est composée de deux satellites jumeaux, en orbite autour de la Terre, liés par un faisceau micro-ondes. Les informations sur la position relative des satellites ont permis de caractériser le champ de gravité spatialement [130] et temporellement [131]. La mission de géodésie la plus récente utilisant des accéléromètres est la mission GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) [132–134] lancée en 2009. Elle a pour objectif de mesurer le gradient de gravité. Pour cela, six accéléromètres sont utilisés pour former un gradiomètre. Comme pour la mission Microscope, un système de compensation de traînée est asservi sur les accéléromètres pour compenser les forces non-gravitationnelles suivant l'axe de la trajectoire. Les accéléromètres des missions CHAMP, GRACE, GOCE et Microscope ont été conçus et réalisés par l'Onera.

Dans tous ces cas, les mesures accélérométriques fournissent une observable supplémentaire qui permet d'améliorer la restitution d'orbite pour les trois raisons évoquées au

chapitre précédent et détaillées au chapitre 5.

2.1.2 Présentation générale

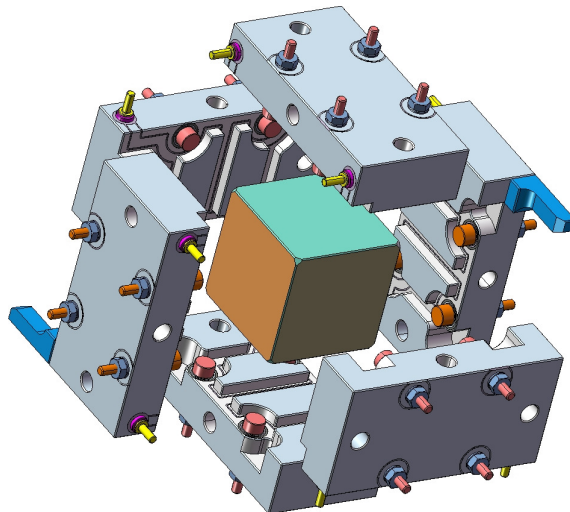


FIGURE 2.1 – Vue explosée du cœur mécanique de l'accéléromètre électrostatique. La position et l'attitude de la masse d'épreuve sont contrôlées par six paires d'électrodes dont les potentiels sont définis par une boucle de rétro-action. Sur chaque plaque en ULE, quatre butées empêchent la masse d'épreuve de toucher les électrodes.

Pour les satellites autour de la Terre, les signaux d'intérêt sont modulés à une fréquence multiple de la fréquence orbitale, de telle sorte que le biais de l'instrument qui est dans le continu ne pose pas de problème. À l'inverse, comme la sonde OSS a une trajectoire hyperbolique, un biais de mesure non-nul serait préjudiciable car il ne permettrait pas de tester sans ambiguïté la loi de gravitation. Comme les accéléromètres électrostatiques ont un biais de mesure, une platine rotative, appelée Bias Rejection System, est ajoutée à l'accéléromètre MicroSTAR. L'objectif de précision en terme d'accélération sur la trajectoire de la sonde est fixé à $10 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$, en accord avec les besoins exprimés par la communauté de physique fondamentale [80]. Pour garder des marges, l'objectif de précision pour le Gravity Advanced Package est fixé à $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$.

La platine rotative permet de faire tourner l'accéléromètre autour d'un de ses axes de mesure. De cette façon, elle permet de moduler le signal extérieur sur deux des axes de mesure, alors que le biais de mesure reste dans le domaine continu. Cette modulation permet de séparer dans le domaine fréquentiel le signal extérieur du biais de l'instrument. En appliquant une procédure de traitement du signal adaptée aux mesures effectuées par l'instrument, il est donc possible de séparer le signal extérieur du biais de mesure.

L'accéléromètre MicroSTAR hérite de l'expertise de l'Onera dans les domaines de l'accélérométrie et de la géodésie avec les missions CHAMP, GRACE et GOCE et la mission Microscope qui est en préparation [135–137]. Une technologie similaire à celle des accéléromètres de la mission GOCE, actuellement en orbite, est utilisée. Des améliorations ont

été réalisées afin de réduire la masse, la taille et la consommation de l'accéléromètre. Le principe de MicroSTAR est de détecter par mesure capacitive tout mouvement de la masse d'épreuve par rapport à la cage et d'agir sur cette masse d'épreuve grâce aux forces électrostatiques, afin qu'elle reste au centre de la cage [138]. Ainsi, la masse d'épreuve est fixe par rapport à la cage de l'accéléromètre dans la bande de fréquence de contrôle de la boucle de rétro-action.

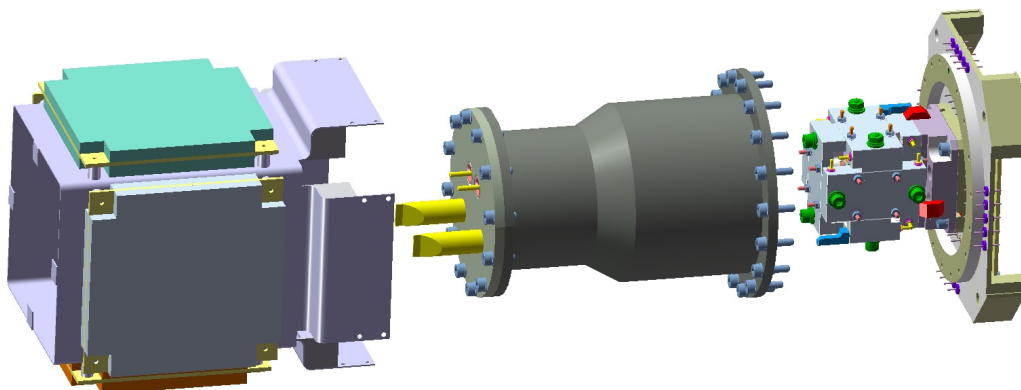


FIGURE 2.2 – Le cœur de MicroSTAR est placé sur une semelle qui permet de faire l'interface avec le Bias Rejection System. L'enceinte à vide, autour de laquelle se trouve l'électronique de proximité, assure un vide meilleur que 10^{-5} Pa.

La masse d'épreuve est dans une cage composée de six plaques identiques (fig. 2.1). Cette configuration a été retenue afin de diminuer les coûts ainsi que les délais de production. Tous les composants sont fabriqués avec le même matériau en silice « Ultra-Low Expansion » (ULE) produit par Corning [139]. La masse d'épreuve est un cube de 2 cm de côté et pèse 18 g. Elle est recouverte d'une couche d'or et reliée à deux sources de tension de telle sorte que deux faces opposées aient une polarisation opposée. Sur chaque plaque en ULE, deux électrodes sont gravées par une machine à ultra-son brevetée par l'Onera [140]. La position et l'attitude de la masse d'épreuve par rapport à la cage (six degrés de liberté) sont contrôlées par les six paires d'électrodes. Les électrodes sont positionnées de telle sorte que les degrés de liberté sont couplés deux par deux (cf. section 2.2.1). Ainsi, l'accéléromètre est complètement symétrique. Du fait du choix des entrefers, il ne peut être levité sous une accélération de 1 g : les performances de l'instrument devront être testées dans une tour de chute [141], comme cela est fait pour les accéléromètres de la mission Microscope [142]. Le cœur de MicroSTAR se trouve sur une semelle qui permet de l'interfacer avec le Bias Rejection System. L'enceinte à vide dans laquelle est placé l'accéléromètre permet de maintenir un vide avec un niveau meilleur que 10^{-5} Pa. La masse de l'ensemble présenté en figure 2.2 est estimée à 1,4 kg.

Le Bias Rejection System est une platine rotative composée d'un actionneur angulaire et d'un encodeur angulaire haute résolution qui fonctionne en boucle fermée [143]. Une technologie piezo-électrique est envisagée pour l'actionneur. Cela permet de réduire le poids en supprimant l'usage de roues dentées. Le moteur piezo-électrique est utilisé dans un mode

« slip-stick ». Enfin, même si les moteurs piezo-électriques ont un moment non nul lorsqu'ils ne sont pas alimentés, un système de blocage additionnel sera implémenté pour éviter tout mouvement lors du lancement ou des manœuvres. Le poids de ce sous-système n'excède pas 1,1 kg. L'ICU pèse quant à elle 1,0 kg, ce qui mène à un poids total de 3,5 kg.

2.1.3 Architecture de l'accéléromètre MicroSTAR

	Taille de la masse d'épreuve	$20 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$
m_A	Masse de la masse d'épreuve	18 g
Σ	Surface d'une électrode	94 mm^2
e	Entrefer nominal	0,3 mm
I_A	Inertie de la masse d'épreuve	$1200 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$

TABLE 2.1 – Paramètres de l'accéléromètre MicroSTAR.

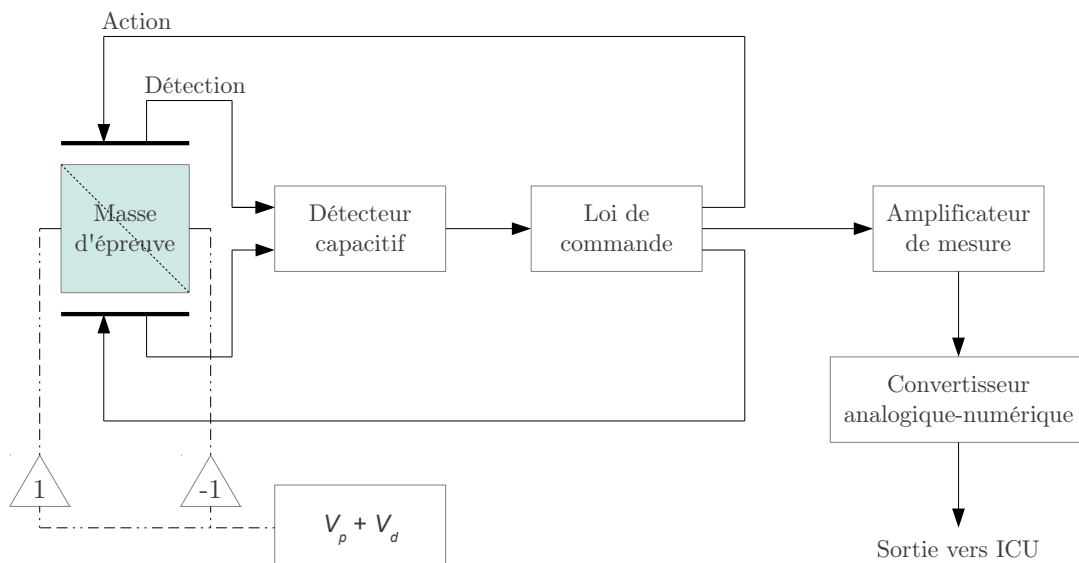


FIGURE 2.3 – Architecture de l'accéléromètre MicroSTAR. Le capteur mécanique est constitué de la masse d'épreuve et des électrodes. L'électronique de proximité est composée de toutes les fonctions représentées sur ce schéma. La sortie de l'instrument est envoyée vers l'ICU qui fait l'interface avec la sonde spatiale.

Comme cela a été mentionné, les accéléromètres développés par l'Onera utilisent le principe de la suspension électrostatique d'une masse d'épreuve. La masse d'épreuve est asservie au centre de la cage grâce aux tensions appliquées sur les électrodes. La détection de la position de la masse d'épreuve se fait aussi grâce aux électrodes avec un détecteur capacitif [144, 145] qui mesure la distance entre chaque électrode et la masse d'épreuve. Comme la même électrode sert pour la détection et pour l'action, il est nécessaire de

séparer ces deux fonctions fréquemment. Pour cela, le potentiel sur une face de la masse d'épreuve est défini comme suit (cf. fig. 2.3) :

- Deux faces opposées ont un potentiel opposé. À l'inverse, deux électrodes opposées ont le même potentiel. Cette configuration a été retenue car elle évite le recours à des transformateurs différentiels. La simplification de l'électronique de détection permet ainsi de diminuer la masse de l'instrument.
- Un potentiel constant V_p est appliqué à la masse d'épreuve. Ce potentiel sert à lui appliquer une force.
- Un potentiel V_d , à la fréquence $f_d = 10^5$ Hz, sert à la détection.

Pour appliquer ces potentiels, la masse d'épreuve est reliée à deux sources de tensions par l'intermédiaire de deux fils d'or.

Comme pour tout système asservi, l'action est déterminée en fonction de la mesure de l'état du système. Dans le cas de MicroSTAR, la loi de commande est un opérateur linéaire Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) analogique. La sortie de ce correcteur, après amplification (avec un gain G_m) et conversion digitale, devient la sortie de l'accéléromètre.

2.1.4 Description détaillée de l'instrument

Cette partie a pour objectif la mise en place des notations qui permettent de décrire la partie mécanique de l'instrument. Comme l'instrument a un mouvement de rotation, un transfert de moment cinétique de l'instrument vers la sonde a lieu, ce qui peut gêner le contrôle d'attitude de la sonde. Pour étudier cette problématique, une partie tournante destinée à annuler les transferts de moment cinétique est ajoutée au Gravity Advanced Package. On considère les sous-systèmes suivants :

- **A** : Masse d'épreuve.
- **T** : Cage de l'accéléromètre et partie tournante du Bias Rejection System.
- **D** : Partie tournante du système de compensation du moment cinétique.
- **S** : Sonde à l'exception de la masse d'épreuve.
- $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \setminus (\mathbf{T} \cup \mathbf{D})$: Sonde à l'exception de la masse d'épreuve, de la cage de l'accéléromètre, de la partie tournante du Bias Rejection System et de la partie tournante du système de compensation du moment cinétique.

m_{Ξ} désigne la masse du solide générique $\Xi \in \{\mathbf{A}; \mathbf{T}; \mathbf{D}; \mathbf{S}; \tilde{\mathbf{S}}\}$ et I_{Ξ}^{Υ} désigne le tenseur dyadique¹ d'inertie du solide Ξ au point quelconque Υ . Les points A , S , D et $\tilde{S}$ sont respectivement les centres d'inertie des solides **A**, **S**, **D** et $\tilde{\mathbf{S}}$. C est le centre de la cage de la masse d'épreuve, R est un point fixé au Bias Rejection System sur l'axe de rotation. Enfin O est le centre d'un référentiel galiléen (par exemple : le barycentre du Système Solaire).

Les solides **A**, **T**, **D** et $\tilde{\mathbf{S}}$ définis ci-dessus sont supposés indéformables. On suppose de plus que la distribution de masse du solide **S** est fixe : en particulier la position de

1. Il s'agit d'un tenseur de type (1,1), c'est-à-dire une fois covariant et une fois contravariant.

son centre d'inertie et son tenseur d'inertie sont des constantes. L'étude des déformations mécaniques, dues par exemple aux contraintes mécaniques, aux variations de température ou au vieillissement des matériaux, sort du cadre de cette thèse. On fera aussi l'hypothèse que les centres de gravité et les centres d'inertie sont confondus pour tous les solides considérés. Cela revient à négliger les forces de marée, c'est-à-dire à supposer que le gradient de gravité est négligeable à l'échelle de la sonde, ce qui est une hypothèse vérifiée dans le cas considéré ici.

Afin de décrire le fonctionnement de l'instrument, il est nécessaire d'introduire les repères suivants ainsi que les lois de transformation entre ces repères :

- $\mathfrak{R}_0 \left(O, \underline{e}_x^0, \underline{e}_y^0, \underline{e}_z^0 \right)$: repère du Système Solaire supposé galiléen. On suppose que le vecteur $\underline{e}_x^0$ est perpendiculaire au plan de l'orbite moyen de la sonde.
- $\mathfrak{R}_1 \left(S, \underline{e}_x^1, \underline{e}_y^1, \underline{e}_z^1 \right)$: repère de la sonde non spinnée.
- $\mathfrak{R}_2 \left(S, \underline{e}_x^2, \underline{e}_y^2, \underline{e}_z^2 \right)$: repère lié à la sonde. Si la sonde est spinnée, $\mathfrak{R}_2$ est en rotation par rapport à $\mathfrak{R}_1$ autour de l'axe $\underline{e}_y^1 = \underline{e}_y^2$, qui est le vecteur unitaire pointant de la Terre vers la sonde. L'angle dépendant du temps qui paramètre cette rotation est noté ψ (cf. fig. 2.4).
- $\mathfrak{R}_3 \left(R, \underline{e}_x^3, \underline{e}_y^3, \underline{e}_z^3 \right)$: repère lié au Bias Rejection System. La matrice de passage entre les repères 2 et 3 est indépendante du temps, en supposant la sonde indéformable.
- $\mathfrak{R}_4 \left(R, \underline{e}_x^4, \underline{e}_y^4, \underline{e}_z^4 \right)$: repère lié à la partie tournante du Bias Rejection System. En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de précession, les repères 3 et 4 sont en rotation l'un par rapport à l'autre autour de l'axe $\underline{e}_x^3 = \underline{e}_x^4$. L'angle dépendant du temps qui paramètre cette rotation est noté θ et appelé angle de modulation (cf. fig. 2.4).
- $\mathfrak{R}_5 \left(C, \underline{e}_x^5, \underline{e}_y^5, \underline{e}_z^5 \right)$: repère lié à la cage de l'accéléromètre. Les trois axes définis par les vecteurs unitaires du repère sont les axes de mesure de l'accéléromètre. La matrice de changement de repère $T_{5 \leftarrow 4}$ est indépendante du temps. Dans le cas idéal, $T_{5 \leftarrow 4}$ est égale à l'identité et $\underline{RC}$ est porté par $\underline{e}_x^4$.
- $\mathfrak{R}_6 \left(A, \underline{e}_x^6, \underline{e}_y^6, \underline{e}_z^6 \right)$: repère lié à la masse d'épreuve. Lorsque l'accéléromètre est asservi, les repères $\mathfrak{R}_5$ et $\mathfrak{R}_6$ sont égaux.
- $\mathfrak{R}_9 \left(R, \underline{e}_x^9, \underline{e}_y^9, \underline{e}_z^9 \right)$: repère lié à la partie tournante du système de compensation du moment dynamique. Dans le cas idéal, les repères 3 et 9 sont en rotation l'un par rapport à l'autre autour de l'axe $\underline{e}_x^3 = \underline{e}_x^9$. On note $\theta_D(t)$ l'angle dépendant du temps qui paramètre cette rotation.

On note $T_{j \leftarrow i}$ la matrice de passage entre la base $i \left(\underline{e}_x^i, \underline{e}_y^i, \underline{e}_z^i \right)$ à la base $j \left(\underline{e}_x^j, \underline{e}_y^j, \underline{e}_z^j \right)$, c'est-à-dire que ${}^j \underline{v} = M_{j \leftarrow i} {}^i \underline{v}$ avec $\underline{v}$ un vecteur et ${}^j \underline{v}$ les composantes de ce vecteur dans la base $\mathfrak{R}_j$. On a en particulier :

$$T_{2 \leftarrow 1} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_{4 \leftarrow 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

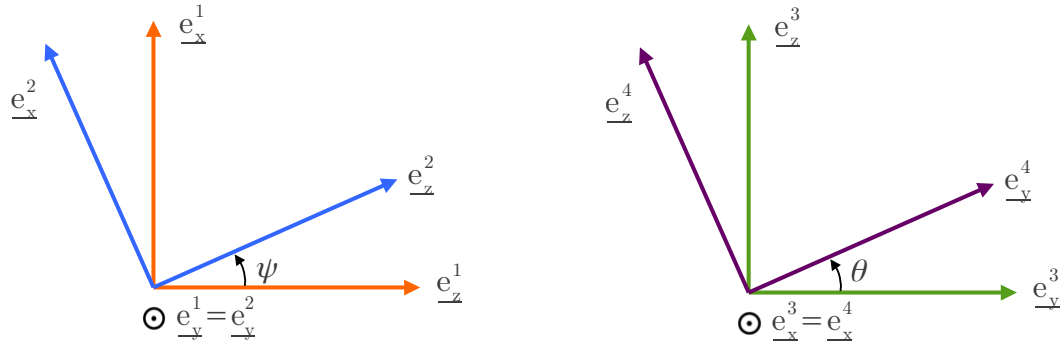


FIGURE 2.4 – Figures de changement de base

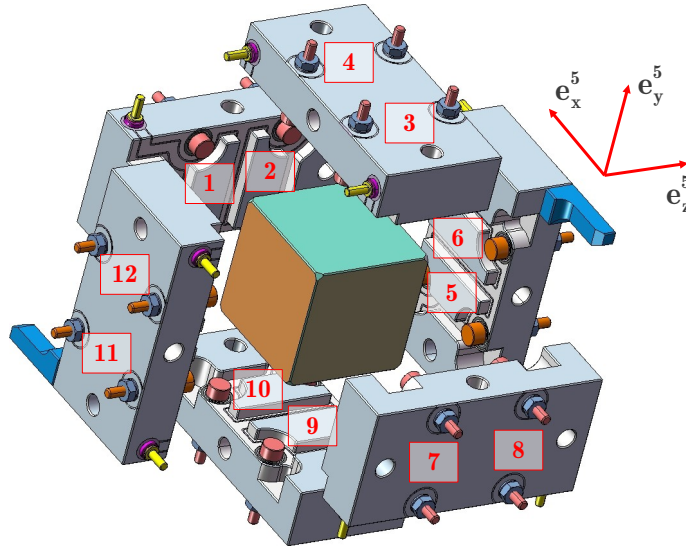


FIGURE 2.5 – Numérotation des électrodes de l'accéléromètre MicroSTAR.

Il est aussi nécessaire d'indiquer les 12 électrodes de l'accéléromètre MicroSTAR. On définit la numérotation des électrodes de la manière suivante (cf. fig. 2.5) :

- Les électrodes k et $k + 6$ se font face.
- Les électrodes 1 et 2 sont sur la face perpendiculaire à l'axe $\underline{e}_x^5$, les électrodes 3 et 4 sont sur la face perpendiculaire à l'axe $\underline{e}_y^5$, et les électrodes 5 et 6 sont sur la face perpendiculaire à l'axe $\underline{e}_z^5$.
- Le vecteur $\underline{u}_k$ est orienté de la masse d'épreuve vers la cage de l'accéléromètre. Ainsi, $\underline{u}_k = -\underline{u}_{k+6}$ et on a $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{e}_x^5$, $\underline{u}_3 = \underline{u}_4 = \underline{e}_y^5$ et $\underline{u}_5 = \underline{u}_6 = \underline{e}_z^5$.
- On appelle U_k le point au centre de l'électrode k .
- $(\underline{AU}_1 \wedge \underline{u}_1) \cdot \underline{e}_y^5 < 0$, $(\underline{AU}_3 \wedge \underline{u}_3) \cdot \underline{e}_z^5 < 0$ et $(\underline{AU}_5 \wedge \underline{u}_5) \cdot \underline{e}_x^5 < 0$. Ces conditions sont équivalentes à $\underline{U}_1 \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z^5 < 0$, $\underline{U}_3 \underline{U}_4 \cdot \underline{e}_x^5 < 0$ et $\underline{U}_5 \underline{U}_6 \cdot \underline{e}_y^5 < 0$.

Par définition de l'instrument, pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, le potentiel de la masse d'épreuve en regard de l'électrode k est V_p et le potentiel de la masse d'épreuve en regard de l'électrode $k + 6$ est $-V_p$. De plus, $V_e^k = V_e^{k+6}$, où V_e^k est le potentiel de l'électrode k . On note δ_k

l'entrefer correspondant à l'électrode $k \in \llbracket 1; 12 \rrbracket$.

Enfin, on introduit les forces et les moments qui influent sur le comportement de l'instrument. Υ est un point quelconque de l'espace :

- $\underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG}$: forces non gravitationnelles exercées par le milieu extérieur sur la sonde.
- $\underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^G$: forces gravitationnelles exercées par le milieu extérieur sur la sonde.
- $\underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}$: forces non gravitationnelles exercées par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve.
- $\underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^G$: forces gravitationnelles exercées par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve.
- $\underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G$: forces gravitationnelles exercées par la sonde sur la masse d'épreuve.
- $\underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}$: forces exercées par la sonde sur la masse d'épreuve par l'intermédiaire du fil d'or.
- $\underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}(V_e^k, V_p, \delta_k)$: forces électrostatiques exercées par la sonde sur la masse d'épreuve.
- $\underline{M}_{\Upsilon, ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG}$: moment des forces non gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la sonde au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, ext \rightarrow \mathbf{S}}^G$: moment des forces gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la sonde au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}$: moment des forces non gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, ext \rightarrow \mathbf{A}}^G$: moment des forces gravitationnelles exercé par le milieu extérieur sur la masse d'épreuve au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G$: moment des forces gravitationnelles exercé par la sonde sur la masse d'épreuve au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}$: moment exercé par la sonde sur la masse d'épreuve par l'intermédiaire du fil d'or au point Υ .
- $\underline{M}_{\Upsilon, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}(V_e^k, V_p, \delta_k)$: moment des forces électrostatiques exercé par la sonde sur la masse d'épreuve au point Υ .

2.2 Principe de fonctionnement de MicroSTAR

Cette section va permettre, en s'appuyant sur les notions introduites précédemment, de définir précisément le signal mesuré par l'instrument GAP. L'accélération non-gravitationnelle de la sonde spatiale est bien sûr mesurée mais d'autres termes indésirables viennent s'ajouter au signal.

2.2.1 Fonctionnement mécanique de l'accéléromètre

Dans cette partie, la dynamique de la masse d'épreuve est étudiée. Cela permet de relier la force et le moment exercés par les électrodes sur la masse d'épreuve aux autres quantités qui influent sur la dynamique de la masse d'épreuve [146–148]

Moment dynamique

Le théorème du moment dynamique appliqué au point S à la masse d'épreuve $\mathbf{A}$ dans $\mathfrak{R}_0$ supposé galiléen donne

$$\underline{\Delta_{\mathbf{A}/\mathfrak{R}_0}^S} = \underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}}(V_e^k, V_p, \delta_k) + \underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G} + \underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^G}. \quad (2.2)$$

où $\underline{\Delta_{\mathbf{A}/\mathfrak{R}_0}^S}$ est le moment dynamique du solide $\mathbf{A}$ par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ au point S . De même, le théorème du moment dynamique appliqué au point S à la sonde $\mathbf{S}$ dans $\mathfrak{R}_0$ donne

$$\underline{\Delta_{\mathbf{S}/\mathfrak{R}_0}^S} = -\underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}}(V_e^k, V_p, \delta_k) - \underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G} - \underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^G}. \quad (2.3)$$

Les moments dynamiques qui apparaissent dans les équations (2.2) et (2.3) peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \underline{\Delta_{\mathbf{A}/\mathfrak{R}_0}^S} = \partial_{\mathfrak{R}_6} \left[\underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \underline{\Omega_{6/0}} + \underline{\Omega_{6/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \underline{\Omega_{6/0}} \right. \\ \left. + \underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \left(\partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{4/0}} \right] + \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{\Omega_{6/4}} \right] + \underline{\Omega_{4/0}} \wedge \underline{\Omega_{6/4}} \right) + m_{\mathbf{A}} \underline{SA} \wedge \underline{\Gamma_{A/\mathfrak{R}_0}} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\Delta_{\mathbf{S}/\mathfrak{R}_0}^S} = \partial_{\mathfrak{R}_2} \left[\underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \underline{\Omega_{2/0}} + \underline{\Omega_{2/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \underline{\Omega_{2/0}} + \underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{2/0}} \right] + m_{\mathbf{S}} \underline{S\tilde{S}} \wedge \underline{\Gamma_{\tilde{S}/\mathfrak{R}_0}} \right. \\ \left. + \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \underline{\Omega_{4/0}} + \underline{\Omega_{4/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \underline{\Omega_{4/0}} + \underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{4/0}} \right] + m_{\mathbf{T}} \underline{SC} \wedge \underline{\Gamma_{C/\mathfrak{R}_0}} \right] \right. \\ \left. + \partial_{\mathfrak{R}_9} \left[\underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \underline{\Omega_{9/0}} + \underline{\Omega_{9/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \underline{\Omega_{9/0}} + \underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{9/0}} \right] + m_{\mathbf{D}} \underline{SD} \wedge \underline{\Gamma_{D/\mathfrak{R}_0}} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\underline{\Gamma_{A/\mathfrak{R}_0}}$ désigne l'accélération du point A par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ et $\partial_{\mathfrak{R}_i}[\cdot]$ désigne la dérivation d'un vecteur par rapport au repère $\mathfrak{R}_i$.

En soustrayant les équations (2.2) et (2.3), on obtient une équation qui permet de lier le moment appliqué par les électrodes sur la masse d'épreuve à la dynamique angulaire de celle-ci

$$\begin{aligned} 2\underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}}(V_e^k, V_p, \delta_k) + 2\underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G} + 2\underline{M_{S,\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}} + \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^G} - \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG}} - \underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^G} = \\ \partial_{\mathfrak{R}_6} \left[\underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \underline{\Omega_{6/0}} + \underline{\Omega_{6/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \underline{\Omega_{6/0}} + \underline{I_{\mathbf{A}}^A} \cdot \left(\partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{4/0}} \right] + \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{\Omega_{6/4}} \right] + \underline{\Omega_{4/0}} \wedge \underline{\Omega_{6/4}} \right) + m_{\mathbf{A}} \underline{SA} \wedge \underline{\Gamma_{A/\mathfrak{R}_0}} \right. \\ \left. - \partial_{\mathfrak{R}_2} \left[\underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \underline{\Omega_{2/0}} - \underline{\Omega_{2/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \underline{\Omega_{2/0}} - \underline{I_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}}} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{2/0}} \right] - m_{\mathbf{S}} \underline{S\tilde{S}} \wedge \underline{\Gamma_{\tilde{S}/\mathfrak{R}_0}} \right] \right. \\ \left. - \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \underline{\Omega_{4/0}} - \underline{\Omega_{4/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \underline{\Omega_{4/0}} - \underline{I_{\mathbf{T}}^C} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{4/0}} \right] - m_{\mathbf{T}} \underline{SC} \wedge \underline{\Gamma_{C/\mathfrak{R}_0}} \right] \right. \\ \left. - \partial_{\mathfrak{R}_9} \left[\underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \underline{\Omega_{9/0}} - \underline{\Omega_{9/0}} \wedge \underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \underline{\Omega_{9/0}} - \underline{I_{\mathbf{D}}^D} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega_{9/0}} \right] - m_{\mathbf{D}} \underline{SD} \wedge \underline{\Gamma_{D/\mathfrak{R}_0}} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il est possible de simplifier cette équation : $\mathbf{S}$ étant le centre de masse de la sonde, $\underline{M_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^G} = 0$.

En additionnant les équations (2.2) et (2.3), on obtient une équation où les moments internes à la sonde ont été éliminés

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG} + \underline{M}_{S,ext \rightarrow \mathbf{A}}^G + \underline{M}_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} + \underline{M}_{S,ext \rightarrow \mathbf{S}}^G = \\
& \partial_{\mathfrak{R}_6} \left[\underline{I}_{\mathbf{A}}^A \right] \cdot \underline{\Omega}_{6/0} + \underline{\Omega}_{6/0} \wedge \underline{I}_{\mathbf{A}}^A \cdot \underline{\Omega}_{6/0} + \underline{I}_{\mathbf{A}}^A \cdot \left(\partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega}_{4/0} \right] + \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{\Omega}_{6/4} \right] + \underline{\Omega}_{4/0} \wedge \underline{\Omega}_{6/4} \right) + m_{\mathbf{A}} \underline{SA} \wedge \underline{\Gamma}_{A/\mathfrak{R}_0} \\
& + \partial_{\mathfrak{R}_2} \left[\underline{I}_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}} \right] \cdot \underline{\Omega}_{2/0} + \underline{\Omega}_{2/0} \wedge \underline{I}_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}} \cdot \underline{\Omega}_{2/0} + \underline{I}_{\mathbf{S}}^{\tilde{S}} \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega}_{2/0} \right] + m_{\tilde{\mathbf{S}}} \underline{S\tilde{S}} \wedge \underline{\Gamma}_{\tilde{S}/\mathfrak{R}_0} \\
& + \partial_{\mathfrak{R}_4} \left[\underline{I}_{\mathbf{T}}^C \right] \cdot \underline{\Omega}_{4/0} + \underline{\Omega}_{4/0} \wedge \underline{I}_{\mathbf{T}}^C \cdot \underline{\Omega}_{4/0} + \underline{I}_{\mathbf{T}}^C \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega}_{4/0} \right] + m_{\mathbf{T}} \underline{SC} \wedge \underline{\Gamma}_{C/\mathfrak{R}_0} \\
& + \partial_{\mathfrak{R}_9} \left[\underline{I}_{\mathbf{D}}^D \right] \cdot \underline{\Omega}_{9/0} + \underline{\Omega}_{9/0} \wedge \underline{I}_{\mathbf{D}}^D \cdot \underline{\Omega}_{9/0} + \underline{I}_{\mathbf{D}}^D \cdot \partial_{\mathfrak{R}_0} \left[\underline{\Omega}_{9/0} \right] + m_{\mathbf{D}} \underline{SD} \wedge \underline{\Gamma}_{D/\mathfrak{R}_0} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Cette équation est utile pour étudier l'impact de la rotation de l'accéléromètre sur l'attitude de la sonde au paragraphe 2.4.4.

Résultante dynamique

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse d'épreuve $\mathbf{A}$ dans le repère $\mathfrak{R}_0$, qui est galiléen par hypothèse, donne

$$m_{\mathbf{A}} \underline{\Gamma}_{A/\mathfrak{R}_0} = \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}(V_e^k, V_p, \delta_k) + \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G + \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or} + \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{autre} + \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG} + \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^G. \quad (2.8)$$

De manière similaire, le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide $\mathbf{S}$ dans le repère $\mathfrak{R}_0$ donne

$$m_{\mathbf{S}} \underline{\Gamma}_{S/\mathfrak{R}_0} = -\underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}(V_e^k, V_p, \delta_k) - \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G - \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or} - \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{autre} + \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} + \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^G. \quad (2.9)$$

Afin de combiner les équations (2.8) et (2.9) en supprimant les accélérations de la masse d'épreuve et de la sonde par rapport au référentiel galiléen, on utilise la relation

$$\underline{\Gamma}_{A/\mathfrak{R}_0} = \partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{OA}] = \partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{OS}] + \partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{SA}] = \underline{\Gamma}_{S/\mathfrak{R}_0} + \partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{SA}] \quad (2.10)$$

qui permet d'obtenir une équation qui décrit la dynamique de la masse d'épreuve par rapport à la sonde

$$\begin{aligned}
& \partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{SA}] = -\frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} + \left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}(V_e^k, V_p, \delta_k) \\
& + \left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \left(\underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G + \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or} + \underline{F}_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{autre} \right) + \frac{1}{m_{\mathbf{A}}} \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^G - \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^G + \frac{1}{m_{\mathbf{A}}} \underline{F}_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Les formules de changement de repère permettent d'explicitier le membre de gauche de l'équation précédente et de faire apparaître les termes appelés communément accélération

d'entraînement et accélération de Coriolis

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathfrak{R}_0}^2 [\underline{SA}] &= \partial_{\mathfrak{R}_2}^2 [\underline{SR}] + 2.\underline{\Omega}_{2/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_2} [\underline{SR}] + \partial_{\mathfrak{R}_2} [\underline{\Omega}_{2/0}] \wedge \underline{SR} + \underline{\Omega}_{2/0} \wedge (\underline{\Omega}_{2/0} \wedge \underline{SR}) \\
&+ \partial_{\mathfrak{R}_4}^2 [\underline{RC}] + 2.\underline{\Omega}_{4/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{RC}] + \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{\Omega}_{4/0}] \wedge \underline{RC} + \underline{\Omega}_{4/0} \wedge (\underline{\Omega}_{4/0} \wedge \underline{RC}) \\
&+ \partial_{\mathfrak{R}_6}^2 [\underline{CA}] + 2.\underline{\Omega}_{6/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_6} [\underline{CA}] + \partial_{\mathfrak{R}_6} [\underline{\Omega}_{6/0}] \wedge \underline{CA} + \underline{\Omega}_{6/0} \wedge (\underline{\Omega}_{6/0} \wedge \underline{CA})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

La combinaison des deux équations précédentes permet d'obtenir une relation entre la force électrostatique appliquée à la masse d'épreuve et la force non-gravitationnelle qui s'exerce sur la sonde

$$\left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \underline{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec}}(V_e^k, V_p, \delta_k) = \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \underline{F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG}} - \underline{A_1} - \underline{A_2} + \underline{A_3} + \underline{A_4} \tag{2.13}$$

avec les quantités $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$, $\underline{A_3}$ et $\underline{A_4}$ définies de la manière suivante

$$\underline{A_1} = \left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \underline{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{or}} \tag{2.14a}$$

$$\underline{A_2} = \left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \underline{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G} + \underline{\Delta a_g} + \frac{1}{m_{\mathbf{A}}} \underline{F_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG}} + \left(\frac{1}{m_{\mathbf{A}}} + \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \right) \underline{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{autre}} \tag{2.14b}$$

$$\begin{aligned}
\underline{A_3} &= \partial_{\mathfrak{R}_2}^2 [\underline{SR}] + 2.\underline{\Omega}_{2/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_2} [\underline{SR}] + \partial_{\mathfrak{R}_2} [\underline{\Omega}_{2/0}] \wedge \underline{SR} + \underline{\Omega}_{2/0} \wedge (\underline{\Omega}_{2/0} \wedge \underline{SR}) \\
&+ \partial_{\mathfrak{R}_4}^2 [\underline{RC}] + 2.\underline{\Omega}_{4/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{RC}] + \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{\Omega}_{4/0}] \wedge \underline{RC} + \underline{\Omega}_{4/0} \wedge (\underline{\Omega}_{4/0} \wedge \underline{RC})
\end{aligned} \tag{2.14c}$$

$$\underline{A_4} = \partial_{\mathfrak{R}_6}^2 [\underline{CA}] + 2.\underline{\Omega}_{6/0} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_6} [\underline{CA}] + \partial_{\mathfrak{R}_6} [\underline{\Omega}_{6/0}] \wedge \underline{CA} + \underline{\Omega}_{6/0} \wedge (\underline{\Omega}_{6/0} \wedge \underline{CA}) \tag{2.14d}$$

où le terme $\underline{\Delta a_g}$, défini par

$$\underline{\Delta a_g} = \frac{1}{m_{\mathbf{A}}} \underline{F_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^G} - \frac{1}{m_{\mathbf{S}}} \underline{F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^G}, \tag{2.15}$$

est relié au gradient de gravité et à la distance entre le centre de gravité de la sonde et celui de la masse d'épreuve.

L'équation (2.13) est le pendant de l'équation (2.6). Elles permettent de connaître la force et le moment électrostatique à appliquer à la masse d'épreuve pour la garder immobile par rapport à la cage. Comme cette force et ce moment sont les sorties de l'instrument, ces deux équations donnent les quantités mesurées. En pratique, on s'intéresse principalement à l'équation (2.13) car elle donne accès à l'accélération non-gravitationnelle de la sonde. L'équation (2.6) donne des informations sur l'attitude de la sonde, qui a peu d'intérêt pour les tests de la gravitation dans le Système Solaire.

2.2.2 Force électrostatique dans le cas unidimensionnel

Afin d'explicitier la force et le moment appliqués à la masse d'épreuve par les électrodes, calculons la force qui s'applique à une masse d'épreuve dans le cas unidimensionnel de la

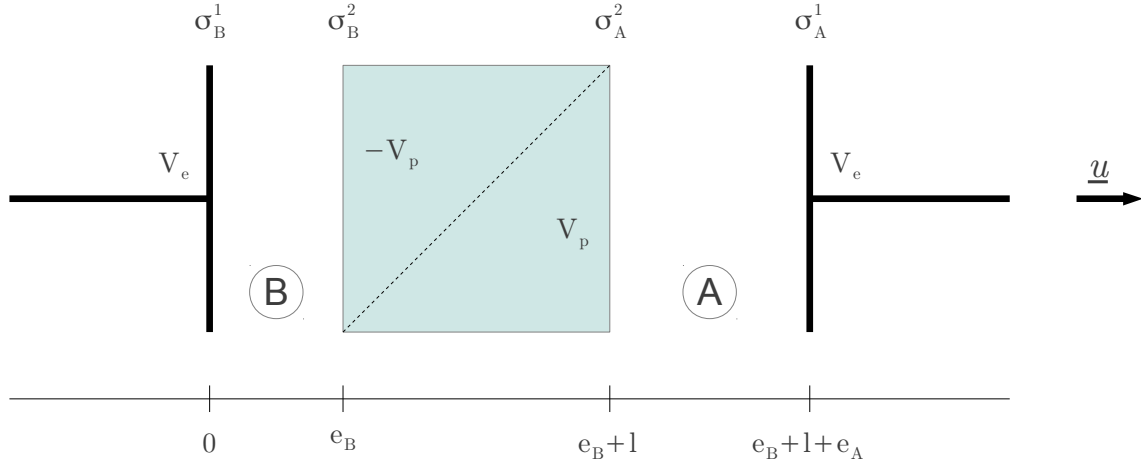


FIGURE 2.6 – Schéma d'un accéléromètre électrostatique unidimensionnel. Les condensateurs formés par une électrode et une face de la masse d'épreuve sont appelés A et B. l est la longueur d'un côté de la masse d'épreuve. e_B et e_A sont les entreferes des condensateurs B et A respectivement. Le schéma n'est pas à l'échelle puisque e_A et e_B sont par hypothèse très petits devant l . La surface d'une électrode est notée Σ . Les potentiels des électrodes et de la masse d'épreuve sont indiqués sur le schéma par les quantités V_e et V_p . Enfin, σ_A^1 , σ_A^2 , σ_B^1 et σ_B^2 sont les densités surfaciques de charge.

figure 2.6. Les potentiels sur les électrodes et sur la masse d'épreuve sont dans la même configuration que pour GAP, c'est-à-dire que deux faces opposées de la masse d'épreuve ont leur potentiel opposé et deux électrodes opposées ont le même potentiel V_e . Une électrode et une face de la masse d'épreuve forment un condensateur ; on les note A et B. Les entreferes sont notés respectivement e_A et e_B . Les quantités σ_A^1 , σ_A^2 , σ_B^1 et σ_B^2 sont les densités surfaciques de charge et on appelle σ_T la densité surfacique de charge totale : $\sigma_T = \sigma_A^1 + \sigma_A^2 + \sigma_B^1 + \sigma_B^2$. Les interactions entre le condensateur A et le condensateur B sont négligeables, ce qui est justifié par le fait que les entreferes sont très petits devant la taille de la masse d'épreuve (cf. tableau 2.1). En négligeant les effets de bord, c'est-à-dire en supposant que le champ électrique est porté par le vecteur $\underline{u}$, on peut relier les densités surfaciques de charge aux potentiels sur les électrodes

$$\begin{cases} \sigma_B^1 = -\epsilon_0(V_e + V_p)/e_B + \sigma_T/2 & (2.16a) \\ \sigma_B^2 = \epsilon_0(V_e + V_p)/e_B & (2.16b) \\ \sigma_A^2 = \epsilon_0(V_e - V_p)/e_A & (2.16c) \\ \sigma_A^1 = -\epsilon_0(V_e - V_p)/e_A + \sigma_T/2 & (2.16d) \end{cases}$$

Pour calculer la force exercée par les électrodes sur la masse d'épreuve, une approche énergétique est utilisée. L'énergie d'interaction du condensateur A est donnée par la formule suivante

$$W_A = -\frac{\Sigma \sigma_A^1 \sigma_A^2 e_A}{2\epsilon_0} + \frac{\Sigma \sigma_A^1 \sigma_A^2}{4\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L dz \quad (2.17)$$

L'énergie d'interaction du condensateur B est obtenue en remplaçant l'indice A par B. La force $\underline{F}$ exercée par les électrodes sur la masse d'épreuve dérive de l'énergie d'interaction donnée ci-dessus et vaut donc, en remarquant que le terme avec l'intégrale ne dépend pas des entrefers

$$\underline{F} = \left[-\frac{dW_A}{d(-e_A)} - \frac{dW_B}{de_B} \right] \underline{u} = \frac{\Sigma}{2\epsilon_0} [-\sigma_A^1 \sigma_A^2 + \sigma_B^1 \sigma_B^2] \underline{u} \quad (2.18)$$

En introduisant les potentiels V_e et V_p ainsi que la charge totale σ_T , on obtient

$$\underline{F} \cdot \underline{u} = -\frac{\Sigma\epsilon_0}{2e_B^2}(V_e + V_p)^2 + \frac{\Sigma\epsilon_0}{2e_A^2}(V_e - V_p)^2 + \frac{\Sigma\sigma_T}{4} \left(\frac{V_e + V_p}{e_B} - \frac{V_e - V_p}{e_A} \right) \quad (2.19)$$

Remarque 1 Les équations (2.16b) et (2.16c) montrent que la charge de la masse d'épreuve est indépendante de la charge totale de l'instrument σ_T .

Remarque 2 L'équation (2.19) fait intervenir la charge totale de l'instrument. Pour pouvoir négliger le terme faisant intervenir σ_T , il faut que $2\sigma_T \ll 4\epsilon_0 V/e$, où V est l'ordre de grandeur des potentiels V_e et V_p . En prenant $V = 5\text{ V}$ et les valeurs de l'entrefer e et de la surface d'une électrode Σ données dans le tableau 2.1, on obtient la condition $2\Sigma\sigma_T \ll 5,5 \times 10^{-11}\text{ C}$. On supposera dans toute la suite que cette condition est vérifiée, l'équation (2.19) devient alors

$$\underline{F} \cdot \underline{u} = -\frac{\Sigma\epsilon_0}{2e_B^2}(V_e + V_p)^2 + \frac{\Sigma\epsilon_0}{2e_A^2}(V_e - V_p)^2 \quad (2.20)$$

2.2.3 Mesures effectuées par l'accéléromètre

Pour expliciter la force et le moment appliqués par les électrodes à la masse d'épreuve, il faut exprimer les entrefers δ_k en fonction de la position de la masse par rapport à la cage, dans l'hypothèse des petits mouvements. On note e l'entrefer (par hypothèse, égal pour toutes les électrodes) lorsque la masse est au centre de la cage et ne fait pas d'angle avec celle-ci et d le bras de levier des électrodes. On note θ_x , θ_y et θ_z les petites rotations de la masse d'épreuve autour des axes $\underline{e}_x^5$, $\underline{e}_y^5$ et $\underline{e}_z^5$ respectivement et p_x , p_y et p_z ses déplacements le long de ces axes, c'est-à-dire

$$\underline{CA} = p_x \underline{e}_x^5 + p_y \underline{e}_y^5 + p_z \underline{e}_z^5 \quad (2.21)$$

et

$$T_{6 \leftarrow 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

On obtient ainsi

$$\delta_1 = e - p_x - \theta_z d \quad \delta_7 = e + p_x + \theta_z d \quad (2.23a)$$

$$\delta_2 = e - p_x + \theta_z d \quad \delta_8 = e + p_x - \theta_z d \quad (2.23b)$$

$$\delta_3 = e - p_y - \theta_x d \quad \delta_9 = e + p_y + \theta_x d \quad (2.23c)$$

$$\delta_4 = e - p_y + \theta_x d \quad \delta_{10} = e + p_y - \theta_x d \quad (2.23d)$$

$$\delta_5 = e - p_z - \theta_y d \quad \delta_{11} = e + p_z + \theta_y d \quad (2.23e)$$

$$\delta_6 = e - p_z + \theta_y d \quad \delta_{12} = e + p_z - \theta_y d \quad (2.23f)$$

Les développements limités de l'inverse de l'entrefer au carré pour $p_{x,y,z} \ll e$ et $\theta_{x,y,z}d \ll e$ permettent d'exprimer la force électrostatique exercée par la sonde sur la masse d'épreuve

$$\begin{cases} \frac{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_x^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma}{e^3} \left[p_x (V_e^{1^2} + V_e^{2^2} + 2V_p^2) + \theta_z d (V_e^{1^2} - V_e^{2^2}) - eV_p (V_e^1 + V_e^2) \right] \\ \frac{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_y^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma}{e^3} \left[p_y (V_e^{3^2} + V_e^{4^2} + 2V_p^2) + \theta_x d (V_e^{3^2} - V_e^{4^2}) - eV_p (V_e^3 + V_e^4) \right] \\ \frac{F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_z^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma}{e^3} \left[p_z (V_e^{5^2} + V_e^{6^2} + 2V_p^2) + \theta_y d (V_e^{5^2} - V_e^{6^2}) - eV_p (V_e^5 + V_e^6) \right] \end{cases}$$

De même, le moment des forces électrostatiques exercé par la sonde sur la masse d'épreuve a pour expression

$$\begin{cases} \frac{M_{D, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_x^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma d}{e^3} \left[p_y (V_e^{4^2} - V_e^{3^2}) + \theta_x d (2V_p^2 - V_e^{3^2} - V_e^{4^2}) + eV_p (V_e^3 - V_e^4) \right] \\ \frac{M_{D, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_y^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma d}{e^3} \left[p_z (V_e^{6^2} - V_e^{5^2}) + \theta_y d (2V_p^2 - V_e^{5^2} - V_e^{6^2}) + eV_p (V_e^5 - V_e^6) \right] \\ \frac{M_{D, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{elec} \cdot \underline{e}_z^5}{e^3} = \frac{2\epsilon_0 \Sigma d}{e^3} \left[p_x (V_e^{2^2} - V_e^{1^2}) + \theta_z d (2V_p^2 - V_e^{1^2} - V_e^{2^2}) + eV_p (V_e^1 - V_e^2) \right] \end{cases}$$

En combinant l'équation (2.13) avec l'expression de la force électrostatique déterminée à la section 2.2.1, et en introduisant les quantités

$$\begin{cases} \omega_p^2 = \frac{m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{S}}}{m_{\mathbf{A}} m_{\mathbf{S}}} \frac{4\epsilon_0 \Sigma}{e^3} V_p^2 \end{cases} \quad (2.24a)$$

$$\begin{cases} G_e = \frac{m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{S}}}{m_{\mathbf{A}} m_{\mathbf{S}}} \frac{2\epsilon_0 \Sigma}{e^2} V_p \end{cases} \quad (2.24b)$$

on obtient en projection sur le vecteur unitaire $\underline{e}_x^5$ l'équation

$$\begin{aligned} \underline{A}_4 \cdot \underline{e}_x^5 - \omega_p^2 p_x - \frac{\omega_p^2}{2V_p^2} \left[(V_e^{1^2} + V_e^{2^2}) p_x + (V_e^{1^2} - V_e^{2^2}) \theta_z d \right] = \\ - G_e (V_e^1 + V_e^2) - \left[\frac{1}{m_{\mathbf{S}}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} - \underline{A}_1 - \underline{A}_2 + \underline{A}_3 \right] \cdot \underline{e}_x^5 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour les directions $\underline{e}_y^5$ et $\underline{e}_z^5$, une équation similaire décrit la dynamique de la masse d'épreuve. Le terme $\underline{A}_4 \cdot \underline{e}_x^5$ dépend de la position de la masse d'épreuve par rapport au centre de la cage. Le terme de raideur électrostatique $-\omega_p^2 p_x$ est, contrairement aux oscillateurs harmoniques, négatif. Cela signifie qu'il est déstabilisant pour la masse d'épreuve.

Les termes à droite du signe égal sont (i) le contrôle et (ii) le terme qui pousse le système hors de l'équilibre. Le facteur G_e est le facteur de sensibilité de l'instrument.

La boucle d'asservissement permet de contrôler les quantités V_e^k de telle sorte que $p_{x,y,z} = 0$ et $\theta_{x,y,z} = 0$, ce qui implique $\underline{A}_4 = \underline{0}$. Les sorties de l'accéléromètre sont les quantités $G_m V_e^k$, G_m étant défini à la section 2.1.3,

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \triangleq G_m \begin{bmatrix} V_e^1 + V_e^2 \\ V_e^4 + V_e^5 \\ V_e^5 + V_e^6 \end{bmatrix} = -\frac{G_m}{G_e} \left[\frac{1}{m\mathbf{S}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} - \underline{A}_1 - \underline{A}_2 + \underline{A}_3 \right]_5 \quad (2.26)$$

On appellera mesures effectuées par l'accéléromètre suivant les axes x , y et z les quantités suivantes

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \triangleq -\frac{G_e}{G_m} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{m\mathbf{S}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} - \underline{A}_1 - \underline{A}_2 + \underline{A}_3 \right]_5 \quad (2.27)$$

où les quantités $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ et $\underline{A}_3$ sont définies par les équations (2.14). Le terme $\underline{A}_1$ correspond à la force exercée par les fils d'or sur la masse d'épreuve. Dans le repère $\mathfrak{R}_5$, les composantes de ce vecteur varient lentement et il peut donc être assimilé à un biais de mesure. En appelant b_x^{or} , b_y^{or} et b_z^{or} les composantes de $-\underline{A}_1$ dans $\mathfrak{R}_5$, on a

$$\boxed{\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{m\mathbf{S}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} - \underline{A}_2 + \underline{A}_3 \right]_5 + \begin{bmatrix} b_x^{or} \\ b_y^{or} \\ b_z^{or} \end{bmatrix}} \quad (2.28)$$

Pour la suite de la discussion, on introduit $\underline{a} = \frac{1}{m\mathbf{S}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^{NG} - \underline{A}_2 + \underline{A}_3$, qui est le signal mesuré par l'instrument.

Remarque Quelle que soit la position de l'instrument, c'est-à-dire du point A , il est possible de relier l'accélération de la sonde en A par rapport à $\mathfrak{R}_0$ à l'accélération de gravité de la sonde et à la mesure $\underline{a}$ sans faire intervenir les termes d'inertie et de Coriolis

$$\underline{\Gamma}_{A/\mathfrak{R}_0} = \frac{m\mathbf{S}}{m\mathbf{A} + m\mathbf{S}} \underline{a} + \frac{1}{m\mathbf{S}} F_{ext \rightarrow \mathbf{S}}^G + \left[\underline{\Delta a_g} + \frac{1}{m\mathbf{A}} \left(F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^G + F_{ext \rightarrow \mathbf{A}}^{NG} + F_{\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}}^{autre} \right) \right] \quad (2.29)$$

2.3 Performance de l'accéléromètre électrostatique

Les paramètres géométriques et électroniques de l'instrument ont été supposés parfaitement connus jusqu'ici. Il y a cependant une différence entre la valeur réelle des paramètres et leur valeur supposée. Cela conduit à un facteur d'échelle, à un facteur quadratique dans la chaîne de mesure ainsi qu'à un biais de mesure. En plus de ces défauts, les composants mécaniques et électroniques de l'instrument génèrent du bruit qui se retrouve dans la mesure finale : la mesure est entachée d'un bruit qui sera décrit comme un processus aléatoire.

Enfin, on a vu que l'instrument mesure l'accélération non-gravitationnelle de la sonde à laquelle s'ajoutent d'autres termes. On discutera comment ces termes peuvent dégrader la mesure de l'accélération non-gravitationnelle.

2.3.1 Facteur d'échelle, facteur quadratique et couplage

Afin de déterminer l'impact de la mauvaise connaissance des paramètres de l'accéléromètre sur la qualité des mesures, on introduit les quantités étoilées, qui sont les quantités qu'on croit mesurer. Par exemple, la valeur réelle du gain électrostatique est G_e alors que la valeur utilisée pour traiter les données est G_e^* . Et on note $\delta G_e = G_e^* - G_e$.

En ne considérant que la mesure suivant x et en supposant que les écarts entre les valeurs réelles et les valeurs utilisées sont petits devant les valeurs des paramètres, on a par différentiation logarithmique

$$m_x^* = -\frac{G_e^*}{G_m^*} s_x = m_x + m_x \left(-\frac{\delta G_m}{G_m} + \frac{\delta \Sigma}{\Sigma} - 2\frac{\delta e}{e} + \frac{\delta V_p}{V_p} \right) \quad (2.30)$$

L'équation de mesure (2.28) devient alors

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{1z} \end{bmatrix} \left[\frac{1}{m\mathbf{s}} F_{ext \rightarrow \mathbf{s}}^{NG} - \underline{A_1} - \underline{A_2} + \underline{A_3} \right]_5 \quad (2.31)$$

avec pour $\nu \in \{x; y; z\}$

$$k_{1\nu} = 1 - \frac{\delta G_{m,\nu}}{G_{m,\nu}} + \frac{\delta \Sigma_\nu}{\Sigma_\nu} - 2\frac{\delta e_\nu}{e_\nu} + \frac{\delta V_p}{V_p} \quad (2.32)$$

En procédant de la même manière, on peut faire apparaître des facteurs quadratiques qui proviennent de la dissymétrie entre deux électrodes complémentaires. On note $\delta \tilde{\Sigma}$ la différence de surface entre deux électrodes complémentaires et on appelle b_c le biais du détecteur de position capacitif. Cela fait apparaître le facteur quadratique suivant

$$k_2 = \frac{1}{4G_e V_p} \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\Sigma} + \frac{\omega_p^2 b_c}{4V_p G_e^2} \quad (2.33)$$

Comme pour les facteurs linéaires, les facteurs quadratiques sont différents suivant chaque axe de mesure.

En plus des erreurs ci-dessus, s'ajoute la possibilité d'avoir une erreur d'orthogonalité entre les électrodes. Cela implique que la direction dans laquelle s'effectue la mesure n'est pas exactement la direction souhaitée. Cela se traduit, dans l'équation (2.31), par l'ajout d'une matrice de couplage proche de la matrice identité.

2.3.2 Biais de l'instrument

Le biais sur l'axe x correspond à la différence entre l'espérance mathématique de la mesure m_x et la quantité $k_{1x}a_x + k_{2x}a_x^2$ que l'instrument est censé mesurer, a_x étant le signal extérieur suivant l'axe x de l'instrument, c'est-à-dire la projection de $\underline{a}$ sur $\underline{e}_x^5$. Il s'agit d'une quantité dont les variations temporelles sont déterministes. Le biais de mesure dû au fil d'or a été introduit précédemment. Les autres sources de biais sont :

- les défauts de symétrie de la surface des électrodes ;
- le détecteur capacitif ;
- l'amplificateur de mesure ;
- la différence de potentiel de contact ;
- des forces induites par le gaz résiduel dans l'enceinte à vide et le gradient de température.

L'ensemble de ces contributions conduisent à une estimation du biais de $2 \times 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ [47, p. 130].

2.3.3 Bruit de mesure

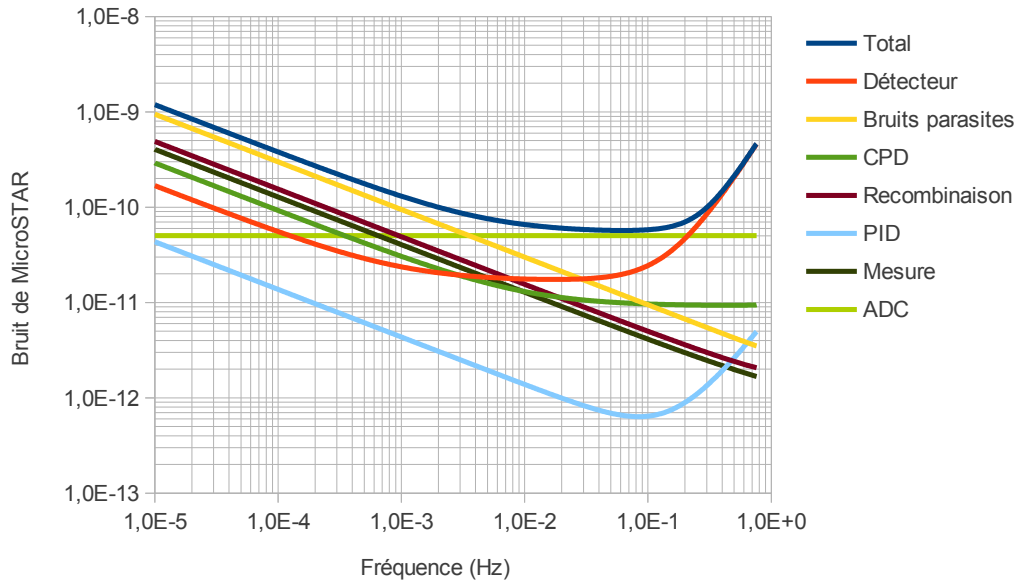


FIGURE 2.7 – Racine-carré de la densité spectrale de puissance de bruit de MicroSTAR (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$). Les contributeurs principaux sont les fils d'or à basses fréquences, la détection capacitive à hautes fréquences et le convertisseur analogique-numérique pour les fréquences entre 10^{-2} et 10^{-1} Hz.

Le bruit de l'instrument est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle (cf. annexe B). L'analyse du bruit de l'instrument repose sur des modèles [149–152], des mesures expérimentales au sol [153] et des mesures en orbite [154, 155]. La figure 2.7 montre, pour les paramètres donnés dans le tableau 2.1 et pour une plage de mesure

$\pm 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, la racine carré de la densité spectrale de puissance du bruit, ainsi que les différentes contributions :

- Le contrôleur Proportionnel-Intégral-Dérivée (PID) est un contributeur mineur. Cette fonction est réalisée par des amplificateurs opérationnels.
- Le terme « Recombinaison » correspond au bruit introduit par la recombinaison pour passer des actions sur les degrés de liberté aux actions sur les électrodes.
- Le terme « Contact-Potential-Difference » (CPD) fait référence aux fluctuations de potentiel à la surface des électrodes, aussi appelé « patch effect » [156–158]. Le potentiel chimique, qui est la somme du potentiel électrique et de la fonction travail, est constant à la surface de l'électrode. Les variations spatiales du potentiel électrique proviennent des variations spatiales de la fonction travail qui sont dues à la composition atomique des matériaux. Il y a de plus des fluctuations temporelles dues à l'évolution des caractéristiques des matériaux.
- Les bruits parasites sont : le bruit de piston, le bruit de pression de radiation, le dégazage asymétrique, ainsi que le bruit d'amortissement dû aux deux fils d'or.
- Le terme « Détecteur » correspond au bruit généré par l'électronique qui mesure la position de la masse d'épreuve grâce à la mesure de la capacité créée par chaque entrefer.
- Le terme « Mesure » correspond au bruit des amplificateurs utilisés pour mesurer le potentiel sur les électrodes.
- Le convertisseur analogique-numérique (ADC) introduit un bruit de quantification dans la chaîne de mesure qui est constant pour toutes les fréquences. Sa valeur augmente avec la plage de mesure de l'instrument et décroît avec le nombre de bits disponibles.

Ce bruit peut être décrit analytiquement par la formule suivante

$$\sqrt{S_e(f)} = K \sqrt{1 + \left(\frac{f}{4.2 \text{ mHz}}\right)^{-1} + \left(\frac{f}{0.27 \text{ Hz}}\right)^4} \quad (2.34)$$

avec

$$K = 5,7 \times 10^{-11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1/2} \quad (2.35)$$

Il est aussi possible de décrire le bruit de l'accéléromètre en utilisant la variance d'Allan (AVAR) [159] définie par

$$A_e(\tau, f_c) = 2 \int_0^{f_c} S_e(f) \frac{\sin^4(\pi \tau f)}{(\pi \tau f)^2} df \quad (2.36)$$

où f_c est la fréquence de coupure du filtre-passe bas utilisé avant numérisation des données. Dans le cas de MicroSTAR, $f_c \approx 1 \text{ Hz}$. Une expression simplifiée de la variance d'Allan pour $2\pi\tau f_c \gg 1$ est

$$A_e(\tau, f_c) = K^2 \left[\frac{1}{2\tau} + 2 \ln(2) \times 4.2 \text{ mHz} + \frac{f_c^3}{3\pi^2\tau^2} \times (0.27 \text{ Hz})^{-4} \right] \quad (2.37)$$

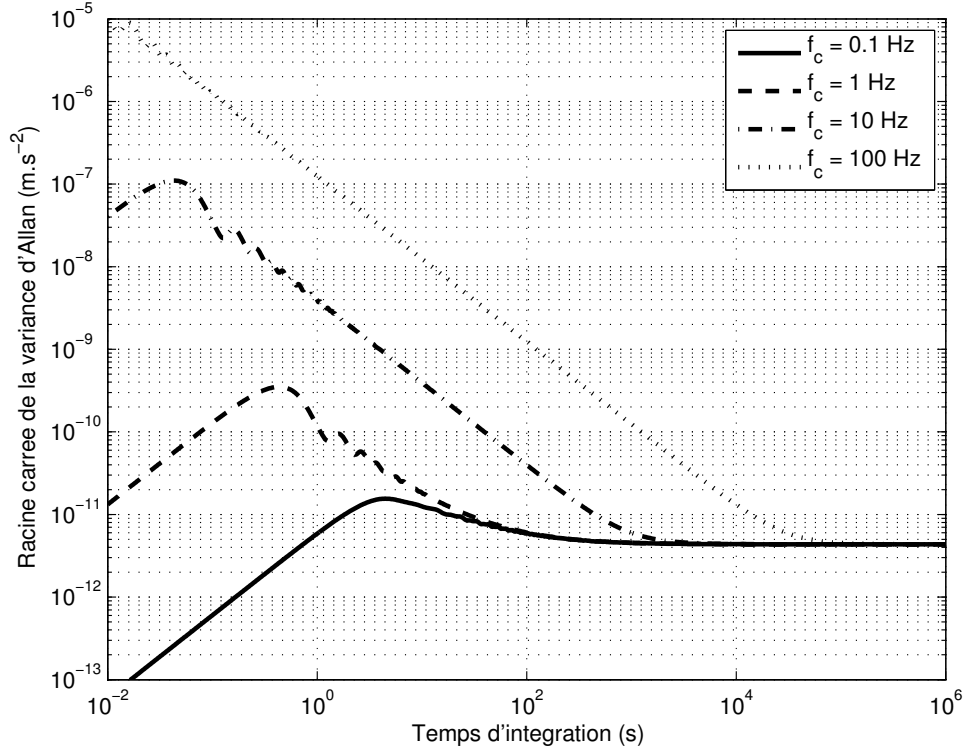


FIGURE 2.8 – Racine carrée de la variance d’Allan du bruit de mesure de l’accéléromètre MicroSTAR. Les courbes sont indicées par la fréquence de coupure du système. L’approximation $2\pi\tau f_c \gg 1$ n’est pas faite sur ces courbes.

2.3.4 Termes parasites

L’équation (2.28) explicite l’ensemble des termes mesurés par l’accéléromètre en plus de l’accélération non-gravitationnelle de la sonde. Ces termes sont qualifiés de “parasites” dans le sens où ils viennent perturber la mesure et ne peuvent pas être supprimés par le Bias Rejection System. Nous allons dans cette section caractériser ces termes et montrer qu’ils peuvent être négligés par la suite.

Auto-gravité

Le terme $\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_S}\right) F_{S \rightarrow A}^G$ correspond à la force de gravité exercée par la sonde spatiale sur la masse d’épreuve. Ce terme est indépendant de la conception de l’instrument mais dépend de la répartition de masse de la sonde spatiale et du positionnement de l’instrument dans la sonde. La maîtrise de ce terme est cruciale pour assurer la performance de l’instrument.

La répartition de masse peut varier au cours du temps, avec en particulier la consommation d’ergol. La mission OSS [76], présentée au chapitre précédent, propose une solution innovante. L’instrument est au centre de la sonde et les quatre réservoirs d’ergol sont dispo-

sés symétriquement autour de l'instrument. De plus, les réservoirs peuvent communiquer, de telle sorte qu'il est possible de maîtriser le remplissage relatif de chaque réservoir. De plus, à l'intérieur des réservoirs, des membranes contraignent la position des ergols afin de maîtriser le terme d'auto-gravité.

Gradient de gravité

Le terme Δa_g correspond au gradient de gravité. L'amplitude de ce terme peut être majorée facilement. En introduisant r_s la distance du centre de masse de la sonde au Soleil et δr la distance entre S et A , on a la majoration suivante

$$\left\| \frac{1}{m_A} F_{\text{ext} \rightarrow A}^G - \frac{1}{m_S} F_{\text{ext} \rightarrow S}^G \right\| \leq \frac{2\mathcal{G}M_\odot}{r_s^3} \delta r \quad (2.38)$$

En supposant que la sonde est à une unité astronomique du Soleil et que δr est égale à un mètre, la borne vaut $7,9 \times 10^{-14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ce qui est un ordre de grandeur inférieur à $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$.

Forces non-gravitationnelles

La masse d'épreuve est placée dans une enceinte à vide afin de la soustraire aux forces non-gravitationnelles extérieures. Il est néanmoins possible qu'elle subisse une force électromagnétique. En effet, d'après les équations (2.16b) et (2.16c), la masse d'épreuve a une charge qui peut être évaluée à $6\Sigma\epsilon_0 V/e$ avec V le potentiel appliqué à la masse d'épreuve, égal à 5 V, et Σ et e la surface d'une électrode et l'entrefer respectivement (cf. tableau 2.1). Cette formule permet d'estimer la charge de la masse d'épreuve à $8,3 \times 10^{-11} \text{ C}$. On suppose que la vitesse de la sonde interplanétaire est de $10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. La valeur moyenne du champ magnétique étant de $6 \times 10^{-9} \text{ T}$ [160], l'ordre de grandeur de l'accélération électromagnétique de la masse d'épreuve est $9,2 \times 10^{-14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Cette valeur est complètement compatible avec les performances souhaitées pour l'instrument. De plus, comme la susceptibilité magnétique de la masse d'épreuve est nulle, le gradient de champ magnétique n'induit pas de force sur la masse d'épreuve.

Accélérations inertielles

Le dernier terme à considérer concerne les forces inertielles : il s'agit du terme $\underline{A}_3$. On supposera ici que $\underline{RC} = \underline{0}$ car c'est un paramètre interne au Gravity Advanced Package qui sera traité à la section 2.4.3. L'amplitude du terme $\underline{A}_3$ dépend de la conception de la sonde spatiale de manière importante, tout comme l'auto-gravité. En effet, placer l'instrument au centre de masse de la sonde permet d'annuler ce terme. De plus, la précision du contrôle d'attitude influera sur la qualité de la mesure. Ces considérations ne sont pas liées à l'instrument mais à son intégration dans la sonde. Pour la mission OSS, les mesures seront effectuées lorsque la sonde est stabilisée suivant les trois axes, ce qui assure le contrôle de ces accélérations inertielles.

2.4 Platine rotative pour correction du biais

Comme cela a été mentionné précédemment, le Bias Rejection System permet de faire des mesures d'accélération sans biais bien que l'accéléromètre MicroSTAR ait un biais. Dans cette section, on présente dans un premier temps le principe de la correction du biais, sujet qui est développé dans les deux prochains chapitres. On s'intéresse ensuite au Bias Rejection System en terme de précision de mesure.

2.4.1 Principe de la correction du biais

On introduit les quantités a_x , a_y et a_z qui sont les composantes dans le repère $\mathfrak{R}_5$ du signal $\underline{a}$ mesuré par l'accéléromètre. Les quantités a_X , a_Y et a_Z sont les composantes de ce vecteur dans le repère $\mathfrak{R}_0$. Pour simplifier la discussion, on fait les hypothèses suivantes :

- Les axes des repères $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{R}_1$ sont confondus. Et on suppose que le vecteur $\underline{e}_x^0$ est perpendiculaire au plan de l'orbite de la sonde.
- De même, les axes des repères $\mathfrak{R}_2$ et $\mathfrak{R}_3$ sont confondus.
- On suppose que la masse d'épreuve est asservie.
- On suppose dans un premier temps que les axes des repères $\mathfrak{R}_4$ et $\mathfrak{R}_5$ sont confondus.

Ces hypothèses conduisent aux égalités

$$a_x = \cos(\psi)a_X - \sin(\psi)a_Y \quad (2.39a)$$

$$a_y = \sin(\theta)\sin(\psi)a_X + \cos(\theta)a_Y + \sin(\theta)\cos(\psi)a_Z \quad (2.39b)$$

$$a_z = \cos(\theta)\sin(\psi)a_X - \sin(\theta)a_Y + \cos(\theta)\cos(\psi)a_Z \quad (2.39c)$$

On a vu précédemment que la chaîne de mesure conduit à obtenir les quantités (avec $\nu \in \{x; y; z\}$)

$$m_\nu = k_{1\nu}a_\nu + k_{2\nu}a_\nu^2 + b_\nu + n_\nu \quad (2.40)$$

La sonde de la mission OSS est stabilisée selon les trois axes. L'angle ψ est donc constant au cours du temps. Pour séparer le biais de MicroSTAR du signal qu'on souhaite mesurer, on utilise le fait que l'angle θ peut varier. Il n'est donc pas possible de faire des mesures sans biais sur l'axe x de l'accéléromètre. De plus, comme a_X est l'accélération non-gravitationnelle dans la direction perpendiculaire au plan de l'orbite, cette quantité est la moins intéressante à déterminer. On va donc prendre $\psi = 0$, ce qui signifie que l'axe de rotation du Bias Rejection System est perpendiculaire au plan de l'orbite. En supposant, pour faciliter la présentation, que les facteurs linéaires et quadratiques sont nuls ($\delta k_{1\nu} = k_{2\nu} = 0$), cela conduit à

$$m_y = \cos(\theta)a_Y + \sin(\theta)a_Z + b_y \quad (2.41a)$$

$$m_z = -\sin(\theta)a_Y + \cos(\theta)a_Z + b_z \quad (2.41b)$$

L'accélération non-gravitationnelle de la sonde dans le repère galiléen $\mathfrak{R}_0$ est modulée par l'angle θ alors que le biais de mesure de l'instrument ne l'est pas. Il est donc possible de séparer le biais de l'instrument du signal qu'on souhaite mesurer.

On peut prendre par exemple $\theta = \omega_p t$, avec ω_p une pulsation de rotation constante. Lors du traitement des données, on multiplie m_y et m_z par $\cos(\omega_p t)$. Pour l'axe y , on obtient la quantité suivante

$$\tilde{m}_y = \frac{1}{2}a_Y + \frac{1}{2}[\cos(2\omega_p t)a_Y + \sin(2\omega_p t)a_Z] + b_y \cos(\omega_p t) \quad (2.42)$$

Le signal extérieur qu'on souhaite mesurer sans biais est ramené dans le continu. À l'inverse, le biais de l'accéléromètre est modulé à la pulsation ω_p . Le biais est supposé varier temporellement de telle sorte que la transformée de Fourier de $b_y \cos(\omega t)$ est nulle aux basses fréquences. En appliquant un filtre passe-bas à $\tilde{m}_y$, on récupère le signal extérieur sans biais.

2.4.2 Incertitude de mesure introduite par la platine rotative

Tout comme les défauts de l'accéléromètre, les défauts de la platine rotative introduisent des incertitudes dans la mesure. Dans cette section, on s'intéresse à la matrice de passage $T_{5 \leftarrow 4}$ qui doit nominalelement être égale à l'identité. En pratique, on étudie l'angle de précession et la précision sur l'angle θ . Pour les raisons évoquées ci-dessus, on prend $\psi = 0$ rad.

On suppose que le repère $\mathfrak{R}_5$ est obtenu à partir du repère $\mathfrak{R}_4$ en faisant une rotation d'un angle $\phi \ll 1$ autour de l'axe défini par le vecteur normé $[d_x; d_y; d_z]$. La matrice de passage s'écrit alors

$$T_{5 \leftarrow 4} = \mathbf{Id} + \phi \begin{bmatrix} 0 & d_z & -d_y \\ -d_z & 0 & d_x \\ d_y & -d_x & 0 \end{bmatrix} + \phi^2 \begin{bmatrix} d_x d_x - 1/2 & d_x d_y & d_x d_z \\ d_x d_y & d_y d_y - 1/2 & d_y d_z \\ d_x d_z & d_y d_z & d_z d_z - 1/2 \end{bmatrix} + o(\phi^2) \quad (2.43)$$

Précession

L'erreur due à la précession correspond aux conditions suivantes $d_x = d_y = 0$ et $d_z = 1$. Cela permet d'exprimer le signal à mesurer dans le référentiel $\mathfrak{R}_5$ de l'accéléromètre

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \cos(\theta) + a_Z \sin(\theta) \\ -a_Y \sin(\theta) + a_Z \cos(\theta) \end{bmatrix} + \phi \begin{bmatrix} a_Y \cos(\theta) + a_Z \sin(\theta) \\ -a_X \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{\phi^2}{2} \begin{bmatrix} -a_X \\ -a_Y \cos(\theta) - a_Z \sin(\theta) \\ -a_Y \sin(\theta) + a_Z \cos(\theta) \end{bmatrix} + o(\phi^2) \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Lorsque $\phi = 0$, on retrouve les équations (2.41). Concernant l'erreur induite par l'angle ϕ au premier ordre, celle-ci apparaît comme un biais de mesure sur l'axe y . Elle est supprimée grâce à la correction du biais. Le terme qu'il faut contraindre est donc celui d'ordre ϕ^2 . En notant $\|\underline{a}\|$ l'amplitude du signal à mesurer, l'erreur introduite par la précession est égale à

$$E_p = \frac{\phi^2 \|\underline{a}\|}{2} \quad (2.45)$$

Pour l'application numérique, on suppose que la pression de radiation solaire est le contributeur principal à l'accélération non-gravitationnelle de la sonde. Cette accélération résulte de l'action des photons solaires sur la surface de la sonde. La puissance portée par les photons solaires par unité de surface à une unité astronomique du Soleil, appelée d_0 , est approximativement égale à $P = 1,366 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ [161]. En considérant que le coefficient balistique de la sonde est égal à $C_B = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, ce qui est l'ordre de grandeur pour la mission Laplace [115], l'accélération due à la pression de radiation solaire est égale à $C_B P / c = 4,6 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à une unité astronomique du Soleil, avec c la vitesse de la lumière. Lorsque la sonde est à la distance d du Soleil, il faut multiplier cette valeur par $(d_0/d)^2$. En prenant cette valeur numérique pour le signal extérieur $\|\underline{a}\|$ et en cherchant à avoir $E_p \ll 1 \text{ pm} \cdot \text{s}^{-2}$, il faut que

$$\phi \ll 2,1 \times 10^{-3} \text{ rad.} \quad (2.46)$$

Erreur sur l'angle de rotation

On se place dans le même cadre que ci-dessus mais avec $d_y = d_z = 0$ et $d_x = 1$. Cela revient à considérer qu'il y a une erreur ϕ sur l'angle θ . L'accélération mesurée est dans ce cas

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \cos(\theta + \phi) + a_Z \sin(\theta + \phi) \\ -a_Y \sin(\theta + \phi) + a_Z \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Cette erreur est similaire à une erreur de pointage de la sonde d'un angle ϕ autour de l'axe $\underline{e}_x^2$. En terme dynamique, cela signifie que le signal est modulé avec un déphasage inconnu. Si le déphasage est constant, cela ne pose pas de problème dans le processus de démodulation. Par contre, après avoir démodulé le signal, il restera un facteur $\cos(\phi)$ qui

empêchera de déterminer la valeur réelle de l'accélération. L'erreur introduite par cette contribution est donc égale à

$$E_p = \phi ||\underline{a}|| \quad (2.48)$$

En reprenant les valeurs numériques précédentes, il faut, dans ce cas, que $\phi \ll 2,2 \times 10^{-6}$ rad. C'est la condition qui s'applique à tous les angles impliquant le pointage du Gravity Advanced Package par rapport au référentiel $\mathfrak{R}_0$, comme par exemple l'attitude de la sonde ou le positionnement de l'instrument par rapport à la sonde.

2.4.3 Décentrage de l'accéléromètre par rapport à la platine rotative

On a supposé jusqu'à maintenant que le centre de l'accéléromètre MicroSTAR était sur l'axe de rotation de la platine rotative. En pratique, cela n'est pas parfaitement le cas. La quantité suivante mesure l'erreur due au décentrage de l'accéléromètre par rapport à l'axe de rotation de la platine rotative

$$\underline{E} = \underline{\Omega}_{4/3} \wedge \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{RC}] + \partial_{\mathfrak{R}_4} [\underline{\Omega}_{4/3}] \wedge \underline{RC} + \underline{\Omega}_{4/3} \wedge (\underline{\Omega}_{4/3} \wedge \underline{RC}) \quad (2.49)$$

Il s'agit des termes inertiels dus à la rotation de l'accéléromètre. Par hypothèse, $\underline{\Omega}_{4/3} = \dot{\theta} \underline{e}_x^{3|4}$. On peut, de plus, supposer sans restreindre la généralité que le décentrage est égal à l dans la direction $\underline{e}_y^4$, c'est-à-dire que $\underline{RC} = l \underline{e}_y^4$. Cela implique

$$\underline{E} = E_z \underline{e}_z^4 - E_y \underline{e}_y^4 \quad (2.50)$$

avec $E_y = \dot{\theta}^2 l$ et $E_z = \ddot{\theta} l$.

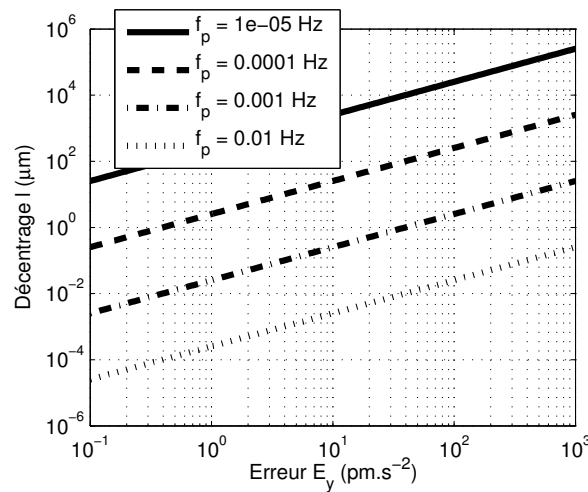


FIGURE 2.9 – Décentrage l en fonction de l'erreur E_y pour une rotation uniforme. Les courbes sont indicées par la fréquence de rotation f_p .

Les figures 2.9 et 2.10 permettent de connaître les valeurs maximales du décentrage

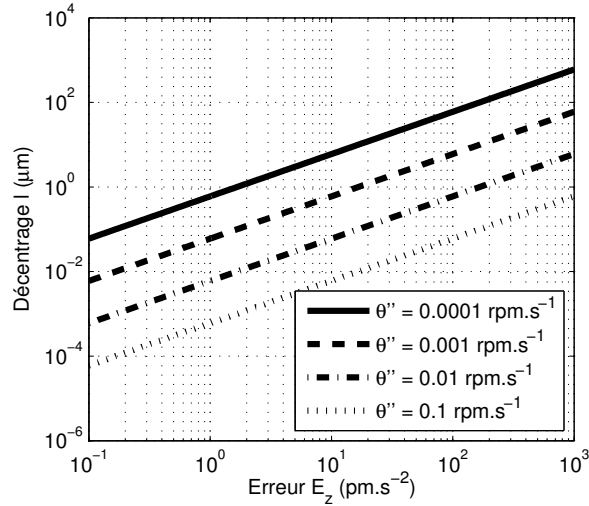


FIGURE 2.10 – Décentrage l en fonction de l'erreur E_z pour une rotation uniformément accélérée. Les courbes sont indicées par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ (rpm = nombre de révolution par minute).

l étant donné une valeur maximale de l'erreur. Elles montrent que, pour une vitesse et une accélération angulaire raisonnable étant donné l'instrument considéré, les niveaux de décentrage à respecter pour obtenir des précisions de l'ordre de $1 \text{ pm} \cdot \text{s}^{-2}$ sont très inférieurs au micromètre. Ce sont des niveaux hors de portée en terme de fabrication de l'instrument. Cela conduit à décider de ne faire des mesures que lorsque MicroSTAR n'est pas en rotation afin de ne pas ajouter aux mesures les termes parasites considérés ici. Cela permet en outre d'éviter que les vibrations générées par le moteur de la platine rotative dégradent la qualité des mesures.

À l'inverse, l'étude du décentrage permet de fixer une limite maximale sur la vitesse et l'accélération angulaire de la platine rotative étant donné la plage de mesure de MiroSTAR qui est $\pm 1,8 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On suppose qu'il est possible d'avoir un décentrage égal à 10^{-4} m . Cela conduit à une vitesse angulaire maximale de $1,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une fréquence de rotation égale à $0,43 \text{ Hz}$. De même, cela conduit à une accélération angulaire maximale de $1,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, soit $34,4 \text{ rpm} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.4.4 Transfert de moment cinétique

Pour finir l'étude du Bias Rejection System, on étudie le transfert de moment cinétique entre le Gravity Advanced Package et la sonde spatiale. Pour cela, on utilise l'équation (2.7) avec les hypothèses suivantes :

- Les moments extérieurs sont nuls.
- La masse d'épreuve est immobile par rapport à la cage, c'est-à-dire $\underline{\Omega}_{6/4} = \underline{0}$. Cela est justifié lorsque l'accéléromètre est asservi.
- Les accélérations angulaires par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ sont négligeables.

- La sonde est stabilisée suivant les trois axes, c'est-à-dire $\underline{\Omega}_{3/1} = \underline{0}$.

On suppose de plus que

$$\underline{\Omega}_{4/2} = \dot{\theta} \underline{e}_x^1, \quad \underline{\Omega}_{9/2} = \dot{\theta}_D \underline{e}_x^1 \quad \text{et} \quad \underline{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_{sat} \underline{e}_x^1 \quad (2.51)$$

et on note I_{acc}^Δ l'inertie des solides $\mathbf{C} \cup \mathbf{A}$ autour de l'axe de rotation, I_{sat}^Δ l'inertie du solide $\tilde{\mathbf{S}}$ autour de l'axe de rotation et I_D^Δ l'inertie du solide $\mathbf{D}$ autour de l'axe de rotation. Les inerties sont supposées constantes en fonction du temps. Cela conduit à l'équation

$$\ddot{\theta}_{sat} = \frac{-1}{I_{sat}^\Delta + I_{acc}^\Delta + I_D^\Delta} \left(I_{acc}^\Delta \ddot{\theta} + I_D^\Delta \ddot{\theta}_D \right) \quad (2.52)$$

Supposons maintenant que $\ddot{\theta}_D = -K\ddot{\theta}$ avec K une constante positive. On introduit l'inertie résiduelle I_{res}^Δ définie par $I_{res}^\Delta = KI_D^\Delta - I_{acc}^\Delta$. On obtient alors la formule

$$\ddot{\theta}_{sat} = \frac{I_{res}^\Delta}{I_{sat}^\Delta + I_{acc}^\Delta + I_D^\Delta} \ddot{\theta} \approx \frac{I_{res}^\Delta}{I_{sat}^\Delta} \ddot{\theta} \quad (2.53)$$

S'il n'y a pas de contrôle d'attitude de la sonde, on peut intégrer deux fois cette équation différentielle avec des conditions initiales nulles

$$I_{res}^\Delta = \frac{\theta_{sat}}{\theta} I_{sat}^\Delta \quad (2.54)$$

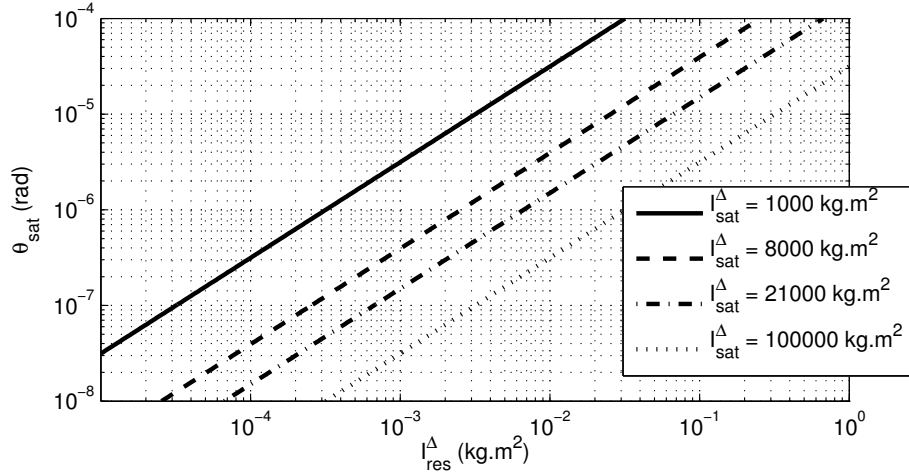


FIGURE 2.11 – Pour $\theta = \pi$ rad, variation de l'attitude de la sonde en fonction de l'inertie résiduelle du Gravity Advanced Package. Les courbes sont indicées par l'inertie de la sonde autour de l'axe de rotation.

Pour illustrer numériquement le transfert de moment cinétique entre le Gravity Advanced Package et la sonde spatiale, considérons la mission Laplace. D'après [115, p.116], les valeurs propres de la matrice d'inertie valent $8000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ et $21\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. La figure 2.11 permet de relier, pour un demi-tour du Gravity Advanced Package et sans contrôle d'at-

titude, l'inertie résiduelle à la rotation de la sonde. Le transfert de moment cinétique est minimum lorsque l'axe de rotation est un axe où l'inertie de la sonde est la plus grande.

Les exigences concernant la précision de pointage sur la mission Laplace [115, p.114] sont les suivantes en mode science :

- stabilité de $0,7 \text{ arcsec} = 5,40 \times 10^{-7} \text{ rad}$ sur 1 seconde.
- connaissance du pointage à $0,5 \text{ arcsec} = 3,86 \times 10^{-7} \text{ rad}$ près.

Pour que l'instrument ne vienne pas perturber le contrôle d'attitude de la sonde, il faut donc que l'inertie résiduelle soit inférieure à $10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Comme le Gravity Advanced Package sans système de compensation de moment cinétique vérifie cette condition, il n'est pas nécessaire d'en ajouter un.

Chapitre

3

Traitement du signal pour une mesure d'accélération sans biais

Sommaire

3.1	Position du problème	49
3.1.1	Mesures effectuées par l'instrument	49
3.1.2	Linéarisation du problème	51
3.1.3	Solution générale	52
3.2	Correction du biais de l'accéléromètre	52
3.2.1	Conditions pour la correction du biais	53
3.2.2	Spécification des matrices de projection	56
3.2.3	Approche par la méthode des moindres carrés	57
3.2.4	Masquage	58
3.2.5	Signaux de modulation	58
3.3	Quantités démodulées	62
3.3.1	Estimations du signal et du biais	62
3.3.2	Caractérisation des mesures d'accélération	62
3.3.3	Caractérisation des mesures de biais	66
3.3.4	Caractérisation avec les moindres carrés généralisés	67
3.4	Utilisation des mesures d'accélération sans biais	68
3.4.1	Mesure de la moyenne	68
3.4.2	Variations sinusoïdales	69
3.5	Discussion	71
3.5.1	Optimisation du signal de modulation	71
3.5.2	Filtrage avant numérisation	72
3.5.3	Spécifications sur la platine rotative	72
3.5.4	Connaissance des facteurs d'échelle	74
3.5.5	Orthogonalité des axes de mesure	74
3.6	Correction du biais sur trois axes	75

3.6.1	Nombre de rotations nécessaires	75
3.6.2	Conditions pour la correction du biais	76
3.6.3	Exemples de signaux de modulation	77

Le Gravity Advanced Package se compose de l'ensemble des sous-systèmes nécessaires pour réaliser des mesures sans biais de l'accélération non-gravitationnelle d'une sonde spatiale. Pour ce faire, le Bias Rejection System est utilisé pour moduler le signal mesuré par l'accéléromètre MicroSTAR de telle sorte qu'il soit séparé fréquemment du biais de mesure. Cette idée est similaire à celle de la détection hétérodyne. Elle nécessite néanmoins les développements supplémentaires présentés dans ce chapitre car l'accéléromètre délivre des mesures suivant trois axes et il n'est pas possible d'avoir une rotation à vitesse angulaire constante de MicroSTAR.

Le formalisme [162] développé spécifiquement pour corriger le biais de mesure permet de définir un signal de modulation périodique, i.e. une variation temporelle pour l'angle θ qui paramètre la rotation de MicroSTAR, ainsi qu'un algorithme de traitement des données qui permet, à partir des mesures brutes, d'obtenir d'un côté le biais de l'instrument et de l'autre le signal sans biais. Du processus décrit dans ce chapitre découlent la valeur moyenne ainsi que la pente du signal extérieur et du biais sur chaque période de modulation. On les qualifiera de « quantités démodulées » dans la suite.

3.1 Position du problème

3.1.1 Mesures effectuées par l'instrument

Dans le chapitre précédent, il a été montré que l'accéléromètre MicroSTAR introduit sur chaque axe de mesure un biais b , du bruit e , ainsi qu'un facteur d'échelle k_1 et un facteur quadratique k_2 . Le long d'un axe, on appelle a le signal à mesurer et m la mesure effectuée par MicroSTAR. Le signal extérieur est l'accélération non-gravitationnelle de la sonde et, dans la suite, on utilisera indifféremment ces deux dénominations pour désigner la quantité a . La relation entre a et m s'écrit

$$m = k_1 a + k_2 a^2 + b + e \quad (3.1)$$

Le biais correspond à la différence entre l'espérance mathématique de la mesure m et la quantité $k_1 a + k_2 a^2$, que l'instrument est censé mesurer. Il s'agit d'une quantité dont les variations temporelles sont déterministes. Le bruit de l'instrument, quant à lui, est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle caractérisé par sa densité spectrale de puissance S_e (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{Hz}^{-1}$) dont l'expression a été donnée au chapitre précédent (p. 36). Le facteur d'échelle k_1 provient de la connaissance imparfaite du gain de la chaîne de mesure. Avec une connaissance parfaite de l'instrument, le facteur d'échelle serait égal à l'unité. De manière générale, on supposera qu'il est proche de l'unité.

L'accéléromètre MicroSTAR effectuant des mesures suivant les trois dimensions de l'espace, la même relation est valide pour chaque axe de mesure. Dans l'équation ci-dessous,

les indices x , y et z désignent les trois axes de l'instrument

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1x}a_x + k_{2x}a_x^2 + b_x + e_x \\ k_{1y}a_y + k_{2y}a_y^2 + b_y + e_y \\ k_{1z}a_z + k_{2z}a_z^2 + b_z + e_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec

- m_x, m_y, m_z : mesures délivrées par l'accéléromètre MicroSTAR selon respectivement les directions $\underline{e}_x^5, \underline{e}_y^5, \underline{e}_z^5$, fixes par rapport à MicroSTAR.
- b_x, b_y, b_z : biais de l'accéléromètre MicroSTAR.
- e_x, e_y, e_z : bruits de mesure de l'accéléromètre MicroSTAR.
- k_{1x}, k_{1y} et k_{1z} : facteurs d'échelle selon les trois axes.
- k_{2x}, k_{2y} et k_{2z} : facteurs quadratiques selon les trois axes.
- a_x, a_y, a_z : accélérations non-gravitationnelles selon les directions $\underline{e}_x^5, \underline{e}_y^5, \underline{e}_z^5$.

Dans cette équation, le couplage entre les axes introduit au chapitre précédent (cf. section 2.3.1) n'est pas pris en compte. Son influence sur le traitement du signal accélérométrique est étudié à la section 3.5.5 de ce chapitre.

Comme l'accéléromètre est monté sur une platine rotative, les quantités a_κ ($\kappa \in \{x; y; z\}$) ne sont d'aucun intérêt pour la restitution d'orbite. La matrice de changement de base $T_{5 \leftarrow 0}$ entre les repères $\mathfrak{R}_0$ (galiléen) et $\mathfrak{R}_5$ (celui dans lequel les mesures sont effectuées) permet de ramener les mesures de MicroSTAR dans le référentiel du Système Solaire, supposé galiléen

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = T_{5 \leftarrow 0} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

où a_ν ($\nu \in \{X; Y; Z\}$) sont les composantes du signal dans le référentiel du Système Solaire. Ce sont les quantités dont la connaissance est nécessaire pour mesurer l'impact des forces non-gravitationnelles sur la trajectoire de la sonde. Dans le cas où celle-ci est stabilisée suivant les trois axes, on peut supposer que la matrice de passage $T_{1 \leftarrow 0}$, entre le référentiel de la sonde et celui du Système Solaire, est égale à l'identité. Cette configuration est celle de la mission OSS [76] et est celle étudiée dans un premier temps. Dans le cas où la sonde est spinnée autour d'un axe, cette matrice de passage n'est plus constante : la configuration est alors plus complexe mais permet de supprimer le biais suivant les trois axes de l'instrument (cf. section 3.6).

Pour expliciter la matrice de passage $T_{5 \leftarrow 0}$, on suppose tout d'abord que le Bias Rejection System est fixe par rapport au satellite. Cela se traduit, sans restreindre la généralité, par $T_{3 \leftarrow 1} = \text{Id}$. On suppose de plus que l'alignement entre la partie tournante de la platine rotative et l'accéléromètre n'introduit pas d'erreur, c'est-à-dire $T_{5 \leftarrow 4} = \text{Id}$. Cette hypothèse est légitime au vu de la discussion de la section 2.4.2. Le passage entre le repère galiléen $\mathfrak{R}_0$ et le repère lié à l'accéléromètre $\mathfrak{R}_5$ n'est plus paramétré que par l'angle θ , qui est une

quantité contrôlée et connue à tout instant. On a alors sans perte de généralité

$$T_{5 \leftarrow 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En ne retenant que le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de l'accéléromètre dirigé suivant $\underline{e}_x^5$, on obtient

$$\begin{cases} m_y = k_{1y} [\cos(\theta)a_Y + \sin(\theta)a_Z] + k_{2y} [\cos(\theta)a_Y + \sin(\theta)a_Z]^2 + b_y + e_y & (3.5a) \\ m_z = k_{1z} [-\sin(\theta)a_Y + \cos(\theta)a_Z] + k_{2z} [-\sin(\theta)a_Y + \cos(\theta)a_Z]^2 + b_z + e_z & (3.5b) \end{cases}$$

Les mesures suivant les axes y et z sont des combinaisons des quantités a_Y et a_Z . Cela, associé au fait que la variation temporelle de l'angle θ peut être contrôlée, permet de mesurer a_Y et a_Z sans biais. Au contraire, cela n'est pas possible suivant l'axe X : pour cela il faudrait une deuxième platine rotative ou que le satellite soit en rotation autour d'un axe (cf. section 3.6). L'impossibilité d'avoir une mesure sans biais suivant l'axe X n'est pas pénalisant si l'instrument est orienté de telle sorte que cet axe soit perpendiculaire au plan de l'orbite moyen.

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que N mesures sont effectuées à une fréquence d'échantillonnage notée f_s . Cela correspond à un pas de temps $\delta t = 1/f_s$. Pour une quantité générique x , on note x_k la valeur échantillonnée de x à l'instant $k \times \delta t$ ($k \in \llbracket 1; N \rrbracket$), et $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les valeurs de x à chaque pas d'échantillonnage.

3.1.2 Linéarisation du problème

Une première étape pour séparer le signal du biais de l'instrument est de linéariser les équations (3.5) afin de pouvoir les écrire de manière matricielle. Pour ce faire, on suppose que $k_{2y} = k_{2z} = 0$. On montre par la suite que cette hypothèse n'est pas restrictive dans le cadre étudié ici. Les deux matrices diagonales

$$\Lambda_c = \text{diag}[\cos(\theta_k)] \text{ et } \Lambda_s = \text{diag}[\sin(\theta_k)], \quad k \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad (3.6)$$

appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, permettent d'écrire les équations (3.5) de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathbf{m}_y = k_{1y} [\Lambda_c \mathbf{a}_Y + \Lambda_s \mathbf{a}_Z] + \mathbf{b}_y + \mathbf{e}_y & (3.7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{m}_z = k_{1z} [-\Lambda_s \mathbf{a}_Y + \Lambda_c \mathbf{a}_Z] + \mathbf{b}_z + \mathbf{e}_z & (3.7b) \end{cases}$$

Pour la suite, on utilise une formulation complètement matricielle

$$M = JD + E \quad (3.8)$$

avec $D \in \mathcal{M}_{4N,1}(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_{2N,1}(\mathbb{R})$, $E \in \mathcal{M}_{2N,1}(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_{2N,4N}(\mathbb{R})$ définies par

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_Y \\ \mathbf{a}_Z \\ \mathbf{b}_Y \\ \mathbf{b}_Z \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_Y \\ \mathbf{m}_Z \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} k_{1y}\Lambda_c & k_{1y}\Lambda_s & \text{Id}_N & 0 \\ -k_{1z}\Lambda_s & k_{1z}\Lambda_c & 0 & \text{Id}_N \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.1.3 Solution générale

L'ensemble des solutions de l'équation (3.8) est de cardinal infini. Il s'agit de l'espace affine $D_p + \ker(J)$, où $\ker(J)$ le noyau de J et D_p est une solution particulière de l'équation, par exemple

$$D_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_Y \\ \mathbf{m}_Z \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Cette résolution formelle n'est pas d'une grande utilité car elle fournit une infinité de solutions et ne permet pas de caractériser les quantités $\mathbf{a}_Y$ et $\mathbf{a}_Z$. Dans la suite, on développera une stratégie de mesure et de traitement du signal qui permet d'accéder à des informations pertinentes sur ces quantités, ainsi que sur le biais de l'instrument.

3.2 Correction du biais de l'accéléromètre

Comme cela est indiqué ci-dessus, il est impossible de déterminer les valeurs des quantités inconnues à chaque pas d'échantillonnage. Il est donc nécessaire de restreindre l'information qu'on souhaite obtenir. Une manière de procéder est de chercher les projections de $\mathbf{a}_Y$ et $\mathbf{a}_Z$ sur un sous-espace vectoriel de dimension $p_a \leq N$ dont une base est composée des colonnes de la matrice $V_a \in \mathcal{M}_{N,p_a}(\mathbb{R})$ qui sont supposées orthogonales pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$. On appelle sous-espace vectoriel V_a le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de V_a . Par conséquent, le but est d'obtenir les valeurs numériques de $(V_a'V_a)^{-1}V_a'\mathbf{a}_Y$ et $(V_a'V_a)^{-1}V_a'\mathbf{a}_Z$ connaissant $\mathbf{m}_Y$ et $\mathbf{m}_Z$. De même, pour le biais, on introduit une matrice $V_b \in \mathcal{M}_{N,p_b}(\mathbb{R})$, avec $p_b \leq N$, et on cherche les valeurs numériques de $(V_b'V_b)^{-1}V_b'\mathbf{b}_Y$ et $(V_b'V_b)^{-1}V_b'\mathbf{b}_Z$. Comme on dispose de N mesures sur chaque axe, il n'est pas possible d'obtenir plus de $2N$ informations sur les accélérations et les biais. Il faut donc que les matrices V_a et V_b vérifient $p_a + p_b \leq N$.

Pour les accélérations non-gravitationnelles, on ne connaît pas les facteurs d'échelle et il n'est donc pas possible de les supprimer de la mesure. On introduit donc les quantités

suivantes qui sont celles qu'on souhaite déterminer

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{a}_Y} = k_{1y}(V'_a V_a)^{-1} V'_a \mathbf{a}_Y & (3.11a) \\ \widetilde{\mathbf{a}_Z} = k_{1z}(V'_a V_a)^{-1} V'_a \mathbf{a}_Z & (3.11b) \\ \widetilde{\mathbf{b}_Y} = (V'_b V_b)^{-1} V'_b \mathbf{b}_Y & (3.11c) \\ \widetilde{\mathbf{b}_Z} = (V'_b V_b)^{-1} V'_b \mathbf{b}_Z & (3.11d) \end{cases}$$

et on introduit $X \in \mathcal{M}_{2p_a+2p_b,1}(\mathbb{R})$ défini de la manière suivante

$$X = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}_Y} \\ \widetilde{\mathbf{a}_Z} \\ \widetilde{\mathbf{b}_Y} \\ \widetilde{\mathbf{b}_Z} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En introduisant la matrice de projection globale $P \in \mathcal{M}_{4N,2p_a+2p_b}(\mathbb{R})$ et la matrice des facteurs d'échelle $K \in \mathcal{M}_{2p_a+2p_b}(\mathbb{R})$ définies par

$$P = \text{diag}(V_a; V_a; V_b; V_b) \quad (3.13)$$

$$K = \text{diag}(k_{1y}; k_{1z}; 1; 1) \quad (3.14)$$

on peut exprimer X de la manière suivante

$$X = K(P'P)^{-1}P'D \quad (3.15)$$

3.2.1 Conditions pour la correction du biais

En multipliant l'équation (3.7a) par $V'_a \Lambda_c$, l'équation (3.7b) par $-V'_a \Lambda_s$, et en sommant les deux équations obtenues, on obtient

$$\begin{aligned} V'_a [k_{1y} \Lambda_c^2 + k_{1z} \Lambda_s^2] \mathbf{a}_Y + V'_a [k_{1y} - k_{1z}] \Lambda_c \Lambda_s \mathbf{a}_Z \\ + V'_a \Lambda_c \mathbf{b}_Y - V'_a \Lambda_s \mathbf{b}_Z + V'_a \Lambda_c \mathbf{e}_Y - V'_a \Lambda_s \mathbf{e}_Z = V'_a \Lambda_c \mathbf{m}_Y - V'_a \Lambda_s \mathbf{m}_Z \end{aligned} \quad (3.16)$$

De manière similaire, en multipliant l'équation (3.7a) par $V'_a \Lambda_s$, l'équation (3.7b) par $V'_a \Lambda_c$, et en sommant les deux équations obtenues, on obtient

$$\begin{aligned} V'_a [k_{1y} \Lambda_s^2 + k_{1z} \Lambda_c^2] \mathbf{a}_Z + V'_a [k_{1y} - k_{1z}] \Lambda_c \Lambda_s \mathbf{a}_Y \\ + V'_a \Lambda_s \mathbf{b}_Y - V'_a \Lambda_c \mathbf{b}_Z + V'_a \Lambda_s \mathbf{e}_Y - V'_a \Lambda_c \mathbf{e}_Z = V'_a \Lambda_s \mathbf{m}_Y - V'_a \Lambda_c \mathbf{m}_Z \end{aligned} \quad (3.17)$$

Afin de déterminer $V'_a \mathbf{a}_Y$ et $V'_a \mathbf{a}_Z$ à partir de $\mathbf{m}_Y$ et $\mathbf{m}_Z$ sans connaître le biais de l'accéléromètre, il faut annuler certains termes. On va tout d'abord supposer que la matrice Λ_s est nulle, c'est-à-dire que l'angle θ ne prend que les valeurs 0 rad et π rad. Cette condition¹

1. On aurait pu supposer que $\Lambda_c = 0$, de tel sorte que θ ne prennent que les valeurs $\pi/2$ rad et $3\pi/2$ rad.

sera un prérequis pour les signaux de modulation introduits à la section 3.2.5. Elle permet d'éliminer les termes faisant intervenir la différence des facteurs d'échelle. Concernant les termes faisant intervenir les facteurs quadratiques (qui n'apparaissent pas dans les équations), ces conditions impliquent qu'ils sont constants et permet donc de les traiter comme un biais : cela justifie *a posteriori* leur suppression lors de la linéarisation des équations. Si l'on a de plus la condition suivante

$$V_a' \Lambda_c \mathbf{b}_\kappa = 0, \text{ avec } \kappa \in \{\mathbf{y}; \mathbf{z}\}, \quad (3.18)$$

alors

$$\begin{cases} V_a' k_{1y} \mathbf{a}_Y = V_a' \Lambda_c \mathbf{m}_Y - V_a' \Lambda_s \mathbf{m}_Z - V_a' \Lambda_c \mathbf{n}_Y + V_a' \Lambda_s \mathbf{n}_Z \\ V_a' k_{1z} \mathbf{a}_Z = V_a' \Lambda_s \mathbf{m}_Y + V_a' \Lambda_c \mathbf{m}_Z - V_a' \Lambda_s \mathbf{n}_Y - V_a' \Lambda_c \mathbf{n}_Z \end{cases} \quad (3.19a)$$

$$\quad (3.19b)$$

En terme fréquentiel, les conditions (3.18) se traduisent par l'orthogonalité dans $L^2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{v}_a^k \cos(\theta)\}$ et $\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{b}_\kappa\}$, où $\mathbf{v}_a^k$ est la k -ième colonne de la matrice V_a et $\mathcal{F}_{\delta t}$ la transformée de Fourier à temps discret (cf. annexe A). Cette équation signifie que le biais et le signal modulé doivent être orthogonaux dans le domaine fréquentiel. L'approche temporelle utilisée ici a cependant deux avantages. Il est beaucoup plus facile de faire des hypothèses sur le comportement temporel du signal extérieur et du biais que sur leur composition fréquentielle. Et, comme on travaille avec des données discrètes, on a dans le domaine temporel des signaux qui prennent N valeurs alors qu'ils sont représentés par des fonctions continues dans le domaine de Fourier.

Il est possible d'appliquer le même processus pour déterminer la valeur de $V_b' \mathbf{b}_Y$ et $V_b' \mathbf{b}_Z$ à partir de $\mathbf{m}_Y$ et $\mathbf{m}_Z$. Pour $V_b' \mathbf{b}_Y$, on multiplie l'équation (3.7a) par V_b' et pour $V_b' \mathbf{b}_Z$, on multiplie l'équation (3.7b) par V_b' . Si les conditions suivantes sont vérifiées

$$V_b' \Lambda_c \mathbf{a}_\kappa = 0, \text{ avec } \kappa \in \{\mathbf{Y}; \mathbf{Z}\}. \quad (3.20)$$

avec l'hypothèse que $\Lambda_s = 0$, alors

$$\begin{cases} V_b' \mathbf{b}_Y = V_b' \mathbf{m}_Y - V_b' \mathbf{e}_Y \\ V_b' \mathbf{b}_Z = V_b' \mathbf{m}_Z - V_b' \mathbf{e}_Z \end{cases} \quad (3.21a)$$

$$\quad (3.21b)$$

Sous les conditions (3.18) et (3.20), il est possible de déterminer respectivement la projection des vecteurs $k_{1y} \mathbf{a}_Y$ et $k_{1z} \mathbf{a}_Z$ sur le sous-espace vectoriel V_a et la projection des vecteurs $\mathbf{b}_Y$ et $\mathbf{b}_Z$ sur le sous-espace vectoriel V_b . Il y a cependant un problème puisque les évolutions temporelles du signal à mesurer et du biais de l'instrument ne sont pas contrôlées : on ne connaît pas en pratique $\mathbf{a}_Y$, $\mathbf{a}_Z$, $\mathbf{b}_Y$ et $\mathbf{b}_Z$, ce qui pose le problème de la vérification des conditions (3.18) et (3.20). Jusqu'à maintenant, aucune hypothèse n'a été

Cela revient à déplacer l'origine des angles de $\pi/2$ rad. Dans ce cas, les quantités $k_{1z} \mathbf{a}_Y$ et $k_{1y} \mathbf{a}_Z$ sont déterminées à la place des quantités $k_{1y} \mathbf{a}_Y$ et $k_{1z} \mathbf{a}_Z$. En pratique, cela peut-être utilisé pour déterminer expérimentalement le rapport k_{1y}/k_{1z} qui doit être théoriquement égal à l'unité.

faite sur l'évolution temporelle de ces quantités. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'être plus explicite.

On va supposer que les biais $\mathbf{b}_y$ et $\mathbf{b}_z$ appartiennent au sous-espace vectoriel défini par les colonnes de la matrice $\hat{V}_b \in \mathcal{M}_{N;\hat{p}_b}(\mathbb{R})$, avec $\hat{p}_b \leq N$. Sous cette hypothèse, les conditions (3.18) deviennent

$$V_a' \Lambda_c \hat{V}_b = 0 \quad (3.22)$$

De la même manière, on peut supposer que $\mathbf{a}_y$ et $\mathbf{a}_z$ appartiennent au sous-espace vectoriel défini par les colonnes de la matrice $\hat{V}_a \in \mathcal{M}_{N;\hat{p}_a}(\mathbb{R})$, avec $\hat{p}_a \leq N$. Dans ce cas, les conditions (3.20) deviennent

$$V_b' \Lambda_c \hat{V}_a = 0 \quad (3.23)$$

Les matrices $\hat{V}_a$ et $\hat{V}_b$ définissent les sous-espaces vectoriels dans lesquels vivent le signal et le biais respectivement. Les sous-espaces vectoriels V_a et V_b doivent donc être des sous-espaces vectoriels de ceux définis par $\hat{V}_a$ et $\hat{V}_b$. Par conséquent, il est légitime d'utiliser les mêmes vecteurs de base, de telle sorte que V_a et V_b sont composés d'une sous-collection des colonnes des matrices $\hat{V}_a$ et $\hat{V}_b$ respectivement². Par analogie avec la définition de X , on introduit $\hat{X}$ défini par

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{a}_y} \\ \widehat{\mathbf{a}_z} \\ \widehat{\mathbf{b}_y} \\ \widehat{\mathbf{b}_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{V}_a' \hat{V}_a)^{-1} \hat{V}_a' \mathbf{a}_y \\ (\hat{V}_a' \hat{V}_a)^{-1} \hat{V}_a' \mathbf{a}_z \\ (\hat{V}_b' \hat{V}_b)^{-1} \hat{V}_b' \mathbf{b}_y \\ (\hat{V}_b' \hat{V}_b)^{-1} \hat{V}_b' \mathbf{b}_z \end{bmatrix} = (\hat{P}' \hat{P})^{-1} \hat{P}' D \quad (3.24)$$

avec $\hat{P} \in \mathcal{M}_{4N, 2p_a + 2p_b}(\mathbb{R})$ définie par

$$\hat{P} = \text{diag}(\hat{V}_a; \hat{V}_a; \hat{V}_b; \hat{V}_b) \quad (3.25)$$

Si l'on choisit pour les matrices V_a et V_b les sous-espaces vectoriels les plus grands qui permettent de capturer l'évolution temporelle des quantités considérées, on a $V_a = \hat{V}_a$ et $V_b = \hat{V}_b$. Dans ce cas, les conditions présentées ci-dessus permettant de séparer le signal d'intérêt et le biais deviennent

$$\boxed{V_b' \Lambda_c V_a = 0} \quad (3.26)$$

Dans le cas où ces conditions de démodulation ne sont pas vérifiées, on ne récupère pas parfaitement le signal d'intérêt ou le biais de l'instrument : les termes $V_a' \Lambda_c \mathbf{b}_\kappa$ et $V_b' \Lambda_c \mathbf{a}_\kappa$ s'ajoutent ($\kappa \in \{y; z\}$) comme indiqué par les équations (3.16) et (3.17). Il n'est pas possible cependant de donner l'amplitude de ces quantités dans le cas général.

2. Cela implique, entre autre, que les matrices $V_a' \hat{V}_a$ et $V_b' \hat{V}_b$ ont des composantes nulles hors de la diagonale.

3.2.2 Spécification des matrices de projection

Pour la suite de la discussion, il est nécessaire de donner une expression explicite pour les matrices V_a , V_b , $\hat{V}_a$ et $\hat{V}_b$. Pour cela, on suppose que pour chaque période du signal de modulation τ , il y a exactement un nombre $q \in \mathbb{N}^*$ de mesures, ce qui se traduit par $q = \tau f_s$. On peut dans un premier temps introduire la matrice suivante

$$V_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_q & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1}_q \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où $\mathbf{1}_q$ est une matrice de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont 1. La matrice V_1 est une matrice sans dimension. Un signal qui appartient au sous-espace vectoriel V_1 est constant par morceau. C'est une hypothèse très restrictive car, sauf pour un signal constant, elle n'assure pas la continuité.

Le sous-espace vectoriel défini par la matrice suivante permet de capturer les pentes

$$V_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_q & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{t}_q \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où $\mathbf{t}_q$ est une matrice de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{t}_{qk} = (k - q/2)\delta t$. La matrice V_2 a la dimension d'un temps. Dans le cas où la période de modulation τ est assez petite devant le temps caractéristique de variation du biais et du signal, on peut légitimement faire l'hypothèse que le signal et le biais sont affines par morceau, c'est-à-dire appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par V_1 et V_2 .

On peut aussi s'intéresser aux variations sinusoïdales à une fréquence f_h en introduisant la matrice

$$V_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_q & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{c}_q \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

où $\mathbf{c}_q$ est une matrice de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{c}_{qk} = \cos(2\pi k f_h \delta t)$. La matrice V_3 est une matrice sans dimension.

Enfin, le biais de MicroSTAR dépend de la température. Comme la période du signal de modulation sera faible devant le temps caractéristique de variation de la température, il est légitime de supposer la température affine par morceau.

La matrice V_1 est particulièrement intéressante pour les traitements des données car elle permet d'obtenir la valeur moyenne de l'accélération non-gravitationnelle du satellite sur chaque période de modulation. Or la variation d'impulsion du satellite sur une période τ , notée $\overrightarrow{\Delta p_{NG}}$, due aux forces non gravitationnelles est égale à la moyenne de ces forces

sur τ

$$\overrightarrow{\Delta p_{NG}} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \overrightarrow{F_{NG}}(t) dt \quad (3.30)$$

3.2.3 Approche par la méthode des moindres carrés

L'approche développée dans la section précédente s'apparente à une résolution par la méthode des moindres carrés, présentée en annexe C, d'une version modifiée de l'équation (3.8). Cette approche est intéressante car elle permet de traiter des cas plus généraux comme la correction de biais sur les trois axes de l'instrument. Il n'est pas possible de résoudre l'équation (3.8) car on ne connaît pas la matrice J du fait de la mauvaise connaissance des facteurs d'échelle. On introduit donc la matrice J_0 qui est la matrice J avec les facteurs d'échelle égaux à l'unité. On va donc résoudre le problème des moindres carrés suivant

$$J_0 P X = M \quad (3.31)$$

La méthode des moindres carrés usuelle donne

$$X = (P' J_0' J_0 P)^{-1} P' J_0' M = (P' J_0' J_0 P)^{-1} P' J_0' J \hat{P} \hat{X} \quad (3.32)$$

On veut que ce calcul donne la valeur de X telle que définie par l'équation (3.15). Il faut donc que

$$\boxed{(P' J_0' J_0 P)^{-1} P' J_0' J \hat{P} = K (P' P)^{-1} P' \hat{P}} \quad (3.33)$$

Cette égalité permet de retrouver les conditions données par les équations (3.22) et (3.23). Dans le cas simplifié où $P = \hat{P}$, cette équation se réduit à

$$P' J_0' J P = P' J_0' J_0 P K \quad (3.34)$$

Dans le cas où l'instrument est parfaitement connu, c'est-à-dire $J_0 = J$ et $K = \text{Id}$, l'équation ci-dessus est toujours vérifiée. La seule condition nécessaire pour appliquer la méthode des moindres carrés, et donc séparer le signal du bruit, est $\text{rg}(J_0 P) = 2p_a + 2p_b$. Cela signifie qu'il suffirait que l'angle de modulation prenne deux valeurs différentes quelconques. Cette approche n'est pas réalisable pour deux raisons : l'hypothèse sur les facteurs d'échelle n'est en pratique pas vérifiée et il est nécessaire de faire des demi-tours pour pouvoir considérer les termes avec les facteurs quadratiques comme des biais (cf. section 3.2.1).

L'approche présentée ci-dessus permet de présenter de manière très compacte les calculs effectués jusqu'ici. Elle permet aussi d'utiliser la méthode des moindres carrés généralisées (cf. p. 141) pour calculer X

$$X_{MCG} = (P' J_0' \Omega^{-1} J_0 P)^{-1} P' J_0' \Omega^{-1} M \quad (3.35)$$

où Ω est la matrice de covariance du bruit de mesure de l'accéléromètre MicroSTAR, c'est-à-dire $\Omega_{ij} = R((i-j)\delta t)$ avec R la fonction d'autocorrélation du bruit de mesure,

transformée de Fourier de la densité spectrale de puissance du bruit S_e .

3.2.4 Masquage

Comme cela a été mentionné dans le chapitre précédent à la section 2.4.3, les mesures effectuées lorsque l'accéléromètre MicroSTAR est en rotation sont polluées par les forces d'entraînement et de Coriolis qui s'exercent sur la masse d'épreuve. Pour écarter ce problème, les mesures utilisées dans le traitement des données sont seulement celles effectuées lorsqu'il n'y a pas de rotation. Cela exclut donc une rotation à vitesse angulaire constante comme celle introduite dans le chapitre précédent pour expliquer le principe de la correction du biais.

Lors du traitement du signal, il est nécessaire de supprimer les données acquises lors des phases de mouvement de la platine rotative. On appellera par la suite ce traitement « masquage ». Considérons la matrice diagonale $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par : $M_{kk} = 1$ si $\dot{\theta}_k = 0$ et $\ddot{\theta}_k = 0$, et $M_{kk} = 0$ sinon³. Dans toutes les équations précédentes, il faut alors remplacer V_a par $\tilde{V}_a = MV_a$ et V_b par $\tilde{V}_b = MV_b$.

La durée du masquage est un paramètre clé dans la précision des quantités démodulées : plus le masquage est long, plus le nombre de points de mesure non-utilisés est important et plus la précision est mauvaise. On appellera T_M la durée totale du masquage par période.

En pratique, le masquage peut être plus long que la durée de retournement. Par exemple, si l'on souhaite un amortissement des vibrations générées par le moteur de la platine rotative, il peut être intéressant de prolonger le masquage au delà de la fin de la période de retournement. Dans la suite, cette problématique ne sera pas prise en compte et on ne s'intéressera qu'au masquage du point de vue de son impact sur le traitement des données.

3.2.5 Signaux de modulation

En s'appuyant sur les conditions nécessaires pour une séparation du signal et du biais (cf. eq. (3.22) et (3.23)), il est possible de construire un signal de modulation $\theta(t)$. Pour cela, on va s'appuyer sur les différentes matrices qui ont été introduites à la section 3.2.2 et plusieurs situations sont envisagées. Dans tous les cas, on suppose que $\theta(t)$ est périodique de période τ . De plus, il a été décidé précédemment que les mesures sont réalisées lorsque θ est égal à 0 rad ou π rad.

Retournement régulier

Le signal de modulation 1 présenté en figure 3.1 vérifie l'égalité suivante : $\tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_1 = 0$. Cela signifie qu'il est possible de récupérer la valeur moyenne du signal sur chaque période de modulation si le biais est constant sur chaque période de modulation, et réciproquement.

3. $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont respectivement la vitesse et l'accélération angulaire.

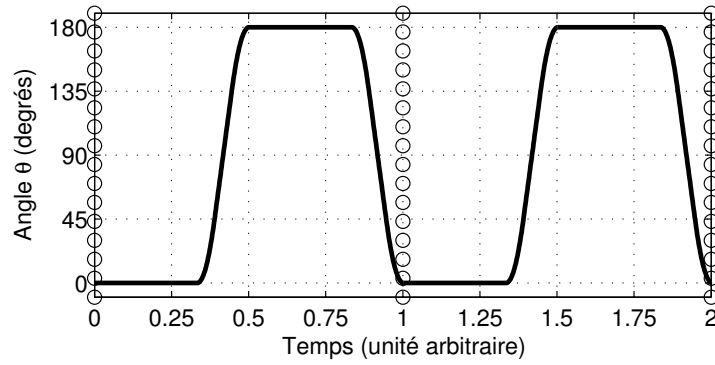


FIGURE 3.1 – Signal de modulation 1. Deux périodes sont représentées, séparées par des cercles (o). La durée du masquage par période vaut 33 % de la période pour la représentation graphique.

À l'inverse, $\tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_2 \neq 0$: dès qu'on se place sous l'hypothèse plus réaliste que le signal et le biais sont affines par morceau, il n'est plus possible de retrouver leur valeur moyenne. La quantité $(\tilde{V}_1' \tilde{V}_1)^{-1} \tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_2$ peut être approximée par $\tau/8$ et croît donc avec la durée de modulation.

Concernant la variation sinusoïdale, le terme $(\tilde{V}_1' \tilde{V}_1)^{-1} \tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_3$ est un vecteur colonne dont les composantes peuvent être approximés par les valeurs de la fonction suivante calculées aux instants d'échantillonnage

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \left[\int_t^{t+\tau/2} \cos(2\pi f_h \lambda) d\lambda - \int_{t+\tau/2}^{t+\tau} \cos(2\pi f_h \lambda) d\lambda \right] = \frac{1 - \cos(\pi f_h \tau)}{\pi f_h \tau} \sin \left[2\pi f_h \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (3.36)$$

Cette expression montre que pour les variations hautes fréquences, c'est-à-dire pour $2\pi f_h \gg 1/\tau$, h et donc $(\tilde{V}_1' \tilde{V}_1)^{-1} \tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_3$ sont très petits devant l'unité. On peut donc supposer que la condition de démodulation est vérifiée. En pratique, cela signifie que si le signal extérieur est perturbé par des vibrations hautes fréquences, ces composantes sont écartées lors du traitement des données. Le calcul est légèrement différent pour les deux signaux de modulation présentés ci-dessous mais la conclusion est la même concernant les vibrations hautes fréquences.

Retournement régulier déphasé

Le signal de modulation 2 présenté en figure 3.2 est le même que le signal de modulation 1 avec un déphasage de $\frac{\tau - T_M}{4}$. Cela permet d'améliorer les capacités de ce signal en terme de séparation du biais et du signal. En effet, on a toujours $\tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_1 = 0$, mais on a maintenant $\tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_2 = 0$. Il permet donc de récupérer les valeurs moyennes du signal extérieur lorsque le biais a une variation affine par morceau avec le temps, et réciproquement.

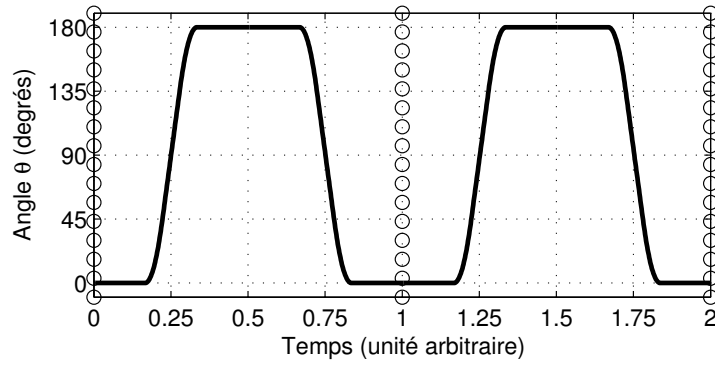


FIGURE 3.2 – Signal de modulation 2. Deux périodes sont représentées, séparées par des cercles (o). La durée du masquage par période vaut 33 % de la période pour la représentation graphique.

Estimation des variations linéaires

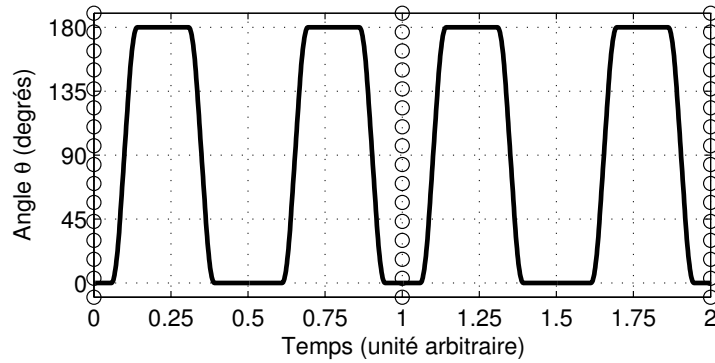


FIGURE 3.3 – Signal de modulation 3. Deux périodes sont représentées, séparées par des cercles (o). La durée du masquage par période vaut 33 % de la période pour la représentation graphique.

Pour finir, le signal de modulation 3 (cf. fig. 3.3) permet d'avoir $\tilde{V}_2' \Lambda_c \tilde{V}_2 = 0$, ainsi que $\tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_2 = \tilde{V}_1' \Lambda_c \tilde{V}_1 = 0$. Ce signal est obtenu par minimisation d'une fonction coût. On suppose qu'il est de période égale à 1 unité arbitraire et qu'il est symétrique par rapport à $1/2$. Il est paramétré par t_a et t_b tels que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_a - T_M/2 \\ \pi & \text{si } t_a + T_M/2 \leq t \leq t_b - T_M/2 \\ 0 & \text{si } t_b + T_M/2 \leq t \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.37a)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \pi & \text{si } t_a + T_M/2 \leq t \leq t_b - T_M/2 \\ 0 & \text{si } t_b + T_M/2 \leq t \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.37b)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_b + T_M/2 \leq t \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.37c)$$

et les instants t pour lesquels aucune valeur n'est définie correspondent aux périodes de rotation qui sont masquées lors du traitement des données. La condition $\tilde{V}_2' \Lambda_c \tilde{V}_2 = 0$ est

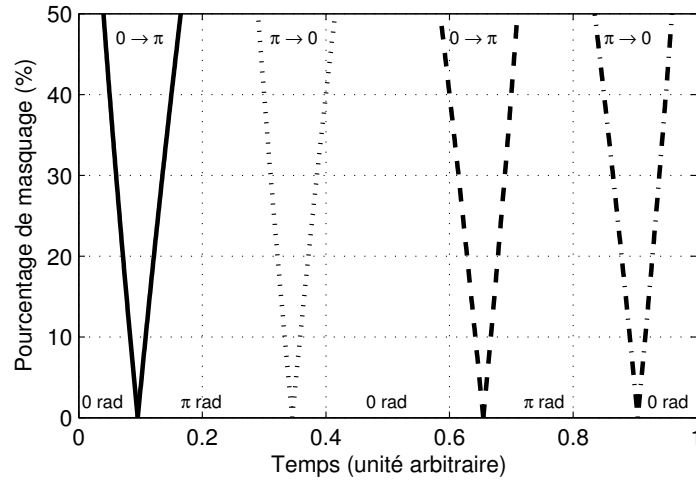


FIGURE 3.4 – Évolution du signal de modulation 3 en fonction du rapport de la durée du masquage sur la période de modulation T_M/τ . Le temps est représenté en abscisse et T_M/τ , exprimé en pourcentage, est représenté en ordonnée. Les courbes indiquent les valeurs de l'angle θ : entre deux courbes de même style l'angle θ varie, entre les courbes (-) et (·) et entre les courbes (- -) et (- ·) $\theta = \pi$ rad, et $\theta = 0$ rad sinon.

équivalente, dans le domaine continu, aux trois égalités suivantes

$$\int_0^1 m(t) \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt = \int_0^1 t m(t) \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt = \int_0^1 t^2 m(t) \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt = 0 \quad (3.38)$$

où $m(t)$ est la fonction de masquage dans le continu.

Pour trouver les valeurs de t_a et t_b qui permettent de vérifier ces conditions, on introduit la fonction coût

$$c(t_a, t_b) = \left(\int_0^1 m(t) \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 m(t) t \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 m(t) t^2 \cos(\theta(t, t_a, t_b)) dt \right)^2. \quad (3.39)$$

Les valeurs de t_a et t_b qui minimisent c sont celles qui permettent de satisfaire la condition $\tilde{V}_2 \Lambda_c \tilde{V}_2 = 0$. Contrairement aux deux autres signaux de modulation présentés précédemment, ce signal dépend de la durée de masquage T_M , comme en atteste la figure 3.4.

Dans toute la suite de ce chapitre, on ne considère que ce signal car c'est celui qui présente les meilleures caractéristiques en terme de séparation du biais et du signal. Ces trois signaux sont utilisés lors de la validation expérimentale de la méthode présentée au chapitre suivant.

3.3 Quantités démodulées

3.3.1 Estimations du signal et du biais

Le paragraphe précédent a permis d'établir une méthode pour séparer le signal extérieur du biais de l'instrument. En pratique, on obtient la moyenne du signal et du biais sur une période de modulation ainsi que leur pente. On définit formellement ces quantités de la manière suivante

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}}^1 = k_{1y}(\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\mathbf{a}_{\mathbf{Y}} = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\Lambda_c\mathbf{m}_{\mathbf{y}} \quad (3.40a)$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}}^1 = k_{1z}(\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\mathbf{a}_{\mathbf{Z}} = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\Lambda_c\mathbf{m}_{\mathbf{z}} \quad (3.40b)$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}^1 = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\mathbf{b}_{\mathbf{y}} = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}V_1'\mathbf{m}_{\mathbf{y}} \quad (3.40c)$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{z}}^1 = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\mathbf{b}_{\mathbf{z}} = (\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}V_1'\mathbf{m}_{\mathbf{z}} \quad (3.40d)$$

Ces quantités sont des vecteurs colonne dont chaque composant correspond à une période de modulation. Ces vecteurs correspondent respectivement aux valeurs moyennes sur une période de l'accélération suivant Y et suivant Z (axes de la sonde) et du biais suivant y et suivant z (axe de MicroSTAR). De la même manière, on définit les vecteurs suivants

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}}^2 = k_{1y}(\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\mathbf{a}_{\mathbf{Y}} = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\Lambda_c\mathbf{m}_{\mathbf{y}} \quad (3.41a)$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}}^2 = k_{1z}(\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\mathbf{a}_{\mathbf{Z}} = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\Lambda_c\mathbf{m}_{\mathbf{z}} \quad (3.41b)$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}^2 = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\mathbf{b}_{\mathbf{y}} = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}V_2'\mathbf{m}_{\mathbf{y}} \quad (3.41c)$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{z}}^2 = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}\tilde{V}_2'\mathbf{b}_{\mathbf{z}} = (\tilde{V}_2'\tilde{V}_2)^{-1}V_2'\mathbf{m}_{\mathbf{z}} \quad (3.41d)$$

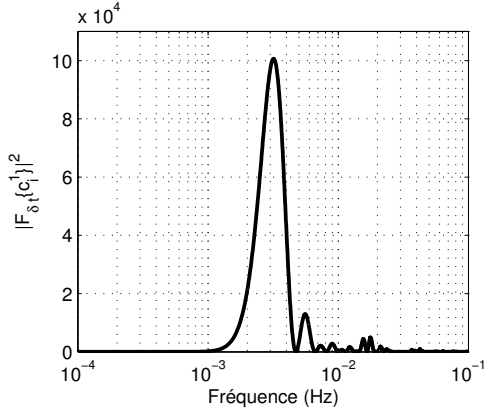
qui contiennent les valeurs de la pente du signal extérieur et du biais. Pour caractériser la qualité des mesures effectuées avec le Gravity Advanced Package, on va calculer la précision sur ces quantités. En pratique, on peut considérer ces vecteurs comme les valeurs de signaux discrets dont le pas de temps est τ . On introduira donc les matrices de covariance correspondant à chacune de ces quantités.

Dans les définitions ci-dessus, par souci de légèreté, le bruit de mesure n'apparaît pas. Pour le calcul de la précision, il suffit de se souvenir que la mesure m_y est entachée d'un bruit e_y et la mesure m_z , d'un bruit e_z . Les bruits e_y et e_z sont supposés indépendants et caractérisés par la même densité spectrale de puissance notée S_e .

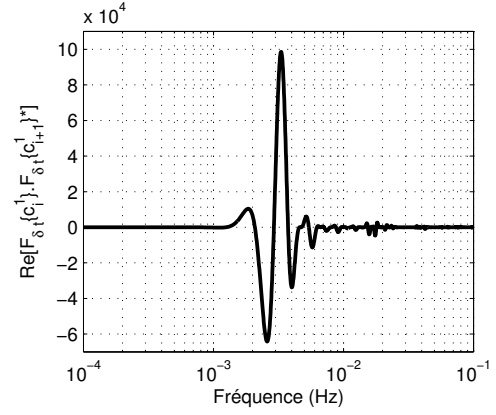
3.3.2 Caractérisation des mesures d'accélération

Dans un premier temps, on calcule la précision sur les mesures sans biais du signal. Pour cela, la manière la plus simple de procéder est de remarquer que, par exemple, la quantité

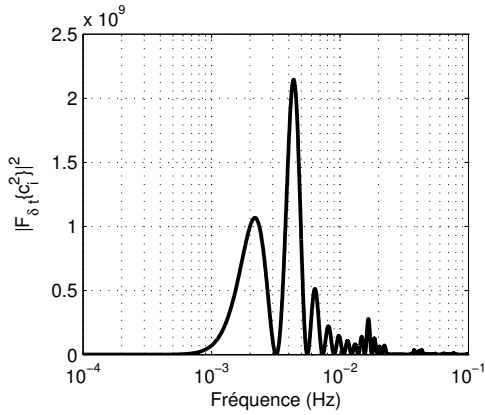
$$(\tilde{V}_1'\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\Lambda_c\mathbf{m}_{\mathbf{y}} = (\tilde{V}_1'\Lambda_c'\Lambda_c\tilde{V}_1)^{-1}\tilde{V}_1'\Lambda_c'\mathbf{m}_{\mathbf{y}} \quad (3.42)$$



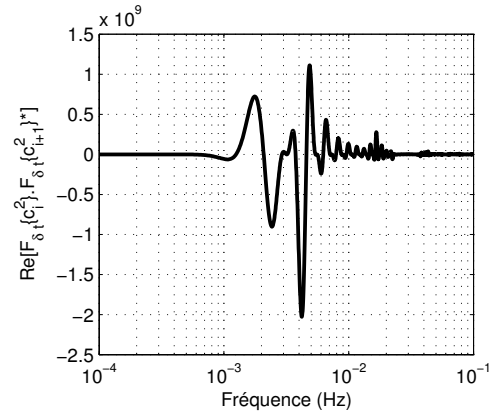
(a) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^1\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^1\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{11}(0)$ et sélectionne la DSP autour de la fréquence $2/\tau$ avec une largeur spectrale approximativement égale à $1/\tau$



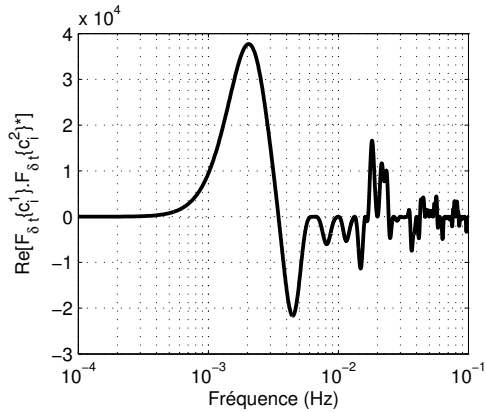
(b) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^1\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_{i+1}^1\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{11}(1)$.



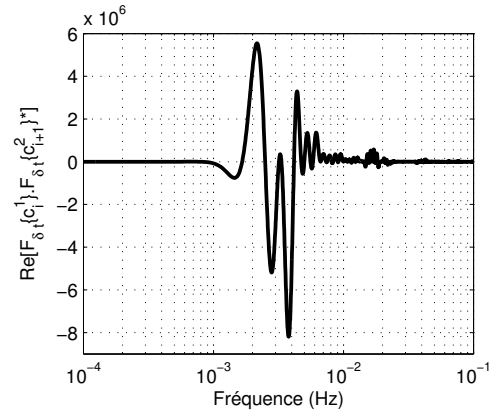
(c) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^2\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^2\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{22}(0)$.



(d) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^2\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_{i+1}^2\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{22}(1)$.



(e) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^1\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_2^2\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{12}(0)$.



(f) $\Re\left(\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i^1\}\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_{i+1}^2\}}\right)$. Cette fonction apparaît dans le calcul de $R^{12}(1)$.

FIGURE 3.5 – Courbes réalisées pour le signal de calibration 3 (cf. fig. 3.3) avec une période de modulation τ de 600 s ($1/\tau = 1,67 \times 10^{-3}$ Hz), une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz.

est la solution par la méthode des moindres carrées de l'équation $\Lambda_c \tilde{V}_1 X = M$. L'annexe C donne l'expression de la matrice de covariance de la solution en fonction de la DSP du bruit.

On note $\mathbf{c}_k^i \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la i -ème colonne de la matrice $\Lambda_c \tilde{V}_k$. Comme on suppose que les bruits sur les axes de mesure y et z sont décorrélés, on a pour $(k; p) \in \{1; 2\}^2$ et $(i; j) \in \llbracket 1; N/q \rrbracket^2$

$$\text{Cov}(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}_i}^k, \widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}_j}^p) = \text{Cov}(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}_i}^k, \widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}_j}^p) = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_e(f) \left(\frac{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_k^i\}(f) \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_p^j\}(f)}}{q_k \cdot \delta t^2} \right) df \quad (3.43)$$

avec q_k la norme d'une colonne de la matrice $\tilde{V}_k$ et

$$\text{Cov}(\widehat{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}_i}^k, \widehat{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}_j}^p) = 0 \quad (3.44)$$

Les covariances ci-dessus présentent la particularité de ne dépendre que de la différence $i - j$. On peut introduire la fonction d'autocorrélation

$$R^{kp}(l) = \text{Cov}(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}_{i+l}}^k, \widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Y}_i}^p) = \text{Cov}(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}_{i+l}}^k, \widetilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{Z}_i}^p). \quad (3.45)$$

Le résultat de l'intégrale dans l'équation (3.43) dépend de la densité spectrale de puissance de bruit, qui a déjà été caractérisée à la section 2.3.3, et des transformées de Fourier $\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_k^i\}$. Afin d'avoir une représentation graphique du calcul de ces intégrales, ces transformées de Fourier sont représentées en figure 3.5.

Les figures 3.6 montrent quant à elle les représentations graphiques des fonctions R^{11} , R^{22} , et R^{12} . On remarque que les fonctions d'autocorrélation R^{11} et R^{22} sont presque celles d'un bruit blanc. Par conséquent, on pourra supposer que les pentes et les moyennes sont indépendantes entre deux périodes de modulation. À l'inverse, la fonction d'autocorrélation R^{12} n'est pas celle d'un bruit blanc : $R^{12}(0)$ et $R^{12}(1)$ sont du même ordre de grandeur. Cela vient du fait que la pente d'un signal entre deux périodes de modulation dépend de la valeur moyenne de ce signal sur chacune de ces deux périodes de modulation.

On peut aussi caractériser la précision sur les quantités démodulées en terme fréquentiel : les densités spectrales de puissance correspondant à ces fonctions d'autocorrélation sont représentées en figure 3.7. Les figures 3.7(a) et 3.7(b) confirment que la moyenne et la pente du signal sont entachées d'un bruit blanc.

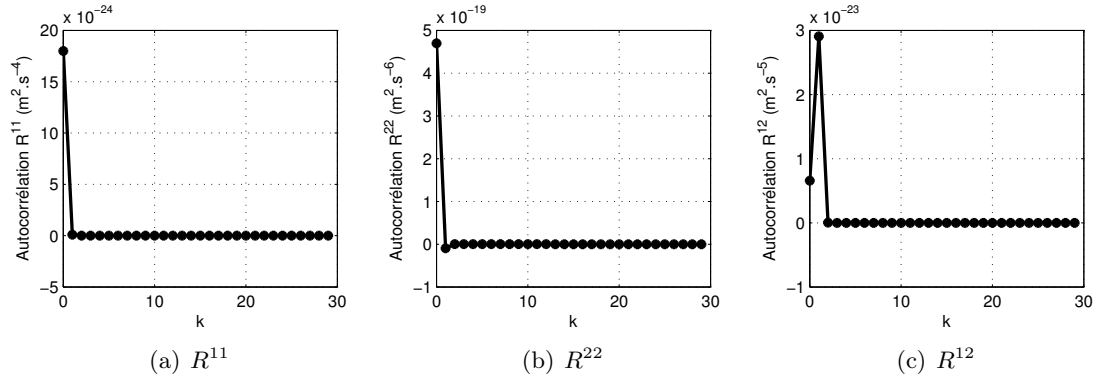


FIGURE 3.6 – Fonctions d'autocorrélation $R^{11}[k]$, $R^{22}[k]$ et $R^{12}[k]$ définies par l'équation (3.45) pour le signal de calibration 3 (cf. fig. 3.3) avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz. Les valeurs pour $k = 0$ sont $R^{11}(0) = 1,80 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$ et $R^{22}(0) = 4,70 \times 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-6}$.

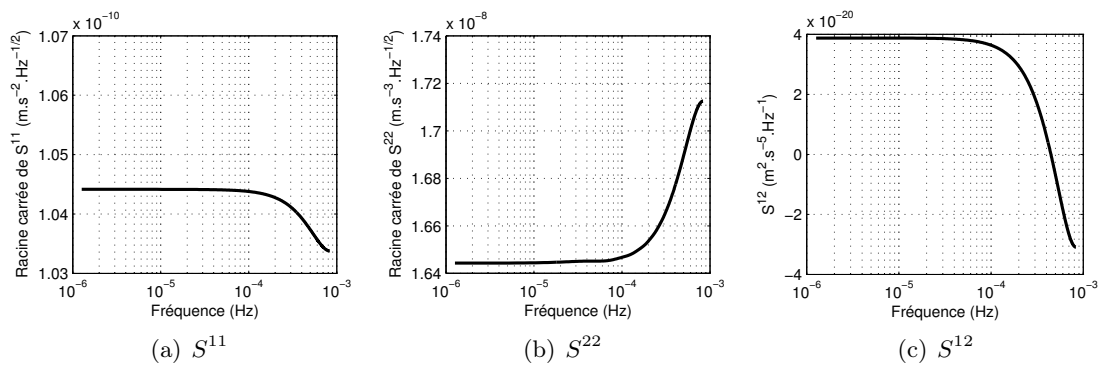


FIGURE 3.7 – Densités spectrales de puissance S^{11} , S^{22} et S^{12} pour le signal de calibration 3 (cf. fig. 3.3) avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz.

3.3.3 Caractérisation des mesures de biais

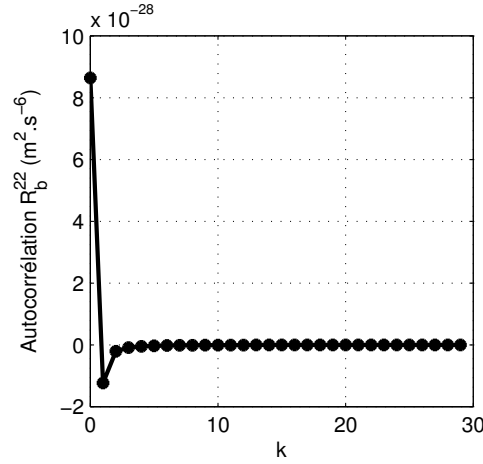


FIGURE 3.8 – Fonction d'autocorrélation R_b^{22} , équivalent pour le biais de la fonction R^{22} . Le signal de calibration 3 (cf. fig. 3.3) est utilisé avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz. La valeur pour $k = 0$ est $R_b^{11}(0) = 8,6 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-6}$.

On peut utiliser la même approche pour caractériser la précision sur la moyenne et la pente du biais de mesure. Cette approche se heurte cependant à un problème. En effet, la formule est la même que celle de l'équation (3.43) sauf qu'il faut considérer la transformée de Fourier à temps discret d'une colonne de V_1 et d'une colonne de V_2 . Or la transformée de Fourier à temps discret d'une colonne de V_1 est un sinus cardinal : comme $S_e(f)$ est équivalente à $1/f$ lorsque f tend vers zéro, l'intégrale diverge.

Ce problème est intrinsèque à un bruit de mesure avec une remontée en $1/f$ aux basses fréquences lorsqu'on calcule la précision d'une moyenne de mesures. Une des manières de traiter un tel bruit est d'utiliser la variance d'Allan introduite au chapitre précédent (cf. p. 37). Dans le cas considéré ici, d'après les équations (3.40c) et (3.40d), la moyenne du biais est égale à la moyenne de la mesure de l'accéléromètre. La variance d'Allan de la moyenne du biais est donc égale à celle de l'accéléromètre MicroSTAR, en ne prenant pas en compte les période de masquage. Par exemple, pour une période de modulation de 600 s et pour une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, la variance d'Allan de la moyenne du biais sur une période est égale à $A_e(600 \text{ s}, 1 \text{ Hz}) = 8 \times 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Concernant la précision sur la pente du biais, il n'y a pas de divergence de l'intégrale car les colonnes de la matrice V_2 ont une moyenne nulle. La figure 3.8 montre la fonction d'autocorrélation et la figure 3.9 la densité spectrale de puissance correspondante. On observe que ces courbes sont proches de celles caractéristiques d'un bruit blanc.

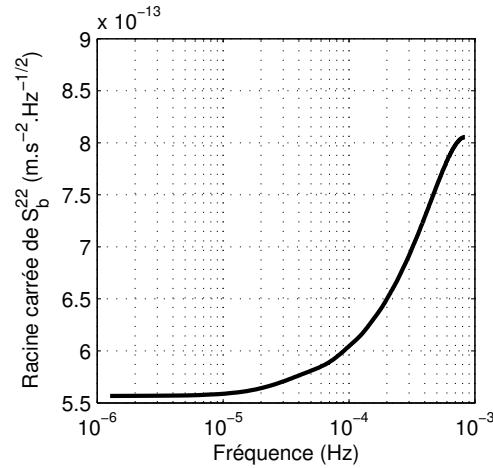


FIGURE 3.9 – Densités spectrales de puissance S_b^{22} , transformée de Fourier de R_b^{22} . Le signal de calibration 3 (cf. fig. 3.3) est utilisé avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz.

3.3.4 Caractérisation avec les moindres carrés généralisés

Dans la section 3.2.3, on a expliqué comment le traitement des données peut se formaliser en utilisant la méthode des moindres carrés. La méthode des moindres carrés généralisés (MCG) a aussi été introduite car elle permet d'obtenir un estimateur dont la variance est minimale. Si l'on résout le problème $JX = M + E$, la matrice de covariance de l'estimateur de X est

$$V_{MCG} = (J'\Omega^{-1}J)^{-1} \quad (3.46)$$

où Ω est la matrice de covariance de E . La méthode des moindres carrés généralisés s'apparente au filtrage optimal (cf. annexe C) : dans le premier cas, le problème est exprimé dans le domaine temporel, et dans le second cas, dans le domaine fréquentiel. Il est possible d'exprimer les composantes de $J'\Omega^{-1}J$ en utilisant la densité spectrale de puissance correspondant à ω : si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs colonnes, alors

$$\mathbf{v}'\Omega^{-1}\mathbf{w} = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} \frac{1}{S_e(f)} \mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{v}\}(f) \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{w}\}(f)} df \quad (3.47)$$

Il est possible d'utiliser cette méthode pour traiter les données. Dans le cas de l'accéléromètre MicroSTAR et des signaux de modulation retenus, le gain apporté par cette méthode est faible. En effet, la figure 3.5(a) montre que la transformée de Fourier est piquée autour de la fréquence de modulation $2/\tau$ avec une largeur fréquentielle égale à $1/\tau$. Par conséquent, en utilisant le théorème de Parseval, on voit que le bruit est sélectionné autour de la fréquence $2/\tau$

$$\left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} \frac{1}{S_e(f)} |\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i\}(f)|^2 df \right)^{-1} \approx \frac{1}{\tau} S_e\left(\frac{2}{\tau}\right) \approx \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_e(f) \left| \frac{\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i\}(f)}{q \cdot \delta t} \right|^2 df \quad (3.48)$$

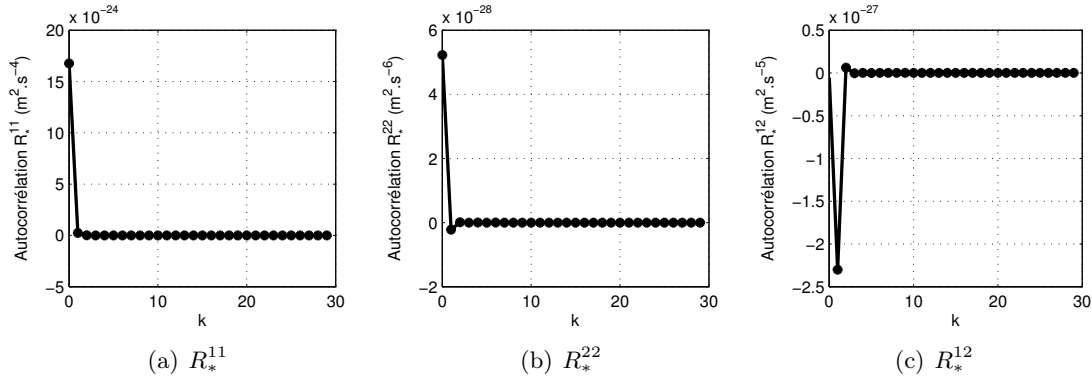


FIGURE 3.10 – Fonctions d'autocorrelation $R_*^{11}[k]$, $R_*^{22}[k]$ et $R_*^{12}[k]$ calculées par la méthode des moindres carrés généralisés pour le signal de modulation 3 (cf. fig. 3.2) avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz. Les valeurs pour $k = 0$ sont $R_*^{11}(0) = 1,68 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$ et $R_*^{22}(0) = 5,22 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-6}$.

Les figures 3.10 montrent les fonctions d'auto-corrélation du signal extérieur lorsque les moindres carrés généralisés sont utilisés. On voit qu'elles sont très similaires à celles de la figures 3.6. Pour la figure 3.6(a), on a une valeur de $1,80 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$ pour $k = 0$ alors que pour la figure 3.10(a), on a $1,68 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$. Il n'est donc pas forcément judicieux d'utiliser les moindres carrés généralisés car les résultats dépendent de la caractérisation du bruit de mesure, via S_e , qui peut être erronée (cf. section C.4.1).

3.4 Utilisation des mesures d'accélération sans biais

À partir des mesures de la moyenne de l'accélération non-gravitationnelle sur chaque période de modulation de durée τ , il est possible d'obtenir des informations supplémentaires sur des durées plus longues.

3.4.1 Mesure de la moyenne

On peut dans un premier temps chercher à augmenter la précision de la mesure de l'accélération non-gravitationnelle. Pour ce faire, il faut calculer la moyenne sur des durées plus longues que la période de modulation. La figure 3.11 montre la valeur de la précision en fonction du temps d'intégration. Comme le bruit peut être assimilé à un bruit blanc, la précision décroît en $1/\sqrt{T}$, où T est le temps d'intégration.

Il serait possible, pour déterminer la moyenne sur une durée T , d'utiliser directement un signal de modulation de période $\tau = T$, comme sur la figure 3.12. Cette approche a deux inconvénients. Tout d'abord, elle ne permet pas d'avoir accès à des variations sur des durées inférieures à T . De plus, elle conduit à une dégradation de la précision sur la moyenne. En effet, dans ce cas, le bruit de MicroSTAR est sélectionné à la fréquence $2/T$ et $S_e(2/T) > S_e(2/\tau)$ lorsque $T > \tau$ et $\tau > 20$ s, ce qui est le cas ici.

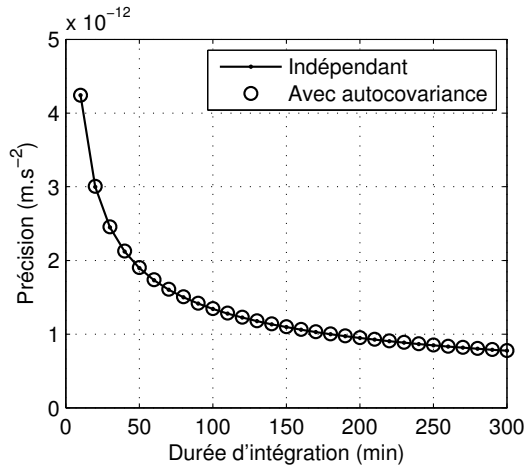


FIGURE 3.11 – Précision sur la moyenne du signal extérieur en fonction du temps d'intégration, en supposant soit que les moyennes du signal sur chaque période sont indépendantes soit qu'elles suivent la fonction d'autocorrélation de la figure 3.6(a). La figure est réalisée pour le signal de modulation 3 (cf. fig. 3.3) avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz. Elle montre que l'hypothèse d'indépendance est correcte. Pour un temps d'intégration de 3 heures, la précision est égale à $1 \text{ pm} \cdot \text{s}^{-2}$ pour la moyenne de l'accélération.

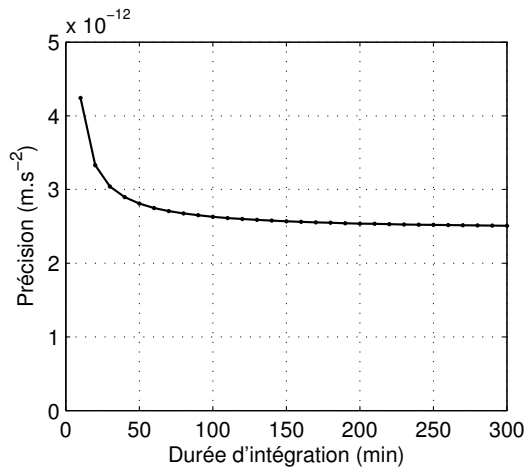


FIGURE 3.12 – Cette figure est identique à la figure 3.11 mais la période de modulation est égale à la durée d'intégration. La précision est moins bonne que dans la figure 3.11 car plus la durée d'intégration augmente, plus la fréquence à laquelle est sélectionné le bruit de MicroSTAR est petite, sachant qu'il y a une remontée en $1/f$ aux basses fréquences de la DSP.

3.4.2 Variations sinusoïdales

Il est aussi possible de chercher des variations sinusoïdales à une fréquence donnée f^* de l'accélération non-gravitationnelle. Le but est alors de trouver les coefficients α et β d'un signal temporel $\alpha \cos(2\pi f^* t) + \beta \sin(2\pi f^* t)$ en utilisant les valeurs moyennes de

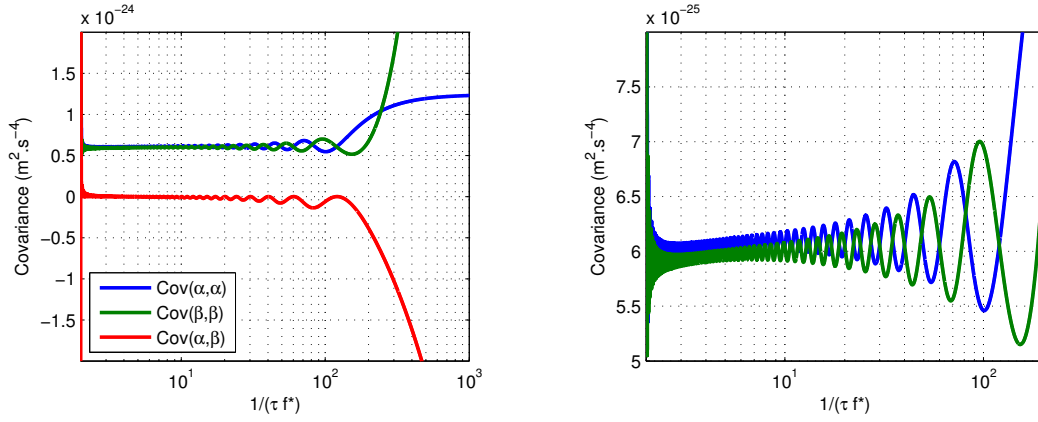


FIGURE 3.13 – Covariances des quantités α et β telles que définies par l'équation (3.49). Les figures correspondent au signal de modulation 3 (cf. fig. 3.3) avec une période de modulation τ de 600 s, une durée de masquage T_M de 200 s et une fréquence d'échantillonnage f_s de 1 Hz. L'optimisation a été faite avec 60 points, i.e. la taille de la matrice F dans l'équation (3.49) est 60×2 et le temps total d'intégration est $60 \times \tau = 10$ h.

l'accélération non-gravitationnelle sur chaque période de modulation. Il est possible de caractériser l'incertitude sur α et β . Soit p le nombre de périodes de modulation considéré, de telle sorte que $pq = N$. On appelle $\Omega_d \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de covariance définie par $\Omega_{dij} = R^{11}[i - j]$ et l'on définit la matrice $F \in \mathcal{M}_{p,2}(\mathbb{R})$ par $F_{k1} = \cos(2\pi f^* \tau k)$ et $F_{k2} = \sin(2\pi f^* \tau k)$. La matrice de covariance pour α et β est alors

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(\alpha, \alpha) & \text{Cov}(\alpha, \beta) \\ \text{Cov}(\alpha, \beta) & \text{Cov}(\beta, \beta) \end{bmatrix} = (F'F)^{-1} F' \Omega_d F (F'F)^{-1} \quad (3.49)$$

La figure 3.13 montre, pour un jeu de paramètres donnés ($\tau = 600$ s, $T_M = 200$ s, $f_s = 1$ Hz), les variations des composantes de la matrice de covariance en fonction de $1/(\tau f^*)$. La valeur minimale sur l'axe x a été fixée à 2, c'est-à-dire $f^* = 1/(2\tau)$. Cela vient du théorème de Nyquist-Shannon [163] qui ne permet pas de récupérer des variations sinusoïdales à des fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, qui est égale à $1/\tau$ dans ce cas.

À l'inverse, lorsque $1/(\tau f^*)$ devient grand, l'incertitude diverge. La valeur pour laquelle cela arrive dépend de la taille de la matrice F , c'est-à-dire du nombre de points utilisés pour déterminer la sinusoïde : plus il y a de points, plus il est facile de déterminer un signal à basse fréquence. Pour $\tau = 10$ min et f^* la fréquence d'une période de révolution de la Terre, le ratio des fréquences est $1/(\tau f^*) = 144$. Dans ce cas particulier, avec 60 points de mesure (ce qui correspond à 10 heures de mesure) et pour une période de modulation de

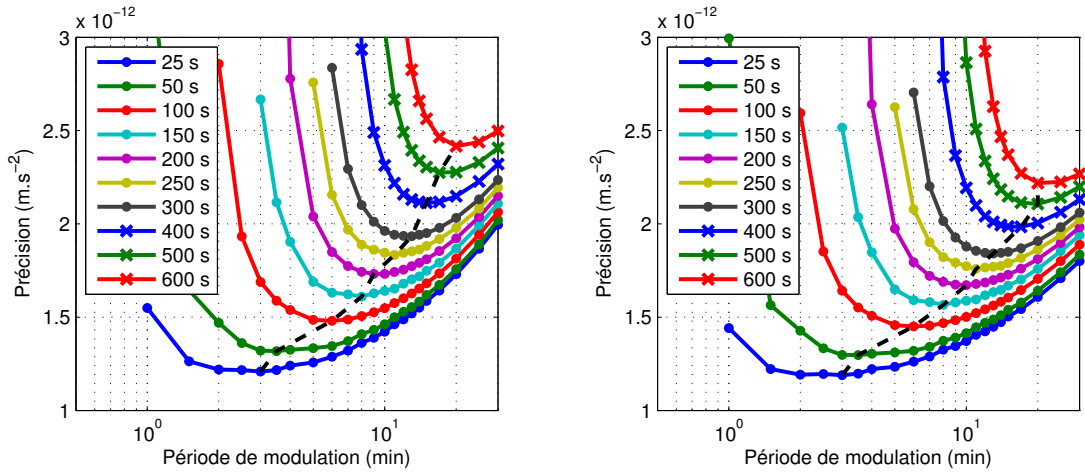
10 min

$$\begin{cases} \sqrt{\text{Cov}(\alpha, \alpha)} = 8,7 \times 10^{-13} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} & (3.50a) \\ \sqrt{\text{Cov}(\beta, \beta)} = 7,3 \times 10^{-13} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} & (3.50b) \\ \text{Cov}(\alpha, \beta) = -5,7 \times 10^{-26} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-4} & (3.50c) \end{cases}$$

Ces valeurs numériques montrent qu'il est possible d'obtenir, dans cette configuration, l'amplitude d'une sinusoïde avec une précision meilleure que $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$.

3.5 Discussion

3.5.1 Optimisation du signal de modulation



(a) Figure obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés

(b) Figure obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés généralisés

FIGURE 3.14 – Précision sur la valeur moyenne de l'accélération pour un temps d'intégration d'une heure et pour le signal de modulation 3 (cf. fig. 3.3). Les courbes sont paramétrées par la durée du masquage. La ligne pointillée montre la période de modulation qui donne la meilleure précision étant donné une durée de masquage.

Jusqu'à maintenant, une seule période de modulation ($\tau = 10 \text{ min}$) et une seule durée de masquage ($T_M = 200 \text{ s}$) ont été considérées. Cependant, la précision sur les quantités démodulées dépend de leur valeur. La figure 3.14 montre la précision sur la moyenne du signal sans biais pour un temps d'intégration de 1 heure pour le calcul effectué avec les moindres carrés (a) et les moindres carrés généralisés (b). Ces valeurs sont calculées en prenant la valeur de $R^{11}[0]$ et en la multipliant par $\sqrt{\tau/T}$ où τ est la période de modulation et T est la durée d'intégration, prise égale à 1 heure. Comme cela a déjà été mentionné, plus la durée de masquage est longue, plus la valeur numérique de la précision est grande. Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de retourner l'accéléromètre trop vite : la durée de masquage minimal dépendra de la vitesse maximum de rotation.

Comme indiqué précédemment, on voit que la différence entre la méthode des moindres carrés et celle des moindres carrés généralisés est faible, bien que cette dernière donne des valeurs pour la précision légèrement plus faible. L'utilité principale de ces courbes est de connaître la période de modulation qui minimise la précision étant donnée une durée de masquage.

3.5.2 Filtrage avant numérisation

Afin d'obtenir la formule (3.43), il est nécessaire de supposer que le signal mesuré par MicroSTAR est filtré avant conversion digitale par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $1/(2\delta t)$ afin de supprimer les effets de repliement spectral (cf. annexe A). Dans le domaine temporel, cela signifie que la convolution avec

$$h(t) = \frac{1}{\delta t} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{\delta t}\right) \quad (3.51)$$

est effectuée avant conversion digitale. Dans le cas considéré ici, il peut être légitime d'utiliser un autre filtre. En effet, on s'est intéressé en particulier à déterminer la valeur moyenne du signal et du biais sur chaque période de modulation. Cependant, avec le filtre ci-dessus, les données numérisées ne sont pas les moyennes sur la durée d'échantillonnage δt . L'idée est donc d'utiliser une moyenne glissante avec le filtre

$$h_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta t} & \text{si } -\frac{\delta t}{2} \leq t \leq \frac{\delta t}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.52a)$$

$$(3.52b)$$

Dans ce cas, le filtre dans le domaine de Fourier a pour expression $\mathcal{F}\{h_m\}(f) = \operatorname{sinc}(\pi f / f_s)$. Par conséquent le bruit n'est pas parfaitement filtré pour des fréquences supérieures à f_s : dans les équations précédentes, la densité spectrale de puissance S_e devrait être remplacée par $\widetilde{S}_e$ définie par

$$\widetilde{S}_e(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(f + kf_s)}{f_s}\right) S_e(f + kf_s). \quad (3.53)$$

Si la formule analytique de S_e est utilisée telle quelle, cette somme diverge du fait du terme en f^4 . Pour lever ce problème, il faut simplement considérer que l'accéléromètre a une fréquence de coupure au-delà de laquelle la sommation s'effectue sur des termes nuls.

3.5.3 Spécifications sur la platine rotative

Dans tout ce qui précède, on a considéré la matrice J parfaitement connue. Ce n'est cependant pas le cas car la définition de la matrice J fait intervenir l'angle θ et la connaissance de θ peut être dégradée par un biais et du bruit. Ainsi, il y a une différence entre la valeur réelle de l'angle de rotation noté θ^* , et l'angle de rotation mesurée noté θ

$$\theta = \theta^* + b_\theta + \delta\theta \quad (3.54)$$

où b_θ est un biais déterministe et $\delta\theta$ un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle qui décrit le bruit qui s'ajoute à la mesure de l'angle θ . Cela conduit à un bruit sur les matrices Λ_c and Λ_s décrit par

$$\delta\Lambda_c = \text{diag}[\cos(\theta_k + \delta\theta_k) - \cos(\theta_k)] \approx -\text{diag}[\delta\theta_k \sin(\theta_k)] \quad (3.55)$$

et

$$\delta\Lambda_s = \text{diag}[\sin(\theta_k + \delta\theta_k) - \sin(\theta_k)] \approx \text{diag}[\delta\theta_k \cos(\theta_k)] \quad (3.56)$$

L'impact du biais b_θ sur la mesure a été estimé précédemment (cf. section 2.4.2). Il a été montré que b_θ doit être inférieur à 10^{-5} rad pour avoir une mesure à $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$ près. Dans les équations (3.7), $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ sont les bruit introduits par l'accéléromètre MicroSTAR sur chacun des axes. Ils n'incluent pas le bruit sur la mesure de l'angle θ . Pour en tenir compte, il est possible d'introduire un bruit généralisé : les quantités $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ sont remplacées par $\tilde{\mathbf{e}}_y = \mathbf{e}_y + \hat{\mathbf{e}}_y$ et $\tilde{\mathbf{e}}_z = \mathbf{e}_z + \hat{\mathbf{e}}_z$ avec

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_z = k_{1y} [\delta\Lambda_c \mathbf{a}_y + \delta\Lambda_s \mathbf{a}_z] \\ \hat{\mathbf{e}}_y = k_{1z} [-\delta\Lambda_s \mathbf{a}_y + \delta\Lambda_c \mathbf{a}_z] \end{cases} \quad (3.57a)$$

$$\quad (3.57b)$$

Ces bruits additionnels dépendent des valeurs de $\mathbf{a}_y$ et $\mathbf{a}_z$ et de $\delta\Lambda_c$ et $\delta\Lambda_s$. Par conséquent, plus le signal à mesurer est faible, plus le bruit induit par l'incertitude sur la mesure de θ sera faible.

Jusqu'ici, on a considéré que $\delta\Lambda_c$ et $\delta\Lambda_s$ sont nulles, c'est-à-dire que la seule source de bruit prise en compte est l'accéléromètre. Ici, ce bruit généralisé va permettre de donner des spécifications sur la quantité $\delta\theta$ pour atteindre les objectifs de précision souhaités pour l'instrument (cf. section 3.5.3). Le but est que ce soit le bruit de l'accéléromètre MicroSTAR qui soit le facteur limitant pour la précision. Pour avoir un tel résultat, il faut que

$$\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_{\hat{e}}(f) |\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i\}(f)|^2 df \ll \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_e(f) |\mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{c}_i\}(f)|^2 df \quad (3.58)$$

où $S_{\hat{e}}$ est la densité spectrale de bruit de $\hat{e}$ dû à la platine rotative. En supposant que $a_y \approx a_z \approx a_{NG}$, on a $\hat{e} = \delta\theta a_{NG}$. Comme le traitement du signal sélectionne le bruit à la fréquence $2/\tau$, il faut que $S_{\hat{e}}(f) \ll S_e(f)$ pour $f \in [1/(\tau); 3/(\tau)]$. Par conséquent, il faut que

$$\forall f \in \left[\frac{1}{\tau}; \frac{3}{\tau}\right], S_{\delta\theta}(f) \ll \frac{S_e(f)}{a_{NG}^2} \quad (3.59)$$

Pour calculer a_{NG} , on suppose que le contributeur principal à la force non-gravitationnelle est la pression de radiation solaire et que la sonde spatiale est à une unité astronomique d_0 du Soleil : on prend, comme à la section 2.4.2, $a_{NG} = C_B P/c = 4,6 \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pour la valeur minimale de S_e , la condition s'écrit

$$\sqrt{S_{\delta\theta}(f)} = 1,3 \times 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{Hz}^{-1/2}. \quad (3.60)$$

3.5.4 Connaissance des facteurs d'échelle

On peut appliquer la méthode introduite ci-dessus pour déterminer la stabilité nécessaire des facteurs d'échelle pour obtenir la précision de mesure souhaitée. En effet, jusqu'à maintenant, les facteurs d'échelle ont été supposés constants. En pratique, ils peuvent varier avec une composante déterministe et une composante stochastique.

Comme le facteur d'échelle est indissociable de l'accélération, dans le sens où on mesure le produit des deux, la partie déterministe du facteur d'échelle doit être mesurée séparément pour être ensuite retirée [164]. Si l'on souhaite une précision finale sur l'accélération de $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$, il faut que la connaissance du facteur d'échelle soit précise à $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}/a^*$, où a^* est l'amplitude du signal extérieur.

Concernant la partie stochastique de la variation temporelle du facteur d'échelle, on introduit S_{k_1} sa densité spectrale de puissance. D'après la section précédente, pour que ce bruit soit négligeable devant celui de MicroSTAR, on doit avoir

$$\sqrt{S_{k_1}(f)} \ll 1,3 \times 10^{-4} \text{ Hz}^{-1/2}. \quad (3.61)$$

3.5.5 Orthogonalité des axes de mesure

On a supposé dès le début de ce chapitre que les axes de mesure de l'accéléromètre MicroSTAR étaient orthogonaux en supprimant la matrice de couplage. Supposons que les axes de mesure réels ne soient pas parfaitement alignés avec les axes de mesure supposés et restreignons nous au plan défini par les axes x et y . L'angle θ_e mesure l'écart à l'orthogonalité entre ces deux axes de mesure. On suppose ici que selon la direction y , l'axe de mesure réel et l'axe de mesure supposé sont confondus. Les équations (3.5) deviennent (en annulant les facteurs quadratiques)

$$\begin{cases} m_y = k_{1y} [\cos(\theta)(a_Y + \sin(\theta_e)a_Z) + \sin(\theta) \cos(\theta_e)a_Z] + b_y + n_y & (3.62a) \\ m_z = k_{1z} [-\sin(\theta)(a_Y + \sin(\theta_e)a_Z) + \cos(\theta) \cos(\theta_e)a_Z] + b_z + n_z & (3.62b) \end{cases}$$

Ainsi, en appliquant les méthodes développées dans ce chapitre, on obtiendra sans biais les quantités $a_Y + \sin(\theta_e)a_Z$ et $\cos(\theta_e)a_Z$. Pour avoir une précision p , il faut donc que

$$\begin{cases} |\sin(\theta_e)a_{NG}| \leq p & (3.63a) \\ |(1 - \cos(\theta_e))a_{NG}| \leq p & (3.63b) \end{cases}$$

En prenant $p = 1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$ et $a_{NG} = C_B P/c = 4,6 \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, il faut avoir une connaissance de θ_e à $2,2 \times 10^{-6} \text{ rad}$ près. A l'inverse, si l'on cherche une précision de $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$ mais que l'orthogonalité ne peut être connue qu'à $2,2 \times 10^{-5} \text{ rad}$, avec les mêmes données pour calculer la pression de radiation solaire, il faut se placer au-delà de 3 UA du Soleil.

3.6 Correction du biais sur trois axes

Dans tout ce chapitre, on s'est intéressé à la correction du biais de MicroSTAR dans la configuration de l'instrument GAP, c'est-à-dire avec une seule platine rotative. La configuration retenue permet de faire des mesures sans biais selon les deux axes perpendiculaires à l'axe de rotation. Dans le cas où celui-ci est perpendiculaire au plan de l'orbite moyen, cela permet d'avoir toutes les informations nécessaires pour la restitution d'orbite. Il peut être néanmoins intéressant de faire des mesures sans biais suivant les trois axes. Dans un premier temps, on démontre qu'il est nécessaire d'avoir deux axes de rotation non-colinéaires. On détermine ensuite les conditions sur les deux angles paramétrant les rotations pour avoir des mesures sans biais et on donne deux exemples concrets de signaux de calibration. Il est bien sûr possible, comme pour la correction du biais sur deux axes, de calculer les précisions obtenues après traitement des données.

3.6.1 Nombre de rotations nécessaires

Supposons qu'une seule rotation, paramétrée par l'angle θ , permette de modifier l'orientation de l'accéléromètre MicroSTAR. Les équations de mesure peuvent se mettre sous la forme

$$QJX = M + E \quad (3.64)$$

avec $Q \in \mathcal{M}_{3N,1}(\mathbb{R})$ une matrice de changement de base qui code l'orientation de l'accéléromètre par rapport à la partie tournante de la platine rotative. Dans ce cas, la matrice $J_0 \in \mathcal{M}_{6N,12N}(\mathbb{R})$ est égale à

$$J_0 = \begin{bmatrix} \text{Id}_N & 0_N & 0_N & \text{Id}_N & 0_N & 0_N \\ 0_N & \Lambda_{\theta_c} & \Lambda_{\theta_s} & 0_N & \text{Id}_N & 0_N \\ 0_N & -\Lambda_{\theta_s} & \Lambda_{\theta_c} & 0_N & 0_N & \text{Id}_N \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

et la matrice P vaut

$$P = \text{diag}(V_a; V_a; V_a; V_b; V_b; V_b) \quad (3.66)$$

Pour effectuer des mesures sans biais après traitement du signal, il faut que $\text{rg}(QJ_0P) = 3p_a + 3p_b$. Pour $V_a = V_b = V_1$, cette condition n'est pas vérifiée. Une telle configuration ne permet donc pas de déterminer la valeur moyenne du signal et du biais sur une période de modulation. Il est donc nécessaire de disposer de deux rotations.

3.6.2 Conditions pour la correction du biais

On suppose maintenant que l'accéléromètre MicroSTAR peut tourner autour de son axe x et de son axe y . La matrice de changement de base $T_{5 \leftarrow 0}$ s'écrit

$$T_{5 \leftarrow 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

où ψ est l'angle qui paramètre la rotation autour de l'axe y . En omettant les facteurs quadratiques et les bruits de mesure, les mesures accélérométriques sont donc reliées aux composantes du signal dans le repère du Système Solaire de la manière suivante

$$\begin{cases} a_x = k_{1x} [\cos(\psi)a_X - \sin(\psi)a_Z] + b_x \end{cases} \quad (3.68a)$$

$$\begin{cases} a_y = k_{1y} [\sin(\theta) \sin(\psi)a_X + \cos(\theta)a_Y + \sin(\theta) \cos(\psi)a_Z] + b_y \end{cases} \quad (3.68b)$$

$$\begin{cases} a_z = k_{1z} [\cos(\theta) \sin(\psi)a_X - \sin(\theta)a_Y + \cos(\theta) \cos(\psi)a_Z] + b_z \end{cases} \quad (3.68c)$$

On introduit les quatre matrices suivantes, appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, avec $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$

$$\Lambda_{\theta c} = \text{diag}[\cos(\theta_k)] \text{ et } \Lambda_{\theta s} = \text{diag}[\sin(\theta_k)] \quad (3.69)$$

$$\Lambda_{\psi c} = \text{diag}[\cos(\psi_k)] \text{ et } \Lambda_{\psi s} = \text{diag}[\sin(\psi_k)] \quad (3.70)$$

Cela permet d'écrire les équations de mesures (3.68) de manière complètement matricielle

$$JD = M + E \quad (3.71)$$

avec $D \in \mathcal{M}_{6N,1}(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_{3N,1}(\mathbb{R})$, $E \in \mathcal{M}_{3N,1}(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_{6N,12N}(\mathbb{R})$ définies par

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \\ \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_x \\ \mathbf{m}_y \\ \mathbf{m}_z \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

et

$$J = \begin{bmatrix} k_{1x}\Lambda_{\psi c} & 0_N & -k_{1x}\Lambda_{\psi s} & \text{Id}_N & 0_N & 0_N \\ k_{1y}\Lambda_{\theta s}\Lambda_{\psi s} & k_{1y}\Lambda_{\theta c} & k_{1y}\Lambda_{\theta s}\Lambda_{\psi c} & 0_N & \text{Id}_N & 0_N \\ k_{1z}\Lambda_{\theta c}\Lambda_{\psi s} & -k_{1z}\Lambda_{\theta s} & k_{1z}\Lambda_{\theta c}\Lambda_{\psi c} & 0_N & 0_N & \text{Id}_N \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

En faisant le même raisonnement que dans la section 3.2.3, on en déduit que la démodulation fonctionne suivant les trois axes, dans le cas simplifié où $P = \hat{P}$, si

$$P' J'_0 J P = P' J'_0 J_0 P K \quad (3.74)$$

avec

$$P = \text{diag}(V_a; V_a; V_a; V_b; V_b; V_b) \quad (3.75)$$

À partir de cette égalité, on déduit les conditions suivantes. Tout d'abord, il faut que $P'J'_0J_0P$ soit inversible, ce qui nécessite que $\text{rg}(J_0P) = 3p_a + 3p_b$. Ensuite, en exprimant cette égalité terme à terme, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\psi c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\psi s} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta s} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta c} \Lambda_{\psi c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta c} \Lambda_{\psi s} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta s} \Lambda_{\psi c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta s} \Lambda_{\psi s} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.76h)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' (k_{1x} \Lambda_{\psi c}^2 + k_{1y} \Lambda_{\theta s}^2 \Lambda_{\psi s}^2 + k_{1z} \Lambda_{\theta c}^2 \Lambda_{\psi s}^2) V_a = k_{1x} \text{Id}_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.77a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' (k_{1y} \Lambda_{\theta c}^2 + k_{1z} \Lambda_{\theta s}^2) V_a = k_{1y} \text{Id}_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.77b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' (k_{1x} \Lambda_{\psi s}^2 + k_{1y} \Lambda_{\theta s}^2 \Lambda_{\psi c}^2 + k_{1z} \Lambda_{\theta c}^2 \Lambda_{\psi c}^2) V_a = k_{1z} \text{Id}_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.77c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' (k_{1y} - k_{1z}) \Lambda_{\theta s} \Lambda_{\theta c} \Lambda_{\psi c} V_a = 0_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.78a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' (k_{1y} - k_{1x}) \Lambda_{\theta s} \Lambda_{\theta c} \Lambda_{\psi s} V_a = 0_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.78b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\psi c} \Lambda_{\psi s} (-k_{1x} + k_{1y} \Lambda_{\theta s}^2 + k_{1z} \Lambda_{\theta c}^2) V_a = 0_{p_a} \end{array} \right. \quad (3.78c)$$

Les équations (3.77) et (3.78) sont vérifiées si les angles θ et ψ ne prennent lors des mesures que les valeurs 0 rad et π rad. C'est cette approche qui avait été utilisée dans la cadre de la correction du biais sur deux axes. Dans ce cas, il n'y a qu'à vérifier les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\psi c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.79a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.79b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a' \Lambda_{\theta c} \Lambda_{\psi c} V_b = 0_{p_a p_b} \end{array} \right. \quad (3.79c)$$

3.6.3 Exemples de signaux de modulation

Pour conclure cette discussion sur la correction de biais suivant trois axes, on introduit des signaux de modulation qui permettent de vérifier les conditions ci-dessus dans le cas d'un satellite non-spinné et dans le cas d'un satellite spinné.

Satellite non-spinné

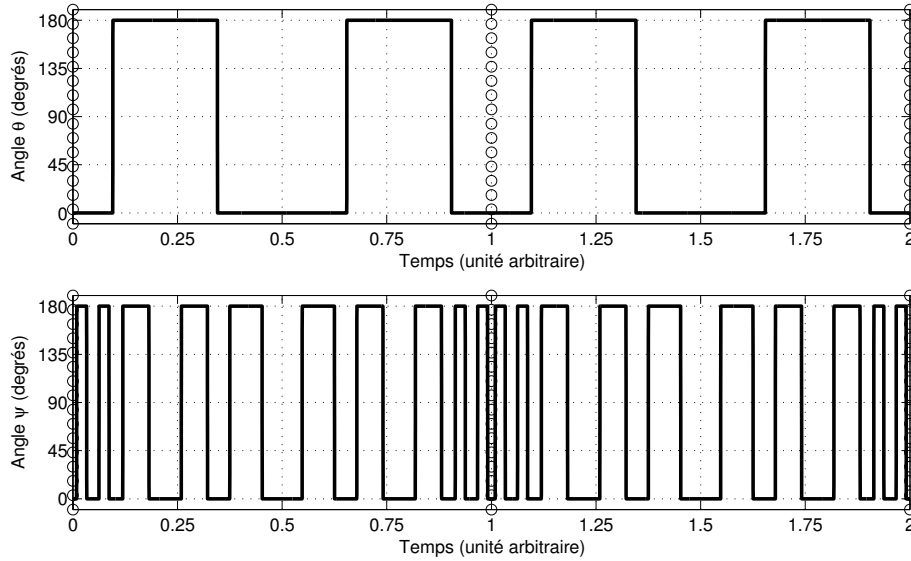


FIGURE 3.15 – Signaux de modulation pour une correction du biais sur trois axes. Deux périodes sont représentées, séparées par des cercles (o). Le temps de masquage par période pour la représentation graphique vaut 10 % de la période. Sur ces courbes, la rotation est instantanée bien que ce ne soit pas le cas en pratique.

La figure 3.15 propose des variations de θ et ψ qui permettent de vérifier les conditions (3.79) pour V_a et V_b appartenant à l'ensemble $\{V_1, V_2\}$. La variation temporelle de l'angle θ est exactement identique au signal de modulation 3. Pour l'angle ψ , on répète le signal de modulation 3 sur chaque période pour laquelle l'angle θ est constant. Cela permet de vérifier la condition (3.79c).

Il est possible d'avoir des signaux de modulation plus simples pour lesquels les conditions sont vérifiées seulement pour $V_a = V_b = V_1$. Pour cela, on prend le signal de modulation 1 pour θ et le signal de modulation 2 pour ψ .

Sonde spinnée

Dans le cas d'une sonde en rotation autour d'un de ses axes, une des rotations nécessaires pour supprimer le biais sur les trois axes est réalisée par le mouvement de la sonde. Une seule platine rotative suffit et l'on suppose que son axe de rotation est perpendiculaire à l'axe de rotation de la sonde. On suppose que l'angle ψ décrit la rotation de la sonde à la fréquence f_e , c'est-à-dire

$$\psi(t) = 2\pi f_e t. \quad (3.80)$$

Dans cette configuration, on ne peut plus considérer que l'on fait des mesures seulement lorsque les angles valent 0 rad et π rad. Si les facteurs d'échelle sont parfaitement connus, c'est-à-dire égaux à l'unité, cela implique que la condition (3.74) est toujours vérifiée. La

seule chose dont il faut s'assurer est que $\text{rg}(J_0 P) = 3p_a + 3p_b$. Cela est vérifié si, par exemple, le signal de modulation 2 est utilisé pour l'angle θ . Dans le cas où les facteurs d'échelle ne sont pas égaux à l'unité, les équations (3.77) et (3.78) ne seront pas parfaitement vérifiées. Il y aura donc un mélange du signal et du biais ainsi qu'un mélange des mesures suivant des axes différents. En pratique, le problème ne se pose pas car la mission OSS propose une sonde stabilisée suivant les trois axes.

Chapitre 4

Validation expérimentale de la correction du biais

Sommaire

4.1 Montage expérimental	82
4.1.1 Système de mesure	83
4.1.2 Pendule asservi horizontalement	85
4.2 Méthode expérimentale et traitement des données	87
4.2.1 Modélisation de l'expérience	87
4.2.2 Description des mesures	88
4.2.3 Traitement des données	89
4.3 Résultats et discussion	89
4.3.1 Détermination de l'orientation relative	89
4.3.2 Validation expérimentale du principe de démodulation	89
4.3.3 Précision des mesures	93
4.4 Conclusion	94

Le chapitre précédent a permis de développer une approche innovante concernant l'utilisation du Gravity Advanced Package d'une part et le traitement des données d'autre part. La méthodologie développée permet de séparer le biais de mesure de l'accéléromètre du signal extérieur et donc d'obtenir, après traitement des données, des mesures d'accélération sans biais. Le but de ce chapitre est de présenter une validation expérimentale de ces méthodes de mesure et de traitement des données [165].

Il est démontré dans ce chapitre qu'il est possible de séparer parfaitement le biais du signal extérieur sur des données expérimentales, lorsqu'on se place dans les conditions présentées précédemment. Concernant la précision sur la mesure des accélérations sans biais, l'écart-type obtenu expérimentalement est comparé à la précision attendue théoriquement.

Comme le Gravity Advanced Package n'est pas disponible, des instruments commerciaux ont été utilisés : le système de mesure qui remplace le Gravity Advanced Package ainsi que l'ensemble de l'expérience sont décrits à la section 4.1. Dans la section 4.2, la méthodologie de mesure ainsi que le traitement des données sont présentés. Enfin, les résultats sont discutés dans la section 4.3.

4.1 Montage expérimental

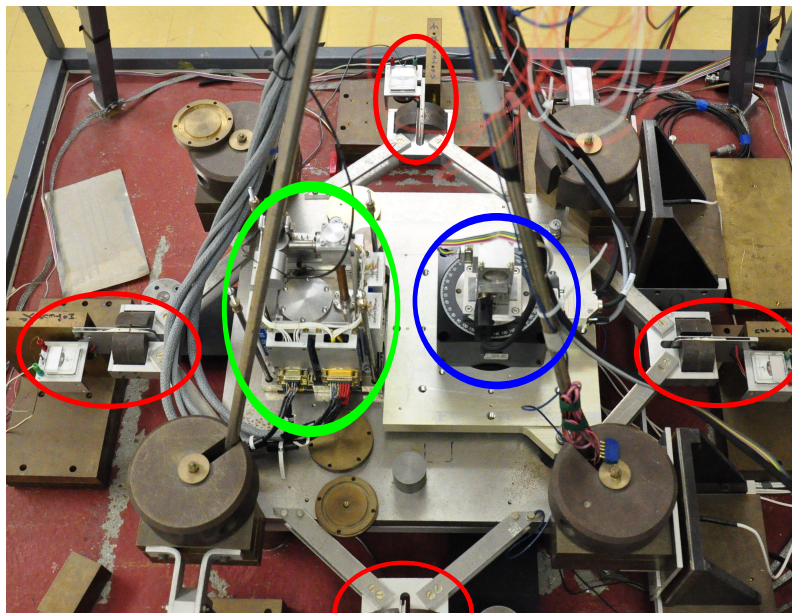


FIGURE 4.1 – L'attitude du pendule est contrôlée par des actionneurs (entourés en rouge). Le DM1 (entouré en vert) est utilisé par le système d'asservissement pour contrôler l'inclinaison du pendule. Cela permet de supprimer le bruit sismique. Les deux accéléromètres Q-Flex (A et B) placés sur la platine rotative Newport (entourés en bleu) sont utilisés pour faire les mesures. L'électronique n'est pas visible sur cette image.

Le montage expérimental est présenté en figure 4.1. Il se compose de deux systèmes. D'un côté, le système de mesure est utilisé pour remplacer le Gravity Advanced Package :

il est décrit à la section 4.1.1. De l'autre, le pendule contrôlé par un accéléromètre électrostatique, appelé DM1, est utilisé pour imposer une accélération connue au système de mesure : il est décrit en section 4.1.2.

4.1.1 Système de mesure

Le système de mesure utilisé pour mimer le Gravity Advanced Package est composé de :

- une platine rotative RGV100BL fabriquée par Newport [166] qui correspond au Bias Rejection System. L'axe de rotation est noté x et il est vertical. Comme pour le Gravity Advanced Package, la rotation est paramétrée par un angle θ . La répétabilité angulaire est égale à $0,0003^\circ$. Étant donné le bruit des accéléromètres Q-Flex, le bruit introduit par la platine rotative est négligeable.
- deux accéléromètres Q-Flex QA-700 fabriqués par Honeywell [167]. Ce sont des accéléromètres mono-axial et ils sont positionnés de telle sorte que les axes de mesure soient perpendiculaires. Les Q-Flex A et B mesurent le champ de gravité local le long des axes z et y , respectivement, du repère lié à la partie en rotation de la platine Newport.

	Q-Flex A	Q-Flex B
Q-Flex + convertisseur	$0.8376 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1}$	$0.8120 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1}$
amplificateur	1010.9	990.54
Total	$\tilde{G}_A = 846.73 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1}$	$\tilde{G}_B = 804.32 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1}$

TABLE 4.1 – Mesures expérimentales des gains des chaînes de mesure des Q-Flex A et B

La sortie d'un Q-Flex est un courant proportionnel à l'accélération mesurée. La chaîne de mesure d'un accéléromètre est composée d'un convertisseur courant-tension et d'un amplificateur. Afin d'obtenir le gain de tout l'instrument, le processus d'étalonnage est effectué en deux étapes. Tout d'abord, le gain de l'accéléromètre avec le convertisseur courant-tension est mesuré. Pour ce faire, l'axe de mesure du Q-Flex est placé verticalement de telle sorte que le champ de gravité local g est mesuré ; ensuite, l'instrument est retourné afin de mesurer $-g$. En soustrayant et en additionnant ces deux mesures, et connaissant la valeur du champ de gravité local, le facteur d'échelle et le biais du Q-Flex avec son convertisseur courant-tension sont déterminés¹. Dans un deuxième temps, le facteur d'échelle de l'amplificateur est obtenu en mesurant précisément la sortie (en V) en fonction de l'entrée (en V). Les valeurs numériques sont données dans le tableau 4.1 : $\tilde{G}_A$ et $\tilde{G}_B$ désignent les valeurs expérimentales alors que G_A et G_B sont les valeurs exactes. Cela permet d'introduire les facteurs d'échelle sur chaque axe : $k_y = \tilde{G}_B/G_B$ et $k_z = \tilde{G}_A/G_A$,

1. On pourrait étalonner le gain en positionnant l'accéléromètre horizontalement. Cette approche est cependant moins performante car lorsque l'angle γ , qui mesure l'écart à l'horizontalité ou la verticalité, est proche de 0rad , $\cos(\gamma) \sim 1 - \gamma^2/2$ et $\sin(\gamma) \sim \gamma$. L'écart à la verticalité a donc un impact en γ^2 sur la projection de la gravité sur l'axe de mesure alors que l'écart à l'horizontalité a un impact en γ .

qui sont petits devant 1.

Les valeurs numériques sont choisies pour que les gains de toute la chaîne de mesure des Q-Flex soient comparables à celui du DM1 (cf. section 4.1.2). Il est aussi possible de connaître approximativement les valeurs numériques du biais de toute la chaîne de mesure pour les Q-Flex A et B, respectivement $b_A = -224,50$ V et $b_B = -52,19$ V.

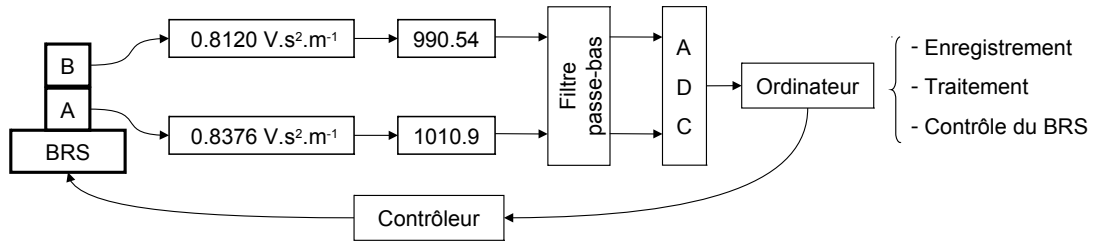


FIGURE 4.2 – Schéma de la chaîne de mesure : l'ordinateur est utilisé pour enregistrer et traiter les données et pour contrôler la platine rotative. Un filtre passe-bas est placé avant le convertisseur analogique-numérique (ADC) pour éviter le repliement de spectre.

Finalement, les données ont besoin d'être numérisées pour le post-traitement. Pour cela, un filtre passe-bas SR640 [168] est utilisé pour supprimer le repliement de spectre lors de la numérisation réalisée avec le convertisseur analogique-numérique NI 6033 [169]. La caractérisation de ces systèmes en terme de biais, facteur d'échelle et bruit a été réalisée et est utilisée lors du traitement des données. Pour toutes les expériences, la fréquence de coupure du filtre est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage pour supprimer le repliement de spectre. Un schéma de la chaîne de mesure est présenté en figure 4.2.

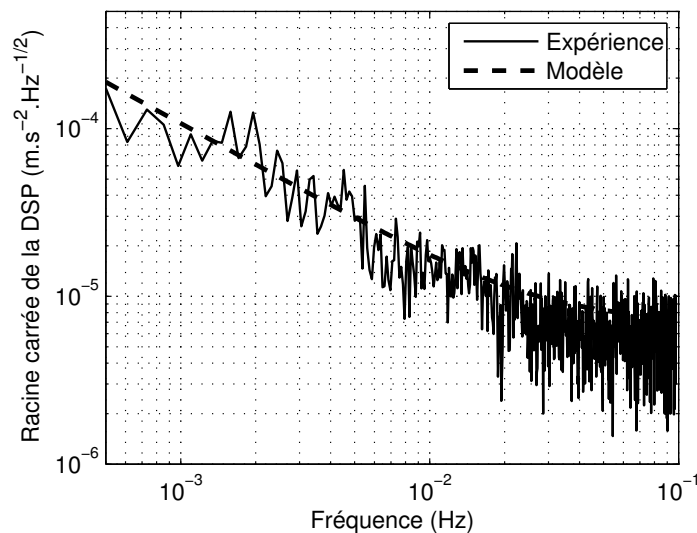


FIGURE 4.3 – Racine carrée de la densité spectrale de puissance du bruit du Q-Flex A et de sa chaîne de mesure. Le modèle analytique est celui donné par l'équation (4.1).

Afin de comparer la précision expérimentale à celle prévue théoriquement, il est nécessaire de caractériser le bruit de mesure des Q-Flex. La densité spectrale de puissance mesurée est présentée en figure 4.3. Elle peut être approchée par les fonctions analytiques $S_{Q_A}(f) = S(f)/\tilde{G}^A{}^2$ et $S_{Q_B}(f) = S(f)/\tilde{G}^B{}^2$ (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{Hz}^{-1}$) correspondant respectivement aux Q-Flex A and B avec

$$S(f) = 3.1925 \times 10^{-5} \text{ V}^2 \cdot \text{Hz}^{-1} + \frac{9.052 \times 10^{-8} \text{ V}^2 \cdot \text{Hz}^{0.6384}}{f^{1.6384}} \quad (4.1)$$

Pour les fréquences au-dessus de $2 \times 10^{-1} \text{ Hz}$, le modèle analytique ne correspond pas aux mesures expérimentales de la DSP. En effet, à ces fréquences, le bruit électronique des Q-Flex est dominé par le bruit sismique filtré par la fonction de transfert du pendule. Ce n'est cependant pas un problème car ces fréquences sont trop élevées pour jouer un rôle dans cette expérience. Pour les fréquences en dessous de $2 \times 10^{-1} \text{ Hz}$, le bruit des Q-Flex est plus grand que le bruit du pendule de plusieurs facteurs d'échelle (cf figure 4.4). Cela signifie que dans cette expérience, il n'est nécessaire de considérer que le bruit des Q-Flex.

4.1.2 Pendule asservi horizontalement

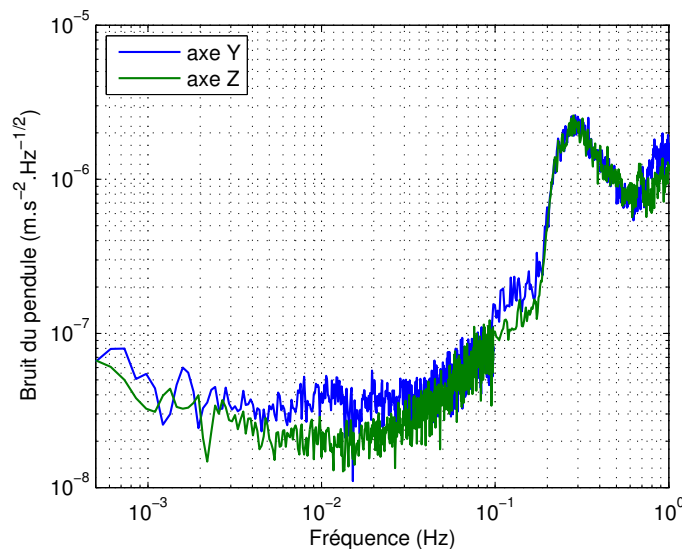


FIGURE 4.4 – Racine carrée de la densité spectrale de puissance du bruit du pendule. En dessous de $2 \times 10^{-1} \text{ Hz}$, le pendule est asservi sur les sorties de l'accéléromètre DM1 et le bruit descend approximativement à $3 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Au dessus de $2 \times 10^{-1} \text{ Hz}$, le pendule est asservi sur le sol et le bruit sismique, filtré par la fonction de transfert du pendule, est dominant.

Le pendule est utilisé comme un moyen de fournir un signal connu au système de mesure avec un bruit caractérisé par la figure 4.4. Pour atteindre ce niveau de bruit, le pendule est monté sur une dalle de béton découplée du sol. De plus, les sorties d'un accéléromètre

électrostatique, appelé DM1, sont utilisées comme capteurs : les boucles d'asservissement sont conçues de telle sorte que les sorties dans le plan horizontal (axes Y et Z du DM1) soient nulles. Cet accéléromètre est un modèle d'ingénierie pour la mission Aristoteles [170]. Le tableau 4.2 donne les valeurs expérimentales des gains suivant les deux axes horizontaux du DM1, $\tilde{G}_Y$ et $\tilde{G}_Z$. Les valeurs exactes sont notées G_Y et G_Z . Comme pour les Q-Flex, on introduit les facteurs d'échelle sur chaque axe $k_Y = \tilde{G}_Y/G_Y$ et $k_Z = \tilde{G}_Z/G_Z$.

$$\begin{array}{c} \text{Axe } Y \\ \tilde{G}_Y = 805 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1} \end{array} \parallel \begin{array}{c} \text{Axe } Z \\ \tilde{G}_Z = 825 \text{ V.s}^2.\text{m}^{-1} \end{array}$$

TABLE 4.2 – Gains des chaînes de mesure des deux axes horizontaux de l'accéléromètre DM1 [171].

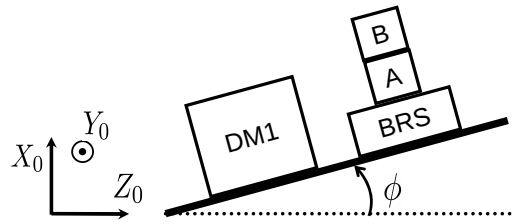


FIGURE 4.5 – Le repère local (X_0, Y_0, Z_0) est défini de telle sorte que X_0 soit vertical. L'angle ϕ mesure l'inclinaison du pendule par rapport à l'horizontal autour de l'axe dirigé par Y_0 . L'angle α , non représenté sur le schéma, mesure l'inclinaison du pendule par rapport à l'horizontal autour de l'axe dirigé par Z_0 .

Du fait des biais de mesure b_Y et b_Z du DM1 le long des axes Y et Z , les axes horizontaux du DM1 sont perpendiculaires au champ de gravité local avec une erreur. De plus, il est possible d'incliner le DM1 d'un angle connu. Pour ce faire, des entrées secondaires sur les axes Y et Z , notées V_Y et V_Z (en V), permettent d'introduire un offset. Étant donné les gains indiqués dans le tableau 4.2, les angles d'inclinaison ϕ et α du DM1 (cf. fig. 4.5), respectivement autour des axes Y_0 et Z_0 , sont égaux à

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{b_Z - V_Z}{gG_Z} = \frac{1}{g} \left[\frac{b_Z}{G_Z} - k_Z c_Z \right] \\ \alpha = \frac{b_Y - V_Y}{gG_Y} = \frac{1}{g} \left[\frac{b_Y}{G_Y} - k_Y c_Y \right] \end{array} \right. \quad (4.2a)$$

$$\quad (4.2b)$$

où $c_Y = V_Y/\tilde{G}_Y$ et $c_Z = V_Z/\tilde{G}_Z$ sont les offsets en terme d'accélération et g l'accélération de la pesanteur. Une amplitude typique pour V_Y et V_Z est 1,5 V, ce qui conduit à une inclinaison de l'ordre de 2×10^{-4} rad et une projection de la gravité locale sur le plan $Y - Z$ de l'ordre de $2 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$.

4.2 Méthode expérimentale et traitement des données

4.2.1 Modélisation de l'expérience

L'inclinaison du DM1 par rapport au référentiel local est paramétrée par les angles ϕ et α . Du fait des incertitudes expérimentales, l'alignement entre le DM1 et la platine rotative n'est pas parfaitement connu. Par conséquent, l'inclinaison de la platine rotative par rapport au référentiel local est paramétrée par les angles $\tilde{\phi} = \phi + \phi_0$ et $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_0$, où ϕ_0 et α_0 sont des angles constants mais inconnus. Pour ces expériences, α a été fixé à 0, ce qui veut dire que seules des rotations autour de l'axe Y ont été appliquées.

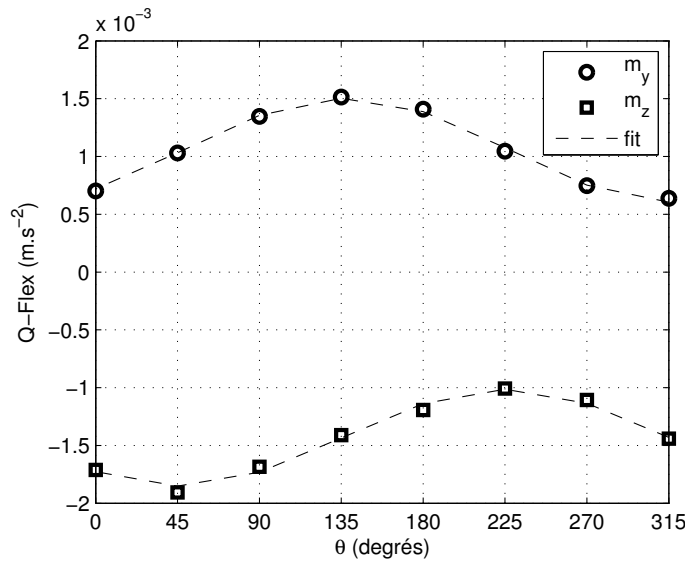


FIGURE 4.6 – Sorties des Q-Flex en fonction de l'angle θ avec $\alpha = \phi = 0$. L'amplitude des courbes est liée à l'accélération extérieure et la valeur moyenne est due au biais et à la précession du système de mesure.

En appelant m_y et m_z les mesures (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) faites respectivement par les Q-Flex A et B, elles sont égales au premier ordre à

$$\begin{cases} m_y = k_y [a_Y \cos(\theta) + a_Z \sin(\theta)] + b_y \end{cases} \quad (4.3a)$$

$$\begin{cases} m_z = k_z [-a_Y \sin(\theta) + a_Z \cos(\theta)] + b_z \end{cases} \quad (4.3b)$$

avec a_Y et a_Z les accélérations extérieures (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)

$$\begin{cases} a_Y = g\alpha_0 \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\begin{cases} a_Z = -g\tilde{\phi} \end{cases} \quad (4.4b)$$

et b_y et b_z les biais de mesure (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) de tout le système de mesure (Q-Flex + platine

rotative)

$$\begin{cases} b_y = b_B/\tilde{G}_B + g\beta_B \\ b_z = b_A/\tilde{G}_A - g\beta_A \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$(4.5b)$$

où β_A et β_B sont les angles de précession des Q-Flex A et B respectivement. Les biais b_A et b_B sont connus expérimentalement (cf. section 4.1.1) mais β_A et β_B ne le sont pas, de telle sorte que les valeurs de b_y et b_z ne sont pas connues *a priori*.

Les équations (4.3) sont exactement similaires à celles étudiées au chapitre précédent. Ainsi, cette expérience est bien représentative des mesures effectuées par le Gravity Advanced Package lors d'une mission interplanétaire. Les conclusions de cette expérience pourront donc s'appliquer à celle qui serait effectuée avec le GAP à bord d'une sonde interplanétaire. La figure 4.6 montre la variation de m_y et m_z en fonction de l'angle θ de la platine rotative. Les données sont réduites et conduisent aux valeurs numériques suivantes

$$\begin{cases} m_y = [-2,94 \cos(\theta) - 2,98 \sin(\theta) - 14,33] \times 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ m_z = [-3,34 \cos(\theta) + 3,02 \sin(\theta) + 10,54] \times 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases} \quad (4.6a)$$

$$(4.6b)$$

En utilisant la valeur moyenne de chacune des courbes et connaissant le biais de chaque Q-Flex, il est possible de déterminer les valeurs numériques des angles de précession : $\beta_A = -8,07 \times 10^{-5} \text{ rad}$ et $\beta_B = 1,40 \times 10^{-4} \text{ rad}$.

4.2.2 Description des mesures

Concernant l'accélération extérieure appliquée sur l'axe Z , c_Z , contrôlée par l'inclinaison ϕ du pendule, deux types de signaux ont été utilisés. Dans un cas, une inclinaison constante du pendule a été appliquée avec différentes valeurs pour l'offset² V_Y du DM1 : 0 V, 0,5 V, 1 V et 1,5 V. Les données collectées avec ces signaux sont utilisées dans les sections 4.3.1 et 4.3.3. Dans le second cas, l'inclinaison du pendule est soumise à une variation sinusoïdale et triangulaire d'amplitude 1 V et de différentes périodes : 0,75 min, 1 min, 5 min, 60 min. Ces données expérimentales sont utilisées dans la section 4.3.2.

Les signaux temporels utilisés pour l'angle θ sont ceux présentés au chapitre précédent. Plusieurs périodes de modulation ont été utilisées : 1 min, 5 min, 20 min et 50 min. La fréquence d'échantillonnage utilisée a été principalement 10 Hz. D'autres fréquences d'échantillonnage ont été utilisées afin de montrer expérimentalement que la précision des quantités traitées ne varie pas avec ce paramètre sur une certaine plage. Pour toutes les données utilisées, la durée des mesures était égale à 100 fois la période de modulation (par exemple, pour une période de modulation de 50 min, la durée de l'expérience était 3 jours et 11 heures).

2. Ces offsets correspondent à une accélération, c_Z , projetée dans le plan $Y - Z$ de $0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $6,06 \times 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $1,21 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $1,82 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ respectivement

4.2.3 Traitement des données

Le traitement des données suit exactement la procédure développée au chapitre précédent pour le Gravity Advanced Package avec une correction du biais sur deux axes en utilisant une platine rotative. Comme on l'a vu au chapitre précédent, les facteurs d'échelle ne permettent pas de déterminer l'accélération extérieure seule. On introduit donc les quantités $\hat{a}_Y = k_Y a_Y$ et $\hat{a}_Z = k_Z a_Z$.

4.3 Résultats et discussion

L'expérience décrite ci-dessus permet d'atteindre deux objectifs. Tout d'abord, une validation du modèle présenté en section 4.2.1 est fournie. Dans la section 4.3.2, il sera démontré que les techniques de traitement du signal développées permettent sur des données réelles de supprimer le biais d'une mesure accélérométrique. Enfin, la méthode de calcul de la précision des mesures sera validée avec une confirmation expérimentale.

4.3.1 Détermination de l'orientation relative

On a vu lors de la modélisation de l'expérience que la valeur numérique des facteurs d'échelle n'est pas connue. Il est possible en agrégeant tous les résultats expérimentaux de déterminer des combinaisons numériques de ces facteurs. En effet, pour chaque expérience avec une inclinaison constante du pendule c_Z , une valeur de $\hat{a}_z$, accélération extérieure vue par les Q-Flex sans biais, est déterminée. Les équations (4.2a) et (4.4b) permettent de relier théoriquement ces deux quantités

$$\hat{a}_Z = k_Z k_Z c_Z - k_Z \left[\frac{b_Z}{G_Z} + g\phi_0 \right]. \quad (4.7)$$

Expérimentalement, on obtient ces valeurs numériques

$$\hat{a}_Z = 0.964 \times c_Z + 2.8757 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}. \quad (4.8)$$

Les résidus de l'optimisation sont présentés en figure 4.7. Les valeurs numériques des résidus montrent un très bon accord entre la formule théorique et les données. La valeur expérimentale de $k_Z k_Z$, qui est proche de 1, montre que les valeurs numériques $\tilde{G}_A$ et $\tilde{G}_Z$ utilisées pour traiter les données sont proches des valeurs réelles. À l'inverse, cela ne permet pas de déterminer indépendamment les valeurs de b_Z et ϕ_0 .

4.3.2 Validation expérimentale du principe de démodulation

Dans cette partie, deux cas de figures sont détaillés. Le premier cas présente une séparation parfaite du biais et du signal extérieur. Dans le second cas, on vérifie expérimentalement les résultats obtenus lorsque les conditions pour une démodulation correcte ne sont pas vérifiées.

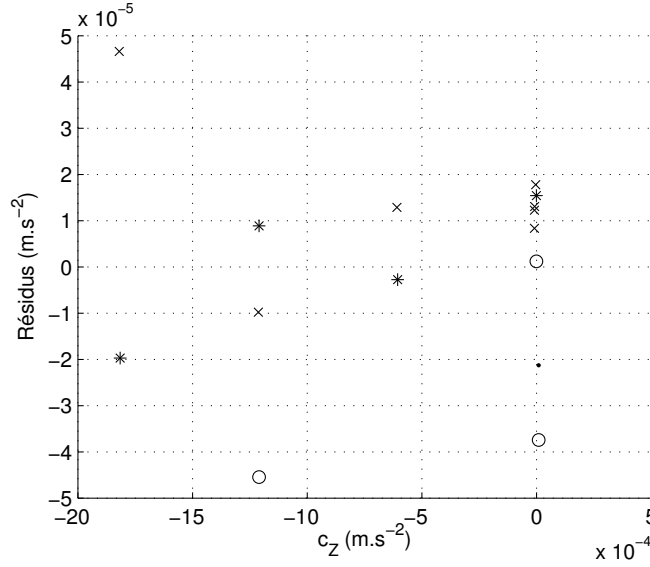


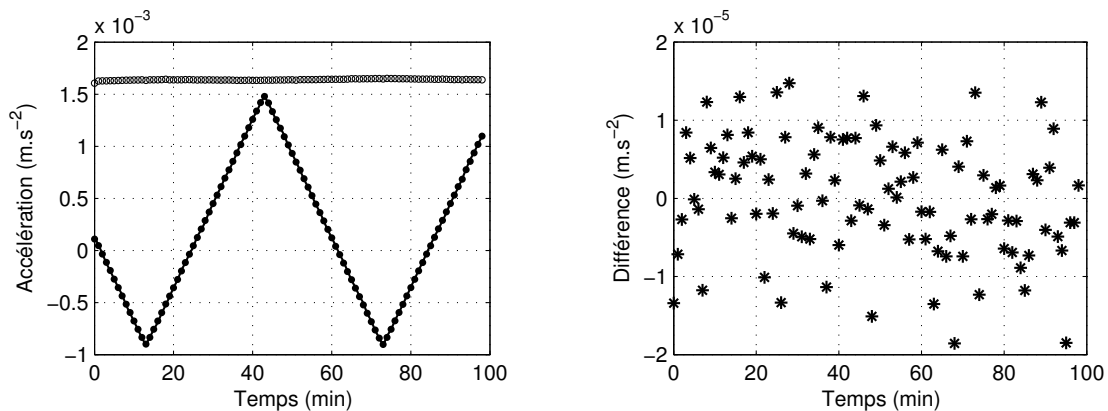
FIGURE 4.7 – Résidus pour la détermination des valeurs numériques des coefficients de l'équation (4.7). Les croix (x) correspondent aux périodes de modulation de 1 min, les étoiles (*) à 5 min, les points (·) à 20 min et les cercles (o) à 50 min.

Séparation parfaite des valeurs moyennes du signal extérieur et du biais

Dans un premier temps, considérons un cas pour lequel il est possible de récupérer la pente du biais et du signal extérieur : les conditions $V_1 \Lambda_c V_1 = V_1 \Lambda_c V_2 = V_2 \Lambda_c V_2 = 0$ sont vérifiées par le signal de modulation et le signal extérieur est *a priori* affine par morceau. Pour cela, le signal extérieur est une variation triangulaire de l'inclinaison du pendule et le signal de modulation est le signal 3 (cf. p. 60). Les résultats du traitement des données sont présentés en figure 4.8.

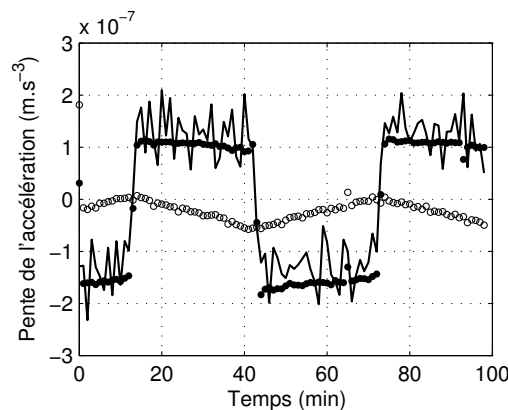
Plusieurs choses permettent de s'assurer que le traitement des données permet de récupérer correctement la moyenne du signal extérieur et du biais de mesure sur chaque période de modulation. Tout d'abord, le biais obtenu est constant, ce qui est attendu puisque la température est constante. Deuxièmement, la moyenne de l'accélération obtenue après traitement correspond parfaitement à l'accélération appliquée, comme le montre la figure 4.8(b). Cela valide expérimentalement la séparation du signal extérieur et du biais lorsque leur valeur moyenne sur chaque période est considérée.

La figure 4.8(c) montre le résultat du calcul de la pente du signal extérieur. La pente du biais a une variation qui ressemble à celle du signal extérieur, ce qui est incompatible avec le fait que le biais est constant pendant toute la durée de l'expérience. Ce problème vient probablement du fait que la pente du signal extérieur n'est pas parfaitement constante sur chaque période de modulation. Ce constat sur le calcul de la pente du signal extérieur ne remet cependant pas en cause la validité des valeurs moyennes obtenues précédemment.



(a) Moyenne de l'accélération et du biais sur une période de modulation obtenue après traitement des données brutes. L'équation (4.7) a été utilisée pour corriger les mésalignements.

(b) Différence entre la moyenne de l'accélération mesurée, obtenue après traitement des données, et la moyenne de l'accélération appliquée. L'équation (4.7) a été utilisée pour corriger les mésalignements.



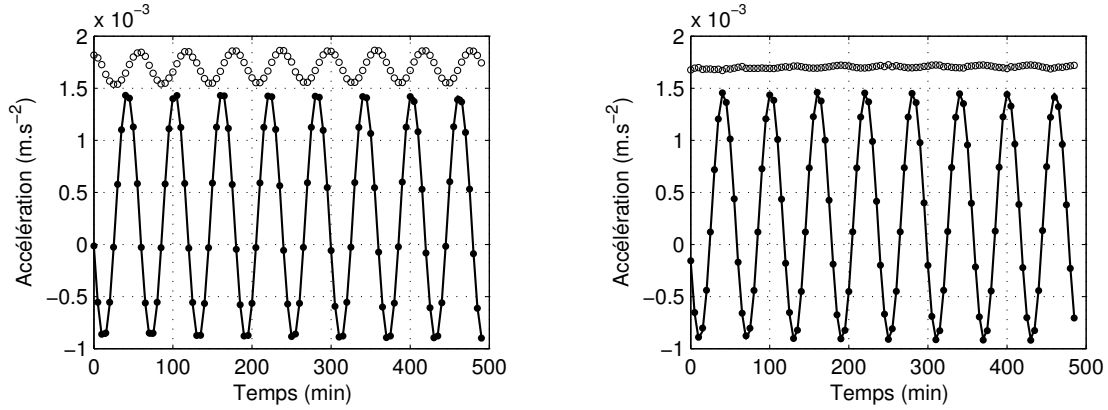
(c) Pente de l'accélération et du biais sur une période de modulation.

FIGURE 4.8 – Conditions expérimentales : le signal extérieur suit une variation triangulaire de période égale à 60 min avec une amplitude $V_z = 1$ V ; le signal de modulation est le signal 3 (cf. p. 60) avec une période de 1 min. Dans les figures (a) and (c), la ligne (-) représente le signal extérieur appliqué, les points (●) représentent l'accélération obtenue expérimentalement après traitement des données, c'est-à-dire sans biais, et les cercles (○) représentent le biais obtenu après traitement des données.

Démodulation imparfaite

Pour illustrer le comportement du traitement des données lorsque les conditions de démodulation ne sont pas respectées (cf. section 3.2.1), considérons les conditions expérimentales suivantes : le signal extérieur a une variation sinusoïdale avec une période de 60 min avec une valeur pic à pic de 1 V ; le signal de modulation est le signal 1 (cf. p. 59) avec une période de 5 min.

Les données sont traitées de deux manières différentes. Dans un cas, le signal de modulation 1 (cf. p. 59) est utilisé, et dans l'autre cas, un déphasage de $\frac{\tau - T_M}{4}$ est introduit et



(a) Moyenne de l'accélération et du biais sur une période de modulation obtenue après traitement des données. Le traitement des données a été effectué avec le signal de modulation 1. La valeur pic à pic de la variation du biais obtenu avec le traitement des données est égale à $3,06 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$.

(b) Moyenne de l'accélération et du biais sur une période de modulation obtenue après traitement des données. Le traitement des données a été effectué avec le signal de modulation 2.

FIGURE 4.9 – Conditions expérimentales : le signal extérieur suit une variation sinusoïdale de période égale à 60 min avec une amplitude $V_z = 1 \text{ V}$; le signal de modulation est le signal 1 (cf. p. 59) avec une période de 5 min. La ligne (-) représente le signal extérieur appliqué, les points (●) représentent l'accélération après traitement, c'est-à-dire sans biais, et les cercles (o) représentent le biais obtenu après traitement des données. L'équation (4.7) a été utilisée pour corriger les mésalignements.

les données expérimentales sont traitées en utilisant le signal de modulation 2 (cf. p. 60). Les résultats sont donnés en figure 4.9.

Comme la sinusoïde ne peut pas être considérée comme étant constante par morceau, $V_1 \Lambda_c \mathbf{a}_\kappa \neq 0$ pour le signal de modulation 1. Par conséquent, la valeur moyenne du biais calculée est la somme de la valeur moyenne réelle et d'un terme additionnel, $k_z (V_1' V_1)^{-1} V_1' \Lambda_c \mathbf{a}_z$. Ce terme est un vecteur colonne. Chacune de ses valeurs peut être approximée par la fonction suivante évaluée aux instants d'échantillonnage

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \left[\int_t^{t+\tau/2} c_Z^0 \cos(\omega\lambda) d\lambda - \int_{t+\tau/2}^{t+\tau} c_Z^0 \cos(\omega\lambda) d\lambda \right] \quad (4.9)$$

$$= \frac{2c_Z^0}{\omega\tau} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] \sin\left(\omega t + \frac{\omega\tau}{2}\right)$$

où τ est la période de modulation, ω est la pulsation de la sinusoïde et c_Z^0 est son amplitude. Pour les conditions expérimentales de la figure 4.9(a), la valeur pic à pic de h est $3,15 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ et son déphasage est 17,5 min. Cela correspond parfaitement à la partie sinusoïdale du biais démodulé de la figure 4.9(a).

Les résultats du traitement des données avec le signal de modulation 2 sont présentés en figure 4.9(b). Dans ce cas, comme $V_1' \Lambda_c \mathbf{a}_\kappa = 0$ *a priori*, il n'y a pas de mélange lors du traitement des données entre le biais et le signal : il est possible de récupérer les bonnes

valeurs de la moyenne du biais et de la moyenne de l'accélération après traitement des données. On s'aperçoit cependant que le biais n'est pas parfaitement constant sur la figure 4.9(b) alors qu'il devrait l'être. Cela vient du fait que l'hypothèse selon laquelle la sinusoïde est affine par morceau n'est pas parfaitement correcte, en particulier aux extrema.

4.3.3 Précision des mesures

L'un des objectifs de cette expérience est de valider expérimentalement la précision sur la moyenne de l'accélération sans biais. Pour cela, les données obtenues avec une inclinaison constante du pendule sont agrégées. La précision théorique sur la moyenne du signal extérieur, pour un temps d'intégration T , s'exprime en utilisant la densité spectrale de puissance du bruit du Q-Flex A (cf. eq. (4.1)) et le signal de modulation. Dans cette section, on utilise le signal de modulation 3 car c'est celui qui présente les meilleures performances en terme de séparation du biais et du signal. La formule complète a été donnée dans le chapitre précédent et est utilisée pour le traitement des données. Par simplicité, on s'appuie ici sur la formule simplifiée qui donne la précision σ pour un temps d'intégration T et une période de modulation τ

$$\sigma(\tau, T) \approx \sqrt{\frac{1}{T} S_Q \left(\frac{2}{\tau} \right)} \quad (4.10)$$

Il a été démontré que le bruit sur les moyennes des quantités démodulées est un bruit blanc. Par conséquent $\sigma(\tau, T_1) = \sqrt{T_2/T_1} \times \sigma(\tau, T_2)$.

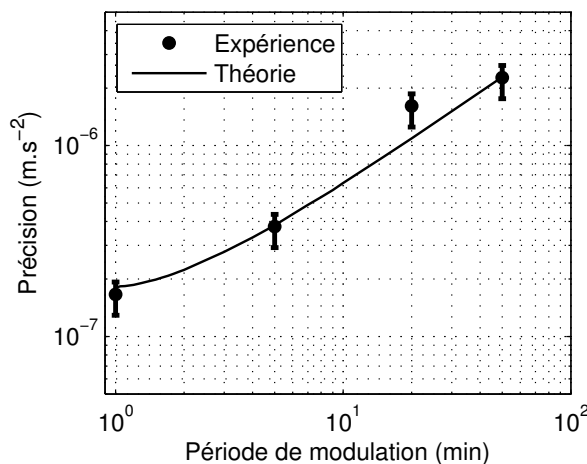


FIGURE 4.10 – Précision (1σ) de la moyenne de l'accélération après traitement en fonction de la période du signal de modulation pour un temps d'intégration de 1 heure. Les barres montrent l'intervalle de confiance à 99 %. Les données ont été obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz et le signal de modulation 3. Chaque point est le résultat d'une statistique sur 200 à 700 données expérimentales. La précision théorique est tracée en utilisant la formule générale donnée au chapitre précédent.

Les valeurs théoriques de la précision sont comparées aux données expérimentales dans la figure 4.10. Les points expérimentaux sont obtenus en calculant l'écart-type des valeurs expérimentales de $\hat{a}_Z$ lorsque le pendule a une inclinaison constante. Comme le bruit du pendule est négligeable devant celui des Q-Flex, la source de bruit dans les mesures de $\hat{a}_Z$ est le bruit de mesure des Q-Flex. En calculant l'écart-type, on a donc accès à la précision sur $\hat{a}_Z$.

La figure 4.10 montre que les valeurs expérimentales sont en très bon accord avec les prédictions théoriques sur l'ensemble de la gamme de période de modulation qui est envisagée pour le Gravity Advanced Package. Par conséquent, ces expériences valident l'approche théorique développée au chapitre précédent. Le fait que les Q-Flex aient un bruit de mesure plus élevé que celui de l'accéléromètre MicroSTAR ne remet pas en cause la validation du principe.

Fréquence (Hz)	Précision (m.s^{-2})
10	1.6631×10^{-7}
100	1.5718×10^{-7}
200	1.2524×10^{-7}

TABLE 4.3 – Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la précision de la moyenne de l'accélération après traitement des données. Les précisions sont données pour un temps d'intégration égal à 1 heure. Conditions expérimentales : le signal extérieur est constant avec une amplitude $V_z = 0 \text{ V}$; le signal de modulation est le signal 3 avec une période de 1 min. La précision théorique attendue est $1.8073 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$.

L'effet de la fréquence d'échantillonnage a aussi été étudié. Comme les harmoniques du signal de modulation décroissent rapidement, il est attendu que la précision ne dépende pas de la fréquence d'échantillonnage tant que celle-ci est deux ordres de grandeur plus grande que la fréquence de modulation. C'est pour cette raison que la fréquence d'échantillonnage n'apparaît pas dans la formule (4.10). Dans ces expériences, la plus grande fréquence de modulation est $1/60 \text{ s} = 0,0167 \text{ Hz}$ et les fréquences d'échantillonnage explorées sont 10 Hz, 100 Hz et 200 Hz, qui sont bien deux ordres de grandeur plus grandes que 0,0167 Hz. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.3 et montrent que la précision ne dépend pas de manière significative de la fréquence d'échantillonnage.

4.4 Conclusion

L'expérience présentée dans ce chapitre était conçue pour valider la méthodologie développée pour supprimer le biais des mesures effectuées avec le Gravity Advanced Package. Pour ce faire, deux accéléromètres Q-Flex montés sur une platine rotative ont été placés sur un pendule dont l'inclinaison était contrôlée grâce à un accéléromètre électrostatique ultra-sensible.

Les données expérimentales ont fourni une validation expérimentale de la méthode. La capacité lors du traitement des données à séparer le biais de l'instrument du signal extérieur

a été démontrée expérimentalement ainsi que la supériorité du signal de modulation 3 par rapport au signal de modulation 1. Concernant la précision des mesures sans biais, les écarts-types expérimentaux ont été comparés aux précisions théoriques et un très bon accord a été obtenu. Ainsi cette validation expérimentale conforte les développements théoriques effectués dans le chapitre précédent.

Restitution d'orbite avec mesure des accélérations non-gravitationnelles

Sommaire

5.1 Principes généraux de la trajectographie	98
5.1.1 Position du problème	99
5.1.2 Simulation d'une trajectoire et équations variationnelles	102
5.1.3 Optimisation non-linéaire	104
5.1.4 Précision sur les paramètres déterminés	105
5.2 Incorporation de l'accélération non-gravitationnelle	106
5.2.1 Exemple de missions spatiales	106
5.2.2 Généralisation de la modélisation dynamique	106
5.2.3 Précision sur les paramètres déterminés	107
5.3 Détection d'une anomalie gravitationnelle	108
5.3.1 Présentation de la méthodologie	108
5.3.2 Modèle d'anomalie de gravitation	108
5.3.3 Résultats	109
5.3.4 Mesure de distance	111
5.4 Discussion sur l'exactitude des paramètres déterminés	111
5.4.1 Remarques générales	111
5.4.2 Apport de la mesure des accélérations non-gravitationnelles	112
5.5 Conclusion	113

L'obtention de mesures d'accélération sans biais avec un accéléromètre électrostatique a été le principal sujet abordé jusqu'ici. Les chapitres précédents ont permis de démontrer qu'il est possible d'effectuer des mesures sans biais de l'accélération non-gravitationnelle d'une sonde spatiale grâce au Gravity Advanced Package. La caractérisation de ces mesures en terme de précision a été effectuée et validée expérimentalement. En s'appuyant sur les conclusions des chapitres précédents, on suppose qu'il est possible d'effectuer ces mesures avec un bruit blanc gaussien, dont l'écart-type est de $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$ pour une durée d'intégration de 3 heures.

Comme cela est décrit dans le chapitre 1, le but est d'utiliser ces mesures pour améliorer la restitution d'orbite afin de pouvoir identifier une éventuelle anomalie gravitationnelle. Pour ce faire, il est nécessaire d'incorporer dans le processus de restitution d'orbite les mesures d'accélération non-gravitationnelle de la sonde.

Dans un premier temps, les principes généraux de la trajectographie sont présentés, en particulier la simulation d'une trajectoire et l'optimisation non-linéaire. Ensuite, ce cadre général est modifié pour introduire les mesures d'accélération non-gravitationnelle. Ces outils étant mis en place, il est possible de déterminer le niveau à partir duquel il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle. Enfin, l'exactitude des paramètres déterminés lors d'un processus d'optimisation est discutée.

5.1 Principes généraux de la trajectographie

La trajectographie est le processus qui consiste à déterminer la trajectoire d'un objet dans l'espace à partir d'informations partielles sur cette trajectoire. Ces informations sont limitées par les moyens d'observation. On utilise principalement le décalage Doppler des ondes radio échangées entre la sonde et la Terre. Cette observable permet d'avoir accès à la vitesse de la sonde par rapport à la Terre le long de la ligne de visée. On peut aussi avoir accès à la position angulaire de la sonde sur le ciel grâce au VLBI (Very-Long-Baseline Interferometry), ainsi qu'à la distance de la sonde par rapport à la Terre grâce au « ranging ». Pour restituer l'ensemble de la trajectoire à partir des informations disponibles, il faut pouvoir calculer une trajectoire à partir des lois physiques qui régissent le mouvement d'un objet. Le calcul de cette trajectoire dépend de quantités qui ne sont pas *a priori* connues, comme les conditions initiales ou les forces non-gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde. Ces paramètres inconnus sont déterminés en utilisant les observations et des modèles.

La méthodologie générale pour traiter le problème de la restitution d'orbite est donc la suivante. On définit un ensemble de paramètres qui influent sur la trajectoire. Dans un premier temps, on donne à ces paramètres des valeurs numériques arbitraires qui permettent de calculer une trajectoire. À partir de cette trajectoire, on calcule les observables théoriques, aux instants des mesures réalisées sur la trajectoire réelle, et on compare ces observables calculées aux observables réelles. La différences de ces quantités correspond aux résidus.

Si les paramètres étaient parfaitement connus et si les modèles physiques utilisés pour calculer la trajectoire et les observables étaient parfaits, les résidus prendraient la forme d'un bruit gaussien. Pour s'approcher le plus possible de cet état, il est nécessaire d'effectuer une optimisation par rapport à la valeur des paramètres. C'est ce processus d'optimisation qui est appelé « restitution d'orbite ».

En pratique, la restitution d'orbite nécessite donc deux ingrédients : la simulation d'une trajectoire et l'optimisation par rapport aux paramètres. Ces deux thèmes sont abordés dans cette section après avoir introduit les hypothèses de travail.

5.1.1 Position du problème

L'objectif principal de ce chapitre est d'estimer le niveau à partir duquel il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle de forme donnée en utilisant les mesures disponibles avec le lien radio et l'instrument GAP. La modélisation sera donc simplifiée afin d'évaluer spécifiquement l'influence de ces deux mesures, indépendamment d'autres phénomènes qui entrent en compte lors de la restitution d'orbite. On travaille donc avec les hypothèses suivantes.

On considère le mouvement de la sonde spatiale dans le champ de gravité créé par le Soleil, supposé être le centre du référentiel galiléen considéré. En plus des forces gravitationnelles exercées par le Soleil sur la sonde, on considère que la force due à la pression de radiation solaire est la seule force non-gravitationnelle qui s'exerce sur la sonde. Le calcul de la trajectoire s'effectue dans le cadre de la mécanique classique. Comme cela a été montré dans les modèles d'extension de la Relativité Générale [172], il est légitime de modéliser l'anomalie gravitationnelle comme une accélération supplémentaire qui s'exerce sur la sonde spatiale et qui dépend de la distance au Soleil ou du temps [46], cette accélération n'étant pas mesurée par le GAP. Enfin, on ne considère que des trajectoires radiales car les sondes interplanétaires sont, de manière générale, sur des orbites hyperboliques et ont donc un mouvement angulaire faible. Le mouvement de la Terre est néanmoins pris en compte. Concernant les observables, on dispose de la mesure du Gravity Advanced Package ainsi que l'observable Doppler. La mesure de « ranging » sera traitée séparément à la section 5.3.4. Quant à la mesure de la position angulaire sur le ciel grâce au VLBI, celle-ci ne sera pas étudiée car on ne considère ici que des trajectoires radiales.

Observable d'accélération

L'observable d'accélération est fournie par le Gravity Advanced Package. On suppose que c'est une mesure de l'accélération non-gravitationnelle de la sonde spatiale uniquement, effectuée avec un bruit blanc gaussien dont l'écart-type est égal à

$$10^{-12} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \times \sqrt{\frac{3h}{\Delta t}} \quad (5.1)$$

où Δt est la durée de la mesure.

Observable Doppler

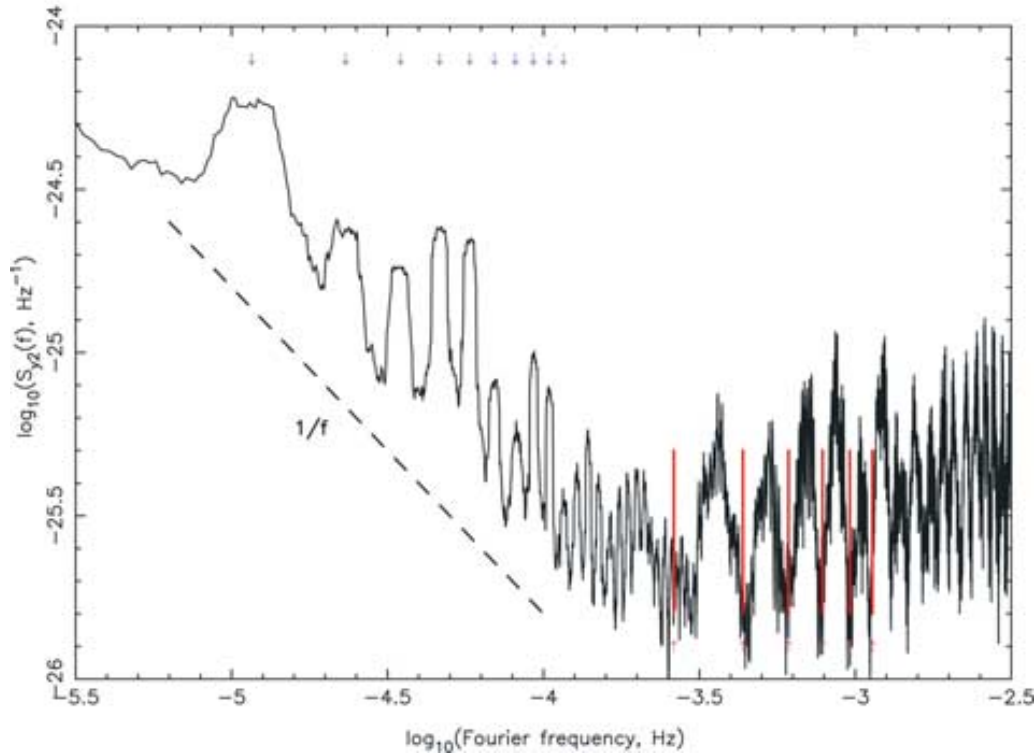


FIGURE 5.1 – Densité spectrale de puissance du bruit de mesure affectant le lien Doppler aller-retour. Données expérimentales de la mission Cassini entre les années 2001 et 2002 [87]. La résolution en fréquence est de 7 mHz. Les flèches marquent les fréquences correspondantes à un jour sidéral ainsi que neuf harmoniques.

L'observable Doppler fait référence au décalage Doppler, D , du signal radio reçu par la Terre après avoir été transmis à la sonde. Son calcul requiert les positions et vitesses de la sonde et de la Terre. On utilise l'indice a pour désigner la Terre au moment de l'émission, l'indice c pour désigner la Terre au moment de la réception et l'indice b pour désigner la sonde lorsqu'elle reçoit l'onde radio. L'observable Doppler s'exprime de la manière suivante

$$D = 1 - d_{ab}d_{bc} \quad (5.2)$$

où

$$d_{ab} = \frac{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}{1 + \underline{u}_{ab} \cdot \underline{v}_a/c^2} \frac{1 + \underline{u}_{ab} \cdot \underline{v}_b/c^2}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} \quad (5.3)$$

où $\underline{u}_{ab}$ est le vecteur unitaire de a vers b . d_{bc} se déduit de d_{ab} en remplaçant a par b , et b par c . Dans ces formules $\underline{v}_i$ désigne la vitesse de la sonde ou de la Terre ($i \in \{a, b, c\}$).

La mesure de cette observable est soumise à un bruit. Pour ce chapitre on utilise les caractéristiques du lien radio de la mission Cassini [87, 173]. Les mesures expérimentales permettent de déterminer une formule analytique pour la densité spectrale de puissance

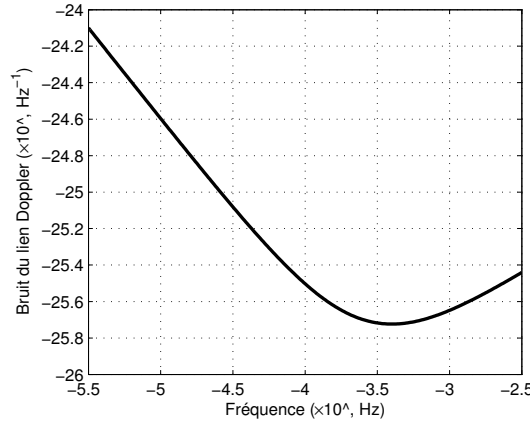


FIGURE 5.2 – Représentation graphique de l'équation (5.4) destinée à modéliser les résultats expérimentaux de la figure 5.1.

du bruit de l'observable Doppler, S_D (en Hz^{-1})

$$S_D(f) = \frac{10^{-29.6}}{f} + 10^{-24.2} \text{Hz}^{-3/2} f^{1/2} \quad (5.4)$$

Accélération de la sonde spatiale

On suppose que la seule force gravitationnelle qui s'exerce sur la sonde spatiale est celle due au Soleil. Son expression est

$$\frac{\mathcal{G}M_\odot}{r(t)^2} \quad (5.5)$$

où $r(t)$ est la distance de la sonde au Soleil. Elle est attractive et dirigée radialement. Dans toute la suite, on suppose parfaitement connues $M_\odot$ la masse du Soleil¹ et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation².

Outre les forces gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde, il y a aussi des forces non-gravitationnelles. Ces forces peuvent être de plusieurs origines : pression de radiation solaire, rayonnement thermique anisotrope de la sonde, manœuvres... Pour le problème qui nous intéresse, on ne prendra en compte que la force due à la pression de radiation solaire. En effet, elle ne dépend que d'un nombre limité de paramètres et a une variation avec la distance au Soleil bien définie. La pression de radiation solaire correspond à l'action des photons solaires sur une surface. La puissance P portée par les photons solaires à une unité astronomique du Soleil est égale approximativement à $1,366 \times 10^3 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ [161]. En notant C_B le coefficient balistique de la sonde spatiale, l'accélération due à la pression de radiation est radiale et égale à

$$\frac{C_B P}{c} \left(\frac{d_0}{r(t)} \right)^2 \quad (5.6)$$

1. $M_\odot = 19891 \times 10^{26} \text{kg}$ [174]
 2. $\mathcal{G} = 6,67428 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ [10, 11]

où c est la vitesse de la lumière. Cependant, le coefficient C_BP dépend de nombreux paramètres, de telle sorte qu'il est difficile *a priori* de lui donner une valeur numérique : il sera déterminé lors du processus d'optimisation.

Paramètres à déterminer

Pour mener à bien la restitution d'orbite, il est nécessaire d'identifier les paramètres à déterminer lors du processus d'optimisation. Sous les hypothèses simplificatrices énoncées précédemment, on considère les quatre paramètres suivants :

- la position initiale notée r_0 ;
- la vitesse initiale notée v_0 ;
- le coefficient $a_{NG} = C_BP/c$ qui décrit l'intensité de l'accélération due à la pression de radiation solaire ;
- le coefficient g_a qui décrit l'intensité de l'anomalie gravitationnelle en terme d'accélération de la sonde (cf. section 5.3.2).

5.1.2 Simulation d'une trajectoire et équations variationnelles

Comme cela a été mentionné, une des composantes du processus de restitution d'orbite est la simulation de la trajectoire de la sonde à partir des conditions initiales et des forces extérieures qui s'exercent sur la sonde. Cet aspect est présenté ci-dessous dans le cas général, indépendamment des hypothèses faites ci-dessus, mais sans les mesures du GAP.

Équation différentielle

On introduit la fonction h qui dispose de toutes les qualités de régularité nécessaire pour la suite

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (t, s, \mu) &\rightarrow h(t, s, \mu) \end{aligned}$$

où

- t est la variable de temps.
- $s \in \mathbb{R}^6$ est le vecteur d'état. Il est composé des composantes de position et des composantes de vitesse dans le repère galiléen lié au Soleil.
- $\mu \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres.

On introduit de plus s_0 , le vecteur d'état à l'instant initial t_0 . Par souci de simplicité dans les notations, on introduit le vecteur $\kappa \in \mathbb{R}^{6+p}$ défini par $\kappa = \begin{bmatrix} s_0 & \mu \end{bmatrix}$. L'évolution temporelle de l'état du système est régie par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, \mu) \tag{5.7}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^6$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = s_0$. La fonction h découle des lois physiques. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Dans le cadre de la dynamique newtonienne en trois dimensions, x est composé de deux vecteurs de taille 3 dont l'un est le dérivé de l'autre

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

où p est le vecteur position. De même, les composantes de la fonction h sont

$$h = \begin{bmatrix} h_p \\ h_{\dot{p}} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

avec $h_p(t, x, \mu) = \dot{x}$ et $h_{\dot{p}}(t, x, \mu)$ l'accélération totale de la sonde.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz [175, 176] garantit l'existence et l'unicité de la solution de cette équation différentielle. Cette solution est l'application suivante

$$\begin{aligned} s_\kappa : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ t &\rightarrow s_\kappa(t) \end{aligned}$$

En pratique, cette équation différentielle sera résolue numériquement avec l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [177]. Cela permet d'obtenir, pour chaque pas de temps et pour un vecteur κ donné, la position et la vitesse de la sonde spatiale. On introduit de plus les fonctions suivantes

$$s : (t, \kappa) \rightarrow s_\kappa(t) \quad (5.10)$$

$$s_t : \kappa \rightarrow s(t, \kappa) \quad (5.11)$$

qui vérifient $s_\kappa = s(\cdot, \kappa)$ et $s_t = s(t, \cdot)$.

Équation variationnelle

Dans l'optique de la restitution d'orbite, il est aussi nécessaire de connaître la sensibilité de l'état s par rapport aux paramètres et aux conditions initiales. Plus précisément, il est utile d'être capable de déterminer à chaque pas de temps la matrice de sensibilité A définie par

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{6,6+p}(\mathbb{R}) \\ t &\rightarrow \frac{ds_t}{d\kappa}(\kappa) \end{aligned}$$

Pour cela, on établit l'équation différentielle vérifiée par la matrice A . Par définition de la fonction s_t ,

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(t \rightarrow \frac{ds_t}{d\kappa}(\kappa) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial \kappa} \right) (t, \kappa) \quad (5.12)$$

En remarquant, grâce à l'indépendance des variables κ et t , que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial \kappa} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial s}{\partial \kappa} \right)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\partial s}{\partial \kappa} \right)}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial \kappa} \right) \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \kappa} + \frac{\partial \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (5.14)$$

et en supposant que s vérifie le théorème de Schwartz, c'est-à-dire que ses dérivées partielles existent et sont continues, on peut intervertir l'ordre des dérivées partielles et on obtient

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) (t, \kappa) = \frac{d}{d\kappa} \left(\kappa \rightarrow \frac{ds_\kappa}{dt} \right) (t, \kappa) = \frac{d}{d\kappa} (\kappa \rightarrow h(t, s_\kappa, \mu)) \quad (5.15)$$

dont on déduit l'équation variationnelle [178, chap. 2]

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial h}{\partial s} A + \frac{\partial h}{\partial \kappa}} \quad (5.16)$$

De même que pour l'équation différentielle (5.7), il est possible d'intégrer cette équation numériquement avec l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [179].

Pour rendre cette équation différentielle plus explicite, on introduit la position initiale p_0 et la vitesse initiale $\dot{p}_0$. Cela permet d'écrire

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial \dot{p}_0} & \frac{\partial p}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial p_0} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{p}_0} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \mu} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 & \text{Id} \\ \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial p} & \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial \dot{p}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.1.3 Optimisation non-linéaire

À partir de la simulation de la trajectoire de la sonde, il est possible de calculer l'observable Doppler simulée à chaque pas d'échantillonnage. Cela donne le vecteur colonne $D_s(\kappa) \in \mathbb{R}^N$ qui dépend des paramètres κ et où N est le nombre de points d'échantillonnage. L'observation de la trajectoire de la sonde grâce au lien radio permet de connaître les valeurs expérimentales de cette observable à chaque point d'échantillonnage, consignées dans le vecteur $D \in \mathbb{R}^N$. On introduit le vecteur des résidus appartenant à $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\xi(\kappa) = D_s(\kappa) - D \quad (5.18)$$

Le but de la restitution d'orbite est de minimiser, par rapport à la variable κ , la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{6+p} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \kappa &\rightarrow \frac{1}{N} \xi(\kappa)' \xi(\kappa) \end{aligned}$$

La fonction f est non-linéaire et il faut donc utiliser une méthode itérative pour en trouver le minimum. La très populaire méthode de Nelder-Mead [180, 181] pourrait être utilisée mais ne tire pas partie du calcul de la matrice de sensibilité présentée ci-dessus. On utilisera donc une approche beaucoup plus simple, avec la méthode de Newton [182]. L'application classique de cette méthode en trajectographie [178] consiste à itérer de la manière suivante

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - (B'B)^{-1}B'\xi \quad (5.19)$$

où la matrice $B \in \mathcal{M}_{N,6+p}(\mathbb{R})$ est le gradient de ξ par rapport à κ

$$B = \frac{d\xi}{d\kappa} = \frac{dD_s}{d\kappa} \quad (5.20)$$

Cette méthode consiste à suivre la pente de la fonction f . Ainsi, en l'absence de minima locaux, elle permet de manière certaine d'atteindre le minimum de la fonction f . La valeur de κ qui réalise ce minimum, notée κ^* , est celle pour laquelle l'orbite restituée correspond au mieux à l'orbite observée. Le calcul de $\frac{dD_s}{d\kappa}$ s'effectue en deux temps : la matrice de sensibilité permet de connaître la dérivée de l'état par rapport à κ et la dérivation analytique de la formule (5.2) permet de connaître la dérivée de D_s par rapport à l'état.

5.1.4 Précision sur les paramètres déterminés

Comme dans tout processus de mesure, les observations sont sujettes à du bruit qui conditionne la précision sur les paramètres déterminés lors du processus d'optimisation. Le but est de caractériser la précision sur la valeur de κ^* connaissant le bruit de mesure sur D . Pour cela, linéarisons D_s autour de κ^* . Cela donne

$$D_s(\kappa) = D_s(\kappa^*) + J'_D(\kappa - \kappa^*) \quad (5.21)$$

où J_D est une matrice de $\mathcal{M}_{1,6+p}(\mathbb{R})$ définie par

$$J_D = \frac{dD_s}{d\kappa}(\kappa^*) \quad (5.22)$$

Le but de la minimisation de la fonction f est d'obtenir l'égalité $D_s = D$. Avec la formule précédente, cette égalité peut se mettre sous forme matricielle $J\kappa = m$ avec $J = \frac{dD_s}{d\kappa}(\kappa^*)$ et

$$m = D - D_s(\kappa^*) + J'_D\kappa^* \quad (5.23)$$

On retrouve un problème linéaire classique d'optimisation. Sous cette forme, il est possible de calculer la matrice de covariance des paramètres déterminés, à savoir de κ^* . Comme le bruit de mesure sur le lien Doppler est caractérisé par une densité spectrale de puissance qui est équivalente à $1/f$ lorsque f tend vers 0, on utilise la caractérisation spectrale de la méthode des moindres carrés généralisés, présentée en annexe C. Cette approche permet d'éviter la divergence lors du calcul de la covariance. Ainsi, la matrice de covariance de κ^*

due au bruit sur l'observable Doppler, notée $\text{Cov}_D(\kappa^*)$ est l'inverse de la matrice W dont les composantes sont donnés par

$$W_{ij} = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} \frac{\mathcal{F}_{\delta t}\{v_i\} \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{v_j\}}}{S_D(f)} df \quad (5.24)$$

où v_i est la i -ième colonne de la matrice J_D et $\mathcal{F}_{\delta t}\{\cdot\}$ est la transformée de Fourier à temps discret (cf. annexe A).

La matrice de covariance permet de déterminer le niveau à partir duquel il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle.

5.2 Incorporation de l'accélération non-gravitationnelle

Dans la section précédente, la méthode classique de restitution d'orbite a été présentée. Dans cette approche, les forces non-gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde spatiale sont modélisées et dépendent de paramètres qui sont estimés dans le processus d'optimisation. Il est possible de vérifier après coup que les modèles d'accélération non-gravitationnelle correspondent aux mesures effectuées par l'accéléromètre. Mais cette approche ne permet pas de tirer partie des mesures directement lors de la restitution d'orbite. Il est donc nécessaire de modifier le cadre présenté précédemment.

5.2.1 Exemple de missions spatiales

Plusieurs missions spatiales embarquent un ou plusieurs accéléromètres pour améliorer leur retour scientifique : les récentes missions de géodésie GRACE et GOCE, ainsi que la mission BepiColombo [183] dont le lancement vers Mercure est prévu en 2015. Pour ces trois missions, les mesures d'accélération non-gravitationnelle par un accéléromètre sont utilisées dans une phase où la sonde est en orbite autour de la Terre ou de Mercure. Par conséquent, le biais de mesure peut être estimé lors de la détermination d'orbite car le mouvement est périodique [184, 185]. Ces missions ne sont donc pas confrontées aux spécificités de la mission OSS. C'est pour cela qu'une approche spécifique a été développée.

5.2.2 Généralisation de la modélisation dynamique

Tout d'abord, le vecteur μ des paramètres à déterminer se voit supprimer l'ensemble des paramètres qui modélisent les accélérations non-gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde. Sous les hypothèses de travail, il s'agit du seul paramètre a_{NG} . Les mesures des accélérations non-gravitationnelles doivent être directement incluses dans la fonction qui contrôle la dynamique de la sonde spatiale. Ainsi, la fonction h introduite à la section 5.1.2 devient

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (t, s, \mu, a) &\rightarrow h(t, s, \mu, a) \end{aligned}$$

où a est le vecteur contenant les mesures d'accélération non-gravitationnelle à chaque point d'échantillonnage. On introduit de plus le vecteur $\tilde{\kappa}$ défini de la manière suivante $\tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} s_0 & \mu & a \end{bmatrix}$.

Le raisonnement permettant d'obtenir l'équation variationnelle est toujours valide, à la différence que, maintenant, la matrice A est le gradient de l'état par rapport à $\tilde{\kappa}$. On obtient donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial h}{\partial s} A + \frac{\partial h}{\partial \tilde{\kappa}} \quad (5.25)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial \dot{p}_0} & \frac{\partial p}{\partial \mu} & \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial p_0} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{p}_0} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \mu} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial a} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial p} & \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial \dot{p}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \tilde{\kappa}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial \mu} & \frac{\partial h_{\dot{p}}}{\partial a} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

5.2.3 Précision sur les paramètres déterminés

Pour évaluer la précision sur les paramètres déterminés lors de l'optimisation, il faut maintenant aussi prendre en compte le bruit de mesure du Gravity Advanced Package. Le principe est le même que précédemment, mais le bruit de l'accéléromètre n'influe pas directement sur l'observable Doppler.

Appelons $n_a \in \mathbb{R}^N$ le vecteur bruit de mesure du GAP. On suppose que n_a est très petit devant a de telle sorte qu'il est possible de faire un développement limité

$$D_s(\kappa^*, a + n_a) = D_s(\kappa^*, a) + J'_a n_a \quad (5.27)$$

où J_a est une matrice de $\mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ définie par

$$J_a = \frac{dD_s}{da}(\kappa^*, a) \quad (5.28)$$

En terme de bruit équivalent sur l'observable Doppler, le bruit de mesure du GAP se traduit par le bruit $J'_a n_a$ dont la matrice de covariance est

$$\Omega_a = J_a \Omega J'_a \quad (5.29)$$

où Ω est la matrice de covariance de n_a (cf. proposition 10, p. 131). Comme n_a est un bruit blanc, la matrice Ω est diagonale. Le calcul du gradient de D_s par rapport à a s'effectue en utilisant la dernière colonne de la matrice de sensibilité (5.26) calculée à chaque pas de temps et en utilisant la définition de l'observable D_s en fonction de la position et de la vitesse de la sonde.

On peut maintenant se replacer dans le cadre développé au paragraphe 5.1.4 et prendre en compte le bruit de mesure de l'accéléromètre. Cela permet de calculer la matrice de covariance sur κ^* due aux bruit de mesure de GAP, notée $\text{Cov}_a(\kappa^*)$. Comme la matrice Ω_a

est connue, on peut exprimer $\text{Cov}_a(\kappa^*)$ à l'aide de la méthode des moindres carrés

$$\text{Cov}_a(\kappa^*) = (J_D' J_D)^{-1} J_D' \Omega_a J_D (J_D' J_D)^{-1} \quad (5.30)$$

5.3 Détection d'une anomalie gravitationnelle

Maintenant que les mesures d'accélérations non-gravitationnelles ont été introduites dans le processus de restitution d'orbite, le but est de déterminer avec quel niveau il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle. Pour ce faire, la simulation numérique de la trajectoire d'une sonde permet de déterminer la covariance des paramètres à déterminer lors de la restitution d'orbite et en particulier de l'anomalie gravitationnelle.

5.3.1 Présentation de la méthodologie

Le principe de la démarche est relativement simple. Il s'agit de simuler une trajectoire avec une anomalie gravitationnelle dépendant d'un paramètre puis de calculer la précision attendue sur ce paramètre en utilisant les équations variationnelles.

Dans cette première approche, il n'y a pas de restitution d'orbite qui est effectuée. On se sert simplement de l'orbite simulée pour calculer la matrice de covariance de κ^* . La simulation est effectuée avec un pas de temps de 30 min, une distance initiale au Soleil de 2 UA et une vitesse initiale égale à 1,01 fois la vitesse de libération.

5.3.2 Modèle d'anomalie de gravitation

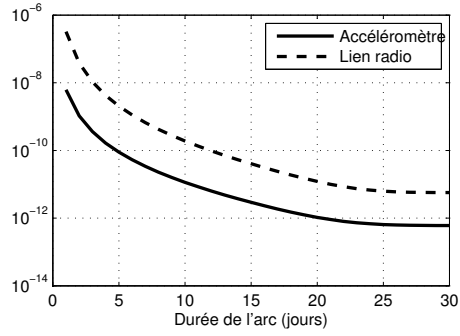
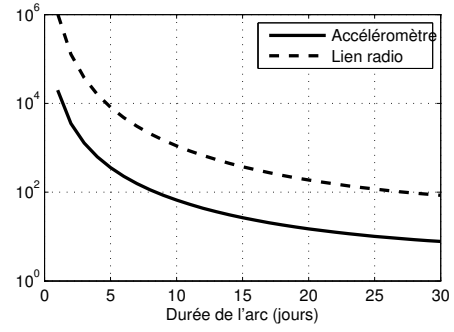
On considère trois modèles d'anomalie gravitationnelle de forme arbitraire. Comme indiqué, cette anomalie est modélisée comme une accélération supplémentaire de la sonde spatiale qui dépend d'un paramètre g_a . Cette accélération n'est pas mesurée par le GAP. Elle ne dépend que de la distance de la sonde au Soleil et est dirigée radialement. Le premier type d'anomalie est constante. Le second type d'anomalie a une variation sinusoïdale avec le temps

$$g_a \cos\left(\frac{2\pi t}{T_E}\right) \quad (5.31)$$

où T_E est la période de révolution de la Terre autour du Soleil³. Enfin, le troisième type d'anomalie a une variation linéaire avec la distance au Soleil

$$g_a \frac{r(t)}{d_0} \quad (5.32)$$

En pratique, il est nécessaire d'avoir une valeur numérique de g_a pour effectuer les simulations. On prendra donc $g_a = -10^{-9} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(a) Précision sur l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)

(b) Précision sur la position initiale (en m)

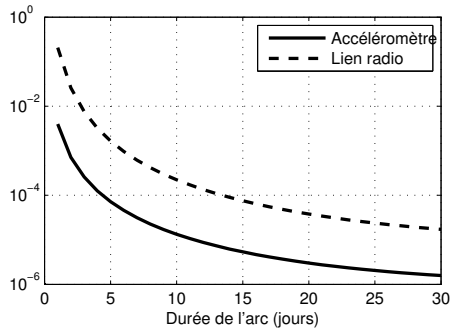
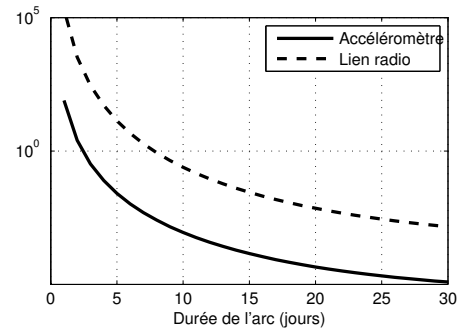
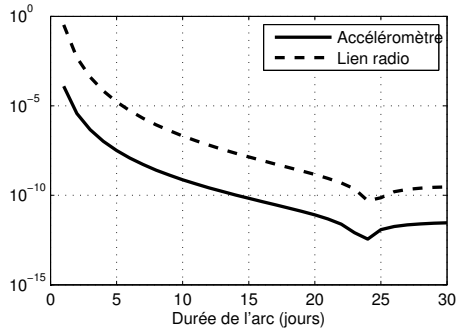
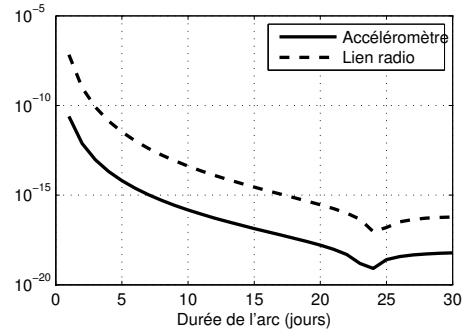
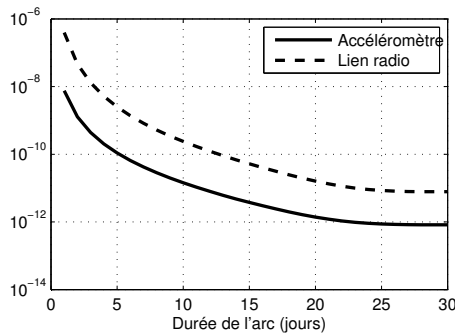
(c) Précision sur la vitesse initiale (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)(d) Valeur absolue de la covariance entre la position initiale et la vitesse initiale (en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$)(e) Valeur absolue de la covariance entre la position initiale et l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle (en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$)(f) Valeur absolue de la covariance entre la vitesse initiale et l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle (en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$)

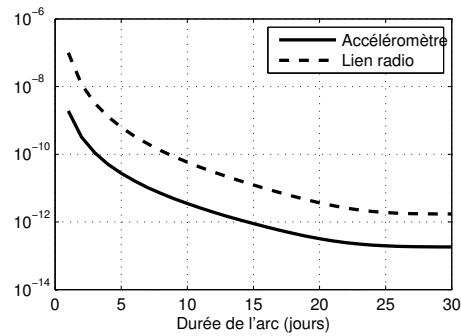
FIGURE 5.3 – Représentation graphique des variances et covariances des paramètres de l'orbite dans le cas d'une anomalie gravitationnelle constante. Les contributions du bruit de mesure de l'observable Doppler et de l'accélération sont représentées séparément. Les courbes dépendent de la durée de l'arc considérée.

5.3.3 Résultats

L'étude présentée ci-dessus permet d'obtenir les variances et covariances des quantités suivantes : position initiale, vitesse initiale et anomalie gravitationnelle. On peut calcu-



(a) Courbes correspondantes à une variation sinusoïdale de l'anomalie gravitationnelle



(b) Courbes correspondantes à une variation linéaire de l'anomalie gravitationnelle

FIGURE 5.4 – Représentation graphique de la précision sur l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$). Les contributions du bruit de mesure de l'observable Doppler et de l'accélération sont représentées séparément. Les courbes dépendent de la durée de l'arc.

ler séparément l'impact du bruit de mesure du GAP et de l'observable Doppler. Les figures 5.3 montrent les résultats complets pour une anomalie gravitationnelle constante. Tout d'abord, il faut noter que c'est le lien radio et non l'accéléromètre qui est limitant en ce qui concerne la précision des quantités déterminées. Il est aussi important de noter que les variances et covariances diminuent lorsque le temps d'intégration augmente. Concernant le seuil de détection de l'anomalie gravitationnelle, la figure 5.3(a) montre que le niveau de détection pour une durée d'intégration de 21 jours est de $10^{-11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Les courbes de la figure 5.4 montrent quant à elles la précision sur l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle pour une variation sinusoïdale et une variation linéaire de celle-ci. Pour une durée de l'arc de 25 jours, on est capable de détecter une anomalie gravitationnelle sinusoïdale ou variant linéairement avec la distance dont l'amplitude est de l'ordre de $10^{-11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ces résultats supposent qu'aucune manœuvre n'est effectué pendant toute la durée de l'arc, c'est-à-dire pendant une vingtaine de jours. Ce scénario de mission est envisageable puisque la sonde Cassini n'a pas subi de manœuvre pendant une soixantaine de jours lors des phases d'occultation solaire en juin 2002 et juillet 2003 [24]. La durée maximale d'un arc sans manœuvre dépend des contraintes de la mission, qui peuvent nécessiter de dé-saturer les roues de contre-réaction. La présence de manœuvres n'est cependant pas préjudiciable à la qualité de la restitution d'orbite tant qu'elles induisent des accélération de la sonde dans la plage de mesure du Gravity Advanced Package ($\pm 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Dans ce cas, l'amplitude des manœuvres est mesurée et le même raisonnement que précédemment peut être effectué.

5.3.4 Mesure de distance

Jusqu'ici, l'information de distance apportée par le « ranging » n'a pas été utilisée. Elle est cependant d'un intérêt majeur concernant la connaissance de l'accélération gravitationnelle de la sonde. Celle-ci dépend de la distance au Soleil et dans tout ce précède, elle est supposée parfaitement connue. Or, d'après la courbe 5.3(b) il y a une incertitude sur la position initiale de 10^4 m pour un arc de 25 jours. Cela se traduit par une erreur sur la valeur de l'accélération gravitationnelle à 2 UA du Soleil approximativement égale à

$$\frac{2GM_{\odot}}{2 \text{ UA}^3} 10^4 \text{ m} \approx 10^{-10} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (5.33)$$

Cette erreur perturbe la détection d'une anomalie gravitationnelle. Elle peut être supprimée en utilisant l'information de « ranging ». Avec les technologies actuelles [186, 187], il est possible de connaître la distance avec une exactitude de 1 m. Ce niveau de performance a été démontré avec la sonde Messenger [188]. En utilisant cette information, l'erreur sur l'accélération gravitationnelle de la sonde tombe à $10^{-14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, un niveau parfaitement compatible avec la détection d'une anomalie gravitationnelle.

5.4 Discussion sur l'exactitude des paramètres déterminés

Nous nous sommes intéressés jusqu'à maintenant à la détermination du niveau à partir duquel il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle. Les résultats présentés précédemment ont permis de donner des valeurs numériques. Ils indiquent aussi que c'est le lien radio, et non les mesures d'accélération, qui limite le niveau de sensibilité. Un raisonnement trop rapide conclurait donc que le Gravity Advanced Package n'est pas utile. Cette section va traiter de cette problématique et plus particulièrement de la question de l'exactitude des paramètres déterminés ou, autrement dit, des biais qui entachent les valeurs des paramètres déterminés.

5.4.1 Remarques générales

Pour aborder le thème de l'exactitude, nous allons tout d'abord considérer un cas simplifié d'optimisation linéaire avec la méthode des moindres carrés. Considérons un phénomène qui dépend, entre autre, de deux paramètres a et b . On effectue N mesures sur ce système, placées dans le vecteur $\mathbf{m}$. On suppose que les mesures dépendent linéairement de a et de b de telle sorte que

$$\mathbf{m} = a\mathbf{v}_a + b\mathbf{v}_b \quad (5.34)$$

avec $\mathbf{v}_a$ un vecteur connu. À l'inverse, l'influence du paramètre b est soumise à un bruit de telle sorte que $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_b^0 + \mathbf{v}_b^n$ où $\mathbf{v}_b^0$ est connu. Pour relier ce problème à la trajectographie, a peut être considéré comme l'amplitude de l'anomalie gravitationnelle et b comme l'amplitude de l'accélération due à la pression de radiation solaire.

La détermination des paramètres a et b avec la méthode des moindres carrés donne

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (J'J)^{-1}J'\mathbf{m} \quad (5.35)$$

avec $J = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a & \mathbf{v}_b^0 \end{bmatrix}$ une matrice de taille $N \times 2$. Dans le cas où les colonnes de J sont orthonormées, on a simplement $a = \mathbf{v}_a' \mathbf{m}$.

Supposons maintenant qu'il est possible de mesurer indépendamment la contribution du paramètre b , c'est-à-dire la quantité $b\mathbf{v}_b$. Cela se fait, dans notre cas, avec le Gravity Advanced Package. La détermination de a donne alors

$$\tilde{a} = \mathbf{v}_a'(\mathbf{m} - b\mathbf{v}_b) \quad (5.36)$$

Il y a donc une différence $a - \tilde{a} = b\mathbf{v}_a' \mathbf{v}_b^n$ qui provient de la non-orthogonalité de $\mathbf{v}_a$ et de $\mathbf{v}_b^n$. La valeur déterminée a souffre donc d'un biais par rapport à la valeur réelle de ce paramètre $\tilde{a}$. Ce phénomène est illustré dans le cas de la restitution d'orbite ci-dessous.

5.4.2 Apport de la mesure des accélérations non-gravitationnelles

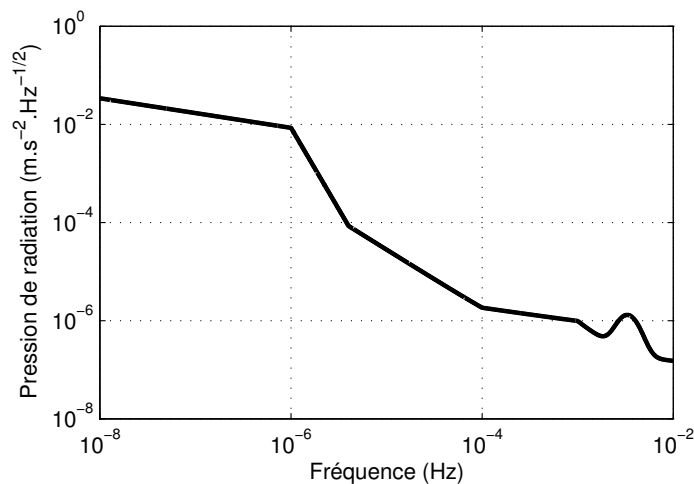


FIGURE 5.5 – Racine carrée de la densité spectrale de puissance du bruit de pression de radiation solaire en terme d'accélération pour une sonde avec un coefficient balistique $C_B = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ à 1 UA du Soleil [189]. La bosse à 3 mHz correspond aux oscillations du Soleil de période 5 minutes.

La mesure des accélérations gravitationnelles par le Gravity Advanced Package permet dans le cadre de la trajectographie de supprimer des paramètres à déterminer et donc de diminuer l'erreur d'exactitude comme cela a été illustré au paragraphe précédent. Cette apport est utile si l'erreur d'exactitude sans les mesures du GAP est très supérieure à l'erreur de précision. Pour cela, il est nécessaire de quantifier le niveau de bruit sur l'accélération non-gravitationnelle de la sonde spatiale.

On considère toujours une sonde équivalente à celle de la mission Laplace, qui a un coefficient balistique $C_B = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ [115], placée à une unité astronomique du Soleil. L'accélération due à la pression de radiation solaire a un bruit caractérisé par la densité spectrale de puissance de la figure 5.5.

Pour quantifier l'apport de cette mesure en terme d'exactitude, la démarche suivante est adoptée. Une simulation de trajectoire est effectuée avec un bruit sur l'accélération non-gravitationnelle de la sonde décrit par la DSP de la figure 5.5, renormalisée en fonction de la distance au Soleil. La restitution d'orbite est effectuée sans mesure des accélérations non-gravitationnelles par le GAP mais avec le modèle de pression de radiation solaire. Le but est ensuite, comme dans la section précédente, de comparer les valeurs réelles des paramètres d'accélération non-gravitationnelle et d'anomalie gravitationnelle (qui auraient été obtenues avec le GAP) aux valeurs obtenues suite à la restitution d'orbite. Dans cette section, on considère une anomalie gravitationnelle constante.

Pour une valeur de l'anomalie de gravitation de $-10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la valeur obtenue avec une restitution d'orbite ne prenant pas en compte les mesures du GAP est de $-1,49 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour cette anomalie. Il s'agit d'un écart de 4 ordres de grandeur. Cela démontre l'intérêt de l'accéléromètre en terme de détection d'une anomalie gravitationnelle.

5.5 Conclusion

L'utilisation des mesures du Gravity Advanced Package dans le processus de restitution d'orbite a pour objectif d'en améliorer la qualité. En effet, ces mesures permettent de supprimer des paramètres à déterminer. Cela implique la suppression de corrélations et permet de capturer des variations temporelles qui ne sont pas forcément correctement modélisées.

Les simulations présentées dans ce chapitre ont permis de valider l'intérêt du Gravity Advanced Package pour la mesure du champ de gravitation dans le Système Solaire puisqu'il permet de séparer l'effet d'une accélération non-gravitationnelle de l'effet d'une anomalie gravitationnelle. Il a de plus été possible de calculer un niveau de détection : avec un arc de 21 jours, il est possible de détecter une anomalie gravitationnelle constante dont l'amplitude est $10^{-11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour des anomalies ayant une variation sinusoïdale ou linéaire avec la distance au Soleil, la sensibilité à une anomalie gravitationnelle est du même ordre de grandeur. Ces valeurs correspondent aux objectifs définis comme intéressants par la feuille de route de l'ESA [80].

Conclusion générale

La théorie de la Relativité Générale a passé avec succès de nombreux tests expérimentaux mais des raisons importantes, rappelées dans l'introduction, incitent à pousser plus avant les tests de la gravitation dans le Système Solaire. C'est dans cette optique que la mission Outer Solar System a été proposée à l'ESA en décembre 2010 dans le cadre de l'appel à mission Cosmic Vision. Cette mission avait pour vocation d'allier des objectifs de planétologie au niveau du système de Neptune et de la ceinture de Kuiper, avec des objectifs de physique fondamentale liés au test de la gravitation à l'échelle du Système Solaire. Pour ce second objectif, la mission OSS prévoyait de mesurer le paramètre PPN γ lors de conjonctions solaires et de réaliser une cartographie de la gravitation dans le Système Solaire en utilisant la trajectoire de la sonde interplanétaire. C'est de ce dernier aspect que le travail présenté dans cette thèse traite.

L'utilisation d'une sonde spatiale pour tester la gravitation dans le Système Solaire repose sur la détermination de son orbite. La connaissance de l'orbite doit être suffisamment précise pour pouvoir fournir un test des prédictions théoriques. Jusqu'à maintenant, la restitution d'une trajectoire reposait principalement sur l'observable Doppler qui est la mesure du déphasage du lien radio dû à l'effet Doppler. Ce déphasage renseigne sur la vitesse de la sonde et permet de déterminer la trajectoire grâce à un processus d'optimisation. Cette approche laisse cependant une ambiguïté qu'il n'est pas possible de lever si les forces non-gravitationnelles s'exerçant sur la sonde ne sont pas mesurées indépendamment. Cette ambiguïté provient du fait que, du point de vue de l'observable Doppler, une anomalie de gravitation et une accélération non-gravitationnelle peuvent être confondues. C'est pour lever cette ambiguïté que la mission OSS embarque le Gravity Advanced Package, qui permet d'effectuer des mesures sans biais de l'accélération non-gravitationnelle. Il est alors essentiel que le biais de mesure soit nul car si ce n'était pas le cas, l'ambiguïté mentionnée ci-dessus ne pourrait pas être levée à une valeur inférieure à celle du biais.

Une partie importante de cette thèse est consacrée à l'étude du Gravity Advanced Package. Cet instrument est composé d'une platine rotative et d'un accéléromètre électrostatique optimisé pour une mission interplanétaire en terme de masse, de volume et de puissance consommée. Le principe de l'accéléromètre est la lévitation d'une masse d'épreuve

grâce à des forces électrostatiques qui la contrôlent suivant les six degrés de liberté. Les valeurs des forces électrostatiques appliquées à la masse d'épreuve, qui est complètement isolée de l'extérieur à l'exception de deux fils d'or, constituent les sorties de l'instrument. De ce fait, l'instrument permet de mesurer l'accélération non-gravitationnelle de la sonde à laquelle s'ajoute d'autres termes comme l'auto-gravité ou les forces inertielles. Une partie de ces termes parasites se traduit par des biais de mesure alors qu'une autre partie se traduit par un signal indésirable. Dans la cadre de l'étude faite ici, ce signal indésirable est supposé négligeable, hypothèse réaliste mais qui nécessite une intégration minutieuse de l'instrument dans la sonde spatiale. Pour supprimer le biais de mesure, la platine rotative permet de retourner l'accéléromètre autour d'un de ses axes de mesure. De cette manière, il est possible de calibrer deux axes sur les trois. Pour que l'accéléromètre soit le facteur limitant en terme de performance, il faut que la précision angulaire de la platine rotative ainsi que de tous les alignements soient de l'ordre de 10^{-6} rad. Concernant les performances de l'accéléromètre électrostatique, l'existence d'un facteur d'échelle et d'un facteur quadratique sur chaque axe de mesure a été mis en évidence. Ils doivent être calibrés indépendamment. De plus, le bruit de mesure a été caractérisé en terme de densité spectrale de puissance.

Après avoir caractérisé indépendamment les deux sous-systèmes du Gravity Advanced Package, une méthode de mesure et de traitement des données a été développée pour effectuer des mesures d'accélération sans biais alors que l'accéléromètre électrostatique délivre des mesures biaisées. L'idée sous-jacente est de moduler le signal extérieur de telle sorte qu'il soit séparé fréquentiellement du biais de l'instrument qui reste dans le domaine continu. Du fait des contraintes instrumentales, il n'est cependant pas possible d'effectuer une détection hétérodyne classique et une approche dans le domaine temporel a été implémentée. Les conditions de démodulation, sous lesquelles il est possible, après traitement des données, de récupérer le signal sans biais, ont permis de définir les variations temporelles qu'il faut appliquer à l'angle paramétrant la rotation de la platine rotative. L'approche développée permet d'obtenir *in fine* la moyenne ainsi que la pente du signal extérieur sur une période de modulation. Il est aussi possible de quantifier la précision de ces quantités, ce qui est essentiel dans l'optique des tests de la gravitation. La précision sur la moyenne dépend tout d'abord de la période de rotation car le bruit de l'accéléromètre est sélectionné à la fréquence de modulation. Elle dépend aussi de la durée du masquage, qui correspond aux périodes de mouvement de la platine rotative, car ces données ne sont pas utilisées. Enfin, la durée d'intégration joue un rôle. Une combinaison optimale et techniquement raisonnable consiste à considérer une période de modulation de 600 s et une durée de masquage de 200 s. Pour un temps d'intégration de 3 h, la précision sur la moyenne de l'accélération non-gravitationnelle de la sonde spatiale est alors de $1 \text{ pm}\cdot\text{s}^{-2}$.

La caractérisation des quantités démodulées découle d'un travail analytique basé sur la connaissance de la densité spectrale de puissance du bruit de mesure de l'accéléromètre électrostatique. La méthode développée est validée expérimentalement grâce à un pendule asservi horizontalement qui permet d'appliquer des accélérations connues à un système mi-

mant le Gravity Advanced Package mais avec des performances moindres. Cette validation expérimentale repose sur deux piliers. Tout d'abord, il est démontré que la méthodologie mise en place permet effectivement d'obtenir des mesures sans biais. De plus, la précision obtenue expérimentalement sur les quantités démodulées correspond bien à la valeur prédite. Sur ce dernier point, l'accord entre les courbes expérimentales et les courbes théoriques est très bon, ce qui apporte une confirmation à l'ensemble de la méthodologie mise en place. Cette méthodologie, qui a été exploitée dans le cas particulier de l'obtention de la valeur moyenne du signal extérieur, a une formulation très générale qui permet de l'adapter très facilement à la recherche d'autres types de signaux comme, par exemple, des variations sinusoïdales. Elle peut aussi être généralisée à la correction du biais suivant trois axes.

L'instrument, malgré ses très bonnes performances, n'a cependant d'intérêt que dans le cadre de son utilisation pour améliorer la qualité de la restitution d'orbite. De manière qualitative, son intérêt réside dans le fait qu'il mesure l'accélération non-gravitationnelle de la sonde, permettant ainsi de faire la différence entre une anomalie gravitationnelle et une accélération non-gravitationnelle mal modélisée. Pour quantifier le niveau de l'anomalie de gravitation qui pourrait être détectée avec cet instrument, le processus classique de restitution d'orbite a été adapté afin d'introduire les mesures de l'accéléromètre. Dans un cadre simplifié, il a été démontré que les données limitantes en terme de détection d'une anomalie sont celles issues du lien radio. Plusieurs modèles d'anomalie gravitationnelle ont été étudiées et il a été montré qu'il est possible de détecter une anomalie constante avec une précision de $10^{-11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour un arc d'une durée de 21 jours.

Ces résultats montrent l'intérêt d'embarquer un accéléromètre à biais corrigé à bord d'une sonde interplanétaire, en terme de compréhension de la gravitation dans le Système Solaire. Bien que la mission OSS n'ait pas été retenue par l'ESA, le développement du Gravity Advanced Package suit son cours et un prototype devrait être réalisé en 2013. Lorsqu'il sera disponible, les méthodes de correction de biais présentées dans ce manuscrit seront mises en œuvre sur cette instrument. Celui-ci sera aussi testé en microgravité à la tour de chute du ZARM (Center of Applied Space Technology and Microgravity, Brême, Allemagne) pour vérifier ses performances. Ces deux caractérisations expérimentales de l'instrument permettront d'obtenir, en particulier, des informations sur son biais et sur l'efficacité de la méthode de correction du biais.

Concernant l'envoi de cette instrument sur des sondes interplanétaires, des propositions de missions seront soumises à l'ESA lors des prochains appels à idées. Ces propositions alieront probablement des objectifs de physique fondamentale et de planétologie, comme la mission « Outer Solar System ». Concernant la planétologie, le Gravity Advanced Package pourrait apporter des informations essentielles sur les champs de gravité des objets survolés, à l'image des missions GRACE et GOCE. La gravimétrie d'objets autres que la Terre présente néanmoins des spécificités qu'il faudra prendre en compte en évaluant l'apport scientifique du Gravity Advanced Package. Mais que ce soit pour la physique fondamentale ou pour la gravimétrie, il conviendra de pousser plus avant l'intégration des mesures d'accélération non-gravitationnelle dans les logiciels de restitution d'orbite interplanétaire.

Annexe **A**

Temps – fréquence : les transformations de Fourier

Sommaire

A.1	Transformée de Fourier	120
A.2	Transformée de Fourier à temps discret	121
A.3	Transformée de Fourier discrète	124
A.4	Liens entre les transformations de Fourier	125

Le but de cette annexe est de servir de support à la lecture de la thèse, et non d'exposer de manière exhaustive la théorie de Fourier. La transformée de Fourier est tout d'abord introduite avec la convention utilisée dans cette thèse. La transformée de Fourier à temps discret et la transformée de Fourier discrète sont ensuite définies. Les propriétés essentielles de chacun de ces objets sont rappelées et les liens entre les différentes transformées de Fourier sont explicités.

A.1 Transformée de Fourier

Définition 1. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle **transformée de Fourier** de g la fonction, notée $\mathcal{F}\{g\}$, définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}\{g\}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i2\pi\xi \cdot x} dx \quad (\text{A.1})$$

où $\xi \cdot x = \xi'x$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1 (Inversion de Fourier). Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}\{g\} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a alors

$$g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g\}\} \quad (\text{A.2})$$

où $\mathcal{F}^{-1}\{h\}$ est la **transformée de Fourier inverse** de $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\mathcal{F}^{-1}\{h\}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) e^{i2\pi\xi \cdot x} d\xi \quad (\text{A.3})$$

Théorème 2 (Théorème de Parseval). Soient g et h dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que leur transformée de Fourier soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Les fonctions g , h et leurs transformées de Fourier sont alors de carré sommable et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}\{g\}(\xi)} \mathcal{F}\{h\}(\xi) d\xi \quad (\text{A.4})$$

Proposition 1. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour g et h dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. *Convolution* : Le produit de convolution est désigné par $*$, c'est-à-dire que $(g * h)(t) = \int g(t - u)h(u)du$.

$$\mathcal{F}\{g * h\}(\xi) = \mathcal{F}\{g\}(\xi) \mathcal{F}\{h\}(\xi) \quad (\text{A.5})$$

2. *Symétrie*

$$\mathcal{F}\{\overline{g}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}\{g\}(-\xi)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\{g(-x)\}(\xi) = \mathcal{F}\{g\}(-\xi) \quad (\text{A.6})$$

3. *Translation*

$$\mathcal{F}\{g(x - x_0)\}(\xi) = e^{-i2\pi x_0 \cdot \xi} \mathcal{F}\{g\}(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\{e^{i2\pi x \cdot \xi_0} g(x)\}(\xi) = \mathcal{F}\{g\}(\xi - \xi_0) \quad (\text{A.7})$$

4. *Dilatation* : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\mathcal{F}\{g(x/\lambda)\}(\xi) = |\lambda|^d \mathcal{F}\{g\}(\lambda\xi) \quad (\text{A.8})$$

5. *Dérivation* : On suppose de plus que g est de classe C^1 et que ses dérivées partielles sont sommables.

$$\mathcal{F}\{\partial g / \partial x_k\}(\xi) = i2\pi\xi_k \mathcal{F}\{g\}(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\{x_k g(x)\}(\xi) = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{F}\{g\}}{\partial \xi_k}(\xi) \quad (\text{A.9})$$

A.2 Transformée de Fourier à temps discret

Dans cette section, on s'intéresse à un signal discret G , élément de $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$. En introduisant $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$, G peut être vu comme la discrétisation d'un signal $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $G[i] = g(i \times \delta t)$ avec $i \in \mathbb{Z}^d$.

Définition 2. Soient $G \in L^1(\mathbb{Z}^d)$ et $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **transformée de Fourier à temps discret** de G la fonction, notée $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}$, définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(\xi) = \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] e^{-i2\pi T k \cdot \xi} \quad (\text{A.10})$$

Remarque 1. En une dimension ($d = 1$), la transformée de Fourier à temps discret est une fonction $1/\delta t$ -périodique.

Remarque 2. En une dimension ($d = 1$), on peut traiter les signaux discrets dans le même cadre que les signaux continus en utilisant le peigne de Dirac, défini par

$$c_{\delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\delta t) \quad (\text{A.11})$$

Comme $g(t)c_{\delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G[n]\delta(t - n\delta t)$ et $\mathcal{F}\{\delta(t - n\delta t)\} = e^{-i2\pi f k \delta t}$, on a

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G\} = \delta t \mathcal{F}\{g c_{\delta t}\} \quad (\text{A.12})$$

Définition 3. Soit $h \in L^1(\Omega_{\delta t})$ où $\Omega_{\delta t} = [-1/(2\delta t); 1/(2\delta t)]^d$, on appelle **transformée de Fourier à temps discret inverse** de h la fonction, notée $\mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{h\}$, définie pour $k \in \mathbb{Z}^d$ par :

$$\mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{h\}[k] = \int_{\Omega_{\delta t}} h(\xi) e^{2\pi i \delta t k \cdot \xi} d\xi \quad (\text{A.13})$$

Théorème 3 (Inversion de Fourier). Soit $G \in L^1(\mathbb{Z}^d)$. On a :

$$G = \mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}\}. \quad (\text{A.14})$$

Démonstration. On note $\tilde{G}(\xi) = \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(\xi)$. Dans toute la suite, k est fixe :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{\tilde{G}\}[k] &= \int_{\Omega_{\delta t}} \tilde{G}(\xi) e^{2\pi i \delta t k \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\Omega_{\delta t}} \delta t \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] e^{-i2\pi \delta t l \cdot \xi} e^{i2\pi \delta t k \cdot \xi} d\xi \\ &= \delta t \int_{\Omega_{\delta t}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} d\xi\end{aligned}$$

On introduit la suite de fonctions η_j définie par

$$\eta_j(\xi) = \sum_{l \in [-j;j]^d} G[l] e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} \quad (\text{A.15})$$

qui converge, lorsque j tend vers $+\infty$, vers

$$\eta(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} \quad (\text{A.16})$$

Pour tout j , $|\eta_j(\xi)| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |G[l]|$ qui est sommable sur $\Omega_{\delta t}$ par hypothèse. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\int_{\Omega_{\delta t}} \eta_j(\xi) d\xi \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{\delta t}} \eta(\xi) d\xi \quad (\text{A.17})$$

Or l'intégrale

$$\int_{\Omega_{\delta t}} \eta_j(\xi) d\xi = \int_{\Omega_{\delta t}} \sum_{l \in [-j;j]^d} G[l] e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} d\xi = \sum_{l \in [-j;j]^d} G[l] \int_{\Omega_{\delta t}} e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} d\xi \quad (\text{A.18})$$

tend vers

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] \int_{\Omega_{\delta t}} e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} d\xi \quad (\text{A.19})$$

lorsque j tend vers l'infini. On a donc en prenant la convention que $\text{sinc}(0) = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{\tilde{G}\}[k] &= \delta t \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] \int_{\Omega_{\delta t}} e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot \xi} d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] \prod_{p=1}^d \text{sinc}(\pi(k_p - l_p)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] \delta(k - l) = G[k]\end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration. □

Théorème 4 (Théorème de Parseval). Soient G et H des éléments de $L^1(\mathbb{Z}^d)$,

$$\delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] \overline{H[k]} = \int_{\Omega_{\delta t}} \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(f)} df \quad (\text{A.20})$$

Démonstration. L'interversion de l'intégrale et de la somme infinie se justifie comme dans la démonstration précédente. Cela étant acquis, le calcul suivant donne directement le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta t}} \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(f)} df &= \int_{\Omega_{\delta t}} \delta t \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G[l] e^{-i2\pi \delta t l \cdot f} \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{H[k]} e^{i2\pi \delta t k \cdot f} df \\ &= \delta t^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[l] \overline{H[k]} \int_{\Omega_{\delta t}} e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot f} df \\ &= \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] \overline{H[k]} \end{aligned}$$

où l'intégral de $e^{i2\pi \delta t (k-l) \cdot f}$ sur $\Omega_{\delta t}$ a été calculée dans la démonstration précédente. $\square$

Proposition 2 (Convolution). Soient G et H des éléments de $L^1(\mathbb{Z}^d)$. Le produit de convolution de G par H est défini par $(G * H)[l] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] H[l - k]$. On a la relation suivante :

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G * H\}(\xi) = \frac{1}{\delta t} \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(\xi) \mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(\xi) \quad (\text{A.21})$$

Démonstration. Le théorème de Fubini autorise l'interversion des sommes infinies dans le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\delta t}\{C\}(\xi) &= \delta t \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] H[l - k] e^{-i2\pi \delta t n \cdot \xi} \\ &= \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} H[p] e^{-i2\pi \delta t (p+k) \cdot \xi} \\ &= \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} G[k] e^{-i2\pi \delta t k \cdot \xi} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} H[p] e^{-i2\pi \delta t p \cdot \xi} \\ &= \frac{1}{\delta t} \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) \mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(f) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3. Soient G et H dans $L^1(\mathbb{Z}^d)$. On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{\overline{G}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(-\xi)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\delta t}\{G[-k]\}(\xi) = \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(-\xi) \quad (\text{A.22})$$

2. Translation

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G[k - k_0]\}(\xi) = e^{-i2\pi \delta t k_0 \cdot \xi} \mathcal{F}_{\delta t}\{G[k]\}(\xi) \quad (\text{A.23})$$

Démonstration. La preuve de ces relations s'effectue par changement de variable. $\square$

A.3 Transformée de Fourier discrète

Dans cette section, on s'intéresse à un signal discret $G_k, k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d$. En introduisant $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$, G peut être vu comme la discrétisation d'un signal $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ sur une durée $N \times \delta t$, c'est-à-dire $G[i] = g(i \times \delta t)$ avec $i \in \mathbb{Z}^d$. On introduit la transformée de Fourier discrète de G , notée $\mathcal{F}_d\{G\}$, ainsi que quelques unes de ses propriétés. On indice le signal discret de 0 à $N-1$ afin de faciliter le passage entre G_k et $G[k]$: on posera que $G_k = G[k]$ de telle sorte que G_0 corresponde bien à $g(0)$.

Définition 4. Soit $(G_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$ un signal discret. On appelle **transformée de Fourier discrète** de G la fonction $\mathcal{F}_d\{G\} : \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{F}_d\{G\}_l = \sum_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d} G_k e^{-i \frac{2\pi}{N} kl} \quad (\text{A.24})$$

Définition 5. Soit $(H_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$, on appelle **transformée de Fourier discrète inverse** de H la fonction $\mathcal{F}_d^{-1}\{H\} : \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{F}_d^{-1}\{H\}_l = \frac{1}{N^d} \sum_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d} H_k e^{i \frac{2\pi}{N} kl} \quad (\text{A.25})$$

Théorème 5 (Inversion de Fourier). Soit $(G_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$ un signal discret. On a :

$$G = \mathcal{F}_d^{-1}\{\mathcal{F}_d\{G\}\}. \quad (\text{A.26})$$

La transformée de Fourier discrète est un produit tensoriel. Considérons comme espace vectoriel de base l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$ de dimension N sur le corps $\mathbb{C}$. $(G_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$ est dans ce cadre un tenseur d fois contravariant : dans le cadre du calcul tensoriel, on le note $G^{k_1 \dots k_d}$. Introduisons le tenseur d fois covariant et d fois contravariant suivant

$$F_{j_1 \dots j_d}^{k_1 \dots k_d} = \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^d j_l k_l \right] \quad (\text{A.27})$$

appelé tenseur de Fourier. La transformée de Fourier discrète peut alors s'écrire de manière tensorielle :

$$\mathcal{F}_d\{G\}_l = \mathcal{F}_d\{G\}^{l_1 \dots l_d} = F_{i_1 \dots i_d}^{l_1 \dots l_d} G^{i_1 \dots i_d} \quad (\text{A.28})$$

En dimension 1 ($d = 1$), le tenseur E est une fois covariant et une fois contravariant. C'est donc une application linéaire et la transformée de Fourier discrète peut donc s'exprimer comme un produit matriciel. On introduit la matrice $\mathfrak{F}$ définie pour $(k; l) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2$ par $\mathfrak{F}_{kl} = \omega_0^{kl}$ où $\omega_0 = e^{-i2\pi/N}$. On a alors en considérant G comme un vecteur colonne de taille N :

$$\mathcal{F}_d\{G\} = \mathfrak{F}G \quad (\text{A.29})$$

Comme $\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}/N$ est l'identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on a bien

$$\mathcal{F}_d^{-1}\{H\} = \frac{1}{N}\overline{\mathfrak{F}}H. \quad (\text{A.30})$$

Proposition 4 (Convolution). *Soient $(G_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$ et $(H_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d}$. Le produit de convolution de G par H est défini par $(G * H)_k = \sum_{p \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^d} G_p H_{k-p}$. On a la relation suivante :*

$$\mathcal{F}_d\{G * H\} = \mathcal{F}_d\{G\}\mathcal{F}_d\{H\} \quad (\text{A.31})$$

A.4 Liens entre les transformations de Fourier

Pour cette section, on se place en dimension 1 ($d = 1$). Cela signifie qu'on ne considère que des signaux temporels.

Proposition 5. *Soient $g \in L^1(\mathbb{R})$ et G sa discrétisation à la fréquence $1/(\delta t)$, i.e. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $G[k] = g(k \times \delta t)$. La relation entre la transformée de Fourier de g et $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}$ est :*

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{g\}\left(f - \frac{k}{\delta t}\right) \quad (\text{A.32})$$

Démonstration. D'après l'équation (A.12), on sait que $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) = \delta t (\mathcal{F}\{g\} * \mathcal{F}\{c_{\delta t}\})(f)$. La formule de Poisson

$$\mathcal{F}\{c_{\delta t}\}(f) = \frac{1}{\delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{\delta t}\right), \quad (\text{A.33})$$

qui donne la transformée de Fourier du peigne de Dirac, permet de déduire le résultat souhaité. $\square$

En traitement du signal, les signaux sont en général filtrés avant d'être numérisés. Supposons donc que g est la convolution d'un signal analogique s avec un filtre h , c'est-à-dire que $g = s * h$. L'équation (A.32) donne dans ce cas :

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{s\}\left(f - \frac{k}{\delta t}\right) \mathcal{F}\{h\}\left(f - \frac{k}{\delta t}\right) \quad (\text{A.34})$$

Si h représente un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure $1/(2\delta t)$, l'équation ci-dessus se réduit à

$$\forall f \in \left[-\frac{1}{2\delta t}; \frac{1}{2\delta t}\right], \quad \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}(f) = \mathcal{F}\{s\}(f) \quad (\text{A.35})$$

et on a alors égalité entre $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}$ et $\mathcal{F}\{s\}$ sur la bande de fréquence couverte par la transformée de Fourier à temps discret. On appelle cela un filtrage anti-repliement car le filtre h empêche les fréquences supérieures à $1/(2\delta t)$ du signal s de se "replier" dans la bande de fréquence $[-1/(2\delta t); 1/(2\delta t)]$. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Nyquist-Shannon [163].

Proposition 6. Soit $G \in L^1(\mathbb{Z})$. On définit H la restriction de G à $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$, c'est-à-dire que $H[k] = G[k]$ si $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $H[k] = 0$ sinon. H peut donc aussi être vu comme un élément de $\llbracket 0, N-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$. On a l'égalité suivante entre la transformée de Fourier à temps discret et la transformée de Fourier discrète :

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(f) = \frac{\delta t}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}_d\{H\}_l \frac{1 - e^{i2\pi(l-f\delta tN)}}{1 - e^{i2\pi(l-f\delta tN)/N}} \quad (\text{A.36})$$

Démonstration. La démonstration consiste à expliciter les définitions des transformées de Fourier et se réduit à l'interversion de deux sommes finies :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\delta t}\{H\}(f) &= \delta t \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{-i2\pi\delta t k f} = \frac{\delta t}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}_d[H]_l e^{i\frac{2\pi}{N}lk} e^{-i2\pi\delta t k f} \\ &= \frac{\delta t}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}_d[H]_l \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{N}(l-\delta t N f)} \right)^k \end{aligned}$$

La formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \quad (\text{A.37})$$

permet de conclure la démonstration. $\square$

Inversement, la relation entre la transformée de Fourier à temps discret et la transformée de Fourier discrète est :

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \mathcal{F}_d\{H\}_k = \frac{1}{\delta t} \mathcal{F}_{\delta t}\{H\} \left(\frac{k}{\delta t N} \right) \quad (\text{A.38})$$

Annexe

B

Processus stochastiques

Sommaire

B.1	Processus stochastiques continus	128
B.1.1	Fonction de corrélation	128
B.1.2	Densité spectrale de puissance	128
B.1.3	Covariance	131
B.1.4	Dérivée d'un processus stochastique	132
B.2	Processus stochastiques discrets	133
B.2.1	Fonction de corrélation	133
B.2.2	Densité spectrale de puissance	133
B.2.3	Covariance	134

B.1 Processus stochastiques continus

On se contentera de définir les processus stochastiques de manière intuitive. Si $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un processus stochastique, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $x(t)$ est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{C}$. On ne considérera que des processus stochastiques gaussiens.

B.1.1 Fonction de corrélation

Définition 6. Soient x et y deux processus stochastiques. On appelle **fonction de corrélation** de x et y la fonction, notée $\check{R}_{xy}$, définie par

$$\check{R}_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{E} \left[x(t_1) \overline{y(t_2)} \right] \quad (\text{B.1})$$

où $\mathbf{E}$ est l'opérateur espérance.

Définition 7. Soit x un processus stochastique. On dit que ce processus est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par un changement de l'origine des temps.

Définition 8. Soient x et y deux processus stochastiques stationnaires. On appelle **fonction de corrélation stationnaire** de x et y la fonction, notée R_{xy} , définie par

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(t_1 - t_2) = \check{R}_{xy}(t_1, t_2) = \check{R}_{xy}(t + \tau, t) \quad (\text{B.2})$$

B.1.2 Densité spectrale de puissance

Définition 9. Soient x et y deux processus stochastiques. La **densité spectrale de puissance** (DSP) $\check{S}_{xy}$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation

$$\check{S}_{xy}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{R}_{xy}(t_1, t_2) e^{-i2\pi(t_1 f_1 + t_2 f_2)} dt_1 dt_2 = \mathcal{F}\{\check{R}_{xy}\}(f_1, f_2) \quad (\text{B.3})$$

Définition 10. Soient x et y deux processus stochastiques stationnaires. La **densité spectrale de puissance stationnaire** S_{xy} est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation stationnaire

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t) e^{-i2\pi t f} dt = \mathcal{F}\{R_{xy}\}(f) \quad (\text{B.4})$$

On utilisera souvent l'autocorrélation de x qui est R_{xx} et sa densité spectrale de puissance S_{xx} , qu'on pourra noter respectivement R_x et S_x .

Définition 11. On appelle **densité spectrale de puissance unilatérale** de x , un processus stochastique stationnaire réel, la fonction $S_x^{ss} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in \mathbb{R}_+, S_x^{ss}(f) = 2S_x(f) \quad (\text{B.5})$$

Comme on a supposé que x est à valeurs réelles, sa fonction d'autocorrélation est réelle. Donc $S_x(-f) = \overline{S_x(f)} : S_x^{ss}$ contient autant d'informations que S_x .

Proposition 7. Soient x et y deux processus stochastiques stationnaires et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les versions tronquées x_T et y_T de x et y respectivement par :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.6a})$$

$$y_T(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.7a})$$

$$(\text{B.7b})$$

On a le résultat suivant

$$S_{xy} \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\check{S}_{x_T y_T}(f_1, f_2)}{\int_{-T}^T e^{-i\pi u(f_1 + f_2)} du} \quad (\text{B.8})$$

Démonstration.

$$\check{S}_{x_T y_T}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \left[x_T(t_1) \overline{y_T(t_2)} \right] e^{-i2\pi(t_1 f_1 + t_2 f_2)} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.9a})$$

$$= \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_{xy}(t_1 - t_2) e^{-i2\pi(t_1 f_1 + t_2 f_2)} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.9b})$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \Phi(u, v) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Comme le déterminant de J_Φ , la matrice jacobienne de Φ , est égal à $-1/2$, l'intégrale double peut se réécrire :

$$\check{S}_{x_T y_T}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \int_{-2T}^{2T} R_{xy}(v) e^{-i\pi v(f_1 - f_2)} dv \int_{-2T}^{2T} e^{-i\pi u(f_1 + f_2)} du \quad (\text{B.11})$$

On obtient le résultat souhaité en divisant cette équation par $\int_{-2T}^{2T} e^{-i\pi u(f_1 + f_2)} du$ et en prenant la limite $T \rightarrow \infty$. $\square$

Corollaire 1. En posant $f = f_1 = -f_2$, on obtient :

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\check{S}_{x_T y_T}(f, -f)}{2T} \quad (\text{B.12})$$

Proposition 8. Soient x et y deux processus stochastiques stationnaires et $T \in \mathbb{R}_+^*$. x_T et

y_T sont définies de la même manière que dans la proposition 7. On a le résultat suivant :

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} \left[\mathcal{F}\{x_T\}(f) \overline{\mathcal{F}\{y_T\}(f)} \right]}{2T} \quad (\text{B.13})$$

Démonstration. On utilise le résultat du corollaire 1 et on calcule $S_{x_T y_T}(f, -f)$ d'une autre manière. Pour cela, on introduit la suite de fonction $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\eta_j(f) = \int_{-T_j}^{T_j} \int_{-T_j}^{T_j} x_T(t_1) \overline{y_T(t_2)} e^{-i2\pi(t_1 f - t_2 f)} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.14})$$

avec $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ qui tend vers $+\infty$. La suite η_j converge simplement vers

$$\eta(f) = \mathcal{F}\{x_T\}(f) \mathcal{F}\{\overline{y_T}\}(-f) \quad (\text{B.15})$$

et $\forall i \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathbb{R}, |\eta_j(f)| \leq |\eta(f)|$ par définition de x_T et y_T . Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique et on peut donc intervertir les intégrales sur $\mathbb{R}$ avec l'opérateur espérance.

$$\check{S}_{x_T}(f, -f) = \mathbf{E} [\mathcal{F}\{x_T\}(f) \mathcal{F}\{\overline{y_T}\}(-f)] \quad (\text{B.16a})$$

$$= \mathbf{E} \left[\mathcal{F}\{x_T\}(f) \overline{\mathcal{F}\{y_T\}(f)} \right] \quad (\text{B.16b})$$

On obtient ainsi le résultat souhaité. $\square$

Proposition 9. Soient x_1 et x_2 deux processus stochastiques. Soit h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On introduit les processus stochastiques $y_1 = h_1 * x_1$ et $y_2 = h_2 * x_2$. Les densités spectrales de puissance $\check{S}_{x_1 x_2}$ et $\check{S}_{y_1 y_2}$ sont reliées par :

$$\check{S}_{y_1 y_2}(f_1, f_2) = \check{S}_{x_1 x_2}(f_1, f_2) \mathcal{F}\{h_1\}(f_1) \overline{\mathcal{F}\{h_2\}(-f_2)} \quad (\text{B.17})$$

Démonstration. Par définition de la fonction de corrélation et du produit de convolution,

$$\check{R}_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \mathbf{E} [y_1(t) \overline{y_2(0)}] = \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) h_1(t_1 - u) du \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v) h_2(t_2 - v) dv \right]. \quad (\text{B.18})$$

En intervertissant l'opérateur espérance et les intégrales avec le théorème de Fubini, on obtient :

$$\check{R}_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1 x_2}(u, v) h_1(t_1 - u) \overline{h_2(t_2 - v)} dudv \quad (\text{B.19})$$

On pose $h(t_1 - u, t_2 - v) = h_1(t_1 - u) \overline{h_2(t_2 - v)}$, ce qui permet d'écrire

$$\check{R}_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = (R_{x_1 x_2} * h)(t_1, t_2) \quad (\text{B.20})$$

On obtient directement

$$\check{R}_{y_1 y_2}(f_1, f_2) = S_{x_1 x_2}(f_1, f_2) \mathcal{F}\{h\}(f_1, f_2) \quad (\text{B.21})$$

Enfin, étant donné la définition de h , $\mathcal{F}\{h\}(f_1, f_2) = \mathcal{F}\{h_1\}(f_1) \mathcal{F}\{\overline{h_2}\}(f_2)$. Le fait que $\mathcal{F}\{\overline{h_2}\}(f_2) = \overline{\mathcal{F}\{h_2\}(-f_2)}$ permet de conclure. $\square$

Corollaire 2. Soient x_1 et x_2 deux processus stochastiques stationnaires. Soient h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On introduit les processus stochastiques $y_1 = h_1 * x_1$ et $y_2 = h_2 * x_2$. Les densités spectrales de puissance $S_{x_1 x_2}$ et $S_{y_1 y_2}$ sont reliées par :

$$\boxed{S_{y_1 y_2} = S_{x_1 x_2} \mathcal{F}\{h_1\} \overline{\mathcal{F}\{h_2\}}} \quad (\text{B.22})$$

Démonstration. Cette égalité découle directement du corollaire 1 et de la proposition 9. $\square$

B.1.3 Covariance

On travaille dans cette partie avec des processus stochastiques de moyenne nulle. Dans le cas où l'espérance du processus s considéré n'est pas nulle, on introduit le processus stochastique $s - \mathbf{E}(s)$, où $\mathbf{E}$ est l'espérance mathématique.

Définition 12. Soient x et y deux processus stochastiques de moyenne nulle. On appelle covariance de x et y à l'instant t , notée $V_{xy}(t)$, la quantité

$$\boxed{V_{xy}(t) = R_{xy}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{S}_{xy}(f_1, f_2) e^{i2\pi t(f_1 + f_2)} df_1 df_2} \quad (\text{B.23})$$

Définition 13. Soient x et y deux processus stochastiques stationnaires de moyenne nulle. La covariance de x et y , indépendante du temps, est notée V_{xy} et est égale à

$$\boxed{V_{xy} = R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) df} \quad (\text{B.24})$$

Dans le cas d'un seul processus stochastique, on note $V_x = V_{xx}$ et on parle de variance. C'est une quantité qui est, par définition, toujours positive. On introduit de plus l'écart-type $\sigma_x = \sqrt{V_x}$.

Proposition 10. Soient x_k , $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, N processus stochastiques stationnaires de moyenne nulle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit la matrice Ω par $\Omega_{kl} = \mathbf{E}[x_k(0)x_l(0)]$, appelée matrice de covariance. Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. On introduit y_k , $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, N processus stochastiques définis par

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

La matrice de covariance $\tilde{\Omega}$ définie par $\tilde{\Omega}_{kl} = \mathbf{E}[y_k(0)y_l(0)]$ est égale à

$$\boxed{\tilde{\Omega} = M\Omega M'} \quad (\text{B.26})$$

Démonstration. La démonstration consiste principalement à intervertir des sommes finies avec l'opérateur espérance :

$$\tilde{\Omega}_{kl} = \Omega_{y_k y_l} = \mathbf{E}[y_k(0)y_l(0)] = \mathbf{E}\left[\sum_{m=1}^N M_{km}x_m(0)\sum_{n=1}^N M_{ln}x_n(0)\right] \quad (\text{B.27a})$$

$$= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N M_{km}M_{ln}\mathbf{E}[x_m(0)x_n(0)] \quad (\text{B.27b})$$

$$= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N M_{km}V_{x_m x_n}M'_{nl} = (M\Omega M')_{kl} \quad (\text{B.27c})$$

Le calcul étant valable pour tout k et l dans $\llbracket 1; N \rrbracket$, on en déduit le résultat souhaité. $\square$

Proposition 11. Soient e et m deux processus stochastiques stationnaires de moyenne nulle. On connaît S_{em} . On définit $x = e * h_x$ et $y = m * h_y$. On a alors

$$V_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{em}(f)\mathcal{F}\{h_x\}(f)\overline{\mathcal{F}\{h_y\}(f)}df \quad (\text{B.28})$$

Démonstration. Ce résultat découle directement du corollaire 2 (p. 131) et de la définition de la covariance. $\square$

B.1.4 Dérivée d'un processus stochastique

Définition 14. Soit x un processus stochastique stationnaire. On dit que x est dérivable si toutes ses réalisations sont dérivables. On note $\dot{x}$ la dérivée de x .

Proposition 12. Soit x un processus stochastique stationnaire à valeurs dans $\mathbb{C}$ dérivable dont la dérivée est notée $\dot{x}$:

$$\boxed{S_{\dot{x}}(f) = (2\pi f)^2 S_x(f)} \quad (\text{B.29})$$

Démonstration. Soit x_T la version tronquée de x telle que définie dans la proposition 8. On appelle $\dot{x}_T$ la version tronquée de $\dot{x}$ et $\partial x_T / \partial t$ la dérivée de x_T par rapport à t . $\dot{x}_T = \partial x_T / \partial t$ presque partout au sens des ensembles mesurables. On a alors :

$$S_{\dot{x}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[|\mathcal{F}\{\dot{x}_T\}(f)|^2]}{2T} \quad (\text{B.30})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[|\mathcal{F}\{\partial x_T / \partial t\}(f)|^2]}{2T} \quad (\text{B.31})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} |i2\pi f|^2 \frac{\mathbf{E}[|\mathcal{F}\{x_T\}(f)|^2]}{2T} \quad (\text{B.32})$$

$$= (2\pi f)^2 S_x(f) \quad (\text{B.33})$$

□

Corollaire 3. Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un processus stochastique stationnaire dérivable n fois dont la dérivée k -ième, avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, est notée $x^{(k)}$:

$$\boxed{S_{x^{(k)}}(f) = (2\pi f)^{2k} S_x(f)} \quad (\text{B.34})$$

B.2 Processus stochastiques discrets

Dans le cas de processus stochastiques discrets, on retrouve des résultats similaires à ceux de la section précédente. On considérera X et Y comme deux processus stochastiques discrets venant de la discrétisation de deux processus stochastiques continus, x et y respectivement, avec un pas de temps noté δt . L'utilisation du peigne de Dirac permet d'adapter au cas discret les résultats présentés dans le cas continu. On se contentera donc de donner les définitions et résultats essentiels, en explicitant les liens avec le cas continu.

B.2.1 Fonction de corrélation

Définition 15. Soient X et Y deux processus stochastiques discrets indicés par $\mathbb{Z}$. On appelle **fonction de corrélation** de X et Y la fonction, notée $\check{R}_{XY}$, définie par

$$\boxed{\check{R}_{XY}[k, n] = \mathbf{E} \left[X[k] \overline{Y[n]} \right]} \quad (\text{B.35})$$

Définition 16. Soient X et Y deux processus stochastiques stationnaires discrets indicés par $\mathbb{Z}$. On appelle **fonction de corrélation stationnaire** de X et Y la fonction, notée R_{XY} , définie par

$$R_{XY}[l] = R_{XY}[k - n] = \check{R}_{XY}[k, n] = \check{R}_{XY}[p + l, p] \quad (\text{B.36})$$

Ces fonctions de corrélation peuvent être reliées à celles de processus stochastiques continus qui ont été discrétisés : $R_{XY}[k, n] = R_{xy}(k \times \delta t, n \times \delta t)$ et $R_{XY}[p] = R_{xy}(p \times \delta t)$.

B.2.2 Densité spectrale de puissance

Définition 17. Soient X et Y deux processus stochastiques stationnaires discrets. La **densité spectrale de puissance stationnaire** S_{XY} est la transformée de Fourier à temps discret de la fonction de corrélation

$$\boxed{S_{XY}(f) = \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XY}[k] e^{-i2\pi k \delta t f} = \mathcal{F}_{\delta t}\{R_{XY}\}(f)} \quad (\text{B.37})$$

La formule (A.32) permet d'établir le lien entre les densités spectrales de puissance des processus continus et des processus discrets :

$$S_{XY}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{xy} \left(f - \frac{k}{\delta t} \right) \quad (\text{B.38})$$

Proposition 13. Soient X_1 et X_2 deux processus stochastiques stationnaires réels discrets. Soient H_1 et H_2 deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. On introduit les processus stochastiques $Y_1 = H_1 * X_1$ et $Y_2 = H_2 * X_2$. Les densités spectrales de puissance $S_{X_1 X_2}$ et $S_{Y_1 Y_2}$ sont reliées par :

$$S_{Y_1 Y_2} = S_{X_1 X_2} \frac{\mathcal{F}_{\delta t}\{H_1\} \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{H_2\}}}{\delta t^2} \quad (\text{B.39})$$

Démonstration. Ce résultat peut se démontrer en effectuant le même raisonnement que pour la démonstration de la proposition 9. On peut aussi démontrer cette proposition en utilisant directement le résultat de la proposition 9 :

$$S_{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2} = S_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2} \mathcal{F}\{\tilde{h}_1\} \overline{\mathcal{F}\{\tilde{h}_2\}} \quad (\text{B.40})$$

où une quantité avec un tilde est égale à la quantité sans tilde multipliée par le peigne de Dirac noté $c_{\delta t}$. D'après une remarque faite dans la section A.2, $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\} = \delta t \mathcal{F}\{\tilde{g}\} = \delta t \mathcal{F}\{c_{\delta t} g\}$ où G est la discrétisation de g . On a donc

$$S_{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2} = S_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2} \frac{\mathcal{F}_{\delta t}\{H_1\} \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{H_2\}}}{\delta t^2} \quad (\text{B.41})$$

Enfin, comme R_{XY} est la discrétisation de R_{xy} , $S_{\tilde{x}\tilde{y}} = S_{XY}/\delta t$, ce qui achève la démonstration. $\square$

B.2.3 Covariance

On travaille dans cette partie avec des processus stochastiques de moyenne nulle. Dans le cas où l'espérance du processus S considéré n'est pas nulle, on introduit le processus stochastique $S - \mathbf{E}(S)$.

Définition 18. Soient X et Y deux processus stochastiques stationnaires discrets de moyenne nulle. On appelle covariance de X et Y , notée V_{XY} , la quantité

$$V_{XY} = R_{XY}(0) = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_{XY}(f) df \quad (\text{B.42})$$

Dans le cas d'un seul processus stochastique, on note $V_X = V_{XX}$ et on parle de variance. On introduit de plus l'écart-type $\sigma_X = \sqrt{V_X}$.

Proposition 14. Soit E un processus stochastique stationnaire discret de moyenne nulle

correspondant à la discrétisation de n avec un pas de temps δt . On définit $X = E * H_X$ et $Y = E * H_Y$. On a alors

$$V_{XY} = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S_E(f) \frac{\mathcal{F}_{\delta t}[H_X](f) \overline{\mathcal{F}_{\delta t}[H_Y](f)}}{\delta t^2} df. \quad (\text{B.43})$$

Si E est la discrétisation d'un processus stochastique continu e , le lien entre S_E et S_e est donné par la proposition 5.

Démonstration. Ce résultat découle directement de la proposition 13 et de la définition de la covariance. $\square$

Pour finir, la proposition 10 est aussi valable pour des processus stochastiques discrets.

Méthode des moindres carrés et filtrage optimal

Sommaire

C.1	Position du problème	138
C.1.1	Processus de mesure et paramétrisation	138
C.1.2	Définitions et résultats généraux	139
C.2	Solution générale par la méthode des moindres carrés	140
C.3	Moindres carrés usuels	141
C.4	Moindres carrés généralisés (MCG)	141
C.4.1	Influence de la connaissance de la densité spectrale de puissance	143
C.4.2	Filtrage optimal	143

Le but de la méthode des moindres carrés est de déterminer, à partir de données expérimentales souvent entachées de bruit, les paramètres d'un modèle mathématique décrivant ces données. Cette méthode a été développée indépendamment par Legendre [190] et Gauss [191]. La modélisation mathématique permet d'ajouter de l'information aux données qui sont utilisées pour déterminer les paramètres inconnus. Pour ce faire, le traitement des données minimise la différence entre les données expérimentales et le modèle. Ainsi, la méthode des moindres carrés [191, 192] peut être vue comme un problème de minimisation, qui dépend donc de la norme utilisée.

Cette annexe propose une approche générale de la méthode des moindres carrés en considérant une norme générale dérivant d'un produit scalaire. Après avoir rappelé quelques définitions et résultats, les propriétés de la méthode des moindres carrés sont détaillées. Ensuite, deux normes particulières sont considérées. Enfin, l'équivalence entre une méthode des moindres carrés particulière et le filtrage optimal est montrée. Cela permet la généralisation de la technique du filtrage optimal utilisée en traitement du signal.

C.1 Position du problème

C.1.1 Processus de mesure et paramétrisation

Considérons un signal temporel déterministe $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que l'instrument utilisé pour mesurer ce signal fait des mesures sans biais mais que du bruit est ajouté dans la processus de mesure. Par conséquent, la mesure est $m(t) = s(t) + e(t)$, où e est un processus stochastique gaussien de moyenne nulle. Ce processus est supposé stationnaire et sa densité spectrale de puissance, notée S , ainsi que sa fonction d'autocorrélation, notée R , sont supposées connues.

On suppose que $N \in \mathbb{N}^*$ mesures sont effectuées avec un pas de temps constant appelé $\delta t \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal est filtré avant numérisation par un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est $1/(2\delta t)$ afin d'éviter les effets de repliement spectral. Dans cette annexe, la notation $\mathbf{y}$ désigne un vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C})$, dont les composantes sont les valeurs de y aux instants d'échantillonnage $y \times \delta t$ après filtrage par le filtre anti-repliement. On suppose que le signal s dépend linéairement de p paramètres, appelés x_l avec $l \in \llbracket 1; p \rrbracket$, tel quel

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathbf{s}_k = \sum_{l=1}^p x_l f_l(k \times \delta t), \quad (\text{C.1})$$

où f_l sont p fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Cette équation peut être écrite sous forme matricielle $\mathbf{s} = J\mathbf{x}$, avec $J \in \mathcal{M}_{N,p}(\mathbb{C})$ et $J_{kl} = f_l(k \times \delta t)$. Comme les mesures sont entachées de bruit, cela conduit à

$$\mathbf{m} = J\mathbf{x} + \mathbf{e}. \quad (\text{C.2})$$

Le vecteur $\mathbf{e}$ est un vecteur aléatoire de moyenne nulle dont la matrice de covariance, notée Ω , est définie par $\Omega_{ij} = R((i - j)\delta t)$. Le but de la méthode des moindres carrés, ou de

toute procédure d'identification, est d'obtenir $\mathbf{x}^*$ un estimateur linéaire non-biaisé de $\mathbf{x}$, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{x}^* = A\mathbf{m}$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,N}$ et $\mathbf{E}[\mathbf{x}^*] = \mathbf{x}$. Avant d'aller plus loin, la section suivante généralise certaines définitions données dans l'annexe A.

C.1.2 Définitions et résultats généraux

Considérons $G : \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes : $\forall l \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_k |G_{kl}| < \infty$. La transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de G , appelée $\mathcal{F}_{\delta t}\{G\}$, est l'application définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}, \forall l \in \llbracket 1; p \rrbracket, \mathcal{F}_{\delta t}\{G\}_l(f) = \delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{kl} e^{-i2\pi k f \delta t}. \quad (\text{C.3})$$

La transformée de Fourier à temps discret inverse d'une application $h : \mathbb{R} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ est l'application, appelée $\mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{h\}$, définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall l \in \llbracket 1; p \rrbracket, \mathcal{F}_{\delta t}^{-1}\{h\}_{kl} = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} h_l(f) e^{2\pi i k f \delta t} df. \quad (\text{C.4})$$

Par extension, la TFTD peut être définie pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{N,p}(\mathbb{R})$. En introduisant $\check{M} : \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\check{M}_{kl} = M_{kl}$ si $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $\check{M}_{kl} = 0$ sinon, la TFTD de M est définie par $\mathcal{F}_{\delta t}\{M\} = \mathcal{F}_{\delta t}\{\check{M}\}$.

Étant donné deux applications A et B appartenant à $\mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$, la quantité $(A|B) \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$ est le produit scalaire matriciel de A et B défini par

$$\forall (k; l) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, (A|B)_{kl} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{A_{jk}} B_{jl}. \quad (\text{C.5})$$

Le théorème de Parseval implique

$$\forall (k; l) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, (A|B)_{kl} = \frac{1}{\delta t} \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{A\}_k(f)} \mathcal{F}_{\delta t}\{B\}_l(f) df. \quad (\text{C.6})$$

Finalement, soit Q une application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. L'application L_Q , appelée convolution généralisée, est définie par

$$\forall X : \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}, \forall (k; l) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket, L_Q(X)_{kl} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Q_{k-i} X_{il}, \quad (\text{C.7})$$

et la notation $L_Q(X) = Q * X$ est utilisée. L'application inverse de L_Q , définie par $L_Q \circ L_Q^{-1} = L_Q^{-1} \circ L_Q = \text{Id}$, a l'expression suivante :

$$L_Q^{-1}(Y) = \mathcal{F}_{\delta t}^{-1} \left\{ \frac{\delta t^2}{\mathcal{F}_{\delta t}\{Q\}} \right\} * Y. \quad (\text{C.8})$$

C.2 Solution générale par la méthode des moindres carrés

L'estimateur des moindres carrés est la quantité $\mathbf{x}^*$, telle que la norme de $\mathbf{m} - J\mathbf{x}$ est minimale pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Le résultat dépend donc du choix de la norme sur l'espace vectoriel. Dans cette annexe, on suppose que la norme dérive d'un produit scalaire, défini pour $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ dans $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C})$ par

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle_P = \mathbf{y}' P \mathbf{z} \quad (\text{C.9})$$

où $\mathbf{y}'$ est la transposée complexe de $\mathbf{y}$. La norme est une application linéaire définie par $|\mathbf{x}|_P = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle_P}$. Comme $|\mathbf{m} - J\mathbf{x}|_P^2$ est convexe pour chaque composante de $\mathbf{x}$ et que la norme est toujours positive, elle est minimale lorsque sa dérivée s'annule : $2(J'PJ\mathbf{x} - J'P\mathbf{m}) = 0$. Sous l'hypothèse que $J'PJ$ est inversible, c'est-à-dire que J est de rang p , l'estimateur est égal à

$$\mathbf{x}^* = (J'PJ)^{-1} J'P\mathbf{m}. \quad (\text{C.10})$$

Comme $\mathbf{E}[\mathbf{x}^*] = (J'PJ)^{-1} J'P\mathbf{E}[J\mathbf{x} + \mathbf{e}] = \mathbf{x}$, cet estimateur est un vecteur aléatoire gaussien sans biais et sa matrice de covariance $V_{\mathbf{x}^*}$ est égale à

$$V_{\mathbf{x}^*} = (J'PJ)^{-1} J'P'\Omega PJ(J'PJ)^{-1}. \quad (\text{C.11})$$

Définition 19 (Définition formelle de la méthode générale des moindres carrés). *Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq N$. $\mathcal{P}_N$ est l'ensemble des matrices de taille $N \times N$ symétriques et définies positives. $\mathcal{R}_{N,p}$ est l'ensemble des matrices de taille $N \times p$ de rang p . La méthode des moindres carrés est définie par l'application suivante*

$$\text{Mc} : (\mathcal{P}_N, \mathcal{R}_{N,p}, \mathcal{M}_{N,1}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,1} \quad (\text{C.12})$$

$$(P, J, \mathbf{m}) \rightarrow (J'PJ)^{-1} J'P\mathbf{m} \quad (\text{C.13})$$

Le résultat présenté ci-dessous, dont la démonstration est directe, est d'un intérêt majeur pour le traitement des données lorsque plusieurs méthodes des moindres carrés sont utilisées successivement. En effet, il donne les conditions sur les produits scalaires et les matrices de projection pour que le résultat de l'optimisation globale soit indépendant des étapes.

Proposition 15 (Transitivité). *Soit $(N_0, N_1, N_2) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $N_2 \leq N_1 \leq N_0$. P_0, P_1 et $\tilde{P}_0$ appartiennent respectivement à $\mathcal{P}_{N_0}, \mathcal{P}_{N_1}$ et $\mathcal{P}_{N_0}$. J_0 et J_1 appartiennent respectivement à $\mathcal{R}_{N_0, N_1}$ et $\mathcal{R}_{N_1, N_2}$.*

$$\forall \mathbf{m} \in \mathcal{M}_{N_0,1}, \quad \text{Mc}(P_1, J_1, \text{Mc}(P_0, J_0, \mathbf{m})) = \text{Mc}(\tilde{P}_0, J_0 J_1, \mathbf{m}) \quad (\text{C.14})$$

est équivalent à

$$(J_1' P_1 J_1)^{-1} J_1' P_1 (J_0' P_0 J_0)^{-1} J_0' P_0 = (J_1' J_0' \tilde{P}_0 J_0 J_1)^{-1} J_1' J_0' \tilde{P}_0 \quad (\text{C.15})$$

Proposition 16. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq N$. J appartient à $\mathcal{R}_{N,p}$ et P appartient à $\mathcal{P}_N$. $\mathbf{x}^*$ et $V_{\mathbf{x}^*}$ sont définis par les équations (C.10) et (C.11) respectivement. Alors :

- Il existe $\tilde{J} \in \mathcal{R}_{N,p}$ et $C \in \mathcal{M}_{p,p}$ tels que $\det(C) \neq 0$, $\tilde{J} = JC$ et $\tilde{J}'P\tilde{J} = \text{Id}$.
- $\mathbf{x}^* = C\tilde{J}'P\mathbf{m}$ et $V_{\mathbf{x}^*} = C\tilde{J}'P\Omega P\tilde{J}C'$.

La première partie de cette proposition vient de l'algorithme de Gram-Schmidt. La seconde partie est intéressante car elle permet d'éviter les instabilités numériques lorsque $\det(J'PJ)$ est proche de 0. Ainsi, cette proposition permet d'implémenter les moindres carrés en évitant une inversion matricielle numériquement instable et en la remplaçant par un processus de Gram-Schmidt, qui ne génère pas d'instabilité numérique.

Parmi l'ensemble des choix possibles pour la matrice P , il y a deux manières usuelles de définir le produit scalaire : elles seront développées dans les deux sections suivantes. La plus simple est $P = \text{Id}$ et l'autre possibilité est $P = \Omega^{-1}$.

C.3 Moindres carrés usuels

Dans cette section, $P = \text{Id}$. Dans ce cas, $\mathbf{x}^* = (J'J)^{-1}J'\mathbf{m}$ et $V_{\mathbf{x}^*} = (J'J)^{-1}J'\Omega J(J'J)^{-1}$. Il est important de remarquer qu'en général cet algorithme n'est pas transitif au sens de la proposition 15. La variance de l'estimateur peut être exprimée en utilisant la densité spectrale de puissance du bruit de mesure :

$$V_{\mathbf{x}^*} = (J'J)^{-1}W(J'J)^{-1} \quad (\text{C.16})$$

avec $W \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ défini par

$$W_{kl} = \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{\frac{1}{2\delta t}} S(f) \frac{\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}_k(f)} \mathcal{F}_{\delta t}\{J\}_l(f)}{T^2} df \quad (\text{C.17})$$

Démonstration. Le but est d'exprimer W en utilisant la DSP du bruit :

$$W_{kl} = (J'\Omega J)_{kl} = \sum_{j=1}^N \overline{J_{jk}} \sum_{i=1}^N R((j-i)\delta t) J_{il} \quad (\text{C.18})$$

La somme sur i est une convolution et la somme sur j est un produit scalaire. Exprimer ces deux sommes avec les transformées de Fourier de J et R en utilisant le théorème de Parseval (cf. eq. (C.6)) permet de conclure. $\square$

C.4 Moindres carrés généralisés (MCG)

L'autre approche, appelée « moindres carrés généralisés », est définie par $P = \Omega^{-1}$. Dans ce cas, $\mathbf{x}^* = (J'\Omega^{-1}J)^{-1}J'\Omega^{-1}\mathbf{m}$ et $V_{\mathbf{x}^*} = (J'\Omega^{-1}J)^{-1}$. C'est la définition de P qui

donne la valeur minimale à $V_{\mathbf{x}^*}$ [192] pour la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ définie par

$$A \leq B \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) \cup \{0_k\}, A + M = B. \quad (\text{C.19})$$

Contrairement au cas précédent, cette méthode est transitive, ce qui est un avantage supplémentaire au fait que la matrice de covariance de l'estimateur $V_{\mathbf{x}^*}$ est minimale.

Dans ce contexte, il est nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de covariance Ω . En inversant Ω , les informations sur les corrélations entre les événements séparés par une durée supérieure à $N \times \delta t$ sont perdues, alors qu'elles sont présentes dans la fonction de corrélation R . Pour tirer partie de cette observation, l'idée est d'étendre artificiellement la taille des vecteurs jusqu'à l'infini en les remplissant avec des zéros. Pour ce faire, introduisons $\check{J} : \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ et $\check{\mathbf{m}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définis par

$$\forall (i; j) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1; p \rrbracket, \check{J}_{ij} = \begin{cases} J_{ij} & \text{si } i \in \llbracket 1; N \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.20a})$$

$$(\text{C.20b})$$

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \check{\mathbf{m}}_i = \begin{cases} \mathbf{m}_i & \text{si } i \in \llbracket 1; N \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.21a})$$

$$(\text{C.21b})$$

La matrice Ω étant symétrique, le produit matricielle ΩY avec Y une matrice comportant N lignes peut être remplacé par le produit de convolution généralisé. Calculer l'inverse de la matrice Ω lorsque $N \rightarrow \infty$ est équivalent à calculer l'inverse de l'application L_R (cf. section C.1.2). L'estimateur devient

$$\mathbf{x}^* = \left(\check{J} \middle| L_R^{-1}(\check{J}) \right)^{-1} \left(\check{J} \middle| L_R^{-1}(\check{\mathbf{m}}) \right), \quad (\text{C.22})$$

et la variance

$$V_{\mathbf{x}^*} = \left(\check{J} \middle| L_R^{-1}(\check{J}) \right)^{-1}. \quad (\text{C.23})$$

Cette variance est plus petite que celle calculée avec des matrices de taille finie car elle est calculée de manière optimale dans un espace plus grand et que plus d'informations sur le bruit sont utilisées dans le traitement des données.

Dans le cas où $p = 1$, les données ne dépendent que d'un seul paramètre et les équations précédentes peuvent s'écrire :

$$\mathbf{x}^* = \left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{|\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2}{S(f)} df \right)^{-1} \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)} \mathcal{F}_{\delta t}\{\mathbf{m}(f)\}}{S(f)} df, \quad (\text{C.24})$$

et

$$V_{\mathbf{x}^*} = \left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{|\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2}{S(f)} df \right)^{-1}. \quad (\text{C.25})$$

C.4.1 Influence de la connaissance de la densité spectrale de puissance

L'approche présentée ci-dessus dépend de manière importante de la connaissance de la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit. Il est donc nécessaire de quantifier l'erreur qui est faite si une mauvaise DSP est utilisée pour traiter les données. Appelons $\mathring{S}$ la DSP utilisée pour traiter les données et S la vraie DSP. On suppose qu'il existe $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\mathring{S}(f) = S(f) + \epsilon w(f) \quad (\text{C.26})$$

avec $\epsilon \ll 1$ et $\forall f \in \mathbb{R}, |w(f)| \leq |S(f)|$. Pour des raisons de simplicité, p est supposé être égal à 1, c'est-à-dire que J est une matrice colonne. Nous appelons $\hat{\mathbf{x}}^*$ et $\mathring{V}_{\mathbf{x}^*}$ respectivement l'estimateur et la variance de la méthode des MCG utilisée avec $\mathring{S}$. L'estimateur $\hat{\mathbf{x}}^*$ est toujours sans biais. La covariance est quant à elle égale à

$$\mathring{V}_{\mathbf{x}^*} = \left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{|\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2}{\mathring{S}(f)} df \right)^{-2} \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{S(f)}{\mathring{S}^2(f)} |\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2 df \quad (\text{C.27})$$

La formule de Taylor conduit à

$$\frac{\mathring{V}_{\mathbf{x}^*} - V_{\mathbf{x}^*}}{V_{\mathbf{x}^*}} = \epsilon^2 \left[V_{\mathbf{x}^*} \int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{w^2(f)}{S^3(f)} |\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2 df - V_{\mathbf{x}^*}^2 \left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{w(f)}{S^2(f)} |\mathcal{F}_{\delta t}\{J\}(f)|^2 df \right)^2 \right] + o(\epsilon^2), \quad (\text{C.28})$$

ce qui montre que l'erreur est d'ordre 2 en ϵ .

C.4.2 Filtrage optimal

Le but de cette dernière partie est de montrer l'équivalence de la technique de filtrage optimal [193] et de la méthode des moindres carrés généralisés présentée précédemment. La technique du filtrage optimal a pour objectif de maximiser par rapport à $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ le rapport signal-sur-bruit suivant au temps t_0

$$\frac{S}{N} = \frac{y_s(t_0)}{\sqrt{\mathbf{E}[|y_e(t_0)|^2]}} \quad (\text{C.29})$$

où y_s et y_e sont les convolutions de h avec s et e respectivement. Le but est de détecter le signal s dans un signal entaché du bruit e . Le filtre h qui maximise le rapport signal-sur-bruit est défini par sa transformée de Fourier [194, §10.1] :

$$\mathcal{F}_{\delta t}\{h\}(f) = K \frac{\overline{\mathcal{F}_{\delta t}\{s\}}}{S(f)} e^{-i2\pi f t_0} \quad (\text{C.30})$$

où K est un coefficient. h est appelé « filtre adapté ». En posant

$$K = \left(\int_{-\frac{1}{2\delta t}}^{-\frac{1}{2\delta t}} \frac{|\mathcal{F}_{\delta t}\{s\}|^2}{S(f)} df \right)^{-1}, \quad (\text{C.31})$$

on trouve la même expression que dans l'équation (C.24), à l'exception de l'exponentiel faisant intervenir t_0 , qu'il suffit de prendre égal à 0. Cela démontre l'équivalence entre le filtrage optimal et les moindres carrés généralisés dans la limite infinie. La méthode des MCG a l'avantage de permettre de déterminer plusieurs paramètres, c'est-à-dire d'identifier plusieurs motifs dans les données. Elle permet aussi d'appréhender la corrélation entre les paramètres en déterminant la matrice de covariance. À l'inverse, le filtrage optimal ne permet de rechercher qu'un seul motif.

Communications

Journaux à comité de lecture

- B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Experimental demonstration of bias rejection from electrostatic accelerometer measurements ». In: *Measurement* (2012). Submitted.
- B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Unbiased acceleration measurements with an electrostatic accelerometer on a rotating platform ». In: *Adv. Space Res.* (2012). DOI: 10.1016/j.asr.2012.08.012.
- B. Christophe et al. « OSS (Outer Solar System): A fundamental and planetary physics mission to Neptune, Triton and the Kuiper Belt ». In: *Exp. Astron.* 34.2 (2012), pp. 203–242. DOI: 10.1007/s10686-012-9309-y.
- B. Lenoir et al. « Electrostatic accelerometer with bias rejection for Gravitation and Solar System physics ». In: *Adv. Space Res.* 48.7 (2011), pp. 1248–1257. DOI: 10.1016/j.asr.2011.06.005.

Actes de congrès

- A. Lévy et al. « OSS: an Outer Solar System Mission towards Neptune, Triton and KBO ». in: *62nd International Astronautical Congress*. IAC-11.A3.5.5. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC401397_s1.pdf. Cape Town, South Africa, Oct. 2011.
- H. Selig et al. « Technology development for fundamental physics space missions aiming at high precision gravitational field measurements ». In: *62nd International Astronautical Congress*. IAC-11.A2.3.12. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC401606_s1.pdf. Cape Town, South Africa, Oct. 2011.
- B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Measuring the absolute non-gravitational acceleration of a spacecraft: goals, devices, methods, performances ». In: *Journées 2011 de la Société Française d’Astronomie & d’Astrophysique*. Ed. by G. Alecian et al. <http://sf2a.cesr.fr/2011/2011sf2a.conf..0663L.pdf>. Paris, France, June 2011, pp. 663–667.
- B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Electrostatic accelerometer with bias rejection for deep space gravitation tests ». In: *2011 Gravitational Waves and Experimental Gravity*. Ed. by E. Augé, J. Dumarchez, and J. Tran Thanh Van. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC403314_s1.pdf. La Thuile, Italy, Mar. 2011, pp. 415–416.
- B. Christophe et al. « OSS (Outer Solar System) mission ». In: *2011 Gravitational*

Waves and Experimental Gravity. Ed. by E. Augé, J. Dumarchez, and J. Tran Thanh Van. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC395078_s1.pdf. La Thuile, Italy, Mar. 2011, pp. 249–253.

- B. Lenoir et al. « Odyssey 2: A mission toward Neptune and Triton to test General Relativity ». In: *61st International Astronautical Congress*. IAC-10.A3.6.5. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC397477_s1.pdf. Prague, Czech Republic, Oct. 2010.

Bibliographie

- [1] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 3^e édition latine. Londres: eq. aur. Editio tertia aucta & emendata, 1726.
- [2] A. A. Michelson. « The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether ». In: *Am. J. Sci.* 22.128 (1881), pp. 120–129.
- [3] A. A. Michelson and E. W. Morley. « On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether ». In: *Am. J. Sci.* 34.203 (1887), pp. 333–345.
- [4] R. J. Kennedy and E. M. Thorndike. « Experimental establishment of the relativity of time ». In: *Phys. Rev.* 42.3 (1932), pp. 400–418. DOI: 10.1103/PhysRev.42.400.
- [5] D. Hils and J. L. Hall. « Improved Kennedy-Thorndike experiment to test special relativity ». In: *Phys. Rev. Lett.* 64.15 (1990), pp. 1697–1700. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.1697.
- [6] A. Einstein. « Zur elektrodynamik bewegter körper ». In: *Ann. Phys.* 17 (1905), pp. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [8] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [9] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [10] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006 ». In: *J. Phys. Chem. Ref. Data* 37.3 (2008). DOI: 10.1063/1.2844785.
- [11] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006 ». In: *Rev. Mod. Phys.* 80.2 (2008), pp. 633–730. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.633.
- [12] A. S. Eddington. *Mathematical theory of relativity*. Cambridge University Press, 1923.
- [13] H. A. Buchdahl. « Isotropic coordinates and Schwarzschild metric ». In: *Int. J. Theor. Phys.* 24.7 (1985), pp. 731–739. DOI: 10.1007/BF00670880.
- [14] C. M. Will. « The Confrontation between General Relativity and Experiment ». In: *Living Reviews in Relativity* 9.3 (2006). <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>.
- [15] R. V. Eötvös, D. Pekar, and E. Fekete. « Articles on the laws of proportionality of inertia and gravity ». In: *Ann. Phys.* 68 (1922), pp. 11–66.

- [16] E. Fischbach et al. « Reanalysis of the Eötvös experiment ». In: *Phys. Rev. Lett.* 56.1 (1986), pp. 3–6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.3.
- [17] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Quantum fluctuations of vacuum stress tensors and spacetime curvatures ». In: *Ann. Phys.* 507.1 (1995), pp. 68–86. DOI: 10.1002/andp.19955070108.
- [18] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Post-Einsteinian tests of linearized gravitation ». In: *Class. Quantum Grav.* 22.11 (2005), pp. 2135–2157. DOI: 10.1088/0264-9381/22/11/015.
- [19] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Post-Einsteinian tests of gravitation ». In: *Class. Quantum Grav.* 23.3 (2006), pp. 777–798. DOI: 10.1088/0264-9381/23/3/015.
- [20] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Gravity Tests in the Solar System and the Pioneer Anomaly ». In: *Mod. Phys. Lett. A* 20.14 (2005), pp. 1047–1055. DOI: 10.1142/S0217732305017275.
- [21] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Radar ranging and Doppler tracking in post-Einsteinian metric theories of gravity ». In: *Class. Quantum Grav.* 23.24 (2006), p. 7561. DOI: 10.1088/0264-9381/23/24/025.
- [22] M. T. Jaekel and S. Reynaud. « Gravity tests and the Pioneer anomaly ». In: *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*. Ed. by H. Dittus, C. Lämmerzahl, and S. G. Turyshev. Vol. 349. Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 193–208. DOI: 10.1007/978-3-540-34377-6_8.
- [23] S. Reynaud and M. T. Jaekel. « Tests of general relativity in the solar system ». In: *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi on Atom Optics and Space Physics*. Ed. by E. Arimondo, W. Ertmer, and W. Schleich. IOS Press, 2009. arXiv: 0801.3407v1.
- [24] L. Iess et al. « Doppler measurement of the solar gravitational deflection ». In: *Class. Quantum Grav.* 16 (1999), p. 1487. DOI: 10.1088/0264-9381/16/5/303.
- [25] L. Iess et al. « The Cassini solar conjunction experiment: a new test of general relativity ». In: *Aerospace Conference, 2003. Proceedings. 2003 IEEE*. Vol. 1. IEEE, 2003, pp. 205–211. DOI: 10.1109/AERO.2003.1235053.
- [26] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. « A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft ». In: *Nature* 425 (2003), pp. 374–376. DOI: 10.1038/nature01997.
- [27] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. « A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919 ». In: *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 220 (1920), pp. 291–333. DOI: 10.1098/rsta.1920.0009.
- [28] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs. « Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity ». In: *Phys. Rev. Lett.* 93.26 (2004), p. 261101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.261101.
- [29] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs. « Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon ». In: *Int. J. Mod. Phys. D* 18 (2009), pp. 1129–1175. DOI: 10.1142/S021827180901500X.
- [30] A. Fienga et al. « INPOP06: a new numerical planetary ephemeris ». In: *A & A* 477.1 (2008), pp. 315–327. DOI: 10.1051/0004-6361:20066607.

-
- [31] A. Fienga et al. « Gravity tests with INPOP planetary ephemerides ». In: *Proceedings of the International Astronomical Union*. Vol. 5. Cambridge Univ Press, 2009, pp. 159–169. DOI: 10.1017/S1743921309990330.
 - [32] S. Reynaud and M. T. Jaekel. « Testing the Newton law at long distances ». In: *Int. J. Mod. Phys. A* 20.11 (2005), pp. 2294–2303. DOI: 10.1142/S0217751X05024523.
 - [33] E. M. Standish. « Report of the IAU WGAS Sub-group on Numerical Standards ». In: *Highlights of Astronomy* 12 (1995), pp. 180–184. URL: <http://maia.usno.navy.mil/NSFA/references/standish.pdf>.
 - [34] NASA. *Pioneer*. http://www.nasa.gov/mission_pages/pioneer.
 - [35] J. D. Anderson, G. W. Null, and S. K. Wong. « Gravitational parameters of the Jupiter system from the Doppler tracking of Pioneer 10 ». In: *Science* 183.4122 (1974), pp. 322–323. DOI: 10.1126/science.183.4122.322.
 - [36] J. D. Anderson et al. « Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses data, of an apparent anomalous, weak, long-range acceleration ». In: *Phys. Rev. Lett.* 81.14 (1998), pp. 2858–2861. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2858.
 - [37] J. D. Anderson et al. « Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11 ». In: *Phys. Rev. D* 65 (2002), p. 082004. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.082004.
 - [38] C. Lämmerzahl, O. Preuss, and H. Dittus. « Is the Physics Within the Solar System Really Understood? » In: *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*. Ed. by Hansjorg Dittus, Claus Lämmerzahl, and Slava G. Turyshev. Vol. 349. Astrophysics and Space Science Library. Springer, 2008, pp. 75–101. DOI: 10.1007/978-3-540-34377-6_3.
 - [39] J. D. Anderson and M. M. Nieto. « Astrometric Solar-System Anomalies ». In: *Proceedings IAU Symposium No. 261*. Ed. by S. A. Klioner, P. K. Seidelman, and M. H. Soffel. IAU. 2009, pp. 189–197. DOI: 10.1017/S1743921309990378.
 - [40] J. D. Anderson, E. L. Lau, and G. Giampieri. « Improved test of general relativity with radio Doppler data from the Cassini spacecraft ». In: (2003). arXiv: [gr-qc/0308010v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0308010v1).
 - [41] C. B. Markwardt. *Independent confirmation of the Pioneer 10 anomalous acceleration*. 2002. arXiv: [gr-qc/0208046v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0208046v1).
 - [42] O. Olsen. « The constancy of the Pioneer anomalous acceleration ». In: *Astron. Astrophys.* 463.1 (2007), pp. 393–397. DOI: 10.1051/0004-6361:20065906.
 - [43] S. G. Turyshev and V. T. Toth. « The Pioneer Anomaly in the Light of New Data ». In: *Space Sci. Rev.* 148.1 (2009), pp. 149–167. DOI: 10.1007/s11214-009-9543-4.
 - [44] A. Lévy et al. « The Pioneer anomaly: Data analysis and mission proposal ». In: *Journées 2007 de la Société Française d’Astronomie & d’Astrophysique*. Ed. by J. Bouvier, A. Chalabaev, and C. Charbonnel. <http://sf2a.cesr.fr/2007/2007sf2a.conf.0100L.pdf>. Paris, France, 2007, pp. 1–6.
 - [45] A. Lévy et al. « Pioneer 10 data analysis: Investigation on periodic anomalies ». In: *Journées 2008 de la Société Française d’Astronomie & d’Astrophysique*. Ed. by C. Charbonnel, F. Combes, and R. Samadi. <http://sf2a.cesr.fr/2008/2008sf2a.conf.0133L.pdf>. Paris, France, 2008, pp. 133–136.
 - [46] A. Lévy et al. « Pioneer 10 Doppler data analysis: Disentangling periodic and secular anomalies ». In: *Adv. Space Res.* 43.10 (2009), pp. 1538–1544. DOI: 10.1016/j.asr.2009.01.003.

- [47] A. Lévy. « Test de la gravité dans le système solaire : analyse de données et développement d'un accéléromètre ultrasensible dans le continu ». PhD thesis. Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2009.
- [48] A. Levy et al. « ODYSSEY, Orbit Determination Software for the Pioneer Data Analysis ». In: *Space Sci. Rev.* 151.1 (2010), pp. 105–121. DOI: 10.1007/s11214-009-9596-4.
- [49] J. M. Courty et al. « Simulation of ambiguity effects in Doppler tracking of Pioneer probes ». In: *Space Sci. Rev.* 151.1 (2010), pp. 93–103. DOI: 10.1007/s11214-009-9590-x.
- [50] S. M. Turyshev and V. T. Toth. « The Pioneer Anomaly ». In: *Living Reviews in Relativity* 13.4 (2010). <http://www.livingreviews.org/lrr-2010-4/>.
- [51] O. Bertolami et al. « Thermal analysis of the Pioneer anomaly: A method to estimate radiative momentum transfer ». In: *Phys. Rev. D* 78 (2008), p. 103001. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.103001.
- [52] O. Bertolami et al. « Estimating radiative momentum transfer through a thermal analysis of the Pioneer Anomaly ». In: *Space Sci. Rev.* 151.1-3 (2010), pp. 75–91. DOI: 10.1007/s11214-009-9589-3.
- [53] B. Schläppi et al. « An underestimated onboard generated recoil force contributing to the Pioneer anomaly ». In: *Adv. Space Res.* 49.3 (2012), pp. 579–585. DOI: 10.1016/j.asr.2011.10.016.
- [54] B. Rievers et al. « New powerful thermal modelling for high-precision gravity missions with application to Pioneer 10/11 ». In: *New J. Phys.* 11 (2009), p. 113032. DOI: 10.1088/1367-2630/11/11/113032.
- [55] B. Rievers et al. « Thermal dissipation force modeling with preliminary results for Pioneer 10/11 ». In: *Acta Astronaut.* 66.3-4 (2010), pp. 467–476. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.06.009.
- [56] B. Rievers, C. Lämmerzahl, and H. Dittus. « Modeling of Thermal Perturbations Using Raytracing Method with Preliminary Results for a Test Case Model of the Pioneer 10/11 Radioisotopic Thermal Generators ». In: *Space Sci. Rev.* 151.1 (2010), pp. 123–133. DOI: 10.1007/s11214-009-9594-6.
- [57] B. Rievers and C. Lämmerzahl. « High precision thermal modeling of complex systems with application to the flyby and Pioneer anomaly ». In: *Ann. Phys.* 523.6 (2011), pp. 439–449. DOI: 10.1002/andp.201100081.
- [58] S. G. Turyshev et al. « Support for temporally varying behavior of the Pioneer anomaly from the extended Pioneer 10 and 11 Doppler data sets ». In: *Phys. Rev. Lett.* 107.8 (2011), p. 081103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.081103.
- [59] F. Francisco et al. « Modelling the reflective thermal contribution to the acceleration of the Pioneer spacecraft ». In: *Phys. Lett. B* 711.5 (2012), pp. 337–346. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.04.034.
- [60] S. G. Turyshev et al. « Support for the thermal origin of the Pioneer anomaly ». In: *Phys. Rev. Lett.* 108.24 (2012), p. 241101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.241101.
- [61] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. « Gravitational solution to the Pioneer 10/11 anomaly ». In: *Class. Quantum Grav.* 23.10 (2006), pp. 3427–3436. DOI: 10.1088/0264-9381/23/10/013.

-
- [62] J. W. Moffat. « Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter ». In: *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2005 (2005), p. 003. DOI: 10.1088/1475-7516/2005/05/003.
 - [63] J. W. Moffat. « Scalar-tensor-vector gravity theory ». In: *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2006 (2006), p. 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2006/03/004.
 - [64] J. P. Bruneton and G. Esposito-Farese. « Field-theoretical formulations of MOND-like gravity ». In: *Phys. Rev. D* 76 (2007), p. 124012. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.124012.
 - [65] E. Komatsu et al. « Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation ». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192 (2011), p. 18. DOI: 10.1088/0067-0049/192/2/18.
 - [66] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. « Particle dark matter: evidence, candidates and constraints ». In: *Phys. Rep.* 405.5-6 (2005), pp. 279–390. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031.
 - [67] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa. « Dynamics of dark energy ». In: *Int. J. Mod. Phys. D* 15.11 (2006), pp. 1753–1935. DOI: 10.1142/S021827180600942X.
 - [68] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer. « Dark Energy and the Accelerating Universe ». In: *Annu. Rev. Astro. Astrophys.* 46 (2008), pp. 385–432. DOI: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.
 - [69] C. Boehm, P. Fayet, and J. Silk. « Light and heavy dark matter particles ». In: *Phys. Rev. D* 69.10 (2004), p. 101302. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.101302.
 - [70] C. Boehm and P. Fayet. « Scalar dark matter candidates ». In: *Nucl. Phys. B* 683.1 (2004), pp. 219–263. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.01.015.
 - [71] S. DeDeo. « Particle dark energy ». In: *Phys. Rev. D* 73.4 (2006), p. 043520. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.043520.
 - [72] A. Aguirre et al. « Astrophysical constraints on modifying gravity at large distances ». In: *Class. Quantum Grav.* 18 (2001), R223. DOI: 10.1088/0264-9381/18/23/202.
 - [73] R. H. Sanders and S. S. McGaugh. « Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter ». In: *Annu. Rev. Astro. Astrophys.* 40.1 (2002), pp. 263–317. DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093923.
 - [74] S. M. Carroll et al. « Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? ». In: *Phys. Rev. D* 70 (2004), p. 043528. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.043528.
 - [75] S. I. Nojiri and S. D. Odintsov. « Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy ». In: *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4.1 (2007), pp. 115–145. DOI: 10.1142/S0219887807001928.
 - [76] B. Christophe et al. « OSS (Outer Solar System): A fundamental and planetary physics mission to Neptune, Triton and the Kuiper Belt ». In: *Exp. Astron.* 34.2 (2012), pp. 203–242. DOI: 10.1007/s10686-012-9309-y.
 - [77] B. Christophe et al. « Odyssey: a solar system mission ». In: *Exp. Astron.* 23.2 (2009), pp. 529–547. DOI: 10.1007/s10686-008-9084-y.
 - [78] E. Hinglais et al. *ODYSSSEY*. DCT/DA/PA - 2010.0022244. Centre National d’Études Spatiales, Oct. 2010.

- [79] NASA. *2010 Science Plan for NASA's Science Mission Directorate*. http://science.nasa.gov/media/medialibrary/2010/08/30/2010SciencePlan_TAGGED.pdf. July 2010.
- [80] ESA (Fundamental Physics Roadmap Advisory Team). *A Roadmap for Fundamental Physics in Space*. <http://sci.esa.int/fprat>. Aug. 2010.
- [81] J. D. Anderson, M. M. Nieto, and S. G. Turyshev. « A mission to test the Pioneer anomaly ». In: *Mod. Phys. Lett. A* 17.14 (2002), pp. 875–885. DOI: 10.1142/S0217732302007107.
- [82] O. Bertolami and J. Paramos. « A Mission To Test The Pioneer Anomaly: Estimating The Main Systematic Effects ». In: *Int. J. Mod. Phys. D* 16.10 (2007), pp. 1611–1623. DOI: 10.1142/S0218271807011000.
- [83] A. Lévy, B. Christophe, and S. Reynaud. « Pioneer Anomaly and Space Accelerometer for Gravity Test ». In: *Journées 2006 de la Société Française d'Astronomie & d'Astrophysique*. Ed. by D. Barret et al. <http://proc.sf2a.asso.fr/2006/2006sf2a.conf.0035L.pdf>. Paris, France, 2006, pp. 35–38.
- [84] H. Dittus et al. « A mission to explore the Pioneer anomaly ». In: *Proceedings of the 2005 ESLAB Symposium*. Ed. by F. Favata and A. Gimenez. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2005. arXiv: gr-qc/0506139v1.
- [85] U. Johann, C. Lämmerzahl, and H. Dittus. « Exploring the Pioneer Anomaly: Concept Considerations for a Deep-Space Gravity Probe Based on Laser-Controlled Free-Flying Reference Masses ». In: *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*. Ed. by H. Dittus, C. Lämmerzahl, and S. G. Turyshev. Vol. 349. Astrophysics and Space Science Library. Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 577–604. DOI: 10.1007/978-3-540-34377-6_26.
- [86] P. Wolf et al. « Quantum physics exploring gravity in the outer solar system: the SAGAS project ». In: *Exp. Astron.* 23.2 (2009), pp. 651–687. DOI: 10.1007/s10686-008-9118-5.
- [87] S. W. Asmar et al. « Spacecraft Doppler tracking: Noise budget and accuracy achievable in precision radio science observations ». In: *Radio Sci.* 40 (2005), RS2001. DOI: 10.1029/2004RS003101.
- [88] P. Tortora et al. « Precise Cassini navigation during solar conjunctions through multifrequency plasma calibrations ». In: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 27.2 (2004), pp. 251–257. DOI: 10.2514/1.997.
- [89] B. Lenoir et al. « Electrostatic accelerometer with bias rejection for Gravitation and Solar System physics ». In: *Adv. Space Res.* 48.7 (2011), pp. 1248–1257. DOI: 10.1016/j.asr.2011.06.005.
- [90] NASA. *Voyager: The Interstellar Mission*. <http://voyager.jpl.nasa.gov>.
- [91] C. C. Porco et al. « Neptune's ring system. » In: *Neptune and Triton*. Ed. by D. P. Cruikshank, M. S. Matthews, and A. M. Schumann. University of Arizona Press, 1995, pp. 703–804.
- [92] C. D. Murray et al. « The determination of the structure of Saturn's F ring by nearby moonlets ». In: *Nature* 453.7196 (2008), pp. 739–744. DOI: 10.1038/nature06999.
- [93] W. B. Hubbard et al. « Interior structure of Neptune: comparison with Uranus ». In: *Science* 253.5020 (1991), p. 648. DOI: 10.1126/science.253.5020.648.

-
- [94] M. Podolak, A. Weizman, and M. Marley. « Comparative models of Uranus and Neptune ». In: *Planet. Space Sci.* 43.12 (1995), pp. 1517–1522. DOI: 10.1016/0032-0633(95)00061-5.
 - [95] R. Helled, J. D. Anderson, and G. Schubert. « Uranus and Neptune: Shape and rotation ». In: *Icarus* 210.1 (2010), pp. 446–454. DOI: 10.1016/j.icarus.2010.06.037.
 - [96] B. A. Smith, L. A. Soderblom, D. Banfield, et al. « Voyager 2 at Neptune: Imaging science results ». In: *Science* 246.4936 (1989), pp. 1422–1449. DOI: 10.1126/science.246.4936.1422.
 - [97] S. Limaye and L. Sromovsky. « Winds of Neptune- Voyager observations of cloud motions ». In: *J. Geophys. Res. Supplement* 96.18 (1991), pp. 941–960.
 - [98] S. H. Luszcz-Cook et al. « Seeing double at Neptune’s south pole ». In: *Icarus* 208.2 (2010), pp. 938–944. DOI: 10.1016/j.icarus.2010.03.007.
 - [99] J. E. P. Connerney, M. H. Acuna, and N. F. Ness. « The magnetic field of Neptune ». In: *J. Geophys. Res.* 96 (1991), p. 19023.
 - [100] N. F. Ness et al. « Magnetic fields at Neptune ». In: *Science* 246.4936 (1989), p. 1473. DOI: 10.1126/science.246.4936.1473.
 - [101] N. F. Ness, S. K. Runcorn, and S. Miller. « Intrinsic Magnetic Fields of the Planets: Mercury to Neptune [and Discussion] ». In: *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 349.1690 (1994), pp. 249–260. DOI: 10.1098/rsta.1994.0129.
 - [102] F. Bagenal. « Giant planet magnetospheres ». In: *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 20 (1992), pp. 289–328. DOI: 10.1146/annurev.ea.20.050192.001445.
 - [103] S. Stanley and J. Bloxham. « Convective-region geometry as the cause of Uranus’ and Neptune’s unusual magnetic fields ». In: *Nature* 428.6979 (2004), pp. 151–153. DOI: 10.1038/nature02376.
 - [104] J. J. Fortney et al. « Self-consistent model atmospheres and the cooling of the Solar System’s giant planets ». In: *The Astrophysical Journal* 729 (2011), p. 32. DOI: 10.1088/0004-637X/729/1/32.
 - [105] D. P. Cruikshank and J. Apt. « Methane on Triton: Physical state and distribution ». In: *Icarus* 58.2 (1984), pp. 306–311. DOI: 10.1016/0019-1035(84)90047-2.
 - [106] D. P. Cruikshank, R. Hamilton Brown, and R. N. Clark. « Nitrogen on Triton ». In: *Icarus* 58.2 (1984), pp. 293–305. DOI: 10.1016/0019-1035(84)90046-0.
 - [107] G. Schubert et al. « Interior composition, structure and dynamics of the Galilean satellites ». In: *Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere*. Ed. by F. Bagenal, T. Dowling, and W. B. McKinnon. Cambridge University Press, 2004, pp. 281–306.
 - [108] H. Hussmann, F. Sohl, and T. Spohn. « Subsurface oceans and deep interiors of medium-sized outer planet satellites and large trans-neptunian objects ». In: *Icarus* 185.1 (2006), pp. 258–273. DOI: 10.1016/j.icarus.2006.06.005.
 - [109] J. Luu et al. « A new dynamical class of object in the outer Solar System ». In: *Nature* 387.6633 (1997), pp. 573–575. DOI: 10.1038/42413.
 - [110] M. A. Barucci. *The Solar System beyond Neptune*. University of Arizona Press, 2008.
 - [111] M. Marley and L. Dudzinski. *JPL Rapid Mission Architecture Neptune-Triton-KBO Study Final Report*. Mission Concept Study. NASA, 2010.

- [112] J. Schreiber and W. Wong. *Advanced Stirling Radioisotope Generator for NASA Space Science and Exploration Missions*. http://www.grc.nasa.gov/WWW/TECB/RPS_ASRG_Handout.pdf. NASA, 2007.
- [113] The PubChem Project. *Hydrazine*. <http://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/summary/summary.cgi?cid=9321>. National Center for Biotechnology Information.
- [114] A. Bresson et al. « Quantum mechanics for space applications ». In: *Appl. Phys. B* 84.4 (2006), pp. 545–550. DOI: 10.1007/s00340-006-2412-x.
- [115] R. Biesbroek et al. *Laplace : Assessment of the Jupiter Ganymede Orbiter*. CDF Study Report CDF-77(A). ESA, 2008.
- [116] NASA. *LISA: Laser Interferometer Space Antenna*. <http://lisa.nasa.gov>.
- [117] ESA. *LISA: Laser Interferometer Space Antenna*. <http://lisa.esa.int>.
- [118] K. Danzmann et al. « LISA: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements ». In: *Class. Quantum Grav.* 13 (1996), A247. DOI: 10.1088/0264-9381/13/11A/033.
- [119] H. Collins. *Gravity's shadow: the search for gravitational waves*. University of Chicago Press, 2004.
- [120] P. Touboul et al. « Electrostatic accelerometers for the equivalence principle test in space ». In: *Class. Quantum Grav.* 13 (1996), A67. DOI: 10.1088/0264-9381/13/11A/009.
- [121] P. Touboul and M. Rodrigues. « The MICROSCOPE space mission ». In: *Class. Quantum Grav.* 18.13 (2001), pp. 2487–2498. DOI: 10.1088/0264-9381/18/13/311.
- [122] P. Touboul et al. « MICROSCOPE, testing the equivalence principle in space ». In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics* 2.9 (2001), pp. 1271–1286. DOI: 10.1016/S1296-2147(01)01264-1.
- [123] P. Touboul et al. « The Microscope mission ». In: *Acta Astronaut.* 50.7 (2002), pp. 433–443. DOI: 10.1016/S0094-5765(01)00188-6.
- [124] D. Hudson, R. Chhun, and P. Touboul. « Development status of the differential accelerometer for the MICROSCOPE mission ». In: *Adv. Space Res.* 39.2 (2007), pp. 307–314. DOI: 10.1016/j.asr.2005.10.040.
- [125] V. Josselin et al. « MICROSCOPE On-ground and In-orbit Calibration ». In: *Space Sci. Rev.* 151.1 (2010), pp. 25–38. DOI: 10.1007/s11214-009-9591-9.
- [126] *GFZ's Challenging Minisatellite Payload for Geophysical Research and Application (CHAMP) Home Page*. <http://www.gfz-potsdam.de/champ>.
- [127] C. Reigber et al. « A high-quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1 S) ». In: *Geophys. Res. Lett.* 29.14 (2002), pp. 37–1. DOI: 10.1029/2002GL015064.
- [128] C. Reigber et al. « Global gravity field recovery using solely GPS tracking and accelerometer data from CHAMP ». In: *Space Sci. Rev.* 108.1 (2003), pp. 55–66. DOI: 10.1023/A:1026217713133.
- [129] *GRACE - Gravity Recovery and Climate Experiment Homepage*. <http://www.csr.utexas.edu/grace>.
- [130] C. Reigber et al. « An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S ». In: *J. Geodyn.* 39.1 (2005), pp. 1–10. DOI: 10.1016/j.jog.2004.07.001.

-
- [131] J. M. Lemoine et al. « Temporal gravity field models inferred from GRACE data ». In: *Adv. Space Res.* 39.10 (2007), pp. 1620–1629. DOI: 10.1016/j.asr.2007.03.062.
 - [132] ESA - GOCE. www.esa.int/goce.
 - [133] A. Albertella, F. Migliaccio, and F. Sansó. « GOCE: The earth gravity field by space gradiometry ». In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83.1 (2002), pp. 1–15. DOI: 10.1023/A:1020104624752.
 - [134] M. R. Drinkwater et al. « GOCE: ESA's First Earth Explorer Core Mission ». In: *Space Sci. Rev.* 108.1 (2003), pp. 419–432. DOI: 10.1023/A:1026104216284.
 - [135] P. Touboul. « MICROSCOPE instrument development, lessons for GOCE ». In: *Space Sci. Rev.* 108.1 (2003), pp. 393–408. DOI: 10.1023/A:1026152114467.
 - [136] P. Touboul et al. « In orbit nano-g measurements, lessons for future space missions ». In: *Aerosp. Sci. Technol.* 8.5 (2004), pp. 431–441. DOI: 10.1016/j.ast.2004.01.006.
 - [137] J. P. Marque et al. « The Ultra Sensitive Accelerometers of the ESA GOCE Mission ». In: *59th International Astronautical Congress*. IAC-08.B1.3.7. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC372860_s1.pdf. Glasgow, Great Britain, 2008.
 - [138] P. Touboul et al. « Accelerometers for CHAMP, GRACE and GOCE space missions: synergy and evolution ». In: *Boll. Geof. Teor. Appl.* 40.3-4 (1999), pp. 321–327.
 - [139] Corning Incorporated. <http://www.corning.com>.
 - [140] G. Campergue et al. *Machine for ultrasonic abrasion machining*. US patent 4934103. June 1990.
 - [141] H. Dittus. « Drop Tower 'Bremen': A weightlessness laboratory on Earth ». In: *Endeavour* 15.2 (1991). DOI: 10.1016/S0160-9327(05)80008-0.
 - [142] G. Pionnier et al. « Pre-flight verification of the differential accelerometers of the Microscope mission ». In: *62nd International Astronautical Congress*. IAC-11.A2.1.7. Cape Town, South Africa, Oct. 2011.
 - [143] H. Selig et al. « Technology development for fundamental physics space missions aiming at high precision gravitational field measurements ». In: *62nd International Astronautical Congress*. IAC-11.A2.3.12. http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC401606_s1.pdf. Cape Town, South Africa, Oct. 2011.
 - [144] V. Josselin, P. Touboul, and R. Kielbasa. « Capacitive detection scheme for space accelerometers applications ». In: *Sens. Actuators, A* 78.2-3 (1999), pp. 92–98. DOI: 10.1016/S0924-4247(99)00227-7.
 - [145] V. Josselin. « Architecture mixte pour les accéléromètres ultrasensibles dédiés aux missions spatiales de physique fondamentale ». PhD thesis. Université Paris-Sud - Paris 11, 1999.
 - [146] Y. Bremont and P. Reocreux. *Mécanique 1: Mécanique du solide indéformable, calcul vectoriel, cinématique*. Ellipses, 1998.
 - [147] Y. Bremont and P. Reocreux. *Mécanique 2 : Mécanique du solide indéformable, statique*. Ellipses, 1998.
 - [148] Y. Bremont and P. Reocreux. *Mécanique 3: Mécanique du solide indéformable, cinétique, dynamique*. Ellipses, 1998.
 - [149] F. Grassia et al. « Quantum theory of fluctuations in a cold damped accelerometer ». In: *Eur. Phys. J. D* 8.1 (2000), pp. 101–110. DOI: 10.1007/s10053-000-9071-y.

- [150] F. Grassia. « Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques ». PhD thesis. Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 1998.
- [151] R. Chhun et al. « Equivalence principle test with Microscope: Laboratory and engineering models preliminary results for evaluation of performance ». In: *Acta Astronaut.* 60.10-11 (2007), pp. 873–879. DOI: 10.1016/j.actaastro.2006.11.002.
- [152] P. Touboul. « The Microscope Mission and Its Uncertainty Analysis ». In: *Space Sci. Rev.* 148.1 (2009), pp. 455–474. DOI: 10.1007/s11214-009-9565-y.
- [153] E. Willemenot. « Pendule de torsion à suspension électrostatique ». PhD thesis. Université de Paris-Sud - Paris 11, 1997.
- [154] J. Flury, S. Bettadpur, and B. D. Tapley. « Precise accelerometry onboard the GRACE gravity field satellite mission ». In: *Adv. Space Res.* 42.8 (2008), pp. 1414–1423. DOI: 10.1016/j.asr.2008.05.004.
- [155] J. P. Marque, B. Christophe, and B. Foulon. « Accelerometers of the GOCE mission: return of experience from one year of in-orbit ». In: *Living Planet Symposium*. Bergenn, Norway, 2010.
- [156] C. C. Speake. « Forces and force gradients due to patch fields and contact-potential differences ». In: *Class. Quantum Grav.* 13 (1996), A291. DOI: 10.1088/0264-9381/13/11A/039.
- [157] N. A. Robertson et al. « Kelvin probe measurements: investigations of the patch effect with applications to ST-7 and LISA ». In: *Class. Quantum Grav.* 23 (2006), p. 2665. DOI: 10.1088/0264-9381/23/7/026.
- [158] S. Buchman and J. P. Turneure. « The effects of patch-potentials on the gravity probe B gyroscopes ». In: *Rev. Sci. Instrum.* 82 (2011), p. 074502. DOI: 10.1063/1.3608615.
- [159] D. W. Allan. « Statistics of atomic frequency standards ». In: *Proceedings of the IEEE* 54.2 (1966), pp. 221–230. DOI: 10.1109/PROC.1966.4634.
- [160] C. T. Russell, G. L. Siscoe, and E. J. Smith. « Comparison of ISEE-1 and-3 interplanetary magnetic field observations ». In: *Geophys. Res. Lett.* 7 (1980), pp. 381–384. DOI: 10.1029/GL007i005p00381.
- [161] R. C. Willson and A. V. Mordvinov. « Secular total solar irradiance trend during solar cycles 21–23 ». In: *Geophys. Res. Lett.* 30.5 (2003), p. 1199. DOI: 10.1029/2002GL016038.
- [162] B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Unbiased acceleration measurements with an electrostatic accelerometer on a rotating platform ». In: *Adv. Space Res.* (2012). DOI: 10.1016/j.asr.2012.08.012.
- [163] A. J. Jerri. « The Shannon sampling theorem - Its various extensions and applications: A tutorial review ». In: *Proc. IEEE* 65.11 (1977), pp. 1565–1596. DOI: 10.1109/PROC.1977.10771.
- [164] E. Guiu et al. « Calibration of MICROSCOPE ». In: *Adv. Space Res.* 39.2 (2007), pp. 315–323. DOI: 10.1016/j.asr.2006.06.012.
- [165] B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. « Experimental demonstration of bias rejection from electrostatic accelerometer measurements ». In: *Measurement* (2012). Submitted.
- [166] Newport. *RGV100BL High-Speed Precision Rotation Stage*. <http://www.newport.com/RGV100BL-High-Speed-Precision-Rotation-Stage/542416/1033/catalog.aspx>.

-
- [167] Honeywell. *QA700 Q-Flex® Accelerometer*. <https://aero1.honeywell.com/inertsensor/qa700.shtml>.
 - [168] Stanford Research Systems. *Programmable Filters*. <http://www.thinksrs.com/products/SR600.htm>.
 - [169] National Instruments. *NI PCI-6033E*. <http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/en/nid/1057>.
 - [170] M. Schuyer, P. Silvestrin, and M. Aguirre. « Probing the Earth from space - The Aristoteles mission ». In: *ESA Bulletin* 72 (1992), pp. 66–75.
 - [171] D. Chauvin, B. Foulon, and P. Flinoise. *STAR sensor functional and acceptance tests*. Tech. rep. ONERA RTS 23/3805 DMPH/Y. Onera – The French Aerospace Lab, 1999.
 - [172] B. Lamine et al. « Testing gravity law in the solar system ». In: *Journées 2010 Systèmes de référence spatio-temporels*. <http://synte.obspm.fr/jsr/journees2010/PDF/Lamine.pdf>. Observatoire de Paris. Paris, France, Sept. 2010, pp. 270–273.
 - [173] A. J. Kliore et al. « Cassini radio science ». In: *Space Sci. Rev.* 115.1 (2004), pp. 1–70. DOI: 10.1007/s11214-004-1436-y.
 - [174] D. R. Williams. *Sun Fact Sheet*. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>. Jan. 2010.
 - [175] L. Pontriaguine. *Équations différentielles ordinaires*. Moscow: Éditions Mir, 1969.
 - [176] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Hermann, 1972.
 - [177] J. C. Butcher. *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1987. ISBN: 0-471-91046-5.
 - [178] A. Milani and G. F. Gronchi. *Theory of orbit determination*. Cambridge University Press, 2009.
 - [179] J. D. Riley, M. M. Bennett, and E. McCormick. « Numerical integration of variational equations ». In: *Math. Comp.* 21 (1967), pp. 12–17. DOI: 10.1090/S0025-5718-1967-0228186-1.
 - [180] J. A. Nelder and R. Mead. « A simplex method for function minimization ». In: *The Computer Journal* 7.4 (1965), p. 308. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308.
 - [181] J. C. Lagarias et al. « Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions ». In: *SIAM J. Optim.* 9 (1998), pp. 112–147. DOI: 10.1137/S1052623496303470.
 - [182] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Society for Industrial Mathematics, 2000.
 - [183] *BepiColombo*. <http://sci.esa.int/bepicolombo>.
 - [184] A. Milani et al. « Gravity field and rotation state of Mercury from the BepiColombo Radio Science Experiments ». In: *Planet. Space Sci.* 49.14-15 (2001), pp. 1579–1596. DOI: 10.1016/S0032-0633(01)00095-2.
 - [185] L. Iess, S. Asmar, and P. Tortora. « MORE: An advanced tracking experiment for the exploration of Mercury with the mission BepiColombo ». In: *Acta Astronaut.* 65.5-6 (2009), pp. 666–675. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.01.049.

- [186] J. J. Degnan. « Asynchronous laser transponders for precise interplanetary ranging and time transfer ». In: *J. Geodyn.* 34.3-4 (2002), pp. 551–594. DOI: 10.1016/S0264-3707(02)00044-3.
- [187] J. J. Degnan. « Laser Transponders for High-Accuracy Interplanetary Laser Ranging and Time Transfer ». In: *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*. Vol. 349. Astrophysics and Space Science Library. Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 231–242. DOI: 10.1007/978-3-540-34377-6_11.
- [188] D. E. Smith et al. « Two-way laser link over interplanetary distance ». In: *Science* 311.5757 (2006), p. 53. DOI: 10.1126/science.1120091.
- [189] C. Fröhlich and J. Lean. « Solar radiative output and its variability: evidence and mechanisms ». In: *Astron. Astrophys. Rev.* 12.4 (2004), pp. 273–320. DOI: 10.1007/s00159-004-0024-1.
- [190] A. M. Legendre. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. 116 rue de Thionville, Paris: Chez Firmin Didot, 1820.
- [191] D. Birkes and Y. Dodge. *Alternative methods of regression*. Wiley Online Library, 1993.
- [192] P. A. Cornillon and É. Matzner-Løber. *Régression: Théorie et applications*. Springer Paris, 2007. DOI: 10.1007/978-2-287-39693-9.
- [193] M. Najim. « Filtrage optimal ». In: *Techniques de l'ingénieur. Informatique industrielle*. 1998, R7228.
- [194] A. Papoulis. *Signal analysis*. ISBN: 0070484600. McGraw-Hill, 1977.

Index

- Accélération gravitationnelle, 99, 107
- Accélérations inertielles, 39, 42
- Accélérométrie spatiale, 18
- Accéléromètre DM1, 84
- Accéléromètre MicroSTAR, 22–23
 - Biais de mesure, 35, 65
 - Bruit de mesure, 35
 - Facteur d'échelle, 34, 73
 - Facteur quadratique, 34
 - Plage de mesure, 35
 - Variance d'Allan, 37, 65
- Accéléromètre Q-Flex QA-700, 81
- Action d'Einstein-Hilbert, 5
- Advanced Stirling Radioisotope Generator, 16
- Agences spatiales
 - ESA, 12, 15
 - NASA, 10, 12, 15
- Algorithme de Runge-Kutta, 101
- Anomalie gravitationnelle, 100, 106–107
- Auto-gravité, 38
- Autocorrélation, 63–67, 126

- Bias Rejection System, 22, 39–45
 - Décentrage, 42
 - Défauts, 40, 71
- Bruit blanc, 63, 65, 91
- Bruit sismique, 83

- Ceinture de Kuiper, 14
- Cinquième force, 7, 9
- Coefficient balistique, 41, 99
- Conjonction solaire, 9
- Contrôle d'attitude, 16, 44, 77
- Contrôleur PID, 23, 35
- Conversion analogique-numérique, 36, 71, 82
- Convolution généralisée, 137
- Corrélation (Fonction de), 126, 131
- Correction du biais
 - sur deux axes, 51–60, 87–91
 - sur trois axes, 74–78
- Cosmic Vision, 12
- Courbure scalaire, 5
- Covariance, 129–130, 132–133

- Délai Shapiro, 9
- Dérivation covariante, 6
- Densité spectrale de puissance, 36, 64, 72, 82, 83, 98, 110, 126–129, 131–132, 141
- Deuxième loi de Newton, 4, 27, 28

- Écart-type, 129
- Énergie noire, 11
- Entrefer, 22, 30, 31
- Éphémérides, 9
- Équation variationnelle, 101–102
- Équations d'Einstein, 5
- Équations d'Euler-Lagrange, 6
- Équations de mesure, 33, 50
- Espace affine, 51
- Éther, 4
- Extensions métriques, 8

- Facteur d'échelle, 82, 84
- Filtrage, 71, 82
 - adapté, 141
 - anti-repliement, 123, 136
 - optimal, 66, 104, 141–142
 - passe-bas, 123
- Force électrostatique, 30–31
- Formalisme PPN, 7
 - Paramètre β , 7, 9
 - Paramètre γ , 7, 9, 12, 15
- Géodésie, 19
- Gradient de gravité, 29, 38, 108
- Gravity Advanced Package, 20–22

- Interactions fondamentales, 11
- Jauge isotrope d'Eddington, 6
- Lagrangien, 5
- Limite des champs faibles, 7
- Lunar Laser Ranging (LLR), 9
- Mécanique Quantique, 11, 18
- Masquage, 57
- Masse gravifique, 4
- Masse inertielle, 4
- Matière noire, 11
- Matrice de couplage, 35, 73
- Matrice de sensibilité, 101
- Matrices de projection, 54
- Mercure (avance du périhélie), 9
- Méthode de Nelder-Mead, 103
- Méthode de Newton, 103
- Métrique, 5
 - de Schwarzschild, 6
- Missions spatiales
 - Pioneer 10 et 11, 10
 - Aristoteles, 84
 - Cassini, 9, 99
 - CHAMP, 19, 21
 - GOCE, 19, 21
 - GRACE, 19, 21
 - Laplace, 18, 41, 44, 111
 - LISA, 19
 - Messenger, 109
 - Microscope, 19, 21
 - Odyssey, 12
 - Outer Solar System, 12–16
 - Pioneer 10 et 11, 10
 - Voyager 2, 13
- Moindres carrés, 56, 106, 109, 136–142
- Moindres carrés généralisés, 56, 66, 104
- Moment cinétique, 44–45
- Neptune, 13
- Observable Doppler, 98
- Optimisation non-linéaire, 60, 102–103
- Patch effect, 36
- Pendule asservi, 83–84
- Pesanteur, 84
- Piezo-électrique (actionneur), 22
- Platine rotative RGV100BL, 81
- Potentiel de Yukawa, 8, 9
- Potentiel newtonien, 6, 99
- Précession (angle de), 41, 86
- Précision, 61–67, 91–92, 107
- Pression de radiation solaire, 18, 41, 99, 111
- Principe d'équivalence, 5, 19
- Processus stochastique, 126–133
 - continu, 126–131
 - discret, 131–133
- Produit scalaire matriciel, 137
- Résidus, 96, 103
- Rayonnement thermique, 18, 99
- Relativité Générale, 5–7, 18
- Relativité Restreinte, 4
- Repliement spactrale, 136
- Repliement spectral, 71, 82, 123
- Restitution d'orbite, 13, 20, 96–111
- Signal de modulation, 57–60, 77, 87–91
- Sous-espace vectoriel, 51
- Symboles de Christoffel, 5
- Tenseur
 - énergie-impulsion, 5
 - d'Einstein, 5
 - d'inertie, 24, 44–45
 - de Fourier, 122
- Théorème
 - de Cauchy-Lipschitz, 101
 - de la résultante dynamique, 28
 - de Nyquist-Shannon, 69, 123
 - de Parseval, 66, 118, 120, 137
 - du moment dynamique, 27
- Trajectoire géodésique, 6
- Transformation de Fourier
 - Transformée de Fourier, 118–119
 - Transformée de Fourier à temps discret, 62, 119–122, 137
 - Transformée de Fourier discrète, 122–123
- Triton, 14
- Variance, 129
- Very-Long-Baseline Interferometry (VLBI), 96