

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Comportement du béton : Aspects expérimentaux, modélisations	5
1 Comportement expérimental du béton	5
1.1 Traction monotone	5
1.2 Compression monotone	8
1.3 Chargements alternés	10
1.4 Chargements multiaxiaux	12
1.5 Compaction	12
1.6 Effet de vitesse	14
1.6.1 En traction	14
1.6.2 En compression	15
2 Critères de limite d'élasticité	16
2.1 Critères écrits en contrainte	16
2.1.1 Critère de Rankine	16
2.1.2 Critère de Drucker-Prager	17
2.1.3 Critère de Willam-Warnke	18
2.1.4 Critère de Gurson	19
2.1.5 Critère de François	20
2.2 Critères écrits en déformation	20
2.2.1 Critère de De Vree	21
2.2.2 Critère de Mazars	22
2.2.3 Critères de Mazars enrichis	22
3 Modèles d'endommagement	23
3.1 Contrainte effective	24
3.2 Choix de la variable d'endommagement	24
3.3 Modèles d'endommagement isotrope	25
3.3.1 Modèle de Mazars	25
3.3.2 Modèle de La Borderie	26
3.3.3 Modèle de De Vree	27
3.4 Modèles d'endommagement anisotrope	28
3.4.1 Modèle de Godard	28
3.4.2 Modèle de Desmorat initial	30

4	Modèles multi-surfaces	35
5	Modélisation de l'effet de vitesse	37
5.1	Modèles visco-plastiques	37
5.2	Modèles visco-endommageables	38
5.3	Modèles visco-plastiques visco-endommageables	39
5.4	Modèle de (multi)fragmentation des matériaux fragiles	41
6	Localisation et régularisation	43
6.1	Le phénomène de localisation	43
6.2	Les limiteurs de localisation	44
6.2.1	Modélisation non locale intégrale	44
6.2.2	Modélisation non locale de type second gradient	45
6.2.3	Modélisation visco-endommageable / endommagement à taux limité	46
7	Conclusion - Réponse du modèle initial	46
8	Etude théorique d'une instabilité liée à l'anisotropie induite	47
8.1	Mise en évidence de l'instabilité en compression simple	47
8.2	Formulation du problème 3D	50
8.3	Formulation du problème 1D	51
8.4	Suppression de l'instabilité	52
2	Modèle d'endommagement anisotrope pour des chargements confinés	55
1	Proposition d'un nouveau critère d'élasticité	55
1.1	Formulation modulaire	55
1.2	Sensibilité aux paramètres	58
1.3	Validation à l'aide de la surface élastique de Kupfer	58
2	Fonction critère d'endommagement	58
2.1	Critère en contrainte effective équivalente (modèle A)	58
2.2	Introduction de la triaxialité des contraintes	61
2.2.1	Fonction $b(T_x)$ (modèle B)	62
2.2.2	Fonction r_{T_x} (modèle C)	64
3	Sensibilité hydrostatique : couplage module de compressibilité / endommagement anisotrope	65
3.1	Couplage hydrostatique initial $\tilde{K} = \tilde{K}(D_H)$	65
3.2	Proposition d'un nouveau couplage (modèle D)	67
3.3	Surface de rupture correspondante	69
4	Etude de sensibilité aux paramètres	70
5	Nouvelle définition de l'endommagement actif (modèle E)	73
6	Prise en compte de l'effet de vitesse	75
6.1	Loi d'évolution à taux d'endommagement limité	77
6.2	Etude de sensibilité aux paramètres	77
6.3	Validation d'un jeu de paramètres à l'aide de résultats expérimentaux	78
7	Bilan - Equations du modèle	79
8	Positivité de la dissipation intrinsèque	80
9	Informations complémentaires sur le modèle DADC	82
9.1	Procédure d'identification des paramètres	82
9.2	Energie de rupture	83

3 Implantation numérique et gestion de la rupture	85
1 Introduction	85
1.1 Algorithme général d'Europexus	85
1.2 Triaxialité des contraintes en élasticité	86
1.3 Endommagement critique	88
2 Triaxialité des contraintes filtrées	90
3 Schéma numérique d'intégration du modèle	92
3.1 Calcul du tenseur des contraintes effectives	94
3.2 Prédiction élastique	94
3.3 Test sur le critère	95
3.4 Calcul de l'endommagement actif	95
3.5 Calcul du multiplicateur d'endommagement	97
3.6 Calcul du tenseur d'endommagement	97
3.7 Calcul du tenseur des contraintes pour $D_i < D_c$	98
4 Gestion de la rupture (gestion du cas “l'endommagement atteint 1”)	99
4.1 Formulation analytique permettant de travailler avec l'endommagement critique à 1	99
4.2 Programmation de la gestion de la rupture	100
5 Calcul d'un pas de temps automatique pour la loi de comportement proposée	101
5.1 Calcul automatique du pas de temps EUROPLEXUS	101
5.2 Modifications proposées	103
5.2.1 Le substepping	103
5.2.2 Critères pour le calcul du pas de temps élastique et d'endommagement	103
6 Evaluation numérique de l'algorithme proposé	104
6.1 Cas test de tri-traction	104
6.2 Importance d'avoir $D_c = 1$	105
6.2.1 Comparaison entre $D_c = 0,999$ et $D_c = 1$	106
6.3 Simulations numériques en fixant l'énergie de rupture	109
4 Résultats expérimentaux : Essais d'impact sur poutres et essais d'arrachement	113
1 Impacts sur des poutres en béton armé	114
1.1 Les types d'impact	114
1.2 Géométrie, ferraillage et coulage	115
1.3 Dispositif expérimental	116
1.3.1 La tour de chute Orion	116
1.3.2 Projectile	117
1.3.3 Définition des appuis	118
1.4 Moyens de mesures	118
1.4.1 Mesures des déplacements du projectile et de la poutre	118
1.4.2 Mesures de la force d'impact et des réactions d'appuis	118
1.4.3 Mesures des déformations des aciers	119
1.4.4 Mesures de champs par corrélation d'images	119
1.5 Résultats	121
1.5.1 Caractérisation du béton, des aciers et du nid d'abeille	121

1.5.2	Réponses des poutres P1-130 et P2-130	124
2	Essais d'arrachement	130
2.1	Dispositif expérimental	130
2.2	Résultats	130
2.2.1	Caractérisation du béton et des aciers	130
2.2.2	Force-déplacement de l'acier	131
3	Modèles et identifications	132
3.1	Modélisation TC	133
3.2	Modélisations TCS1 et TCS2	133
3.3	Modélisation TCS-H	136
5	Calculs éléments finis 3D de structures en béton armé jusqu'à la ruine	139
1	Simulations numériques 3D de l'essai d'impact sur poutre P2-130	140
1.1	Modélisations employées	140
1.2	Maillage, conditions limites et chargement	140
1.3	Résultats de simulation	143
1.3.1	Modélisation TC-T <i>versus</i> modélisation TC	143
1.3.2	Modélisations TCS1 et TCS2	148
1.3.3	Modélisation TCS-H	150
2	Modélisation des essais d'arrachement afin de prendre en compte l'interface acier-béton	152
2.1	Maillage, conditions aux limites et chargement	153
2.2	Calcul considérant une liaison acier-béton parfaite	154
2.3	Calculs avec prise en compte pragmatique du comportement de l'interface acier-béton	155
3	Simulations numériques 3D de l'essai d'impact sur la poutre P2-130 avec prise en compte de la liaison acier-béton	158
3.1	Calcul avec la modélisation TCS-H	158
3.2	Calcul avec la modélisation TCS	160
4	Conclusion	162
Conclusion et perspectives	165	
Annexe A	171	
1	Introduction au cisaillement pur	171
2	Développement des calculs analytiques	172
Annexe B	175	
1	Opérateurs tangents 3D	175
2	Etude d'une bifurcation/instabilité en 1D compression simple	177
2.1	Avec $D_{II} \neq D_{III}$	178
2.2	Avec $D_{II} = D_{III}$	182
Annexe C	183	
1	Cadre des chargements proportionnels	183

Annexe D	187	
1	Implantation numérique avec la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+$	187
1.1	Calcul du tenseur des déformations effectives	187
1.2	Calcul du multiplicateur de l'endommagement	187
1.3	Calcul du tenseur d'endommagement	188
2	Algorithme de la gestion numérique de la rupture en 4 cas	188
3	Algorithme pour le calcul du pas de temps	192
Annexe E	193	
1	Résultats expérimentaux complémentaires sur les poutres en BA	193
1.1	Caractérisation du béton	193
1.2	Résultats P3-180 et P4-180	193
1.3	Résultats P5-330	197
1.4	Résultats P6-330 (choc dur)	199
2	Résultats expérimentaux complémentaires sur les essais d'adhérence	201
Bibliographie	205	

Introduction

Lors de leur conception, les structures de génie civil assurant la fonction de protection de matériels sensibles sont dimensionnées pour résister à des situations accidentelles mettant en jeu des chargements dynamiques violents (explosions, impacts).

Dans cette catégorie de structures on trouve par exemple la coque avion recouvrant les bâtiments les plus sensibles d'une centrale nucléaire. Constituée de béton fortement renforcé par des armatures passives et des câbles de précontrainte, elle garantie une protection efficace contre les agressions externes, notamment en cas de chute d'avions militaires ou commerciaux.

Le besoin de prédire le comportement mécanique de ce type de structure et d'évaluer son niveau d'endommagement lors des situations extrêmes nécessite de faire appel à la modélisation numérique avec des modèles matériels fiables et robustes. En effet, il n'est pas possible de recourir de façon systématique aux essais grandeur nature (fig. 1) à cause de leur coût prohibitif.

Dans le domaine de l'impact, l'empirisme, encore utilisé aujourd'hui, est l'une des premières méthodes qui, à partir d'une base d'essais expérimentaux conséquente [Gueraud *et al.*, 1977; Berriaud *et al.*, 1978; Nachtsheim et Stangenberg, 1981; Riech et Rudiger, 1984], a permis de proposer des formules de prévision de la pénétration du projectile sur un ouvrage en fonction de sa forme, de sa vitesse, de sa masse. Toutefois, ces formulations ne permettent pas d'estimer précisément la réponse de la structure et elles ne donnent pas d'informations sur l'état de dégradation local de la structure. Cela nous amène au souhait d'utiliser une modélisation numérique plus complexe afin de prendre en compte des phénomènes plus locaux. Différentes méthodes d'analyses numériques des structures existent comme les éléments finis, les volumes finis, les éléments discrets [Cundall et Strack, 1979; Herrmann et Roux, 1990; Magnier et Donze, 1999], modèles cohésifs, méthodes SPH (Smooth Par-



FIG. 1 – Essai d'impact d'un avion sur un mur en béton armé (vitesse d'impact 215 m/s), d'après [Sugano *et al.*, 1993]. Sandia National Laboratories, Etats-Unis, 1988.

ticle Hydrodynamics) [Rabczuk *et al.*, 2004], et elles permettent de modéliser et simuler de grandes structures complexes.

C'est dans ce contexte et cette problématique, que ce travail de thèse a été mené. L'objectif principal est de proposer une modélisation numérique, la plus fine possible, du comportement du béton.

Pour cela, une méthode numérique est utilisée pour cette modélisation et plus précisément, la méthode des éléments finis. L'échelle locale a été choisie, en utilisant des éléments finis 3D pour modéliser le béton sur lesquels on vient appliquer une loi de comportement tridimensionnelle.

Parmi les lois ou modèles de comportements qui peuvent être utilisés pour le béton, on trouve les modèles macroscopiques qui sont appelés modèles phénoménologiques dans le cas où ils rendent compte en moyenne, par l'introduction de variables internes, des phénomènes microscopiques. Un des phénomènes microscopiques les plus importants dans le béton est la densité et l'orientation des micro-fissures différentes entre un chargement de traction et de compression, ce qui se traduit macroscopiquement par une dissymétrie du comportement entre la traction et la compression (d'où le terme d'anisotropie induite par le chargement). C'est dans cet esprit que, en se plaçant à l'échelle macroscopique et en considérant le béton comme un matériau homogène à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus, l'un des premiers modèles d'endommagement [Mazars, 1984] a permis de modéliser en 3D la dégradation progressive du matériau en fonction du chargement. D'autres modèles plus ou moins sophistiqués ont suivi [La Borderie, 1991; Vree *et al.*, 1995; Murakami et Kamiya, 1996; Halm et Dragon, 1996; Desmorat, 2004; Badel *et al.*, 2007]. C'est sur le modèle d'endommagement anisotrope de [Desmorat, 2004] et ses évolutions [Desmorat *et al.*, 2007; Chambart, 2009] que se base ce travail de thèse. Dans ce modèle, développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et appelé par la suite modèle initial, l'endommagement est représenté par une variable d'ordre 2. La loi d'évolution de l'endommagement et la fonction critère sont écrites en fonction des déformations positives (critère de type Mazars) et permettent de reproduire simplement l'anisotropie induite par le chargement et la dissymétrie traction/compression. Le comportement non-linéaire et l'adoucissement obtenus par ce modèle sont uniquement dus à l'endommagement. Les déformations permanentes ne sont pas reproduites. Par la considération d'une loi de visco-endommagement (dite à taux d'endommagement limité, de type [Allix et Deü, 1997]), ce modèle est capable de traiter toute la gamme des vitesses de sollicitations généralement envisagées pour des structures en béton, et de représenter le comportement cyclique du béton en statique comme en dynamique.

Le modèle initial, décrit au chapitre 1, ne rend bien compte que des chargements peu confinés. Ce constat est valable pour la plupart des modèles d'endommagement sans plasticité comme celui de [Mazars, 1984], et est observable aussi bien sur la surface définissant le domaine élastique que sur la surface de rupture (lieu des contraintes ultimes). Afin de commencer à prendre en compte les chargements confinés, une nouvelle fonction critère d'élasticité, modulaire, est proposée et son formalisme est utilisé dans le modèle initial en lieu et place du critère de Mazars (chapitre 2). L'effet de la triaxialité des contraintes y est ajouté afin de prendre en compte les chargements confinés. Le phénomène de désactivation des dommages lors de chargements alternés est modélisé (rendre compte de ce phénomène est essentiel en vue du dimensionnement aux séismes ou aux impacts).

L'idée générale de cette thèse est d'enrichir le modèle d'endommagement anisotrope initial au maximum avec un formalisme, couplant l'élasticité à l'endommagement, qui permet d'éviter les itérations locales tout en conservant un schéma implicite d'intégration de la loi de comportement. A la suite de cette thèse des déformations permanentes pourront être introduites via un couplage endommagement/plasticité [Lemaître et Chaboche, 1985; Simo et Ju, 1987; Ju, 1989; Ulm, 1994; Burlion,

1997; Hansen *et al.*, 2001; Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002; Grassl et Jirásek, 2006; Jason *et al.*, 2006; Cicekli *et al.*, 2007].

Ce modèle multiaxial d'endommagement anisotrope a été implanté, comme décrit au chapitre 3, dans le code de calcul d'éléments finis EUROPLEXUS co-développé par EDF (Electricité De France) et le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives). Ce code est explicite et donc tout particulièrement adapté aux calculs en dynamique rapide.

Une nouvelle procédure de gestion de la rupture (gestion du cas "l'endommagement atteint 1") est proposée et décrite dans le chapitre 3. Elle permet de prendre en compte l'endommagement anisotrope induit. L'intérêt majeur est de pouvoir borner les valeurs propres D_i du tenseur d'endommagement, D , d'ordre 2 ici, exactement à 1. Ceci va permettre d'obtenir numériquement une transition continue jusqu'à contrainte nulle (exactement) et ainsi éviter une récupération de raideur non physique, y compris en cisaillement, rencontrée dans la plupart des modèles travaillant avec un endommagement critique pour des raisons numériques, comme dans [Mazars, 1984; Desmorat, 2004; Desmorat *et al.*, 2007; Chambart, 2009]. L'intérêt de cette nouvelle gestion de la rupture sur un calcul de structure en béton armé est mis en avant à la fin du chapitre 3.

Avec une formulation du béton identique à celle de la thèse de M. Chambart, différentes éprouvettes (poutres en béton armé et cubes de béton comportant un acier longitudinal) ont été coulées au département génie civil de l'ENS Cachan lors de cette thèse. Des essais d'adhérence et des essais d'impact sur poutres ont été menés au Département Génie Civil de l'ENS Cachan et au laboratoire d'études DYNamique du Cea Saclay sur la tour de chute Orion. Le but de ces essais est de valider la modélisation proposée en confrontant les calculs (chapitre 5) et les essais expérimentaux du chapitre 4.

Chapitre 1

Comportement du béton : Aspects expérimentaux, modélisations

1 Comportement expérimental du béton

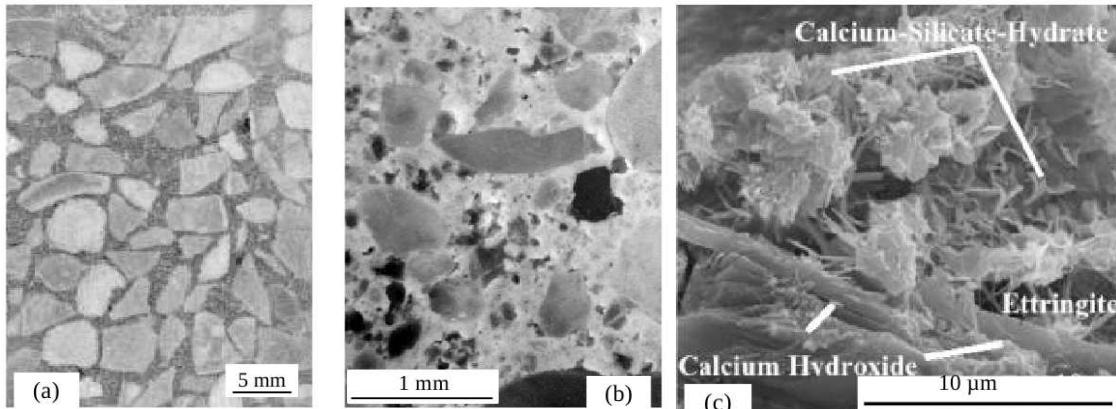
Aujourd’hui, si l’on souhaite recenser les différents types de béton existants comme les BAP (Bétons AutoPlaçants), les BHP (Bétons Hautes Performances), les BFUP (Bétons Fibrés Ultras Performants), on s’aperçoit que cette liste est conséquente et non définitive puisque la recherche de nouveaux bétons plus performants est toujours d’actualité. Dans cette thèse, nous nous intéresserons uniquement au comportement d’un béton ordinaire. Le comportement expérimental de ce béton, sous des chargements quasi-statiques et dynamiques, est présenté par la suite. Le béton que l’on peut observer dans différentes structures est homogène à une échelle que l’on appellera macroscopique (élément de volume représentatif de quelques centimètres de côté), contrairement à l’échelle microscopique (fig. 1.1) qui met en évidence l’hétérogénéité de celui-ci en pouvant distinguer les différents constituants à l’aide de différents moyens d’observation. Ces deux échelles d’observation mettent en avant l’isotropie du matériau (aucune direction privilégiée observable par rapport à des matériaux fibrés).

1.1 Traction monotone

L’essai de traction sur une éprouvette en béton est peut-être l’un des essais de caractérisation du béton les plus compliqués à mettre en oeuvre. Deux types d’essais de traction existent dans la littérature : la traction directe et la traction indirecte (essai de flexion, essai Brésilien, essai PIED [Ramtani, 1990]) pour obtenir au minimum la valeur de la contrainte ultime encore dénommée contrainte à rupture ou contrainte pic et au mieux la réponse contrainte-déformation. La traction directe et deux essais de traction indirecte (flexion et essai Brésilien) sont présentés succinctement.

Le premier, l’essai de traction directe (fig. 1.2), est le plus représentatif du comportement mécanique en traction mais il est très délicat à réaliser. Il consiste à appliquer directement un effort de traction pure sur les extrémités de l’éprouvette à l’aide de mors ou de colle. Ce procédé fait apparaître des contraintes parasites telles que celles induites par les mâchoires ou par des ancrages noyés et ainsi des résultats très dispersés sont généralement obtenus.

Le deuxième, l’essai de flexion, s’effectue généralement sur des éprouvettes prismatiques (hauteur h , largeur b) reposant sur deux appuis (portée l) et sous une charge P appliquée au milieu de



(a) Granulats millimétriques dans la matrice de mortier (microscopie électronique à balayage) [Auvray, 2003]

(b) Mortier : mélange de ciment et de sable (microscopie optique). *Photo Centre des Matériaux*

(c) Microstructure de la pâte cimentée (ciment Portland) au microscope électronique à balayage. *P.E. Stutzmann, National Institute of Standards and Technology, USA*

FIG. 1.1 – Structure multi-échelles d'un béton



(a) Principe de l'essai



(b) Essai sur CEMTEC (Béton Fibré Ultra Performant) réalisé par le laboratoire central des ponts et chaussées

FIG. 1.2 – Essai de traction directe

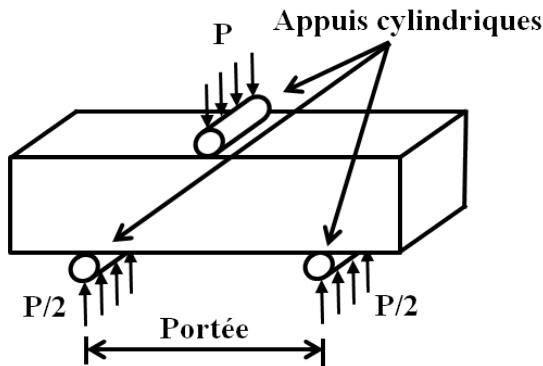


FIG. 1.3 – Essai de traction par flexion trois points

l'éprouvette (flexion 3 points), comme sur la figure 1.3. La contrainte ultime (à rupture) de traction est définie généralement de la façon suivante, la charge P étant celle à rupture :

$$f_t = \frac{3Pl}{2bh^2} \quad (1.1)$$

Le dernier, l'essai de fendage encore appelé “Essai Brésilien” (fig. 1.4), consiste à appliquer une charge P de compression maximale produisant l'éclatement d'une éprouvette cylindrique (diamètre D , longueur L) par mise en traction du diamètre vertical. La contrainte horizontale de traction (à rupture) est définie de la façon suivante :

$$f_t = \frac{2P}{\pi DL} \quad (1.2)$$

Cet essai a l'avantage d'être économique (utilisable sur des éprouvettes de compression 16x32cm) et tout à fait reproductible. Un exemple d'essai de fendage réalisé durant cette thèse est illustré sur la figure 1.4 avec l'ensemble des résultats regroupé dans le tableau 1.1. La fissure verticale s'amorce à cœur puis se propage vers les appuis.

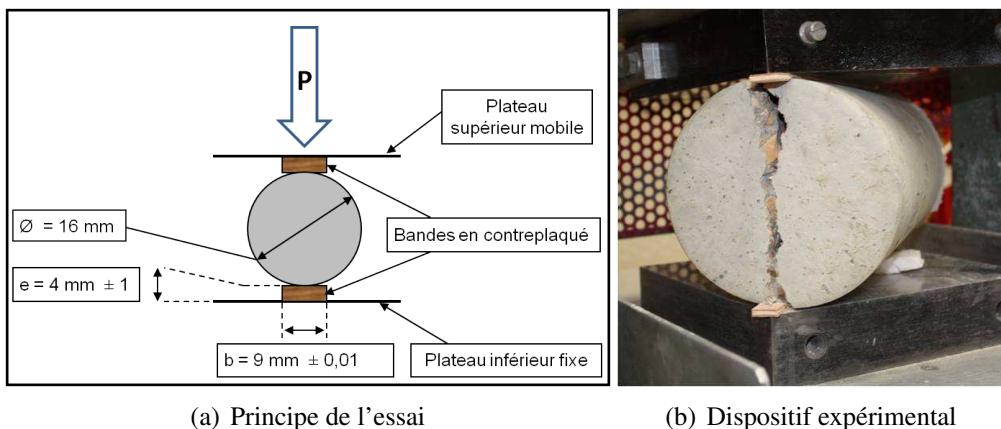


FIG. 1.4 – Essai de traction par fendage réalisé lors de cette thèse au Département Génie Civil (DGC) de l'ENS Cachan

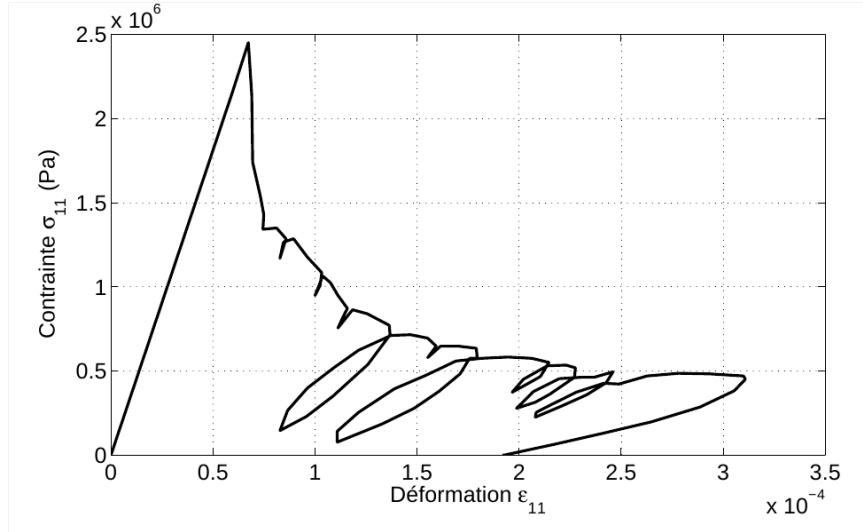


FIG. 1.5 – Réponse en traction cyclique d'un béton [Terrien, 1980]

Gâchée	o (cm)	Hauteur h (cm)	Masse (kg)	ρ (kg.m⁻³)	Force maxi F_{\max} en kN	Résistance à la traction f_t en Mpa
a	16,00	32,00	15,18	2359	254,46	3,16
b	16,00	31,50	14,64	2312	237,60	3,00

TAB. 1.1 – Résultats des essais de fendage effectués lors de cette thèse

Si l'on observe la réponse en traction directe d'un béton (fig. 1.5), on constate que le comportement est fragile avec un matériau élastique jusqu'au pic de contrainte puis une partie adoucissante apparaît (lorsque la contrainte chute brutalement), correspondant à l'apparition d'une macro-fissure orientée perpendiculairement au chargement (fig. 1.2(b)).

1.2 Compression monotone

Les essais de compression, plus simples à réaliser et normalisés, sont généralement réalisés sur une presse hydraulique en appliquant un effort P au cours du temps (fig. 1.6(a)). L'éprouvette cylindrique normalisée d'élancement (rapport hauteur/diamètre) égal à 2 (fig. 1.6(b)) subit un surfaçage au souffre ou mécanique (rectifiage) avant l'essai afin de s'affranchir des effets parasites dus au fretage (le contact béton-presse est frottant et gêne le développement des déformations latérales). Un extensomètre (fig. 1.6(b)) composé de deux groupes de pointeaux (3 en haut et 3 en bas) répartis à 120° matérialisent deux sections de part et d'autre du tiers central de l'éprouvette et trois capteurs de déplacement mesurent la déformation longitudinale relative de cette partie de l'éprouvette $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$.

En connaissant ainsi la déformation longitudinale et l'effort P au cours du temps et la section de l'éprouvette, la courbe contrainte-déformation (fig. 1.6(c)) est tracée et 5 phases d'après [Ramtani, 1990] caractérisent la rupture progressive du béton :

- Phase 0 : Jusqu'à 10 % de la contrainte pic ou à rupture f_c , le comportement correspond à une phase de "serrage" ou de mise en place du matériau en début d'essai. Il est à noter que cette phase

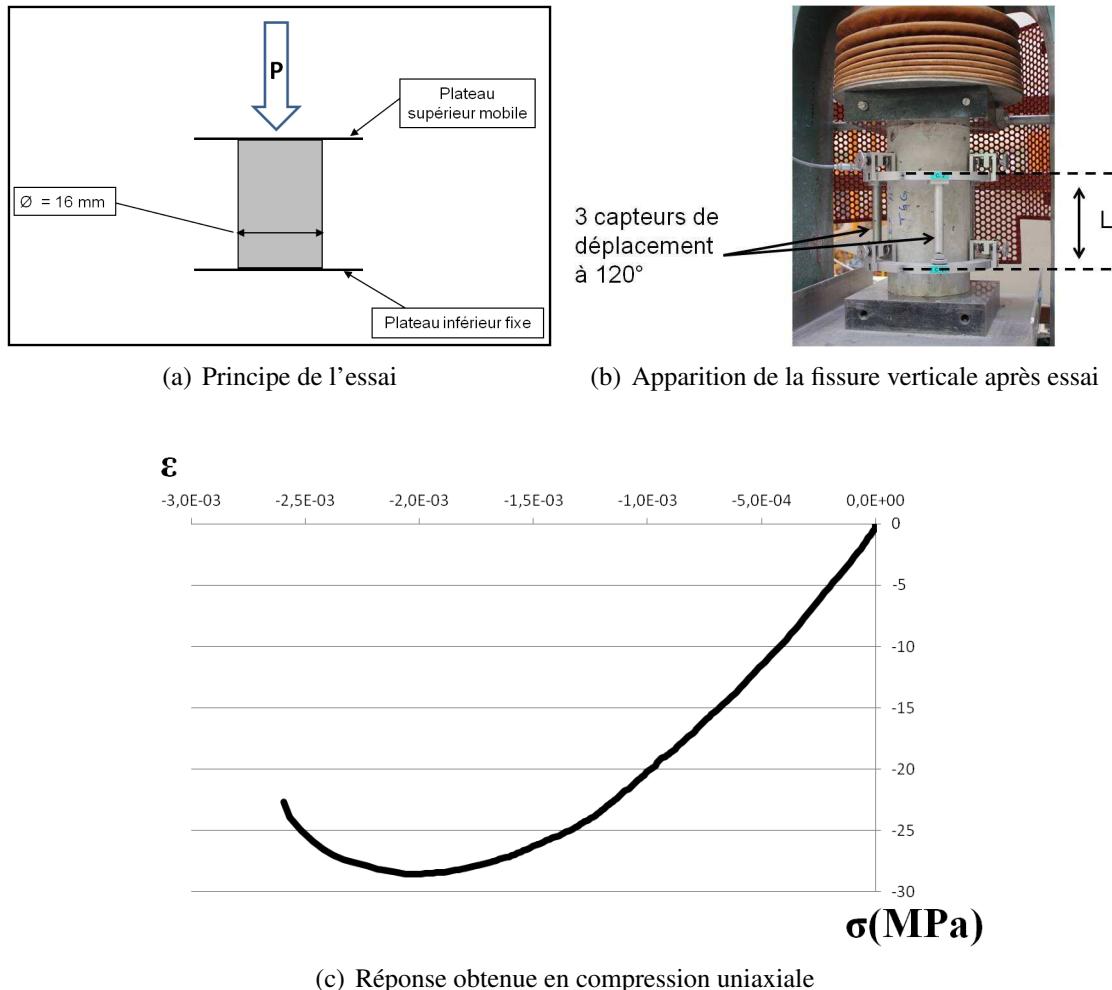


FIG. 1.6 – Essai de compression (diamètre $\phi = 16\text{cm}$ et hauteur $h=32\text{cm}$) réalisé lors de cette thèse

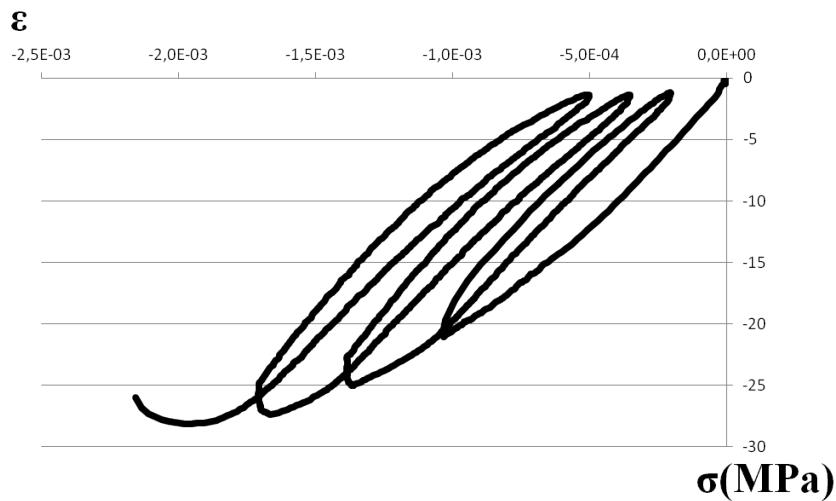


FIG. 1.7 – Réponse obtenue en compression cyclique (diamètre $\phi = 16\text{cm}$ et hauteur $h=32\text{cm}$)

n'existe pas toujours.

- Phase 1 : Comportement élastique linéaire pouvant atteindre 30 à 50% de la contrainte à rupture f_c .
- Phase 2 : Comportement non-linéaire et irréversible (déformations permanentes) caractérisé par une diminution du volume du matériau entre 50 et 70 % de la contrainte à rupture f_c .
- Phase 3 : Contrairement à la phase précédente, la non linéarité est beaucoup plus accentuée et caractérisée cette fois-ci par un début d'augmentation du volume apparent du matériau jusqu'à f_c (dilatance).
- Phase 4 : Au delà de f_c , on observe un comportement adoucissant accompagné d'une augmentation intense du volume apparent de l'éprouvette (dilatance importante).

La réponse en compression diffère totalement de celle en traction de par l'ordre de grandeur des contraintes et des déformations d'un rapport 10 fois plus grand en compression qu'en traction, mais aussi le comportement post-pic de ce dernier est plus ductile. La réponse suivant le type de sollicitation montre un comportement du béton totalement différent. Si l'on observe le faciès de fissuration de chaque chargement, on remarque des micro-fissures qui ont tendance à s'orienter perpendiculairement au chargement en traction, alors que pour la compression celles-ci sont orientées parallèlement au chargement. L'anisotropie (de la micro-fissuration ou de l'endommagement) induite par le chargement, ou tout simplement anisotropie induite, est le terme employé pour nommer le phénomène d'anisotropie n'existant pas avant sollicitation.

1.3 Chargements alternés

En dynamique, les structures en béton armé sont sollicitées par des chargements variés comme des séismes, des impacts ou des souffles. Il est donc nécessaire d'observer et de comprendre le comportement du béton sous chargements alternés à l'aide de différents essais, comme un chargement de traction [Terrien, 1980] ou de compression avec décharges (présent travail), ou bien un chargement de traction suivi d'un chargement de compression [Mazars et Berthaud, 1989]. L'essai de traction avec décharge (fig. 1.5) met en évidence l'apparition de déformations permanentes. Ces déforma-

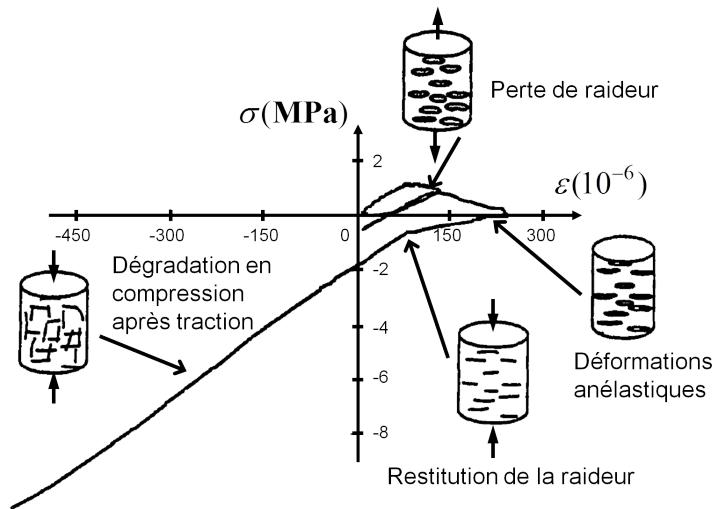
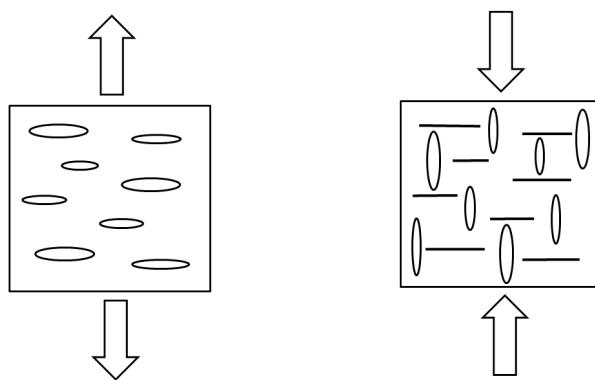


FIG. 1.8 – Réponse en traction - compression cyclique [Ramtani, 1990]

tions permanentes sont d'un ordre de grandeur bien plus petites que celles observées sur un essai de compression avec décharge (fig. 1.7). Les points communs de ces deux essais sont la diminution du module élastique et la non-linéarité des décharges associée à de la dissipation (visible par les boucles d'hystérésis).

Les essais alternés traction/compression [Mazars et Berthaud, 1989; Ramtani, 1990] mettent en avant l'effet de refermeture des micro-fissures. Cet effet se traduit par la reprise de raideur lors du passage de la traction à la compression visible sur la figure 1.8. Il s'explique par l'ouverture de micro-fissures perpendiculaires au chargement en traction (fig. 1.9(a)) qui se referment et se retrouvent comprimées, laissant apparaître ensuite, si le chargement s'intensifie, d'autres fissures parallèles cette fois au chargement de compression (fig. 1.9(b)). Cette refermeture de micro-fissures permet de restituer partiellement la raideur initiale du béton en compression.



(a) Ouverture de micro-fissures perpendiculaire aux chargements de traction
 (b) Fermeture des micro-fissures de traction et ouverture des micro-fissures de compression

FIG. 1.9 – Scénario de micro-fissuration lors d'un chargement alterné traction suivie de compression

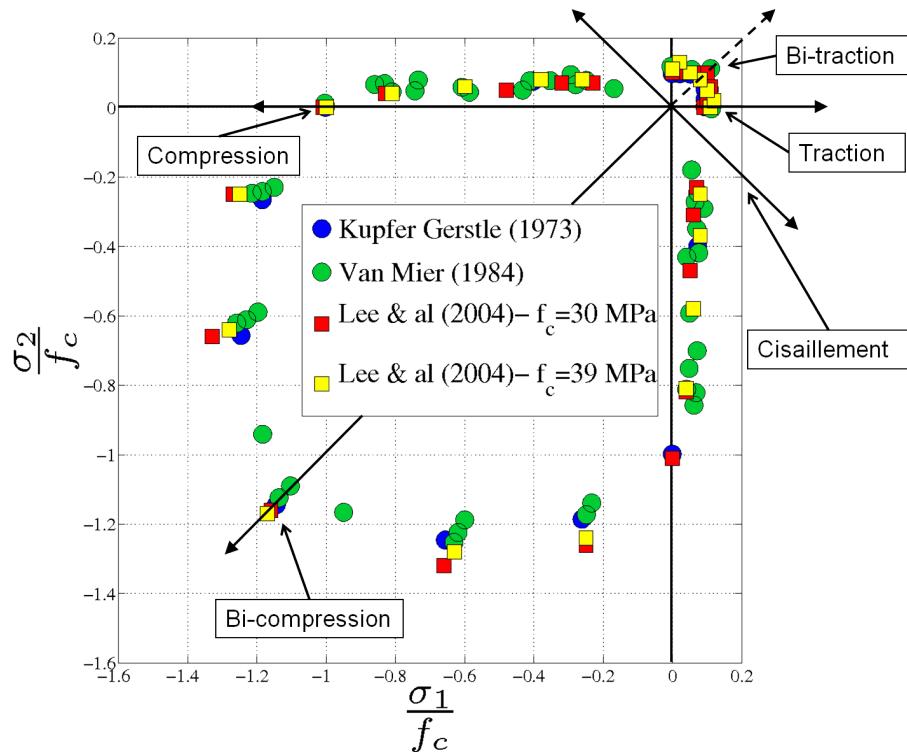


FIG. 1.10 – Surfaces de rupture (contraintes au pic) en contrainte plane

1.4 Chargements multiaxiaux

Des essais biaxiaux en contrainte plane ont été réalisés par plusieurs auteurs comme [Kupfer et Gerstle, 1973; Van Mier, 1984; Lee *et al.*, 2004]. Les points expérimentaux de ces essais réalisés en quasi-statique sont représentés sur la figure 1.10 et correspondent aux contraintes pics (à rupture) de chaque chargement normées par la contrainte à rupture en compression uniaxiale f_c . On observe que le confinement permet d'accroître la résistance du béton. Certains trajets de chargements monotones et biaxiaux sont pointés sur cette figure. Ces types de chargements seront repris dans la suite de la thèse.

1.5 Compaction

De nombreux auteurs [Schickert et Danssaman, 1984; Bazant *et al.*, 1986; Burlion, 1997; Gauvin, 1999; Burlion *et al.*, 2001; Gabet, 2006; Gabet *et al.*, 2008] étudient le phénomène de compaction (fig. 1.11) en réalisant des essais sous fort confinement, comme l'essai hydrostatique (compression hydrostatique) ou en encore l'essai œdométrique (compression uniaxiale confinée latéralement). Quel que soit le type d'essai (fig. 1.11(a)), les étapes de ce phénomène sont généralement semblables, avec une première phase élastique, suivie d'un comportement plastique puis il y a durcissement du matériau une fois la porosité quasiment refermée. Dans cette dernière phase, Burlion différencie le durcissement élastique (augmentation du module $E > E_0$) du durcissement plastique (perte de concavité de la réponse) et introduit la notion de point de compaction. Le durcissement élastique fait partie du comportement plastique à écrouissage linéaire alors que la partie du comportement “plastique”

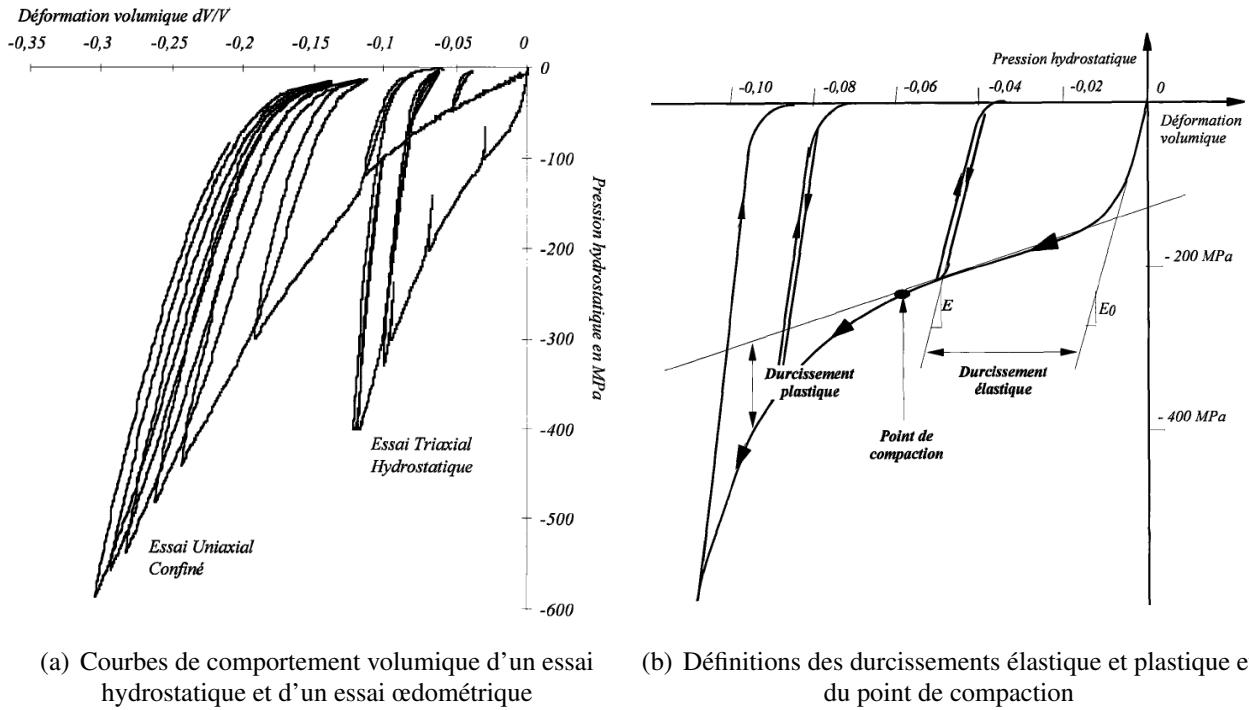


FIG. 1.11 – Résultats et définitions d'après [Burlion, 1997]

à écrouissage non-linéaire est appelée durcissement plastique. Entre les deux se trouve le point de compaction. Ces trois notions sont représentées sur la figure 1.11(b).

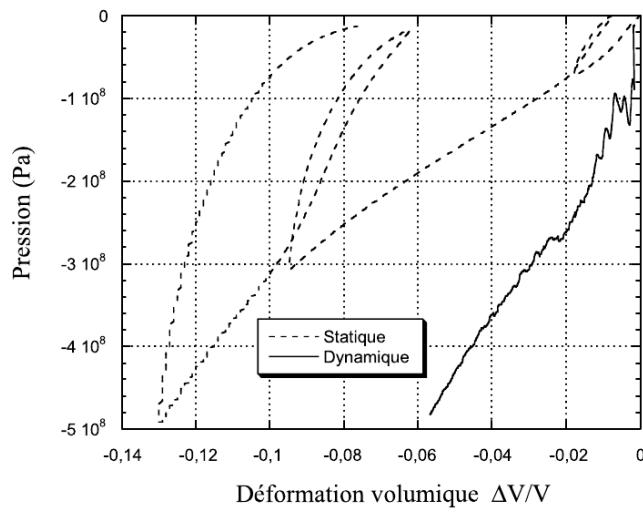


FIG. 1.12 – Comparaison statique-dynamique de courbe de comportement volumique d'un essai œdométrique d'après [Gatuingt, 1999]

[Gatuingt, 1999] a réalisé des essais œdométriques en dynamique (vitesse d'impact de 6 m/s) et les a comparé aux essais en quasi-statique de Burlion (fig. 1.12). Ces comparaisons montrent une influence de la vitesse de déformation non négligeable sur le comportement du béton.

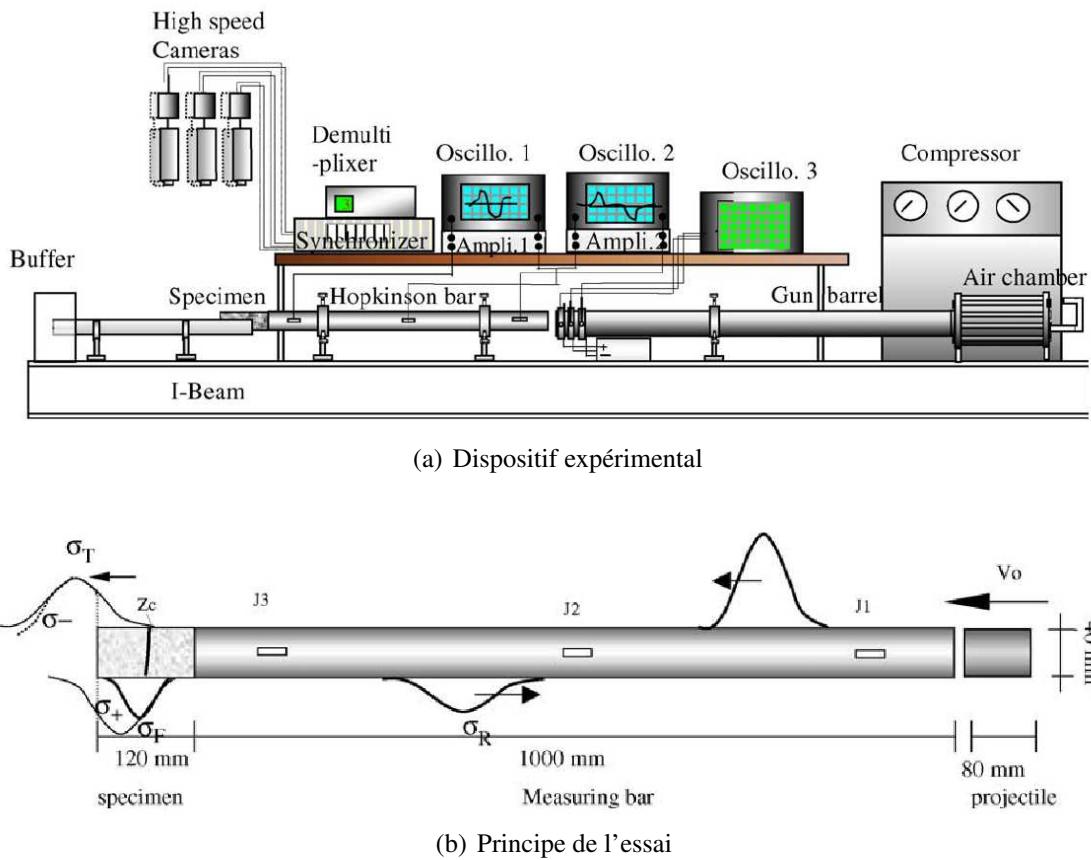


FIG. 1.13 – Essais de traction à l'aide des barres d'Hopkinson, d'après [Brara et Klepaczko, 2006]

1.6 Effet de vitesse

Dans le cadre d'études de structures sous impacts, le comportement du béton sous sollicitations dynamiques doit être modélisé. Les essais aux barres d'Hopkinson (fig. 1.13(a)) sont les plus couramment utilisés pour caractériser le comportement dynamique du béton en traction ou en compression. Souvent appelés "essais SHPB" (Split Hopkinson Pressure Bars), ces essais permettent d'atteindre des vitesses de déformation importantes de l'ordre de 100 s^{-1} . Aujourd'hui, ces essais sont toujours utilisés pour caractériser le béton [Erzar et Forquin, 2011; Lu et Li, 2011]. Le comportement du béton montre un accroissement de sa résistance avec la vitesse de sollicitation du chargement, on introduit le DIF (Dynamic Increase Factor) qui est le rapport de la résistance dynamique sur la réponse en quasi-statique en fonction de la vitesse des déformations, en échelle logarithmique.

1.6.1 En traction

Sur la figure 1.14, deux phases sur le comportement dynamique en traction se distinguent. Une première phase montre une résistance en traction relativement faible et quasi-linéaire (en échelle logarithmique) pour des vitesses de sollicitations ne dépassant pas 1 s^{-1} . Plusieurs auteurs [Rossi, 1991; Toutlemonde, 1994] expliquent cette première évolution linéaire par la présence d'eau dans les micropores du béton provoquant un effet de viscosité dans le matériau. On appelle ce phénomène "l'effet Stefan". Concernant la deuxième phase, la contrainte à rupture du béton croît plus rapidement

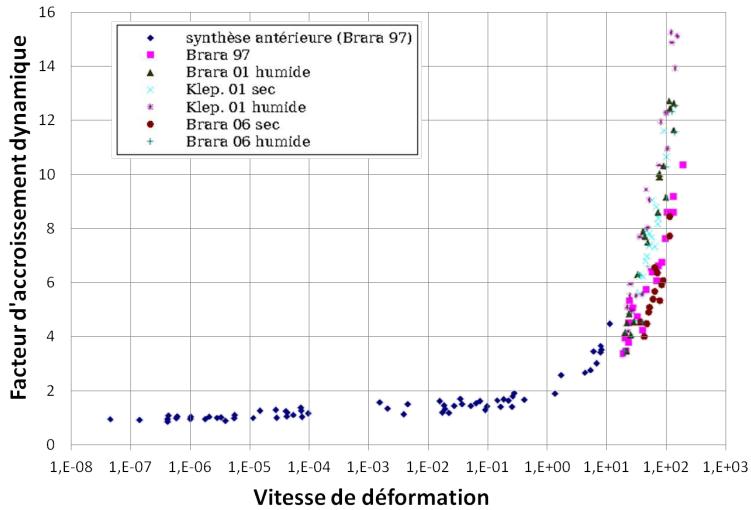


FIG. 1.14 – Comportement dynamique du béton en traction uniaxiale, synthèse de différents résultats [Brara *et al.*, 1997, 2001; Klepaczko et Brara, 2001; Brara et Klepaczko, 2006] d'après [Chambart, 2009]

avec la vitesse de sollicitation en passant d'un rapport 2^1 pour une vitesse de déformation de $1s^{-1}$ à un rapport supérieur à 10 pour une vitesse de déformation de $100s^{-1}$. Toutefois, certains auteurs, comme [Erzar et Forquin, 2010], contredisent certaines valeurs de ces résultats expérimentaux, notamment pour les vitesses de déformation de l'ordre $100s^{-1}$ où ils trouvent un rapport sur un béton humide 3 fois moins important que celui de [Klepaczko et Brara, 2001]. Pour le moment, il est donc plus judicieux de se fier au comportement dynamique du béton en traction pour les points "bas" de la courbe ayant des vitesses de déformation inférieures à $80s^{-1}$.

1.6.2 En compression

Comme en traction, deux phases sont observables sur le diagramme contrainte à rupture (normée par celle en quasi-statique f_c) *versus* vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ (fig. 1.15). Cependant les valeurs des rapports obtenus ne sont pas comparables, à un même taux de déformation, à ceux obtenus en traction. Pour la gamme de chargement ayant une vitesse de déformation inférieure à $10s^{-1}$, l'augmentation de la résistance est faible dans un premier temps ($10^{-6}s^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^{-4}s^{-1}$), et évolue ensuite linéairement en fonction du logarithme de la vitesse de déformation. L'effet Stefan explique également ce phénomène en compression. Au delà de $10s^{-1}$ la vitesse croît plus rapidement en passant d'un rapport 1,5 à un rapport 3 à $100s^{-1}$. Cette augmentation brutale de la résistance est essentiellement due à des effets inertiels [Janach, 1976; Gary et Bailly, 1998; Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002]. Lorsque l'on sollicite le béton en compression, celui-ci a tendance à vouloir se déformer latéralement par effet Poisson. Les forces d'inertie limitent ces extensions latérales et, en confinant le béton, augmentent la résistance apparente du béton. Une fonction bilinéaire (en log-log) semble adaptée pour représenter l'effet de vitesse en compression.

¹par rapport à la contrainte à rupture f_t en quasi-statique

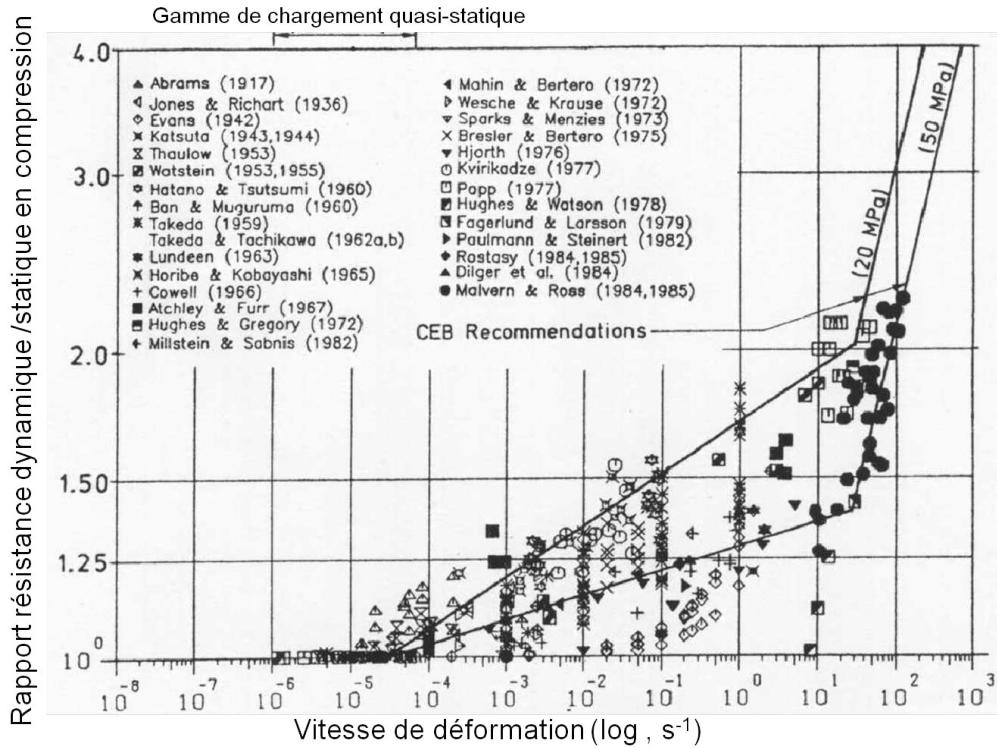


FIG. 1.15 – Comportement dynamique du béton en compression uniaxiale d'après [Bischoff et Perry, 1991]

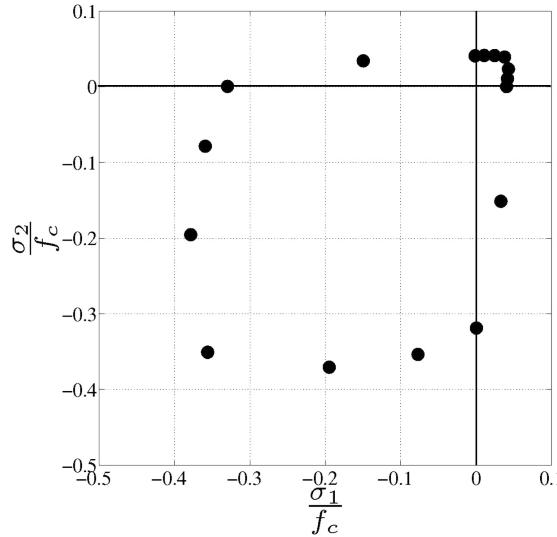
2 Critères de limite d'élasticité

Le comportement du béton est linéaire en deçà d'un certain seuil ou limite d'élasticité quel que soit le type de chargement. Cependant la valeur de la limite d'élasticité sera différente d'un chargement multiaxial à un autre comme le montre [Kupfer *et al.*, 1969] sur la surface limite d'élasticité déterminée expérimentalement (fig. 1.16). On observe une augmentation de la limite d'élasticité pour des chargements confinés, constat classique fait précédemment sur les surfaces de rupture. Il est donc essentiel de définir un critère pour représenter au mieux ce comportement élastique. Plusieurs critères écrits en contrainte ou en déformation, couramment utilisés dans les modèles de comportement du béton, sont présentés sous la forme d'une fonction critère f telle que $f < 0$ corresponde au domaine d'élasticité.

2.1 Critères écrits en contrainte

2.1.1 Critère de Rankine

Le critère isotrope de Rankine énonce que pour rester dans le domaine élastique, aucune contrainte principale ne doit dépasser la limite élastique. Sa surface bien connue dans le cas des contraintes planes est un carré et un cube en 3D. Ce critère, ayant l'avantage d'être fermé (fait intervenir la pression hydrostatique), comporte des points anguleux et ne permet pas de modéliser la dissymétrie

FIG. 1.16 – Surface limite d'élasticité d'après [Kupfer *et al.*, 1969]

traction / compression.

$$f = \max|\sigma_i| - \sigma_y = 0, \quad \text{les } \sigma_i \text{ sont les contraintes principales} \quad (1.3)$$

2.1.2 Critère de Drucker-Prager

Les modèles de plasticité initialement développés pour représenter le comportement des métaux utilisent des critères isotropes réguliers de type von Mises ou anguleux de type Tresca. Le critère de von Mises (éq. 1.4), fonction du second invariant $J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D$ du déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$. La surface représentant le critère de von Mises est un cylindre parallèle à la trissectrice de l'espace des contraintes principales.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_y \quad (1.4)$$

avec σ_y la limite d'élasticité en traction et σ_{eq} , la contrainte équivalente de von Mises :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \quad (1.5)$$

si $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ sont les contraintes principales.

Ces critères isotropes sont insensibles aux chargements hydrostatiques (surface ouverte sur l'axe hydrostatique) et ne sont donc pas adaptés pour les géomatériaux comme le béton. L'introduction d'une sensibilité aux contraintes hydrostatiques à l'aide du premier invariant du tenseur des contraintes $I_1 = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}$ permet d'obtenir le critère de Drucker-Prager [Drucker et Prager, 1952] :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + \tan(\beta)\sigma_H - c \quad \text{où} \quad \sigma_H = \frac{I_1}{3} = \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} \quad (1.6)$$

où σ_H est la contrainte hydrostatique, β l'angle de frottement et c la cohésion. La surface représentant le critère de Drucker-Prager est un cône à section circulaire admettant le même axe de symétrie que von Mises.

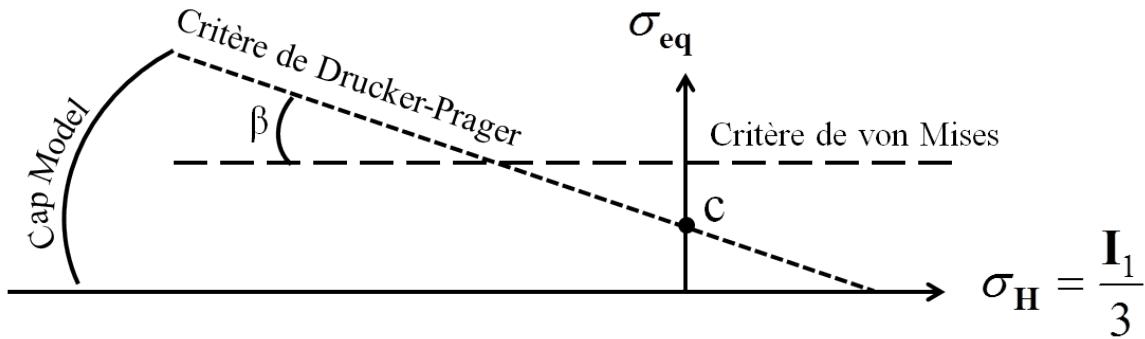


FIG. 1.17 – Représentation graphique de critères de limite d'élasticité

Le critère Mohr-Coulomb est un autre critère classiquement utilisé qui comporte des points anguleux. Ces deux derniers critères ont l'avantage de prendre en compte la dissymétrie traction / compression. Le critère Drucker-Prager est fermé sur l'axe hydrostatique positif (tri-traction) mais reste ouvert sur l'axe hydrostatique négatif. Dans ce cas, le matériau reste élastique, par exemple en compression hydrostatique, ce qui n'est pas réaliste pour le béton puisque, nous l'avons vu, le phénomène de compaction apparaît. Pour fermer cette surface sur l'axe hydrostatique, la surface Drucker-Prager est, en général, complétée par une surface appelée "cap" (fig. 1.17) [Maggio et Sandler, 1971; Hofstetter *et al.*, 1993]. Ces "cap model" permettent de fermer la surface de charge. Le problème de l'utilisation de ces modèles est un traitement numérique assez lourd nécessitant des résolutions locales itératives à l'intersection entre la surface de charge et le "cap" où se créent en général des points anguleux.

2.1.3 Critère de Willam-Warnke

De nombreux travaux dans la littérature des géomatériaux sont basés sur le critère de Willam-Warnke [Willam et Warnke, 1975], comme ceux de [Fauchet, 1991] ou encore de [Ulm, 1994]. Le critère de Willam-Warnke à 3 paramètres (f_t, f_c, ρ_0), utilisé notamment par [Fauchet, 1991], peut être considéré comme un critère de Drucker-Prager adapté au béton dans le domaine des faibles confinements. Ce critère, défini par l'équation (1.8), est fonction de l'angle de Lode θ (éq. 1.7), fonction lui-même du 2^e et 3^e invariants du déviateur des contraintes, respectivement J_2 défini précédemment, et $J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}((\boldsymbol{\sigma}^D)^3)$:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det \boldsymbol{\sigma}^D}{\sigma_{eq}^3} \right) \quad (1.7)$$

$$f = \sigma_{eq} + \mu(\theta)(\sigma_H - \sigma_{Hy}) \quad (1.8)$$

avec les contraintes de von Mises σ_{eq} et hydrostatique σ_H précédemment définies ainsi que σ_{Hy} un paramètre matériaux.

L'expression de la fonction $\mu(\theta)$ est telle que, dans le plan du déviateur (fig. 1.18), la section initialement circulaire du critère de Drucker-Prager devient une portion d'ellipse entre deux méridiens successifs pour le critère de Willam-Warnke, l'un de compression et l'autre de traction.

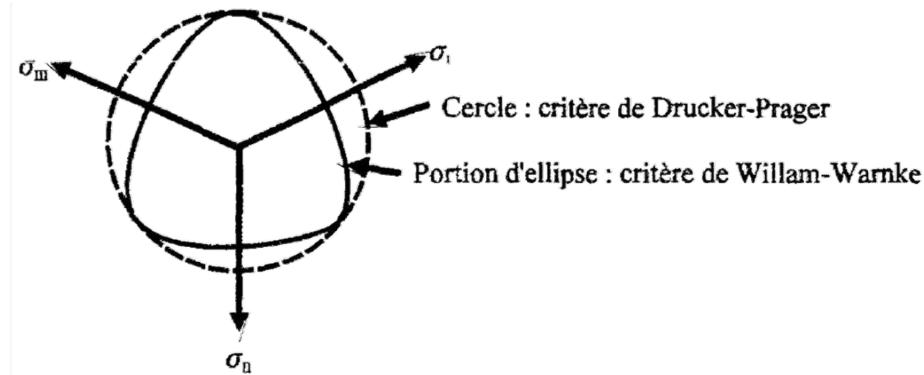


FIG. 1.18 – Représentation des domaines d'élasticité de Willam-Warnke à 3 paramètres et de Drucker-Prager dans le plan du déviateur

[Ulm, 1994] propose de fermer ce critère (critère dénommé critère de Willam-Warnke modifié à 4 paramètres) :

$$f = \sigma_{eq} + \mu(\theta)(\sigma_H - \sigma_{Hy} + \frac{1}{2p_{cr}}(\sigma_H - \sigma_{Hy})^2) \quad (1.9)$$

Dans la littérature, les approches continues de type Gurson sont aussi utilisées pour fermer cette surface selon l'axe du premier invariant des contraintes et éviter ainsi les points anguleux rencontrés notamment sur les “Cap model”.

2.1.4 Critère de Gurson

Le critère de Gurson [Gurson, 1977] est initialement prévu pour modéliser la déformation plastique d'alliages métalliques ayant en leur sein des défauts sous forme de cavités. Il a notamment été utilisé afin de modéliser les déformations plastiques pour des matériaux poreux comme le béton. Le modèle de [Burlion, 1997] ou encore celui de [Gatuingt, 1999] (modèle présenté par la suite) sont basés sur le critère de Gurson modifié [Needleman et Tvergaard, 1984], encore appelé modèle GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman) :

$$f = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2q_1\phi \cosh \left(q_2 \frac{3\sigma_H}{2\sigma_M} \right) - (1 + (q_3\phi)^2) \quad (1.10)$$

où ϕ représente la porosité du matériau, σ_M est la contrainte dans la matrice si on considère celle-ci sans défaut (initialement égale à la limite d'élasticité de la matrice σ_y), σ_{eq} est la contrainte équivalente de von Mises et q_1 , q_2 , q_3 sont des paramètres scalaires du critère.

La surface du critère de GTN ($f = 0$) est représentée sur la figure 1.19 pour $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ représentant la surface initiale de Gurson. Pour des raisons de symétrie, seulement un quart de cette surface est représenté. Ce critère est une ellipse dont les dimensions peuvent varier avec les paramètres du critère. Lorsque $\phi = 0$, la surface correspond à celle de von Mises.

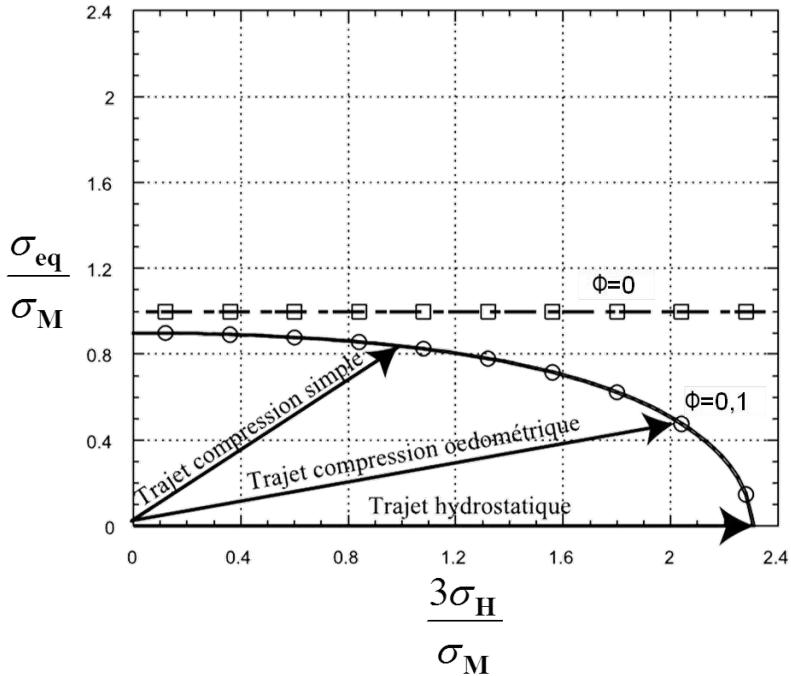


FIG. 1.19 – Représentation du critère de Gurson modifié dans le plan $(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M}, \frac{3\sigma_H}{\sigma_M})$ d'après [Gatuingt, 1999]

2.1.5 Critère de François

Le critère de [François, 2008] s'écrit sous la forme suivante :

$$f = \sigma_{eq} + \sigma_0 \left(\left\| \exp \left(\frac{\mathbf{\sigma}}{\sigma_0} \right) \right\| - \sqrt{3} \right) - \sigma_y \quad (1.11)$$

Avec σ_0 et σ_y deux paramètres “matériau”. La norme euclidienne du tenseur \mathbf{A} s'écrit sous la forme $\|\mathbf{A}\| = (A_{ij}A_{ji})^{1/2}$. Le critère en fonction des contraintes principales ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$) s'écrit sous la forme suivante :

$$f = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} + \sigma_0 \left(\sqrt{\exp \left(\frac{2\sigma_I}{\sigma_0} \right) + \exp \left(\frac{2\sigma_{II}}{\sigma_0} \right) + \exp \left(\frac{2\sigma_{III}}{\sigma_0} \right)} - \sqrt{3} \right) - \sigma_y \quad (1.12)$$

Le critère est représenté en 3D sur la figure 1.20(a) et dans le plan du déviateur sur la figure 1.20(b).

Les deux derniers critères présentés ont l'avantage d'être fermés et donnent ainsi la possibilité de modéliser le phénomène de compaction.

2.2 Critères écrits en déformation

Contrairement aux critères écrits en contrainte, ceux écrits en déformations sont moins nombreux et plus récents. Nous évoquerons dans cette partie le critère de De Vree [Vree *et al.*, 1995], de Mazars

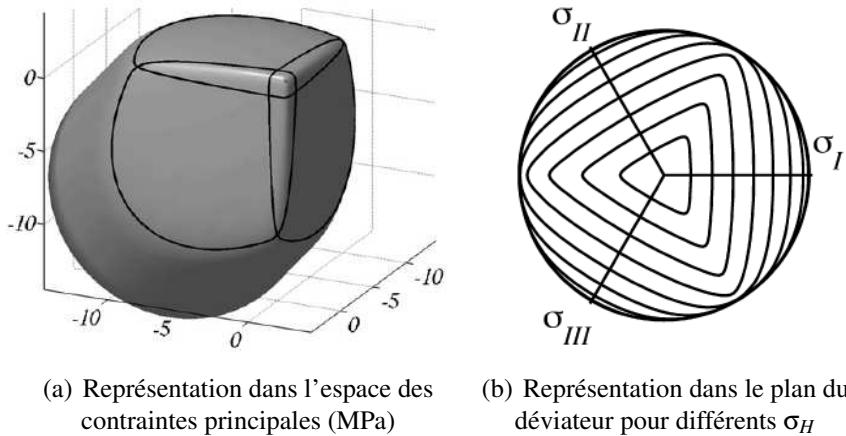


FIG. 1.20 – Réponses du critère de [François, 2008]

[Mazars, 1984] et des critères de Mazars enrichis à l'aide notamment des invariants des déformations [Pontiroli, 1995; Ragueneau *et al.*, 2008; Chen, 2010]. Nous écrirons tous les critères en déformation sous la forme suivante :

$$f = \varepsilon_{eq} - \kappa \quad (1.13)$$

La figure 1.21 permet de comparer les surfaces de limite d'élasticité de ces critères par rapport aux points expérimentaux de [Kupfer *et al.*, 1969]. Le paramètre κ (limite d'élasticité en déformation) a été ajusté pour chaque critère afin d'**obtenir la même limite d'élasticité en traction uniaxiale**, celle de [Kupfer *et al.*, 1969]. Pour certains critères possédant un second paramètre, celui-ci a été ajusté afin d'**obtenir la limite d'élasticité en bi-compression** de [Kupfer *et al.*, 1969].

2.2.1 Critère de De Vree

Le critère de [Vree *et al.*, 1995] est écrit en fonction de deux invariants du tenseur des déformations I_1^ε et J_2^ε définis par les équations (1.15) où σ est remplacé par le tenseur des déformations ε . Sa surface limite d'élasticité en forme d'ellipse (fig. 1.21) ne représente pas correctement la dissymétrie traction compression, ni la réponse en bi-traction.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma(1 - 2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{1 - 2\nu} I_1^\varepsilon \right)^2 + \frac{12\gamma}{(1 + \nu)^2} J_2^\varepsilon} \quad (1.14)$$

avec

$$I_1^\varepsilon = \text{tr} \varepsilon \quad J_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \text{tr} [(\varepsilon^D)^2] = \frac{1}{2} \varepsilon^D : \varepsilon^D \quad (1.15)$$

γ est un paramètre du modèle permettant d'ajuster le rapport entre les limites d'élasticité de traction et de (bi-)compression.

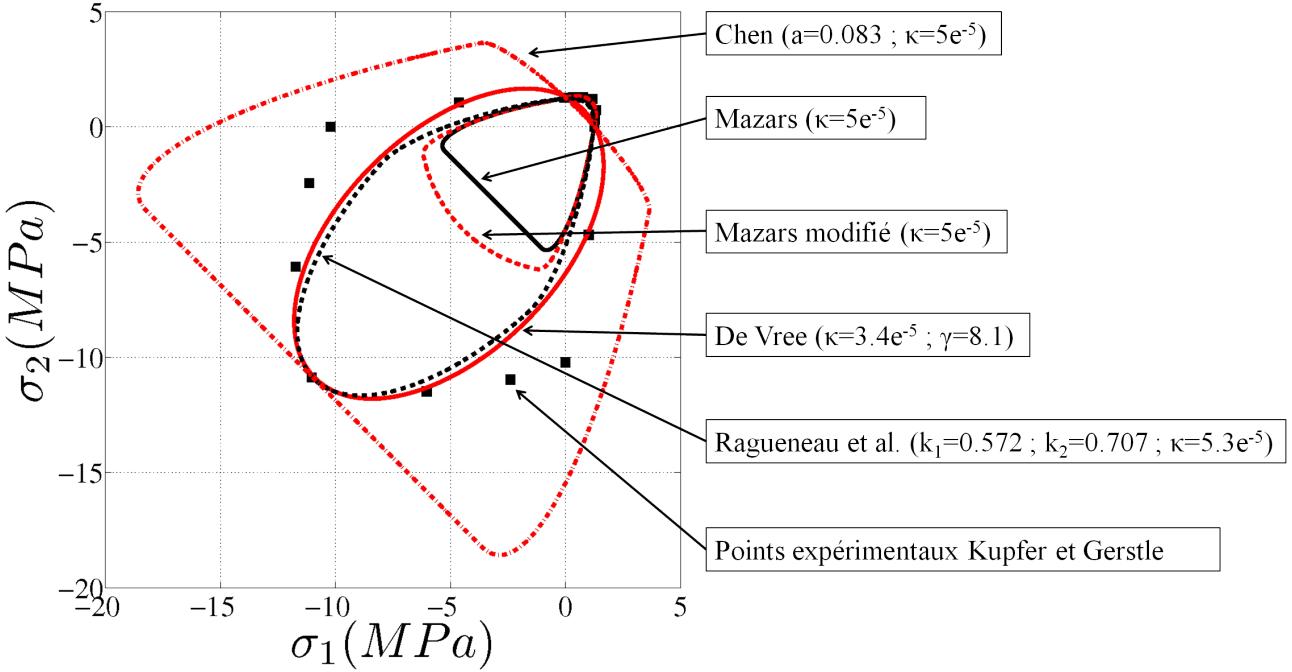


FIG. 1.21 – Surfaces de limite d'élasticité des différents critères.

2.2.2 Critère de Mazars

Le critère de [Mazars, 1984] utilise une déformation équivalente, basée sur les extensions (valeurs propres positives du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$), et est défini comme suit :

$$\varepsilon_{eq} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle_+^2} \quad (1.16)$$

$\langle \cdot \rangle_+$ est l'opérateur appelé partie positive. La partie positive, d'un scalaire x (alors définie par $\langle x \rangle_+ = \max(x, 0)$) ou, d'un tenseur \mathbf{X} , d'ordre 2, correspond à un tenseur $\langle \mathbf{X} \rangle_+$ possédant les valeurs propres $\langle X_I \rangle_+, \langle X_{II} \rangle_+, \langle X_{III} \rangle_+$ positives du tenseur \mathbf{X} dans sa base propre :

$$\langle \mathbf{X} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \max(X_I, 0) & 0 & 0 \\ 0 & \max(X_{II}, 0) & 0 \\ 0 & 0 & \max(X_{III}, 0) \end{pmatrix} \text{ Base propre de } \mathbf{X}$$

La surface limite d'élasticité de Mazars (fig. 1.21) ne permet pas de bien représenter les charge-ments de compression biaxiale.

2.2.3 Critères de Mazars enrichis

Le critère de Mazars a été modifié par Mazars et collaborateurs (éq. 1.17, [Cast3M, 2012]), à l'aide d'une fonction de triaxialité τ_x , définition différente du taux de triaxialité des contraintes $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$ et du rapport de triaxialité utilisé au chapitre suivant $T_x = 3\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{I_1}{\sigma_{eq}} = \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_{eq}}$. La figure 1.21 montre une

amélioration qui n'est pas pleinement satisfaisante.

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa \tau_x \quad \text{avec} \quad \tau_x = -\frac{\text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{\| \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \|} \quad (1.17)$$

$\langle \cdot \rangle_-$ est l'opérateur appelé partie négative. La partie négative d'un scalaire x est définie simplement par $\langle x \rangle_- = \min(x, 0)$. La partie négative d'un tenseur \mathbf{X} , d'ordre 2, correspond à un tenseur $\langle \mathbf{X} \rangle_-$ possédant les valeurs propres X_I négatives du tenseur \mathbf{X} dans sa base propre :

$$\langle \mathbf{X} \rangle_- = \begin{pmatrix} \min(X_I, 0) & 0 & 0 \\ 0 & \min(X_{II}, 0) & 0 \\ 0 & 0 & \min(X_{III}, 0) \end{pmatrix} \quad \text{Base propre de } \mathbf{X}$$

[Ragueneau *et al.*, 2008] proposent plusieurs critères écrits en fonction de la déformation équivalente de Mazars et des deux invariants du tenseur des déformations I_1^e et J_2^e définis par les équations (1.15). L'un de ces critères est présenté sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{eq} = \hat{\varepsilon} + k_1 I_1^e + k_2 \sqrt{J_2^e} \quad (1.18)$$

Sa surface (fig. 1.21) permet de prendre en compte la réponse en bi-compression mais la dissymétrie traction/compression n'est pas très bien modélisée.

Enfin [Chen, 2010] propose un critère basé sur celui de Mazars avec un paramètre "a" permettant de modifier la dissymétrie traction/compression. Ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{a (\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+) + \frac{1-a}{(1-2\nu)^2} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})_+^2} \quad (1.19)$$

Ce paramètre "a" a été identifié sur la réponse en bi-compression. La figure 1.21 montre que la dissymétrie traction/compression est alors trop importante. A l'inverse, si nous identifions ce paramètre sur la réponse en compression, la réponse en bi-compression ne sera pas satisfaisante.

Une remarque générale : la plupart des critères écrits en déformation présentés précédemment sont ouvert sur l'axe hydrostatique négatif.

*Remarque : Les fonctions critères écrites en fonction des forces thermodynamiques [Marigo, 1981; Badel *et al.*, 2007] sont un autre type de critère moins utilisé. Ces fonctions se présentent sous la forme suivante, $f = Y - \kappa$, avec Y la force thermodynamique associée à l'endommagement et κ la fonction de consolidation.*

3 Modèles d'endommagement

La rupture macroscopique est étudiée depuis fort longtemps (déjà par Léonard de Vinci) et de nombreux critères, c'est à dire des fonctions des composantes des contraintes ou des déformations caractérisant la rupture de l'élément de volume, ont été proposés au XX^e siècle. Certains d'entre eux ont été présentés précédemment. Ce n'est qu'assez récemment [Mazars, 1984] que l'on s'est préoccupé de modéliser en 3D la dégradation de la matière (endommagement) qui précède la rupture

macroscopique. Utilisant la mécanique des milieux continus, les modèles d'endommagement sont capables de modéliser la dégradation progressive du matériau en fonction du chargement et ainsi faire apparaître les phénomènes d'adoucissement des contraintes et de localisation de la déformation. La raideur élastique du matériau est affectée par l'endommagement. L'introduction d'une variable interne au sens thermodynamique, appelée variable d'endommagement et notée D , est nécessaire.

3.1 Contrainte effective

Dans le cas d'un endommagement isotrope (endommagement distribué uniformément dans toutes les directions), la présence de microdéfauts dans une section donnée de matériau contribue à la diminution de la surface résistant aux efforts. Ce phénomène conduit directement à la notion de contrainte effective, initialement introduite pour la modélisation du fluage tertiaire des métaux [Kachanov, 1958; Rabotnov, 1969], c'est à dire la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts.

Dire qu'un matériau est endommagé revient à dire que la microstructure de celui-ci n'est plus continue et qu'il existe en son sein des micro-fissures ou des micro-cavités. La surface S peut être ainsi décomposée en deux surfaces distinctes, l'une appelée surface saine ou effective \tilde{S} et l'autre surface endommagée S_D regroupant l'ensemble des micro-défauts. Ainsi la surface sur laquelle s'applique l'effort F n'est plus la surface S mais la surface saine $\tilde{S} = S - S_D$.

A l'aide des définitions de la surface effective et de la contrainte ($\sigma = \frac{F}{S}$ avec F la force et S la surface), la contrainte effective peut facilement être définie :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{F}{S(1 - D)} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.20)$$

Le rapport $D = \frac{S_D}{S}$ est la variable d'endommagement dans le cas unidimensionnel ou dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope. Il représente l'état de micro-fissuration de la matière. L'hypothèse d'isotropie signifie que l'endommagement est indépendant de l'orientation de la surface et est ainsi distribué uniformément dans toutes les directions. Dans le cas contraire, on parlera d'endommagement anisotrope.

Ainsi lorsque le matériau est sain, l'endommagement est nul $D = 0$, et donc la contrainte effective est égale à la contrainte usuelle $\tilde{\sigma} = \sigma$. A l'inverse, la contrainte $\sigma = (1 - D)\tilde{\sigma}$ tend vers zéro à l'approche de la rupture ($D \rightarrow 1$ et en général $\tilde{\sigma}$ ne tend pas vers l'infini [Lemaître *et al.*, 2009]).

Le principe d'équivalence en déformation [Lemaître, 1971] permet de définir une relation entre le module d'Young du matériau endommagé, appelé aussi module d'Young effectif \tilde{E} et celui du matériau sain E :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon \iff \sigma = \tilde{E}\varepsilon \quad \text{avec} \quad \tilde{E} = E(1 - D) \quad (1.21)$$

3.2 Choix de la variable d'endommagement

Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, la variable d'endommagement D est une variable interne pouvant être insérée dans un modèle de comportement. La majorité des modèles d'endommagement sont développés en prenant comme potentiel d'état soit l'énergie libre de Helmholtz $\rho\psi$ (écrit en déformation) [Chaboche, 1981; Marigo, 1981; Murakami et Kamiya, 1996; Halm et Dragon, 1996; Badel *et al.*, 2007] soit l'enthalpie libre de Gibbs $\rho\psi^*$ [Ladeveze, 1983; Lemaître *et al.*, 2000] (écrit en contrainte). Le passage de l'un à l'autre se fait par une transformée de Legendre.

La variable d'endommagement scalaire D a été utilisée dans les premiers modèles d'endommagement isotrope développés pour le béton. Pour obtenir un comportement dissymétrique entre la traction et la compression, certains auteurs introduisent deux variables scalaires d'endommagement [Mazars, 1984; La Borderie, 1991]. Ce choix n'est pas thermodynamiquement admissible, puisqu'une variable d'endommagement représente l'état micro-fissuré intrinsèque au matériau et ne doit pas dépendre du signe du chargement appliqué à celui-ci. D'un point de vue thermodynamique, il est donc préférable d'avoir un modèle d'endommagement avec une seule variable d'endommagement. De plus, l'endommagement isotrope ne permet pas de prendre en compte simplement l'anisotropie induite de l'endommagement (une piste a été proposée par [Matallah et La Borderie, 2006]).

Différentes théories ont été développées en utilisant une variable d'endommagement d'ordre supérieur. Un tenseur d'ordre 4 est le choix le plus naturel pour représenter l'anisotropie induite [Chaboche, 1981; Leckie et Onat, 1981; Krajcinovic, 1985]. Ces derniers auteurs ont montré qu'une variable d'ordre supérieur n'apportent aucune amélioration par rapport à une variable d'ordre 4 (du moins tant que l'on ne modélise pas la refermeture des micro-fissures [Pensée *et al.*, 2002]).

Les expressions de la contrainte effective et du module effectif à partir d'un tenseur d'endommagement \mathbb{D} d'ordre 4 sont les suivantes :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbb{I} - \mathbb{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{E}} = \frac{1}{2} \left[(\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E} + \mathbb{E} : (\mathbb{I} - \mathbb{D})^T \right] \quad (1.22)$$

L'utilisation et l'interprétation d'une variable d'endommagement d'ordre 4 avec ses 81 composantes est très complexe et l'identification rigoureuse des lois d'évolutions de l'endommagement est difficile. Une façon simplifiée de représenter l'anisotropie est de considérer que le réseau de microfissures est orienté en moyenne suivant trois directions orthogonales. Ainsi l'anisotropie est prise en compte par un tenseur symétrique d'endommagement d'ordre 2 [Cordebois et Sidoroff, 1982; Mura-kami, 1988]. Il serait donc plus exact de parler de modèle orthotrope dans la mesure où l'utilisation d'un tel tenseur ne permet de définir que trois valeurs principales de l'endommagement, D_I, D_{II}, D_{III} .

Notre étude se limitera par la suite à celle des modèles d'endommagement anisotrope d'ordre 2.

3.3 Modèles d'endommagement isotrope

Pour se faire une idée sur les modèles d'endommagement isotrope appliqués au matériau "béton", les modèles de type Mazars [Mazars, 1984; La Borderie, 1991; Vree *et al.*, 1995] sont présentés.

3.3.1 Modèle de Mazars

[Mazars, 1984] a formulé le premier modèle tridimensionnel d'élasticité endommageable représentant le comportement du béton. Il introduit une variable d'endommagement scalaire D signifiant que le comportement est isotrope. La dégradation du matériau se traduit par une perte de rigidité élastique dont le module d'Young vaut $\tilde{E} = E(1 - D)$.

La formulation de la loi 3D du modèle de Mazars est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)[2G\boldsymbol{\epsilon}^D + K \text{tr}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{1}] \quad (1.23)$$

avec les modules de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, de compressibilité $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ et $E, \nu, \mathbf{1}$ respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et le tenseur identité d'ordre 2.

L'évolution de la déformation équivalente de Mazars $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle_+^2}$, via sa valeur maximale au cours du chargement $\hat{\varepsilon}_{max} = \max_t \hat{\varepsilon}(t)$ gouverne la progression de l'endommagement. La variable d'endommagement D est considérée comme étant la combinaison d'un endommagement dû à la traction D_t et d'un endommagement dû à la compression D_c définie par :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad (1.24)$$

avec une loi d'évolution (et des paramètres) pour l'endommagement de traction D_t :

$$D_t = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_t)}{\hat{\varepsilon}_{max}} - \frac{A_t}{\exp(B_t(\hat{\varepsilon}_{max} - \kappa_0))} \quad (1.25)$$

et une loi d'évolution (et des paramètres) pour l'endommagement de compression D_c :

$$D_c = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_c)}{\hat{\varepsilon}_{max}} - \frac{A_c}{\exp(B_c(\hat{\varepsilon}_{max} - \kappa_0))} \quad (1.26)$$

$\kappa_0, A_t, B_t, A_c, B_c$ sont cinq paramètres du modèle. L'exposant β est un paramètre supplémentaire permettant de limiter l'endommagement (et donc de garder une raideur importante) en cisaillement et est généralement pris égal à 1,06.

Les coefficients α_t et α_c représentent respectivement le couplage traction-endommagement et compression-endommagement et sont déterminés en distinguant les extensions dues aux parties positives et négatives de la contrainte effective $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}$. Avec,

$$\varepsilon_t = \frac{1+v}{E} \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ - \frac{v}{E} \text{tr} \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_c = \frac{1+v}{E} \langle \tilde{\sigma} \rangle_- - \frac{v}{E} \text{tr} \langle \tilde{\sigma} \rangle_- \mathbf{1} = \varepsilon - \varepsilon_t \quad (1.27)$$

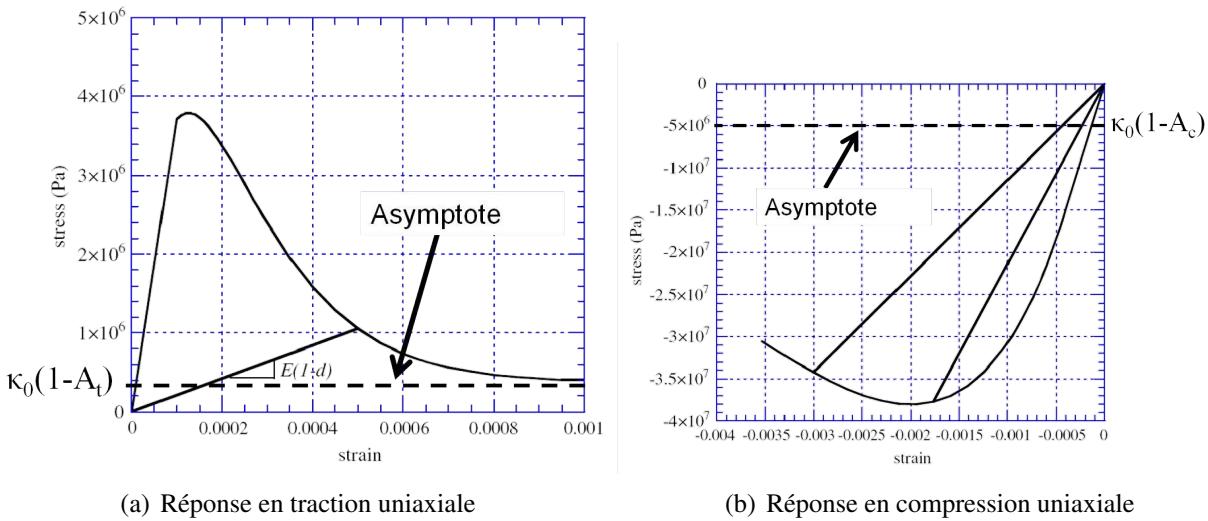
les coefficients α_t et α_c sont définis de la manière suivante :

$$\alpha_t = \sum_{I=1}^3 \left(\frac{\langle \varepsilon_{tI} \rangle_+ \langle \varepsilon_I \rangle_+}{\hat{\varepsilon}^2} \right) \quad \text{et} \quad \alpha_c = \sum_{I=1}^3 \left(\frac{\langle \varepsilon_{cI} \rangle_- \langle \varepsilon_I \rangle_-}{\hat{\varepsilon}^2} \right) \quad (1.28)$$

Dans les cas particuliers de la traction et compression simple, les coefficients ont respectivement pour valeurs $\alpha_t = 1, \alpha_c = 0$ et $\alpha_t = 0, \alpha_c = 1$. Ceci permet d'avoir un endommagement de traction $D = D_t$ et un endommagement de compression $D = D_c$. La figure 1.22 présente les réponses du modèle d'endommagement de Mazars en traction et compression uniaxiales. Il est à noter que le jeu de paramètres considéré ne conduit pas à une contrainte nulle lorsque $D \rightarrow 1$ (ni en traction, ni en compression).

3.3.2 Modèle de La Borderie

Le modèle [La Borderie, 1991] possède le même souci d'admissibilité thermodynamique que celui de Mazars avec la présence de deux variables scalaires d'endommagement différentes (D_t pour l'endommagement en traction et D_c pour l'endommagement en compression) alors que l'endommagement correspond à un état de micro-fissuration qui peut ne pas avoir évolué lors du passage de la traction vers la compression.

FIG. 1.22 – Réponses du modèle de Mazars d'après [Mazars *et al.*, 2006]

Les principales caractéristiques du modèle sont la prise en compte des déformations permanentes (irréversibles ou anélastiques) $\boldsymbol{\epsilon}^{an}$ induites par l'endommagement et la gestion de l'ouverture des fissures et de leur fermeture en introduisant une restauration progressive de la raideur à la fermeture. Une réponse du modèle, (fig. 1.23) d'un cycle traction - compression permet de mettre en évidence ses caractéristiques.

La déformation est partitionnée en déformation élastique et anélastique,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{an} \quad (1.29)$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{E(1-D_t)} + \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{E(1-D_c)} + \frac{\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}) \quad (1.30)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{an} = \frac{\beta_1 D_t}{E(1-D_t)} F(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{\beta_2 D_c}{E(1-D_c)} \mathbf{1} \quad (1.31)$$

où β_1 et β_2 sont des paramètres du modèle permettant de décrire l'évolution des déformations anélastiques. $F(\boldsymbol{\sigma})$ est une fonction permettant de gérer les effets d'ouverture et de refermeture des fissures. Les lois d'évolutions (écrites en forces thermodynamiques associées aux endommagements D_t et D_c) ne sont pas détaillées ici. Ce modèle est surtout utilisé dans sa version uniaxiale.

3.3.3 Modèle de De Vree

Le modèle de [Vree *et al.*, 1995] garde une formulation semblable à celle du modèle de Mazars mais avec une définition de la déformation équivalente $\boldsymbol{\epsilon}_{eq}$ différente, présentée dans le paragraphe 2.2.1 (éq. 1.14). Ce modèle n'utilise qu'une seule variable d'endommagement D , et définit la loi d'évolution de l'endommagement de la façon suivante :

$$D = 1 - \frac{\kappa_0(1-A)}{\boldsymbol{\epsilon}_{eqmax}} + \frac{A}{\exp(B(\boldsymbol{\epsilon}_{eqmax} - \kappa_0))} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{eqmax} = \max_t \boldsymbol{\epsilon}_{eq}(t) \quad (1.32)$$

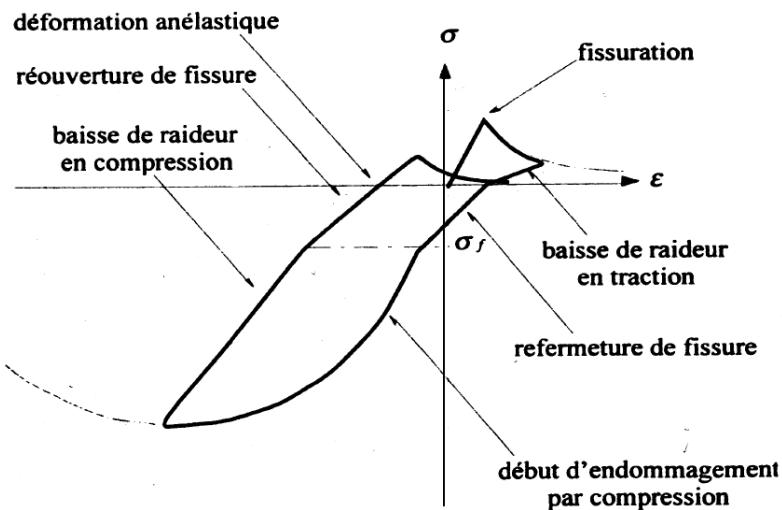


FIG. 1.23 – Réponse d'un chargement alterné uniaxial (traction-compression) du modèle de [La Borde, 1991]

On peut remarquer au passage que la forme générale de l'équation de loi d'évolution D est similaire à celle du modèle de Mazars. Ce modèle ne modélise pas bien la compression ni les chargements confinés si les 3 paramètres du modèle A , B , κ_0 sont identifiés sur la traction.

L'inconvénient majeur des modèles d'endommagement isotropes est d'avoir un endommagement identique pour toutes les directions. Physiquement ce n'est pas le cas, puisque l'endommagement représente un état de micro-fissuration forcément orienté par le chargement.

3.4 Modèles d'endommagement anisotrope

De nombreux modèles d'endommagement anisotrope, décrivant les mêmes mécanismes mais avec un formalisme thermodynamique différent, existent. Parmi eux nous avons les modèles d'endommagement anisotrope induit modélisant l'endommagement avec un tenseur d'ordre 2 [Cordebois et Sidoroff, 1982; Murakami et Kamiya, 1996; Halm et Dragon, 1996; Desmorat, 2004; Badel *et al.*, 2007], ceux modélisant l'endommagement avec un tenseur d'ordre 4 [Chaboche, 1981; Ortiz, 1985; Krajcicovic, 1985; Simo et Ju, 1987]. D'autres modèles comme [Kuhl et Ramm, 1998; Fichant *et al.*, 1999] sont basés sur le modèle de micro-plan de [Bazant et Ozbolt, 1990]. Pour ces derniers, l'idée générale est de représenter les propriétés du matériau à l'aide d'un certain nombre de plans (microplans) définis par leur normale \vec{n} . Chaque microplan possède des équations d'état et des lois de comportement. Pour obtenir la loi de comportement macroscopique, le principe des travaux virtuels est utilisé en intégrant les lois de comportement sur les microplans. Ce type de modèle possède deux difficultés, l'une est l'établissement des lois de comportement sur les microplans afin de rendre compte notamment des chargements confinés et l'autre est le nombre important de microplans à considérer.

3.4.1 Modèle de Godard

Basé sur le modèle de [Badel, 2001], les principales caractéristiques du modèle de [Godard, 2005] sont les suivantes :

- Utilisation de deux variables d'endommagement (l'une tensorielle d'ordre 2 en traction \mathbf{D} , et l'autre scalaire en compression d)
 - Prise en compte de l'anisotropie induite
 - Prise en compte du comportement unilatéral (refermeture des micro-fissures en compression)
- Le potentiel d'état correspondant est l'énergie libre de Helmholtz $\rho\psi$:

$$\begin{aligned}\rho\psi = & \frac{1}{2} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \left[\langle \text{tr} \Phi \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2 + (1-d)^2 \langle \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rangle_-^2 \right] \\ & + G \left[\frac{1}{4} \text{tr} \left(\langle \Phi \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \Phi \rangle_+^2 \right) + (1-d)^2 \text{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_-^2) \right] \\ & + I_{[0,\infty[}(\min(\Phi_i)) + I_{]-\infty,0]}(d) + \rho\psi^{blocke}(\Phi, d)\end{aligned}\quad (1.33)$$

$$\rho\psi^{blocke}(\Phi, d) = \frac{1}{2} (\gamma_\Phi \text{tr}(\mathbf{D}^2) + \gamma_d d^2) \quad (1.34)$$

$\Phi = \mathbf{1} - \mathbf{D}$ est le tenseur d'intégrité du matériau en traction. L'endommagement anisotrope est introduit dans les termes positifs de l'énergie libre, d est un scalaire relatif à l'endommagement créé en compression et est introduit dans les termes à déformations négatives de l'énergie libre. $I_{[0,\infty[}(\min(\Phi_i))$ et $I_{]-\infty,0]}(d)$ sont des fonctions indicatrices assurant que l'endommagement reste borné [Badel *et al.*, 2007].

L'énergie bloquée $\rho\psi^{blocke}$, exprimée en fonction du second invariant du tenseur d'endommagement et définie par l'équation (1.34) permet de mieux contrôler l'évolution de l'endommagement en fonction du chargement. A l'aide des paramètres γ_Φ et γ_d , les pentes post-pic des réponses contrainte-déformation en traction et en compression peuvent être ajustées.

Les lois d'états, permettant de déterminer l'expression de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en dérivant l'énergie libre par rapport aux déformations, ainsi que les expressions des forces thermodynamiques \mathbf{F}^Φ et y^d associées aux endommagements sont présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = & \left(K - \frac{2G}{3} \right) \left[\langle \text{tr} \Phi \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ \Phi + (1-d)^2 \langle \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rangle_- \mathbf{1} \right] \\ & + G \left[\frac{1}{2} \text{tr} \left(\langle \Phi \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \Phi \rangle_+ \Phi + \Phi \langle \Phi \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \Phi \rangle_+ \right) + 2(1-d)^2 \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_- \right]\end{aligned}\quad (1.35)$$

$$\mathbf{F}^\Phi = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} = -\left(K - \frac{2G}{3} \right) \langle \text{tr} \Phi \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ \boldsymbol{\epsilon} - \frac{G}{2} \left[\langle \Phi \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \Phi \rangle_+ \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \langle \Phi \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \Phi \rangle_+ \right] + \gamma_\Phi \mathbf{D} \quad (1.36)$$

$$y^d = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) (1-d) \langle \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rangle_-^2 + 2G(1-d) \text{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_-^2) - \gamma_d d \quad (1.37)$$

Chaque force thermodynamique est constituée de deux parties. La première dépend de la déformation et de l'endommagement alors que la deuxième partie (dérivée de l'énergie bloquée) dépend uniquement de l'endommagement.

La fonction critère couplant les deux variables d'endommagement est la suivante :

$$f = \sqrt{\alpha \|\langle \mathbf{F}^\Phi \rangle_-^2\|^2 + (1-\alpha) \|\langle y^d \rangle_+^2\|^2} - \kappa(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (1.38)$$

avec $\kappa(\boldsymbol{\epsilon})$ la fonction seuil suivante, écrite en déformation :

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \langle \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rangle_- \arctan \left(-\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \rangle_-}{\kappa_2} \right) \quad (1.39)$$

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, l'évolution des variables internes suit la loi d'écoulement associée au critère via le principe de normalité ($\dot{\lambda}$ est le multiplicateur d'endommagement déterminé par la condition de cohérence $f = 0$ & $\dot{f} = 0$),

$$\dot{\Phi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^\Phi} = \dot{\lambda} \frac{\alpha \langle \mathbf{F}^\Phi \rangle_-}{\sqrt{\alpha \|\langle \mathbf{F}^\Phi \rangle_- \|^2 + (1 - \alpha) \|\langle y^d \rangle_+\|^2}} \quad (1.40)$$

$$\dot{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial y^d} = \dot{\lambda} \frac{(1 - \alpha) \langle y^d \rangle_+}{\sqrt{\alpha \|\langle \mathbf{F}^\Phi \rangle_- \|^2 + (1 - \alpha) \|\langle y^d \rangle_+\|^2}} \quad (1.41)$$

La figure 1.24 permet d'observer les réponses en traction et compression de ce modèle tandis que la figure 1.25 montre la réponse du modèle pour des chargements biaxiaux. Ce modèle élasto-endommageable avec ses 8 paramètres (E , ν , α , κ_0 , κ_1 , κ_2 , γ_Φ , γ_d) permet de prendre en compte l'anisotropie induite, les chargements alternés (refermeture des micro-fissures avec restitution totale de la raideur) et le comportement biaxial du béton. Le choix de deux variables d'endommagement n'est thermodynamiquement pas admissible puisque une variable d'endommagement est une variable d'état (au sens de la thermodynamique) et traduit un état de micro-fissuration. Sa définition ne peut dépendre du signe de la déformation [Ladevèze et Lemaître, 1984; Lemaître et Desmorat, 2005]. De plus, tel quel, ce modèle ne permet pas de prendre en compte l'effet de vitesse de déformation du béton. L'implantation numérique de cette loi de comportement fait appel à un schéma itératif (de type Newton) local, (pour le calcul implicite de la contrainte et de l'endommagement à chaque point de Gauss) et par conséquent a un coût de calcul relativement important.

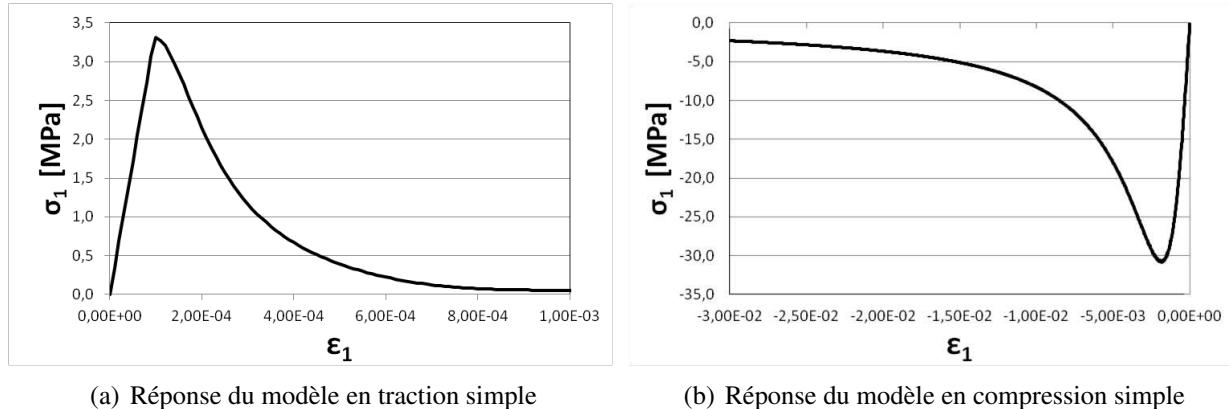


FIG. 1.24 – Réponses numériques du modèle [Godard, 2005] pour des chargements uniaxiaux

3.4.2 Modèle de Desmorat initial

Un modèle anisotrope a été proposé par Desmorat (2004) couplant endommagement et élasticité, afin de n'utiliser qu'une seule variable d'endommagement tensorielle, \mathbf{D} , d'ordre 2. Le potentiel thermodynamique $\rho\psi^*$ proposé sous la forme de l'enthalpie libre de Gibbs par [Lemaître *et al.*, 2000] est utilisé dans ce modèle (éq. 1.42). Pour le béton sollicité de manière monotone, il est souvent pertinent (mathématiquement plus simple) de considérer un endommagement anisotrope avec effet unilatéral

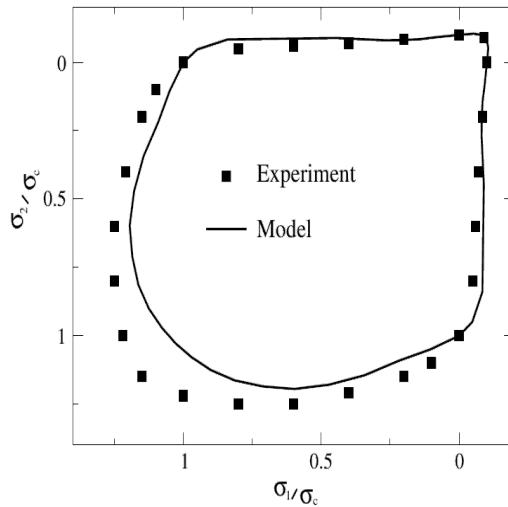


FIG. 1.25 – Surfaces de rupture en contrainte plane du modèle de [Godard, 2005] et des essais biaxiaux de [Kupfer *et al.*, 1969]

uniquement écrit sur la contrainte hydrostatique $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ ou de manière équivalente sur la trace du tenseur des contraintes.

Ce potentiel a initialement été décomposé en une partie déviatorique écrite en fonction du tenseur d'endommagement \mathbf{D} et une partie hydrostatique écrite en fonction d'un scalaire (premier invariant) du tenseur d'endommagement $\text{tr} \mathbf{D}$ [Lemaître *et al.*, 2000],

$$\rho \psi^* = \frac{1+v}{2E} \text{tr} (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D) + \frac{1-2v}{6E} \frac{(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2}{1-\eta D_H} \quad (1.42)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}$ le déviateur des contraintes, $\mathbf{H} = \Phi^{-1/2} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ et où l'endommagement hydrostatique est défini comme $D_H = \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3}$. E et v sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson, η est un paramètre matériau dit de sensibilité hydrostatique.

Dans le cas d'un chargement hydrostatique négatif (tri-compression), l'endommagement n'intervient pas dans la partie hydrostatique car les mécanismes observés sont plus du domaine de la poro-plasticité que de l'endommagement. C'est pourquoi le potentiel d'état négligeant ces mécanismes est réécrit de la manière suivante :

$$\rho \psi^* = \frac{1}{4G} \text{tr} (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D) + \frac{1}{18K} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2}{1-\eta D_H} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_-^2 \right) \quad (1.43)$$

Affectant la valeur du module de compressibilité effectif $\tilde{K} = K(1 - \eta D_H)$ aux contraintes hydrostatiques positives, le paramètre η , lorsqu'il est pris égal à 3 (cas des métaux), permet notamment d'avoir une contrainte nulle lorsque l'endommagement est égal à 1 pour un chargement en traction. L'étude de ce paramètre sera détaillée au chapitre 2.

La loi d'élasticité couplée à l'endommagement est alors :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E} (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H})^D + \frac{1-2\nu}{3E} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{1-\eta D_H} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \right) \mathbf{1} \quad (1.44)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (1.45)$$

Elle définit la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, symétrique et indépendante des caractéristiques élastiques du matériau (rappelons que $(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot) \mathbf{1}$ signifie "déviateur"),

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \right]^D + \frac{1}{3} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{1-\eta D_H} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \right) \mathbf{1} \quad (1.46)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement est le tenseur taux de restitution de densité d'énergie \mathbf{Y} déterminée par la relation suivante :

$$\mathbf{Y} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{D}} \quad (1.47)$$

Etant donné la complexité de ce tenseur et l'inutilité de celui-ci pour décrire la suite de ce modèle, son expression ne sera pas présentée dans ce manuscrit mais est disponible dans [Lemaître et Desmorat, 2005; Lemaître *et al.*, 2009].

La fonction critère utilisée (éq. 1.48) est fondée sur le critère de Mazars avec un endommagement tensoriel d'ordre 2 [Mazars *et al.*, 1990].

$$f = \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \kappa(\text{tr} \mathbf{D}) \quad \text{avec} \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+} \quad (1.48)$$

$$\text{ou encore } f = g(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) - \text{tr} \mathbf{D} \quad (1.49)$$

où la fonction de consolidation κ est prise égale à (avec $g = \kappa^{-1}$) :

$$\kappa(\text{tr} \mathbf{D}) = a \cdot \tan \left(\frac{\text{tr} \mathbf{D}}{aA} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \quad g(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) = aA \left[\arctan \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{a} \right) - \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \quad (1.50)$$

κ_0 , a , A sont trois paramètres du modèle, avec κ_0 le seuil d'endommagement en déformation pour la traction simple (les paramètres a et A sont sans dimension). La loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2 \quad (1.51)$$

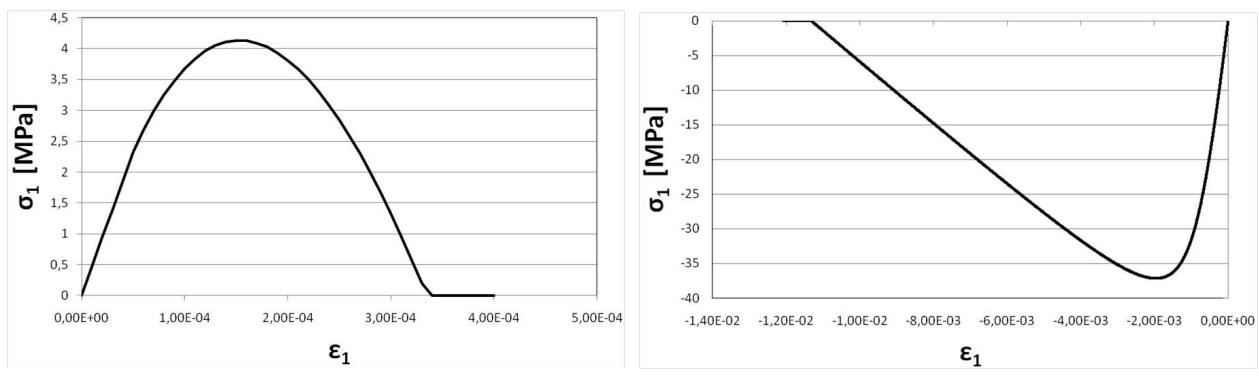
est écrite en fonction de la partie positive (ici au carré) du tenseur des déformations. Elle permet de rendre compte de l'orientation des fissures observées expérimentalement en traction comme en compression (schématisées sur la figure 1.26), et ce avec la considération d'une variable d'endommagement.

Les réponses analytiques du modèle initial pour deux sollicitations simples (la traction simple et la compression simple) suivant la direction 1 sont présentées sur la figure 1.27. Tandis que [Ragueneau *et al.*, 2008] ont tracé la surface de rupture et d'élasticité du modèle (fig. 1.28(b)) et l'ont comparé aux points expérimentaux de [Kupfer et Gerstle, 1973; Van Mier, 1984], ainsi qu'au modèle de [Mazars, 1984] (fig. 1.28(a)). On remarque, à travers la surface de rupture de ces deux modèles, qu'ils ne sont pas adaptés aux chargements confinés comme la bi-compression. La forme de cette surface vient du

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} = \varepsilon_{II} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{II} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III} = D_{II} \end{pmatrix}$$

FIG. 1.26 – Tenseur d'endommagement associé à un état de fissuration en traction simple (à gauche) et en compression simple (à droite)



(a) Réponse du modèle en traction simple

(b) Réponse du modèle en compression simple

FIG. 1.27 – Réponses analytiques du modèle pour des chargements uniaxiaux

E	42 GPa
v	0,2
κ_0	5.10^{-5}
A	5000
a	$2,93.10^{-4}$

TAB. 1.2 – Paramètres du modèle d'endommagement anisotrope, d'après [Desmorat, 2004]

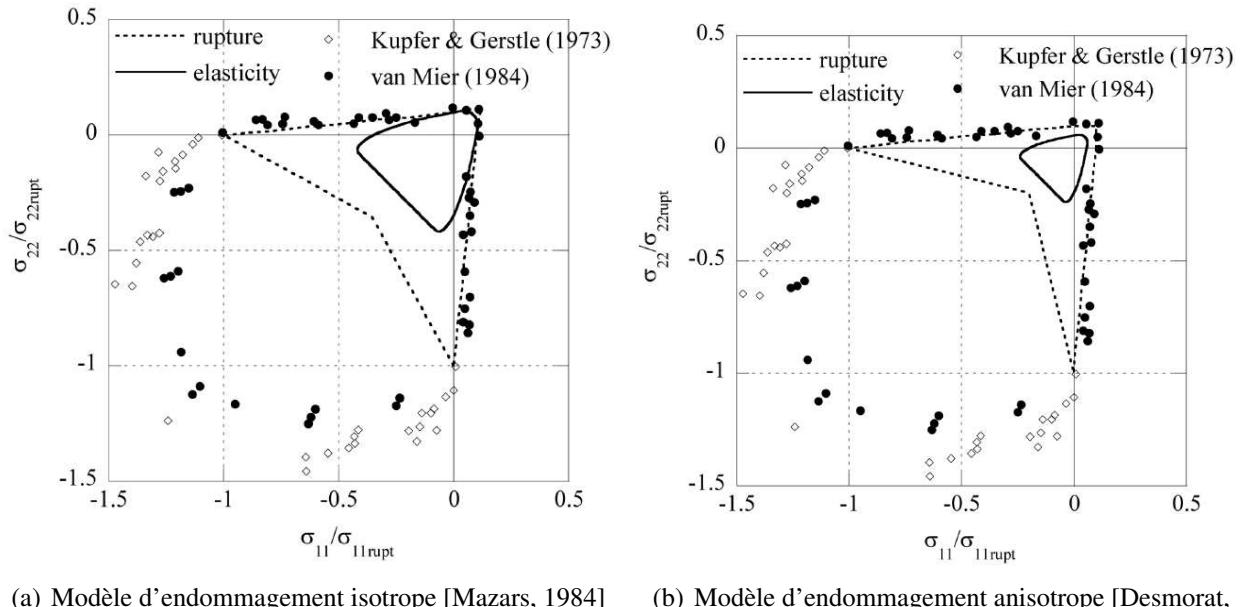


FIG. 1.28 – Surfaces d'élasticité et de rupture de 2 modèles d'endommagement comparées à différents résultats expérimentaux d'après [Ragueneau *et al.*, 2008]

point commun de ces deux modèles, c'est à dire de la déformation équivalente de Mazars $\hat{\epsilon}$. Pour obtenir ces réponses, les valeurs des paramètres du modèle sont celles présentées dans le tableau 1.2.

On constate (figure 1.27) que l'anisotropie induite du modèle est bien représentée, par rapport à l'observation des résultats expérimentaux, avec une résistance en traction 10 fois moins importante qu'en compression. Le modèle reproduit la dissymétrie traction-compression du comportement du béton grâce à une variable d'endommagement tensorielle, \mathbf{D} , d'ordre 2 gouvernée par les extensions (déformations positives).

Les chargements dynamiques donnent lieu par nature à des phénomènes de propagation d'ondes qui conduisent à des états alternés de sollicitation. Ce modèle initial, ne permet pas de modéliser le comportement du béton pour un chargement cyclique (figure 1.29). Une partie de la raideur est récupérée, mais l'apparition de l'endommagement en compression est beaucoup trop tardive [Souid, 2008; Lebon, 2011]. La récupération partielle de raideur provient du fait qu'entre la partie hydrostatique et déviatorique du potentiel, seule la partie hydrostatique est partitionnée en 2 avec une partie positive et une partie négative (éq. 1.43). Ces deux parties ne peuvent être activées simultanément car elles dépendent du signe de $\text{tr}\sigma$. La partie positive $\langle \text{tr}\sigma \rangle_+$ est activée lorsque $\text{tr}\sigma$ est positive (en traction par exemple) et désactivée lorsque $\text{tr}\sigma$ est négative (en compression par exemple). C'est le cas inverse pour $\langle \text{tr}\sigma \rangle_-$. Une restauration totale de la raideur est possible, mais nécessite de réécrire le potentiel thermodynamique de ce modèle, en considérant des parties positives et négatives "spéciales" σ_+^D , σ_-^D sur la partie déviatorique [Ladeveze, 1983; Lemaître et Desmorat, 2005; Souid, 2008].

L'apparition trop tardive de l'endommagement pour des sollicitations cycliques provient du fait que la fonction consolidation κ de la fonction critère a pour argument $\text{tr}\mathbf{D}$. Ainsi lorsque nous passons en compression lors du chargement cyclique, $\text{tr}\mathbf{D}$ reste constant (et ne reprend pas la valeur initiale nulle) dans la phase élastique, ce qui repousse la surface seuil d'endommagement beaucoup trop loin. Pour résoudre ce problème, la fonction de consolidation est réécrite en remplaçant $\text{tr}\mathbf{D}$ par

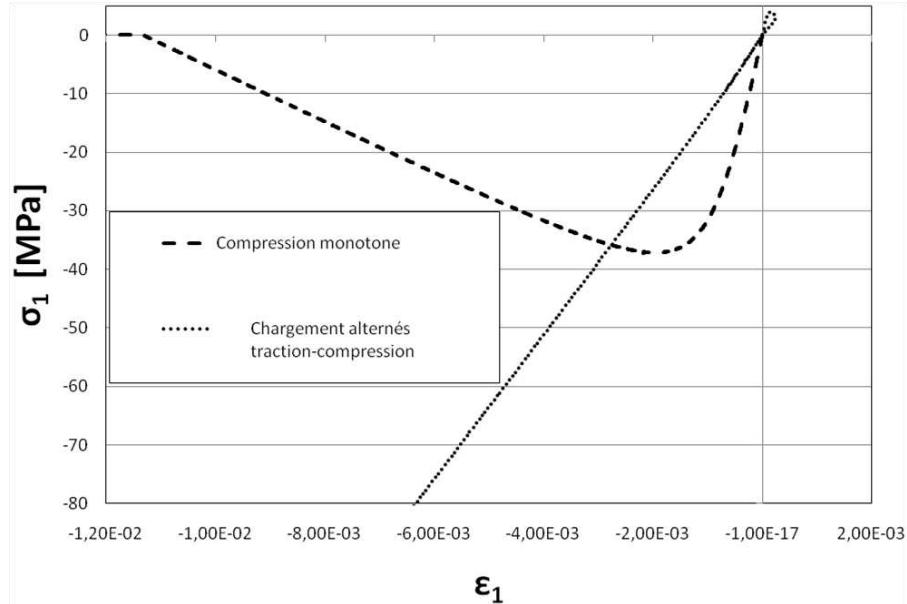


FIG. 1.29 – Réponses pour un chargement monotone en compression et un chargement alterné (chargement en traction suivi d'un chargement en compression)

la projection du tenseur d'endommagement sur le tenseur des déformations positives normé par sa plus grande valeur propre afin de retrouver le comportement en traction monotone et compression monotone [Souid *et al.*, 2009; Lemaître *et al.*, 2009]. Cette fonction de l'endommagement (éq. 1.53), nommée “endommagement actif” et notée d_{act} , est introduite dans la fonction critère (éq. 1.52) et l'on modifie légèrement l'expression de la loi d'évolution (éq. 1.54).

$$f = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa(d_{act}) \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad (1.52)$$

Avec :

$$d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\boldsymbol{\varepsilon}_I)} \quad (1.53)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ \quad (1.54)$$

Cet apport permet de reproduire, sans variables supplémentaires et sans augmenter le coût de calcul, le comportement unilatéral (figure 1.30), proche de celui observé expérimentalement (sans les déformations permanentes néanmoins). Il a été étudié et utilisé dans les thèses de A. Souid [Souid *et al.*, 2009], M. Chambart [Chambart, 2009] et G. Lebon [Lebon, 2011]. Il évite l'introduction d'un écrouissage cinématique, délicat à définir pour les géomatériaux au comportement dissymétrique traction/compression.

4 Modèles multi-surfaces

La diminution de la raideur élastique et le développement de déformations permanentes ou irréversibles (figure 1.31(a)) sont les phénomènes principaux observés expérimentalement lors de décharges

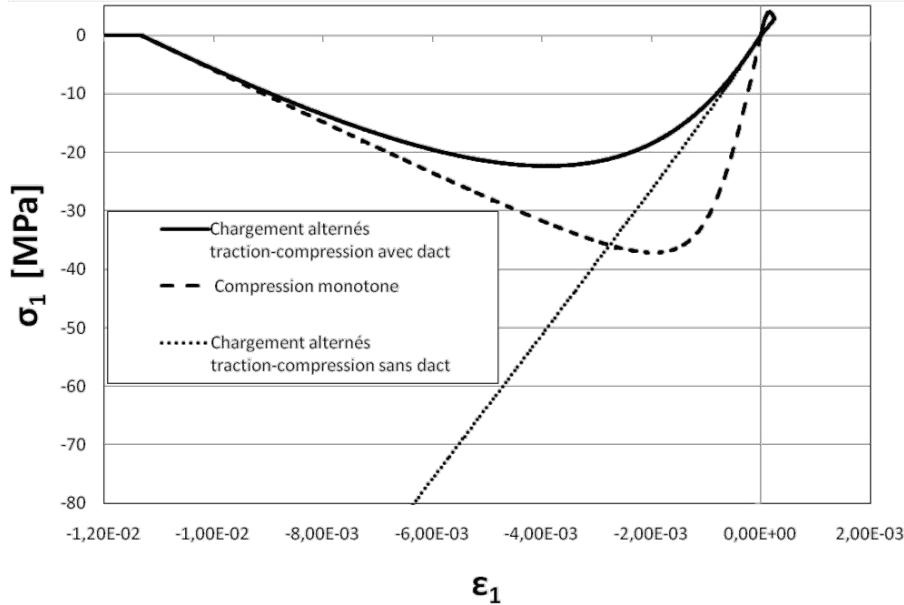


FIG. 1.30 – Réponses pour un chargement monotone en compression et un chargement alterné (chargement en traction jusqu'à $D_1=0.8$, suivi d'un chargement en compression jusqu'à $D_2=D_3=1$) avec et sans d_{act}

après une charge endommageante. Les modèles d'endommagement, présentés précédemment, permettent de reproduire la diminution de rigidité élastique avec une pente de décharge passant toujours par l'origine (fig. 1.31(b)). Si le caractère adoucissant est bien représenté, les déformations irréversibles observées expérimentalement lors d'une décharge sont négligées. Les modèles de plasticité prennent naturellement en compte ces phénomènes irréversibles mais sont incapables de reproduire la diminution de raideur caractéristique d'une micro-fissuration et possèdent ainsi comme caractéristique d'avoir toujours une pente de décharge élastique constante égale au module d'Young (fig. 1.31(c)).

La combinaison des deux modélisations paraît naturelle afin d'allier les avantages des deux formulations. Ce couplage est réalisé via l'introduction de nouvelles variables internes : ϵ^p pour les déformations permanentes et éventuellement des variables pour l'écrouissage isotrope et cinématique du domaine d'élasticité [Lemaître et Chaboche, 1985; Ju, 1989; Ulm, 1994; Burlion, 1997; Jason *et al.*, 2006]. De nombreux codes de calculs utilisent ce genre de modèle comme par exemple le code éléments finis LS DYNA avec le modèle élasto-plastique endommageable (isotrope) [Murray, 2007b,a]. L'un des inconvénients de ce genre de modèle est le nombre conséquent de paramètres (37 pour le modèle LS DYNA) et la gestion numériquement délicate de plusieurs fonctions critères.

Un exemple de modèle multi-surfaces couplant endommagement et plasticité sera présenté dans la suite de ce chapitre. Il s'agit du modèle visco-plastique visco-endommageable développé par [Gatuingt, 1999; Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002].

Afin d'éviter un couplage entre l'endommagement et la plasticité, d'autres modèles, comme celui de [La Borderie, 1991] exposé précédemment ou encore de Lebon [Lebon, 2011] dans le cadre de l'endommagement anisotrope, intègrent dans leur formulation un terme de déformation irréversible lié aux variables d'endommagement, sans pour autant introduire de variables supplémentaires [Hermann et Kestin, 1988]. Inversement, l'endommagement et son anisotropie peuvent être obtenus

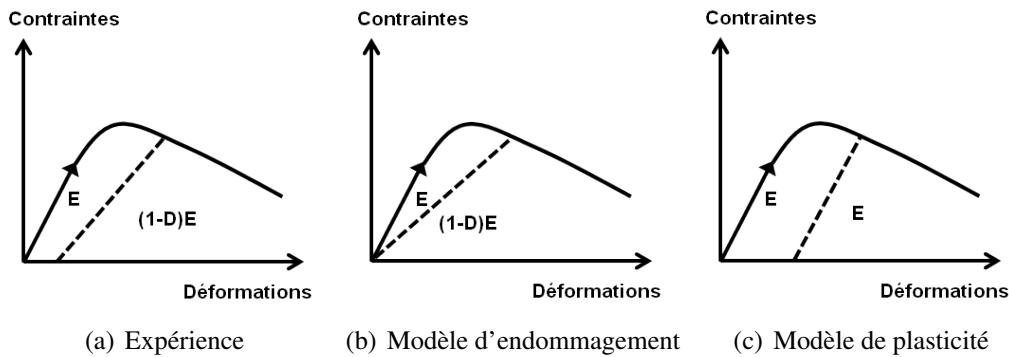


FIG. 1.31 – Comparaison des pentes de décharges dans le cas uniaxial entre l’expérimental 1.31(a) et 2 modélisations (endommagement 1.31(b) ou plasticité 1.31(c))

comme fonction des déformations irréversibles [Matallah, 2006; Matallah et La Borderie, 2009].

5 Modélisation de l'effet de vitesse

La partie 1.6 a mis en avant l’importance de prendre en compte dans la modélisation l’influence de la vitesse de déformation sur le comportement du béton. Trois grandes catégories de modèles peuvent être distinguées pour représenter cet effet de vitesse.

5.1 Modèles visco-plastiques

La formulation générale d’un modèle de visco-plasticité est définie de façon quasi-identique à celle d’un modèle de plasticité. Seules les règles de détermination du multiplicateur plastique λ sont modifiées. Effectivement, en plasticité, l’état de contrainte correspond soit à un état élastique $f(\sigma) < 0$ (à l’intérieur de la surface d’élasticité), soit à un état plastique $f(\sigma) = 0$ (sur la surface d’élasticité). Cela change lorsque l’on prend en compte l’influence de la vitesse de déformation, car tous les points sur ou à l’extérieur de cette surface correspondent au domaine visco-plastique $f(\sigma) = \sigma_v \geq 0$ où σ_v est la contrainte visqueuse. La règle de normalité définit toujours l’évolution temporelle des déformations irréversibles $\dot{\epsilon}^p$ lorsque l’état de contrainte correspond à un état visco-plastique $f(\sigma) \geq 0$ (la normalité est en générale faite sur le potentiel d’évolution noté F).

Le modèle de Norton-Perzyna [Perzyna, 1966; Lemaitre et Chaboche, 1985] donne une expression de la contrainte visqueuse σ_v et du multiplicateur visco-plastique $\lambda = \Phi(f)$ s’écrivant sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}^p = \Phi(f) \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (1.55)$$

$$\Phi(f) = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle_+^N \quad \sigma_v = K_N \Phi(f)^{1/N} \quad (1.56)$$

où K_N , N sont les paramètres de la loi de viscosité. A savoir que le multiplicateur plastique n’est plus défini par la condition de cohérence ($f = 0$ & $\dot{f} = 0$) puisque l’état de contrainte n’est plus forcément sur la surface de charge.

Notons qu'il existe une formulation moins utilisée [Duvaut et Lions, 1972], mais qui contrairement à la visco-plasticité de type Norton-Perzyna, peut être associée à des surfaces de charge possédant des points anguleux (Tresca, Mohr-coulomb).

5.2 Modèles visco-endommageables

Pour introduire de la viscosité dans des modèles d'endommagement, deux grandes méthodes sont généralement utilisées. La première consiste à faire dépendre la limite d'élasticité (égale au seuil d'endommagement) de la vitesse de déformation. Selon [Pontiroli, 1995], pour un chargement en quasi-statique, ce seuil d'endommagement reste constant ($\kappa = \kappa_0$), alors qu'en dynamique la formulation du seuil $\kappa = \kappa_{dyn}$ dépend de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$.

La deuxième méthode, plus couramment utilisée, est à l'image des modèles de visco-plasticité. La loi d'évolution de l'endommagement est modifiée afin d'autoriser les états de charge à l'extérieur de la surface seuil. Ainsi, pour reproduire l'effet de vitesse, une loi visqueuse sous la forme $D_v = D_v(\dot{\epsilon}_{eq})$ est introduite dans la fonction critère de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f &= g(\dot{\epsilon}_{eq}) - D < 0 && \text{élasticité} \\ f &= g(\dot{\epsilon}_{eq}) - D = D_v \geq 0 && \text{visco-endommagement} \end{aligned} \quad (1.57)$$

$\dot{\epsilon}_{eq}$ est une déformation équivalente, par exemple égale à celle de Mazars $\hat{\epsilon}$ du paragraphe 2.2.2. La loi de viscosité de type puissance est classiquement utilisée [Dubé, 1994] :

$$D_v = m\dot{D}^{1/n} \quad (1.58)$$

avec m et n les paramètres de viscosité. Un autre type de loi (dite à effet retard ou à taux d'endommagement limité [Allix et Deü, 1997]) borne la vitesse d'endommagement en posant

$$D_v = -\frac{1}{b_v} \ln \left(1 - \frac{\dot{D}}{\dot{D}_\infty} \right) \quad (1.59)$$

\dot{D}_∞ est un paramètre du modèle représentant la vitesse de saturation de la vitesse d'endommagement. Tandis que le paramètre b_v est sans dimension. En introduisant cette dernière loi de viscosité dans leur modèle et en remplaçant D par l'endommagement actif d_{act} (éq. 1.53), [Chambart, 2009; Desmorat *et al.*, 2010] ont pu prendre en compte l'influence de la vitesse de sollicitation, observée expérimentalement pour le béton. Pour les vitesses élevées de sollicitation en compression, l'effet de vitesse peut être attribué aux effets inertIELS. Ainsi, un effet de vitesse pour les chargements de traction est seulement introduit à l'aide de la fonction Heaviside $\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})$ telle que $\mathcal{H} = 1$ si $\text{tr}\boldsymbol{\epsilon} > 0$, $\mathcal{H} = 0$ sinon,

$$f = g(\hat{\epsilon}) - d_{act} \quad \left\{ \begin{array}{l} f < 0 : \text{élasticité} \\ f = D_v(\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\dot{d}_{act}) \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{array} \right.$$

Avec l'expression (1.59) précédente, on aboutit à la loi d'évolution de l'endommagement (actif ici) :

$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\dot{d}_{act} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b_v(g(\hat{\epsilon}) - d_{act}))] \quad (1.60)$$

où \dot{D}_∞ , b_v sont, rappelons le, deux paramètres "matériaux". L'augmentation de la résistance en traction obtenue avec une telle modélisation est observable sur la figure 1.32 pour différentes vitesses de sollicitation.

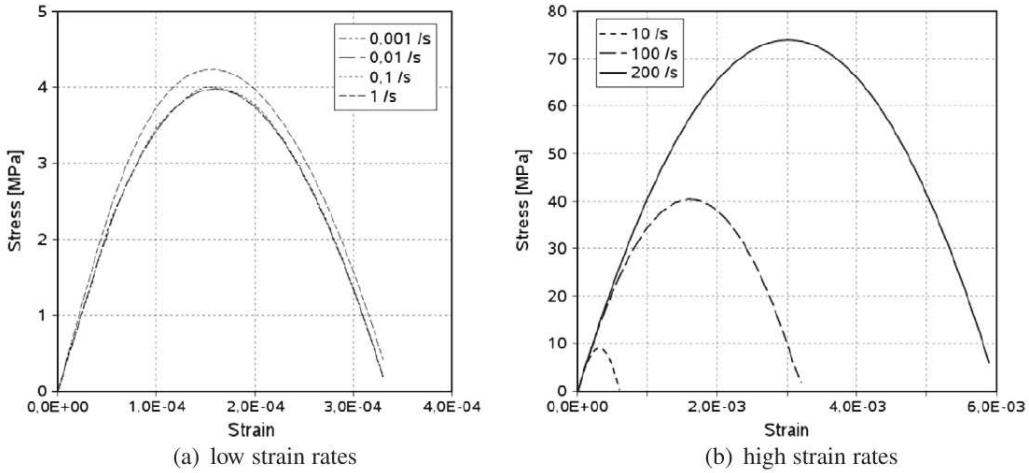


FIG. 1.32 – Réponses contrainte-déformation à différentes vitesses de déformation pour le modèle d'endommagement anisotrope initial, d'après [Desmorat *et al.*, 2010] avec $b_v = 1$ et $\dot{D}_\infty = 50000\text{s}^{-1}$

5.3 Modèles visco-plastiques visco-endommageables

Après avoir présenté les modèles visco-plastiques et les modèles visco-endommageables séparément, le couplage entre ces 2 types de modèle est défini au travers de la loi de comportement développée par [Gatuingt, 1999] pour des applications d'impact sur des structures en béton. La partie visco-endommagement fait intervenir un endommagement de compression et un endommagement de traction, choix discutable d'un point de vue thermodynamique rappelons le. Elle permet de représenter de façon réaliste le comportement en compression simple tout en conservant une bonne description de ce qui se passe en traction. Les effets de vitesse introduits dans la partie endommagement permettent de représenter les observations expérimentales en dynamique présentées au début de ce chapitre. Quant à la partie visco-plastique, elle permet de représenter les déformations irréversibles alors que l'effet de vitesse permet de prendre en compte le phénomène d'augmentation de la résistance en compression triaxiale (phénomène de compaction en dynamique).

Concernant la partie visco-endommagement, la loi de comportement utilisée est une loi élasto-visco-endommageable faisant intervenir un endommagement scalaire D . La loi d'élasticité s'écrit (la loi de comportement utilise la notion de contrainte effective),

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} = K(\phi) \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{1} + 2G(\phi) \boldsymbol{\epsilon}^{eD} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (1.61)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\epsilon}^e$, $\boldsymbol{\epsilon}^p$ et $\boldsymbol{\epsilon}^{eD}$ sont respectivement les déformations totale, élastique, plastique et élastique déviatorique. $K(\phi)$ et $G(\phi)$, respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement, sont définis par homogénéisation de [Mori et Tanaka, 1973] permettant ainsi de prendre en compte la porosité du matériau. Ces modules, fonction de la porosité ϕ et de K_M et G_M respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité de la matrice sans vide, sont définis ci-dessous :

$$K(\phi) = \frac{4K_M G_M (1-\phi)}{4G_M + 3K_M \phi} \quad G(\phi) = \frac{G_M (1-\phi)}{1 + \frac{6K_M + 12G_M}{9K_M + 8G_M} \phi} \quad (1.62)$$

L'endommagement D est formulé identiquement au modèle de Mazars avec une combinaison

linéaire d'un endommagement de compression D_c et un endommagement de traction D_t :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad (1.63)$$

α_c et α_t sont fonction du type de chargement (cf. éq. 1.27 & 1.28 avec ici $\beta = 1$). Avoir deux variables d'endommagement distinctes a pour conséquence d'utiliser plusieurs expressions en double comme les surfaces seuils ou encore les lois d'évolution de l'endommagement. Pour alléger l'écriture, une seule équation avec en exposant ou en indice "t,c" sera présentée ("t" pour traction et "c" pour compression).

Les fonctions seuils d'endommagement, découlant des travaux de [Mazars, 1984; La Borderie, 1991], sont écrites en fonction des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^e$:

$$f_D^{t,c}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \kappa_0 - \frac{1}{a_{t,c}} \left(\frac{D_{t,c}}{1 - D_{t,c}} \right)^{1/b_{t,c}} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+} \quad (1.64)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ la déformation équivalente élastique, κ_0 le seuil initial d'endommagement, a_t , a_c , b_t , et b_c quatre paramètres matériaux.

L'effet de vitesse dans les deux lois d'évolution de l'endommagement (compression et traction) est basé sur le modèle visco-endommageable développé par [Dubé, 1994]. La forme de ces lois est la suivante :

$$\dot{D}_{t,c} = \left\langle \frac{f_D^{t,c}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)}{m_{D_{t,c}}} \right\rangle_+^{n_{D_{t,c}}} = \left\langle \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \kappa_0 - \frac{1}{a_{t,c}} \left(\frac{D_{t,c}}{1 - D_{t,c}} \right)^{1/b_{t,c}}}{m_{D_{t,c}}} \right\rangle_+^{n_{D_{t,c}}} \quad (1.65)$$

avec n_{D_t} , n_{D_c} , m_{D_t} et m_{D_c} , les 4 paramètres "matériau" permettant de donner plus (traction) ou moins (compression) d'importance à la vitesse de déformation.

Le critère de Gurson modifié (GTN), présenté au début de ce chapitre (éq. 1.10) est utilisé dans le modèle et rappelé ici :

$$f = f_{GTN}(\boldsymbol{\sigma}, \phi) = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2q_1\phi \cosh \left(q_2 \frac{\text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2\sigma_M} \right) - (1 + (q_3\phi)^2) \quad (1.66)$$

La loi de visco-plasticité s'appuie sur la formulation de la visco-plasticité de type Norton-Perzyna présentée précédemment :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \Phi(f) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.67)$$

avec la fonction de viscosité $\Phi(f)$ fonction de la porosité ϕ via

$$\Phi(f) = \frac{\phi}{1 - \phi} \left\langle \frac{f}{m_{vp}} \right\rangle_+^{n_{vp}} \quad (1.68)$$

où n_{vp} et m_{vp} sont deux paramètres matériaux. Lorsque la porosité est totalement refermée ($\phi = 0$) le comportement est alors élastique puisqu'il n'y a pas d'évolution des déformations plastiques ($\Phi = 0$).

La loi de croissance de la porosité traduit la conservation de la masse :

$$\dot{\phi} = (1 - \phi) \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (1.69)$$

Les formes des surfaces seuils du modèle de Gatuingt dans l'espace des contraintes, dont l'intersection définit le domaine élastique, sont visibles sur la figure 1.33. Avec les 9 paramètres du modèle visco-plastique (ϕ_0 , σ_{M0} , q_1 , q_2 , q_3 , n_{vp} , m_{vp}) et les 9 paramètres du modèle visco-endommagement (κ_0 , a_t , a_c , b_t , b_c , n_{D_t} , n_{D_c} , m_{D_t} , m_{D_c}), ce modèle visco-plastique visco-endommageable a un total de 20 paramètres à identifier si l'on inclut les paramètres d'élasticité E et v .

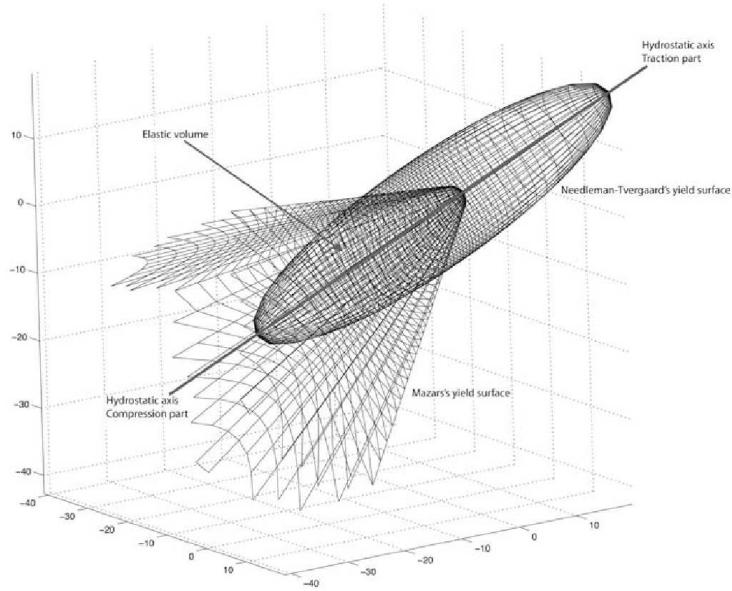


FIG. 1.33 – Surfaces seuils du modèle de Gatuingt dans l'espace des contraintes, d'après [Herve *et al.*, 2005]

5.4 Modèle de (multi)fragmentation des matériaux fragiles

En quasi-statique, les matériaux fragiles, comme le verre, ont tendance à rompre au travers d'une seule voire quelques macro-fissure(s) (fragmentation) tandis qu'en dynamique une multifragmentation est à l'origine de cette rupture. Les défauts existants et aléatoirement répartis (pores, microfissures...) sont à l'origine de l'amorçage des fissures. La contrainte à rupture de ces matériaux ne peut pas être déterministe puisqu'elle dépend du nombre et de la répartition de ces défauts. [Denoual et Hild, 2000] proposent un modèle prenant en compte l'aspect probabiliste de cette contrainte à rupture via une loi de Weibull, définissant la probabilité cumulée de rupture en quasi-statique comme

$$P_F = 1 - \exp [-\lambda_t(\sigma)V_{eff}] \quad \text{et} \quad \lambda_t(\sigma) = \lambda_0 \left[\frac{\sigma}{S_0} \right]^m \quad (1.70)$$

où $\lambda_t(\sigma)$ est la densité de défaut fonction du niveau de contrainte et V_{eff} le volume effectif.

Lorsqu'une fissure est amorcée en dynamique (sous entendu défaut activé), l'état de contrainte de la zone située autour de la propagation de chaque fissure est une fonction complexe dépendant du temps, de la vitesse de propagation de la fissure et de la célérité des ondes. Pour cette zone ou plutôt ce volume en 3D, [Denoual *et al.*, 1997; Denoual et Hild, 2000] ont décidé de lui imposer une forme sphérique constante. Le volume, appelé V_{obs} , est défini au temps t pour un défaut activé à l'instant τ ,

$$V_{obs} = \frac{4\pi}{3} [kc(t - \tau)]^3 \quad (1.71)$$

où kc est la vitesse de propagation de la fissure avec c la célérité des ondes, (k étant une constante).

La figure 1.34(a) permet de comprendre le fonctionnement général de la modélisation. La position des défauts (numérotés pour l'exemple de 1 à 4) est représentée sur l'axe des abscisses tandis que sur l'axe des ordonnées figure le temps (à gauche) ou la contrainte à rupture (à droite) d'un défaut. Les

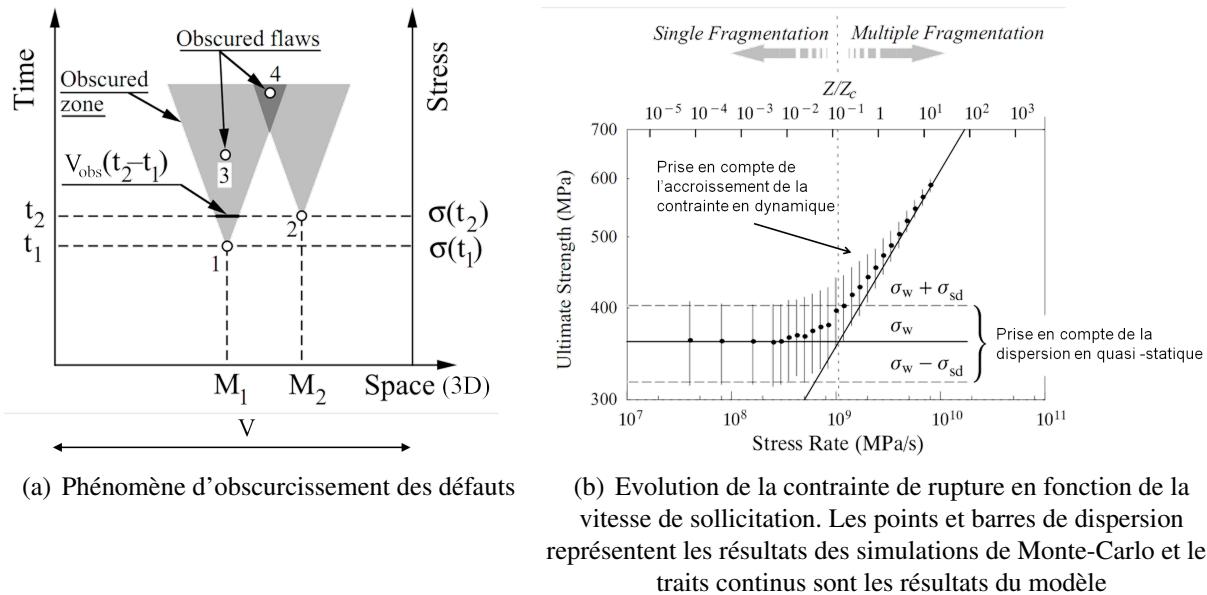


FIG. 1.34 – Modélisation probabiliste d’obscurcissement des défauts rendant compte de la fragmentation dynamique des matériaux quasi-fragiles, d’après [Denoual et Hild, 2000]

cônes sombres des défauts (n°1 et 2) représentent l’augmentation de leur zone d’interaction au cours du temps due à la propagation de la fissure. Ainsi les défauts en dehors de cette zone peuvent s’activer et créer leur propre zone d’interaction mais pas ceux se situant à l’intérieur de cette zone obscurcie (défaut n°3 et 4). Ce phénomène est appelé “obscurcissement des défauts”. La loi d’évolution de l’endommagement obtenue en dynamique prend alors la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{(1-D)} \frac{d}{dt} D \right) = 8\pi(kc)^3 \lambda_t \left(\sqrt{2EY} \right) = 8\pi(kc)^3 \lambda_0 \left(\frac{2EY}{S_0} \right)^{m/2} \quad (1.72)$$

avec Y le taux de restitution de densité d’énergie et E le module d’Young. La fonction λ_t et les paramètres k et c ont été définis précédemment. La figure 1.34(b) compare les résultats de cette modélisation avec des simulations de Monte-Carlo (500 réalisations/point). Les traits continus représentent les solutions analytiques tandis que les points associés aux barres (représentant la dispersion des résultats, que l’on retrouve aussi expérimentalement) représentent les simulations de Monte-Carlo. La méthode reproduit l’accroissement de la contrainte en fonction de la vitesse de sollicitation, en notant au passage des résultats quasi-déterministes en dynamique.

Du fait de cette importante dispersion de la contrainte à rupture pour des sollicitations quasi-statiques, des méthodes stochastiques sont utilisées pour le passage micro-macro de type Weibull, tandis qu’en dynamique, les résultats étant déterministes, le problème peut être traité par la mécanique de l’endommagement (éq. 1.72). En reproduisant les phénomènes microscopiques, ce modèle introduit une longueur interne (choix de la taille de la zone d’obscurcissement) et rend ainsi la solution indépendante du maillage. Cette prise en compte de l’effet de vitesse via une approche microscopique semble plus réaliste mais reste délicate à mettre en oeuvre par rapport aux modèles visco-endommageables par exemple [Denoual, 1998; Denoual et Hild, 2000].

6 Localisation et régularisation

Les différents modèles exposés permettent de représenter plus ou moins finement le comportement du béton. Mais il est nécessaire de résoudre les équations du mouvement avec un cadre mathématique bien posé, de préférence en ayant existence et unicité de la solution. Ces conditions ne sont plus respectées lors d'un comportement adoucissant pour les modèles locaux non visqueux. Les simulations numériques effectuées avec ces modèles donnent des résultats qui ne sont pas objectifs vis à vis du maillage. Cela se traduit en général par une localisation de la déformation ou de l'endommagement dans une zone dont la taille tend vers zéro (ainsi que l'énergie de rupture) lorsque l'on raffine de plus en plus le maillage [Hillerborg *et al.*, 1976; Bazant, 1976; Benallal *et al.*, 1988].

6.1 Le phénomène de localisation

Le phénomène de localisation a été étudié en 3D [Hill, 1958; Rudnicki et Rice, 1975]. En quasi-statique, il correspond à la perte d'unicité de la solution et correspond à un tenseur acoustique pour le problème tangent (de composante $n_i L_{ijkl} n_l$, \vec{n} étant la normale au plan de localisation) qui devient singulier, c'est à dire lorsque le déterminant de ce tenseur est nul :

$$\det(\vec{n} \cdot \mathbb{L} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (1.73)$$

Le tenseur \mathbb{L} d'ordre 4 est l'opérateur tangent. Il est défini en formulant le problème en vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.74)$$

Dans le cas général, la perte d'unicité ne survient pas forcément au pic de contrainte $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$. Notons qu'en visco-plasticité ou en visco-endommagement, l'opérateur tangent ne peut être défini (sauf si l'on inclut la discrétisation temporelle [Besson *et al.*, 2009]) car,

– en visco-plasticité (utilisant éq. 1.55)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{E} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \Phi(f) \mathbb{E} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{A}_{vp} \end{aligned} \quad (1.75)$$

– en visco-endommagement (isotrope), utilisant les équations (1.58) et (1.59) avec $D_v = f$ de telle sorte que le taux d'endommagement $\dot{D} = \dot{D}(f)$ dépend de la fonction critère f :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{d}{dt} (\mathbb{E}(1 - D) : \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbb{E}(1 - D) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{D}(f) \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbb{E}(1 - D) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{A}_d \end{aligned} \quad (1.76)$$

Les termes $\mathbb{A}_{vp} = \Phi(f) \mathbb{E} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ et $\mathbb{A}_d = \dot{D}(f) \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}$ ne dépendent que de l'état et non des vitesses par la considération des lois de viscosité (éq. 1.55, 1.58 ou 1.59). f est la fonction critère considérée. Cette remarque (associée à la continuité des tenseurs \mathbb{A} lors de la recherche de solutions bifurquées $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} \neq \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}$ sous la forme $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)} + \frac{1}{2} [\vec{g} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{g}]$) conduit au fait que la viscosité permet de régulariser le problème [Needleman, 1988].

6.2 Les limiteurs de localisation

L'objectif des limiteurs de localisation, est de garantir la convergence de la solution lorsque l'on raffine le maillage. Plusieurs méthodes existent et consistent à prendre en compte le comportement de la zone entourant le point matériel. Ainsi, certaines variables locales de la loi de comportement sont remplacées par des variables non locales obtenues au moyen d'un opérateur de délocalisation, dont les plus connus sont les modèles de type intégral [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988] et les modèles de type second gradient [Aifantis, 1984; Peerlings *et al.*, 1996b]. Les variables rendues non locales utilisées dans ces types de modèle sont de plusieurs sortes, comme le taux de restitution d'énergie associé à la variable d'endommagement, le tenseur des déformations, les variables internes [Lorentz, 1999] ou encore le champ de déplacement [Rodríguez-Ferran *et al.*, 2005]. Une étude systématique sur le choix de la grandeur à rendre non locale a été menée par [Jirásek, 1998].

6.2.1 Modélisation non locale intégrale

Les modèles non locaux, développés en particulier par [Bazant *et al.*, 1984] pour la plasticité et plus généralement par [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988], régularisent le problème en moyennant les variables sur une zone dont la taille est donnée par des justifications micro-mécaniques. Cette taille est considérée comme une caractéristique matériau et est estimée pour le béton à 3 ou 4 fois la taille du plus gros granulat. Cette modélisation consiste à remplacer la variable responsable de l'adoucissement par une variable dite non-locale obtenue par une moyenne pondérée des valeurs de cette variable sur un domaine entourant le point considéré ou sur l'ensemble des éléments de la structure. Par conséquent, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point, mais également de la déformation dans un certain voisinage décrit par un volume représentatif défini par une longueur caractéristique. [Jirásek, 1998], en étudiant le choix de la variable à rendre non-locale, a conclu que certains choix, comme rendre non locale la variable d'endommagement ou la déformation plastique, étaient à proscrire puisqu'ils ne permettent pas de revenir à un état de contrainte nulle après la rupture. Pour les modèles d'endommagement, il préconise de rendre non locale soit la déformation totale $\boldsymbol{\epsilon}$ (ou son équivalent ϵ_{eq}), soit la force thermodynamique \mathbf{Y} associée à l'endommagement (ou un équivalent Y_{eq}).

Le choix classique, pour les modèles à fonction critère en déformation, consiste à rendre non-locale la déformation équivalente, ici de Mazars $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}$ (qui a l'avantage d'être scalaire et donc plus simple à calculer numériquement). C'est à travers la description du modèle couplé à l'endommagement anisotrope initial que le formalisme des modèles non-locaux va être présenté [Desmorat *et al.*, 2007].

Pour construire ce modèle non-local et le rendre compatible avec la formulation visco-endommageable (éq. 1.57), la fonction seuil de Mazars $f = g(\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}) - \text{tr} \mathbf{D}$ a été réécrite en fonction de la déformation équivalente non locale appelée $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}$:

$$f = g(\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}) - \text{tr} \mathbf{D} \quad (1.77)$$

avec dans le cas du modèle initial une formulation non locale de type Pijaudier-Cabot & Bazant :

$$\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}(\vec{x}) = \frac{1}{V_r(\vec{x})} \int_V \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(s) \mathcal{W}(\vec{s} - \vec{x}) ds \quad (1.78)$$

où V est le volume de la structure, $V_r(\vec{x})$ est le volume représentatif au point \vec{x} défini par :

$$V_r(\vec{x}) = \int_V \mathcal{W}(\vec{s} - \vec{x}) dV \quad (1.79)$$

$\mathcal{W}(\vec{s} - \vec{x})$ est une fonction de pondération non locale ayant la forme, la plus répandue, d'une gaussienne :

$$\mathcal{W}(\vec{s} - \vec{x}) = \exp\left(\frac{-4||\vec{s} - \vec{x}||^2}{l_c}\right) \quad (1.80)$$

où l_c est la longueur caractéristique (ou longueur interne) du matériau qui définit le volume sur lequel est moyennée la grandeur $\hat{\epsilon}$. Pour la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \mathbf{\epsilon} \rangle_+^2$ du modèle initial, le calcul du multiplicateur d'endommagement est la seule modification par rapport au modèle. En effet l'équation (1.77) donne,

$$\frac{dg}{d\hat{\epsilon}^{nl}} \dot{\hat{\epsilon}}^{nl} - \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \frac{dg}{d\hat{\epsilon}^{nl}} - \dot{\lambda} \text{tr} \langle \mathbf{\epsilon} \rangle_+^2 = \frac{dg}{d\hat{\epsilon}^{nl}} \dot{\hat{\epsilon}}^{nl} - \dot{\lambda} \hat{\epsilon}^2 \quad (1.81)$$

de sorte que :

$$\dot{\lambda} = \frac{dg}{d\hat{\epsilon}^{nl}} \frac{\dot{\hat{\epsilon}}^{nl}}{\hat{\epsilon}^2} \quad (1.82)$$

Aucun changement majeur n'est à apporter au modèle avec endommagement actif (prise en compte des refermetures de fissures) si ce n'est introduire la variable d'endommagement actif d_{act} dans la fonction seuil :

$$f = g(\hat{\epsilon}^{nl}) - d_{act} \quad (1.83)$$

Nous remarquons que l'introduction d'une longueur interne isotrope l_c est discutable mais semble en pratique suffisante même pour des modèles qui considèrent l'anisotropie induite par le chargement [Desmorat *et al.*, 2010]. Une généralisation possible prenant en compte naturellement l'effet de l'anisotropie sur la longueur interne et également l'effet de zones fortement endommagées est l'introduction d'un temps interne dans les modèles non locaux intégraux [Desmorat et Gatuingt, 2007, 2010]. Très coûteuse, cette généralisation n'est pas présentée ici. Une autre méthode de régularisation est la méthode du second gradient que [Godard, 2005] utilise dans son modèle anisotrope en se basant sur les travaux de [Peerlings *et al.*, 1996a].

6.2.2 Modélisation non locale de type second gradient

L'idée de ces modèles [Aifantis, 1984] est d'effectuer un développement limité de l'expression de ϵ_{eq}^{nl} permettant de calculer facilement la déformation équivalente en un point en prenant en compte ses variations spatiales. Ainsi, la localisation est contrôlée en générant un champ de déformations régularisé. Pour les modèles d'endommagement, une décomposition en série de Taylor de la déformation équivalente $\hat{\epsilon}$ est alors réalisée en négligeant les termes d'ordre 4 et plus [Peerlings *et al.*, 1996b]. Deux alternatives coexistent, l'une basée sur un gradient explicite où l'on pose $\hat{\epsilon}^{nl} = \hat{\epsilon} + c \nabla^2 \hat{\epsilon}$, l'autre basée sur un gradient implicite où $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^{nl} - c \nabla^2 \hat{\epsilon}^{nl}$ possédant des meilleures performances numériques (c est une constante proportionnel à l_c^2). [Peerlings, 1999] a d'ailleurs montré que la définition implicite de la variable non-locale permet, moyennant le développement d'un élément fini adéquat, d'obtenir une convergence quadratique.

Avec la formulation implicite, le champ régularisé n'est plus calculé directement en fonction du champ local et de ses dérivées, mais est solution d'une équation aux dérivées partielles à laquelle doivent s'ajouter des conditions aux limites pour s'assurer de l'unicité de la solution. L'avantage numérique de ce modèle par rapport aux modèles non-locaux "intégraux" est d'exprimer la déformation équivalente aux points de Gauss et non plus en fonction des éléments voisins.

6.2.3 Modélisation visco-endommageable / endommagement à taux limité

Needleman (1988) a montré que si l'on prend en compte la dépendance au taux de déformation dans une loi de comportement élasto-visco-plastique, il n'y a plus de perte d'unicité de la solution, ni en dynamique ni en quasi-statique. Ce type de régularisation (par la viscosité) a majoritairement été utilisé pour traiter des comportements en dynamique transitoire. En étudiant la propagation d'une onde dans une poutre unidimensionnelle, on peut relier la taille de la zone localisée à la viscosité et à la célérité des ondes dans le milieu considéré [Sluys, 1992; Dubé *et al.*, 1996].

Dans la continuité de ce genre de modélisations, destinées davantage à des comportements élasto-visco-plastiques, est arrivé le modèle dit "à effet retard" [Taylor *et al.*, 1986; Ladeveze, 1991], qui a ensuite évolué vers les modèles dits "à taux d'endommagement limité" [Allix et Deü, 1997] (paragraphe 1.59). La loi d'évolution de l'endommagement correspondante, utilisée par de nombreux auteurs pour de nombreux types de matériaux comme le béton [Desmorat *et al.*, 2010], les métaux [Suffis, 2004] ou encore les composites [Allix *et al.*, 2003; Bordeu *et al.*, 2008; Mauff, 2012], a l'avantage de naturellement prendre en compte deux phénomènes, la localisation et l'effet de la vitesse de déformation.

7 Conclusion - Réponse du modèle initial

Différentes approches pour modéliser le comportement du béton en dynamique ont été présentées. Un choix du type de modélisation doit être fait. Le premier critère retenu est de choisir un modèle ayant un faible nombre de paramètres. Ceci exclut pour ce travail les modèles multi-critères, modélisant notamment la plasticité et les déformations permanentes, et privilégie les modèles d'endommagement (sans plasticité donc). Ce choix pragmatique est discutable a priori mais il a déjà été fait pour le modèle (isotope) de Mazars par exemple. Le choix se dirige donc vers la prise en compte de l'anisotropie induite par l'endommagement et donc vers les deux modèles d'endommagement anisotrope, présentés précédemment, que sont celui de [Godard, 2005] et [Desmorat *et al.*, 2010]. Tous les deux prennent en compte l'anisotropie induite par le chargement ainsi que la refermeture des microfissures. Mais le choix final va vers le modèle de [Desmorat *et al.*, 2010] pour deux raisons, l'une d'ordre théorique (statut d'une variable thermodynamique), l'autre d'ordre pratique (coût de calcul de structure) :

- D'un point de vue thermodynamique, ce modèle possède une seule variable d'endommagement (tensorielle) contre 2 variables pour le modèle de Godard.
- L'implantation numérique du modèle ne nécessite aucune itération à l'intérieur de la loi de comportement contrairement au modèle de Godard.

Il faut cependant noter que le modèle de Godard prend en compte les chargements confinés contrairement au modèle initial considéré. Effectivement, le domaine de validité (connu, [Ragueneau *et al.*, 2008]) du modèle initial se limite aux chargements peu confinés, comme le montre la surface de rupture (recalculée avec plus de points lors de cette thèse) de la figure 1.35. Néanmoins, afin de mieux appréhender les réponses du modèle initial sous différents cas de chargement simple et de conclure quant aux améliorations à y apporter, un premier travail consiste à déterminer les réponses analytiques correspondantes.

Le tracé des courbes des figures 1.36 et 1.37 a pu être réalisé à l'aide d'une programmation effectuée sous le logiciel Matlab et présentée dans l'annexe C. La figure 1.35 permet de comparer la surface de rupture tracée initialement avec très peu de points par [Ragueneau *et al.*, 2008] et la surface

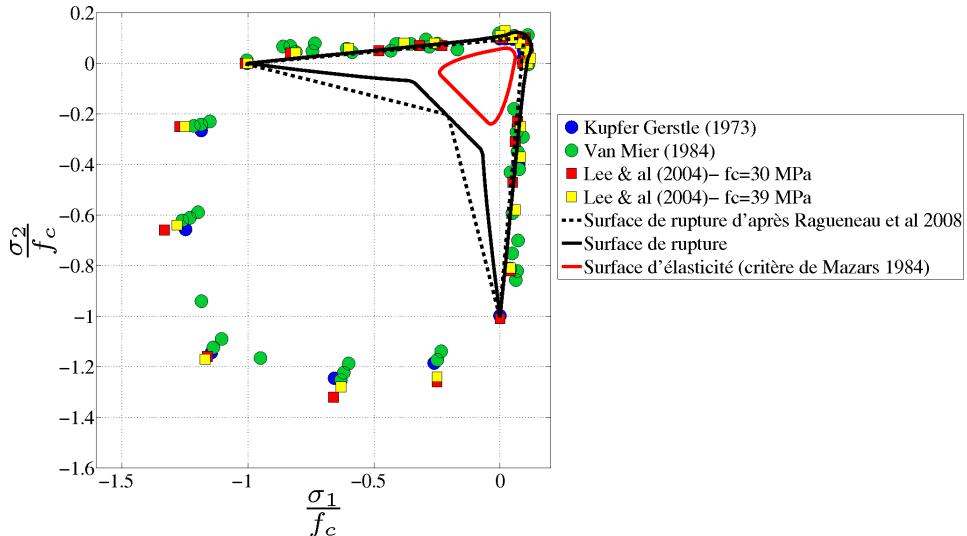


FIG. 1.35 – Surfaces d'élasticité et de rupture du modèle initial [Desmorat, 2004] comparées aux résultats expérimentaux de différents auteurs

complète (200 points utilisés) avec le même modèle et le même jeu de paramètres. Les réponses en traction et bi-traction (fig. 1.36(a)) sont satisfaisantes, ainsi que la réponse en cisaillement (fig. 1.36(b)) qui a une contrainte nulle lorsque l'endommagement est égal à 1 ($\sigma(D = 1) = 0$). Ceci n'est pas forcément le cas de tous les modèles, comme par exemple celui de Mazars où, lorsque l'endommagement atteint 1, la contrainte de cisaillement évolue toujours vers l'infini.

La courbe contrainte-déformation en cisaillement (fig. 1.36(b)) est tracée via les relations,

$$\begin{aligned} \tau = \sigma_{12} &= \frac{4G(1-D)}{2-D} \frac{3(2-D)}{2(3-D)} a \cdot \tan \left[\frac{D}{aA} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \\ \epsilon_{12} &= \frac{3(2-D)}{2(3-D)} a \cdot \tan \left[\frac{D}{aA} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.84)$$

Des détails concernant la solution analytique en cisaillement sont donnés dans l'annexe A.

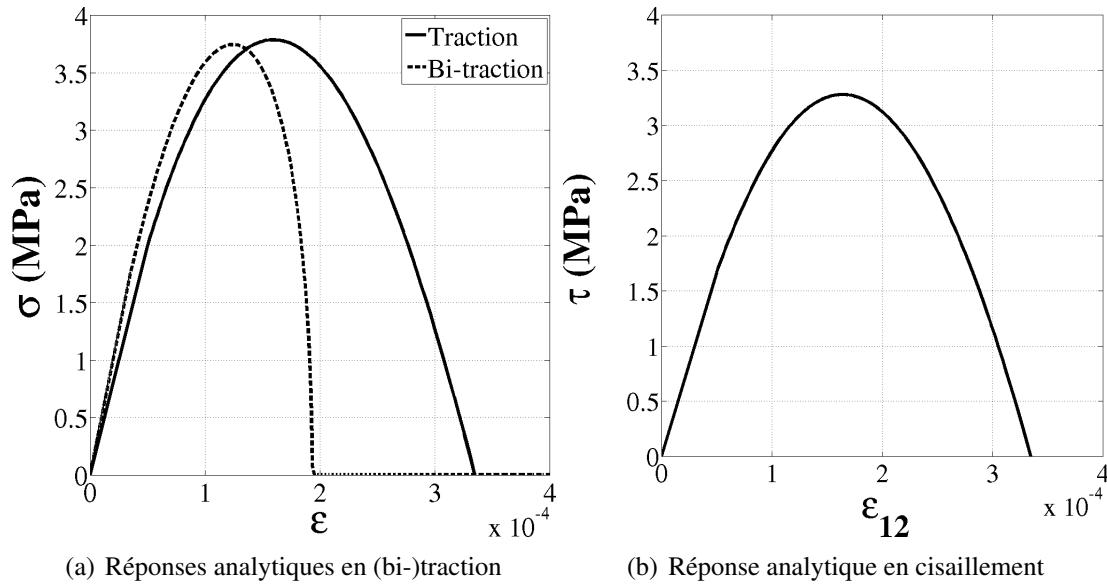
Contrairement à la réponse en compression, la réponse en bi-compression (fig. 1.37) n'est pas satisfaisante car, en plus d'avoir une limite à rupture trop faible vis à vis de celle de compression, un retour en arrière ou "snap back" est observable.

La réponse du modèle pour les chargements confinés ainsi que le snap back en bi-compression n'étant pas acceptable, une nouvelle fonction critère f et, au final, un nouveau modèle d'endommagement anisotrope sont proposés lors de cette thèse.

8 Etude théorique d'une instabilité liée à l'anisotropie induite

8.1 Mise en évidence de l'instabilité en compression simple

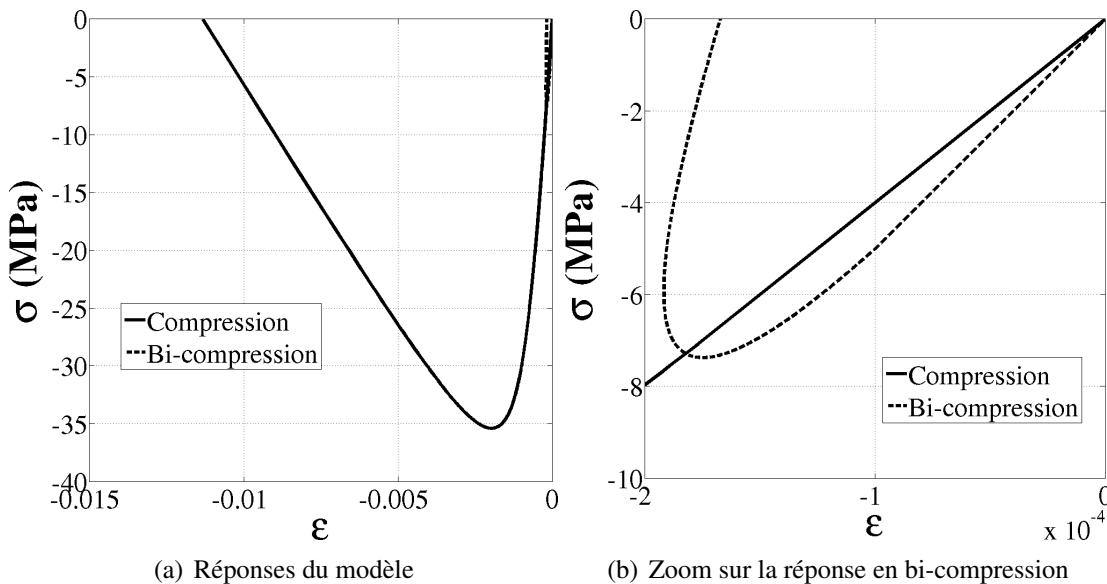
Des instabilités numériques du modèle initial en compression ont été observées lors de la thèse de M. Chambart [Chambart, 2009] (fig. 1.38), conduisant au fait que la solution calculée par éléments finis ne suit pas complètement la courbe contrainte-déformation analytique (la contrainte chute brutalement à zéro fig. 1.38(a)).



(a) Réponses analytiques en (bi-)traction

(b) Réponse analytique en cisaillement

FIG. 1.36 – Réponses du modèle initial



(a) Réponses du modèle

(b) Zoom sur la réponse en bi-compression

FIG. 1.37 – Réponses analytiques en (bi-)compression du modèle initial

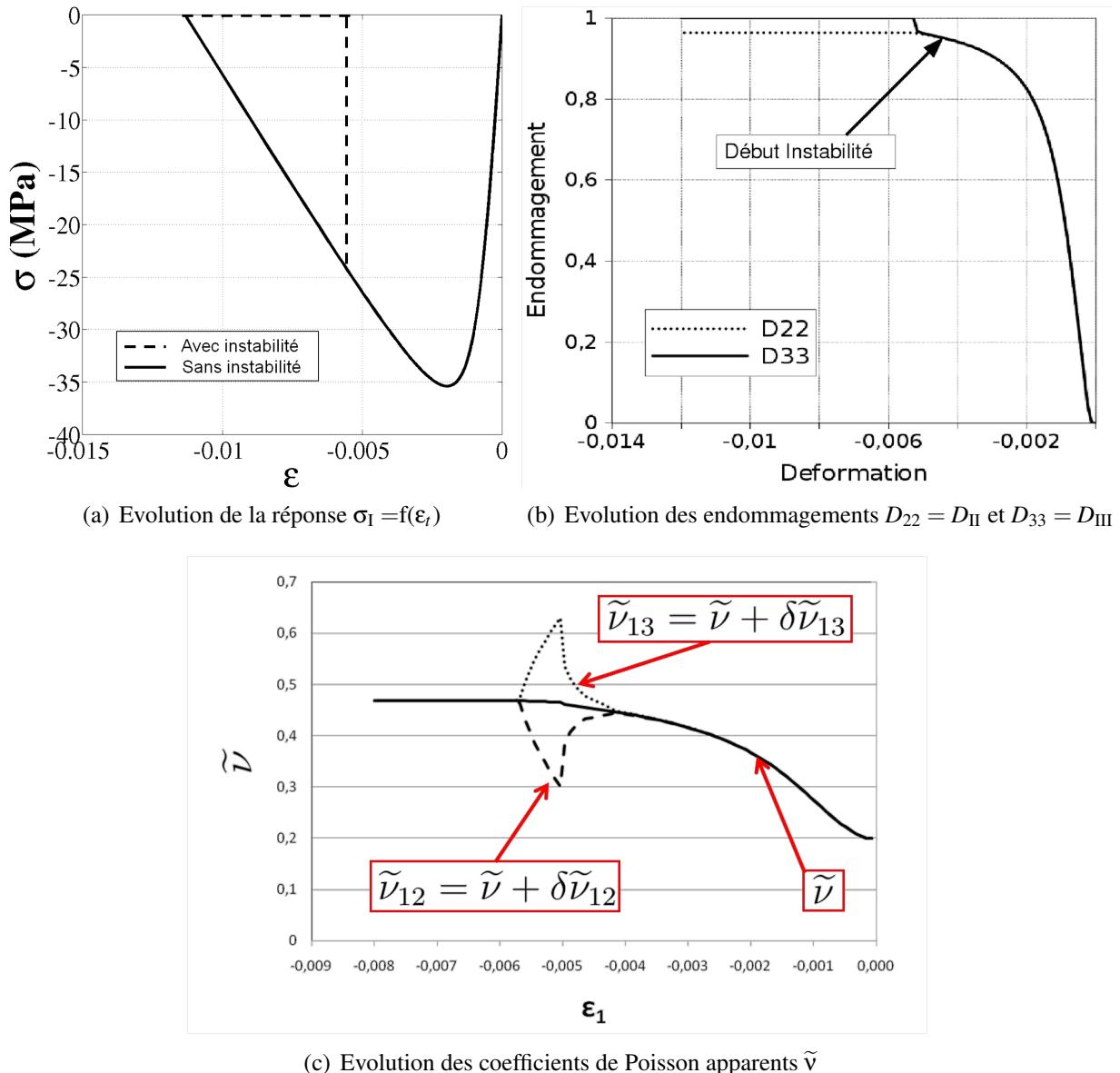


FIG. 1.38 – Instabilité en compression simple (suivant la direction I, d'après M. Chambart [Chambart, 2009])

Dans le modèle initial avec la fonction de consolidation en trace de l'endommagement ($\kappa = \kappa(\text{tr}D)$), les déformations positives pilotent l'endommagement par la loi d'évolution $\dot{D} = \lambda \langle \epsilon \rangle_+^2$. Pour un chargement en traction suivant la direction I, la seule déformation positive est la déformation longitudinale ϵ_I et donc une seule composante d'endommagement D_I est générée. En revanche, pour un chargement en compression simple suivant la direction I, les déformations positives sont les déformations transversales ϵ_{II} et ϵ_{III} avec deux endommagements D_{II} et D_{III} générés. Lorsque ces deux derniers endommagements sont proches de 1 (figure 1.38(b)), en post pic (figure 1.38(a)), une instabilité apparaît et se traduit par une chute (à zéro), très brutale numériquement, des contraintes. Ce phénomène numérique est physiquement acceptable. Si nous prenons une éprouvette de béton

(cubique, par exemple) et que nous la comprimons à l'aide d'une presse entre deux surfaces non frottantes, cette éprouvette va s'endommager de la même manière dans les deux directions transverses $D_{II} = D_{III}$, et ainsi arriver à un état de contrainte élevé. A un moment précis, une direction transverse va être préférée à une autre (une macro-fissure se créant verticalement), par exemple $D_{II} \rightarrow 1$, et l'endommagement dans l'autre n'évolue que peu ($D_{III} \neq D_{II}$).

Numériquement, M. Chambart a montré que la somme des perturbations des coefficients de Poisson apparents \tilde{v}_{12} et \tilde{v}_{13} était nulle (fig. 1.38(c)), $\delta\tilde{v}_{12} + \delta\tilde{v}_{13} = 0$, et a étudié la propagation de l'instabilité numérique pour le problème discréte (en temps). Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au problème théorique correspondant et plus particulièrement à l'existence d'une bifurcation que l'on met en évidence par l'étude du problème en vitesse.

8.2 Formulation du problème 3D

L'idée classique pour étudier l'existence de cette bifurcation est d'étudier le problème 3D formulé en vitesse [Hill, 1958]. Pour cela, la loi d'élasticité est écrite sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.85)$$

Avec $\tilde{\mathbb{E}}$ l'opérateur sécant (tenseur d'ordre 4) donné ici pour le cas qui nous intéresse à contrainte (ou déformation) hydrostatique négative :

$$\tilde{\mathbb{E}} = 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \right] + K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (1.86)$$

En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, il vient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.87)$$

On définit ainsi l'opérateur tangent \mathbb{L} (tenseur d'ordre 4), qui s'écrit après des calculs complexes (donnés en Annexe B, modèle local) :

$$\mathbb{L} = 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \right] + K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2Gg'(\hat{\epsilon})}{\hat{\epsilon}} \left[-[(\mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{A} : \frac{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2}{\hat{\epsilon}^2}) + (\mathbf{A} : \frac{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2}{\hat{\epsilon}^2})(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{H}^{-1})] \otimes \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ + \left[\frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon}}{(3 - \text{tr} \mathbf{D}) \hat{\epsilon}^2} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\text{tr} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^3}{(3 - \text{tr} \mathbf{D}) \hat{\epsilon}^2} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon}}{(3 - \text{tr} \mathbf{D})^2} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \right] \otimes \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ \right] - \frac{\eta K}{3} \frac{g'(\hat{\epsilon})}{\hat{\epsilon}} \mathbf{1} \otimes \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ \end{aligned}$$

Le signe du déterminant de l'opérateur ($\vec{n} \cdot \mathbb{L} \cdot \vec{n}$) doit ensuite être étudié pour toute normale \vec{n} (au plan de bifurcation). Si celui-ci s'annule, cela signifie qu'il y a perte d'unicité de la solution et qu'il existe une infinité de solutions bifurquées. Cette étude du déterminant de l'opérateur tangent 3D n'a pas été effectuée étant donné la complexité de son expression. Afin de contourner cette difficulté, une étude 1D de l'instabilité a été réalisée.

8.3 Formulation du problème 1D

Pour cela un chargement en compression simple suivant la direction I est considéré :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I < 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 > 0 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

A l'aide de la loi d'élasticité du modèle anisotrope,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2G}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{1}{9K} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{1 - \eta D_H} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \right) \mathbf{1} \quad (1.90)$$

Les composantes du tenseur des déformations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\varepsilon_i = S_i \sigma_I \quad \text{avec} \quad S_i = S_i(D_{II}, D_{III}) \quad (1.91)$$

Etant donné que $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_I < 0$, l'expression de la loi d'élasticité (1.90) peut se simplifier :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2G}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{\sigma_I}{9K} \mathbf{1} \quad (1.92)$$

L'expression (1.91) est ensuite exprimée en vitesse pour chaque composante principale sous la forme suivante :

$$\dot{\varepsilon}_i = S_i \dot{\sigma}_I + \frac{dS_i}{dt} \sigma_I \quad \text{avec} \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{\partial S_i}{\partial D_{II}} \frac{\partial D_{II}}{\partial t} + \frac{\partial S_i}{\partial D_{III}} \frac{\partial D_{III}}{\partial t} \quad (1.93)$$

En prenant la simplification $D = D_{II} = D_{III}$ (condition pour laquelle l'instabilité numérique est observée), et $\varepsilon_t = \varepsilon_{II} = \varepsilon_{III}$, il est possible d'écrire le système d'équations sous la forme d'un système matriciel $\mathbf{A} \vec{X} = \vec{b}$ (les détails de ces calculs se trouvent dans la deuxième partie de l'annexe B) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2s'_1 \alpha \sigma_I & -2s'_2 \alpha \sigma_I \\ 0 & 1 - (s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I & -(s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I \\ 0 & -(s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I & 1 - (s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_I \\ \dot{\varepsilon}_{II} \\ \dot{\varepsilon}_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \dot{\sigma}_I \\ S_2 \dot{\sigma}_I \\ S_3 \dot{\sigma}_I \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

avec

$$s'_1 = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D)^2} \right) \quad s'_2 = \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D)^2} \right) \quad \alpha = \frac{A}{\left[1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2} \varepsilon_t}{a} \right)^2 \right] \left(\sqrt{2} \right)^3} \quad (1.95)$$

Le système matriciel ci-dessus nous amène à calculer le déterminant de la matrice \mathbf{A} (éq. 1.96) et à le tracer en fonction de la déformation ε_I (fig. 1.39).

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (1 - (s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I)^2 - ((s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I)^2 \\ \det \mathbf{A} &= 1 - 2(s'_1 + s'_2) \alpha \sigma_I \end{aligned} \quad (1.96)$$

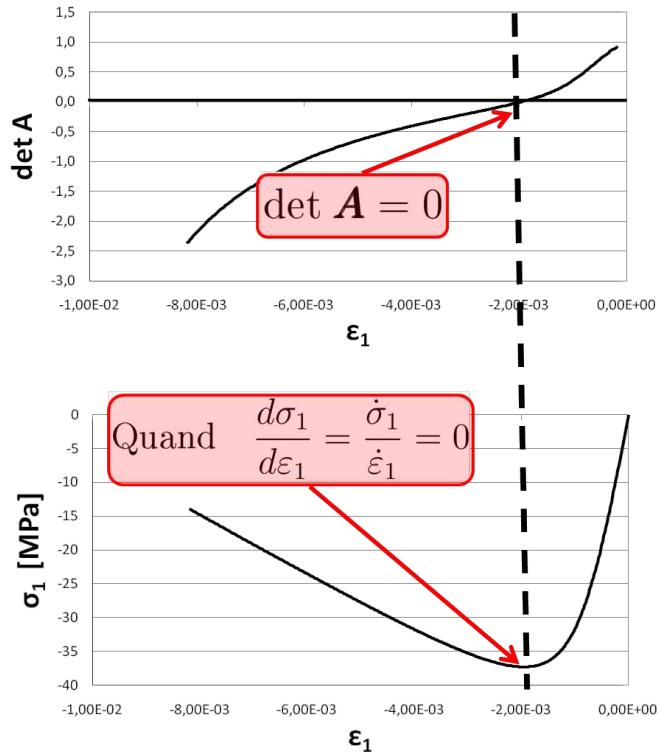


FIG. 1.39 – Réponses $\det \mathbf{A}$ versus ε_I et σ_I versus ε_I en compression simple suivant la direction 1

Deux des trois équations du système matriciel sont identiques en posant dans notre cas $\varepsilon_t = \varepsilon_{II} = \varepsilon_{III}$. A partir du système matriciel (éq. 1.94) on peut alors écrire les équations suivantes :

$$[(1 - 2(s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_1)\dot{\varepsilon}_t] = S_2\dot{\sigma}_I \Leftrightarrow (\det \mathbf{A})\dot{\varepsilon}_t = S_2\dot{\sigma}_I \quad (1.97)$$

Une bifurcation est possible dès que $\det \mathbf{A} = 0$, ce qui revient à dire pour l'équation (1.97) que $\dot{\sigma}_I = 0$. On observe sur la figure 1.39 qu'il est possible d'avoir une instabilité/bifurcation dès que le déterminant s'annule, soit dès le pic de contrainte ($\dot{\sigma}_I = 0$).

Cette étude a permis analytiquement de mettre en évidence l'existence d'une possible bifurcation dès le pic de contrainte en compression, ce que M. Chambart avait montré numériquement.

8.4 Suppression de l'instabilité

Un moyen de supprimer l'instabilité est de modifier la loi d'évolution de l'endommagement, comme fait lors de la thèse de M. Chambart. Jusqu'à présent, l'endommagement était piloté par les déformations positives. En compression, on a l'expression (avec $\alpha = 1$ pour les modèles en endommagement actif ou $\alpha = 2$ pour les modèles en $\text{tr}D$)

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \varepsilon \rangle_+^\alpha \quad \text{avec} \quad \langle \varepsilon \rangle_+ = |\varepsilon_I| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{v}_{13} \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

dans laquelle apparaissent les coefficients de Poisson endommagés (ou apparents), éventuellement différents comme vu précédemment (dès que $D_{II} \neq D_{III}$) pour les directions II et III. Une solution est

de piloter l'endommagement par les déformations effectives positives :

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+^\alpha \quad \text{avec} \quad \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+ = |\boldsymbol{\epsilon}_I| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

où l'on définit la déformation effective comme :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1+v}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{v}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} \quad (1.100)$$

Ainsi les déformations calculées dépendent en compression directement du coefficient de Poisson sain du matériau v , et permettent d'imposer en compression $D_{II} = D_{III}$. Cette nouvelle loi d'évolution a été validée en quasi-statique et pour des calculs numériques simples. Cette solution ne sera pas retenue dans la suite de cette thèse, puisque des calculs numériques sur des structures montreront au chapitre 5 que le faciès d'endommagement de poutres impactées ne correspond pas au faciès de fissuration expérimental, contrairement à ce que l'on obtiendra avec la loi d'évolution initiale $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^\alpha$.

Chapitre 2

Modèle d'endommagement anisotrope pour des chargements confinés

La nécessité de prendre en compte les chargements confinés nous amène, dans un premier temps, à définir un nouveau critère d'élasticité 3D avec des paramètres facilement identifiables. Ce critère remplacera le critère de Mazars dans le modèle d'endommagement anisotrope initial. Une nouvelle définition de l'endommagement actif ainsi qu'une prise en compte de l'effet de vitesse seront introduites dans la modélisation. Cinq versions de modifications du modèle initial vont être présentées et seront désignées comme les modèles A, B, C, D et E. Le modèle E est le modèle retenu programmé sous le nom de modèle DADC pour Dynamic Anisotropic Damage Concrete dans le code de calcul EUROPLEXUS.

1 Proposition d'un nouveau critère d'élasticité

Les critères d'élasticité présentés au premier chapitre ne permettent pas de rendre compte de la surface de rupture calculée par le modèle d'endommagement anisotrope tout en conservant une simplicité d'implantation numérique du modèle d'endommagement correspondant. Pour cette raison, un nouveau critère d'élasticité est proposé, modulaire (avec ajustement aisément des limites d'élasticité en traction, bi-traction, compression et bi-compression) et simple numériquement à implanter pour le modèle d'endommagement correspondant. Afin d'éviter les retours en arrière ou "snap back" des réponses en contraintes-déformations, un critère homogène à une contrainte (excluant des cosinus hyperboliques ou des exponentielles) est recherché.

1.1 Formulation modulaire

Le critère proposé est basé sur la norme non-quadratique d'un tenseur [Hershey, 1954; Hosford, 1972; Barlat *et al.*, 1991; Bron et Besson, 2004; Desmorat et Marull, 2011]. Si \mathbf{X} est un tenseur d'ordre 2, la norme non-quadratique "a", indépendante du repère, s'écrit $\|\mathbf{X}\|_a = (\text{tr}|\mathbf{X}|^a)^{1/a}$. En se plaçant dans le repère principal, la norme du tenseur \mathbf{X} peut s'écrire de la manière suivante : $\|\mathbf{X}\|_a = (|X_I|^a + |X_{II}|^a + |X_{III}|^a)^{1/a}$. Dans notre cas, cette norme particulière est appliquée au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Deux paramètres "a" sont définis : a_t pour tous les chargements possédant des contraintes principales positives ($\sigma_i > 0$), comme la traction, et a_c pour tous les chargements possédant

des contraintes principales négatives ($\sigma_i < 0$), comme la compression. Pour rappel la notation $\langle \cdot \rangle_+$ (respectivement $\langle \cdot \rangle_-$) indique la partie positive (respectivement négative) d'un scalaire ou d'un tenseur (en termes de valeurs propres (ou principales) pour ce dernier cas).

Un choix de modélisation a été fait en se basant sur trois propriétés recherchées :

- avoir la possibilité d'augmenter la dissymétrie traction/compression avec un rapport éventuellement supérieur à 10,
- améliorer la réponse du modèle d'endommagement correspondant en chargements confinés,
- imposer la même homogénéité de tous les termes en σ (i.e contrairement aux critères de Gurson ou de François [Gurson, 1977; François, 2008]).

C'est ainsi que trois paramètres caractéristiques du matériau, physiques et facilement identifiables (σ_y^t , σ_y^c , σ_y^{bc} , respectivement la limite d'élasticité en traction, en compression et en bi-compression), sont retenus. Ces paramètres sont introduits dans les coefficients r_1 et r_2 (éq. 2.4) permettant ainsi de proposer la formulation du critère suivante :

$$f = \sigma_{equiv} - \sigma_y^t \quad \text{avec} \quad \sigma_{equiv} = \|\langle \sigma \rangle_+ \|_{a_t} + r_1 \|\langle \sigma \rangle_- \|_{a_c} + r_2 \text{tr} \langle \sigma \rangle_- \quad (2.1)$$

avec σ_{equiv} une fonction homogène de degré 1 en σ , valant la contrainte σ en traction. Le terme $\|\langle \sigma \rangle_+ \|_{a_t}$ permet de prendre en compte tous les chargements possédant des contraintes principales positives comme la traction tandis que le terme $\|\langle \sigma \rangle_- \|_{a_c}$ permet de prendre en compte tous les chargements possédant des contraintes principales négatives comme la compression. Le dernier terme $\text{tr} \langle \sigma \rangle_-$ permet quand à lui de mieux prendre en compte les chargements confinés comme la bi-compression.

Afin de présenter le fonctionnement de ce critère, un premier chargement élastique de compression suivant la direction principale I est considéré. Le tenseur des contraintes associé, diagonal, est le suivant $\sigma = \text{diag} [\sigma_I < 0, 0, 0]$. La contrainte équivalente σ_{equiv} pour ce chargement de compression vaut $\sigma_{equiv} = |\sigma_I| r_1 + r_2 \sigma_I = |\sigma_I| r_1 - r_2 |\sigma_I|$. On définit la limite d'élasticité en compression par $\sigma_y^c = |\sigma_I|$ à $f = 0$, ce qui permet d'obtenir à la limite d'élasticité :

$$f = \sigma_{equiv} - \sigma_y^t = (r_1 - r_2) \sigma_y^c - \sigma_y^t = 0 \quad (2.2)$$

La même démarche est réalisée avec un chargement de compression équi-biaxiale suivant les directions principales I et II. Le tenseur des contraintes associé est à nouveau diagonal $\sigma = \text{diag} [\sigma_I, \sigma_I, 0]$. La contrainte équivalente σ_{equiv} pour ce chargement de bi-compression vaut $\sigma_{equiv} = 2^{1/a_c} r_1 |\sigma_I| + 2 r_2 \sigma_I = (2^{1/a_c} r_1 - 2 r_2) |\sigma_I|$. La limite d'élasticité en bi-compression est définie par $\sigma_y^{bc} = |\sigma_I|$ à $f = 0$ permettant ainsi d'écrire le critère de la façon suivante :

$$f = \sigma_{equiv} - \sigma_y^t = (2^{1/a_c} r_1 - 2 r_2) \sigma_y^{bc} - \sigma_y^t = 0 \quad (2.3)$$

Nous avons donc un système, de deux équations à deux inconnues r_1 et r_2 (éq. 2.2 et 2.3) dont la solution est :

$$r_1 = \frac{\sigma_y^t}{2^{\frac{1}{a_c}} - 2} \left(\frac{1}{\sigma_y^{bc}} - \frac{2}{\sigma_y^c} \right) \quad \& \quad r_2 = \frac{\sigma_y^t}{2^{\frac{1}{a_c}} - 2} \left(\frac{1}{\sigma_y^{bc}} - \frac{2^{\frac{1}{a_c}}}{\sigma_y^c} \right) \quad (2.4)$$

et permet de déterminer les paramètres "matériaux" r_1 , r_2 en fonction des limites d'élasticité σ_y^t , σ_y^c , σ_y^{bc} .

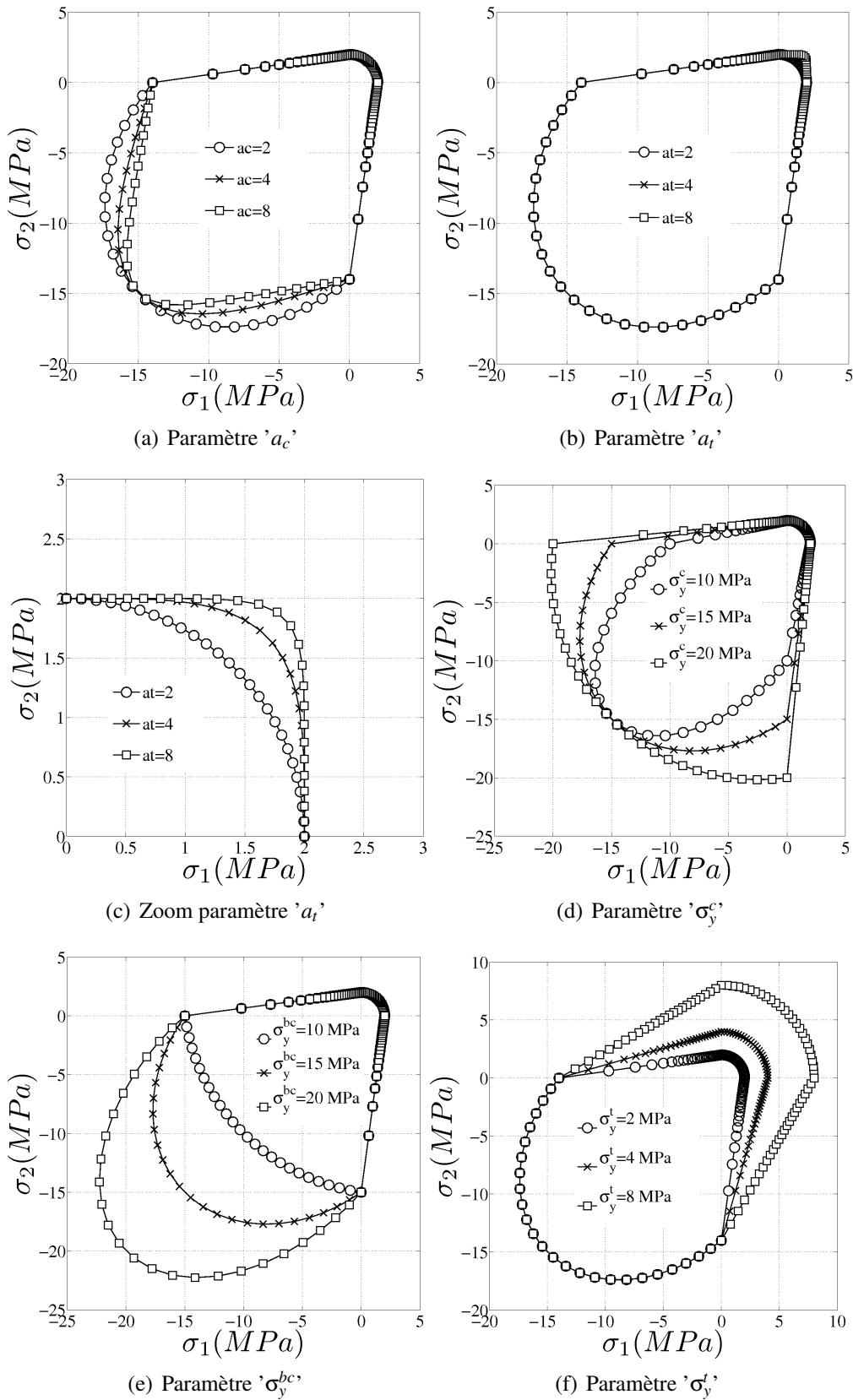


FIG. 2.1 – Influence des paramètres sur le domaine d'élasticité

1.2 Sensibilité aux paramètres

Une étude de sensibilité de la surface d'élasticité aux paramètres (a_t , a_c , σ_y^t , σ_y^c , σ_y^{bc}) a été réalisée (fig. 2.1). Le paramètre a_c permet de modifier le rayon de courbure du critère entre les points de compression et de bi-compression (fig. 2.1(a)), alors que le paramètre a_t permet d'ajuster le rayon de courbure des points se situant entre la traction et la bi-traction (fig. 2.1(b) et 2.1(c)). Les paramètres physiques, σ_y^t (fig. 2.1(f)), σ_y^c (fig. 2.1(d)), et σ_y^{bc} (fig. 2.1(e)) permettent de rendre compte directement des limites d'élasticité, respectivement en traction, compression et bi-compression.

1.3 Validation à l'aide de la surface élastique de Kupfer

A partir des données expérimentales du domaine d'élasticité déterminé par [Kupfer *et al.*, 1969], un exemple de jeu de paramètres a été identifié en procédant de la manière suivante. Pour commencer, il faut déterminer les 3 paramètres de limite d'élasticité, ici $\sigma_y^t = 1.3MPa$, $\sigma_y^c = 10MPa$ et $\sigma_y^{bc} = 11MPa$. Enfin, il faut adapter la forme de la surface d'élasticité des autres points expérimentaux à l'aide des deux exposants, ici $a_t = 8$ et $a_c = 4$. La figure 2.2(c) montre la bonne superposition de la surface d'élasticité numérique celle celle expérimentale. A l'aide de ce même jeu de paramètres, on peut tracer le critère suivant une représentation 3D (fig. 2.2(b)) ou dans le plan du déviateur (fig. 2.2(b)).

Dans le premier chapitre, différents critères ont été présentés [Mazars, 1984; Vree *et al.*, 1995; Pontiroli, 1995; François, 2008; Ragueneau *et al.*, 2008; Chen, 2010] et tracés sur la figure 1.21. On remarque que le critère proposé permet de décrire précisément le comportement élastique du béton contrairement à la plupart des critères présentés précédemment. Le critère d'élasticité modulaire ainsi proposé offre une très bonne description du domaine élastique du béton via ces 5 paramètres facilement identifiables. Ce critère a l'avantage d'être fermé (fig. 2.2(a)) contrairement par exemple au critère de Mazars qui est ouvert sur l'axe des contraintes hydrostatiques négatives. L'inconvénient de ce critère est qu'il n'est pas continûment différentiable (bien que continu) à cause du terme $\text{tr} < \sigma >_-$. Cet inconvénient, pour notre part, n'est pas gênant puisque la règle de normalité n'est pas utilisée dans notre modèle d'endommagement anisotrope (cadre thermodynamique non standard). Par la suite, les exposants, a_t et a_c , seront fixés à 2, non pas pour représenter le domaine élastique comme celui de Kupfer mais afin de modéliser correctement la surface de rupture par le couplage élasticité-endommagement.

2 Fonction critère d'endommagement

La fonction critère présentée précédemment est maintenant couplée à l'endommagement et intégrée dans le modèle d'endommagement anisotrope du modèle initial (au chapitre 1) en lieu et place du critère de Mazars. Cinq versions de modifications du modèle initial seront confrontées aux différentes réponses de celui-ci et seront désignées comme les modèles A, B, C, D et E. Le modèle E correspond au modèle retenu.

2.1 Critère en contrainte effective équivalente (modèle A)

Dans le modèle initial, la fonction critère, permettant de faire évoluer l'endommagement, est écrite en déformation et rappelée par l'équation suivante, avec κ une fonction soit de la trace de

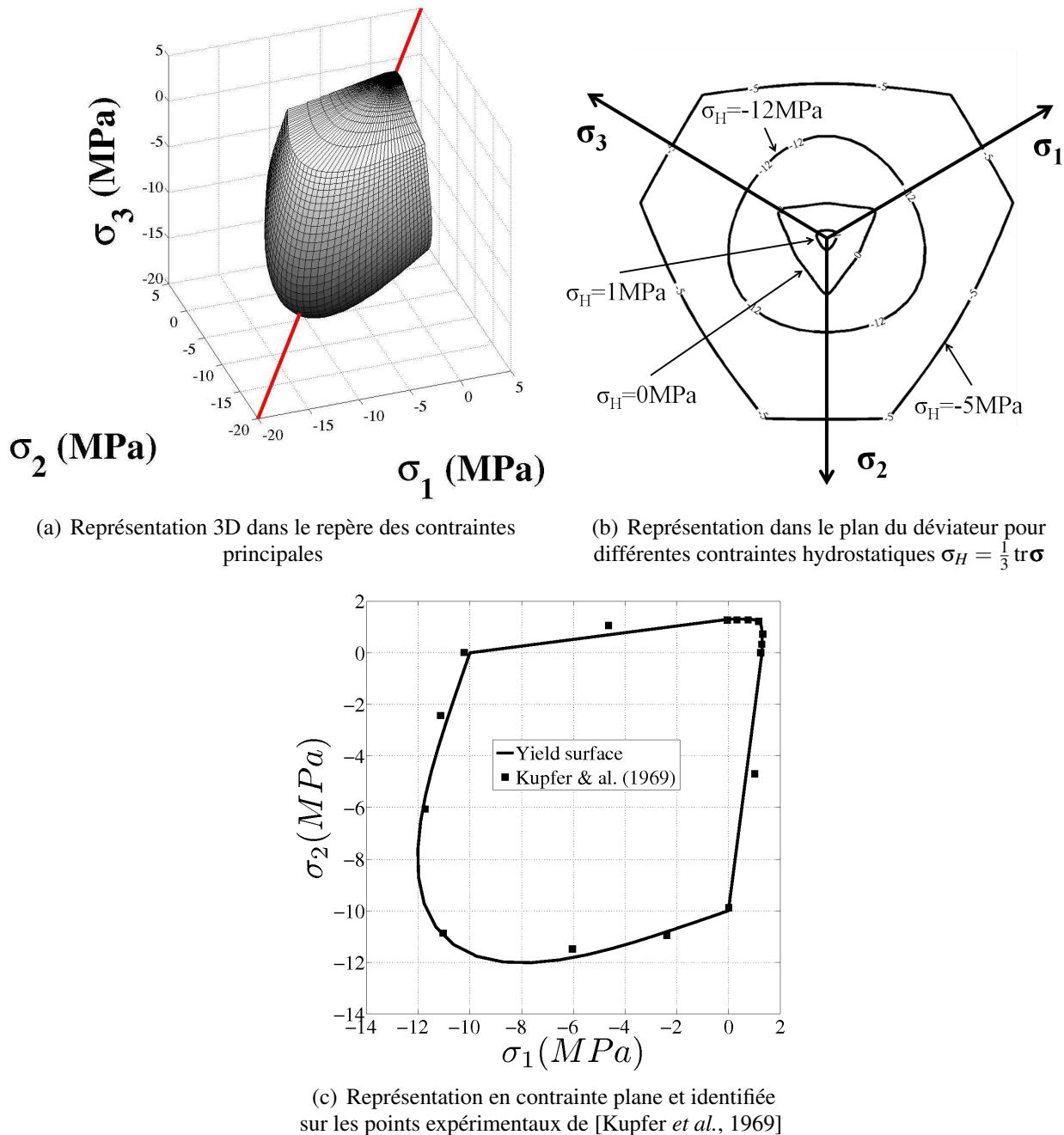


FIG. 2.2 – Réponses du critère d'élasticité modulaire proposé

l'endommagement soit de l'endommagement actif,

$$f = \hat{\epsilon} - \kappa \quad \text{et} \quad \hat{\epsilon} = \sqrt{<\boldsymbol{\epsilon}>_+ : <\boldsymbol{\epsilon}>_+} \quad (2.5)$$

On propose maintenant d'écrire cette fonction critère en contrainte sous la forme suivante :

$$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k \quad (2.6)$$

avec k une fonction de consolidation à déterminer, homogène à une contrainte, permettant de prendre en compte l'évolution de l'endommagement aussi bien en traction qu'en compression. Elle peut dépendre de différents scalaires comme la trace du tenseur d'endommagement [Mazars *et al.*, 1990], l'endommagement actif [Souid *et al.*, 2009] ou les invariants du tenseur des déformations [Mazars, 1984; Godard, 2005; Ragueneau *et al.*, 2008]. La contrainte équivalente de ce critère est la contrainte effective équivalente $\tilde{\sigma}_{equiv}$, basée comme son nom l'indique sur le concept de la contrainte effective [Lemaître, 1971]. En effet, pour prendre en compte le couplage avec l'endommagement, la contrainte σ_{equiv} du chapitre 1 n'est plus écrite en fonction du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ mais en fonction du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (éq. 1.46 du chapitre 1), d'où la notation $\tilde{\sigma}_{equiv}$ et son expression :

$$\tilde{\sigma}_{equiv} = \| <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \| + r_1 \| <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \| + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \quad (2.7)$$

Cette contrainte effective équivalente $\tilde{\sigma}_{equiv}$ fonctionne sur le même principe que le nouveau critère d'élasticité présenté dans la partie précédente 1.1 de ce chapitre. Concernant la fonction de consolidation k , sa formulation est dans un premier temps calquée sur celle du modèle initial pour κ , *i.e.* $\kappa(\text{tr} \mathbf{D}) = a \cdot \tan\left(\frac{\text{tr} \mathbf{D}}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)$, avec κ_0, a, A les trois paramètres du modèle initial. Pour la formulation en contrainte effective de la fonction critère, considérons dans un premier temps (modèle A) :

$$k_A = k(\text{tr} \mathbf{D}) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \text{tr} \mathbf{D}\right] \quad (2.8)$$

α est un paramètre du modèle homogène à une contrainte "comparable" au paramètre "a" du modèle initial alors que β est sans dimension et est "comparable" au rapport $\frac{1}{aA}$. Le modèle d'endommagement anisotrope correspondant conserve les autres équations du modèle initial, c'est à dire la loi d'élasticité (éq. 1.44 & 1.46) et la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2$ (éq. 1.51).

La figure 2.3 compare la nouvelle surface de rupture (lieu des contraintes pics pour chaque chargement, à $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$) et la surface d'élasticité à celles du modèle initial. La surface de rupture largement non convexe est loin d'être satisfaisante par rapport à l'expérimental mais permet pour le moment de retrouver plus ou moins la surface du modèle initial.

Une première amélioration concerne le choix de la variable argument de la fonction de consolidation k . L'invariant d'endommagement $\text{tr} \mathbf{D}$, tel qu'il est utilisé, ne permet pas de représenter correctement la surface de rupture. En effet, l'état du tenseur de déformation pour un chargement de traction suivant la direction I correspond à $\boldsymbol{\epsilon}^{traction} = \text{diag}[\epsilon_I > 0, \epsilon_{II} < 0, \epsilon_{III} (= \epsilon_{II}) < 0]$. Le tenseur d'endommagement associé est $\mathbf{D}^{traction} = \text{diag}[D_I, 0, 0]$. La trace du tenseur d'endommagement en traction est donc $\text{tr} \mathbf{D}^{traction} = D_I$. Si la même démarche est adoptée pour un chargement de bi-compression suivant les directions I et II, $\boldsymbol{\epsilon}^{bi-compression} = \text{diag}[\epsilon_I < 0, \epsilon_{II} (= \epsilon_I) < 0, \epsilon_{III} > 0]$, et $\mathbf{D}^{bi-compression} = \text{diag}[0, 0, D_{III}]$. La trace du tenseur d'endommagement en bi-compression est donc $\text{tr} \mathbf{D}^{bi-compression} = D_{III}$. Enfin, en compression, on obtient $\text{tr} \mathbf{D}^{compression} = 2D_{II}$. On se retrouve avec une trace de l'endommagement en traction et en bi-compression du même ordre de grandeur alors qu'en compression, elle est environ deux fois plus importante qu'en bi-compression. Ainsi, le même résultat est obtenu sur la valeur des fonctions de consolidation, c'est à dire $k(\text{tr} \mathbf{D}^{traction}) \approx k(\text{tr} \mathbf{D}^{bi-compression})$, alors que l'on souhaiterait $k(\mathbf{D}^{traction}) < k(\mathbf{D}^{compression}) \leq k(\mathbf{D}^{bi-compression})$.

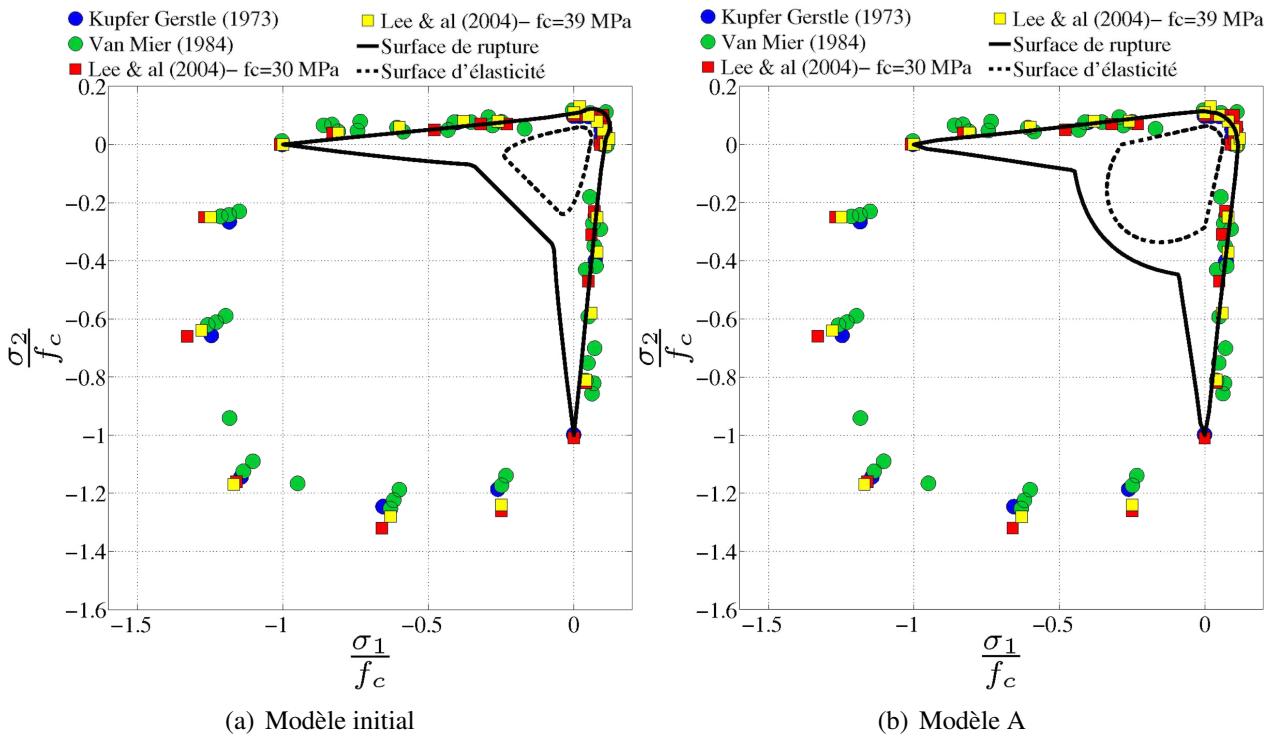


FIG. 2.3 – Comparaison des surfaces de rupture (pic) et d'élasticité entre le modèle initial et le modèle A

2.2 Introduction de la triaxialité des contraintes

Afin de remédier à ce problème, il a été décidé d'introduire la notion de triaxialité des contraintes', T_x (éq. 2.9) triple du taux de triaxialité (très utilisé dans les lois de comportement et d'endommagement des métaux [Lemaître et Chaboche, 1985]).

$$T_x = 3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_{eq}} \quad (2.9)$$

avec σ_H et σ_{eq} respectivement la contrainte hydrostatique et la contrainte équivalente de von Mises. Cette triaxialité des contraintes prend des valeurs très simples pour les cas de chargements que nous souhaitons mieux représenter. Le tableau 2.1 résume ces valeurs pour différents cas de chargements.

Cas de chargement	Valeur de T_x
Bi-traction (BT)	2
Traction (T)	1
Cisaillement (S)	0
Compression (C)	-1
Bi-compression (BC)	-2

TAB. 2.1 – Différentes valeurs de la triaxialité des contraintes T_x

2.2.1 Fonction $b(T_x)$ (modèle B)

La solution proposée pour garantir $k(\mathbf{D}^{traction}) < k(\mathbf{D}^{compression}) \leq k(\mathbf{D}^{bi-compression})$ consiste à remplacer le terme $\text{tr}\mathbf{D}$, l'argument de k_A , par le produit $b \cdot \|\mathbf{D}\|_\infty$ où b est une fonction à déterminer, dépendante de la triaxialité des contraintes. La norme infinie du tenseur d'endommagement $\|\mathbf{D}\|_\infty$ correspond à la plus grande des trois valeurs propres ($\|\mathbf{D}\|_\infty = \max(D_i)$). Nous avons tracé sur la figure 2.4 le rapport $\frac{\text{tr}\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|_\infty}$ en fonction de la triaxialité des contraintes pour différents chargements.

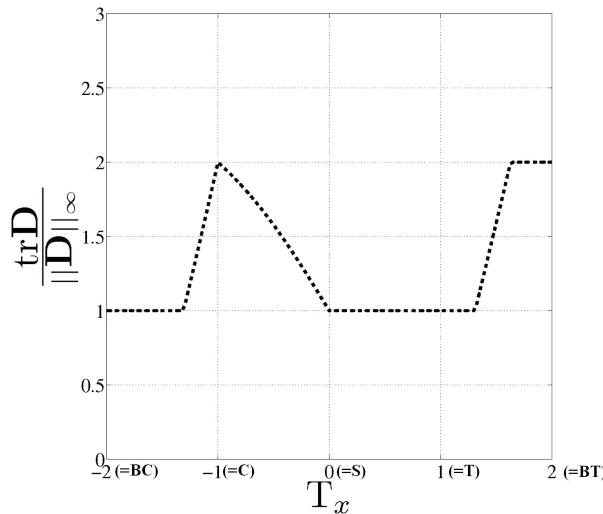


FIG. 2.4 – Valeur de $\frac{\text{tr}\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|_\infty}$ en fonction de la triaxialité des contraintes

Par rapport à cette figure, nous souhaitons définir une fonction $b(T_x)$ ayant une valeur en bi-compression ($T_x = -2$) proche ou supérieure à celle de compression ($T_x = -1$), ce qui n'est pas le cas du rapport $\frac{\text{tr}\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|_\infty}$. La première formulation de la fonction $b(T_x)$ que nous proposons est la suivante :

$$b(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 0 \\ (2 - b_t)T_x^2 + b_t & \text{si } -1 < T_x < 0 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases} \quad (2.10)$$

forçant des valeurs égales à 2 en compression et en bi-compression et des valeurs égales à 1 en traction et en bi-traction. Cette nouvelle fonction est comparée au rapport $\frac{\text{tr}\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|_\infty}$ sur la figure 2.5 et son impact sur la surface de rupture est représenté sur la figure 2.6. Ainsi une nouvelle fonction de consolidation $k_B = k(b(T_x) \|\mathbf{D}\|_\infty)$ est obtenue en remplaçant $\text{tr}\mathbf{D}$ dans la fonction de consolidation $k_A = k(\text{tr}\mathbf{D})$ par $b(T_x) \|\mathbf{D}\|_\infty$. Cette fonction k_B permet d'obtenir un nouveau modèle d'endommagement anisotrope (modèle B) et d'observer une amélioration de la forme de la surface de rupture pour les chargements confinés qui n'est pas encore suffisante par rapport à l'expérimental. Concernant l'évolution de la fonction $b(T_x)$ entre la compression et la traction ($-1 < T_x < 1$), la formulation choisie est une évolution semi-parabolique entre la compression et le cisaillement ($-1 < T_x < 0$), puis une évolution linéaire avec un plateau $b_t = 1$ (identique à celui de $\frac{\text{tr}\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|_\infty}$) pour tous les chargements hydrostatiques positifs ($T_x \geq 0$) dont la traction et la bi-traction. Ce premier choix permet d'avoir une évolution linéaire de la surface de rupture (fig. 2.6) entre la compression et le cisaillement. Nous verrons à la fin du chapitre 4 et plus en détails dans le chapitre 5, l'impact sur les calculs de structures de cette évolution notamment en la modifiant de deux façons différentes.

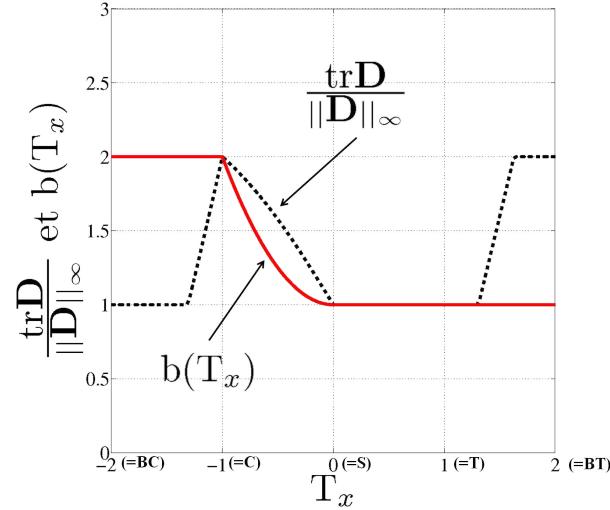


FIG. 2.5 – Comparaison du rapport $\frac{\text{tr}D}{\|D\|_\infty}$ et $b(T_x)$ en fonction de la triaxialité des contraintes

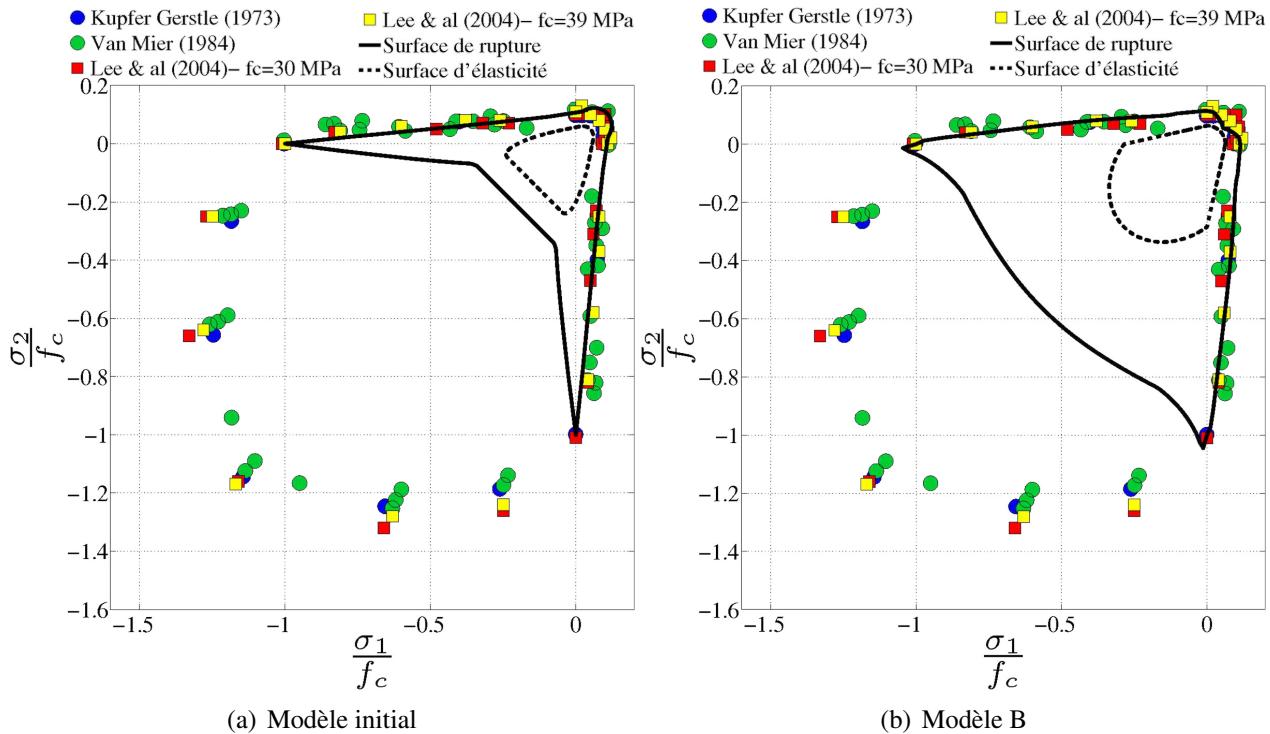
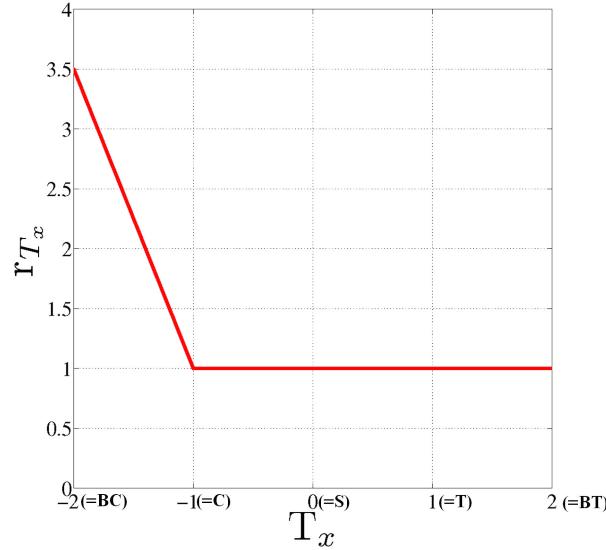


FIG. 2.6 – Comparaison des surfaces de rupture et d'élasticité entre le modèle initial et le modèle B incluant la fonction $b(T_x)$

FIG. 2.7 – Forme de la fonction r_{T_x}

2.2.2 Fonction r_{T_x} (modèle C)

Pour améliorer davantage cette surface de rupture pour les chargements confinés, une deuxième fonction appelée r_{T_x} est définie ci-dessous :

$$r_{T_x} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_x \geq -1 \\ -2.5T_x - 1.5 & \text{si } -2 < T_x < -1 \\ 3.5 & \text{si } T_x \leq -2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Cette fonction r_{T_x} , représentée sur la figure 2.7, intervient dans la fonction critère comme facteur multiplicatif de la fonction de consolidation k , (modèle C), de manière similaire à l'introduction de la fonction de triaxialité τ_x du critère de Mazars modifié (éq. 1.17 du chapitre 1).

Au final le modèle C s'écrit :

$$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(\|\mathbf{D}\|_\infty) r_{T_x} \quad (2.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{equiv} = \| < \tilde{\sigma} >_+ \| + (r_1 \| < \tilde{\sigma} >_- \| + r_2 \text{tr} < \tilde{\sigma} >_-) r_{T_x} \quad (2.13)$$

$$k(\|\mathbf{D}\|_\infty) = \alpha \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + \beta \cdot b(T_x) \|\mathbf{D}\|_\infty \right] \quad (2.14)$$

On a ainsi correctement modifié la forme de la surface de rupture (fig. 2.8) pour les chargements confinés.

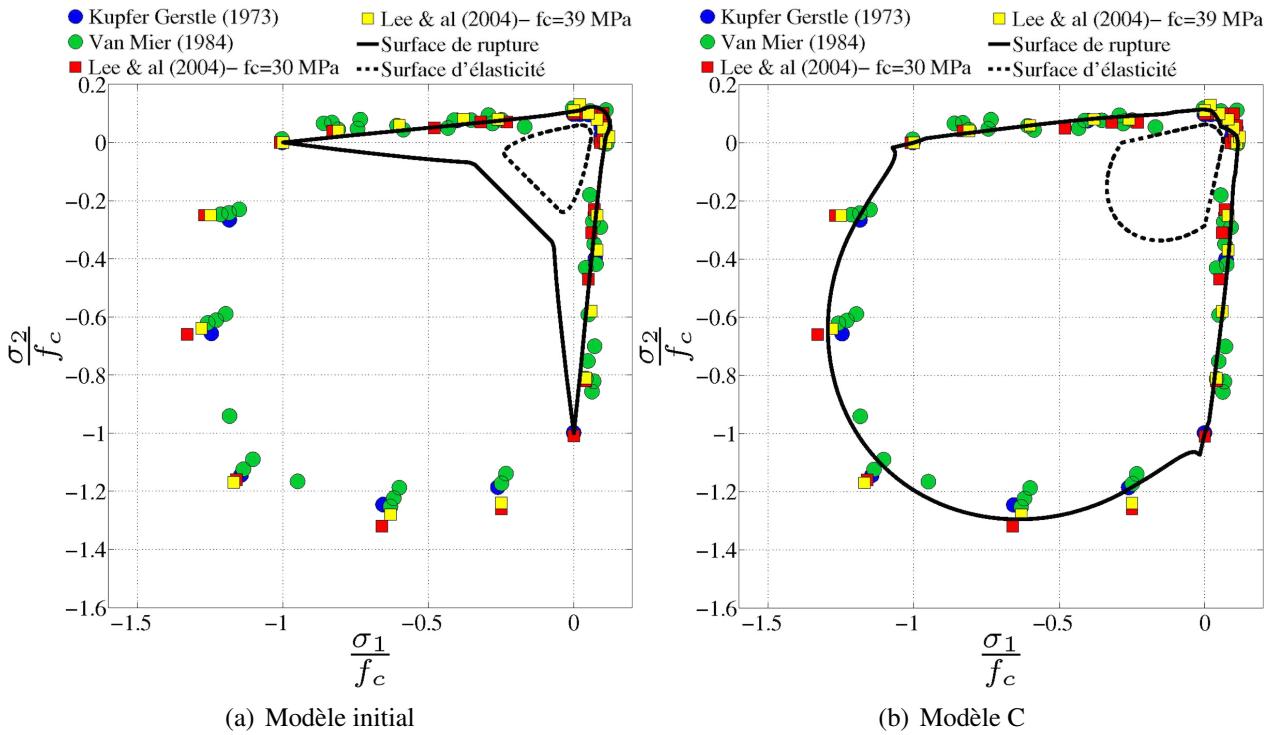


FIG. 2.8 – Comparaison des surfaces de rupture et d'élasticité entre le modèle initial et le modèle C incluant les fonctions $b(T_x)$ et r_{T_x}

3 Sensibilité hydrostatique : couplage module de compressibilité / endommagement anisotrope

3.1 Couplage hydrostatique initial $\tilde{K} = \tilde{K}(D_H)$

La partie hydrostatique du potentiel d'état du modèle initial est affectée par l'endommagement uniquement pour les contraintes hydrostatiques positives à l'aide d'une fonction que [Delaplace et Desmorat, 2007] appellent $h(\mathbf{D})$ (éq. 2.15). Cette fonction, dans le modèle initial, dépend de l'endommagement hydrostatique $D_H = \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3}$ et est définie par l'équation (2.16).

$$\rho \psi^* = \frac{1}{4G} \text{tr} \left[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D \right] + \frac{1}{18K} (h(\mathbf{D}) < \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_+^2 + < \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_-^2) \quad (2.15)$$

avec K et G respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau sain et,

$$h(\mathbf{D}) = \left\langle \frac{1}{1 - \eta D_H} \right\rangle_+ \quad D_H = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \quad (2.16)$$

Si nous formulons le potentiel d'état en fonction du module de compressibilité effectif \tilde{K} , son expression est la suivante :

$$\rho \psi^* = \frac{1}{4G} \text{tr} \left[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D \right] + \frac{1}{18} \left(\frac{< \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_+^2}{\tilde{K}} + \frac{< \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_-^2}{K} \right) \quad (2.17)$$

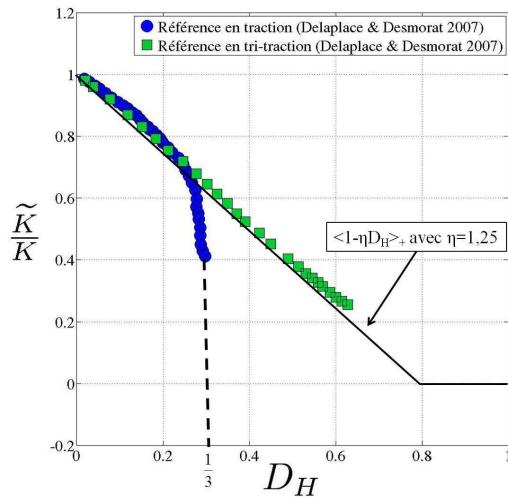


FIG. 2.9 – Evolution du rapport des modules de compressibilité $\frac{\tilde{K}}{K}$ en fonction de l'endommagement hydrostatique d'un chargement de traction et de tri-traction d'après [Delaplace et Desmorat, 2007]. Les marques des courbes de référence correspondent à une modélisation par éléments discrets.

$$\text{avec } \tilde{K} = \frac{K}{h(\mathbf{D})} = K \langle 1 - \eta D_H \rangle_+ \quad (2.18)$$

En utilisant un modèle tridimensionnel d'éléments discrets basé sur les cellules de Voronoï comme "référence numérique" pour des chargements de traction et de tri-traction, [Delaplace et Desmorat, 2007] ont déterminé la valeur du paramètre de sensibilité hydrostatique $\eta \approx 1,25$ pour des matériaux quasi-fragiles comme le béton et pour des endommagements pas trop élevés (fig. 2.9). Avec le modèle d'endommagement anisotrope initial, [Delaplace et Desmorat, 2007] montrent que la réponse en traction uniaxiale est peu influencée par le paramètre η , contrairement à celle en tri-traction.

Toutefois, cette fonction possède un inconvénient majeur. Lorsque l'on trace $\frac{1}{h(\mathbf{D})} = \frac{\tilde{K}}{K}$ en fonction de l'endommagement hydrostatique D_H en traction (fig. 2.10(a)), comme en tri-traction (fig. 2.10(b)), on s'aperçoit qu'aucune valeur de η , commune aux deux cas de chargements, ne permet de représenter correctement les cas numériques de "référence" jusqu'à rupture (et donc aux endommagements élevés). Avec la valeur donnée par [Delaplace et Desmorat, 2007] $\eta = 1,25$ nous remarquons que l'évolution du rapport $\frac{\tilde{K}}{K}$ est bien représentée en tri-traction comme au début de la traction vis à vis des données de référence, mais pas à la fin de la traction quand l'endommagement devient grand. De plus, deux droites sur les trois en traction ne descendent pas jusqu'à un rapport $\frac{\tilde{K}}{K}$ nul alors que l'endommagement est égal à 1 ($D_H \rightarrow \frac{1}{3}$, en traction, $D_H \rightarrow \frac{2}{3}$, en bi-traction, voir tableau 2.2). Sur la réponse contrainte-déformation, ce constat signifie que lorsque l'endommagement est égal à 1, la contrainte n'est pas nulle (le rapport $\frac{\tilde{K}}{K}$ doit être nul pour avoir une contrainte nulle). Physiquement cela correspond à la rupture brutale (observée) des modèles d'endommagement isotropes avec un endommagement critique inférieur à 1. Le passage à contrainte nulle relève alors d'un artifice numérique. Dans l'idéal, l'ensemble des chargements devrait conduire à contrainte nulle pour un endommagement égal à 1 afin de pouvoir rendre compte qu'un élément rompu, car totalement endommagé, ne transmet plus d'efforts quel que soit le type de chargement.

En tri-traction ($D_H = 1$ lorsque $D_I = D_{II} = D_{III}$, voir tab. 2.2) nous avons le phénomène inverse

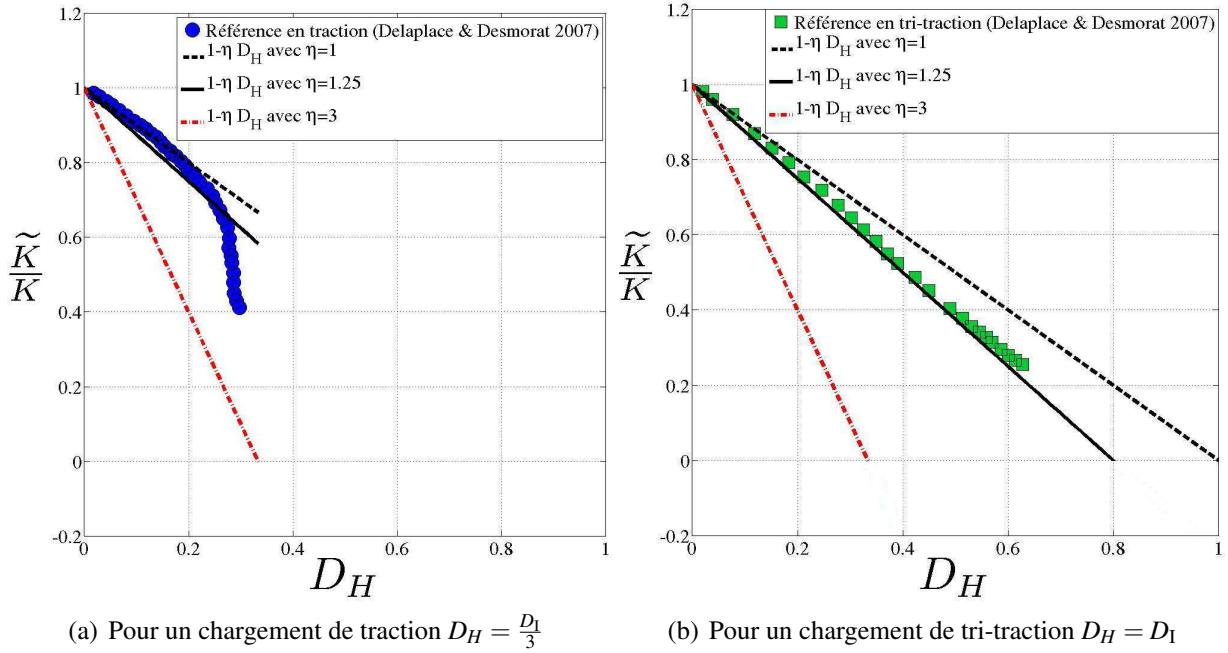


FIG. 2.10 – Evolution du rapport des modules de compressibilité, à l'aide de la fonction $h(\mathbf{D})$ pour 3 valeurs de paramètre η , en fonction de l'endommagement hydrostatique

en ayant deux droites sur les trois avec un rapport \tilde{K}/K pouvant se retrouver négatif. Grâce aux parties positives (éq. 2.16) le rapport reste nul aux endommagements élevés (fig. 2.10(b)). Sur la réponse contrainte-déformation, ce constat signifie que la contrainte est nulle, avant même que l'endommagement soit égal à 1 (mais reste nul grâce aux parties positives¹ des équations (2.16) et (2.18), et même négative si aucun traitement numérique n'est mis en place).

Changement	Forme du tenseur d'endommagement	Expression de D_H	Intervalle D_H
Traction	$\mathbf{D} = \text{diag}[D_I, 0, 0]$	$D_H = \frac{\text{tr}\mathbf{D}}{3} = \frac{D_I}{3}$	$0 \leq D_H \leq \frac{1}{3}$
Bi-traction	$\mathbf{D} = \text{diag}[D_I, D_{II} = D_I, 0]$	$D_H = \frac{2D_I}{3}$	$0 \leq D_H \leq \frac{2}{3}$
Tri-traction	$\mathbf{D} = \text{diag}[D_I, D_{II} = D_I, D_{III} = D_{II}]$	$D_H = \frac{3D_I}{3} = D_I$	$0 \leq D_H \leq 1$

TAB. 2.2 – Valeurs de l'endommagement hydrostatique pour différents cas de chargements

3.2 Proposition d'un nouveau couplage (modèle D)

Un nouveau couplage entre module de compressibilité et endommagement est alors proposé pour permettre d'avoir un rapport \tilde{K}/K nul lorsque l'endommagement est égal à 1 exactement. Cela aura pour conséquence d'avoir une contrainte nulle lorsque l'endommagement est égal à 1, quel que soit le type de chargement à contrainte hydrostatique positive. Pour construire cette fonction, nous allons chercher à rendre compte des résultats de référence de [Delaplace et Desmorat, 2007], représentés

¹nécessaire pour garantir la positivité du tenseur d'élasticité endommagé ainsi que la positivité de la dissipation intrinsèque

figure 2.9, jusqu'à rupture. On observe sur cette figure une évolution linéaire pour la tri-traction et une évolution tout d'abord linéaire suivie d'une chute brutale pour la traction. La fonction $h(\mathbf{D})$, proposée par [Desmorat, 2004] et présentée précédemment, est utilisable pour la tri-traction et le début de la traction. Concernant la chute brutale de \tilde{K} en traction, évolution différente de la tri-traction, elle semble se terminer en $D_H = \frac{1}{3}$, c'est à dire en $D_I = \|\mathbf{D}\|_\infty = 1$. Nous proposons une nouvelle fonction $h^*(\mathbf{D}) = \frac{K}{\tilde{K}}$ définie par l'équation (2.19) afin de représenter ce changement d'évolution.

$$h^*(\mathbf{D}) = \frac{1}{1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^n} \quad (2.19)$$

avec $\|\mathbf{D}\|_\infty = \max(D_i)$ et "n" un paramètre. La figure 2.11 montre l'influence de ce paramètre en fonction des données de référence.

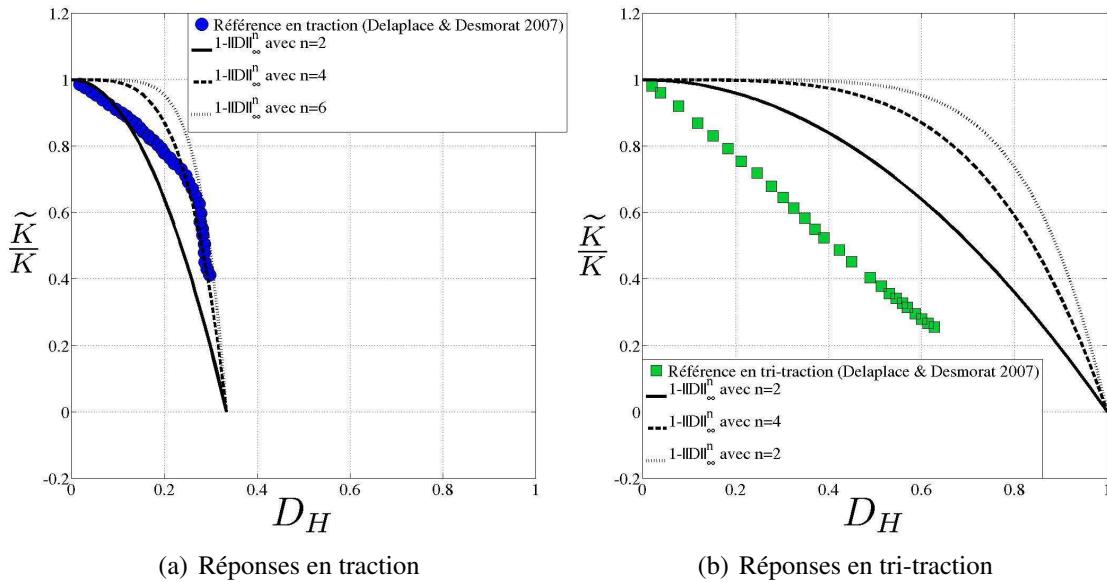


FIG. 2.11 – Evolution du rapport des modules de compressibilité, à l'aide de la fonction $h^*(\mathbf{D})$ pour 3 valeurs du paramètre n , en fonction de l'endommagement hydrostatique

Afin de reproduire la partie linéaire en D_H aux faibles endommagements et la chute brutale selon l'équation 2.19 aux forts endommagements, il suffit de poser :

$$\frac{\tilde{K}}{K} = \left\langle \min \left[\frac{1}{h^*(\mathbf{D})}; \frac{1}{h(\mathbf{D})} \right] \right\rangle_+ = \langle \min [1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^n; 1 - \eta D_H] \rangle_+ = \frac{1}{q(\mathbf{D})} \quad (2.20)$$

ce qui définit au passage la fonction $q(\mathbf{D})$ comme monotone croissante (cette propriété sera importante pour démontrer la positivité de la dissipation intrinsèque dans la partie 8 de ce chapitre).

Grâce aux éléments discrets, l'intérêt de définir \tilde{K} linéaire en D_H aux faibles endommagements et \tilde{K} non linéaire en infini $\|\mathbf{D}\|_\infty$ aux forts endommagements dans la partie hydrostatique a pu être mis en avant et le couplage module de compressibilité/endommagement anisotrope mieux compris. Les valeurs des paramètres "n" et η ont pu être déterminées : $n = 4$ et $\eta = 1.25$. Les réponses pour les chargements de traction, bi-traction et tri-traction sont représentées respectivement sur la figure 2.12. Pour ces trois cas de chargements, le rapport $\frac{\tilde{K}}{K}$ est bien nul lorsque l'un des endommagements principaux est égal à 1.

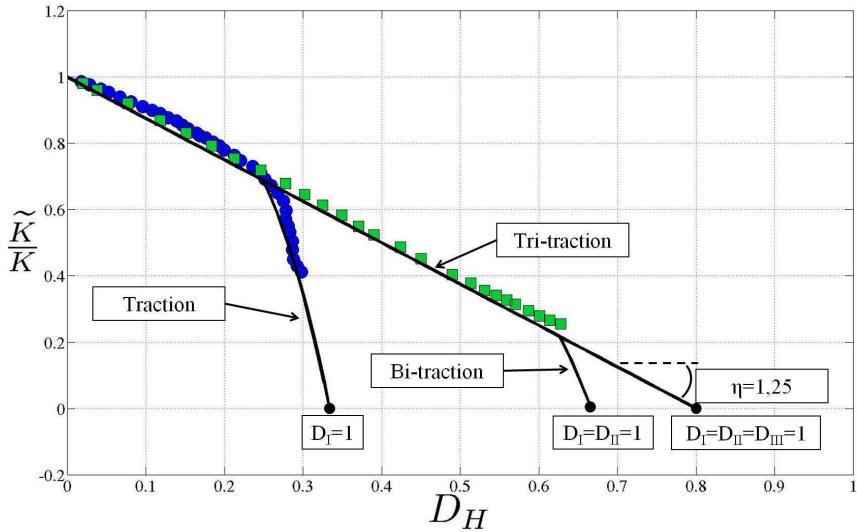


FIG. 2.12 – Evolution du rapport des modules de compressibilité, à l'aide de la fonction $\frac{\tilde{K}}{K} = \frac{1}{q(\mathbf{D})}$ pour $\eta = 1.25$ et $n = 4$, en fonction de l'endommagement hydrostatique

3.3 Surface de rupture correspondante

Le nouveau couplage module de compressibilité /endommagement est intégré au modèle d'endommagement anisotrope (en plus de la fonction critère f donnée par l'équation 2.12) et permet d'obtenir le modèle D. La surface de rupture 2D correspondante est donnée sur la figure 2.13. Elle permet de valider le modèle pour la prise en compte des chargements multiaxiaux et notamment ceux confinés. Le jeu de paramètres utilisé pour obtenir cette surface de rupture est présentée dans le tableau 2.3.

Paramètre	v	E	η	n	σ_y^t	σ_y^c	σ_y^{bc}	α	β
Valeur	0.2	40	1	4	2 MPa	9 MPa	9 MPa	12 MPa	0.65

TAB. 2.3 – Jeu de paramètres utilisé lors du développement du modèle

Le modèle d'endommagement anisotrope ne prenant pas en compte le phénomène de compaction, la surface de rupture 3D est ouverte suivant l'axe des contraintes hydrostatiques négatives. Une solution pour fermer la surface de rupture consisterait à modifier la loi d'évolution de l'endommagement actuelle $\dot{D} = \dot{\lambda} < \mathbf{e} >_+$. Effectivement, celle-ci conduit à un tenseur d'endommagement $\mathbf{D} = 0$ pour des chargements ayant les 3 composantes principales négatives du tenseur des déformations, $\mathbf{e} = \text{diag} [\varepsilon_I < 0, \varepsilon_{II} < 0, \varepsilon_{III} < 0]$, comme la tri-compression,. Une proposition, qui n'est pas étudiée dans cette thèse, serait de prendre en compte les déformations principales négatives dans la loi d'évolution de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda} (< \mathbf{e} >_+ - e < \mathbf{e} >_-) \quad (2.21)$$

avec un paramètre e positif très inférieur à 1. Remarque : le tenseur $- < \mathbf{e} >_-$ est un tenseur positif.

Rappelons finalement que ce modèle (D) ne fait pas intervenir l'endommagement actif d_{act} dans la fonction critère. Son domaine de validité est donc limité (comme pour le modèle initial en $\kappa(\text{tr} \mathbf{D})$, comme pour les modèles de plasticité à écrouissage isotrope) aux cas de chargements –multiaxiaux–

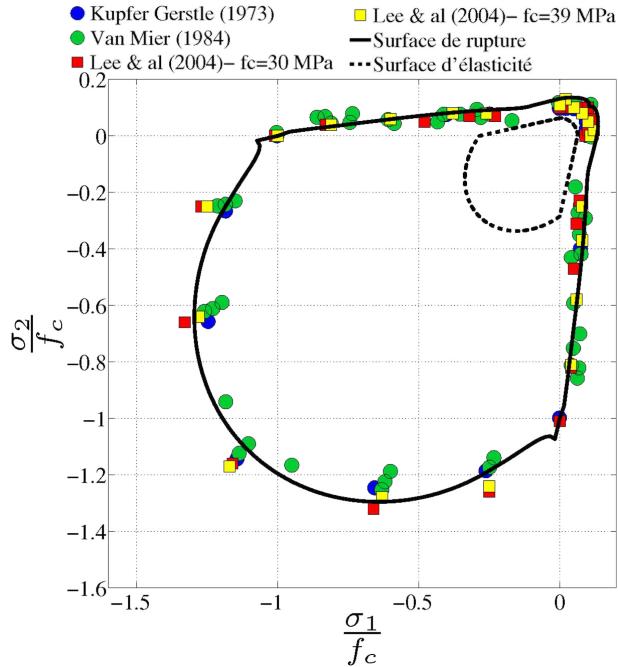


FIG. 2.13 – Surfaces d'élasticité et de rupture du modèle (D) incluant les fonctions $b(T_x)$, r_{T_x} et $q(\mathbf{D})$

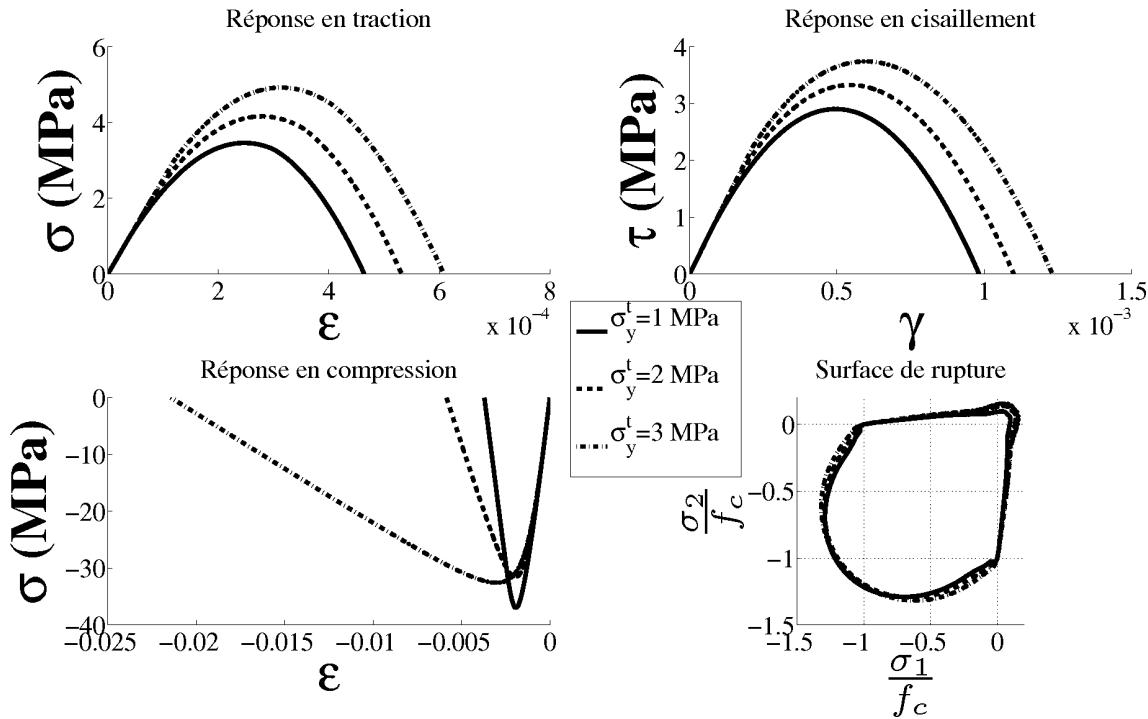
monotones. L'extension aux chargements alternés (les contraintes changeant le signe) sera faite dans la partie 5 de ce chapitre, lors de la définition d'un nouvel endommagement actif.

4 Etude de sensibilité aux paramètres

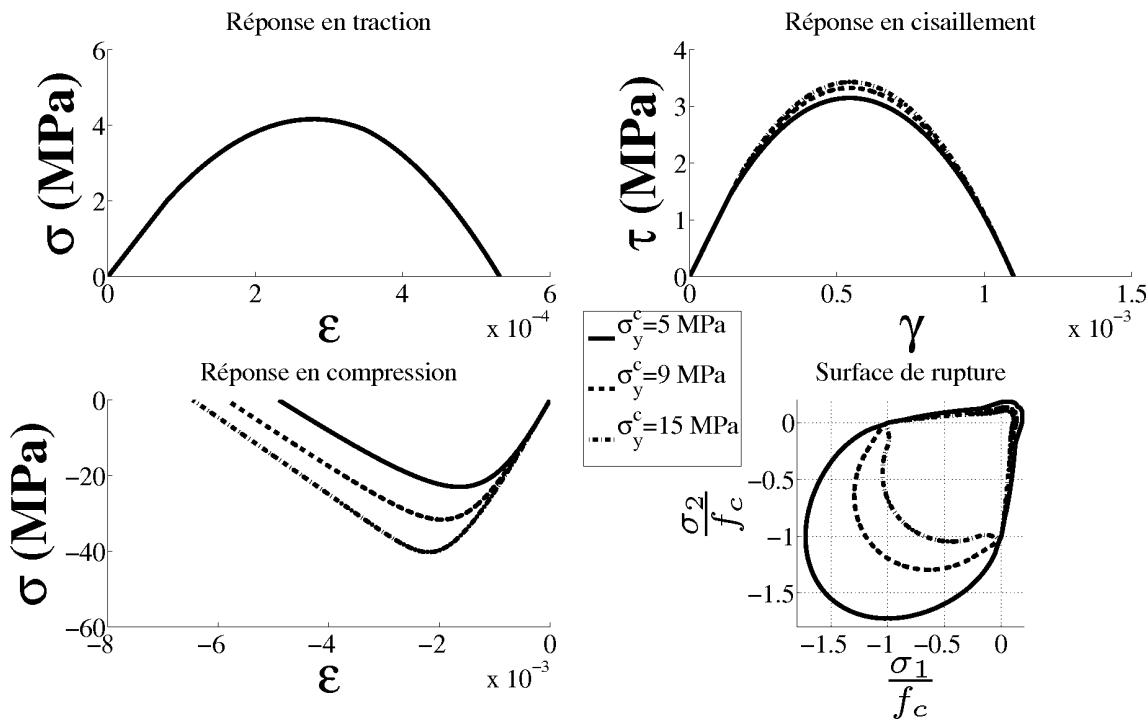
Dans cette partie, nous nous intéressons à l'influence des paramètres du modèle sur les réponses de différents chargements comme la traction, le cisaillement et la compression, et sur la forme de la surface de rupture. Le jeu de paramètres utilisé est celui du tableau 2.3 (partie 3.3 de ce chapitre). Cette étude de sensibilité va aussi permettre de fixer définitivement la valeur de certains paramètres qui ont de faibles effets sur l'ensemble du comportement du modèle.

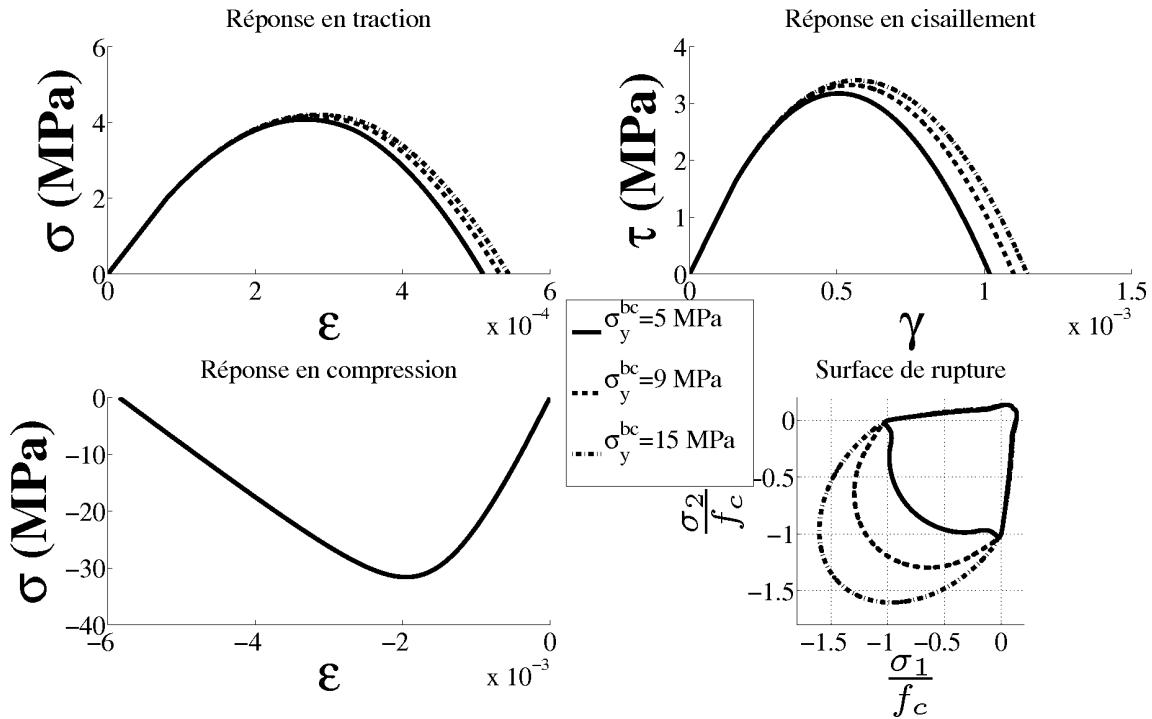
La limite d'élasticité σ_y^t (éq. 2.4, fig. 2.14) permet principalement de modifier la réponse en traction et cisaillement et modifie la pente post-pic en compression. Ainsi plus la limite d'élasticité σ_y^t est importante plus le pic de contrainte en traction et cisaillement est important et plus la déformation à contrainte nulle en compression est grande. A noter que la valeur du paramètre σ_y^t correspond à une résistance en traction f_t donnée (à autres paramètres constants). Ici, nous avons la correspondance $\sigma_y^t = 1\text{ MPa} \rightarrow f_t = 3.3\text{ MPa}$, $\sigma_y^t = 2\text{ MPa} \rightarrow f_t = 4\text{ MPa}$, $\sigma_y^t = 3\text{ MPa} \rightarrow f_t = 4.8\text{ MPa}$. Cette correspondance peut, pour certains bétons, ne pas être adaptée. Ce sera le cas dans le chapitre 4 (partie 3) : lors du dépouillement des différents essais de fendage, la résistance moyenne en traction de notre béton est $f_t = 3\text{ MPa}$. Ne souhaitant pas avoir une limite d'élasticité trop faible (évitant $\sigma_y^t < 1\text{ MPa}$) afin de rendre compte de la réponse contrainte-déformation, une solution simple et rapide sera de modifier le plateau en traction b_t de la fonction $b(T_x)$ (éq. 2.10) afin d'avoir une limite d'élasticité de 2MPa pour une résistance $f_t = 3\text{ MPa}$.

L'augmentation de la limite d'élasticité en compression σ_y^c (éq. 2.4, fig. 2.15) ou en bi-compression σ_y^{bc} (éq. 2.4, fig. 2.16) permet d'avoir un pic de contrainte en compression (resp. en bi-compression)

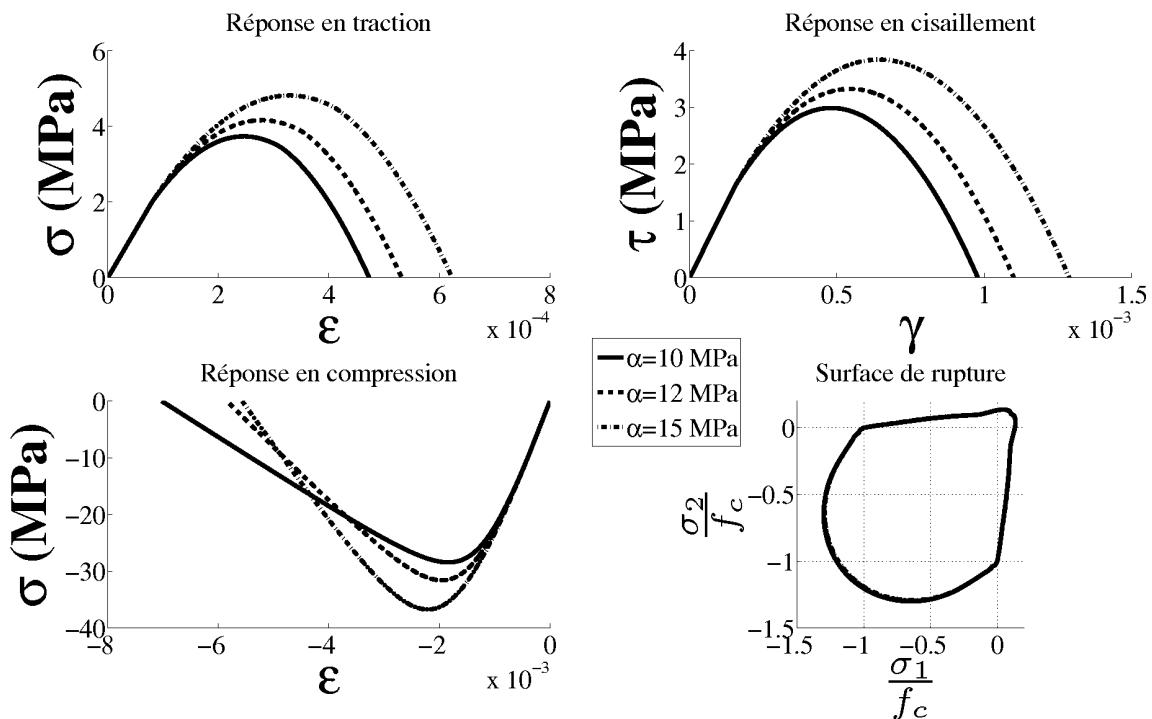
FIG. 2.14 – Paramètre σ_y^t

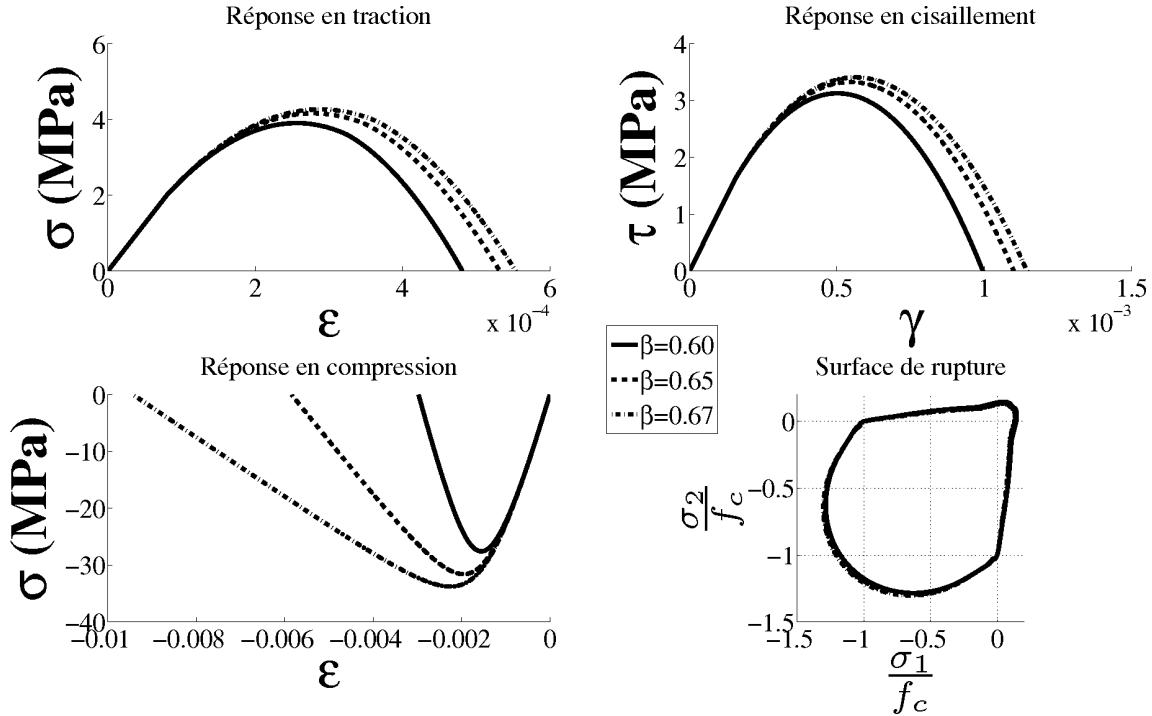
plus important, ce qui a un impact direct sur la forme de la surface de rupture.

FIG. 2.15 – Paramètre σ_y^c

FIG. 2.16 – Paramètre σ_y^{bc}

Concernant le paramètre α (éq. 2.14, fig. 2.17), homogène à une contrainte, plus sa valeur est élevée, plus les pics pour l'ensemble des chargements augmentent sans modifier la surface de rupture.

FIG. 2.17 – Paramètre α

FIG. 2.18 – Paramètre β

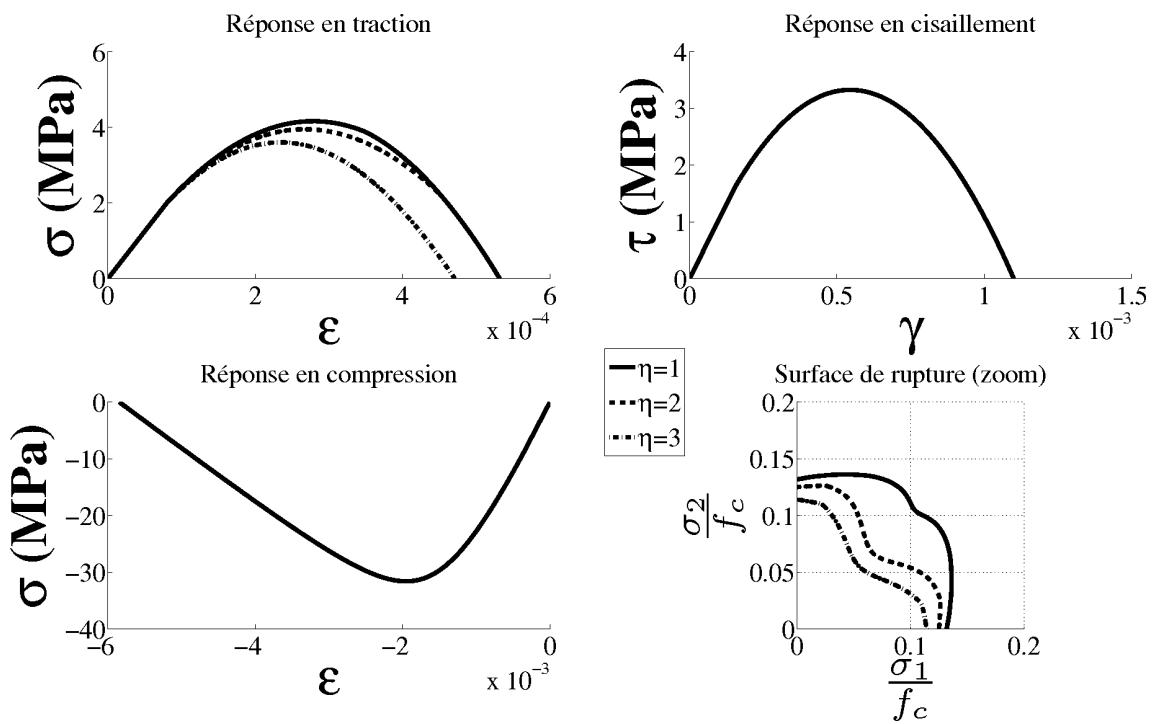
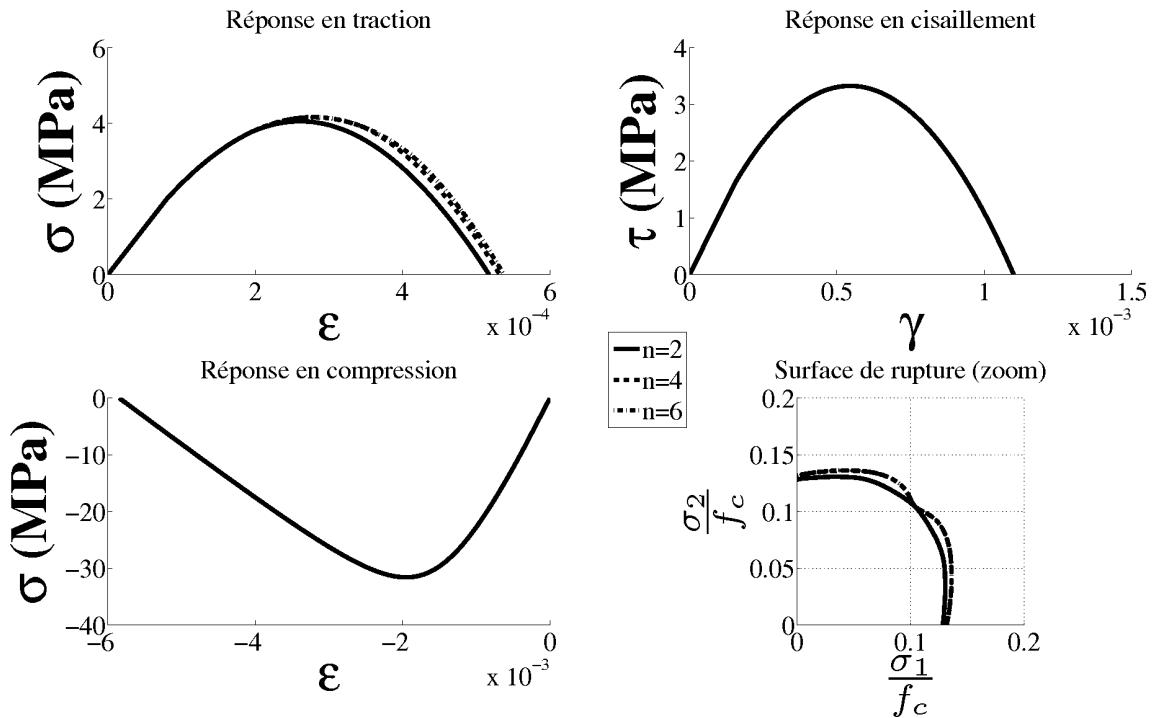
Le paramètre β (éq. 2.14, fig. 2.18) est complémentaire du paramètre σ_y^t . Effectivement, plus la valeur de β est grande plus la déformation à contrainte nulle en compression est importante. Ainsi ce paramètre permet de réajuster la réponse en compression lorsque la valeur de σ_y^t est modifiée.

Comme nous l'avons vu précédemment, les paramètres η et n permettent de modifier la réponse pour des chargements à contraintes hydrostatiques positives. Les figures 2.19 et 2.20 montrent que ces deux paramètres ont une influence très faible sur la surface de rupture, mais les valeurs $n = 4$, $n = 6$ rendent (faiblement) non convexe la surface de rupture. Nous avons donc décidé de les fixer pour la suite à $\eta = 1$ et $n = 2$ pour le béton valeurs que nous considérons comme valeurs par défaut pour l'ensemble des bétons. La valeur $\eta = 1$ proche de la valeur de 1,25 obtenue par éléments discrets permet de pouvoir aller en tri-traction jusqu'à $D_H = \|\mathbf{D}\|_\infty = 1$.

5 Nouvelle définition de l'endommagement actif (modèle E)

Pour étendre le domaine de validité du modèle initial aux chargements alternés (ce sans avoir à introduire l'équivalent d'un écrouissage cinématique, section 3.4.2 du chapitre 1), la formulation de la fonction critère doit être réécrite en remplaçant $\text{tr} \mathbf{D}$ par l'endommagement actif. Pour le modèle proposé ici, la fonction critère est réécrite en remplaçant la norme infinie $\|\mathbf{D}\|_\infty$ par le produit contracté entre le tenseur d'endommagement et le tenseur des déformations positives normé par la trace de ce dernier (ainsi les réponses en traction monotone et en compression monotone demeurent inchangées).

Cette nouvelle grandeur, appelée d_ϵ (éq. 2.22), est légèrement différente de la définition du d_{act} du modèle initial, mais elle est toujours appelée "endommagement actif". Elle est introduite dans la fonction critère en lieu et place de $\|\mathbf{D}\|_\infty$ comme suit (γ étant un paramètre que nous fixerons très

FIG. 2.19 – Paramètre η FIG. 2.20 – Paramètre n

prochainement à 2)

$$d_\varepsilon = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^\gamma}{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^\gamma} \quad f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(d_\varepsilon) r_{T_x} \quad (2.22)$$

Rappelons que cette nouvelle formulation de l'endommagement actif a été proposée afin de retrouver le même comportement en traction monotone et compression monotone que celui que nous avions pour $k_D = k(\|\mathbf{D}\|_\infty)$. En effet, pour un chargement de traction suivant la direction 1 :

$$d_\varepsilon^{trac} = \frac{\begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\gamma}{\varepsilon_I^\gamma} = \frac{D_I \varepsilon_I^\gamma}{\varepsilon_I^\gamma} = D_I = \max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty^{trac} \quad (2.23)$$

Supposons un chargement de compression suivant la direction 1 :

$$d_\varepsilon^{comp} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{II} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III} (= D_{II}) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} (= \varepsilon_{II}) \end{pmatrix}^\gamma}{\varepsilon_{II}^\gamma + \varepsilon_{III}^\gamma} = \frac{2D_{II} \varepsilon_{II}^\gamma}{2\varepsilon_{II}^\gamma} = D_{II} = \max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty^{comp} \quad (2.24)$$

Supposons maintenant un chargement de traction puis de compression suivant la direction 1 :

$$d_\varepsilon^{trac-comp} = \frac{\begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & D_{II} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III} (= D_{II}) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} (= \varepsilon_{II}) \end{pmatrix}^\gamma}{\varepsilon_{II}^\gamma + \varepsilon_{III}^\gamma} = \frac{2D_{II} \varepsilon_{II}^\gamma}{2\varepsilon_{II}^\gamma} = D_{II} \neq \|\mathbf{D}\|_\infty \quad (2.25)$$

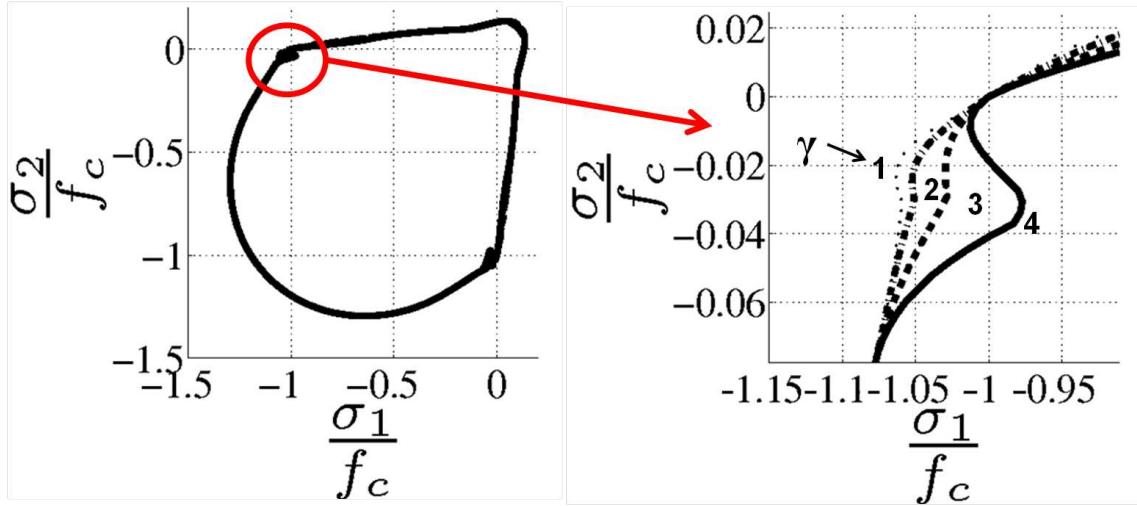
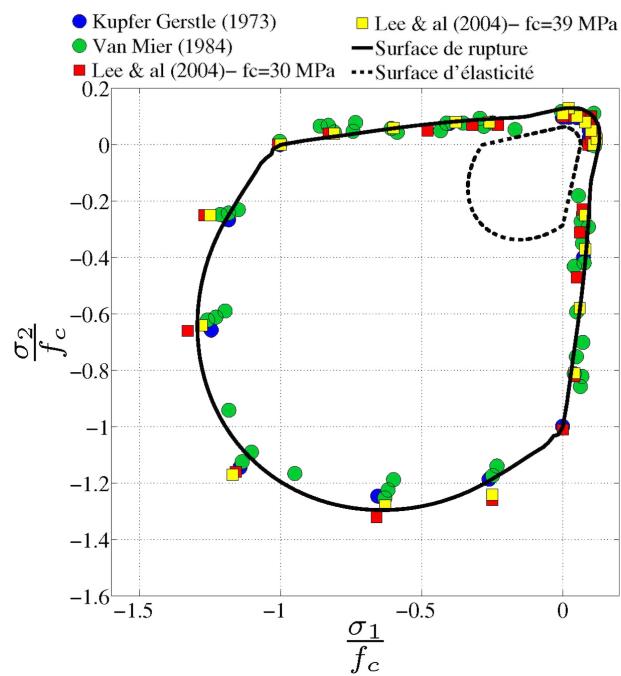
En plus du dénominateur différent de celui de d_{act} , une modification a été réalisée par rapport à la formulation de l'endommagement actif initial après avoir contesté pour $\gamma = 1$ un défaut de non convexité trop importante de la surface de rupture autour de la compression. Une puissance γ a donc été ajoutée sur le tenseur $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$ et sur la trace de celui-ci (éq. 2.22). L'influence de γ est visible sur la surface de rupture (fig. 2.21). Les formes de surface obtenues nous permettent de fixer la valeur de γ définitivement à 2 de sorte que :

$$d_\varepsilon = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2} \quad (2.26)$$

Cet endommagement actif permet de tracer la surface de rupture du modèle proposé E sur la figure 2.22.

6 Prise en compte de l'effet de vitesse

Afin de prendre en compte l'effet de vitesse sur la résistance en traction constaté expérimentalement, la loi d'évolution de l'endommagement est modifiée afin de la rendre dépendante de la vitesse de déformation.

FIG. 2.21 – Influence de l'exposant γ sur la surface de ruptureFIG. 2.22 – Surfaces d'élasticité et de rupture du modèle E incluant les fonctions $b(T_x)$, r_{T_x} , $q(\mathbf{D})$ et l'endommagement actif d_ϵ avec $\gamma = 2$

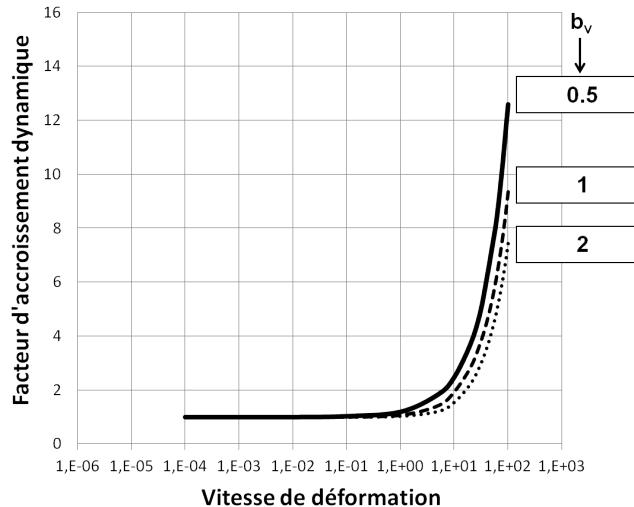


FIG. 2.23 – Influence du paramètre b_v avec $\dot{D}_\infty = 50000s^{-1}$

6.1 Loi d'évolution à taux d'endommagement limité

La loi, initialement proposée par [Allix et Deü, 1997] pour les matériaux composites et introduite dans le modèle d'endommagement anisotrope initial par [Gatuingt *et al.*, 2008], est reprise et introduite dans le nouveau critère d'endommagement avec endommagement actif :

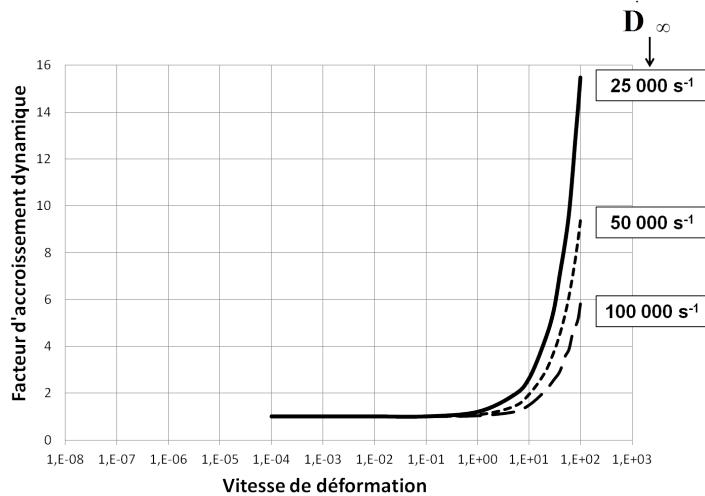
$$f = g(\tilde{\sigma}_{equiv}) - d_\epsilon \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f < 0 : \text{élasticité} \\ f = D_v(\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\dot{d}_\epsilon) \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\dot{d}_\epsilon = \dot{D}_\infty[1 - \exp(-b_v(g(\tilde{\sigma}_{equiv}) - d_\epsilon))] \quad (2.27)$$

Rappelons que \dot{D}_∞ est un paramètre du modèle représentant la vitesse de saturation du taux d'endommagement, tandis que le paramètre b_v est sans dimension. L'implantation numérique de cette loi est présentée dans le chapitre suivant.

6.2 Etude de sensibilité aux paramètres

Une étude de sensibilité aux paramètres de la loi (2.27) est présentée en traçant le facteur d'accroissement dynamique en fonction de différentes vitesses de déformation. Ce facteur d'accroissement pour des chargements de traction uniaxiale correspond à la résistance (contrainte pic) en dynamique normée par la contrainte à rupture en quasi-statique. Sur les figures 2.23 et 2.24, les deux paramètres de la loi d'évolution à taux d'endommagement limité b_v et \dot{D}_∞ ont une influence identique sur la réponse (pour des valeurs pas trop éloignées des valeurs initiales). Toutefois, lorsque l'on multiplie les valeurs de ces paramètres par deux, l'augmentation du facteur d'accroissement est plus significative en augmentant \dot{D}_∞ .

FIG. 2.24 – Influence du paramètre \dot{D}_∞ avec $b_v = 1$

6.3 Validation d'un jeu de paramètres à l'aide de résultats expérimentaux

[Chambart, 2009] propose dans sa thèse un jeu de paramètres ($\dot{D}_\infty = 50000 s^{-1}$ et $b_v = 1$) qui est reporté sur la figure 2.25. Si l'on observe le point se trouvant à une vitesse de déformation de $100 s^{-1}$, le modèle donne un rapport autour de 9 alors que la majorité des points expérimentaux se trouvent plutôt aux alentours de 12. Un nouveau jeu de paramètres est donc proposé ($\dot{D}_\infty = 50000 s^{-1}$ et $b_v = 0.5$), qui permet ainsi au modèle de mieux prendre en compte les effets de vitesse observés expérimentalement (fig. 2.25).

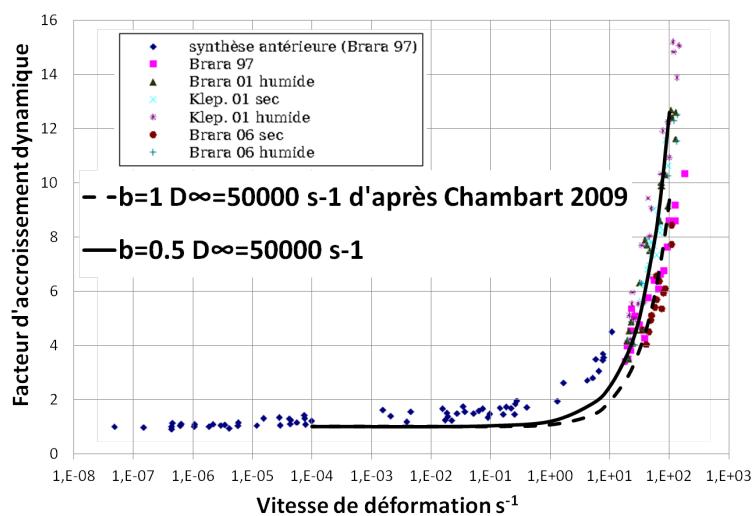


FIG. 2.25 – Réponses du modèle avec deux jeux de paramètres différents

7 Bilan - Equations du modèle

Un récapitulatif de toutes les modifications successives effectuées à partir du modèle initial afin d'obtenir un nouveau modèle d'endommagement anisotrope est présenté dans le tableau 2.4.

Modèle	Fonction critère	Couplage module de compressibilité-endommagement
initial	$f = \widehat{\varepsilon} - \kappa(\text{tr} \mathbf{D}) \quad \text{ou} \quad f = \widehat{\varepsilon} - \kappa(d_{act})$ $\kappa(\text{tr} \mathbf{D}) = a \cdot \tan\left(\frac{\text{tr} \mathbf{D}}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)$ $\widehat{\varepsilon} = \sqrt{<\boldsymbol{\varepsilon}>_+ : <\boldsymbol{\varepsilon}>_+}$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle 1 - D_H \rangle_+$
A	$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(\text{tr} \mathbf{D})$ $k(\text{tr} \mathbf{D}) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \text{tr} \mathbf{D}\right]$ $\tilde{\sigma}_{equiv} = \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \ + r_1 \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \ + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_-$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle 1 - D_H \rangle_+$
B	$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(\text{tr} \mathbf{D})$ $k(\ \mathbf{D}\ _\infty) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \cdot b(T_x) \ \mathbf{D}\ _\infty\right]$ $\tilde{\sigma}_{equiv} = \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \ + r_1 \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \ + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_-$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle 1 - D_H \rangle_+$
C	$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(\ \mathbf{D}\ _\infty) r_{T_x}$ $k(\ \mathbf{D}\ _\infty) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \cdot b(T_x) \ \mathbf{D}\ _\infty\right]$ $\tilde{\sigma}_{equiv} = \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \ + (r_1 \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \ + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_-) r_{T_x}$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle 1 - D_H \rangle_+$
D	$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(\ \mathbf{D}\ _\infty) r_{T_x}$ $k(\ \mathbf{D}\ _\infty) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \cdot b(T_x) \ \mathbf{D}\ _\infty\right]$ $\tilde{\sigma}_{equiv} = \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \ + (r_1 \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \ + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_-) r_{T_x}$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle \min[1 - \ \mathbf{D}\ _\infty^2; 1 - D_H] \rangle_+$
E = DADC	$f = \tilde{\sigma}_{equiv} - k(d_\varepsilon) r_{T_x}$ $k(d_\varepsilon) = \alpha \cdot \tan\left[\arctan\left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha}\right) + \beta \cdot b(T_x) d_\varepsilon\right]$ $\tilde{\sigma}_{equiv} = \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_+ \ + (r_1 \ <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_- \ + r_2 \text{tr} <\tilde{\boldsymbol{\sigma}}>_-) r_{T_x}$	$\frac{\tilde{K}}{K} = \langle \min[1 - \ \mathbf{D}\ _\infty^2; 1 - D_H] \rangle_+$

TAB. 2.4 – Evolution du modèle proposé pour arriver à la version finale, le modèle E = modèle DADC

Ainsi, le modèle proposé dans ce chapitre possèdent les caractéristiques suivantes :

- Il permet de prendre en compte les chargements confinés ² grâce à une nouvelle fonction critère.
- L'effet de refermeture des micro-fissures sous chargements alternés et l'effet de viscosité existant dans le modèle initial ont été reformulés et réintégrés dans ce nouveau modèle.
- Obtenir une plus grande dissymétrie traction-compression est rendu possible, grâce notamment à l'introduction directe des limites d'élasticité de traction et de compression, dans l'expression de la fonction critère.

Une synthèse des équations du modèle (E), appelé modèle DADC pour Dynamic Anisotropic Damage Concrete, est réalisée ci-dessous afin d'anticiper l'implantation numérique de ce modèle

²sans aller toutefois aux forts confinements rencontrés en compaction

dans le code de calcul EUROPLEXUS, présentée dans le prochain chapitre.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (2.28)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} \quad (2.29)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \right]^D + \frac{1}{3} \left(\frac{< \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} >_+}{\langle \min [1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H] \rangle_+} + < \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} >_- \right) \mathbf{1} \quad (2.30)$$

$$f = g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}) - d_\varepsilon \rightarrow \begin{cases} f < 0 : \text{élasticité} \\ f = D_v(\mathcal{H}(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_\varepsilon) \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv} = \| < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_+ \| + (r_1 \| < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_- \| + r_2 \operatorname{tr} < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_-) r_{T_x} \quad (2.32)$$

$$d_\varepsilon = \frac{\mathbf{D} : < \boldsymbol{\varepsilon} >_+^2}{\operatorname{tr} < \boldsymbol{\varepsilon} >_+^2} \quad (2.33)$$

$$g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}) = \frac{1}{\beta b(T_x)} \left[\arctan \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}}{\alpha r_{T_x}} \right) - \arctan \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_y^t}{\alpha} \right) \right] \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} < \boldsymbol{\varepsilon} >_+ \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} < \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} >_+ \quad (2.35)$$

$$\mathcal{H}(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_\varepsilon = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b_v(g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}) - d_\varepsilon))] \quad (2.36)$$

Le multiplicateur d'endommagement est déterminé à partir de la loi de visco-endommagement (2.36) (pour le modèle "non visqueux", c'est à partir de la condition de cohérence $f = 0$ & $\dot{f} = 0$).

Le modèle proposé comporte 10 paramètres ($E, \nu, \boldsymbol{\sigma}_y^t, \boldsymbol{\sigma}_y^c, \boldsymbol{\sigma}_y^{bc}, \alpha, \beta, b_t, b_v, \dot{D}_\infty$) facilement identifiables comme le montre la section 9.1 de ce chapitre incluant les paramètres d'élasticité E, ν et d'effet de vitesse b_v, \dot{D}_∞ .

8 Positivité de la dissipation intrinsèque

Le choix d'une loi d'évolution de l'endommagement gouvernée par les extensions implique que nos modèles d'endommagement anisotropes sortent du cadre des matériaux standards généralisées, défini par [Halphen et Nguyen, 1975]. Rappelons que pour ce cadre thermodynamique, les lois d'évolution dérivant par normalité d'un potentiel de dissipation défini au préalable comme une fonction convexe et positive, permettent de satisfaire automatiquement le second principe de la thermodynamique (dissipation intrinsèque positive). Etant en dehors de ce cadre, la positivité de la dissipation n'est pas intrinsèquement assurée pour ce type de modèle d'endommagement anisotrope. Le présent cadre thermodynamique non standard a été adapté par [Desmorat, 2006] pour les matériaux quasi-fragiles comme le béton. Desmorat montre que, pour une certaine classe de modèles anisotropes, dont fait partie le nôtre, la condition $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$ est suffisante pour garantir la positivité de la dissipation des modèles A,B,C.

Etant donné que la sensibilité hydrostatique du potentiel thermodynamique a été modifiée pour les modèles D et E (en section 3), la positivité de la dissipation doit être à nouveau vérifiée via la condition suffisante $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$. Pour cela, la dissipation intrinsèque \mathcal{D} est exprimée en dérivant le potentiel

thermodynamique du modèle $\rho\psi^*$ (éq. 2.37) par rapport au temps et en regroupant les différents termes sous la forme de l'équation (2.40) afin de faire apparaître la dissipation intrinsèque $\mathcal{D} = \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}}$ (éq. 2.41).

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E} \operatorname{tr}(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) + \frac{1-2\nu}{6E} (q(\mathbf{D}) \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 + \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_-^2) \quad (2.37)$$

$$\text{avec } \mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \quad \text{et} \quad q(\mathbf{D}) = \left\langle \frac{1}{\min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^n; 1 - \eta D_H]} \right\rangle_+ \quad (2.38)$$

avec l'endommagement hydrostatique $D_H = \frac{\operatorname{tr}\mathbf{D}}{3}$ et la norme infinie du tenseur d'endommagement $\|\mathbf{D}\|_\infty = \max(D_i)$, η et n sont les deux paramètres matériaux permettant d'ajuster la sensibilité hydrostatique présentée dans la partie 3.2 de ce chapitre. En dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\psi^*}{dt} &= \frac{1+\nu}{E} (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H})^D : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1-2\nu}{3E} (q(\mathbf{D}) \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_+ + \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_-) \operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ &+ \frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}} + \frac{1-2\nu}{6E} \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 \frac{d}{dt} q(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si nous écrivons l'expression (2.39) sous la forme suivante (qui correspond à la définition des lois d'état) :

$$\rho\dot{\psi}^* = \boldsymbol{\epsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} \quad (2.40)$$

L'expression de la dissipation due aux mécanismes de l'endommagement est alors égale à :

$$\mathcal{D} = \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}} + \frac{1-2\nu}{6E} \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 \frac{d}{dt} q(\mathbf{D}) \quad (2.41)$$

La condition suffisante $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$ peut maintenant être supposée (en effet de par sa loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+$ est bien un tenseur positif) afin de garantir la positivité de la dissipation \mathcal{D} . $\frac{1}{h^*(\|\mathbf{D}\|_\infty)} = 1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^n$ et $\frac{1}{h(\mathbf{D})} = 1 - \eta D_H$ sont deux fonctions continues et décroissantes, $\left(\frac{1}{h^*(\|\mathbf{D}\|_\infty)}\right)' < 0$ et $\left(\frac{1}{h(\mathbf{D})}\right)' < 0$. L'opérateur $\min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^n; 1 - \eta D_H]$ est donc aussi une fonction continue et décroissante strictement positive dans le domaine des valeurs propres d'endommagement $D_i \in [0; 1]$ (voir fig. 2.12). La fonction $q(\mathbf{D})$ est une fonction croissante positive de sorte que le second terme de l'équation (2.41) est $\left[\frac{1-2\nu}{6E} \langle \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 \frac{d}{dt} q(\mathbf{D})\right] \geq 0$.

Concernant le premier terme de l'équation de dissipation (éq. 2.41) $\frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}}$, nous reprenons la démonstration donnée par [Desmorat, 2006]. Nous savons que le tenseur taux d'endommagement $\dot{\mathbf{D}}$ est positif, ainsi que $\dot{\mathbf{H}}$, soit $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$ ($\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$), $\dot{\mathbf{H}} \geq 0$. Le terme $\frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}}$ est également positif si $(\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) \geq 0$, en sachant que le produit contracté " de deux tenseurs symétriques positifs, est positif. La positivité du tenseur $(\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)$ est démontrée en cherchant le signe de ses valeurs propres, notées χ_i , solutions de $(\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) \vec{V} = \chi \vec{V}$ où les \vec{V}_i sont les vecteurs propres associés au χ_i . De manière équivalente, le problème aux valeurs propres peut être écrit de la façon suivante :

$$(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)^2 \vec{V} = \chi \mathbf{H} \vec{V} \quad (2.42)$$

avec $(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)^2$ un carré et donc, de manière évidente, un tenseur positif. Il est ainsi possible d'écrire les valeurs propres sous la forme suivante :

$$\chi = \frac{\vec{V}^T (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)^2 \vec{V}}{\vec{V}^T \mathbf{H} \vec{V}} \quad (2.43)$$

Ces valeurs propres, étant un rapport de termes positifs, sont positives.

Nous pouvons donc conclure à la positivité de la dissipation intrinsèque \mathcal{D} , quelle que soit la complexité du chargement pour tous les modèles A, B, C, D, E développés.

9 Informations complémentaires sur le modèle DADC

Dans cette partie, une procédure d'identification des paramètres est présentée. Pour cela, le cadre des chargements proportionnels est utilisé et présenté dans l'annexe C. Son but est de calculer simplement les réponses du modèle de comportement sous chargements proportionnels. Il a permis notamment lors du développement de ce modèle de tracer les différentes surfaces de rupture rencontrées dans ce chapitre ainsi que les courbes contrainte-déformation des différents chargements associés. Il a été programmé sous le logiciel Matlab (annexe C) afin que les futurs utilisateurs de ce modèle puissent ajuster aisément les paramètres en traçant la surface de rupture ainsi que les réponses en traction, bi-traction, compression, bi-compression et cisaillement. Ceux de la loi de viscosité b_v , \dot{D}_∞ sont eux supposés identifiés à part.

9.1 Procédure d'identification des paramètres

Avant de proposer une procédure d'identification, la définition d'une condition entre les paramètres σ_y^t , α et β est nécessaire. Si nous reprenons la fonction $k(d_\varepsilon)$ définie par l'équation (2.44), celle-ci doit être continue et croissante sur le domaine $d_\varepsilon \in [0; 1]$.

$$k(d_\varepsilon) = \alpha \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + \beta \cdot b(T_x) d_\varepsilon \right] \quad (2.44)$$

Constituée d'une fonction tangente définie avec de multiples asymptotes verticales en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, la fonction $k(d_\varepsilon)$ peut être négative ou non définie pour certains jeux de paramètres. Nous allons donc étudier, dans le domaine d'étude $d_\varepsilon \in [0; 1]$, le terme $\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + \beta \cdot b(T_x) d_\varepsilon$ afin de l'obliger à rester dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Dans un premier temps, nous recherchons la valeur minimale de ce terme, obtenue lorsque l'endommagement $d_\varepsilon = 0$. Nous avons donc la condition suivante : $\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right)$ soit strictement positif.

Cela implique que le rapport $\frac{\sigma_y^t}{\alpha} > 0$, ce qui est toujours vrai puisque σ_y^t et α sont deux paramètres "matériaux" strictement positifs.

Dans un second temps, nous recherchons la valeur maximale de ce terme, obtenue lorsque que l'endommagement est maximum ($d_\varepsilon = 1$) et lorsque la fonction de la triaxialité est maximum ($b(T_x) = 2$). Nous avons donc la condition suivante à respecter :

$$\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + 2\beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou encore} \quad \beta < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) \right) \quad (2.45)$$

Cette dernière équation sera vérifiée avant tout calcul (programmée dans Matlab comme dans le code de calcul EUROPLEXUS, c.f. chapitre 3) afin de s'assurer que la condition entre ces 3 paramètres "matériaux" est toujours respectée, quel que soit le choix des paramètres fait par l'utilisateur. Respectant cette dernière condition, une procédure est exposée afin d'identifier les 5 paramètres du modèle strictement positifs autres que E , v pour l'élasticité et que D_∞ , b_v pour l'effet de vitesse. Quatre d'entre eux sont homogènes à une contrainte (σ_y^t , σ_y^c , σ_y^{bc} , α) alors que β est sans dimension et généralement compris entre 0,5 et 1.

Ordre d'identification des paramètres

- 1) Identifier les limites d'élasticité de traction σ_y^t , de compression σ_y^c et de bi-compression σ_y^{bc} . La limite d'élasticité en bi-compression est généralement supérieure de quelques MPa à celle de la compression simple.
- 2) Identifier le paramètre α , qui permet d'augmenter le pic de contrainte pour l'ensemble des chargements. Ce paramètre conserve notamment la dissymétrie traction/compression (le rapport entre contraintes à rupture f_t et f_c).
- 3) Tout en respectant la condition (2.45), identifier le paramètre β qui permet essentiellement de modifier la réponse post-pic en compression. Ce paramètre a une légère influence sur les valeurs des contraintes pics pour l'ensemble des chargements.
- 4) Si à ce stade la dissymétrie traction/compression n'est toujours pas modélisée de manière satisfaisante alors que la réponse en traction est elle bien reproduite, les limites de compression et de bi-compression peuvent être modifiées (de manière itérative) jusqu'à l'obtention de la dissymétrie souhaitée.

Si la limite d'élasticité de traction σ_y^t est modifiée, il est conseillé de reprendre la procédure à l'étape 2.

Cette procédure est celle utilisée à la fin du chapitre 4 afin d'identifier les jeux de paramètres finaux, suite aux essais de caractérisation du béton réalisés durant cette thèse et présentées au chapitre 4.

9.2 Energie de rupture

Lors du phénomène de localisation rencontré pour les modèles adoucissants locaux non visqueux, (cf. partie 6 du chapitre 1), l'énergie de rupture dépend de la taille de l'élément dans lequel la localisation survient et tend vers zéro au fur et à mesure que l'on raffine le maillage. Pour s'en affranchir, la "régularisation" de type Hillerborg consiste à imposer la bonne valeur de l'énergie de rupture, fonction de la taille des éléments du maillage. Pour cela, la partie post-pic de la réponse en traction est en général modifiée afin de contrôler la dissipation d'énergie. Cette approche n'est pas celle préférée afin de régulariser les calculs éléments finis effectués avec notre modèle d'endommagement pour une raison simple. Elle est appropriée uniquement lorsque le trajet de fissuration est connu et que les éléments dans la zone de localisation ont tous la même taille (et la bonne orientation par rapport au trajet de fissuration). C'est en grande partie pour cette raison qu'elle ne fait plus aujourd'hui l'objet de développements mais reste une des méthodes les plus utilisées [Besson *et al.*, 2000, 2009], du fait de sa simplicité d'implantation numérique.

Nous n'avons pas programmé de version non locale du modèle (comme fait dans [Desmorat *et al.*, 2010] pour le modèle initial). Nous avons toutefois décidé de proposer à l'utilisateur une taille moyenne d'élément "h" à condition de connaître, bien entendu, la valeur expérimentale de l'éner-

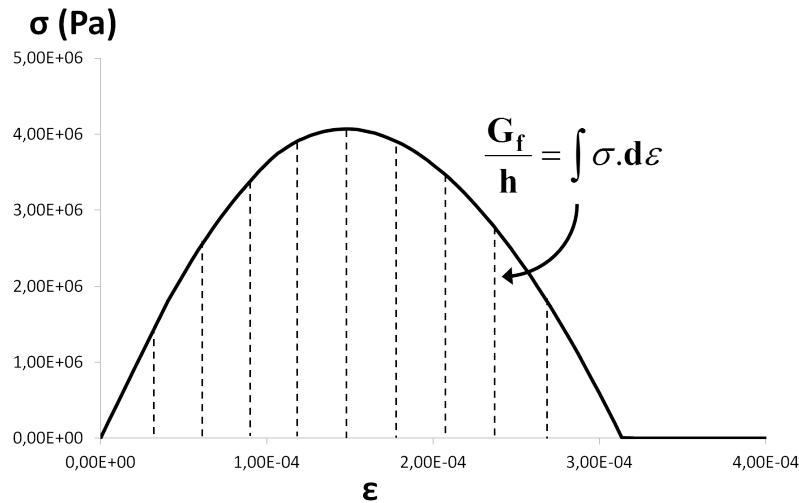


FIG. 2.26 – Energie de fissuration sous la courbe contrainte-déformation en traction

gie de fissuration G_f [Tran, 2009; Chen, 2010; Singh *et al.*, 2011]. Cette taille est obtenue à partir d'un jeu de paramètres identifié et donc d'une énergie de fissuration connue sous la courbe contrainte-déformation en traction (fig. 2.26). Nous étudirons néanmoins dans la partie 1.3.3 du chapitre 5, l'effet d'une "régularisation" de type Hillerborg sur nos résultats de calculs de structures. C'est en connaissant son manque de robustesse sur des calculs de structures, que des guillemets sont attribués au mot "régularisation".

Chapitre 3

Implantation numérique et gestion de la rupture

1 Introduction

Nous avons au chapitre précédent proposé une loi de comportement multiaxiale d'endommagement anisotrope dénommée DADC. Celle-ci a été implantée lors de ce travail de thèse dans un code de calcul appelé EUROPLEXUS et codéveloppé par le CEA et EDF. Une brève présentation de ce code est réalisée dans la première partie. Deux problématiques purement numériques sont ensuite exposées et résolues. Puis l'implantation numérique de la loi de comportement est exposée et une gestion de la rupture (cas des valeurs propres de l'endommagement qui tendent vers 1) est présentée. Un cas test numérique met finalement en avant le bien fondé de cette nouvelle gestion de la rupture.

1.1 Algorithme général d'Europexus

Europexus est un logiciel de dynamique rapide des structures. Ce code de calcul éléments finis fait appel à deux formalismes différents pour décrire le mouvement d'une structure qui peut être composée de solides et de fluides [Truesdell, 1973] :

- Description Lagrangienne réactualisée [Barraco *et al.*, 1989] pour les solides (la configuration de référence correspond à la configuration occupée à l'instant précédent).
- Description Eulérienne pour les fluides, description Lagrange Euler Arbitraire (méthode A.L.E) [Hirt *et al.*, 1974; Hughes *et al.*, 1981; Liu *et al.*, 1988; Benson, 1989; Souli *et al.*, 1999; Bung et Lepareux, 1982] parfaitement adaptée pour traiter les problèmes avec interaction fluide-structure (pour un fluide contenu dans une enveloppe solide qui se déforme, le maillage du fluide se déformera de façon à suivre le mieux possible les déformations de l'enveloppe, la vitesse de déplacement du maillage étant indépendant de la vitesse des particules fluides).

Les calculs, dans EUROPLEXUS, sont réalisables en 1D, 2D et 3D suivant les besoins et les possibilités d'applications usuelles de ce code de calcul peuvent être regroupées en cinq domaines : les impacts, les explosions, les circuits de tuyauteries, les problèmes d'hydrodynamique, la robotique (systèmes articulés).

Un algorithme d'intégration explicite en temps est utilisé, ce qui permet une grande souplesse pour traiter les problèmes de dynamique rapide et les comportements non linéaires. Contrairement au schéma d'intégration implicite, la solution au pas de temps t_{n+1} ne dépend que des éléments de

solution au temps t_n . L'inconvénient principal de cet algorithme est qu'il est conditionnellement stable et implique d'effectuer de nombreux pas de calcul. En effet, le pas de calcul doit être suffisamment petit pour éviter que l'algorithme ne diverge. Ceci est au détriment de la durée de calcul qui dépend évidemment du nombre de pas de temps à effectuer. Mais généralement en dynamique rapide, les problèmes à traiter sont des cas de chargements extérieurs qui varient très rapidement (explosions, chocs ...) et il est donc nécessaire d'avoir des pas de temps suffisamment petits afin de suivre au mieux les variations rapides du chargement.

L'algorithme d'intégration en temps est de type Newmark [Newmark, 1959]. En fonction du choix de ses paramètres β et γ , les algorithmes de Newmark permettent de trouver les positions et vitesses de la structure au pas $n+1$ en fonction des pas n et $n+1$. La position au pas $n+1$ est obtenue par la relation :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) \ddot{x}_n + 2\beta \ddot{x}_{n+1}] \quad (3.1)$$

Avec Δt l'intervalle de temps entre deux pas consécutifs. La vitesse au pas $n+1$ est calculée par

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{x}_n + \gamma \ddot{x}_{n+1}] \quad (3.2)$$

Les constantes choisies dans EUROPLEXUS ($\beta = 0$, $\gamma = 1/2$) correspondent à la méthode des différences centrées. L'algorithme est explicite puisque le calcul de la position ne dépend que des paramètres au pas n .

Après avoir décrit l'algorithme de résolution temporelle, l'algorithme de résolution éléments finis est présenté en neuf étapes (fig. 3.1) détaillées dans la notice théorique d'EUROPLEXUS [Bung et al., 1997].

L'implantation numérique de notre loi de comportement se situera à l'étape 3 de l'algorithme (fig. 3.1). Les variables en entrée de la loi de comportement sont notamment l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ (et donc le tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\epsilon}$) à l'instant $n+1$ ainsi que l'endommagement \boldsymbol{D}_n et en sortie l'incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ (le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}$) et l'endommagement \boldsymbol{D}_{n+1} . Nous utiliserons une discrétisation implicite pour la loi de comportement mais nous éviterons d'avoir recours à des itérations.

1.2 Triaxialité des contraintes en élasticité

Un constat numérique a été fait en utilisant EUROPLEXUS lors d'un cas test en élasticité de type chargement de compression uniaxiale suivant la direction I (fig. 3.2(a)) puis lors d'autres chargements comme des tractions-compressions. Le cas test en question correspond à un seul élément cubique (le constat est le même que l'élément ait 1 point de Gauss ou 8 points de Gauss) sur lequel on impose un déplacement sur les noeuds d'une des faces de l'élément cubique et on bloque les déplacements des noeuds de la face opposée à ce chargement. Lorsque l'on trace les composantes du tenseur des contraintes, on observe que les contraintes latérales oscillent (fig. 3.2(b)) et ne sont donc pas nulles sur les bords ($\sigma_{II} = \sigma_{III} \neq 0$). Ce phénomène, lié à la dynamique, a pour conséquence directe de perturber et de faire osciller la triaxialité des contraintes T_x (fig. 3.2(c)) autour de la valeur attendue en compression, $T_x = -1$. Cette perturbation provoque des instabilités dans la réponse de notre modèle d'endommagement, notamment en compression (fig. 3.3), en faisant chuter brutalement la contrainte de compression. Il est à noter que cette instabilité n'est pas en relation avec celle observée dans la

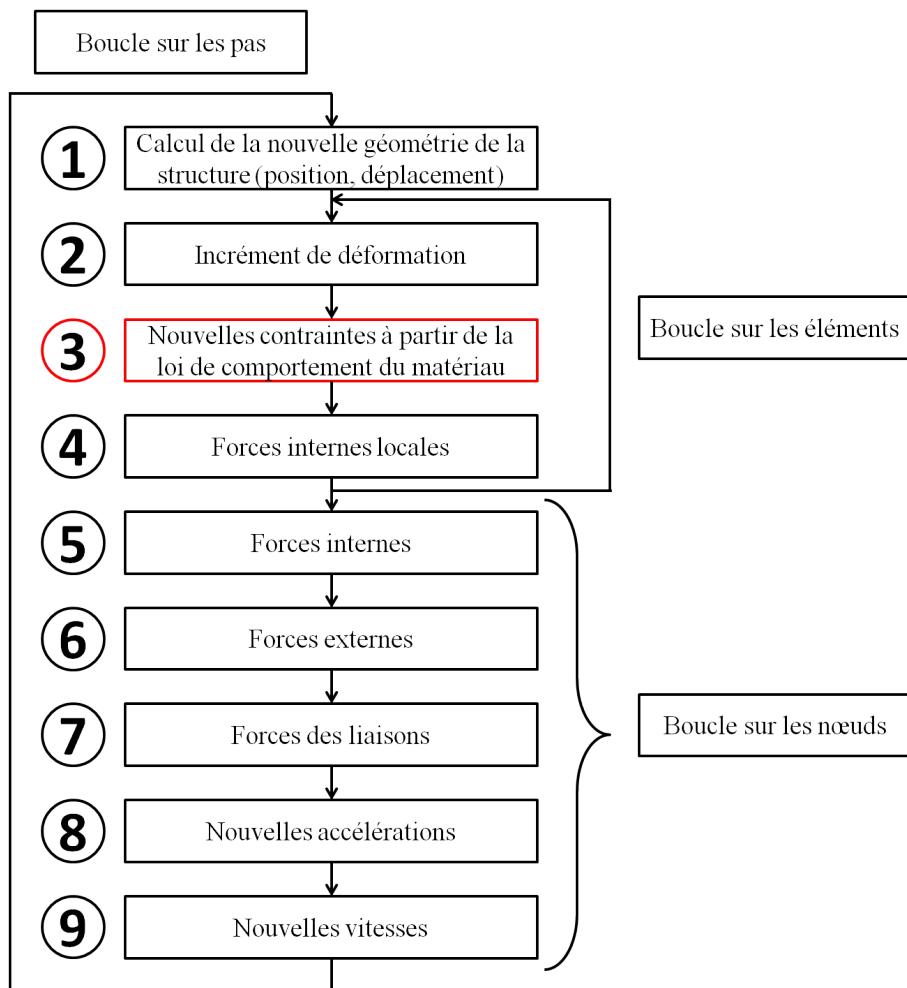


FIG. 3.1 – Les 9 étapes de calcul dans le logiciel EUROPLEXUS

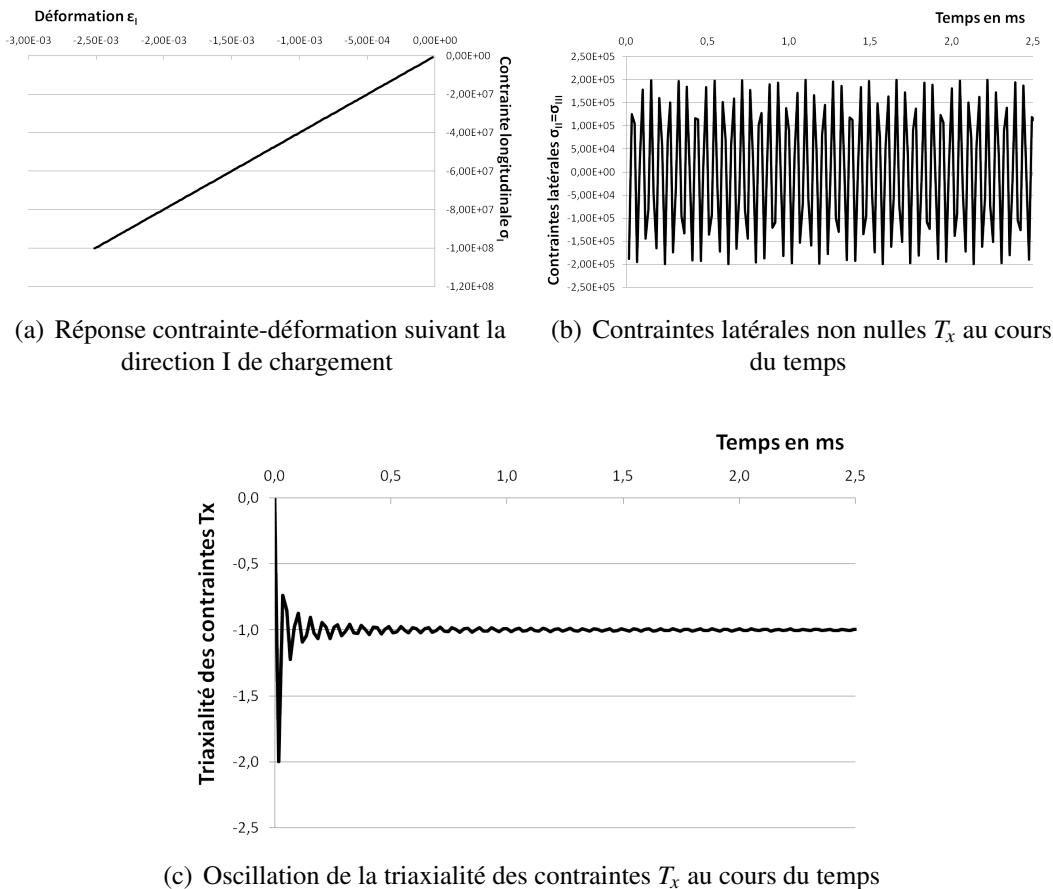


FIG. 3.2 – Chargement élastique linéaire de compression suivant la direction I

partie 8 au chapitre 1, puisque dans ce cas précis les deux composantes d'endommagement sont toujours identiques. Un filtrage de la triaxialité sera proposé au paragraphe 2.

1.3 Endommagement critique

L'endommagement critique, appelé D_c et à ne pas confondre avec la variable scalaire endommagement de compression de certains modèles, permet de borner les valeurs propres D_i du tenseur d'endommagement dans l'intervalle $[0; D_c]$ du tenseur d'endommagement, \mathbf{D} , d'ordre 2 afin que le tenseur d'élasticité \mathbb{E} reste défini positif. Les valeurs propres de l'endommagement sont généralement bornées à un endommagement critique strictement inférieur à 1. Deux explications justifient que l'endommagement critique ne peut pas être égal à 1.

- D'un point de vue physique, la rupture d'une éprouvette est brutale et on ne peut pas observer ou mesurer le comportement contrainte-déformation au delà d'une certaine déformation, donc d'un certain endommagement, l'endommagement critique.
- D'un point de vue numérique, la plupart des lois d'endommagement (isotropes comme anisotropes) sont implantées dans des codes implicites, où la matrice de rigidité est inversée et par conséquent ne peut être nulle. Pour s'assurer que le tenseur d'élasticité soit strictement positif, la valeur d'endommagement critique, que l'utilisateur peut généralement modifier, est forcé-

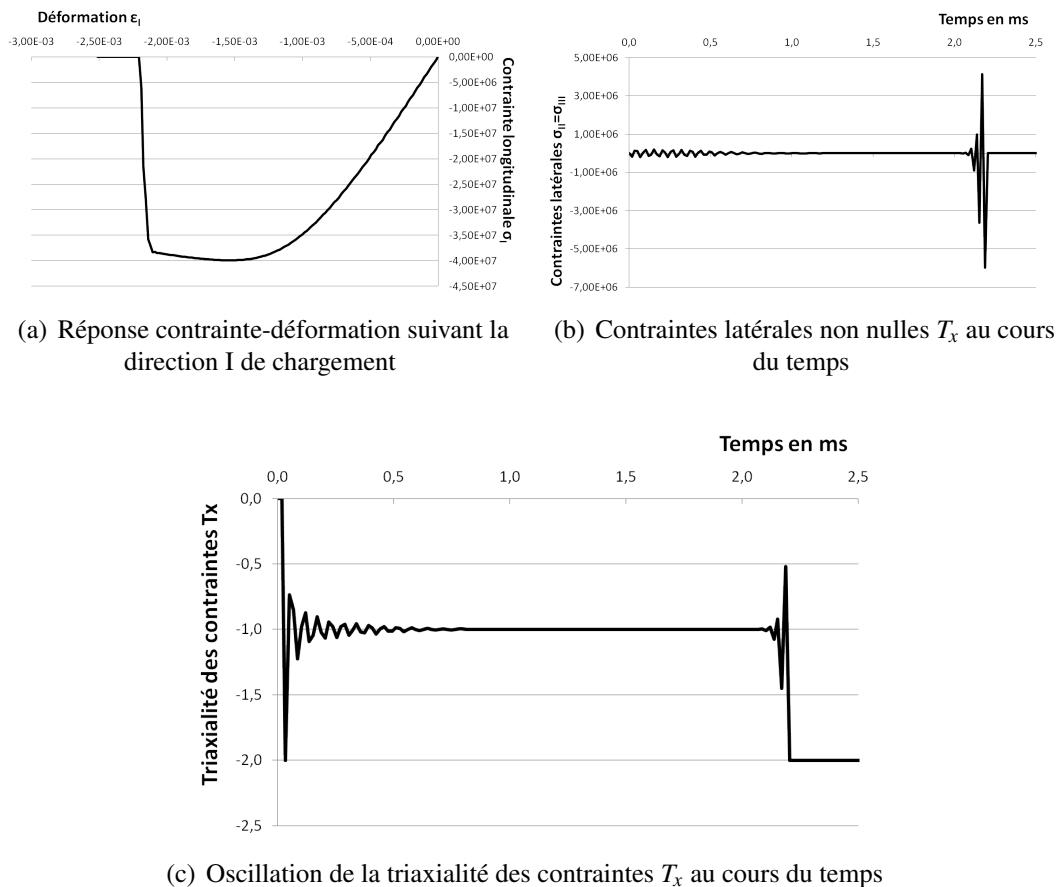
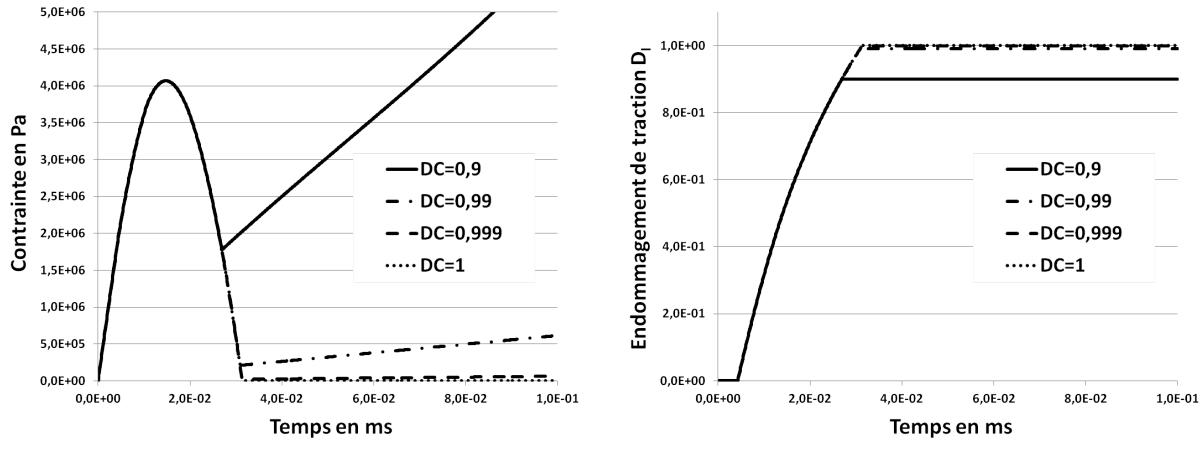


FIG. 3.3 – Chargement de compression suivant la direction I avec le modèle d'endommagement proposé et implanté dans le code explicite EUROPLEXUS ($\dot{\epsilon} = 0,25s^{-1}$)



(a) Evolution de la contrainte de traction en fonction du temps suivant la direction I de chargement

(b) Evolution de l'endommagement au cours du temps jusqu'à une valeur d'endommagement critique D_c choisie

FIG. 3.4 – Réponse du modèle d'endommagement proposé pour un chargement de traction avec différentes valeurs d'endommagements critiques D_c

ment strictement inférieure à 1. Par exemple, si nous prenons un endommagement scalaire, cela revient à avoir le tenseur d'élasticité effectif différent de zéro $\tilde{E} = E(1 - D_c) > 0$ et donc $D_c < 1$. Ce problème ne nous concerne pas puisqu'EUROPLEXUS est un code de calcul explicite et par conséquent, la matrice de rigidité n'est pas formée. Il est donc possible d'avoir le tenseur d'élasticité nul en bornant les valeurs propres à 1 exactement.

Le modèle initial [Desmorat *et al.*, 2007], et ce quel que soit le type de chargement, récupère une raideur non physique (fig. 3.4(a)) lorsque les valeurs d'endommagement sont bornées à $D_c (< 1)$ (fig. 3.4(b)).

Cette formulation, commune à de nombreux modèles d'endommagement, pose problème. Elle est détaillée et améliorée dans la partie 4 du présent chapitre où une nouvelle gestion de la rupture pour les modèles d'endommagement anisotrope avec une seule variable d'endommagement tensorielle d'ordre 2 est proposée. Son principal intérêt est de pouvoir mettre l'endommagement critique à 1 et ainsi **avoir une contrainte nulle exactement** (fig. 3.4).

Dans la suite de cette partie, différents développements sont exposés avec un bilan encadré pour chaque sous partie correspondant aux différentes équations à planter dans le code de calcul.

2 Triaxialité des contraintes filtrées

Pour résoudre le problème d'oscillation numérique présenté dans la partie 1.2, un filtre est appliqué sur le tenseur des contraintes σ afin d'obtenir le tenseur des contraintes filtrées σ^f et de calculer la triaxialité des contraintes. La contrainte réelle à la fin du pas de temps n'est en aucun cas remplacée par cette contrainte filtrée (cela générerait de l'amortissement et affecterait la propagation des ondes). Ce filtre passe bas du premier ordre obéit à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\dot{\sigma}^f = \frac{\sigma - \sigma^f}{\tau} \quad \text{soit} \quad \sigma^f + \tau \dot{\sigma}^f = \sigma \quad (3.3)$$

avec le paramètre τ , un temps caractéristique à identifier.

Le module de la fonction de transfert correspondante $H(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega\tau)}$ est égal à $|H(\omega)| = (1 + \omega^2\tau^2)^{-1/2}$ avec la pulsation propre de coupure ω_c égale à l'inverse de la constante de temps τ (f_c est la fréquence de coupure) :

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{\tau} \quad (3.4)$$

Le tenseur filtré est uniquement utilisé pour calculer la triaxialité des contraintes T_x . La stabilité inconditionnelle d'un schéma implicite a été préférée pour calculer le tenseur filtré :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^f = \frac{\boldsymbol{\sigma}_n^f + \frac{\Delta t}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \quad (3.5)$$

Nous avons choisi de lier la constante de temps τ à Δt , le pas de temps entre l'instant n et $n+1$. Le pas de temps calculé automatiquement par EUROPLEXUS, permet de respecter la condition de stabilité de l'algorithme explicite et ainsi évite que celui-ci diverge. La condition de stabilité implanté dans le logiciel EUROPLEXUS est déterminée en étudiant la stabilité de l'équation de mouvement d'une structure sans amortissement :

$$M\ddot{x}_n + Kx_n = 0 \quad (3.6)$$

En décomposant l'accélération \ddot{x}_n en fonction des positions x_{n-1} , x_n , x_{n+1} :

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{\Delta t_{stab}^2} (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (3.7)$$

et avec différents calculs détaillés dans [Bung et al., 1997] la condition suivante est écrite :

$$\Delta t_{stab} < \frac{2}{\omega} \quad (3.8)$$

avec $\omega = \omega_i$ correspondant aux pulsations propres de vibration de la structure. Cette condition doit être vérifiée pour tous les modes propres de la structure, ce qui revient à dire que la pulsation propre maximale est la plus critique (ou la fréquence propre maximale) et doit satisfaire :

$$\Delta t_{stab} < \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.9)$$

Etant difficile à calculer, ω_{max} est estimée. D'après le théorème de Hughes et Liu, la pulsation maximale ω_{max} d'une structure correspond au minimum des pulsations ω_e , des éléments pris individuellement sur l'ensemble de la structure :

$$\omega_{max} < \min(\omega_e) \quad (3.10)$$

Ces équations ainsi que la condition de Courant-Friedrichs-Lowy permettent d'écrire la condition de stabilité sous une forme simple :

$$\Delta t_{stab} < \frac{L_{min}}{c} \quad (3.11)$$

Sur chaque élément, L_{min} représente la plus petite dimension de l'élément et c la célérité du son dans le matériau composant l'élément. Il a été décidé de lier le pas de temps à la constante de temps τ en posant $f_c = \beta f_{stab}$, encore écrit $\frac{1}{2\pi\tau} = \beta \frac{1}{\Delta t_{stab}}$, puis $\frac{1}{2\pi\tau} = \beta \frac{c}{L_{min}}$. f_c est la fréquence de coupure de

notre filtre, f_{stab} la fréquence maximale de la structure (fréquence la plus critique qui doit respecter la condition [Bung et al., 1997]) et $\beta << 1$ un coefficient de sécurité. L'expression de la constante de temps s'écrit finalement :

$$\tau = \frac{L_{min}}{2\pi\beta c} \quad (3.12)$$

Le coefficient de sécurité β a été déterminé à l'aide du cas de test de compression présenté dans le paragraphe 1.2 et sa valeur a été fixée à $2,5 \cdot 10^{-3}$ s.

Comme déjà mentionné, le tenseur des contraintes filtrées est uniquement utilisé pour le calcul de la triaxialité des contraintes :

$$T_x = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^f}{(\boldsymbol{\sigma}^f)_{eq}} \quad (3.13)$$

Le filtrage de la triaxialité permet désormais d'obtenir une réponse correcte en compression (fig. 3.5) avec notamment une triaxialité des contraintes qui n'oscille plus (fig. 3.5(c)) et qui tend très rapidement vers la valeur attendue en compression $T_x = -1$.

Si l'on calcule T_x au début de l'intégration de la loi de comportement, les équations à programmer sont les suivantes :

$$\Delta t_{stab} = \frac{L_{min}}{c} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n^f = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n-1}^f + \frac{\Delta t}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_n}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \quad \tau = \frac{\Delta t_{stab}}{2\pi * 2,5 \cdot 10^{-3}} \quad (3.15)$$

$$(T_x)_{n+1} = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_n^f}{(\boldsymbol{\sigma}_n^f)_{eq}} \quad (3.16)$$

Le tenseur des contraintes filtrées $\boldsymbol{\sigma}_n^f$ ainsi que la triaxialité des contraintes $(T_x)_{n+1}$ sont sauvegardés parmi les variables pour le pas de temps suivant.

3 Schéma numérique d'intégration du modèle

A l'instant $n + 1$ en entrée de la loi de comportement, EUROPLEXUS fournit l'état du tenseur des déformations à l'instant $n + 1$ ($\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$), le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_n$ à l'instant n , le pas de temps Δt , la plus petite dimension de l'élément L_{min} ainsi que le module d'Young E et la masse volumique ρ associés. Bien entendu, un certain nombre de variables est sauvegardé entre deux pas de temps. Ces sauvegardes sont précisées au fur et à mesure de l'avancement de l'implantation numérique. En sortie, la loi de comportement restitue l'état du tenseur des contraintes à l'instant $n + 1$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Il est à noter qu'EUROPLEXUS exprime les tenseurs symétriques des contraintes et des déformations sous une forme vectorielle selon la notation de Voigt :

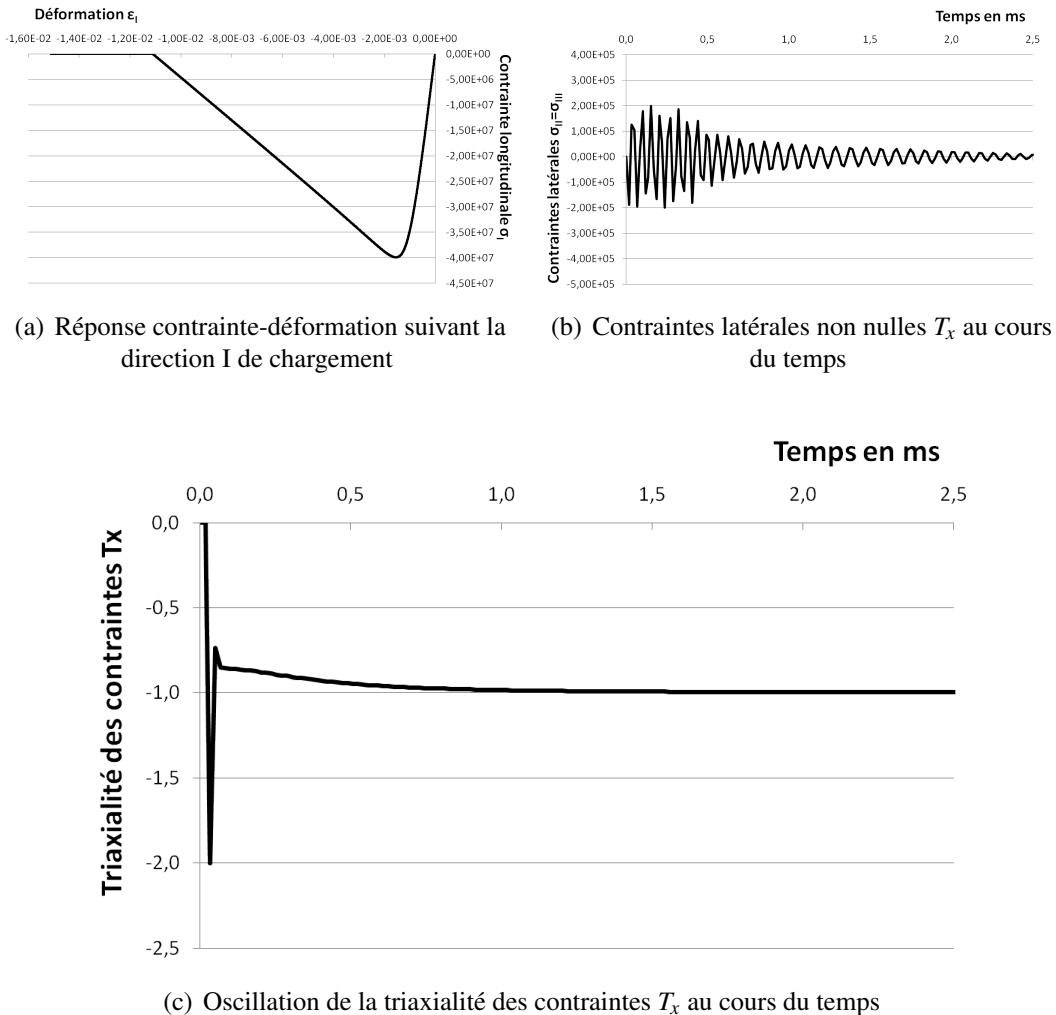


FIG. 3.5 – Chargement de compression suivant la direction I avec le modèle d'endommagement proposé avec un filtre sur le tenseur des contraintes uniquement pour calculer la triaxialité des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 (= \sigma_{11}) \\ \sigma_2 (= \sigma_{22}) \\ \sigma_3 (= \sigma_{33}) \\ \sigma_4 (= \sigma_{12}) \\ \sigma_5 (= \sigma_{23}) \\ \sigma_6 (= \sigma_{13}) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 (= \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_2 (= \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_3 (= \varepsilon_{33}) \\ \gamma_4 (= 2\varepsilon_{12}) \\ \gamma_5 (= 2\varepsilon_{23}) \\ \gamma_6 (= 2\varepsilon_{13}) \end{pmatrix}$$

Une représentation vectorielle (resp. matricielle) est adoptée pour l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 (resp. d'ordre 4) symétriques utilisés dans la loi de comportement.

3.1 Calcul du tenseur des contraintes effectives

Le tenseur des contraintes effectives est déterminé par la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathbf{1} \quad (3.17)$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé.

3.2 Prédiction élastique

La prédiction élastique au pas de temps $n+1$ se fait classiquement à endommagement égal à $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{test} = \mathbf{D}_n$.

$$(d_{\varepsilon})_{test} = \frac{\mathbf{D}_n : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\operatorname{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad (3.18)$$

$$(r_{T_x})_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } (T_x)_{n+1} \geq -1 \\ -2.5(T_x)_{n+1} - 1.5 & \text{si } -2 < (T_x)_{n+1} < -1 \\ 3.5 & \text{si } (T_x)_{n+1} \leq -2 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$b((T_x)_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (T_x)_{n+1} \geq 0 \\ 1 + ((T_x)_{n+1})^2 & \text{si } -1 < (T_x)_{n+1} < 0 \\ 2 & \text{si } (T_x)_{n+1} \leq -1 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv})_{n+1} = \|\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ \| + \left(r_1 \|\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \| + r_2 \operatorname{tr} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right) (r_{T_x})_{n+1} \quad (3.21)$$

$$(k((d_{\varepsilon})_{test}))_{n+1} = \alpha \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + \beta \cdot b((T_x)_{n+1}) (d_{\varepsilon})_{test} \right] \quad (3.22)$$

$$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv})_{n+1} - (k((d_{\varepsilon})_{test}))_{n+1} (r_{T_x})_{n+1} \quad (3.23)$$

La contrainte effective équivalente $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv})_{n+1}$ est sauvegardée parmi les variables pour le pas de temps suivant.

3.3 Test sur le critère

- Si $f < 0$: Chargement élastique ou décharge. L'endommagement n'évolue pas $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n$. Dans ce cas, la prochaine étape est celle de la partie 3.7
- Sinon, l'endommagement évolue.

3.4 Calcul de l'endommagement actif

Dans le cas où l'utilisateur ne souhaite pas prendre en compte l'effet de vitesse dans le modèle, l'endommagement actif se calcule de la manière suivante :

$$f = g(\tilde{\sigma}_{equiv}) - d_\varepsilon = 0 \quad (3.24)$$

avec

$$g(\tilde{\sigma}_{equiv}) = k^{-1}(d_\varepsilon) = \frac{1}{\beta b(T_x)} \left[\arctan \left(\frac{\tilde{\sigma}_{equiv}}{\alpha r_{T_x}} \right) - \arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) \right] \quad (3.25)$$

$$d_\varepsilon = \frac{1}{\beta b(T_x)} \left[\arctan \left(\frac{\tilde{\sigma}_{equiv}}{\alpha r_{T_x}} \right) - \arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) \right] \quad (3.26)$$

Si l'effet de vitesse est pris en compte par l'utilisateur, la loi de viscosité utilisée dans le modèle est la suivante (éq. 2.27, du chapitre 2) :

$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\dot{d}_\varepsilon = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b_v(g(\tilde{\sigma}_{equiv}) - d_\varepsilon))] \quad (3.27)$$

En considérant que nous sommes dans le cas où $\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, elle peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$f = g(\tilde{\sigma}_{equiv}) - d_\varepsilon = -\frac{1}{b_v} \ln \left(1 - \frac{\dot{d}_\varepsilon}{\dot{D}_\infty} \right) = D_v \quad (3.28)$$

Le schéma numérique suivant s'inspire du travail de [Gatuingt *et al.*, 2008]. Il a l'avantage d'être implicite mais de ne pas nécessiter d'itérations (car l'équation non linéaire à résoudre sera une équation du second degré). En dérivant l'expression précédente, l'équation suivante est obtenue :

$$g'(\tilde{\sigma}_{equiv})\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv} - \dot{d}_\varepsilon = \frac{1}{b_v} \frac{\ddot{d}_\varepsilon}{\dot{D}_\infty - \dot{d}_\varepsilon} \quad (3.29)$$

L'équation 3.29 est discrétisée en calculant les dérivées par rapport au temps sous la forme discrétisée suivante :

$$(\ddot{d}_\varepsilon)_{n+1} \approx \frac{(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} - (\dot{d}_\varepsilon)_n}{\Delta t} \quad (3.30)$$

$$(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} \approx \frac{(d_\varepsilon)_{n+1} - (d_\varepsilon)_n}{\Delta t} \quad (3.31)$$

$$(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} \approx \frac{(\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n}{\Delta t} \quad (3.32)$$

En introduisant les trois équations discrétisées dans l'équation générale (3.29), l'équation du second degré suivant est obtenue :

$$(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1}^2 - \left(g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} + \dot{D}_\infty + \frac{1}{b_v \Delta t} \right) (\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} + g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} \dot{D}_\infty + \frac{(d_\varepsilon)_n}{b_v \Delta t} = 0 \quad (3.33)$$

Les deux racines réelles de ce polynôme sont les valeurs de $(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1}$. Dans notre cas, la solution doit être positive ce qui donne la racine suivante :

$$(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} = \frac{1}{2} B_{n+1} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}^2} \left(1 + \frac{(d_\varepsilon)_n}{b \Delta t C_{n+1}} \right)} \right] \quad (3.34)$$

$$\text{avec } B_{n+1} = g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} + \dot{D}_\infty + \frac{1}{b_v \Delta t} \quad \text{et} \quad C_{n+1} = g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} \dot{D}_\infty \quad (3.35)$$

La dérivée de la fonction $g(\tilde{\sigma}_{equiv})$ (éq. 3.25) est :

$$g'(\tilde{\sigma}_{equiv}) = \frac{1}{\alpha r_{T_x} \beta b(T_x)} \frac{1}{1 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{equiv}}{\alpha r_{T_x}} \right)^2} \quad (3.36)$$

L'endommagement actif à l'instant $n+1$ est calculé en utilisant la discrétisation de l'équation (3.31) :

$$(d_\varepsilon)_{n+1} = (d_\varepsilon)_n + (\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} \Delta t \quad (3.37)$$

Les équations essentielles à la programmation sont résumées ci-après :

Si le modèle est utilisé SANS effet de vitesse, l'endommagement actif est calculé de la manière suivante :

$$(d_\varepsilon)_{n+1} = \frac{1}{\beta b((T_x)_{n+1})} \left[\arctan \left(\frac{(\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1}}{\alpha (r_{T_x})_{n+1}} \right) - \arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) \right] \quad (3.38)$$

Si maintenant le modèle est utilisé AVEC effet de vitesse, l'endommagement actif est calculé de la manière suivante : **Si** $\text{tr}\varepsilon > 0$

$$(\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} = \frac{1}{2} B_{n+1} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}^2} \left(1 + \frac{(d_\varepsilon)_n}{b \Delta t C_{n+1}} \right)} \right] \quad (3.39)$$

$$\text{avec } B_{n+1} = g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} + \dot{D}_\infty + \frac{1}{b_v \Delta t} \quad (3.40)$$

$$C_{n+1} = g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1})(\dot{\tilde{\sigma}}_{equiv})_{n+1} \dot{D}_\infty \quad \text{et} \quad g'((\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1}) = \frac{1}{\alpha r_{T_x} \beta b(T_x)} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{(\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1}}{\alpha r_{T_x}} \right)^2} \right) \quad (3.41)$$

$$(d_\varepsilon)_{n+1} = (d_\varepsilon)_n + (\dot{d}_\varepsilon)_{n+1} \Delta t \quad (3.42)$$

Sinon

$$(d_\varepsilon)_{n+1} = \frac{1}{\beta b((T_x)_{n+1})} \left[\arctan \left(\frac{(\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1}}{\alpha (r_{T_x})_{n+1}} \right) - \arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) \right] \quad (3.43)$$

L'endommagement actif $(d_\varepsilon)_{n+1}$ est sauvegardé parmi les variables pour le pas de temps suivant.

3.5 Calcul du multiplicateur d'endommagement

Avec la loi d'évolution de l'endommagement $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_+$, l'incrément d'endommagement est discréteisé de la manière suivante (schéma implicite) :

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n = \Delta \lambda \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ \quad (3.44)$$

Le multiplicateur d'endommagement $\Delta \lambda$ doit maintenant être écrit en fonction de variables connues comme l'endommagement actif $(d_\varepsilon)_{n+1}$ et le tenseur des déformations $\mathbf{\varepsilon}_{n+1}$. Pour cela, l'équation (3.44) est reprise :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n &= \Delta \lambda \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ \\ \mathbf{D}_{n+1} : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_n : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 &= \Delta \lambda \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \\ \frac{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)} \left[\mathbf{D}_{n+1} : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_n : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \right] &= \Delta \lambda \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \end{aligned}$$

En isolant le multiplicateur d'endommagement, on obtient :

$$\Delta \lambda = \left[\frac{\mathbf{D}_{n+1} : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_n : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)} \right] \frac{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad (3.45)$$

Les expressions $(d_\varepsilon)_{n+1} = \frac{\mathbf{D}_{n+1} : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}$ et $(d_\varepsilon)_{test} = \frac{\mathbf{D}_n : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}$, exprimées précédemment, permettent de simplifier l'écriture du multiplicateur :

$$\Delta \lambda = [(d_\varepsilon)_{n+1} - (d_\varepsilon)_{test}] \frac{\text{tr}(\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ : \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad (3.46)$$

avec pour rappel, $(d_\varepsilon)_{n+1}$ défini dans la partie 3.4 et $(d_\varepsilon)_{test}$ calculé dans la partie 3.2.

3.6 Calcul du tenseur d'endommagement

Le tenseur d'endommagement se calcule de la façon suivante (évidemment si le test sur la fonction critère a donné $f > 0$, car sinon $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n$) :

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \mathbf{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ \quad (3.47)$$

Remarque : Les calculs du multiplicateur d'endommagement et du tenseur d'endommagement avec la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \widetilde{\mathbf{\varepsilon}} \rangle_+$ se trouvent en annexe D.

3.7 Calcul du tenseur des contraintes pour $D_i < D_c$

Après avoir mis à jour le tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} , le tenseur des contraintes peut être déterminé analytiquement, sans itération donc, dans le cas où les valeurs propres d'endommagement D_i sont strictement inférieures à l'endommagement critique D_c . Concernant le cas où $D_i \geq D_c$, les valeurs propres d'endommagement devront être bornées à D_c (avec éventuellement $D_c = 1$). Cette procédure purement numérique est détaillée dans la partie 4 de ce chapitre.

Le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, symétrique et indépendant des caractéristiques élastiques du matériau, se détermine de la façon suivante (rappel : on a posé ici $\eta = 1$ et $n = 2$) :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}]^D + \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle_+}{\min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H]} + \langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle_- \right) \mathbf{1} \quad (3.48)$$

avec $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$. Une fois $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{n+1}$ connu, l'équation (3.48) est inversible analytiquement de sorte que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime en fonction du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Le tenseur des contraintes peut se décomposer de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}_H \mathbf{1} \quad (3.49)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}^D$ le déviateur des contraintes, $\boldsymbol{\sigma}_H = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3}$ la contrainte hydrostatique et $\mathbf{1}$ la matrice identité. Cette décomposition peut être faite pour l'équation (3.48) avec le déviateur des contraintes effectives :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D = [\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}]^D \quad (3.50)$$

Et la contrainte hydrostatique effective :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_H = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle_+}{\min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H]} + \langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle_- \quad (3.51)$$

L'équation (3.51) s'inverse analytiquement [Lemaitre *et al.*, 2009] pour obtenir les parties déviatorique $\boldsymbol{\sigma}^D$ et hydrostatique $\boldsymbol{\sigma}_H$ du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}_H \mathbf{1} \quad (3.52)$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\sigma}^D = \mathbf{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D})}{(3 - \text{tr} \mathbf{D})} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \boldsymbol{\sigma}_H &= \min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H] \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_H \rangle_+ + \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_H \rangle_- \\ &= \frac{1}{3} \left[\min[1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_- \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Le tenseur des contraintes écrit en fonction du tenseur des contraintes effectives est le suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})}{(3 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+1})} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{3} \left[\min[1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^2; 1 - (D_H)_{n+1}] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Avec pour rappel : $\mathbf{H}_{n+1}^{-1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})^{1/2}$

4 Gestion de la rupture (gestion du cas “l'endommagement atteint 1”)

Un apport important de ce travail de thèse est de proposer une nouvelle procédure de gestion de la rupture (gestion du cas "l'endommagement atteint 1") pour l'endommagement anisotrope. Cette gestion de la rupture, implantée dans EUROPLEXUS, a l'intérêt majeur de pouvoir borner les valeurs propres D_i du tenseur d'endommagement, D , d'ordre 2, exactement à 1. Elle permet d'obtenir numériquement une transition continue jusqu'à contrainte nulle (exactement) et ainsi d'éviter une récupération de raideur non physique du modèle initial (fig 3.4). Il est à noter que ce constat est identique quel que soit le type de chargement. Cette gestion numérique de la rupture permettra ainsi de transférer plus de charge aux aciers dans une structure renforcée (fin du chapitre). Un cas test numérique, appelé “essai tirant” et présenté dans la partie 6.2, mettra en évidence ce phénomène et permettra ainsi de valider la nouvelle gestion de la rupture jusqu'à plastification des aciers. De plus, cette gestion de la rupture permet de stocker et bloquer les directions principales d'endommagement au fur et à mesure que les valeurs propres D_i atteignent la valeur de l'endommagement critique.

Le principal problème, mentionné rapidement au début de ce chapitre, se trouve dans la formulation du tenseur des contraintes en fonction du tenseur des contraintes effectives (éq. 3.55). Pour comprendre, prenons un chargement de tri-traction. Le tenseur d'endommagement associé est le suivant :

$$\mathbf{D}^{tri-trac} = \begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & D_{II} = D_I & 0 \\ 0 & 0 & D_{III} = D_I \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

La trace du tenseur d'endommagement est $\text{tr}\mathbf{D} = 3D_I$. Lorsque les 3 valeurs propres d'endommagement valent exactement 1 la trace de l'endommagement est égale à 3. Le terme de l'équation (3.55) $(3 - \text{tr}\mathbf{D}_{n+1})$ se trouvant au dénominateur est nul et cela conduit à une division par 0. Ce cas de figure n'arrive pas uniquement pour un chargement de tri-traction mais pour tous les cas de chargements complexes, éventuellement non proportionnels, conduisant *in fine* à 3 valeurs propres d'endommagement égales à 1.

4.1 Formulation analytique permettant de travailler avec l'endommagement critique à 1

Une formulation analytique est donc proposée pour gérer le cas particulier où $\text{tr}\mathbf{D} = 3$. Pour cela l'équation (3.55) est reprise en se plaçant dans le cas où $\text{tr}\mathbf{D} = 3D_c$ avec la forme du tenseur d'endommagement dans la base propre suivante :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_c & 0 & 0 \\ 0 & D_c & 0 \\ 0 & 0 & D_c \end{pmatrix} = D_c \mathbf{1} \quad (3.57)$$

Dans ce cas, l'endommagement est figé à D_c dans les 3 directions, $\mathbf{D} = D_c \mathbf{1}$ dans toutes les bases (propre ou initiale) car la matrice de passage \mathbf{P} est orthogonale ($\mathbf{D} = \mathbf{P}^T D_c \mathbf{1} \mathbf{P} = \mathbf{P} D_c \mathbf{1} \mathbf{P}^T = D_c \mathbf{1}$) avec \mathbf{P}^T la matrice de passage transposée. Certains termes de l'équation (3.55) peuvent donc être simplifiés :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^{-1} - \frac{(1 - \mathbf{D}_{n+1})}{(3 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+1})} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} (1 - \mathbf{D}_{n+1}) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[\min [1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^2; 1 - (D_H)_{n+1}] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1} \\
\text{soit : } \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1 - D_c) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \frac{(1 - D_c)^2}{3(1 - D_c)} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[[1 - D_c] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1} \\
\text{soit : } \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1 - D_c) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \left[[1 - D_c] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1} \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Avec cette reformulation, équation (3.58), le tenseur des contraintes peut être calculé quelle que soit la valeur de l'endommagement critique D_c , y compris lorsque $D_c = 1$ (dans ce cas $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = 0$ pour les contraintes hydrostatiques positives). Cette formulation est vraie uniquement dans le cas où les 3 valeurs propres d'endommagement sont égales à D_c . Sa mise en place dans la gestion de la rupture est présentée dans la partie suivante.

4.2 Programmation de la gestion de la rupture

En entrée de la procédure de gestion de la rupture, plusieurs variables sont essentielles et doivent être stockées d'un pas de temps à l'autre. Tout d'abord, nous avons le tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} tout juste calculé mais aussi, les variables sauvegardées au pas de temps précédent (à l'instant n) comme la matrice de passage \mathbf{P}_n regroupant les vecteurs propres du tenseur d'endommagement \mathbf{D}_n et un drapeau (flag) appelé $IFAILURE_n$ indiquant le nombre de valeurs propres d'endommagement égales à D_c . On considère que l'opérateur, permettant de calculer les valeurs propres d'un tenseur d'ordre 2, range celles-ci dans l'ordre décroissant $D_I \geq D_{II} \geq D_{III}$ (c'est le cas pour le code EURO-PLEXUS).

Différentes notations sont employées :

- \mathbf{D}_{n+1} : tenseur d'endommagement dans la base initiale (tenseur plein),
- \mathbf{D}_{n+1}^{diag} : tenseur d'endommagement dans la base propre (tenseur diagonal regroupant les valeurs propres),
- \mathbf{P}_{n+1} : matrice de passage regroupant les vecteurs propres du tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} .

La gestion de la rupture se déroule suivant quatre cas résumés ci-après. Les algorithmes détaillés de ces quatre cas se trouvent en annexe D (partie 2) :

- **Cas n°1** : Les trois valeurs propres D_i sont égales à D_c à l'instant n , alors les trois directions restent bloquées à l'instant $n+1$ ($\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$) et les valeurs D_i sont bornées à D_c .
- **Cas n°2** : Les deux valeurs propres D_i sont égales à D_c à l'instant n , les deux directions bloquées à ce même instant sont identiques à l'instant $n+1$. Etant donné que la matrice \mathbf{P} est orthogonale et que deux directions sont déjà bloquées alors la troisième direction reste la même aux instants n et $n+1$, ce qui revient à dire que $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$. La troisième valeur propre est donc calculée et bornée à D_c si nécessaire.
- **Cas n°3** : Une valeur propre D_i est égale à D_c à l'instant n , une seule direction est bloquée à ce même instant. Le repère propre peut donc encore tourner autour de cette direction. En partant de l'idée que le pas de temps utilisé dans un code explicite est relativement petit, nous calculons le

tenseur $\mathbf{D}_{test} = \mathbf{P}_n^T \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{P}_n$ qui n'est pas forcément diagonale mais permet de retrouver l'ordre des valeurs propres de l'instant n à l'instant $n+1$ et notamment la valeur propre déjà bloquée. Pour ne pas perdre l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres associés du tenseur \mathbf{D}_{test} lors du calcul de celles-ci, nous imposons temporairement au tenseur la forme suivante :

$$\mathbf{D}_{test} = \left(\begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & .. & .. \\ 0 & .. & .. \end{array} \right) \quad (3.59)$$

Ensuite les valeurs propres $D_{test\,i}^{diag}$ et vecteurs propres associés \mathbf{Q}_{n+1} du tenseur \mathbf{D}_{test} sont calculés, avec comme point commun $D_{test\,I}^{diag} = D_{test\,11} = 1000$:

$$\mathbf{D}_{test}^{diag} = \left(\begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{test\,II}^{diag} & 0 \\ 0 & 0 & D_{test\,III}^{diag} \end{array} \right) \quad (3.60)$$

Enfin les deux valeurs propres de l'endommagement $D_{test\,II}^{diag}$ et $D_{test\,III}^{diag}$ sont bornées si nécessaire à D_c et réintégrées dans le repère initial par un double changement de repère \mathbf{Q}_{n+1} et \mathbf{P}_n avec donc $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_{n+1}$.

- **Cas n°4** : Aucune des trois valeurs propres de l'endommagement n'a atteint D_c à l'instant n , les nouvelles valeurs propres $D_{n+1\,i}^{diag}$ du tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} sont déterminées et bornées à D_c si nécessaire.

Après avoir envisagé tous les cas de figure et borné les valeurs propres, si nécessaire, le tenseur des contraintes est calculé en fonction du nombre de directions bloquées (ou du nombre de valeurs propres égales à D_c) spécifié par la valeur du drapeau (flag) $IFAILURE_{n+1}$.

5 Calcul d'un pas de temps automatique pour la loi de comportement proposée

5.1 Calcul automatique du pas de temps EUROPLEXUS

Le pas de temps automatique (calculé par Europlexus, éq. 3.11), basé sur la raideur et non pas sur le niveau de contrainte, n'est pas adapté pour les lois de comportement adoucissantes. Les conséquences sur notre modèle d'endommagement sont visibles sur un cas test en traction (fig. 3.6(a)). Lorsque l'on utilise le pas de temps automatique d'Europlexus (environ égal à 1.10^{-5} s., pour notre cas test), on observe que la réponse numérique en traction ne reproduit pas la courbe théorique. Effectivement, hormis le fait que la courbe numérique ne possède pas assez de points pour représenter la réponse de référence, c'est surtout le fait que sur les trois points numériques, seulement deux se trouvent sur la courbe de référence qu'est la réponse théorique du modèle. Cette différence entre la réponse numérique et celle théorique pourrait être considérée comme acceptable par certains utilisateurs. Une solution pour le calcul du pas de temps est tout de même proposée et son utilisation est conseillée.

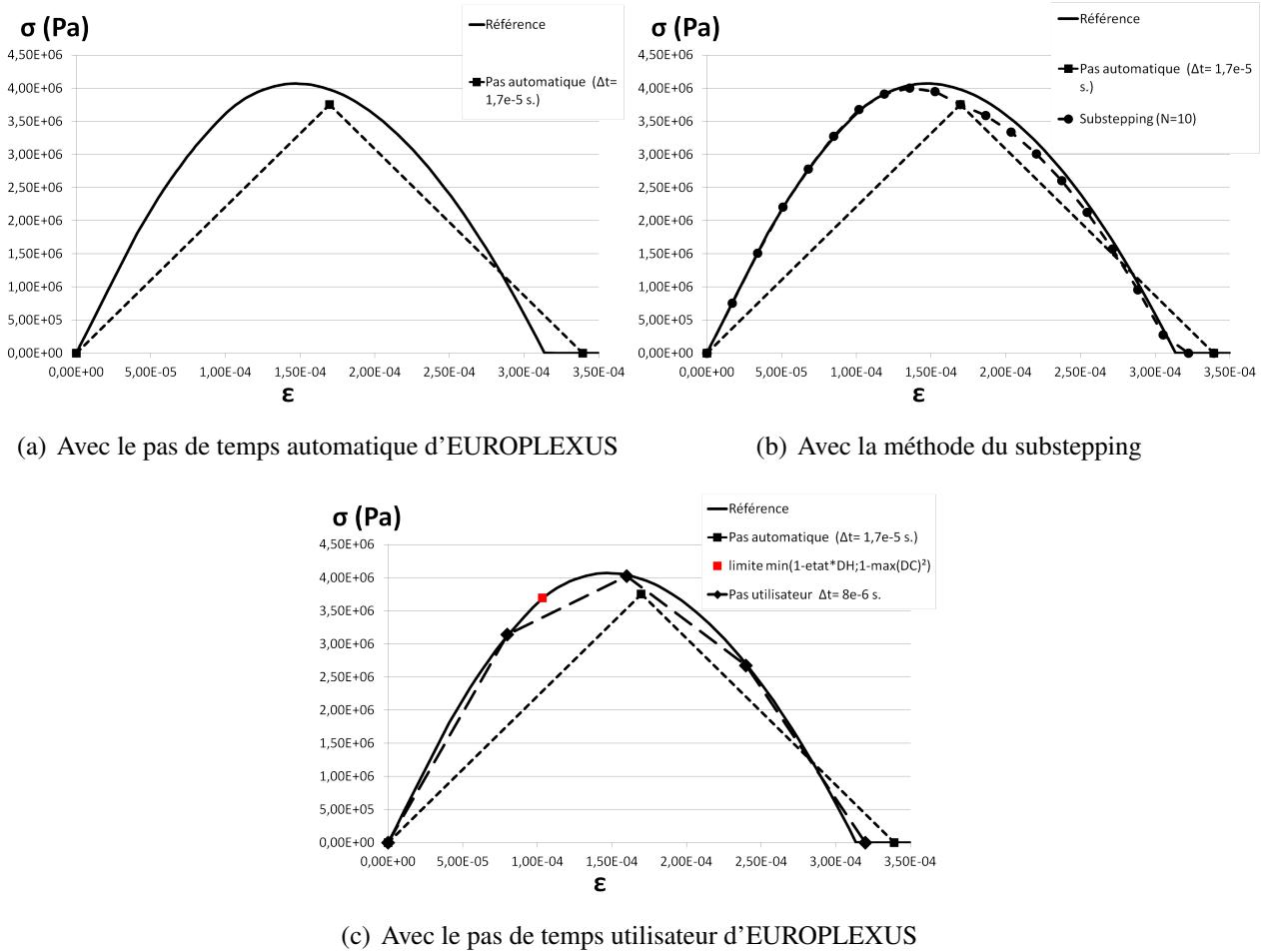


FIG. 3.6 – Réponse contrainte-déformation de traction

5.2 Modifications proposées

5.2.1 Le substepping

Pour augmenter le nombre de points sur la réponse contrainte-déformation (fig. 3.6(b)), on fait appel au substepping, consistant à discrétiser l'incrément de déformation en N sous-incréments et intégrer la loi de comportement sans augmenter le nombre de résolutions de l'équilibre global de la structure. Cependant avec cette technique, une partie de la courbe numérique en traction ne se superpose pas à la courbe théorique de référence et le substepping ne résoud en aucun cas notre problème. Maintenant, sans substepping mais si le pas de temps est suffisamment petit (imposé à l'aide du pas de temps utilisateur d'EUROPLEXUS égal à 1.10^{-6} s. pour notre cas test), les réponses numériques et théoriques sont identiques (fig. 3.6(c)).

L'une des explications à ce problème se situe dans l'opérateur $\min [1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^2; 1 - (D_H)_{n+1}]$ utilisé dans notre modèle pour le couplage module de compressibilité-endommagement. Effectivement, il est constaté qu'il faut au moins un point défini avant le passage de la fonction $1 - (D_H)_{n+1}$ à la fonction $1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^2$ dans notre cas test de traction. L'état d'endommagement lors de ce passage pour le cas de la traction simple suivant la direction 1 est déterminé de la façon générale suivante (rappelons que l'on a fixé $\eta = 1$ et $n = 2$ pour les bétons) :

$$1 - \eta D_H = 1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^n \quad \text{soit} \quad 1 - \eta \frac{D_I}{3} = 1 - D_I^n \quad \text{ou encore} \quad \frac{\eta}{3} D_I = D_I^n \quad (3.61)$$

Les racines de l'équation (3.61) sont $D_I = 0$ et $D_I = (\frac{\eta}{3})^{\frac{1}{n-1}}$. La dernière racine est celle qui nous intéresse. Avec notre jeu de paramètres $\eta = 1$ et $n = 2$, l'intersection entre les 2 fonctions se produit pour la valeur d'endommagement $D_I = \frac{1}{3}$. Ce point est placé en rouge/gris sur la courbe contrainte-déformation (fig. 3.6(c)). Pour résoudre ce problème et être en même temps indépendant des paramètres "matériaux" η et n , une gestion du pas de temps spécifique est utilisée.

5.2.2 Critères pour le calcul du pas de temps élastique et d'endommagement

Le choix d'utiliser un ou plusieurs critères (à ne pas confondre avec la fonction critère f) pour le calcul du pas de temps est basé sur deux points. Le premier est qu'il faut au moins un critère dans la partie élastique d'après le constat réalisé précédemment. Le second est qu'il serait souhaitable de pouvoir piloter et borner l'incrément d'endommagement sur un pas de temps.

La première solution envisagée était d'utiliser un critère unique. Le problème majeur est que, pour représenter correctement l'endommagement de la partie non linéaire, il faut un pas de temps suffisamment petit alors que la représentation de la partie élastique nécessite seulement d'avoir quelques points.

Cette première solution est donc abandonnée, car elle augmente considérablement et inutilement les temps de calculs.

Un moyen simple et efficace est d'avoir deux pas de temps distincts : un pas de temps lors d'un chargement à endommagement constant et un pas de temps lorsque l'endommagement évolue. Cette solution permet, sans pénaliser les temps de calculs dans la partie élastique, de mieux gérer l'incrément d'endommagement. La formulation des critères pour le calcul du pas de temps est la suivante :

- Si la fonction critère (éq. 3.23) est strictement inférieure à 0 ($f < 0$), alors nous sommes dans le cas de charge ou de décharge élastique et le critère du pas de temps Δt_{n+1} est défini en fonction

de la contrainte effective équivalente $\tilde{\sigma}_{equiv}$ (éq.3.21) et adimensionné par la limite élastique de traction σ_y^t , de la façon suivante :

$$\frac{1}{\sigma_y^t} | (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n | < \alpha_1 \quad (3.62)$$

où α_1 , le paramètre du critère sans dimension pour le calcul du pas de temps dans la partie élastique, est fixé à $\alpha_1 = 0,1$ (identifié via notre cas test de traction).

- Si la fonction critère (éq. 3.23) est positive ($f \geq 0$), nous sommes dans le cas de croissance de l'endommagement. Nous proposons comme critère du pas de temps Δt_{n+1} , un critère bornant l'accroissement de la norme infinie du tenseur d'endommagement $\|\mathbf{D}\|_\infty = \max(D_i)$ de la façon suivante :

$$(\max(D_I))_{n+1} - (\max(D_I))_n < \alpha_2 \quad (3.63)$$

où α_2 , le paramètre du critère sans dimension (correspondant à un incrément d'endommagement) pour le calcul du pas de temps dans la partie endommagement, est fixé à $\alpha_2 = 0,01$ (identifié via notre cas test de traction).

Ces deux critères sont utilisés uniquement à partir du second pas de temps du calcul puisque pour le premier pas de temps les valeurs de $(\max(D_I))_n$ et $(\tilde{\sigma}_{equiv})_n$ ne sont pas encore définies. Par défaut, un pas de temps très faible est imposé lors du premier passage dans la loi de comportement (dans notre cas, $\Delta t_{init} = 1.10^{-8} s^{-1}$) afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Si les critères sont satisfaits, le pas de temps est doublé, sinon il est divisé par le rapport $R_1 = \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\sigma_y^t} | (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n |}$ pour la partie élastique et par le rapport $R_2 = \frac{\alpha_2}{(\max(D_I))_{n+1} - (\max(D_I))_n}$ pour la partie endommagement. Pour s'assurer que le pas de temps proposé est toujours plus petit ou égal à celui d'EUROPLEXUS (Δt_{stab} , éq. 3.11), le pas de temps final est déterminé en prenant le plus petit des deux :

$$\Delta t_{n+1}^{final} = \min[\Delta t_{n+1}; \Delta t_{stab}] \quad (3.64)$$

Le schéma numérique pour le calcul automatique du pas de temps est présenté dans l'algorithme 3 de l'annexe D. L'implantation numérique correspondante permet de résoudre le problème rencontré sur la figure 3.6(a) et d'obtenir la réponse de traction correcte illustrée sur la figure 3.7. On remarque au passage que les "paires" de points observables sur la figure représentent le choix de multiplier par deux le pas de temps lorsque celui-ci respecte le critère, et de le diviser par l'un des deux rapports R_1 , R_2 présentés précédemment dans le cas contraire.

6 Evaluation numérique de l'algorithme proposé

Des cas tests sur structures sont ici présentés, ils permettent de valider les différents développements exposés dans ce chapitre.

6.1 Cas test de tri-traction

Comme nous l'avons vu auparavant, le cas test de tri-traction sur un élément cube était, à l'origine, le plus contraignant puisque les trois valeurs propres d'endommagement sont identiques et progressent vers la valeur d'endommagement critique D_c . Cette valeur ne pouvait pas être égale à 1

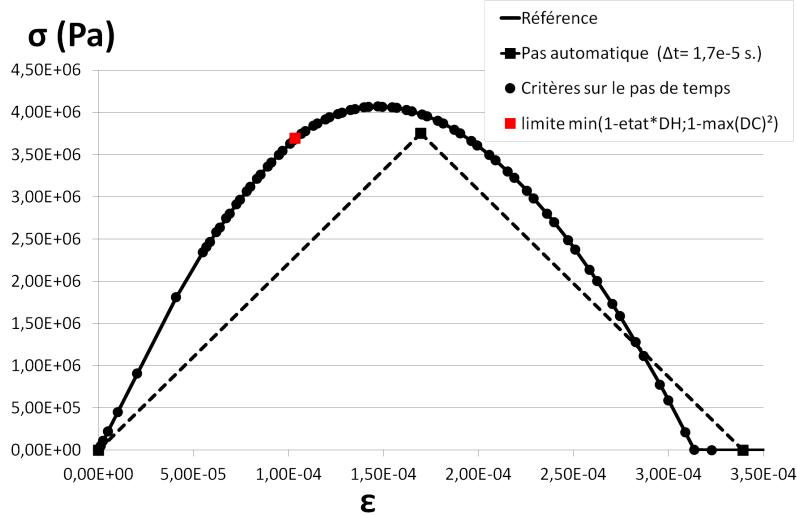


FIG. 3.7 – Réponse contrainte-déformation de traction en utilisant des critères sur le pas de temps ($\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,01$)

dans les modèles d'endommagements anisotropes de [Desmorat *et al.*, 2007] et [Chambart, 2009] (et programmations CASTEM ou EUROPLEXUS correspondantes) car le terme $3 - \text{tr} \mathbf{D}$ amenait une division par 0. Avec la nouvelle gestion de la rupture programmée, ce cas test est développé et lancé dans EUROPLEXUS pour $D_c = 1$. La figure 3.8(a) permet d'observer la réponse contrainte-déformation de tri-traction alors que la figure 3.8(b) montre que l'endommagement est égale à 1 pour les trois valeurs propres. Ce cas test permet donc de valider définitivement la gestion de la rupture avec $D_c = 1$.

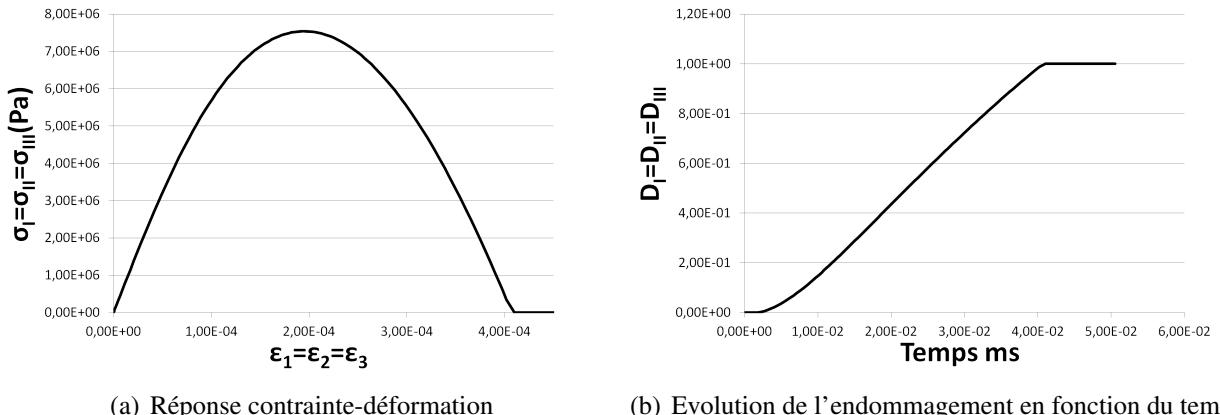


FIG. 3.8 – Réponses d'un chargement de tri-traction avec la nouvelle gestion de la rupture

6.2 Importance d'avoir $D_c = 1$

Nous avons vu précédemment qu'il était important de pouvoir avoir $D_c = 1$ afin d'éviter notamment les reprises de raideurs et les contraintes non nulles associées. Pour illustrer cela sur un calcul de structure, nous allons étudier le comportement d'un tirant en béton armé pour différentes valeurs

de D_c . Un des objectifs est d'observer la déformation plastique de l'acier. Pour mettre en oeuvre ce cas test, nous nous sommes inspirés des essais tirants de [Clement, 1987] sans pour autant avoir repris les dimensions de ses éprouvettes. Le béton est modélisé par des éléments volumiques 3D alors que l'acier longitudinal traversant le béton est modélisé en 1D. Après avoir choisi un jeu de paramètres et trouvé une valeur d'énergie de fissuration expérimentale dans la littérature, nous avons pu déterminer une taille d'élément h comme expliqué dans la partie 9.2. Le jeu de paramètres pour notre loi de comportement du béton est détaillé dans le tableau 3.1.

Paramètre	v	E	η	n	σ_y^t	σ_y^c	σ_y^{bc}	α	β	b_v	D_∞
Valeur	0.2	40	1	4	2 MPa	9 MPa	9 MPa	12 MPa	0.65	0.5	$50000 s^{-1}$

TAB. 3.1 – Jeu de paramètres utilisé par défaut pour le cas test du tirant

L'énergie de fissuration expérimentale a été fixée à $G_f = 86\text{N/m}$, ce qui nous donne une taille d'élément de 9 cm. Pour avoir suffisamment d'éléments dans notre structure, les dimensions dans notre cas test, appelé "tirant", sont grandes avec une longueur de 4m, une section de 1m^2 et un diamètre d'acier de 6 mm. La section de l'acier est très faible face à la section du tirant dans le but de plastifier très rapidement l'armature et ainsi réduire au maximum le temps de calcul. Dans un premier temps, un maillage grossier est suffisant pour montrer une différence de résultat entre un endommagement critique $D_c = 0,999$ et $D_c = 1$. En respectant à peu près la taille d'élément calculée ($\approx 10\text{cm}$), la modélisation, visible sur la figure 3.9, comporte 5545 éléments cubique pour le béton et 90 éléments 1D pour l'acier. Une liaison parfaite est considérée entre les deux matériaux. Concernant le chargement, un déplacement suivant la direction z sur les nœuds des deux extrémités du tirant (béton et acier) est imposé. La vitesse de déformation moyenne souhaitée de la structure est de $\dot{\epsilon} = 0.1\text{s}^{-1}$, ce qui donne le déplacement imposé en fonction du temps suivant : $U(t) = 0,4t$ avec la vitesse $\dot{U} = 0,4\text{m/s}$.

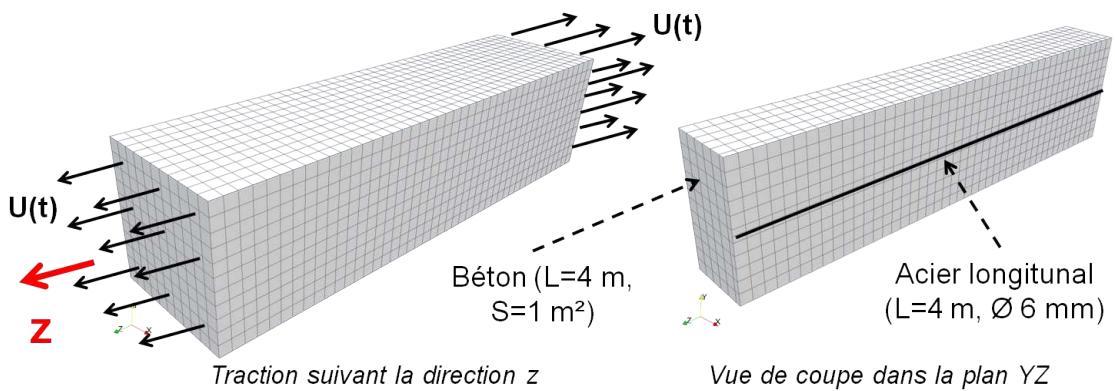


FIG. 3.9 – Modélisation d'un cas test appelé "tirant" avec des déplacements imposé sur l'ensemble des nœuds de l'acier et du béton sur les deux extrémités

6.2.1 Comparaison entre $D_c = 0,999$ et $D_c = 1$

Transfert de charge béton-béton. Les figures 3.10 et 3.11 montrent l'évolution de la plus grande valeur propre D_I du tenseur d'endommagement \mathbf{D} en fonction du temps sur l'ensemble du tirant et ceux pour deux valeurs d'endommagements critiques différentes $D_c = 1$ et $D_c = 0,999$.

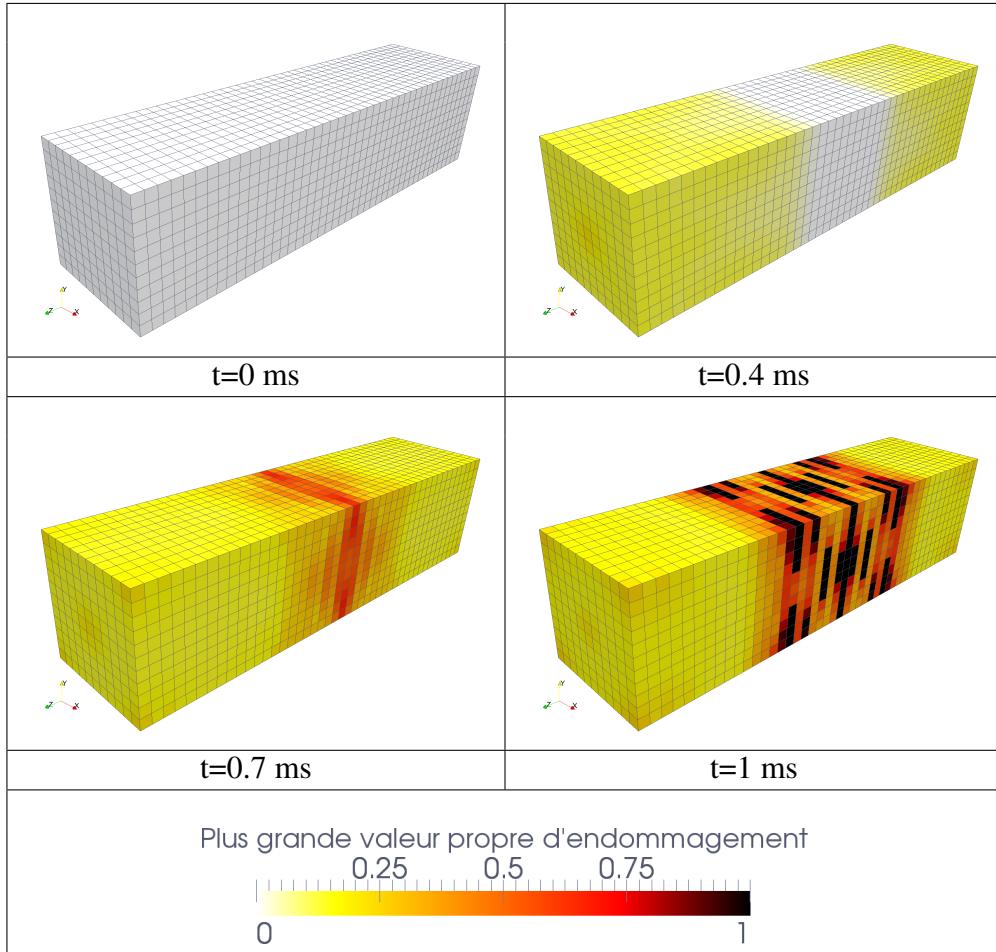


FIG. 3.10 – Evolution identique, de la 1^{re} valeur propre du tenseur d'endommagement D_I d'un essai "tirant" entre 0 et 1 ms, entre les deux valeurs d'endommagement critique $D_c = 0.999$ et $D_c = 1$

Les calculs montrent une évolution identique de l'endommagement pour les 2 cas jusqu'à $t=1$ ms (fig. 3.10), qui s'explique par le fait qu'aucune des 3 valeurs propres du tenseur d'endommagement n'est encore atteint la valeur critique D_c . Puis vers $t=4$ ms (fig. 3.11), on observe des différences jusqu'à la fin du calcul. L'endommagement pour $D_c = 0.999$ évolue toujours alors que pour $D_c = 1$ celui-ci n'évolue pratiquement plus à partir de $t=1$ ms. Cette différence s'explique par le fait que pour $D_c = 0.999$, comme nous l'avons vu précédemment dans la partie 4, il y a une reprise de raideur non physique sur la réponse de traction. Cela entraîne un transfert de charge d'un élément à un autre en permanence, contrairement au cas $D_c = 1$ qui, à contrainte de traction nulle, ne transmet plus de charge aux éléments voisins. Ainsi, dans le cas $D_c = 0.999$ on se retrouve avec une structure soi-disant totalement endommagée (tirant tout noir, fig. 3.11), alors qu'avec la modélisation proposée et l'endommagement critique $D_c = 1$, les zones endommagées localement n'évoluent plus.

Transfert de charge béton-acier. Intéressons nous maintenant au transfert de charge du béton à l'acier. Pour cela, la déformation plastique de l'acier le long de celui-ci à l'instant $t=200$ ms est tracée, et ceci pour les deux modélisations numériques précédentes ($D_c = 1$ et $D_c = 0.999$). Le fait d'avoir endommagé sur l'ensemble du tirant avec $D_c = 0.999$ (fig. 3.11) a pour conséquence d'avoir une déformation plastique diffuse le long de l'acier (trait noir discontinu, fig. 3.12), alors que pour

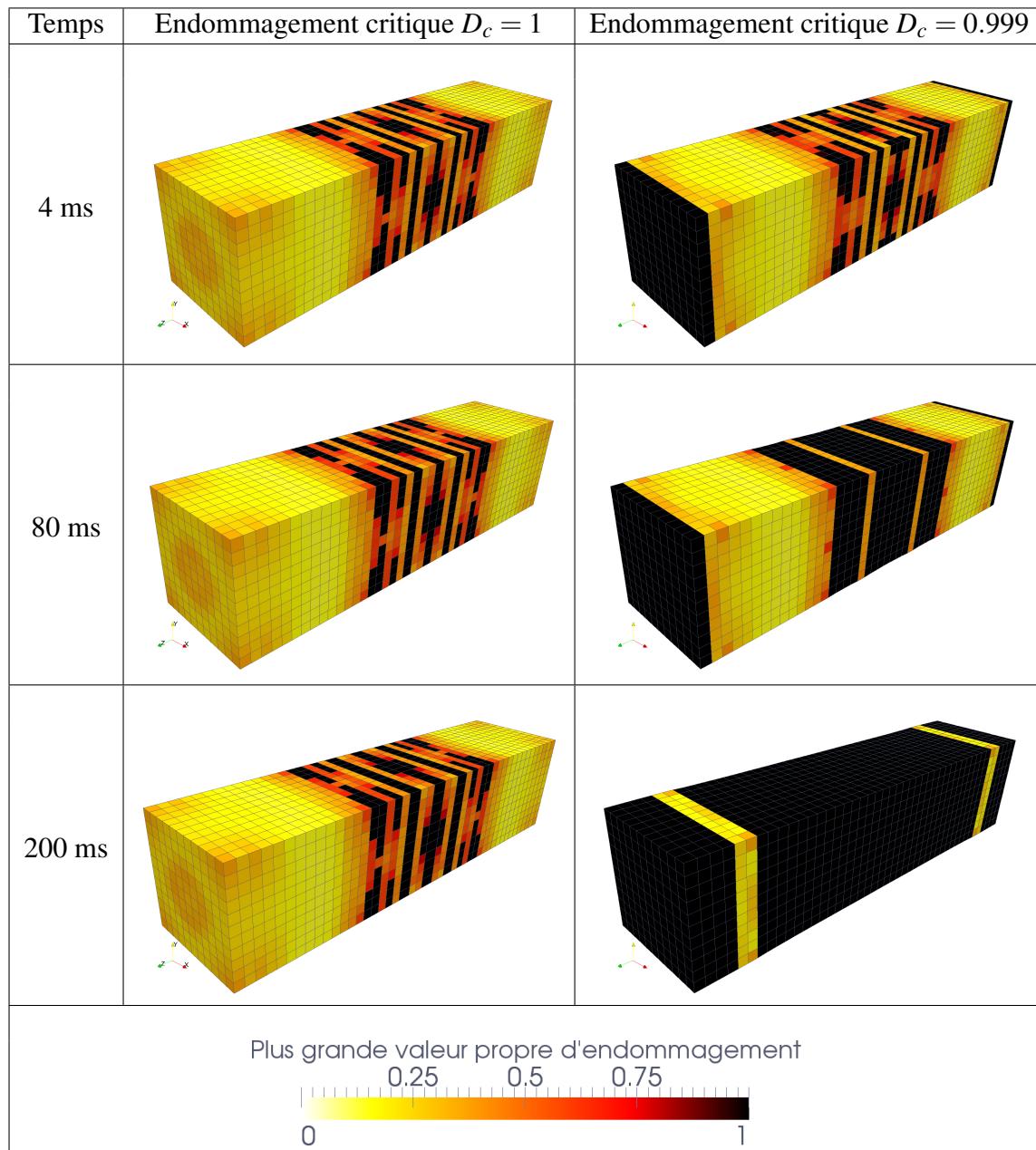


FIG. 3.11 – Evolution de la 1^{re} valeur propre du tenseur d'endommagement d'un essai “tirant“ entre 4 et 200 ms avec deux valeurs d'endommagement critique D_c 0,999 et 1.

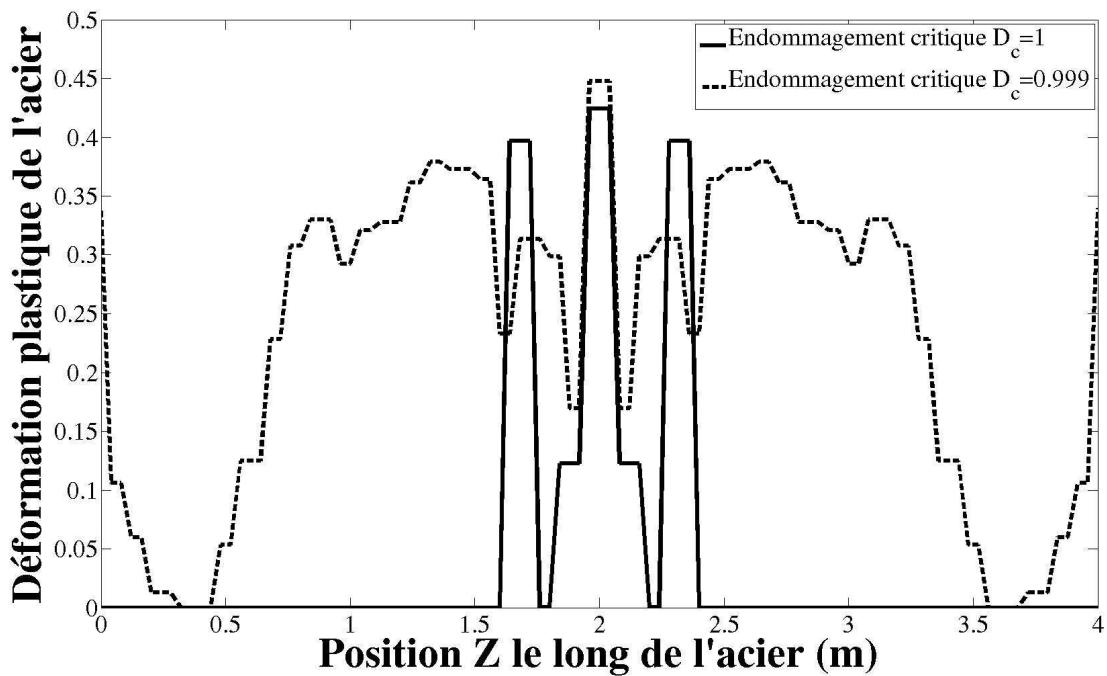


FIG. 3.12 – Réponse de la déformation plastique de l'acier le long de celui-ci pour 2 endommagements critiques différents à $t=200\text{ms}$

la modélisation avec $D_c = 1$, la déformation plastique est, comme souhaitée, beaucoup plus localisée (trait noir continu, fig. 3.12).

Ce cas test numérique met en avant l'importance de réaliser des calculs avec $D_c = 1$ allant jusqu'à contrainte nulle (exactement), ce qui aujourd'hui est déjà très peu souvent le cas pour des calculs avec une loi de comportement avec endommagement isotrope et qui est rendu possible lors de ce travail pour l'endommagement anisotrope grâce à la gestion de la rupture proposée et programmée.

6.3 Simulations numériques en fixant l'énergie de rupture

Afin de mettre en évidence l'intérêt de fixer la taille des éléments (ici de 9 cm) et donc de fixer l'énergie de rupture, le cas test du tirant est repris en faisant varier la taille du maillage. Deux discrétisations (grossière, fine) sont utilisées avec des tailles d'éléments allant de 1 cm à 9 cm. Pour ne pas avoir un nombre trop important d'éléments et donc des temps de calcul trop conséquents pour le maillage fin, on utilise sur celui-ci un raffinement progressif symétrique suivant la longueur du tirant (direction z), de telle façon à avoir une taille d'élément au centre du tirant (zone la plus endommagée) d'environ 1cm contre 9 cm pour le maillage grossier :

- Grossier : 5545 éléments cubiques avec 45 éléments dans la longueur (taille d'élément de 9 cm).
- Fin : 144837 éléments cubiques avec 133 éléments dans la longueur. Une distribution uniforme suivant les directions x et y et une distribution gaussienne suivant la longueur du tirant (direction z) ont permis d'avoir une taille d'élément au centre du tirant d'environ 1cm.

Les deux maillages (3D) sont représentés sur la figure 3.13.

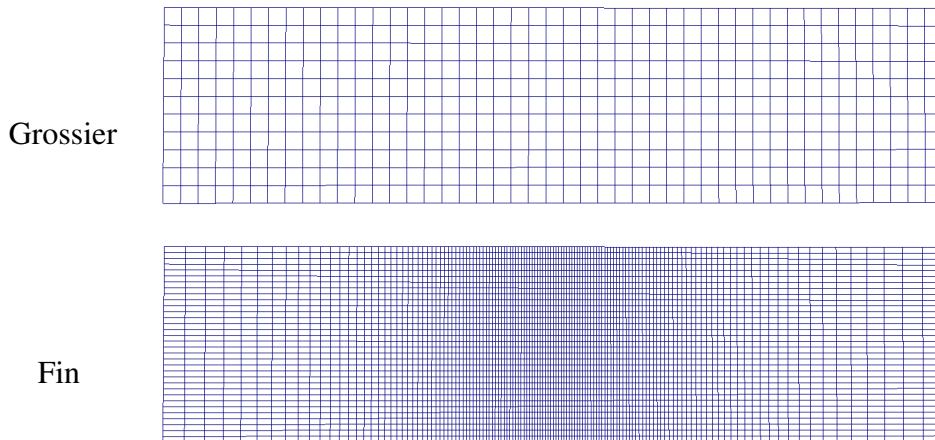


FIG. 3.13 – Différents maillages utilisés

Avec notre modèle implanté dans le code EUROPLEXUS, des cartes d'endommagement, la déformation plastique de l'acier et la réponse force-déplacement du béton sont tracées sur les figures suivantes. Les cartes représentant la plus grande valeur propre d'endommagement D_I sont tracées pour les 2 maillages à l'instant $t=0,6$ ms, figure 3.14. Pour le maillage fin, 3 zones fortement endommagées sont clairement distinguées, ce qui est moins évident pour le maillage grossier. Concernant

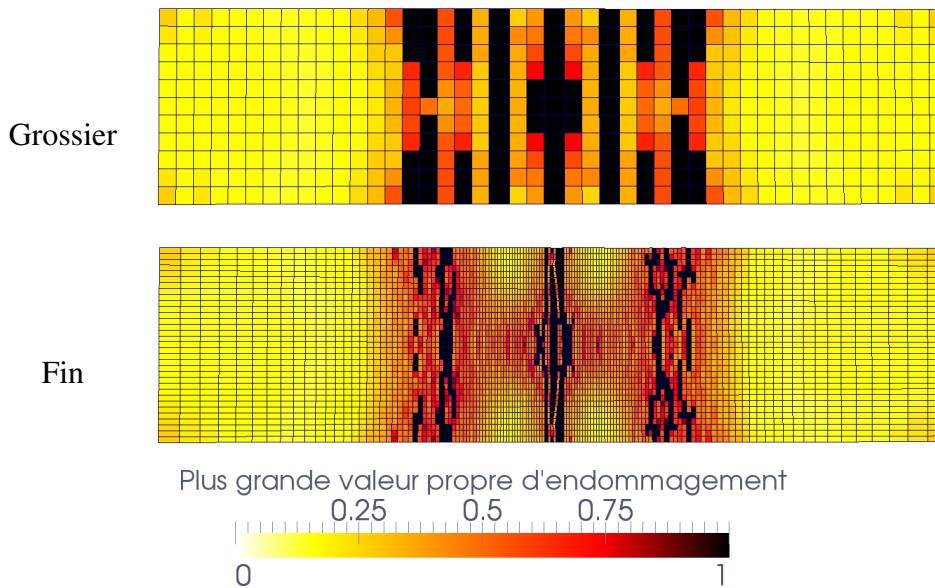


FIG. 3.14 – Cartes d'endommagement d'un essai “tirant” à $t=0,6$ ms avec 2 maillages différents

la réponse force-déplacement (fig. 3.15) et la plastification de l'acier le long de celui-ci (fig. 3.16), on peut observer des résultats qui ne convergent pas complètement signifiant qu'il faudrait un dernier calcul avec un maillage très fin. Ceci n'a été pas fait ici pour des raisons de temps de calculs trop important. Toutefois on constate que fixer la taille des éléments, et donc fixer l'énergie de rupture,

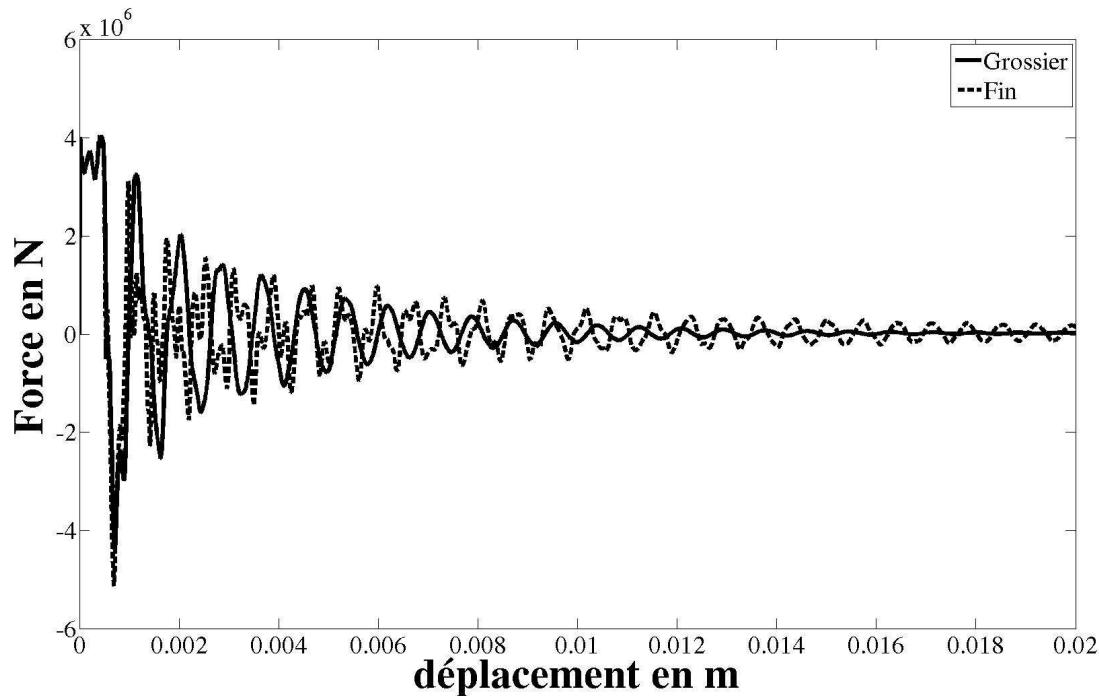


FIG. 3.15 – Réponse force-déplacement du béton pour différents maillages

semble aider le calcul grossier puisque les valeurs de la déformation plastique au centre de l'acier pour les 2 maillages (fig. 3.16) sont du même ordre de grandeur et se superposent assez bien tout du moins pour le pic central de déformation plastique de l'acier de la figure 3.16. La figure 3.17 permet d'apprécier les valeurs de vitesse de déformations locales $\dot{\epsilon}_{zz}$ qui sont de l'ordre de 10 s^{-1} au niveau des zones fortement endommagées (voir rompues) et de l'ordre de 2 s^{-1} en dehors de ces zones. Pour cette gamme de vitesse, la méthode de régularisation par taux d'endommagement limité est légèrement influente (partie 6 du chapitre 2) et l'utilisation conjointe de la "régularisation" d'Hillerborg (énergie de rupture fixée) semble justifiée.

Ce chapitre a exposé l'implantation numérique du modèle ainsi que sa gestion de la rupture dans un code de calcul explicite. Différents apports numériques ont été présentés et une validation au travers notamment d'un cas test numérique, appelé "tirant", a été réalisée. Le tirant a essentiellement mis en avant la nécessité de réaliser les calculs de structure avec un endommagement critique égal à 1 ($D_c = 1$ exactement).

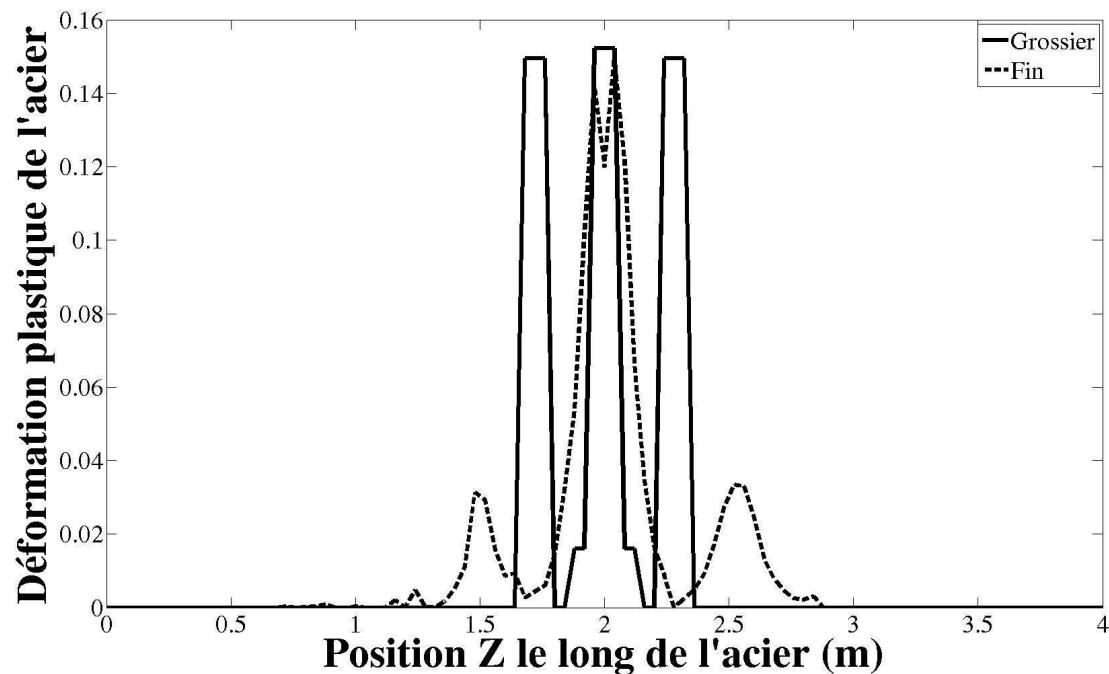


FIG. 3.16 – Réponse de la déformation plastique de l'acier le long de celui-ci pour les 2 maillages à $t=0,6$ ms

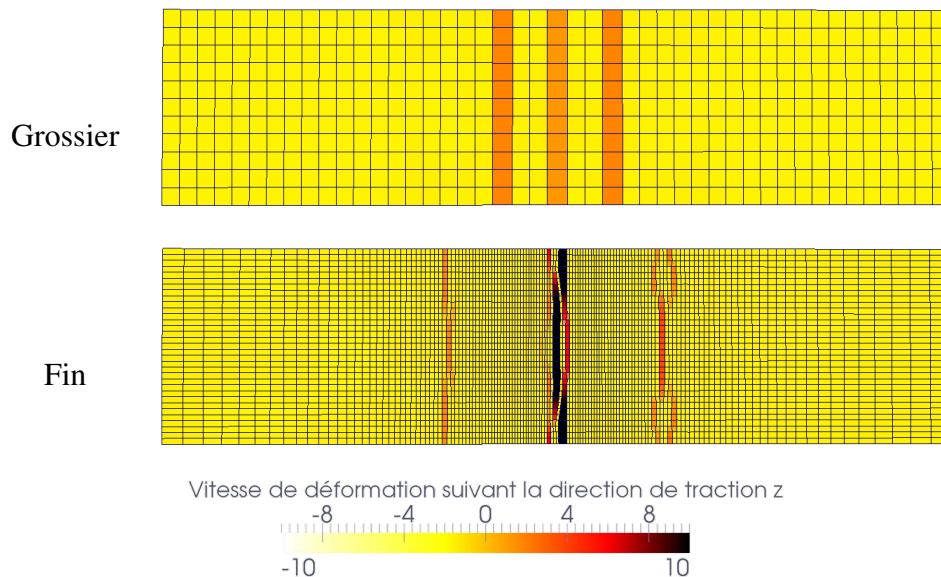


FIG. 3.17 – Cartes de vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_{zz}$ (direction de sollicitation) pour les 2 maillages à $t=0,6$ ms

Chapitre 4

Résultats expérimentaux : Essais d'impact sur des poutres et essais d'arrachement

Après avoir présenté le modèle de comportement du béton dans le chapitre 2 et son implantation numérique dans le chapitre 3, ce chapitre est dédié aux multiples essais expérimentaux réalisés dans cette thèse. Suite aux essais d'impact sur poutre de [Chambart, 2009] inspirés par les études de [May *et al.*, 2005; Chen et May, 2009] sur la rupture en flexion de poutres en béton armé sous impacts, deux campagnes expérimentales ont été réalisées (4 poutres en 2011 et 2 poutres en 2012). Elles ont été effectuées au laboratoire d'études de DYNamique (DYN) du CEA Saclay en collaboration avec T. Valin et P. Piteau sur la tour de chute Orion. La fabrication des poutres et des essais d'arrachement, ainsi que la caractérisation du béton et de l'acier ont été réalisées au département génie civil de l'ENS Cachan en collaboration avec X. Jourdain et O. Rateau. L'ensemble des résultats de ces essais vont permettre de valider le modèle proposé. La formulation du béton (tab. 4.1), utilisée par [Chambart, 2009] pour ses essais d'impact sur poutres, a été conservée pour l'ensemble des essais (impacts sur les poutres et essais d'arrachement) réalisés dans cette thèse afin d'étendre la base de données sur un même béton courant. La résistance en compression est de 36 MPa.

Constituants	Masses pour un mètre cube
Gravier silico-calcaire roulé 3,15-12,5 mm	941 kg/m ³
Sable siliceux roulé 0-5 mm	873 kg/m ³
Ciment CEM1 52,5 (Lafarge usine du Teil)	320 kg/m ³
Fillers calcaires (Piketty Fillers A)	35 kg/m ³
Eau totale 200 litres	200 kg/m ³
Masse pour un mètre cube	2369 kg/m ³

TAB. 4.1 – Formulation du béton utilisée lors cette thèse

1 Impacts sur des poutres en béton armé

Afin de connaître les capacités du modèle de comportement développé à donner des résultats prédictifs et pertinents, les résultats expérimentaux sont présentés dans ce chapitre et confrontés aux résultats des simulations numériques dans le chapitre 5.

1.1 Les types d'impact

La problématique industrielle est de pouvoir évaluer la tenue des structures en béton armé sous chargement dynamique de type choc à basse vitesse, comme la chute accidentelle de colis ou la chute d'avion. Parmi ces chocs, deux types d'impact sont généralement distingués. Le choc dur, par définition, est un choc où le projectile se déforme peu pendant l'impact. Ceci est le cas notamment des chutes accidentelles de colis, comme des conteneurs, sur des structures en béton armé. Pour ce type de choc, le projectile rebondit généralement plusieurs fois sur la paroi en béton, contrairement aux chocs mous où il y a une absence de rebond avec un projectile qui se déforme contre la structure en béton armé. Par exemple, la chute d'avion est qualifiée de choc mou, sauf pour les réacteurs et le train d'atterrissement de l'avion. Pour différencier les deux types d'impact, cette définition peut être inefficace, car elle ne prend pas en compte la vitesse d'impact ni les seuils de rupture des matériaux du projectile et de la cible, qui sont très importants dans la transition d'un mode de ruine vers un autre. [Koechlin, 2007; Koechlin et Potapov, 2009] proposent donc un critère C^{choc} prenant en compte la résistance en traction de la cible σ_c (la poutre en béton armé dans notre cas), la résistance du projectile σ_p , sa masse volumique ρ_p et sa vitesse V_0 :

$$C^{choc} = \frac{\sigma_p}{\sigma_c} + \frac{\rho_p V_0^2}{\sigma_c} < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} C^{choc} < 1 : \text{choc mou} \\ C^{choc} \geq 1 : \text{choc dur} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le critère permet de vérifier si la cible va résister à l'impact. Si la cible résiste ($C^{choc} < 1$) et que le projectile s'écrase, on considère que c'est un choc mou, et lorsque le projectile pénètre la cible ($C^{choc} \geq 1$), c'est un choc dur. De plus, dans ce dernier cas, la ruine est locale alors que, pour un choc mou la ruine peut être liée à des effets plus globaux. La représentation de ce critère est donnée sur la figure (4.1).

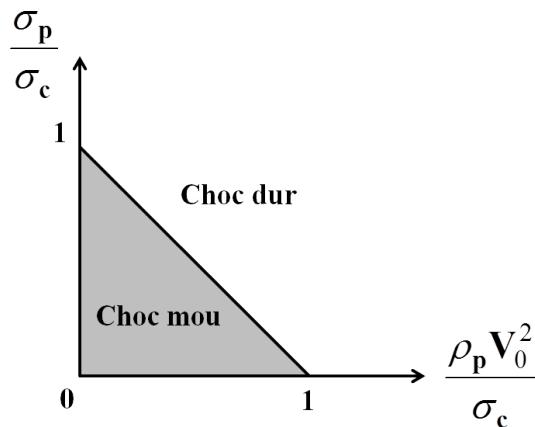


FIG. 4.1 – Classification des impacts à basse vitesse d'après [Koechlin, 2007; Koechlin et Potapov, 2009]

Parmi les six poutres en béton armé de différentes longueurs, une est destinée à un choc dur et les cinq autres à des chocs mous, en insérant du nid d'abeille (fig. 4.5(a)) entre le projectile et la poutre dans le but d'écrêter la force d'impact et d'obtenir un chargement à peu près constant (plateau) pendant quasiment toute la phase d'impact.

1.2 Géométrie, ferraillage et coulage

Ces six poutres ont été réalisées (ferraillage et coulage) au département génie civil de l'ENS Cachan (fig. 4.2(a) et 4.2(c)), alors que la mise en place des jauge d'extensiométrie a été réalisée par la société ELMEX (fig. 4.2(b)).



FIG. 4.2 – Grandes étapes de la réalisation des poutres

Le tableau (4.2) renseigne, avec une désignation pour chaque poutre impactée, le numéro de gâchée, leur longueur, la longueur entre appuis, le type d'impact et la date de l'essai.

A noter que, pour des raisons techniques (longueur maximale du moule 3,5 m), il a fallu quatre gâchées pour réaliser ces six poutres de section droite $20 \times 15 \text{ cm}^2$. La disposition des armatures est présentée sur la figure 4.3 avec une répartition et des diamètres pour les aciers longitudinaux identiques pour l'ensemble des poutres. Toutes les poutres sont ferraillées avec deux aciers de Haute Adhérence (HA) de diamètre 12 mm en bas et deux aciers HA de diamètre 8 mm en haut. Afin de

Désignation	Gâchée ¹	Longueur (m)	Longueur entre appuis (m)	Type choc	Date essai
P1-130	1	1,3	1	mou	05/07/2011
P2-130	2	1,3	1	mou	21/09/2011
P3-180	1	1,8	1,5	mou	27/09/2011
P4-180	2	1,8	1,5	mou	29/09/2011
P5-330	3	3,3	3	mou	20/02/2012
P6-330	4	3,3	3	dur	23/02/2012

TAB. 4.2 – Récapitulatif des 6 poutres impactées

s'assurer du bon ancrage des armatures en bout de poutres, elles sont enfilées dans les trous de deux plaques d'about en acier d'une épaisseur de 10 mm puis soudées à celles-ci. Ceci permet de s'assurer que ces aciers ne glissent pas par rapport au béton. Les cadres (fig. 4.3) sont des aciers lisses de diamètre 6 mm espacés de 20 cm et répartis symétriquement de part et d'autre du centre de la poutre. Ils permettent d'augmenter la résistance des poutres à l'effort tranchant. Le nombre de cadres est différent selon la longueur de la poutre mais le diamètre de ces derniers est à chaque fois identique pour toutes les poutres. L'enrobage minimum des armatures est de 9 mm.

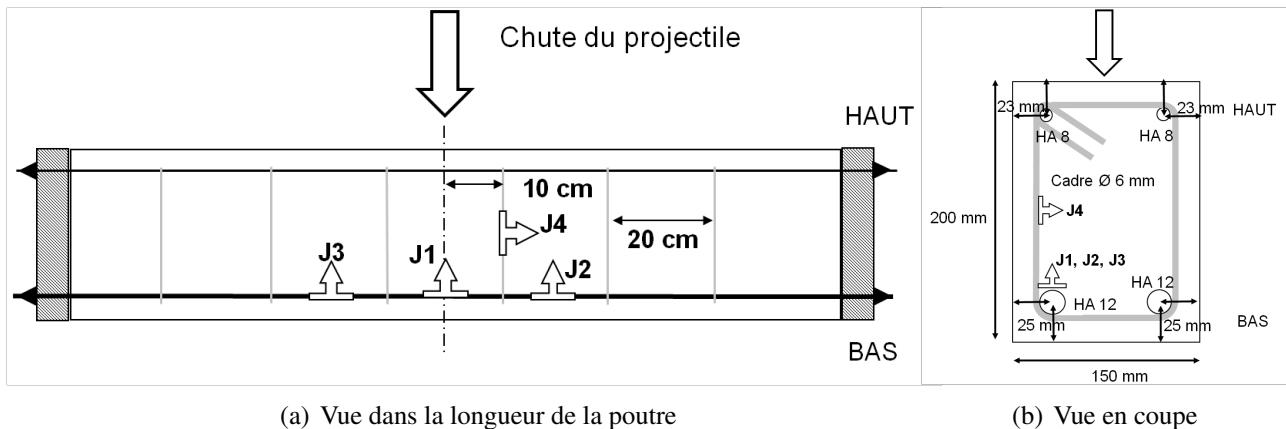


FIG. 4.3 – Plan de ferraillage des poutres

1.3 Dispositif expérimental

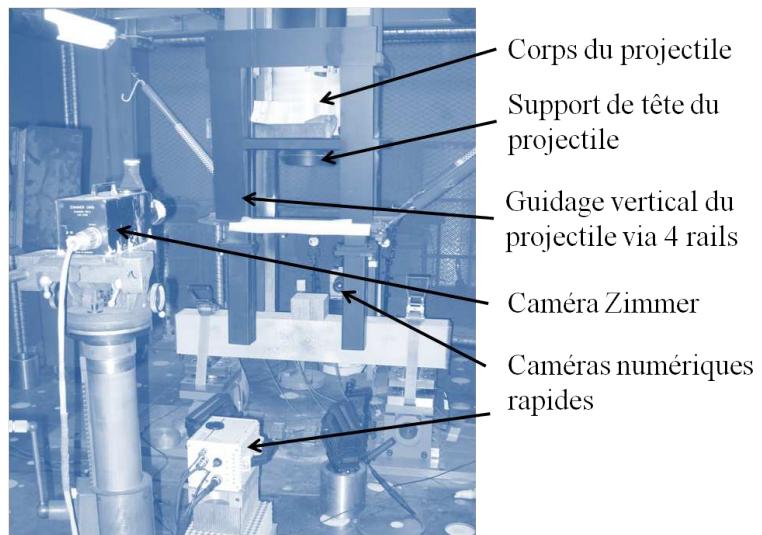
1.3.1 La tour de chute Orion

Cette tour de chute gravitaire guidée du CEA Saclay, appelée Orion, permet de lâcher un projectile d'une masse maximale de 900 Kg et d'une hauteur allant jusqu'à 8 m, ce qui permet d'atteindre une vitesse d'impact d'environ 12,5 m/s. Ce projectile est guidé par 4 rails (fig. 4.4(b)) afin qu'il tombe et rebondisse verticalement.

¹Gâchée n°1 réalisée le 09/05/2011, n°2 le 16/05/2011, n°3 le 17/11/2011, n°4 le 29/11/2011



(a) Vue d'ensemble

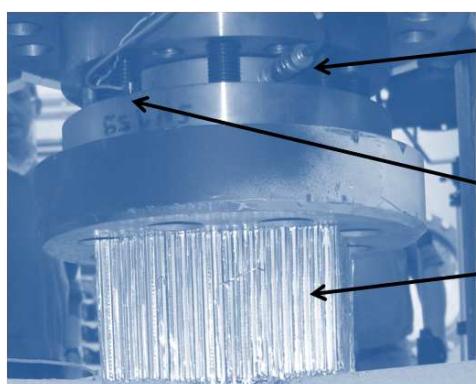


(b) Vue de l'intérieur

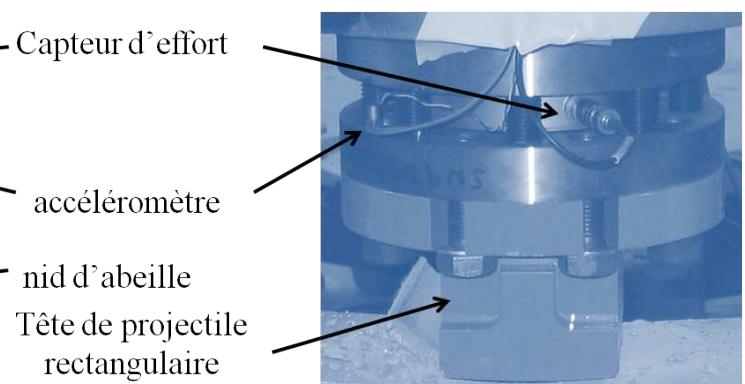
FIG. 4.4 – Tour de chute Orion

1.3.2 Projectile

Différents projectiles sont utilisables avec des masses et des matériaux divers. Le projectile est constitué d'un corps sur lequel une tête interchangeable en acier peut être fixée par l'intermédiaire de 4 vis sur la partie appelée "support de tête du projectile" (fig. 4.4(b)). Pour les chocs mous, aucune tête n'a été mise en place, mais un cube de nid d'abeille a été posé sur la zone d'impact, entre le projectile de 311 kg et la poutre (fig. 4.5(a)). Le projectile est lancé d'une hauteur de 1,5 m, soit une vitesse d'impact de 5,425 m/s. Pour le choc dur, le projectile de 106 kg avec une tête rectangulaire (fig. 4.5(b)) est lâché d'une hauteur de 3,5 m, soit une vitesse d'impact de 8,29 m/s.



(a) Projectile de 311 kg sans tête et avec du nid d'abeille pour les chocs mous



(b) Projectile de 106 kg avec une tête rectangulaire pour les chocs durs

FIG. 4.5 – Type de projectile en fonction du type d'impact

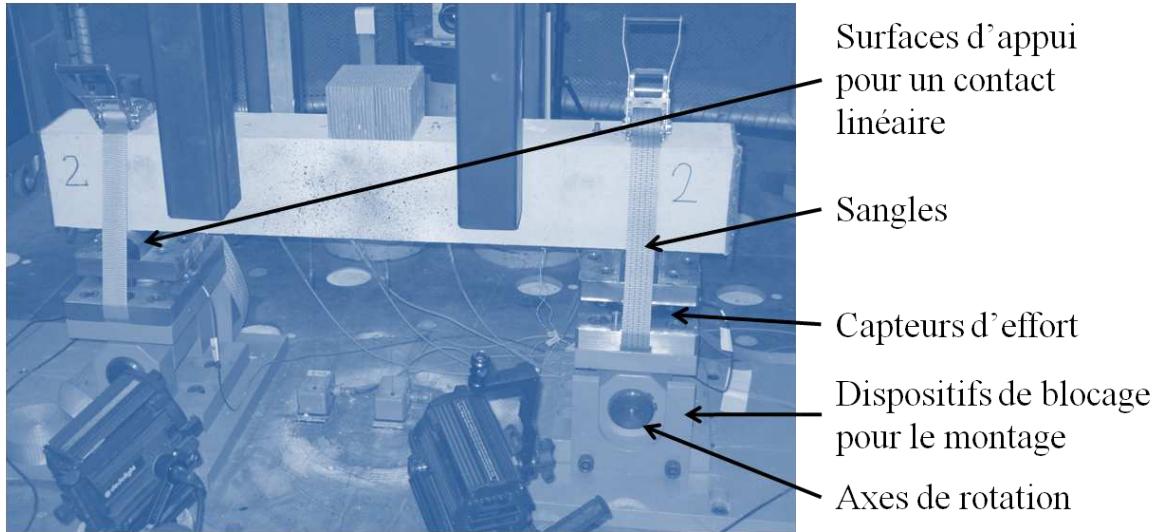


FIG. 4.6 – Dispositif de supportage des poutres

1.3.3 Définition des appuis

La figure (4.6) présente le dispositif de supportage conçu lors de la thèse de [Chambart, 2009] et repris lors de ces deux campagnes expérimentales. Les appuis sont construits de manière à permettre la rotation de la poutre tout en empêchant son décollement, via une précharge comprise entre 7000 N et 8000 N générée par des sangles. Ces appuis, de forme arrondie (contact quasi-linéaire), sont fixés au sol sur une plaque et sont modulables, ce qui permet de faire varier la longueur entre appuis (Tab. 4.2).

1.4 Moyens de mesures

1.4.1 Mesures des déplacements du projectile et de la poutre

Deux caméras Zimmer, dont une est visible sur la figure (4.4(b)), permettent de mesurer l'intégralité du déplacement d'une cible fixée sur le projectile. Concernant le déplacement de la poutre, deux capteurs à fils au centre (la flèche) et à 150 mm du centre de la poutre sont utilisés et visibles sur la figure (4.7).

1.4.2 Mesures de la force d'impact et des réactions d'appuis

La force d'impact a été mesurée de deux façons. La première, par un capteur de force piézoélectrique embarqué dans le projectile, visible sur la figure (4.5), qui nous permet d'obtenir une force F_p . La deuxième, par un accéléromètre embarqué lui aussi sur le projectile (fig. 4.5), qui nous permet d'avoir la force d'impact par le produit $M_p \gamma_p$ avec M_p la masse du projectile et γ_p l'accélération de celui-ci. Pour certains essais un écart existe entre ces deux mesures dont l'origine reste à ce jour une question ouverte. La mesure de référence dans ce cas sera celle effectuée via l'accéléromètre.

Un capteur d'effort identique à celui du projectile est utilisé sur chacun des deux appuis (fig. 4.6). Ils mesurent ainsi les deux forces de réactions.

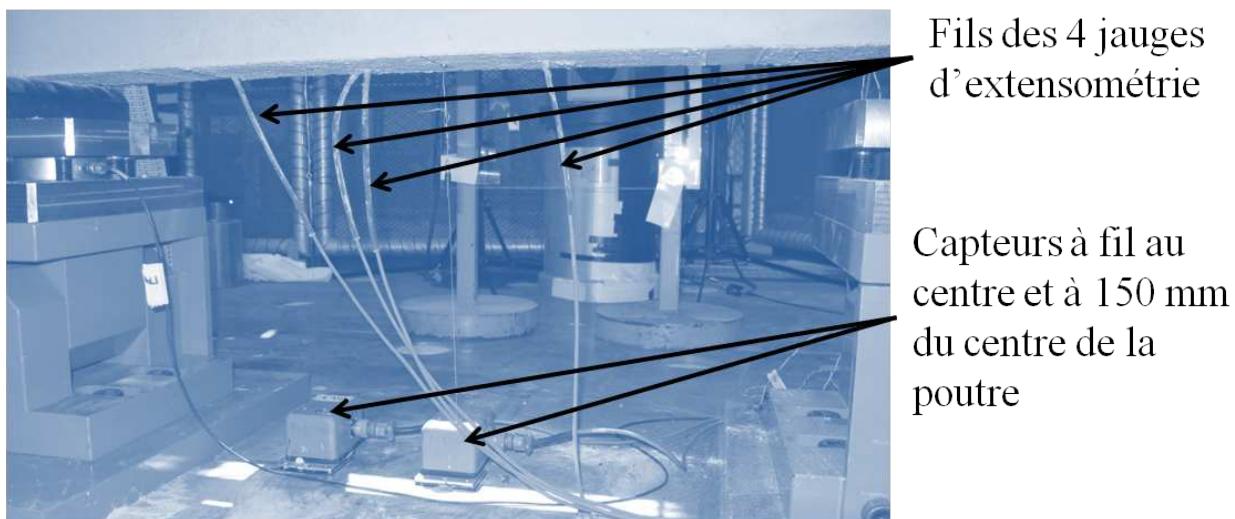


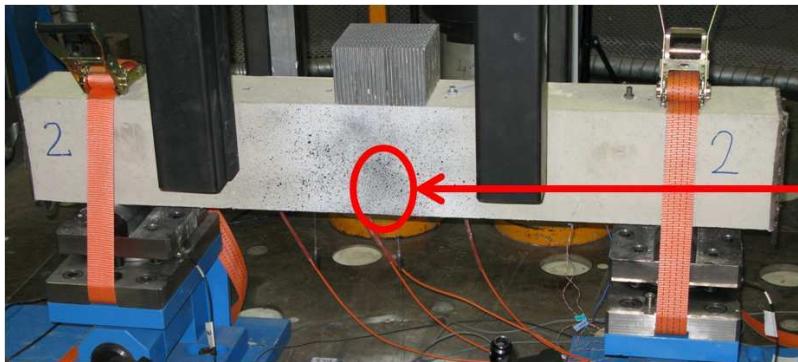
FIG. 4.7 – Capteurs à fils utilisés

1.4.3 Mesures des déformations des aciers

L'implantation des jauge d'extensométrie a été réalisée par la société ELMEX et est schématisée sur la figure 4.3. Elle permet d'obtenir des informations sur la déformation de l'un des deux aciers longitudinaux du bas (HA 12) via les trois jauge, J1, J2 et J3 qui sont respectivement au centre, à droite et à gauche de la poutre, mais aussi sur la déformation de l'un des cadres via la jauge J4. Cette implantation est commune à l'ensemble des poutres avec une légère différence pour les poutres P5-330 et P6-330 (tab. 4.2) vis à vis de la jauge J1 qui est excentrée de 5 cm afin d'éviter sa destruction prématuée (constat réalisé après la première campagne d'impact sur les poutres P1-130 à P4-180).

1.4.4 Mesures de champs par corrélation d'images

Etant donnée la durée d'un essai d'impact sur des poutres en béton (quelques centièmes de secondes), l'utilisation d'appareils photographiques numériques est inenvisageable. Néanmoins, deux caméras rapides du LMT Cachan ont pu être utilisées (caméras IMAGER PHOTRON FASTCAM SA-5 N&B, 7000 images/seconde résolution 1024*1024 pixels jusqu'à 1 000 000 images/seconde en format partiel). L'une permet d'observer la propagation des fissures sur l'ensemble d'une face (sans mouchetis) de la poutre, tandis que l'autre caméra permet d'observer une zone restreinte de l'autre face avec mouchetis et notamment la propagation de la fissure centrale de la poutre (fig. 4.8). Ces caméras possèdent une fréquence d'acquisition maximale de 1 000 000 d'images par seconde. Leur capacité de stockage est limitée et dépend de la durée de l'enregistrement, de la fréquence d'acquisition mais aussi de la dimension des images (en nombre de pixels). Un compromis est donc trouvé pour les deux caméras. Pour la poutre P2-130, la caméra (avec mouchetis) est paramétrée de telle façon à avoir une fréquence de 50 000 images par seconde et une taille d'image de 512x272 pixels, ce qui nous permet d'avoir un temps d'enregistrement confortable de 0.82 s. La taille d'image en pixels correspond à une zone d'observation sur la poutre P2-130 d'environ 100x57mm, soit une résolution approximative de 5 pixels par mm ou encore 127 dpi (pixels par pouce). Cette résolution est importante dans la mesure où elle détermine en partie la qualité des mesures de champs obtenues par



Zone d'observation par corrélation d'images

FIG. 4.8 – Zone d'intérêt pour la corrélation d'images

corrélation d'images (plus cette résolution est importante, plus on augmente la précision). L'intérêt de ces mesures de champs dans cette thèse est de pouvoir estimer des vitesses de propagation de fissures. Le rôle de la deuxième caméra est juste d'observer la propagation des fissures image par image. Elle a été paramétrée afin d'avoir une zone d'observation importante (360x550 mm) avec une taille d'image de 376x640 pixels (une résolution de 1 pixel par mm ou 26 dpi). La capacité de stockage limitée et le choix d'une grande taille d'image sont au détriment de la fréquence d'acquisition (faible, 30000 images par seconde), car les caméras étant synchronisées, la durée d'enregistrement est imposée par la première caméra (avec mouchetis) (et donc fixe pour la deuxième caméra).

Par manque de temps lors de cette thèse, le dépouillement de l'ensemble de ces résultats de corrélation reste à faire et seul un aperçu est présenté par la suite, avec une estimation de la vitesse de propagation de la fissure sur la poutre P2-130.

Traitements d'images via CORRELI - Développé au LMT Cachan [Hild, 2002; Besnard *et al.*, 2006], le logiciel CORRELI permet de déterminer les champs de déplacement par corrélation d'images et d'en déduire les champs de déformation. Deux images, où chaque pixel de ces images est codé en niveaux de gris, sont comparées à deux instants différents. Ces images sont discrétisées en "imagelettes" (appelées par la suite zones d'étude centrée au point considéré) dont la taille $l \times l$ en pixel est déterminée, après une étude, par l'utilisateur. Le principe de la corrélation consiste à apparié le motif correspondant à la zone d'étude dans les deux images afin de pouvoir déterminer le déplacement du centre de la zone. Il s'agit ainsi de rechercher dans l'image déformée l'endroit où on atteint le maximum de vraisemblance avec chaque zone d'étude considéré dans l'image de référence. Il est à noter que l'augmentation de la taille de la zone d'étude permet de diminuer le niveau d'incertitude du déplacement mesuré au détriment du nombre de points de mesures.

Mise en place du mouchetis et analyse du niveau de gris - Pour avoir des résultats satisfaisants via la corrélation d'images, la bonne qualité de l'image est importante avec un spectre en niveau de gris le plus large et le plus équilibré possible. Les pixels des images des poutres réalisées à l'aide des caméras rapides sont codés sur $N_{bits}=16$ bits et proposent ainsi 65536 niveaux de gris ($2^{N_{bits}}$). Par défaut, la poutre sans mouchetis ne couvre qu'une partie du spectre en niveau de gris ce qui est généralement insuffisant pour obtenir des résultats satisfaisants. C'est donc la réalisation d'un mouchetis de peinture constitué d'un mélange de tâches de peinture noir et blanc aléatoirement réparti (d'un diamètre généralement compris entre 4 à 10 fois la taille d'un pixel), qui nous permet d'élargir

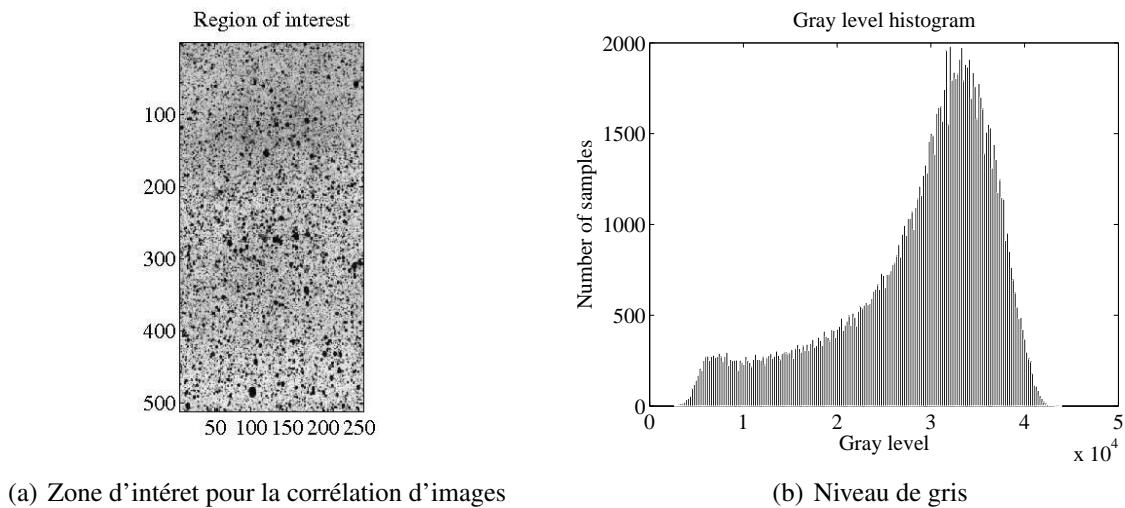


FIG. 4.9 – Choix de la quatilé du mouchetis pour la poutre P2-130 avant impact

le spectre. La figure (4.9(a)) montre la zone d'intérêt de la poutre P2-130 avec un mouchetis. Le logiciel CORRELI a la possibilité d'analyser l'image et de tracer un histogramme des niveaux de gris. La figure 4.9(b) représente l'histogramme des niveaux de gris de cette image avec, sur l'axe des abscisses, les niveaux de gris allant de 0 (noir) à 2^{NbIt} et, sur l'axe des ordonnées, le nombre de pixels ayant ce niveau de gris. L'histogramme idéal correspondrait à un spectre assez plat utilisant toute la gamme de niveaux de gris possibles (ici 65536). Le spectre de la figure 4.9(b) est cependant satisfaisant.

1.5 Résultats

Dans cette section, seuls les résultats des poutres P1-130 et P2-130 sont présentés et détaillés. Pour rappel ces deux poutres ont été fabriquées à l'identique mais sont issues de deux gâchées différentes. Elles subissent un impact de type choc mou. Les courbes des résultats expérimentaux des 4 autres poutres se trouvent dans l'annexe E et l'intégralité des campagnes d'essais se trouvent dans les rapports [Piteau et Valin, 2011; Leroux et Gatuingt, 2011; Piteau et Valin, 2012; Soufflet, 2012]. Nous pouvons apprécier la grande reproductibilité de l'ensemble de ces essais.

1.5.1 Caractérisation du béton, des aciers et du nid d'abeille

Quatre gâchées ont été nécessaires pour réaliser les six poutres. Pour chaque gâchée, environ dix éprouvettes 16x32 cm ont été réalisées afin de caractériser le béton en compression à 28 jours (trois éprouvettes) et après l'impact de chaque poutre (trois éprouvettes). Cette caractérisation du béton en compression est réalisée suivant le protocole détaillé dans la partie 1.2 du chapitre 1. Les figures (4.10(a) et 4.10(b)) présentent les résultats des essais de caractérisation du béton en compression de la gâchée n°1 et n°2 à 28 jours tandis que les figures 4.10(c) et 4.10(d) représentent respectivement les résultats des essais de caractérisation du béton en compression suite à l'impact de la poutre P1-130 (gâchée n°1) et la poutre P2-130 (gâchée n°2). Pour rappel, les dates d'impact des poutres sont précisées dans le tableau 4.2.

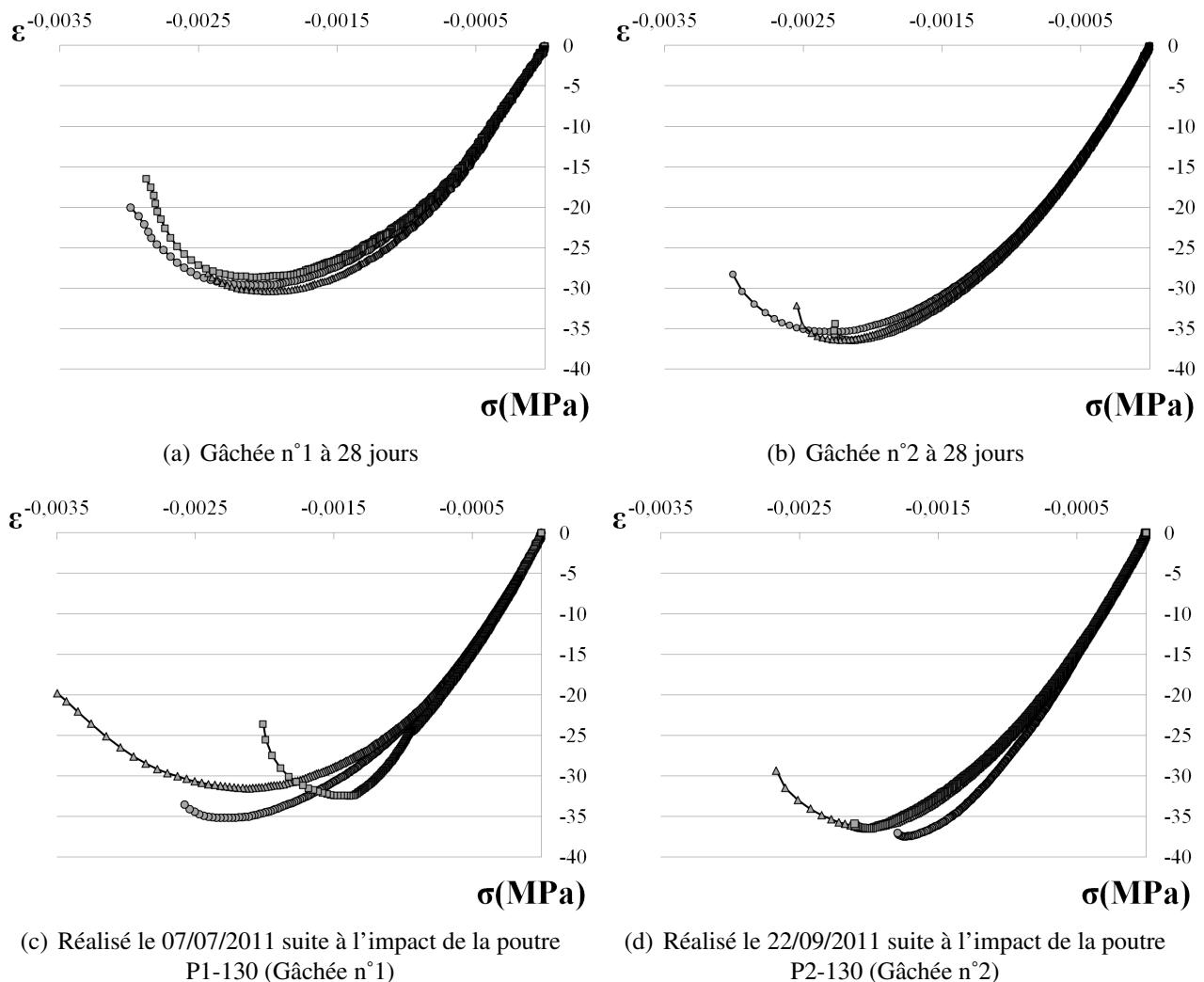


FIG. 4.10 – Courbes de caractérisation du béton en compression

Les trois types d'acier ont été caractérisés en traction une seule fois puisque le même lot d'acier a été utilisé pour l'ensemble des poutres. Les figures (4.11(a)), (4.11(b)), (4.11(c)) représentent respectivement le comportement des aciers HA 8, HA 12 et des "ronds lisses" de diamètre 6 mm.

Le nid d'abeille pour les impacts de type choc mou a lui aussi été caractérisé en dynamique sur la tour de chute Orion. Le bloc testé était un cube de 10 cm de côté. Les résultats de l'essai sur la figure 4.12 permettent d'observer un plateau quasi parfait de 49 KN sur la force mesurée, ce qui nous donne une pression de 4,9 MPa. Ce plateau, caractéristique du nid d'abeille, est dû au mode de ruine sous forme de pliage progressif de ses parois. Après 80% de déformation du nid d'abeille, la force augmente brutalement jusqu'à environ 200 KN car toute la hauteur a été écrasée. Pour les poutres d'une longueur de 130 ou de 180 cm, un cube de nid d'abeille de 15 cm de côté est pris afin d'avoir un plateau de force d'environ 110 KN. L'ordre de grandeur de cette force a été choisi suite aux premiers essais réalisés dans la thèse de M. Chambart [Chambart, 2009] avec des conditions d'essai et des poutres de dimensions similaires.

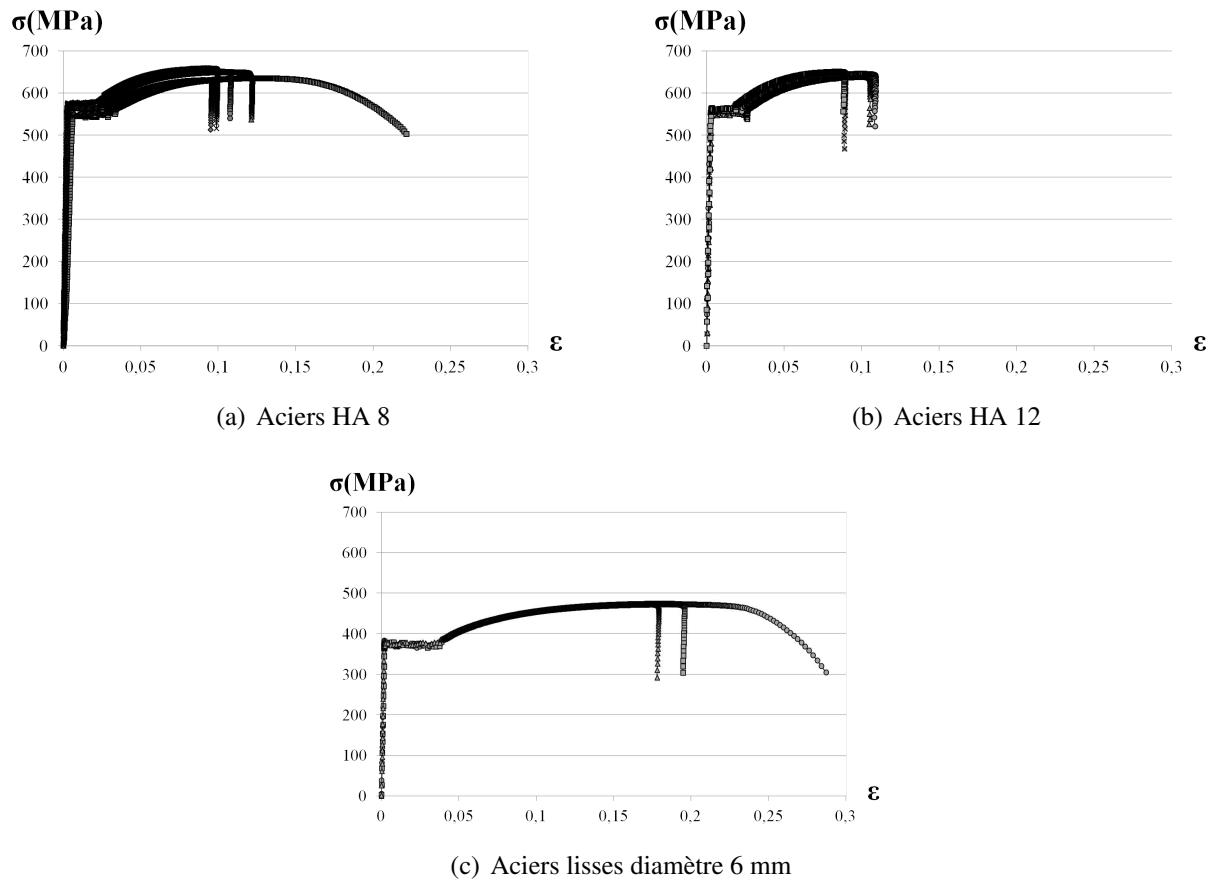


FIG. 4.11 – Courbes de caractérisation des aciers

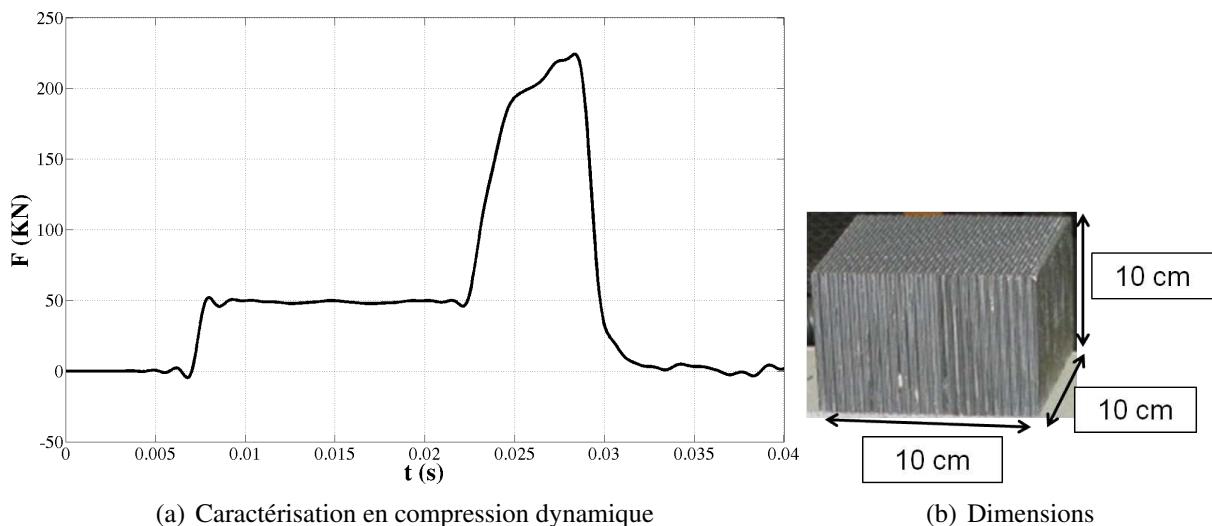


FIG. 4.12 – Nid d'abeille

1.5.2 Réponses des poutres P1-130 et P2-130

La figure 4.13 représente l'évolution de la force d'impact en fonction du temps. On peut observer le pic de force écrêté par le nid d'abeille à 100 KN, correspondant à peu près au plateau souhaité lors du dimensionnement du nid d'abeille (110 KN).

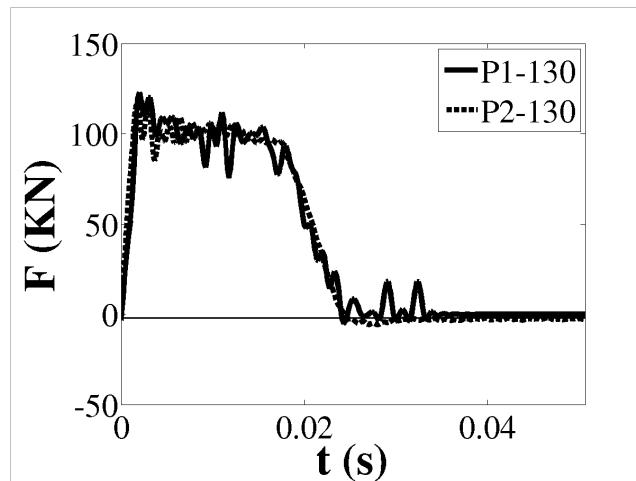


FIG. 4.13 – Force d'impact au niveau du projectile

Les efforts de réaction en fonction du temps (fig. 4.14) suivent bien la même évolution que la force d'impact avec des forces maximales d'environ 50 KN pour une force d'impact maximale de 100 KN.

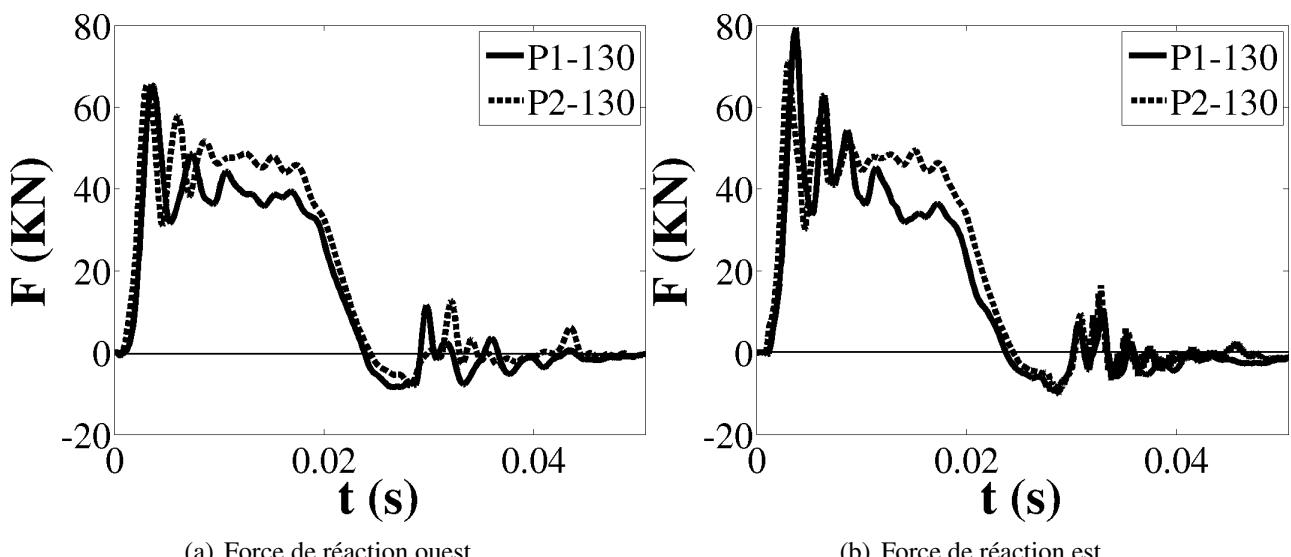


FIG. 4.14 – Efforts de réaction

La figure 4.15 montre l'évolution du déplacement au centre et à 150 mm du centre de la poutre au cours du temps. On observe une flèche maximale légèrement différente entre les 2 gâchées avec une flèche finale pour la poutre P1-130 d'environ 16 mm contre 20 mm pour la poutre P2-130.

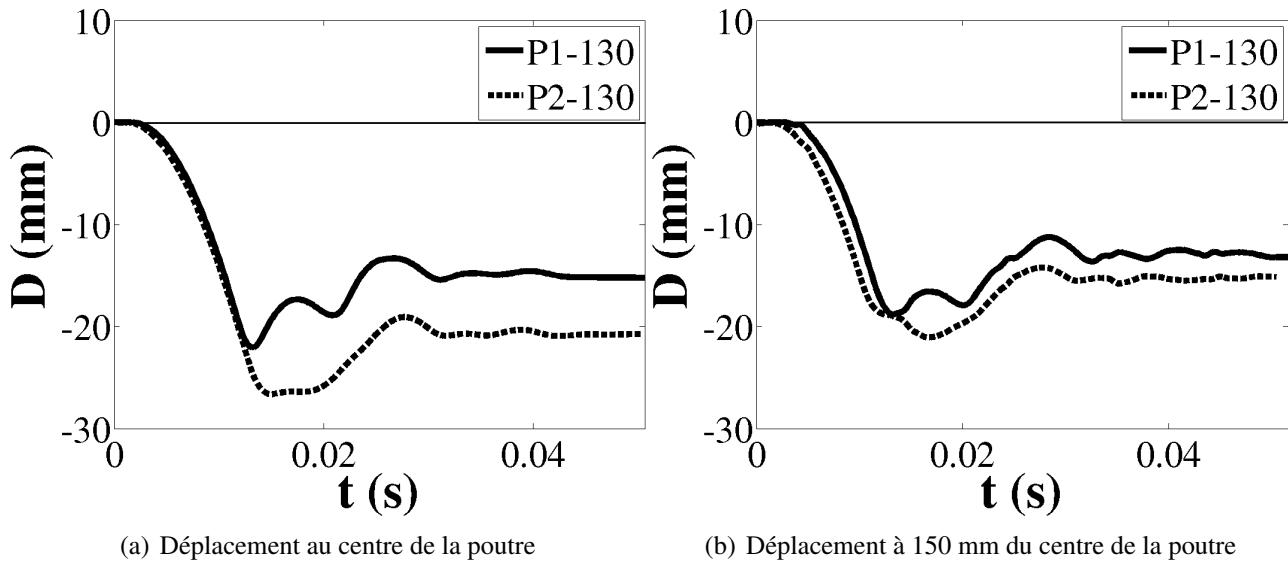


FIG. 4.15 – Déplacement moyen de la poutre

L'évolution de l'énergie dissipée en fonction du temps est tracée sur la figure 4.16 avec une énergie dissipée finale de 4100 J. Avec un écrasement du nid d'abeille de 20 mm et une force d'impact de 100KN, l'énergie dissipée de celui-ci est estimée à environ 2000 J. L'énergie restante (2100 J) peut donc être en partie attribuée à la flèche d'environ 20 cm pour la poutre P2-130.

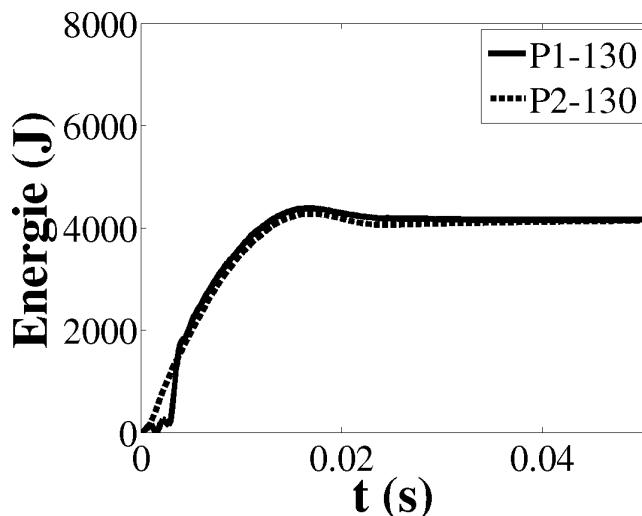


FIG. 4.16 – Energie dissipée pendant l'impact

L'évolution de la déformation des aciers en fonction du temps (fig. 4.17) montre des différences entre les deux gâchées avec notamment la perte de la jauge J1 (fig. 4.17(a)) sur la poutre P1-130 placée au centre. En ne prenant pas en compte le disfonctionnement de la jauge J3 de la poutre P1-130, les jauge J2 et J3, (fig. 4.17(b) et 4.17(c)) situées à 150 mm de part et d'autre du centre de la poutre, mesurent une déformation maximale comprise entre 2 à 3 %.

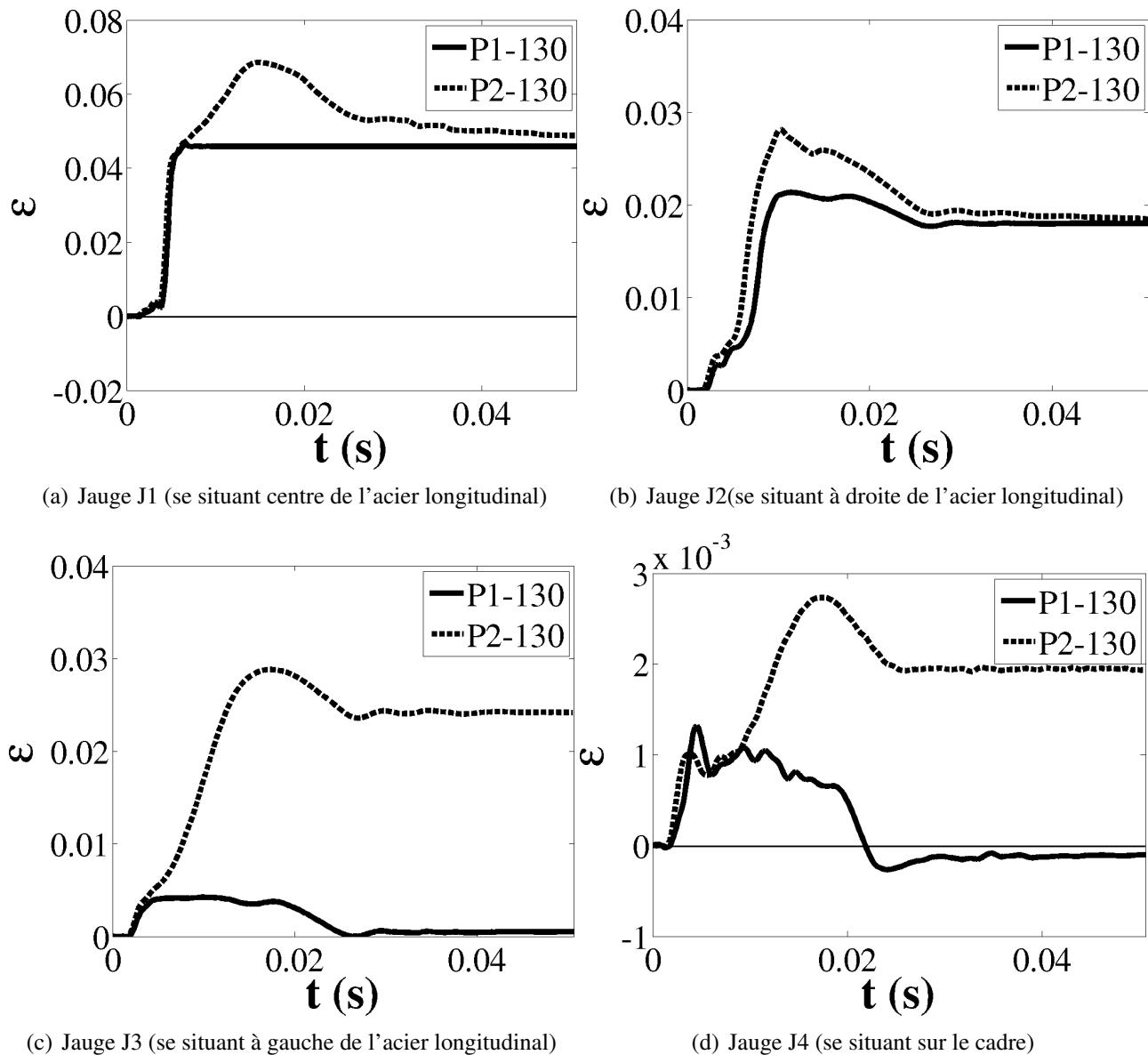


FIG. 4.17 – Déformations des aciers

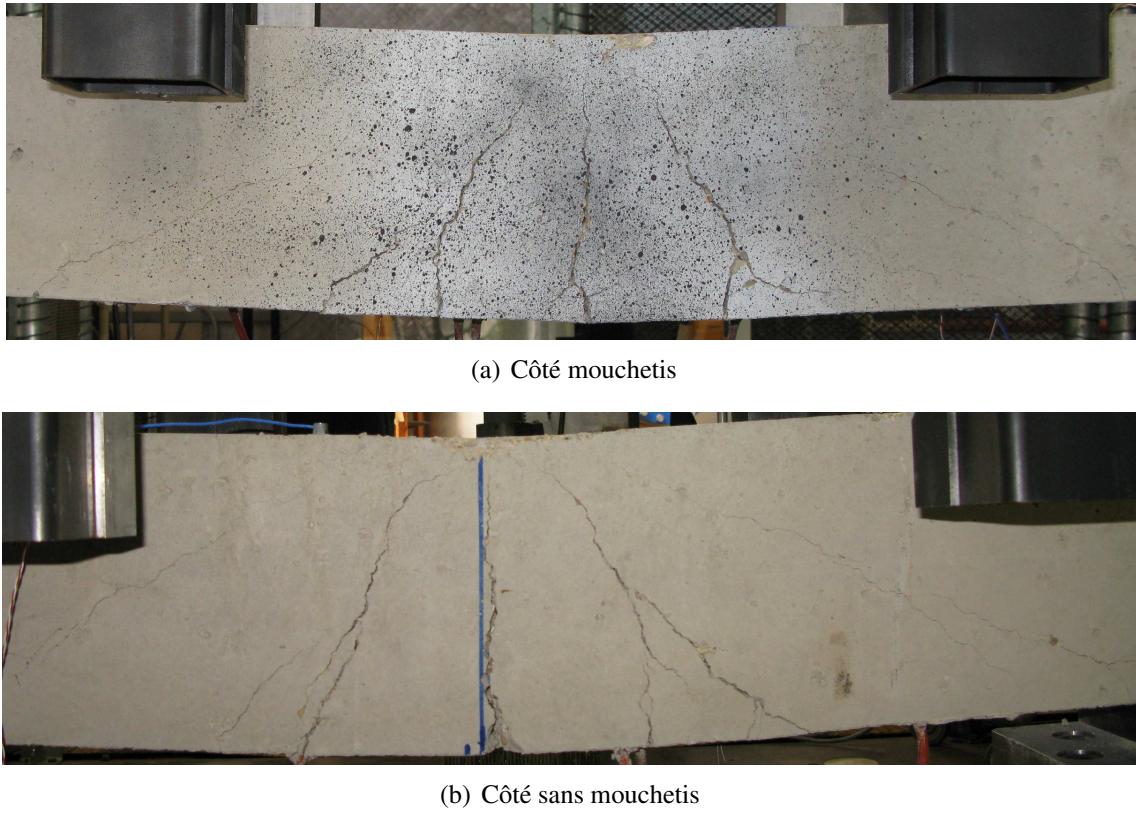


FIG. 4.18 – Faciès de fissuration de la poutre P2-130

La figure 4.18 permet d'observer les faciès de fissuration des deux côtés de la poutre (côté avec mouchetis et côté sans mouchetis) avec pour les deux gâchées des faciès de fissuration identique où l'on retrouve trois fissures principales : une verticale au centre de la poutre, et deux autres à 30° de part et d'autre du centre de la poutre.

La corrélation d'images (figure 4.19) permet de voir l'ouverture des fissures en observant l'évolution des déformations positives longitudinales au cours du temps, et notamment l'initiation de la fissure centrale de la poutre à $t=0,14\text{ms}$. Au même instant sur les images de la face sans mouchetis (figure 4.20), aucune fissure n'est identifiable à l'oeil nu, et ce jusqu'à $t=0,340\text{ms}$. La corrélation permet aussi de mieux estimer la vitesse de propagation des fissures. Nous observons, figure 4.19, qu'en 0,08 ms (figure 4.19(b) à 4.19(f)) la fissure s'est propagée sur 2,5 cm environ, soit une vitesse estimée de 312,5 ms. Cette estimation concorde avec la gamme de vitesses déterminée par [Soufflet, 2012] comprise entre 200 et 500 m/s en utilisant un outil du logiciel CORRELI adapté et développé par [Mathieu *et al.*, 2012] principalement pour les métaux. La difficulté pour calculer une vitesse de propagation de fissure dans la corrélation d'image est d'identifier précisément la pointe de la fissure. Contrairement aux matériaux métalliques, l'hétérogénéité du béton rend la fissuration discontinue et aléatoire (bifurcations des fissures) et rend donc difficile l'utilisation de l'outil développé par [Mathieu *et al.*, 2012], puisqu'un trajet de fissuration linéaire doit être défini au préalable. Ainsi, la vitesse calculée précédemment est une première estimation, et des études complémentaires et approfondies sont nécessaires afin de mieux localiser la pointe de fissure.

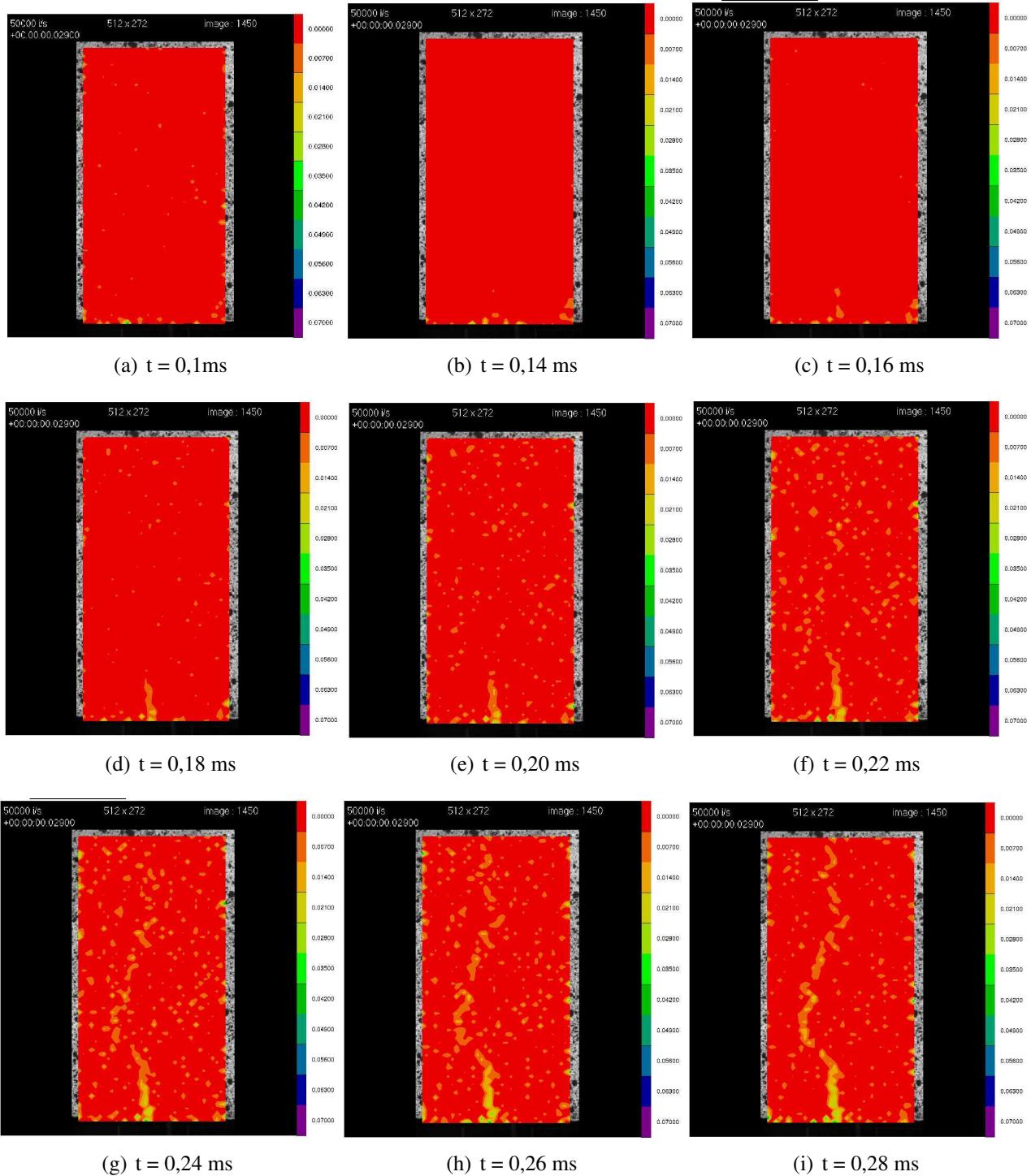


FIG. 4.19 – Champ de déformation horizontal mesuré par corrélation d’images

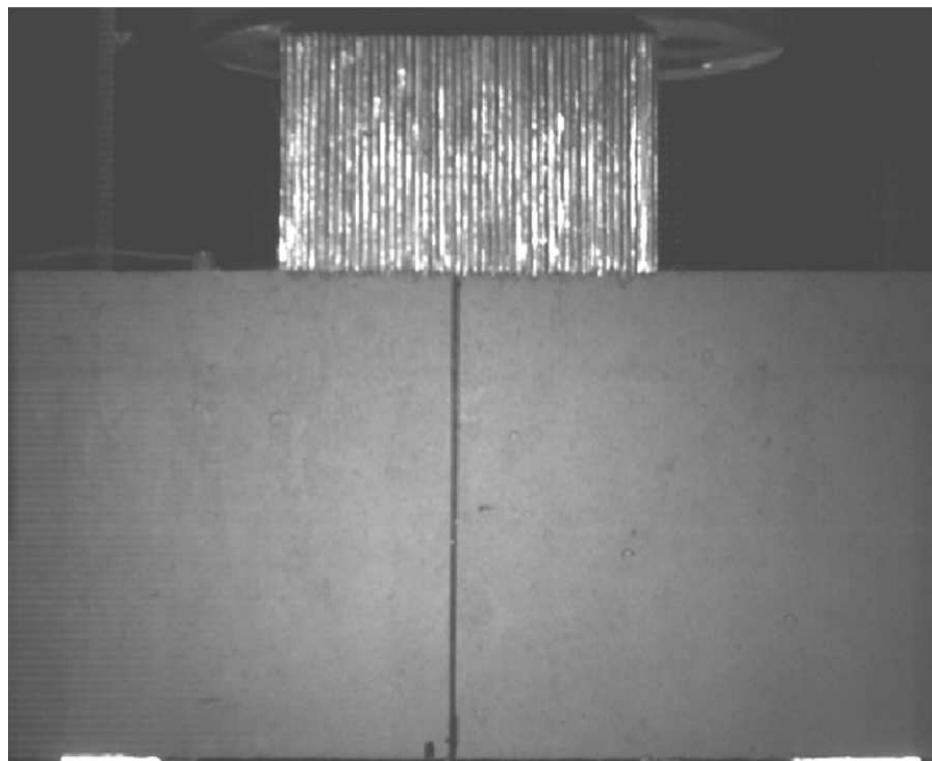
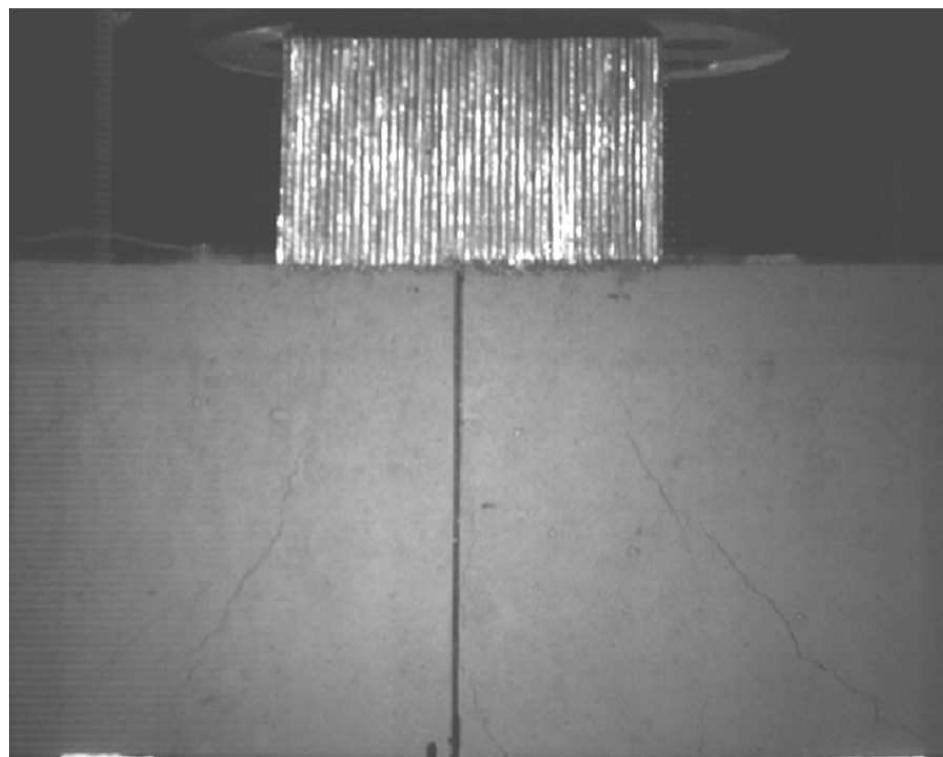
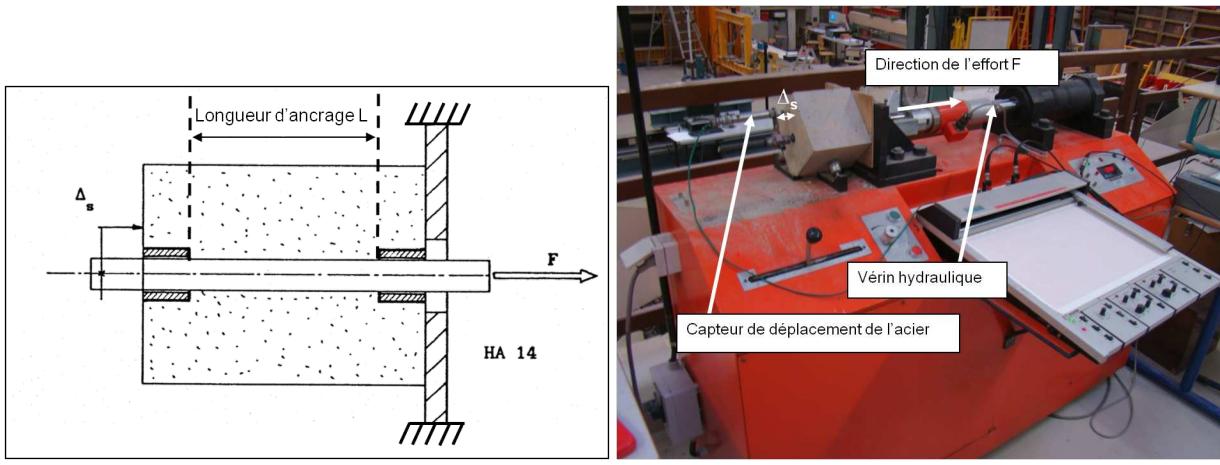
(a) $t = 0,340$ ms(b) $t = 2,240$ ms

FIG. 4.20 – Évolution de la dégradation de la poutre P2



(a) Schématisation de l'essai d'arrachement acier/béton (b) Dispositif expérimental au département Génie Civil de l'ENS Cachan

FIG. 4.21 – Essais d'arrachement acier-béton

2 Essais d'arrachement

Des essais d'arrachement ont été réalisés pour évaluer l'adhérence entre l'acier et le béton. A partir de ces essais, une modélisation simple pour représenter en partie ce comportement entre l'acier et le béton sera proposée dans le chapitre suivant. Deux diamètres d'aciers HA, correspondant à ceux des poutres, ont été utilisés (diamètres 8 et 12 mm).

2.1 Dispositif expérimental

L'essai d'arrachement, ou encore appelé essai d'arrachement, consiste à tirer sur une armature ancrée sur une longueur donnée dans un bloc de béton, ici une éprouvette cubique de 25 cm de côté. La machine d'essai, présentée sur la figure (4.21(b)), permet d'appliquer un effort de traction F sur l'armature (fig. 4.21(a)). Au cours du chargement, on mesure le déplacement Δs de l'extrémité libre de l'armature. Avant coulage du béton, deux gaines de PVC (fig. 4.21(a)) ont été placées à chaque extrémité de l'acier, afin de s'affranchir des problèmes de bord (contraintes de compression dans le béton).

2.2 Résultats

2.2.1 Caractérisation du béton et des aciers

Pour réaliser ces essais, deux nouvelles gâchées ont été nécessaires. Le béton a donc été caractérisé en traction par deux essais de fendage (dispositif expérimental déjà présenté dans la partie 1.1 du chapitre 1), avec les deux résistances mesurées en traction $f_t \approx 3 \text{ MPa}$ déjà présentées au chapitre 1 dans le tableau 1.1. Une caractérisation en compression du béton a aussi été réalisée. Les résultats sont présentés sur la figure 4.22.

Le comportement des aciers a lui aussi été identifié à l'aide d'un essai de traction. Pour les aciers Hautes Adhérences, la limite d'élasticité est d'environ 550 Mpa et la limite à la rupture est d'environ

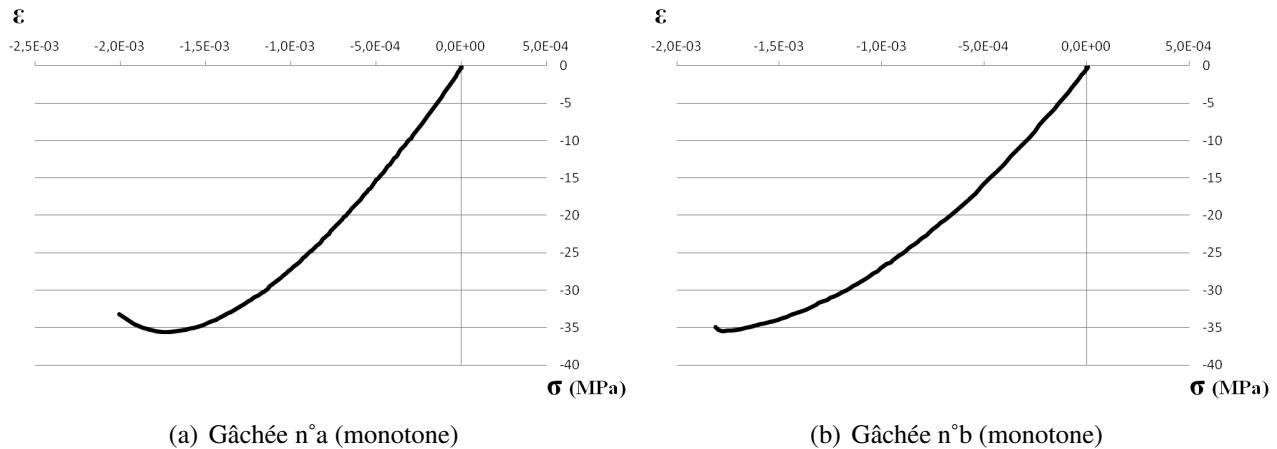


FIG. 4.22 – Essais de caractérisation du béton en compression

650 Mpa. Ces deux contraintes vont maintenant être exprimées en effort en fonction des deux diamètres d'acières ϕ . Ces informations servent pour l'analyse des différentes courbes d'arrachement qui suivent (notamment pour observer la plastification des aciers) :

- HA8 :
 - Limite d'élasticité $\sigma_y = 550$ Mpa $\rightarrow F_y = \sigma_y \pi \phi^2 / 4 = 27,6$ KN
 - Limite à la rupture $\sigma_y = 650$ Mpa $\rightarrow F_y = 32,7$ KN
- HA12 :
 - Limite d'élasticité $\sigma_y = 550$ Mpa $\rightarrow F_y = 62,2$ KN
 - Limite à la rupture $\sigma_y = 650$ Mpa $\rightarrow F_y = 73,5$ KN

N° Essai	Gâchée	Chargement	Ø aciers en mm	Longueur ancrage prévue en mm	Longueur ancrage mesurée en mm
1	a	Monotone	8	80	84
2	a	Alterné	8	80	83
3	b	Alterné	8	80	82
4	b	Monotone	12	80	85
5	b	Alterné	12	80	85
6	a	Alterné	12	80	80
7	b	Monotone	8	100	100
8	b	Alterné	8	100	105
9	a	Alterné	8	100	98
10	a	Monotone	12	100	101
11	a	Alterné	12	100	99
12	b	Alterné	12	100	97

TAB. 4.3 – Numérotation des essais avec le type de chargement appliqué et le n° de gâchée

2.2.2 Force-déplacement de l'acier

Le tableau 4.3 résume les différents essais d'arrachement réalisés en précisant le numéro d'essai, le numéro de gâchée, le type de chargement réalisé sur chaque essai (monotone ou alterné), le diamètre d'acier utilisé, la longueur d'ancrage prévue lors de la fabrication et celle mesurée après

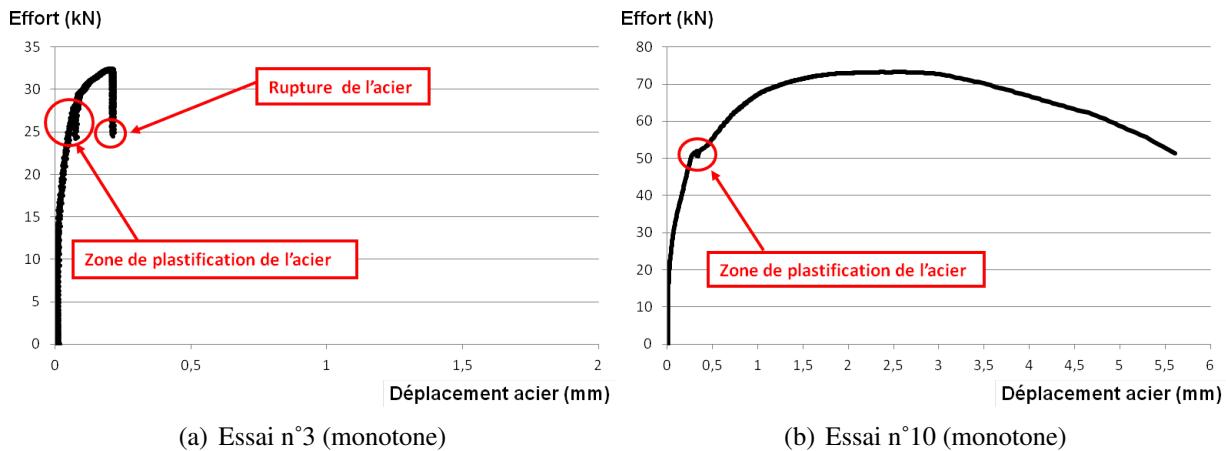


FIG. 4.23 – Essais d'arrachement acier-béton

la réalisation des essais d'arrachement. Certains des essais ont un chargement monotone, c'est-à-dire que l'acier subit un effort de traction suivant une seule direction, ce qui permet d'obtenir, par exemple, les résultats montrés sur la figure 4.23(a) ou encore 4.23(b). Les autres essais ont un chargement alterné, c'est-à-dire que l'acier subit un premier effort de traction, puis après avoir déchargé l'acier, l'éprouvette est retournée pour ainsi imposer un effort de traction sur l'autre extrémité de l'acier. Seuls, les essais monotones n°3 et n°10 sont présentés dans ce chapitre. Les autres essais sont regroupés dans l'annexe E. On remarque que, pour la plupart des essais d'arrachement, les aciers ont plastifié (fig. 4.23(a) et 4.23(b), par exemple). Dans le cas où la contrainte d'arrachement est plus faible que la limite à la rupture de l'acier, par exemple pour l'essai n°10 (fig. 4.23(b)), l'acier glisse dans l'éprouvette de béton jusqu'à atteindre une force de frottement constante (partie non visible sur ces courbes dûe à une limite de course du capteur de déplacement de 6 mm). Par contre dans le cas où la contrainte d'adhérence est plus importante que la limite à la rupture de l'acier, par exemple pour l'essai n°3 (fig. 4.23(a)), l'acier glisse légèrement pour finalement se rompre très rapidement.

3 Modèles et identifications

A partir des essais de caractérisation du béton en traction et en compression présentés dans ce chapitre, un jeu de 9 paramètres, commun à quatre modélisations présentées dans la suite de cette partie, est déterminé pour le modèle retenu (modèle E, c.f. tableau 2.4 du chapitre 2) et présenté dans le tableau 4.4.

Paramètre	v	E	σ_y^t	σ_y^c	σ_y^{bc}	α	β	b_v	\dot{D}_∞
Valeur	0.2	25 GPa	2 MPa	9 MPa	10 MPa	17 MPa	0.6	0.5	$50000 s^{-1}$

TAB. 4.4 – Jeu de paramètres identifié pour notre béton

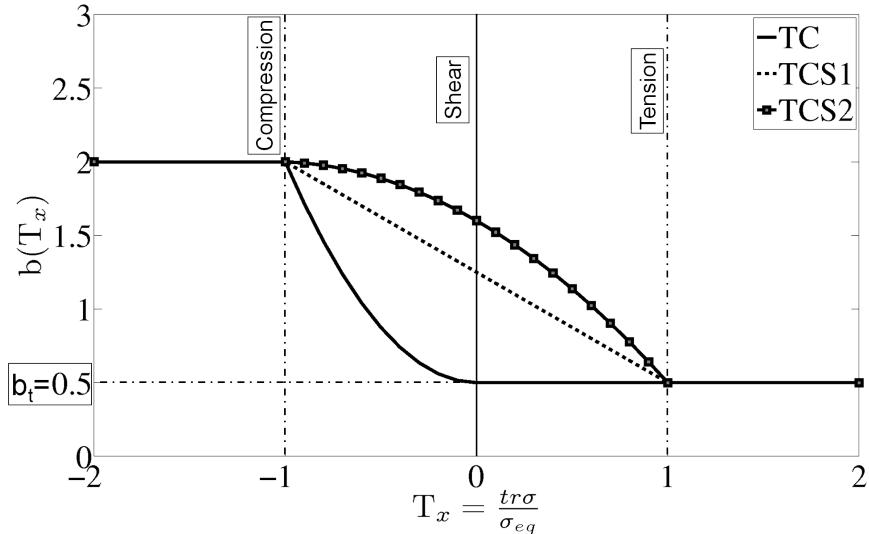


FIG. 4.24 – Trois formulations de la fonction $b(T_x)$ dont celle originale appelée b^{TC}

3.1 Modélisation TC

Pour obtenir une résistance en traction de 3 MPa, il a fallu diminuer la valeur de b_t à 0,5 (au lieu de 1) de la fonction $b(T_x)$ comme expliqué dans la partie 4 du chapitre 2. La modélisation comprenant le modèle E avec ses 9 paramètres (tab. 4.4) et la valeur $b_t = 0,5$, est appelée modélisation TC (pour Tension-Compression). Sa fonction $b(T_x)$ dépendante de la triaxialité des contraintes $T_x = \frac{\text{tr}\sigma}{\sigma_{eq}}$, exposée dans la partie 2.2 du chapitre 2, est représentée sur la figure 4.24 en trait continu. Son expression analytique est rappelée ci-dessous (avec $b_t = 0,5$) :

$$b(T_x) = b^{TC}(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 0 \\ (2 - b_t)T_x^2 + 0.5 & \text{si } -1 < T_x < 0 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases} \quad (4.2)$$

La figure 4.25 permet d’observer différentes réponses de la modélisation TC. Sur cette figure, on a ajouté deux autres modélisations, l’une appelée TCS1 et l’autre TCS2 (pour Tension-Compression-Shear) en référence à deux autres formulations de la fonction $b(T_x)$ présentées en 3.2 (partie suivante). Ces formulations TCS modifient la réponse en cisaillement (fig. 4.25(b)) et la forme de la surface de rupture (fig. 4.25(d)) dans le cadran en haut à gauche (ou par symétrie en bas à droite) dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$.

3.2 Modélisations TCS1 et TCS2

Si nous observons les points expérimentaux sur la figure 4.25(d) et plus exactement l’axe de cisaillement ($\sigma_1 + \sigma_2 = 0$), on constate qu’aucun point ne se trouve sur cet axe et ne donne expérimentalement la contrainte pic en cisaillement. A ce jour, aucun essai sur du béton ne permet d’obtenir précisément une réponse contrainte-déformation en cisaillement pur pouvant ainsi renseigner davantage la surface de rupture de la figure 4.25(d) proche de l’axe $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. Ceci est principalement dû à la complexité de mise en oeuvre de ce type d’essai. Ce manque d’information nous autorise à proposer deux autres formulations (TCS1 et TCS2) de la fonction $b(T_x)$, évoquées brièvement dans

la partie précédente. Leur intérêt est mis en avant dans le chapitre suivant sur des calculs de structure. Ces deux formulations (TCS1 et TCS2) sont définies par les équations suivantes et représentées sur la figure 4.24, toujours avec la valeur $b_t = 0,5$.

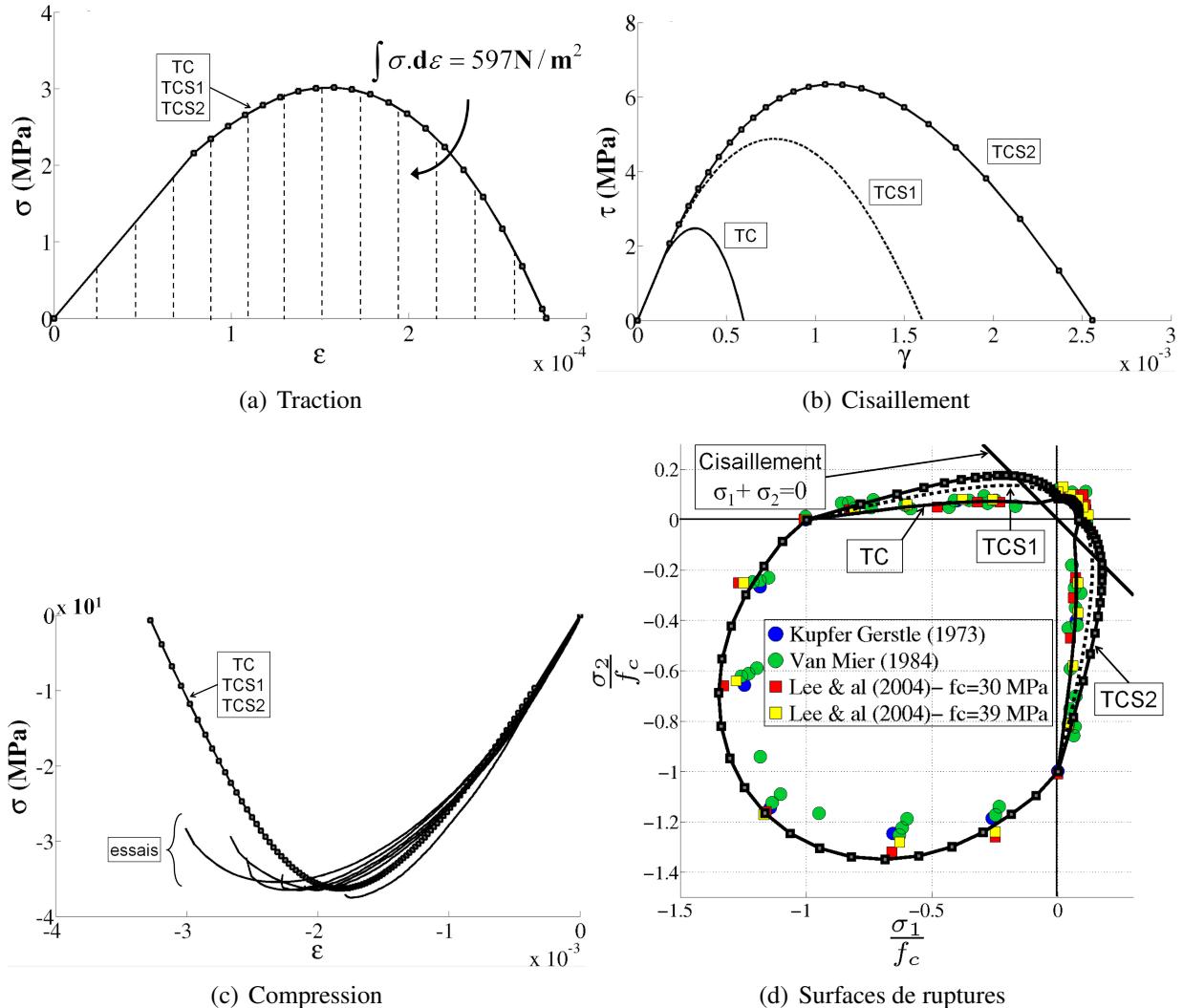


FIG. 4.25 – Réponses du modèle pour les 3 formulations de la fonction $b(T_x)$

– Formulation TCS1 :

$$b(T_x) = b^{TCS1}(T_x) = \begin{cases} \frac{b_t}{2} T_x + \frac{b_t+2}{2} & \text{si } T_x \geq 1 \\ \frac{b_t-2}{2} T_x + \frac{b_t+2}{2} & \text{si } -1 < T_x < 1 \\ \frac{b_t}{2} & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases} \quad (4.3)$$

– Formulation TCS2 :

$$b(T_x) = b^{TCS2}(T_x) = \begin{cases} \frac{b_t}{2} T_x^2 + \frac{b_t-2}{2} T_x + 1.6 & \text{si } T_x \geq 1 \\ \frac{b_t-1.2}{2} T_x^2 + \frac{b_t-2}{2} T_x + 1.6 & \text{si } -1 < T_x < 1 \\ \frac{b_t}{2} & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases} \quad (4.4)$$

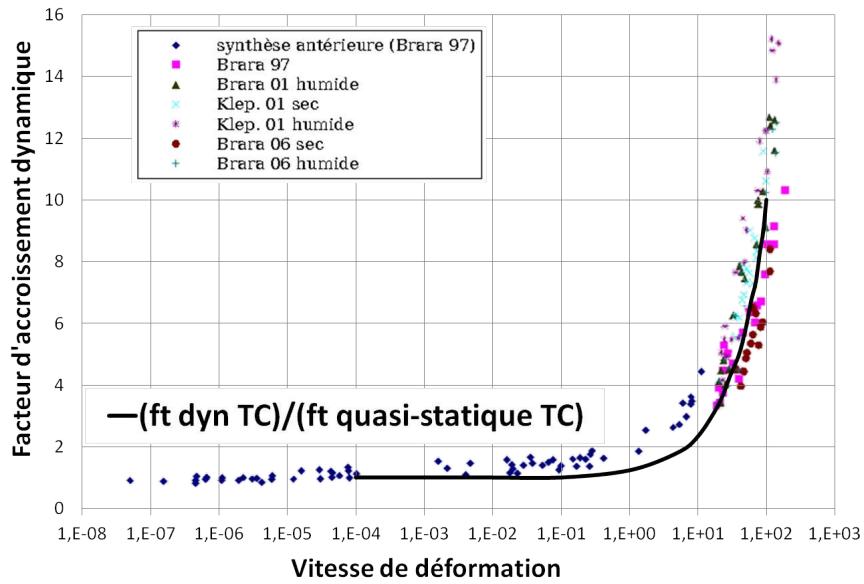


FIG. 4.26 – Comportement dynamique identiques des modélisations TC, TCS1 et TCS2 en traction uniaxiale par rapport à celui de plusieurs bétons de la littérature.

Ces deux formulations et les 9 paramètres du tableau 4.4 permettent d'obtenir deux modélisations dénommées TCS1 et TCS2. Pour ces deux modélisations, les réponses pour les chargements comme la traction, la bi-traction, la compression, la bi-compression... en fait pour les chargements tels que $|T_x| \geq 1$ (fig. 4.25(a) et 4.25(c)) sont identiques à celles de la modélisation TC. La différence sur la surface de rupture (fig. 4.25(d)) de ces deux modélisations vis à vis de la modélisation TC se situe uniquement sur le cadran $|T_x| < 1$ en haut à gauche (ou par symétrie en bas à droite). Dans ce cadran où les types de chargements correspondent aux faibles valeurs (en valeur absolue) de la triaxialité des contraintes $|T_x| < 1$, les contraintes pics par rapport à celles de la modélisation TC sont augmentées via la modélisation TCS1 et encore plus via la modélisation TCS2 dans le but essentiellement, d'augmenter la contrainte pic de cisaillement tout en ayant une forme de la surface de rupture convenable. La figure 4.25(b) permet d'illustrer la réponse en cisaillement des différentes modélisations avec une contrainte pic $\tau_R^{TC} = 2,5$ MPa pour la modélisation TC, des contraintes pics $\tau_R^{TCS1} = 4,9$ MPa, $\tau_R^{TCS2} = 6,3$ MPa pour les modélisations TCS.

La figure 4.26 montre le comportement dynamique en traction, contrainte à rupture en dynamique / contrainte à rupture en quasi-statique fonction de la vitesse de déformation, identique pour les modélisations TC, TCS1 et TCS. L'identification ($b_v=0,5$ et $D_\infty=50000$ s⁻¹, c.f. tab. 4.4) est réalisée sur les points expérimentaux du "bas" de cette figure 4.26 en conservant un facteur d'accroissement dynamique acceptable pour la vitesse de déformation de 100 s⁻¹.

L'intérêt de ces deux dernières modélisations (TCS1 et TCS2) vis à vis de la modélisation TC sera mis en avant dans le chapitre 5 en réalisant des calculs de structure sur la poutre P2-130 sous impact. Pour la suite de notre étude, un choix de modélisation, dénommé TCS, sera effectué au chapitre 5 entre TCS1 et TCS2.

3.3 Modélisation TCS-H

Quel que soit le choix de modélisation entre TC, TCS et TCS2, une dernière modélisation appelée TCS-H (H pour Hillerborg) sera étudiée au chapitre 5. Cette modélisation TCS-H permettra d'ajuster l'énergie de rupture de notre matériau en traction en fonction de la taille moyenne des éléments finis choisis dans le modèle numérique, selon la méthode de "régularisation" de type Hillerborg [Hillerborg *et al.*, 1976] décrite au paragraphe 9.2 du chapitre 2. Des guillemets sont mis sur le mot "régularisation" car (*cf.* partie 9.2 du chapitre 2) ce type de régularisation n'est pas approprié pour les calculs de structures. Effectivement, la "régularisation" de type Hillerborg fonctionne principalement lorsque le trajet de fissuration est connu à l'avance, que la fissure se propage en ligne droite parallèlement aux noeuds du maillage.

Les essais d'impact réalisés sur nos poutres correspondent certes à des chargements dynamiques mais avec des vitesses de déformation qui sont peut-être trop faibles pour régulariser nos calculs via la loi visco-endommagement à taux d'endommagement limité. Fixer l'énergie de rupture en fonction de la taille des éléments du maillage est réalisé pour éviter de travailler avec des énergies de rupture trop faibles dans des zones du maillage soumises à des chargements quasi-statiques. Dans notre cas, et comme proposé lors de la thèse de [Chen, 2010] déjà dans le cadre du visco-endommagement, l'énergie de rupture obtenue par le modèle en quasi-statique est reliée à la taille des éléments (en plus de l'utilisation de la loi de visco-endommagement à taux d'endommagement limité).

Dans la littérature, les valeurs d'énergie de rupture G_f déterminées expérimentalement varient d'un essai à un autre. Leur dispersion est trop importante pour pouvoir mettre en avant une valeur unique. Ceci est dû principalement à deux raisons. Les essais réalisés pour l'identification de G_f utilisent, 1) des formulations différentes du béton et 2) des éléments de volumes de tailles très différentes. Par ailleurs, nous savons que pour un béton classique, la taille de granulat est de l'ordre de 2,5 cm maximum et l'élément de volume de béton considéré est alors ≈ 10 cm. En conservant ce rapport et en l'adaptant à la taille maximum des granulats utilisés (de 1,25cm), nous trouvons un élément de volume de $h_1 \approx 5$ cm. La figure 4.27 donne une idée de la taille de cet élément de volume sur une éprouvette d'un des essais de fendage dont, rappelons le, seule la partie centrale est sollicitée en traction (selon l'axe horizontal).

La relation $G_f = h \int \sigma d\epsilon$ (présentée au chapitre 2 partie 9.2) reliant l'énergie de rupture en quasi-statique G_f à la taille d'un élément de volume h et l'aire sous la courbe contrainte-déformation en traction, permet de calculer l'énergie de rupture de notre béton. Ainsi, avec une aire sous la courbe en traction (fig. 4.25(a)) de 597 N/m² et une taille d'élément de volume de 5 cm, on obtient une énergie de rupture $G_f=30$ N/m.

Concernant maintenant les calculs de poutres du chapitre 5, le maillage comportera des éléments cubiques de 1 cm de côté ($=2h_2$). Avec l'énergie de rupture déterminée auparavant et une taille d'élément de volume de 0,5 cm, l'aire sous la courbe contrainte-déformation de traction doit être de $\int \sigma d\epsilon = \frac{G_f}{h_2} = 6000$ N/m². Une possibilité, pour augmenter d'environ 10 fois cette aire sous la courbe par rapport à celle de la figure 4.25(a), est de conserver la résistance en traction f_t et de rendre plus ductile la partie post-pic en traction. Notre modèle ne possède aucun paramètre qui permettrait de conserver cette résistance en traction et de modifier uniquement la ductilité de la courbe. La solution proposée est donc d'augmenter la résistance en changeant seulement la valeur du paramètre b_t (valeur en traction des fonctions $b(T_x)$) afin d'avoir tout de même la bonne aire sous la courbe contrainte-déformation $\frac{G_f}{h_2}$.

L'utilité du paramètre b_t , notamment si comme ici l'on souhaite réaliser une "régularisation" de

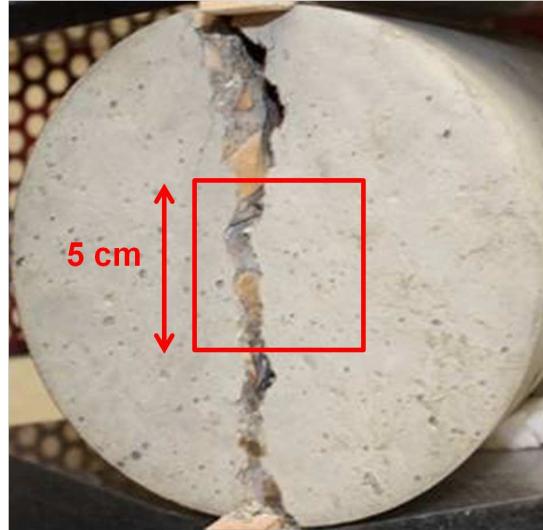


FIG. 4.27 – Réprésentation de l’élément de volume d’une taille de $h_1=5$ cm sur une éprouvette d’un diamètre de 16 cm après un essai de fendage

Modélisations	Fonction $b(T_x)$ avec $T_x = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}/\sigma_{eq}$	Valeur de b_t
TC	$b^{TC}(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 0 \\ (2-b_t)T_x^2 + 0.5 & \text{si } -1 < T_x < 0 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases}$	0,5
TCS1	$b^{TCS1}(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 1 \\ \frac{b_t-2}{2}T_x + \frac{b_t+2}{2} & \text{si } -1 < T_x < 1 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases}$	0,5
TCS2	$b^{TCS2}(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 1 \\ \frac{b_t-1.2}{2}T_x^2 + \frac{b_t-2}{2}T_x + 1.2 & \text{si } -1 < T_x < 1 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases}$	0,5
TCS-H	$b^{TCS-H}(T_x) = \text{choix entre TCS1 et TCS2 effectué au chapitre 5}$	1,6

TAB. 4.5 – Modélisations utilisées pour les calculs de structures du chapitre 5

type Hillerborg, est appréciable et nous avons donc décidé d’intégrer ce paramètre dans les paramètres du modèle, qui comptabilise désormais 10 paramètres ($E, v, \sigma_y^t, \sigma_y^c, \sigma_y^{bc}, \alpha, \beta, b_t, b_v, \dot{D}_\infty$) incluant les paramètres d’élasticité E, v et de visco-endommagement b_v, \dot{D}_∞ . Le tableau 4.5 donne un récapitulatif des quatre modélisations qui seront utilisées dans le chapitre suivant. La différence entre ces modélisations se trouve soit dans la formulation de la fonction $b(T_x)$, soit dans la valeur du paramètre b_t . Pour rappel, les valeurs des paramètres communes aux quatre modélisations sont données dans le tableau 4.4.

Notons finalement que les quatre modélisations TC, TCS1, TCS2, TCS-H ont été présentées avec la loi d’évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+$ en partie positive de la déformation. Elles peuvent toutes se décliner en versions TC-T, TCS1-T, TCS2-T, TCS-HT (T pour Tilde) avec la loi d’évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \rangle_+$, en partie positive de la déformation effective (*cf.* partie 8.4 du chapitre 1) avec $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$. Les réponses en traction, compression, bi-compression et donc les identifications sont inchangées. Une partie de ces notations (avec Tilde) sera utilisée au début du chapitre suivant.

Chapitre 5

Calculs éléments finis 3D de structures en béton armé jusqu'à la ruine

Ce dernier chapitre est consacré à l'application et la validation du modèle d'endommagement anisotrope avec effet de vitesse, développé aux chapitres précédents, sur des structures en béton armé et notamment sur les structures testées lors cette thèse et présentées au chapitre 4. Dans ce chapitre, le terme modélisation sera utilisé dans le sens de loi de comportement d'endommagement anisotrope avec une formulation de la fonction $b(T_x)$ donnée (tab. 4.5 du chapitre précédent) et avec un jeu de paramètres afin d'obtenir les modélisations TC, TCS1, TCS2, TCS-H, *c.f.* fin du chapitre 4. On parlera aussi de configuration étudiée d'un point de vue géométrie et maillage d'une structure.

Les quatre modélisations (au sens loi de comportement) utilisées dans ce chapitre possèdent différentes caractéristiques :

- **Modélisation TC** : Cette modélisation a été identifiée sur les essais expérimentaux avec la contrainte pic en traction de 3 MPa et celle en compression de 35 MPa. Le pic $\tau_R = 2,5$ MPa du chargement en cisaillement est un résultat issu de la forme de la surface de rupture choisie vis-à-vis des résultats expérimentaux de la littérature. L'énergie de rupture en traction $G_f = 30$ N/m correspond à un élément de volume de $h_1 \approx 5$ cm.
- **Modélisation TCS1** : Avec des réponses en traction, compression et bi-compression identiques à celles de la modélisation TC, cette modélisation TCS1 possède une surface de rupture différente pour tous les chargements biaxiaux à $|T_x| < 1$, compris entre la traction et la compression sur la figure 4.25(d), comme le cisaillement qui possède une contrainte pic de 4,9 MPa.
- **Modélisation TCS2** : Avec des réponses en traction, compression et bi-compression identiques à celles des modélisations TC et TCS1, cette modélisation TCS2 possède une surface de rupture différente pour tous les chargements biaxiaux à $|T_x| < 1$, compris entre la traction et la compression sur la figure 4.25(d), comme le cisaillement qui possède une contrainte pic de 6,3 MPa. On a encore $G_f = 30$ N/m et $h_1 \approx 5$ cm (comme pour TCS1).
- **Modélisation TCS-H** : Avec des réponses notamment en compression et bi-compression identiques à celles des modélisations TC, TCS1, TCS2, la modélisation TCS-H possède une surface de rupture différente pour tous les chargements biaxiaux $T_x \geq 1$, compris entre la traction (inclus) et la bi-traction (inclus), avec une contrainte pic en traction de 7,5 MPa. L'aire sous la courbe de traction est de 6000 N/m et, avec une énergie de rupture de $G_f = 30$ N/m, correspond à une taille d'élément de volume de $2h_2 = 1$ cm.

Deux configurations étudiées sont présentées dans ce chapitre :

- La poutre P2-130 (en parties 1 et 3 de ce chapitre) pour laquelle on a obtenu les résultats expérimentaux les plus satisfaisants (aucune jauge a décroché, cf. partie 1.5.2 du chapitre précédent).
- L'essai d'arrachement n°10 (en partie 2 de ce chapitre) qui va nous permettre d'étudier et de comprendre le rôle du comportement de la liaison acier-béton dans nos calculs de structures en béton armé.

Les différents calculs présentés sont des calculs 3D.

1 Simulations numériques 3D de l'essai d'impact sur la poutre P2-130

1.1 Modélisations employées

Dans cette partie, cinq calculs d'impact sur la poutre P2-130 vont être présentés en utilisant les quatre modélisations TC, TCS1, TCS2 et TCS-H.

Les deux premiers calculs sont réalisés avec la modélisation TC et vont permettre de confronter les résultats des deux lois d'évolution de l'endommagement $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\epsilon} \rangle_+$ en partie positive de la déformation effective $\tilde{\epsilon} = \mathbb{E}^{-1} : \sigma$, appelée modélisation TC-T (le dernier T pour Tilde) et $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \epsilon \rangle_+$ (modélisation TC). Rappelons que les réponses en traction et en compression restent identiques. Cette confrontation va nous conforter dans le choix effectué à la fin du chapitre 1, celui de retenir et d'utiliser la loi d'évolution d'endommagement $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \epsilon \rangle_+$ et de retenir donc la modélisation TC.

Le calcul, avec la modélisation TC retenue, va ensuite être analysé plus en détail. Il mettra notamment en évidence les difficultés liées à la modélisation de la liaison acier-béton dues essentiellement à deux sources. La première est un manque d'information expérimentale sur le comportement en cisaillement du béton et la deuxième une modélisation dans le logiciel EUROPLEXUS qui ne permet pas de prendre en compte le comportement non linéaire de l'interface.

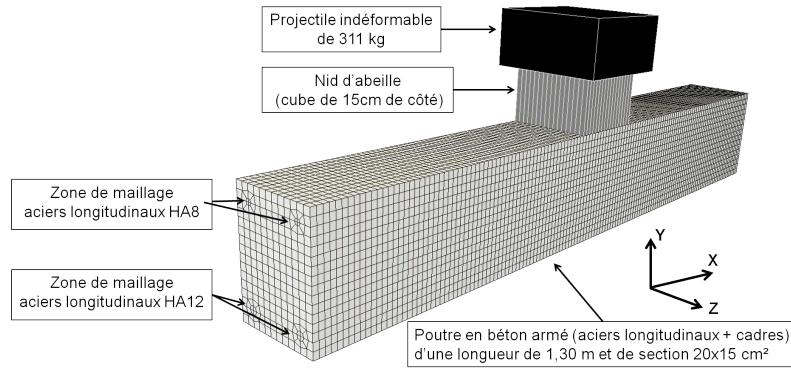
Deux autres calculs sont donc effectués avec les modélisations TCS1 et TCS2 dans le but de mieux prendre en compte le rôle du comportement du béton notamment en cisaillement.

Après avoir fait un choix justifié entre TCS1 et TCS2, un dernier calcul avec la modélisation TCS-H (H pour la “régularisation” de type Hillerborg) est réalisé afin de mettre en évidence l'importance d'avoir la bonne énergie de rupture en traction.

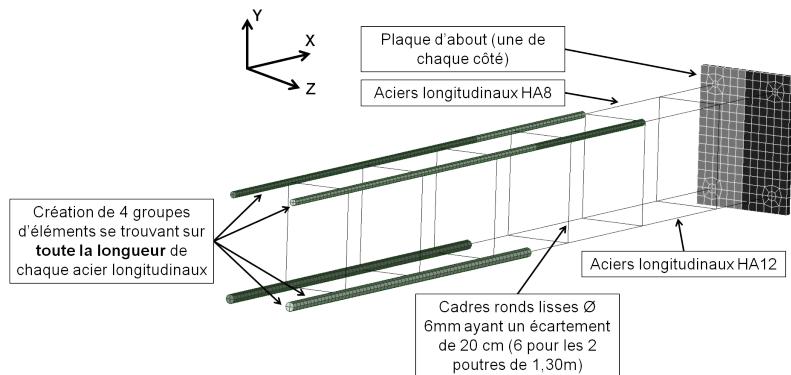
1.2 Maillage, conditions limites et chargement

Le maillage de la poutre P2-130 (fig. 5.1(a)) est constitué de 138 éléments dans la longueur (axe x), 16 dans la hauteur (axe y) et 12 dans la largeur (axe z), soit un total de 26496 éléments parallépipédiques à 8 points de Gauss de dimension $0,94 \times 1,25 \times 1,25 \text{ cm}^3$ (0,94 cm selon la longueur x de la poutre). On attribuera à ces éléments les différentes modélisations TC, TC-T, TCS1, TCS2, TCS-H du modèle d'endommagement anisotrope développé lors de cette thèse.

Les différentes armatures (acières longitudinaux HA8, HA12 et cadres ronds lisses de diamètre 6mm), visibles en partie sur la figure 5.1(b), sont modélisées par des éléments 1D (poutres pour les aciers longitudinaux et barres pour les cadres) où l'on attribue à chacune leur section respective et un comportement élasto-plastique parfait (plasticité de type von Mises). Grâce à la caractérisation en traction des aciers HA8, HA12 et des cadres, présentée dans la partie 1.5.1 du chapitre 4, les valeurs des différents paramètres des lois de comportement ont été définies. Concernant les aciers



(a) Vue d'ensemble de la modélisation



(b) Mise en évidence des aciers et des 4 groupes d'éléments entourant ces derniers.

FIG. 5.1 – Maillage de la poutre d'une longueur de 1,30 m

longitudinaux, les paramètres sont $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 675 \text{ MPa}$ tandis que pour les cadres les paramètres sont $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 460 \text{ MPa}$. A noter sur cette dernière figure, que quatre groupes d'éléments volumiques se situant autour des aciers longitudinaux ont été créés afin de leur appliquer, dans la partie 3 de ce chapitre traitant de l'interface acier-béton, une loi de comportement différente de celle appliquée dans cette partie (notre modèle d'endommagement anisotrope).

Le projectile est modélisé par un solide indéformable d'une masse de 311 kg. Une vitesse initiale de -5,425 m/s lui est imposée suivant la direction Y. Celui-ci vient impacter un cube de nid d'abeille de 15 cm de côté modélisé par des éléments cubiques auxquels nous avons attribué un comportement élasto-plastique parfait (modèle de von Mises, dont les paramètres sont $\rho = 230 \text{ kg.m}^{-3}$, $E = 1 \text{ GPa}$, $\nu = 0$, $\sigma_y = 4,9 \text{ MPa}$). L'identification de ces paramètres est faite sur la courbe de force en fonction du temps de la figure 4.12 (plateau à 4,9 MPa) du chapitre 4 et des données du fournisseur. L'ensemble des caractéristiques du nid d'abeille se trouvent dans le rapport d'essais de [Piteau et Valin, 2011].

Concernant les conditions limites, les noeuds de la poutre se trouvant sur la face supérieure, face où repose le nid d'abeille, et inférieure sont bloqués aux niveaux des appuis (une surface de 84 cm^2 par appui sur la face supérieure et une surface de 84 cm^2 par appui sur la face inférieure) qui sont situés à 0,5 m de chaque côté du centre de la poutre P2-130.

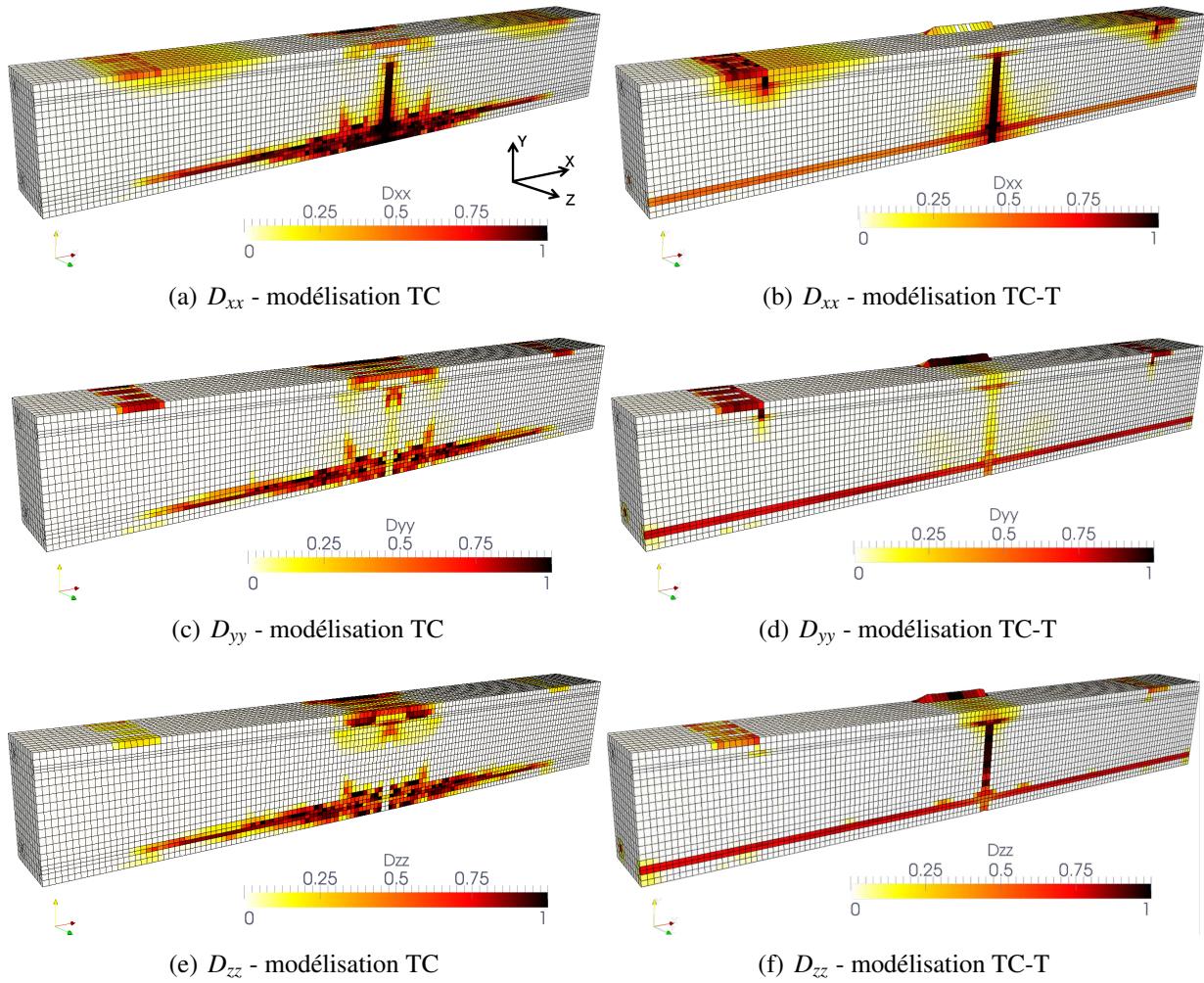


FIG. 5.2 – Cartes des composantes du tenseur d'endommagement D_{ii} de la poutre P2-130 des modélisations TC (à gauche) et TC-T (à droite). Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=1,1$ ms

1.3 Résultats de simulation

1.3.1 Modélisation TC-T *versus* modélisation TC

Deux calculs sur la poutre P2-130 sont réalisés en utilisant les modélisations TC et TC-T. La différence entre ces deux calculs est la loi d'évolution de l'endommagement, la modélisation TC-T utilise la loi d'évolution $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\epsilon} \rangle_+$ alors que la modélisation TC utilise la loi d'évolution $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \epsilon \rangle_+$.

Si on observe les composantes du tenseur d'endommagement, D_{ii} sur la figure 5.2 et D_{ij} ($i \neq j$) sur la figure 5.3, on constate que l'interprétation de l'état d'endommagement de la poutre est difficile via ces faciès. On observe également que certaines composantes peuvent être négatives. Les valeurs propres $D_i = \{D_I, D_{II}, D_{III}\}$ restent bien entendu positives.

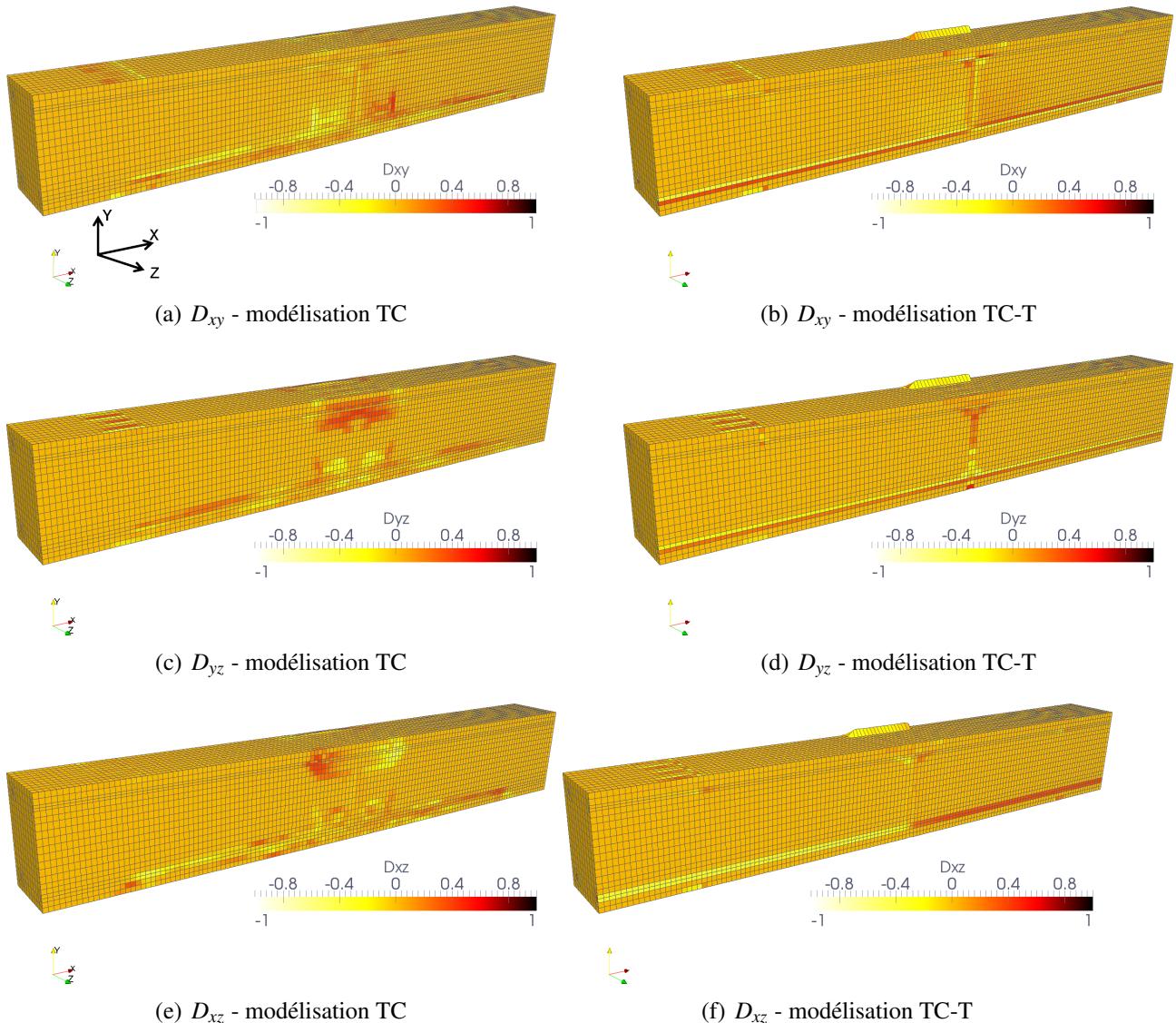


FIG. 5.3 – Cartes des composantes du tenseur d'endommagement D_{ij} ($i \neq j$) de la poutre P2-130 des modélisations TC (à gauche) et TC-T (à droite). Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=1,1$ ms

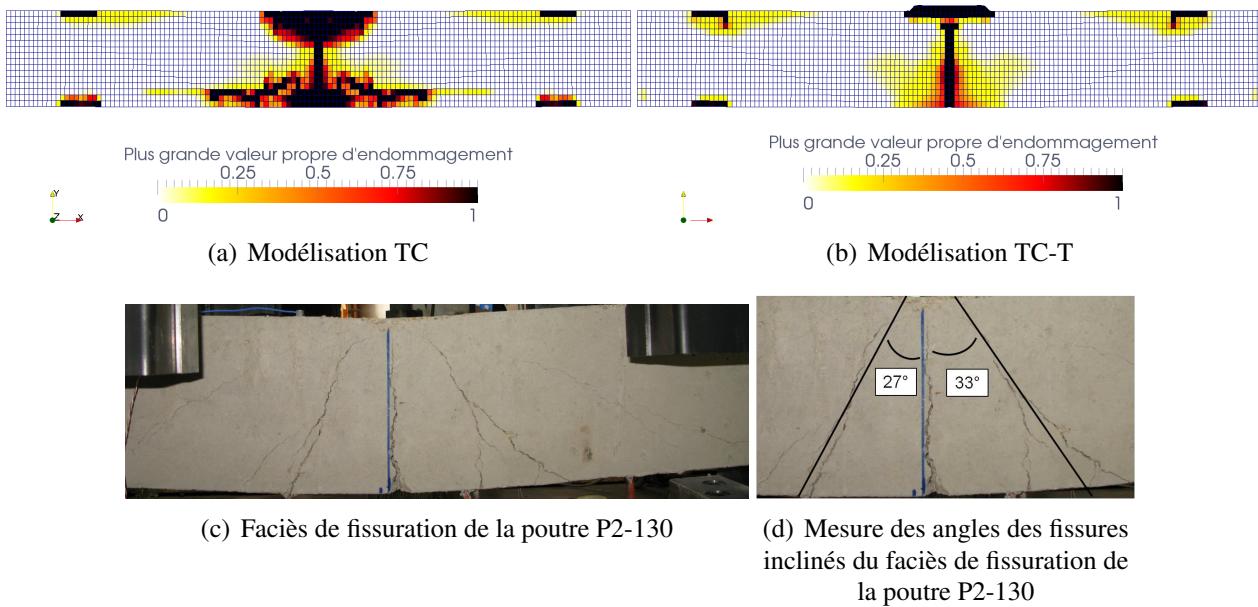


FIG. 5.4 – Comparaison des faciès d’endommagement ($\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$) et de fissuration à $t=1,1$ ms

Le choix de représenter l’endommagement uniquement en traçant la plus grande valeur propre d’endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ a été fait. Les cartes de la plus grande des trois valeurs propres d’endommagement des modélisations TC et TC-T sont comparées au faciès de fissuration expérimental sur la figure 5.4. Numériquement, les zones fissurées correspondent à $\max(D_i) = D_c$, avec une valeur d’endommagement critique D_c prise ici strictement égale à 1. Ainsi lorsqu’une des trois valeurs propres d’endommagement est égale à 1, on considère que le béton est rompu (fissure macroscopique) dans une des trois directions principales. Ce choix, de ne tracer que la plus grande valeur propre d’endommagement pour interpréter les différents calculs de structures, a cependant trois inconvénients plus ou moins liés. Le premier est que l’on perd la direction d’endommagement lorsque que le chargement change (si l’élément passe d’un chargement de traction à un chargement de compression par exemple). Le deuxième est que l’historique de ce chargement n’est pas représenté sur ces cartes (re-fermeture des fissures non représentée). Et enfin le troisième est que l’aspect très endommagé de la poutre est accentué en traçant la plus grande des trois valeurs propres d’endommagement.

Sur la figure 5.4, on observe une différence importante, avec pour la modélisation TC-T une unique fissure centrale qui apparaît très rapidement, tandis que pour la modélisation TC on distingue 3 fissures majeures semblables à celles des essais expérimentaux, une centrale et deux autres en biais de part et d’autre du centre de la poutre. La figure 5.5(a) permet de comparer l’évolution des forces d’impact en fonction du temps et de constater un plateau de force d’environ 100 KN identique jusqu’à $t \approx 1$ ms puis pour les deux calculs, une chute plus ou moins importante de celle-ci. Pour la modélisation TC-T, la force d’impact chute brutalement jusqu’à devenir nulle à cause de l’apparition rapide de l’unique fissure centrale (fig. 5.4(b)). Pour la modélisation TC, l’évolution de la force d’impact chute elle aussi au même instant, mais une reprise de raideur est observable avec un plateau de force autour de 50 KN.

D’autres variables peuvent donner des informations précieuses comme celle de la figure 5.6 qui nous donne le nombre de valeurs propres d’endommagement égales à la valeur critique d’endommagement D_c , ici égale à 1. Pour la modélisation TC-T, on remarque que 2 valeurs propres évoluent de

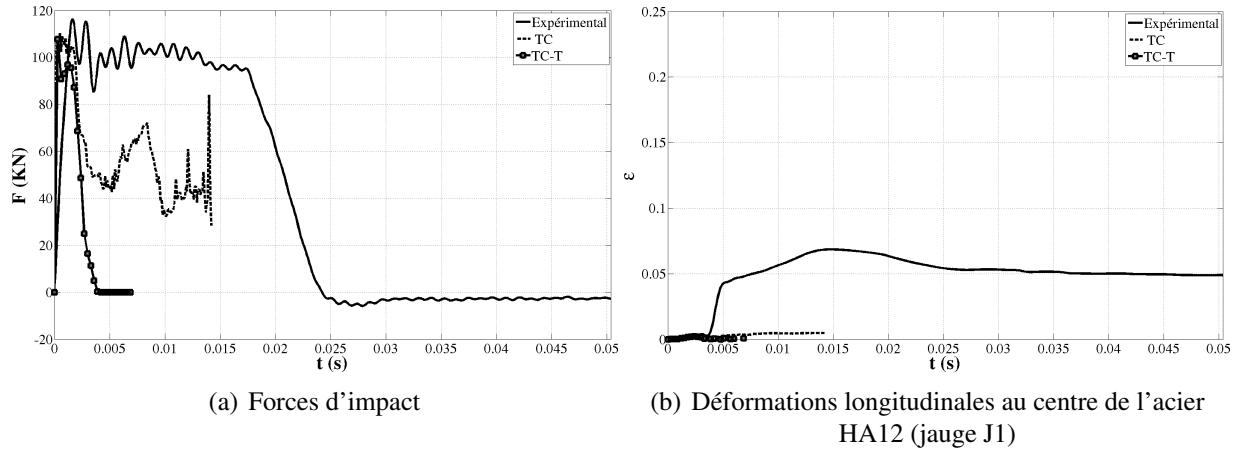


FIG. 5.5 – Réponses globales de la poutre P2-130 des modélisations TC ($\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_+$) et TC-T ($\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\mathbf{\varepsilon}} \rangle_+$)

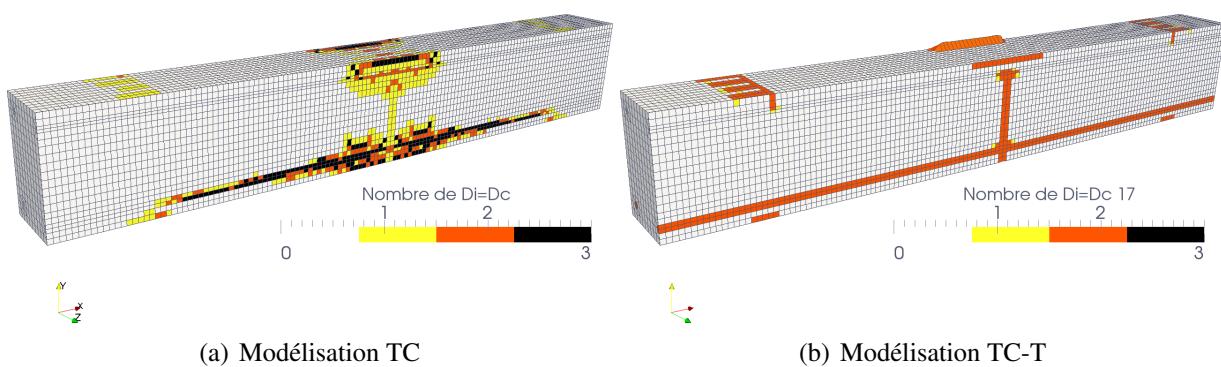


FIG. 5.6 – Cartes du nombre de valeurs propres d'endommagement égales à l'endommagement critique D_c (ici $D_c = 1$) de la poutre P2-130 des modélisations TC (à gauche) et TC-T (à droite). Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=1,1$ ms

la même manière pour arriver à $D_c = 1$ et ceci au niveau de la fissure centrale et le long des aciers longitudinaux du bas. Pour la modélisation TC, le nombre de valeurs propres d'endommagement égales à la valeur critique d'endommagement semble plus satisfaisant, notamment au niveau de la fissure centrale où une seule valeur propre atteint la valeur D_c , ce qui rejoint l'observation expérimentale avec une fissuration centrale verticale et donc orientée perpendiculairement à la direction x, d'où un endommagement très important sur la composante D_{xx} (fig. 5.2(a)).

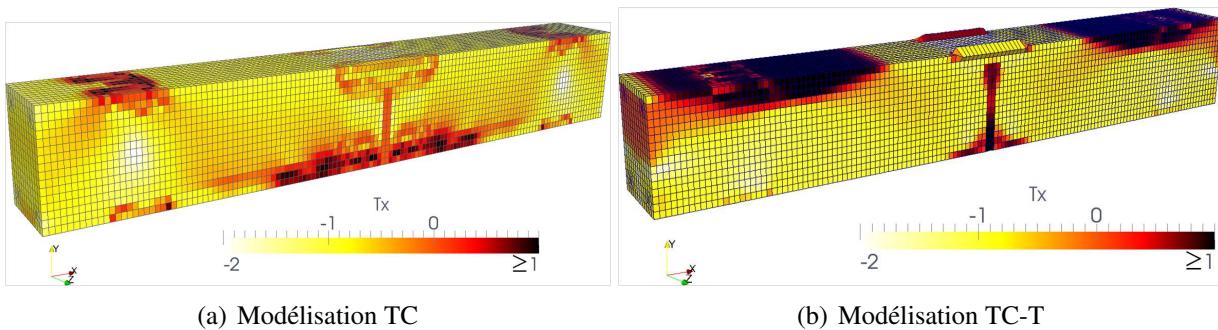


FIG. 5.7 – Cartes de la triaxialité des contraintes $T_x = \frac{\text{tr}\sigma}{\sigma_{eq}}$ de la poutre P2-130 des modélisations TC (à gauche) et TC-T (à droite). Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=1,1$ ms

Grâce aux différentes valeurs de la triaxialité des contraintes observables sur la figure 5.7 à $t=1,1$ ms, le type de chargement que subit localement la poutre P2-130 peut être identifié. Ainsi la carte de triaxialité de la modélisation TC permet de retrouver des résultats proche de l'expérimental, contrairement à la modélisation TC-T, avec la face supérieure de la poutre en compression ($T_x \approx -1$) alors que la face inférieure est en traction $T_x \approx 1$.

Enfin la figure 5.8 permet de juger de l'ordre de grandeur de la vitesse de déformation en prenant la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ pour les modélisations TC et TC-T. Les échelles de vitesses des figures 5.8(a) et 5.8(b) ne sont volontairement pas les mêmes afin de pouvoir observer les valeurs extrêmes. Ces vitesses de déformation sont très importantes dans les zones fortement endommagées au niveau de l'impact $400s^{-1} < \dot{\epsilon} < 600s^{-1}$ et importantes dans les zones endommagées $100s^{-1} < \dot{\epsilon} < 300s^{-1}$ au niveau des fissures principales.

Ces différentes réponses (force d'impact, faciès d'endommagement) nous confortent dans le choix effectué à la fin du chapitre 1 en choisissant la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} < \mathbf{\dot{\epsilon}} >_+$. Même si (pour l'instant) la déformation de l'acier calculée est trop faible et si la rupture est trop brutale.

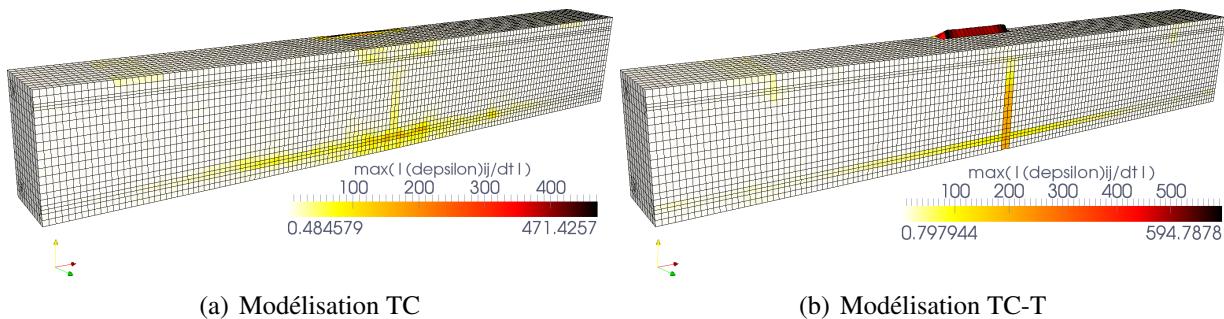


FIG. 5.8 – Cartes de la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ de la poutre P2-130 des modélisations TC (à gauche) et TC-T (à droite).
Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=1,1$ ms

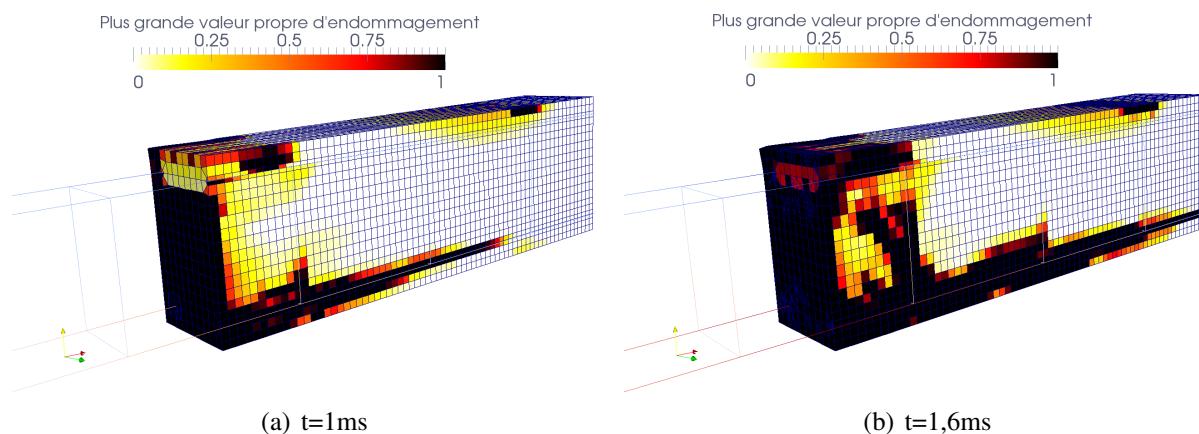


FIG. 5.9 – Evolution au cours du temps de l'endommagement $\max(D_i) = \|D\|_\infty$ le long des aciers longitudinaux pour la modélisation TC

Il reste maintenant à comprendre pourquoi la force d'impact de la modélisation TC chute si rapidement dans le calcul. Pour cela nous nous sommes intéressés au comportement de l'interface entre l'acier et le béton sur le dernier calcul (calcul avec la modélisation TC). Sur la figure 5.9, une partie seulement de la poutre est représentée après une coupe dans sa section et une dans sa longueur au niveau de l'acier HA 12. Cette figure permet d'observer à deux instants différents l'évolution de la plus grande valeur propre du tenseur d'endommagement. On constate que l'évolution de l'endommagement des éléments de béton présent autour de l'acier est très rapide et trop importante le long de celui-ci. Ce phénomène a également été observé par Richard [Richard, 2010] sur un calcul numérique de tirant. Ces efforts, plutôt de traction et de cisaillement, ne peuvent donc plus être transmis aux aciers (“phénomène numérique de glissement des aciers”), ce qui entraîne très rapidement la ruine de la structure. Ainsi en observant l'évolution de la déformation en fonction du temps de l'acier HA12 (fig. 5.5(b)), on comprend mieux pourquoi celui-ci ne se déforme quasiment pas. Mazars et coll. ont introduit le paramètre β (de l'équation 1.24 du modèle d'endommagement de Mazars, chapitre 1), afin justement de conserver une grande raideur élastique (non physique) en cisaillement et de mener à leur terme les calculs de structures en béton armé.

Deux raisons peuvent expliquer ce phénomène et sont étudiées plus en détail par la suite :

- La modélisation du comportement du béton en cisaillement n'est peut-être pas bonne (rappelons le, manque de données expérimentales).
- La prise en compte du comportement de l'interface entre l'acier et le béton est peut-être inadaptée (à ce jour un seul modèle de liaison acier-béton est disponible dans le Logiciel EUROPLEXUS, la liaison parfaite : continuité des déplacements, continuité du vecteur contrainte normale).

Concernant les temps de calcul, 84h ont été nécessaires pour mener la modélisation TC jusqu'à $t \approx 14$ ms pour un temps d'étude visé de 40ms. Ce calcul s'est arrêté automatiquement à cause d'une distorsion d'élément trop importante. Pour la modélisation TC-T, nous avons arrêté le calcul après un temps de calcul de 72h et un temps d'étude correspondant à 7 ms dès lors que la force d'impact (fig. 5.5(a)) était nulle.

1.3.2 Modélisations TCS1 et TCS2

Pour mieux prendre en compte le comportement du béton en cisaillement, une étude de sensibilité au comportement essentiellement au cisaillement (modification de la contrainte pic en cisaillement) est réalisée via les deux modélisations TCS1 et TCS2 (*c.f.* fin du chapitre 4) et plus exactement par la formulation de leur fonction respective $b(T_x)$ aux valeurs de triaxialité $|T_x| = |\text{tr}\boldsymbol{\sigma}/\sigma_{eq}| < 1$.

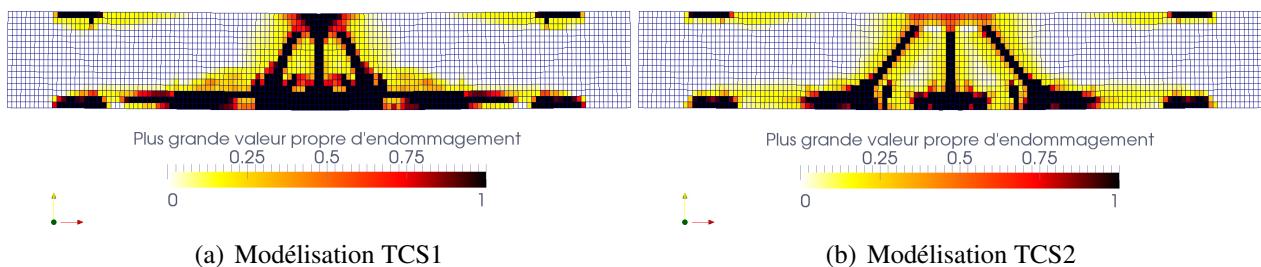


FIG. 5.10 – Faciès d'endommagement $\max(D_i) = \|\boldsymbol{D}\|_\infty$ de la poutre P2-130 à $t=2$ ms pour les modélisations TCS1 et TCS2

Expérimentalement, on observe 3 fissures principales (fig. 5.4(c)) : une verticale au centre de la poutre, et 2 autres de 30° environ de part et d'autre du centre de la poutre (fig. 5.4(d)). Numériquement, on observe aussi une fissure centrale et deux fissures inclinées de 30° sur le faciès d'endommagement de la modélisation TCS1 (fig. 5.10(a)). Pour la modélisation TCS2 (fig. 5.10(b)), trois fissures principales sont aussi visibles mais l'écartement des 2 fissures inclinées sur le faciès d'endommagement est trop important vis à vis de l'expérimental et leur inclinaison est plus proche des 35° .

Concernant les réponses globales de ces deux calculs (fig. 5.11), les évolutions au cours du temps de la force d'impact et de la flèche sont quasiment identiques et se rapprochent davantage de l'expérimental comparativement aux réponses de la modélisation TC. Cette fois-ci, la déformation finale des aciers (qui était quasi-nulle pour la modélisation TC) est surestimée d'un rapport 1,5 pour TCS1 et de 2 pour TCS2 vis à vis de la déformation expérimentale.

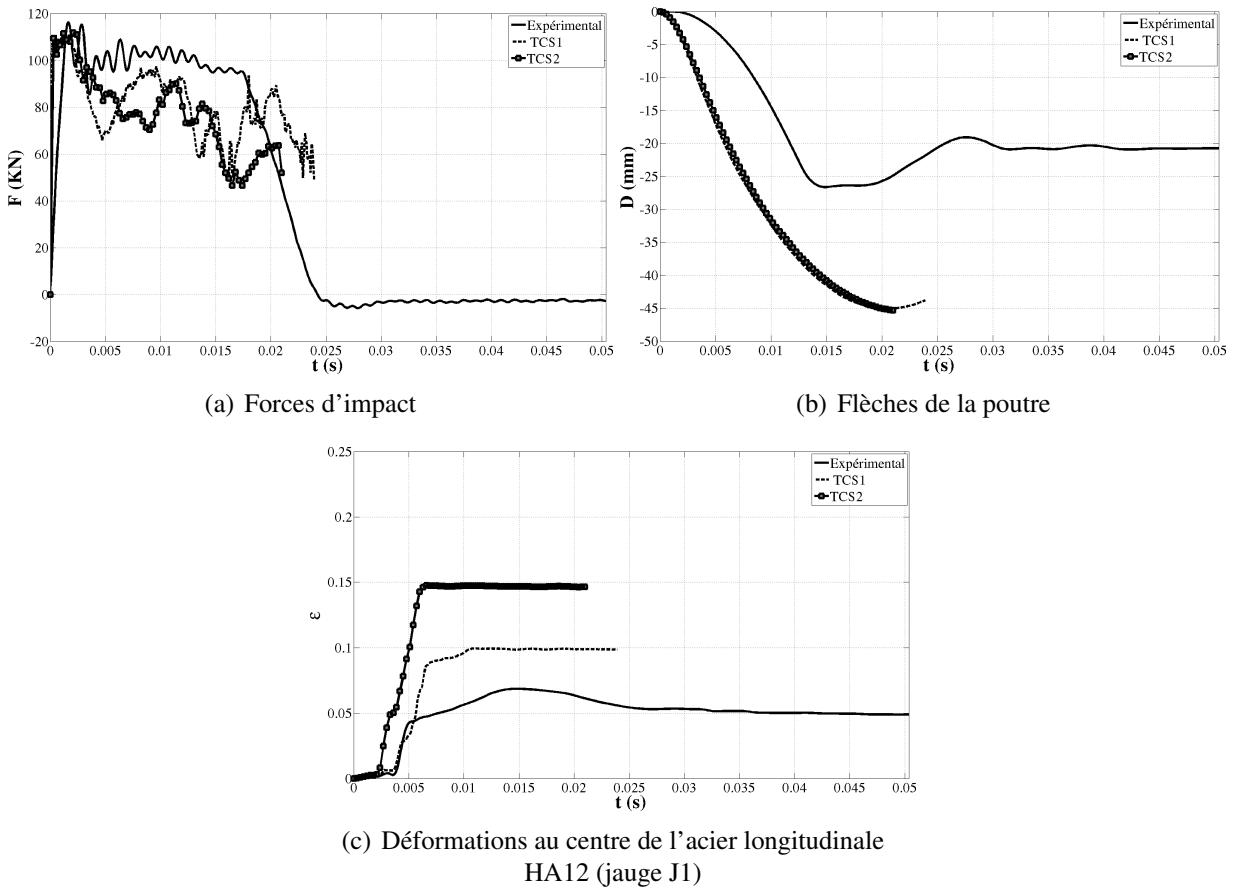


FIG. 5.11 – Réponses globales au cours du temps de la poutre P2-130 avec les modélisations TCS1 et TCS2

Enfin la figure 5.12 permet de juger de l'ordre de grandeur de la vitesse de déformation en traçant la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ pour les modélisations TCS1 et TCS2. Globalement ces vitesses de déformations sont moins importantes que celles de la modélisation TC. Les vitesses de déformation comprises entre $50s^{-1} < \dot{\epsilon} < 150s^{-1}$ se situent toujours dans les zones endommagées au niveau des fissures principales alors que les vitesses de déformation comprises entre $200s^{-1} < \dot{\epsilon} < 300s^{-1}$ se situent au niveau de l'impact pour la modélisation TCS1 et le long des armatures longitudinales pour la modélisation TCS2.

Le temps de calcul maximum de 200h a été atteint et a permis de mener les deux modélisations à des temps d'étude compris entre 22 et 24 ms pour un temps d'étude visé de 40 ms. Nous aurions pu étendre ce temps de calcul au-delà de 200h après avoir obtenu une autorisation d'extension auprès du service informatique d'EDF. Etant donné l'état très endommagé de la poutre constaté à la fin de cette étude, l'augmentation des temps de calculs n'aurait vraisemblablement pas apporté plus d'informations quant à l'interprétation des résultats.

Au final ces calculs mettent en évidence la nécessité de rendre proprement compte du comportement en cisaillement du béton. Il a été décidé de retenir la modélisation TCS1 pour les raisons suivantes :

- La surface de rupture présentée à la fin du chapitre 4 est plus satisfaisante pour la modélisation TCS1, étant moins déformée (moins bombée) au niveau du cisaillement vis à vis de l'expéri-

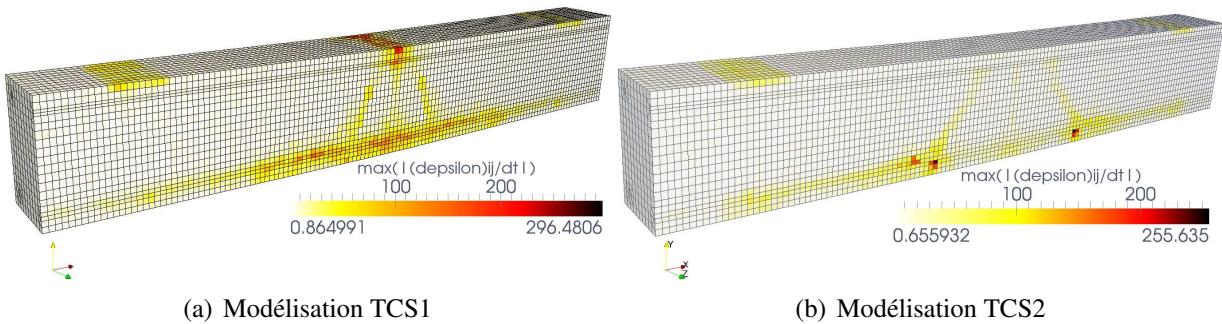


FIG. 5.12 – Cartes de la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ de la poutre P2-130 des modélisations TCS1 (à gauche) et TCS2 (à droite). Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=2$ ms

mental que celle de la modélisation TCS2.

- La déformation des aciers et le faciès d'endommagement pour la modélisation TCS1 se rapproche plus des résultats expérimentaux que pour la modélisation TCS2.

1.3.3 Modélisation TCS-H

On retient ici la modélisation TCS1 mais le paramètre b_t de la fonction $b(T_x)$ est modifié afin d'avoir la bonne énergie de rupture en traction quasi-statique ("régularisation" de type Hillerborg *cf.* fin du chapitre 4). Cette nouvelle modélisation est appelée modélisation TCS-H. Les réponses globales de ce calcul sont présentées sur la figure 5.13. On constate que l'évolution au cours du temps de la force d'impact de TCS-H est semblable à celle obtenue expérimentalement. Concernant l'évolution du déplacement et de la déformation de l'acier HA 12, l'allure générale des courbes entre TCS-H et expérimentale est identique avec toutefois une surestimation du maximum obtenue numériquement pour ces deux grandeurs. L'évolution au cours du temps du déplacement du centre de la poutre pour la modélisation TCS-H (fig. 5.13(b)) montre entre $t=17$ ms et $t=30$ ms le retour élastique de la poutre visible aussi sur l'essai expérimental.

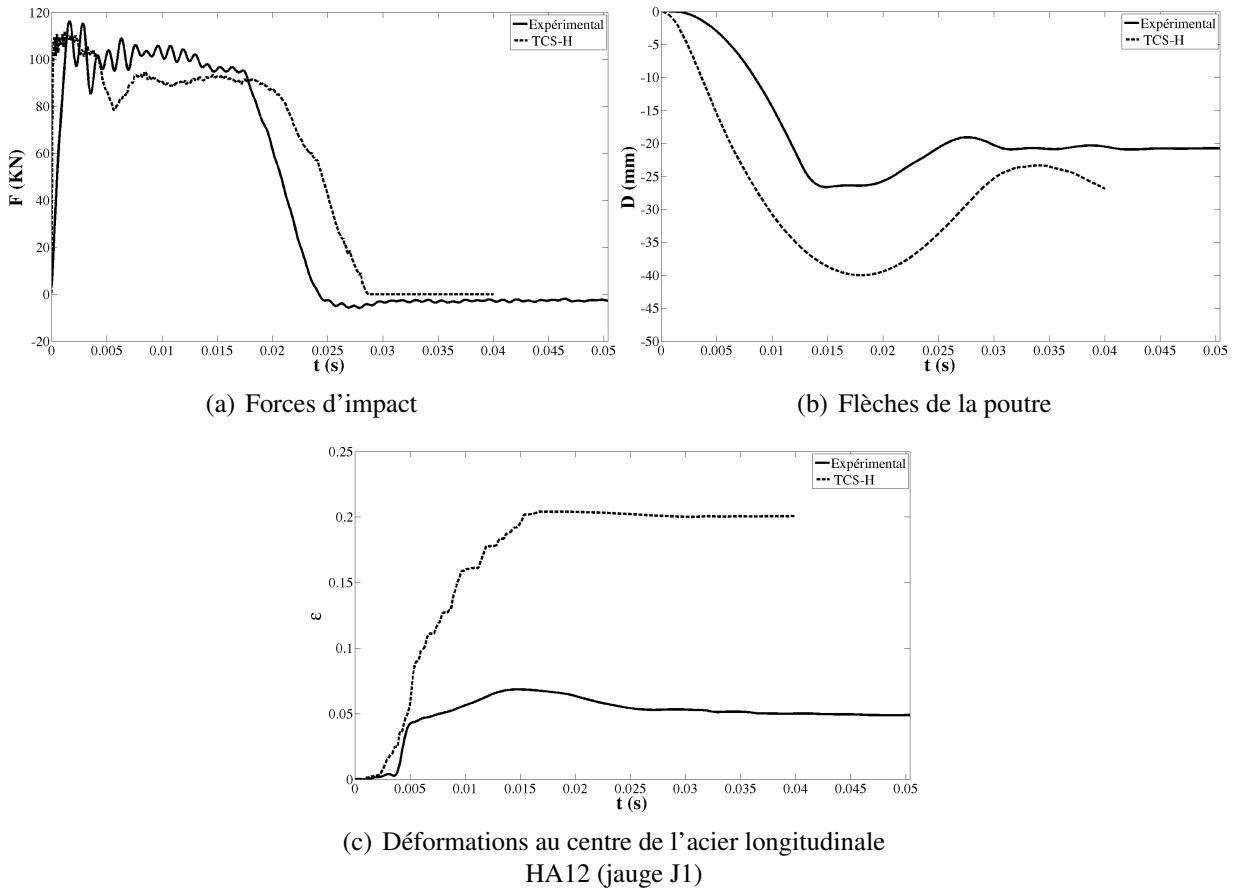


FIG. 5.13 – Réponses globales au cours du temps de la poutre P2-130 avec le jeu de paramètres TCS-H

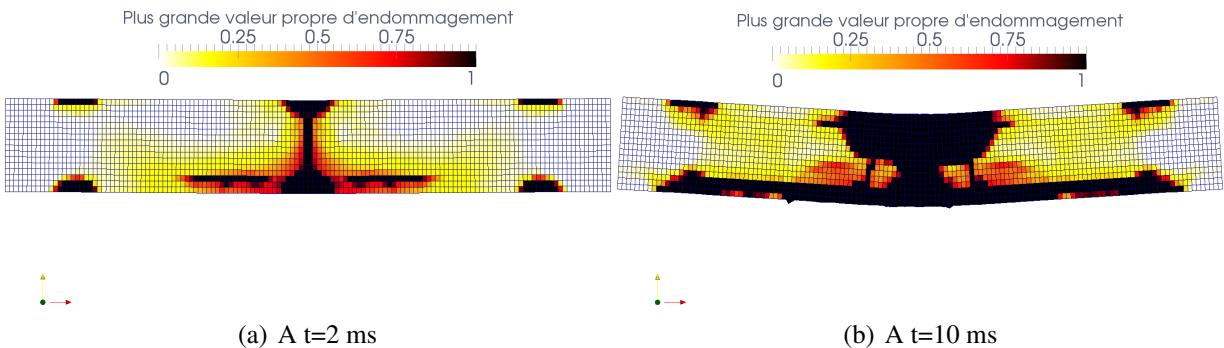


FIG. 5.14 – Evolution au cours du temps du faciès d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ de la poutre P2-130 pour la modélisation TCS-H

La carte d'endommagement de la plus grande valeur propre $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ est représentée sur la figure 5.14. Les fissures à environ 30 degrés observables sur le faciès d'endommagement de TCS1 (fig. 5.10(a)) le sont beaucoup moins sur celui de TCS-H. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'utiliser la régularisation d'Hillerborg en fixant l'énergie de fissuration ne permet pas de traiter précisément

les problèmes de multi-fissuration, ni les problèmes à trajet de fissuration en biais par rapport au maillage. Ceci qui explique la faible visibilité, sur la figure 5.14, des fissures expérimentales à 30° contrairement à la fissure centrale.

Pour la modélisation TCS-H, les vitesses de déformation (fig. 5.15) très importantes $200\text{s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 300\text{s}^{-1}$ se situent cette fois-ci à la base de la fissure centrale tandis que les vitesses de déformation importantes $50\text{s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 150\text{s}^{-1}$ se situent au niveau des fissures principales.

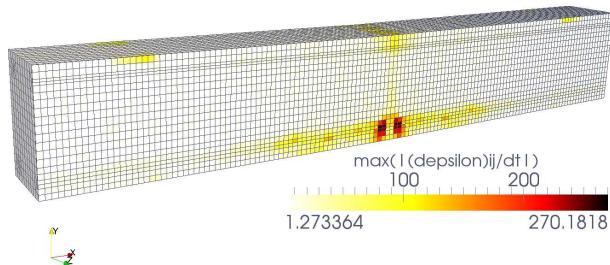


FIG. 5.15 – Cartes de la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ de la poutre P2-130 de la modélisations TCS-H. Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=2$ ms

Le temps de calcul de la modélisation TCS-H est de 195h pour atteindre le temps d'étude souhaité de 40ms.

Ces différents calculs réalisés avec les modélisations TC, TC-T, TCS1, TCS2 et TCS-H du comportement du béton ont permis de mettre en avant qu'une modélisation adaptée du béton en cisaillement est essentielle pour ce type de sollicitation mais, comme déjà conclu par Chen [Chen, 2010], travailler avec une bonne énergie de rupture en quasi-statique l'est tout autant, même si l'effet de vitesse est pris en compte.

2 Modélisation des essais d'arrachement afin de prendre en compte l'interface acier-béton

Pour étudier et comprendre le comportement mécanique de l'interface¹ acier-béton, nous nous sommes servis des résultats expérimentaux des essais d'arrachement présentés au chapitre précédent. L'idée est dans ce travail de thèse de représenter de manière simple (sans programmation) le comportement de la liaison entre l'acier et le béton. Pour cela dans notre maillage, un volume V_I d'éléments 3D entourant l'acier longitudinal (éléments 1D) est choisi (fig. 5.16(c)) avec comme dimensions : la longueur des aciers considérés (fig. 5.16(b)), une section octogonale se rapprochant de celle des aciers $S_I \approx \pi \phi_{acier}^2 / 4$. Ce volume V_I d'éléments 3D est appelé interface dans notre modélisation (fig. 5.17(b)).

Une loi de comportement est associée aux éléments de cette interface (volume V_I) afin d'introduire un comportement élasto-plastique parfait dissymétrique traction/compression rendant compte de l'effet du confinement (plasticité de type Drucker-Prager). Cette modélisation éléments finis qu'utilise

¹Il s'agit plutôt de l'interphase acier-béton, couche d'une certaine épaisseur, communément modélisée par une interface d'épaisseur nulle au comportement mécanique non linéaire.

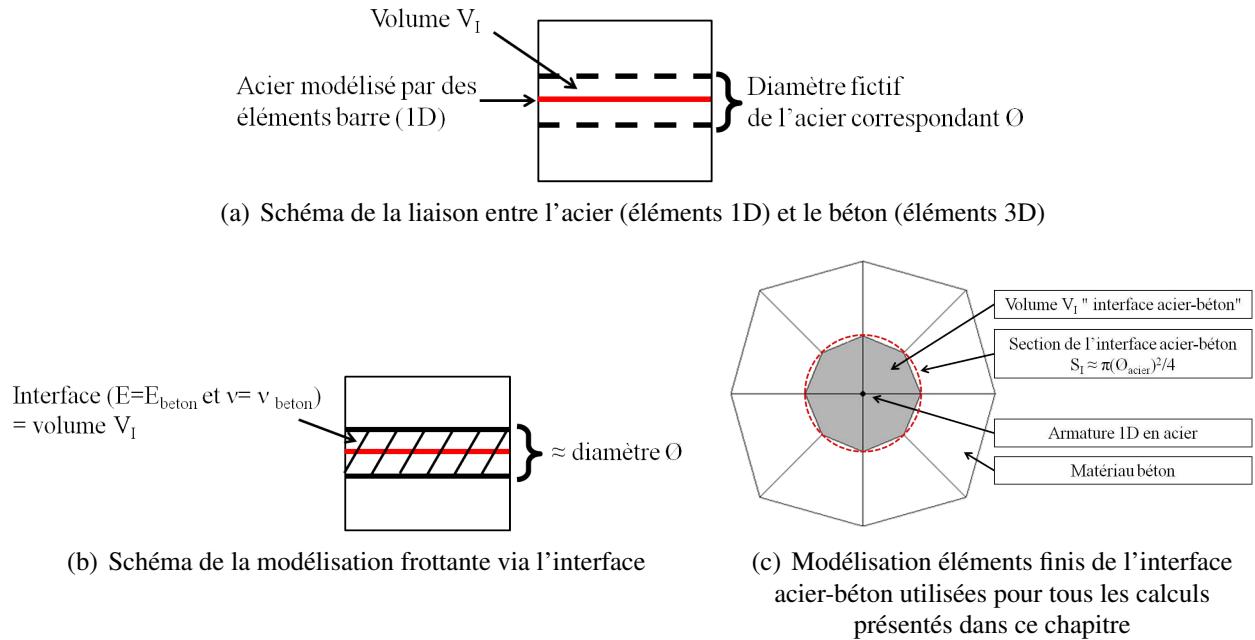


FIG. 5.16 – Modélisations de la liaison acier-béton

aussi [Kolani, 2012] permet de prendre en compte de manière pragmatique le comportement acier-béton sans avoir à développer une liaison acier-béton au sein d'EUROPLEXUS ou encore modéliser les aciers en 3D comme fait par [Richard, 2010]. Les autres éléments volumiques sont considérés comme du béton et on leur attribue donc la modélisation TCS-H, montrée être la plus représentative de la force d'impact expérimentale dans la partie précédente et la moins gourmande en temps de calcul.

Différents calculs sont présentés dans cette partie avec notamment une étude de sensibilité aux paramètres du critère de Drucker-Prager pour le groupe d'éléments V_I . Un jeu de paramètres sera retenu afin d'effectuer un dernier calcul sur la poutre P2-130 prenant en compte de manière pragmatique le comportement acier-béton.

2.1 Maillage, conditions aux limites et chargement

Pour modéliser l'un des essais d'arrachement (essai n°10) présenté au chapitre précédent, un maillage d'une éprouvette cubique de 25 cm de côté a été utilisé. Il est constitué de 20 éléments dans la longueur, la hauteur et la largeur (fig. 5.17(a)) avec au centre de l'éprouvette deux volumes de matière retirés afin d'avoir la longueur d'ancrage désirée (10cm, fig. 5.17(b)) et ainsi obtenir un groupe d'éléments se trouvant autour de l'acier longitudinal HA 12 que nous appellerons "interface". Ceci fait un total de 7952 éléments parallépipédiques à 8 points de Gauss. Afin de se rapprocher au plus près de nos calculs de poutres, la taille de la majorité des éléments ont des dimensions comparables à celles des poutres ($1,33 \times 1,33 \times 1,25 \text{ cm}^3$).

L'acier longitudinal, d'un diamètre de 12 mm, noyé dans l'interface (groupe d'éléments) est modélisé par des éléments poutres 1D (identique à la poutre P2-130) où l'on attribue un comportement élasto-plastique parfait (plasticité de type von Mises) avec les paramètres suivants : densité $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$, limite d'élasticité

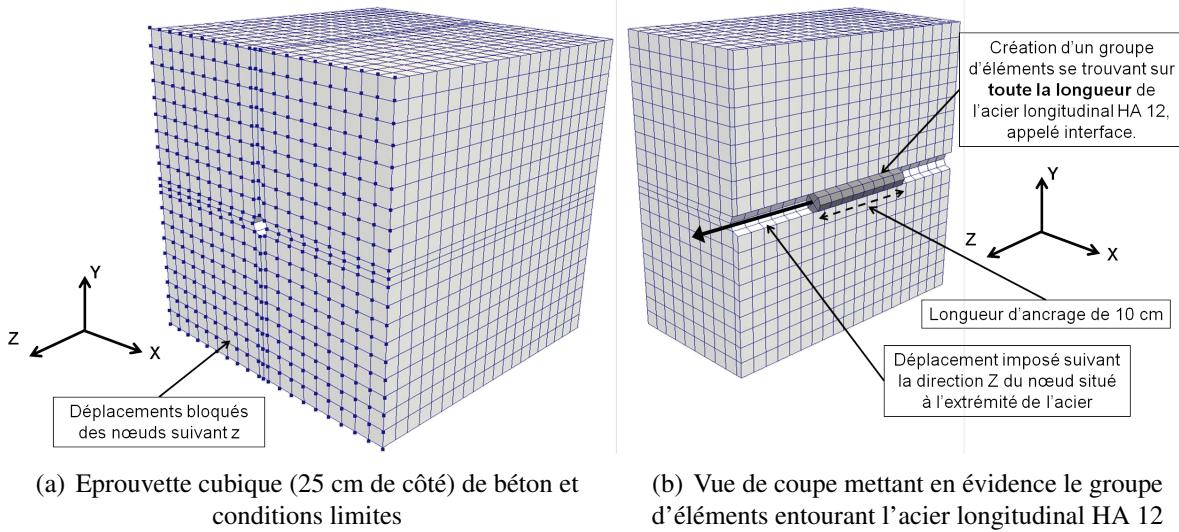


FIG. 5.17 – Maillage de l'essai d'arrachement

égale à la contrainte ultime $\sigma_y = 675 \text{ MPa}$. Un déplacement U suivant la direction Z est imposé sur le noeud de l'extrémité de l'acier (fig. 5.17(b)) avec une vitesse de chargement $\dot{U} = 0,025 \text{ m/s}$, tandis que les noeuds de la face gauche de l'éprouvette sont bloqués suivant la direction z afin de s'opposer à l'effort produit par le déplacement imposé de l'acier.

2.2 Calcul considérant une liaison acier-béton parfaite

Un premier calcul de référence a été lancé avec la modélisation TCS-H sur l'ensemble des éléments volumiques (y compris le volume V_I modélisant l'interface) pour un essai d'arrachement avec donc une liaison (ou interface) parfaite. Ce calcul est complémentaire au calcul de la poutre P2-130 puisque la modélisation TCS-H du comportement du béton, la liaison parfaite entre l'acier et le béton ainsi que les éléments (taille, interpolation) utilisés sont communs aux deux calculs (impact et arrachement). La figure 5.18 permet de comparer les résultats force-déplacement entre le résultat expérimental (essai n°10 du tableau 4.3 du chapitre 4) et la simulation numérique. Ce résultat montre que la liaison acier-béton parfaite utilisée n'est pas adaptée à ce type de simulation, puisque la force chute très rapidement. Cette chute rapide s'explique de la même façon que pour les poutres par un endommagement trop rapide des éléments de béton en contact direct avec l'acier (fig. 5.19(a)). Sur la figure 5.19(b), on a tracé la triaxialité des contraintes afin de connaître le type de chargement que subit localement l'éprouvette. Par exemple la partie du côté où l'on tire sur l'acier se retrouve en compression ($T_x = \text{tr}\sigma/\sigma_{eq} \approx -1$), ce qui est confirmé par les résultats expérimentaux. Les zones en rouge-orange ($T_x \approx 0$) correspondent à du cisaillement (rappelons que $T_x = 1$ en traction).

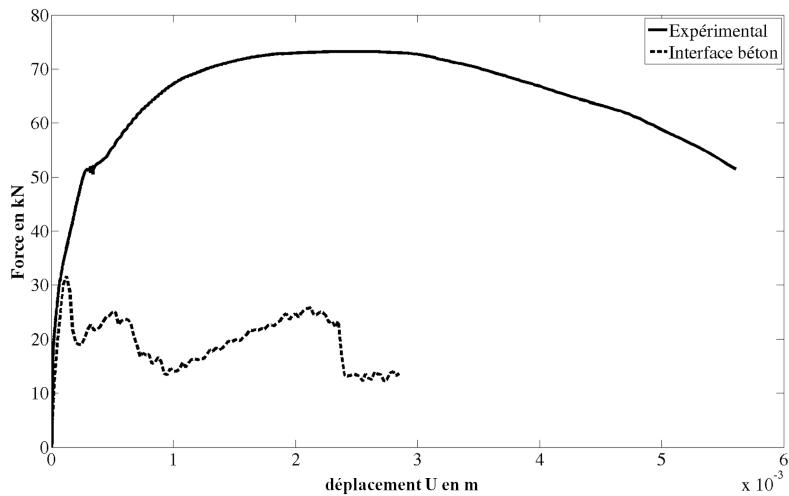


FIG. 5.18 – Réponses force-déplacement des essais d'arrachement avec la modélisation TCS-H et une liaison parfaite entre l'acier et le béton

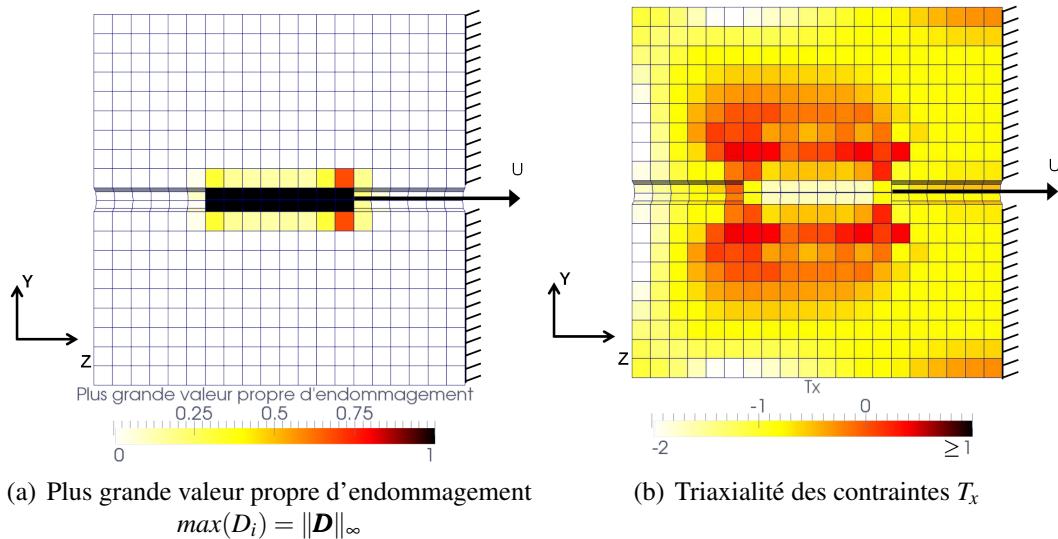


FIG. 5.19 – Cartes de l'essai d'arrachement avec une liaison parfaite entre l'acier et le béton à $t=0,01$ s, $U=0,25$ mm (Vue de coupe de l'éprouvette de béton dans le plan YZ au niveau de l'acier)

2.3 Calculs avec prise en compte pragmatique du comportement de l'interface acier-béton

Pour prendre en compte le comportement mécanique de l'interface entre l'acier et le béton, une solution pragmatique consiste à mettre entre le béton (éléments 3D) et l'acier (éléments 1D) une interface (volume V_I) sur laquelle on attribue une loi de comportement adéquate.

Dans un essai d'arrachement, un chargement de cisaillement prédomine entre l'acier et le béton. On associera donc à cette interface la loi de plasticité parfaite de type Drucker-Prager qui est dissy-

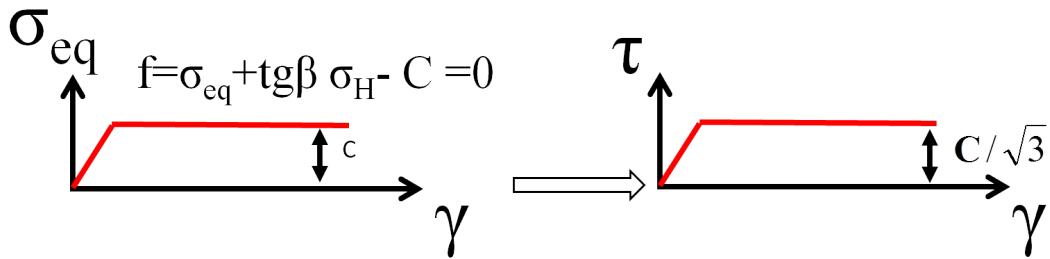


FIG. 5.20 – Réponse en cisaillement du modèle Drucker-Prager

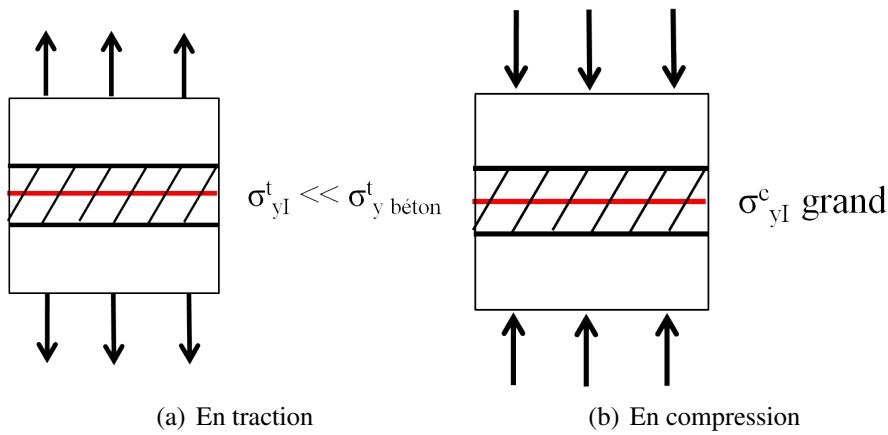


FIG. 5.21 – Principe de l'interface

métrique traction-compression et qui permet d'avoir une réponse en cisaillement comparable à celle que l'on peut observer expérimentalement (fig. 5.20). Le module d'Young et le coefficient de Poisson de cette interface seront pris égaux à ceux du béton de façon à avoir la même réponse élastique. Plusieurs calculs sont réalisés afin d'étudier la sensibilité des paramètres d'entrée, comme les limites d'élasticité en traction σ_{yI}^t et compression σ_{yI}^c de la loi de plasticité parfaite de type Drucker-Prager, sur la réponse globale force-déplacement de la simulation numérique 3D des essais d'arrachement. Les valeurs des paramètres ont été choisies en partant du principe que l'interface doit être résistante lorsqu'elle est sollicitée en compression (fig. 5.21(b)) et peu résistante lorsqu'elle est sollicitée en traction (fig. 5.21(a)). La limite d'élasticité en compression est donc prise grande (de l'ordre de la résistance en compression du béton f_c) alors qu'en traction elle est prise très inférieure à celle du béton ($\sigma_{yI}^t << \sigma_{yI}^c$).

La figure 5.22 montre la sensibilité aux paramètres de la loi de plasticité parfaite de type Drucker-Prager de la réponse force-déplacement. On constate qu'avec cette modélisation de l'interface, la réponse force-déplacement est bien plus satisfaisante qu'auparavant. Etant donné que les jeux de paramètres σ_{yI}^t , σ_{yI}^c , donnent des résultats proches, le premier jeu de paramètres est retenu pour la suite de notre étude ($\sigma_{yI}^t = 0,01$ MPa et $\sigma_{yI}^c = 35$ MPa avec rappelons le, $E = 25$ GPa, $\nu = 0,2$). Si l'on trace pour ce dernier jeu de paramètres la carte de la plus grande des trois valeurs propres d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ de l'éprouvette (fig. 5.23(a)), on constate que, grâce à l'interface, l'endommagement dans les éléments de béton se situant à la périphérie de celle-ci est beaucoup plus

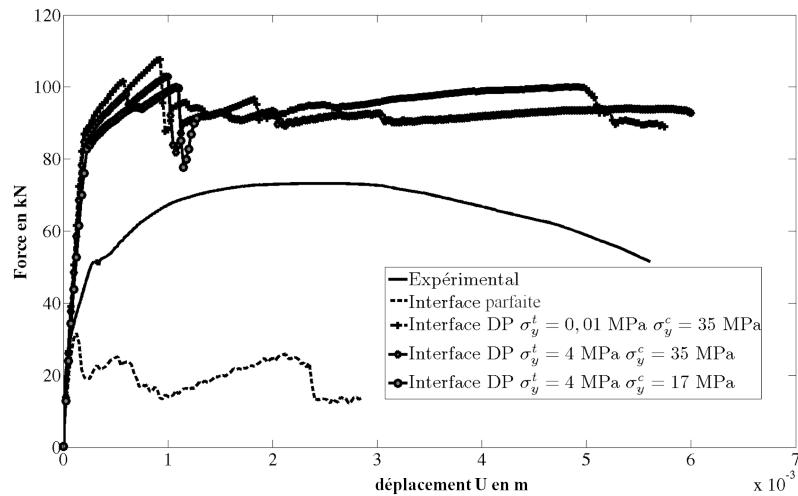


FIG. 5.22 – Influence des paramètres σ_y^t et σ_y^c du modèle Drucker-Prager sur la réponse force-déplacement des essais d'arrachement

important que celui observé sur la figure 5.19(a) pour la liaison parfaite au même instant. Concernant la triaxialité des contraintes (fig. 5.23(b)), les zones de chargements sont plus distinctes que celles de la liaison parfaite avec toujours une zone de compression ($T_x \approx -1$) du côté où l'on tire sur l'extrémité de l'acier mais avec surtout une plus grande zone cisaillée ($T_x \approx 0$).

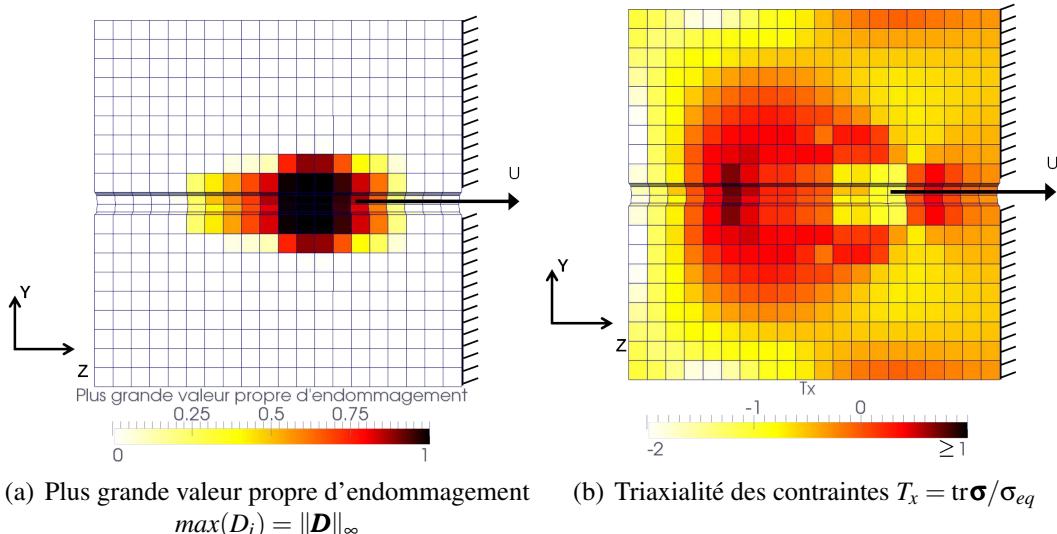


FIG. 5.23 – Cartes de l'essai d'arrachement avec une interface DP entre l'acier et le béton à $t=0,01$ s., $U=0,25$ mm (Vue de coupe de l'éprouvette de béton dans le plan YZ au niveau de l'acier)

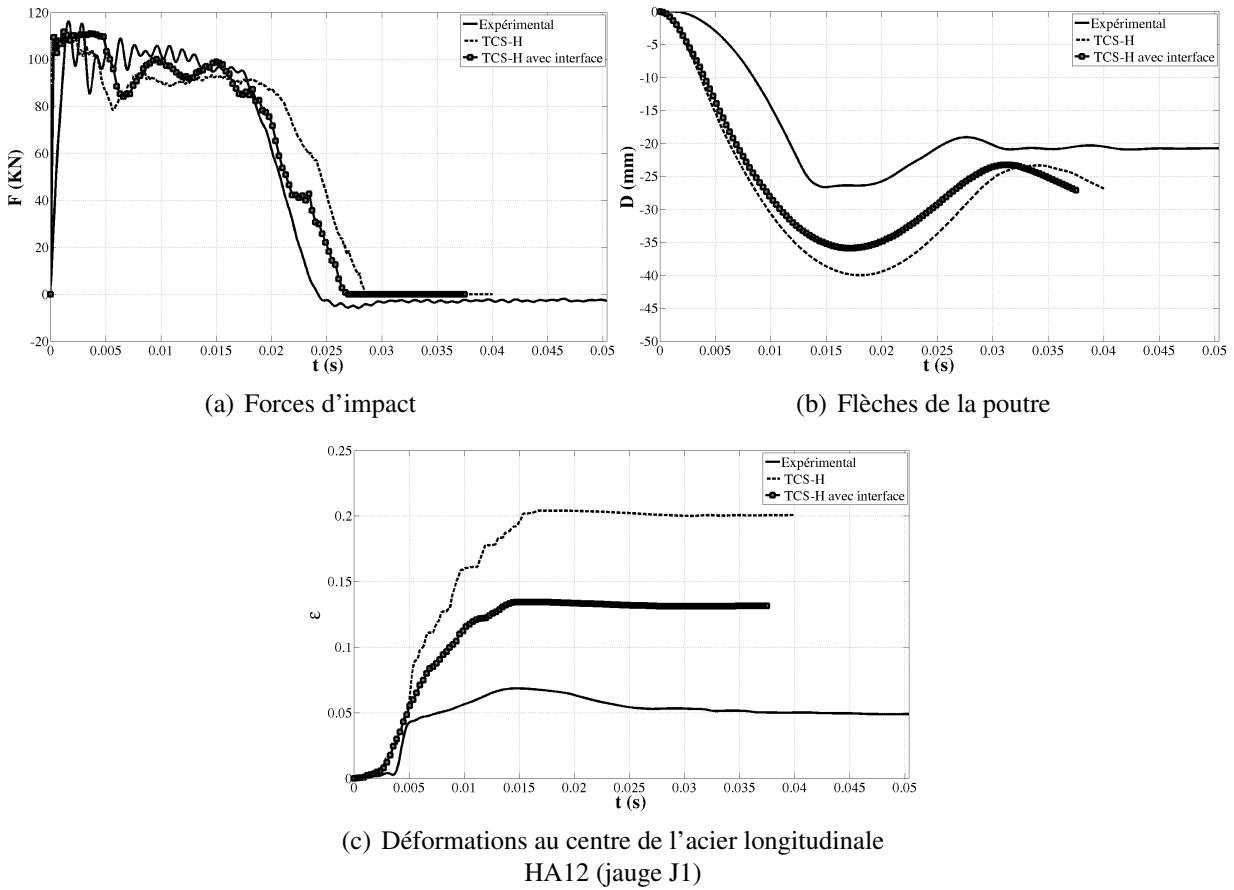


FIG. 5.24 – Réponses globales au cours du temps de la poutre P2-130 des deux calculs TCS-H et TCS-H avec interface

3 Simulations numériques 3D de l'essai d'impact sur la poutre P2-130 avec prise en compte de la liaison acier-béton

Deux derniers calculs sur la poutre P2-130 sont réalisés avec les modélisation TCS-H puis TCS(=TCS1) pour le béton, et avec cette fois une prise en compte de l'interface acier-béton par le volume V_I auquel on associe un modèle de plasticité parfaite de type Drucker-Prager, comme fait ci-dessus.

3.1 Calcul avec la modélisation TCS-H

La figure 5.24 permet de confronter les calculs avec la modélisation TCS-H aux résultats expérimentaux pour l'ensemble des éléments volumiques (c'est à dire le calcul avec interface parfaite présenté dans la partie 1.3.3 de ce chapitre) et la modélisation TCS-H avec prise en compte de la liaison acier-béton. Lorsque l'on observe l'évolution du déplacement ainsi que la déformation de l'acier au cours du temps, on constate que le calcul TCS-H avec interface se rapproche encore un peu plus des résultats expérimentaux avec pour la simulation numérique une flèche maximale de 3,6 cm et une déformation maximale de l'acier de 0,14 contre une flèche de 2,7 cm et une déformation maximale de l'acier de 0,07 pour l'essai. On peut aussi observer le retour élastique de la poutre entre $t=17$ ms

et $t=30$ ms sur la figure 5.24(b) ou sur la figure 5.25 en observant l'évolution de la flexibilité de la poutre.

La figure 5.25 montre l'évolution de la plus grande des valeurs propres d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ au cours du temps. A $t=3$ ms on peut observer la fissure centrale ainsi que les 2 fissures obliques à 30° que l'on retrouve expérimentalement, toutefois arrivé à la fin de l'étude on observe un faciès numérique beaucoup trop endommagé vis-à-vis de l'essai traduisant un trop fort transfert de charge entre éléments rompus, vraisemblablement du à des éléments trop gros. Un calcul avec un maillage plus fin n'a malheureusement pas pu être réalisé (il aurait duré plus d'un mois). Il est important de rappeler ici que l'endommagement étant anisotrope, une grande partie de cette zone noire fortement endommagée (fig. 5.25) ne l'est pas dans toutes les directions (et conserve notamment des raideurs perpendiculairement aux fissures). La figure 5.26 illustre ce qui vient d'être dit en montrant le nombre de valeurs d'endommagement égales à la valeur critique d'endommagement ($D_i = D_c$) à $t=30$ ms, carte à comparer avec celle de la figure 5.25(i).

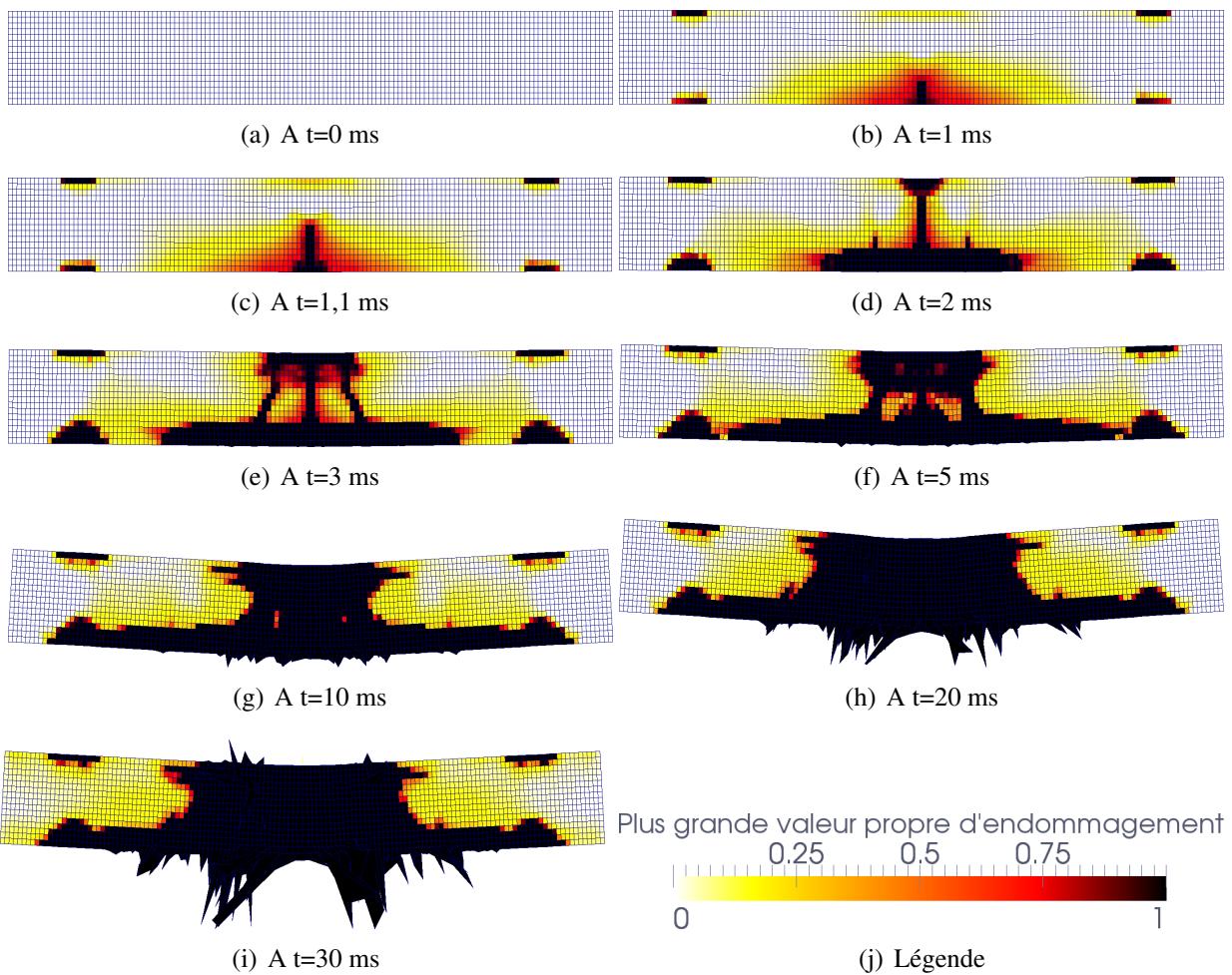


FIG. 5.25 – Evolution au cours du temps du faciès d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ de la poutre P2-130 pour la modélisation TCS-H avec interface

Il aurait été intéressant de comparer cette évolution de l'endommagement avec la propagation des fissures de l'essai expérimental de la poutre P2-130 au cours du temps. Pour cela il aurait fallu définir,

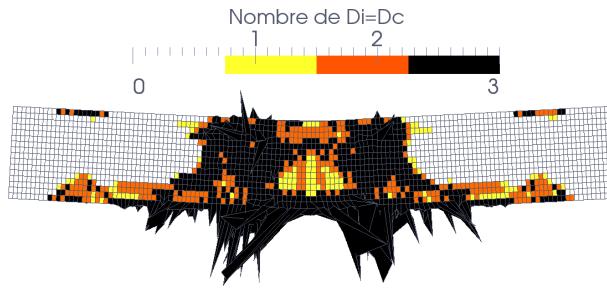


FIG. 5.26 – Carte du nombre de valeurs propres d'endommagement égales à l'endommagement critique D_c (ici $D_c = 1$) de la poutre P2-130 de TCS-H avec interface à $t=30$ ms

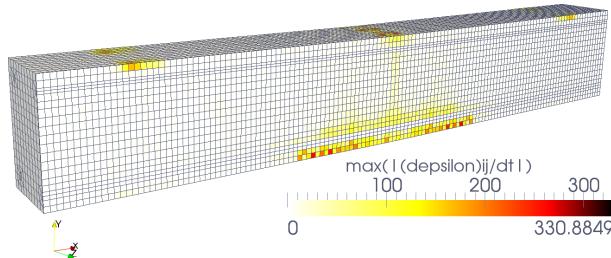


FIG. 5.27 – Cartes de la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ de la poutre P2-130 de la modélisations TCS-H avec interface. Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=2$ ms

via les caméras rapides et un mouchetis, une zone plus grande permettant d'observer la propagation de ces 3 fissures par corrélation d'images (ici en dynamique rapide).

La résolution (nombre pixels par mm) des caméras utilisées vis à vis de la vitesse d'acquisition souhaitée (50000 images par secondes, c.f. chapitre 4) est trop faible pour observer ces phénomènes sur une zone si grande. Toutefois la vitesse de propagation de l'endommagement a été comparée à la vitesse de propagation de la fissure centrale de la poutre P2-130. A partir des simulations numériques (figures 5.25(b) et 5.25(c)), on trouve que la fissure a parcouru 5 cm en 0,1 ms ce qui nous fait une vitesse de propagation calculée de 500 m/s correspondant à l'ordre de grandeur mesuré expérimentalement et évoqué au chapitre 4.

Pour la modélisation TCS-H avec interface, les vitesses de déformation (fig. 5.27) très importantes $200s^{-1} < \dot{\epsilon} < 350s^{-1}$ se situent cette fois-ci sur la face inférieure de la poutre tandis que les vitesses de déformation importantes $50s^{-1} < \dot{\epsilon} < 150s^{-1}$ se situent au niveau des fissures principales.

Le temps de calcul de la modélisation TCS-H avec interface a atteint le temps de calcul maximum de 200h pour un temps d'étude quasiment atteint $t=38$ ms.

3.2 Calcul avec la modélisation TCS

Ce dernier calcul avec la modélisation TCS(=TCS1) et la prise en compte de la liaison acier-béton met en avant son insuffisance pour reproduire fidèlement les essais expérimentaux. Ainsi, ce calcul nous conforte un peu plus dans notre choix d'avoir effectué un calcul avec prise en compte de la liaison acier-béton en retenant la modélisation TCS-H avec la "régularisation" de type Hillerborg. Effectivement, la force d'impact (fig. 5.28(a)) est assez mal représentée (trop forte oscillations) vis à

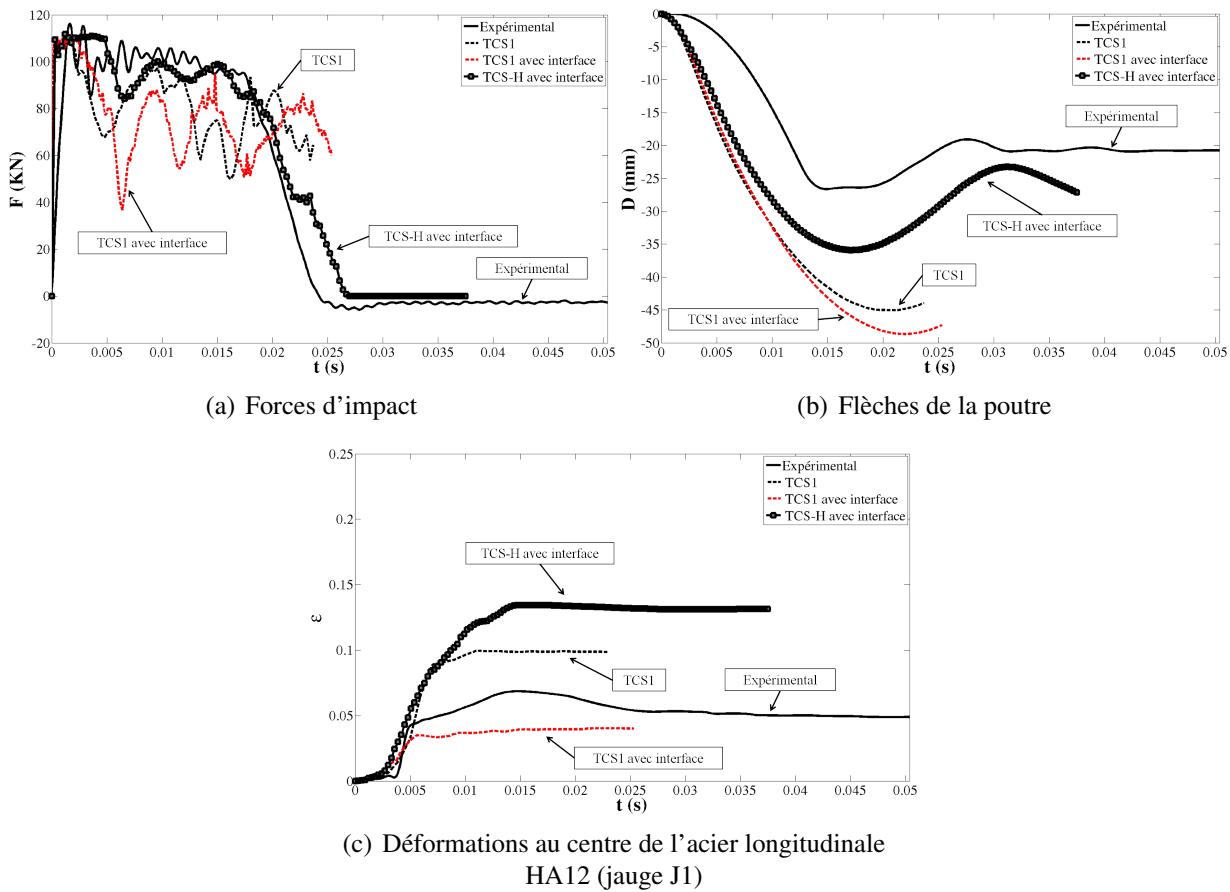


FIG. 5.28 – Réponses au cours du temps de la poutre P2-130 des deux calculs TCS-H et TCS-H avec interface

vis de l'expérimental mais aussi vis vis à du calcul TCS-H avec interface. Ce constat est identique en ce qui concerne l'évolution au cours du temps du déplacement (fig. 5.28(b)) avec une flèche maximale plus importante pour le calcul TCS1 avec interface que pour l'expérimental, les calculs TCS1 et TCS-H avec interface. Parmi ces réponses, l'évolution de la déformation longitudinale de l'acier est néanmoins l'un des résultats qui se rapproche le plus de l'expérimental par rapport à l'ensemble des calculs présentés.

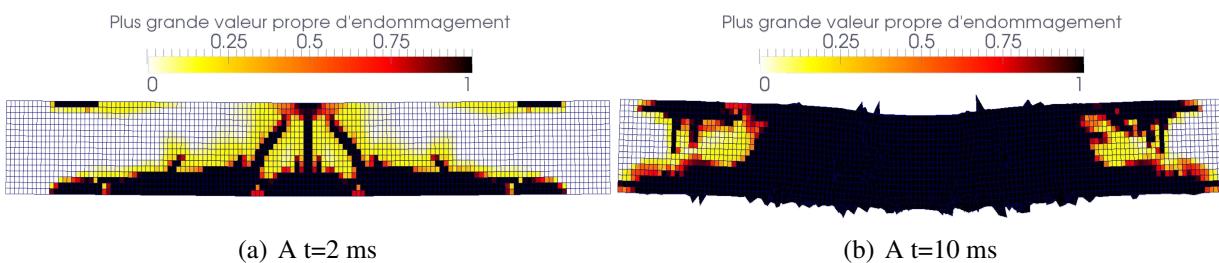


FIG. 5.29 – Evolution au cours du temps du faciès d'endommagement $\max(D_i) = \|D\|_\infty$ de la poutre P2-130 pour la modélisation TCS1 avec interface

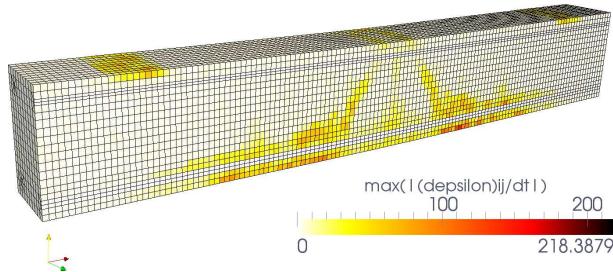


FIG. 5.30 – Cartes de la plus grande des valeurs absolues des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = \max_{i,j} |\dot{\epsilon}_{ij}|$ de la poutre P2-130 de la modélisations TCS1 avec interface. Vue de coupe le long des aciers longitudinaux à $t=2$ ms

Concernant les différentes cartes présentés pour le calcul TCS1 avec interface, celle avec la plus grande valeur propre d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ à deux instants différents ($t=2$ ms et $t=10$ ms) montre un faciès d'endommagement satisfaisant au départ (fig. 5.29(a)) mais qui s'endommage trop vite par la suite (fig. 5.29(b)). Les vitesses de déformation (fig. 5.30) très importantes $150s^{-1} < \dot{\epsilon} < 220s^{-1}$ se situent essentiellement le long de l'interface acier-béton tandis que les vitesses de déformation importantes $50s^{-1} < \dot{\epsilon} < 150s^{-1}$ se situent au niveau des fissures principales.

4 Conclusion

Ce chapitre a permis d'utiliser différentes versions de modélisation du modèle d'endommagement anisotrope proposé pour des simulations numériques 3D de structures de taille plus conséquente se rapprochant ainsi des problématiques industrielles. La comparaison entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux a quant à elle permis de valider les modélisations TCS=TCS1 et TCS-H (avec "régularisation" de type Hillerborg) et de mettre en avant :

- l'importance de bien modéliser le comportement du béton en cisaillement,
- l'importance de la modélisation du comportement mécanique de la liaison acier-béton,
- l'importance d'avoir la bonne énergie de rupture en traction pour avoir dans notre cas une bonne évolution au cours du temps du déplacement et de la force d'impact de la poutre P2-130.

Le choix de modifier la surface de rupture, via les différentes modélisations et notamment la fonction de dépendance à la triaxialité $b(T_x)$, était la solution la plus simple tant pour modifier le comportement en cisaillement que pour appliquer la "régularisation" de type Hillerborg.

Les derniers calculs ont été menés avec une "régularisation" de type Hillerborg pour les paramètres en quasi-statique mais avec visco-endommagement (à taux d'endommagement limité). Toutefois en observant les faciès de multi-fissuration obtenus, nos calculs ne sont vraisemblablement pas régularisés. Etant donné les vitesses de déformation observées dans nos calculs, l'effet de vitesse à taux d'endommagement limité aide mais le maillage n'est vraisemblablement pas assez fin. Une version non locale, comme celle de type Peerlings [Peerlings *et al.*, 1996a,b] (*cf.* partie 6.2.2 du chapitre 1), du modèle semble nécessaire et est écrite ci-dessous, en rendant non locale la contrainte équivalente effective $\tilde{\sigma}_{equiv}$ de notre modèle.

Un bilan final des équations du modèle retenu (modélisations TCS et TCS-H), comportant 10 paramètres ($E, v, \sigma_y^t, \sigma_y^c, \sigma_y^{bc}, \alpha, \beta, b_t, b_v, \dot{D}_\infty$) dont les paramètres d'élasticité E, v et les paramètres de viscosité b_v, \dot{D}_∞ , est réalisé ci-dessous avec notamment la formulation retenue de la fonction $b(T_x) =$

$b^{TCS1}(T_x)$ et la version non locale de type Peerlings, avec l_c une longueur caractéristique.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \left[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \right]^D + \frac{1}{3} \left(\frac{< \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} >_+}{\langle \min [1 - \|\mathbf{D}\|_\infty^2; 1 - D_H] \rangle_+} + < \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} >_- \right) \mathbf{1} \\
 f &= g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl}) - d_\varepsilon \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f < 0 : \text{élasticité} \\ f \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{cases} \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv} &= \| < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_+ \| + (r_1 \| < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_- \| + r_2 \operatorname{tr} < \tilde{\boldsymbol{\sigma}} >_-) r_{T_x} \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl} - l_c^2 \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv} \\
 d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : < \boldsymbol{\varepsilon} >_+^2}{\operatorname{tr} < \boldsymbol{\varepsilon} >_+^2} \\
 g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl}) &= \frac{1}{\beta b(T_x)} \left[\arctan \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl}}{\alpha r_{T_x}} \right) - \arctan \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_y^t}{\alpha} \right) \right] \\
 \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\lambda} < \boldsymbol{\varepsilon} >_+ \\
 \mathcal{H}(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_\varepsilon &= \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b_v(g(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl}) - d_\varepsilon))]
 \end{aligned}$$

La formulation locale du modèle proposé est identique aux équations présentées dans l'encadré précédent avec $l_c = 0$ ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}^{nl} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{equiv}$). Les fonctions de dépendance à la triaxialité $T_x = \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{\sigma_{eq}}$ sont

$$r_{T_x} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_x \geq -1 \\ -2.5T_x - 1.5 & \text{si } -2 < T_x < -1 \\ 3.5 & \text{si } T_x \leq -2 \end{cases} \quad (5.1)$$

et

$$b(T_x) = \begin{cases} b_t & \text{si } T_x \geq 1 \\ \frac{b_t-2}{2} T_x + \frac{b_t+2}{2} & \text{si } -1 < T_x < 1 \\ 2 & \text{si } T_x \leq -1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Les paramètres r_1 et r_2 du critère se déterminent à partir des limites d'élasticité en traction σ_y^t , compression σ_y^c , et bi-compression σ_y^{bc} du béton :

$$r_1 = \frac{\sigma_y^t}{2^{\frac{1}{ac}} - 2} \left(\frac{1}{\sigma_y^{bc}} - \frac{2}{\sigma_y^c} \right) \quad \& \quad r_2 = \frac{\sigma_y^t}{2^{\frac{1}{ac}} - 2} \left(\frac{1}{\sigma_y^{bc}} - \frac{2^{\frac{1}{ac}}}{\sigma_y^c} \right) \quad (5.3)$$

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'objectif initial de cette thèse était de proposer une modélisation numérique, la plus fine possible, du comportement du béton pour le calcul de structures sous impacts.

Un premier travail sur l'étude bibliographique, chapitre 1, a permis de présenter différents modèles prenant en compte différentes propriétés du béton comme la dissymétrie traction/compression, l'anisotropie induite par le chargement, les déformations permanentes, la refermetures des fissures, l'effet de vitesse. A la fin de cette étude, une modélisation a été retenue en éliminant différents modèles. Un premier choix basé sur le faible nombre de paramètres, a permis d'éliminer les modèles multi-critères modélisant notamment la plasticité et les déformations permanentes et de privilégier les modèles d'endommagements (sans plasticité donc). Ensuite la prise en compte de l'anisotropie de l'endommagement qui permet de représenter un état de fissuration orienté par le chargement nous a amenée à éliminer les modèles d'endommagements isotropes et retenir les modèles d'endommagements anisotropes. Parmi eux, deux modèles d'endommagement anisotrope induit, celui de [Godard, 2005; Badel *et al.*, 2007] et celui de [Desmorat, 2004; Desmorat *et al.*, 2007; Chambart, 2009; Desmorat *et al.*, 2010] ont retenu notre attention vis à vis de leur utilisation relativement simple comparée à certains autres modèles comme, les modèles d'endommagement anisotrope induit modélisant l'endommagement avec un tenseur d'ordre 4 [Chaboche, 1981; Ortiz, 1985; Krajcinovic, 1985; Simo et Ju, 1987] qui rendent très difficile l'identification des lois d'évolutions de l'endommagement, ou encore les modèles microplans [Bazant et Ozbolt, 1990; Kuhl et Ramm, 1998; Fichant *et al.*, 1999; Carol *et al.*, 2001] comportant deux difficultés : l'une est l'établissement des lois de comportements sur les microplans et l'autre est le nombre important de microplans à considérer ainsi que de paramètres à identifier.

Le choix a été vers le modèle de [Desmorat *et al.*, 2010], appelé dans cette thèse modèle intial. Deux raisons nous ont poussé à retenir ce modèle, l'une est d'ordre théorique (statut d'une variable thermodynamique), l'autre est d'ordre pratique (coût de calcul de structure) :

- D'un point de vue thermodynamique, ce modèle possède une seule variable d'endommagement \mathbf{D} (tensorielle) représentant l'état microfissuré de la matière, que les fissures soient ouvertes ou fermées, et ce quel que soit le signe du chargement.
- L'implantation numérique du modèle ne nécessite aucune itération à l'intérieur de la loi de comportement.

La nécessité de prendre en compte les chargements confinés² nous a amené, chapitre 2, à proposer un nouveau modèle dont les équations sont rappelées à la fin du chapitre 5. Ce nouveau modèle, à l'aide d'un nouveau critère d'élasticité 3D proposé et de fonctions de dépendance à la triaxialité des

²sans aller toutefois aux forts confinements rencontrés en compaction

contraintes, permet d'obtenir une plus grande dissymétrie traction/compression grâce notamment à l'introduction directe des limites d'élasticité de traction σ_y^t et de compression σ_y^c mais aussi grâce au paramètre b_t de la fonction de la triaxialité des contraintes $b(T_x)$. Tout ceci en conservant les caractéristiques du modèle initial que sont les modélisations de l'effet de vitesse et de la refermeture des fissures sous chargements alternés. Ce nouveau modèle possède 10 paramètres ($E, v, \sigma_y^t, \sigma_y^c, \sigma_y^{bc}, \alpha, \beta, b_t, b_v, \dot{D}_\infty$) incluant les paramètres d'élasticité et ceux d'effet de vitesse (de visco-endommagement), facilement identifiables comme nous le montre la section 9.1 du chapitre 2.

Le modèle d'endommagement anisotrope proposé a été implanté dans le code de calcul EUROPLEXUS et est d'ores et déjà utilisable par les modélisateurs sous le nom de DADC (Dynamic Anisotropic Damage Concrete). Le chapitre 3 permet de présenter son implantation mais aussi celle de la nouvelle gestion de la rupture dont l'intérêt principal, apport de cette thèse, est de permettre de plastifier les armatures dans une structure en béton armé et ce, afin de se rapprocher encore un peu plus de l'expérimental. Dans ce même chapitre, une gestion particulière du pas de temps dans notre loi de comportement est proposée et validée par un cas test élémentaire mais il reste toutefois à la valider sur des calculs de structures.

Pour valider ce modèle dans le cadre de calculs de structures, un nombre important d'essais d'impacts sur des poutres en béton armé et d'essais d'arrachement (chapitre 4) ont été réalisés au CEA (réalisation des impacts sur les poutres à l'aide de la tour de chute Orion) et au DGC (pour la fabrication de l'ensemble de ces éprouvettes structurales et la réalisation des essais d'arrachement). La caractérisation du béton de chaque gâchée et l'instrumentation fine des essais ont permis de fournir une base de données conséquente non entièrement exploitée. Pour l'impact sur poutre, les données comme l'évolution au cours du temps de la force d'impact, du déplacement au centre de la poutre, des déformations des aciers ont permis de confronter nos calculs avec ces références. Les réponses globales obtenues par notre modèle et notamment par les modélisations retenues TCS=TCS1 et TCS-H sont dans l'ensemble satisfaisantes vis à vis de l'expérimental (chapitre 5). Toutefois une légère surestimation de l'évolution au cours du temps du déplacement au centre de la poutre a pu être observée, et elle est vraisemblablement due à notre modélisation pragmatique de la liaison acier-béton trop grossière mais aussi à un manque d'information sur la résistance en cisaillement et sur le fait que les calculs aient été menés sans régularisation non locale (de type [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988], de type [Peerlings *et al.*, 1996a,b] ou de type [Lorentz *et al.*, 2008; Bargellini *et al.*, 2009] par exemple).

Concernant maintenant un aspect plus local comme la confrontation des faciès d'endommagement à celui de fissuration, on constate que l'interprétation des composantes du tenseur d'endommagement sur des calculs de poutres est compliquée, ce problème déjà mis en avant dans la thèse de [Chambart, 2009] reste ouvert et d'actualité. Effectivement, le choix de représentation de l'endommagement des poutres au chapitre 5 est contestable car en observant la carte de la plus grande valeur propre d'endommagement de multiples informations sont perdues comme l'ouverture et la fermeture des fissures, les directions d'endommagement. De plus en prenant la plus grande valeur propre d'endommagement, cela accentue l'aspect très endommagé de la poutre en fin de calcul alors que les deux autres endommagements principaux n'ont pas forcément atteint 1. Le choix de ne pas traiter ce problème de représentation de l'endommagement dans cette thèse a permis notamment de concentrer notre travail sur la prise en compte des chargements confinés seulement et d'enrichir le modèle initial. Cet apport a permis de conserver un nombre de paramètres "matériaux" du modèle final acceptable, ce qui n'aurait vraisemblablement pas été le cas si un couplage du modèle initial avec la plasticité avait été retenu au début de cette thèse. Un constat général sur les calculs de poutres est la dissipation d'énergie encore trop faible, visible en observant la flèche maximale de la poutre calculée 30% trop importante par

rapport à l'expérimental.

Perspectives

Lors de cette thèse, le travail théorique, numérique et expérimental a permis de définir un modèle multiaxial d'endommagement anisotrope pour le béton en faisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui ont amené à négliger un certain nombre de phénomènes physiques.

Il peut donc être envisagé d'enrichir ce modèle via des développements supplémentaires destinés à prendre en compte ces phénomènes physiques et à améliorer l'interprétation des résultats numériques :

- **Modélisation du comportement de la liaison acier-béton dans le code de calcul EURO-PLEXUS** : Après avoir proposé une modélisation pragmatique de la liaison acier-béton, il se-rait souhaitable de développer un modèle de comportement de la liaison acier-béton basé sur des essais d'arrachement (pull-out) de notre béton ou d'implanter un modèle existant comme celui proposé par [Casanova, 2012]. Lors de sa thèse, A. Casanova a développé un modèle de loi d'adhérence (évolution de la contrainte d'adhérence en fonction du glissement) en se basant sur les observations faites lors de sa campagne expérimentale de pull-out et sur celles de la littérature. Ce modèle permet notamment de différencier la rupture de la liaison acier-béton par arrachement et la rupture par éclatement en prenant en compte les caractéristiques matériau et géométriques de la structure. Ce genre de modélisation permettrait très certainement de compenser le manque d'énergie dissipée constaté sur nos calculs et qui est actuellement une des explications de la surestimation de l'évolution au cours du temps du déplacement au centre de la poutre.
- **Prise en compte des déformations permanentes** : Le second processus dissipatif important est la prise en compte des déformations permanentes, notamment en compression (cf. partie 1.3 du chapitre 1). Afin de prendre en compte ces déformations permanentes, deux méthodes sont proposées dans la littérature. La première est basée sur un couplage entre un modèle d'endommagement et un modèle de plasticité [Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002; Jason *et al.*, 2006; Grassl et Jirásek, 2006; Cicekli *et al.*, 2007]. La deuxième intègre dans sa formulation un terme de déformation irréversible lié aux variables d'endommagement, sans pour autant introduire de variables supplémentaires [Hermann et Kestin, 1988; La Borderie, 1991; Halm et Dragon, 1996; Matallah et La Borderie, 2006; Lebon, 2011] et elle évite ainsi le couplage entre l'endommagement et la plasticité.
- **Caractérisation du comportement de notre béton en fonction de la vitesse de sollicitation pour des chargements de traction et de cisaillement** : Nous avons constaté dans la littérature que la dispersion des résultats de caractérisation du comportement du béton en traction fonction de la vitesse de sollicitation était grande [Brara *et al.*, 1997, 2001; Klepaczko et Brara, 2001; Brara et Klepaczko, 2006] et que l'importance de l'effet de vitesse était remise en cause dans certains essais [Erzar et Forquin, 2010]. Ceci est probablement dû aux différents protocoles expérimentaux utilisés mais aussi aux différentes formulations du béton employées. Il serait donc intéressant de caractériser notre béton à différentes vitesses de sollicitations pour des chargements de traction mais aussi de cisaillement afin de savoir si ce dernier type de chargement est sensible aux vitesses de sollicitation. Si tel était le cas, la fonction Heaviside $\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})$ (éq. 5.4) qui permet d'activer l'effet de vitesse pour des chargements hydrostatiques strictement positifs telle que $\mathcal{H} = 1$ si $\text{tr}\boldsymbol{\epsilon} > 0$, $\mathcal{H} = 0$ sinon, ne serait plus adaptée. Une solution serait d'exprimer

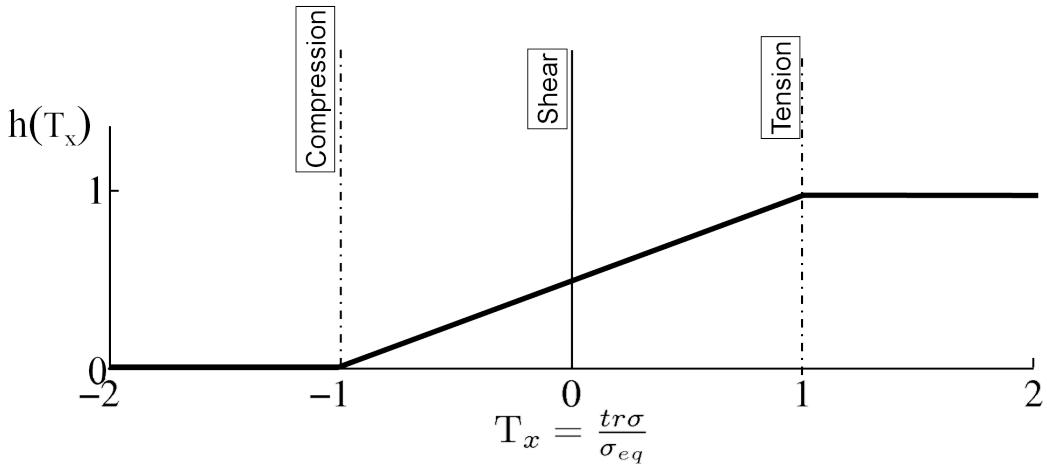


FIG. 5.31 – Proposition d'une fonction $h(T_x)$ qui permettrait d'activer l'effet de vitesse à l'aide de la triaxialité des contraintes

une fonction de la triaxialité des contraintes $T_x = \frac{\text{tr}\sigma}{\sigma_{eq}}$, appelée $h(T_x)$ (éq. 5.4), de telle façon que $h(T_x) = 1$ si $T_x \geq 1$ (comme en traction), $h(T_x) = 0$ ou du moins très faible pour $T_x \leq -1$ (comme en compression) et pour $-1 < T_x < 1$, la fonction $h(T_x)$ pourrait évoluer linéairement (fig. 5.31), ou être identifiée à l'aide de résultats expérimentaux. Avec $f = g(\tilde{\sigma}_{\text{equiv}}^{nl}) - d_\epsilon$,

$$\mathcal{H}(\text{tr}\epsilon)\dot{d}_\epsilon = \dot{D}_\infty[1 - \exp(-b_v f)] \quad \text{devient} \quad h(T_x)\dot{d}_\epsilon = \dot{D}_\infty[1 - \exp(-b_v f)] \quad (5.4)$$

– **Méthode de régularisation valable en quasi-statique comme en dynamique** : Nous avons constaté que la régularisation de nos calculs n'était pas vérifiée et ceci à cause vraisemblablement d'un maillage pas assez fin pour pouvoir régulariser complètement nos calculs via la loi de viscosité à taux d'endommagement limité. Une solution proposée pourrait être d'utiliser une régularisation non locale de type Peerlings bien adaptée en quasi-statique en complément de notre loi de viscosité à taux d'endommagement (*cf.* fin du chapitre 5). Cependant sans couplage entre la loi de viscosité et la régularisation non locale [Desmorat *et al.*, 2010] montrent que l'association de ces méthodes pour des vitesses de déformation intermédiaires (ce qui est notre cas) ne permet pas d'obtenir une régularisation satisfaisante. Il propose d'ailleurs de coupler ces deux méthodes en rendant la longueur caractéristique l_c dépendante de la vitesse de déformation :

$$l_c = l_c(\dot{\epsilon}) = l_c^0 \exp \left[- \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}^*} \right)^n \right] \quad (5.5)$$

avec l_c^0 la longueur caractéristique habituelle, $\dot{\epsilon}^*$ et n des paramètres matériau. Pour des faibles vitesses de déformation, $l_c(\dot{\epsilon}) \approx l_c^0 = \text{constante}$, le modèle fonctionne comme la version non locale du modèle proposée. Alors que pour des vitesses de déformation importantes, $l_c \rightarrow 0$, le modèle fonctionne comme la version locale, c'est à dire en utilisant seulement la loi de viscosité à taux d'endommagement limité qui permet de régulariser le calcul et de prendre en compte l'effet de vitesse. Ainsi dans les deux cas de figure, nous pourrions avoir des calculs régularisés et une prise en compte de l'effet de vitesse en dynamique par la loi de viscosité.

- **Interprétation des cartes d'endommagement** : Le choix de représenter l'endommagement uniquement en traçant la plus grande valeur propre d'endommagement $\max(D_i) = \|\mathbf{D}\|_\infty$ a montré ses faiblesses dans le chapitre 5, notamment car il ne permet pas de conserver la direction d'endommagement lorsque que le chargement change (si l'élément passe d'un chargement de traction à un chargement de compression par exemple). Il ne permet pas non plus de représenter l'historique de ce chargement alterné (refermeture des fissures non représentée) et l'aspect très endommagé de la poutre est accentué en traçant la plus grande des trois valeurs propres d'endommagement. Il est donc nécessaire de trouver une représentation liant la facilité d'interprétation de ces cartes avec la qualité des informations qu'elles doivent restituées.

Annexe A

1 Introduction au cisaillement pur

Le cisaillement pur est défini dans le repère initial par la figure 5.32(a) et le tenseur des contraintes de l'équation 5.6. Pour commencer, nous allons définir la matrice de passage P qui, avec une rotation

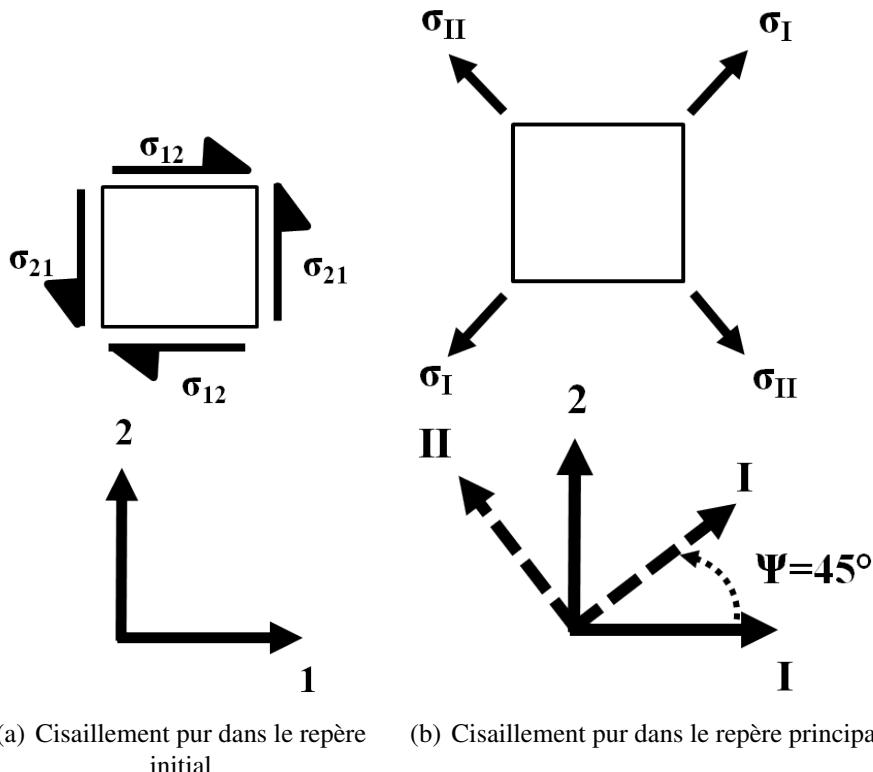


FIG. 5.32 – Cisaillement pur dans deux repères différents

d'angle $\psi = 45^\circ$ autour de l'axe 3, va nous permettre de passer du repère initial ($O, 1, 2, 3$) au repère principal (RP) (O, I, II, III) et inversement. La matrice de passage P s'écrit de la manière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{P} étant une matrice orthogonale, la matrice de passage inverse est équivalente à la matrice de passage transposée ($\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$), et donc pour passer du repère initial au repère principal (RP), nous utiliserons la relation suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{B}_{RP} \mathbf{P}^t$$

Et pour passer du repère principal (RP) au repère initial, nous utiliserons la relation suivante :

$$\mathbf{B}_{RP} = \mathbf{P}^t \mathbf{B} \mathbf{P}$$

Le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations pour une sollicitation de cisaillement pur en contrainte plane suivant la direction (1,2) ont la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Dans ce cas de cisaillement et avec notre modèle d'endommagement anisotrope ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} sont fonctions des composantes du tenseur d'endommagement, sans notre modèle d'endommagement $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$.

Pour calculer la déformation équivalente $\hat{\epsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+}$, on ramène le tenseur des déformations dans sa base principale pour en prendre sa partie positive :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{diag} = \begin{pmatrix} \epsilon_I > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} < 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} < 0 \end{pmatrix}_{RP} \rightarrow \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{RP}$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_I \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{RP}$$

Ainsi dans la base principale (RP) le tenseur d'endommagement \mathbf{D} a la forme suivante :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{RP} \quad \text{ramené dans la base initiale : } \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_I & D_I & 0 \\ D_I & D_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Développement des calculs analytiques

Maintenant que nous connaissons la forme du tenseur d'endommagement \mathbf{D} dans le cas d'une sollicitation de cisaillement pur, cherchons l'expression des différentes composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ à l'aide de l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G} [(1 - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} (1 - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{1}{9K} \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{1 - \eta D_H} \mathbf{1}$$

avec $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$

Pour des raisons pratiques nous développerons cette expression en restant dans la base principale et par conséquent nous travaillerons avec des matrices diagonales.

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{car } \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2G} [(\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2}]^D \quad \text{car } \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_I}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{RP} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{RP}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-D_I} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{RP}^D$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sigma_{12}}{6G} \begin{pmatrix} \frac{3-D_I}{1-D_I} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{3-2D_I}{1-D_I}\right) < 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-D_I}{1-D_I} < 0 \end{pmatrix}_{RP}$$

Avec les conditions de cohérence $f = 0$ et $\dot{f} = 0$, nous avons l'expression suivante :

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa(\operatorname{tr} \boldsymbol{D})$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_I = \frac{1}{6G} \frac{3 - D_I}{(1 - D_I)} \sigma_{12}$$

$$\kappa(\operatorname{tr} \boldsymbol{D}) = a \cdot \tan \left[\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{D}}{a \cdot A} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right]$$

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = D_I$$

$$\varepsilon_I = \kappa(D_I) = a \cdot \tan \left[\frac{D_I}{a \cdot A} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \quad (5.7)$$

$$\sigma_{12} = \frac{6G(1 - D_I)}{3 - D_I} \varepsilon_I$$

Le tenseur des déformations ci-dessus est exprimé maintenant dans la base initiale ($\tau_{12} = f(2\varepsilon_{12}) = f(\gamma_{12})$).

A l'aide de la relation suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{P} \boldsymbol{\epsilon}_{RP} \mathbf{P}^t$$

Nous obtenons le tenseur des déformations exprimé dans la base initiale :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{12G} \frac{\sigma_{12}}{1 - D_I} \begin{pmatrix} D_I & 3(2 - D_I) & 0 \\ 3(2 - D_I) & D_I & 0 \\ 0 & 0 & -2D_I \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} &= \frac{1}{4G} \frac{(2 - D_I)}{1 - D_I} \sigma_{12} \quad \text{ou} \quad \sigma_{12} = \frac{4G(1 - D_I)}{2 - D_I} \epsilon_{12} & (5.8) \\ \epsilon_{11} &= \frac{D_I}{12G} \frac{\sigma_{12}}{1 - D_I} = \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{D_I}{6G} \frac{\sigma_{12}}{1 - D_I} \end{aligned}$$

A partir de l'équation 5.7 et 5.8 nous pouvons écrire l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{6G(1 - D_I)}{3 - D_I} \epsilon_I &= \frac{4G(1 - D_I)}{2 - D_I} \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} &= \frac{3(2 - D_I)}{2(3 - D_I)} \epsilon_I \\ \epsilon_{12} &= \frac{3(2 - D_I)}{2(3 - D_I)} a \cdot \tan \left[\frac{D_I}{a \cdot A} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \gamma_{12} &= \frac{3(2 - D_I)}{(3 - D_I)} a \cdot \tan \left[\frac{D_I}{a \cdot A} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

Annexe B

1 Opérateurs tangents 3D

A noter dans les calculs suivants, que les termes en gras sont des tenseurs d'ordre 2 ($\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{d}$) et les termes soulignés en gras sont des tenseurs d'ordre 4 ($\widetilde{\mathbb{E}}, \mathbb{L}, \mathbb{A}$), les autres termes sont des scalaires. A partir de la loi d'élasticité :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{1}{9K} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{1 - \eta D_H} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \right) \mathbf{1}$$

La différence traction/compression sera simplement faite en posant $\eta = 0$ lorsque $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} < 0$ (récupération partielle de la raideur liée à la refermeture des fissures).

La loi d'élasticité peut aussi être réécrite de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\widetilde{\mathbb{E}}$ l'opérateur sécant (tenseur d'ordre 4) est,

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) = 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \right] + K(1 - \eta D_H) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

avec le produit tensoriel $\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1}$ défini comme :

$$(\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1})_{ijkl} = \frac{1}{2} (H_{ik}^{-1} H_{jl}^{-1} + H_{il}^{-1} H_{jk}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{H}^{-1})$$

En dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\widetilde{\mathbb{E}}}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{avec } \mathbb{L} \text{ l'opérateur tangent (tenseur d'ordre 4)}$$

Calcul de l'opérateur tangent à l'aide de l'opérateur sécant déterminé précédemment :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{H}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} + \frac{1 - \mathbf{D}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon} : \dot{\mathbf{D}} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\epsilon}}{(3 - \text{tr} \mathbf{D})^2} (1 - \mathbf{D}) \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right] \\ &\quad + K \left(-\frac{\eta}{3} \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) < \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} > \mathbf{1} \end{aligned}$$

Tout d'abord le terme $\dot{\overbrace{\mathbf{H}^{-1}}}$ se calcule en différenciant $\mathbf{H}^{-2} = \mathbf{1} - \mathbf{D}$ Lemaitre et Desmorat [2005], soit

$$\dot{\overbrace{\mathbf{H}^{-1}}} = -\mathbb{A} : \dot{\mathbf{D}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} = [1 \overline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{1}]^{-1}$$

Ensuite déterminons le terme $\text{tr} \dot{\mathbf{D}}$ par la condition de cohérence $f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr} \mathbf{D} = 0$ & $\dot{f} = 0$:

$$\Rightarrow \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\text{car} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

Ensuite déterminons les termes $\dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}}$ à partir de la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 \quad \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 = \dot{\lambda} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr} \dot{\mathbf{D}}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} = g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3} (\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^3) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Remplaçons les termes $\dot{\overbrace{\mathbf{H}^{-1}}}, \text{tr} \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}}$ dans l'équation 1 :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2G \left[-\mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{A} : \dot{\mathbf{D}} - \mathbb{A} : \dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{H}^{-1} \right]$$

$$+ \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} + \frac{1 - \mathbf{D}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}}{(3 - \text{tr} \mathbf{D})^2} (1 - \mathbf{D}) \text{tr} \dot{\mathbf{D}}$$

$$- \frac{\eta K}{3} \text{tr} \dot{\mathbf{D}} < \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{1}$$

Simplifions les termes $\text{tr} \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}}$ avec :

$$\mathbf{d} = \frac{g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$$

$$\text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \dot{\mathbf{D}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^3}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

L'équation 2 peut maintenant s'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2G \left[-(\mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbb{A}) : \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\mathbb{A}) : \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right.$$

$$+ \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1 - \mathbf{D}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}} \frac{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^3}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\left. - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}}{(3 - \text{tr} \mathbf{D})^2} (1 - \mathbf{D}) \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] - \frac{\eta K}{3} < \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{1} \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Nous pouvons maintenant mettre \mathbf{d} et $\dot{\mathbf{e}}$ en facteur :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\mathbf{e}} + 2G \left[-[(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e})(\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2}) + (\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2})(\mathbf{e}\mathbf{H}^{-1})] \otimes \mathbf{d} \right. \\ \left. + \left[\frac{(\mathbf{1}-\mathbf{D}) : \mathbf{e}}{3 - \text{tr}\mathbf{D}} \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2} + \frac{\mathbf{1}-\mathbf{D}}{3 - \text{tr}\mathbf{D}} \frac{\text{tr} <\mathbf{e}>_+^3}{\widehat{\varepsilon}^2} - \frac{\mathbf{1}-\mathbf{D}}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})^2} (\mathbf{1}-\mathbf{D}) \right] \otimes \mathbf{d} \right] : \dot{\mathbf{e}} \\ - \frac{\eta K}{3} <\text{tr}\mathbf{e}> \mathbf{1} \mathbf{d} : \dot{\mathbf{e}}\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbf{d} = \frac{g'(\widehat{\varepsilon})}{\widehat{\varepsilon}} <\mathbf{e}>_+$ par son expression, nous pouvons réécrire l'équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{D}) : \dot{\mathbf{e}} + \frac{2Gg'(\widehat{\varepsilon})}{\widehat{\varepsilon}} \left[-[(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e})(\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2}) + (\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2})(\mathbf{e}\mathbf{H}^{-1})] \otimes <\mathbf{e}>_+ \right. \\ \left. + \frac{1}{3 - \text{tr}\mathbf{D}} \left[\frac{(\mathbf{1}-\mathbf{D}) : \mathbf{e}}{\widehat{\varepsilon}^2} <\mathbf{e}>_+^2 + \frac{\text{tr} <\mathbf{e}>_+^3}{\widehat{\varepsilon}^2} (\mathbf{1}-\mathbf{D}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mathbf{1}-\mathbf{D} : \mathbf{e}}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})} (\mathbf{1}-\mathbf{D}) \right] \otimes <\mathbf{e}>_+ \right] : \dot{\mathbf{e}} - \frac{\eta K}{3} \frac{g'(\widehat{\varepsilon})}{\widehat{\varepsilon}} \mathbf{1} \otimes <\mathbf{e}>_+ : \dot{\mathbf{e}}\end{aligned}$$

Récapitulatif :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} <\mathbf{e}>_+^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{E}^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} \\ f = g(\widehat{\varepsilon}) - \text{tr}\mathbf{D} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L} : \dot{\mathbf{e}} \\ \mathbb{L} = 2G[\mathbf{H}^{-1} \otimes \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1}-\mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1}-\mathbf{D})}{3 - \text{tr}\mathbf{D}}] + K(1 - \eta D_H) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ + \frac{2Gg'(\widehat{\varepsilon})}{\widehat{\varepsilon}} \left\{ -[(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e})(\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2}) + (\mathbb{A} : \frac{<\mathbf{e}>_+^2}{\widehat{\varepsilon}^2})(\mathbf{e}\mathbf{H}^{-1})] \otimes <\mathbf{e}>_+ \right. \\ \left. + \left[\frac{(\mathbf{1}-\mathbf{D}) : \mathbf{e}}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})\widehat{\varepsilon}^2} <\mathbf{e}>_+^2 + \frac{\text{tr} <\mathbf{e}>_+^3}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})\widehat{\varepsilon}^2} (\mathbf{1}-\mathbf{D}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\mathbf{1}-\mathbf{D}) : \mathbf{e}}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})^2} (\mathbf{1}-\mathbf{D}) \right] \otimes <\mathbf{e}>_+ \right\} - \frac{\eta K}{3} \frac{g'(\widehat{\varepsilon})}{\widehat{\varepsilon}} \mathbf{1} \otimes <\mathbf{e}>_+\end{aligned}$$

2 Etude d'une bifurcation/instabilité en 1D compression simple

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_I < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_I < 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} > 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A l'aide du modèle anisotrope suivant :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{1}{9K} \left(\frac{<\text{tr} \boldsymbol{\sigma}>_+}{1 - \eta D_H} - <-\text{tr} \boldsymbol{\sigma}>_+ \right) \mathbf{1}$$

avec $G = \frac{E}{2(1+v)}$, $K = \frac{E}{3(1-2v)}$

Exprimons les composantes du tenseur des déformations sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = S_i \boldsymbol{\sigma}_I \quad \text{avec} \quad S_i = F(D_{II}, D_{III})$$

Etant donné que $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_I < 0$, l'expression ci-dessus peut se simplifier :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \frac{\sigma_I}{9K} \mathbf{1}$$

2.1 Avec $D_{II} \neq D_{III}$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{II}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{III}}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} < 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3} > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3} > 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{II}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{III}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{II}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_{III}}} \end{pmatrix} \right]^D + \frac{\sigma_I}{9K} \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G} \left[\begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{II})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{III})} \end{pmatrix} \right]^D + \frac{\sigma_I}{9K} \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{II})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{III})} \end{pmatrix} \right]^D &= \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{II})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{III})} \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \text{tr} \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{II})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_I}{3(1-D_{III})} \end{pmatrix} \mathbf{1} \\ &= \frac{\sigma_I}{9} \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{2}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{1-D_{II}} - \frac{2}{1-D_{III}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_I}{18G} \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{2}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{1-D_{II}} - \frac{2}{1-D_{III}} \end{pmatrix} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_I}{9K} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_I = \left[\frac{1+v}{9E} \left(4 + \frac{1}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \sigma_I$$

$$\varepsilon_{II} = \left[\frac{1+v}{9E} \left(-2 - \frac{2}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \sigma_I$$

$$\varepsilon_{III} = \left[\frac{1+v}{9E} \left(-2 + \frac{1}{1-D_{II}} - \frac{2}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \sigma_I$$

Avec :

$$S_1 = \frac{1+v}{9E} \left(4 + \frac{1}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E}$$

$$S_2 = \frac{1+v}{9E} \left(-2 - \frac{2}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E}$$

$$S_3 = \frac{1+v}{9E} \left(-2 + \frac{1}{1-D_{II}} - \frac{2}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E}$$

$$\dot{\varepsilon}_i = S_i \dot{\sigma}_I \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_i = S_i \dot{\sigma}_I + \frac{dS_i}{dt} \sigma_I$$

$$\dot{\varepsilon}_i = S_i \dot{\sigma}_I + \left(\frac{\partial S_i}{\partial D_{II}} \frac{\partial D_{II}}{\partial t} + \frac{\partial S_i}{\partial D_{III}} \frac{\partial D_{III}}{\partial t} \right) \sigma_I$$

$$\dot{\varepsilon}_i = S_i \dot{\sigma}_I + \left(\frac{\partial S_i}{\partial D_{II}} \dot{D}_{II} + \frac{\partial S_i}{\partial D_{III}} \dot{D}_{III} \right) \sigma_I$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial D_{II}} = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) \quad \frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} = \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) \quad \frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial D_{III}} = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \quad \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \quad \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} = -\frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_I = \left[\frac{1+v}{9E} \left(4 + \frac{1}{1-D_{II}} + \frac{1}{1-D_{III}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \dot{\sigma}_I + \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \dot{D}_{II} + \frac{1}{(1-D_{III})^2} \dot{D}_{III} \right) \sigma_I$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{II}} = \left[\frac{1+v}{9E} \left(-2 - \frac{2}{1-D_{\text{II}}} + \frac{1}{1-D_{\text{III}}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \dot{\sigma}_{\text{I}} + \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D_{\text{II}})^2} \dot{D}_{\text{II}} + \frac{1}{(1-D_{\text{III}})^2} \dot{D}_{\text{III}} \right) \sigma_{\text{I}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{III}} = \left[\frac{1+v}{9E} \left(-2 + \frac{1}{1-D_{\text{II}}} - \frac{2}{1-D_{\text{III}}} \right) + \frac{1-2v}{3E} \right] \dot{\sigma}_{\text{I}} + \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{\text{II}})^2} \dot{D}_{\text{II}} - \frac{2}{(1-D_{\text{III}})^2} \dot{D}_{\text{III}} \right) \sigma_{\text{I}}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_{+}^2$$

$$\dot{D}_{\text{I}} = 0 \quad \dot{D}_{\text{II}} = \dot{\lambda} \varepsilon_{\text{II}}^2 \quad \dot{D}_{\text{III}} = \dot{\lambda} \varepsilon_{\text{III}}^2$$

Avec :

$$\dot{\lambda} = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_{+} : \dot{\mathbf{\varepsilon}} = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} (\varepsilon_{\text{II}} \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \varepsilon_{\text{III}} \dot{\varepsilon}_{\text{III}})$$

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_{+} : \langle \mathbf{\varepsilon} \rangle_{+}}$$

$$g'(\hat{\varepsilon}) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{a}\right)^2}$$

Donc :

$$\dot{D}_{\text{I}} = 0 \quad \dot{D}_{\text{II}} = \alpha \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \beta \dot{\varepsilon}_{\text{III}} \quad \dot{D}_{\text{III}} = \gamma \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \theta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}$$

Avec

$$\alpha = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_{\text{II}}^3 \quad \beta = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_{\text{II}}^2 \varepsilon_{\text{III}} \quad \gamma = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_{\text{II}} \varepsilon_{\text{III}}^2 \quad \theta = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_{\text{III}}^3$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\text{I}} &= S_1 \dot{\sigma}_{\text{I}} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{II}}} (\alpha \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \beta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) + \frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{III}}} (\gamma \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \theta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) \right) \sigma_{\text{I}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{II}} &= S_2 \dot{\sigma}_{\text{I}} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{II}}} (\alpha \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \beta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) + \frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{III}}} (\gamma \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \theta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) \right) \sigma_{\text{I}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{III}} &= S_3 \dot{\sigma}_{\text{I}} + \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{II}}} (\alpha \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \beta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) + \frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{III}}} (\gamma \dot{\varepsilon}_{\text{II}} + \theta \dot{\varepsilon}_{\text{III}}) \right) \sigma_{\text{I}} \end{aligned}$$

Ecrivons ce système d'équations sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{II}}} \alpha + \frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{III}}} \gamma\right) \sigma_{\text{I}} & -\left(\frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{II}}} \beta + \frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{III}}} \theta\right) \sigma_{\text{I}} \\ 0 & 1 - \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{II}}} \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{III}}} \gamma\right) \sigma_{\text{I}} & -\left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{II}}} \beta + \frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{III}}} \theta\right) \sigma_{\text{I}} \\ 0 & -\left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{II}}} \alpha + \frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{III}}} \gamma\right) \sigma_{\text{I}} & 1 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{II}}} \beta + \frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{III}}} \theta\right) \sigma_{\text{I}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{I}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{II}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{III}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \dot{\sigma}_{\text{I}} \\ S_2 \dot{\sigma}_{\text{I}} \\ S_3 \dot{\sigma}_{\text{I}} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le déterminant de la matrice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= \left(1 - \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \gamma \right) \sigma_I \right) \left(1 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \theta \right) \sigma_I \right) \\
 &\quad - \left(- \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \theta \right) \sigma_I \right) \left(- \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \gamma \right) \sigma_I \right) \\
 &= 1 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \theta \right) \sigma_I - \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \gamma \right) \sigma_I \\
 &\quad + \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \gamma \right) \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \theta \right) \sigma_I^2 \\
 &\quad - \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \theta \right) \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \gamma \right) \sigma_I^2 \\
 \det \mathbf{A} &= 1 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \beta + \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \theta \right) \sigma_I - \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \gamma \right) \sigma_I \\
 &\quad + \alpha \theta \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} - \frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} \frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \right) \sigma_I^2 + \gamma \beta \left(\frac{\partial S_2}{\partial D_{III}} \frac{\partial S_3}{\partial D_{II}} - \frac{\partial S_3}{\partial D_{III}} \frac{\partial S_2}{\partial D_{II}} \right) \sigma_I^2
 \end{aligned}$$

Remplaçons $\alpha, \beta, \gamma, \theta$, ainsi que les termes dérivés, par leurs expressions. Le déterminant peut finalement s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= 1 - \frac{g'(\hat{\epsilon})}{\hat{\epsilon}^3} \left(\frac{1+v}{9E} \right) \sigma_I \left[\epsilon_{II}^2 \epsilon_{III} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) + \epsilon_{III}^3 \left(-\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right) \right. \\
 &\quad + \epsilon_{II}^3 \left(-\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) + \epsilon_{II} \epsilon_{III}^2 \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \\
 &\quad + \epsilon_{II}^3 \epsilon_{III}^3 \left[\left(-\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) \left(-\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right) - \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \right] \\
 &\quad \left. + \epsilon_{II}^3 \epsilon_{III}^3 \left[\left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) - \left(-\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right) \left(-\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Après avoir remplacé certains termes par leurs expressions, on s'aperçoit que l'expression du déterminant peut encore se simplifier :

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= 1 - \frac{g'(\hat{\epsilon})}{\hat{\epsilon}^3} \left(\frac{1+v}{9E} \right) \sigma_I \left[\epsilon_{II}^2 \epsilon_{III} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) + \epsilon_{III}^3 \left(-\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \epsilon_{II}^3 \left(-\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) + \epsilon_{II} \epsilon_{III}^2 \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= 1 - \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{\sqrt{\epsilon_{II}^2 + \epsilon_{III}^2}}{a} \right)^2 \right]^2 \left(\sqrt{\epsilon_{II}^2 + \epsilon_{III}^2} \right)^3} \left(\frac{1+v}{9E} \right) \sigma_I \left[\epsilon_{II}^2 \epsilon_{III} \left(\frac{1}{(1-D_{II})^2} \right) - \epsilon_{III}^3 \left(\frac{2}{(1-D_{III})^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon_{II}^3 \left(\frac{2}{(1-D_{II})^2} \right) + \epsilon_{II} \epsilon_{III}^2 \left(\frac{1}{(1-D_{III})^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

2.2 Avec $D_{\text{II}} = D_{\text{III}}$

Suite à cette simplification, on pose $D = D_{\text{II}} = D_{\text{III}}$, $\varepsilon_t = \varepsilon_{\text{II}} = \varepsilon_{\text{III}}$, ce qui nous donne les simplifications suivantes :

$$\alpha = \beta = \gamma = \theta = \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_t^3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_{\text{II}} = \varepsilon_{\text{III}}$$

Nous posons aussi s'_1 et s'_2 sous la forme suivante :

$$s'_1 = \frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{II}}} = \frac{\partial S_1}{\partial D_{\text{III}}} = \frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{III}}} = \frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{II}}} = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{\text{III}})^2} \right) = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D_{\text{II}})^2} \right) = \frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D)^2} \right)$$

$$s'_2 = \frac{\partial S_2}{\partial D_{\text{II}}} = \frac{\partial S_3}{\partial D_{\text{III}}} = \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D_{\text{II}})^2} \right) = \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D_{\text{III}})^2} \right) = \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D)^2} \right)$$

Ce qui nous donne le nouveau système d'équations simplifiés sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2s'_1\alpha\sigma_I & -2s'_1\alpha\sigma_I \\ 0 & 1 - (s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I & -(s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I \\ 0 & -(s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I & 1 - (s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_I \\ \dot{\varepsilon}_{\text{II}} \\ \dot{\varepsilon}_{\text{III}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1\dot{\sigma}_I \\ S_2\dot{\sigma}_I \\ S_3\dot{\sigma}_I \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le déterminant de la matrice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (1 - (s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I)^2 - ((s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I)^2 \\ \det \mathbf{A} &= 1 - 2(s'_1 + s'_2)\alpha\sigma_I \\ \det \mathbf{A} &= 1 - 2 \left(\frac{1+v}{9E} \left(\frac{1}{(1-D)^2} \right) + \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D)^2} \right) \right) \frac{g'(\hat{\varepsilon})}{\hat{\varepsilon}^3} \varepsilon_t^3 \sigma_I \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = 1 - \frac{1+v}{9E} \left(-\frac{2}{(1-D)^2} \right) \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon_t}{a} \right)^2 \right] \left(\sqrt{2} \right)^3} \sigma_I$$

Avec $\hat{\varepsilon} = \sqrt{2}\varepsilon_t$, \mathbf{A} le tenseur d'ordre 2 du système matricielle et "a, A" les paramètres du modèle.

Annexe C

1 Cadre des chargements proportionnels

Le principe pour tracer une surface de rupture est de piloter les valeurs d'endommagements dans l'espace des contraintes. En chargement proportionnel (θ , fig. 5.33), on peut poser les relations $\sigma_I = \rho \cos(\theta) = \rho c$, $\sigma_{II} = \rho \sin(\theta) = \rho s$, avec ρ la distance reliant le point M au centre O et où l'on pose $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$.

Le tenseur des contraintes est donc de la forme suivante en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la loi d'élasticité et le tenseur des contraintes défini précédemment, l'expression du tenseur des déformations (sans endommagement) est exprimée :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} = \frac{\rho}{E} \begin{pmatrix} c - \nu s & 0 & 0 \\ 0 & s - \nu c & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(c+s) \end{pmatrix}$$

Ce tenseur des déformations, via les signes de ses 3 composantes de déformations principales pour un chargement θ donné, va permettre de faire évoluer l'endommagement via la loi d'évolution de l'endommagement $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+$. L'expression du tenseur d'endommagement peut se mettre sous la forme suivante (la matrice étant constante) :

$$\mathbf{D} = d \begin{pmatrix} \langle c - \nu s \rangle_+ & 0 & 0 \\ 0 & \langle s - \nu c \rangle_+ & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\nu(c+s) \rangle_+ \end{pmatrix}$$

avec d une variable qui évoluera entre 0 (pas d'endommagement) à une valeur importante, ici prise égale à 10 dans la programmation Matlab, afin d'être sûr de faire évoluer les 3 valeurs propres d'endommagement de 0 à 1 (Les valeurs des D_i supérieures à 1 sont évidemment tronquées).

Prenons un exemple de chargement, $\theta = \frac{\pi}{4}$, correspondant à la bi-traction $\sigma_1 = \sigma_2 \geq 0$ avec un coefficient de Poisson $\nu = 0.2$ et un module d'Young $E = 40 GPa$. Le tenseur des contraintes est de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

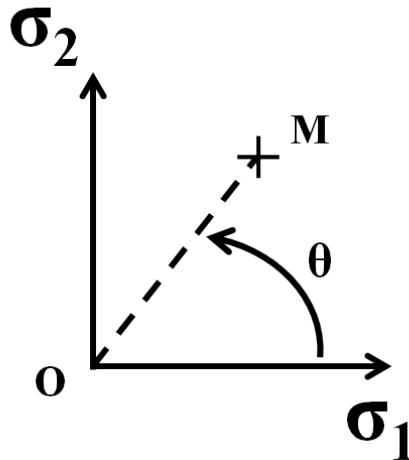


FIG. 5.33 – Chargement proportionnel pour construire la surface de rupture 2D

Les signes des 3 composantes principales du tenseur des déformations sont les suivantes :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\rho}{E} \begin{pmatrix} (c - vs) > 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s - vc) > 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v(c + s) < 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur d'endommagement possède ainsi 2 composantes d'endommagement :

$$\boldsymbol{D} = d \begin{pmatrix} D_I & 0 & 0 \\ 0 & D_{II} (= D_I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relation (5.9) permet d'exprimer le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de ρ à l'aide du tenseur des contraintes comme

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2} \right]^D + \frac{1}{3} \left(\frac{< \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_+}{\min[1 - \|\boldsymbol{D}\|_\infty^2; 1 - D_H]} + < \text{tr} \boldsymbol{\sigma} >_- \right) \mathbf{1} \quad (5.9)$$

Le tenseur des contraintes effectives est de la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \begin{pmatrix} \tilde{s}_I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s}_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{s}_{III} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{s}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} \quad (5.10)$$

La contrainte équivalente $\tilde{\sigma}_{equiv}$ toujours fonction de ρ est calculée :

$$\rho \tilde{\sigma}_{equiv} = \rho (\| < \tilde{\mathbf{s}} >_+ \| + (r_1 \| < \tilde{\mathbf{s}} >_- \| + r_2 \text{tr} < \tilde{\mathbf{s}} >_-) r_{T_x}) \quad (5.11)$$

A l'aide de la condition de consistance $f = 0$, nous pouvons exprimer ρ de la manière suivante :

$$\rho = \frac{k(d_\epsilon) r_{T_x}}{\tilde{\sigma}_{equiv}} \quad \text{avec} \quad k(d_\epsilon) = \alpha \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{\sigma_y^t}{\alpha} \right) + \beta \cdot b(T_x) d_\epsilon \right] \quad (5.12)$$

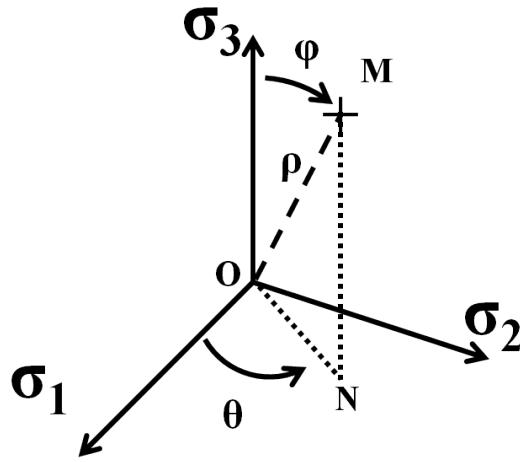


FIG. 5.34 – Construction de la surface de rupture 3D

Maintenant que la valeur de ρ est connue, le tenseur des contraintes (éq. 1) peut être exprimé et ainsi pour chaque chargement radial θ les valeurs maximales des contraintes σ_I et σ_{II} sont récupérées et normées par rapport à la valeur absolue de la contrainte maximale en compression f_c dans le but de tracer la surface de rupture.

Si nous souhaitons maintenant récupérer la réponse contrainte-déformation de ces différents chargements θ , l'expression du tenseur des déformations est manquante mais elle peut s'écrire très simplement à l'aide du tenseur des contraintes effectives via la relation suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (5.13)$$

Toutes ces étapes se déroulent donc dans deux boucles itératives. L'une permettra de changer la direction de chargement à l'aide d'un incrément $\Delta\theta$ et cela pour $\theta \in [0; 2\pi]$ l'autre permet de faire évoluer les valeurs propres d'endommagement associées à chaque chargement de 0 à 1 via un incrément Δd et ceci pour $d \in [0; 10]$ (10 est une valeur prise arbitrairement afin d'avoir toutes les valeurs propres d'endommagement égales à 1 pour l'ensemble des chargements).

Pour modéliser des chargements comme la tri-traction, la même démarche a été réalisée en 3D en utilisant le système de coordonnées sphériques qui, à partir de la notation utilisée sur la figure 5.34, permet d'écrire les expressions, $\sigma_I = \rho \cos(\theta) \sin(\phi)$, $\sigma_{II} = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$, $\sigma_{III} = \rho \cos(\phi)$, avec ρ la distance reliant le point M au centre O. ϕ correspond à l'angle formé par les vecteurs σ_3 et OM (désigne la colatitude) et θ est l'angle formé par les vecteurs σ_1 et ON, avec N le projeté orthogonal de M dans le plan horizontal $(0, \sigma_1, \sigma_2)$ (désigne la longitude).

Annexe D

1 Implantation numérique avec la loi d'évolution $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+$

1.1 Calcul du tenseur des déformations effectives

Il se détermine de la façon suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n = \underline{\mathbf{E}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_n = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_n - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{1} \quad (5.14)$$

1.2 Calcul du multiplicateur de l'endommagement

Avec la loi d'évolution de l'endommagement $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_+$, l'incrément d'endommagement est défini de la manière suivante (direction de l'accroissement de l'endommagement du pas de temps précédent) :

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n = \Delta \lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \rangle_+ \quad (5.15)$$

Le multiplicateur d'endommagement $\Delta \lambda$ doit maintenant être écrit en fonction de variables connues comme l'endommagement actif (d_ε)_{n+1}, le tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ ou encore le tenseur des déformations effectives $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}$. Pour cela, l'équation 5.15 est reprise :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n &= \Delta \lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \rangle_+ \\ \mathbf{D}_{n+1} : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_{n+1} : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 &= \Delta \lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \\ \frac{\operatorname{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\operatorname{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2)} \left[\mathbf{D}_{n+1} : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_n : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \right] &= \Delta \lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \end{aligned}$$

En isolant le multiplicateur d'endommagement, l'expression est la suivante :

$$\Delta \lambda = \left[\frac{\mathbf{D}_{n+1} : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2 - \mathbf{D}_n : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\operatorname{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2)} \right] \frac{\operatorname{tr}(\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\langle \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad (5.16)$$

Les expressions $(d_\varepsilon)_{n+1} = \frac{D_{n+1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\text{tr}(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}$ et $(d_\varepsilon)_{\text{test}} = \frac{D_n : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2}{\text{tr}(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}$, exprimées précédemment, permettent de simplifier l'écriture du multiplicateur :

$$\Delta\lambda = [(d_\varepsilon)_{n+1} - (d_\varepsilon)_{\text{test}}] \frac{\text{tr}(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2)}{\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad (5.17)$$

avec pour rappel, $(d_\varepsilon)_{n+1}$ défini dans la partie 3.4 et $(d_\varepsilon)_{\text{test}}$ calculé dans la partie 3.2.

1.3 Calcul du tenseur d'endommagement

Le tenseur d'endommagement se calcule de la façon suivante :

$$\boldsymbol{D}_{n+1} = \boldsymbol{D}_n + \Delta\lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \rangle_+ \quad (5.18)$$

2 Algorithme de la gestion numérique de la rupture en 4 cas

Cas n°1 : Dans le cas où les 3 valeurs propres D_i sont égales à D_c à l'instant n , alors les 3 même directions restent bloquées à l'instant $n+1$ ($\boldsymbol{P}_{n+1} = \boldsymbol{P}_n$) et les valeurs D_i sont bornées à D_c :

```

if  $IFAILURE_n = 3$  then
   $IFAILURE_{n+1} = IFAILURE_n$ 
   $\boldsymbol{D}_{n+1}^{diag} = \begin{pmatrix} D_c & 0 & 0 \\ 0 & D_c & 0 \\ 0 & 0 & D_c \end{pmatrix}$ 
   $\boldsymbol{P}_{n+1} = \boldsymbol{P}_n$ 
   $\boldsymbol{D}_{n+1} = \boldsymbol{P}_{n+1} \boldsymbol{D}_{n+1}^{diag \ t} \boldsymbol{P}_{n+1}$ 
end if

```

Cas n°2 : Dans le cas où 2 valeurs propres D_i sont égales à D_c à l'instant n , les 2 directions bloquées à ce même instant sont identiques à l'instant $n + 1$. Etant donné que la matrice \mathbf{P} est orthogonale et que deux directions sont déjà bloquées alors la 3^e direction est la même aux instants n et $n + 1$, ce qui revient à dire que $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$. La 3^e valeur propre est donc calculée et bornée à D_c si nécessaire :

```

if  $IFAILURE_n = 2$  then
   $IFAILURE_{n+1} = IFAILURE_n$ 
   $\mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} = \text{tr} \mathbf{D}_{n+1} - (\mathbf{D}_{n+1 \text{ I}}^{diag} + \mathbf{D}_{n+1 \text{ II}}^{diag})$ 
  if  $\mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} < 0$  then
     $\mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} = 0$ 
  end if
  if  $\mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} > D_c$  then
     $IFAILURE_{n+1} = 3$ 
     $\mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} = D_c$ 
  end if
   $\mathbf{D}_{n+1}^{diag} = \left( \begin{array}{cc|c} D_c & 0 & 0 \\ 0 & D_c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{n+1 \text{ III}}^{diag} \end{array} \right)$ 
   $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$ 
   $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{D}_{n+1}^{diag \ t} \mathbf{P}_{n+1}$ 
end if

```

Cas n°3 : Dans le cas où une valeur propre D_i est égale à D_c à l'instant n , une seule direction est bloquée à ce même instant. Le repère propre peut donc encore tourner autour de cette direction. En partant de l'idée que le pas de temps utilisé dans un code explicite est relativement petit, nous calculons le tenseur $\mathbf{D}_{test} = {}^t \mathbf{P}_n \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{P}_n$ qui n'est pas forcément diagonale mais permet de retrouver l'ordre des valeurs propres de l'instant n à l'instant $n+1$ et notamment la valeur propre déjà bloquée. Pour ne pas perdre l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres associés du tenseur \mathbf{D}_{test} lors du calcul de celles-ci, nous imposons temporairement au tenseur la forme suivante :

$$\mathbf{D}_{test} = \left(\begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{array} \right) \quad (5.19)$$

Ensuite les valeurs propres $D_{test\ i}^{diag}$ et vecteurs propres associés \mathbf{Q}_{n+1} du tenseur \mathbf{D}_{test} sont calculés, avec comme point commun $D_{test\ I}^{diag} = D_{test\ 11} = 1000$:

$$\mathbf{D}_{test}^{diag} = \left(\begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{test\ II}^{diag} & 0 \\ 0 & 0 & D_{test\ III}^{diag} \end{array} \right) \quad (5.20)$$

Enfin les 2 valeurs propres de l'endommagement $D_{test\ II}^{diag}$ et $D_{test\ III}^{diag}$ sont bornées si nécessaire à D_c et réintégrées dans le repère initial par un double changement de repère \mathbf{Q}_{n+1} et \mathbf{P}_n avec donc $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_{n+1}$:

```

if  $IFAILURE_n = 1$  then
   $IFAILURE_{n+1} = IFAILURE_n$ 
   $\mathbf{D}_{test} = {}^t \mathbf{P}_n \mathbf{D}_{n+1} \mathbf{P}_n$ 
   $\mathbf{D}_{test} = \left( \begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{array} \right)$ 

```

Calcul des valeurs propres $D_{test\ (i,i)}^{diag}$ et des vecteurs propres \mathbf{Q}_{n+1} du tenseur \mathbf{D}_{test}

$$\mathbf{D}_{test}^{diag} = \left(\begin{array}{c|cc} 1000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{test\ II}^{diag} & 0 \\ 0 & 0 & D_{test\ III}^{diag} \end{array} \right)$$

```

if  $D_{test\ II}^{diag} > D_c$  ( $D_{test\ I}^{diag} = 1000$ ) then
   $IFAILURE_{n+1} = 2$ 

```

$$D_{test\ II}^{diag} = D_c$$

```

end if

```

```

if  $D_{test\ III}^{diag} > D_c$  then
   $IFAILURE_{n+1} = 3$ 

```

$$D_{test\ III}^{diag} = D_c$$

```

end if

```

$$D_{test\ I}^{diag} = 1$$

$$\mathbf{D}_{n+1}^{diag} = \mathbf{D}_{test}^{diag}$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_{n+1}$$

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{D}_{n+1}^{diag} {}^t \mathbf{P}_{n+1}$$

```

end if

```

Cas n°4 : Dans le cas où aucune des 3 valeurs propres de l'endommagement n'a atteint D_c à l'instant n, les nouvelles valeurs propres \mathbf{D}_{n+1}^{diag} du tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} sont déterminées et bornées à D_c si nécessaire. :

if $IFAILURE_n = 0$ **then**

Calcul des valeurs propres $\mathbf{D}_{n+1}^{diag}(i, i)$ et des vecteurs propres associés \mathbf{P}_{n+1} du tenseur \mathbf{D}_{n+1}

$$\mathbf{D}_{n+1}^{diag} = \begin{pmatrix} D_I^{diag} & 0 & 0 \\ 0 & D_{II}^{diag} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III}^{diag} \end{pmatrix}$$

La méthode suivante permet de borner les valeurs propres $\mathbf{D}_{n+1}^{diag}(i, i)$ si celles-ci sont supérieures à D_c :

$$D_I^{diag} = \text{MIN}(0, (D_I^{diag} - D_c)) + D_c$$

$$D_{II}^{diag} = \text{MIN}(0, (D_{II}^{diag} - D_c)) + D_c$$

$$D_{III}^{diag} = \text{MIN}(0, (D_{III}^{diag} - D_c)) + D_c$$

if $D_I^{diag} = D_c$ **then**

$$IFAILURE_{n+1} = 1$$

end if

if $D_{II}^{diag} = D_c$ **then**

$$IFAILURE_{n+1} = 2$$

end if

if $D_{III}^{diag} > D_c$ **then**

$$IFAILURE_{n+1} = 3$$

end if

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{D}_{n+1}^{diag \ t} \mathbf{P}_{n+1}$$

end if

Après avoir envisagé tous les cas de figures et borné les valeurs propres, si nécessaire, le tenseur des contraintes est calculé en fonction du nombre de directions bloquées (ou du nombre de valeurs propres égales à D_c) spécifié par la valeur du drapeau (flag) $IFAILURE_{n+1}$:

if $IFAILURE_{n+1} < 3$ **then**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = & \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^{-1} - \frac{(1 - \mathbf{D}_{n+1})}{(3 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+1})} : \widetilde{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} (1 - \mathbf{D}_{n+1}) \\ & + \frac{1}{3} \left[\min [1 - \|\mathbf{D}_{n+1}\|_\infty^2; 1 - (D_H)_{n+1}] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1} \end{aligned}$$

else

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_c) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \left[[1 - D_c] \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_+ + \langle \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle_- \right] \mathbf{1}$$

end if

3 Algorithme pour le calcul du pas de temps

```

if  $f < 0$  then

  if  $flag < 1$  then
     $\Delta t_{n+1} = \Delta t_{init}$ 
  else
     $flag = 1$ 

    if  $\frac{1}{\sigma_y^t} \left| \left( (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n \right) \right| > \alpha_1$  then
       $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n * \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\sigma_y^t} \left| \left( (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n \right) \right|}$ 
    else
       $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n * 2$ 
    end if
  end if

  else

    if  $flag < 1$  then
       $\Delta t_{n+1} = \Delta t_{init}$ 
    else
       $flag = 1$ 

      if  $\frac{1}{\sigma_y^t} \left| \left( (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n \right) \right| > \alpha_1$  then
         $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n * \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\sigma_y^t} \left| \left( (\tilde{\sigma}_{equiv})_{n+1} - (\tilde{\sigma}_{equiv})_n \right) \right|}$ 
      else
         $\Delta t_{n+1} = \Delta t_n * 2$ 
      end if
    end if

     $\Delta t_{n+1} = \min[\Delta t_{n+1}; \Delta t_{stab}]$ 
  end if

```

Annexe E

1 Résultats expérimentaux complémentaires sur les poutres en BA

1.1 Caractérisation du béton

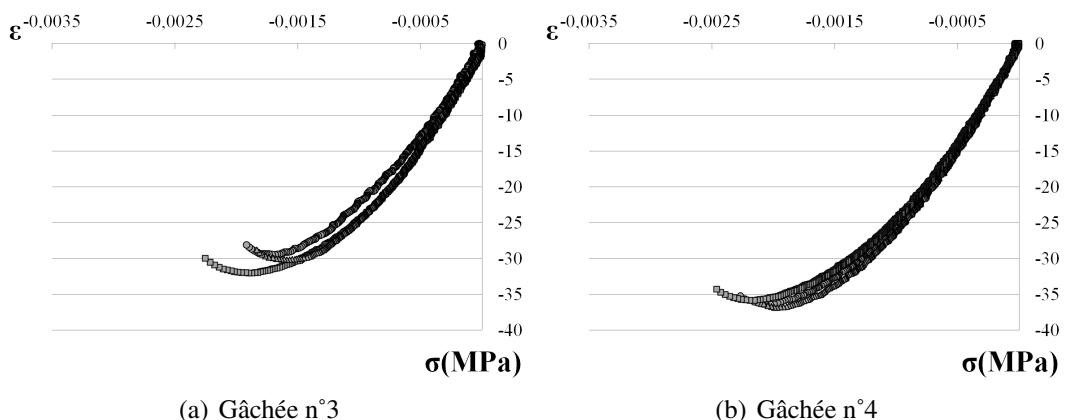
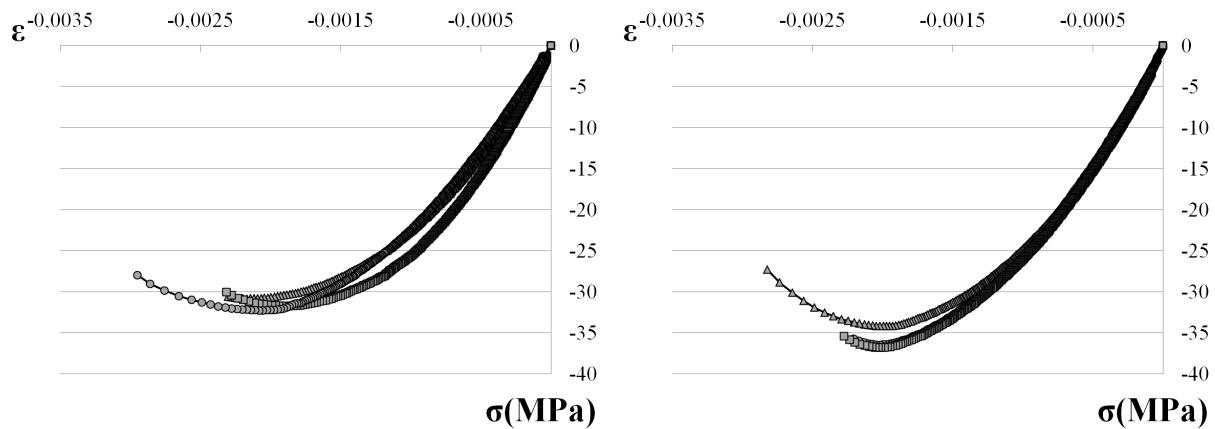


FIG. 5.35 – Caractérisation du béton en compression des gâchées n°3 et n°4 à 28 jours

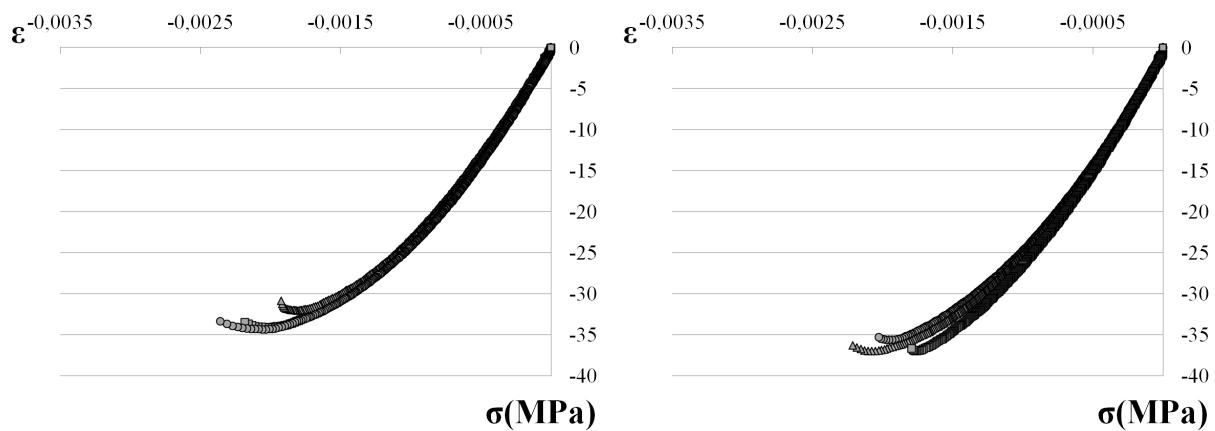
1.2 Résultats P3-180 et P4-180

Le capteur à fil au centre de la poutre P4-130 s'est détaché assez rapidement de la poutre. Ceci explique le plateau de déplacement (fig. 5.38(a)). Quant aux jauge J1 au centre de la poutre, elles ont cessé de fonctionner très rapidement (fig. 5.39(a)).



(a) Réalisé le 28/09/2011 suite à l'impact de la poutre P3-180 (Gâchée n°1) (b) Réalisé le 28/09/2011 suite à l'impact de la poutre P4-180 (Gâchée n°2)

FIG. 5.36 – Courbes de caractérisation du béton en compression après impacts



(a) Réalisé le 23/03/2012 suite à l'impact de la poutre P5-330 (Gâchée n°3) (b) Réalisé le 23/03/2012 suite à l'impact de la poutre P6-330 (Gâchée n°4)

FIG. 5.37 – Courbes de caractérisation du béton en compression après impacts

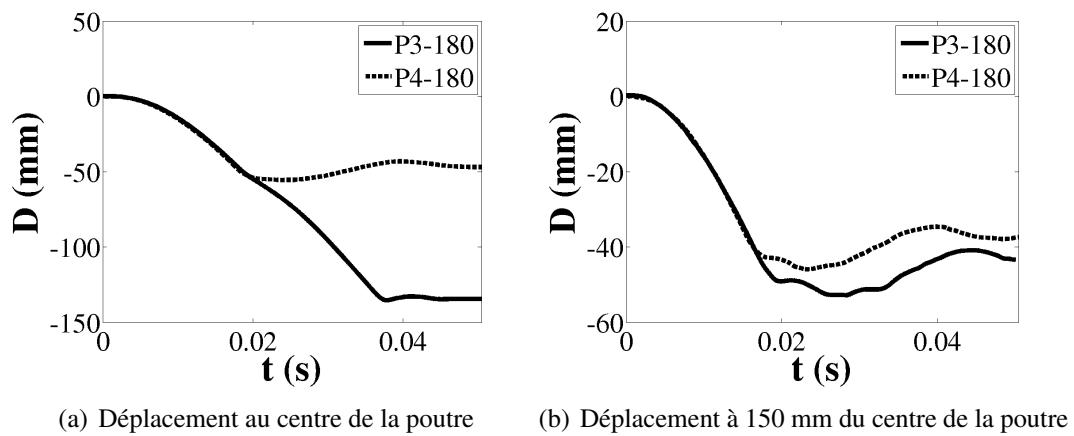


FIG. 5.38 – Déplacement moyen de la poutre

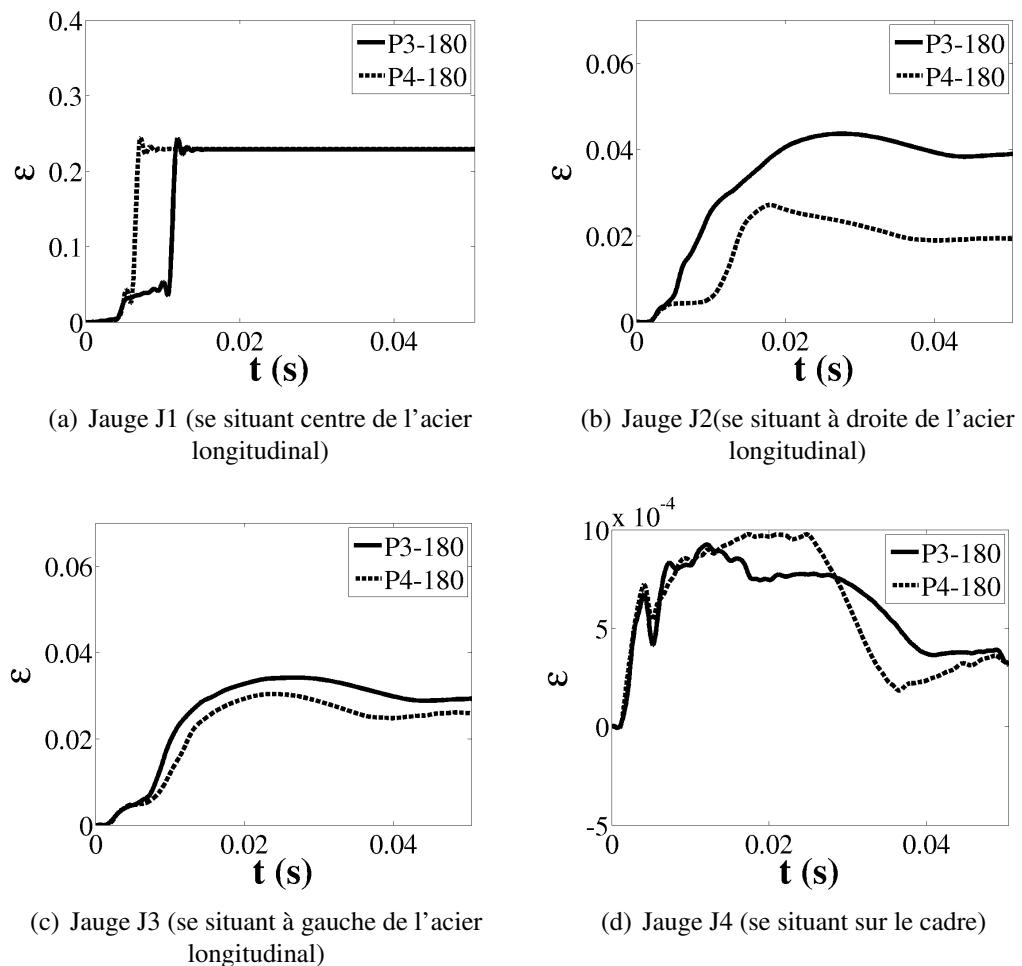


FIG. 5.39 – Déformations des aciers

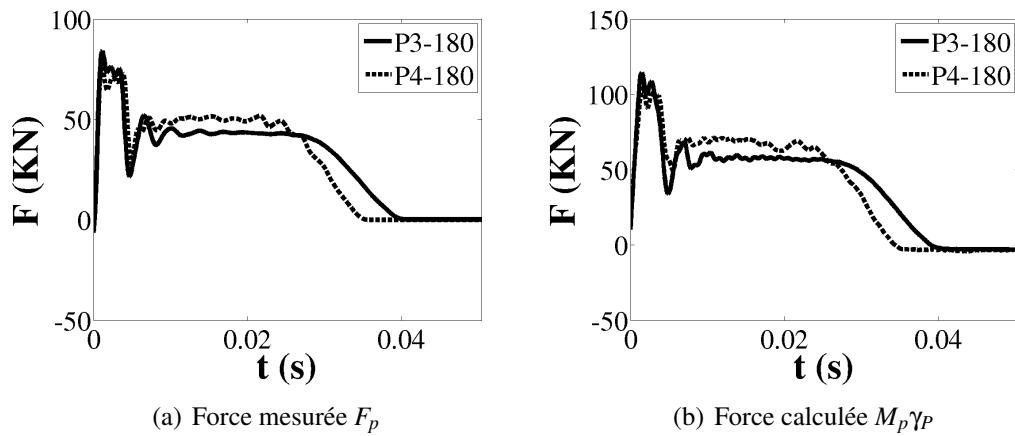


FIG. 5.40 – Force d’impact au niveau du projectile

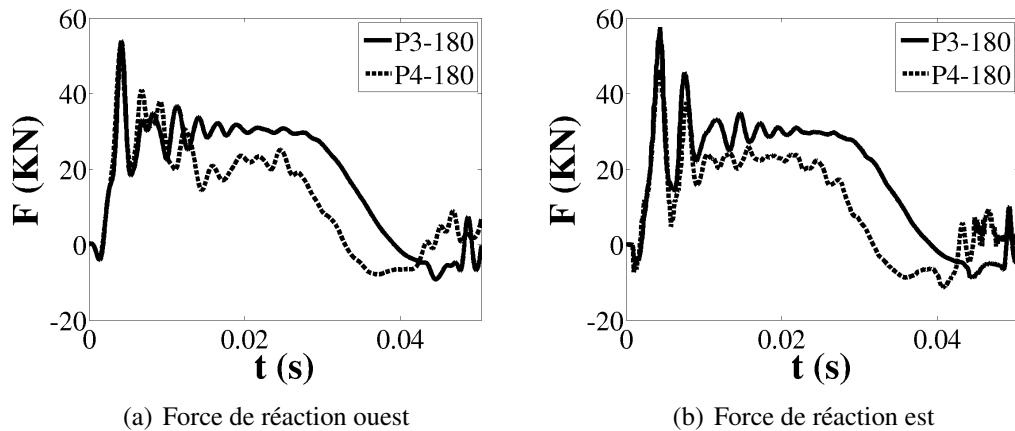


FIG. 5.41 – Efforts de réaction

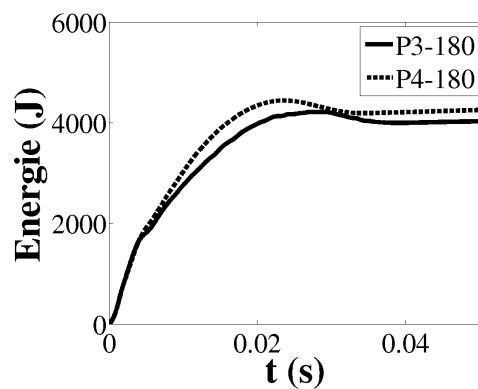


FIG. 5.42 – Energie totale

1.3 Résultats P5-330

Le capteur à fil au centre de la poutre s'est détaché assez rapidement de la poutre. Ceci explique le plateau de déplacement (fig. 5.43(a)). La force d'impact est limité par le nid d'abeille, un cube de 9 cm de côté, avec un plateau de force de 40,5 KN (limite de compression de 5 MPa).

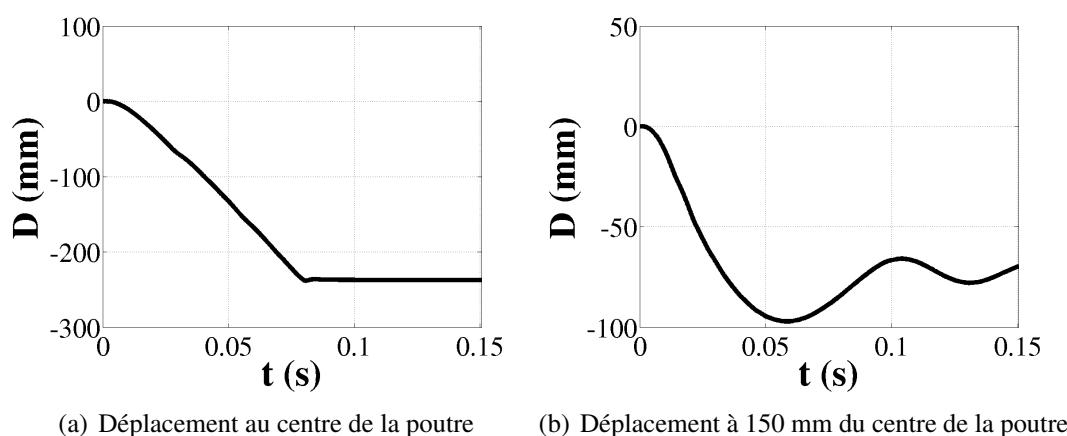


FIG. 5.43 – Déplacement moyen de la poutre de la poutre P5-330

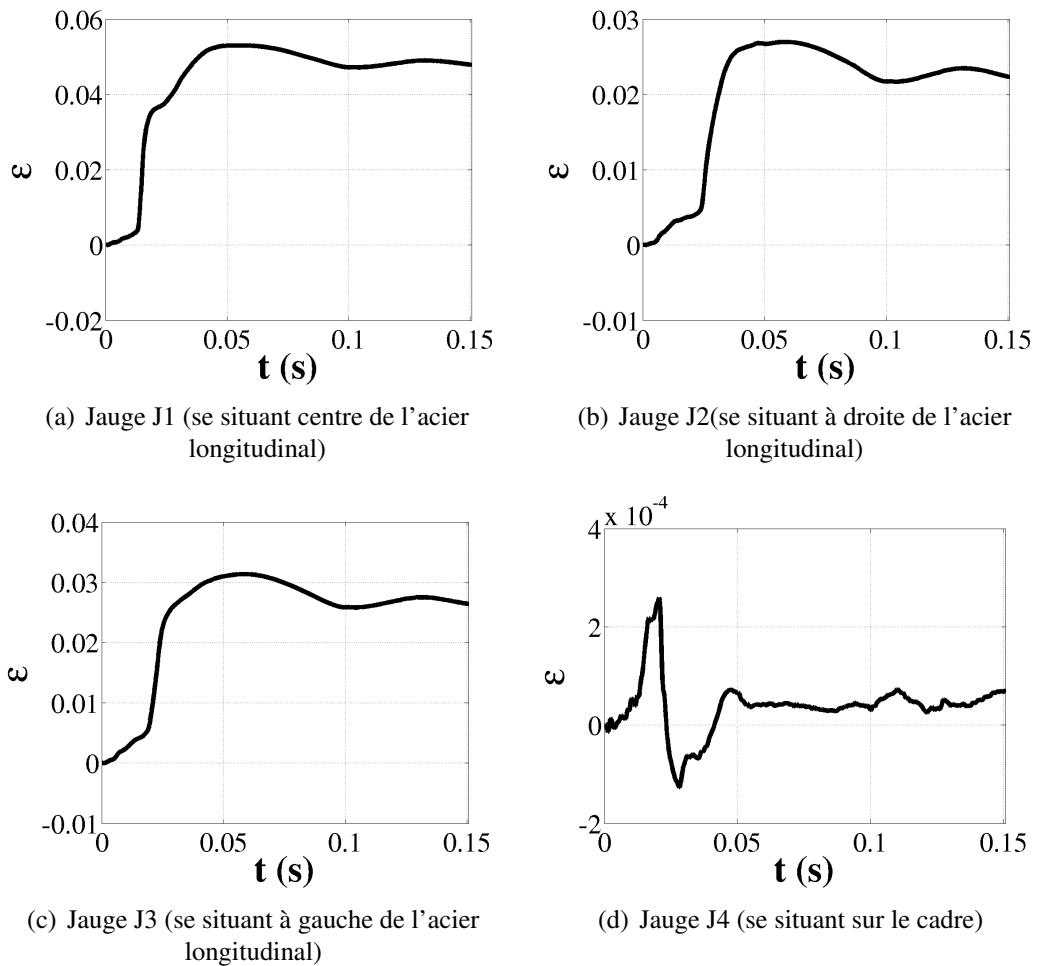


FIG. 5.44 – Déformations des aciers de la poutre P5-330

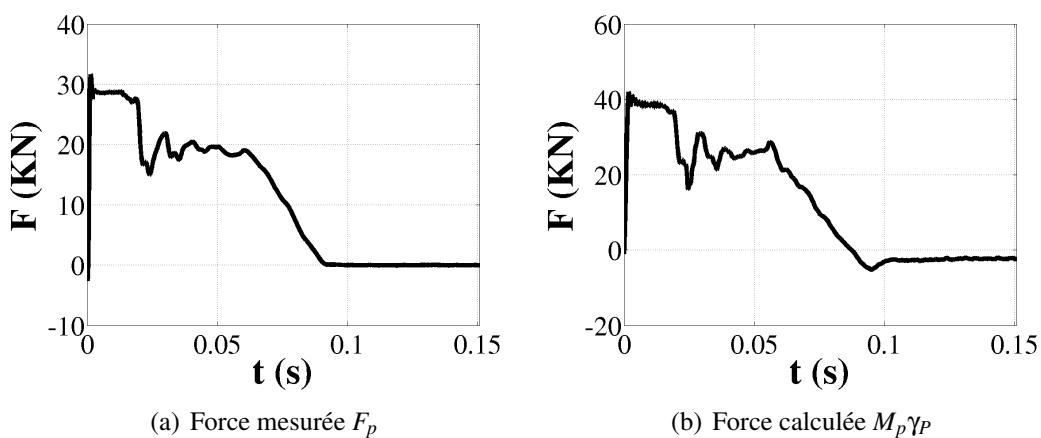


FIG. 5.45 – Force d'impact au niveau du projectile de la poutre P5-330

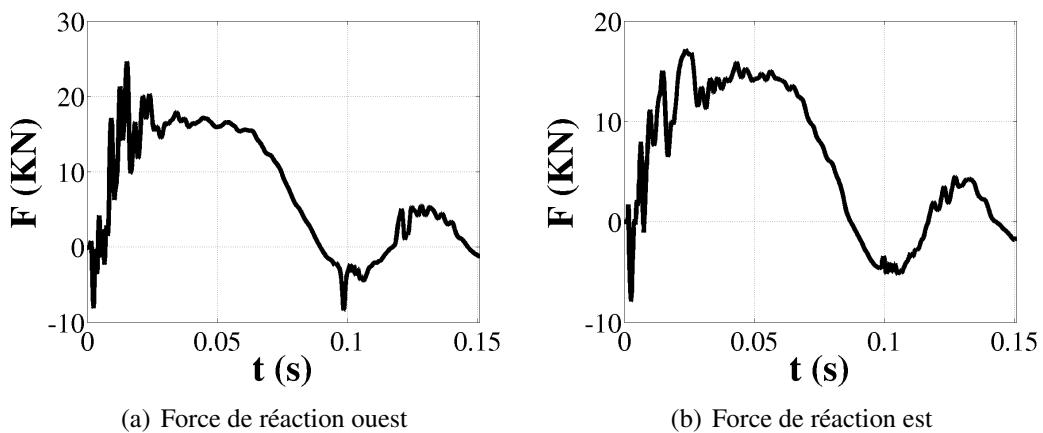


FIG. 5.46 – Efforts de réaction de la poutre P5-330

1.4 Résultats P6-330 (choc dur)

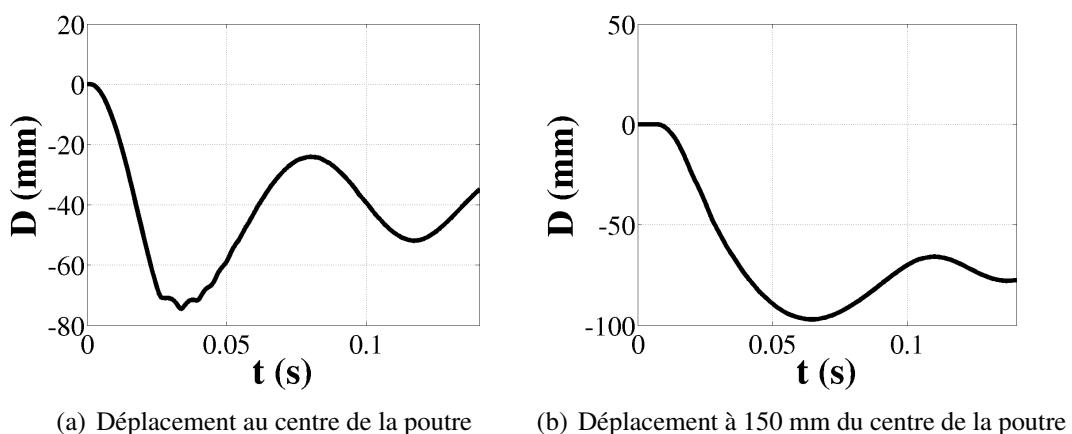


FIG. 5.47 – Déplacement moyen de la poutre P6-330

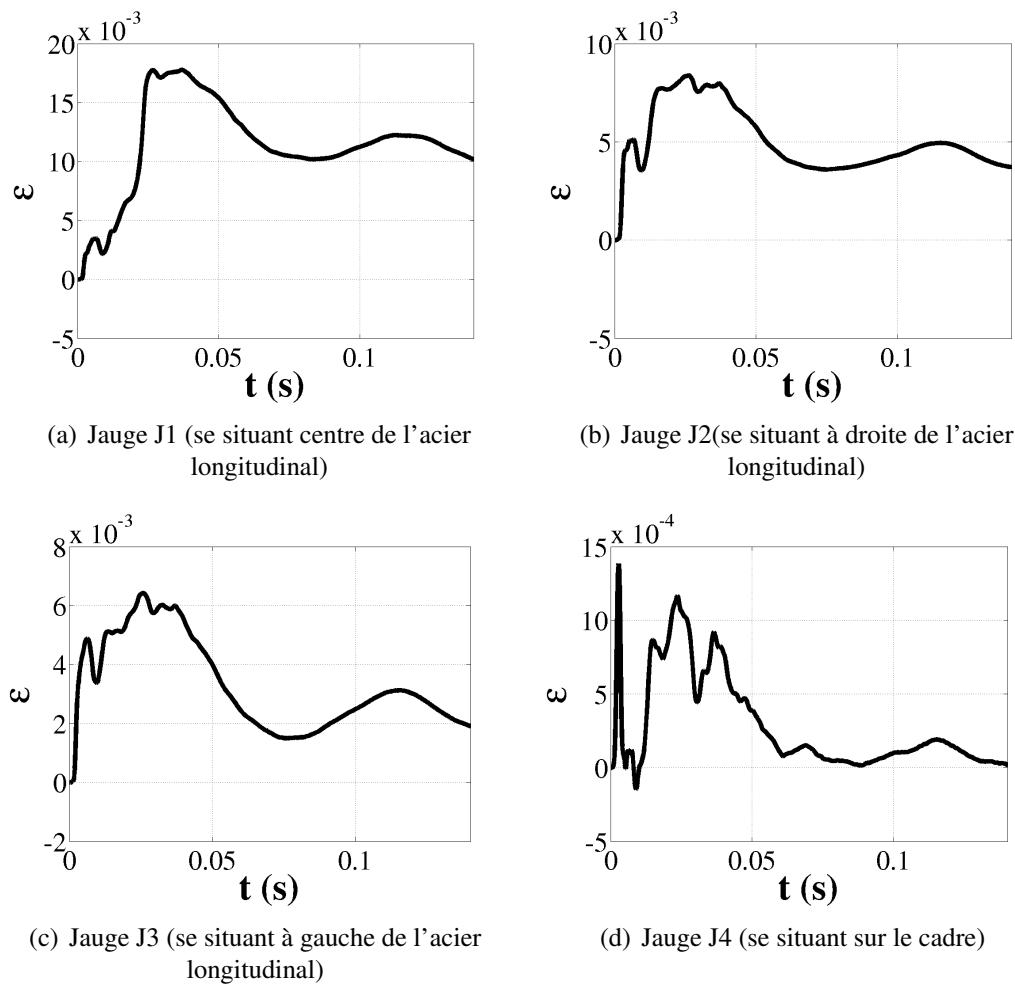


FIG. 5.48 – Déformations des aciers de la poutre P6-330

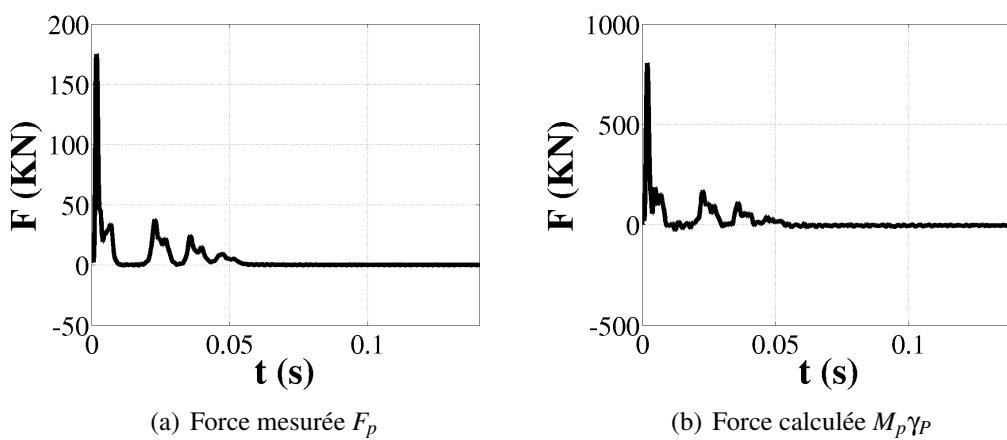
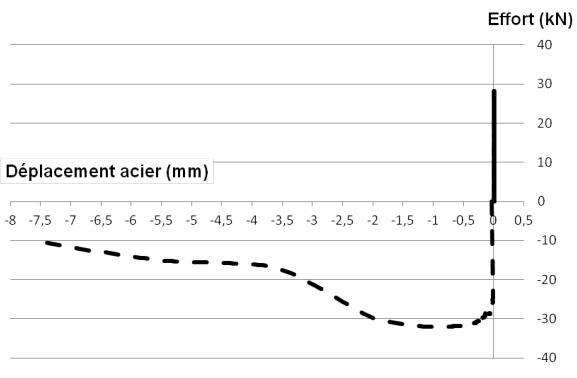


FIG. 5.49 – Force d'impact au niveau du projectile de la poutre P6-330

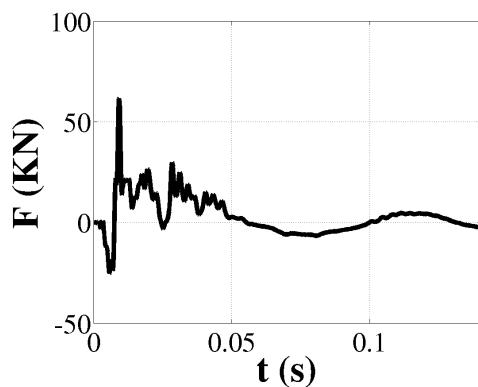


(a) Essai n°1 (monotone)

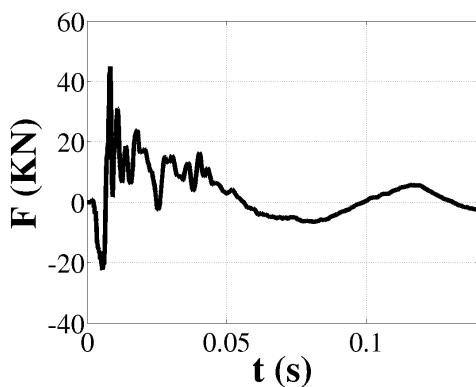


(b) Essai n°2 (alterné)

FIG. 5.51 – Essais d'adhérence acier-béton



(a) Force de réaction ouest

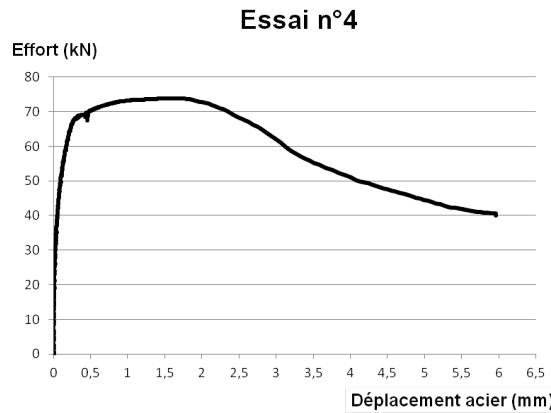


(b) Force de réaction est

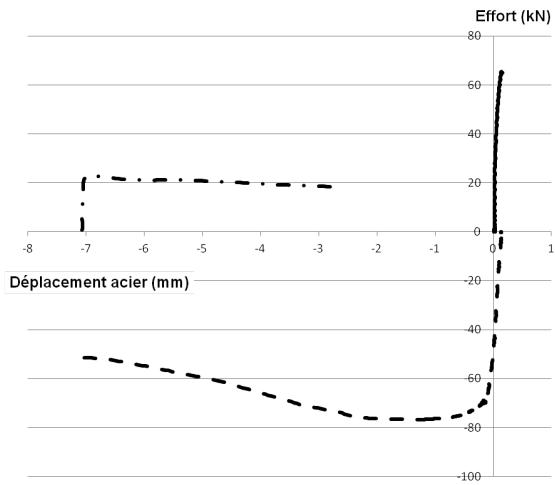
FIG. 5.50 – Efforts de réaction de la poutre P6-330

2 Résultats expérimentaux complémentaires sur les essais d'adhérence

Concernant l'essai n°6 (figure 5.53(a)), à cause d'une mauvaise qualité de l'acier (quantité de rouille importante), la réponse au début de cet essai est de mauvaise qualité. Si nous prenons l'exemple du chargement alterné de la figure 5.55(a), l'éprouvette est retournée, après avoir obtenu une réponse avec un allongement d'environ 0.25mm (trait continu), ce qui permet d'obtenir la réponse d'arrachement pour un chargement opposé au premier.

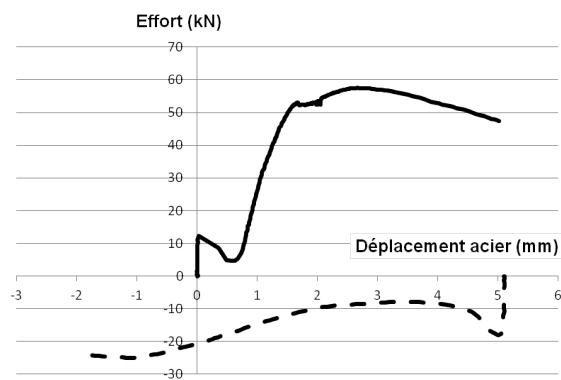


(a) Essai n°4 (monotone)

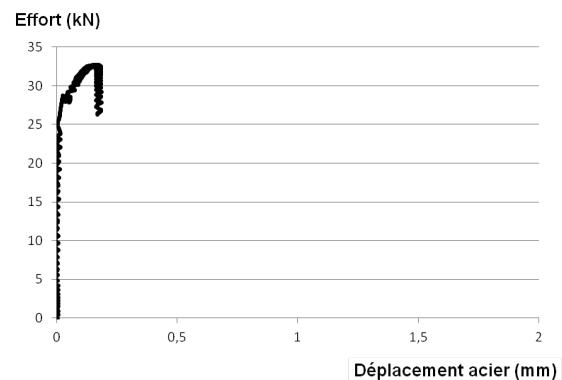


(b) Essai n°5 (alterné)

FIG. 5.52 – Essais d’adhérence acier-béton



(a) Essai n°6 (alterné)



(b) Essai n°7 (monotone)

FIG. 5.53 – Essais d’adhérence acier-béton

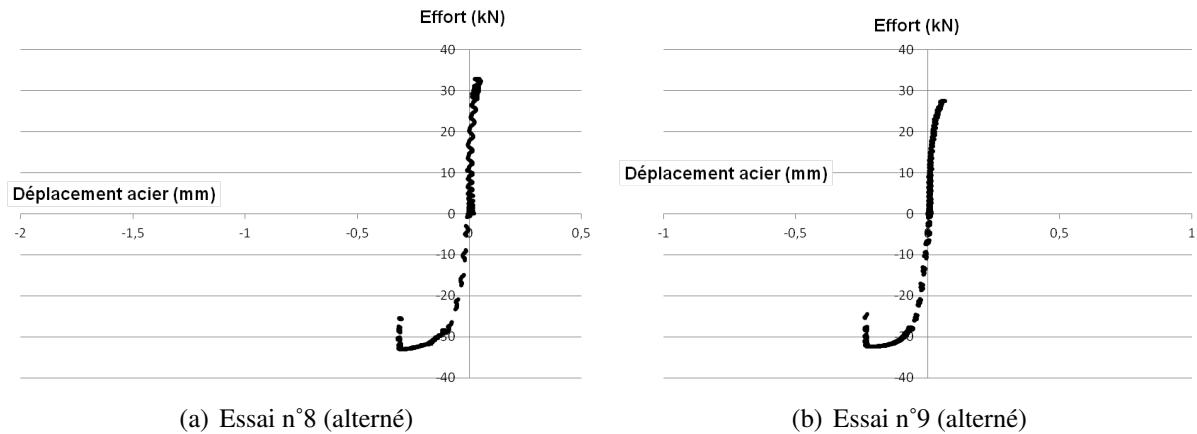


FIG. 5.54 – Essais d'adhérence acier-béton

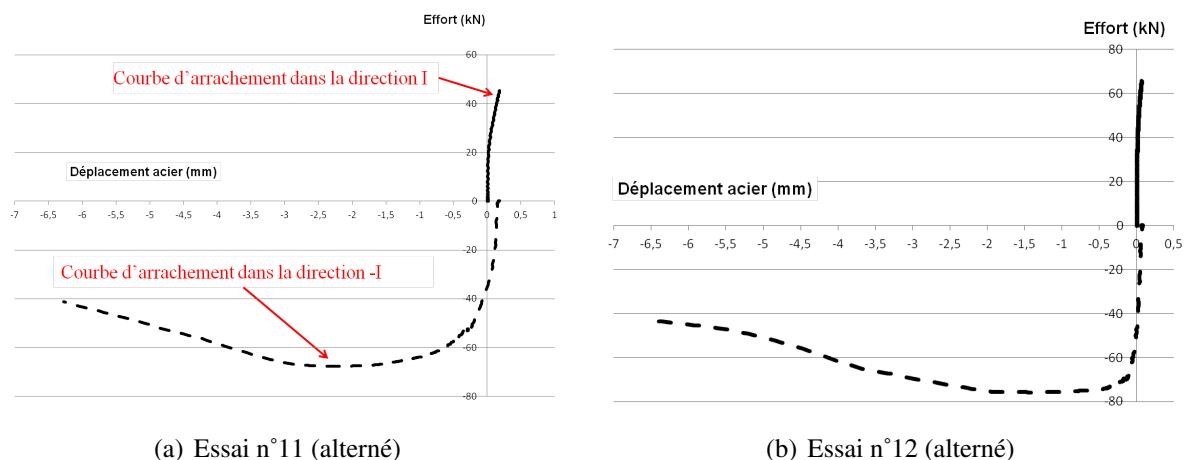


FIG. 5.55 – Essais d'adhérence acier-béton

Bibliographie

- AIFANTIS, E. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *Engineering Fracture Mechanical*, 106:326–330.
- ALLIX, FEISSEL, P. et THEVENET, P. (2003). A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81(12):1177–1191.
- ALLIX, O. et DEÜ, J.-F. (1997). Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions Vol.45*, pages 29–46.
- AUVRAY, J. (2003). *Elaboration et caractérisation à haute température de bétons réfractaires à base d'alumine à spinelle*. Thèse de doctorat, Université de Limoges.
- BADEL, P. (2001). *Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- BADEL, P., GODARD, V. et LEBLOND, J.-B. (2007). Application of some anisotropic damage to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International Journal of Solids and Structures*, 44.
- BARGELLINI, R., BESSON, J. et LORENTZ, E. (2009). A non-local finite element based on volumetric strain gradient : Application to ductile fracture. *Computational Materials Science*, 45(3):762–767.
- BARLAT, F., LEGE, D. et BREM, J. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 7:693–712.
- BARRACO, A., BUNG, H., COMBESCURE, A., CUNY, B., HOFFMANN, A., JAMET, P. et LEPAREUX, M. (1989). Plexus. software for the numerical analysis of the dynamical behavior of rigid and exible mechanisms. Rapport technique, Rapport CEA/DMT/89/307.
- BAZANT, Z. (1976). Instability, ductility and size effects in strain softening. *J. Engineering Mechanics Vol 102*.
- BAZANT, Z., BETYTSCHKO, T. et CHANG, T.-P. (1984). Continuum theory for strain-softening. *ASCE Journal of engineering mechanics*, 110:1666–1692.
- BAZANT, Z. et OZBOLT, J. (1990). Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 116:2485–2505.
- BAZANT, Z., T.P., F. B. et CHANG (1986). Confined compression tests of cement paste and concrete up to 300 ksi. *ACI Journal*, 33:553–560.

- BENALLAL, A., DOGHRI, D. et BILLARDON, R. (1988). An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Applied Numerical Methods* 4, pages 731–740.
- BENSON, D. (1989). An efficient accurate, simple ale method for non linear finite element programs. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:689–723.
- BERRIAUD, C., SOKOLOVSKY, A., GUERRAUD, R., DULAC, J. et LABROT, R. (1978). Local behaviour of reinforced concrete walls under missile impact. *Nuclear Engineering Design*, 45:457–469.
- BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). Finite-element displacement fields analysis from digital images : application to portevin-le châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46:789–804.
- BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J., FOREST, S. et BLETRY, M. (2009). *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer.
- BESSON, J., DEVILLERS-GUERVILLE, L. et PINEAU, A. (2000). Modeling of scatter and size effect in ductile fracture : application to thermal embrittlement of duplex stainless steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2):169–190.
- BISCHOFF, P. et PERRY, S. (1991). Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and Structures Vol. 24 n°6*, pages 425–450.
- BORDEU, F., BOUCARD, P. et LECLERC, G. L. H. (2008). A high performance strategy for the simulation of composites at mesoscale. *In Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Computational Technology (ECT2008)*.
- BRARA, A., CAMBORDE, F., KLEPACZKO, J. R. et MARIOTTI, C. (2001). Experimental and numerical study of concrete at high strain rates in tension. *Mechanics of Materials Vol 33 n°1*, pages 33–45.
- BRARA, A. et KLEPACZKO, J. (2006). Experimental characterization of concrete in dynamic tension. *Mechanics of Materials Vol. 38 n°3*, pages 253–267.
- BRARA, A., KLEPACZKO, J. et KRUSZKA, L. (1997). Tensile testing and modeling of concrete under high loading rates. *In Brandt, Li and Marshall (Eds.), Brittle Matrix Composites 5 (BMC5), Warsaw, Poland*.
- BRON, F. et BESSON, J. (2004). A yield function for anisotropic materials, application to aluminum alloys. *Int. J. Plasticity*, 20:937–963.
- BUNG, H. et AL. (1997). Plexus - notice théorique. Rapport technique, Rapport CEA.
- BUNG, H. et LEPAREUX, M. (1982). Le programme plexus et la methode a.l.e. Rapport technique, Rapport CEA/DMT/82/012.
- BURLION, N. (1997). *Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

- BURLION, N., PIJAUDIER-CABOT, G. et DAHAN, N. (2001). Experimental analysis of compaction of concrete and mortar. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25:1467–1486.
- CAROL, I., JIRÁSEK, M. et BAZANT, Z. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stresses. *International Journal of Solids and Structures*, 38(17):2921–2931.
- CASANOVA, A. (2012). *Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul de structures industrielles*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CAST3M (2012). Guide de l'utilisateur cast3m, <http://www-cast3m.cea.fr>. CEA Saclay, France.
- CHABOCHE, J. (1981). The continuous damage mechanics. a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering Design*, pages 233–247.
- CHAMBART, M. (2009). *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CHEN, W. (2010). *Fracturation électrique des géomatériaux Etude de l'endommagement et de la perméabilité*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- CHEN, Y. et MAY, I. M. (2009). Reinforced concrete members under drop-weight impacts. *Structures and Buildings*, 162:45–56.
- CICEKLI, U., VOYIADJIS, G. et AL-RUB, R. A. (2007). A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *International Journal of Plasticity*, 23:1874–1900.
- CLEMENT, J. (1987). *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé : caractérisation - modélisation*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CORDEBOIS, J.-P. et SIDOROFF, J. (1982). Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J.M.T.A. - Numéro Spécial*, 45-60.
- CUNDALL, P. et STRACK, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65.
- DELAPLACE, A. et DESMORAT, R. (2007). Discrete 3d model as complementary numerical testing for anisotropic damage. *Int J of Fracture*, 148:115–128.
- DENOUAL, C. (1998). *Approche probabiliste du comportement à l'impact du carbure de silicium : Application aux blindages moyens*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- DENOUAL, C., BARBIER, G. et HILD, F. (1997). A probabilistic approach for fragmentation of brittle materials under dynamic loading. *Mechanics of solids and structures*, 325:685–691.
- DENOUAL, C. et HILD, F. (2000). A damage model for the dynamic fragmentation of brittle solids. *Computers Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 183:247–258.

- DESMORAT, R. (2004). Modèle d'endommagement anisotrope avec forte dissymétrie traction/compression. In *(RF)2B - 5es Journées Scientifiques du Regroupement Francophone pour la Recherche et la Formation sur le Béton*.
- DESMORAT, R. (2006). Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotrope non standards. *Compte-rendus de mécanique*, 334:587–592.
- DESMORAT, R., CHAMBART, M., GATUINGT, F. et GUILBAUD, D. (2010). Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 77:2294–2315.
- DESMORAT, R. et GATUINGT, F. (2007). Introduction of an internal time in nonlocal integral theories. Rapport technique, Rapport interne LMT-Cachan n°268.
- DESMORAT, R. et GATUINGT, F. (2010). Introduction of an internal time in nonlocal integral theories. In *Computational Modeling of Concrete Structures (Proceedings of the Euro-C Conference)*, pages 121–128.
- DESMORAT, R., GATUINGT, F. et RAGUENEAU, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspect for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics. Vol 74. Num 10.*, pages 1539–1560.
- DESMORAT, R. et MARULL, R. (2011). Non-quadratic kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 27:328–351.
- DRUCKER, D. et PRAGER, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quart. Appl. Math.*, 10.
- DUBÉ, J. (1994). *Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- DUBÉ, J.-F., PIJAUDIER-CABOT, G. et LA BORDERIE, C. (1996). Rate dependant damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Vol. 122 n°10*.
- DUVAUT, G. et LIONS, J. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod.
- ERZAR, B. et FORQUIN, P. (2010). An experimental method to determine the tensile strength of concrete at high rates of strain. *Experimental Mechanics*, 50:941–955.
- ERZAR, B. et FORQUIN, P. (2011). Experiments and mesoscopic modelling of dynamic testing of concrete. *Mechanics of Materials*, 43(9):505–527.
- FAUCHET, B. (1991). *Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- FICHANT, S., LA BORDERIE, C. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1999). Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Int J Mech Cohes Frict Mater*, 55(3):339–359.
- FRANÇOIS, M. (2008). A new yield criterion for the concrete materials. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(5):417–421.

- GABET, T. (2006). *Comportement triaxial du béton sous fortes contraintes : Influence du trajet de chargement*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- GABET, T., MALÉCOT, Y. et DAUDEVILLE, L. (2008). Triaxial behaviour of concrete under high stresses : influence of the loading path on compaction and limit states. *Cement and Concrete Research*, 38:403–412.
- GARY, G. et BAILLY, P. (1998). Behaviour of quasi-brittle material at high strain rate. experiment and modelling. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17:403–420.
- GATUINGT, F. (1999). *Prévision de la rupture d'ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- GATUINGT, F., DESMORAT, R., CHAMBART, M., COMBESCURE, D. et GUILBAUD, D. (2008). Anisotropic 3d delay-damage model to stimulate concrete structures. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17:740–760.
- GATUINGT, F. et PIJAUDIER-CABOT, G. (2002). Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:1–24.
- GODARD, V. (2005). *Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : Application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- GRASSL, P. et JIRÁSEK, M. (2006). Damage-plastic model for concrete failure. *Int J Solids Struct*, 43:7166–7196.
- GUERAUD, R., SOKOLOVSKY, A., KAVYRCHINE, M. et ASTRUC, M. (1977). Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles - general introduction and experimental study, part i. *Nuclear Engineering and Design*, 41 (1):91–102.
- GURSON, A. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Engrg. Materials and Technology*, 99:2–15.
- HALM, D. et DRAGON, A. (1996). A model of anisotropic damage model by mesocracks growth ; unilateral effects. *International Journal of Damage Mechanics*, 5:384–402.
- HALPHEN, B. et NGUYEN, Q. (1975). Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de la mécanique*.
- HANSEN, E., WILLIAM, K. et CAROL, I. (2001). A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete. in : de borst, r., mazars, j., pijaudier-cabot, g., van mier, j.g.m. (eds.), fracture mechanics of concrete structures. lisse, balkema. pages 549–556.
- HERMANN, G. et KESTIN, J. (1988). On the thermodynamics foundation of a damage theory in elastic solids. in *cracking and damage*, J. Mazars and Z.P. Bazant eds.

- HERRMANN, H. et ROUX, S. (1990). *Modelization of fracture in disordered systems, Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. Herrmann H.J., Roux S. (editors), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland).
- HERSHEY, A. (1954). The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21:241–249.
- HERVE, G., GATUINGT, F. et IBRAHIMBEGOVIC, A. (2005). On numerical implementation of a coupled rate-dependent damage-plasticity constitutive model for concrete in application to high-rate dynamics. *Engineering Computations*, 22:583–604.
- HILD, F. (Janvier, 2002). Correli : A software for displacement field measurements by digital image correlation. Rapport technique, Internal Report n°254.
- HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability inelastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6:236–249.
- HILLERBORG, A., MODEER, M. et PETERSSON, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *cement and concrete research*, 6:773–781.
- HIRT, C., AMSDERN, A. et COOK, H. (1974). An arbitrary eulerian lagrangian method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14:229–253.
- HOFSTETTER, G., SIMO, J. et TAYLOR, R. (1993). A modified cap model : closest point solution algorithms. *Computers & Structures*, 46:203–214.
- HOSFORD, W. (1972). A generalized isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech.*, 39:607–609.
- HUGHES, T., LIU, W. et ZIMMERMAN, T. (1981). Lagrangian eulerian finite elements formulation for viscous flows. *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 21:329–349.
- JANACH, W. (1976). The role of bulking in brittle failure of rocks under rapid compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 13:177–186.
- JASON, L., HUERTA, A., PIJAUDIER-CABOT, G. et GHAVAMIAN, S. (2006). An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:7077–7092.
- JIRÁSEK, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35:4133–4145.
- JU, J. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids structure Vol 25 n°7*, pages 803–833.
- KACHANOV, L. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSA Otd. Tekh.*

- KLEPACZKO, J. et BRARA, A. (2001). An experimental method for dynamic tensile testing of concrete by spalling. *Int. j. of Impact Engineering* Vol. 25 n°4, pages 387–409.
- KOECHLIN, P. (2007). *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- KOECHLIN, P. et POTAPOV, S. (2009). Classification of soft and hard impacts - application to aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 239:613–618.
- KOLANI, B. (2012). Comportement au jeune âge des structures en béton armé à base de ciments aux laitiers. In *Journées AUGC/IBPSA, Chambéry 6-8 juin 2012*.
- KRAJCINOVIC, D. (1985). Continuous damage mechanics revisited : basic concepts and definitions. *J. Applied Mech.* 52 829-834.
- KUHL, E. et RAMM, E. (1998). On the linearization of the microplane model. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3:343–364.
- KUPFER, H. et GERSTLE, K. (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *J. Eng. Mech.*, 99:853–856.
- KUPFER, H., HILSDORF, H. et RUSCH, H. (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *American Concrete Institute Journal*, 66:656–666.
- LA BORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structure en béton*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.
- LADEVEZE, P. (1983). On an anisotropic damage theory. In *Proc. CNRS Int. Coll 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media*.
- LADEVEZE, P. (1991). On a damage mechanics approach. In *Mechanics and mechanisms of damage in composites and multi-materials*, Saint Etienne, 15-17 Nov. 1989, pages 119–141.
- LADEVÈZE, P. et LEMAITRE, J. (1984). Damage effective stress in quasi unilateral conditions. In *16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Lyngby, Denmark.
- LEBON, G. (2011). *Analyse de l'endommagement des structures de génie civil : techniques de sous-structuration hybride couplées à un modèle d'endommagement anisotrope*. Thèse de doctorat, Ecole Normale supérieure de Cachan.
- LECKIE, F. et ONAT, E. (1981). *Tensorial nature of damage measuring internal variables*. J. Hult and J. Lemaître, Editors, *Physical non-linearities in structural analysis*, Springer, Berlin.
- LEE, S.-K., SONG, Y. et HAN, S.-H. (2004). Biaxial behavior of plain concrete of nuclear containment building. *Nuclear Engineering and Design*, 227:143–153.
- LEMAITRE, J. (1971). Evaluation of dissipation and damage in metals. In *Proceedings of ICM Kyoto*.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.-L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.

- LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides, 3^e édition*. Dunod.
- LEMAITRE, J. et DESMORAT, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep Fatigue and Brittle Failures*. Springer.
- LEMAITRE, J., DESMORAT, R. et SAUZAY, M. (2000). Anisotropic damage law of evolution. *Eur J Mech, A/Solids*, 19:187–208.
- LEROUX, A. et GATUINGT, F. (2011). Corrélation d'images sur des impacts de poutres en béton armé. Rapport technique, Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS Cachan.
- LIU, W., HUERTA, A. et ZIMMERMAN, T. (1988). Viscous flows for large free surface motion. *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69:277–324.
- LORENTZ, E. (1999). *Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- LORENTZ, E., BESSON, J. et CANO, V. (2008). Numerical simulation of ductile fracture with the rousselier constitutive law. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1965–1982.
- LU, Y. et LI, Q. (2011). About the dynamic uniaxial tensile strength of concrete-like materials. *International Journal of Impact Engineering*, 38(4):171–180.
- MAGGIO, F. D. et SANDLER, I. M. (1971). Material models for granular soils. *J. Engng. Mech. Div.*, 97:935–950.
- MAGNIER, S. et DONZE, F. (1999). Numerical simulation of impact using discrete elements methods. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3:257–276.
- MARIGO, J.-J. (1981). Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *Comptes-rendus de l'académie des Sciences, Série II*, 292:1309–1312.
- MATALLAH, M. (2006). *Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- MATALLAH, M. et LA BORDERIE, C. (2006). Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton. In *24^e rencontre Univeristaires de Génie Civil*.
- MATALLAH, M. et LA BORDERIE, C. (2009). Inelasticity damage based model for numerical modeling of concrete cracking. *Engineering Fracture Mechanical 2009*, 76(8):1087–1108.
- MATHIEU, F., HILD, F. et ROUX, S. (2012). Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *International Journal of Fatigue*, 36:146–154.
- MAUFF, C. L. (2012). *Sur la gestion des bandes de localisation dans les composites stratifiés avec un modèle d'endommagement à taux limité*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.

- MAY, I., CHEN, Y., OWEN, D., FENG, Y. et BERE, A. (2005). Behaviour of reinforced concrete beams and slabs under drop weight impact loads. *In Proc. 6th Asia-Pacific conference on Shock and Impact loads on Structures*.
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.
- MAZARS, J. et BERTHAUD, Y. (1989). Une rupture expérimentale appliquée au béton pour créer un endommagement diffus et mettre en évidence son caractère unilatéral. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 308:579–584.
- MAZARS, J., BERTHAUD, Y. et RAMTANI, S. (1990). The unilateral behaviour of damage concrete. *Engng Fract Mech*, 35:629–635.
- MAZARS, J., KOTRONIS, P., RAGUENEAU, F. et CASAUX, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion : Applications to concrete structural elements. *International Journal of Solids and Structures*, 195:7264–7281.
- MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21:571–574.
- MURAKAMI, S. (1988). Mechanical modeling of material damage. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 55:280–286.
- MURAKAMI, S. et KAMIYA, K. (1996). Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on thermodynamics. *International Journal Mechanical Sciences*, 39:459–473.
- MURRAY, Y. D. (2007a). Evaluation of ls-dyna concrete, material model 159.
- MURRAY, Y. D. (2007b). Users manual for ls-dyna concrete, material model 159.
- NACHTSHEIM, W. et STANGENBERG, F. (1981). Impact of deformable missiles on reinforced concrete plates - comparisonal calculations of meppen tests j7/3. *In 6th international conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paris, France*.
- NEEDLEMAN, A. (1988). Material rate dependance and mesh sensitivity in localization problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 67:69–85.
- NEEDLEMAN, A. et TVERGAARD, V. (1984). An analysis of ductile rupture in notched bars. *J. Mech. Phys. Solids*, 32:461–490.
- NEWMARK, M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Proc. ASCE 85, EM3*.
- ORTIZ, M. (1985). A constitutive theory fot inelastic behaviour of concrete. *Mechanics of Materials*, 4:67–93.
- PEERLINGS, R. (1999). *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, TU Eindhoven - The Netherlands.

- PEERLINGS, R., de BORST, R., r. BREKELMANS et de VREE, W. (1996a). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International journal of numerical methods in engineering*, 39:3391–3403.
- PEERLINGS, R., de BORST, R., r. BREKELMANS et de VREE, W. (1996b). Some observations on localisation in non-local and gradient-damage models. *European journal of Mechanics A/ Solids*, 15:937–953.
- PENSÉE, V., KONDO, D. et DORMIEUX, L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128:889–897.
- PERZYNA, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mech. and Eng. Vol. 9*.
- PIJAUDIER-CABOT, G. et BAZANT, Z. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of applied mechanics Vol 55 n°2*, page 287.
- PITEAU, P. et VALIN, T. (2011). Essais d'impact à basse vitesse sur des poutres en béton armé - deuxième série d'essais : Chocs mous. Rapport technique, DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/RT/11-041/A, CEA Saclay.
- PITEAU, P. et VALIN, T. (2012). Essais d'impact à basse vitesse sur des poutres en béton armé - essais sur poutres longues. Rapport technique, DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/RT/12-017/A, CEA Saclay.
- PONTIROLI, C. (1995). *Comportement au souffle des structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- RABCZUK, T., EIBL, J. et STEMPNIEWSKI, L. (2004). Numerical analysis of high speed concrete fragmentation using a meshfree lagrangian method. *Engineering fracture mechanics*, 71:547–556.
- RABOTNOV, Y. (1969). Creep problems in structure members. *North Holland, Amsterdam*.
- RAGUENEAU, F., DESMORAT, R. et GATUINGT, F. (2008). Anisotropic damage modelling of biaxial behaviour and rupture of concrete structures. *Computers and Structures*, 5:417–434.
- RAMTANI, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- RICHARD, B. (2010). *Comportement des éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion*. Thèse de doctorat, Université Paris EST.
- RIECH, H. et RUDIGER, E. (1984). Meppener versuche ii. *Technischer Bericht*, 1500408 (RS467).
- RODRÍGUEZ-FERRAN, A., MORATA, I. et HUERTA, A. (2005). A new damage model based on non-local displacements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29:473–493.
- ROSSI, P. (1991). A physical phenomenon that can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates. *Materials and Structures Vol. 24 n°6*, pages 422–424.

- RUDNICKI, J. et RICE, J. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6):371–394.
- SCHICKERT, G. et DANSSAMANN, J. (1984). Behaviour of concrete stressed by high hydrostatic compression. In *Proceedings of the International Conference on Concrete under Multiaxial Conditions*. Presses de l'Université Paul Sabatier : Toulouse, volume 2, pages 69–84.
- SIMO, J. et JU, J. (1987). Strain and stress-based continuum damage models. *Int. J. Solids Struc.*, 23:821–840.
- SINGH, R. K., SINGH, R. K. et KANT, T. (2011). Nonlinear analysis of reinforced concrete structures using fracture and damage mechanics constitutive models. *Transactions, SMiRT 21*.
- SLUYS, L. (1992). *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Thèse de doctorat, TU Delft - The Netherlands.
- SOUFFLET, M. (2012). Projet d'initiation à la recherche dans le cadre du master 2 génie civil - analyse par corrélation d'images d'un essai d'impact sur une poutre en béton armé. Rapport technique, Département Génie Civil, ENS Cachan.
- SOUID, A. (2008). *Sous-structuration combinée Expérimentale/Numérique pour chargements pseudo-dynamiques endommageants*. Thèse de doctorat, Ecole Normale supérieure de Cachan.
- SOUID, A., DELAPLACE, A., RAGUENEAU, F. et DESMORAT, R. (2009). Pseudodynamic testing and nonlinear substructuring of damaging structures under earthquake loading. *Engineering structures*, 31:1102–1110.
- SOULI, M., OUAHSINE, A. et LEWIN, L. (1999). ALE formulation for fluid-structure interaction problems. *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:659–675.
- SUFFIS, A. (2004). *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste des structures sous impact*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- SUGANO, T., TSUBOTA, H., KOSHIBA, N., ORUI, S., von RIESEMANN, W., BICKEL, D. et PARKS, M. (1993). Full-scale aircraft impact test for evaluation of impact force. *Nuclear Engineering and Design*, 140 (3):373–385.
- TAYLOR, L., CHEN, E. et KUSZMAUL, J. (1986). Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 55(3):301–320.
- TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison du LCPC*, 105.
- TOUTLEMONDE, F. (1994). *Résistance au choc des structures en béton*. Thèse de doctorat, Ecole National des Ponts et Chaussées.
- TRAN, T. (2009). *Contribution à l'étude du comportement mécanique et hydromécanique du béton*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

- TRUESDELL, C. (1973). *Mécanique rationnelle*. Edition Masson.
- ULM, F. (1994). *Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- VAN MIER, J. (1984). *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology.
- VREE, J. D., BREKELMANS, W. et van GILS, M. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581–588.
- WILLAM, K. et WARNKE, E. (1975). Constitutive model of the triaxial behavior of concrete. In *IASBE Proceedings*.