

Table des matières

Résumé – Abstract	i
Remerciements	iii
Liste des Figures	xiv
Liste des Tables	xvi
1 Introduction	1
1.1 Retournement Temporel	2
1.1.1 Petite histoire du Retournement Temporel	2
1.1.2 Principe du Retournement Temporel	5
1.2 Reconstruction de signaux	11
1.2.1 L’expérience initiale	11
1.2.2 Reconstitution numérique du séisme de Sumatra	13
1.2.3 Regard mathématique sur la limite de diffraction	15
1.3 Condition aux limites absorbante et méthode <i>TRAC</i>	18
1.3.1 Conditions aux limites absorbantes	19
1.3.2 Méthode <i>TRAC</i>	22
1.4 Applications de la méthode <i>TRAC</i>	25
1.4.1 Première application : <i>Redatuming</i>	25
1.4.2 Deuxième application : identification d’objets	27
1.5 Structure de la thèse	31

Méthode de Retournement Temporel avec Conditions aux limites Absorbantes (<i>TRAC</i>) : Principe et Faisabilité	35
2 Principe de la Méthode <i>TRAC</i>	39
2.1 Méthode <i>TRAC</i> dans le Domaine Temporel	40
2.1.1 Principe général dans le domaine temporel	40
2.1.2 Principe dans le cas de l'équation des ondes scalaire	44
2.1.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell	47
2.2 Méthode <i>TRAC</i> dans le Domaine Fréquentiel	48
2.2.1 Principe général dans le domaine fréquentiel	49
2.2.2 Principe dans le cas de l'équation de Helmholtz	50
2.2.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell harmoniques	51
3 Premiers pas : Méthode <i>TRAC</i> en dimension 1	53
3.1 Un peu de théorie avec l'équation de Helmholtz	54
3.1.1 Problème direct	54
3.1.2 Retournement temporel sur le champ total	58
3.1.3 Comparaison par résolution numérique	62
3.2 Premiers tests numériques pour l'équation d'onde	69
3.2.1 Problème direct	69
3.2.2 Retournement temporel numérique en 1D	72
3.2.3 Critères d'identification	77
3.3 Remarque sur le caractère exact ou approché de la solution obtenue par la méthode <i>TRAC</i>	80
4 Stabilité de la méthode <i>TRAC</i>	81
5 Recréer le passé avec la méthode <i>TRAC</i>	85
5.1 Premier exemple : le Poisson	86

TABLE DES MATIÈRES ix

5.2	Plus de tests pour l'équation des ondes	90
5.2.1	Système d'équations et paramètres physiques	90
5.2.2	Discrétisation des problèmes direct et TR	95
5.2.3	Résultats numériques	101
5.3	Quelques tests pour l'équation de Helmholtz	109
5.3.1	Équations et paramètres physiques	109
5.3.2	Discrétisation des problèmes direct et TR	110
5.3.3	Résultats numériques	113
	Conclusion & Article paru dans <i>Inverse Problems</i>	120

Application de la Méthode *TRAC* aux Problèmes Inverses 141

6	Cas de l'ouverture totale de la LER	145
6.1	Identification d'objets dans le domaine temporel	146
6.1.1	Premier critère : Instant final	146
6.1.2	Transducteurs discrets et deuxième critère	153
6.2	Identification d'objets dans le domaine fréquentiel	158
7	Cas de l'ouverture partielle de la LER	167
7.1	Reconstruction de signaux	168
7.2	Identification d'objets	171
7.2.1	Le critère de corrélation	171
7.2.2	Comparaison des critères en ouverture partielle	172
7.3	Discrimination entre une et deux inclusions	176
7.3.1	Les équations de l'électromagnétisme et paramètres	176
7.3.2	Discrimination pour des mines enfouies dans le sable	181
7.3.3	Discrimination pour des mines enfouies dans la terre	193

8 Dans un milieu non-homogène dissipatif	203
8.1 Réalisation des milieux non-homogènes	204
8.1.1 Modélisation du problème direct	205
8.1.2 La méthode <i>TRAC</i> dans un milieu anti-dissipatif	208
8.2 Résultats numériques en milieux hétérogènes	209
8.2.1 Milieux aléatoires dissipatifs vs milieux homogènes dissipatifs	210
8.2.2 Milieux stratifiés dissipatifs	215
8.3 Discrimination entre une et deux inclusions	221
Conclusion & Article à paraître dans <i>Wave Motion</i>	225
Conclusion Générale et Perspectives	251
Bibliographie	262

Liste des figures

1.1	Trajectoire des boules de billard.	4
1.2	Cavité à retournement temporel.	7
1.3	Trois configurations de miroir à retournement temporel.	9
1.4	Expérience initiale de M. Fink et al. au LOA.	12
1.5	Expérience initiale de M. Fink et al. au LOA (suite).	12
1.6	Expérience numérique autour du séisme de Sumatra.	14
1.7	Expérience numérique autour du séisme de Sumatra (suite).	14
1.8	Schéma du problème de limite de diffraction.	15
1.9	Conditions aux limites pour des domaines de calcul bornés.	20
1.10	Illustration de la méthode <i>TRAC</i>	23
1.11	Principe de <i>redatuming</i> en géophysique.	26
1.12	Schémas des trois étapes pour l'identification d'objets.	29
2.1	Géométrie.	41
3.1	Illustration de l'intervalle de calcul 1D.	54
3.2	Problème direct : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour l'équation de Helmholtz.	65
3.3	Retournement temporel physique : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour l'équation de Helmholtz.	67
3.4	Méthode <i>TRAC</i> : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour l'équation de Helmholtz.	67

3.5	Reconstitution du signal par <i>TRAC</i> pour un objet mou dans le domaine fréquentiel.	68
3.6	Résultats du problème direct en 1D pour l'équation des ondes.	73
3.7	Résultats du retournement temporel en 1D pour l'équation des ondes. Inclusion molle.	76
3.8	Résultats du retournement temporel en 1D pour l'équation des ondes. Inclusion dure.	77
3.9	Illustration des bornes de calcul du critère J_1 en 1D.	78
3.10	Résultats des critères J_1 et J_2 en fonction de la position de x_B	79
5.1	Exemple du poisson : champs directs.	87
5.2	Exemple du poisson : champs retournés temporellement.	88
5.3	Source : forme et spectre.	94
5.4	Reconstitution du champ total pour différentes formes d'inclusions molles. .	104
5.5	Reconstitution du champ total pour différents types d'inclusions pénétrables. .	105
5.6	Reconstitution du champ total pour différents niveaux de bruit sur les données dans le cas d'une inclusion molle.	106
5.7	Reconstitution du champ total pour différentes positions du sous-domaine B dans le cas d'une inclusion molle.	107
5.8	Reconstitution du champ total pour différentes formes d'inclusions molles, en Helmholtz.	115
5.9	Reconstitution du champ total pour différents types d'inclusions, en Helmholtz. .	116
5.10	Reconstitution du champ total pour différents types d'inclusions, en Helmholtz (suite).	117
5.11	Reconstitution du champ total pour différents niveaux de bruit, en Helmholtz. .	118
5.12	Reconstitution du champ total pour différents niveaux de bruit, en Helmholtz (suite).	119
6.1	Analyse du problème d'identification d'objets dans le domaine temporel pour une LER à ouverture totale.	146

6.2	Comparaison des signaux à l'instant final dans différents cas de figures d'inclusion, avec ou sans bruit.	147
6.3	Courbe des résultats du critère de l'instant final lorsque le sous-domaine se rapproche du contour de l'inclusion.	150
6.4	Disposition de l'inclusion décalée par rapport au sous-domaine-test.	151
6.5	Courbe des résultats du critère relatif de l'instant final lorsque le sous-domaine se rapproche du contour de l'inclusion.	154
6.6	Illustration du critère J_{ABC} dans le cas de l'ouverture totale.	156
6.7	Géométrie : ajout de la surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ pour calculer le critère J_{ABC} dans le domaine fréquentiel.	159
6.8	Illustration des critères pour une inclusion molle dans le cas fréquentiel.	160
6.9	Illustration des critères pour une inclusion de type tumeur dans le cas fréquentiel.	161
6.10	Courbe des résultats des critères lorsque le sous-domaine se rapproche du contour de l'inclusion pour l'équation de Helmholtz.	163
7.1	Configuration de la ligne d'émetteurs-récepteurs en ouverture totale et en ouverture partielle.	169
7.2	Recréer le passé dans le cas d'une LER à ouverture partielle.	170
7.3	Résultats de l'image par la fonction f dans le cas d'une LER en arc de cercle. .	174
7.4	Résultats de l'image par la fonction f dans le cas d'une LER en ligne droite. .	175
7.5	Configuration des inclusions enfouies dans le sable, homogène et non dissipatif. .	183
7.6	Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions. . .	183
7.7	Image obtenue par la fonction f pour des inclusions dures distantes, $d = 3\lambda/2$. .	186
7.8	Image obtenue par la fonction f pour des inclusions dures proches, $d = \lambda/2$. .	187
7.9	Image obtenue par la fonction f pour des inclusions pénétrables distantes, $d = 3\lambda/2$. .	190
7.10	Image obtenue par la fonction f pour des inclusions pénétrables proches, $d = \lambda/2$. .	191
7.11	Configuration des inclusions dans le sol terreux.	195

7.12	Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions dans le sol terreux.	195
8.1	Géométrie du domaine précisant la position de l'inclusion D et de la LER dans des milieux hétérogènes.	204
8.2	Inclusion dure D dans un milieu homogène ou dans un milieu aléatoire.	210
8.3	Inclusion pénétrable D dans un milieu homogène ou dans un milieu aléatoire.	211
8.4	Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu homogène ou aléatoire dissipatif.	212
8.5	Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu homogène ou aléatoire dissipatif.	213
8.6	Inclusion dure D dans un milieu stratifié à deux ou trois couches.	215
8.7	Inclusion pénétrable D dans un milieu stratifié à deux ou trois couches.	216
8.8	Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu stratifié dissipatif, à deux ou trois couches.	218
8.9	Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu stratifié dissipatif, à deux ou trois couches.	219
8.10	Configuration des inclusions enfouies dans un milieu stratifié à deux couches (air+sable) et non dissipatif. Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions.	222

Liste des tableaux

3.1	Résultats des critères J_1 et J_2 pour un objet mou.	79
6.1	Résultats du critère de l'instant final en ouverture totale.	150
6.2	Comparaison des deux critères relatifs pour une LER à ouverture totale . . .	156
6.3	Valeurs des critères J_{DN} et J_{ABC} pour des données bruitées.	164
6.4	Résultats du critère J_{ABC} pour une inclusion molle de forme non régulière. .	165
7.1	Comparaison des trois critères relatifs dans le cas d'une LER en arc de cercle d'ouverture 180°	174
7.2	Comparaison des trois critères relatifs dans le cas d'une LER en ligne de droite d'ouverture 90°	175
7.3	Grandeurs électriques pour les équations de Maxwell.	177
7.4	Grandeurs magnétiques pour les équations de Maxwell.	177
7.5	Relations entre les unités des grandeurs électromagnétiques.	178
7.6	Paramètres physiques pour des mines enfouies dans le sable.	182
7.7	Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer distantes, $d = 3\lambda/2$. .	186
7.8	Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer proches, $d = \lambda/2$. .	187
7.9	Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique distantes, $d = 3\lambda/2$	190
7.10	Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique proches, $d = \lambda/2$	191

7.11 Résultat du critère J_{CC} (non relatif) pour la détermination du type d'inclusion considérée (dure ou pénétrable), $d = 3\lambda/2$	192
7.12 Résultat du critère J_{CC} (non relatif) pour la détermination du type d'inclusion considérée (dure ou pénétrable), $d = \lambda/2$	193
7.13 Paramètres physiques pour des mines enfouies dans la terre.	194
7.14 Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions dures alignées.	197
7.15 Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions dures décalées.	198
7.16 Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions pénétrables alignées.	199
7.17 Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions pénétrables décalées.	200
8.1 Variabilité à petite échelle des paramètres électromagnétiques dans la terre. .	207
8.2 Propriétés électromagnétiques de l'air, de la terre et de la l'argile.	207
8.3 Propriétés électromagnétiques des inclusions.	207
8.4 Résultats du critère J_{CC} dans le cas d'un milieu homogène ou aléatoire, et dissipatif.	215
8.5 Résultats du critère J_{CC} dans le cas d'un milieu stratifié à deux ou trois couches, et dissipatif.	221
8.6 Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer dans un milieu stratifié air/sable.	223
8.7 Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique dans un milieu stratifié air/sable.	223

*à Arthur,
à ma famille,*

Chapitre 1

Introduction

Résumé

Dans cette introduction, nous allons d'abord présenter le principe du retournement temporel ainsi que les premières expériences. Nous mettrons alors en évidence le problème de la limite de diffraction. Pour passer outre ce problème, nous proposerons une nouvelle perspective, la méthode de Condition Absorbante Retournée Temporellement (*TRAC*), qui est une méthode innovante que nous avons développée.

Sommaire

1.1	Retournement Temporel	2
1.1.1	Petite histoire du Retournement Temporel	2
1.1.2	Principe du Retournement Temporel	5
1.2	Reconstruction de signaux	11
1.2.1	L'expérience initiale	11
1.2.2	Reconstitution numérique du séisme de Sumatra	13
1.2.3	Regard mathématique sur la limite de diffraction	15
1.3	Condition aux limites absorbante et méthode <i>TRAC</i>	18
1.3.1	Conditions aux limites absorbantes	19
1.3.2	Méthode <i>TRAC</i>	22
1.4	Applications de la méthode <i>TRAC</i>	25
1.4.1	Première application : <i>Redatuming</i>	25
1.4.2	Deuxième application : identification d'objets	27
1.5	Structure de la thèse	31

Dans cette introduction, nous allons d'abord présenter le principe du retournement temporel ainsi qu'un bref historique. Ensuite nous reviendrons sur les techniques déjà existantes dans le domaine de la reconstruction de signal en mettant en évidence un problème ouvert à propos de la limite de diffraction. Nous introduirons alors la méthode *TRAC*¹ que nous avons développée avec Frédéric Nataf et Franck Assous, qui nous permet de passer outre la limite de diffraction. Cette méthode est une combinaison des techniques de retournement temporel et de conditions aux limites absorbantes. Nous présenterons par conséquent les conditions aux limites absorbantes. Puis nous mentionnerons les applications à la méthode *TRAC* ainsi que des méthodes actuelles permettant l'identification d'objets. Finalement, nous commenterons la structure et l'objectif de cette thèse.

1.1 Retournement Temporel

Faire revivre à une onde sa vie passée, Mathias Fink.

Dans un premier temps, nous allons introduire le principe du retournement temporel (TR²). Le premier point consiste en un bref historique sur la réversibilité et l'irréversibilité. Ensuite, nous exposerons le principe du retournement temporel et les différentes configurations pour le mettre en place. Nous mentionnerons la cavité à retournement temporel et le miroir à retournement temporel.

1.1.1 Petite histoire du Retournement Temporel

De son premier nom « renversement du temps », le retournement temporel est un sujet de recherche actif depuis ces vingt dernières années, investigué par Mathias Fink, physicien, professeur à l'École supérieure de physique et de chimie industrielle (ESPCI) et directeur de l'Institut Langevin, anciennement connu sous Laboratoire Ondes et Acoustique (LAO). En 2008-2009, Mathias Fink est professeur au Collège de France dans la Chaire d'Innovation Technologique - Liliane Bettencourt. Lors de la leçon inaugurale [Fin09] intitulée « Renversement du temps, ondes et innovation », il propose un petit historique sur le retournement temporel et ses premières applications. Dans cette section, nous rappelons

1. *Time Reversed Absorbing Condition*, soit condition aux limites absorbante retournée temporellement.

2. Usuellement abbrégé par TR pour *Time Reversal*, soit retournement temporel en anglais.

au lecteur l'historique du retournement temporel, inspiré principalement de [Fin09], afin de placer les notions et le contexte de notre étude.

La réversibilité ou l'irréversibilité est un phénomène qui a intéressé les physiciens dans divers domaines de la physique. En effet, dans notre environnement, les phénomènes physiques se révèlent généralement irréversibles. Sont cités comme exemples le vieillissement des êtres vivants et les mélanges de fluides par Mathias Fink dans [Fin09]. En revanche, les physiciens ont constaté que les équations de la mécanique ont un caractère réversible en temps au niveau microscopique. C'est le physicien Paul Langevin (1872-1946) qui s'est intéressé le premier aux ondes et au temps. Il est par ailleurs l'inventeur du sonar, grâce à l'utilisation qu'il a fait des transducteurs piézo-électriques, qui sont un outil fondamental dans la conception du retournement temporel.

Un transducteur est un instrument qui permet de transformer des variations en quantité physique, par exemple une pression en signal électrique, et inversement. Un transducteur piézo-électrique est composé d'un cristal piézo-électrique qui a la faculté de créer un courant électrique lorsqu'il subit une pression. De la même façon, un courant électrique peut déformer ce cristal. Ainsi, un transducteur piézo-électrique peut à la fois être émetteur et récepteur. Une étude approfondie sur la modélisation et la simulation de transducteurs piézo-électriques est proposée dans la thèse de Sébastien Impériale [Imp12]. Dans le cas du sonar, le transducteur piézo-électrique peut donc jouer le rôle du microphone et du haut-parleur.

Nous pouvons alors nous intéresser à la réversibilité et l'irréversibilité. Pour comprendre ces notions, nous pouvons commencer par considérer les lois de la mécanique de Newton. Ces lois nous disent que l'accélération d'un corps dépend des forces appliquées sur ce corps :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (1.1.1)$$

où m est la masse du corps, \vec{x} sa position et \vec{F} la somme des forces extérieures exercées sur le corps. De l'équation (1.1.1), nous remarquons que l'accélération est une dérivée seconde en temps de la position \vec{x} . Comme pour la racine carrée d'un nombre où il y a toujours une solution positive et une solution négative, la relation fondamentale de la dynamique (1.1.1) a aussi deux solutions : une dans les temps croissants $\vec{x}(t)$, dite causale, et l'autre dans les temps décroissants $\vec{x}(-t)$, dite anti-causale.

Pour illustrer ce phénomène, regardons la FIGURE 1.1a. Une boule de billard est envoyée à une certaine vitesse \vec{v}_0 d'une position \vec{x}_0 au temps t_0 vers une paroi de la table de billard. Cette boule va heurter la table au temps t_s et continuera sa trajectoire vers une autre direction. Au temps t_f , la position de la boule \vec{x}_f et sa vitesse \vec{v}_f sont enregistrées par des

capteurs, que les physiciens appellent « démons de Loschmidt », du nom du physicien Johann Josef Loschmidt.

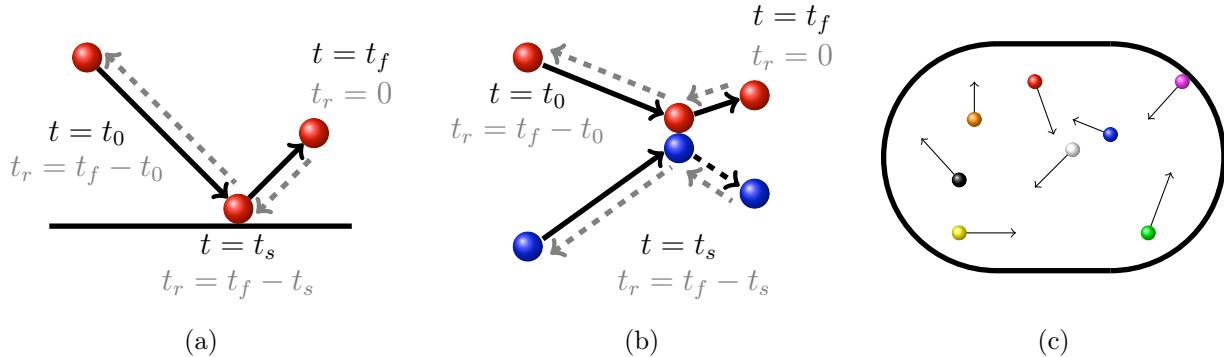


FIGURE 1.1 – Trajectoire des boules de billard : en trait plein noir dans le sens direct (des temps positifs), en pointillé gris pour le retour temporel. (a) Une boule percutant la paroi de la table. (b) Deux boules de billard entrant en collision. (c) Table de billard (géométrie chaotique).

Notons t_r la variable t retournée temporellement et on veut retourner la trajectoire de la boule vers sa position d'origine. On replace alors la boule au temps $t_r = 0$ à la position x_f avec la vitesse $-\vec{v}_f$. La boule va heurter la table à $t_r = t_f - t_s$ et aura retrouvé sa position et sa vitesse initiales au temps $t_r = t_f - t_0$.

On peut procéder de même en considérant la trajectoire de deux boules de billard qui entrent en collision, cf. FIGURE 1.1b. Grâce à deux démons de Loschmidt, on arrête les boules au temps $t = t_f$ et on enregistre leur vitesse. Ensuite les boules vont être renvoyées au temps $t_r = 0$ avec l'opposé de la vitesse enregistrée pour chacune d'elles. Les boules n'auront d'autre choix que de refaire leurs trajectoires en sens inverse.

Des problèmes de stabilité apparaissent lorsque l'on augmente le nombre de boules et lorsque l'on complique le milieu. Un premier constat pratique est que pour un nombre élevé de boules de billard, il devient difficile d'avoir assez de capteurs pour enregistrer la position et la vitesse de chacune d'entre elles. De plus, les appareils de mesure font des erreurs de mesure, liées dans le meilleur des cas aux arrondis. Ainsi dans un milieu à géométrie chaotique, comme une table de billard, cf. FIGURE 1.1c, les erreurs sur la trajectoire croissent de façon exponentielle. Dans [Fin09], Mathias Fink donne l'ordre de grandeur suivant : par exemple une erreur de mesure à 10^{-15} fait perdre aux particules leur trajectoire originelle, après seulement dix collisions dans un milieu chaotique. Finalement le retour temporel n'est pas stable au niveau microscopique.

Au lieu de s'intéresser aux particules individuellement, qui ont un mouvement désordonné les unes par rapport aux autres, on considère le mouvement collectif de ces particules au niveau macroscopique. Ces mouvements collectifs sont décrits par les ondes acoustiques, électromagnétiques, par exemple. L'équation des ondes acoustiques est elle aussi réversible en temps :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad (1.1.2)$$

grâce à la dérivée seconde en temps. De nouveau, on a une solution causale $p(t, \vec{x})$ et une solution anti-causale $p(-t, \vec{x})$. Pour se représenter les deux phénomènes, on peut penser à une onde qui se propage à la surface de l'eau. On ne verra qu'une onde causale qui diverge depuis son origine vers l'infini. Pour voir une onde anti-causale, il faudrait filmer l'onde à la surface de l'eau et repasser le film à l'envers. Les ondes causales existent dans la nature, alors que les ondes anti-causales existent seulement d'un point de vue mathématique. En revanche, les ondes causale et anti-causale sont solutions de la même équation. L'onde anti-causale permet de faire « revivre à une onde sa vie passée »³, alors que l'onde causale va vers son futur.

L'idée principale du retournement temporel est de tirer parti de la réversibilité de l'équation des ondes. Ainsi on va pouvoir recréer le passé d'une onde, retrouver son origine, sa forme, dans un temps antérieur.

1.1.2 Principe du Retournement Temporel

Le retournement temporel est basé sur le fait que l'équation des ondes acoustiques est réversible en temps. Rappelons que l'équation des ondes acoustiques en milieu non-dissipatif s'écrit :

$$\rho(\vec{x}) \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{x})} \nabla p \right) - \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1.3)$$

où p est la pression acoustique, ρ la densité du milieu et c la vitesse de propagation du son dans le milieu. Cette équation est réversible en temps grâce à la dérivée seconde en temps. Ainsi $p(t, \vec{x})$ et $p(-t, \vec{x})$ sont toutes les deux solutions de l'équation (1.1.3) par

$$\frac{\partial^2 p(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p(-t, \vec{x})}{\partial t^2}. \quad (1.1.4)$$

Ce constat est aussi valable pour d'autres systèmes hyperboliques, comme les équations de Maxwell ou de l'élasto-dynamique. De plus, nous faisons l'hypothèse d'un milieu non-dissipatif. Cette hypothèse est fondamentale pour le retournement temporel. En effet, le

3. Expression de Mathias Fink.

terme de dissipation se modélise mathématiquement par un terme comprenant une dérivée première en temps :

$$-\rho(\vec{x})\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{x})}\nabla p \right) + \sigma \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1.5)$$

où σ est le coefficient de dissipation. Si σ est non nul, alors l'équation (1.1.5) n'est plus invariante en temps, car

$$\frac{\partial p(-t, \vec{x})}{\partial t} = -\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial t}. \quad (1.1.6)$$

L'équation retournée temporellement devient alors anti-dissipative. Ce n'est plus la même équation. Dans notre étude, nous essaierons néanmoins de traiter quelques cas dissipatifs afin d'approcher des milieux réalistes, mais d'un point de vue numérique. Majoritairement nos exemples seront pris dans des milieux non-dissipatifs.

Il est important de noter également que le retournement temporel n'est pas valable pour des équations paraboliques, telles que l'équation de la chaleur. En effet, la dérivée première en temps, qui apparaît dans l'équation de la chaleur, n'est pas invariante par retournement temporel. Il existe cependant une méthode de renversement du temps pour l'équation de la chaleur basée sur des marches aléatoires, cf. [ABM10]. Nous ne traiterons pas ce cas dans notre étude.

Pour résoudre notre problème des ondes, il nous faut imposer des conditions aux limites et des conditions initiales. Les conditions aux limites imposent le comportement de la solution de (1.1.3) sur les bords du domaine spatial. Pour l'instant, le domaine est supposé être tout l'espace, \mathbb{R}^3 par exemple. Nous pourrons choisir d'autres conditions aux limites, cela ne change en rien le raisonnement pour le processus de retournement temporel. Les conditions initiales permettent de donner le départ de la solution de (1.1.3). Pour le problème, il s'agit simplement de donner la pression et la dérivée en temps de la pression initiales dans le milieu.

$$\begin{cases} p(t=0, \vec{x}) = p_0(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{dp}{dt}(t=0, \vec{x}) = p'_0(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Afin d'effectuer le retournement temporel, il nous faut d'abord enregistrer dans tout le domaine (de l'expérience ou de calcul) la pression p_f et la dérivée en temps de la pression p'_f à l'instant final T_f , comme dans le cas des boules de billard du § 1.1.1. Le problème de retournement temporel prend alors les conditions initiales suivantes :

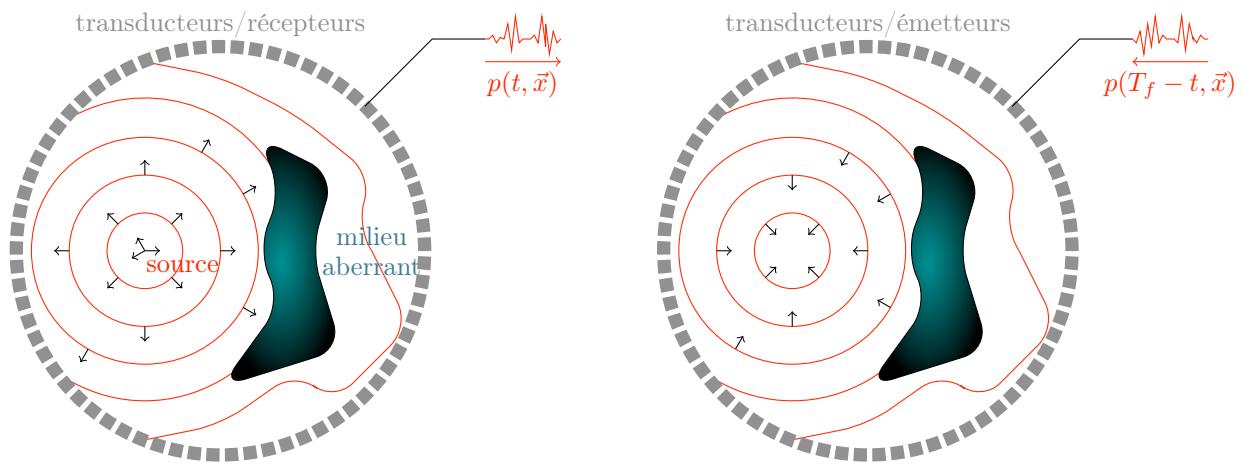
$$\begin{cases} p(t_r=0, \vec{x}) = p_f(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{dp}{dt_r}(t_r=0, \vec{x}) = -p'_f(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (1.1.8)$$

avec les conditions aux limites adéquates. Rappelons que t_r est la variable temporelle dans les expériences de retournement temporel.

1.1.2.1 Cavité à retournement temporel

La notion de cavité à retournement temporel est introduite dans [Fin93]. Nous allons rappeler ici son principe en reprenant les grandes lignes de [Fin93].

Dans toute expérience physique de propagation, les conditions initiales imposent une unique solution $p(t, \vec{x})$. En revanche, notre but est de générer la solution anti-causale. Pour cela, la première étape est de travailler non pas pour des temps négatifs, mais sur un intervalle $[0, T_f]$ et considérer la solution $p(T_f - t, \vec{x})$. Le temps final T_f est choisi de telle sorte que le champ de pression s'annule dans le milieu à la fin de l'expérience. Une façon d'imposer le sens de propagation de la solution est de mesurer pendant tout le temps de l'expérience le champ de pression $p(t, \vec{x})$ dans tout le milieu. En réémettant le champ retourné temporellement $p(T_f - t, \vec{x})$ dans tout le milieu, nous pouvons alors imposer le sens de propagation et générer la solution anti-causale dans l'intervalle de temps $[0, T_f]$. L'idée de la cavité à retournement temporel est d'utiliser des valeurs au bord pour imposer le sens de propagation de l'onde, et non plus les conditions initiales.



(a) Mode réception : les transducteurs enregistrent le signal émis par la source dans un milieu quelconque.

(b) Mode émission : les transducteurs réémettent le signal enregistré retourné temporellement dans le même milieu.

FIGURE 1.2 – Cavité à retournement temporel : les transducteurs sont placés tout autour de la source sur le bord du domaine considéré. Le milieu peut être hétérogène.

La FIGURE 1.2 illustre le principe de la cavité à retournement temporel : des transducteurs sont placés de façon continue sur une surface choisie tout autour de la source à enregistrer. Cela revient par exemple à placer des microphones/haut-parleurs sur chaque centimètre-carré de tous les murs d'une pièce dans laquelle on veut enregistrer une personne qui parle. Cette pièce n'est pas nécessairement vide, il peut y avoir des tables, des chaises, d'autres personnes, etc... ce qui est assimilé à un milieu hétérogène où chaque élément est un milieu aberrant ou déformant, comme sur la FIGURE 1.2a.

Lors du retournement temporel, les signaux sont inversés, comme si l'on parlait en verlan, et réémis dans le même milieu. Naturellement, les signaux vont revenir jusqu'à la source. Notons qu'a priori nous ne connaissons pas la position de la source.

Mathématiquement, le problème aux limites dans une cavité à retournement temporel devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\vec{x}) \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{x})} \nabla p_R \right) - \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 p_R}{\partial t^2} = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \\ p_R(t, \vec{x}) = p(T_f - t, \vec{x}) & \text{sur } (0, T_f) \times \partial\Omega \\ p_R(0, \vec{x}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p_R}{\partial t}(0, \vec{x}) = 0 & \text{dans } \Omega . \end{array} \right. \quad (1.1.9)$$

Nous avons indiqué par R la pression lors du processus de retournement temporel, p_R . La première ligne du système d'équations (1.1.9) est l'équation d'onde invariant par retournement temporel. Les lignes 2 et 3 correspondent aux réémissions depuis les transducteurs dans le milieu, le champ de pression et sa dérivée normale. Nous remarquerons que les signaux sont bien réémis à l'envers. Finalement, les deux dernières lignes donnent les conditions initiales prises nulles car nous avions supposé que le champ de pression s'annulait à la fin de l'expérience directe. Notons également que les informations sur la source n'apparaissent pas dans le système d'équations (1.1.9), seules les mesures retournées en temps permettent de refocaliser sur la source.

Le problème de la cavité à retournement temporel est qu'elle reste encore gourmande en transducteurs. De plus, il existe des applications où il ne nous est pas possible en pratique de faire des mesures sur toute la surface fermée. Citons par exemple des mesures dans un sous-sol ou en imagerie du cerveau. D'autres configurations pour les transducteurs sont alors proposées. On peut par exemple concentrer un certain nombre de transducteurs seulement sur une partie du bord : c'est ce que l'on appelle miroir à retournement temporel.

1.1.2.2 Miroir à retournement temporel

Le principe du miroir à retournement temporel (TRM⁴) est d'enregistrer les signaux uniquement de façon localisée, et non plus tout autour de la source. Une étude plus détaillée est proposée dans [Fin93] pour un miroir à retournement temporel classique et plus récemment dans [FP01] pour des miroirs à retournement temporel dans une cavité réverbérante ou dans un guide d'onde. La configuration du miroir à retournement temporel est naturellement moins précise pour faire du retournement temporel. En effet, elle entraîne la perte d'une certaine quantité d'information. Cependant on peut aussi tirer parti du milieu dans lequel on travaille, comme une cavité réverbérante ou un guide d'onde.

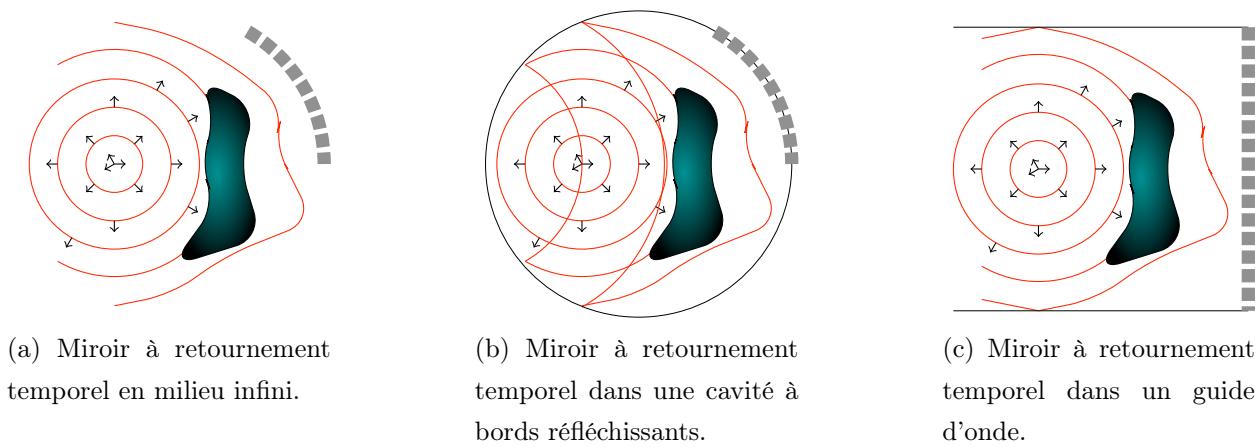


FIGURE 1.3 – Trois configurations de miroir à retournement temporel : les transducteurs, matérialisés par des carrés gris, sont placés seulement d'un côté de la source.

La première configuration de la FIGURE 1.3a correspond à une personne qui parle à l'extérieur. On enregistre à partir de plusieurs microphones alignés les uns à côté des autres, le reste du signal est perdu. C'est le miroir à retournement temporel que nous dirons classique.

La deuxième configuration, FIGURE 1.3b, est plus proche du principe de cavité à retournement temporel. Bien que les transducteurs ne soient placés que d'un côté de la source, les bords réfléchissants renvoient du signal supplémentaire qui permettra d'avoir d'avantage d'information utile au retournement temporel. Une telle simulation sera plus longue, car il faut compter les réflexions multiples jusqu'à ce que le signal soit négligeable dans la cavité. Cela correspond par exemple à une grande pièce résonnante. Les réflexions multiples sont des échos.

4. Usuellement abrégé par TRM de l'anglais *Time Reversal Mirror* pour miroir à retournement temporel.

Finalement la troisième configuration que nous allons citer est le guide d'onde, cf. FIGURE 1.3c. Ce milieu n'est pas totalement borné, car à l'opposé des transducteurs, le signal peut partir à l'infini. En revanche, les bords perpendiculaires sont réfléchissants (totalement ou partiellement) et permettent d'avoir d'avantage d'information grâce aux réflexions multiples. Plus les transducteurs sont loin de la source, plus il y aura d'échos, et donc plus d'information pour un retournement temporel plus précis.

Lors de l'expérience de retournement temporel, il est important de noter que l'on ne reconstitue pas tout le signal convergeant vers la source. En effet, à cause de l'ouverture partielle, seul un cône de convergence est reconstitué, dont l'angle correspond à l'ouverture de la ligne de transducteurs.

Mathématiquement, les transducteurs sont à nouveau modélisés par une condition de Dirichlet qui prend la valeur de la pression enregistrée retournée en temps et une condition de Neumann qui prend la valeur de la dérivée normale de la pression enregistrée retournée en temps, comme dans le système (1.1.9). Dans le cas de domaine borné ou semi-borné, les bords réfléchissants peuvent être modélisés par des conditions de Dirichlet ou de Neumann homogènes.

Une étude mathématique des solutions analytiques obtenues par retournement temporel est proposée par C. Bardos et M. Fink dans [BF02]. On peut également trouver des résultats analytiques et des estimations pour des milieux à couches aléatoires dans [CF97], ainsi qu'une étude de super-résolution dans des milieux aléatoires dans [BPZ02].

Dans ce dernier article [BPZ02], il est notamment question d'une meilleure précision de la solution par retournement temporel grâce au caractère complexe du milieu de propagation. En effet, nous retrouvons également dans [FWCM91] que le retournement temporel est robuste vis-à-vis des milieux complexes. Cela demande en revanche de connaître les hétérogénéités du milieu de propagation dans lequel on réémet le signal retourné temporellement. Dans les expériences physiques, les signaux sont généralement réémis dans le milieu dans lequel l'expérience directe a été effectuée. Ainsi il s'agit bien des mêmes hétérogénéités dans le cas direct et dans le cas du retournement temporel. Dans le cas de données prises d'une expérience physique pour un retournement temporel numérique, il nous est généralement impossible de connaître le milieu en détail. Nous le supposerons alors homogène et prendrons une valeur moyenne estimée. Pour des questions de simplicité, nous travaillerons cependant essentiellement avec des milieux homogènes, que ce soit pour générer les données synthétiques ou que ce soit pour l'expérience de retournement temporel numérique.

1.2 Reconstruction de signaux

Le retournement temporel par son principe permet la reconstruction de signaux. Nous allons présenter des expériences physiques et numériques réalisées par des physiciens ou des géophysiciens et nous allons également mettre en évidence un problème de limite de diffraction.

1.2.1 L'expérience initiale

L'expérience initiale a été mise en place par l'équipe de Mathias Fink dans le Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA)⁵ en 1991 [FWCM91]. Le principe de l'expérience est illustré sur la FIGURE 1.4. L'image du haut montre l'expérience directe : une source émet un signal bref dans un milieu multidiffuseur constitué de barres métalliques disposées aléatoirement. En face, un miroir à retournement temporel enregistre le signal après son passage dans le milieu complexe. L'image du bas présente l'expérience de retournement temporel : après traitement pour retourner les signaux temporellement, les signaux sont renvoyés dans le milieu, vont se rétropropager à travers la forêt de barres métalliques et venir se focaliser sur la source.

Nous proposons une photographie du dispositif de cette expérience sur la FIGURE 1.5a. Cette photographie a été prise par les membres de l'équipe du LOA au moment de l'expérience. On y voit clairement les différents éléments de l'expérience : la source à gauche, la forêt de barres métalliques au centre et le miroir à retournement temporel à droite. Sur la FIGURE 1.5b, nous reprenons les résultats de mesures de [FWCM91].

- Le graphique du haut est l'enregistrement du signal qui s'est propagé dans l'aquarium en l'absence des barres métalliques. Le signal enregistré sur un des transducteurs est bref, il a la même forme que le signal émis à la source. Il n'a subi aucune transformation pendant la propagation.
- Le graphique du milieu montre l'enregistrement du signal qui s'est propagé dans l'aquarium à travers la forêt de barres métalliques. Le signal enregistré sur un des transducteurs est beaucoup plus long et chahuté à cause des diverses réflexions sur les barres métalliques.
- La magie du retournement temporel permet à partir de ces signaux chahutés enregistrés sur les transducteurs de reconstruire le signal émis à la source. Ce signal est représenté sur le graphique du bas de la FIGURE 1.5b.

5. Institut Langevin, fusion du Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA) et du Laboratoire d'Optique Physique (LOP) en 2009.

Première expérience de retournement temporel dans un aquarium par l'équipe de Mathias Fink au LOA en 1991 [FWCM91]

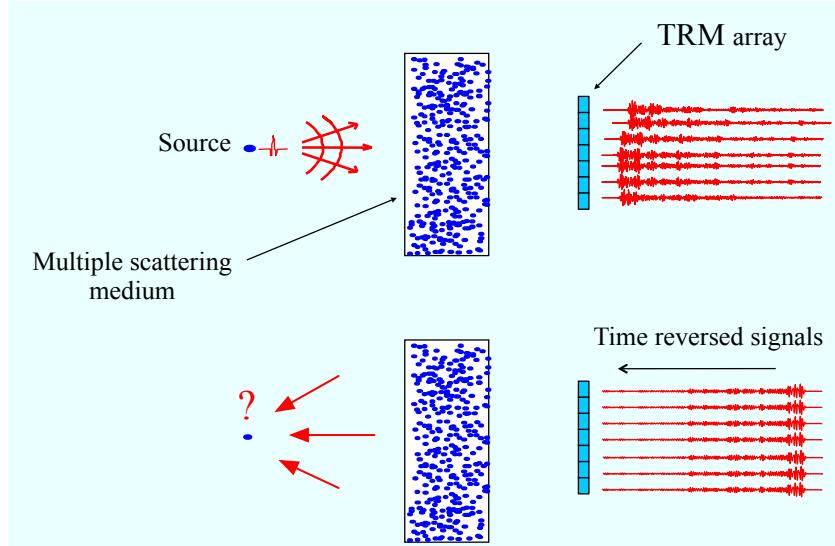
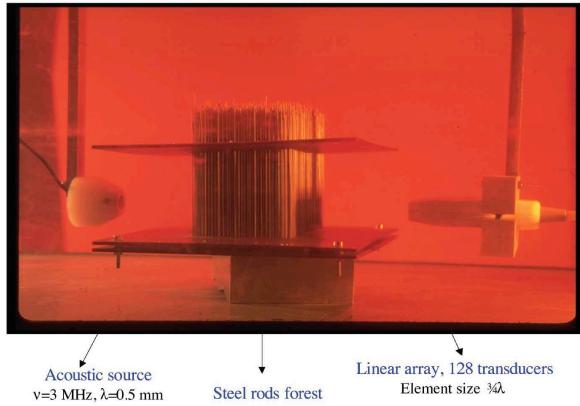
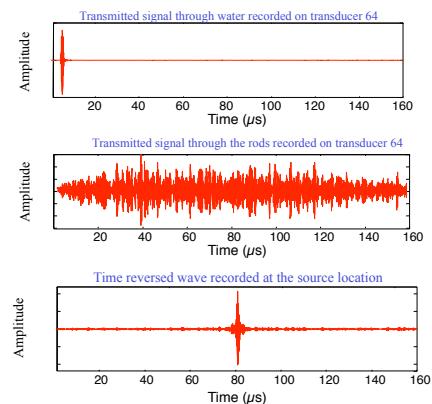


FIGURE 1.4 – Images tirées de l'article [FWCM91]. En haut, une impulsion est émise dans un milieu multidiffusif. Le signal est enregistré sur un miroir à retournement temporel (TRM) après avoir traversé une forêt de barres métalliques disposées aléatoirement. En bas, les signaux enregistrés sont renversés en temps par le TRM et renvoyés à travers le milieu multidiffusif : les signaux se focalisent vers la source originale.



(a) Photographie de l'expérience réalisée au LOA.



(b) Résultats des mesures à la source et sur le miroir à retournement temporel.

FIGURE 1.5 – Images données par M. Fink d'après l'expérience réalisée au Laboratoire Ondes et Acoustique en 1991. (a) Photographie du dispositif : dans un aquarium sont disposés un émetteur à gauche, une forêt de barres métalliques aléatoires au centre à travers laquelle le signal sera déformé puis enregistré, enfin un miroir à retournement temporel à droite. (b) Résultats des mesures sur le miroir à retournement temporel : en haut le signal enregistré sur un transducteur après s'être propagé dans l'eau uniquement, au milieu le signal enregistré sur ce même transducteur après avoir traversé la forêt de barres métalliques, en bas la refocalisation sur la source par retournement temporel.

Notons cependant que le signal reconstitué sur le dernier graphique de la FIGURE 1.5b est plus long que le signal original. Ceci est dû à la limite de diffraction. De plus, la position de la source ne peut pas être retrouvée de façon précise. On n'obtient uniquement une approximation de la position de la source à une demi-longueur d'onde près. Cette tache autour de la source de la taille d'une demi-longueur d'onde est appelée tache focale.

1.2.2 Reconstitution numérique du séisme de Sumatra

Pour illustrer le problème de limite de diffraction et de tache focale, nous présentons une autre expérience effectuée par l'équipe de Jean-Paul Montagner à l'Institut Physique du Globe (IPG) de Paris, cf. [LMF⁺06]. Il s'agit de reconstituer l'onde sismique générée lors du séisme de Sumatra en 2004 qui a précédé un raz de marée destructeur.

Contrairement à l'expérience présentée précédemment, les données enregistrées proviennent de données réalistes des sismogrammes de toutes les stations sismiques sur la Terre. Le but de l'étude est de reconstituer numériquement à partir de ces sismogrammes l'onde sismique. En effet, il n'est pas pensable de faire cette expérience physiquement. En FIGURE 1.6, nous avons une représentation du maillage utilisé pour réaliser cette simulation numérique. Le maillage est constitué de cellules de Voronoï de façon à pallier la distribution irrégulière des sismographes sur la Terre. Chaque cellule est représentée par une couleur différente et les sismographes à l'intérieur sont représentés par des triangles blancs.

Grâce à ce maillage et aux sismogrammes, l'équipe de sismologie de l'IPG de Paris a réussi à reconstituer numériquement le séisme de Sumatra. Leurs résultats sont présentés en FIGURE 1.7 sous forme de trois images instantanées de la reconstitution de l'onde sismique. La première image en haut à gauche montre l'onde sismique reconstituée pour un temps direct⁶ $t = 1000$ ms, où $t = 0$ ms correspond au début du tremblement de terre. Nous y voyons une onde convergeant vers l'épicentre. La deuxième image en haut à droite montre l'onde au début du tremblement de terre, soit pour un temps direct $t = 0$ ms, au niveau de l'épicentre. Cependant, au lieu d'avoir une onde ponctuelle, nous observons une tache correspond à la limite de diffraction. Finalement la troisième image en bas montre que l'onde repart sous forme d'une onde divergeante pour des temps négatifs, soit avant le séisme.

En théorie, nous nous attendions à une onde convergeant vers l'épicentre, jusqu'à un signal ponctuel sur l'épicentre, puis l'annulation de l'onde. En effet avant le séisme, il n'y avait pas

6. Nous appelons temps direct la variable temporelle correspondant au phénomène physique, contrairement au temps inverse correspondant à la variable temporelle lors du retournement temporel.

Expérience numérique de la reconstitution par retournement temporel du séisme de Sumatra par l'équipe de Jean-Paul Montagner de l'IPG de Paris en 2006 [LMF⁺06]

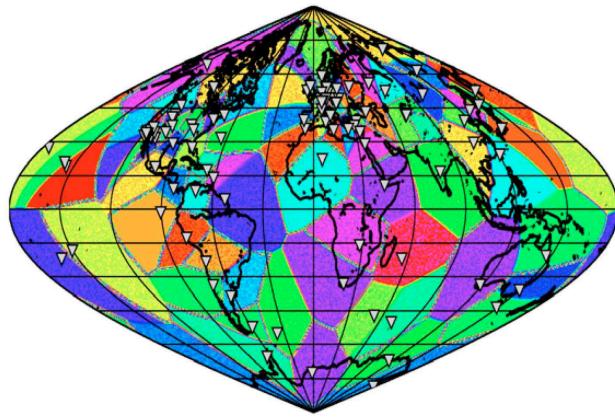


FIGURE 1.6 – Image tirée de l'article [LMF⁺06]. Maillage du globe terrestre en cellules de Voronoï associées aux positions des sismographes, représentés par des triangles blancs.

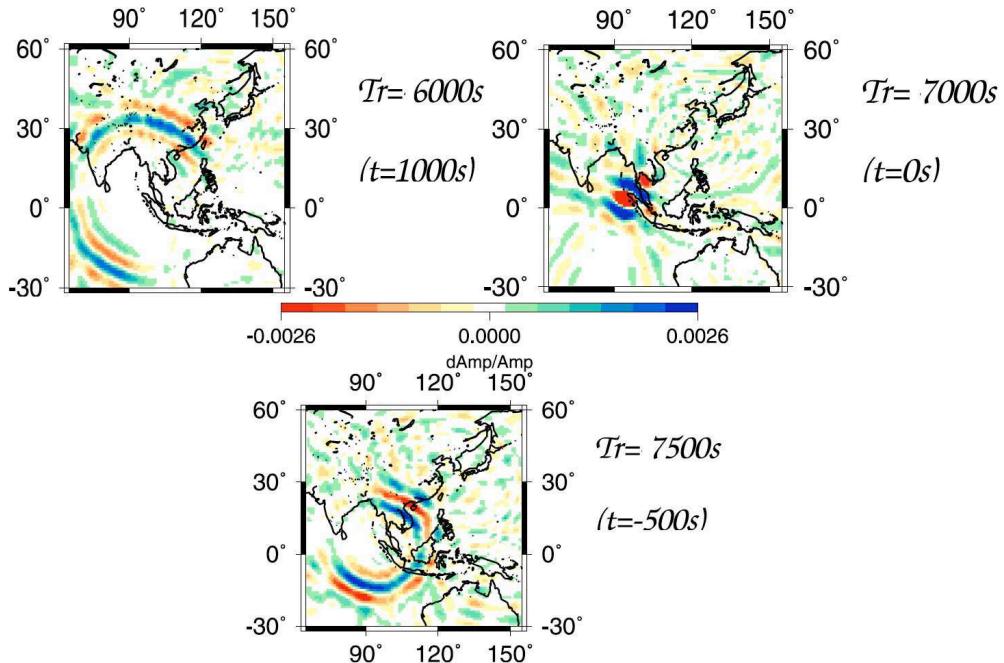


FIGURE 1.7 – Image tirée de l'article [LMF⁺06]. Trois images instantanées des résultats de l'expérience numérique de retournement temporel. En haut à gauche, l'onde sismique convergeant vers l'épicentre pour un temps direct positif (après le séisme). En haut à droite, tache focale sur l'épicentre en $t = 0$ (début du séisme). En bas pour des temps directs négatifs (avant le séisme), l'onde sismique divergeant après l'interférence des ondes sur l'épicentre.

d'ondes sismiques de cette amplitude. La tache focale sur l'épicentre et l'onde divergente dans les temps négatifs résultent notamment du problème de la limite de diffraction.

1.2.3 Regard mathématique sur la limite de diffraction

Regardons d'un peu plus près le problème de la limite de diffraction. Les schémas de la FIGURE 1.8 montrent la propagation des ondes dans l'expérience physique, puis par retournement temporel. Sur le premier schéma 1.8a, nous avons uniquement une onde divergente depuis la source jusqu'à l'infini s'il n'y a pas d'obstacle à sa course. Par exemple, la source est l'épicentre et l'onde sismique se propage dans tout le sous-sol terrestre. Dans le second schéma 1.8b, nous avons modélisé la propagation de l'onde reconstituée par le retournement temporel classique. Nous avons d'abord une onde convergente qui se dirige sur la source comme attendu. Ensuite, à cause de la limite de diffraction, l'onde convergente va interférer avec une onde divergente. Ceci va donner une tache focale de la taille d'une demi-longueur d'onde. Finalement l'onde divergente va partir à l'infini, alors que l'on s'attend à ne plus avoir d'ondes dans le milieu. Le troisième schéma 1.8c représente la propagation de l'onde par retournement temporel que nous souhaiterions obtenir : seule l'onde convergente arrive à la position de la source en un signal ponctuel, puis disparaît.

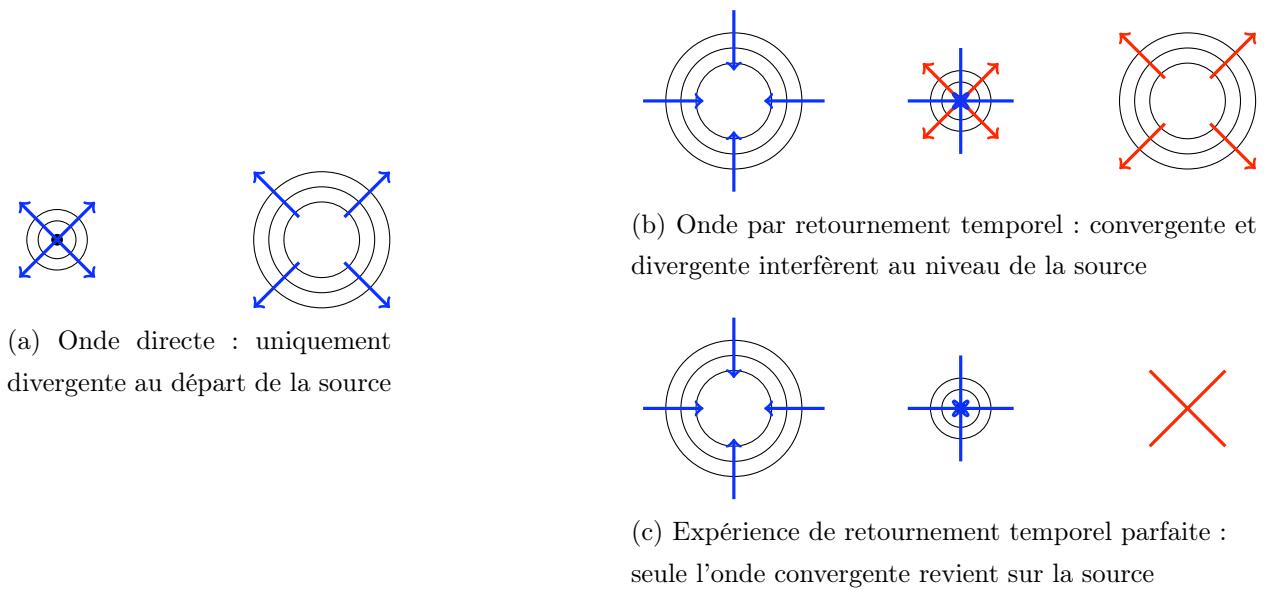


FIGURE 1.8 – Schéma de propagation des ondes. (a) Cas direct, l'onde diverge de la source vers l'infini. (b) Cas du retournement temporel, l'onde converge vers la source puis interfère avec sa comparsse divergente : limite de diffraction. (c) Expérience de retournement temporel parfaite : l'onde converge sur la source en un signal ponctuel, puis s'annule.

Si nous considérons le problème d'un point de vue mathématique, nous pouvons modéliser le phénomène physique de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(U(t, \vec{x})) = f(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \quad t > 0, \quad (1.2.1)$$

où \mathcal{L} est un opérateur hyperbolique, comme l'équation des ondes ou l'équation de l'élastodynamique par exemple, U est le champ direct et f est la source ponctuelle en \vec{x}_s et à support compact en temps. On ajoute à l'équation (1.2.1) des conditions initiales homogènes et une condition de radiation à l'infini.

Lorsque l'on effectue une expérience de retournement temporel, il nous est difficile, voire impossible, de connaître la source. Ainsi, on fait l'approximation suivante :

$$\mathcal{L}(W(t_r, \vec{x})) = 0 \quad t_r > 0, \quad (1.2.2)$$

avec pour condition initiale $W(t_r = 0)$ la solution finale du problème directe $U(t = T_f)$, où T_f sera en général pris assez grand pour que $U(t = T_f)$ s'annule dans le domaine considéré. C'est ce que nous appellerons par la suite le retournement temporel classique par opposition au retournement temporel exact ou parfait.

Pour obtenir un retournement temporel parfait (ou exact), il nous faudrait connaître la position et la forme de source. Cela reviendrait à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{L}(V(t_r, \vec{x})) = f(T_f - t_r)\delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \quad t_r > 0, \quad (1.2.3)$$

avec pour condition initiale $V(t_r = 0)$ la solution finale du problème directe $U(t = T_f)$. En résolvant le problème (1.2.3), nous aurons :

$$V(t_r, \vec{x}) = U(T_f - t_r, \vec{x}) \quad \forall t_r \in (0, T_f).$$

Rappelons cependant encore une fois que nous sommes censés ne connaître ni la position, ni la forme de la source. Ceci est assez bien compréhensible si nous considérons à nouveau l'exemple du séisme de Sumatra : nous avons une localisation approximative de l'épicentre et aucune idée de la forme de l'explosion. Comme la source est supposée ponctuelle et à support compact en temps, dont l'émission est brève par rapport à la période du champ, l'approximation est alors de supposer le second membre de l'équation nul. Cette approximation n'est pas négligeable et il est alors évident que la solution W de (1.2.2) n'est pas le retourné temporel de U . Un rapide calcul dans [Fin08] en dimension 3 démontre la présence d'une tache focale autour de la source. En effet, dans ce calcul, on prend une source théorique qui est une distribution de Dirac en temps, $\delta(t)$, et ponctuelle en espace,

$\delta(\vec{x} - \vec{x}_S)$. De plus, pour simplifier les calculs, le milieu est supposé homogène. La solution de ce problème direct est la fonction de Green en dimension 3 :

$$u(t, \vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}_S; t) := \frac{\delta(t - \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_S\|}{c})}{4\pi\|\vec{x} - \vec{x}_S\|}$$

Pour le retournement temporel, on suppose que l'on a enregistré les signaux sur une cavité à retournement temporel. En utilisant le théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff, on montre dans [Fin08] que le champ obtenu par retournement temporel classique s'écrit :

$$u_{tr}(t_r, \vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}_S; T_f - t_r) - G(\vec{x}, \vec{x}_S; t_r - T_f).$$

En passant en fréquentiel par transformation de Fourier, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tr}(\omega, \vec{x}) &= \hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_S; \omega) - \overline{\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_S; \omega)} \\ &= \frac{\exp(-i\frac{\omega}{c}\|\vec{x} - \vec{x}_S\|)}{4\pi\|\vec{x} - \vec{x}_S\|} - \frac{\exp(i\frac{\omega}{c}\|\vec{x} - \vec{x}_S\|)}{4\pi\|\vec{x} - \vec{x}_S\|} \\ &= -2i\frac{\sin(\frac{\omega}{c}\|\vec{x} - \vec{x}_S\|)}{4\pi\|\vec{x} - \vec{x}_S\|} = -2i\text{Im}(\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_S; \omega)). \end{aligned}$$

Ainsi, par retournement temporel dans une cavité à retournement temporel, lorsque l'on repasse au domaine temporel par transformation de Fourier inverse, le signal obtenu devient un sinus cardinal en espace, dont la tache principale mesure une demi-longueur d'onde : c'est la tache focale. Dans ce même calcul, nous voyons que le signal reconstitué est composé d'une onde convergente et d'une onde divergente. La tache focale résulte de l'interférence entre ces deux ondes au voisinage de la source.

Un sujet de recherche autour du retournement temporel est donc de limiter les effets de la limite de diffraction et notamment de réduire la tache focale. Pour cela, nous pouvons citer les travaux de J.de Rosny et M. Fink dans [dRF02] et de G. Leroosey *et al.* dans [LdRTF07].

Dans le premier article [dRF02], il est question de créer un puits acoustique⁷ à retournement temporel. Ce puits consiste en une source retournée en temps. Dans leur expérience, à défaut d'une cavité à retournement temporel trop gourmande en transducteurs, ils utilisent un miroir à retournement temporel avec cavité refléchissante. Deux expériences sont comparées : la première en retournement temporel classique, la seconde en utilisant un puits à retournement temporel. Dans la seconde expérience, ils obtiennent une résolution jusqu'à 1/14^{ème} de longueur d'onde, contre une demi-longueur en retournement temporel

7. *Acoustical sink* en anglais.

classique, et reconstruisent de façon plus juste le signal. Le problème est que pour effectuer cette expérience, il nous faut connaître la source, ce qui n'est pas toujours le cas.

Dans le second article [LdRTF07], il est question d'utiliser des antennes sophistiquées, dites micro-structurées, pour une application aux ondes électromagnétiques. L'expérience proposée dans l'article est de reconstituer l'image d'une fleur qui est encodée en RVB. Les tests avec un miroir à retournement temporel constitué d'antennes micro-structurées sont comparés au cas avec un miroir à retournement temporel constitué d'antennes classiques. Alors que dans le cas classique, l'image ne peut être reconstituée qu'en nuances de gris, avec les antennes micro-structurées l'image est reconstituée en couleur et avec une précision d'un trentième de longueur d'onde.

Nous pouvons citer un dernier article [CT10] quant à l'amélioration des signaux obtenus par retournement temporel en imagerie médicale cette fois-ci. Il s'agit d'un article de B. Cox et B. Treeby qui présente une nouvelle méthode pour améliorer les signaux reconstitués par retournement temporel dans des milieux complexes. Leur cas d'étude se focalise dans un premier temps sur l'influence d'un changement de propriétés physiques sur une interface et leur but est de gommer les artefacts liés aux approximations du retournement temporel classique.

Afin de passer outre le problème de la limite de diffraction, nous proposons dans cette thèse une nouvelle méthode numérique basée sur les techniques de retournement temporel et utilisant des conditions aux limites absorbantes. Cette méthode est appelée « méthode *TRAC* » pour *Time Reversed Absorbing Condition*, ce qui donne traduit de l'anglais Condition Absorbante Retournée Temporellement.

1.3 Condition aux limites absorbante et méthode *TRAC*

Qu'est-ce que la méthode TRAC ?

L'acronyme T.R.A.C. renvoie à *Time Reversed Absorbing Condition* qui, traduit de l'anglais, donne conditions absorbantes retournées temporellement. Il s'agit d'une méthode numérique qui combine les techniques du retournement temporel et les conditions aux limites absorbantes. Grâce à cette méthode que nous étudierons dans cette thèse, nous proposons une alternative pour passer outre la limite de diffraction et ainsi reconstituer le plus parfaitement possible les signaux par retournement temporel.

1.3. CONDITION AUX LIMITES ABSORBANTE ET MÉTHODE *TRAC* 19

Dans la première partie de cette introduction, nous avons déjà mentionné le principe du retournement temporel. Nous allons à présent présenter les conditions aux limites absorbantes : les différentes formes qu'elles peuvent avoir, leur utilité, etc... Puis nous introduirons la méthode *TRAC* en mettant en avant l'utilisation inhabituelle qui est faite des conditions absorbantes.

1.3.1 Conditions aux limites absorbantes

Dans la résolution des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire d'imposer des conditions

- initiales, qui donnent la valeur de la solution et sa dérivée en temps à l'instant initial d'un phénomène évolutif;
- aux limites, qui donnent la valeur de la solution, sa dérivée normale ou une combinaison de la solution et de ses dérivées partielles sur toute la surface englobant le domaine où l'on résout l'équation.

Ici nous nous intéressons aux conditions aux limites seulement. Il existe plusieurs types de conditions aux limites. Les plus connues et plus utilisées en analyse numérique sont des conditions de type Dirichlet, Neumann ou Robin. Il est important de noter que ces conditions sont des conditions réfléchissantes et qu'elles sont envisageables pour des milieux bornés. Par exemple, un miroir réfléchit totalement les ondes électromagnétiques du visible, c'est pourquoi nous pouvons voir notre reflet. Ce même miroir délimite un bord dans notre milieu.

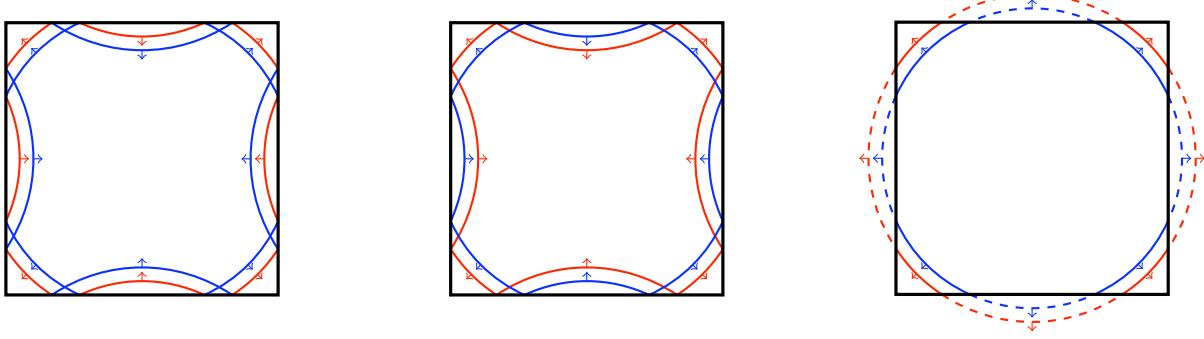
Se pose alors la question des milieux infinis. Il arrive en effet que l'on veuille modéliser un phénomène dans tout l'espace \mathbb{R}^3 par exemple. Dans ce cas, imposer une condition réfléchissante à l'infini n'a pas de sens mathématiquement ni physiquement. Nous imposons alors ce que l'on appelle des conditions de radiation à l'infini. Pour l'équation de Helmholtz dans le domaine fréquentiel, il s'agit par exemple de la condition de Sommerfeld :

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} + ik \right) \hat{u}(k, \vec{x}) = 0 \quad \text{pour } d = 2, 3, \quad (1.3.1)$$

où k est la variable duale du temps dans le domaine harmonique. Ainsi cela nous donne pour l'équation des ondes dans le domaine temporel par transformation de Fourier inverse :

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{pour } d = 2, 3. \quad (1.3.2)$$

Numériquement, il est impossible de mailler un milieu infini. Nous sommes alors contraints de travailler dans un domaine borné. Or il faut que ce milieu paraisse infini pour l'onde qui s'y propage. Nous utilisons les conditions de radiation pour définir des conditions aux limites transparentes sur les bords du domaine de calcul.



(a) Condition de Dirichlet

(b) Condition de Neumann

(c) Condition transparente

FIGURE 1.9 – Conditions aux limites pour des domaines de calcul bornés : (a) condition de Dirichlet homogène entraînant une réflexion avec changement de signe, (b) condition de Neumann homogène entraînant une réflexion sans changement de signe, (c) condition transparente laissant l'onde sortir du domaine de calcul.

Nous proposons les schémas 1.9a, 1.9b et 1.9c pour illustrer la propagation des ondes dans un domaine de calcul borné. Le premier schéma représente une condition de type Dirichlet homogène qui réfléchit totalement l'onde sur le bord en changeant son signe. Le second schéma représente une condition de type Neumann homogène qui réfléchit totalement l'onde sur le bord sans changement de signe. Enfin le troisième schéma représente une condition transparente qui laisse virtuellement sortir l'onde du domaine de calcul. Numériquement l'onde ne va pas sortir du domaine de calcul, elle sera alors absorbée sur le bord : on appellera plus communément conditions aux limites absorbantes les conditions utilisées numériquement.

Les conditions aux limites transparentes dépendent étroitement de l'équation étudiée (acoustique, électromagnétique, etc...) et de la surface sur laquelle elles sont appliquées (droite, cercle, etc...). Plus la géométrie du bord est complexe, plus la condition aux limites est compliquée à exprimer et à implémenter. Il est raisonnable de chercher des approximations, qui porteront encore mieux le nom de conditions absorbantes. En effet, ces nouvelles conditions ne sont plus transparentes, car l'approximation les rend légèrement réfléchissantes. En revanche, contrairement aux conditions de Dirichlet et de Neumann, la

1.3. CONDITION AUX LIMITES ABSORBANTE ET MÉTHODE *TRAC* 21

condition absorbante va faire disparaître l'onde en grande partie lorsqu'elle atteindra le bord, comme si cette dernière était absorbée par le bord.

La première condition aux limites absorbante que nous allons mentionner est la condition de Engquist-Majda⁸ développée pour l'équation des ondes scalaire dans [EM77]. Établie pour des surfaces planes, elle prend les formes suivantes à l'ordre 1 et à l'ordre 2 :

$$EM_1(u) := \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (1.3.3)$$

$$EM_2(u) := \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1.3.4)$$

où n désigne la dérivée normale à la surface plane considérée et τ la dérivée tangentielle à cette même surface.

Des conditions aux limites absorbantes pour des sphères ont ensuite été proposées dans [BT80] toujours pour l'équation des ondes scalaires : ce sont les conditions de Bayliss-Turkel⁹ et elles dépendent également de la dimension. Nous précisons ici les conditions de Bayliss-Turkel à l'ordre 1 en dimensions 2 et 3 :

$$BT_1^{2d}(u) := \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{u}{2r} = 0 \quad (1.3.5)$$

$$BT_1^{3d}(u) := \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{u}{r} = 0. \quad (1.3.6)$$

où r est la coordonnée radiale dont l'origine est prise au centre du domaine de calcul. On suppose par ailleurs que la fonction u est à symétrie sphérique, ce qui nous permet de ne pas tenir compte des termes angulaires. Nous présentons aussi les conditions de Bayliss-Turkel d'ordre 2 pour information :

$$BT_2^{2d}(u) := \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} + c \frac{5}{2r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{u}{2r} \right) = 0 \quad (1.3.7)$$

$$BT_2^{3d}(u) := \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} + c \frac{3}{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{u}{r} \right) = 0 \quad (1.3.8)$$

et finalement à l'ordre m :

$$BT_m^{2d}(u) := \prod_{\ell=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} + c \frac{4\ell-3}{2r} \right) u = 0 \quad (1.3.9)$$

$$BT_m^{3d}(u) := \prod_{\ell=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} + c \frac{2\ell-1}{r} \right) u = 0. \quad (1.3.10)$$

8. Du nom de ses auteurs Björn Engquist et Andrew J. Majda.

9. Du nom de ses auteurs Alvin Bayliss et Eli Turkel.

Par la suite, de nombreuses autres conditions aux limites absorbantes ont été proposées pour des surfaces plus complexes, à commencer par des ellipses, et donnant une meilleure approximation. Nous pensons entre autres aux travaux de X. Antoine et H. Barucq dans [ABB99], [AB01] puis [AB05], ainsi que la prolongation des travaux d'A. Bayliss et E. Turkel avec M. Gunzburger dans [BGT82] pour des systèmes elliptiques comme l'équation de Helmholtz. Dans le même esprit, E. Turkel a continué ses travaux avec M. Medvinsky et U. Hetmaniuk dans [MTH08] et [MT09] afin d'améliorer les conditions en dimension 2 pour des surfaces sphériques et ellipsoïdales. Finalement nous voulons mentionner les travaux de M. Grote et J. B. Keller dans [GK95] et [GK96] dans des problèmes d'ondes dépendant du temps. Plus récemment, des travaux de M. Grote amènent également à considérer le cas de diffracteurs multiples, cf. [GK07] et [GS11].

1.3.2 Méthode *TRAC*

Présentons à présent l'idée de la méthode *TRAC* que nous allons étudier en grande partie dans cette thèse. Cette méthode est basée sur les techniques de retournement temporel présentées au § 1.1, auxquelles nous combinons des conditions aux limites absorbantes dans une configuration inhabituelle. Le principe de la méthode *TRAC* sera détaillé dans le chapitre 2 dans le cas général puis pour des exemples. Notons que cette méthode peut être définie dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel. Ici nous présentons uniquement l'idée de la méthode dans le cadre de l'équation des ondes scalaire.

Avant d'expliquer la méthode, nous souhaiterions replacer le contexte dans lequel nous allons l'appliquer. Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas de sources passives dont nous enregistrons les signaux sur des cavités ou des miroirs à retournement temporel. Dans notre étude consacrée à la méthode *TRAC*, nous travaillons dans un milieu infini. Dans ce milieu, nous disposons une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale qui est transparente pour l'onde qui se propage. La forme de l'onde n'est en effet pas perturbée lorsque l'onde traverse la ligne d'émetteurs-récepteurs. De plus, nous considérons plutôt des sources actives. Ces sources sont en fait des inclusions (objets, fissures, etc...) qui n'émettent rien d'elles-mêmes, mais que nous éclairons à l'aide d'un signal connu. Ce signal se réfléchit totalement ou partiellement sur l'inclusion et nous enregistrons la réponse de ce signal sur la ligne de transducteurs. C'est la génération des données illustrée par le schéma en FIGURE 1.10a. Le domaine de calcul contenu à l'intérieur de la région délimitée par la ligne d'émetteurs-récepteurs est noté Ω . De plus, nous notons D l'inclusion dans le domaine Ω .

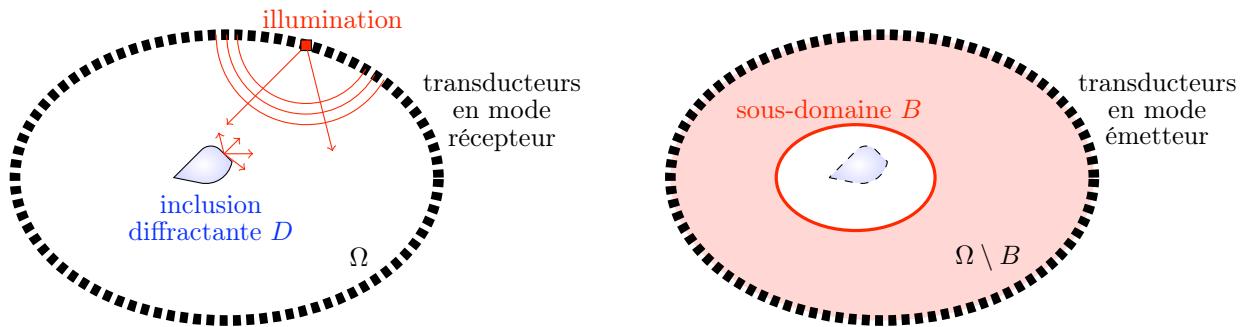


FIGURE 1.10 – Configuration des transducteurs et de l'inclusion pour le problème direct en (a) et pour le retournement temporel en (b). Pour effectuer la méthode *TRAC*, le domaine de calcul est tronqué par l'introduction d'un sous-domaine B . Le nouveau domaine de calcul pour le retournement temporel avec *TRAC* se fait dans la partie colorée, $\Omega \setminus B$.

Dans le cas des sources actives, nous pouvons connaître a priori l'illumination et nous connaissons le milieu de propagation que nous supposons toujours non dissipatif. En revanche, nous ne connaissons pas les propriétés de la source, c'est-à-dire de l'inclusion. D'un point de vue mathématique, le problème direct s'écrit :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\beta \nabla u) = 0, \quad (1.3.11)$$

où les coefficients α et β représentent les propriétés physiques du milieu dans sa globalité, comme la densité ou la compressibilité dans le cas de l'acoustique. Nous notons α_0 et β_0 les propriétés concernant le milieu environnant l'inclusion et α_D et β_D celles de l'inclusion. La vitesse de propagation c vérifie la relation suivante :

$$c^2 = \frac{\beta}{\alpha}.$$

L'inconnue ne porte plus sur la forme et la position du second membre, mais sur des coefficients des équations du phénomène. En effet, l'onde diffractée est la réponse de l'inclusion due à des propriétés physiques différentes de celles du milieu environnant. Cela revient à dire que nous connaissons les propriétés physiques du milieu en dehors de l'inclusion uniquement et nous cherchons à reconstruire le signal généré par l'inclusion. La première approximation est de supposer que les propriétés physiques sont égales à celles du milieu environnant dans tout le domaine Ω , donc aussi dans l'inclusion, dont par ailleurs nous ne connaissons pas plus la position. Le problème résolu par retournement temporel classique

s'écrit alors :

$$\alpha_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\beta_0 \nabla w) = 0 \quad \text{dans tout } \Omega, \quad (1.3.12)$$

et nous imposons à la solution w de prendre sur le bord du domaine la valeur des signaux enregistrés retournés temporellement. Les conditions initiales sont prises nulles, car nous supposons avoir émis assez longtemps lors du problème direct pour que le champ diffracté soit nul à la fin de l'expérience. À nouveau, l'approximation faite par le retournement temporel est importante et entraîne une limite de diffraction autour de l'inclusion.

En revanche, nous connaissons les coefficients en dehors de l'inclusion, soit dans $\Omega \setminus D$. Par conséquent, l'idée est de travailler dans le domaine tronqué $\Omega \setminus D$. Nous savons déjà quelle condition aux limites est satisfaite sur le bord $\partial\Omega$ imposée par les signaux réémis, et il nous reste à déterminer la condition aux limites à imposer sur le bord ∂D . Or rappelons que nous ne connaissons ni la position ni les propriétés de l'inclusion et a fortiori ni la condition satisfaite sur son bord. C'est là qu'intervient l'idée principale de la méthode *TRAC* : nous allons introduire dans le domaine de calcul Ω un sous-domaine que nous noterons B . Nous supposons que le sous-domaine B contient l'inclusion diffractante et ainsi nous pouvons travailler à présent dans le domaine tronqué $\Omega \setminus B$ dans lequel les coefficients de l'équation des ondes scalaire sont connus. Nous illustrons la nouvelle configuration d'étude sur la FIGURE 1.10b. Nous y avons coloré le nouveau domaine de calcul $\Omega \setminus B$.

Une fois de plus, le problème est sous-déterminé car nous n'avons pas imposé de condition aux limites sur le bord interne ∂B . En revanche, il n'est plus nécessaire de connaître l'inclusion, seules les propriétés du champ diffracté par une inclusion sont considérées. C'est là qu'interviennent les conditions aux limites absorbantes : le champ diffracté par l'inclusion lors du problème direct part vers l'infini. Par conséquent le champ diffracté satisfait une condition de radiation à l'infini et sur toute surface entourant l'inclusion, nous pouvons approcher cette condition par une condition aux limites absorbante. Lorsque nous effectuons du retournement temporel, il suffit alors d'imposer cette condition aux limites absorbante en l'ayant préalablement retournée en temps, désignée par *TRAC*, et appliquée sur le bord interne ∂B dont la normale est dirigée vers l'intérieur :

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\beta_0 \nabla u_R) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ u_R(t) = u(T_f - t) & \text{sur le bord externe } \partial\Omega \\ TRAC(u_R) = 0 & \text{sur le bord interne } \partial B, \end{cases} \quad (1.3.13)$$

avec des conditions initiales nulles. Grâce à la méthode *TRAC*, nous sommes capables de reconstruire le champ diffracté dans le domaine tronqué $\Omega \setminus B$. L'apport de cette méthode est qu'elle annule l'effet de la limite de diffraction et qu'elle permet d'avoir une connaissance exacte du champ diffracté sur une surface proche de l'inclusion.

Nous mettons encore une fois l'accent sur le fait que, dans le cadre de cette méthode, la condition aux limites absorbante retournée temporellement n'est pas utilisée de façon standard : non seulement elle n'est pas utilisée pour modéliser un milieu infini en étant imposée sur le bord interne et non plus externe, mais en plus elle est utilisée en champ proche de la source du champ diffracté, alors qu'en général ces conditions sont établies en champ lointain.

1.4 Applications de la méthode *TRAC*

Nous proposons deux applications à la méthode *TRAC*. La première application est le principe de *redatuming*. La seconde est une application aux problèmes inverses, notamment l'identification d'objets. Dans cette section, nous allons faire un état de l'art sur ces deux applications.

1.4.1 Première application : *Redatuming*

La première application est la réduction de la taille du domaine de calcul. En effet, la méthode *TRAC* propose une alternative au principe de *redatuming*. Tout d'abord précisons que le terme *redatuming* est un terme anglais dont il est difficile de donner une traduction française. Le mot *redatuming* est composé du mot *datum* ou *data* qui en anglais signifie donnée. Le suffixe *-ing* renvoie à l'idée de créer des données et le préfixe *re-* complète le terme en lui donnant le sens suivant : recréer des données à partir d'un échantillon de données pré-existent. Nous désignerons ce principe par sa terminologie anglaise en le mettant en italique pour plus de simplicité. Cette technique est utilisée essentiellement dans le domaine de la géophysique pour traiter les données sismiques.

Le *wave-equation datuming*, technique de *redatuming* la plus répandue, est un processus de propagation d'un champ d'onde entre deux interfaces de forme arbitraire. Développé essentiellement pour l'étude des ondes sismiques, l'intérêt du *redatuming* est de redéfinir une surface de référence sur laquelle les émetteurs et les récepteurs semblent être localisés.

Ce procédé a été développé en premier par John R. Berryhill dans [Ber79]. La méthode de Berryhill utilise le théorème intégral de Kirchhoff pour extrapolier la solution dans le cas de l'équation des ondes scalaire. De plus, l'opération de *redatuming* se fait sur des données après sommation des informations de chaque récepteur. Une généralisation de la méthode de *wave-equation datuming* est également proposée dans [Ber84] pour des données avant sommation. Il est important de noter que dans la méthode de *wave-equation datuming* de Berryhill, il n'utilise pas l'équation d'onde scalaire complète, mais son approximation paraxiale dans l'axe de propagation considéré. Par conséquent, la précision de la méthode de *wave-equation datuming* par Berryhill dépend fortement de la précision de l'équation paraxiale utilisée.

Des travaux plus récents utilisent la méthode de *redatuming*. Par exemple dans [LHxD07], les auteurs appliquent les techniques de *redatuming* pour faire de l'imagerie du sous-sol à partir de données obtenues par des géoradar¹⁰. Un autre article de Wim Mulder [Mul05] propose de reformuler le problème comme un problème inverse mal posé. L'utilisation qui est faite du *redatuming* dans ces deux articles est de redéfinir une surface de référence en profondeur dans le sous-sol. La FIGURE 1.11 illustre le principe de déplacement de la ligne de sources-récepteurs : les ondes semblent provenir de la ligne de transducteurs virtuels en pointillés et les enregistrements sont faits sur cette même ligne. Cela permet de travailler sur un domaine de calcul plus restreint, en-dessous de la ligne de transducteurs virtuels, et de s'affranchir des problèmes de propagation pouvant provenir de la couche supérieure du sous-sol.

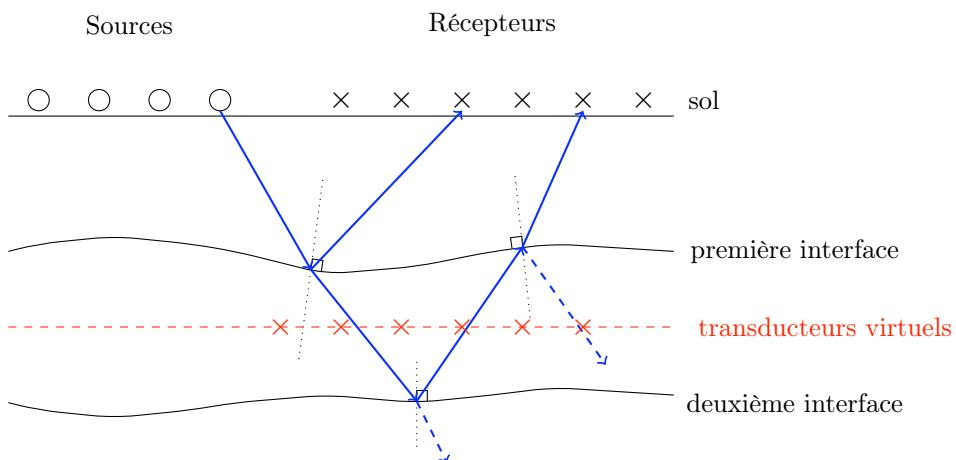


FIGURE 1.11 – Principe de *redatuming* en géophysique pour des données sismiques enregistrées en surface. Le *redatuming* déplace la ligne d'émetteurs et/ou de récepteurs sur une surface d'extrapolation (en pointillés) dans le sous-sol où semblent placés les transducteurs virtuels.

10. *Ground Penetrating Radar* (GPR) en anglais.

La méthode *TRAC* permet également le déplacement virtuel de la ligne de transducteurs. En effet, nous avons montré dans le § 1.3.2 que le principe de la méthode *TRAC* est de reconstituer le signal diffracté dans le domaine tronqué $\Omega \setminus B$, cf. FIGURE 1.10b. Par conséquent, nous avons reconstitué en particulier le signal diffracté sur le bord de B . Cette surface ∂B peut alors servir de ligne de transducteurs virtuels. À présent, les données enregistrées virtuellement sur le bord de B peuvent être utilisées pour résoudre un problème inverse avec n'importe quelle méthode de résolution dans le domaine de calcul plus petit B .

L'apport de la méthode *TRAC* dans le concept de *redatuming* est qu'elle est valide pour l'équation des ondes scalaire complète, nous n'avons plus besoin de l'approximation paraxiale, mais aussi pour d'autres systèmes hyperboliques comme les équations de Maxwell ou de l'élasto-dynamique. Nous pouvons également l'utiliser à la fois pour des problèmes en temporel et en fréquentiel. Bien que cette application ait un intérêt certain, nous ne l'exploiterons pas plus dans cette thèse. Nous la mentionnerons de temps à autres pour l'illustrer brièvement lorsque nous présenterons les résultats numériques de reconstitution de signaux avec la méthode *TRAC*.

1.4.2 Deuxième application : identification d'objets

La deuxième application de la méthode *TRAC* est une application aux problèmes inverses. Nous allons l'utiliser pour identifier une inclusion inconnue dans le milieu en se servant du sous-domaine B pour « traquer »¹¹ ladite inclusion inconnue.

L'identification d'objets est un sujet de recherche important dans le domaine des problèmes inverses. De nombreuses techniques, méthodes ou algorithmes existent déjà dans la littérature. Nous espérons apporter avec la méthode *TRAC* des réponses aux problèmes de résolution et de comptage qui existent encore avec les techniques actuelles. Notons par ailleurs, que les différentes méthodes que nous allons citer par la suite n'utilisent pas toutes les techniques de retournement temporel.

Commençons par rappeler le problème. Dans un milieu supposé non dissipatif se trouve une inclusion dont les propriétés diffèrent de celles du milieu environnant. Lorsque l'on illumine ou stimule l'inclusion à l'aide d'un signal, celle-ci renvoie un champ diffracté, ceci à cause des propriétés différentes. Par exemple, en acoustique, le signal envoyé est une onde sonore ou ultrasonore et les propriétés physiques considérées sont la densité ρ

11. Petit jeu de mots en passant : T.R.A.C. et traquer, *to track* en anglais.

et la compressibilité χ . De même en élasticité, le signal envoyé est une onde élastique souvent engendrée par une pression et les propriétés physiques considérées sont la densité ρ , le coefficient de compression λ et le coefficient de cisaillement μ . Finalement, en électromagnétisme, les propriétés physiques considérées sont la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ . Les notations utilisées ci-dessus correspondent aux notations usuelles dans chacun des domaines, il n'y a aucun lien entre la perméabilité magnétique et le coefficient de cisaillement a priori. De même, la compressibilité est notée χ , K ou λ selon que l'on travaille en acoustique ou en élastodynamique.

Sur la FIGURE 1.12, nous montrons les trois étapes constituant la résolution d'un problème inverse. La première étape est une étape d'émission pendant laquelle on envoie un signal dans le milieu qui va éclairer l'objet diffractant. La seconde étape est une étape de réception et consiste en l'enregistrement de la réponse de l'objet diffractant : c'est le champ diffracté. La troisième étape est l'étape de résolution du problème inverse à partir des données enregistrées. Dans le cas du retournement temporel de la FIGURE 1.12, il s'agit à nouveau d'une étape d'émission, où l'on a au préalable renversé les signaux en temps avant de les réémettre dans le milieu. Ces signaux vont se focaliser à l'endroit où se trouve l'objet diffractant. Dans le même esprit, nous pouvons également chercher à identifier une fissure ou un défaut dans un matériau en considérant le champ diffracté lié à ce défaut.

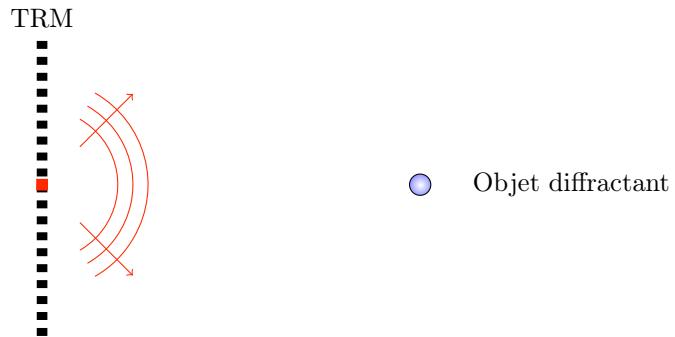
Les deux premières étapes sont communes à tous les problèmes inverses, ce sont les étapes de création des données. La troisième étape en revanche dépend de la méthode que l'on souhaite utiliser. Sur la FIGURE 1.12, il s'agit de retournement temporel classique, mais toutes les techniques de résolution de problèmes inverses ne sont pas basées sur le retournement temporel.

Nous pouvons citer trois grandes classes de méthodes de résolution de problèmes inverses : des méthodes itératives, des méthodes de décomposition et des méthodes d'échantillonnage ou d'investigation.

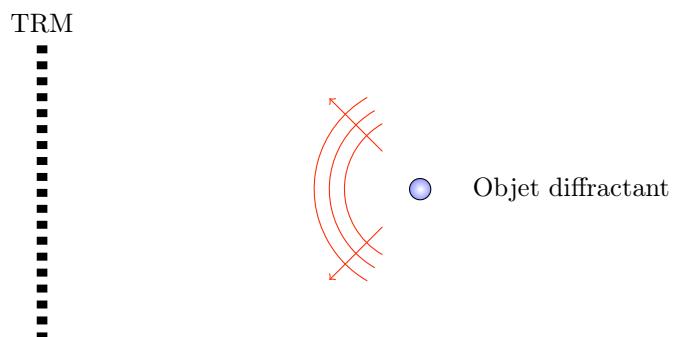
Dans la catégorie des méthodes itératives, nous mentionnons en particulier la méthode des moindres carrés ou la méthode de Monte-Carlo, dont nous pouvons trouver une introduction à la théorie des problèmes inverses dans [Tar05]. Dans cette même catégorie, il y a aussi la méthode des surfaces de niveau¹² dont nous pouvons trouver des applications aux problèmes inverses dans [San96, Bur01, BO05].

12. *Level-Set method* en anglais.

Étape 1 : un signal incident est envoyé dans le milieu pour éclairer l'objet



Étape 2 : la réponse de l'objet diffractant est enregistrée sur le TRM



Étape 3 : les signaux retournés en temps sont renvoyés et se focalisent sur l'objet à identifier

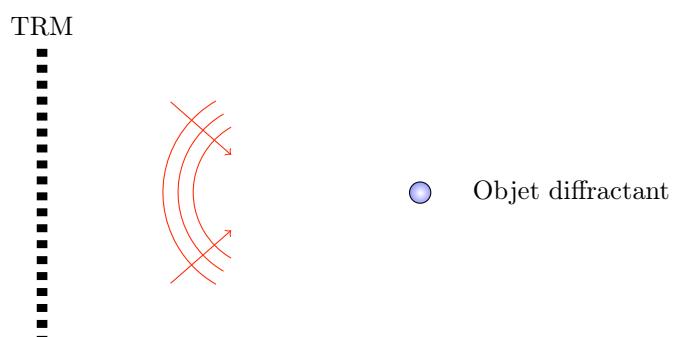


FIGURE 1.12 – Schémas des trois étapes pour l'identification d'objets.

La deuxième catégorie de techniques, que nous évoquons, est la catégorie des méthodes de décomposition. Parmi elles, nous citons l'algorithme MUSIC¹³. Cet algorithme est en général utilisé pour des problèmes de traitement du signal comme une méthode qui permet de traiter individuellement les fréquences d'un signal multi-harmonique, cf. [The92]. Nous pouvons également utiliser cet algorithme pour récupérer les informations en fréquence du champ diffracté. Une description détaillée de cet algorithme est proposée dans [Dev00] et [Che01]. Pour des applications de l'algorithme MUSIC à l'imagerie par retournement temporel, nous pouvons également nous référer à [LD03], [Kir02] et [AIL05].

Dans les méthodes de décomposition, nous souhaitons à présent mentionner la méthode D.O.R.T. pour Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel décrite pour la première fois par les physiciens C. Prada et M. Fink dans [PF94]. La décomposition s'inspire de la méthode de SVD. Cette méthode sera ensuite utilisée pour la détection de deux objets diffractants dans [PMSF96] et investiguée pour des diffracteurs petits devant la longueur d'onde dans [HR04] et [APRT08]. Enfin, nous citons la méthode de source ponctuelle ou *point-source method* introduite d'abord par C. D. Lines et S. N. Chandler-Wilde [LCW05], puis reprise par R. Potthast et al. dans [PFN10].

Dans les techniques de résolution de problèmes inverses, nous pouvons aussi mentionner les méthodes d'échantillonnage d'abord introduites par D. Colton et A. Kirsch [CK96], puis dans une version plus récente de D. Colton, J. Coyle et P. Monk [CCM00]. Les méthodes d'échantillonnage comme la *linear sampling method* (méthode d'échantillonnage linéaire) sont en général introduites dans le domaine fréquentiel, notamment pour l'équation de Helmholtz. Pour plus de détails, nous renvoyons aux articles cités ci-dessus ou encore à [CC06]. De nouveaux développements sont proposés également dans [EHS⁺10] pour les équations de Maxwell harmoniques et dans [CHLM10] pour l'équation des ondes dans le domaine temporel. Une alternative aux méthodes d'échantillonnage est la méthode de factorisation décrite par A. Kirsch et N. Grinberg dans [KG08] et reprise par A. Lechleiter [Lec09] d'abord dans le domaine fréquentiel, puis dans le domaine temporel avec H. Haddar [HL12].

En parallèle des méthodes d'échantillonnage, il existe des méthodes d'investigation¹⁴. Une autre méthode d'investigation est la méthode des sources singulières, cf. [BHEP10]. Contrairement à la méthode de source ponctuelle, pour laquelle une seule onde incidente est utilisée et il est nécessaire de connaître la condition au bord de l'inclusion recherchée, la méthode des sources singulières utilise des mesures provenant de plusieurs ondes incidentes

13. Pour *MUltiple-SIgnal-Classification* en anglais, soit classification de signaux multiples.

14. *Probe method* en anglais.

et ne nécessite pas la connaissance des conditions au bord de l'inclusion. Les méthodes d'investigation sont en général précédées d'une longue étude expérimentale en grandeur nature ou numériquement, d'où elles découlent. Une étude sur les méthodes d'échantillonnage et d'investigation récapitule toutes les méthodes citées ci-dessus dans [Pot06].

Cette liste n'est pas exhaustive, il existe encore bien d'autres techniques. Nous allons citer les travaux de M. Bonnet dans la détection de fissures dans les matériaux par tomographie, cf. [BB09] et [Bon11], ainsi que les travaux de L. Borcea, G. Papanicolaou et C. Tsogka sur le filtrage des données pour l'imagerie interférométrique par retournement temporel dans des milieux aléatoires, cf. [BPTB02], [BPT03] et plus récemment [BGdCPT09]. Il existe aussi une technique de reconstruction qui utilise la quasi-réversibilité, dont nous pouvons trouver les principes dans [LL67], [CK07], puis [BD10]. Une dernière méthode, cette fois-ci pour identifier l'inclusion en reconstituant ses coefficients physiques, a été développée dans le cadre des tumeurs du cerveau dans [dBO10].

La méthode *TRAC* que nous proposons est un complément à toutes ces méthodes qui s'appliquent à différents problèmes hyperboliques (acoustique, électromagnétisme, élastodynamique, etc...) aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Nous montrerons au cours de cette thèse, que cette méthode permet la détection d'objet de façon précise lorsque nous travaillons en ouverture totale notamment. Nous verrons comment nous allons l'utiliser pour traquer l'inclusion en faisant varier la taille, la forme et la position de sous-domaine B . Nous établirons par ailleurs des critères qui nous permettrons de quantifier rapidement si l'inclusion est bien contenue dans le sous-domaine B ou non.

1.5 Structure de la thèse

L'objectif de la thèse est de proposer de nouvelles méthodes de reconstruction de signaux et d'identification basées sur les techniques de retournement temporel. Nous y présentons en particulier la méthode *TRAC* que nous avons déjà mentionnée dans le § 1.3.2. L'étude de cette méthode est le cœur de ma thèse. Ce manuscrit est composé de deux parties.

La première partie est destinée à présenter de façon détaillée la méthode *TRAC* dans le cas d'une ligne de transducteurs à ouverture totale. Cette partie est composée de quatre chapitres de 2 à 5. Le chapitre 2 présente la méthode *TRAC* qui permet de reconstituer un signal, à partir de mesures au bord, à l'intérieur du domaine délimité par la ligne d'émetteurs-

récepteurs. Nous considérons d'abord le cas général, puis le cas de l'équation des ondes scalaire et des équations de Maxwell dans le domaine temporel. Nous procérons ensuite de même dans le cas fréquentiel, en prenant pour exemple l'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell harmoniques.

Dans le chapitre 3, nous faisons les premiers calculs analytiques et numériques en dimension 1, d'abord pour l'équation de Helmholtz, puis pour l'équation des ondes. Cela nous permet de valider la méthode *TRAC* en dimension 1.

Une estimation d'énergie est ensuite proposée dans une géométrie particulière dans le chapitre 4. Cette estimation établie en dimension 3 permet d'assurer la stabilité du problème de retournement temporel avec *TRAC* bien que le terme d'ordre 0 de cette condition soit anti-dissipatif.

Enfin dans le chapitre 5, nous présentons nos résultats numériques de reconstruction de signaux en dimension 2. Nous commençons par présenter un résultat numérique où nous plaçons une condition de Neumann sur le bord du sous-domaine B au lieu d'une condition absorbante retournée en temps. Ce test montre que le fait d'enlever la partie du domaine contenant l'inclusion ne suffit pas, le choix de la condition joue un rôle tout aussi important. Nous procérons ensuite à des tests numériques de la méthode *TRAC* dans le domaine temporel d'abord, puis dans le domaine fréquentiel. Pour chaque cas, nous commençons par rappeler les systèmes d'équations étudiés et les paramètres mis en jeu. Nous écrivons ensuite la discrétisation des équations : en espace nous choisissons de travailler en éléments finis P1, que nous pouvons aisément implémenter grâce au logiciel FREEFEM++ [Hec10]. En temps, nous prenons un schéma centré d'ordre 2. Dans ces conditions, nous effectuons des expériences numériques de retournement temporel avec *TRAC* pour des inclusions qui peuvent être molles (“soft”), dures (“hard”) ou pénétrables. À travers nos résultats numériques, nous montrons la faculté de la méthode à recréer le passé de l'onde, selon l'expression consacrée de M. Fink. Nous mettons en évidence que nous arrivons à reconstituer le signal en surmontant le problème de la limite de diffraction observé dans les exemples préliminaires. Nous montrons ainsi une première application de la méthode *TRAC* : la réduction de la taille du domaine de calcul. L'intérêt de cette application est de diminuer les coûts de calcul lors de l'exécution d'une technique classique de problèmes inverses dans un domaine de recherche plus petit. Cette application est valable dans le domaine temporel, ainsi que dans le domaine fréquentiel. De plus, la méthode *TRAC* se révèle être très robuste vis-à-vis du bruit sur les données enregistrées.

Pour conclure cette partie, nous incluons l'article [AKNT11] paru dans *Inverse Problems* en 2011, dans lequel la première partie récapitule de façon plus concise l'étude de la première partie de la thèse. La suite est consacrée à une deuxième application de la méthode *TRAC*, l'identification d'objets, que nous détaillons dans la partie suivante.

La seconde partie de la thèse est destinée à appliquer la méthode *TRAC* aux problèmes inverses. En particulier, nous montrons sa faculté à détecter une inclusion dans un milieu homogène non-dissipatif dans le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs (LER) à ouverture totale dans le chapitre 6. Nous proposons alors deux critères pour quantifier rapidement le fait que le sous-domaine-test B contient l'inclusion D dans son intégralité ou non. Dans le domaine temporel, le premier critère est celui de l'instant final. Il permet de quantifier la quantité de signal restant dans le domaine de calcul à la fin de la simulation. Quand le sous-domaine-test est bien positionné, nous ne devons plus avoir de signal dans le domaine de calcul. Le deuxième critère s'inspire du fait que l'onde diffractée vérifie une condition de radiation à l'infini. Pour le mettre en œuvre, nous introduisons une surface artificielle dans notre domaine de calcul $\Omega \setminus B$ et estimons la condition absorbante sur cette surface. Lorsque le sous-domaine-test est correctement placé, la condition doit être nulle. Sinon, cela nous indique qu'une partie de l'inclusion est encore présente dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$. Ces deux critères s'avèrent robustes vis-à-vis du bruit, mais ne sont valables qu'en ouverture totale.

De la même façon, nous établissons deux critères pour détecter une inclusion dans le domaine fréquentiel. Le premier critère consiste à considérer la dérivée normale sur le bord contenant les transducteurs. Nous pouvons en effet obtenir les mesures du champ et de sa dérivée normale sur le bord. Nous n'utilisons que l'information sur le champ lorsque nous renvoyons les signaux retournés temporellement dans le milieu. Le critère compare les dérivées normales sur le bord du champ diffracté mesuré et du champ diffracté reconstitué. Comme dans le cas du domaine temporel, nous proposons un second critère basé sur la condition absorbante retournée temporellement que nous appliquons sur une surface artificielle introduite dans le domaine tronqué $\Omega \setminus B$. Bien que ces critères se révèlent efficaces dans l'identification d'objets lorsque nous travaillons sans bruit sur les données, le critère de la dérivée normale s'avère sensible au bruit, tandis que le critère de la condition absorbante est plus robuste.

Dans le chapitre 7, nous nous intéressons à la faculté de la méthode *TRAC* à la reconstruction de signaux et à l'identification d'objets dans le cas d'une LER à ouverture partielle, uniquement dans le domaine temporel. Cette configuration s'inspire davantage des applications en géophysique et nous traitons plus particulièrement la détection de mines dans le sous-sol. Dans cette configuration, nous ne pouvons bien sûr pas reconstruire le signal dans son intégralité, mais nous sommes capables de le reconstituer dans un cône de convergence. Afin de procéder à l'identification d'objets, les critères établis pour l'ouverture totale ne sont plus valables en ouverture partielle. Nous en proposons un autre qui utilise le principe de corrélation des méthodes de migration, comme la *Reverse Time Migration*. Nous investiguons enfin la méthode sur la discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches. Notons, par ailleurs, que ce nouveau critère se révèle très robuste vis-à-vis du bruit sur les données, encore plus que les critères de l'instant final et de la condition absorbante.

Finalement dans le chapitre 8, nous nous plaçons dans un milieu non-homogène et dissipatif. Bien que les équations dissipatives ne soient plus invariantes par retournement temporel, nous traitons le problème de façon similaire en ajoutant toutefois un terme anti-dissipatif qui se révèle être stable pour un temps court de propagation. Nous proposons deux types de milieux non-homogènes : un milieu aléatoire inspiré de mesures dans un sol terieux, d'après [Ige08], et un milieu à deux ou trois couches, chacune étant homogène. Dans le cas du milieu aléatoire, il est important de mentionner que pour effectuer le retournement temporel avec *TRAC*, nous supposons le milieu ambiant homogène et prenons la moyenne des paramètres physiques mis en jeu. Dans le cas d'un milieu à couches, nous supposons connus les positions des couches ainsi que les paramètres les définissant. Là encore, nous investiguons la méthode sur sa faculté à discriminer entre une seule inclusion et deux inclusions proches.

Pour conclure cette partie, nous incluons l'article [AKN] à paraître dans *Wave Motion*, dans lequel nous récapitulons de façon concise l'étude faite sur la méthode *TRAC* en ouverture partielle, ainsi que sur la discrimination entre une et deux inclusions en milieu homogène non-dissipatif.

Première partie

**Méthode de Retournement Temporel
avec Conditions aux limites Absorbantes :
Principe et Faisabilité**

Introduction

Dans cette première partie, nous allons décrire la méthode *TRAC* dans le cas général pour une ouverture totale de la ligne d'émetteurs-récepteurs (LER) et effectuer nos premiers tests numériques. Cette partie est constituée de quatre chapitres.

Dans le chapitre 2, nous allons présenter le principe de la méthode de retournement temporel avec conditions aux limites absorbantes (*TRAC*). Dans une première section, nous nous intéresserons au domaine temporel et décrirons le principe général pour un opérateur hyperbolique linéaire. Ensuite, nous détaillerons le principe de la méthode *TRAC* dans le cas particulier de l'équation des ondes scalaire ainsi que pour le système de Maxwell. Finalement, nous proposerons une description similaire en régime harmonique avec deux exemples : l'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell harmoniques.

Dans le chapitre 3, nous allons montrer la faisabilité de la méthode en dimension 1. Tout d'abord, nous allons écrire analytiquement les solutions des problèmes, direct et retourné en temps, dans le cas de l'équation de Helmholtz en dimension 1. Puis, nous présenterons nos premiers tests numériques pour l'équation des ondes en dimension 1.

Dans le chapitre 4, nous allons étudier la stabilité de la méthode en montrant une estimation d'énergie dans une géométrie particulière en dimension 3.

Dans le chapitre 5, nous allons présenter les résultats numériques en dimension 2 pour l'équation des ondes scalaire et l'équation de Helmholtz. Nous traiterons de la même manière des inclusions molles, dures ou pénétrables. Nous commencerons par ailleurs en rappelant les équations et les paramètres mis en jeu. Puis nous préciserons la discréétisation numérique utilisée. Finalement nous illustrerons nos résultats et montrerons la capacité de la méthode à reconstituer les signaux. Nous mentionnerons rapidement la première application quant à la réduction de la taille du domaine de calcul.

Finalement, nous conclurons cette partie en incluant dans la thèse le premier article publié dans le journal *Inverse Problems*.

Chapitre 2

Principe de la Méthode *TRAC*

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons le principe de la méthode de retournement temporel avec conditions aux limites absorbantes (*TRAC*). Dans une première section, nous nous intéressons au domaine temporel et décrivons le principe général pour un opérateur hyperbolique linéaire. Ensuite, nous détaillons le principe de la méthode *TRAC* dans le cas particulier de l'équation des ondes scalaire ainsi que pour le système de Maxwell. Finalement, nous proposons une description similaire en régime harmonique avec ses deux exemples, l'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell harmoniques.

Sommaire

2.1 Méthode <i>TRAC</i> dans le Domaine Temporel	40
2.1.1 Principe général dans le domaine temporel	40
2.1.2 Principe dans le cas de l'équation des ondes scalaire	44
2.1.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell	47
2.2 Méthode <i>TRAC</i> dans le Domaine Fréquentiel	48
2.2.1 Principe général dans le domaine fréquentiel	49
2.2.2 Principe dans le cas de l'équation de Helmholtz	50
2.2.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell harmoniques	51

2.1 Méthode *TRAC* dans le Domaine Temporel

Dans cette section, nous présentons le principe de la méthode de retournement temporel avec conditions absorbantes, dite *TRAC*, dans le cas d'un opérateur hyperbolique linéaire général tout d'abord, puis nous l'appliquons à deux exemples, tels que l'équation des ondes et le système de Maxwell.

2.1.1 Principe général dans le domaine temporel

Notre nouvelle méthode, que nous dénommons *TRAC* de l'anglais *Time Reversed Absorbing Condition*, soit condition absorbante retournée temporellement, permet de « recréer le passé » sans connaître la source qui a émis les signaux rétropropagés. Ceci a été rendu possible en combinant des techniques de retournement temporel et des conditions aux limites absorbantes. Après avoir enlevé une petite région contenant la source, nous avons introduit des conditions absorbantes retournées en temps (*TRAC*). Décrivons cette approche.

Nous considérons une onde incidente U^I qui illumine une inclusion D caractérisée par des propriétés physiques différentes de celles de son milieu environnant. Notons ∂D le bord de cette inclusion. Le champ total U^T peut être décomposé en un champ incident et un champ diffracté U^S , soit $U^T := U^I + U^S$. Nous considérons le problème en dimension d où $d = 1, 2, 3$ et nous supposons que le champ total vérifie le problème hyperbolique linéaire (ou système d'équations), dont l'opérateur est noté \mathcal{L} , que nous écrirons

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(U^T) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d, \\ (U^T - U^I)(t, \vec{x}) \text{ satisfait une condition de radiation à l'infini,} \\ \text{conditions initiales homogènes.} \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Le champ diffracté satisfait une condition de radiation à l'infini qui assure l'unicité de la solution. Pour l'équation des ondes, nous utilisons de manière classique une condition de Sommerfeld, ou de Silver-Müller pour les équations de Maxwell, cf. § 2.1.2 et 2.1.3, ou [AKNT11].

Notons Γ_R la surface qui englobe D , sur laquelle nous avons positionné les transducteurs permettant l'enregistrement du champ diffracté, et Ω le domaine borné délimité par le bord Γ_R . Nous supposons que l'onde incidente U^I est engendrée par une source ponctuelle telle qu'après un temps T_f , le champ total U^T est négligeable dans le domaine borné Ω , cf. FIGURE 2.1.

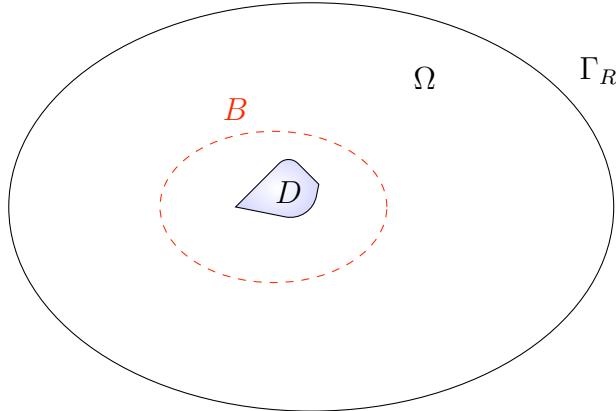


FIGURE 2.1 – Une inclusion D dans \mathbb{R}^d entourée par Γ_R , une ligne de capteurs, qui délimite le domaine de calcul Ω . En pointillé, l'ellipse B représente le sous-domaine-test pour effectuer la méthode *TRAC*.

Soit V un champ qui vérifie le problème hyperbolique linéaire $\mathcal{L}(V) = 0$. Nous notons V_R le champ retourné en temps correspondant, qui vérifie alors la même équation physique, $V_R := V(T_f - t, \vec{x})$. Nous supposons que nous avons enregistré la valeur du champ total U^T sur le bord Γ_R qui entoure le domaine Ω . Rappelons que le champ direct se propage dans le milieu infini et n'est pas perturbé par le bord Γ_R . Notre but est d'écrire un problème aux limites dont la solution est le champ total retourné en temps. Les propriétés physiques de l'inclusion ou sa position exacte sont inconnues. Les seules données que nous avons sont les propriétés physiques du milieu environnant, c'est-à-dire l'opérateur \mathcal{L} à l'extérieur de D . Nous le noterons \mathcal{L}_0 . Ainsi, U_R^T vérifie l'équation suivante

$$\mathcal{L}_0(U_R^T) = 0 \text{ dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus D. \quad (2.1.2)$$

Nous imposons des conditions de Dirichlet sur Γ_R égales au retourné temporel des champs enregistrés, et des conditions initiales homogènes. Le point-clé est que le problème aux limites ci-dessus est sous-déterminé, en effet il nous manque la condition aux limites sur le bord de l'inclusion D de façon à définir un problème aux limites bien posé pour le champ retourné en temps U_R^T dans $\Omega \setminus D$. Lors de la résolution de problèmes inverses, ni la forme, ni la position de l'inclusion D ne sont connues et souvent nous ne connaissons pas non plus le type de condition aux limites (dur ou mou) vérifié sur le bord de l'inclusion.

Afin de surmonter ces difficultés, l'approche classique par exemple résout le problème (2.1.2) dans le domaine entier Ω , en supposant qu'il n'y a pas d'inclusion D , cf. [LMF⁺06] et ses références. Notons W_R^T cette solution retournée en temps « approchée », nous avons dans le domaine entier Ω :

$$\mathcal{L}_0(W_R^T) = 0 \text{ dans } (0, T_f) \times \Omega, \quad (2.1.3)$$

avec des conditions de Dirichlet sur Γ_R valant le retourné temporel des champs enregistrés, et des conditions initiales nulles. On peut facilement vérifier que cette solution approchée W_R^T diffère du retourné temporel du champ total U_R^T .

Remarque 2.1.1. *Une autre possibilité est d'essayer de reconstruire le retourné temporel du champ diffracté U_R^S au lieu du retourné temporel du champ total U_R^T . Dans ce cas, l'approche classique consiste à résoudre*

$$\mathcal{L}_0(W_R^S) = 0 \text{ dans } (0, T_f) \times \Omega$$

avec des conditions de Dirichlet sur Γ_R valant le retourné temporel des champs enregistrés moins le retourné temporel du champ incident, et des conditions initiales nulles. Il est facile de vérifier que cette solution retournée temporelle approchée W_R^S diffère de la même manière de U_R^S .

Pour écrire un problème aux limites vérifié par U_R^T sans connaissance des propriétés physiques de l'inclusion D , ni sa position exacte, nous introduisons un sous-domaine B englobant l'inclusion D , cf. FIGURE 2.1. Il nous faut alors déterminer la condition aux limites spécifique à U_R^S sur le bord ∂B , de façon à ce que la solution de ce nouveau problème coïncide avec U_R^T restreint à $\Omega \setminus B$.

Afin de déterminer la condition au bord, nous remarquons que $\mathcal{L}_0(U^I) = 0$, donc que le champ diffracté satisfait

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(U^S) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d \setminus D \\ U^S \text{ satisfait une condition de radiation à l'}\infty \end{cases} \quad (2.1.4)$$

et des conditions initiales nulles. Nous utilisons maintenant le fait que le milieu environnant $\Omega \setminus D$ est homogène. Tout d'abord, notre première étape sera de regarder quelle relation est satisfaite par U^S sur ∂B . Des conditions aux limites absorbantes numériques, par exemple [EM77] et [BT80], donnent des approximations précises à une condition aux limites parfaitement absorbante. Nous notons ABC une condition aux limites absorbante qui peut être écrite formellement

$$\text{ABC}(U^S) = 0 \text{ sur } \partial B. \quad (2.1.5)$$

Comme $U^T = U^I + U^S$, nous avons, avec l'approximation due à la construction de la condition aux limites absorbante, $\text{ABC}(U^T - U^I) = 0$ ou de façon équivalente

$\text{ABC}(U^T) = \text{ABC}(U^I)$. Le point-clé est de *retourner temporellement* cette relation dans une relation que nous noterons

$$\text{TRAC}(U_R^T) = g(U^I) \text{ sur } \partial B \quad (2.1.6)$$

où $g(U^I)$ est une fonction connue qui est liée au retournement temporel de $\text{ABC}(U^I)$. La forme de *TRAC* et $g(U^I)$ sera explicitée dans les sections suivantes en fonction des problèmes spécifiques. Nous verrons que la condition aux limites *ABC* est différente de sa correspondante retournée en temps *TRAC* qui sera renvoyée comme étant une *TRAC* (condition absorbante retournée temporellement ou *Time Reversed Absorbing Condition* en anglais).

Pour résumer, le problème vérifié par U_R^T dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$ peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_0(U_R^T) & = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(U_R^T) & = g(U^I) & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \\ U_R^T(t, \vec{x}) & = U^T(T_f - t, \vec{x}) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \end{array} \right. \quad (2.1.7)$$

avec des conditions initiales homogènes. En résolvant (2.1.7), nous sommes capables de reconstruire le champ total U_R^T en tout point du domaine restreint $\Omega \setminus B$ pour tout temps dans $(0, T_f)$ avec une très bonne précision.

Dans [AKNT10, AKNT11], nous avons travaillé à la reconstitution du champ total. En revanche, par la suite, nous nous sommes plutôt intéressés à la reconstitution du champ diffracté. Nous présentons alors le problème aux limites associé.

Le point-clé est de *retourner temporellement* la relation (2.1.5) dans une relation que nous noterons

$$\text{TRAC}(U_R^S) = 0 \text{ sur } \partial B. \quad (2.1.8)$$

(La condition *TRAC* en (2.1.8) peut être la même que la condition *TRAC* dans l'équation (2.1.6) quand le tout est linéaire). Nous en déduisons le problème vérifié par U_R^S dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_0(U_R^S) & = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(U_R^S) & = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \\ U_R^S(t, \vec{x}) & = U^S(T_f - t, \vec{x}) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

avec des conditions initiales homogènes. En résolvant (2.1.9), nous sommes capables de reconstruire le champ diffracté U_R^S en tout point du domaine restreint $\Omega \setminus B$ pour tout temps dans $(0, T_f)$ avec une très bonne précision.

Nous illustrons notre approche en dérivant explicitement le problème (2.1.7) de l'équation (2.1.1) (ou (2.1.9) de (2.1.4)) pour plusieurs exemples classiques : l'équation des ondes (§ 2.1.2) et le système de Maxwell (§ 2.1.3). Le même procédé peut être aussi appliqué au système de l'élasticité linéaire et à des problèmes hyperboliques non linéaires avant la formation de choc.

2.1.2 Principe dans le cas de l'équation des ondes scalaire

Nous considérons d'abord le cas de l'équation des ondes acoustiques tridimensionnelle avec une vitesse de propagation c qui est constante à l'extérieur de l'inclusion D . Nous notons u^T le champ total qui se décompose en un champ incident u^I et un champ diffracté u^S . Avec ces notations, l'équation (2.1.4) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^S}{\partial t^2} - c^2 \Delta u^S = 0 \text{ dans } (0, T_f) \times \mathbb{R}^3 \setminus D \\ u^S(t, \vec{x}) \text{ satisfait une condition de Sommerfeld à l'}\infty \\ \text{conditions initiales homogènes.} \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

Ce problème est sous-déterminé car nous ne spécifions pas la condition au bord sur ∂D . Ainsi u^S n'est pas nécessairement nul. Nous définissons un champ total retourné temporellement u_R^T par $u_R^T(t, \cdot) := u^T(T_f - t, \cdot)$. Comme l'équation d'onde implique uniquement une dérivée seconde en temps, cette définition nous assure que le champ retourné en temps u_R^T est aussi une solution de l'équation d'onde. Afin d'écrire la condition aux limites absorbante (2.1.5), nous considérons pour simplifier que le sous-domaine B est une boule de rayon ρ centrée à l'origine, que nous noterons B_ρ . Soit r la coordonnée radiale, nous considérons la condition aux limites absorbante de Bayliss-Turkel d'ordre 1 BT^1 [BT80, BGT82] :

$$\frac{\partial u^S}{\partial t} + c \frac{\partial u^S}{\partial r} + c \frac{u^S}{r} = 0. \quad (2.1.11)$$

Afin de simplifier la dérivation en dimension 3, nous utilisons la forme équivalente de l'équation (2.1.11) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u^S) + c \frac{\partial}{\partial r}(r u^S) = 0. \quad (2.1.12)$$

Cette équation était à l'origine développée pour être établie sur une frontière externe afin de réduire les réflexions et de simuler ainsi un domaine infini. Dans notre application, cette condition sera maintenant posée sur la surface artificielle interne B_ρ (cf. FIGURE 2.1) de façon à ce que le système ne voit pas l'intérieur de la boule. Dans ce cas, r est mesuré depuis le centre de la boule à sa frontière. Nous exprimons ensuite (2.1.6) explicitement pour l'équation retournée en temps (2.1.12). Le champ diffracté u^S vérifie de manière approchée

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u^S(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(r u^S(t, \cdot)) = 0.$$

En utilisant le fait que $u_R^S(t, \cdot) = u^S(T_f - t, \cdot)$, nous obtenons

$$(-\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^S) + c \frac{\partial}{\partial r}(r u_R^S))|_{T_f-t} = 0,$$

ou de façon équivalente,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^S(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(r u_R^S(t, \cdot)) = 0.$$

Remarquons que, sur ∂B_ρ , $\partial / \partial r = -\partial / \partial n$ où n est la normale extérieure au domaine restreint $\Omega \setminus B_\rho$. En multipliant par -1 , nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^S(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^S(t, \cdot)) = 0. \quad (2.1.13)$$

Une autre façon d'écrire cette condition aux limites est d'utiliser la relation linéaire $u^T = u^I + u^S$ et en retournant temporellement tous les champs

$$u_R^I(t, \cdot) := u^I(T_f - t, \cdot) \quad \text{and} \quad u_R^T(t, \cdot) := u^T(T_f - t, \cdot)$$

l'équation (2.1.13) peut être exprimée par

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^T(t, \cdot)) = \frac{\partial}{\partial t}(r u_R^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^I(t, \cdot)). \quad (2.1.14)$$

Cette expression est l'homologue de l'équation (2.1.6). Comme $\partial r / \partial n = -1$, la relation (2.1.14) peut se réécrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^T(t, \cdot)) - c \frac{u_R^T(t, \cdot)}{r} = \frac{\partial}{\partial t}(u_R^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^I(t, \cdot)) - c \frac{u_R^I(t, \cdot)}{r}. \quad (2.1.15)$$

Ainsi nous définissons l'opérateur TRAC associé à la condition aux limites par :

$$\text{TRAC}(u_R) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R(t, \cdot)) - c \frac{u_R(t, \cdot)}{r}. \quad (2.1.16)$$

Remarquez que, en raison du signe moins devant le terme u_R/r , la *TRAC* (2.1.15) n'est pas la condition aux limites absorbante BT^1 . Le problème retourné en temps analogue à (2.1.7) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_R^T = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B_\rho \\ \text{TRAC}(u_R^T) = \text{TRAC}(u_R^I) & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B_\rho \\ u_R^T(t, \vec{x}) = u^T(T_f - t, \vec{x}) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \\ \text{conditions initiales homogènes.} \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

De manière similaire, le problème retourné en temps analogue à (2.1.9) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_R^S}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_R^S = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B_\rho \\ \text{TRAC}(u_R^S) = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B_\rho \\ u_R^S(t, \vec{x}) = u^S(T_f - t, \vec{x}) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \\ \text{conditions initiales homogènes.} \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

La *TRAC* n'est surtout pas l'*ABC* BT^1 standard, mais a un terme « anti-absorbant » $(-cu_R^T/r)$. Cela nous amène à nous poser la question du caractère bien posé du *BVP* (2.1.17). Bien que nous n'ayons pas développé de théorie générale, nous démontrons une estimation d'énergie pour ce problème dans une géométrie particulière, cf. chapitre 4 ou [AKNT10]. Après de nombreux calculs numériques, nous n'avons jamais rencontré de problèmes d'instabilité.

La généralisation de (2.1.16) en dimension 2 est directe, cf. [BT80, BGT82]. Dans les calculs ci-dessus, il suffit de remplacer r par \sqrt{r} et $1/r$ par $1/(2r)$, et l'équation (2.1.16) devient :

$$\frac{\partial u^S}{\partial t} + c \frac{\partial u^S}{\partial r} + c \frac{u^S}{2r} = 0. \quad (2.1.19)$$

Nous avons supposé par ailleurs, pour simplifier, que la surface ∂B est une sphère ou un cercle. Puisque nous cherchons une position approchée de l'inclusion, c'est suffisant. Pour un corps allongé, la boule pourra être remplacée par une ellipse ou une surface sphéroïdale, cf. § 5.1. Les conditions absorbantes dans ces cas-ci ont été développées dans [MTH08, MT09, BDSG09]. Pour des surfaces plus générales, de nombreuses conditions absorbantes

ont aussi été développées, cf. par exemple [ABB99, KTU87]. Des comparaisons entre plusieurs options sont présentées dans [MTH08, MT09]. Comme montré plus haut, une méthode *TRAC* d'ordre 1 renverse simplement le signe du terme non-différentié de la condition absorbante d'ordre 1 correspondante. Ainsi, une condition *TRAC* d'ordre 1 pour une surface générale en dimension 2 est donnée par :

$$\text{TRAC}(u_R) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R(t, \cdot)) - \frac{c\kappa}{2}u_R(t, \cdot) \quad (2.1.20)$$

où κ est la courbure du bord de la surface B .

2.1.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell

Comme deuxième exemple, nous considérons les équations de Maxwell en dimension 3. Pour simplifier, nous supposons qu'à l'extérieur de l'inclusion, le milieu est linéaire, homogène et isotrope avec une vitesse de la lumière constante notée c . Notons \mathbf{E} le champ électrique et \mathbf{B} l'induction magnétique. Notons alors le champ total $(\mathbf{E}^T, \mathbf{B}^T)$ qui se décompose comme avant en un champ incident $(\mathbf{E}^I, \mathbf{B}^I)$ et un champ diffracté $(\mathbf{E}^S, \mathbf{B}^S)$. Avec ces notations, le pendant de l'équation (2.1.4) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{E}^S}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B}^S = 0, & \text{dans } (0, T_f) \times \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^S}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^S = 0, & \text{dans } (0, T_f) \times \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ (\mathbf{E}^S(t, \vec{x}), \mathbf{B}^S(t, \vec{x})) & \text{satisfait une condition de radiation de Silver-Müller à l'}\infty \\ & \text{et des conditions initiales nulles.} \end{array} \right. \quad (2.1.21)$$

Introduisons la solution retournée en temps

$$(\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x})) := (-\mathbf{E}(T_f - t, \vec{x}), \mathbf{B}(T_f - t, \vec{x})). \quad (2.1.22)$$

Remarquez que le système de Maxwell est un système hyperbolique d'ordre 1, et n'est pas invariant au retournement temporel. Ainsi, nous multiplions le champ électrique par (-1) de sorte que le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x}))$ soit solution des équations de Maxwell et nous construisons une condition aux limites absorbante analogue à (2.1.5). Nous considérons toujours que le sous-domaine B est une boule de rayon ρ centrée à l'origine, notée B_ρ . Nous supposons que la condition aux limites absorbante de Silver-Müller approchée suivante est raisonnable :

$$(\mathbf{E}^S \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^S \times \nu = 0 \quad (2.1.23)$$

où ν est la normale extérieure à la boule B_ρ . L'équation ci-dessus est l'homologue de l'équation (2.1.5) pour les équations de Maxwell. L'étape suivante est d'écrire une expression explicite de l'équation (2.1.23) retournée en temps. Cela signifie que le champ total satisfait

$$(\mathbf{E}^T \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^T \times \nu = (\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu. \quad (2.1.24)$$

En utilisant la définition (2.1.22), nous avons

$$(-\mathbf{E}_R^T \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}_R^T \times \nu = \left((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu \right)_{T_f-t}. \quad (2.1.25)$$

Remarquons que sur ∂B_ρ , $n = -\nu$ et en multipliant par -1 , nous obtenons

$$(\mathbf{E}_R^T \times n) \times n + c \mathbf{B}_R^T \times n = -\left((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu \right)_{T_f-t}. \quad (2.1.26)$$

Cette expression est le pendant de (2.1.6). Finalement, le problème retourné en temps analogue à (2.1.7) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{E}_R^T}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B}_R^T = 0, & \text{dans } \Omega \setminus B_\rho, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_R^T}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}_R^T = 0, & \text{dans } \Omega \setminus B_\rho, \\ (\mathbf{E}_R^T \times n) \times n + c \mathbf{B}_R^T \times n = -\left((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu \right)_{T_f-t} & \text{sur } \partial B_\rho \\ (\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x})) = (-\mathbf{E}(T_f - t, \vec{x}), \mathbf{B}(T_f - t, \vec{x})) & \text{sur } \Gamma_R \end{array} \right. \quad (2.1.27)$$

avec des conditions initiales nulles. La dernière équation du système ci-dessus exprime que nous avons retourné en temps les données enregistrées sur la frontière Γ_R .

Dans cette étude, nous ne présenterons pas de résultats numériques pour les équations de Maxwell. Dans un code pour les équations de Maxwell, il est aisément d'implémenter des conditions aux limites absorbantes. Par conséquent, l'extension des résultats au système de Maxwell ne nécessite aucune nouvelle technique.

2.2 Méthode *TRAC* dans le Domaine Fréquentiel

Dans cette section, nous présentons le principe de la méthode des conditions absorbantes retournées temporellement dans le domaine fréquentiel. Bien entendu, il n'y a plus de notion de temps dans le domaine harmonique mais nous verrons que la conjugaison de phase est l'équivalent du retournement temporel lorsque l'on travaille en fréquences. Nous appliquons cette technique à l'équation de Helmholtz et au système de Maxwell harmonique.

2.2.1 Principe général dans le domaine fréquentiel

Nous considérons l'équivalent du problème (2.1.1) dans le domaine fréquentiel et notons $\widehat{\mathcal{L}}$ la transformée de Fourier de l'opérateur temporel \mathcal{L} . Le champ total inconnu $\mathbf{U}^T(\vec{x})$ est décomposé en la somme d'un champ incident $\mathbf{U}^I(\vec{x})$ et d'un champ diffracté $\mathbf{U}^S(\vec{x})$. Nous avons :

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{U}^T) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ \mathbf{U}^S(\vec{x}) := \mathbf{U}^T(\vec{x}) - \mathbf{U}^I(\vec{x}) & \text{satisfait une condition de Sommerfeld à l'infini.} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Dans ce contexte, l'analogue de la méthode de retournement temporel est la technique de conjugaison de phase, cf. [CM91]. Soit \mathbf{V} un champ qui vérifie l'équation harmonique. Nous notons \mathbf{V}_R le champ « retourné temporellement harmonique » correspondant qui vérifie toujours la même équation harmonique. Pour l'équation de Helmholtz (2.2.5), nous procédons de la même façon. Soit $v(t, \vec{x})$ une fonction réelle dépendante du temps solution de l'équation des ondes et $v_R(t, \vec{x}) := v(-t, \vec{x})$ la fonction retournée temporellement associée. Puisque nous considérons le cas fréquentiel, il n'y a plus de notion de temps final T_f comme avant. La transformation de Fourier en temps de la définition ci-dessus nous donne :

$$\widehat{v}_R(\omega, \vec{x}) = \int v(-t, \vec{x}) e^{-i\omega t} dt = \int v(t, \vec{x}) e^{i\omega t} dt = \overline{\int v(t, \vec{x}) e^{-i\omega t} dt} = \bar{v}(\omega, \vec{x}).$$

Cette identité montre que la conjugaison de phase est la transformée de Fourier du processus de retournement temporel dans le cas de l'équation de Helmholtz. Pour les équations de Maxwell harmoniques (2.2.8), nous procédons de façon légèrement différente, cf. § 2.2.3. Ainsi, le procédé de *retournement temporel* classique dans le domaine fréquentiel appliqué à (2.2.1) revient à conjuguer les données enregistrées (dans le cas de Maxwell, de prendre en plus l'opposé du champ électrique) et à résoudre le problème retourné en temps harmonique suivant :

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_0(\mathbf{W}_R^T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{W}_R^T = \mathbf{U}_R^T & \text{sur } \Gamma_R, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

ce qui est équivalent à (2.1.3) dans le régime harmonique. Par conséquent, en suivant les mêmes étapes qu'au-dessus pour dériver l'équation (2.1.7) de l'équation (2.1.1), nous obtenons :

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_0(\mathbf{U}_R^T) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(\mathbf{U}_R^T) = \widehat{g(\mathbf{U}^I)} & \text{sur } \partial B \\ \mathbf{U}_R^T = \overline{\mathbf{U}^T} & \text{sur } \Gamma_R, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

où la dernière ligne correspond aux données enregistrées dans le cas harmonique.

Comme dans le cas temporel, nous pouvons reconstituer uniquement le champ diffracté. Ainsi le problème retourné en temps harmonique s'écrit :

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_0(\mathbf{U}_R^S) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(\mathbf{U}_R^S) = 0 & \text{sur } \partial B \\ \mathbf{U}_R^S = \overline{\mathbf{U}^S} & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Nous illustrons cette approche en écrivant l'équation (2.2.3) pour plusieurs exemples classiques : l'équation de Helmholtz dans § 2.2.2 et le système de Maxwell *harmonique* dans § 2.2.3. Un procédé similaire peut être appliqué au système de l'élasticité *harmonique*.

2.2.2 Principe dans le cas de l'équation de Helmholtz

Notons ω la variable duale de t par transformation de Fourier en temps. Le champ total u^T peut se décomposer en un champ incident et un champ diffracté, c'est-à-dire $u^T := u^I + u^S$. L'équation de Helmholtz est écrite en prenant la transformée de Fourier en temps de l'équation des ondes, ce qui donne :

$$\begin{cases} -\omega^2 u^T - c^2 \Delta u^T = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ (u^T - u^I) \text{ satisfait une condition de radiation de Sommerfeld à l'infini.} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Rappelons que notre but est d'écrire un *BVP* dont la solution est le conjugué de u^T . D'après le § 2.2.1, il suffit de prendre la transformée de Fourier de l'équation (2.1.17) pour obtenir :

$$\begin{cases} -\omega^2 u_R^T - c^2 \Delta u_R^T = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B_\rho \\ i\omega u_R^T + c \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - c \frac{u_R^T}{r} = i\omega u_R^I + c \frac{\partial u_R^I}{\partial n} - c \frac{u_R^I}{r} & \text{sur } \partial B_\rho \\ u_R^T(\vec{x}) = \overline{u}^T(\vec{x}) & \text{sur } \Gamma_R. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Nous insistons sur le fait que la condition absorbante retournée temporellement *TRAC*

$$\text{TRAC}(u_R^T) := i\omega u_R^T + c \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - c \frac{u_R^T}{r} = \text{donnée} \quad (2.2.7)$$

n'est pas la condition aux limites absorbante *BT*¹

$$i\omega u^T + c \frac{\partial u^T}{\partial n} + c \frac{u^T}{r} = \text{donnée.}$$

Comme précédemment, des généralisations à la dimension 2 et à d'autres surfaces B sont directes.

2.2.3 Principe dans le cas des équations de Maxwell harmoniques

Nous notons à nouveau ω la variable duale de t pour la transformation de Fourier en temps. Le champ total $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x}))$ peut se décomposer en un champ incident et un champ diffracté, $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x})) := (\mathbf{E}^I(\vec{x}), \mathbf{B}^I(\vec{x})) + (\mathbf{E}^S(\vec{x}), \mathbf{B}^S(\vec{x}))$. Les équations de Maxwell harmoniques s'obtiennent en prenant la transformée de Fourier en temps des équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \mathbf{E}^T - c^2 \nabla \times \mathbf{B}^T = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ i\omega \mathbf{B}^T + \nabla \times \mathbf{E}^T = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{E}^T, \mathbf{B}^T) - (\mathbf{E}^I, \mathbf{B}^I) \quad \text{satisfait une condition de radiation de Silver-Müller à l'}\infty\text{.} \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

Rappelons que notre but est d'écrire un *BVP* dont la solution est le retourné temporel harmonique de $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x}))$. D'après 2.2.1, il suffit de prendre la transformée de Fourier en temps de l'équation (2.1.27) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\omega \mathbf{E}_R^T - c^2 \nabla \times \mathbf{B}_R^T = 0, & \text{dans } \Omega \setminus B_\rho \\ i\omega \mathbf{B}_R^T + \nabla \times \mathbf{E}_R^T = 0, & \text{dans } \Omega \setminus B_\rho \\ (\mathbf{E}_R^T \times n) \times n + c \mathbf{B}_R^T \times n = -\left((\overline{\mathbf{E}}^I \times \nu) \times \nu + c \overline{\mathbf{B}}^I \times \nu \right) & \text{sur } \partial B_\rho \\ (\mathbf{E}_R^T(\vec{x}), \mathbf{B}_R^T(\vec{x})) = (-\overline{\mathbf{E}}(\vec{x}), \overline{\mathbf{B}}(\vec{x})) & \text{sur } \Gamma_R. \end{array} \right. \quad (2.2.9)$$

Dans le même esprit que dans le domaine temporel, nous ne présenterons pas de résultats numériques pour les équations de Maxwell harmoniques dans cette étude. Nous travaillerons essentiellement sur l'équation de Helmholtz.

Chapitre 3

Premiers pas : Méthode *TRAC* en dimension 1

Résumé

Dans ce chapitre, nous montrons la faisabilité de la méthode *TRAC* en dimension 1. Tout d'abord, nous écrivons analytiquement les solutions des problèmes, direct et retourné en temps, dans le cas de l'équation de Helmholtz en dimension 1. Puis, nous présentons nos premiers tests numériques pour l'équation des ondes en dimension 1.

Sommaire

3.1	Un peu de théorie avec l'équation de Helmholtz	54
3.1.1	Problème direct	54
3.1.2	Retournement temporel sur le champ total	58
3.1.3	Comparaison par résolution numérique	62
3.2	Premiers tests numériques pour l'équation d'onde	69
3.2.1	Problème direct	69
3.2.2	Retournement temporel numérique en 1D	72
3.2.3	Critères d'identification	77
3.3	Remarque sur le caractère exact ou approché de la solution obtenue par la méthode <i>TRAC</i>	80

3.1 Un peu de théorie avec l'équation de Helmholtz

Dans cette section, notre but est de résoudre analytiquement l'équation de Helmholtz dans le cas de la méthode *TRAC* en 1D.

Nous nous plaçons dans l'intervalle $[0, x_R]$ où nous avons mis un émetteur-récepteur en x_R . Dans cet intervalle se trouve une inclusion D définie par ses bords x_{D-} et x_{D+} , comme sur la FIGURE 3.1. Pour la méthode *TRAC*, nous introduisons aussi un point x_B placé au hasard.

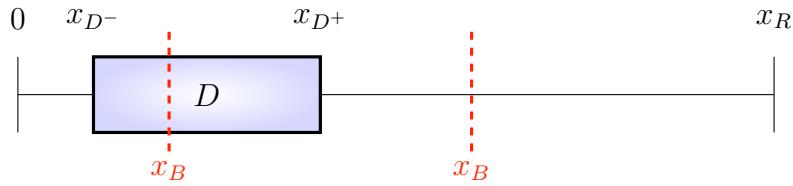


FIGURE 3.1 – Illustration de l'intervalle de calcul 1D $]0, x_R[$, où x_R est la position du récepteur. L'inclusion D est représentée par l'intervalle $[x_{D-}, x_{D+}]$. Un point x_B est placé pour effectuer la méthode *TRAC* dans $]x_B, x_R[$.

Dans un premier temps, nous résolvons le problème direct avec et sans obstacle. L'obstacle peut être de type mou (“soft”) ou dur (“hard”). Ensuite, nous nous intéressons à la solution analytique du retournement temporel classique. Enfin, nous écrivons les solutions analytiques pour la méthode *TRAC*.

3.1.1 Problème direct

Notons c la vitesse du son dans le milieu, que nous supposons constante, ω la pulsation et k le nombre d'onde associé. Nous cherchons à expliciter la fonction u solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\omega^2 u - c^2 u'' = 0 & \text{dans } \Omega \\ i\omega u + cu' = \hat{f}(\omega) & \text{en } x_R \\ i\omega u - cu' = 0 & \text{en } 0, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

avec Ω le domaine d'existence de la solution u . Dans le cas où il n'y a pas d'obstacle, $\Omega :=]0, x_R[$. Dans le cas avec obstacle, nous posons $\Omega :=]0, x_{D-}[\cup]x_{D+}, x_R[$. Dans ce dernier cas, il faudra naturellement imposer des conditions aux limites en x_{D-} et x_{D+} .

Nous allons résoudre le système (3.1.1). Il s'agit simplement d'une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients constants. Ainsi, nous savons directement que la

solution u s'écrit :

$$u(x) = C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx} \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1.2)$$

où C_+ et C_- sont des constantes complexes à déterminer.

3.1.1.1 Champ incident direct

Dans un premier temps, nous allons résoudre le système (3.1.1) dans le cas où $\Omega =]0, x_R[$, c'est-à-dire sans obstacle. Nous noterons u^I la solution, désignant ainsi le champ incident.

Nous pouvons exprimer le champ incident u^I à l'aide de la solution générale (3.1.2). Considérons les conditions aux limites :

- Condition absorbante homogène en 0 :

$$\begin{aligned} i\omega u^I(0) - cu^I(0) &= i\omega C_+ - ikcC_+ + i\omega C_- + ikcC_- \\ &= 2i\omega C_-, \\ \text{or} \quad i\omega u^I(0) - cu^I(0) &= 0, \\ \text{d'où} \quad C_- &= 0. \end{aligned}$$

- Condition absorbante chargée en x_R :

$$\begin{aligned} i\omega u^I(x_R) + cu^I(x_R) &= i\omega C_+ e^{ikx_R} + ikcC_+ e^{ikx_R} \\ &= 2i\omega C_+ e^{ikx_R}, \\ \text{or} \quad i\omega u^I(x_R) + cu^I(x_R) &= \hat{f}(\omega), \\ \text{d'où} \quad C_+ &= \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{-ikx_R}. \end{aligned}$$

Finalement, le champ incident s'écrit :

$$u^I(x) = \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x-x_R)} \quad \forall x \in [0, x_R]. \quad (3.1.3)$$

3.1.1.2 Champ total pour une inclusion molle ("soft")

Considérons maintenant le cas où Ω contient un obstacle de type mou ("sound-soft" en anglais), c'est-à-dire une inclusion dont les conditions de raccord sont de type Dirichlet

56 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE *TRAC* EN DIMENSION 1

homogène. Le système se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\omega^2 u - c^2 u'' = 0 & & \text{dans }]0, x_{D-}[\cup]x_{D+}, x_R[\\ i\omega u + cu' = f(\omega) & & \text{en } x_R \\ i\omega u - cu' = 0 & & \text{en } 0 \\ u = 0 & & \text{en } x_{D-} \text{ et } x_{D+}. \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

Nous notons la solution u^{soft} , et nous la supposons de la forme (3.1.2) sur chacun des intervalles. Sur l'intervalle $]0, x_{D-}[$, il est clair que la solution u^{soft} est nulle. Il nous reste à l'expliciter sur l'intervalle $]x_{D+}, x_R[$.

- Condition absorbante chargée en x_R :

$$\begin{aligned} i\omega u^{soft}(x_R) + cu^{soft'}(x_R) &= i\omega C_+ e^{ikx_R} + ikcC_+ e^{ikx_R} + i\omega C_- e^{-ikx_R} - ikcC_- e^{-ikx_R} \\ &= 2i\omega C_+ e^{ikx_R}, \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad i\omega u^I(x_R) + cu^I'(x_R) = \hat{f}(\omega),$$

$$\text{d'où} \quad C_+ = \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{-ikx_R}.$$

- Condition de Dirichlet homogène en x_{D+} :

$$\begin{aligned} u^{soft}(x_{D+}) &= C_+ e^{ikx_{D+}} + C_- e^{ikx_{D-}} \\ &= \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x_{D+}-x_R)} + C_- e^{-ikx_{D-}}, \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad u^{soft}(x_{D+}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad C_- e^{-ikx_{D-}} &= -\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x_{D+}-x_R)} \\ C_- &= -\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(2x_{D+}-x_R)}. \end{aligned}$$

Finalement, le champ total pour une inclusion molle s'écrit :

$$u^{soft}(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0, x_{D-}] \\ \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} [e^{ik(x-x_R)} - e^{-ik(x+x_R-2x_{D+})}] & \forall x \in [x_{D+}, x_R]. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

3.1.1.3 Champ total pour une inclusion dure (“hard”)

Nous procédons de la même façon pour une inclusion dure (“sound-hard” en anglais), c'est-à-dire avec des conditions aux limites de type Neumann homogène. Le système (3.1.1)

se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\omega^2 u - c^2 u'' = 0 & \text{dans }]0, x_{D-} [\cup]x_{D+}, x_R[\\ i\omega u + cu' = \hat{f}(\omega) & \text{en } x_R \\ i\omega u - cu' = 0 & \text{en } 0 \\ u' = 0 & \text{en } x_{D-} \text{ et } x_{D+} \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

La solution, notée u^{hard} , vérifie (3.1.2) et grâce aux conditions aux limites nous avons :

- u^{hard} est nulle sur $[0, x_{D-}]$;
- Condition absorbante chargée en x_R , (cf. section 3.1.1.2) :

$$C_+ = \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{-ikx_R}.$$

- Condition de Neumann homogène en x_{D+} :

$$\begin{aligned} u^{hard'}(x_{D+}) &= ikC_+ e^{ikx_{D+}} - ikC_- e^{ikx_{D-}} \\ &= ik \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x_{D+} - x_R)} - ikC_- e^{-ikx_{D-}}, \end{aligned}$$

$$\text{or } u^{hard'}(x_{D+}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } C_- e^{-ikx_{D-}} &= \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x_{D+} - x_R)} \\ C_- &= \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(2x_{D+} - x_R)}. \end{aligned}$$

Finalement, le champ total pour une inclusion dure s'écrit :

$$u^{hard}(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0, x_{D-}] \\ \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} [e^{ik(x-x_R)} + e^{-ik(x+x_R-2x_{D+})}] & \forall x \in [x_{D+}, x_R]. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

3.1.1.4 Champ diffracté

Nous pouvons à présent faire une remarque sur la forme des solutions. Remarquons notamment que les deux champs totaux calculés s'écrivent clairement sous la forme :

$$\begin{aligned} u^T &= u^I + u^S \\ &= \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{ik(x-x_R)} + \varepsilon \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} e^{-ik(x+x_R-2x_{D+})}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

avec ε qui prend les valeurs $-1, 0, 1$ selon la nature de l'obstacle, respectivement mou, sans (le champ total est égal au champ incident), et dur.

Nous pouvons faire une seconde remarque sur le signe ε . En effet, bien que les champs diffractés aient la même forme, le signe diffère. Nous obtenons de façon satisfaisante qu'une inclusion molle entraîne une réflexion totale avec changement de signe, alors qu'une inclusion dure entraîne une réflexion totale sans changement de signe.

3.1.2 Retournement temporel sur le champ total

Pour l'étape de retournement temporel, nous comparons deux méthodes : la méthode que nous appelons "classique" et notre méthode avec conditions absorbantes retournées en temps. Pour cette dernière, nous devons introduire une frontière artificielle x_B et travailler dans le domaine tronqué $\Omega :=]x_B, x_R[$, alors que dans le cas classique nous gardons $\Omega :=]0, x_R[$ en entier.

Remarquons que pour l'équation de Helmholtz, cela n'a pas de sens de parler de retournement du temps, puisque le temps n'apparaît pas. Cependant, l'équivalent du retournement temporel est la conjugaison de phase. Par la suite, nous employons abusivement la notion de retournement en temps lorsqu'il s'agit de conjugaison de phase.

3.1.2.1 Systèmes d'équations pour le retournement temporel

Pour procéder au cas classique, nous supposons que nous avons enregistré la valeur du champ total au point x_R où se situe notre émetteur-récepteur. En revanche, nous n'avons aucun contrôle sur ce qui se passe en 0, c'est pourquoi nous avons plusieurs possibilités. Une première idée nous vient de la physique. Nous imposons une condition aux limites absorbante. Ceci modélisera le fait que l'onde sort à l'infini, comme lors d'une expérience de retournement temporel physique. Le système devient alors :

$$\begin{cases} -\omega^2 w - c^2 w'' = 0 & \text{dans }]0, x_R[\\ w = \overline{u^T} & \text{en } x_R \\ i\omega w - cw' = 0 & \text{en } 0 . \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Notre deuxième idée est de prendre le problème direct retourné en temps. La condition aux limites absorbante en $x = 0$ est alors retournée temporellement sans être la condition TRAC. Cela revient en fait à faire le retournement temporel du champ incident en imposant en x_R

la valeur enregistrée. Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} -\omega^2 v - c^2 v'' = 0 & \text{dans }]0, x_R[\\ v = \overline{u^T} & \text{en } x_R \\ -i\omega v - cv' = 0 & \text{en } 0 . \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Nous allons comparer ces deux problèmes (3.1.9) et (3.1.10) avec la méthode *TRAC*. Présentons finalement le problème de retournement temporel avec condition absorbante (*TRAC*) :

$$\begin{cases} -\omega^2 u - c^2 u'' = 0 & \text{dans }]x_B, x_R[\\ u = \overline{u^T} & \text{en } x_R \\ -i\omega u + cu' = -i\omega \overline{u^I} + \overline{cu^I} & \text{en } x_B . \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Dans la section suivante, nous allons résoudre chacun de ces systèmes.

3.1.2.2 Retournement temporel classique physique

Ici nous nous intéressons à la résolution du problème (3.1.9), pour lequel nous notons sa solution w .

La solution w s'écrit sous la forme générale (3.1.2) et il nous reste à déterminer les constantes grâce aux conditions aux limites.

- Condition absorbante homogène en 0 :

$$\begin{aligned} i\omega w(0) - cw'(0) &= i\omega C_+ - ikcC_+ + i\omega C_- + ikcC_- \\ &= 2i\omega C_- , \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad i\omega w(0) - cw^{I'}(0) = 0 ,$$

$$\text{d'où} \quad C_- = 0 .$$

- Condition de Dirichlet non homogène en x_R :

$$w(x_R) = C_+ e^{ikx_R} ,$$

$$\text{or} \quad w(x_R) = \overline{u^T}(x_R)$$

$$= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} \left[\underbrace{e^{-ik(x_R-x_R)}}_1 + \varepsilon e^{ik(2x_R-2x_{D+})} \right] ,$$

$$\text{d'où} \quad C_+ = \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} [e^{-ikx_R} + \varepsilon e^{ik(x_R-2x_{D+})}] .$$

60 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE TRAC EN DIMENSION 1

Finalement, la solution w est :

$$\begin{aligned} w(x) &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} \left[e^{ik(x-x_R)} + \varepsilon e^{ik(x+x_R-2x_{D^+})} \right] & \forall x \in [0, x_R] \\ &= v^I(x) + \varepsilon \overline{u^S}(x) & \forall x \in [0, x_R] . \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Cette solution n'est pas le conjugué de la solution u^T en (3.1.3), (3.1.5) ou (3.1.7). Avec cette condition absorbante, nous remarquons que, dans la solution (3.1.12), lorsque nous la comparons au champ direct (3.1.8) après conjugaison de phase, le terme de gauche dans les crochets n'est pas le conjugué du champ incident, alors que le terme de droite dans les crochets est bien le champ diffracté conjugué. Par conséquent, nous dirons que nous avons correctement reconstitué le champ diffracté, mais pas le champ incident.

3.1.2.3 Retournement temporel classique non physique

Maintenant nous traitons la résolution du problème (3.1.10), pour lequel nous notons sa solution v .

La solution v s'écrit sous la forme générale (3.1.2) et il nous reste à déterminer les constantes grâce aux conditions aux limites.

- Condition absorbante homogène en 0 :

$$\begin{aligned} -i\omega v(0) - cv'(0) &= -i\omega C_+ - ikcC_+ - i\omega C_- + ikcC_- \\ &= -2i\omega C_+ , \\ \text{or} \quad -i\omega v(0) - cv'(0) &= 0 , \\ \text{d'où} \quad C_+ &= 0 . \end{aligned}$$

- Condition de Dirichlet non homogène en x_R :

$$\begin{aligned} v(x_R) &= C_- e^{-ikx_R} , \\ \text{or} \quad v(x_R) &= \overline{u^T}(x_R) \\ &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} \left[\underbrace{e^{-ik(x_R-x_R)}}_1 + \varepsilon e^{ik(2x_R-2x_{D^+})} \right] , \\ \text{d'où} \quad C_- &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} [e^{ikx_R} + \varepsilon e^{ik(3x_R-2x_{D^+})}] . \end{aligned}$$

Finalement, la solution v est :

$$\begin{aligned} v(x) &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} [e^{-ik(x-x_R)} + \varepsilon e^{ik(x-3x_R+2x_{D+})}] & \forall x \in [0, x_R] \\ &= \overline{u^I(x)} + \varepsilon v^S(x) & \forall x \in [0, x_R]. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Une fois encore, cette solution n'est pas le conjugué de la solution u^T en (3.1.3), (3.1.5) ou (3.1.7). Avec cette condition absorbante, nous remarquons que, dans la solution (3.1.13), lorsque nous la comparons au champ direct (3.1.8) après conjugaison de phase, le terme de gauche dans les crochets est bien le conjugué du champ incident, alors que le terme de droite dans les crochets n'est pas le champ diffracté conjugué. Ce problème permet donc de reconstruire correctement le conjugué de la solution u^I en (3.1.3), (3.1.5) ou (3.1.7). Cette condition absorbante semble donc être la plus naturelle pour reconstituer le signal incident. En revanche, cette fois-ci le champ diffracté est incorrect.

3.1.2.4 Retournement temporel avec condition absorbante : méthode TRAC

Pour finir cette analyse de la reconstitution du champ total, nous résolvons le système (3.1.11). Nous noterons u_R la solution qui se trouve être le retourné temporel exact du champ incident pour tout x_B dans $[x_{D+}, x_R]$. Déterminons les constantes à partir de la forme de la solution générale :

- Condition absorbante non homogène en x_B :

$$\begin{aligned} -i\omega u_R(x_B) + cu_R'(x_B) &= -i\omega C_+ e^{ikx_B} + ikcC_+ e^{ikx_B} \\ &\quad -i\omega C_- e^{-ikx_B} - ikcC_- e^{-ikx_B} \\ &= -2i\omega C_- e^{-ikx_B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or} \quad -i\omega \overline{u^I}(x_B) + cu^I'(x_B) &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} [-i\omega e^{-ik(x_B-x_R)} - ikc e^{-ik(x_B-x_R)}] \\ &= -2i\omega \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} e^{-ik(x_B-x_R)}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad C_- = \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} e^{ikx_R}.$$

- Condition de Dirichlet non homogène en x_R :

$$\begin{aligned}
 u_R(x_R) &= C_+ e^{ikx_R} + \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} e^{ik(x_R - x_R)} , \\
 \text{or} \quad u_R(x_R) &= \overline{u^T(x_R)} \\
 &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} \left[\underbrace{e^{-ik(x_R - x_R)}}_1 + \varepsilon e^{ik(2x_R - 2x_{D+})} \right] , \\
 \text{d'où} \quad C_+ &= \varepsilon \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} e^{ik(x_R - 2x_{D+})} .
 \end{aligned}$$

Finalement, la solution u_R est :

$$\begin{aligned}
 u_R(x) &= \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \right)} [e^{-ik(x - x_R)} + \varepsilon e^{ik(x + x_R - 2x_{D+})}] \quad \forall x \in [x_B, x_R] \\
 &= \overline{u^I(x)} + \varepsilon \overline{u^S(x)} \quad \forall x \in [x_B, x_R] .
 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Cette solution est bien le conjugué de la solution u^T en (3.1.3), (3.1.5) ou (3.1.7). Dans (3.1.14), le terme de gauche dans les crochets correspond au champ incident conjugué et le terme de droite dans les crochets correspond au champ diffracté conjugué. Nous retrouvons alors le champ direct (3.1.8) après conjugaison de phase. La méthode *TRAC* permet donc de reconstituer parfaitement le signal total. En revanche, nous pouvons noter qu'ici le signal reconstitué ne dépend pas de x_B . Ainsi, nous pouvons dire que nous avons bien reconstitué le signal si $x_B \geq x_{D+}$. Par contre, si $x_B < x_{D+}$, le champ est correctement reconstitué dans l'intervalle $[x_{D+}, x_R]$ uniquement.

3.1.3 Comparaison par résolution numérique

Afin de vérifier nos calculs analytiques, nous résolvons les systèmes directs (3.1.1), (3.1.4) et (3.1.6) par la méthode des différences finies sous **MatLab**. Nous faisons ensuite la résolution numérique des systèmes retournés en temps (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11).

3.1.3.1 Discrétisation du problème direct

Dans un premier temps, nous voulons reproduire les solutions des problèmes directs et les comparer à nos solutions analytiques. Pour cela, nous décidons d'utiliser la méthode des

différences finies. Nous travaillons sur la subdivision de l'intervalle $[0, x_R]$:

$$0 = x^0 < x^1 < \dots < x^N < x^{N+1} = x_R.$$

Nous notons également x^D le nœud du maillage le plus proche de x_D^+ .

Nous discrétisons le problème direct de la façon suivante :

- équation de Helmholtz :

$$-\omega^2 u - c^2 u'' = 0$$

peut être approché par :

$$-\omega^2 u^k - c^2 \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{h^2} = 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

où h est le pas uniforme avec lequel nous avons partitionné notre intervalle.

- condition absorbante en 0 :

$$i\omega u - cu' = 0$$

peut être approché par :

$$i\omega u^0 - c \frac{u^1 - u^0}{h} = 0.$$

- condition absorbante en x_R :

$$i\omega u + cu' = 0$$

peut être approché par :

$$i\omega u^{N+1} + c \frac{u^{N+1} - u^N}{h} = \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega}.$$

Ainsi pour résoudre le problème (3.1.1), nous résolvons le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} i\omega + \frac{c}{h} & -\frac{c}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{c}{h} & i\omega + \frac{c}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^D \\ u^{D+1} \\ \vdots \\ u^N \\ u^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.1.15)$$

Pour les deux cas avec un obstacle, nous devons discrétiser la condition au bord de l'inclusion. Nous ferons l'hypothèse ici que $x_{D-} = 0$. Nous restreignons alors la discrétisation à l'intervalle $[x^D, x^{N+1}]$.

64 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE TRAC EN DIMENSION 1

- la condition de Dirichlet est approchée par : $u^D = 0$;
- la condition de Neumann est approchée par : $\frac{u^{D+1} - u^D}{h} = 0$.

Le système matriciel correspondant au problème (3.1.4) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{h} & i\omega + \frac{c}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^D \\ u^{D+1} \\ \vdots \\ u^N \\ u^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \end{pmatrix} . \quad (3.1.16)$$

et celui correspondant au problème (3.1.6) est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{h} & i\omega + \frac{c}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^D \\ u^{D+1} \\ \vdots \\ u^N \\ u^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\hat{f}(\omega)}{2i\omega} \end{pmatrix} . \quad (3.1.17)$$

La FIGURE 3.2 montre la comparaison entre la solution analytique et la solution numérique des problèmes directs (3.1.1), (3.1.4) et (3.1.6). La figure est composée de trois graphiques : en haut à gauche, nous représentons la partie réelle des solutions analytiques et numériques, en haut à droite, il s'agit de la partie imaginaire, et en bas du module. Sur chaque graphique, nous traçons les solutions analytiques en trait plein, d'abord pour le champ incident direct ("lncd"), ensuite pour le champ total direct dans le cas d'une inclusion molle ("Soft") et finalement pour le champ total direct dans le cas d'une inclusion dure ("Hard"). Nous comparons les solutions analytiques aux solutions numériques tracées en pointillés, pour lesquelles nous avons ajouté l'extension "h" pour préciser le caractère numérique.

Le champ incident est une exponentielle complexe d'après la solution (3.1.8), donc ses parties réelle et imaginaire sont sinusoïdales, de même amplitude, et son module est constant. Le champ total direct pour une inclusion molle (resp. dure) est la différence (resp. la somme) de deux exponentielles complexes de phases différentes. Lorsque nous observons le module du champ total, nous avons un signal oscillant de période spatiale une demi-longueur d'onde en dehors de l'inclusion, et le signal s'annule dans l'inclusion solide. Les solutions analytiques et numériques correspondantes coïncident parfaitement.

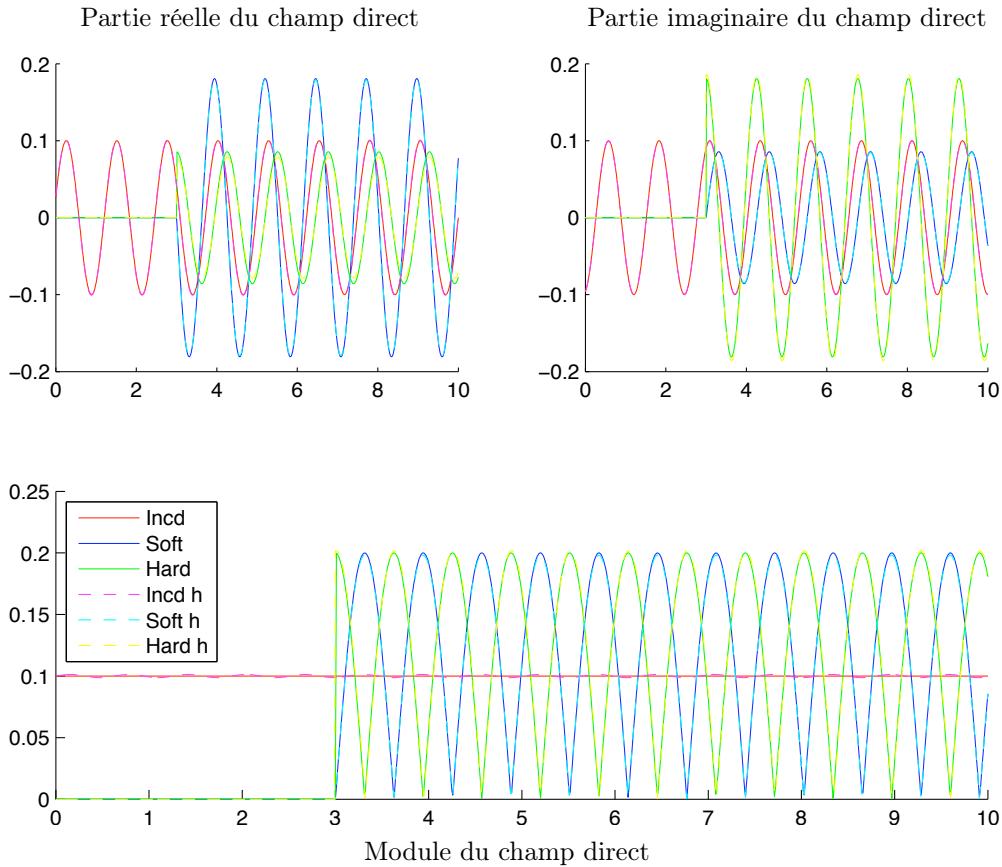


FIGURE 3.2 – Problème direct : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour le champ incident (“Incd”), le champ total avec objet mou (“Soft”), le champ total avec objet dur (“Hard”). La borne x_{D+} de l’objet est placée en 3. L’extension “h” désigne la solution obtenue en résolvant le système linéaire par comparaison à la solution analytique. En haut à gauche, la partie réelle. En haut à droite, la partie imaginaire. En bas, le module des solutions.

3.1.3.2 Discrétisation des problèmes de retourne temporel

Nous nous intéressons maintenant à la résolution pour le retourne temporel. Tout d’abord, les deux types de retourne temporels classiques sont traités très rapidement de la même façon que le cas direct. Nous allons juste détailler la discrétisation de la méthode *TRAC* (3.1.11). Nous notons x^B le nœud correspondant au point x_B dans notre maillage.

- équation de Helmholtz :

$$-\omega^2 u - c^2 u'' = 0$$

peut être approché par :

$$-\omega^2 u^k - c^2 \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{h^2} = 0 \quad \forall k \in \llbracket B+1, N \rrbracket,$$

- condition absorbante en x^B :

$$-i\omega u + cu' = -i\omega \bar{u}^I + c\bar{u}^I'$$

peut être approché par :

$$-i\omega u^B + c\frac{u^{B+1} - u^B}{h} = -i\omega \bar{u}^I + c\frac{\bar{u}^{I+1} - \bar{u}^I}{h}.$$

- condition de Dirichlet en x_R : $u^{N+1} = \bar{u}^T$.

Sous forme matricielle, nous devons résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} -i\omega - \frac{c}{h} & \frac{c}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -\frac{c^2}{h^2} & -\omega^2 + 2\frac{c^2}{h^2} & -\frac{c^2}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^B \\ u^{B+1} \\ \vdots \\ u^N \\ u^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega \bar{u}^I + c\frac{\bar{u}^{I+1} - \bar{u}^I}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{u}^T \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

Les FIGURES 3.3 et 3.4 montrent la bonne résolution de nos équations analytiques et numériques pour le retournement temporel classique physique et le retournement temporel avec condition absorbante respectivement. Comme pour la FIGURE 3.2, les deux figures sont composées de trois graphiques : en haut à gauche, la partie réelle des solutions est représentée, en haut à droite, leur partie imaginaire et en bas leur module. Sur chaque graphique, nous représentons en trait plein les solutions analytiques et en pointillés les solutions numériques associées pour chacun des trois cas suivants : sans obstacle ("Incd"), avec un obstacle mou ("Soft") et avec un obstacle dur ("Hard").

Sur la FIGURE 3.3, c'est-à-dire dans le cas du retournement temporel classique physique, nous voyons clairement que les solutions analytiques et numériques correspondantes coïncident. En revanche, nous remarquons que nous ne reconstituons pas le champ total attendu, quel que soit le type d'objet. En effet, nous obtenons des solutions dont le module est constant, ce qui ne correspond pas aux graphiques de la FIGURE 3.2. De même, le champ incident n'est pas correctement reconstitué. Bien que son module et sa partie réelle soient corrects, la partie imaginaire n'a pas le bon signe.

Sur la FIGURE 3.4, nous reconstituons les signaux dans l'intervalle $[x_B, x_R]$, où $x_B > x_{D+}$, avec la méthode *TRAC*. Une fois de plus, les solutions analytiques et numériques associées coïncident parfaitement dans l'intervalle considéré. En comparant avec la FIGURE 3.2, nous pouvons également observer que nous avons reconstitué correctement les champs associés aux différents types d'objet.

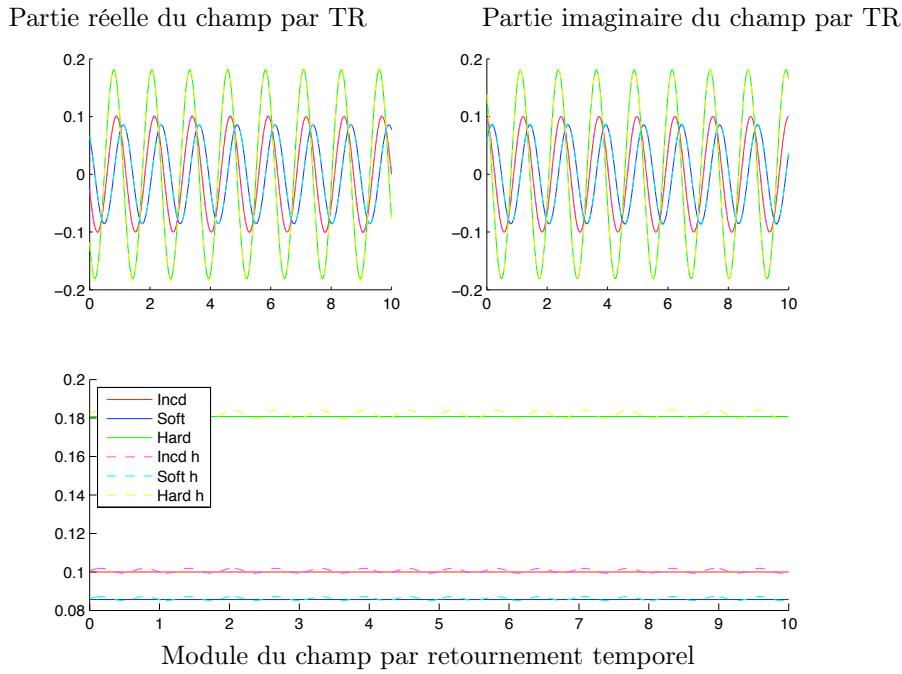


FIGURE 3.3 – Retournement temporel physique : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour le champ incident (“Inc_d”), le champ total avec objet mou (“Soft”), le champ total avec objet dur (“Hard”). L’extension “h” désigne la solution obtenue en résolvant le système linéaire par comparaison à la solution analytique. En haut à gauche, la partie réelle. En haut à droite, la partie imaginaire. En bas, le module des solutions.

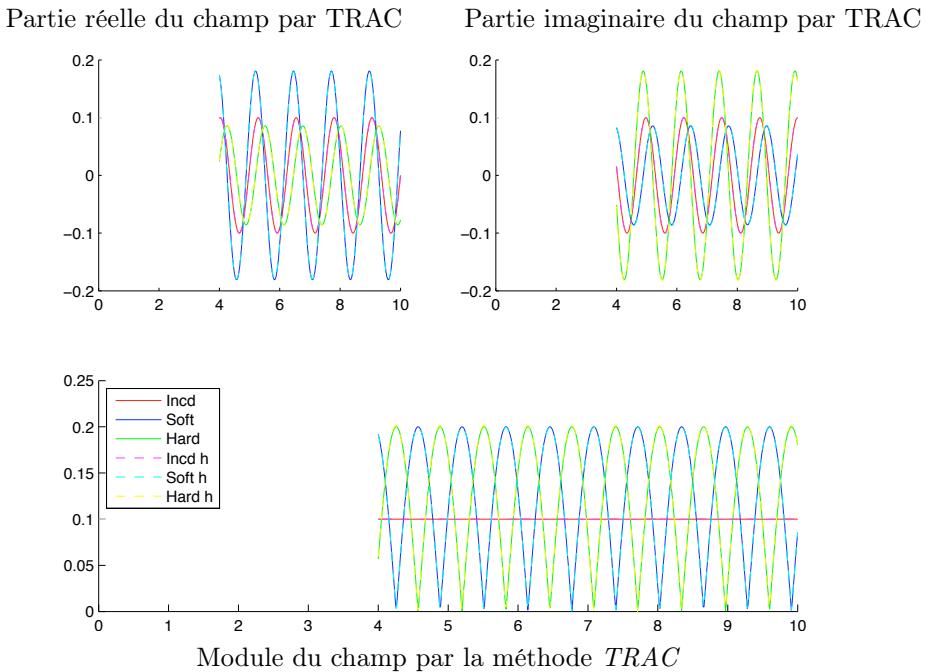


FIGURE 3.4 – Méthode *TRAC* : Comparaison des solutions analytiques et numériques pour le champ incident (“Inc_d”), le champ total avec objet mou (“Soft”), le champ total avec objet dur (“Hard”). La borne x_B du sous-domaine-test est placée en 4. L’extension “h” désigne la solution obtenue en résolvant le système linéaire par comparaison à la solution analytique. En haut à gauche, la partie réelle. En haut à droite, la partie imaginaire. En bas, le module des solutions.

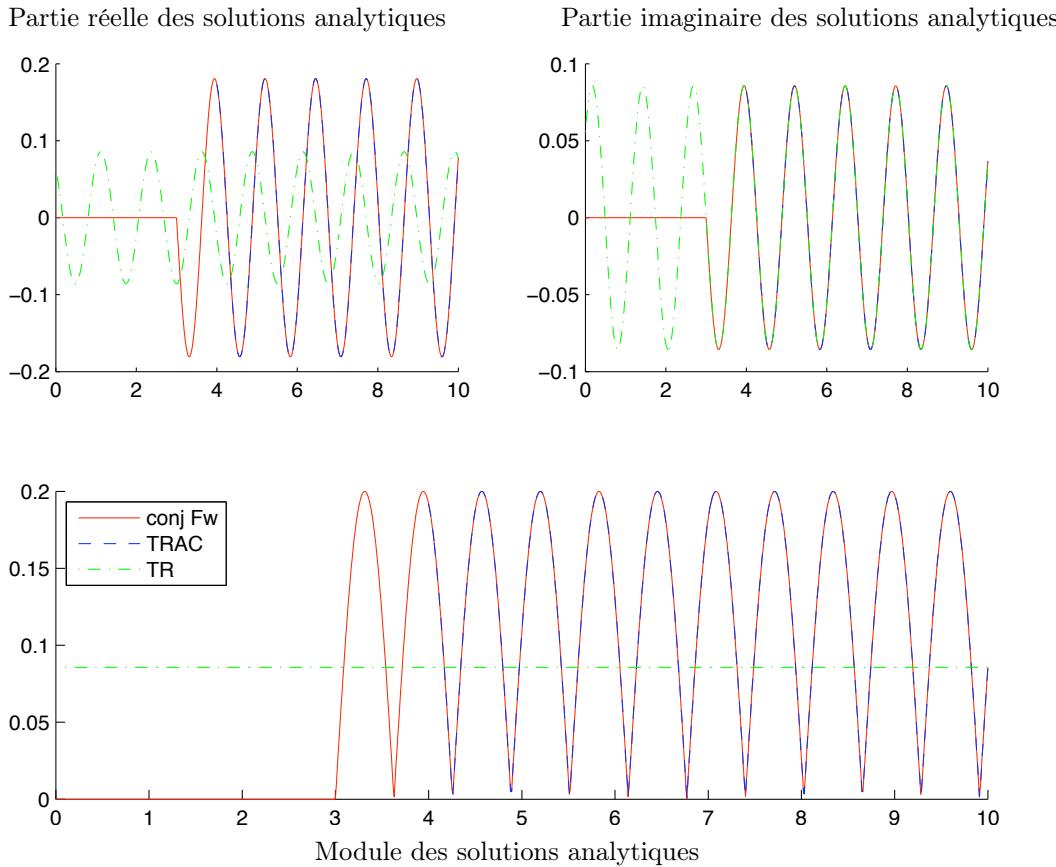


FIGURE 3.5 – Reconstitution du signal pour un objet mou. Comparaison entre le champ direct conjugué (“conj Fw”), le champ obtenu par retournement temporel classique (“TR”) et le champ obtenu par la méthode *TRAC* (“TRAC”). En haut à gauche, la partie réelle. En haut à droite, la partie imaginaire. En bas, le module des solutions. La borne x_{D+} de l’objet est placée en 3 tandis que la borne x_B du sous-domaine-test est en 4, donc $D \subset B$ ici.

La FIGURE 3.5 nous permet de comparer graphiquement les solutions analytiques dans le cas d’un objet mou. Nous comparons la partie réelle (graphique en haut à gauche), la partie imaginaire (graphique en haut à droite) et le module (graphique en bas). En trait plein, nous traçons le champ total exact que nous souhaitons reconstituer. En tiretés, nous traçons le résultat analytique obtenu par la méthode *TRAC*. La solution analytique du retournement temporel classique physique est représentée en pointillés-tiretés. Nous voyons clairement que la méthode *TRAC* nous donne une reconstitution parfaite du signal, contrairement au retournement temporel classique.

Remarquons que, sur la FIGURE 3.5, nous avons choisi de placer la borne x_B tel que l’objet D soit contenu dans $[0, x_B]$. Si nous plaçons la borne x_B à l’intérieur de l’objet, nous sommes encore capables de retrouver la bonne amplitude et la bonne phase du signal

dans $[x_{D+}, x_R]$, ce qui est déjà une amélioration par rapport aux techniques classiques de retournement temporel. Nous n'avons en revanche aucune indication sur la position de x_B par rapport à x_{D+} . En effet, la borne x_B n'apparaît pas dans la solution analytique (3.1.14) quelle que soit sa position par rapport à l'objet. De fait, il devient impossible dans le cas harmonique en dimension 1 d'utiliser la méthode *TRAC* pour localiser l'objet, ce qui est en revanche possible dans le domaine temporel ou en dimension supérieure.

Nous avons donc vérifié nos calculs et les conclusions sont validées : la méthode *TRAC* se révèle être le meilleur outil pour la reconstitution du champ total. Des calculs similaires en dimension 2 et 3 seraient intéressants, mais les formules analytiques sont difficilement manipulables à la main.

3.2 Premiers tests numériques pour l'équation d'onde

Dans cette section, nous étudions la méthode *TRAC* pour l'équation des ondes en dimension 1. Nous procédons de la même façon que pour l'équation de Helmholtz dans la section précédente, § 3.1. Dans un premier temps, nous rappelons les problèmes directs pour des objets mous ou durs. Nous donnons une solution analytique, et nous comparons avec nos résultats numériques par différences finies. Puis nous écrivons le problème de retournement temporel classique et celui concernant la méthode *TRAC*. Pour le retournement temporel, nous ne présentons que les résultats numériques. Nous les comparons avec les solutions attendues.

Comme pour le cas de l'équation de Helmholtz, nous nous plaçons dans l'intervalle représenté en FIGURE 3.1. Dans notre expérience de retournement temporel, il nous faut procéder en trois étapes :

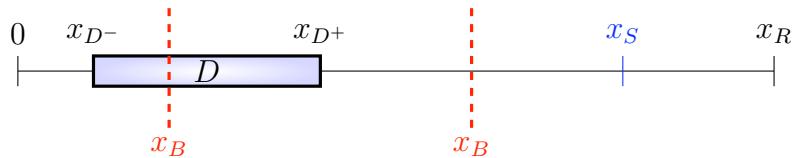
1. créer des données synthétiques : champ direct total u^T ;
2. calculer le champ incident u^I , nécessaire dans la condition *TRAC* ;
3. effectuer le retournement temporel avec la méthode *TRAC*.

3.2.1 Problème direct

Le but de cette section est de préciser les problèmes directs considérés. Afin d'effectuer notre expérience numérique de retournement temporel avec la méthode *TRAC*, il nous faut

70 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE TRAC EN DIMENSION 1

connaître le champ total (ou diffracté) au niveau des émetteurs-récepteurs, x_R dans le cas 1D (cf. FIGURE 3.1), et le champ incident dans tout le domaine. Nous supposons par ailleurs qu'il est possible de connaître numériquement au moins le champ incident, car nous connaissons le profil de la vitesse de propagation c , que nous supposons homogène, et la source émettrice. Contrairement au cas de l'équation de Helmholtz en dimension 1 (3.1.1), nous plaçons la source x_S à l'intérieur de l'intervalle (x_{D^+}, x_R) .



3.2.1.1 Champ incident

Nous commençons par le champ incident qui est le plus simple à calculer. L'onde incidente en dimension 1 satisfait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^I}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u^I}{\partial x^2} &= f(t) \delta(x - x_S) && \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_R) \\ \frac{\partial u^I}{\partial t} + c \frac{\partial u^I}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_R\} \\ \frac{\partial u^I}{\partial t} - c \frac{\partial u^I}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{0\} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

avec des conditions initiales nulles. Les deux dernières équations du problème (3.2.1) sont des conditions aux limites absorbantes de type Engquist-Madja d'ordre 1 et permettent de simuler que l'onde incidente se propage vers l'infini. La source f est choisie comme étant un Ricker dont la fréquence centrale est notée ν_0 :

$$f(t) = [1 - 2\pi^2 (\nu_0 t - 1)^2] e^{-\pi^2 (\nu_0 t - 1)^2}. \quad (3.2.2)$$

Nous avons facilement une expression analytique de la solution du problème (3.2.1) en se référant au manuel d'A. Polyanin [Pol01] :

$$u^I(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-ct}^{x+ct} f(\tau) \delta(\xi - x_S) d\xi d\tau.$$

En calculant cette intégrale, nous pouvons écrire de façon explicite l'onde incidente :

$$u^I(t, x) = \frac{1}{2c} F \left(t - \frac{|x - x_S|}{c} \right) \quad \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_R), \quad (3.2.3)$$

où F une primitive de f telle que :

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{\nu_0} (\nu_0 t - 1) e^{-\pi^2(\nu_0 t - 1)^2}. \quad (3.2.4)$$

Un autre moyen d'arriver à ce résultat est d'utiliser la solution du problème de Helmholtz correspondant et de prendre la transformée de Fourier inverse.

3.2.1.2 Champ total pour un objet mou

Nous considérons à présent une onde qui se réfléchit sur un objet mou. Ce type d'objet peut être modélisé par une condition de raccord de type Dirichlet homogène. Ainsi le champ total satisfait le problème (3.2.5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u^T}{\partial x^2} &= f(t) \delta(x - x_S) && \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_R) \setminus D \\ u^T &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_{D-}\} \text{ et } (0, T_f) \times \{x_{D+}\} \\ \frac{\partial u^T}{\partial t} + c \frac{\partial u^T}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_R\} \\ \frac{\partial u^T}{\partial t} - c \frac{\partial u^T}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{0\} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

avec des conditions initiales nulles. Il est assez clair que sur $(0, x_{D-})$, le champ total est nul. Il nous reste à le considérer sur (x_{D+}, x_R) . Là encore il y a deux façons de procéder : nous pouvons utiliser les formules du manuel [Pol01] ou calculer la solution du problème de Helmholtz associé et prendre la transformée de Fourier. Dans les deux cas, nous trouvons la solution analytique suivante :

$$u_{soft}^T(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_{D-}) \\ \frac{1}{2c} \left[F\left(t - \frac{|x - x_S|}{c}\right) - F\left(t - \frac{|x - x_{D+} + 2x_R|}{c}\right) \right] & \text{dans } (0, T_f) \times (x_{D+}, x_R). \end{cases} \quad (3.2.6)$$

La fonction F désigne à nouveau une primitive de f définie en (3.2.4).

3.2.1.3 Champ total pour un objet dur

De la même façon, nous considérons une onde incidente arrivant sur un objet dur. Ce type d'objet peut être modélisé par une condition de raccord de type Neumann homogène.

72 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE *TRAC* EN DIMENSION 1

Ainsi le champ total satisfait le problème (3.2.7) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u^T}{\partial x^2} &= f(t) \delta(x - x_S) && \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_R) \setminus D \\
 \frac{du^T}{dx} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_{D^-}\} \text{ et } (0, T_f) \times \{x_{D^+}\} \\
 \frac{\partial u^T}{\partial t} + c \frac{\partial u^T}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_R\} \\
 \frac{\partial u^T}{\partial t} - c \frac{\partial u^T}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{0\}
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

avec des conditions initiales nulles. Il est assez clair que sur $(0, x_{D^-})$, le champ total est nul. Il nous reste à le considérer sur (x_{D^+}, x_R) . De la même manière que précédemment, nous trouvons la solution analytique suivante :

$$u_{hard}^T(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_{D^-}) \\ \frac{1}{2c} \left[F \left(t - \frac{|x - x_S|}{c} \right) + F \left(t - \frac{|x - x_{D^+} + 2x_R|}{c} \right) \right] & \text{dans } (0, T_f) \times (x_{D^+}, x_R) \end{cases} \tag{3.2.8}$$

La fonction F désigne à nouveau une primitive de f définie en (3.2.4).

Finalement, nous illustrons ces résultats analytiques par deux vues instantanées des champs, incident et totaux, sur la FIGURE 3.6. L'onde incidente arrive de la droite et heurte l'objet symbolisé par des tirets verticaux. L'image du haut présente les ondes, incidente et totales, avant de toucher l'objet. L'image du milieu présente les ondes au niveau de l'objet. L'image du bas présente les ondes après avoir touché l'objet. Nous présentons les solutions analytiques pour les trois types d'obstacle suivants : sans obstacle en trait plein, avec un obstacle mou en pointillés-tiretés et avec un obstacle dur en tiretés.

3.2.2 Retournement temporel numérique en 1D

Intéressons-nous maintenant au retournement temporel en dimension 1 pour l'équation des ondes scalaire. Nous comparons les résultats de la méthode *TRAC* avec les résultats pour le retournement temporel classique dont nous rappelons les équations.

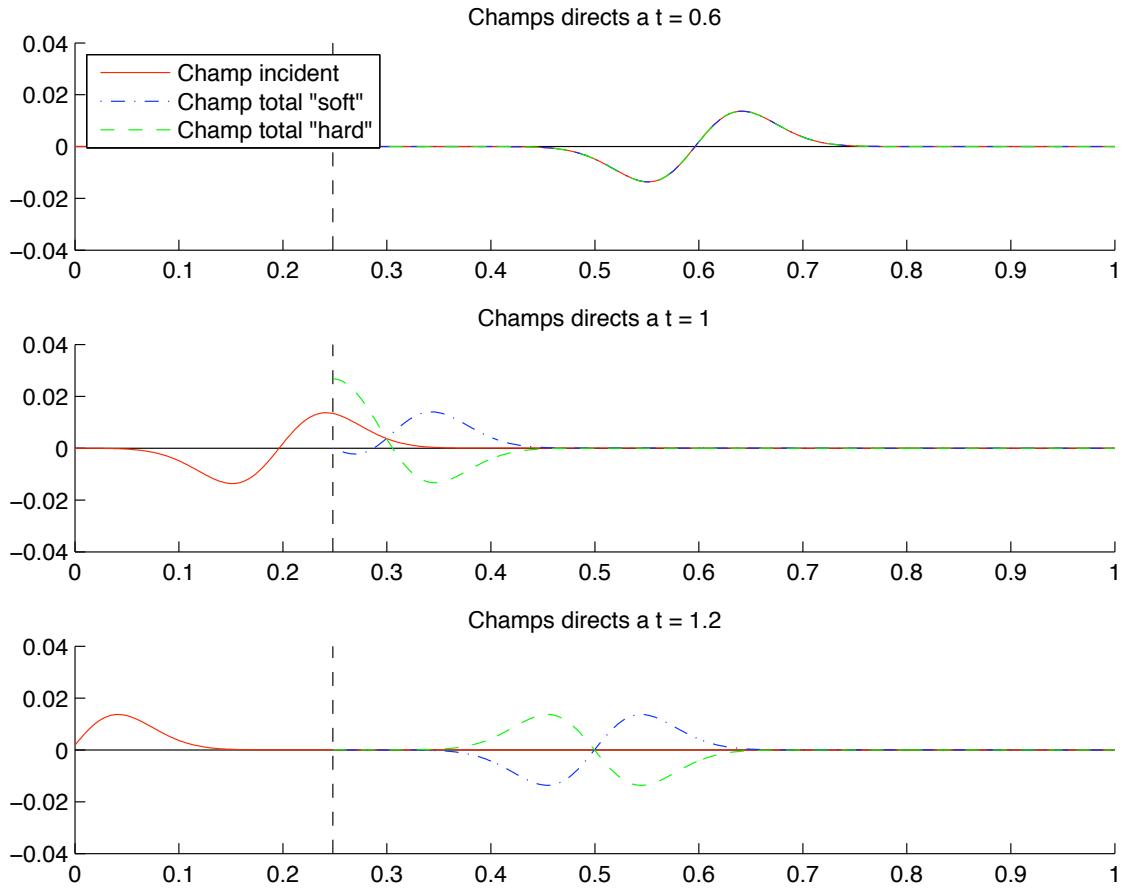


FIGURE 3.6 – Vues instantanées des champs incident, total mou et total dur. L'objet est symbolisé par la ligne tiretée verticale. En haut, avant que les ondes touchent l'objet. Au milieu, les ondes sont au niveau de l'objet. En bas, après que les ondes aient touché l'objet.

3.2.2.1 Retournement temporel classique

Nous commençons par rappeler les équations pour du retournement temporel classique. L'idée principale est que nous n'avons aucune hypothèse sur la position et le type d'objet à rechercher. Le retournement temporel classique propose alors d'ignorer l'objet et de résoudre le problème de retournement temporel sur tout l'intervalle avec la vitesse de propagation du milieu c supposée homogène. Le problème de retournement temporel classique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w^T}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w^T}{\partial x^2} &= 0 && \text{dans } (0, T_f) \times (0, x_R) \\
 w^T(t, \cdot) &= u^T(T_f - t, \cdot) && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_R\} \\
 \frac{\partial w^T}{\partial t} - c \frac{\partial w^T}{\partial x} &= 0 && \text{sur } (0, T_f) \times \{0\}
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

74 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE *TRAC* EN DIMENSION 1

avec des conditions initiales nulles, dont la solution est notée w^T , parce que ce n'est pas le retourné temporel exact du champ total direct u^T .

Nous résolvons numériquement le problème (3.2.9) par la méthode des différences finies en espace et un schéma centré d'ordre 2 en temps. L'algorithme **MatLab** est le suivant :

```
%% RETOURNEMENT TEMPOREL CLASSIQUE
upresent = zeros(nx,1); upasse = zeros(nx,1); ufutur = zeros(nx,1);

for j=3:nt
    ufutur(2:nx-1) = 2*upresent(2:nx-1) - upasse(2:nx-1) + ...
        (cfl^2)*(upresent(1:nx-2) - 2*upresent(2:nx-1) + upresent(3:nx));
    ufutur(1) = upresent(1) + cfl*(upresent(2)-upresent(1));
    ufutur(nx) = uTot(nx,nt-j+1);

    upasse = upresent; upresent = ufutur;
end;
```

3.2.2.2 Méthode *TRAC*

Passons maintenant à la méthode de retournement temporel avec conditions absorbantes. Nous appelons B l'intervalle $(0, x_B)$ et nous dirons que le sous-domaine B englobe correctement l'inclusion D , si nous prenons $x_B > x_{D^+}$. Le problème aux limites en 1D sur l'intervalle (x_B, x_R) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^T}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v^T}{\partial x^2} &= 0 && \text{dans } (0, T_f) \times (x_B, x_R) \\ v^T(t, \cdot) &= u^T(T_f - t, \cdot) && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_R\} \\ \frac{\partial v^T}{\partial t} - c \frac{\partial v^T}{\partial x} &= \left[-\frac{\partial u^I}{\partial t} - c \frac{\partial u^I}{\partial x} \right]_{|T_f-t} && \text{sur } (0, T_f) \times \{x_B\} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

avec des conditions initiales nulles, qui correspondent au fait que T_f est pris assez long pour que le signal soit nul à la fin de la simulation directe. Nous notons sa solution v^T pour rappeler que si $x_B < x_{D^+}$, c'est-à-dire quand le sous-domaine B ne contient pas totalement l'objet D , alors la v^T n'est pas la restriction du retourné temporel de u^T . En revanche, si le sous-domaine B englobe parfaitement l'objet D , alors la solution v^T coïncide avec le retourné temporel de u^T , noté u_R^T .

L'algorithme MatLab est le suivant :

```

%% TRAC
% iB : indice de la position de xB
upresent = zeros(nx,1); upasse = zeros(nx,1); ufutur = zeros(nx,1);

for j=3:nt
    ufutur(iB+1:nx-1) = 2*upresent(iB+1:nx-1) - upasse(iB+1:nx-1) + ...
        (cfl^2)*(upresent(iB:nx-2) - 2*upresent(iB+1:nx-1) + upresent(iB+2:nx));
    ufutur(iB) = upresent(iB) + cfl*(upresent(iB+1)-upresent(iB)) + ...
        (uIcd(iB,nt-j+1) - uIcd(iB,nt-j+2) - cfl*(uIcd(iB+1,nt-j+2)-uIcd(iB,nt-j+2)));
    ufutur(nx) = uTot(nx,nt-j+1);

    upasse = upresent; upresent = ufutur;
end;

```

3.2.2.3 Résultats numériques

Les FIGURES 3.7 et 3.8 présentent les résultats des discrétisations des problèmes (3.2.9) et (3.2.10) dans le cas d'un objet mou et d'un objet dur respectivement. Nous y comparons le retournement temporel classique et la méthode *TRAC* au champ direct que nous avons retourné en temps.

Sur chaque figure, nous représentons l'évolution du champ par retournement temporel à trois instants donnés. Si nous considérons le champ retourné en temps exact, nous devons voir les trois étapes suivantes : en haut, l'onde diffractée retournée en temps se propage de la droite vers la gauche. Au milieu, nous montrons l'instant où l'onde arrive à l'endroit où est censée se situer l'inclusion. Enfin en bas, l'onde incidente retournée en temps repart de la gauche vers la droite.

Nous comparons le champ retourné en temps exact, représenté en trait plein, aux trois types de retournement temporel suivants :

- au retournement temporel classique (en pointillés-tiretés) ;
- au retournement temporel avec la méthode *TRAC*, pour $x_B > x_{D+}$ (en tiretés), que nous appelons “*TRAC ok*”, car il s'agit de la bonne utilisation de la méthode *TRAC*;
- au retournement temporel avec la méthode *TRAC*, pour $x_B < x_{D+}$ (en pointillés), que nous appelons “*TRAC mauvais*”, car le sous-domaine B n'englobe pas complètement l'inclusion D .

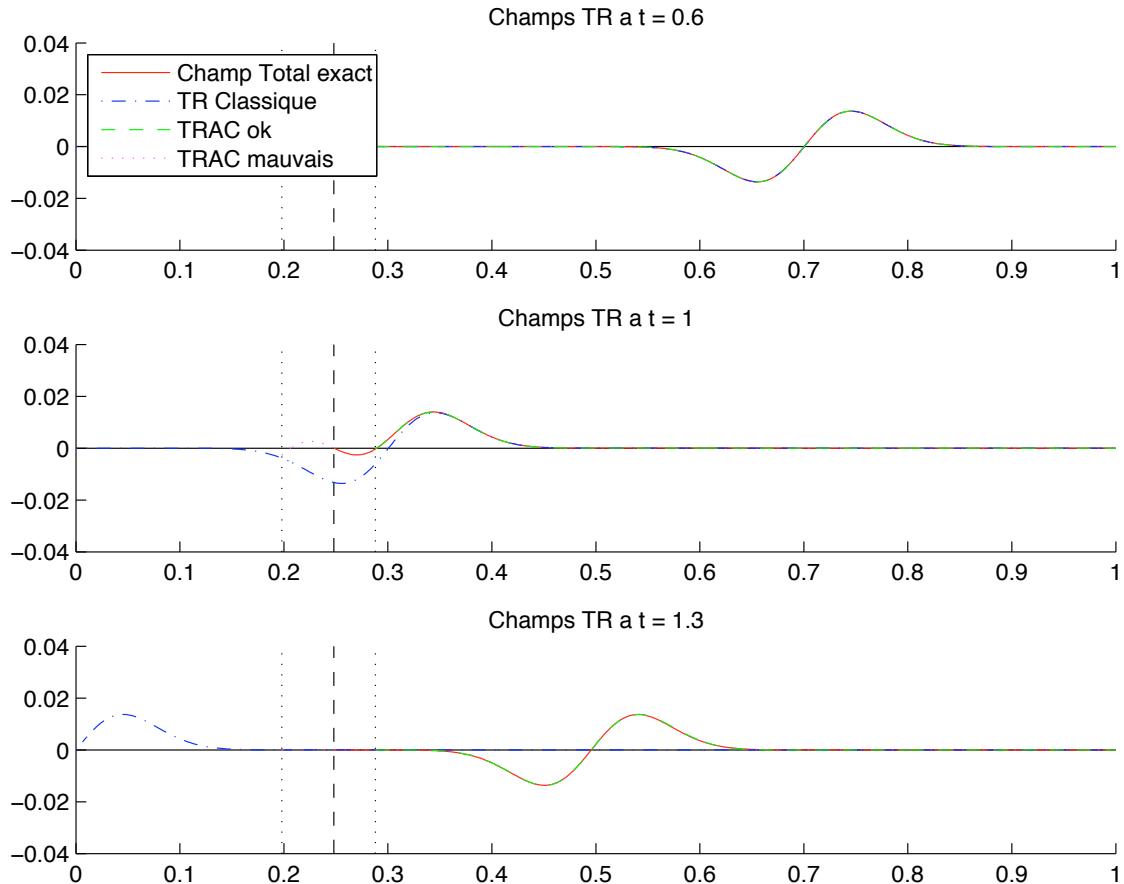


FIGURE 3.7 – Vues instantanées des champs retournés en temps exact, classique et avec *TRAC*, dans le cas d'un objet mou. Les sous-domaines sont symbolisés par des lignes pointillées verticales, l'objet à identifier en tiretés.

Que ce soit dans le cas d'un objet mou ou d'un objet dur, nous remarquons immédiatement que les solutions obtenues par la méthode *TRAC* sont la restriction du champ total retourné en temps. Au contraire, la solution obtenue par retournement temporel classique reconstitue le champ total retourné en temps avant la position de l'objet, puis part vers l'infini. En d'autres termes, la méthode de retournement temporel classique permet de reconstituer la partie diffractée du signal qui se propage de la droite vers la gauche, comme dans le cas de l'équation de Helmholtz d'ailleurs, mais pas la partie incidente retournée en temps qui se propage de la gauche vers la droite. Avec la méthode *TRAC*, nous reconstituons le signal complètement lorsque le sous-domaine B contient l'objet D . Notons tout de même que, lorsque B ne contient pas totalement D , nous avons une meilleure approximation du signal qu'avec les techniques de retournement temporel classique.

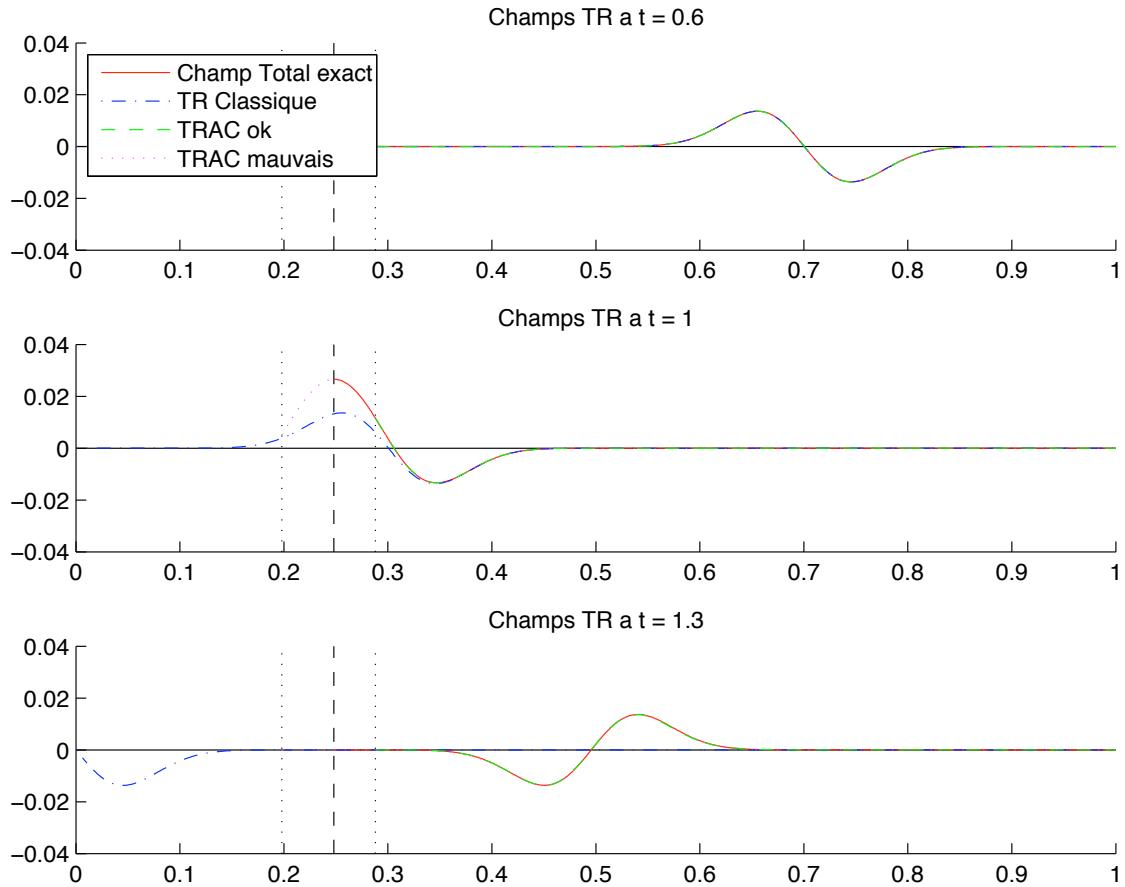


FIGURE 3.8 – Vues instantanées des champs retournés en temps exact, classique et avec TRAC, dans le cas d'un objet dur. Les sous-domaines sont symbolisés par des lignes pointillées verticales, l'objet à identifier en tiretés.

Comme dans le cas de l'équation de Helmholtz, il nous est donc difficile de déterminer la position de l'objet en dimension 1. Le signal reconstitué est en effet correct sur l'intervalle $[x_B, x_R]$, quand $x_B > x_{D+}$ et dans $[x_{D+}, x_R]$, quand $x_B < x_{D+}$. En revanche, nous faisons une erreur lorsque nous reconstituons le signal sur (x_B, x_{D+}) , pour $x_B < x_{D+}$. Nous aimerais alors quantifier cette erreur, c'est-à-dire avoir un critère qui nous dit si nous avons bien positionné le sous-domaine-test B par rapport à l'objet D .

3.2.3 Critères d'identification

Dans cette section, nous mentionnons rapidement la deuxième application du retournement temporel : l'identification d'objets. Nous établissons deux critères qui peuvent nous aider à déterminer si nous avons bien placé x_B ou non.

78 CHAPITRE 3. PREMIERS PAS : MÉTHODE TRAC EN DIMENSION 1

Supposons que le sous-domaine englobe bien l'objet, c'est-à-dire $x_B \geq x_{D^+}$. Alors, dans le problème direct, pour tout x dans l'intervalle $[x_B, x_R]$, le signal est nul dans l'intervalle de temps $[0, (x_R - x)/c]$. Ainsi en retournement temporel, pour tout point x dans $[x_B, x_R]$, le signal doit s'annuler dans l'intervalle de temps $[T_f - (x_R - x)/c, T_f]$, cf. FIGURE 3.9. Nous allons utiliser cette observation pour définir un critère d'identification, qui nous permettra en fait d'affirmer si $x_B \geq x_{D^+}$ ou non, c'est-à-dire si le sous-domaine B englobe l'objet D ou non. Nous définissons ainsi la fonction-coût suivante sur le champ total reconstitué :

$$J_1(x_B) := \int_{x_B}^{x_R} \int_{T_f - (x_R - x)/c}^{T_f} |v^T(t, x)|^2 dt dx, \quad (3.2.11)$$

qui doit s'annuler si $x_B \geq x_{D^+}$.

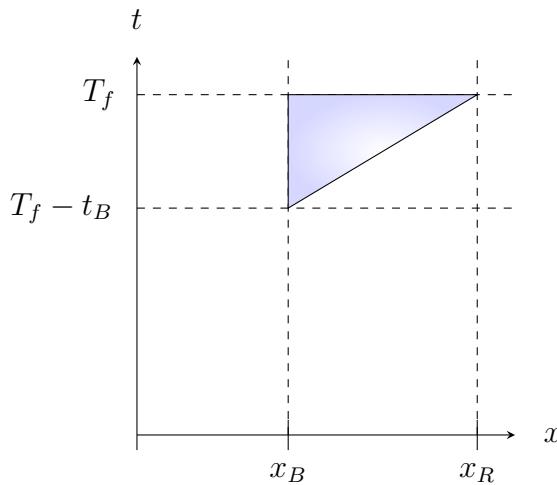


FIGURE 3.9 – Illustration des bornes de calcul du critère J_1 (3.2.11).

Dans le même état d'esprit, nous pouvons également définir un autre critère :

$$J_2(x_B) := \frac{1}{t_B} \int_{T_f - t_B}^{T_f} |v^T(t, x_B)|^2 dt dx, \quad (3.2.12)$$

où $t_B := (x_R - x_B)/c$ est le temps de propagation de l'onde entre les points x_R et x_B . Ce dernier critère se concentre essentiellement sur ce qui se passe en x_B dans l'intervalle de temps $[T_f - t_B/c, T_f]$, où nous nous attendons aussi à avoir un signal nul d'après l'observation ci-dessus. Les résultats de ces deux critères sont présentés dans le TABLEAU 3.1.

Les valeurs pour un objet mou ou un objet dur sont sensiblement identiques car les signaux sont symétriques. Nous ne présentons donc que le cas de l'objet mou. Notre maillage partitionne l'intervalle $[0, 1]$ en 501 nœuds. L'objet D est positionné en $x_{D^+} = 0.29$, soit l'indice 145 du maillage. Nous plaçons les sous-domaines B autour de x_{D^+} par intervalle de

x_B	0.09	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.39	0.44	0.49
J_1	1, 5	0, 5	9.10^{-2}	5.10^{-4}	3.10^{-4}	6.10^{-4}	8.10^{-4}	8.10^{-4}	5.10^{-4}
J_2	5.10^{-2}	3.10^{-2}	2.10^{-3}	2.10^{-8}	4.10^{-10}	4.10^{-10}	2.10^{-8}	5.10^{-6}	6.10^{-6}

TABLEAU 3.1 – Résultats des critères J_1 (3.2.11) et J_2 (3.2.12) pour un objet mou, pour différentes positions de x_B . La position de l'objet D est en $x_{D^+} = 0.29$, on travaille sur l'intervalle $[0, 1]$ partitionné en 501 nœuds.

25 points. Nous voyons qu'à partir du moment où B englobe correctement D , les valeurs des critères sont négligeables (non nulles à cause des erreurs numériques). Par ailleurs, si nous prenons $x_B < x_{D^+}$, nous avons de grandes valeurs des critères, qui nous montrent que nous avons manqué une partie de l'objet. Nous pouvons tracer les courbes obtenues à partir du TABLEAU 3.1 en FIGURE 3.10, où nous observons bien que la méthode *TRAC* reconstitue bien le signal si $x_B \geq x_{D^+}$.

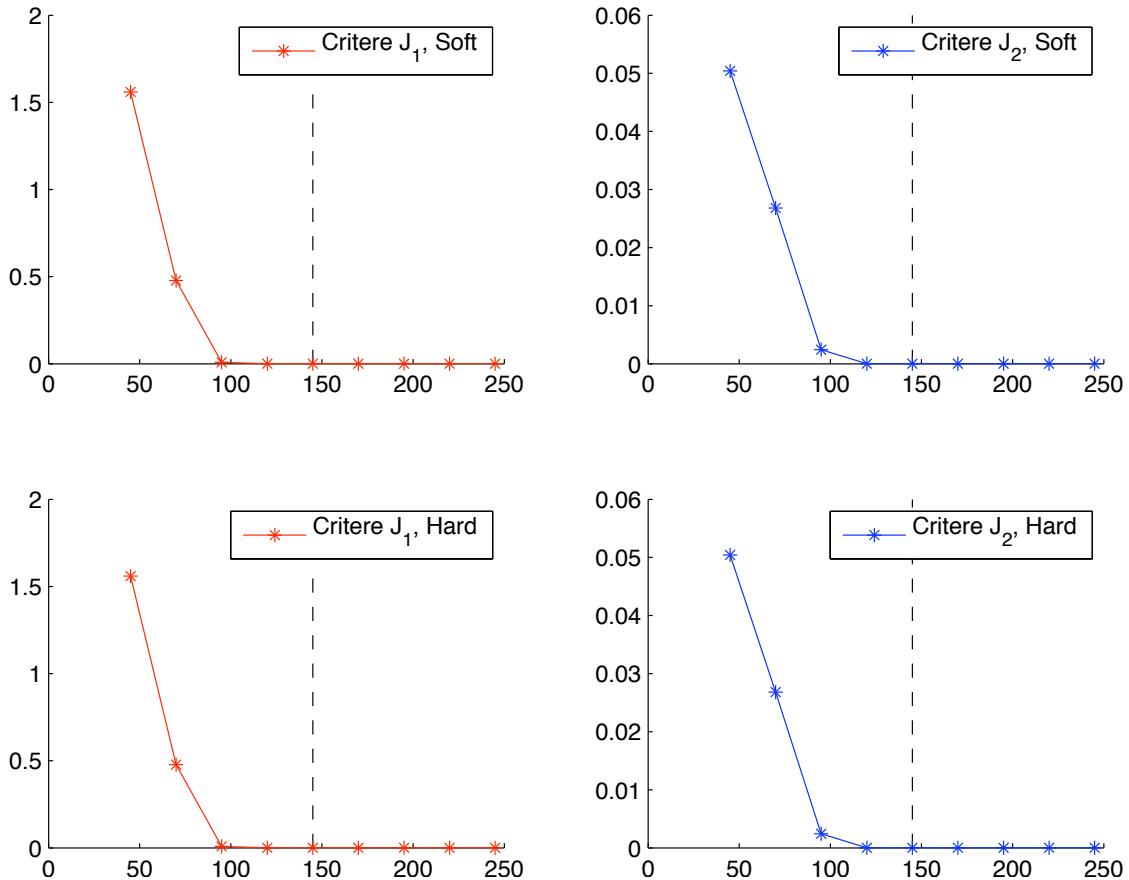


FIGURE 3.10 – Résultats des critères J_1 et J_2 en fonction de la position de x_B pour un objet mou ou un objet dur. L'objet D est symbolisé par une ligne tiretée verticale.

3.3 Remarque sur le caractère exact ou approché de la solution obtenue par la méthode *TRAC*

En dimension 1, la solution du problème de retournement temporel avec la méthode *TRAC* correspond exactement au champ diffracté retourné en temps dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$, lorsque le sous-domaine B englobe l'objet. Ceci est dû au fait qu'en dimension 1, la condition aux limites absorbante choisie est exacte pour le champ diffracté. Dans le cas fréquentiel, les formules analytiques obtenues, (3.1.8) pour le problème direct et (3.1.14) pour le problème de retournement temporel avec *TRAC*, montrent en effet que nous retrouvons exactement le champ diffracté retourné en temps. Par transformation de Fourier inverse, nous pouvons démontrer que le champ reconstitué par la méthode *TRAC* dans le domaine temporel est aussi exactement le champ diffracté retourné en temps dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$, lorsque le sous-domaine B englobe l'objet.

En revanche, en dimension supérieure, nous sommes amenés à travailler avec des conditions aux limites absorbantes approchées, plus faciles à mettre en œuvre numériquement. Notamment, nous nous intéressons uniquement à des conditions aux limites absorbantes de type Bayliss-Turkel d'ordre 1, cf. équation (1.3.5) pour nos tests en dimension 2. Ainsi, la solution obtenue par la méthode *TRAC* est une approximation du retourné temporel du champ diffracté que nous cherchons à reconstituer dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$, lorsque le sous-domaine B englobe l'objet. Pour avoir une solution qui soit exactement le retourné temporel du champ diffracté, il faudrait utiliser une condition aux limites absorbante exacte pour le champ diffracté sur la frontière ∂B .

Dans cette thèse, nous ne proposons pas d'étude de l'influence du caractère approché de la condition aux limites absorbante sur la résolution par la méthode *TRAC*. Nous utilisons la condition BT_1^{2d} et obtenons déjà des résultats très satisfaisants. L'influence du caractère approché peut être observée dans un premier temps à travers les critères d'identification d'objets développés dans les chapitres 6 et 7.

Chapitre 4

Stabilité de la méthode *TRAC*

Nous avons déjà remarqué plusieurs fois que la condition TRAC n'est pas la condition aux limites absorbante usuelle. Se pose alors le problème de la stabilité et du caractère bien posé des problèmes de retournement temporel utilisant la méthode *TRAC*. Nous n'avons pas développé une théorie générale, mais nous présentons tout de même une estimation d'énergie qui permet déjà de se rendre compte que les problèmes aux limites utilisant *TRAC* sont stables. Une première écriture de l'estimation d'énergie est disponible dans [AKNT10]. Nous la réécrivons dans un autre contexte tout aussi simple ici, dans une géométrie particulière. Notons que cette estimation est écrite en dimension 3 d'espace.

Soient g une fonction réelle sur le sous-domaine-test B , que nous supposons être une boule de rayon ρ notée B_ρ , et u satisfaisant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B_\rho \\ u = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho} \right) = g & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B_\rho, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

où la vitesse de propagation c est supposée homogène et constante, cf. FIGURE 2.1.

Proposition 4.0.1. : Si Ω est une boule de \mathbb{R}^3 de rayon R , concentrique à la boule-test B_ρ , nous avons l'estimation d'énergie suivante écrite pour le problème (4.0.1) en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint \left(r^2 \sin \phi \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \sin \phi \left(\frac{\partial (ru)}{\partial r} \right)^2 + c^2 \sin \phi \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{c^2}{\sin \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right) dr d\theta d\phi \right] \\ + \iint_{r=\rho} \left(c \rho^2 \sin \phi \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) d\theta d\phi = \iint_{r=\rho} \left(c \rho^2 \sin \phi \frac{\partial u}{\partial t} g \right) d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

Démonstration. L'estimation d'énergie est basée sur la formulation équivalente du Laplacien en coordonnées sphériques suivante :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}). \quad (4.0.3)$$

La démonstration suit ces trois étapes :

1. formulation équivalente du Laplacien en coordonnées sphériques ;
2. multiplication par $\partial u / \partial t$, puis intégration par parties ;
3. traitement du terme de bord.

Commençons par montrer la formule (4.0.3). Le Laplacien en dimension 3 en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}).$$

Les termes concernant les coordonnées angulaires (θ, ϕ) sont inchangés, traitons uniquement le terme de la coordonnée radiale. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial r} u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Nous multiplions maintenant l'équation des ondes (4.0.1) par $\partial u / \partial t$:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = \\ &\iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{c^2}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{c^2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Nous allons traiter une par une les quatre coordonnées :

$$\begin{aligned}
 I_t &= \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi; \\
 I_r &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi; \\
 I_\theta &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{c^2}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi; \\
 I_\phi &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{c^2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.
 \end{aligned}$$

Nous avons facilement le résultat suivant pour la coordonnée temporelle :

$$I_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi \right].$$

Nous traitons à présent les coordonnées angulaires :

$$\begin{aligned}
 I_\theta &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \frac{c^2}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \, dr \, d\theta \, d\phi + \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \frac{c^2}{\sin \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= - \underbrace{\left[\iint \frac{c^2}{\sin \phi} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta} \, dr \, d\phi \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}}_{=0 \text{ sur le cercle}} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\Omega \setminus B_\rho} \frac{c^2}{\sin \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \, dr \, d\theta \, d\phi \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } I_\phi &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} c^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dr \, d\theta \, d\phi + \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} c^2 \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \phi} \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= - \underbrace{\left[\iint c^2 \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial u}{\partial t} \, dr \, d\theta \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}}_{=0 \text{ car } \sin \phi = 0 \text{ en } 0 \text{ et en } \pi} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[c^2 \sin \phi \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 \, dr \, d\theta \, d\phi \right].
 \end{aligned}$$

Finalement, considérons le terme concernant la dérivée radiale :

$$\begin{aligned}
 I_r &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} c^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \frac{\partial (ru)}{\partial t} \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= - \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (ru)}{\partial r} \frac{\partial (ru)}{\partial t} \right) \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi + \iiint_{\Omega \setminus B_\rho} c^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial t} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= - \left[\iint c^2 \frac{\partial (ru)}{\partial r} \frac{\partial (ru)}{\partial t} \sin \phi \, d\theta \, d\phi \right]_{r=\rho}^{r=R} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[c^2 \left(\frac{\partial (ru)}{\partial r} \right)^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi \right].
 \end{aligned}$$

Le terme en $r = R$ s'annule par la condition de Dirichlet homogène. Nous nous concentrerons sur le terme de bord en $r = \rho$:

$$\iint_{r=\rho} c^2 \frac{\partial(ru)}{\partial t} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \sin \phi d\theta d\phi = \iint_{r=\rho} c\rho \frac{\partial(ru)}{\partial t} c \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{\rho} \right) \sin \phi d\theta d\phi$$

Comme en $r = \rho$, $\partial/\partial r = -\partial/\partial n$, nous obtenons en utilisant (4.0.1) :

$$\begin{aligned} \iint_{r=\rho} c\rho \frac{\partial(ru)}{\partial t} c \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{\rho} \right) \sin \phi d\theta d\phi &= \iint_{r=\rho} c\rho \frac{\partial(ru)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - g \right) \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \iint_{r=\rho} c\rho^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \sin \phi d\theta d\phi - \iint_{r=\rho} c\rho^2 \frac{\partial u}{\partial t} g \sin \phi d\theta d\phi. \end{aligned}$$

En rassemblant chacun des termes, nous obtenons l'estimation d'énergie (4.0.2). \square

Remarque 4.0.2. : *L'estimation d'énergie (4.0.2) n'est pas une estimation d'énergie physique standard. En effet, le terme en coordonnée radiale est*

$$\left(\frac{\partial(ru)}{\partial r} \right)^2 \quad \text{au lieu de} \quad r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$$

dans une estimation standard. Cette estimation nous donne un contrôle de la solution du problème (4.0.1) et ainsi la stabilité du problème. La question de l'interprétation physique reste une question ouverte.

Chapitre 5

Recréer le passé avec la méthode *TRAC*

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques en dimension 2 pour l'équation des ondes scalaire et l'équation de Helmholtz. Nous traitons de la même manière des inclusions molles, dures ou pénétrables. Nous commençons par ailleurs en rappelant les équations et les paramètres mis en jeu. Puis nous précisons la discrétisation numérique utilisée. Finalement nous illustrons nos résultats et montrons la capacité de la méthode à reconstituer les signaux. Nous mentionnons rapidement la première application quant à la réduction de la taille du domaine de calcul.

Sommaire

5.1	Premier exemple : le Poisson	86
5.2	Plus de tests pour l'équation des ondes	90
5.2.1	Système d'équations et paramètres physiques	90
5.2.2	Discrétisation des problèmes direct et TR	95
5.2.3	Résultats numériques	101
5.3	Quelques tests pour l'équation de Helmholtz	109
5.3.1	Équations et paramètres physiques	109
5.3.2	Discrétisation des problèmes direct et TR	110
5.3.3	Résultats numériques	113
Conclusion & Article paru dans <i>Inverse Problems</i>		120

5.1 Premier exemple : le Poisson

Dans cette section, nous présentons un premier exemple. Cet exemple a pour vocation d'illustrer la méthode *TRAC* décrite en détail dans le chapitre 2. Pour nos résultats numériques, nous travaillons avec une équation des ondes scalaire en dimension 2. Les détails sur le choix des paramètres et de discréétisation seront développés dans les § 5.2 pour l'équation des ondes et 5.3 pour l'équation de Helmholtz. Pour l'instant, nous proposons de montrer sur un exemple les performances de la méthode *TRAC* et comment interpréter les planches de graphiques.

Nous montrons deux séries de graphiques. La première planche 5.1 présente l'évolution des champs directs sur un objet totalement réfléchissant (de type mou), en forme de poisson. Chaque champ évolue sur une ligne de la FIGURE 5.1 dans le sens des temps croissants de la gauche vers la droite. La première ligne 5.1a présente le champ incident, soit le champ qui se propage dans le milieu sans inclusion. La source est ponctuelle, située à environ cinq longueurs d'onde au-dessus du domaine, et lorsque l'onde arrive dans le milieu, elle est presque plane. Sur la deuxième ligne 5.1b, nous montrons le champ total, c'est-à-dire le champ résultant du champ incident lorsque celui-ci atteint l'inclusion réfléchissante. Finalement, la troisième ligne 5.1c nous donne une représentation du champ diffracté par l'inclusion. Cela revient à soustraire le champ incident du champ total. Nous voyons alors une onde se créer au niveau du poisson, puis diverger vers l'infini. À la fin de la simulation, c'est-à-dire sur les images de droite de chacune des lignes, il ne reste plus de signal dans le domaine de calcul. Ceci correspond à l'hypothèse où les conditions initiales lors du retournement temporel sont nulles. Notons par ailleurs que le champ diffracté, en FIGURE 5.1c n'est pas tout à fait une onde sphérique divergeant vers l'infini, mais peut satisfaire une condition de radiation à l'infini. Sur le bord du domaine de calcul sont représentés par des points noirs les récepteurs sur lesquels est enregistré le champ diffracté.

La deuxième planche 5.2 compare le retournement temporel exact en 5.2a à quatre retournements temporels numériques obtenus à partir des mesures sur la ligne d'émetteurs-récepteurs :

- retournement temporel avec *TRAC* dans le cas où le sous-domaine B englobe correctement tout le poisson, cf. FIGURE 5.2b ;
- retournement temporel avec *TRAC* dans le cas où le sous-domaine B n'englobe pas correctement tout le poisson, la queue reste dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$, cf. FIGURE 5.2c ;

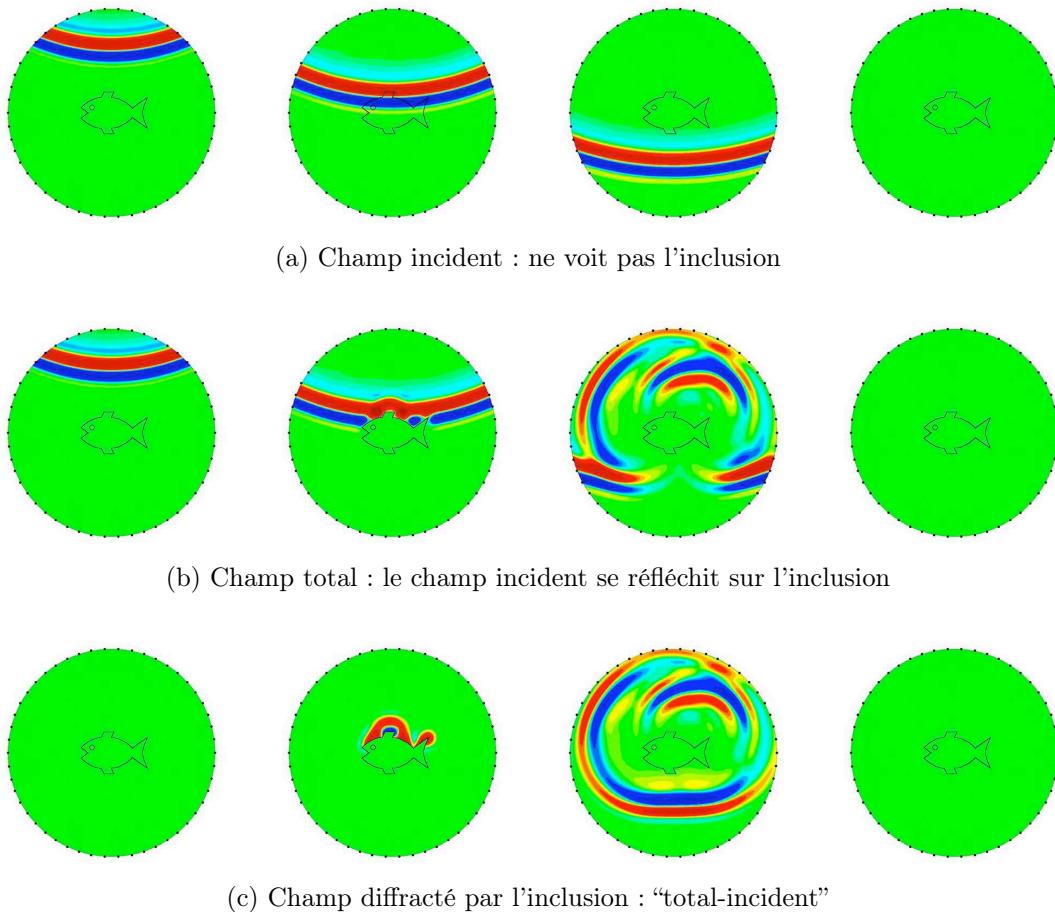


FIGURE 5.1 – Images instantanées des champs directs dans le cas d'une inclusion en forme de poisson totalement réfléchissante, de type mou. De gauche à droite, l'onde se propage pour des temps croissants depuis une source ponctuelle située en haut du domaine de calcul. Tout autour, les points noirs représentent les récepteurs sur lesquels est enregistré le champ diffracté. À la fin de la simulation (colonne de droite), il ne reste plus de signal dans le domaine.

- retournement temporel classique, cf. FIGURE 5.2d ;
- retournement temporel avec une condition de Neumann homogène sur le bord de B dans le cas où le sous-domaine B englobe correctement tout le poisson, cf. FIGURE 5.2e.

Notons par ailleurs que le champ retourné en temps exact est en fait obtenu en prenant les images du champ diffracté direct dans le sens des temps décroissants. Il n'y a pas de simulations numériques correspondant au retournement temporel exact. Nous le présentons à titre de référence qui montre ce que nous souhaiterions reconstituer.

Cette fois-ci, nous regardons l'évolution de l'onde retournée en temps pour des temps directs décroissants de la gauche vers la droite : la colonne de gauche montre l'instant initial pour le retournement temporel, soit l'instant final de l'expérience directe et la colonne

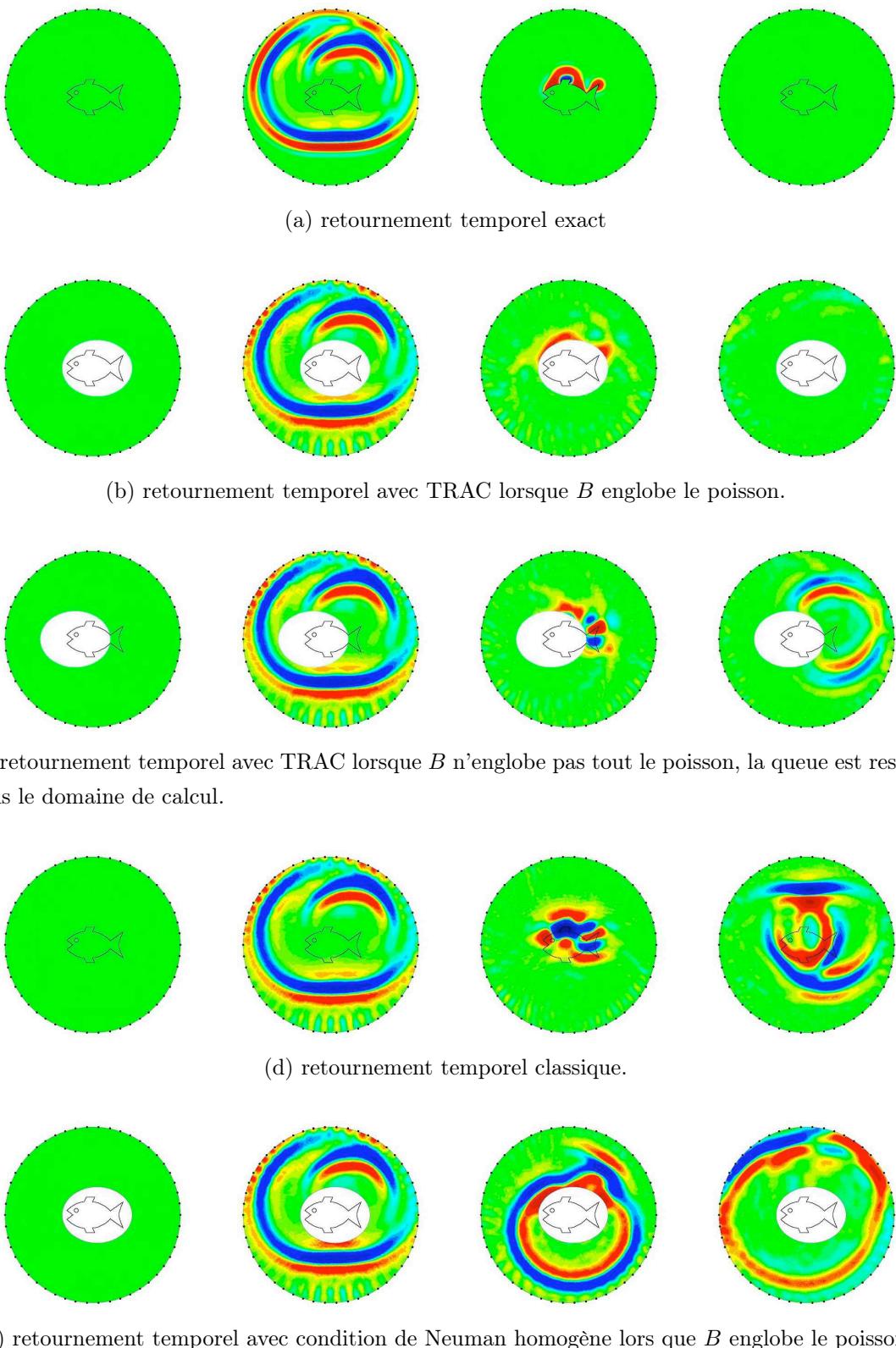


FIGURE 5.2 – Images instantanées des champs obtenus par retournement temporel. De gauche à droite, l'onde retournée en temps évolue dans le sens des temps directs décroissants. La colonne de gauche montre l'instant initial pour le retournement temporel, soit l'instant final de l'expérience directe. La colonne de droite montre l'instant final pour le retournement temporel, soit l'instant initial pour l'expérience directe.

de droite montre l'instant final pour le retournement temporel, soit l'instant initial pour l'expérience directe. Pour cet exemple, il est important de noter que les capteurs de la LER sont espacés d'une demi-longueur d'onde et que nous avons bruité nos données enregistrées pour un niveau de bruit de 20%. Nous expliquerons ultérieurement comment nous bruitons ces données.

Sur la première colonne (à gauche), nous reconnaissions l'hypothèse des conditions initiales nulles pour le retournement temporel. Sur la deuxième colonne, nous voyons que le champ diffracté converge de la même façon dans tous les cas et le signal est bien reconstitué tant que nous n'avons pas atteint l'inclusion. Sur la troisième colonne, l'onde approche de l'inclusion. Différents cas se présentent alors à nous :

- sur la FIGURE 5.2b, nous avons correctement placé le sous-domaine B pour effectuer la méthode *TRAC*. Le champ reconstitué sur la troisième image est semblable à celui de l'image de référence à la perturbation du bruit sur les données près. Puis sur la quatrième image, il n'y a quasiment plus de signal dans le domaine. Encore une fois, les résidus sont liés au bruit sur les données, mais sont négligeables.
- sur la FIGURE 5.2c, nous avons mal placé le sous-domaine B pour effectuer la méthode *TRAC*. Sur la troisième image, nous observons un ensemble de taches se concentrant à l'endroit où nous avons manqué une partie de l'inclusion. Ces taches repartent en une onde divergente sur la quatrième image, révélant que la partie que nous avons manquée se situe à droite de notre sous-domaine B .
- sur la FIGURE 5.2d, nous avons effectué du retournement temporel classique et nous observons la tache focale liée à la limite de diffraction sur la troisième image. Ensuite la tache focale repart en une onde divergente sur la quatrième image.
- sur la FIGURE 5.2e, nous voulons vérifier que le choix de la condition sur le bord du sous-domaine B joue un rôle décisif. Pour cela, nous avons imposé dans cette expérience numérique une condition de Neumann homogène qui réfléchit tout le signal convergent de la deuxième image en un signal divergent sur la troisième image. Ainsi, bien que nous ayons enlevé la partie du domaine où nous faisons une erreur sur les paramètres physiques, nous ne sommes pas capables de reconstituer le champ diffracté si nous n'imposons pas la bonne condition aux limites.

Rappelons que lors de la simulation de retournement temporel, nous n'avons aucune connaissance quant à la position et les propriétés du poisson. Sur les graphiques, nous avons rajouté sa trace à titre d'information.

Dans la suite, nous présentons nos résultats numériques pour la méthode *TRAC* uniquement : nous n'effectuons plus de retournement temporel classique. Chaque résultat numérique est accompagné de sa solution de référence.

5.2 Plus de tests pour l'équation des ondes

Commençons par détailler les équations et la discrétisation de la méthode *TRAC* pour l'équation des ondes scalaire en dimension 2.

5.2.1 Système d'équations et paramètres physiques

Dans nos premiers tests numériques, nous avons décidé de travailler avec des données provenant de l'imagerie médicale. Dans ce cadre, nous devons rappeler que l'équation à considérer est l'équation des ondes élastiques dans un corps.

5.2.1.1 Rapide rappel sur l'équation de l'élasticité

Les équations des ondes élastiques sont les équations qui modélisent par exemple la propagation des ondes sismiques ou la propagation des ondes à l'intérieur d'un solide en faisant intervenir des coefficients de Lamé μ (coefficient de cisaillement, *shear modulus* en anglais) et λ (simplement appelé second coefficient de Lamé).

Nous notons d la dimension de l'espace, $d = 1, 2, 3$. Les équations de la physique sont :

1. 1^{ère} loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(u) . \quad (5.2.1)$$

2. avec le tenseur des contraintes σ :

$$\sigma_{i,j} = \lambda(\nabla \cdot u)\delta_{i,j} + 2\mu\varepsilon_{i,j}(u) , \quad (5.2.2)$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kroneker,

3. et le tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \quad (5.2.3)$$

En regroupant les trois relations (5.2.1-5.2.2-5.2.3), nous obtenons l'équation régie par le déplacement u composante par composante :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \nabla \cdot u) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \nabla \cdot (\mu \nabla u_i) .$$

Enfin, nous obtenons l'équation des ondes élastiques non dissipative sur le vecteur déplacement u sous forme d'un système vectoriel en dimension 3 :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla ((\lambda + \mu) \nabla \cdot u) + \nabla \cdot (\mu \nabla u) . \quad (5.2.4)$$

Pour une étude plus détaillée de l'établissement des équations de l'élasticité, nous renvoyons le lecteur à [LL86].

Remarque 5.2.1. *Le lien entre les coefficients de Lamé est :*

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} ,$$

E étant le coefficient de Young et σ le coefficient de Poisson.

Remarque 5.2.2. : *L'équation (5.2.4) nous donne deux types d'ondes : les ondes de compression dont le coefficient est $\lambda + \mu$ et les ondes de cisaillement de coefficient μ . En sismique, on retrouve les mêmes notions et les mêmes équations. Les ondes de compression sont aussi appelées ondes P (comme pressure ou primaires) et les ondes de cisaillement sont aussi appelées ondes S (comme shear en anglais ou secondaires).*

On peut déduire de l'équation (5.2.4) que les ondes P sont solutions de (5.2.4) telles que

$$\nabla \times u = 0 \quad \text{et} \quad v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{est la vitesse de compression.}$$

De la même façon, les ondes S sont solutions de (5.2.4) telles que

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{et} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{est la vitesse de cisaillement.}$$

Dans la suite de notre étude, nous considérons les ondes S uniquement en faisant l'hypothèse que la divergence du déplacement est nulle. Ainsi pour une composante du champ de déplacement, nous obtenons l'équation des ondes scalaire suivante :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu \nabla u_i) = 0 , \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, d \rrbracket . \quad (5.2.5)$$

Nous travaillons à présent sur la résolution de (5.2.5) pour une des composantes du champ de déplacement. De plus, pour homogénéiser la notation de la vitesse de propagation, nous noterons c la vitesse de cisaillement à partir de maintenant.

5.2.1.2 Dérivation du problème direct et paramètres

Dans les étapes pour effectuer nos simulations, nous devons commencer par créer les données synthétiques et calculer le champ incident. Nous travaillons à présent en dimension 2. Dans le domaine de calcul Ω , le problème direct sur le champ direct total s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu \nabla u^T) = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \\ \frac{\partial u^T}{\partial t} + c \frac{\partial u^T}{\partial r} + c \frac{u^T}{2r} = f(t) & \text{sur } (0, T_f) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2.6)$$

avec des conditions initiales homogènes. Les paramètres ρ , μ et c sont supposés constants par morceaux, et nous prenons les notations suivantes :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{dans } \Omega \setminus D \\ \mu_D & \text{dans } D \end{cases}, \quad \rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{dans } \Omega \setminus D \\ \rho_D & \text{dans } D \end{cases} \quad \text{et} \quad c = \begin{cases} c_0 & \text{dans } \Omega \setminus D \\ c_D & \text{dans } D \end{cases}. \quad (5.2.7)$$

Sur le bord externe du domaine de calcul Ω , nous avons imposé une condition de Bayliss-Turkel d'ordre 1 chargée. Cette condition modélise un signal venant de l'infini et le fait que le bord contenant la ligne d'émetteurs-récepteurs ne déforme pas l'onde qui se propage. Le temps final de simulation T_f est choisi de façon à ce qu'il ne reste plus aucun signal significatif dans le domaine de calcul. Dans nos simulations numériques, nous travaillerons avec dix périodes, soit $T_f = 10/\nu_0$.

Remarque 5.2.3. *Pour calculer le champ incident u^I , nous résolvons l'équation des ondes (5.2.6) dans le cas où il n'y a pas d'inclusion. Ainsi les paramètres ρ , μ et c sont pris égaux à ρ_0 , μ_0 et c_0 respectivement dans tout le domaine Ω .*

La fonction source f est une fonction à support compact en temps, ponctuelle en espace, prise comme suit :

$$f(t) = \begin{cases} [1 - 2\pi^2(\nu_0 t - 1)^2] e^{-\pi^2(\nu_0 t - 1)^2} & \text{si } t \in (0, T_s) \text{ et } \vec{x} = \vec{x}_s \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

où ν_0 est la fréquence centrale du signal, T_s est le temps d'émission de la source pris égal à deux périodes, et \vec{x}_s est la position de la source sur le bord de Ω . Un tel signal est appelé aussi un Ricker et correspond à une constante près à la dérivée seconde d'une Gaussienne. Grâce à cette remarque, nous sommes capables d'étudier aisément le spectre de notre source.

La fonction Gaussienne, dont dérive notre source, est :

$$g(t) = \frac{-1}{2\pi^2\nu_0^2} \left(e^{-\pi^2(\nu_0 t - 1)^2} \right). \quad (5.2.9)$$

Par abus, nous notons également f la fonction de Ricker que vaut la source en \vec{x}_s .

Pour analyser le spectre de notre signal, nous devons considérer sa transformée de Fourier. Nous choisissons la convention suivante :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.2.10)$$

et la transformée de Fourier inverse devient :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.2.11)$$

Nous calculons alors la transformée de Fourier du signal source.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi^2 \nu_0^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-\pi^2(\nu_0 t - 1)^2} \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-(i\omega)^2}{2\pi^2 \nu_0^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2(\nu_0 t - 1)^2} e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

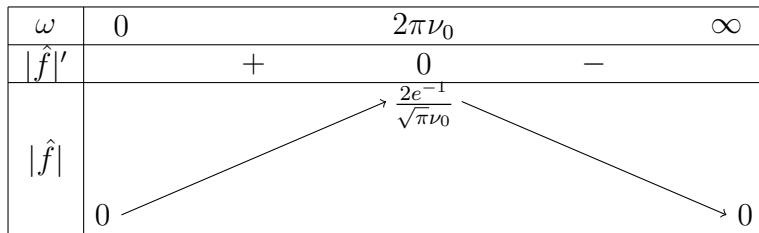
En faisant le changement de variable $\tau = t - 1/\nu$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{\omega^2}{2\pi^2 \nu_0^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2 \nu_0^2 \tau^2} e^{-i\omega(\tau + \frac{1}{\nu})} d\tau \\ &= \frac{\omega^2 e^{-i\frac{\omega}{\nu_0}}}{2\pi^2 \nu_0^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2 \nu_0^2 \tau^2} e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{\omega^2 e^{-i\frac{\omega}{\nu_0}}}{2\pi^2 \nu_0^2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2 \nu_0^2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi^2 \nu_0^2}}. \end{aligned}$$

Les variations de $|\hat{f}(\omega)|$ sont :

$$|\hat{f}'(\omega)| = \frac{\omega}{\pi^2 \sqrt{\pi} \nu_0^3} \left(1 - \frac{\omega^2}{4\pi^2 \nu_0^2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4\pi^2 \nu_0^2}} \quad (5.2.12)$$

et



La FIGURE 5.3 illustre la fonction Ricker et son spectre pour $\nu_0 = 5$. Nous pouvons alors déduire des calculs ci-dessus et des graphiques que la fréquence centrale du signal est ν_0 . Nous déterminons comme spectre significatif les fréquences comprises entre $2\nu_0/7$ et $2\nu_0$, pour une contribution d'au moins 20% au contenu spectral de la source.

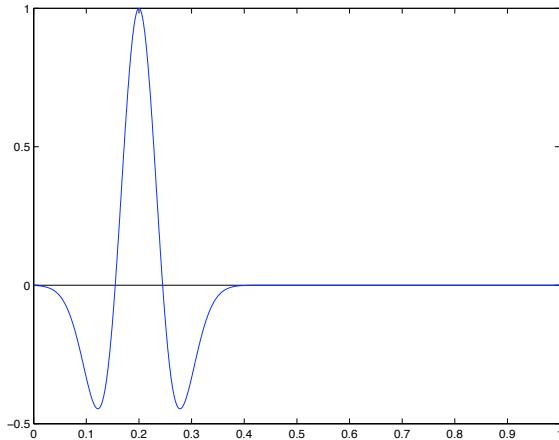
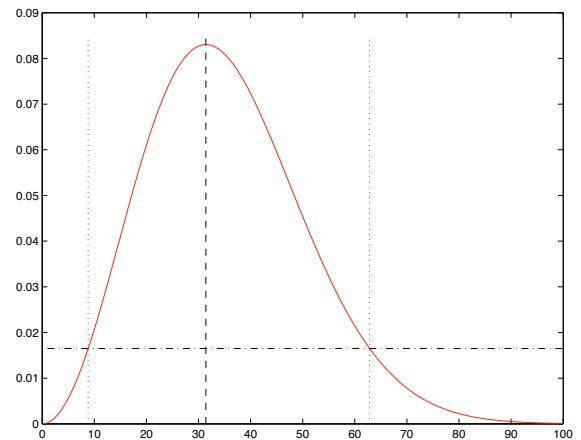
(a) Fonction-source Ricker pour $\nu_0 = 5$.(b) Spectre de la source pour une fréquence centrale $\nu_0 = 5$.

FIGURE 5.3 – (a) Source et (b) spectre de la source utilisée dans nos expériences. La fréquence angulaire centrale est matérialisée par une ligne verticale tiretée en $\omega = 2\pi\nu_0$, soit pour la fréquence centrale ν_0 . Les fréquences significatives sont comprises entre $2\nu_0/7$ et $2\nu_0$ (lignes verticales pointillées) pour une contribution d'au moins 20% (ligne horizontale alternée) au spectre.

5.2.1.3 Dérivation du problème de retournement temporel avec *TRAC*

Pour effectuer la méthode *TRAC*, nous introduisons un sous-domaine B dans Ω que nous supposons circulaire et englobant l'inclusion D en totalité. Le problème de retournement temporel pour le champ total s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu_0 \nabla u_R^T) & = 0 \quad \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ u_R^T(t, .) & = u^T(T_f - t, .) \quad \text{sur } (0, T_f) \times \partial\Omega \\ \frac{\partial u_R^T}{\partial t} + c \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - c \frac{u_R^T}{2r} & = \frac{\partial u_R^I}{\partial t} + c \frac{\partial u_R^I}{\partial n} - c \frac{u_R^I}{2r} \quad \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \end{array} \right. \quad (5.2.13)$$

avec des conditions initiales nulles, et u_R^I est le champ incident calculé retourné en temps.

La première ligne de l'équation (5.2.13) est l'équation des ondes prenant pour paramètres uniquement ceux du milieu environnant, car nous supposons l'inclusion D inconnue. De plus, si le sous-domaine B englobe l'inclusion D dans sa totalité, les paramètres ρ , μ et c restreints à $\Omega \setminus B$ sont bien égaux à ρ_0 , μ_0 et c_0 respectivement.

La deuxième ligne de l'équation (5.2.13) modélise la ligne d'émetteurs-récepteurs. Pour cela, nous utilisons une condition de Dirichlet qui prend pour valeurs les signaux enregistrés sur la LER retournés en temps.

La troisième ligne de l'équation (5.2.13) correspond à la *TRAC* imposée sur le bord du sous-domaine B . Rappelons qu'ici la *TRAC* n'est pas la condition de Bayliss-Turkel standard d'ordre 1, cf. § 2.1.2.

Nous pouvons également écrire le problème de retournement temporel pour le champ diffracté :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 \frac{\partial^2 u_R^S}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu_0 \nabla u_R^S) & = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ u_R^S(t, .) & = u^T(T_f - t, .) - u^I(T_f - t, .) & \text{sur } (0, T_f) \times \partial\Omega \\ \frac{\partial u_R^S}{\partial t} + c \frac{\partial u_R^S}{\partial n} - c \frac{u_R^S}{2r} & = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B. \end{array} \right. \quad (5.2.14)$$

Dans nos premiers tests numériques, nous travaillerons sur le champ total, puis dans la deuxième partie de la thèse, nous travaillerons plutôt sur le champ diffracté.

5.2.2 Discrétisation des problèmes direct et TR

Nous proposons ici d'écrire les détails de la discrétisation des problèmes direct (5.2.6) et de retournement temporel (5.2.13). Pour cela, nous procédons en trois étapes :

1. nous écrivons la formulation variationnelle associée à l'équation ;
2. nous discrétisons en temps par un schéma centré d'ordre 2 ;
3. nous discrétisons en espace par une méthode des éléments finis P^1 .

5.2.2.1 Discrétisation du problème direct

Formulation variationnelle Soit v une fonction-test définie dans Ω , ne dépendant pas du temps. Nous multiplions l'équation des ondes par la fonction-test v et nous intégrons sur le domaine Ω :

$$\iint_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} v - \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \nabla u^T) v = 0.$$

Ensuite nous intégrons par parties en utilisant le théorème de Gauss :

$$\iint_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} v + \iint_{\Omega} \mu \nabla u^T \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial u^T}{\partial n} v = 0.$$

Nous utilisons la condition aux limites absorbante sur $\partial\Omega$ pour remplacer la dérivée normale :

$$\iint_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} v + \iint_{\Omega} \mu \nabla u^T \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} \frac{\partial u^T}{\partial t} v + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{2r} u^T v = \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} f(t) v . \quad (5.2.15)$$

Discrétisation en temps : un schéma centré Pour la discrétisation en temps, nous choisissons un schéma centré. Soit Δt le pas de temps et notons :

$$(u^T)^n(x, y) \simeq u^T(n\Delta t, x, y).$$

Le problème discrétisé devient :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \rho(u^T)^{n+1} v - 2 \iint_{\Omega} \rho(u^T)^n v + \iint_{\Omega} \rho(u^T)^{n-1} v + \Delta t^2 \iint_{\Omega} \mu(\nabla u^T)^n \cdot \nabla v \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} (u^T)^{n+1} v - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} (u^T)^{n-1} v + \Delta t^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{2r} (u^T)^n v = \Delta t^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} f^n v . \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Le schéma centré n'est pas seulement intéressant du point de vue de la stabilité. Il contient également une symétrie par rapport au temps que nous pouvons exploiter dans l'implémentation du code numérique.

Discrétisation en espace : Méthode des éléments finis P^1 Nous devons à présent passer à la discrétisation en espace. Nous allons utiliser une méthode des éléments finis, en particulier, nous choisissons de travailler en éléments finis P^1 . Notons par ailleurs que, puisque nous travaillons essentiellement sur des petits domaines (maximum dix longueurs d'onde), une méthode des éléments finis P^1 est suffisante.

Notons h le pas d'espace et \mathcal{T}_h le maillage de discrétisation du domaine Ω , que nous prenons conforme autour de l'inclusion. Soit φ_i une fonction-test P^1 , c'est-à-dire s'annulant partout sur le maillage excepté sur le noeud i . Nous proposons alors les notations suivantes :

- U_h est la fonction P^1 approchant u telle que : $U_h = \sum_i U_i \varphi_i \simeq u(x_h, y_h)$;
- U_h peut aussi être vu comme un vecteur dont les composantes sont les U_i ;
- M renvoie à la matrice associée à la forme bilinéaire : $(u, v) \mapsto \iint_{\Omega} \rho u v$,
il s'agit de la matrice de masse : $M_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \rho \varphi_i \varphi_j$;
- A renvoie à la matrice associée à la forme bilinéaire : $(u, v) \mapsto \iint_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v$,
il s'agit de la matrice de rigidité : $A_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \mu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$;

- B_{ext} renvoie à la matrice associée à la forme bilinéaire : $(u, v) \mapsto \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{c} uv$,
il s'agit de la matrice de masse sur le bord externe : $B_{exti,j} = \int_{\partial\mathcal{T}_h} \frac{\mu}{c} \varphi_i \varphi_j$;
- C_{ext} renvoie à la matrice associée à la forme bilinéaire : $(u, v) \mapsto \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{2r} uv$,
il s'agit de la matrice de courbure sur le bord externe : $C_{exti,j} = \int_{\partial\mathcal{T}_h} \frac{\mu}{2r} \varphi_i \varphi_j$.

Nous obtenons ainsi le système linéaire suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M + \frac{\Delta t}{2} B_{ext} \right) (U^T)_h^{n+1} = (2M - \Delta t^2 A - \Delta t^2 C_{ext}) (U^T)_h^n \\ \quad + \left(-M + \frac{\Delta t}{2} B_{ext} \right) (U^T)_h^{n-1} + \Delta t^2 B_{ext} f_h^n \\ (U^T)_h^0 = 0 \\ (U^T)_h^1 = 0. \end{array} \right. \quad (5.2.17)$$

Pour cela, nous utilisons le logiciel FREEFEM++ [Hec10], qui est développé pour la discrétisation par éléments finis. Il permet la construction de maillage en dimension 2 pour des géométries diverses directement intégrée dans le code.

5.2.2.2 Discrétisation du problème de retournement temporel avec **TRAC**

Formulation variationnelle Nous procédons comme dans le cas précédent en commençant par écrire la formulation variationnelle associée à l'équation (5.2.13). Soit v une fonction-test définie dans $\Omega \setminus B$, ne dépendant pas du temps et s'annulant sur $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} v - \iint_{\Omega \setminus B} \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u_R^T) v &= 0 \\ \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} v + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla u_R^T \cdot \nabla v - \int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial u_R^T}{\partial n} v &= 0. \end{aligned}$$

Nous traitons le terme en dérivée normale grâce à la **TRAC**, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} v + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla u_R^T \cdot \nabla v + \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_R^T}{\partial t} v - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} u_R^T v \\ = \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_R^I}{\partial t} v - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} u_R^I v + \int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial u_I^I}{\partial n} v. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Discrétisation en temps Comme pour le problème direct, nous notons Δt le pas de temps et approchons notre solution par : $(u^T)^n(x, y) = u^T(n\Delta t, x, y)$. La discrétisation en temps par le schéma centrée nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 (u_R^T)^{n+1} v - 2 \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 (u_R^T)^n v + \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 (u_R^T)^{n-1} v + \Delta t^2 \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 (\nabla u_R^T)^n \cdot \nabla v \\
 & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} (u_R^T)^{n+1} v - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} (u_R^T)^{n-1} v - \Delta t^2 \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} (u_R^T)^n v \\
 & = \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} (u_R^I)^{n+1} v - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{c_0} (u_R^I)^{n-1} v - \Delta t^2 \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} (u_R^I)^n v + \Delta t^2 \int_{\partial B} \mu_0 \left(\frac{\partial u_R^I}{\partial n} \right)^n v,
 \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

où u_R^I est connu par calcul.

Discrétisation en espace Pour la discrétisation en espace, nous utilisons à nouveau la méthode des éléments finis P^1 . Comme dans le cas du problème direct, h est le pas d'espace et \mathcal{T}_h est le maillage de discrétisation conforme du domaine de calcul $\Omega \setminus B$. Nous posons φ_i la fonction-test P^1 associée au nœud i . Nous avons alors les notations suivantes :

- U_h est la fonction P^1 approchant u telle que : $U_h = \sum_i U_i \varphi_i \simeq u(x_h, y_h)$;
- U_h peut aussi être vu comme un vecteur dont les composantes sont les U_i ;
- M renvoie à la matrice de masse : $M_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \rho_0 \varphi_i \varphi_j$;
- A renvoie à la matrice de rigidité : $A_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \mu_0 \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$;
- B_{in} renvoie à la matrice de masse sur le bord interne : $B_{inti,j} = \int_{\partial \mathcal{T}_{h,int}} \frac{\mu_0}{c_0} \varphi_i \varphi_j$;
- C_{in} renvoie à la matrice de courbure sur le bord interne : $C_{inti,j} = \int_{\partial \mathcal{T}_{h,int}} \frac{\mu_0}{2r} \varphi_i \varphi_j$.

Remarquons que nous avons pris les mêmes notations par abus, les coefficients et le maillage sont différents du cas direct. Avant d'écrire le système linéaire à résoudre, il nous reste à traiter deux termes : la condition de Dirichlet sur le bord externe du domaine et le terme en dérivée normale sur le champ incident qui intervient dans *TRAC*.

Condition de Dirichlet et pénalisation La condition de Dirichlet modélise les enregistrements que nous réémettons dans le milieu. Elle varie donc en espace et en temps. Le logiciel FREEFEM++ utilise une méthode de pénalisation pour la discrétiser. Soit ε le paramètre de pénalisation.

Pour introduire la méthode de pénalisation, nous considérons un problème stationnaire dans un cas un peu plus général :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2.20)$$

Le but de la méthode de pénalisation est de minimiser la fonctionnelle associée au problème (5.2.20). La fonctionnelle que nous considérons ici est :

$$\begin{aligned} J : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \mu_0 |\nabla v|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\partial\Omega} (v - g)^2. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

La solution u dans $H^1(\Omega)$ de la minimisation de la fonctionnelle (5.2.21) est :

$$\iint_{\Omega} \mu_0 \nabla u \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} uv = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.2.22)$$

Nous procédons de façon similaire pour notre système et ajoutons finalement le terme de pénalisation dans le schéma itératif. Nous l'imposons de façon implicite, c'est-à-dire sur la solution en cours de calcul, $(u_R^T)^{n+1}$. Notons P_{ext} la matrice de pénalisation associée à la forme bilinéaire : $(u, v) \longmapsto \int_{\partial\Omega} uv$.

Calcul de la dérivée normale Un problème majeur dans la discrétisation est le calcul de la dérivée normale. En effet l'opérateur discrétisé directement depuis l'opérateur continu entraîne une erreur importante sur les résultats et n'est donc pas satisfaisant.

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_h \neq \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \right)_h + \left(\frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} \right)_h.$$

C'est pourquoi il nous faut trouver une autre définition pour le terme de dérivée normale. Pour calculer $\Delta t^2 \int_{\partial B} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^n v$, nous allons l'exprimer à partir d'intégrales volumiques. Nous savons déjà que u vérifie :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u) = 0 \quad \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B.$$

Donc, pour toute fonction-test $w \in H^1(\Omega \setminus B)$, indépendante du temps, nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w - \iint_{\Omega \setminus B} \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u) w = 0$$

$$\iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla u \nabla w = \int_{\partial\Omega} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^n w + \int_{\partial B} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^n w.$$

Sur le bord ∂B , la fonction $v|_{\partial B}$ de $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$ peut être vue comme la trace d'une fonction de $H^1(\Omega \setminus B)$. La formulation variationnelle nous donne :

$$\int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial u}{\partial n} v = \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla u \nabla w$$

où $w \in H^1(\Omega \setminus B)$, indépendant en temps, est un relèvement de $v|_{\partial B}$ s'annulant sur $\partial\Omega$.

Après discrétisation en temps, nous avons

$$\Delta t^2 \int_{\partial B} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^n v = \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 u^{n+1} w - 2 \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 u^n w + \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 u^{n-1} w + \Delta t^2 \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 (\nabla u)^n \nabla w. \quad (5.2.23)$$

Nous rencontrons une dernière difficulté pour la discrétisation en espace par la méthode des éléments finis, à cause des contraintes formulées sur le bord $\partial\Omega$ pour le relèvement w . Pour l'instant, nous notons F^n la discrétisation de la dérivée normale en P^1 . Le problème discrétisé correspondant au problème de retournement temporel (5.2.13) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M + \frac{1}{\varepsilon} P_{ext} + \frac{\Delta t}{2} B_{int} \right) (U_R^T)_h^{n+1} = (2M - \Delta t^2 A + \Delta t^2 C_{int}) (U_R^T)_h^n + \left(-M + \frac{\Delta t}{2} B_{int} \right) (U_R^T)_h^{n-1} \\ \quad + \frac{\Delta t}{2} B_{int} (U_R^I)_h^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B_{int} (U_R^I)_h^{n-1} - \Delta t^2 C_{int} (U_R^I)_h^n \\ \quad + F^n + \frac{1}{\varepsilon} P_{ext} (U^T)_h^{N_t - (n+1)} \\ (U_R^T)_h^0 = 0 \\ (U_R^T)_h^1 = 0. \end{array} \right. \quad (5.2.24)$$

Nous désignons par U_R^T la solution du problème de reconstitution du champ total, U_R^I le champ incident retourné en temps obtenu par calcul et U^T le champ total enregistré sur la LER.

Explicitons à présent le terme F^n . Nous considérons w comme un prolongement linéaire de $v|_{\partial B}$ dans le domaine $\Omega \setminus B$ tel que

$$w = \begin{cases} v & \text{sur } \partial B \\ 0 & \text{sur les noeuds internes du maillage de } \Omega \setminus B \text{ et sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2.25)$$

et nous approchons u et w par la méthode des éléments finis :

$$U_h = \sum_j U_j \varphi_j, \quad W_h = \sum_i W_i \varphi_i,$$

où φ_j est la fonction-test en le nœud j , pour des éléments P^1 . Ainsi nous avons :

$$\iint_{\mathcal{T}_h} \rho_0 U_h W_h = \sum_j \sum_i U_j W_i \iint_{\mathcal{T}_h} \rho_0 \varphi_j \varphi_i = {}^t W_h M U_h ,$$

Nous reconnaissons la matrice de masse : $M_{i,j} = \iint_{\Omega \setminus B} \rho_0 \varphi_i \varphi_j$; les notations U_h et W_h représentent à la fois les fonctions éléments finis et les vecteurs associés. De la même façon, nous faisons apparaître la matrice de rigidité

$$\iint_{\mathcal{T}_h} \mu_0 \nabla U_h \nabla W_h = \sum_j \sum_i U_j W_i \iint_{\mathcal{T}_h} \mu_0 \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i = {}^t W_h A U_h .$$

Comme w s'annule sur les nœuds internes du maillage \mathcal{T}_h et sur $\partial\Omega$, nous savons que les coefficients W_i valent zéro si i n'est pas sur le bord interne du maillage $\partial\mathcal{T}_{h,int}$. Par conséquent, si i est sur le bord $\partial\mathcal{T}_{h,int}$, alors la fonction φ_i vérifie (5.2.25) et la i ème composante du vecteur décrivant la dérivée normale est égale à la i ème composante du vecteur $(MU_h^{n+1} - 2MU_h^n + MU_h^{n-1} + \Delta t^2 AU_h^n)$. En revanche, si i n'est pas sur $\partial\mathcal{T}_{h,int}$, alors la fonction φ_i ne vérifie pas (5.2.25) et la composante i de notre vecteur décrivant la dérivée normale s'annule. Finalement, F est l'expression de la dérivée normale telle que, pour tout indice i des nœuds du maillage :

$$F_i = \begin{cases} (MU_h^{n+1} - 2MU_h^n + MU_h^{n-1} + \Delta t^2 AU_h^n)_i & \text{si } i \in \partial\mathcal{T}_{h,int} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pratiquement, nous calculons le vecteur F en multipliant le vecteur $(MU_h^{n+1} - 2MU_h^n + MU_h^{n-1} + \Delta t^2 AU_h^n)$ terme par terme avec un vecteur dont la composante i vaut 1 si i est sur $\partial\mathcal{T}_{h,int}$ et 0 sinon.

5.2.3 Résultats numériques

Nous présentons maintenant les résultats numériques obtenus en résolvant les problèmes discrétisés (5.2.17) et (5.2.24). Pour cela, nous faisons essentiellement un catalogue de graphiques pour illustrer dans les différents cas étudiés la capacité de la méthode *TRAC* à recréer le passé. Notons que dans tous nos tests, nous travaillons avec une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale dont les transducteurs sont disposés continûment le long de la LER.

Dans tous nos cas, la densité et le coefficient de cisaillement du milieu environnant sont pris égaux à 1, d'où la vitesse de propagation dans le milieu c_0

$$c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} = 1 .$$

La fréquence centrale ν_0 de la source (5.2.8) est prise égale à 5, ce qui nous donne une longueur d'onde λ de 0.2. Le diamètre du domaine de calcul est de 7.5λ et le temps de simulation est de quinze périodes. Quant au temps d'émission, il est de deux périodes. Lors de la création des données synthétiques, nous observons le champ total direct suivant : une onde incidente quasi-plane arrive du haut à droite du domaine de calcul vers l'inclusion. Lorsqu'elle touche l'inclusion, cela engendre le champ diffracté qui diverge vers l'infini sous la forme d'une onde sphérique. Par retournement temporel, nous souhaitons donc voir d'abord apparaître une onde sphérique convergente qui se concentre sur la surface où l'onde incidente à heurter l'inclusion, puis repart vers le haut à droite du domaine en une onde quasi-plane.

Dans la première série de tests illustrée sur la FIGURE 5.4, nous prenons une inclusion de type mou, c'est-à-dire :

$$\rho_D = 10^{30} , \quad \mu_D = 1 \quad \text{et par conséquent} \quad c_D \simeq 0 .$$

Dans un premier temps, nous prenons une inclusion ronde de rayon λ . Sur les FIGURES 5.4a et 5.4b, nous comparons le résultat de la reconstitution du champ total par la méthode *TRAC* au retournement temporel exact. Pour effectuer la méthode *TRAC*, nous avons introduit un sous-domaine B rond de rayon $3\lambda/2$ contenant l'inclusion. Nous observons nettement que le champ reconstitué (FIGURE 5.4b) avec la méthode *TRAC* est la restriction du retournement temporel exact (FIGURE 5.4a) sur $\Omega \setminus B$. Nous rappelons que le retournement temporel exact est montré à titre de référence et qu'il ne s'agit en fait que du champ total direct que nous présentons pour des temps décroissants.

Nous faisons des tests similaires pour des inclusions d'autres formes. Nous gardons cependant le même sous-domaine B . Par exemple, nous choisissons une inclusion molle carrée de côté 2λ . Les résultats sont présentés sur les FIGURES 5.4c et 5.4d. Nous observons à nouveau que le champ reconstitué est similaire au champ de référence dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$. De la même façon pour une inclusion triangulaire inscrite dans le cercle de rayon λ , nous observons un champ reconstitué similaire au champ de référence sur les FIGURES 5.4e et 5.4f. En conclusion de cette série de tests, la méthode *TRAC* permet de reconstituer le champ total pour une forme d'inclusion quelconque. D'ailleurs rappelons qu'elle fonctionne pour des inclusions plus complexes comme le poisson du § 5.1.

Dans la deuxième série de tests, nous considérons des inclusions pénétrables. Pour cela, nous utilisons les paramètres physiques issus du domaine médical que nous trouvons dans [STX⁺05]. Les trois types d'inclusions observés sont :

1. une tumeur cancéreuse du sein :

$$\rho_D = 1, \quad \mu_D = 2.9 \quad \text{et} \quad c_D \simeq 1.7.$$

2. un fibroadénome (grosseur saine dans le sein) :

$$\rho_D = 1, \quad \mu_D = 1.3 \quad \text{et} \quad c_D \simeq 1.14.$$

3. un tissu autre environnant :

$$\rho_D = 1, \quad \mu_D = 0.87 \quad \text{et} \quad c_D \simeq 0.93.$$

Dans chaque cas, la vitesse de propagation est proche de la vitesse du fluide ambiant $c_0 = 1$. Ces inclusions ne sont plus totalement réfléchissantes, mais laissent passer une partie du signal qui traverse l'inclusion à la vitesse c_D . Nous présentons les résultats numériques sur la FIGURE 5.5 : pour la tumeur cancéreuse sur 5.5a et 5.5b, pour le fibroadénome sur 5.5c et 5.5d et pour un autre tissu environnant sur 5.5e et 5.5f.

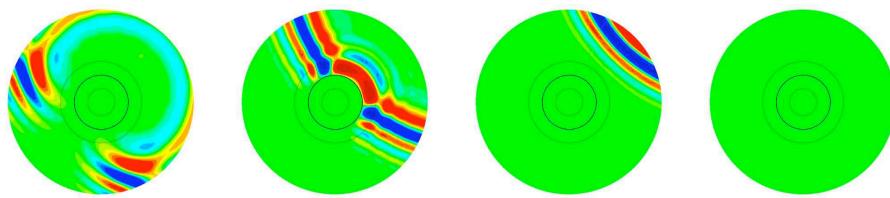
À chaque fois, nous comparons le retournement temporel avec *TRAC* au retournement temporel exact. La méthode *TRAC* est ici encore effectuée avec un sous-domaine rond de rayon $3\lambda/2$ contenant complètement l'inclusion. Nous observons clairement que la méthode *TRAC* nous permet de reconstituer correctement le champ total dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$.

En conclusion, la méthode *TRAC* fonctionne pour tout type d'inclusion réfléchissante ou pénétrable.

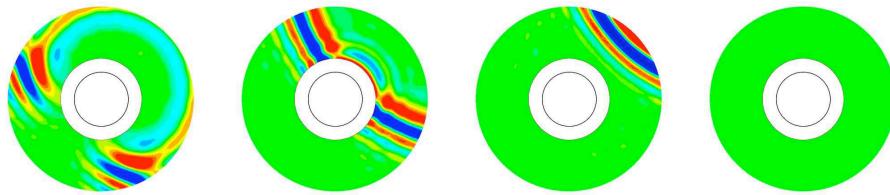
Dans la troisième série de tests, nous nous intéressons à la reconstitution du champ total lorsque les données enregistrées sont bruitées. Nous utilisons un bruit blanc gaussien non-corrélé en temps, ni en espace tel que :

$$u_{bruit}^T(t_i, \vec{x}_j) = [1 + Coeff \times \text{randn}(t_i, \vec{x}_j)] \times u^T(t_i, \vec{x}_j), \quad (5.2.26)$$

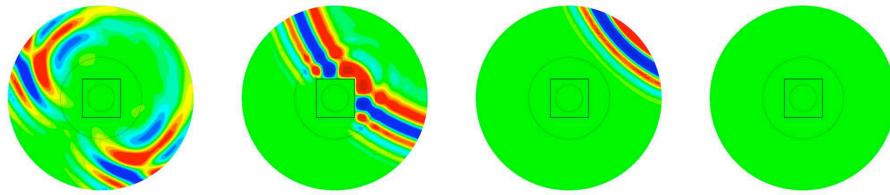
où t_i est le $i^{\text{ème}}$ pas de temps, \vec{x}_j est la position du $j^{\text{ème}}$ émetteur-récepteur. La fonction *randn* vérifie une loi normale centrée réduite et *Coeff* est le niveau de bruit. Remarquons qu'il s'agit d'un bruit multiplicatif et non additif. Notre choix du bruit multiplicatif est orienté par [CCM00]. Il nous permet de perturber le signal enregistré de façon à éviter des



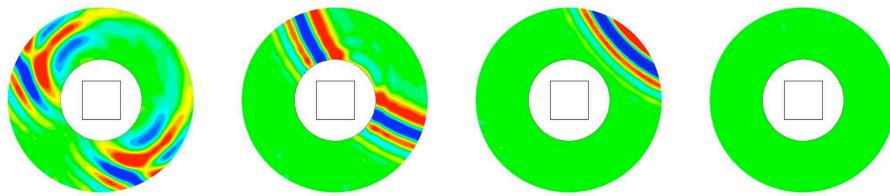
(a) TR exact pour une inclusion ronde.



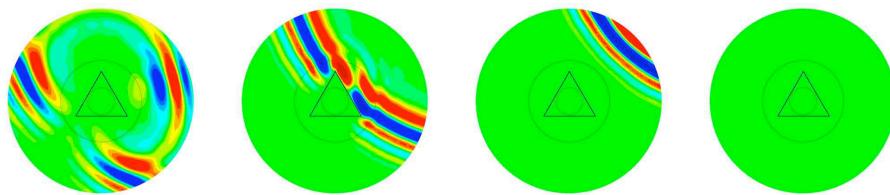
(b) TRAC pour une inclusion ronde.



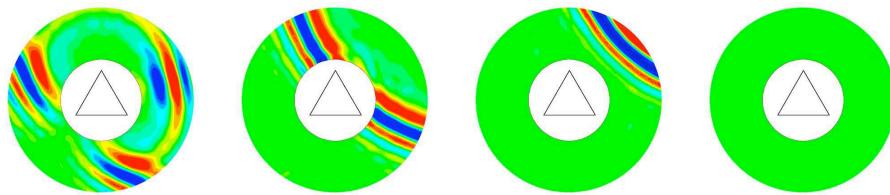
(c) TR exact pour une inclusion carrée.



(d) TRAC pour une inclusion carrée.

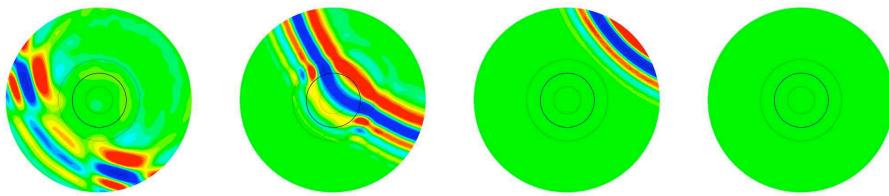


(e) TR exact pour une inclusion triangulaire.

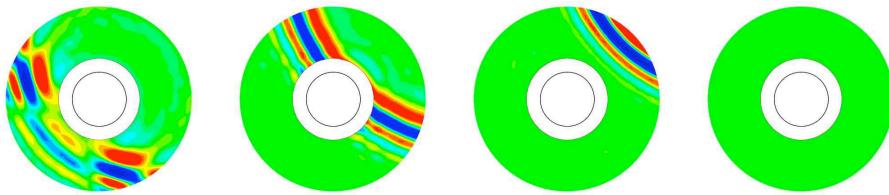


(f) TRAC pour une inclusion triangulaire.

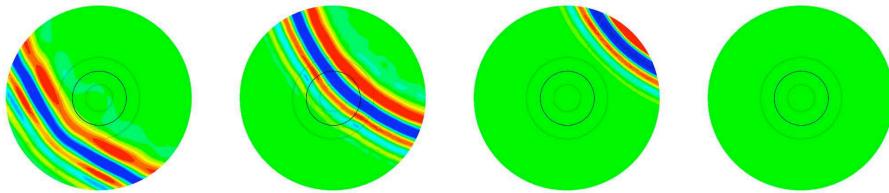
FIGURE 5.4 – Reconstitution du champ total pour différentes formes d'inclusions molles. Comparaison du retournement temporel exact et du retournement temporel avec *TRAC* où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion.



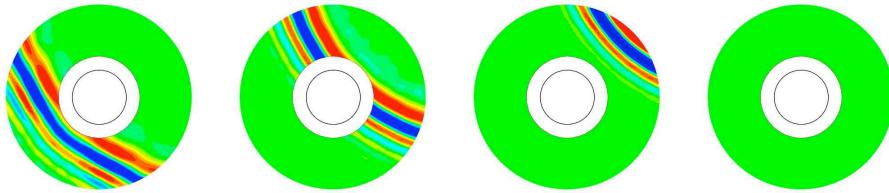
(a) TR exact pour une inclusion de type tumeur.



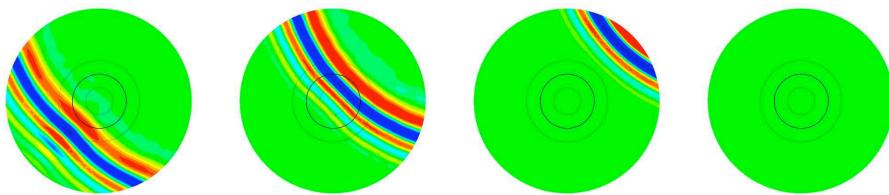
(b) TRAC pour une inclusion de type tumeur.



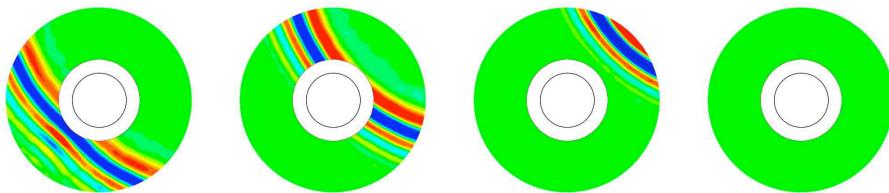
(c) TR exact pour une inclusion de type fibroadenome.



(d) TRAC pour une inclusion de type fibroadenome.



(e) TR exact pour une inclusion de type tissu environnant.



(f) TRAC exact pour une inclusion de type tissu environnant.

FIGURE 5.5 – Reconstitution du champ total pour différents types d'inclusions pénétrables. Comparaison du retournement temporel exact et du retournement temporel avec *TRAC* où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion qui est ronde centrée à l'origine du domaine.

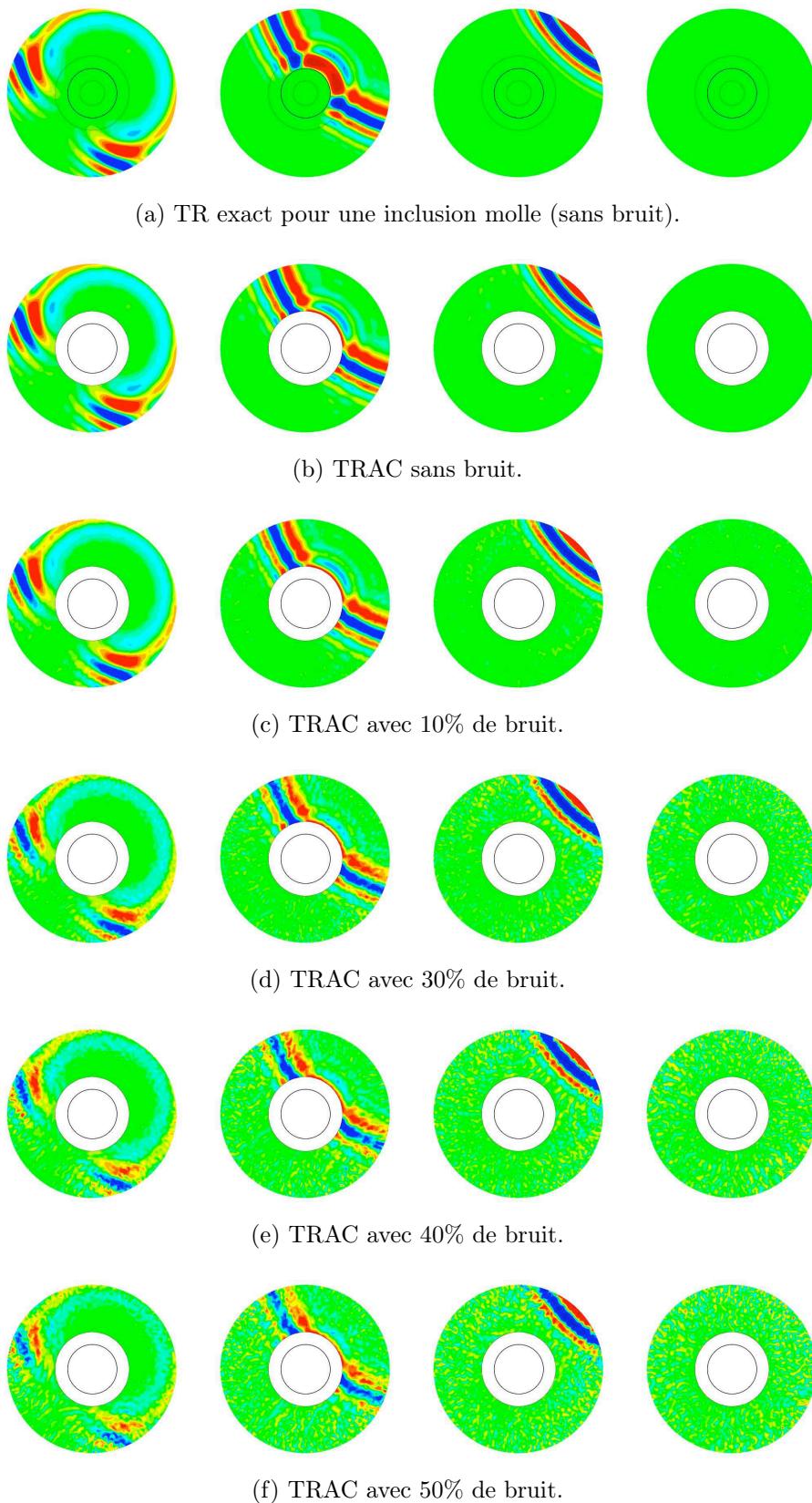


FIGURE 5.6 – Reconstitution du champ total avec différents niveaux de bruit sur les données enregistrées. L'inclusion est ronde et de type mou. Comparaison du retournement temporel exact (a) et du retournement temporel avec *TRAC* où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion avec du bruit.

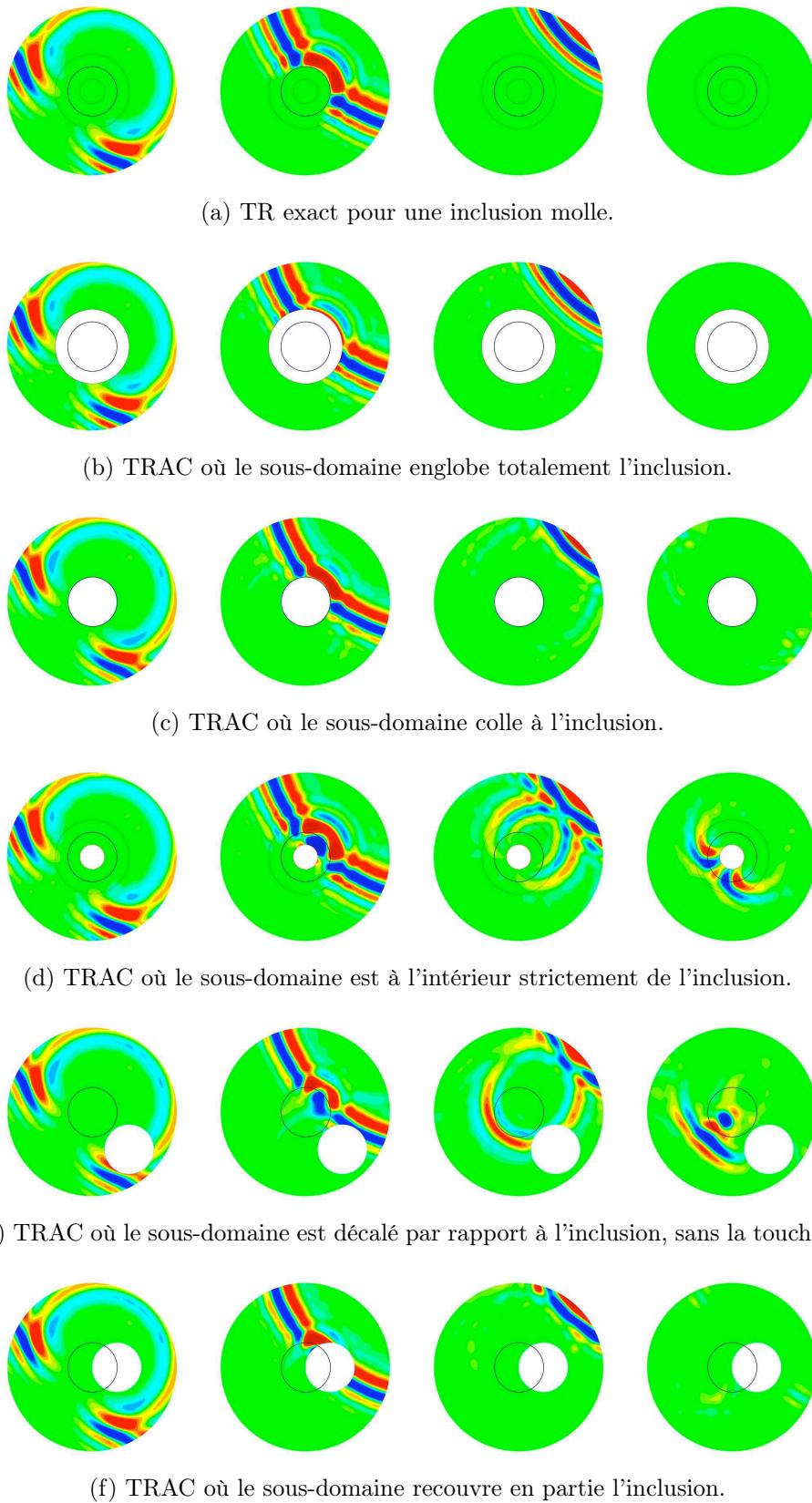


FIGURE 5.7 – Reconstitution du champ total avec différentes positions du sous-domaine B par rapport à l'inclusion. L'inclusion est ronde et de type mou. Comparaison du retournement temporel exact (a) et du retournement temporel avec *TRAC* où la position du sous-domaine B varie.

résolutions miracles liées aux interactions des schémas numériques du problème direct et du problème inverse. C'est une manière de modéliser la marge d'erreur faite par l'appareil de mesure. Il ne s'agit pas là de créer un bruit de fond dans le milieu ambiant, qui serait plutôt modélisé par un bruit additif.

Les résultats obtenus sont présentés sur la FIGURE 5.6. Nous procédons à la méthode *TRAC* à nouveau avec un sous-domaine B rond de rayon $3\lambda/2$ contenant une inclusion molle de rayon λ . Les niveaux de bruit choisis sont 0%, 10%, 30%, 40% et 50%. Nous comparons au retournement temporel exact présenté sur la FIGURE 5.6a : pour 0% (5.6b) et 10% (5.6c), les signaux reconstitués sont tout à fait similaires au retournement temporel exact. Pour 30% (5.6d), le signal commence à être un peu chahuté par les données bruitées, cela se matérialise par de la neige sur les images. Pour 40% (5.6e), le signal est davantage dégradé mais nous pouvons encore reconnaître le champ total, alors que pour 50% (5.6f), le signal souffre davantage du bruit.

En conclusion, la méthode *TRAC* se révèle robuste vis-à-vis du bruit sur les données jusqu'à environ 30% de bruit. Remarquons que dans l'exemple du poisson dans le § 5.1, nous travaillons avec 20% de bruit et le champ reconstitué ne semble pas pâtir du bruit sur les données enregistrées.

Finalement, dans la quatrième série de tests, nous faisons varier la taille et la position du sous-domaine B . L'inclusion est toujours de type mou et ronde de rayon λ . Nous considérons les cinq cas suivants :

1. le sous-domaine B est rond de rayon $3\lambda/2$ et englobe totalement l'inclusion D ;
2. le sous-domaine B est rond de rayon λ et colle parfaitement à l'inclusion D ;
3. le sous-domaine B est rond de rayon $\lambda/2$ et est inclus en totalité dans l'inclusion D ;
4. le sous-domaine B est rond de rayon λ et est décalé par rapport à l'inclusion D sans la toucher ;
5. le sous-domaine B est rond de rayon λ et recouvre partiellement l'inclusion D ;

Les illustrations des cas ci-dessus se trouvent sur la FIGURE 5.7. Nous observons nettement dès la deuxième colonne que si le sous-domaine B ne contient pas l'inclusion D entièrement, alors les signaux reconstitués diffèrent du champ total de référence. Nous verrons dans la partie suivante comment utiliser ces résultats pour faire de l'identification d'objets.

Grâce à toutes ces séries de tests, nous avons pu mettre en évidence la faculté de la méthode *TRAC* à reconstruire le champ total pour diverses formes et types d'inclusion même avec un coefficient de bruit sur les données enregistrées non négligeable. Nous remarquons

par ailleurs que la condition absorbante retournée temporellement a pour but de rendre « invisible » tout ce qui est à l'intérieur du sous-domaine B . Ces tests illustrent également la première application de la méthode *TRAC* : la réduction de la taille du domaine de calcul. En effet, si nous reprenons simplement la FIGURE 5.7b, nous voyons que nous avons réussi à extrapoler le champ total sur le bord de B au sens du *redatuming*. Nous pouvons alors en utilisant les valeurs obtenues sur le bord de B travailler dans le domaine restreint B avec n'importe quelle méthode de reconstruction de signal ou d'identification d'objets pour proposer une résolution du champ au voisinage ou à l'intérieur de l'inclusion.

5.3 Quelques tests pour l'équation de Helmholtz

De la même façon que dans la section précédente, nous présentons les tests numériques pour l'équation de Helmholtz en dimension 2. Nous commençons par rappeler les problèmes direct et de retournement temporel avec *TRAC*, puis nous les discrétisons. Finalement nous illustrons nos résultats à l'aide de graphiques.

5.3.1 Équations et paramètres physiques

Rappelons rapidement les équations pour les problèmes direct et de retournement temporel dans le domaine fréquentiel en dimension 2. Il s'agit de prendre la transformation de Fourier des problèmes (5.2.6) et (5.2.13) avec la convention précisée en (5.2.10). Par cette convention, la dérivée temporelle devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow i\omega ,$$

où i est la valeur complexe, telle que $i^2 = -1$, et ω est la variable duale du temps par la transformation de Fourier.

5.3.1.1 Dérivation du problème direct et paramètres

Le problème direct associé au problème (5.2.6) dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 \rho \hat{u}^T - \nabla \cdot (\mu \nabla \hat{u}^T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ i\omega \hat{u}^T + c \frac{\partial \hat{u}^T}{\partial r} + c \frac{\hat{u}^T}{2r} = \hat{f}(\omega) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$

où \hat{f} est la contribution au spectre de la source $f(t)$ pour la fréquence angulaire ω et \vec{x}_s est la position de la source.

Comme dans le cas temporel, les coefficients de l'équation sont constants par morceaux, indiqués par 0 lorsqu'ils concernent le milieu environnant et par D lorsqu'ils concernent l'inclusion D , cf. (5.2.7). Pour calculer le champ incident \hat{u}^I , nous prenons les coefficients du milieu environnant dans tout le domaine.

5.3.1.2 Dérivation du problème de retourne temporel avec *TRAC*

Le retourne temporel dans le domaine fréquentiel se modélise par la conjugaison de phase, cf. § 2.2.1. Ainsi, le problème (5.2.13) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^T - \nabla \cdot (\mu_0 \nabla \hat{u}_R^T) &= 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \hat{u}_R^T &= \overline{\hat{u}^T} & \text{sur } \partial\Omega \\ i\omega \hat{u}_R^T + c_0 \frac{\partial \hat{u}_R^T}{\partial r} - c_0 \frac{\hat{u}_R^T}{2r} &= i\omega \overline{\hat{u}^I} + c_0 \frac{\partial \overline{\hat{u}^I}}{\partial r} - c_0 \frac{\overline{\hat{u}^I}}{2r} & \text{sur } \partial B. \end{array} \right. \quad (5.3.2)$$

De la même façon, le problème sur le champ diffracté (5.2.14) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^S - \nabla \cdot (\mu_0 \nabla \hat{u}_R^S) &= 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \hat{u}_R^S &= \overline{\hat{u}^T} - \overline{\hat{u}^I} & \text{sur } \partial\Omega \\ i\omega \hat{u}_R^S + c_0 \frac{\partial \hat{u}_R^S}{\partial r} - c_0 \frac{\hat{u}_R^S}{2r} &= 0 & \text{sur } \partial B. \end{array} \right. \quad (5.3.3)$$

Dans nos résultats numériques, nous privilégierons la reconstitution du champ total par (5.3.2).

5.3.2 Discrétisation des problèmes direct et TR

Nous procédons à présent à la discrétisation des problèmes de Helmholtz. Nous choisissons la méthode des éléments finis P^1 en accord avec les constats faits dans le domaine temporel dans le § 5.2.2. Seules deux étapes sont effectuées :

1. nous écrivons la formulation variationnelle associée à l'équation ;
2. nous discrétisons en espace par une méthode des éléments finis P^1 .

5.3.2.1 Discrétisation du problème direct

Soit v une fonction à valeurs complexes définie dans Ω . Nous multiplions l'équation de Helmholtz par \bar{v} et nous intégrons sur le domaine Ω

$$\iint_{\Omega} -\omega^2 \rho \hat{u}^T \bar{v} - \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla \hat{u}^T) \bar{v} = 0.$$

Nous intégrons par parties en utilisant le théorème de Gauss :

$$\iint_{\Omega} -\omega^2 \rho \hat{u}^T \bar{v} + \iint_{\Omega} \mu \nabla \hat{u}^T \nabla \bar{v} - \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \hat{u}^T}{\partial n} \bar{v} = 0.$$

Nous remplaçons la dérivée normale grâce à la condition aux limites absorbante en remarquant que pour un sous-domaine B circulaire $\partial/\partial n = \partial/\partial r$.

$$\iint_{\Omega} -\omega^2 \rho \hat{u}^T \bar{v} + \iint_{\Omega} \mu \nabla \hat{u}^T \nabla \bar{v} + \int_{\partial\Omega} i\omega \frac{\mu}{c} \hat{u}^T \bar{v} + \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{2r} \hat{u}^T \bar{v} = \int_{\partial\Omega} \mu \hat{f}(\omega) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \bar{v}. \quad (5.3.4)$$

Remarquons que le terme source donne :

$$\int_{\partial\Omega} \mu \hat{f}(\omega) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \bar{v} = \mu \hat{f}(\omega) \bar{v}(\vec{x}_s).$$

Soient h le pas d'espace et \mathcal{T}_h le maillage de discrétisation du domaine de calcul Ω . Nous pouvons à nouveau définir les matrices associées aux formes bilinéaires qui apparaissent dans (5.3.4). Ces matrices sont maintenant complexes.

- La fonction P^1 U_h approche \hat{u} telle que : $U_h = \sum_i U_i \varphi_i \simeq \hat{u}(x_h, y_h)$;
- La matrice de masse $M_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \rho \varphi_i \varphi_j$;
- La matrice de rigidité $A_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \mu \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$;
- La matrice de masse sur le bord externe $B_{ext,i,j} = \int_{\partial\mathcal{T}_h} \frac{\mu}{c} \varphi_i \varphi_j$;
- La matrice de courbure sur le bord externe $C_{ext,i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \frac{\mu}{2r} \varphi_i \varphi_j$.

Les fonctions φ_i sont les fonctions de base pour les éléments finis P^1 . Nous devons finalement résoudre le système linéaire suivant :

$$(-\omega^2 M + A + i\omega B_{ext} + C_{ext}) U_h = F_h \quad (5.3.5)$$

où F_h est le vecteur source qui vaut $\hat{f}(\omega)$ sur le noeud du maillage correspondant à la position \vec{x}_s de la source et s'annule partout ailleurs.

5.3.2.2 Discrétisation du problème avec *TRAC*

Les étapes sont les mêmes que précédemment. Soit v une fonction à valeurs complexes définie dans $\Omega \setminus B$, nulle sur le bord externe $\partial\Omega$. Nous multiplions l'équation de Helmholtz par \bar{v} et nous intégrons sur le domaine $\Omega \setminus B$

$$\iint_{\Omega \setminus B} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^T \bar{v} - \iint_{\Omega \setminus B} \nabla \cdot (\mu_0 \nabla \hat{u}_R^T) \bar{v} = 0.$$

Nous intégrons par parties :

$$\iint_{\Omega \setminus B} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^T \bar{v} + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla \hat{u}_R^T \nabla \bar{v} - \int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial \hat{u}_R^T}{\partial n} \bar{v} = 0.$$

Nous remplaçons la dérivée normale grâce à *TRAC* :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \setminus B} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^T \bar{v} + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla \hat{u}_R^T \nabla \bar{v} + \int_{\partial B} i\omega \frac{\mu_0}{c_0} \hat{u}_R^T \bar{v} - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} \hat{u}_R^T \bar{v} \\ &= \int_{\partial B} i\omega \frac{\mu_0}{c_0} \bar{u}^I \bar{v} - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} \bar{u}^I \bar{v} + \int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial \bar{u}^I}{\partial n} \bar{v}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas temporel, nous traitons la condition de Dirichlet par pénalisation. Soit ε le paramètre de pénalisation. En reprenant le résultat (5.2.22), nous obtenons la formulation variationnelle complète :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \setminus B} -\omega^2 \rho_0 \hat{u}_R^T \bar{v} + \iint_{\Omega \setminus B} \mu_0 \nabla \hat{u}_R^T \nabla \bar{v} + \int_{\partial B} i\omega \frac{\mu_0}{c_0} \hat{u}_R^T \bar{v} - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} \hat{u}_R^T \bar{v} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \hat{u}_R^T \bar{v} \\ &= \int_{\partial B} i\omega \frac{\mu_0}{c_0} \bar{u}^I \bar{v} - \int_{\partial B} \frac{\mu_0}{2r} \bar{u}^I \bar{v} + \int_{\partial B} \mu_0 \frac{\partial \bar{u}^I}{\partial n} \bar{v} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^T \bar{v}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Une dernière fois, nous prenons les conventions de discrétisation suivantes : h est le pas d'espace, \mathcal{T}_h est le maillage de discrétisation de $\Omega \setminus B$ et U_h est la fonction élément fini P^1 approchant la solution \hat{u} . Les matrices associées aux formes bilinéaires sont :

- La matrice de masse $M_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \rho \varphi_i \varphi_j$;
- La matrice de rigidité $A_{i,j} = \iint_{\mathcal{T}_h} \mu \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$;
- La matrice de masse sur le bord interne $B_{inti,j} = \int_{\partial\mathcal{T}_{h,int}} \frac{\mu}{c} \varphi_i \varphi_j$;
- La matrice de courbure sur le bord interne $C_{inti,j} = \iint_{\mathcal{T}_{h,int}} \frac{\mu}{2r} \varphi_i \varphi_j$;

- La matrice de pénalisation sur le bord externe $P_{exti,j} = \iint_{T_h} \varphi_i \varphi_j$.

De plus, le terme de la dérivée normale est traité de la même façon que dans le cas temporel, en considérant l'équation de Helmholtz correspondante. Ainsi nous devons résoudre le système linéaire :

$$\left(-\omega^2 M + A + i\omega B_{int} - C_{int} + \frac{1}{\varepsilon} P_{ext} \right) U_h = (i\omega B_{int} - C_{int}) \overline{U_h^I} + F_h + \frac{1}{\varepsilon} P_{ext} \overline{U_h^T}, \quad (5.3.7)$$

où F_h est le terme de la dérivée normale vérifiant :

$$(F_h)_i = \begin{cases} \left(-\omega^2 M \overline{U_h^I} + A \overline{U_h^I} \right)_i & \text{si } i \in \partial T_{h,int} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.3.3 Résultats numériques

Nous illustrons à présent la méthode *TRAC* dans le cas de l'équation de Helmholtz à partir des § 5.3.1 et 5.3.2. Toutes nos simulations numériques sont faites avec le logiciel *FREEFEM++*.

Nous présentons plusieurs planches de graphiques. Chaque planche nous montre deux tests, chacun représenté sous la forme de quatre images disposées en carré :

- en haut à gauche, module du champ total de référence ;
- en haut à droite, module du champ reconstitué par retournement temporel classique ;
- en bas à gauche, module du champ reconstitué par retournement temporel avec *TRAC*, lorsque le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion D ;
- en bas à droite, module du champ reconstitué par retournement temporel avec *TRAC*, lorsque le sous-domaine B est inclus entièrement dans l'inclusion D .

Dans tous nos cas, la densité et le coefficient de cisaillement du milieu environnant sont pris égaux à 1, d'où la vitesse de propagation dans le milieu c_0

$$c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} = 1.$$

La fréquence centrale ν_0 de la source est prise égale à 5, ce qui nous donne une longueur d'onde λ de 0.2. Le diamètre du domaine de calcul est de 5λ et la variable du temps ω vaut $2\pi\nu_0$. La source se situe en haut à droite du domaine de calcul à une distance de 10λ du centre du domaine. La LER est supposée à ouverture totale et la disposition des transducteurs continue.

Sur la première FIGURE 5.8, nous proposons deux tests sur des inclusions molles de formes différentes : une inclusion carrée 5.8a¹ et une inclusion triangulaire 5.8b. L'ordre de grandeur de la taille des inclusions est λ . Rappelons que les paramètres pour une inclusion molle sont :

$$\rho_D = 10^{30}, \quad \mu_D = 1 \quad \text{et par conséquent} \quad c_D \simeq 0.$$

Nous constatons que nous reconstitutons correctement le champ total uniquement dans le cas de la méthode *TRAC* effectuée pour un sous-domaine englobant totalement l'inclusion, comme attendu.

Sur les FIGURES 5.9 et 5.10, nous présentons les résultats numériques pour des inclusions rondes de diamètre λ avec des propriétés différentes :

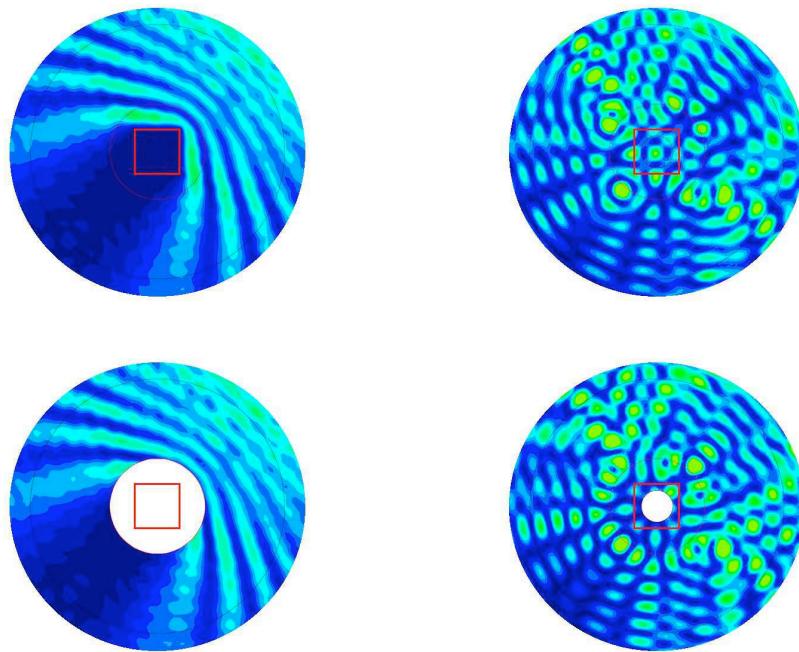
- une inclusion dure : $\rho_D = 1, \mu_D = 10^{-30}$ et $c_D \simeq 0$.
- une tumeur cancéreuse du sein : $\rho_D = 1, \mu_D = 2.9$ et $c_D \simeq 1.7$.
- un fibroadénome : $\rho_D = 1, \mu_D = 1.3$ et $c_D \simeq 1.14$.
- un tissu autre environnant : $\rho_D = 1, \mu_D = 0.87$ et $c_D \simeq 0.93$.

Là encore, les résultats sont tels que nous l'espérions : la méthode *TRAC* reconstitue correctement le champ total lorsque le sous-domaine englobe l'inclusion. Dans les autres cas, les champs reconstitués sont incorrects.

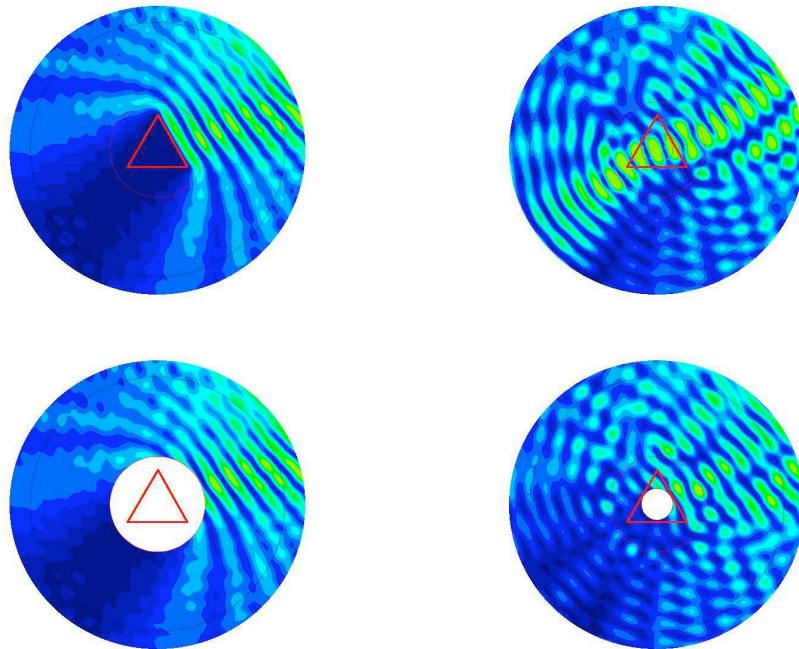
Finalement, nous traitons le cas de données bruitées sur la LER. Nous utilisons la formule du bruit proposée en (5.2.26). Les FIGURES 5.11 et 5.12 présentent les résultats sans bruit, avec 5% de bruit, avec 10% de bruit et 20% de bruit respectivement. Nous observons alors que la méthode *TRAC* correctement utilisée permet une reconstitution conforme pour des niveaux de bruit peu élevés (5%). En revanche, au-delà les champs reconstitués sont nettement chahutés par le bruit. Les reconstitutions par retourne temporel classique et *TRAC*, où le sous-domaine est contenu dans l'inclusion, sont encore une fois sans surprise très différentes du champ à reconstituer.

Finalement le retourne temporel pour l'équation de Helmholtz est plus sensible au bruit sur les données que dans le domaine temporel. Ceci est dû en grande partie au fait que dans le domaine temporel, le contenu fréquentiel de la source est plus important qu'en fréquentiel où nous avons justement une seule fréquence. Malgré cela, la méthode *TRAC* se révèle efficace également pour l'équation de Helmholtz et ici aussi, il est envisageable de l'appliquer à la réduction de la taille du domaine de calcul.

1. Cette figure a fait la couverture du volume 27 numéro 6 du journal *Inverse Problems* en 2010.

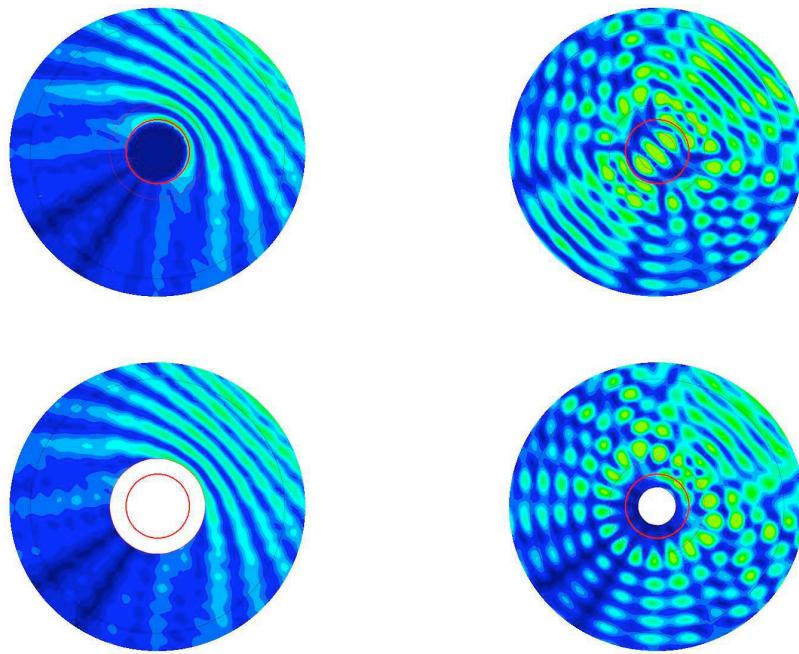


(a) Cas d'une inclusion molle carrée.

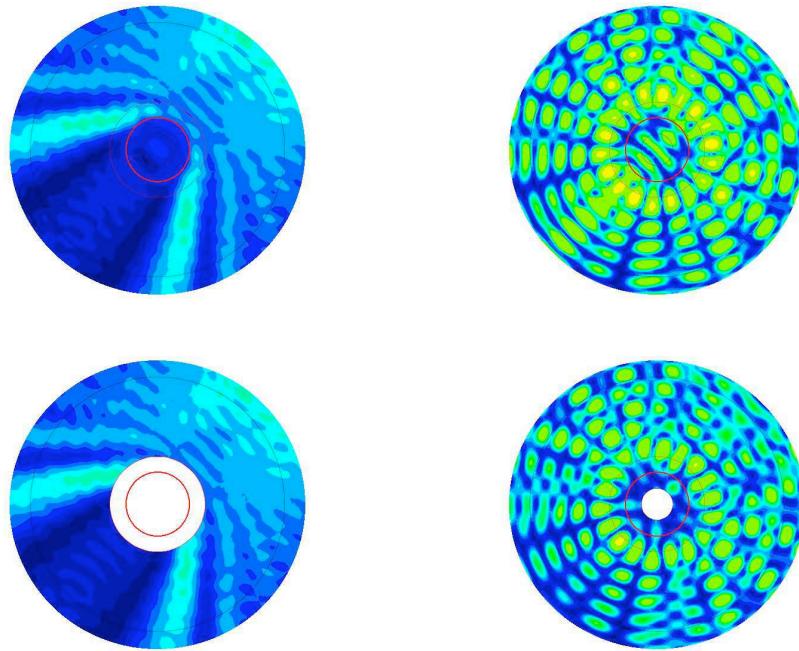


(b) Cas d'une inclusion molle triangulaire

FIGURE 5.8 – Reconstitution du champ total dans le domaine fréquentiel pour une inclusion molle de différentes formes : (a) inclusion carrée, (b) inclusion triangulaire. Disposition pour chaque test : en haut à gauche, cas de référence ; en haut à droite, retournement temporel classique ; en bas à gauche, *TRAC* avec $D \subset B$; en bas à droite, *TRAC* avec $B \subset D$.

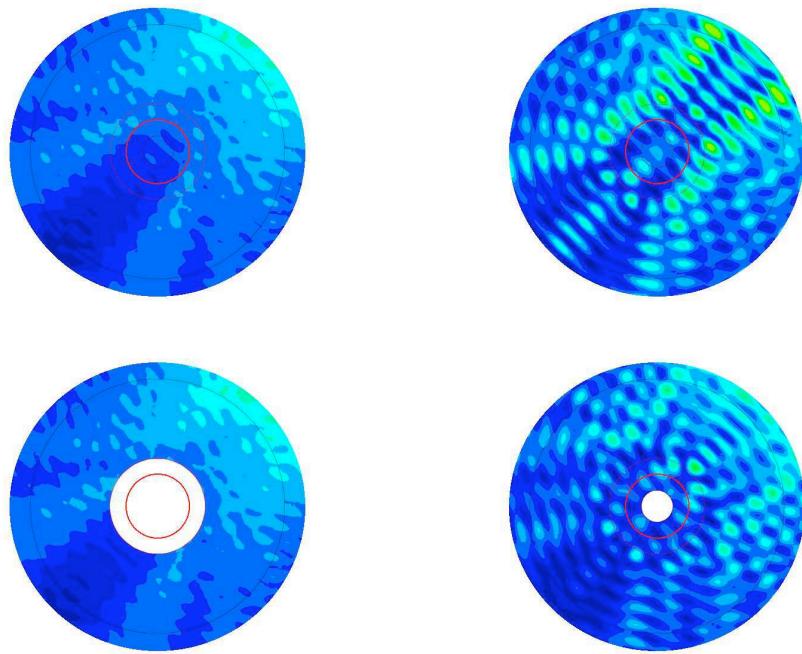


(a) Cas d'une inclusion dure.

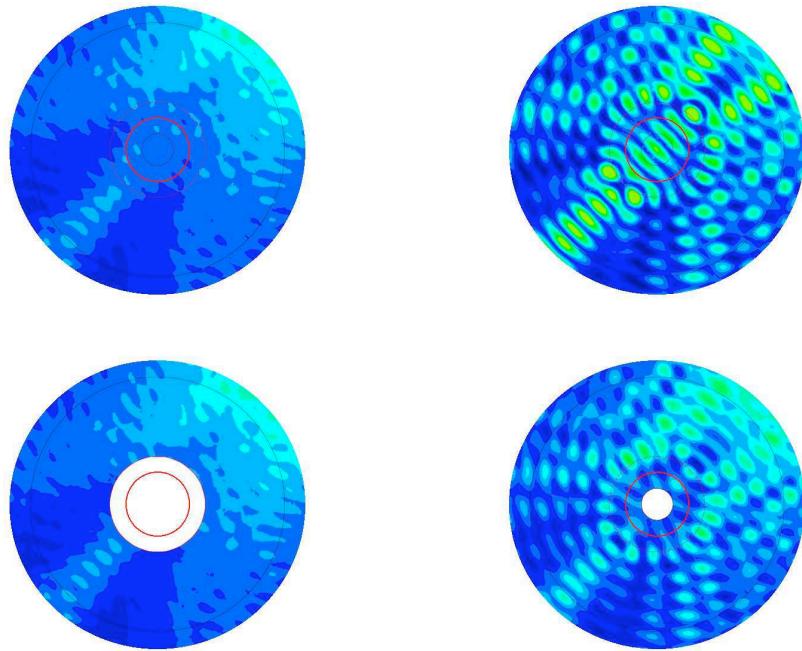


(b) Cas d'une inclusion de type tumeur cancéreuse.

FIGURE 5.9 – Reconstitution du champ total dans le domaine fréquentiel pour différents types d'inclusions rondes : (a) inclusion dure, (b) inclusion de type tumeur cancéreuse. Disposition pour chaque test : en haut à gauche, cas de référence ; en haut à droite, retournement temporel classique ; en bas à gauche, *TRAC* avec $D \subset B$; en bas à droite, *TRAC* avec $B \subset D$.

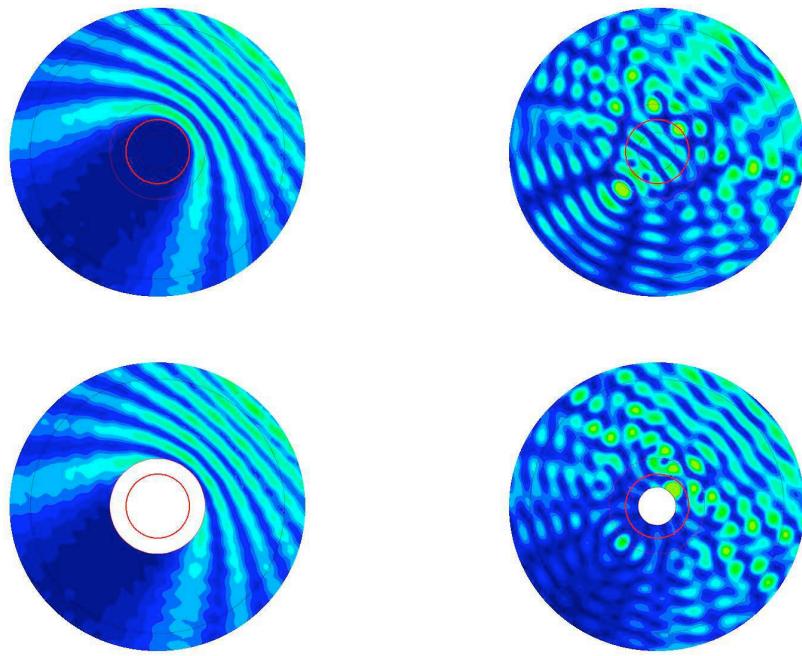


(a) Cas d'une inclusion de type fibroadénome.

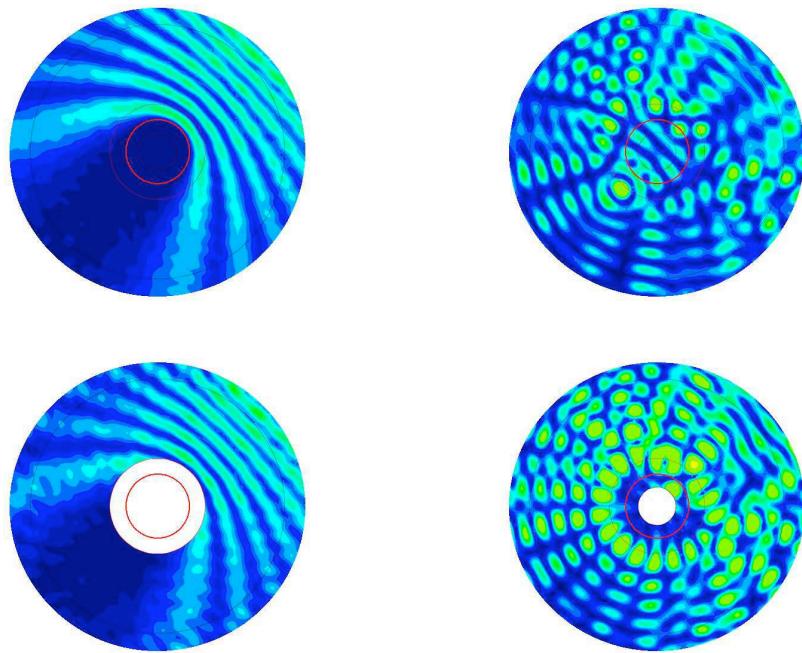


(b) Cas d'une inclusion de type tissu environnant.

FIGURE 5.10 – Reconstitution du champ total dans le domaine fréquentiel pour différents types d'inclusions rondes : (a) inclusion de type fibroadénome, (b) inclusion de type tissu environnant. Disposition pour chaque test : en haut à gauche, cas de référence ; en haut à droite, retournement temporel classique ; en bas à gauche, *TRAC* avec $D \subset B$; en bas à droite, *TRAC* avec $B \subset D$.

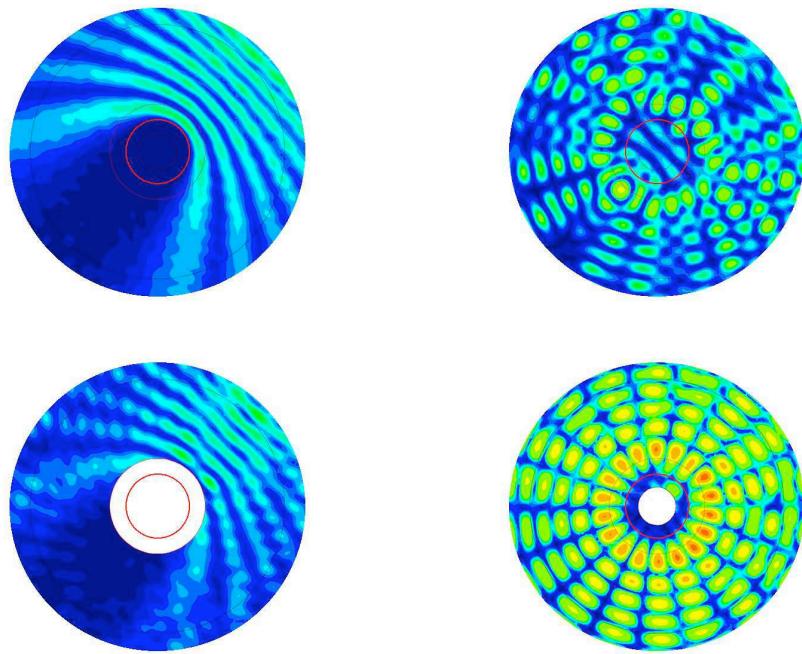


(a) Cas sans bruit.

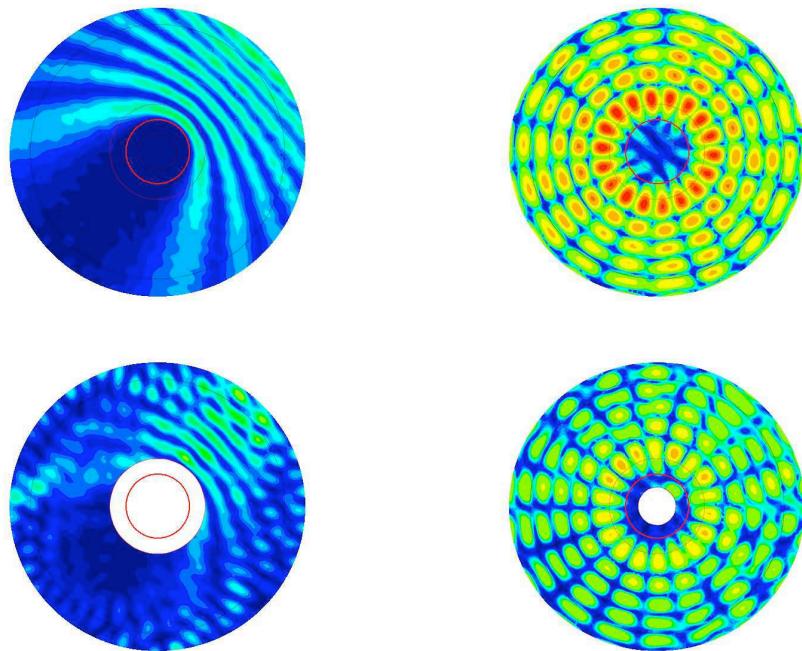


(b) Cas avec 5% de bruit.

FIGURE 5.11 – Reconstitution du champ total dans le domaine fréquentiel pour une inclusion ronde molle avec différents niveaux de bruit sur les données : (a) sans bruit, (b) avec 5% de bruit. Disposition pour chaque test : en haut à gauche, cas de référence sans bruit ; en haut à droite, retournement temporel classique ; en bas à gauche, *TRAC* avec $D \subset B$; en bas à droite, *TRAC* avec $B \subset D$.



(a) Cas avec 10% de bruit.



(b) Cas avec 20% de bruit.

FIGURE 5.12 – Reconstitution du champ total dans le domaine fréquentiel pour une inclusion ronde molle avec différents niveaux de bruit sur les données : (a) avec 10% de bruit, (b) avec 20% de bruit. Disposition pour chaque test : en haut à gauche, cas de référence sans bruit ; en haut à droite, retournement temporel classique ; en bas à gauche, *TRAC* avec $D \subset B$; en bas à droite, *TRAC* avec $B \subset D$.

Conclusion

Nous concluons cette partie en résumant les différents aspects de la méthode *TRAC* que nous avons étudiés. Tout d'abord, la méthode *TRAC* est une méthode valable pour tout système hyperbolique ou elliptique. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux cas particuliers de l'équation des ondes scalaire et de l'équation de Helmholtz, respectivement dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

Nous avons validé la méthode *TRAC* dans un premier temps en dimension 1. Pour l'équation de Helmholtz, nous sommes capables de retrouver analytiquement les résultats par la méthode *TRAC*.

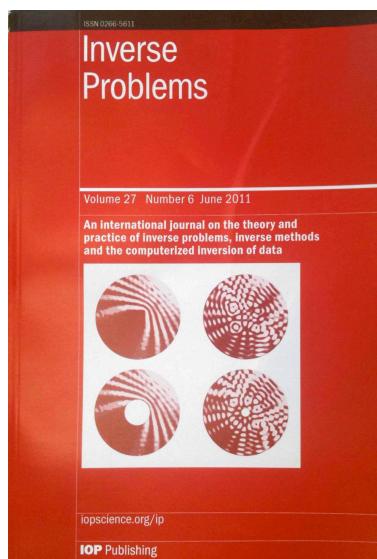
Nous avons ensuite montré la stabilité de la méthode *TRAC* en démontrant une estimation d'énergie pour une géométrie particulière en dimension 3.

Finalement, nous avons effectué des tests numériques en dimension 2 pour des inclusions de différentes formes, même complexes, qui peuvent être molles, dures ou pénétrables. De plus, la méthode *TRAC* se révèle robuste vis-à-vis du bruit sur les données, surtout dans le domaine temporel. Nous avons aussi mentionné la première application de la méthode *TRAC* quant à la réduction de la taille du domaine. Par ailleurs, nous avons commencé à mettre le doigt sur la seconde application, c'est-à-dire l'identification d'objets.

Pour conclure cette partie, nous joignons le premier article paru dans *Inverse Problems* en 2011 à propos de la méthode *TRAC*, co-écrit avec F. Assous, F. Nataf et E. Turkel. Nous y retrouvons la description de la méthode dans le cas général, puis sur des exemples, dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Ensuite, nous présentons des résultats numériques pour l'équation des ondes et l'équation de Helmholtz en accentuant sur la possibilité de recréer le passé. Enfin, nous continuons sur les problèmes inverses que nous allons détailler dans la partie suivante.

Time Reverse Absorbing Condition : Applications to Inverse Problems.

Auteurs	Franck Assous*, Marie Kray [†] , Frédéric Nataf [†] , Eli Turkel [‡]
Journal	Inverse Problems, IOP Publishing
Volume	27 (6)
Année	2011
Nombre de pages	18 (065003)
DOI	10.1088/0266-5611/27/6/065003



* Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan & Ariel University Center, 40700 Ariel, Israel

† UPMC Université Paris-06, UMR 7598, Laboratoire J L Lions, F-75006 Paris, France

‡ Department of Mathematics, Tel-Aviv University, 69978 Ramat Aviv, Israel

Time-reversed absorbing condition: application to inverse problems

F Assous¹, M Kray², F Nataf² and E Turkel³

¹ Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan & Ariel University Center, 40700 Ariel, Israel

² UPMC Université Paris-06, UMR 7598, Laboratoire J L Lions, F-75006 Paris, France

³ Department of Mathematics, Tel-Aviv University, 69978 Ramat Aviv, Israel

E-mail: franckassous@netscape.net, kray@ann.jussieu.fr, nataf@ann.jussieu.fr and turkel@math.tau.ac.il

Received 20 October 2010, in final form 28 February 2011

Published 10 May 2011

Online at stacks.iop.org/IP/27/065003

Abstract

The aim of this paper is to introduce time-reversed absorbing conditions in time-reversal methods. They enable one to ‘recreate the past’ without knowing the source which has emitted the signals that are back-propagated. We present two applications in inverse problems: the reduction of the size of the computational domain and the determination, from boundary measurements, of the location and volume of an unknown inclusion. The method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. Numerical tests with the wave and Helmholtz equations illustrate the efficiency of the method. This technique is fairly insensitive to noise in the data.

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

1. Introduction

Since the seminal paper by Fink *et al* [16], time reversal is a subject of very active research. The main idea is to take advantage of the reversibility of wave propagation phenomena, for example in acoustics or electromagnetism in a *non-dissipative* but unknown medium, to back-propagate signals to the sources that emitted them. The initial experiment, see [16], was to refocus, very precisely, a recorded signal after passing through a barrier consisting of randomly distributed metal rods. The remarkable feature of this experiment is the practical possibility to precisely focus a signal after it has crossed random barriers. There have been numerous applications of this physical principle, see [15], [19] and references therein. The first mathematical analysis can be found in [3] for a homogeneous medium and in [9] and [8] for a random medium. In this study we do not consider random or inhomogenous media.

We will introduce a new method that enables one to ‘recreate the past’ without knowing the source which has emitted the signals that will be back-propagated. This is made possible

by using time-reversed absorbing conditions (TRAC) after removing a small region enclosing the source. This technique has at least two applications in inverse problems:

- (i) the reduction of the size of the computational domain by redefining the reference surface on which the receivers appear to be located;
- (ii) the location of an unknown inclusion from boundary measurements.

The first application is reminiscent of the redatuming method introduced in [7]. In our case, we use the wave equation and not a paraxial or parabolic approximation to it. This extends the domain of validity of the redatuming approach. Concerning the second application there is a huge literature that deals with this inverse problem. We mention the MUSIC algorithm [25] and its application to imaging [20], the sampling methods first introduced in [11], see the review paper [10] and references therein, and the DORT method [23]. Mathematical analysis of this kind of approach can be found in [12]. These methods were developed in the time-harmonic domain for impenetrable inclusions. The TRAC method is designed in both the time-dependent and harmonic domains and does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. It works both for impenetrable and penetrable inclusions.

The outline of the paper is as follows. In sections 2.1 and 2.2 we introduce the principle of the TRAC method both in the time-dependent and harmonic domains. We present in section 2.3 two applications of the method in the context of inverse problems. The end of section 2 is devoted to the explicit derivation of the method to the wave and Maxwell equations in both the time-dependent and harmonic cases. In section 3 we give numerical applications of the TRAC method for the wave equation and the Helmholtz equation. We propose various criteria for applying our method to inverse problems. We investigate the sensitivity with respect to the magnitude of the noise in the data and its ability to handle penetrable inclusions.

2. The TRAC method and applications

2.1. The TRAC method in the time-dependent case

We consider an incident wave U^I impinging on an inclusion D characterized by different physical properties from the surrounding medium. We denote by ∂D the boundary of this inclusion. The total field U^T can be decomposed into the incident and scattered field, so $U^T := U^I + U^S$. We consider the problem in d dimensions $d = 1, 2, 3$ and assume that the total field satisfies a linear hyperbolic equation (or system of equations) denoted by \mathcal{L} , that can be written as

$$\mathcal{L}(U^T) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^d \quad (1)$$

together with zero initial conditions, which will be detailed later. The scattering field U^S has to satisfy a radiation condition at the infinity to ensure the uniqueness of the solution. For the wave equation we use the Sommerfeld radiation condition, or the Silver–Müller radiation condition for the Maxwell equations (see below).

Let Ω denote a bounded domain that surrounds D with Γ_R as its boundary. We assume that the incident wave U^I is generated by a point source such that after a time T_f the total field U^T is negligible in the bounded domain Ω . Let V be a field that satisfies equation (1). We denote by V_R the corresponding time-reversed field that also satisfies the same physical equation. The time-reversed solution u_R^T of the wave equation (11) is defined by $u_R^T := u^T(T_f - t, \vec{x})$, see section 2.4. For the Maxwell equation (24), the time-reversed electromagnetic field is defined by $(\mathbf{E}_R^T, \mathbf{B}_R^T) := (-\mathbf{E}^T(T_f - t, \vec{x}), \mathbf{B}^T(T_f - t, \vec{x}))$, see section 2.6. Similar definitions are used for the incident and scattered fields.

Our first aim is to derive a boundary value problem (BVP) whose solution is the time-reversed field. For this purpose, we assume that we have recorded the value of the total field U^T on the boundary Γ_R that encloses the domain Ω . However, we do not assume that we know the physical properties of the inclusion or the exact location of the body, i.e. we do not know the exact form of the operator \mathcal{L} inside the inclusion D . The only things we know are the physical properties of the surrounding medium, i.e. the operator \mathcal{L} outside D . There \mathcal{L} is assumed to be a constant coefficient operator denoted \mathcal{L}_0 . Thus, U_R^T satisfies the following equation:

$$\mathcal{L}_0(U_R^T) = 0 \quad \text{in } (0, T_f) \times \Omega \setminus D. \quad (2)$$

We impose Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time reversal of the recorded fields and zero initial conditions. The key point is that we lack a boundary condition on the boundary of the inclusion ∂D in order to define a well-posed BVP on the time-reversed field U_R^T in $\Omega \setminus D$. For inverse problems, the shape and/or location of the inclusion D is not known and sometimes the type of boundary condition (hard or soft inclusion) on the body is also not known.

To overcome these difficulties, the classical approach, for example, solves the problem (2) in the entire domain Ω , assuming that there is no inclusion D , see [19] and references therein. Denote by W_R^T this ‘approximate’ time-reversed solution, we have in the entire domain Ω :

$$\mathcal{L}_0(W_R^T) = 0 \quad \text{in } (0, T_f) \times \Omega \quad (3)$$

with Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time reversal of the recorded fields and zero initial conditions for the time reverse problem. One can readily verify that this approximate time-reversed solution W_R^T differs from U_R^T .

Remark 1. Another possibility is to try to reconstruct the reversed scattered field U_R^S instead of the total reversed field U_R^T . In this case, the classical approach consists in solving

$$\mathcal{L}_0(W_R^S) = 0 \quad \text{in } (0, T_f) \times \Omega$$

with Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time reversal of the recorded fields minus the time-reversed incident field and zero initial conditions. It is easy to check that this approximate time-reversed solution W_R^S differs as well from U_R^T .

To derive a boundary value problem satisfied by U_R^T without knowing the physical properties of the inclusion D or its exact location, we introduce B a subdomain enclosing the inclusion D , see figure 1. Then, we have to determine a specific boundary condition for U_R^T on the boundary ∂B so that the solution to this problem will coincide with U_R^T in the restricted domain $\Omega \setminus B$.

In order to derive this boundary condition, we note that $\mathcal{L}_0(U^I) = 0$ so that the scattered wave U^S satisfies

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(U^S) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^d \setminus D \\ U^S \text{ satisfies a radiation condition at } \infty \end{cases} \quad (4)$$

and zero initial conditions. We now make use of the property that the surrounding medium $\Omega \setminus D$ is homogeneous. As a first step, we look for a relation satisfied by U^S on ∂B . Numerical absorbing boundary conditions, e.g., [14] and [6] construct accurate approximations to a perfectly absorbing boundary condition. We denote by ABC an absorbing boundary condition, that can be formally written as

$$\text{ABC}(U^S) = 0 \quad \text{on } \partial B. \quad (5)$$

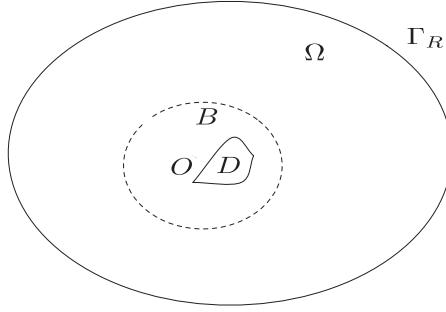


Figure 1. Geometry.

Since $U^T = U^I + U^S$, we have $\text{ABC}(U^T - U^I) = 0$ or equivalently $\text{ABC}(U^T) = \text{ABC}(U^I)$. Our main ingredient is to *time-reverse* this relation into a relation that we will denote

$$\text{TRAC}(U_R^T) = g(U^I) \quad \text{on } \partial B \quad (6)$$

where $g(U^I)$ denotes a known function which is related to the time reversal of $\text{ABC}(U^I)$. The design of TRAC and $g(U^I)$ will be specified in the subsequent sections depending on the specific problem. We shall see that the absorbing boundary condition ABC is different from its time-reverse companion TRAC that will be referred to as a TRAC (time reversed absorbing condition). To summarize, the problem satisfied by U_R^T in the restricted domain $\Omega \setminus B$ can be written as

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(U_R^T) = 0 & \text{in } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(U_R^T) = g(U^I) & \text{on } \partial B \end{cases} \quad (7)$$

together with Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time reversal of the recorded fields and zero initial conditions. By solving (7), we are able to reconstruct the total field U^T at any point of the domain $\Omega \setminus B$ and any time in $(0, T_f)$.

We illustrate our approach by explicitly deriving equation (7) from equation (4) for several classical examples: the wave equation and the Maxwell system. The same procedure can be applied to the elasticity system and *nonlinear* hyperbolic problems before a shock formation.

2.2. The TRAC method in the harmonic case

We consider the time-harmonic counterpart of problem (1) and denote by $\widehat{\mathcal{L}}$ the Fourier transform in time of the operator \mathcal{L} . The unknown total field $U^T(\vec{x})$ is decomposed into the sum of an incident field $U^I(\vec{x})$ and of a scattered field $U^S(\vec{x})$. We have

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}(U^T) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^d \\ U^S(\vec{x}) := U^T(\vec{x}) - U^I(\vec{x}) \text{ satisfies a Sommerfeld condition at } \infty. \end{cases} \quad (8)$$

In this context, the analog to the time-reversal method is the phase conjugation technique, see [13]. Let V be a field that satisfies the harmonic equation. We denote by V_R the corresponding *harmonic time-reversed* field that still satisfies the same harmonic equation. For the Helmholtz equation (21) we proceed in the following way. Let $v(t, \vec{x})$ be a time-dependent real-valued function solution to the wave equation and $v_R(t, \vec{x}) := v(-t, \vec{x})$ its associated time-reversed function. Since we consider the harmonic case, there is no notion of a final time T_f as above. The Fourier transform in time of the above definition yields

$$\widehat{v}_R(\omega, \vec{x}) = \int v(-t, \vec{x}) e^{-i\omega t} dt = \int v(t, \vec{x}) e^{i\omega t} dt = \overline{\int v(t, \vec{x}) e^{-i\omega t} dt} = \widehat{v}(\omega, \vec{x}).$$

This identity shows that the phase conjugation is the Fourier transform of the time-reversal process in the case of the Helmholtz equation. For the harmonic Maxwell equation (31), we proceed in a slightly different way. Recall that for the Maxwell equation (24), the time-reversed electromagnetic field was defined by $(\mathbf{E}_R, \mathbf{B}_R) := (-\mathbf{E}(-t, \vec{x}), \mathbf{B}(-t, \vec{x}))$, see section 2.6. The Fourier transform in time of the above definition yields

$$(\widehat{\mathbf{E}}_R(\omega, \vec{x}), \widehat{\mathbf{B}}_R(\omega, \vec{x})) = (-\widehat{\mathbf{E}}(\omega, \vec{x}), \widehat{\mathbf{B}}(\omega, \vec{x})).$$

Thus, the classical *time-reversal* process in the harmonic regime applied to (8) amounts to conjugating the recorded data (and in the Maxwell case to take the opposite of the electric field) and solving the following harmonic time-reversed problem:

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_0(\mathbf{W}_R^T) = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{W}_R^T = \mathbf{U}_R^T & \text{on } \Gamma_R \end{cases} \quad (9)$$

which is the equivalent to (3) in the harmonic regime. Hence, following the same steps as above for deriving equation (7) from equation (1), we get

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_0(\mathbf{U}_R^T) = 0 & \text{in } \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(\mathbf{U}_R^T) = \widehat{g(\mathbf{U}^I)} & \text{on } \partial B \end{cases} \quad (10)$$

together with Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the harmonic time-reverse of the recorded fields.

We illustrate our approach by deriving equation (10) for several classical examples: the Helmholtz equation and the *time harmonic* Maxwell system. The same process can be applied to the *time harmonic* elasticity system.

2.3. Derivation of the TRAC method

A first application to inverse problems is a reduction of the size of the computational domain. Assume we know that the inclusion D is a subset of a domain B , the TRAC method enables us to compute the total field \mathbf{U}^T in $\Omega \setminus B$ and in particular on ∂B . It is thus equivalent to having the boundary Γ_R moved to ∂B . As a consequence, the inverse problem can be solved by any method in the smaller computational domain B . This reduces the cost of the sequence of forward problems involved in the identification algorithm.

A second application is to localize the inclusion by a trial and error procedure. At the initial time $t = 0$, the total field \mathbf{U}^T is 0. Thus, if B encloses the inclusion D , \mathbf{U}_R^T which is exactly the time reversal of \mathbf{U}^T is zero everywhere, in particular in $\Omega \setminus B$, at the final time T_f that corresponds to the initial time of the physical problem (1). Conversely, if after solving equation (7), \mathbf{U}_R^T is not zero at the final time T_f , it proves that the assumption that D is a subset of B is false. Hence, by playing with the location and size of the subdomain B , it should be possible to determine the location and volume of the inclusion D . This technique will be the core subject of section 3.

2.4. The wave equation

We first consider the case of the three-dimensional acoustic wave equation with a propagation speed c which is constant outside an inclusion D . We denote the total field as \mathbf{u}^T which is decomposed into an incident \mathbf{u}^I and a scattered field \mathbf{u}^S . With these notations, equation (4) reads

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^S}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{u}^S = 0 & \text{in } \mathbf{R}^3 \setminus D \\ \mathbf{u}^S(t, \vec{x}) \text{ satisfies a Sommerfeld condition at } \infty \\ \text{homogeneous initial conditions.} \end{cases} \quad (11)$$

This problem is under-determined since we do not specify any boundary condition on ∂D . Thus, u^S is not necessarily 0. We define the time-reversed total field u_R^T by $u_R^T(t, \cdot) := u^T(T_f - t, \cdot)$. Since, the wave equation involves only second-order time derivatives, this definition ensures that the reverse field u_R^T is a solution to the wave equation as well. In order to derive the absorbing boundary condition (5), we consider, for the sake of simplicity, that the subdomain B is a ball of radius ρ centered at the origin denoted B_ρ . Let r be the radial coordinate, we consider the first order Bayliss–Turkel ABC BT¹ [5, 6]:

$$\frac{\partial u^S}{\partial t} + c \frac{\partial u^S}{\partial r} + c \frac{u^S}{r} = 0. \quad (12)$$

For ease of the derivation in three dimensions, we use an equivalent form of equation (12):

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru^S) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru^S) = 0. \quad (13)$$

This equation was originally developed to be set on an external boundary to reduce reflections and so simulate an infinite exterior. In our application this is now set on the artificial interior surface B_ρ (see figure 1) so that the system does not see inside this ball. In this case, r is measured from the center of the ball to its boundary. We next express (6) explicitly for the time-reversed equation (13). The total field $u^T = u^I + u^S$ satisfies

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru^T(t, \cdot)) = \frac{\partial}{\partial t}(ru^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru^I(t, \cdot)).$$

Using $u_R^T(t, \cdot) = u^T(T_f - t, \cdot)$ we get

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}(ru_R^T) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru_R^T) \right) \Big|_{T_f-t} = \frac{\partial}{\partial t}(ru^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru^I(t, \cdot)),$$

or equivalently

$$-\frac{\partial}{\partial t}(ru_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru_R^T(t, \cdot)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}(ru^I) + c \frac{\partial}{\partial r}(ru^I) \right) \Big|_{T_f-t}.$$

Note, that on ∂B_ρ , $\partial/\partial r = -\partial/\partial n$ where n is the outward normal to the restricted domain $\Omega \setminus B_\rho$. Multiplying by -1 , we get

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^T(t, \cdot)) = - \left(\frac{\partial}{\partial t}(r u^I) - c \frac{\partial}{\partial n}(r u^I) \right) \Big|_{T_f-t}. \quad (14)$$

Another way to write this boundary condition is to introduce the time-reversed incident field

$$u_R^I(t, \cdot) := u^I(T_f - t, \cdot),$$

so that (14) can be expressed as

$$\frac{\partial}{\partial t}(r u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^T(t, \cdot)) = \frac{\partial}{\partial t}(r u_R^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(r u_R^I(t, \cdot)). \quad (15)$$

This expression is the counterpart of equation (6). Since $\partial r/\partial n = -1$, relation (15) can be rewritten as

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^T(t, \cdot)) - c \frac{u_R^T(t, \cdot)}{r} = \frac{\partial}{\partial t}(u_R^I(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^I(t, \cdot)) - c \frac{u_R^I(t, \cdot)}{r}. \quad (16)$$

So we define the boundary condition TRAC by

$$\text{TRAC}(u_R^T) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^T(t, \cdot)) - c \frac{u_R^T(t, \cdot)}{r}. \quad (17)$$

As noted above this absorbing boundary condition is intended to render ‘invisible’ whatever is inside the ball B_ρ .

Note, that due to the minus sign before the term u_R^T/r , the TRAC (16) is *not* the BT¹ absorbing boundary condition. The time-reversed problem analog to (7) reads

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_R^T = 0 & \text{in } (0, T_f) \times \Omega \setminus B_\rho \\ \text{TRAC}(u_R^T) = \text{TRAC}(u_R^I) & \text{on } \partial B_\rho \\ u_R^T(t, \vec{x}) = u^T(T_f - t, \vec{x}) & \text{on } \Gamma_R \\ \text{zero initial conditions.} \end{cases} \quad (18)$$

The TRAC is not only not the standard BT¹ ABC but also has an ‘anti absorbing’ term $(-cu_R^T/r)$. This raises a concern about the well-posedness of BVP (18). Although we have not developed a general theory, we prove an energy estimate for this problem in a special geometry, see [2]. In many computations we have never encountered stability problems. In section 3 a numerical procedure for inclusion identification will be deduced from this formulation.

The generalization of (17) to two space dimensions is straightforward, see [5, 6]. In the above computation, it is sufficient to replace r by \sqrt{r} and $1/r$ by $1/(2r)$ and (17) reads

$$\frac{\partial u^S}{\partial t} + c \frac{\partial u^S}{\partial r} + c \frac{u^S}{2r} = 0. \quad (19)$$

In the above derivation we have assumed that the surface B is a sphere or a circle. Since we are finding an approximate location of the inclusion this is usually sufficient. For an elongated body a ball can be replaced by an ellipse or spheroidal surface. Absorbing boundary conditions for these cases have been developed in [4, 21, 22]. For more general surfaces several absorbing conditions have been developed, for example [1, 18]. Comparisons between many options are presented in [21, 22]. As shown above, a first order TRAC method simply reverses the sign of the non-differentiated term of the corresponding first order absorbing boundary condition. Thus, a first order TRAC for a general bounding surface in two dimensions is given by

$$\text{TRAC}(u_R^T) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R^T(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^T(t, \cdot)) - \frac{c\kappa}{2} u_R^T(t, \cdot) \quad (20)$$

where κ is the curvature of the bounding surface B .

2.5. The Helmholtz equation

Denote by ω the dual variable of t for the Fourier transform in time. The total field u^T can be decomposed into an incident and scattered field, i.e. $u^T := u^I + u^S$. The Helmholtz equation is derived by taking the Fourier transform in time of the wave equation, yielding

$$\begin{cases} -\omega^2 u^T - c^2 \Delta u^T = 0 & \text{in } \mathbf{R}^3 \\ (u^T - u^I) \text{ satisfies a Sommerfeld radiation condition at } \infty. \end{cases} \quad (21)$$

Recall that our aim is to write a BVP whose solution is the conjugate of u^T . Following section 2.2, it is sufficient to take the Fourier transform of equation (18) to get:

$$\begin{cases} -\omega^2 u_R^T - c^2 \Delta u_R^T = 0 & \text{in } \Omega \setminus B_\rho \\ i\omega u_R^T + c \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - c \frac{u_R^T}{r} = i\omega u_R^I + c \frac{\partial u_R^I}{\partial n} - c \frac{u_R^I}{r} & \text{on } \partial B_\rho \\ u_R^T(\vec{x}) = \bar{u}^T(\vec{x}) & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \quad (22)$$

We emphasize that the time-reversed absorbing condition TRAC:

$$\text{TRAC}(u_R^T) := i\omega u_R^T + c \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - c \frac{u_R^T}{r} = \text{given} \quad (23)$$

is not the BT^1 absorbing boundary condition

$$i\omega u^T + c \frac{\partial u^T}{\partial n} + c \frac{u^T}{r} = \text{given.}$$

As before, generalizations to two dimensions and other shapes for B are straightforward.

2.6. The Maxwell equation

As a second case, we consider the three-dimensional Maxwell equations. For the sake of simplicity, we assume that outside the inclusion D the medium is linear, homogeneous and isotropic with a constant speed of light denoted by c . Denote by \mathbf{E} the electric field and by \mathbf{B} the magnetic induction. Denote the total field by $(\mathbf{E}^T, \mathbf{B}^T)$ which is decomposed as above into an incident $(\mathbf{E}^I, \mathbf{B}^I)$ and a scattered field $(\mathbf{E}^S, \mathbf{B}^S)$. With these notations, the counterpart of equation (4) reads

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}^S}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B}^S = 0, & \text{in } \mathbf{R}^3 \setminus D, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^S}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^S = 0, & \text{in } \mathbf{R}^3 \setminus D, \\ (\mathbf{E}^S(t, \vec{x}), \mathbf{B}^S(t, \vec{x})) \text{ satisfies a Silver-Müller radiation condition at } \infty \\ \text{and zero initial conditions.} \end{cases} \quad (24)$$

We introduce the time-reversed solution

$$(\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x})) := (-\mathbf{E}(T_f - t, \vec{x}), \mathbf{B}(T_f - t, \vec{x})). \quad (25)$$

Note, that the Maxwell system is a first order hyperbolic system, but is not invariant under a time reversal. So, we multiply the electric field by (-1) so that the electromagnetic field $(\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x}))$ solves a time-reversal equation and we can construct an absorbing boundary condition analog to (5). We still consider a subdomain B that is a ball of radius ρ centered at the origin and denoted B_ρ . We assume that the following approximate absorbing Silver-Müller boundary condition is reasonable:

$$(\mathbf{E}^S \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^S \times \nu = 0 \quad (26)$$

where ν is the outward normal to the ball B_ρ . The above equation is the counterpart of equation (5) for the Maxwell equation. The next step is to derive an explicit expression for the time reverse of equation (26). This means that the total field satisfies

$$(\mathbf{E}^T \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^T \times \nu = (\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu. \quad (27)$$

Using definition (25), we get

$$(-\mathbf{E}_R^T \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}_R^T \times \nu = ((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu)_{T_f - t}. \quad (28)$$

Note, that on ∂B_ρ , $n = -\nu$ and multiplying by -1 , we get

$$(\mathbf{E}_R^T \times n) \times n + c \mathbf{B}_R^T \times n = -((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu)_{T_f - t}. \quad (29)$$

This expression is the counterpart of (6). Finally, the time-reversed problem analog to (7) reads

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}_R^T}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B}_R^T = 0, & \text{in } \Omega \setminus B_\rho, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_R^T}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}_R^T = 0, & \text{in } \Omega \setminus B_\rho, \\ (\mathbf{E}_R^T \times n) \times n + c \mathbf{B}_R^T \times n = -((\mathbf{E}^I \times \nu) \times \nu + c \mathbf{B}^I \times \nu)_{T_f - t} & \text{on } \partial B_\rho \\ (\mathbf{E}_R^T(t, \vec{x}), \mathbf{B}_R^T(t, \vec{x})) = (-\mathbf{E}(T_f - t, \vec{x}), \mathbf{B}(T_f - t, \vec{x})) & \text{on } \Gamma_R \\ \text{and zero initial conditions.} \end{cases} \quad (30)$$

The penultimate equation in the above system expresses that we have time-reversed the data recorded on Γ_R .

2.7. Time harmonic Maxwell system

We again, denote by ω the dual variable of t for the Fourier transform in time. The total field $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x}))$ can be decomposed into an incident and scattered field, $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x})) := (\mathbf{E}^I(\vec{x}), \mathbf{B}^I(\vec{x})) + (\mathbf{E}^S(\vec{x}), \mathbf{B}^S(\vec{x}))$. The time-harmonic Maxwell equation is written by taking the Fourier transform in time of the Maxwell equation:

$$\begin{cases} i\omega\mathbf{E}^T - c^2\nabla \times \mathbf{B}^T = 0, & \text{in } \mathbf{R}^3, \\ i\omega\mathbf{B}^T + \nabla \times \mathbf{E}^T = 0, & \text{in } \mathbf{R}^3, \\ (\mathbf{E}^T, \mathbf{B}^T) - (\mathbf{E}^I, \mathbf{B}^I) \text{ satisfies a Silver-Müller radiation condition at } \infty. \end{cases} \quad (31)$$

Recall that our aim is to write a BVP whose solution is the harmonic time reverse of $(\mathbf{E}^T(\vec{x}), \mathbf{B}^T(\vec{x}))$. Following 2.2, it is sufficient to take the Fourier transform of equation (30) to get

$$\begin{cases} i\omega\mathbf{E}_R^T - c^2\nabla \times \mathbf{B}_R^T = 0, & \text{in } \Omega \setminus B_\rho, \\ i\omega\mathbf{B}_R^T + \nabla \times \mathbf{E}_R^T = 0, & \text{in } \Omega \setminus B_\rho, \\ (\mathbf{E}_R^T \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_R^T \times \mathbf{n} = -((\overline{\mathbf{E}}^I \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + c \overline{\mathbf{B}}^I \times \mathbf{v}) & \text{on } \partial B_\rho \\ (\mathbf{E}_R^T(\vec{x}), \mathbf{B}_R^T(\vec{x})) = (-\overline{\mathbf{E}}(\vec{x}), \overline{\mathbf{B}}(\vec{x})) & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \quad (32)$$

In this study, we do not present any computational results for the Maxwell equations. This requires a separate interior scheme to solve the system of equations (as opposed to the single second-order wave equation). Within a Maxwell code it is straightforward to implement absorbing boundary conditions. Hence, the extension of the results to the Maxwell system requires no new techniques. We intend to extend the current results to both three dimensions and the Maxwell equations in the future.

3. Numerical applications of the TRAC method

In section 3.1, we describe the TRAC method to locate a scatterer in the two-dimensional case together with computational results. We first consider the time-dependent wave equation. The Helmholtz equation will be studied in section 3.2. As explained in section 2.1, the method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. We will treat, in the same manner, the cases of a hard, soft or penetrable inclusion. In the harmonic case, we compare the TRAC approach with the phase conjugation approach presented in (9).

3.1. The wave equation

We consider an inclusion D surrounded by a homogeneous and isotropic medium with a velocity of sound denoted by c_0 . The scatterer is illuminated by an incident field u^I . Equation (1) reads

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} - c^2 \Delta u^T = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ (u^T(t, \vec{x}) - u^I(t, \vec{x})) \text{ satisfies a Sommerfeld condition at } \infty \\ \text{zero initial conditions.} \end{cases} \quad (33)$$

In order to create synthetic data, equation (33) is approximated by the FreeFem++ package [17] which implements a finite element method in space. In this study we use a standard

P^1 finite element method. The advancement in time is given by a second-order central finite difference scheme so that it is time reversible also on the numerical level. The incident wave is simulated by the same procedure with a uniform velocity of sound, c_0 . We introduce a boundary Γ_R where the signal is recorded. The boundary Γ_R encloses a domain denoted by Ω , see figure 1. The next stage of the method is to introduce a ‘trial’ surface B_ρ and solve the time-reversed problem (18) in $\Omega \setminus B_\rho$ with the TRAC absorbing boundary condition.

The principle of the method (see section 2.3) is that when the ball B_ρ encloses the inclusion D then, at the final time of the reverse simulation, the solution must be equal to the initial condition of the forward problem, i.e. 0. Conversely, if at the end of the reverse simulation the field is not 0, it shows that the ball B_ρ does not enclose the inclusion D .

As a first test case, we consider an inclusion that is a soft disk and B_ρ is a disk of the variable radius. In figure 2, we have several rows and three columns. Each column corresponds to a numerical time-reversed experiment and each row corresponds to a snapshot of the solution at a given time. The top line corresponds to the initial time for the time-reversed problem, equivalent to $t = T_f$ for the forward problem. The last line is the solution at the final time of the reversed simulation which corresponds to the initial time $t = 0$ for the forward problem. In the left column, we display the perfect time reverse solution which is the reverse of the forward problem. For the inverse problem, the data is not known. It is shown for reference only.

In the middle column, we display the solution of the reversed problem (18) with a ball B_ρ which encloses the inclusion. As expected, the sequence of snapshots is the restriction to the domain $\Omega \setminus B_\rho$ of the left column. This exemplifies one application of the TRAC method: if we know that the ball B_ρ encloses the inclusion we are able to reconstruct the signal in a region that is closer to the inclusion than the line of receivers Γ_R . This allows for the reduction of the size of the computational domain. In this respect, the method is related to the redatuming method, see [7]. In the last column we show the solution of the reversed problem (18) with a ball B_ρ smaller than the soft disk. In contrast to the previous case, the sequence of snapshots differs from the left column.

For the inverse problem of locating the scatterer, we only know that at the final time the solution should be 0. In the middle column, this criterion is satisfied and we can thus infer that the inclusion D is included in the ball B_ρ . On the other hand, when the final solution in the last column is not zero it shows that D is not included in the ball B_ρ . This observation leads to an easy to compute criterion which is independent of the size of the domain:

$$J(B_\rho) := \frac{\|u_R^T(T_f, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_\rho)}}{\sup_{t \in [0, T_f]} \|u^I(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}} \quad (34)$$

which vanishes when the artificial ball encloses the inclusion. Due to numerical errors and the fact that the TRAC is not an exact ABC, the criterion is small but not 0, see figure 5.

Inverse problems are frequently ill-posed. Hence, a crucial question is the sensitivity of the method with respect to noise in the data. Therefore, we shall add Gaussian noise by replacing the recorded data u^T on Γ_R by

$$u^T := (1 + \text{Coeff} * \text{randn}) * u^T, \quad (35)$$

where randn satisfies a centered reduced normal law and Coeff is the level of noise. The solutions at the final time are depicted on figure 3. The level of noise is between 10% and 50%. On the top line we display the results for a ball larger than the inclusion. Due to the noise, the final solution is no longer zero but is a random signal of size related to the level on noise. In the bottom line we display the result when the ball is smaller than the inclusion. Now, together with a random signal a structured non-zero solution appears which looks like

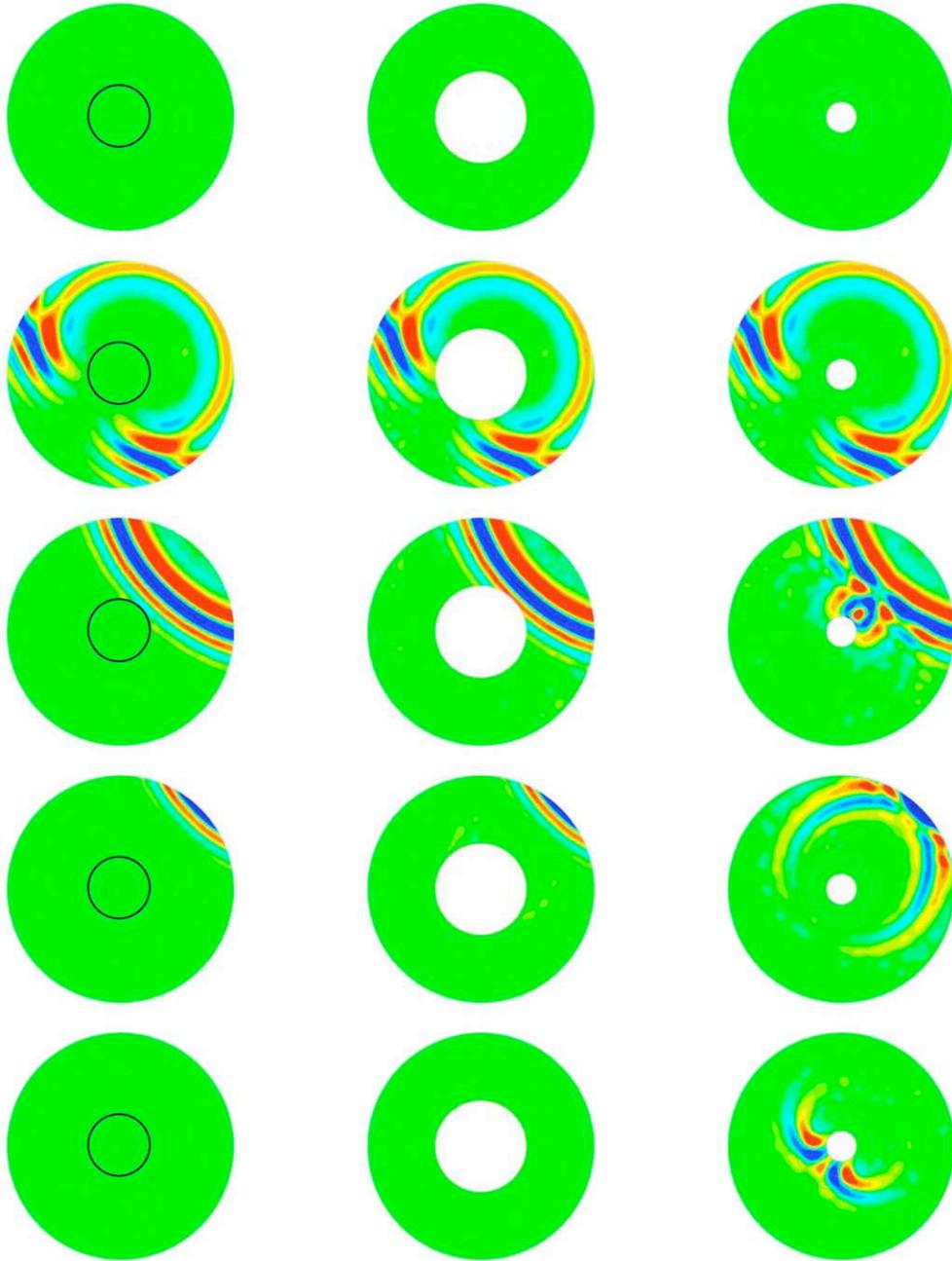


Figure 2. Time-reversed BVP snapshots for a soft inclusion with an incident signal of the forward problem (not shown here) coming from the top-right. On the left: perfect time-reversed solution, in the middle: time reversal with a larger ball, on the right: time reversal with a smaller ball.

the right column of figure 2 without noise in the data. We can discriminate between the case where the ball contains or does not contain the inclusion D up to 45% of noise. Indeed in this case, $J(B_\rho) = 0.2$ so the magnitude of the final solution is 20% of the incident field when

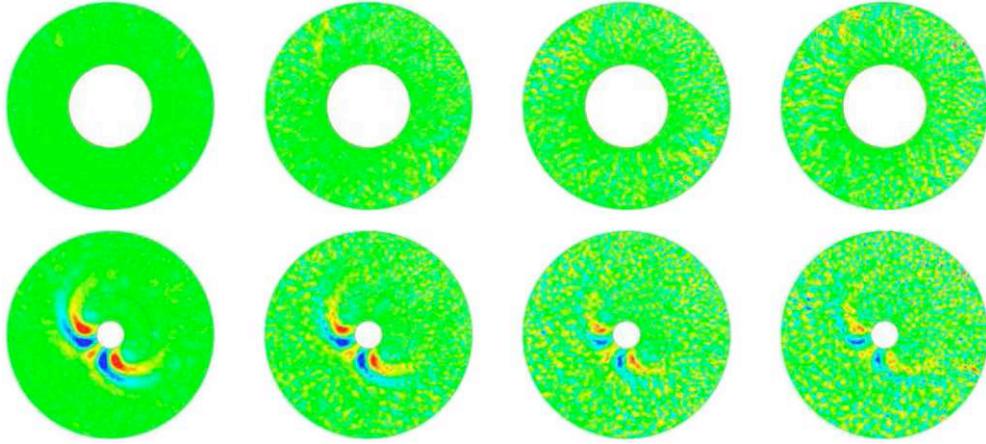


Figure 3. Time-reversed solutions at the final time for noise on the recorded data from left to right: 10%, 30%, 45% and 50%, for a ball larger than the inclusion on the top and a smaller ball on the bottom.

Table 1. Results of $J(B_\rho)$ for inclusions that do not intersect the artificial balls, see figure 4(a).

Radius inclusion	Radius large ball	Radius small ball	Results for large ball	Results for small ball
2λ	5.2λ	λ	<5%	100%
λ	5.2λ	λ	<5%	100%
λ	3.2λ	λ	<5%	100%
0.5λ	5.2λ	λ	<5%	50%
0.5λ	2.2λ	λ	<5%	50%

the ball B_ρ encloses the inclusion whereas $J(B_\rho) = 0.6$ when the ball does not enclose the inclusion. Thus, the method TRAC appears to be relatively insensitive to noise on the recorded data.

In previous tests, for the sake of simplicity, the artificial balls and the inclusion were concentric. We now consider the case where either the artificial ball and the inclusion D do not intersect or the artificial ball crosses D without including or being included, see figure 4. Results are shown in tables 1 and 2. In table 1, the inclusion is between the artificial boundaries. Since in our tests the source emits from the North–East, we place the inclusion respectively in North–East, North–West, South–West and South–East for table 2. The radius of the inclusion is 1.35λ , the radius of the larger ball is about 3λ and the radius of the smaller one is always λ . In all these cases, the criterion $J(B_\rho)$ discriminates between the possibilities since it takes values smaller than 0.05 when the artificial ball encloses the inclusion whereas it lies between 0.3 and 1.0 in the other cases. Moderate values of the criterion ($J(B_\rho) = 0.3$) correspond to a situation where the inclusion is in the shadow of the ball.

As a second test case we illustrate the TRAC method by taking penetrable inclusions with speeds that correspond to medical applications. The value of the speed in the background medium is $c = 1$ and in the inclusion the values are taken from [24]: $c = 1.7$ (breast tumor), $c = 1.14$ (fibroadenoma) and $c = 0.93$ (surrounding tissue). We again stress that the method

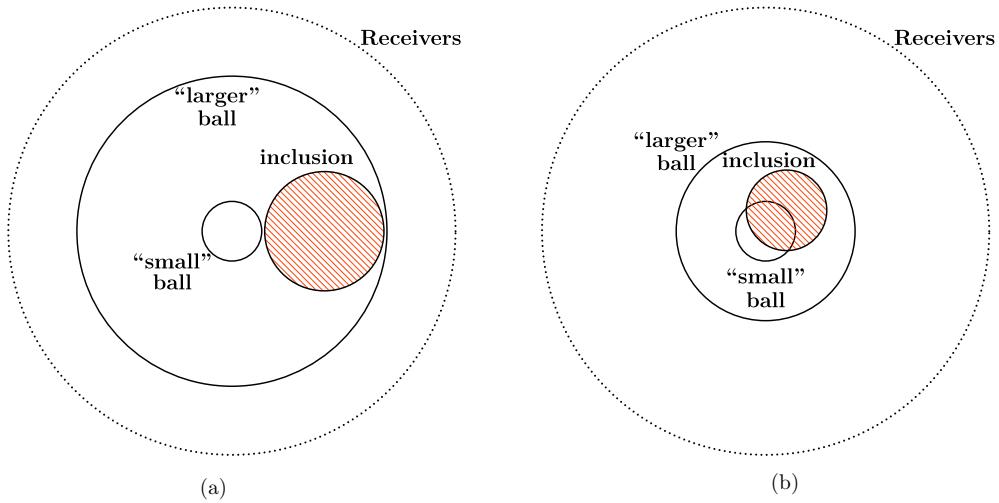


Figure 4. (a) Inclusion between the artificial boundaries and (b) inclusion crossing the artificial boundaries.

Table 2. Results of $J(B_\rho)$ for an inclusion crossing the artificial balls, see figure 4(b).

Geographical position	Results for large ball	Results for small ball
N-E	<5%	65%
N-W	<5%	70%
S-W	<5%	30%
S-E	<5%	75%

does not rely on any *a priori* knowledge of the data. For these inclusions, the ball and the inclusion are concentric disks and we vary the size of the artificial balls. In figure 5, we plot the criterion $J(B_\rho)$ as a function of the distance between the inclusion and the artificial balls for various penetrable bodies. When the abscissa is negative, the ball does not enclose the inclusion. $J(B_\rho)$ is even larger when the ball is smaller than the inclusion. The criterion increases with the distance between the ball and the inclusion. On the other hand, when the ball encloses the inclusion (i.e., the abscissa is positive) the criterion is smaller than 0.1 and nearly flat. Note, that as expected, the larger the contrast between the inclusion and the surrounding medium the larger is $J(B_\rho)$. We have performed other experiments with inclusions of various shapes. One such example is given later for the Helmholtz equation. In all cases, the results are independent of the shape of the inclusion as long as its size is greater than one wavelength.

In conclusion, when we enclose the body with B_ρ then $J(B_\rho)$ is small. When the ball does not include the body D then the size of $J(B_\rho)$ indicates the distance between the scatterer and the artificial ball.

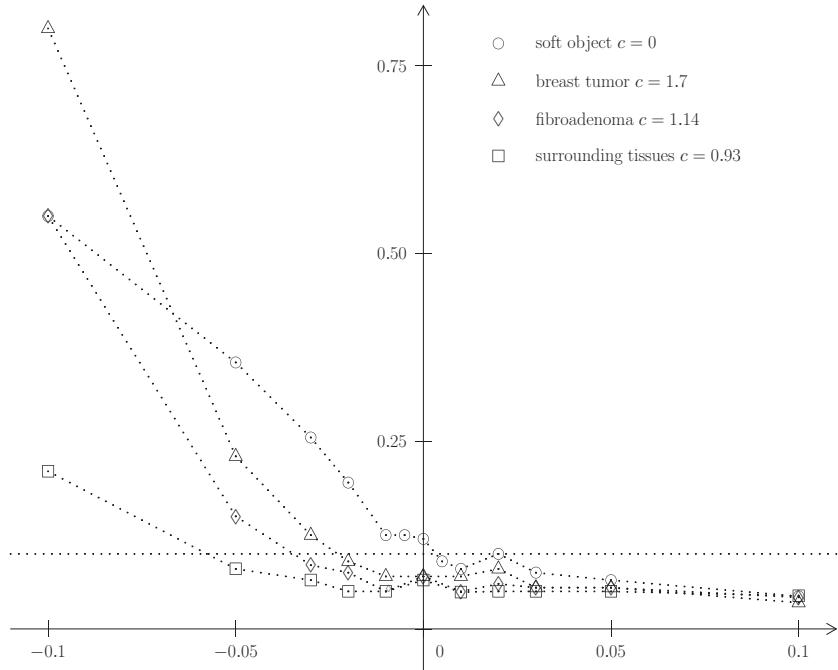


Figure 5. Criterion $J(B_\rho)$ versus the algebraic distance between the inclusion and the artificial balls for various penetrable inclusions.

3.2. The Helmholtz equation

For the harmonic case, we again consider a scatterer D surrounded by a homogeneous and isotropic medium with a velocity of sound denoted by c_0 . The inclusion is illuminated by an incident field u^I . Equation (8) becomes

$$\begin{cases} -\omega^2 u^T - c^2 \Delta u^T = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ (u^T(\vec{x}) - u^I(\vec{x})) \text{ satisfies a Sommerfeld condition at } \infty. \end{cases} \quad (36)$$

In order to create synthetic data, equation (36) is approximated by the FreeFem++ package [17] which constructs a finite element method in space. The incident wave is simulated by the same procedure with a uniform velocity of sound equal to c_0 . We then introduce a boundary Γ_R where the signal is recorded. The boundary Γ_R encloses a domain denoted by Ω , see figure 1. The next stage of the method is to introduce a ‘trial’ surface B_ρ and solve the phase conjugated problem (22) in $\Omega \setminus B_\rho$ using an absorbing boundary condition. In contrast to the time-dependent case, we cannot use the criterion defined in (34) since in the harmonic case, there is no time and thus no final time. We define, later, two new criteria adapted to the harmonic case. We first look at the numerical simulations obtained with artificial balls and a soft square shaped inclusion that are concentric, see figure 6. In the top-left figure we plot the modulus of the total field $|u^T|$ which coincides with the modulus of its conjugate field $|\bar{u}^T|$. On the right, we display the field obtained by the phase-conjugation method presented in section 2.2, see equation (9). We see that there is a large difference between the total field and the field reconstructed by the phase conjugation method. The two bottom figures illustrate the TRAC method. In the left figure, the ball encloses the square and the computed field is the

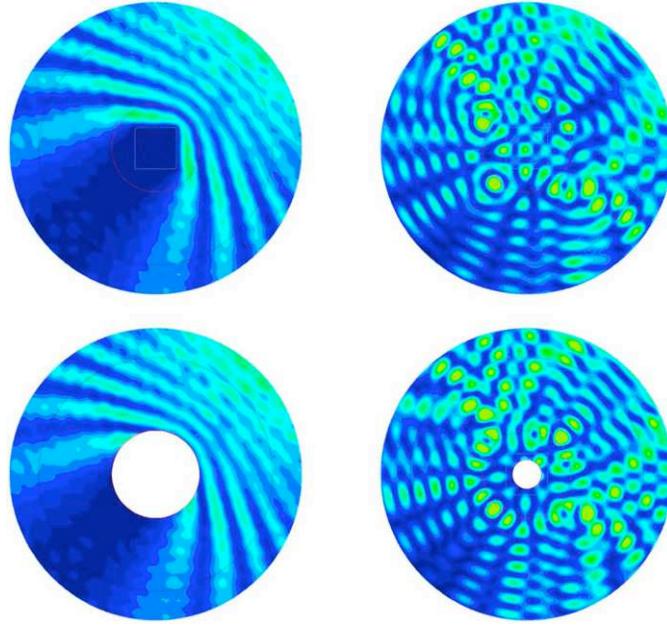


Figure 6. Phase conjugation for a soft square shaped inclusion of length 2λ . From left to right, from top to bottom: perfect, phase conjugation, TRAC with a ball enclosing the inclusion, TRAC with a ball inside the inclusion.

restriction of the total field. In the right figure, the ball is inside the square and the computed field is very different from the total field.

In practice, we do not know the total field and we have to introduce a way to measure whether the artificial ball encloses the inclusion or not. For this purpose, we introduce two different criteria. The first one is based on Dirichlet and Neumann data and the second one is based on the TRAC method. The latter will prove to be more robust with respect to noise without requiring regularization techniques. For the first criterion, we assume that in addition to the total field u^T we have also recorded the value of the normal derivative $\partial u^T / \partial n$ on the boundary Γ_R . When the ball encloses the inclusion, the normal derivative of the solution to the phase conjugation problem (22) coincides with the conjugation of the corresponding recorded data. Thus, we introduce the following first criterion:

$$J_{DN}(B_\rho) := \frac{\left\| \frac{\partial u_R^T}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}^T}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\Gamma_R)}}{\left\| \frac{\partial \bar{u}^T}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\Gamma_R)}}. \quad (37)$$

The second criterion is derived from the TRAC method itself. Indeed, the basis of the method is that the phase conjugated scattered field

$$\bar{u}^S := \bar{u}^T - \bar{u}^I$$

satisfies

$$\text{TRAC}(\bar{u}^S) = \text{TRAC}(\bar{u}^T - \bar{u}^I) = 0 \quad (38)$$

at any point outside the inclusion. In equation (22) this relation is used on the boundary of the artificial ball B_ρ . Since u^T is computed numerically and u^I is given data, that is readily available at any point in $\Omega \setminus B_\rho$. Equation (38) can be computed at any point in Ω .

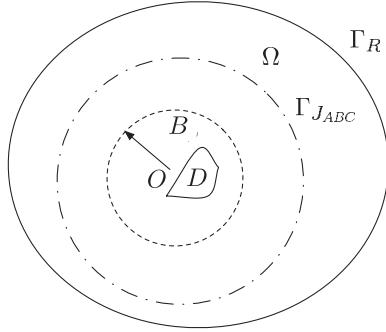


Figure 7. Boundary $\Gamma_{J_{ABC}}$ inside the region for the new criterion J_{ABC} .

Thus, following the principle of the TRAC method, we introduce a new boundary $\Gamma_{J_{ABC}}$ (see figure 7) to design a new criterion:

$$J_{ABC}(B_\rho, \Gamma_{J_{ABC}}) := \frac{\|\text{TRAC}(u_R^T - \bar{u}^I)\|_{L^\infty(\Gamma_{J_{ABC}})}}{\|\text{TRAC}(\bar{u}^I)\|_{L^\infty(\Gamma_{J_{ABC}})}}. \quad (39)$$

Note, that this criterion is not based on a direct comparison between numerical data and recorded data in contrast to the first criterion. Hence, it does not require any additional recorded data. The criterion J_{ABC} , equation (39), could be used everywhere. However, since its accurate computation has some cost, we introduced a curve Γ_{TRAC} on which we compute it.

Both criteria (37) and (39) should be 0 when the artificial ball B_ρ encloses the inclusion. Since the TRAC is not derived from an exact ABC, the above criteria are small but not zero. Since, equation (38) is imposed on ∂B_ρ in order to compute u_R^T (see equation (22)), we have to take $\Gamma_{J_{ABC}}$ different from ∂B_ρ .

We tested both criteria for a soft circular inclusion of radius two wavelengths (2λ) with various noise magnitudes on the recorded data defined as in (35). The radius of the artificial ball can be as small as one wavelength and still avoid difficulties because of the absorbing boundary, with a small radius. The results are summarized in table 3. The results of the enclosing case correspond to a concentric artificial ball B_ρ of radius 3λ and the results of a non-enclosing ball correspond to a concentric ball of radius λ . The first criterion J_{DN} works only up to 5% noise. However, the use of a filtering technique could improve the domain of validity of this criterion. The second criterion J_{ABC} enables one to discriminate between the enclosing and non-enclosing cases up to 30% noise even though we have not filtered the data. This robustness can be explained by the fact that the noise comes from boundary measurements while, the Helmholtz equation has regularizing properties so that the computed field u_R^T is much less noisy on the internal boundary $\Gamma_{J_{ABC}}$ than on the boundary Γ_R .

In the last experiment, we consider a soft inclusion with a non-smooth shape. We use the TRAC method to detect the location of the inclusion by varying the respective locations of the artificial ball. The results are summarized in table 4. First we take a large ball B_ρ so that we check that the inclusion D is not too close to the boundary Γ_R . Then, we move B_ρ to the left. The high value of the criterion shows us that the inclusion D is not included inside. The third and fourth show other failed attempts to enclose the inclusion. The last column corresponds to a successful location of the inclusion. This shows the possibility, by trial and

Table 3. Values of the various criteria for several levels of noise.

Noise magnitude	J_{DN}		J_{ABC}	
	Enclosing	Non enclosing	Enclosing	Non enclosing
0%	5.04%	69.20%	6.34%	69.18%
5%	46.38%	93.55%	12.79%	71.62%
10%	103.40%	91.77%	13.55%	70.87%
20%	213.65%	231.30%	35.99%	80.23%
30%	301.46%	269.07%	51.03%	87.80%
40%	532.97%	374.67%	57.99%	84.34%
50%	644.47%	552.57%	63.28%	124.30%

Table 4. Criterion J_{ABC} for a soft inclusion and various ball locations.

Cases					
J_{ABC}	8.52%	66.09%	60.28%	28.35%	11.89%

error, of recovering the approximate location of the inclusion. In future work we will try to replace the trial and error procedure by an iterative technique.

4. Conclusion

We introduce the time-reversed absorbing conditions (TRAC) for time-reversal methods. They enable one to ‘recreate the past’ without knowing the source which has emitted the signals that are back-propagated. This is made possible by removing a small region surrounding the source. We present two applications in inverse problems: the reduction of the size of the computational domain and the determination of the location of an unknown inclusion from boundary measurements. We stress that in contrast to many methods in inverse problems, this method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. Hard, soft and penetrable inclusions are treated in a similar way. The feasibility of the method was shown with both time-dependent and harmonic examples. Moreover, the method has proved to be fairly insensitive with respect to noise in the data.

References

- [1] Antoine X, Barucq H and Bendali A 1999 Bayliss–Turkel like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape *J. Math. Anal. Appl.* **229** 184–211
- [2] Assous F, Kray M, Nataf F and Turkel E 2010 Time reversed absorbing conditions *C. R. Math.* **348** 1063–7
- [3] Bardos C and Fink M 2002 Mathematical foundations of the time reversal mirror *Asymptotic Anal.* **29** 157–82
- [4] Barucq H, Djellouli R and Saint-Guirons A 2009 Performance assessment of a new class of local absorbing boundary conditions for elliptical- and prolate spheroidal-shaped boundaries *Appl. Numer. Anal.* **59** 1467–98

- [5] Bayliss A, Gunzburger M and Turkel E 1982 Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions *SIAM J. Appl. Math.* **42** 430–51
- [6] Bayliss A and Turkel E 1980 Radiation boundary conditions for wave-like equations *Commun. Pure Appl. Math.* **33** 707–25
- [7] Berryhill J 1979 Wave-equation datuming *Geophysics* **44** 132944
- [8] Blomgren P, Papanicolaou G and Zhao H 2002 Super-resolution in time-reversal acoustics *J. Acoust. Soc. Am.* **111** 230–48
- [9] Clouet J F and Fouque J P 1997 A time-reversal method for an acoustical pulse propagating in randomly layered media *Wave Motion* **25** 361–8
- [10] Colton D, Coyle J and Monk P 2000 Recent developments in inverse acoustic scattering theory *SIAM Rev.* **42** 369–414 (electronic)
- [11] Colton D and Kirsch A 1996 A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region *Inverse Problems* **12** 383–93
- [12] Colton D and Kress R 1998 *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* (Applied Mathematical Sciences vol 93) 2nd edn (Berlin: Springer)
- [13] Curlander J and McDonough R 1991 *Synthetic Aperture Radar* (New York: Wiley)
- [14] Engquist B and Majda A 1977 Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves *Math. Comput.* **31** 629–51
- [15] Fink M 2009 *Renversement du temps, ondes et innovation* (Collège de France: Fayard)
- [16] Fink M, Wu F, Cassereau D and Mallart R 1991 Imaging through inhomogeneous media using time reversal mirrors *Ultrason. Imaging* **13** 199
- [17] Hecht F 2010 *FreeFem++* numerical mathematics and scientific computation. Laboratoire J.L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, <http://www.freefem.org/ff++/>, 3.7 edition
- [18] Kriegsmann G, Taflove A and Umashankar K 1987 A new formulation of electromagnetic scattering using on surface radiation condition approach *IEEE Trans. Antennas Propag.* **AP35** 153–61
- [19] Larmat C, Montagner J-P, Fink M, Capdeville Y, Tourin A and Clévétré E 2006 Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great sumatra earthquake *Geophys. Res. Lett.* **33** L19312
- [20] Lehman S K and Devaney A J 2003 Transmission mode time-reversal super-resolution imaging *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 2742
- [21] Medvinsky M and Turkel E 2009 On surface radiation conditions for an ellipse *JCAM* **234** 1647–55
- [22] Medvinsky M, Turkel E and Hetmaniuk U 2008 Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries *J. Comput. Phys.* **227** 8254–67
- [23] Prada C, Manneville S, Spoliansky D and Fink M 1996 Decomposition of the time reversal operator: application to detection and selective focusing on two scatterers *J. Acoust. Soc. Am.* **99** 2067–76
- [24] Sinkus R, Tanter M, Xydeas T, Catheline S, Bercoff J and Fink M 2005 Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by mr elastography **23** 159–65
- [25] Therrien C W 1992 *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall)

Deuxième partie

Application de la Méthode *TRAC* aux Problèmes Inverses

Introduction

Dans cette deuxième partie, nous allons approfondir notre étude de la méthode TRAC dans le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale ou ouverture partielle, et pouvant être composée d'un nombre fini de transducteurs. Nous appliquerons la méthode *TRAC* à l'identification d'objets et, plus particulièrement, à la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes. Cette partie est constituée de trois chapitres.

Dans le chapitre 6, nous allons présenter une application de la méthode *TRAC* à l'identification d'objets. Grâce à la méthode *TRAC*, nous souhaitons retrouver la position et/ou le volume d'une inclusion, sans connaissance *a priori* de ses propriétés physiques. Dans un premier temps, nous travaillerons avec une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale. La disposition des transducteurs sur la LER peut être continue ou discrète. Comme précédemment, nous l'explorerons dans le cas de l'équation des ondes scalaire en dimension 2 et dans le cas de l'équation de Helmholtz en dimension 2. Deux critères seront établis dans chacun des cas.

Dans le chapitre 7, nous étendrons la méthode *TRAC* au cas d'une ligne de transducteurs à ouverture partielle et dont le nombre de transducteurs est fini. Nous présenterons dans un premier temps les résultats de reconstruction de signaux pour ce type de ligne de transducteurs. Ensuite, nous testerons la méthode *TRAC* à l'identification d'objets pour des lignes de capteurs à ouverture partielle. Pour cela, nous devrons établir un nouveau critère. Finalement, nous appliquerons la méthode *TRAC* à la discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches.

Dans le chapitre 8, nous étendrons la méthode *TRAC* à des milieux non-homogènes dissipatifs. Nous verrons que les équations ne sont plus réversibles mais que la méthode permettra encore la reconstruction de signaux et l'identification d'objets. Nous appliquerons la méthode *TRAC* en milieux non-homogènes dissipatifs à la discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches.

Finalement, nous conclurons cette partie en incluant dans la thèse le second article à paraître dans le journal *Wave Motion*.

Chapitre 6

Cas de l'ouverture totale de la LER

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons une application de la méthode *TRAC* à l'identification d'objets. Grâce à la méthode *TRAC*, nous souhaitons retrouver la position et/ou le volume d'une inclusion, sans connaissance *a priori* de ses propriétés physiques. Dans un premier temps, nous travaillons avec une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale. La disposition des transducteurs sur la LER peut être continue ou discrète. Comme précédemment, nous l'explorons dans le cas de l'équation des ondes scalaire en dimension 2 et dans le cas de l'équation de Helmholtz en dimension 2. Deux critères sont établis dans chacun des cas.

Sommaire

6.1 Identification d'objets dans le domaine temporel	146
6.1.1 Premier critère : Instant final	146
6.1.2 Transducteurs discrets et deuxième critère	153
6.2 Identification d'objets dans le domaine fréquentiel	158

6.1 Identification d'objets dans le domaine temporel

Dans cette section, nous nous intéressons à la seconde application de la méthode *TRAC* dans le domaine temporel. Nous traitons d'abord le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale. Le cas de l'ouverture partielle sera traité dans le chapitre suivant. La disposition des transducteurs sur la LER peut être continue ou discrète. Nous commençons par analyser le problème d'identification d'objets et l'apport de la méthode *TRAC* à cette application en établissant un premier critère basé sur la solution du problème de retournement temporel à l'instant final. Nous établissons ensuite un deuxième critère, basé sur la méthode *TRAC* elle-même, qui nous permet lui-aussi de quantifier l'erreur faite sur la position du sous-domaine B par rapport à la position de inclusion D recherchée. Nous présentons nos résultats d'identification par la méthode *TRAC* grâce à ces deux critères.

6.1.1 Premier critère : Instant final

Nous commençons par analyser le problème d'identification. Pour cela, nous pouvons reprendre la FIGURE 5.7. Nous rappelons les images obtenues à l'instant final sur la FIGURE 6.1.

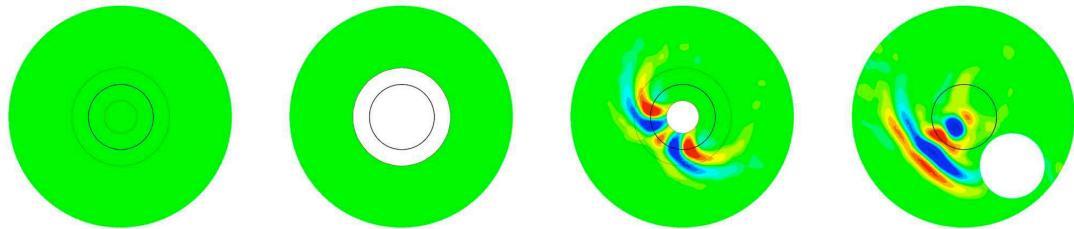
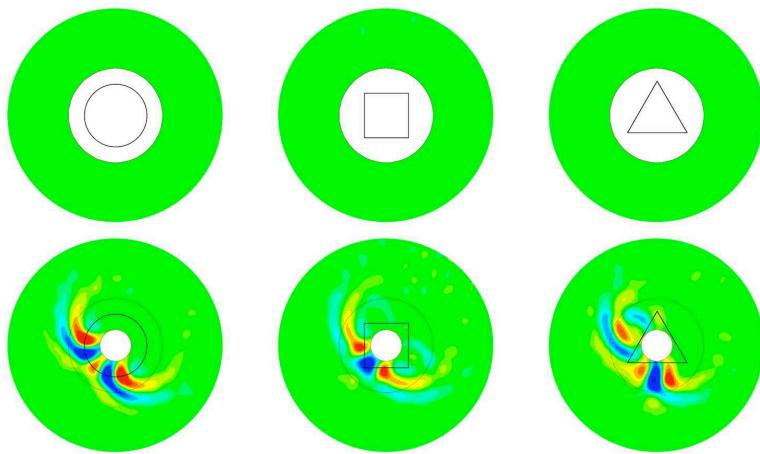
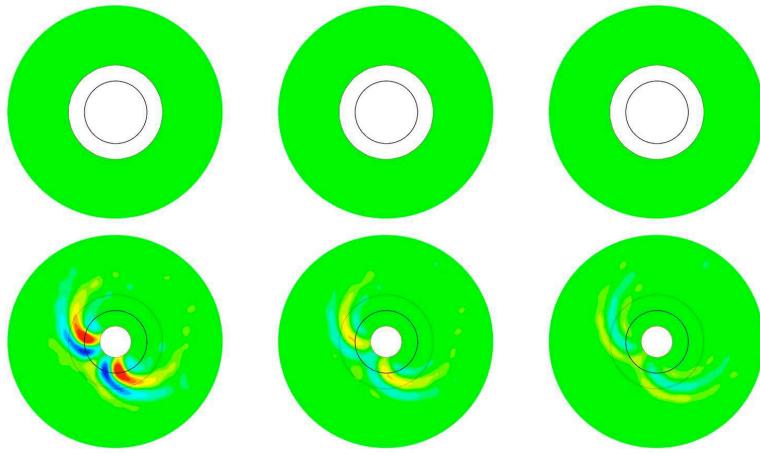
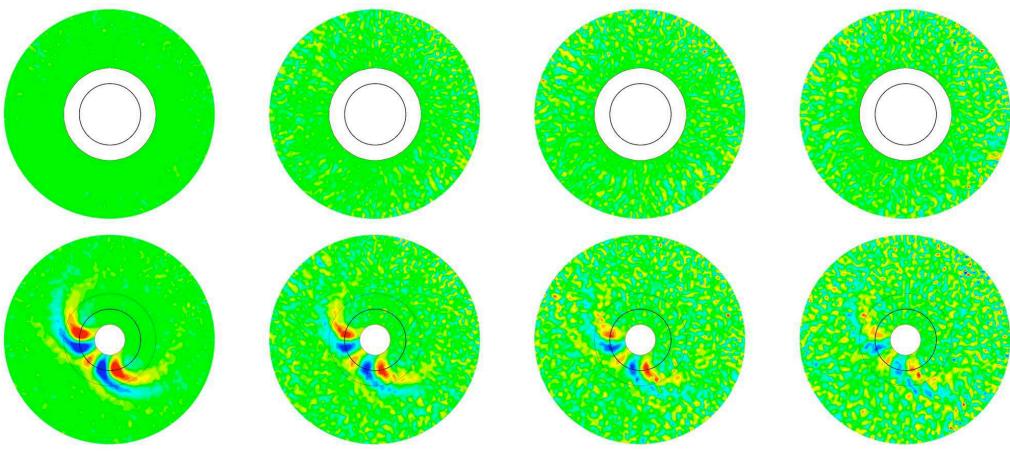


FIGURE 6.1 – Analyse du problème d'identification d'objets dans le domaine temporel pour une LER à ouverture totale. Comparaison des signaux à l'instant final (instant initial du problème direct). De gauche à droite : retournement temporel exact, *TRAC* lorsque B englobe D , *TRAC* lorsque B est inclus dans D , *TRAC* lorsque B est décalé par rapport à D .

Nous savons qu'à la fin de la simulation, nous devons obtenir un champ nul dans tout le domaine. Ceci est dû aux conditions initiales homogènes du problème direct. Or le constat que nous faisons immédiatement est que, lorsque le sous-domaine B ne contient pas l'inclusion complètement, il reste un signal non négligeable dans le domaine de calcul à la fin de la simulation. Les planches de la FIGURE 6.2 illustrent également les signaux à l'instant final dans différents cas de figures : pour des inclusions molles de formes différentes en 6.2a, des inclusions pénétrables rondes en 6.2b, et pour une inclusion molle ronde avec des niveaux de



(a) De gauche à droite : pour une inclusion ronde, carrée et triangulaire.

(b) De gauche à droite : pour une tumeur ($c_D = 1,7$), un fibroadénome ($c_D = 1,14$) et un tissu environnant ($c_D = 0,93$).

(c) De gauche à droite, niveau de bruit : 10 %, 30 %, 40 % et 50 %.

FIGURE 6.2 – Comparaison des signaux à l'instant final (instant initial du problème direct) : (a) pour des inclusions molles de différentes formes, (b) pour des inclusions pénétrables rondes, (c) pour une inclusion molle ronde en fonction du niveau de bruit sur les données. Sur chaque graphique, la ligne du haut montre le signal à l'instant final lorsque le sous-domaine B englobe l'inclusion D , et la ligne du bas montre le signal à l'instant final lorsque le sous-domaine B est contenu l'inclusion D .

bruit croissant 6.2c. Si le sous-domaine B contient l'inclusion, nous observons dans tous les cas qu'il n'y a plus de signal dans le domaine de calcul, excepté peut-être dans les cas bruités, où nous observons comme de la neige dans le milieu. Pour de faibles niveaux de bruit, le signal reste négligeable. En revanche, si le sous-domaine B est contenu dans D , alors dans tous les cas, un signal non négligeable reste bloqué dans le domaine de calcul.

Nous sommes par conséquent amenés à travailler avec des sous-domaines B qui n'englobent pas nécessairement l'inclusion dans son intégralité. Dans ce contexte-là, nous ne pouvons plus utiliser la notation u_R^T (ou u_R^S) pour la reconstitution du champ total (ou du champ diffracté) par la méthode *TRAC*. Nous prenons à partir de maintenant les notations suivantes :

- Le champ total obtenu par retournement temporel exact est noté u_R^T et correspond au retourné temporel du champ total direct u^T .
- Le champ total reconstitué par la méthode *TRAC* pour un sous-domaine B quelconque est noté v_R^T , pour le différentier de u_R^T . Si le sous-domaine englobe l'inclusion, nous devons avoir $v_R^T = u_R^T$ dans le domaine restreint $\Omega \setminus B$.
- Le champ total obtenu par retournement temporel classique est w_R^T .

Remarque 6.1.1. : *Les notations ci-dessus sont valables également lorsque nous travaillons sur le champ diffracté. L'exposant T devient alors S.*

Par conséquent, nous nous basons sur le principe suivant :

Si le sous-domaine B englobe l'inclusion D , alors le champ total reconstitué v_R^T , qui est le retourné temporel du champ total u_R^T à l'approximation sur la condition absorbante près, s'annule partout, en particulier dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$. Si au contraire, après avoir résolu le problème de retournement temporel, le champ reconstitué v_R^T ne s'annule pas à la fin de la simulation, cela prouve que l'hypothèse faite sur le sous-domaine B contenant l'inclusion D est fausse.

Ainsi, nous procédons empiriquement à la localisation de l'inclusion D en jouant sur la position et la taille du sous-domaine B , que nous appelons dorénavant sous-domaine-test. Nous observons des graphiques similaires dans le cas d'inclusions pénétrables ou lorsque les données sont bruitées.

Au vu des graphiques présentés sur la FIGURE 6.2, nous établissons un critère d'identification d'objets qui nous sert à quantifier si le sous-domaine-test B contient ou

non l'inclusion D à détecter. Le premier critère qui nous vient à l'esprit est le critère qui quantifie l'amplitude du signal restant dans le domaine de calcul à la fin de la simulation. Nous le nommons « critère de l'instant final ». Ce critère utilise le fait qu'à l'instant final pour le retournement temporel la solution doive s'annuler. Réciproquement, si le critère affiche une valeur non nulle, alors cela signifie que le sous-domaine B ne contient pas entièrement l'inclusion D . Nous définissons le critère de l'instant final J_{TF} ¹ de la façon suivante :

$$J_{TF}(B) := \frac{\|v_R^T(T_f, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}}{\sup_{t \in (0, T_f)} \|u^I(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}}. \quad (6.1.1)$$

Ce critère se révèle facile à mettre en œuvre et ne dépend pas du domaine de calcul. Le critère J_{TF} est normalisé par la norme du champ incident direct. Nous l'utilisons donc pour exprimer le pourcentage de la force du résidu du signal par rapport à l'amplitude du champ incident comme référence. Notons que le critère J_{TF} peut être calculé indifféremment sur le champ total reconstitué v_R^T et sur le champ diffracté reconstitué v_R^S .

Grâce à ce critère, nous obtenons les résultats d'identification d'objets présentés dans les TABLEAUX 6.1. Nous reprenons les tests de la FIGURE 6.2 pour quantifier la force du signal restant à la fin de la simulation. Le TABLEAU 6.1a donne les valeurs du critère J_{TF} dans le cas d'une inclusion de type mou de différentes formes, FIGURE 6.2a. Les résultats sont très satisfaisants : bien que nous n'obtenions pas un signal nul à l'instant final lorsque le sous-domaine-test B contient l'inclusion D , le signal reste négligeable à environ 5 %. En revanche, lorsque le sous-domaine-test B est contenu dans l'inclusion D , donc B ne contient pas D en totalité, les valeurs du critère J_{TF} sont supérieures à 50 %. Ces dernières valeurs montrent qu'il reste un signal non négligeable à la fin de la simulation, et par conséquent que nous n'avons pas englobé correctement l'inclusion D .

Nous proposons dans le TABLEAU 6.1b les résultats du critère J_{TF} pour des inclusions rondes pénétrables illustrées sur la FIGURE 6.2b. Dans ce cas aussi, lorsque le sous-domaine-test B englobe totalement l'inclusion D , les valeurs du critère J_{TF} sont inférieures à 5 %, ce qui correspond au fait que nous n'avons plus de signal significatif dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$ à la fin de la simulation. Si nous considérons à présent le cas où le sous-domaine-test B est inclus dans D . Les résultats du critère varient en fonction de la vitesse de propagation à l'intérieur de l'inclusion D . Plus la vitesse de propagation c_D est proche de 1 (vitesse de propagation c_0 dans le milieu ambiant), moins la valeur du critère est importante. Ceci est cohérent avec le fait que la perturbation du champ total liée à la présence d'une inclusion D

1. L'indice TF renvoie à « temps final ».

Forme	$D \subset B$	$D \not\subset B$
Rond	3,99 %	97,74 %
Carré	6,19 %	63,56 %
Triangle	5,38 %	67,67 %

(a) Inclusion molle de différentes formes.

Niveau de bruit	$D \subset B$	$D \not\subset B$
10 %	16,73 %	87,71 %
30 %	53,40 %	68,88 %
40 %	72,96 %	96,15 %
50 %	75,13 %	87,98 %

(c) Inclusion ronde de type mou : cas de données bruitées.

Pénétrable	$D \subset B$	$D \not\subset B$
$c_D = 1,7$	3,61 %	82,32 %
$c_D = 1,14$	4,78 %	32,48 %
$c_D = 0,93$	4,60 %	16,84 %

(b) Inclusion ronde pénétrable.

Position	$D \subset B$	$D \not\subset B$
Nord-Est	4,09 %	57,71 %
Nord-Ouest	4,49 %	45,32 %
Sud-Est	4,31 %	52,43 %
Sud-Ouest	4,16 %	19,65 %

(d) Inclusion ronde de type mou : cas de chevauchement, cf. FIGURE 6.4.

TABLEAU 6.1 – Résultats du critère de l'instant final lorsque le sous-domaine B englobe l'inclusion D ($D \subset B$) et lorsque le sous-domaine B est contenu dans D ($D \not\subset B$).

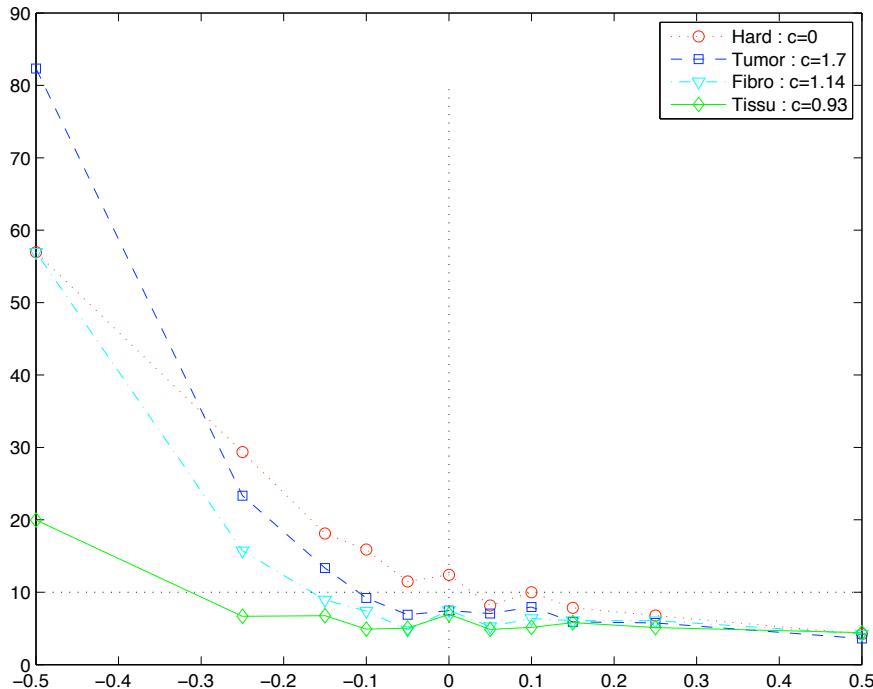


FIGURE 6.3 – Résultats du critère de l'instant final J_{TF} dans le cas d'une inclusion ronde. Courbe du critère J_{TF} (en pourcentage %) en fonction de la distance algébrique (en λ , où $\lambda = 0,2$) entre le sous-domaine-test B et l'inclusion D . Quatre types d'inclusions : dure (“Hard”), de type tumeur (“Tumor”), de type fibroadénome (“Fibro”) et de type tissu environnant (“Tissu”).

dans le milieu est moins significative lorsque la vitesse de propagation c_D est proche de c_0 . Cependant, à la fois sur la FIGURE 6.2b et dans le TABLEAU 6.1b, nous observons une erreur quant à la reconstitution v_R^T lorsque B est inclus dans D .

Nous présentons également les résultats du critère J_{TF} pour des données bruitées dans le TABLEAU 6.1c. Dès 10 % de bruit, il devient difficile de dire que le résidu du signal est négligeable par rapport au champ incident. Au minimum, nous avons 16,73 % et rapidement nous passons la barre des 50 % quelle que soit la configuration du sous-domaine-test. Par conséquent, nous ne sommes pas capables d'exprimer les résultats obtenus avec la méthode *TRAC* lorsque les données sont bruitées. Pourtant, au vu des graphiques de la FIGURE 6.2c, nous voyons une différence notable entre le cas où B contient D et le cas contraire où B est contenu dans D , jusqu'à 40 % de bruit. À 50 %, la neige parasite et le signal dégradé deviennent difficilement dissociables, donc nous n'espérons pas détecter l'inclusion pour un tel niveau de bruit, qui se révèle par ailleurs très important déjà. Si nous revenons au cas de niveaux de bruit inférieurs, nous expliquons les valeurs importantes du critère J_{TF} notamment à cause de la neige parasite qui apparaît dans le domaine de calcul due au bruit. En effet, le critère J_{TF} est calculé en prenant la norme infinie dans le milieu, donc si la neige prend par endroit une valeur importante, cela fausse notre résultat du critère J_{TF} . Par conséquent, le critère J_{TF} n'est pas adapté au cas de données bruitées. Nous verrons plus tard comment traiter ce problème.

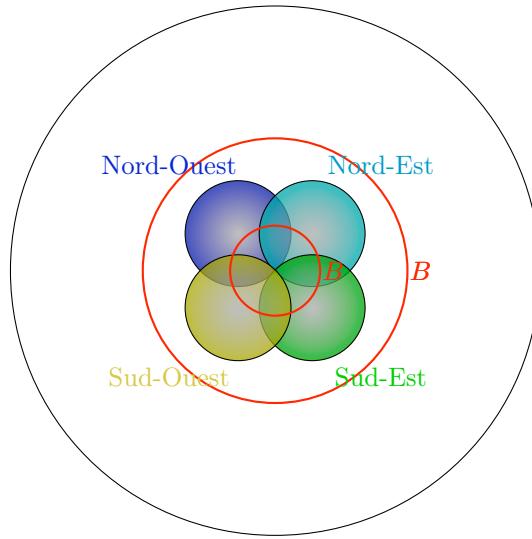


FIGURE 6.4 – Position relative de l'inclusion D (en dégradé) par rapport au centre du domaine de calcul : Nord-Est, Nord-Ouest, Sud-Est, Sud-Ouest. Les sous-domaines-test B sont concentriques par rapport à l'origine du domaine.

Nous proposons encore deux tests d'identification d'objets. Le premier test consiste à décaler l'inclusion D et à considérer des sous-domaines-test B qui recouvrent partiellement l'inclusion, cf. FIGURE 6.4. Pour les quatre positions de l'inclusion D , nous avons des valeurs du critère J_{TF} inférieures à 5 % lorsque le sous-domaine-test B englobe totalement l'inclusion. Ceci confirme que nous avons bien reconstitué le champ total dans le domaine restreint, même si l'inclusion et le sous-domaine ne sont pas concentriques. Si nous considérons en revanche le cas où le sous-domaine-test B ne recouvre que partiellement l'inclusion D , alors les valeurs du critère J_{TF} augmentent significativement (autour de 50 %), excepté pour le cas Sud-Ouest. En effet, l'inclusion D se trouve à l'arrière du sous-domaine B par rapport à l'illumination de la source. Par conséquent, une partie plus importante du signal renvoyé par retournement temporel est absorbé par le sous-domaine-test B , car le sous-domaine B contient en réalité le point d'impact de l'onde incidente avec l'inclusion : la partie non entourée est dans la zone d'ombre de l'inclusion, qui est totalement réfléchissante. Nous obtenons cependant encore 19,65 % d'erreur, ce qui est suffisant pour affirmer que l'inclusion n'est pas contenue en totalité dans le sous-domaine-test B .

Finalement, nous terminons par un test de résolution effectuée sur une inclusion D ronde de rayon λ , où λ désigne la longueur d'onde principale de la source. Nous faisons varier le rayon du sous-domaine-test B qui est pris concentrique avec l'origine du domaine de calcul et le centre de l'inclusion. Nous considérons quatre types d'inclusions : dure, pénétrable avec une vitesse de propagation $c_D = 1,7$, pénétrable avec une vitesse $c_D = 1,14$ et pénétrable avec une vitesse $c_D = 0,93$ d'après les données sur les tissus rappelés en début de chapitre ou dans [STX⁺05]. Sur la FIGURE 6.3, nous regardons la valeur du critère J_{TF} en fonction de la distance algébrique entre le bord du sous-domaine B et de l'inclusion D . Cette distance est positive lorsque B contient D et elle est négative si B est contenu dans D . Nous proposons de regarder lorsque la valeur du critère descend sous la barre des 10 %, pour laquelle nous estimons que le résidu du signal est négligeable. Avec cette barre à 10 %, nous observons que nous retrouvons le contour de D avec une résolution de $\lambda/10$ d'inclusions dure ou pénétrable avec une vitesse $c_D = 1,7$. Pour une inclusion pénétrable avec une vitesse $c_D = 1,14$, la résolution n'est plus que de $\lambda/4$ et, avec une vitesse $c_D = 0,93$, elle passe à $\lambda/2$. Notons également que le pas du maillage de discréétisation est de $\lambda/10$. Par conséquent les résultats pour des inclusions contrastées sont satisfaisants. Pour des inclusions moins contrastées, nous pouvons encore améliorer les résultats.

6.1.2 Transducteurs discrets et deuxième critère

Dans la section précédente, nous avons constaté la faculté de la méthode *TRAC* à identifier la présence d'une inclusion dans le domaine de calcul. Nous avons établi un critère d'identification, le critère de l'instant final J_{TF} , qui s'avère relevant pour des inclusions à fort contraste et pour des données non bruitées. Nous nous proposons ici de considérer une nouvelle approche de ce critère pour pallier le problème de contraste des vitesses entre le milieu ambiant et l'inclusion. Nous établissons également un second critère qui complète ou remplace le critère J_{TF} . Nous traitons dans un même temps le cas de transducteurs disposés de façon discrète sur la LER, qui est toujours à ouverture totale.

Le problème que nous rencontrons lorsque nous travaillons avec une LER discrète est que le résidu du signal est nettement atténué, voire négligeable, étant donné que le signal divergent, s'il existe, peut sortir du domaine de calcul en passant entre les émetteurs-récepteurs. En effet, jusqu'à maintenant la LER était continue et modélisée par une condition de Dirichlet qui contraignait les résidus de signaux à rester dans le domaine de calcul. À présent, le milieu est supposé infini et les transducteurs ponctuels, donc le signal peut diverger et sortir du domaine de calcul en grande partie. Notons néanmoins que l'espace entre les transducteurs est pris au maximum à $\lambda/2$, ce qui permet de réfléchir une partie du signal dans le domaine, mais atténuée.

Pour pallier ce problème, nous proposons dans un premier temps de revoir le critère J_{TF} et de l'adapter au besoin. L'idée n'est plus de comparer le signal restant au champ incident, qui est invariant au type d'inclusion, au niveau de bruit et à la disposition des transducteurs. Nous proposons de comparer la reconstitution du champ total v_R^T (ou diffracté v_R^S) à la reconstitution dans le même contexte du champ par retournement temporel classique, soit w_R^T (ou w_R^S). Nous écrivons ce critère de l'instant final relatif sous la forme d'un rapport signal-sur-bruit :

$$J_{TF}^{rel}(B) := \frac{\|w_R^T(T_f, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|v_R^T(T_f, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}} = \frac{J_{TF}(\emptyset)}{J_{TF}(B)}. \quad (6.1.2)$$

Une fois encore, ce critère peut être exprimé en fonction des champs diffractés reconstitués v_R^S et w_R^S . En effet, il ne s'agit plus maintenant d'estimer le pourcentage de résidu du signal. Ce nouveau critère s'interprète d'une toute autre façon que le critère J_{TF} . Nous voulons comparer le résidu de signal à l'instant final dans le cas du retournement temporel classique avec le résidu du signal que nous obtenons avec la méthode *TRAC*. Lorsque le sous-domaine-test B contient totalement l'inclusion D , le signal restant doit s'annuler. Ainsi, le rapport $J_{TF}^{rel}(B)$ doit être très grand et nous indiquer que nous avons englobé l'inclusion.

En revanche, si ce rapport est proche de 1, alors cela signifie que le résidu du signal est proche de celui du cas classique et donc que nous n'avons pas englobé la totalité de l'inclusion D .

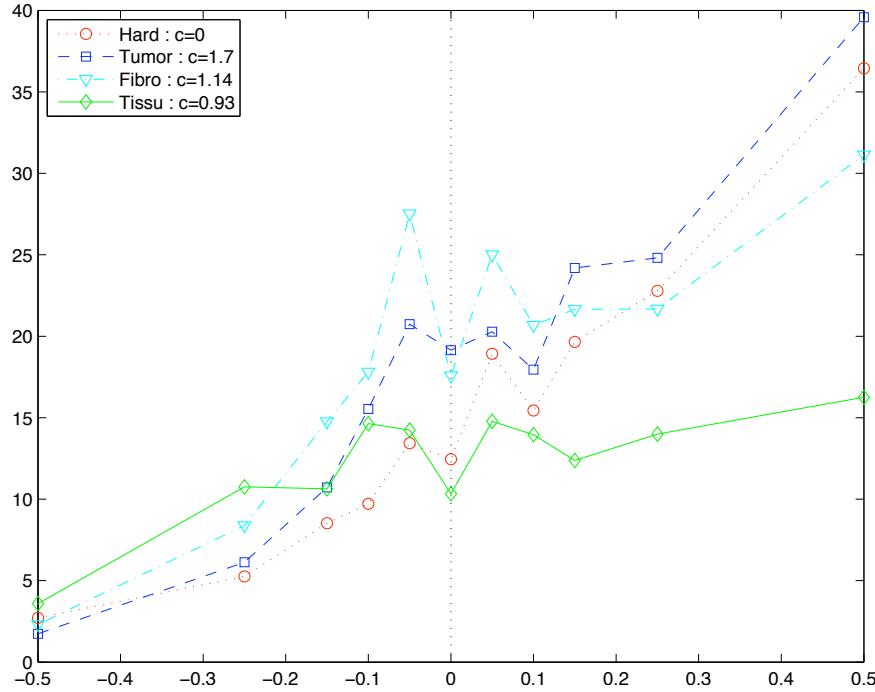


FIGURE 6.5 – Résultats du critère relatif de l'instant final J_{TF}^{rel} dans le cas d'une inclusion ronde. Courbe du critère relatif J_{TF}^{rel} en fonction de la distance algébrique (en λ , où $\lambda = 0,2$) entre le sous-domaine-test B et l'inclusion D . Quatre types d'inclusions : dure (“Hard”), de type tumeur (“Tumor”), de type fibroadénome (“Fibro”) et de type tissu environnant (“Tissu”).

Reprendons alors les résultats sur la distance entre l'inclusion D et le sous-domaine-test B pour les quatre types d'inclusions rondes de la FIGURE 6.3. Les valeurs du critère relatif J_{TF}^{rel} sont représentées sur la courbe de la FIGURE 6.5. Nous observons en effet que lorsque le sous-domaine-test B contient largement l'inclusion D avec une distance entre les deux de $\lambda/2$, le rapport est élevé, entre 30 et 40. De même, lorsque le sous-domaine-test B est contenu dans l'inclusion D avec une distance entre les deux de $\lambda/2$, le rapport est élevé et proche de 1. En revanche, si nous nous rapprochons du bord de l'inclusion, le rapport J_{TF}^{rel} devient plus difficile à exploiter.

Proposons alors un autre critère pour compléter ou remplacer le critère J_{TF} . Le nouveau critère est basé sur le fait que le champ diffracté u^S satisfait une condition de radiation à l'infini. Pour cela, nous utilisons une condition aux limites absorbante sortante. Par conséquent, par retournement temporel, le champ retourné en temps exact u_R^S vérifie :

$$\text{TRAC}(u_R^S) = 0$$

en tout point à l'extérieur de l'inclusion D . De même, lorsque nous effectuons la méthode *TRAC* avec un sous-domaine-test B englobant totalement l'inclusion, le champ diffracté retourné en temps v_R^S coïncide avec u_R^S et doit satisfaire :

$$\text{TRAC}(v_R^S) = 0$$

en tout point à l'extérieur de $\Omega \setminus B$. Le critère, que nous nommons critère de la condition absorbante et notons J_{ABC} , s'écrit :

$$J_{ABC}(B) := \frac{\|\text{TRAC}(v_R^S)\|_{L^\infty((0,T_f) \times \Omega \setminus B)}}{\|\text{TRAC}(u^I)\|_{L^\infty((0,T_f) \times \Omega)}}, \quad (6.1.3)$$

avec *TRAC* définie pour le critère par

$$\text{TRAC}(u) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) u \quad (6.1.4)$$

où r est la coordonnée radiale dont l'origine est le centre du sous-domaine-test B . Comme le centre du sous-domaine B est quelque peu arbitraire, nous avons retiré le terme de courbure de la condition absorbante afin d'éviter qu'il ne devienne trop grand lorsque la taille du sous-domaine B est plus petite que la demi-longueur d'onde. Ainsi lorsque le sous-domaine-test B contient complètement l'inclusion D , le critère J_{ABC} doit être petit. Au contraire, si une partie de l'inclusion D est en-dehors du sous-domaine-test B , la condition absorbante doit détecter une onde divergente parasite et la valeur du critère J_{ABC} doit être significativement plus élevée. Comme pour le critère J_{TF} , nous définissons un critère relatif pour le critère J_{ABC} :

$$J_{ABC}^{\text{rel}}(B) := \frac{\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) w_R^S \right\|_{L^\infty((0,T_f) \times \Omega)}}{\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) v_R^S \right\|_{L^\infty((0,T_f) \times \Omega \setminus B)}} = \frac{J_{ABC}(\emptyset)}{J_{ABC}(B)}. \quad (6.1.5)$$

Nous comparons le critère J_{ABC} au critère J_{TF} dans le cas suivant :

- L'inclusion D est molle et ronde de rayon λ , où λ est la longueur d'onde principale du signal-source.
- La ligne d'émetteurs-récepteurs est à ouverture totale et l'espacement entre les transducteurs varie. Il peut être de $\lambda/2$, $\lambda/3$, $\lambda/4$. Nous considérons aussi le cas d'une ligne de transducteurs continue.
- Le niveau de bruit varie de 0 % à 30 % par décade.

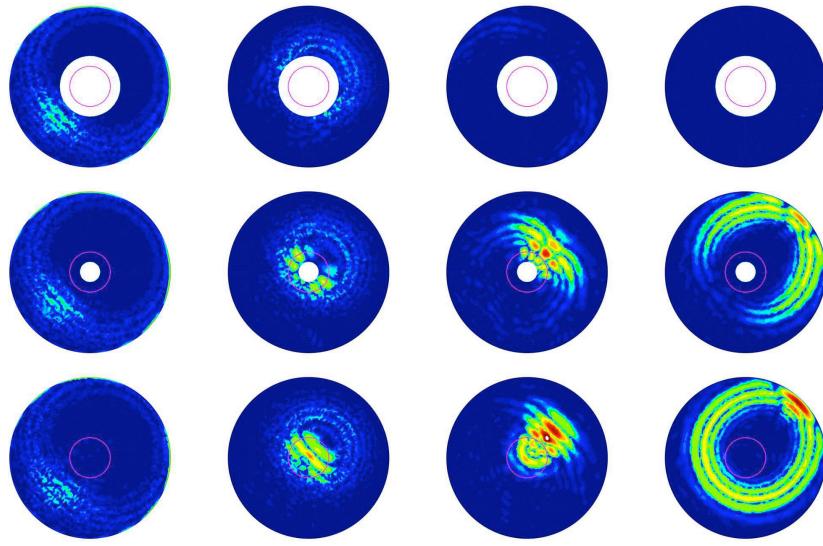


FIGURE 6.6 – Illustration du critère J_{ABC} dans le cas de l'ouverture totale. De gauche à droite, images instantanées dans le sens des temps directs décroissants de la valeur de la condition absorbante en tout point du domaine de calcul. En haut, lorsque le sous-domaine-test B englobe complètement l'inclusion D . Au milieu, lorsque B est inclus dans D . En bas, pour le retournement temporel classique, $B = \emptyset$.

LER		$D \subset B$		$D \not\subset B$	
Espacement	Niveau de bruit	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}
$\frac{\lambda}{2}$	0 %	34,94	10,51	2,24	1,77
	10 %	21,04	7,72	2,23	1,79
	20 %	14,73	5,25	2,24	1,80
	30 %	9,12	3,85	2,17	1,83
$\frac{\lambda}{3}$	0 %	18,00	10,11	1,95	1,62
	10 %	16,97	6,55	1,95	1,60
	20 %	14,34	5,29	1,95	1,62
	30 %	10,87	3,63	1,95	1,64
$\frac{\lambda}{4}$	0 %	51,77	9,67	1,97	1,67
	10 %	40,05	8,30	1,93	1,64
	20 %	13,50	4,69	1,98	1,70
	30 %	6,79	4,76	1,93	1,61
0	0 %	68,25	9,31	1,84	1,67
	10 %	29,67	7,43	1,85	1,66
	20 %	13,75	5,75	1,90	1,77
	30 %	5,06	3,71	1,75	1,62

TABLEAU 6.2 – Comparaison des deux critères relatifs pour une LER à ouverture totale, dans les cas $D \subset B$ et $D \not\subset B$, pour différents niveaux de bruit et pour différents espacements entre les transducteurs (l'espacement 0 correspond à une LER continue).

La FIGURE 6.6 présente le critère J_{ABC} par des images instantanées de la valeur dans tout le domaine de $\text{TRAC}(v_R^S)$ (ou $\text{TRAC}(w_R^S)$ pour le retournement temporel classique). Nous comparons alors la méthode *TRAC* lorsque le sous-domaine-test B englobe complètement l'inclusion D (ligne du haut), la méthode *TRAC* lorsque le sous-domaine-test B est contenu dans l'inclusion D (ligne du milieu) et le retournement temporel classique (ligne du bas). Cette figure illustre extrêmement bien le principe du critère J_{ABC} . En effet, sur la ligne du haut, nous voyons l'erreur, que nous faisons sur l'onde convergente, liée au fait que le centre du sous-domaine B et le centre de l'onde convergente ne coïncident pas. Cette erreur est minime en comparaison des deux autres lignes de la figure. Dans les deux derniers cas, nous voyons clairement l'influence de l'onde divergente créée à cause de la limite de diffraction.

Nous récapitulons dans le TABLEAU 6.2 les valeurs des critères relatifs J_{TF}^{rel} et J_{ABC}^{rel} dans le cas ci-dessus. Le tableau est composé de dix-huit lignes et six colonnes. Les deux premières colonnes nous renseignent sur la ligne d'émetteurs-récepteurs. Elles précisent l'espacement entre les transducteurs et le niveau de bruit sur les données. Les colonnes 3 et 4 concernent le cas où D est inclus dans B , alors que les colonnes 5 et 6 concernent le cas où D n'est pas inclus dans B . Les colonnes impaires donnent la valeur du critère relatif J_{TF}^{rel} et les colonnes paires donnent la valeur du critère relatif J_{ABC}^{rel} . Les deux premières lignes nous renseignent sur la configuration du test effectué. Ensuite, les lignes se lisent quatre par quatre : pour un espacement entre les transducteurs de la LER donné, nous précisons la valeur des différents critères pour un niveau de bruit variant de 0 % à 30 %.

Dans le cas $D \not\subset B$, nous voyons que les deux critères relatifs prennent des valeurs proches de 2 quelle que soit la configuration. Nous pouvons en déduire que les critères ont détecté que l'inclusion n'est pas complètement contenue dans le sous-domaine B . En revanche, dans le cas $D \subset B$, les valeurs varient selon la configuration. Pour le critère relatif J_{TF}^{rel} , les résultats varient de manière non monotone par rapport à l'espacement entre les transducteurs. En effet, lorsque l'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/3$, nous obtenons une valeur qui est inférieure à celles pour un espacement de $\lambda/4$ et de $\lambda/2$ pour un niveau de bruit faible (0 % ou 10 %), au lieu de prendre une valeur comprise entre celles pour un espacement de $\lambda/4$ et de $\lambda/2$. Ensuite, lorsque nous augmentons le niveau de bruit (20 % et 30 %), le critère relatif J_{TF}^{rel} prend une valeur supérieure à celles pour un espacement de $\lambda/4$ et de $\lambda/2$. Le critère relatif J_{ABC}^{rel} , quant à lui, semble beaucoup plus stable vis-à-vis de l'espacement entre les transducteurs. Il reste cependant à mentionner que les valeurs des deux critères relatifs se dégradent en fonction du bruit, mais sont toujours discriminantes.

6.2 Identification d'objets dans le domaine fréquentiel

Nous traitons à présent le cas de l'équation de Helmholtz. Dans le chapitre 5, nous avons déjà présenté des planches comparant le retournement temporel exact à la méthode *TRAC* lorsque le sous-domaine B englobe l'inclusion D , à la méthode *TRAC* lorsque le sous-domaine B est contenu dans l'inclusion D et au retournement temporel classique. Sur ces planches, nous avons déjà remarqué que nous réussissons à reconstituer correctement le champ total lorsque D est inclus dans B . À partir de ces observations, nous sommes donc capables de déduire la présence ou non de l'inclusion D dans le milieu.

En pratique, nous ne connaissons pas le champ total et nous devons introduire un moyen de mesurer si le sous-domaine-test B englobe correctement l'inclusion D ou non. Pour cela, nous établissons deux critères différents. Comme dans le domaine fréquentiel, nous n'avons plus de notion de temps, encore moins d'instant final. Il n'est donc pas possible d'utiliser un équivalent du critère J_{TF} . Le premier critère, que nous proposons, est basé sur les données de Dirichlet et de Neumann. Le second critère s'inspire de la méthode *TRAC*, dans le même esprit que le critère J_{ABC} dans le domaine temporel. Ce dernier critère se révèlera être plus robuste vis-à-vis du bruit sur les données sans avoir à utiliser des techniques de régularisation des signaux.

Pour le premier critère, nous supposons qu'en plus du champ total \hat{u}^T , nous avons enregistré la valeur de la dérivée normale $\partial\hat{u}^T/\partial n$ sur le bord Γ_R qui modélise la ligne de transducteurs. Lorsque le sous-domaine B contient l'inclusion D , la dérivée normale de la solution du problème de conjugaison de phase (5.3.2), notée \hat{v}_R^T , coïncide avec la dérivée normale des données enregistrées conjuguées $\overline{\hat{u}^T}$. Nous établissons donc le premier critère de la dérivée normale de la façon suivante :

$$J_{DN}(B) := \frac{\left\| \frac{\partial \hat{v}_R^T}{\partial n} - \frac{\partial \overline{\hat{u}^T}}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\Gamma_R)}}{\left\| \frac{\partial \overline{\hat{u}^T}}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\Gamma_R)}}. \quad (6.2.1)$$

Le second critère est dérivé de la méthode *TRAC* elle-même. En effet, la base de la méthode est d'utiliser le fait que le champ diffracté conjugué $\hat{u}^S := \overline{\hat{u}^T} - \hat{u}^I$ vérifie :

$$\text{TRAC}(\hat{u}^S) = \text{TRAC}(\overline{\hat{u}^T} - \hat{u}^I) = 0$$

en tout point en-dehors de l'inclusion D . Dans le problème de conjugaison de phase (5.3.2), nous avons utilisé cette relation sur le bord du sous-domaine B . Puisque nous reconstituons

numériquement le champ total en \hat{v}_R^T et que le champ incident \hat{u}^I est donné, nous pouvons calculer cette relation en tout point du domaine de calcul $\Omega \setminus B$. Nous établissons donc le second critère de la condition absorbante de la façon suivante : Par conséquent, nous introduisons une nouvelle surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ (cf. FIGURE 6.7 pour définir le nouveau critère de la condition absorbante :

$$J_{ABC}(B_\rho, \Gamma_{J_{ABC}}) := \frac{\|\text{TRAC}(\hat{v}_R^T - \bar{\hat{u}}^I)\|_{L^\infty(\Gamma_{J_{ABC}})}}{\|\text{TRAC}(\bar{\hat{u}}^I)\|_{L^\infty(\Gamma_{J_{ABC}})}}, \quad (6.2.2)$$

Nous prenons abusivement la même notation que dans le domaine temporel, car les critères sont équivalents. Le contexte permet de déterminer la formule à considérer. Remarquons que, contrairement au critère J_{DN} , le critère J_{ABC} n'est pas basé sur la comparaison directe des données numériques avec les données enregistrées. Il ne requiert par conséquent aucune donnée supplémentaire enregistrée. Comme dans le cas temporel, le critère J_{ABC} peut être calculé en tout point du domaine de calcul. Pour un souci de simplicité dans la mise en œuvre, nous introduisons la surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ sur laquelle nous l'évaluons. Notons que, puisque dans le problème de conjugaison de phase (5.3.2), nous imposons déjà la condition TRAC sur le bord ∂B , nous choisissons de prendre $\Gamma_{J_{ABC}}$ différente de ∂B .

Les deux critères (6.2.1) et (6.2.2) doivent s'annuler lorsque le sous-domaine-test B englobe l'inclusion D dans sa totalité. Puisque la condition TRAC utilisée dans le problème inverse (5.3.2) ne dérive pas d'une condition aux limites absorbante exacte, mais approchée, les critères prennent de petites valeurs, à défaut de s'annuler.

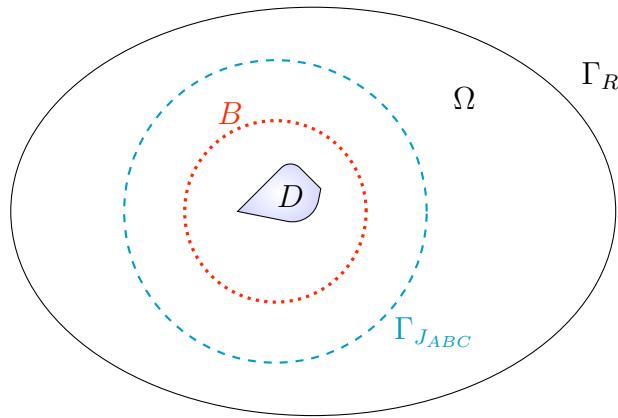
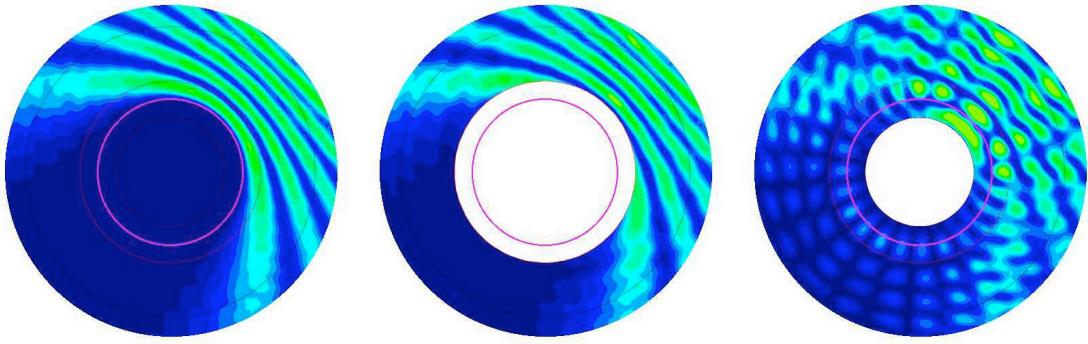
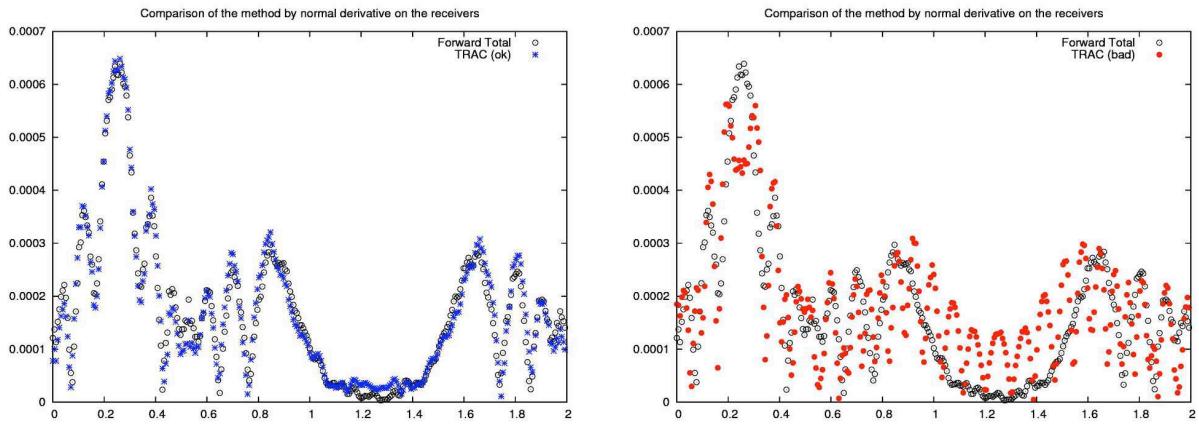


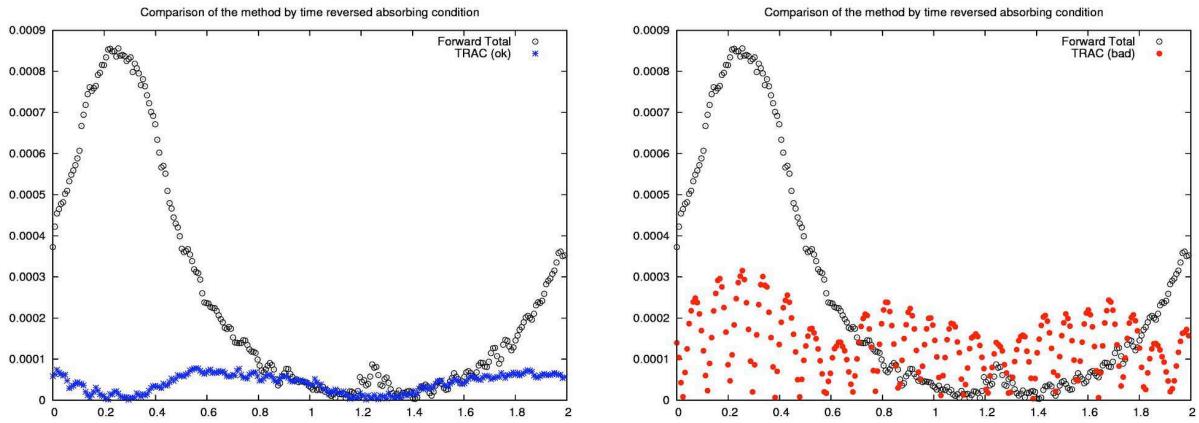
FIGURE 6.7 – Une inclusion D dans \mathbb{R}^d entourée par Γ_R , une ligne de capteurs, qui délimite le domaine de calcul Ω . En pointillé, l'ellipse B représente le sous-domaine-test pour effectuer la méthode *TRAC*. En tireté, la surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ sur laquelle est calculé le critère J_{ABC} .



(a) De gauche à droite : module du champ total direct, module du champ total reconstitué avec $TRAC$ pour $D \subset B$, module du champ total reconstitué par $TRAC$ pour $D \not\subset B$.



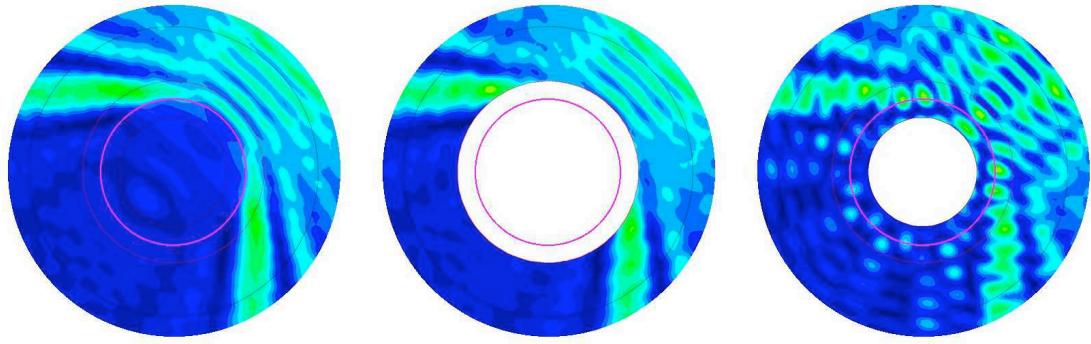
(b) Illustration du critère J_{DN} : comparaison des dérivées normales $\partial \hat{v}_R^T / \partial n$ (astérisque à gauche si $D \subset B$, point épais à droite si $D \not\subset B$) et $\partial \hat{u}^T / \partial n$ (cercle) le long de la ligne d'émetteurs-récepteurs.



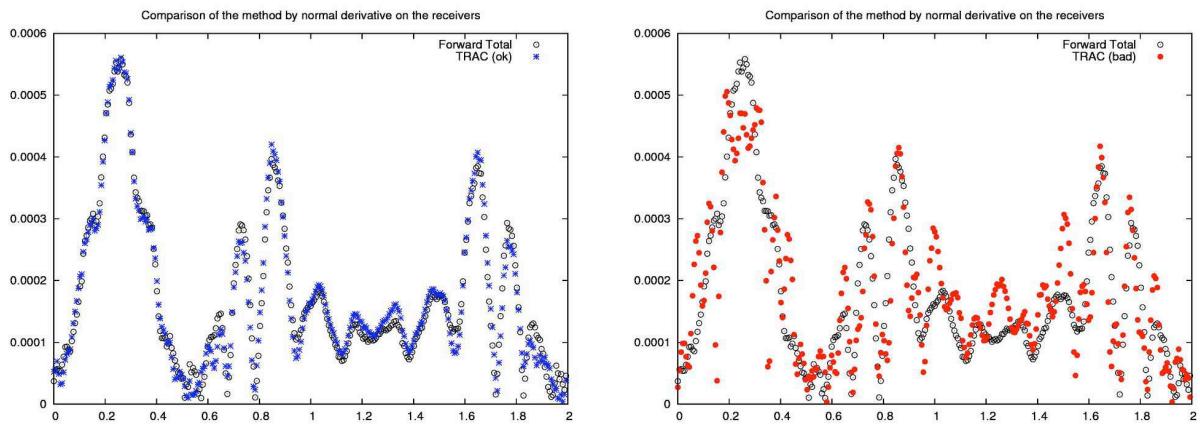
(c) Illustration du critère J_{ABC} : comparaison de $TRAC(\hat{v}_R^T - \bar{\hat{u}}^T)$ (astérisque à gauche si $D \subset B$, point épais à droite si $D \not\subset B$) et de $TRAC(\bar{\hat{u}}^T)$ (cercle) le long de la frontière artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$.

FIGURE 6.8 – Identification et illustration des critères J_{DN} et J_{ABC} pour une inclusion molle, ronde de rayon 2λ .

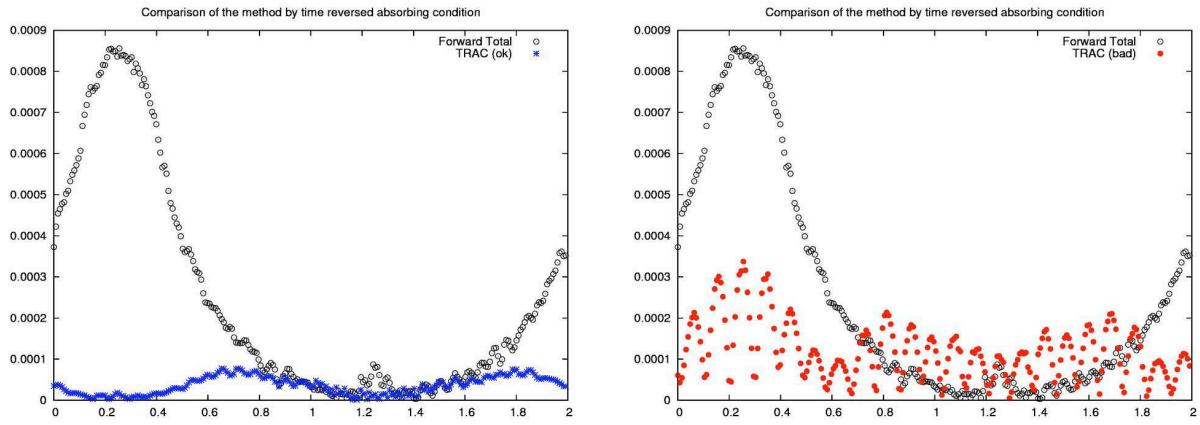
6.2. IDENTIFICATION D'OBJETS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL61



(a) De gauche à droite : module du champ total direct, module du champ total reconstitué avec $TRAC$ pour $D \subset B$, module du champ total reconstitué par $TRAC$ pour $D \not\subset B$.



(b) Illustration du critère J_{DN} : comparaison des dérivées normales $\partial \hat{v}_R^T / \partial n$ (astérisque à gauche si $D \subset B$, point épais à droite si $D \not\subset B$) et $\partial \hat{u}^T / \partial n$ (cercle) le long de la ligne d'émetteurs-récepteurs.



(c) Illustration du critère J_{ABC} : comparaison de $TRAC(\hat{v}_R^T - \bar{u}^T)$ (astérisque à gauche si $D \subset B$, point épais à droite si $D \not\subset B$) et de $TRAC(\bar{u}^T)$ (cercle) le long de la frontière artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$.

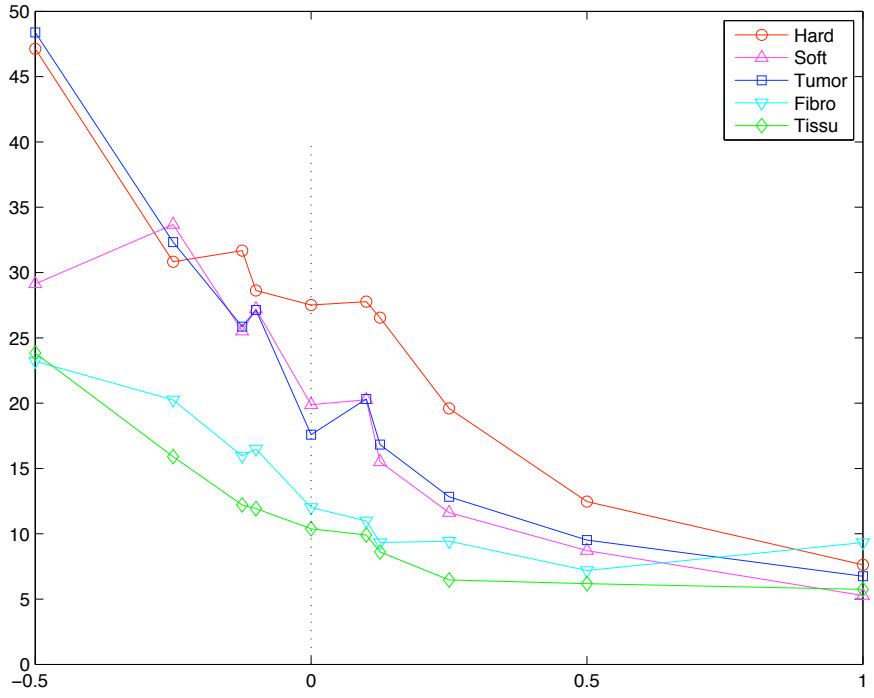
FIGURE 6.9 – Identification et illustration des critères J_{DN} et J_{ABC} pour une inclusion pénétrable ($c = 1,7$), ronde de rayon 2λ .

Nous illustrons les deux critères pour une inclusion ronde de rayon 2λ , molle sur la FIGURE 6.8 et pénétrable sur la FIGURE 6.9 pour une vitesse $c_D = 1,7$. La distance algébrique entre le sous-domaine-test B et l'inclusion D est de $\pm\lambda/2$ selon que B englobe D ou est contenu dans D . Sur chaque figure, nous représentons les résultats de la méthode *TRAC* lorsque B contient D et lorsque B est inclus dans D que nous comparons au retournement temporel exact sur 6.8a et 6.9a respectivement.

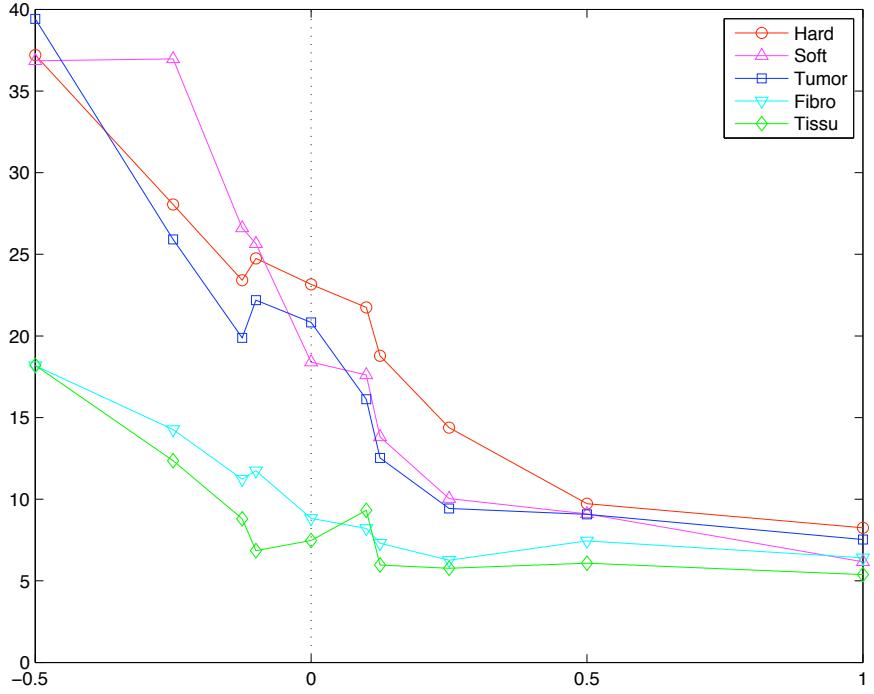
Puis nous affichons la dérivée normale du champ reconstitué $\partial\hat{v}_R^T/\partial n$ et la dérivée normale enregistrée $\partial\hat{u}^T/\partial n$ sur 6.8b et 6.9b respectivement. Sur ces deux dernières figures, nous observons nettement que les courbes se superposent lorsque le sous-domaine B englobe correctement l'inclusion D , alors que la courbe du cas $D \not\subset B$ diffère significativement de sa courbe de référence. Les valeurs du critère J_{DN} obtenues sont 8,71 % contre 29,14 % pour l'inclusion molle, et 9,52 % contre 48,39 %. Ces valeurs sont significatives pour l'identification de l'inclusion.

Enfin nous affichons la valeur de $\text{TRAC}(\hat{v}_R^T - \bar{u}^T)$ comparée à $\text{TRAC}(\bar{u}^T)$ sur la surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ pour illustrer le critère J_{ABC} sur 6.8c et 6.9c respectivement. Sur ces deux figures, nous observons que, dans le cas où B contient entièrement D , la condition *TRAC* prise sur le champ diffracté reconstitué est petite devant la valeur prise en référence sur le champ incident uniquement. Dans le cas contraire, la condition *TRAC* sur le champ diffracté reconstitué prend de plus grandes valeurs et la courbe est plus agitée. Nous obtenons les valeurs 9,10 % contre 36,85 % pour l'inclusion molle et 9,07 % contre 39,42 %. Les valeurs du critère J_{ABC} confirment celles du critère J_{DN} et donnent le même résultat d'identification d'objets dans ce cas.

Nous proposons de comparer les valeurs de deux critères lorsque nous faisons varier la distance algébrique entre le sous-domaine B et l'inclusion D . Les courbes sont présentées sur les FIGURES 6.10a pour le critère J_{DN} et 6.10b pour le critère J_{ABC} . Nous affichons les résultats pour cinq types d'inclusions : dure, molle, pénétrable pour une vitesse de propagation $c_D = 1,7$ (tumeur), pénétrable pour une vitesse de propagation $c_D = 1,14$ (fibroadénome) et pénétrable pour une vitesse de propagation $c_D = 0,93$ (tissu environnant). Dans tous les cas, les courbes sont décroissantes : lorsque B est inclus dans D , les critères prennent des valeurs élevées. Celles-ci diminuent au fur et à mesure que nous nous approchons du bord de l'inclusion, puis la résolution s'améliore lorsque le sous-domaine B englobe largement l'inclusion D . Nous ne sommes pas capables de placer un seuil à partir duquel nous pourrions affirmer que B englobe D ou non. Cependant, la décroissance de la courbe est cohérente avec le fait qu'une ABC est dérivée pour des champs lointains. Or lorsque nous



(a) Courbe du critère J_{DN} (en pourcentage %) en fonction de la distance algébrique (en λ) entre le sous-domaine-test B et l'inclusion D .



(b) Courbe du critère J_{ABC} (en pourcentage %) en fonction de la distance algébrique (en λ) entre le sous-domaine-test B et l'inclusion D .

FIGURE 6.10 – Résultats des critères dans le cas d'une inclusion ronde de rayon 2λ . Cinq types d'inclusions : dure (“Hard”), molle (“Soft”), de type tumeur (“Tumor”), de type fibroadénome (“Fibro”) et de type tissu environnant (“Tissu”).

LER continue	J_{DN}		J_{ABC}	
	Niveau de bruit	$D \subset B$	$D \not\subset B$	$D \subset B$
0 %	5, 04 %	69, 20 %	6, 34 %	69, 18 %
5 %	46, 38 %	93, 55 %	12, 79 %	71, 62 %
10 %	103, 40 %	91, 77 %	13, 55 %	70, 87 %
20 %	213, 65 %	231, 30 %	35, 99 %	80, 23 %
30 %	301, 46 %	269, 07 %	51, 03 %	87, 80 %
40 %	532, 97 %	374, 67 %	57, 99 %	84, 34 %
50 %	644, 47 %	552, 57 %	63, 28 %	124, 30 %

TABLEAU 6.3 – Valeurs des critères J_{DN} et J_{ABC} dans le cas d'une inclusion molle, ronde de rayon 2λ , pour des niveaux de bruit variables.

nous rapprochons de l'inclusion, l'erreur d'approximation liée à la ABC augmente. C'est pourquoi nous n'obtenons pas une fonction de type créneau.

Nous avons également testé les deux critères pour une inclusion molle et ronde de rayon 2λ avec des niveaux de bruit variables sur les données enregistrées. Les sous-domaines-test B sont concentriques avec l'inclusion et ont pour rayon $1,2\lambda$ et 3λ respectivement. Les résultats sont rassemblés dans le TABLEAU 6.3.

Le critère J_{DN} fonctionne uniquement jusqu'à 5 % de bruit. Cependant, l'utilisation d'une technique de régularisation devrait permettre d'améliorer le domaine de validité de ce critère. Le critère J_{ABC} nous permet de discriminer entre le cas où B englobe l'inclusion et le cas où B est inclus dans D jusqu'à 30 % de bruit sur les données, alors que nous n'avons utilisé aucune technique de régularisation sur les données. Cette robustesse peut s'expliquer par le fait que le bruit provient des données au bord, alors que l'équation de Helmholtz a un effet régularisant sur le champ reconstitué \hat{v}_R^T , qui se trouve être moins perturbé sur la surface artificielle interne $\Gamma_{J_{ABC}}$ que sur le bord Γ_R .

Dans la dernière expérience numérique, nous considérons une inclusion molle dont la forme n'est plus régulière. Nous utilisons la méthode *TRAC* pour détecter la position de l'inclusion D en faisant varier les positions respectives des sous-domaines-test B . Les résultats sont récapitulés dans le TABLEAU 6.4. Dans le premier test, nous prenons un sous-domaine B qui contient largement l'inclusion de façon à vérifier que l'inclusion D n'est pas trop proche du bord Γ_R . Nous déplaçons ensuite le sous-domaine-test B sur la gauche. Une valeur importante du critère J_{ABC} nous indique que l'inclusion est en-dehors du sous-domaine-test. Les tests

Position de B et de $\Gamma_{J_{ABC}}$ par rapport à D					
$J_{ABC}(B)$	8,52 %	66,09 %	60,28 %	28,35 %	11,89 %

TABLEAU 6.4 – Résultats du critère J_{ABC} pour une inclusion molle de forme non régulière et pour des diverses positions du sous-domaine-test B (en trait plein) et de la surface artificielle $\Gamma_{J_{ABC}}$ associée (en pointillé).

3 et 4 montrent d'autres tentatives infructueuses dans la localisation de l'inclusion. Notons que, dans le test 4, même une petite partie de l'inclusion non englobée est détectée par le critère. Finalement, la dernière colonne correspond à une localisation réussie de l'inclusion. Nous remarquons que la valeur de la dernière colonne est plus grande que celle de la première colonne alors que nous avons une localisation plus précise de l'inclusion. Une fois encore, c'est lié à l'erreur d'approximation due à la dérivation de la ABC en champ lointain. En effet, dans la dernière colonne, la *TRAC* est imposée très près de l'inclusion.

Cette succession d'expériences montre la possibilité de retrouver empiriquement la position approximative de l'inclusion D . Ceci propose à l'état embryonnaire un algorithme automatique de localisation que nous espérons pouvoir mettre en œuvre dans un futur proche.

Ceci clôt notre étude dans le domaine fréquentiel. Nous ne traitons pas le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs discrète ou à ouverture partielle.

Chapitre 7

Cas de l'ouverture partielle de la LER

Résumé

Dans ce chapitre, nous étendons la méthode *TRAC* au cas d'une ligne de transducteurs à ouverture partielle et dont le nombre de transducteurs est fini. Nous présentons dans un premier temps les résultats de reconstruction de signaux pour ce type de ligne de transducteurs. Ensuite, nous testons la méthode *TRAC* à l'identification d'objets pour des lignes de capteurs à ouverture partielle. Pour cela, nous devons établir un nouveau critère. Finalement, nous appliquons la méthode *TRAC* à la discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches.

Sommaire

7.1	Reconstruction de signaux	168
7.2	Identification d'objets	171
7.2.1	Le critère de corrélation	171
7.2.2	Comparaison des critères en ouverture partielle	172
7.3	Discrimination entre une et deux inclusions	176
7.3.1	Les équations de l'électromagnétisme et paramètres	176
7.3.2	Discrimination pour des mines enfouies dans le sable	181
7.3.3	Discrimination pour des mines enfouies dans la terre	193

7.1 Reconstruction de signaux

Dans ce chapitre, nous étendons la méthode *TRAC* à une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture partielle. En effet, dans la plupart des applications où l'on cherche à faire de l'identification d'objets, il n'est pas possible d'enregistrer les données tout autour de la zone d'intérêt. Par exemple en sismologie, nous ne pouvons pas placer de transducteurs dans le sous-sol, l'information est enregistrée en surface uniquement. D'autres domaines d'application comme l'imagerie médicale présentent le même problème. Nous sommes alors amenés à traiter le cas où nous n'avons qu'une information partielle sur le champ diffracté enregistré.

Le premier point que nous voulons étudier est la capacité de la méthode à reconstruire le champ diffracté ou total dans le cas où nous avons enregistré les données sur la partie Γ_R du bord uniquement. Notons par conséquent Γ_A la partie restante du bord, où l'indice A renvoie à « artificielle », et $\Gamma := \Gamma_R \cup \Gamma_A$, cf. FIGURE 7.1.

Le problème de retournement temporel pour le champ diffracté dans le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture partielle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 \frac{\partial^2 v_R^S}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu_0 \nabla v_R^S) & = 0 \quad \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ v_R^S(t, .) & = u^S(T_f - t, .) \quad \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R \\ \frac{\partial v_R^S}{\partial t} + c \frac{\partial v_R^S}{\partial n} - c \frac{v_R^S}{2r} & = 0 \quad \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \end{array} \right. \quad (7.1.1)$$

avec une condition aux limites artificielle *ad hoc* sur le bord Γ_A , et des conditions initiales homogènes.

En résolvant le problème (7.1.1), il est clair que nous ne reconstituons pas le champ diffracté dans tout le domaine tronqué $\Omega \setminus B$. Cela dépend bien entendu de l'ouverture de la ligne de transducteurs. Nous sommes à présent capables de reconstruire le signal dans un cône dont l'ouverture dépend de celle de la ligne de transducteurs. En effet, le manque d'information sur la partie Γ_A ne nous permet pas de reconstruire le champ diffracté dans sa totalité. De plus, puisque nous effectuons du retournement temporel, le champ renvoyé va converger vers sa source originelle, d'où l'apparition d'un cône.

Nous étudions la capacité de la méthode *TRAC* à reconstruire le champ diffracté dans le cas de l'ouverture partielle dans deux configurations. Dans la première configuration, nous prenons une ligne d'émetteurs-récepteurs en arc de cercle avec une ouverture de 180° . Dans

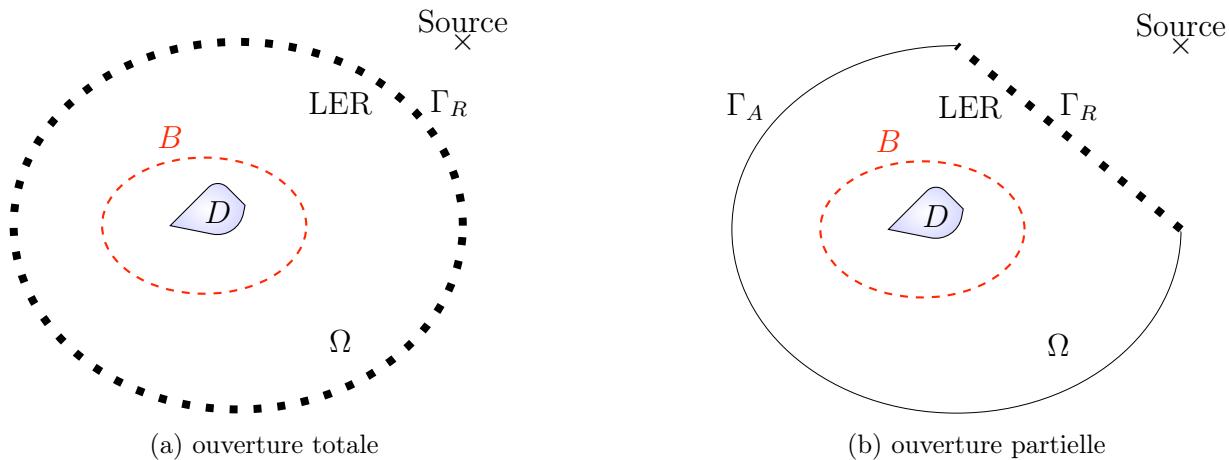
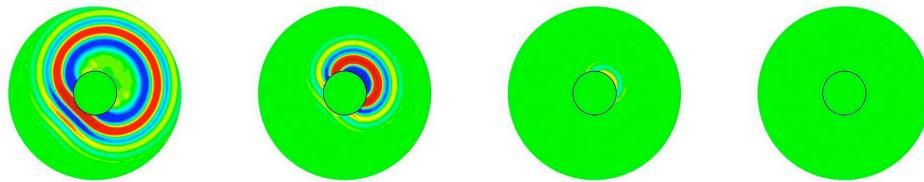


FIGURE 7.1 – Configuration de la ligne d'émetteurs-récepteurs en ouverture totale et en ouverture partielle.

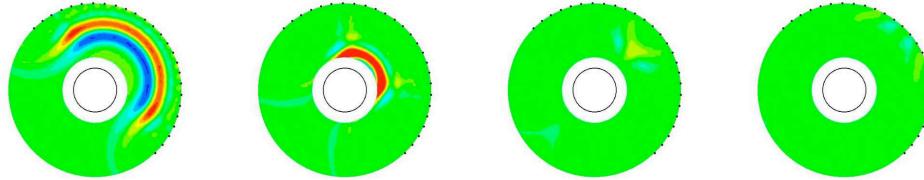
la seconde configuration, la ligne d'émetteurs-récepteurs est un segment dont l'ouverture correspond à 90° . Une illustration des résultats numériques obtenus dans ces deux configurations est proposée sur la FIGURE 7.2. Cette figure est composée de cinq lignes et quatre colonnes. Chaque colonne représente un instant de la propagation de l'onde. De gauche à droite, l'évolution est dans le sens des temps directs décroissants, c'est-à-dire l'image la plus à gauche montre l'instant initial du retournement temporel, soit l'instant final du problème direct, et l'image la plus à droite montre l'instant final du retournement temporel, soit l'instant initial du problème direct. Les tests avec *TRAC* sont effectués pour un niveau de bruit de 10 % et un espacement entre les transducteurs de $\lambda/2$, où λ est toujours la longueur d'onde centrale du signal incident.

La première ligne 7.2a présente le retournement temporel exact en référence. L'inclusion est ronde de rayon λ et de type mou. Dans le problème direct, la source qui a servi à illuminer l'inclusion, se situe en haut à droit du domaine de calcul à une distance de 9λ du point d'impact de l'inclusion. Nous voulons reconstituer l'onde diffractée convergeant vers ce point d'impact au moins dans un cône de convergence.

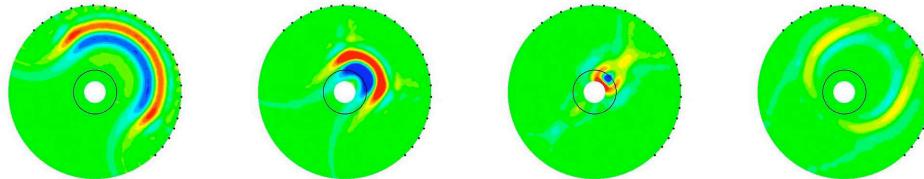
Les deuxièmes et troisièmes lignes montrent les résultats de la reconstitution dans le cas d'une ligne de transducteurs en arc de cercle dont l'ouverture est de 180° . Sur la FIGURE 7.2b, la méthode *TRAC* est mise en œuvre avec un sous-domaine-test B qui englobe totalement l'inclusion D , alors que sur la FIGURE 7.2c, nous avons choisi un sous-domaine-test B contenu dans l'inclusion D . Nous voyons que, dans le premier cas, nous obtenons la restriction du champ diffracté dans le cône d'ouverture 180° . En revanche, dans le second cas, nous avons une tache de diffraction puis un résidu de signal à la fin de la simulation.



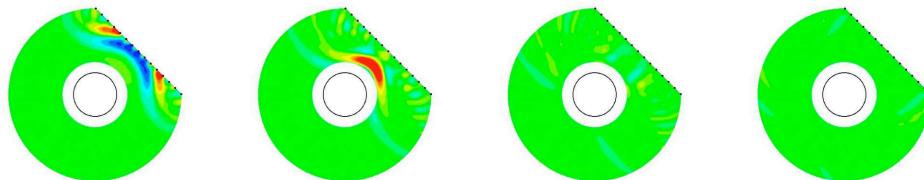
(a) retournement temporel exact pour une inclusion ronde molle en référence.



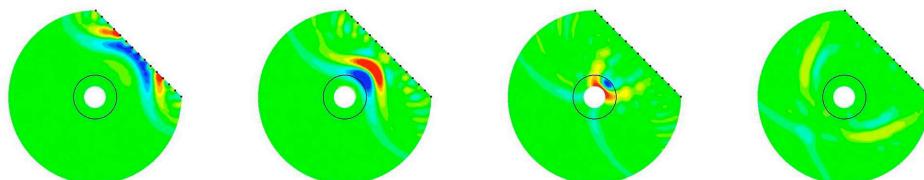
(b) *TRAC* avec une LER en forme d'arc de cercle pour une ouverture de 180° dans le cas où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion D .



(c) *TRAC* avec une LER en forme d'arc de cercle pour une ouverture de 180° dans le cas où le sous-domaine B ne contient pas toute l'inclusion D .



(d) *TRAC* avec une LER en ligne droite pour une ouverture de 90° dans le cas où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion D .



(e) *TRAC* avec une LER en ligne droite pour une ouverture de 90° dans le cas où le sous-domaine B ne contient pas toute l'inclusion D .

FIGURE 7.2 – Reconstruction du champ diffracté dans le cas d'une ligne de transducteurs à ouverture partielle. De gauche à droite : images instantanées de l'évolution du champ diffracté reconstitué pour des temps directs décroissants. (a) Champ diffracté retourné en temps exact. Deux configurations de LER : (b) et (c) LER en arc de cercle pour une ouverture de 180° , (d) et (e) LER en ligne droite pour une ouverture de 90° .

De la même façon, les lignes 4 et 5 montrent les résultats de la reconstitution dans le cas d'une ligne de transducteurs en ligne droite dont l'ouverture est de 90° . Sur la FIGURE 7.2d, la méthode *TRAC* est mise en œuvre avec un sous-domaine-test B qui englobe totalement l'inclusion D , et nous reconnaissions la restriction du champ diffracté dans un cône d'ouverture 90° . Sur la FIGURE 7.2e en revanche, nous avons choisi un sous-domaine-test B plus petit et contenu dans l'inclusion D . À nouveau, nous observons une tache suivie d'un signal divergent parasite.

7.2 Identification d'objets

À présent, nous nous intéressons à l'identification d'objets pour les deux configurations précédentes, cf. FIGURE 7.2. Les critères J_{TF} et J_{ABC} se révèlent inefficaces en ouverture partielle. Nous proposons alors un nouveau critère et le comparons aux deux premiers dans des tables récapitulatives.

7.2.1 Le critère de corrélation

Pour l'identification d'objets, nous avons établi deux critères dans la section 6.1. Rappelons que le critère J_{TF} , par exemple, considère uniquement la solution à l'instant final. Or dans le cas de l'ouverture partielle, l'onde se propage dans un milieu libre : en effet, dans le cas de l'ouverture totale, la condition de Dirichlet, qui servait à renvoyer les signaux retournés en temps dans le milieu, permettait de retenir le signal restant à l'intérieur du domaine de calcul. Dans le cas de l'ouverture partielle, le signal restant a maintenant la possibilité de sortir du domaine de calcul. Nous ne pouvons alors plus nous baser sur cette information pour en déduire la localisation de l'inclusion.

Le deuxième critère, J_{ABC} , reprend le fait que le champ diffracté à reconstituer vérifie la condition absorbante retournée temporellement partout en dehors de l'inclusion. Ce critère reste valable dans le cadre de l'ouverture partielle, mais comme le signal divergent à mesurer est plus faible, il se révèle moins discriminant. Notons, par ailleurs, que ce critère est très sensible au bruit sur les données enregistrées.

Nous proposons alors un troisième critère qui s'inspire des techniques de migration (RTM)¹, utilisées en grande partie par les géophysiciens, cf. [Cla85]. Ce critère consiste

1. *Time Reverse Migration* en anglais.

en la corrélation du champ incident u^I avec le champ diffracté retourné temporellement que nous avons reconstitué, v_R^S . Dans les applications classiques en imagerie du sous-sol, l'intégrale suivante est calculée comme une fonction de $\vec{x} \in \Omega$

$$f(\vec{x}) := \int_{t=0}^{t=T_f} v_R^S(T_f - t, \vec{x}) \times u^I(t, \vec{x}) \, dt. \quad (7.2.1)$$

La fonction f permet de mettre en image les discontinuités de la vitesse de propagation $c(\vec{x})$, cf. [Cla85]. Dans notre étude, nous introduisons un critère basé sur cette technique d'imagerie, que nous nommons « critère de corrélation » et notons J_{CC} ²

$$J_{CC}(B) := \frac{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} v_R^S(T_f - t, \cdot) \times u^I(t, \cdot) \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}}{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} |u^I(t, \cdot)|^2 \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega)}}, \quad (7.2.2)$$

où v_R^S est la solution du problème (7.1.1). Lorsque le sous-domaine-test B entoure complètement l'inclusion D , il n'y a plus de discontinuité de vitesse à mettre en valeur dans le domaine tronqué $\Omega \setminus B$, donc le critère doit être petit. Au contraire, lorsqu'une partie de l'inclusion reste en dehors du sous-domaine B , nous remarquons que la fonction f révèle cette partie. Ainsi, le critère J_{CC} doit prendre une valeur significativement plus grande. Comme pour les critères précédents, nous définissons un critère relatif :

$$J_{CC}^{rel}(B) := \frac{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} w_R^S(T_f - t, \cdot) \times u^I(t, \cdot) \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega)}}{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} v_R^S(T_f - t, \cdot) \times u^I(t, \cdot) \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}} = \frac{J_{CC}(\emptyset)}{J_{CC}(B)}, \quad (7.2.3)$$

où $J_{CC}(\emptyset)$ représente le cas classique, c'est-à-dire où nous n'avons pas introduit de sous-domaine-test B et dont la solution est notée w_R^S . Les résultats de la section 7.2.2 montrent que ce critère se révèle efficace pour l'identification d'objets et robuste vis-à-vis du bruit sur les données.

7.2.2 Comparaison des critères en ouverture partielle

Nous reprenons les cas d'étude précédents pour illustrer le nouveau critère et le comparer aux deux anciens. Rappelons que l'inclusion à détecter est ronde de rayon λ , de type mou. Nous considérons deux configurations de LER différentes : la première en arc de cercle avec

2. Pour *Cross-Correlation*.

une ouverture de 180° et la seconde en ligne droite avec une ouverture de 90° . Les résultats des critères sont présentés respectivement dans les TABLEAUX 7.1 et 7.2. De plus, nous illustrons le résultat obtenu par la fonction f (7.2.1) dans le cas d'un espacement des transducteurs de $\lambda/2$ et un niveau de bruit de 10 % sur les FIGURES 7.3 et 7.4.

Les TABLEAUX 7.1 et 7.2 sont constitués de dix-huit lignes et huit colonnes chacun. Les deux premières colonnes nous renseignent sur la ligne d'émetteurs-récepteurs. Elles précisent l'espacement entre les transducteurs et le niveau de bruit sur les données. Les colonnes 3, 4 et 5 concernent le cas où D est inclus dans B , alors que les colonnes 6, 7 et 8 concernent le cas où D n'est pas inclus dans B . Les colonnes 3 et 6 donnent la valeur du critère relatif J_{TF}^{rel} , les colonnes 4 et 7 donnent la valeur du critère relatif J_{ABC}^{rel} et les colonnes 5 et 8 donnent la valeur du critère relatif J_{CC}^{rel} . Les deux premières lignes nous renseignent sur la configuration du test effectué. Ensuite, les lignes se lisent quatre par quatre : pour un espacement entre les transducteurs de la LER donné, nous précisons la valeur des différents critères pour un niveau de bruit variant de 0 % à 30 %.

Dans le TABLEAU 7.1, les résultats des critères sont très satisfaisants. Lorsque le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion D , nous avons des valeurs importantes autour de 4 ou supérieures, à l'exception du critère relatif J_{TF}^{rel} pour 30 %, mais nous savons déjà que ce critère n'est plus approprié dans le cadre de l'ouverture partielle. En revanche, dans le cas où B ne contient pas intégralement D , les valeurs des différents critères tournent autour de 1, ce qui montre qu'une partie de l'inclusion est encore dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$. La FIGURE 7.3 illustre l'image obtenue par la fonction f dans le cas du retournement temporel classique, puis avec la méthode *TRAC* lorsque B englobe D et enfin avec la méthode *TRAC* lorsque B ne contient pas toute l'inclusion D . Ces images sont intéressantes car permettent de mettre en valeur le bord de l'inclusion touché par l'onde incidente lors de l'illumination, c'est-à-dire la discontinuité de vitesse entre le milieu et l'inclusion dans la direction de l'onde incidente. Lorsque nous englobons entièrement l'inclusion D avec le sous-domaine-test B , l'image de la discontinuité n'est plus franchement marquée, il reste quelques traînées liées au fait que l'onde incidente et l'onde diffractée ont une épaisseur d'environ $\lambda/2$. Ainsi lorsque nous les multiplions entre elles, l'image obtenue mesure aussi $\lambda/2$ et comme notre sous-domaine-test B est distant de l'inclusion seulement de $\lambda/2$, nous observons les résidus de l'image par la fonction f . Notons que les résidus sont négligeables par rapport à l'image obtenue par f dans le cas classique et lorsque B ne contient pas D .

Dans le TABLEAU 7.2, le critère relatif J_{TF}^{rel} montre ses limites. En effet, que B englobe totalement D ou non, la valeur du critère relatif J_{TF}^{rel} tourne autour de 1, simplement parce

LER		$D \subset B$			$D \not\subset B$		
Espacement	Niveau de bruit	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}	J_{CC}^{rel}	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}	J_{CC}^{rel}
$\frac{\lambda}{2}$	0 %	4,88	4,33	3,42	1,05	1,23	0,93
	10 %	4,75	4,30	3,47	1,02	1,20	0,94
	20 %	3,10	3,27	3,48	1,05	1,22	0,93
	30 %	0,97	2,38	3,52	1,08	1,18	0,94
$\frac{\lambda}{3}$	0 %	4,92	4,38	4,41	0,92	1,22	1,04
	10 %	4,98	4,10	4,45	0,92	1,20	1,04
	20 %	4,73	4,17	4,43	0,94	1,22	1,05
	30 %	3,19	2,86	4,13	0,94	1,18	1,06
$\frac{\lambda}{4}$	0 %	4,30	4,15	5,22	0,80	1,21	1,00
	10 %	4,28	4,03	5,17	0,80	1,19	1,00
	20 %	2,54	3,71	5,29	0,82	1,21	1,02
	30 %	1,92	3,56	5,10	0,83	1,27	1,00
0	0 %	5,46	4,05	6,70	0,97	1,20	0,94
	10 %	5,24	4,11	6,66	0,98	1,22	0,94
	20 %	4,02	3,91	6,68	0,99	1,18	0,94
	30 %	1,42	2,88	6,55	0,97	1,20	0,94

TABLEAU 7.1 – Comparaison des trois critères relatifs dans le cas d'une LER en arc de cercle d'ouverture 180° en fonction de l'espacement entre les transducteurs et du niveau de bruit sur les données. Colonnes 3 à 5 : cas où $D \subset B$, et colonnes 6 à 8 : cas où $D \not\subset B$.

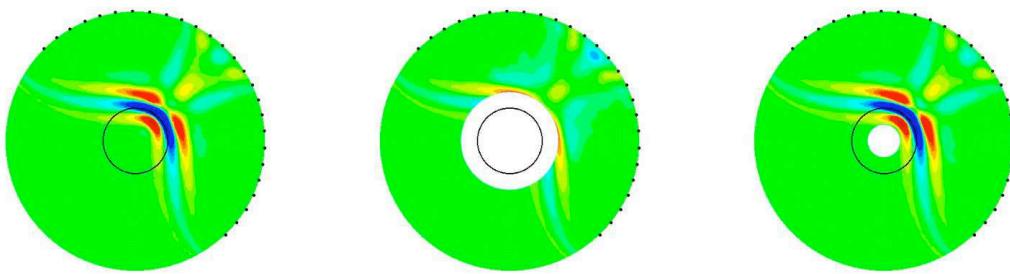


FIGURE 7.3 – Résultats de l'image par la fonction f (7.2.1) dans le cas d'une LER en arc de cercle dont l'ouverture est de 180° , pour un espacement de $\lambda/2$ et un niveau de bruit de 10 %. De gauche à droite : cas classique, cas TRAC avec $D \subset B$, cas TRAC avec $D \not\subset B$. Pour chaque cas, les valeurs du critère J_{CC} sont respectivement : 36,29 %, 10,47 % et 38,61 %.

LER		$D \subset B$			$D \not\subset B$		
Espacement	Niveau de bruit	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}	J_{CC}^{rel}	J_{TF}^{rel}	J_{ABC}^{rel}	J_{CC}^{rel}
$\frac{\lambda}{2}$	0 %	1,26	5,66	4,99	0,76	2,97	1,07
	10 %	1,85	5,20	4,97	1,01	2,89	1,07
	20 %	0,90	3,36	4,94	1,15	2,61	1,06
	30 %	1,71	2,66	5,44	1,30	2,02	1,06
$\frac{\lambda}{3}$	0 %	1,73	11,06	6,88	0,99	2,89	1,01
	10 %	1,01	7,21	7,03	1,08	2,73	1,02
	20 %	1,55	5,70	7,11	1,78	2,76	1,03
	30 %	1,38	4,14	6,71	1,58	2,34	1,02
$\frac{\lambda}{4}$	0 %	2,02	13,13	7,40	1,14	2,96	0,98
	10 %	1,26	8,38	7,29	1,52	2,62	0,97
	20 %	2,09	5,50	7,35	1,77	2,73	0,97
	30 %	1,17	4,28	7,62	1,38	2,36	0,99
0	0 %	1,90	13,42	7,53	1,16	3,13	0,97
	10 %	1,05	10,65	7,50	0,94	2,78	0,98
	20 %	1,66	4,92	7,47	0,97	2,98	0,97
	30 %	2,95	3,98	7,34	2,62	1,92	0,95

TABLEAU 7.2 – Comparaison des trois critères relatifs dans le cas d'une LER en ligne de droite d'ouverture 90° en fonction de l'espacement entre les transducteurs et du niveau de bruit sur les données. Colonnes 3 à 5 : cas où $D \subset B$, et colonnes 6 à 8 : cas où $D \not\subset B$.

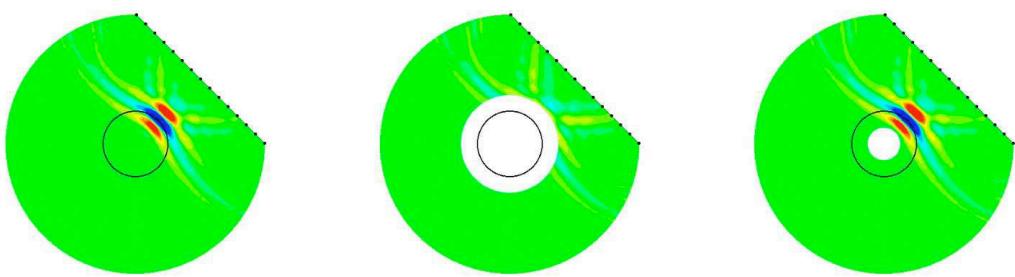


FIGURE 7.4 – Résultats de l'image par la fonction f (7.2.1) dans le cas d'une LER en ligne droite dont l'ouverture est de 90° , pour un espacement de $\lambda/2$ et un niveau de bruit de 10 %. De gauche à droite : cas classique, cas TRAC avec $D \subset B$, cas TRAC avec $D \not\subset B$. Pour chaque cas, les valeurs du critère J_{CC} sont respectivement : 34,08 %, 6,85 % et 31,78 %.

que dans le cas du retournement temporel classique de référence, et dans les autres cas également, la solution à l'instant final est presque nulle dans le domaine de calcul. Nous ne pouvons donc plus l'utiliser en ouverture partielle.

Le deuxième critère relatif J_{ABC}^{rel} montre également ses limites en prenant des valeurs autour de 3 lorsque le sous-domaine B n'englobe pas totalement l'inclusion D et peut prendre des valeurs jusqu'à 13,42 lorsque le sous-domaine-test B englobe l'inclusion D , pour une ligne d'émetteurs-récepteurs continue et sans bruit sur les données. Dès que les données sont bruitées ou que l'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/2$, le critère relatif J_{ABC}^{rel} s'avère moins discriminant. Nous éliminons également ce critère dans le cadre de l'ouverture partielle.

Finalement, le critère relatif J_{CC}^{rel} s'avère être un meilleur candidat pour l'identification d'objets en ouverture partielle. Non seulement, il permet de déterminer la présence ou non de l'inclusion dans le sous-domaine B , mais en plus il se révèle très robuste vis-à-vis du bruit sur les données. La FIGURE 7.4 illustre à nouveau l'image obtenue par la fonction f dans le cas de la LER en ligne droite. Nous voyons à nouveau que nous pouvons identifier le bord de l'inclusion, et que lorsque le sous-domaine-test B englobe correctement l'inclusion D , la discontinuité des vitesses est gommée, indiquant que l'inclusion est à l'intérieur du sous-domaine.

Dans la suite de notre étude, nous utilisons uniquement le critère relatif J_{CC}^{rel} pour traiter l'identification d'objets en ouverture partielle.

7.3 Discrimination entre une et deux inclusions

Nous voulons à présent tester la méthode *TRAC* dans la discrimination entre une inclusion et deux inclusions proches. En effet, avec les techniques d'imagerie actuelles, il n'est pas toujours évident de pouvoir détecter le nombre d'inclusions présentes dans le milieu. Nous proposons ici d'étudier la capacité de la méthode *TRAC* à résoudre ce problème. Pour cela, nous nous plaçons dans un contexte plus réaliste : la détection de mines. D'autres domaines peuvent être envisagés, comme la discrimination entre une et deux tumeurs dans une partie du corps humain par exemple.

7.3.1 Les équations de l'électromagnétisme et paramètres

Dans un premier temps, nous présentons les équations utilisées dans le contexte des mines. En effet, il s'agit à présent des équations de l'électromagnétisme. Nous écrivons donc

ces équations et nous ramenons à une équation des ondes scalaire. Nous présentons également les nouveaux paramètres mis en jeu.

7.3.1.1 Les grandeurs en électromagnétisme

Nous rappelons les grandeurs utilisées et les équations dont nous dérivons l'équation des ondes scalaire qui nous intéresse. Toutes les grandeurs et les équations sont issues de [Mon03].

Grandeur	Dénomination	Unité SI
\vec{E}	Champ électrique	V/m
\vec{D}	Induction électrique	C/m ²
ρ	Densité de charge	C/m ³
ε	Permittivité électrique	F/m

TABLEAU 7.3 – Grandeur électriques.

Grandeur	Dénomination	Unité SI
\vec{H}	Champ magnétique	A/m
\vec{B}	Induction magnétique	T
\vec{J}	Densité de courant	A/m ²
μ	Perméabilité magnétique	H/m

TABLEAU 7.4 – Grandeur magnétiques.

La permittivité ε et la perméabilité μ sont ici des grandeurs absolues caractérisant un milieu. On peut en général les définir de façon relative aux grandeurs dans le vide. Ainsi la permittivité électrique s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r, \quad \text{où } \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}. \quad (7.3.1)$$

De la même façon, on obtient la perméabilité magnétique sous la forme :

$$\mu = \mu_0 \times \mu_r, \quad \text{où } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \simeq 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}. \quad (7.3.2)$$

La vitesse de propagation est alors donnée par la relation :

$$c := \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} = c_0 \times c_r, \quad \text{où } c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (7.3.3)$$

et c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans les milieux homogènes isotropes, nous avons les relations suivantes entre les champs et les inductions respectives :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (7.3.4)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.3.5)$$

De plus, dans un milieu ohmique, la relation entre la densité de courant et le champ électrique est donnée par la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (7.3.6)$$

où σ est la conductivité du milieu. Son unité SI est $\text{S/m} = (\Omega \text{ m})^{-1}$. C'est exactement l'inverse de la résistivité ϱ qui est la version locale de la résistance. Notons que, dans ce chapitre, la conductivité est supposée nulle afin d'obtenir une équation des ondes non-dissipative. Nous utiliserons une conductivité non nulle dans le chapitre suivant.

Remarque 7.3.1. Jeu avec les unités :

Nous rappelons dans le TABLEAU 7.5 la décomposition en unités élémentaires des unités citées dans les TABLEAUX 7.3 et 7.4. Les unités élémentaires utiles sont la seconde s, le kilogramme kg, le mètre m et l'ampère A. Puis nous donnons aussi les décompositions en fonction des deux unités SI importantes V et Ω . Nous retrouvons clairement dans la dernière colonne du TABLEAU 7.5 le décalage en temps des paramètres ε , μ et σ dans l'équation des ondes sur le champ électrique (7.3.13).

Nom	Symbole	Physique	Décomposition	$f(V)$	$f(\Omega)$
Volt	V	Force électromotrice	$\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$	—	—
Farad	F	Capacité électrique	$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}$	$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}}$	$\frac{\text{s}}{\Omega}$
Coulomb	C	Charge électrique	As	—	—
Ampère	A	Intensité de courant	A	—	—
Henry	H	Inductance	$\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$	$\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$	$\Omega \cdot \text{s}$
Tesla	T	Induction magnétique	$\frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$	$\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}}$	—
Ohm	Ω	Résistance	$\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}$	$\frac{\text{V}}{\text{A}}$	—
Siemens	S	Conductance	$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}$	$\frac{\text{A}}{\text{V}}$	$\frac{1}{\Omega}$

TABLEAU 7.5 – Relations entre les unités des grandeurs électromagnétiques.

7.3.1.2 Les équations de Maxwell

Dans cette section, nous rappelons les équations de Maxwell que nous utilisons pour établir l'équation des ondes scalaire qui nous intéresse. Le système de Maxwell comporte quatre équations, que nous exprimons de façon locale.

- Loi d'induction de Faraday ou équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.3.7)$$

- Loi de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (7.3.8)$$

- Loi de Gauss ou équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (7.3.9)$$

- Conservation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (7.3.10)$$

Dans toute la suite, nous supposons que les paramètres ε , μ et σ sont indépendants du temps et constants par morceaux en espace (i.e. : constant dans chaque milieu). En revanche, nous faisons l'hypothèse que la densité de charge ρ est constante.

7.3.1.3 Équation sur le champ électrique

Nous travaillons maintenant les équations (7.3.8-7.3.7-7.3.9-7.3.10) afin de trouver une équation des ondes scalaire, modèle d'étude de notre méthode.

En dérivant (7.3.8) et (7.3.4) par rapport au temps, nous avons

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (7.3.11)$$

Nous prenons le rotationnel de l'équation (7.3.7) après l'avoir divisée par μ , et en utilisant (7.3.5), nous obtenons

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right). \quad (7.3.12)$$

d'où, en regroupant (7.3.11) et (7.3.12),

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = 0.$$

Remplaçons maintenant la densité de courant \vec{J} grâce à la loi d'Ohm (7.3.6)

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = 0,$$

et nous réécrivons le rotationnel du rotationnel

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{E} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \vec{E} \right) = 0.$$

Nous supposons que la densité de charge et la permittivité électrique sont constantes, ainsi son gradient s'annule et par l'équation (7.3.9), nous avons l'équation des ondes pour le champ électrique :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \vec{E} \right) = 0.$$

Cette équation est découpée pour chacune des composantes du champ électrique. Nous travaillerons sur l'équation des ondes scalaire pour une des composantes du champ électrique $u = E_i, i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0. \quad (7.3.13)$$

7.3.1.4 Équation sur le champ magnétique

De la même manière que dans la section 7.3.1.3, nous dérivons les équations de Maxwell (7.3.8-7.3.7-7.3.9-7.3.10) afin de trouver une équation des ondes sur le champ magnétique.

Nous commençons par dériver par rapport au temps les équations (7.3.7) et (7.3.5)

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (7.3.14)$$

Ensuite, après avoir divisé l'équation (7.3.8) par ε , nous prenons son rotationnel et remplaçons le champ \vec{D} grâce à l'équation (7.3.4)

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{J}. \quad (7.3.15)$$

Nous combinons les équations (7.3.14) et (7.3.15) pour obtenir :

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{J} = 0.$$

Grâce à la loi d'Ohm (7.3.6), nous remplaçons la densité de courant \vec{J} par le champ électrique \vec{E} . Puis nous utilisons l'équation de Maxwell-Faraday pour remplacer le rotationnel de \vec{E} par la dérivée temporelle de \vec{H} . Finalement, après réécriture du rotationnel du rotationnel, nous obtenons

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\sigma \mu}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{H} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \vec{H} \right) = 0.$$

De plus, en supposant que la perméabilité magnétique est constante et par conservation du flux (7.3.10), nous avons l'équation des ondes pour le champ magnétique :

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\sigma \mu}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \vec{H} \right) = 0.$$

Cette équation est découplée pour chacune des composantes du champ magnétique. Nous pouvons alors travailler sur l'équation des ondes scalaire pour une des composantes du champ magnétique $u = H_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\sigma \mu}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) = 0. \quad (7.3.16)$$

Dans la suite de notre étude, nous travaillons sur une composante du champ électrique comme suggéré dans [AIL05]. Nous supposons également dans tout le chapitre 7 que la conductivité est nulle afin de travailler sur une équation des ondes scalaire non-dissipative.

7.3.2 Discrimination pour des mines enfouies dans le sable

Nous considérons pour commencer le cas de mines enfouies dans le sable. Les paramètres des mines et du sous-sol sont tirés de [FW02] et [XK08]. Nous les rappelons dans le TABLEAU 7.6. Nous notons par ailleurs que, par rapport à la vitesse de propagation dans le milieu environnant, une mine en fer est en fait une inclusion dure (ou “sound-hard”), tandis qu'une mine en plastique est une inclusion pénétrable. En effet, le rapport des vitesses nous donne :

$$\frac{c_{fer}}{c_{sable}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10000}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{10000}} \sim 0,017 \ll 1,$$

et

$$\frac{c_{plastique}}{c_{sable}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1,5}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{1,5}} = \sqrt{2} \sim 1,41.$$

Dans les tests qui suivent, nous prenons des inclusions rondes de rayon λ distantes d'une distance notée d . Les inclusions sont placées dans un domaine de calcul de rayon 5λ et illuminées par une source située à 10λ du centre du domaine de calcul, de sorte que l'onde incidente soit approximativement plane lorsqu'elle atteint les inclusions. Le signal émis par la source est toujours un Ricker (5.2.8) de fréquence centrale 5 GHz. Nous rappelons que, dans

Paramètre	Sable	Mine en fer	Mine en plastique
ε_r	3	1	1,5
μ_r	1	10 000	1
c_r	0,58	0,01	0,82

TABLEAU 7.6 – Paramètres physiques pour des mines enfouies dans le sable.

ce cas, le spectre significatif de la source est compris entre 1,43 GHz et 10 GHz. La longueur d'onde centrale est alors de 34,6 cm. Remarquons que pour l'instant nous ne cherchons pas à être très réalistes. En effet, une mine de 70 cm de diamètre peut être démesurée. L'idée est de travailler avec des inclusions de l'ordre de la longueur d'onde. De plus, nous traitons à la fois des inclusions dures et pénétrables.

Le but de cette section est de montrer la faculté de la méthode à discriminer entre une seule inclusion et deux inclusions proches. Les configurations considérées sont présentées sur la FIGURE 7.5. Dans le premier cas, deux inclusions distinctes D_1 et D_2 sont enfouies dans le milieu. Nous notons $D := D_1 \cup D_2$ cette inclusion composée de deux composantes connexes. Les inclusions D_1 et D_2 sont distantes de d . Dans le second cas, une seule inclusion est enfouie dans le milieu. Il s'agit des inclusions D_1 et D_2 qui ont été reliées par une barre D_3 d'épaisseur λ et de longueur d . Nous notons alors $D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

Pour mettre en œuvre la méthode *TRAC*, nous choisissons trois configurations de sous-domaines-test B . Nous les représentons sur la FIGURE 7.6. Le premier sous-domaine B considéré est une grande ellipse qui contient intégralement l'inclusion D , qu'elle soit composée de deux inclusions distinctes ou d'une seule inclusion longue. Nous la notons $B_{ellipse}$. Ce premier test doit montrer que nous avons en effet bien détecté l'intégralité de l'inclusion. La deuxième configuration consiste en une ellipse plus petite n'englobant que la partie D_1 de l'inclusion D . Ce test vise à mettre en évidence qu'une partie importante de l'inclusion est encore dans le domaine de calcul. Nous notons un tel sous-domaine B_{simple} .

Enfin le troisième sous-domaine-test est constitué de deux composantes connexes ellipsoïdales, chacune englobant D_1 ou D_2 et laissant dans le domaine de calcul la partie D_3 lorsqu'elle existe.

Dans le calcul du critère relatif J_{CC}^{rel} , nous comparons les résultats obtenus pour chacun des sous-domaines cités ci-avant au retournement temporel classique. Les tests numériques sont effectués aussi bien pour des inclusions dures que pour des inclusions pénétrables, pour des distances d égales à $3\lambda/2$ et $\lambda/2$.

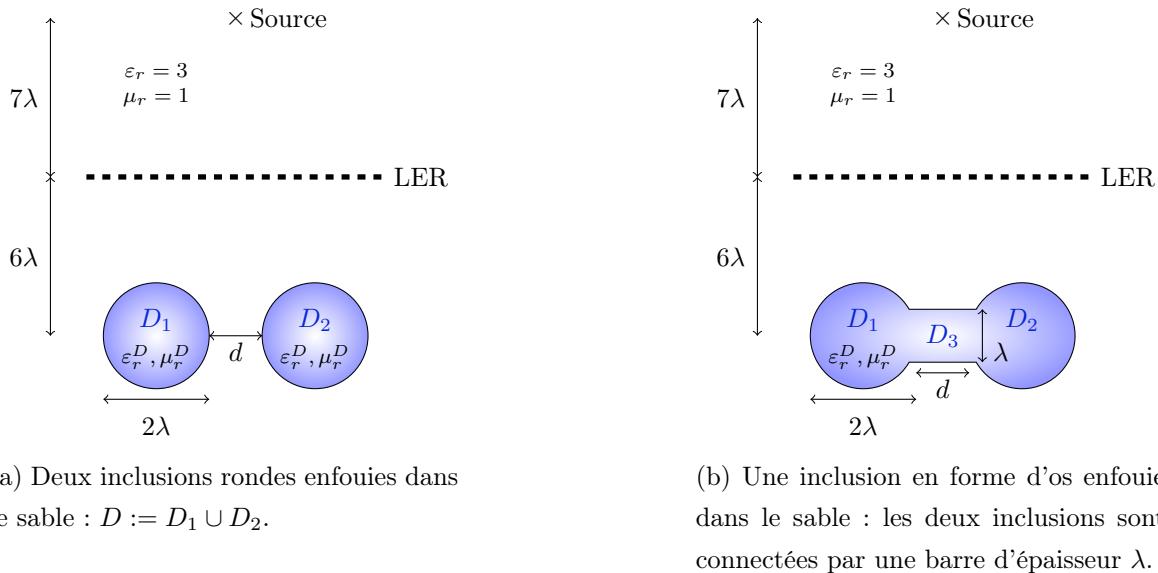


FIGURE 7.5 – Configuration des inclusions enfouies dans le sable, homogène et non dissipatif. Discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches. (a) Les deux inclusions D_1 et D_2 sont rondes de rayon λ . (b) L’unique inclusion $D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$ en forme d’os renvoie aux deux inclusions D_1 et D_2 de (a) connectées par une barre D_3 d’épaisseur λ .

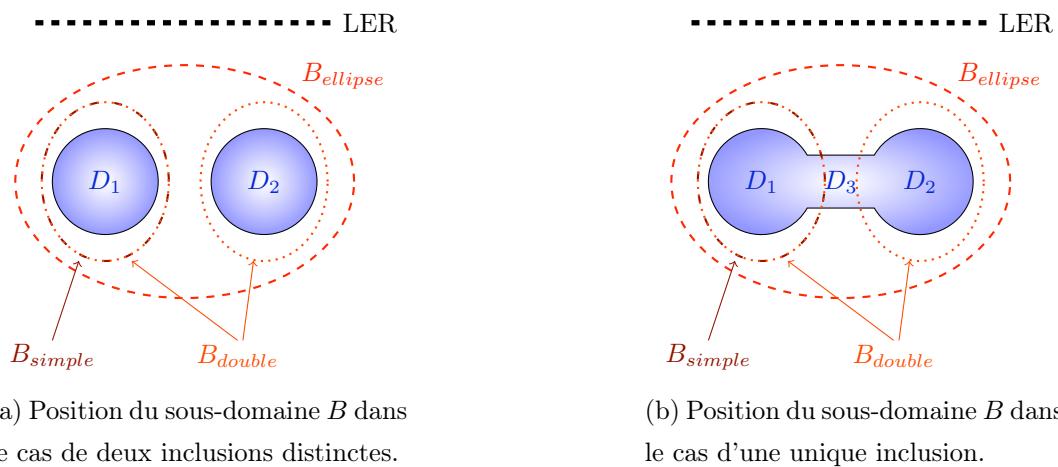


FIGURE 7.6 – Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions : $B_{ellipse}$ englobant totalement D , B_{simple} englobant uniquement D_1 et B_{double} englobant D_1 et D_2 , manquant D_3 lorsqu’il existe.

7.3.2.1 Cas des mines en fer : inclusions dures

Nous considérons ici le cas des mines en fer. Nous rappelons qu'il s'agit d'inclusions dures. Les résultats sont présentés sous la forme d'une figure traçant les valeurs de la fonction f pour une LER dont l'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et sans bruit sur les données. Puis nous proposons une étude quantitative en fonction du niveau de bruit sur les données dans des tableaux, le bruit étant défini comme en (5.2.26).

Sur la FIGURE 7.7, nous traçons les valeurs de la fonction f définie par l'équation (7.2.1) pour une distance $d = 3\lambda/2$. La première ligne correspond au cas classique, c'est-à-dire $B = \emptyset$. Sur la seconde ligne, nous utilisons le sous-domaine-test composé de deux composantes connexes, B_{double} . La colonne de gauche montre le cas de deux inclusions distinctes, alors que la colonne de droite présente les résultats pour une seule inclusion. Lorsque nous n'avons pas de sous-domaines-test, la fonction de corrélation f met en évidence de façon assez nette les bords des inclusions qui ont été illuminés.

Les images de la ligne du bas montrent le principe de la méthode *TRAC*. Comme nous l'attendions, lorsque le sous-domaine-test B englobe les inclusions (image en bas à gauche), nous n'avons quasiment pas de signal. Au contraire, la face illuminée de la barre D_3 non incluse dans le sous-domaine-test B_{double} est alors correctement mise en image (image en bas à droite). Grâce à ces images, nous sommes capables de distinguer une seule inclusion de deux inclusions lorsqu'elles sont séparées par une distance $d = 3\lambda/2$.

La FIGURE 7.8 reprend la même configuration, mais dans le cas où la distance d entre les inclusions est plus petite, soit $\lambda/2$. Sur la ligne du haut, l'image obtenue par la fonction f pour le retournement temporel classique ne nous permet pas de déterminer s'il y a une seule inclusion (image en haut à droite) ou deux (image en haut à gauche). Ceci est dû au fait que les inclusions sont maintenant proches, pour la distance limite de $\lambda/2$, dont nous savons qu'elle correspond à la taille de limite de diffraction.

Si au contraire, nous utilisons la méthode *TRAC* avec le sous-domaine-test B_{double} , la fonction f prend des valeurs significativement plus petites dans le cas où les deux inclusions distinctes sont englobées (image en bas à gauche) que dans le cas où il reste la barre D_3 dans le domaine (image en bas à droite). Remarquons que du fait de la proximité des inclusions, les sous-domaines utilisés sont maintenant en forme d'ellipses.

D'un point de vue plus quantitatif, nous donnons dans les TABLEAUX 7.7 et 7.8 les valeurs du critère relatif J_{CC}^{rel} pour différents niveaux de bruit et pour les trois sous-domaines-test B proposés sur la FIGURE 7.6. Chaque tableau est composé de treize lignes et de quatre

colonnes. La première ligne précise simplement le contenu de chacune des colonnes. Ensuite les lignes 2 à 5 donnent le résultat pour le sous-domaine $B_{ellipse}$, les lignes 6 à 9 pour le sous-domaine B_{simple} , finalement les lignes 10 à 13 pour le sous-domaine B_{double} .

La première colonne rappelle le sous-domaine-test concerné. La deuxième colonne mentionne le niveau de bruit sur les données. Ensuite la troisième colonne donne les résultats dans le cas où $D = D_1 \cup D_2$ (deux inclusions distinctes). Le cas où $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (une unique inclusion) est traité dans la quatrième colonne.

Nous rappelons que la lecture du critère se fait de la façon suivante : une valeur importante indiquent que le sous-domaine B englobe correctement la totalité de l'inclusion D , alors qu'une valeur proche de 1 montre qu'il reste une partie de l'inclusion D dans le milieu.

Pour des inclusions distantes, $d = 3\lambda/2$ (cf. TABLEAU 7.7), le critère relatif J_{CC}^{rel} donne les résultats que nous attendions. En effet, lors du premier test avec le sous-domaine $B_{ellipse}$, nous obtenons des valeurs supérieures à 4 ce qui indique que la puissance de la fonction f dans ce cas est au moins quatre fois inférieure au cas classique. Ainsi nous pouvons affirmer que le sous-domaine englobe correctement l'inclusion. Ensuite, dans le cas où nous utilisons le sous-domaine B_{simple} , qui n'englobe que la partie D_1 de l'inclusion D , nous obtenons des valeurs proches de 1 qui indiquent alors que nous n'avons pas entouré l'intégralité de l'inclusion avec notre sous-domaine. Enfin, lorsque nous utilisons le sous-domaine B_{double} , le critère relatif J_{CC}^{rel} permet de discriminer entre une seule inclusion, en prenant des valeurs proches de 1, et deux inclusions distinctes, en prenant des valeurs autour de 5. Nous pouvons par conséquent affirmer que la méthode *TRAC* nous permet d'identifier s'il y a une seule inclusion ou deux inclusions distinctes, pour une telle distance.

Pour des inclusions plus proches, $d = \lambda/2$ (cf. TABLEAU 7.8), les résultats du critère sont similaires. Le critère prend à nouveau d'importantes valeurs lorsque le sous-domaine-test est $B_{ellipse}$ et des valeurs proches de 1 lorsque B est B_{simple} . Cependant, lorsque nous travaillons avec le sous-domaine B_{double} , les valeurs du critère se révèlent moins tranchées : supérieures à 3 lorsque deux inclusions distinctes sont à détecter et environ 1,5 pour une seule inclusion. Nous aurons certainement plus de difficultés à discriminer entre une et deux inclusions, si celles-ci sont encore plus proches.

Remarquons que le critère relatif J_{CC}^{rel} n'est pas sensible à la géométrie du sous-domaine-test B du moment que celui englobe totalement l'inclusion D . En effet, quand il ne reste plus d'inclusion dans le domaine de calcul, le critère prend une valeur importante que le sous-domaine-test soit tangent à l'inclusion ou beaucoup plus large. Si, au contraire, une partie de l'inclusion reste dans le domaine de calcul, le critère nous l'indique immédiatement

Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion
$B_{ellipse}$	0 %	4,78	7,32
	10 %	4,69	7,35
	20 %	4,76	7,36
	30 %	4,62	7,21
B_{simple}	0 %	0,96	0,91
	10 %	0,96	0,91
	20 %	0,96	0,90
	30 %	0,96	0,90
B_{double}	0 %	5,52	1,07
	10 %	5,48	1,07
	20 %	5,55	1,06
	30 %	5,22	1,06

TABLEAU 7.7 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer distantes, $d = 3\lambda/2$. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes.

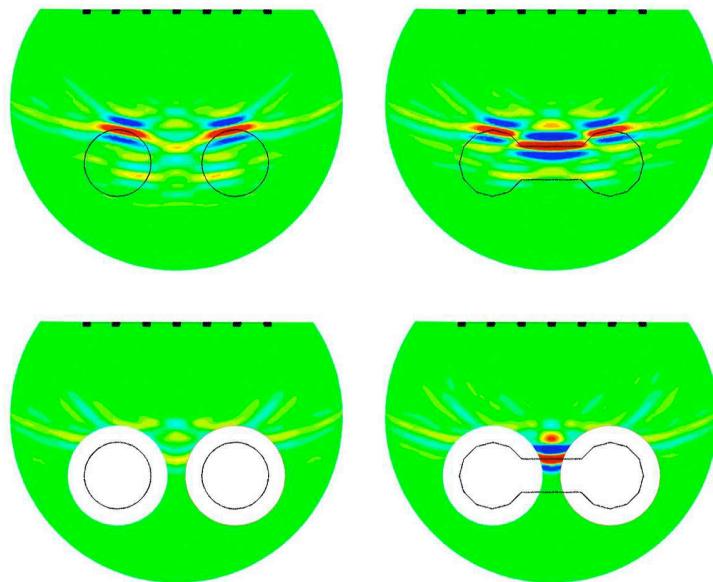


FIGURE 7.7 – Image obtenue par la fonction f pour des inclusions dures distantes, $d = 3\lambda/2$: à gauche deux inclusions distinctes, et à droite une seule inclusion connexe. L'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et il n'y a pas de bruit sur les données. En haut, retournement temporel classique. En bas, méthode TRAC avec le sous-domaine-test B_{double} .

Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion
$B_{ellipse}$	0 %	8,13	9,49
	10 %	8,22	9,49
	20 %	8,43	9,56
	30 %	8,33	9,57
B_{simple}	0 %	0,92	0,91
	10 %	0,92	0,91
	20 %	0,92	0,92
	30 %	0,91	0,92
B_{double}	0 %	3,36	1,55
	10 %	3,33	1,54
	20 %	3,32	1,55
	30 %	3,34	1,56

TABLEAU 7.8 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer proches, $d = 1\lambda/2$. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes.

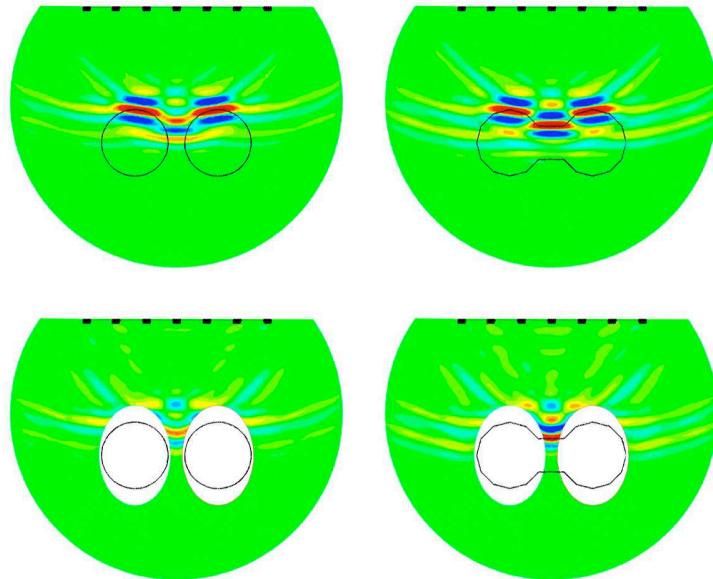


FIGURE 7.8 – Image obtenue par la fonction f pour des inclusions dures proches, $d = \lambda/2$: à gauche deux inclusions distinctes, et à droite une seule inclusion connexe. L'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et il n'y a pas de bruit sur les données. En haut, retournement temporel classique. En bas, méthode *TRAC* avec le sous-domaine-test B_{double} .

en prenant une valeur proche de 1, cf. TABLEAUX 7.7 et 7.8. Notons par ailleurs que le critère relatif J_{CC}^{rel} se révèle très robuste vis-à-vis du bruit sur les données. En effet, pour une configuration du sous-domaine donnée, nous obtenons des valeurs presque constantes en fonction du bruit. Finalement, la méthode *TRAC* nous permet de savoir s'il y a une partie de l'inclusion inconnue D restant dans le domaine de calcul tronqué $\Omega \setminus B$.

7.3.2.2 Cas des mines en plastique : inclusions pénétrables

Nous considérons à présent le cas des mines en plastique, pour lesquelles la réflectivité des inclusions est petite. Ces inclusions sont alors pénétrables. Les FIGURES 7.9 et 7.10 sont disposées comme les FIGURES 7.9 et 7.10, et représentent l'image obtenue par la fonction f pour une LER dont l'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et sans bruit sur les données.

Sur la FIGURE 7.9, nous traitons le cas où les inclusions sont distantes, c'est-à-dire pour une distance $d = 3\lambda/2$. La ligne du haut représente la fonction f lorsque nous effectuons du retournement temporel classique. Nous observons alors que la fonction met en image les bords illuminés de l'inclusion. Cependant, contrairement au cas des inclusions dures, ici nous voyons deux séries d'interfaces. En effet, les inclusions étant pénétrables, l'onde peut traverser la première interface, où nous avons de la réflexion partielle et de la transmission, puis l'onde franchit la seconde interface à l'arrière des inclusions, où il y a encore de la réflexion partielle et de la transmission. Ainsi nous mettons en image les deux interfaces des inclusions. Remarquons cependant que, bien que la première interface illuminée par l'onde incidente soit correctement détectée, nous faisons une erreur sur la position de la seconde interface. Cette erreur est notamment due au fait que le champ diffracté reconstitué ne se propage pas à la bonne vitesse à l'intérieur des inclusions. En effet, pour le retournement temporel, nous ne considérons que la vitesse du milieu ambiant. Or, dans les inclusions, la vitesse est plus grande que celle du milieu ambiant et le champ diffracté direct atteint plus rapidement la seconde interface que ne le suggère l'image obtenue par la fonction f .

Lorsque nous utilisons le sous-domaine-test $B_{ellipse}$, sur la ligne du bas de la FIGURE 7.9, nous observons que nous avons un signal significativement plus petit lorsque nous entourons correctement les deux inclusions distinctes (image en bas à gauche) que lorsque la barre centrale n'est pas entourée (image en bas à droite). Par conséquent, la méthode *TRAC* discrimine encore entre une seule inclusion et deux inclusions distinctes dans le cas d'inclusions pénétrables.

Lorsque les inclusions sont proches, cf. FIGURE 7.10, il est plus difficile de distinguer une inclusion (image en haut à droite) de deux inclusions (image en haut à gauche) pour le retournement temporel classique. Si nous utilisons le sous-domaine-test B_{double} , nous pouvons comparer les résultats des deux images de la ligne du bas. Le signal de l'image en bas à gauche semble plus faible que le signal de l'image en bas à droite, mais la discrimination devient malgré tout moins évidente.

Si nous considérons les TABLEAUX 7.9 et 7.10, nous obtenons à nouveau des résultats pour le critère relatif J_{CC}^{rel} très satisfaisants. Lorsque les inclusions sont distantes, la méthode *TRAC* permet de discriminer nettement entre une seule inclusion et deux inclusions distinctes en prenant des valeurs proches de 1 et autour de 5 respectivement, pour le sous-domaine-test B_{double} . En revanche, la différence est moins nette pour des inclusions proches : nous passons d'une valeur légèrement supérieure à 3 pour deux inclusions distinctes, à une valeur proche de 1,7 lorsque la barre centrale D_3 est encore présente dans le domaine de calcul. De la même façon que pour les inclusions dures, il est plus difficile de discriminer entre une et deux inclusions lorsque celles-ci sont séparées par une distance $d = \lambda/2$.

7.3.2.3 Comparaison des résultats du critère en fonction du type d'inclusion

Nous faisons remarquer que dans tous nos tests numériques, nous avons traité de la même manière les inclusions dures et les inclusions pénétrables. De plus, d'un point de vue quantitatif, nous observons les mêmes ordres de grandeur pour les valeurs obtenues par le critère relatif J_{CC}^{rel} pour les inclusions dures et les inclusions pénétrables. Ceci a été rendu possible par la normalisation que nous avons choisie en utilisant le retournement temporel classique, cf. formule (7.2.3). En effet, une telle normalisation nous permet de quantifier la force du signal obtenu par la fonction f relativement au résultat obtenu par retournement temporel classique pour lequel nous savons par avance que l'inclusion ou les inclusions sont dans le domaine de calcul. Nous utilisons cette valeur comme référence, sachant par ailleurs qu'elle contient l'information sur le type d'inclusion considérée.

Cependant, nous pouvons être intéressés de savoir avec quel type d'inclusion nous travaillons. Nous pouvons alors aisément différencier une inclusion dure d'une inclusion pénétrable en considérant uniquement le critère J_{CC} , non relatif. Dans les TABLEAUX 7.11 et 7.12, nous donnons pour information les valeurs du critère J_{CC} en les comparant pour des inclusions dures ou pénétrables. Nous observons alors des ordres de grandeurs bien différents selon le type d'inclusion. Lorsque les inclusions sont dures, nous obtenons des valeurs entre

Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion
$B_{ellipse}$	0 %	4,68	7,00
	10 %	4,68	7,04
	20 %	4,66	7,00
	30 %	4,77	7,33
B_{simple}	0 %	0,94	0,88
	10 %	0,95	0,88
	20 %	0,93	0,88
	30 %	0,94	0,89
B_{double}	0 %	4,88	0,92
	10 %	4,89	0,92
	20 %	4,91	0,93
	30 %	4,54	0,92

TABLEAU 7.9 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique distantes, $d = 3\lambda/2$. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes.

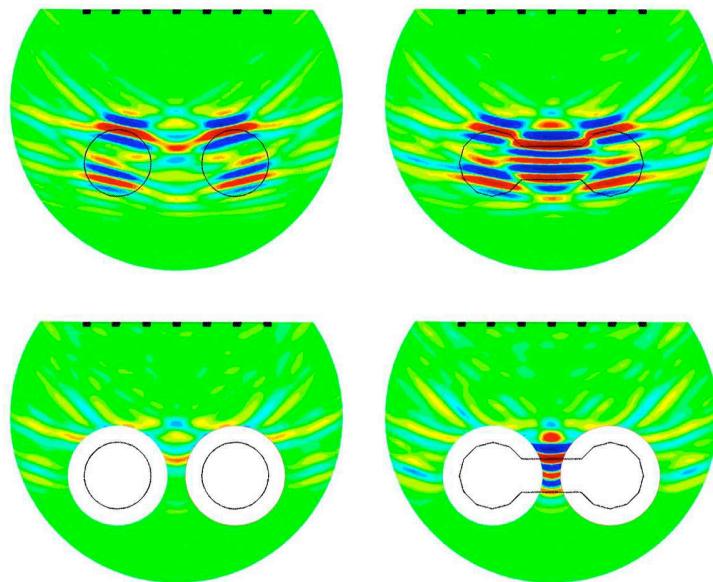


FIGURE 7.9 – Image obtenue par la fonction f pour des inclusions pénétrables distantes, $d = 3\lambda/2$: à gauche deux inclusions distinctes, et à droite une seule inclusion connexe. L'espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et il n'y a pas de bruit sur les données. En haut, retournement temporel classique. En bas, méthode TRAC avec le sous-domaine-test B_{double} .

Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion
$B_{ellipse}$	0 %	7,82	8,72
	10 %	7,88	8,63
	20 %	7,65	8,36
	30 %	8,09	8,81
B_{simple}	0 %	0,98	0,99
	10 %	0,97	0,99
	20 %	0,98	0,99
	30 %	0,98	0,99
B_{double}	0 %	3,25	1,70
	10 %	3,20	1,71
	20 %	3,27	1,68
	30 %	3,25	1,69

TABLEAU 7.10 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique proches, $d = \lambda/2$. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes.

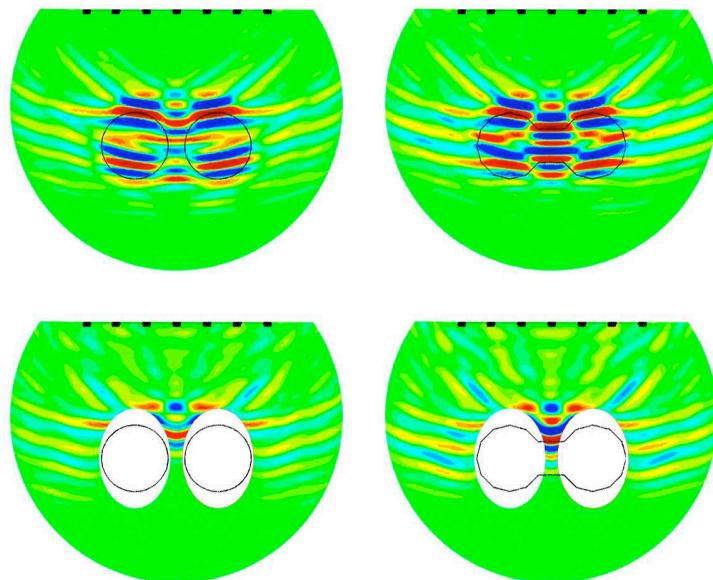


FIGURE 7.10 – Image obtenue par la fonction f pour des inclusions pénétrables proches, $d = \lambda/2$: à gauche deux inclusions distinctes, et à droite une seule inclusion connexe. L’espacement entre les transducteurs est de $\lambda/4$ et il n’y a pas de bruit sur les données. En haut, retournement temporel classique. En bas, méthode TRAC avec le sous-domaine-test B_{double} .

$d = 3\lambda/2$		Inclusions dures		Inclusions pénétrables	
Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
$B = \emptyset$	0 %	26,24 %	41,74 %	4,54 %	6,42 %
	10 %	26,27 %	41,74 %	4,54 %	6,42 %
	20 %	26,23 %	41,89 %	4,55 %	6,45 %
	30 %	26,26 %	41,60 %	4,59 %	6,46 %
$B_{ellipse}$	0 %	5,49 %	5,70 %	0,97 %	0,92 %
	10 %	5,60 %	5,68 %	0,97 %	0,91 %
	20 %	5,51 %	5,70 %	0,98 %	0,92 %
	30 %	5,69 %	5,77 %	0,96 %	0,88 %
B_{simple}	0 %	27,27 %	45,78 %	4,83 %	7,28 %
	10 %	27,27 %	45,76 %	4,80 %	7,28 %
	20 %	27,27 %	46,34 %	4,88 %	7,34 %
	30 %	27,27 %	46,12 %	4,88 %	7,29 %
B_{double}	0 %	4,75 %	39,12 %	0,93 %	6,94 %
	10 %	4,79 %	38,97 %	0,93 %	6,97 %
	20 %	4,73 %	39,41 %	0,93 %	6,95 %
	30 %	5,03 %	39,16 %	1,01 %	6,98 %

TABLEAU 7.11 – Résultat du critère J_{CC} (non relatif) pour la détermination du type d'inclusion considérée (dure ou pénétrable) en fonction du sous-domaine-test B utilisé et du niveau de bruit sur les données. Discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions distinctes pour une distance $d = 3\lambda/2$.

25 % et 50 % lorsqu'une partie de l'inclusion est encore dans le domaine de calcul, alors que le critère prend des valeurs de 3 % à 5 % si nous avons englobé l'intégralité de l'inclusion D . En revanche, dans le cas des inclusions pénétrables, un sous-domaine-test mal placé donne une valeur du critère entre 4 % et 8 % (ce qui correspondait au cas correct pour des inclusions dures) et lorsque l'inclusion D est complètement englobée, le critère prend des valeurs autour de 1 %.

Ainsi, en utilisant les informations du critère J_{CC} et de son homologue relatif J_{CC}^{rel} , la méthode *TRAC* nous permet de discriminer entre une seule inclusion et deux inclusions proches jusqu'à une distance de $\lambda/2$, tout en déterminant s'il s'agit d'inclusions dures ou pénétrables.

$d = \lambda/2$		Inclusions dures		Inclusions pénétrables	
Sous-domaine-test	Niveau de bruit	2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
$B = \emptyset$	0 %	31,67 %	33,24 %	5,70 %	6,85 %
	10 %	31,85 %	33,23 %	5,68 %	6,85 %
	20 %	31,70 %	33,46 %	5,69 %	6,83 %
	30 %	31,67 %	33,50 %	5,65 %	6,82 %
$B_{ellipse}$	0 %	3,89 %	3,50 %	0,73 %	0,79 %
	10 %	3,87 %	3,50 %	0,72 %	0,79 %
	20 %	3,76 %	3,50 %	0,74 %	0,82 %
	30 %	3,80 %	3,50 %	0,70 %	0,77 %
B_{simple}	0 %	34,41 %	36,42 %	5,80 %	6,94 %
	10 %	34,50 %	36,42 %	5,83 %	6,90 %
	20 %	34,45 %	36,42 %	5,79 %	6,90 %
	30 %	34,88 %	36,42 %	5,76 %	6,89 %
B_{double}	0 %	9,44 %	21,49 %	1,75 %	4,03 %
	10 %	9,56 %	21,52 %	1,77 %	4,01 %
	20 %	9,55 %	21,55 %	1,74 %	4,07 %
	30 %	9,47 %	21,42 %	1,74 %	4,03 %

TABLEAU 7.12 – Résultat du critère J_{CC} (non relatif) pour la détermination du type d'inclusion considérée (dure ou pénétrable) en fonction du sous-domaine-test B utilisé et du niveau de bruit sur les données. Discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions distinctes pour une distance $d = \lambda/2$.

7.3.3 Discrimination pour des mines enfouies dans la terre

Nous proposons maintenant une étude dans un cadre un peu plus réaliste que précédemment. En effet, rappelons que la longueur d'onde était de 35 cm environ et donnait le rayon de l'inclusion, qui est surdimensionné si nous considérons le cas des mines. Nous utilisons alors les informations trouvées dans l'article de J. Igel [Ige08]. Dans cet article, les auteurs étudient les variations de la permittivité et de la conductivité dans un sous-sol composé essentiellement de terre. Ils appliquent également leur travail au déminage.

D'après [Ige08], nous prenons les données suivantes : la fréquence centrale du signal émis par la source est de 1,5 GHz (nous prenons toujours un Ricker). Les paramètres du sol et des mines sont pris comme dans le TABLEAU 7.13.

Paramètre	Terre	Mine en fer	Mine en plastique
ϵ_r	5	1	3
μ_r	1	10 000	1
c_r	0,45	0,01	0,58

TABLEAU 7.13 – Paramètres physiques pour des mines enfouies dans la terre, d'après [Ige08].

Ainsi, nous obtenons les rapports de vitesse suivants pour une mine en fer

$$\frac{c_{fer}}{c_{terre}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10000}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5}{10000}} \sim 0,022 \ll 1,$$

et pour une mine en plastique

$$\frac{c_{plastique}}{c_{terre}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sim 1,29.$$

Pour la vitesse de propagation dans la terre donnée dans le TABLEAU 7.13 et la fréquence centrale de 1,5 GHz, nous obtenons alors une longueur d'onde λ d'environ 8,94 cm. Le spectre significatif est à présent compris entre 428,6 MHz et 3 GHz.

De plus, à présent la source est localisée sur la ligne d'émetteurs-récepteurs et non plus à 10λ au-dessus. La LER est composée de huit transducteurs et l'espacement entre ces transducteurs est de 5 cm, soit environ une demi-longueur d'onde. La ligne de transducteurs est située à 20 cm de l'emplacement des inclusions, soit à environ 2λ .

Les mines ont pour largeur 10 cm, soit environ une longueur d'onde, et pour hauteur 4 cm, soit environ $\lambda/2$. Nous les disposons dans le sol comme présenté sur la FIGURE 7.11. Les inclusions peuvent être alignées sur une ligne horizontale par rapport à la LER (cf. FIGURE 7.11a), ou penchées avec un décalage de 2 cm de hauteur (cf. FIGURE 7.11c). Nous cherchons à discriminer entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes. Pour cela, nous comparons les deux configurations ci-dessus à leur homologue sur les FIGURES 7.11b quand les inclusions sont alignées et 7.11d lorsqu'elles sont décalées.

Nous présentons les résultats du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} dans les TABLEAUX 7.14, et 7.15 dans le cas d'inclusions dures, et dans les TABLEAUX 7.16 et 7.17 dans le cas d'inclusions pénétrables. Les tests sont effectués pour des distances d égales à $3\lambda/4$, $\lambda/4$ et $\lambda/8$, sans bruit sur la LER et pour 20 % de bruit sur les données. Nous

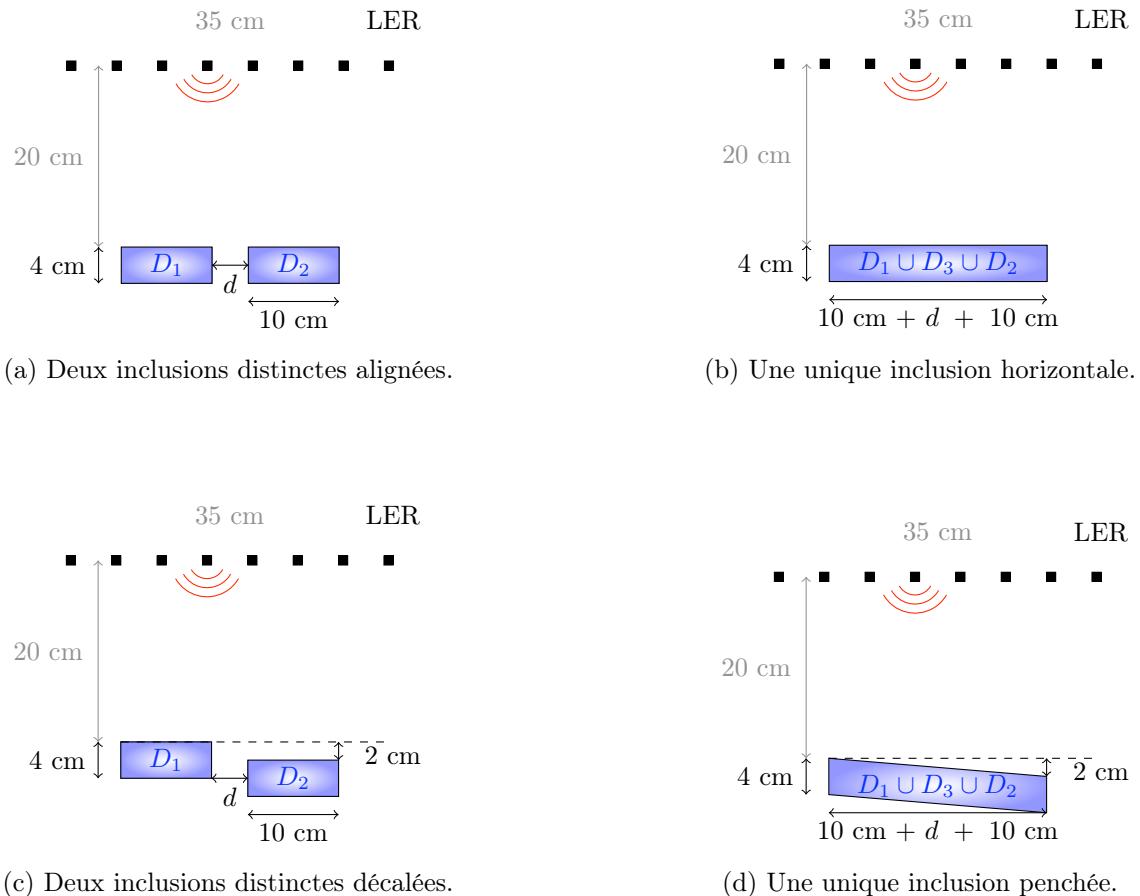


FIGURE 7.11 – Configuration des inclusions dans le sol : en haut, la configuration est horizontale, et en bas la configuration est penchée avec un dénivelé de 2 cm de hauteur. À gauche, deux inclusions distinctes D_1 et D_2 sont espacées d'une distance d . À droite, une unique inclusion permet de faire la comparaison grâce à une connexion D_3 de longueur d . La ligne d'émetteurs-récepteurs est composée de huit transducteurs espacés de 5 cm.

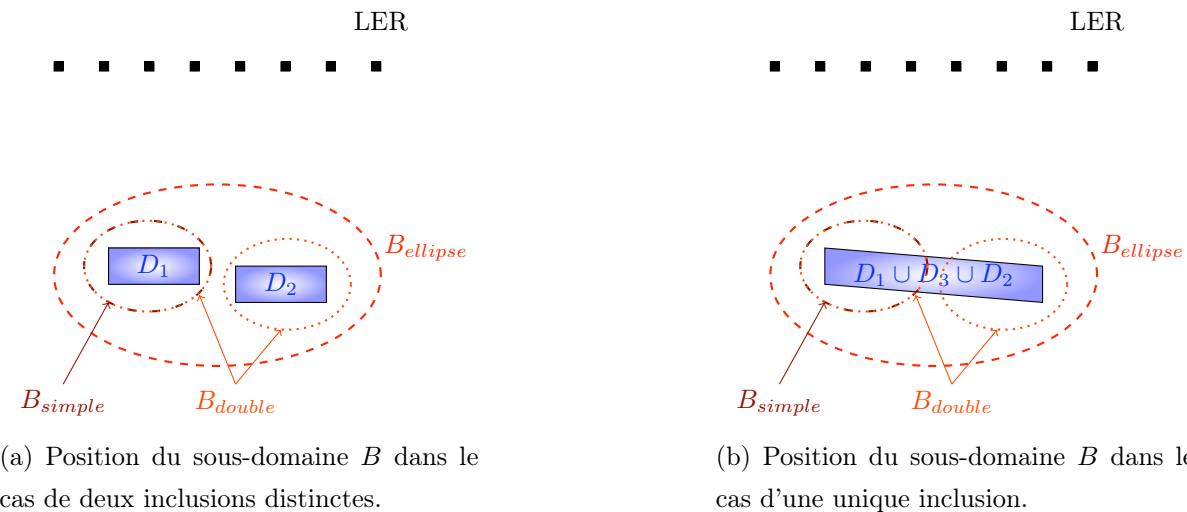


FIGURE 7.12 – Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions : $B_{ellipse}$ englobant totalement D , B_{simple} englobant uniquement D_1 et B_{double} englobant D_1 et D_2 , manquant D_3 lorsqu'il existe.

comparons dans chaque cas la méthode *TRAC* effectuée pour les trois sous-domaines-test de la FIGURE 7.12 au cas du retourne temporel classique.

7.3.3.1 Cas des mines en fer : inclusions dures

Le cas des mines en fer est traité dans le TABLEAU 7.14 lorsque les inclusions sont alignées et dans le TABLEAU 7.15 lorsqu'elles sont décalées. Chaque tableau est constitué de dix lignes et six colonnes. La première ligne donne la configuration des inclusions : nombre et distance de séparation. La deuxième ligne donne les informations sur le sous-domaine-test utilisé, le niveau de bruit sur les données et le critère considéré. Ensuite, les lignes se lisent deux par deux pour chaque sous-domaine-test utilisé.

La première colonne est alors la liste des sous-domaines-test utilisés pour réaliser la méthode *TRAC*, tandis que la deuxième colonne rappelle le pourcentage de bruit sur les données dans chaque test. Ensuite nous considérons le cas de deux inclusions distinctes dans les colonnes 3, pour le critère J_{CC} , et 4, pour le critère relatif J_{CC}^{rel} associé. De même, les colonnes 5 et 6 présentent les valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas d'une unique inclusion.

Ce qui ressort essentiellement de ces tableaux est que pour $B_{ellipse}$, les critères nous indiquent qu'en effet, nous avons bien englobé toute l'inclusion D . En revanche, pour B_{simple} , les critères montrent que nous avons manqué une partie de l'inclusion D . Finalement, dans le cas où nous avons effectué la méthode *TRAC* avec le sous-domaine-test B_{double} , les résultats sont assez mitigés. En effet, pour de telles distances de séparation, il devient difficile de distinguer une inclusion de deux inclusions, aussi bien lorsque les inclusions sont alignées que décalées. À nouveau, nous avons atteint une limite d'utilisation du critère J_{CC} lorsque la distance d est une fraction de la longueur d'onde.

7.3.3.2 Cas des mines en plastique : inclusions pénétrables

Le cas des mines en plastique est traité dans le TABLEAU 7.16 lorsque les inclusions sont alignées et dans le TABLEAU 7.17 lorsqu'elles sont décalées. Ces tableaux sont disposés comme dans le cas des mines en fer. Les résultats obtenus sont tout à fait similaires au cas des inclusions dures. Les tests effectués avec $B_{ellipse}$ et B_{simple} donnent les résultats attendus. Cependant, il est à nouveau difficile de discriminer entre une inclusion et deux inclusions avec B_{double} pour de si petites distances d . Nous notons cependant que les critères pour le sous-domaine B_{double} ne se dégradent pas lorsque la distance d entre les inclusions tend vers

Inclusions dures alignées, $d = 3\lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,311 %	1	0,498 %	1
	20 %	0,308 %	1	0,501 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,093 %	3,350	0,096 %	5,197
	20 %	0,094 %	3,293	0,100 %	5,019
B_{simple}	0 %	0,306 %	1,018	0,486 %	1,025
	20 %	0,306 %	1,007	0,489 %	1,024
B_{double}	0 %	0,205 %	1,518	0,510 %	0,978
	20 %	0,202 %	1,530	0,507 %	0,987

(a) Inclusions dures alignées, $d = 3\lambda/4$.

Inclusions dures alignées, $d = \lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,348 %	1	0,475 %	1
	20 %	0,345 %	1	0,470 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,102 %	3,419	0,108 %	4,417
	20 %	0,100 %	3,465	0,108 %	4,330
B_{simple}	0 %	0,343 %	1,017	0,413 %	1,150
	20 %	0,338 %	1,021	0,418 %	1,124
B_{double}	0 %	0,265 %	1,314	0,376 %	1,264
	20 %	0,263 %	1,313	0,380 %	1,236

(b) Inclusions dures alignées, $d = \lambda/4$.

Inclusions dures alignées, $d = \lambda/8$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,388 %	1	0,468 %	1
	20 %	0,383 %	1	0,467 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,104 %	3,735	0,108 %	4,332
	20 %	0,103 %	3,708	0,108 %	4,323
B_{simple}	0 %	0,349 %	1,110	0,388 %	1,207
	20 %	0,346 %	1,107	0,390 %	1,199
B_{double}	0 %	0,303 %	1,279	0,372 %	1,259
	20 %	0,302 %	1,268	0,383 %	1,220

(c) Inclusions dures alignées, $d = \lambda/8$.TABLEAU 7.14 – Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions dures alignées, en fonction de la distance d , pour différents sous-domaines-test et deux niveaux de bruit.

Inclusions dures décalées, $d = 3\lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,338 %	1	0,429 %	1
	20 %	0,343 %	1	0,429 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,113 %	3,001	0,093 %	4,605
	20 %	0,111 %	3,086	0,091 %	4,727
B_{simple}	0 %	0,348 %	0,972	0,443 %	0,969
	20 %	0,346 %	0,992	0,444 %	0,965
B_{double}	0 %	0,224 %	1,511	0,388 %	1,107
	20 %	0,222 %	1,544	0,384 %	1,117

(a) Inclusions dures décalées, $d = 3\lambda/4$.

Inclusions dures décalées, $d = \lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,392 %	1	0,477 %	1
	20 %	0,394 %	1	0,480 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,134 %	2,916	0,117 %	4,064
	20 %	0,129 %	3,060	0,113 %	4,253
B_{simple}	0 %	0,384 %	1,020	0,460 %	1,037
	20 %	0,385 %	1,024	0,459 %	1,047
B_{double}	0 %	0,218 %	1,796	0,310 %	1,536
	20 %	0,221 %	1,780	0,307 %	1,563

(b) Inclusions dures décalées, $d = \lambda/4$.

Inclusions dures décalées, $d = \lambda/8$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,397 %	1	0,483 %	1
	20 %	0,398 %	1	0,492 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,139 %	2,868	0,124 %	3,882
	20 %	0,145 %	2,751	0,128 %	3,836
B_{simple}	0 %	0,380 %	1,046	0,453 %	1,066
	20 %	0,382 %	1,042	0,454 %	1,084
B_{double}	0 %	0,226 %	1,760	0,307 %	1,574
	20 %	0,225 %	1,771	0,304 %	1,617

(c) Inclusions dures décalées, $d = \lambda/8$.TABLEAU 7.15 – Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions dures décalées, en fonction de la distance d , pour différents sous-domaines-test et deux niveaux de bruit.

Inclusions pénétrables alignées, $d = 3\lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,055 %	1	0,090 %	1
	20 %	0,056 %	1	0,089 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,015 %	3,704	0,018 %	5,119
	20 %	0,015 %	3,740	0,017 %	5,125
B_{simple}	0 %	0,054 %	1,009	0,087 %	1,030
	20 %	0,054 %	1,032	0,089 %	1,001
B_{double}	0 %	0,036 %	1,542	0,093 %	0,968
	20 %	0,035 %	1,582	0,093 %	0,958

(a) Inclusions pénétrables alignées, $d = 3\lambda/4$.

Inclusions pénétrables alignées, $d = \lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,061 %	1	0,085 %	1
	20 %	0,061 %	1	0,085 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,016 %	3,714	0,019 %	4,534
	20 %	0,017 %	3,633	0,019 %	4,602
B_{simple}	0 %	0,059 %	1,042	0,070 %	1,208
	20 %	0,058 %	1,045	0,070 %	1,213
B_{double}	0 %	0,046 %	1,330	0,066 %	1,281
	20 %	0,045 %	1,348	0,067 %	1,280

(b) Inclusions pénétrables alignées, $d = \lambda/4$.

Inclusions pénétrables alignées, $d = \lambda/8$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,071 %	1	0,084 %	1
	20 %	0,070 %	1	0,085 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,018 %	4,026	0,019 %	4,480
	20 %	0,017 %	4,129	0,018 %	4,793
B_{simple}	0 %	0,060 %	1,182	0,065 %	1,288
	20 %	0,060 %	1,167	0,065 %	1,301
B_{double}	0 %	0,055 %	1,292	0,066 %	1,277
	20 %	0,055 %	1,273	0,065 %	1,307

(c) Inclusions pénétrables alignées, $d = \lambda/8$.TABLEAU 7.16 – Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions pénétrables alignées, en fonction de la distance d , pour différents sous-domaines-test et deux niveaux de bruit.

Inclusions pénétrables décalées, $d = 3\lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,060 %	1	0,078 %	1
	20 %	0,060 %	1	0,079 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,017 %	3,568	0,014 %	5,391
	20 %	0,017 %	3,458	0,015 %	5,399
B_{simple}	0 %	0,063 %	0,952	0,083 %	0,945
	20 %	0,063 %	0,953	0,084 %	0,938
B_{double}	0 %	0,042 %	1,427	0,073 %	1,067
	20 %	0,042 %	1,425	0,074 %	1,062

(a) Inclusions pénétrables décalées, $d = 3\lambda/4$.

Inclusions pénétrables décalées, $d = \lambda/4$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,071 %	1	0,086 %	1
	20 %	0,072 %	1	0,086 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,018 %	3,935	0,016 %	5,366
	20 %	0,017 %	4,101	0,016 %	5,285
B_{simple}	0 %	0,071 %	1,007	0,082 %	1,045
	20 %	0,071 %	1,013	0,083 %	1,037
B_{double}	0 %	0,033 %	2,182	0,056 %	1,537
	20 %	0,033 %	2,205	0,056 %	1,541

(b) Inclusions pénétrables décalées, $d = \lambda/4$.

Inclusions pénétrables décalées, $d = \lambda/8$		2 inclusions		1 inclusion	
Sous-domaine-test B	Niveau de bruit	Critère	Relatif	Critère	Relatif
\emptyset	0 %	0,073 %	1	0,087 %	1
	20 %	0,073 %	1	0,087 %	1
$B_{ellipse}$	0 %	0,018 %	4,045	0,017 %	5,141
	20 %	0,018 %	4,065	0,017 %	5,189
B_{simple}	0 %	0,070 %	1,038	0,080 %	1,081
	20 %	0,070 %	1,043	0,079 %	1,099
B_{double}	0 %	0,034 %	2,164	0,055 %	1,573
	20 %	0,034 %	2,147	0,055 %	1,598

(c) Inclusions pénétrables décalées, $d = \lambda/8$.TABLEAU 7.17 – Valeurs du critère J_{CC} et du critère relatif J_{CC}^{rel} associé pour la discrimination entre une et deux inclusions pénétrables décalées, en fonction de la distance d , pour différents sous-domaines-test et deux niveaux de bruit.

zéro. Ceci permet d'espérer une amélioration de la méthode pour rester discriminant, même quand d est très petite.

7.3.3.3 Comparaison des résultats du critère en fonction du type d'inclusion

Nous voulons simplement mentionner que dans ces tests, les valeurs du critère J_{CC} sont assez faibles. En revanche, elles diffèrent selon le type d'inclusion : en effet pour une inclusion dure, nous obtenons des valeurs entre 0,1 % et 0,5 %, tandis que pour une inclusion pénétrable, les valeurs varient entre 0,01 % et 0,1 %.

Notons par ailleurs que la méthode se révèle toujours robuste vis-à-vis du bruit sur les données.

Chapitre 8

Dans un milieu non-homogène dissipatif

Résumé

Dans ce chapitre, nous étendons la méthode *TRAC* à des milieux non-homogènes dissipatifs. Nous voyons que les équations ne sont plus réversibles mais que la méthode permet encore la reconstruction de signaux et l'identification d'objets. Nous appliquons la méthode *TRAC* en milieux non-homogènes dissipatifs à la discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches.

Sommaire

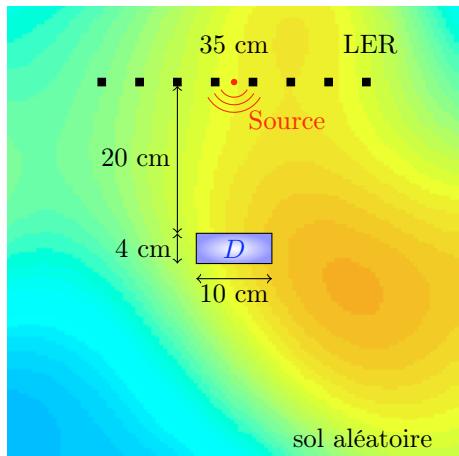
8.1	Réalisation des milieux non-homogènes	204
8.1.1	Modélisation du problème direct	205
8.1.2	La méthode <i>TRAC</i> dans un milieu anti-dissipatif	208
8.2	Résultats numériques en milieux hétérogènes	209
8.2.1	Milieux aléatoires dissipatifs vs milieux homogènes dissipatifs	210
8.2.2	Milieux stratifiés dissipatifs	215
8.3	Discrimination entre une et deux inclusions	221
Conclusion & Article à paraître dans <i>Wave Motion</i>		225

8.1 Réalisation des milieux non-homogènes

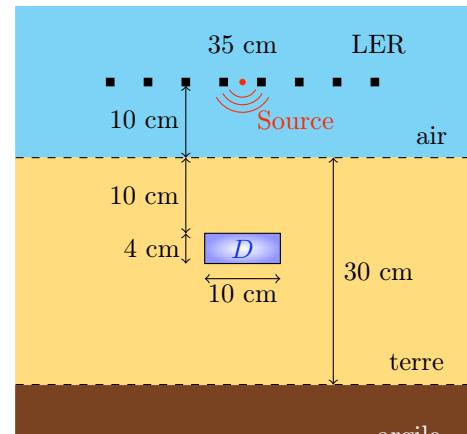
Dans les chapitres 5, 6 et 7, nous avons montré la capacité de la méthode *TRAC* à recréer le passé et à identifier la présence d'une inclusion, dans un premier temps dans le cadre d'une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale, puis dans le cadre d'une LER à ouverture partielle, cf. FIGURE 7.1. Jusqu'à présent, nous avons travaillé exclusivement avec des milieux homogènes et non dissipatifs. Or ce type de milieu n'est pas toujours réaliste en pratique. C'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre une extension de la méthode *TRAC* pour des milieux non-homogènes et dissipatifs.

Les applications, auxquelles nous aspirons, comptent parmi les applications en géophysique, en imagerie médicale ou pour la détection de mines. Pour nous rapprocher de ces cas réalistes, nous commençons par ajouter un terme dissipatif dans l'équation des ondes. Ensuite, nous considérons deux types de milieux non-homogènes, cf. FIGURE 8.1 :

- un milieu aléatoire et dissipatif,
c'est-à-dire un milieu constitué d'un seul type de matériau (par exemple de la terre) vérifiant de petites variations dans les paramètres physiques qui le définissent ;
- un milieu stratifié et dissipatif,
c'est-à-dire un milieu constitué de deux ou trois couches, chacune étant homogène et ayant un coefficient de dissipation qui lui est propre.



(a) Milieu aléatoire.



(b) Milieu stratifié.

FIGURE 8.1 – Géométrie du domaine précisant la position de l'inclusion D et de la LER. Deux types de milieux hétérogènes sont considérés : (a) et (b).

8.1.1 Modélisation du problème direct

Dans cette première section, nous commençons par rappeler le problème direct pour des milieux dissipatifs et hétérogènes. L'équation physique, que nous utilisons, est l'équation des ondes scalaire (7.3.13) dérivée des équations de Maxwell, que nous avons présentées dans le § 7.3.1. Nous la rappelons ci-dessous

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0. \quad (8.1.1)$$

où ε représente la permittivité électrique et μ la perméabilité magnétique, de telle sorte que la vitesse de propagation c satisfasse la relation $\varepsilon \mu c^2 = 1$. De plus, σ représente la conductivité électrique dans le terme dissipatif et joue le rôle de coefficient de dissipation.

Le nouveau problème direct s'écrit à présent

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = f(t) \delta_{\vec{x}=\vec{x}_S} \quad \text{dans } (0, T_f) \times \mathbb{R}^2 \\ \text{conditions de radiation de Sommerfeld à l'infini,} \end{array} \right. \quad (8.1.2)$$

où les paramètres ε , μ , σ et c peuvent maintenant être aléatoires ou constants par morceaux dans le milieu. Par ailleurs, nous supposons que les paramètres concernant les inclusions sont homogènes et constants. La fonction f désigne ici la source ponctuelle, située en \vec{x}_S , définie par un Ricker (5.2.8).

Présentons ensuite la génération des coefficients hétérogènes dans le milieu ambiant.

8.1.1.1 Milieux aléatoires

Le milieu hétérogène, que nous considérons, est modélisé en utilisant un milieu aléatoire. En effet, nous nous basons sur les considérations suivantes : d'un point de vue expérimental, cf. [Ige08], il est possible de mesurer la valeur moyenne des différents paramètres dans le milieu. De plus, bien qu'il soit impossible de connaître les variations exactes de ces paramètres dans le milieu, il est possible d'estimer expérimentalement la variabilité à petite échelle des paramètres à partir de mesures par géoradar. Dans la suite, nous utilisons cette approche pour générer un milieu aléatoire.

On peut trouver un peu de théorie sur les coefficients aléatoires et comment les générer dans [Kli02, FGPS07, Abr97]. D'après [Kli02], un coefficient aléatoire α peut s'écrire formellement

$$\alpha(\vec{x}) = \alpha_0(\vec{x}) + \nu \left(\frac{\vec{x}}{\ell_c} \right), \quad (8.1.3)$$

où α_0 représente la valeur moyenne du coefficient α et ν est un processus aléatoire avec un écart-type σ_ν et une longueur de corrélation ℓ_c . Le processus aléatoire consiste en la convolution de deux fonctions : un bruit blanc g , généralement Gaussien, et une fonction de corrélation f_c tels que

$$\nu \left(\frac{\vec{x}}{\ell_c} \right) = g(\vec{x}; \sigma_\nu) * f_c(\vec{x}; \ell_c) . \quad (8.1.4)$$

De plus, d'après [Ige08], nous pouvons également supposer que la fonction de corrélation est une Gaussienne telle que :

$$f_c(\vec{x}; \ell_c) = K e^{-\frac{\|\vec{x}\|_2^2}{2\ell_c^2}} , \quad (8.1.5)$$

où K est une constante. Pour générer de tels milieux aléatoires, c'est-à-dire avec une fonction de corrélation Gaussienne, nous utilisons un algorithme écrit en **MatLab** par C. Tsogka et L. Borcea [BPT03], utilisé par les auteurs pour générer des milieux aléatoires dans leurs travaux en imagerie et en retournement temporel. Des études statistiques sur les signaux diffractés et se propageant dans des milieux aléatoires sont disponibles également dans [AKP⁺96], et d'autres articles des mêmes auteurs.

Dans notre étude, nous considérons un sol terreux aléatoire dont la variabilité à petite échelle est décrite dans [Ige08]. La permittivité relative ε_r de la terre a une valeur moyenne de 5 et est gouvernée par un bruit blanc Gaussien à moyenne nulle, d'écart-type 1, et par une fonction de corrélation Gaussienne de longueur de corrélation 30 cm. La permittivité relative, par contre, est supposée homogène et égale à 1 dans tout le milieu. Ainsi, la vitesse de propagation dans le milieu est donnée par la formule

$$c_r^2 = \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} . \quad (8.1.6)$$

Nous en déduisons que l'inverse de la vitesse est gouverné par la racine carrée d'une fonction de corrélation Gaussienne ayant la même longueur de corrélation que la permittivité. De plus, nous supposons par [Ige08] que la conductivité électrique est gouvernée par un bruit blanc Gaussien à moyenne nulle, d'écart-type 0,15, et par une fonction de corrélation Gaussienne de longueur de corrélation 30 cm. Nous tenons à faire remarquer que les variations de la permittivité électrique et de la conductivité électrique ne coïncident pas nécessairement, bien qu'êtant gouvernées par la même loi statistique et ayant la même longueur de corrélation. Nous récapitulons les données sur la variabilité à petite échelle des paramètres électromagnétiques dans le TABLEAU 8.1.

Paramètre	Valeur moyenne	Écart-type	Longueur de corrélation
ϵ_r	5	± 1	30 cm
μ_r	1	0	—
$\log(\sigma/(\text{S}/\text{m}))$	-3	$\pm 0,15$	30 cm

TABLEAU 8.1 – Variabilité à petite échelle des paramètres électromagnétiques dans la terre.

8.1.1.2 Milieux stratifiés

Un autre aspect, que nous devons considérer pour approcher des cas réalistes, est de travailler avec un milieu stratifié. Jusqu'à présent, la source, la ligne d'émetteurs-récepteurs et les inclusions étaient localisées dans le même milieu. Cependant, par exemple pour l'application à la détection de mines, la source et la ligne de transducteurs sont situées dans une couche d'air, tandis que les inclusions sont enfouies dans une couche de terre. Nous pouvons même ajouter une couche d'argile en profondeur afin d'obtenir des échos, cf. FIGURE 8.1b. Dans notre étude, nous considérons alors le cas de trois strates : air, terre et argile. Les valeurs numériques des paramètres électromagnétiques correspondant à chaque strate sont récapitulées dans le TABLEAU 8.2.

Strate	Permittivité ϵ_r	Perméabilité μ_r	Conductivité σ (S/m)
Air	1	1	0
Terre	5	1	0.05
Argile	10	1	0.001

TABLEAU 8.2 – Propriétés électromagnétiques de l'air, de la terre et de la l'argile : valeurs moyennes.

8.1.1.3 Paramètres physiques des inclusions

Nous considérons deux types d'inclusions : les mines en fer ou en plastique. Les mines en fer sont des inclusions dures, alors que les mines en plastique sont des inclusions pénétrables. Nous choisissons les paramètres physiques résumés dans le TABLEAU 8.3.

Composition de la mine	Permittivité ϵ_r	Perméabilité μ_r	Conductivité σ
Fer	1	10^4	10^7
Plastique	3	1	0

TABLEAU 8.3 – Propriétés électromagnétiques des inclusions.

8.1.2 La méthode *TRAC* dans un milieu anti-dissipatif

Dans cette section, notre but est de valider la méthode *TRAC* dans le cas de milieux hétérogènes et dissipatifs. Nous souhaitons montrer la capacité de la méthode à recréer le passé et à identifier des inclusions. Cependant, par retournement temporel, l'opérateur retourné en temps associé à l'équation (8.1.2) devient :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u_R}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u_R \right) . \quad (8.1.7)$$

L'équivalent du terme dissipatif ici devient un terme anti-dissipatif. Dans nos résultats numériques avec la méthode *TRAC*, le milieu de propagation sera donc dissipatif. Puisque nous travaillons avec des temps de trajets relativement petits (en-dessous de dix périodes), les tests numériques restent stables malgré l'anti-dissipation, cf. [Tar88]. Remarquons qu'ici nous avons une situation très différente des expériences physiques de retournement temporel. En effet, dans ce dernier cas, les données enregistrées sont renvoyées dans le milieu physique original qui est dissipatif. Dans notre cas, nous effectuons des expériences numériques dans un domaine de calcul que nous pouvons choisir comme nous le souhaitons. Ainsi, pour pallier le problème de dissipation, nous choisissons de rendre le milieu anti-dissipatif. Nous écrivons à présent les problèmes aux limites de retournement temporel pour des milieux hétérogènes dissipatifs.

8.1.2.1 Milieux aléatoires dissipatifs

Dans le cas de milieux aléatoires dissipatifs pour le problème direct, nous effectuons le retournement temporel numérique avec la méthode *TRAC* en supposant que le milieu est homogène et anti-dissipatif, c'est-à-dire nous n'utilisons que l'information sur la valeur moyenne des paramètres physiques dans le milieu. Ainsi le problème rétrograde associé à (8.1.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \varepsilon \rangle \frac{\partial^2 v_R^S}{\partial t^2} - \langle \sigma \rangle \frac{\partial v_R^S}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\langle \mu \rangle} \nabla v_R^S \right) = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \frac{\partial v_R^S}{\partial t} + \langle c \rangle \frac{\partial v_R^S}{\partial n} + \langle c \rangle \frac{v_R^S}{2r} = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_A \\ \frac{\partial v_R^S}{\partial t} + \langle c \rangle \frac{\partial v_R^S}{\partial n} - \langle c \rangle \frac{v_R^S}{2r} = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \\ v_R^S(t, \cdot) = u^S(T_f - t, \cdot) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R . \end{array} \right. \quad (8.1.8)$$

où nous notons $\langle \alpha \rangle$ la valeur moyenne du coefficient aléatoire α , pouvant être la permittivité électrique, la conductivité électrique, la perméabilité magnétique, ou la vitesse de propagation dans le milieu. Remarquons que μ_r est constant et égal à 1.

8.1.2.2 Milieux stratifiés dissipatifs

Dans le cas de milieux stratifiés dissipatifs pour le problème direct, nous supposons connues les valeurs des paramètres physiques pour chacune des couches, ainsi que la position des interfaces. De plus, nous utilisons l'opposé des coefficients de dissipation, afin de rendre le milieu anti-dissipatif. Nous en déduisons le problème inverse suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 v_R^S}{\partial t^2} - \tilde{\sigma} \frac{\partial v_R^S}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \nabla v_R^S \right) = 0 & \text{dans } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \frac{\partial v_R^S}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial v_R^S}{\partial n} + \tilde{c} \frac{v_R^S}{2r} = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_A \\ \frac{\partial v_R^S}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial v_R^S}{\partial n} - \tilde{c} \frac{v_R^S}{2r} = 0 & \text{sur } (0, T_f) \times \partial B \\ v_R^S(t, \cdot) = u^S(T_f - t, \cdot) & \text{sur } (0, T_f) \times \Gamma_R, \end{array} \right. \quad (8.1.9)$$

où $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\mu}$ et \tilde{c} sont des fonctions constantes par morceaux caractérisant le milieu stratifié sans inclusion telles que, de façon générique pour le coefficient $\tilde{\alpha}$, nous ayons :

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha_{air} & \text{if } z < 0 \text{ cm} \\ \alpha_{terre} & \text{if } z \geq 0 \text{ cm and } z < 30 \text{ cm} \\ \alpha_{argile} & \text{if } z \geq 30 \text{ cm,} \end{cases} \quad (8.1.10)$$

où z représente la profondeur dans le sol, cf. FIGURE 8.1b.

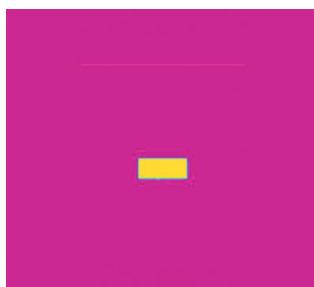
8.2 Résultats numériques en milieux hétérogènes

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques obtenus avec la méthode *TRAC* pour les problèmes inverses (8.1.8) et (8.1.9). Dans un premier temps, nous montrons la capacité de la méthode à recréer le passé dans ce contexte, puis à identifier la présence d'une inclusion, en utilisant le critère relatif J_{CC}^{rel} .

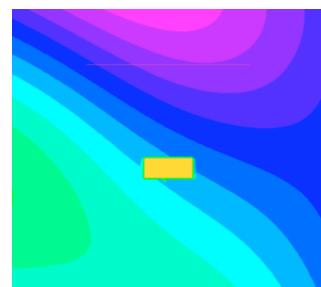
Dans tous nos résultats numériques de cette section, nous prenons une source de type Ricker de fréquence centrale 1,5 GHz et une LER constituée de huit transducteurs, espacés de 5 cm, soit d'environ une demi-longueur d'onde.

8.2.1 Milieux aléatoires dissipatifs vs milieux homogènes dissipatifs

Nous présentons ici les résultats numériques pour un milieu hétérogène généré grâce aux propriétés physiques du TABLEAU 8.1, cf. FIGURE 8.1a. Nous comparons également les résultats obtenus pour le problème inverse (8.1.8) avec les résultats du problème inverse associé au problème direct, pour lequel le milieu de propagation est dissipatif et homogène. Sur la FIGURE 8.2, nous montrons les milieux réalisés numériquement contenant une inclusion dure pour la création des données synthétiques : sur 8.2a dans le cas où le milieu est homogène dissipatif, et sur 8.2b dans le cas où le milieu est aléatoire dissipatif.



(a) Milieu homogène.



(b) Milieu aléatoire.

FIGURE 8.2 – Inclusion dure D dans un milieu homogène (a) ou dans un milieu aléatoire (b). La valeur moyenne de la vitesse est environ de $1,34 \cdot 10^8$ m/s et les variations sont comprises dans : $1,21 \cdot 10^8 \leq c \leq 1,56 \cdot 10^8$. La vitesse de propagation dans l'inclusion est de $3 \cdot 10^6$ m/s.

Afin de générer le milieu aléatoire avec l'algorithme **MatLab**, nous utilisons les données du TABLEAU 8.1. Nous obtenons ainsi une vitesse de propagation environnante variant dans l'intervalle $[1,13 \cdot 10^8, 2,34 \cdot 10^8]$ en m/s, ce qui correspond à un écart-type de 90 % dans notre domaine de calcul pour la génération du problème direct. La valeur moyenne de la vitesse est environ de $1,34 \cdot 10^8$ m/s, qui est d'ailleurs la valeur de la vitesse de propagation que nous choisissons pour le milieu homogène dissipatif de la FIGURE 8.2a. Notons que, dans la zone d'intérêt représentée sur la FIGURE 8.2b, les variations de vitesse sont comprises dans $[1,21 \cdot 10^8, 1,56 \cdot 10^8]$ en m/s, ce qui fait un écart-type de 25 % seulement. Par ailleurs, la vitesse de propagation dans l'inclusion est de $3 \cdot 10^6$ m/s, ce qui est nettement plus petit que la vitesse du milieu environnant.

Nous proposons également des résultats numériques pour une inclusion pénétrable. Nous prenons les mêmes milieux, homogène ou aléatoire, tous étant dissipatifs, comme sur la FIGURE 8.3. À présent, la vitesse de propagation dans l'inclusion est de $1,73 \cdot 10^8$ m/s, ce qui est nettement proche de la vitesse de propagation du milieu environnant. Nous montrons

les milieux réalisés numériquement contenant une inclusion pénétrable pour la création des données synthétiques sur 8.3a dans le cas où le milieu est homogène dissipatif, et sur 8.3b dans le cas où le milieu est aléatoire dissipatif.

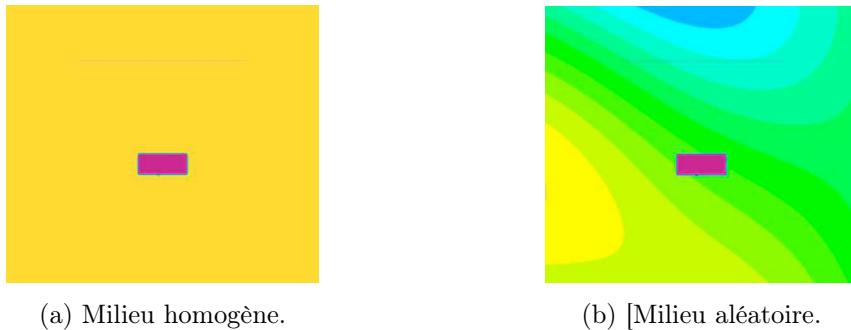
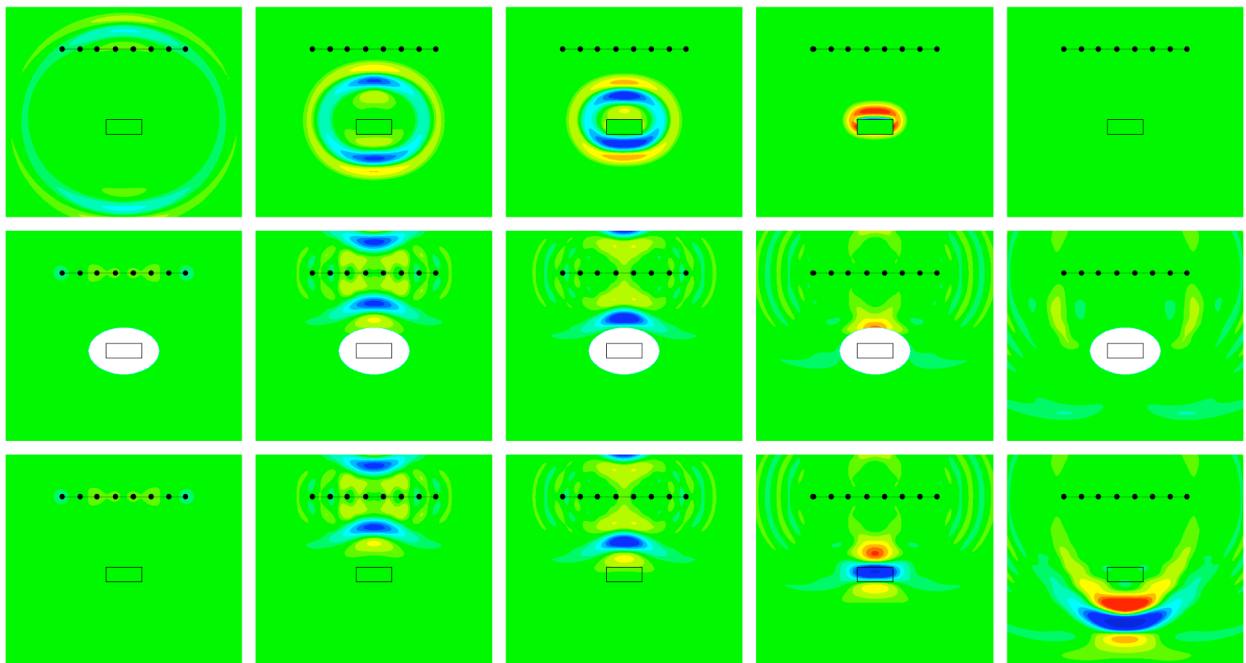


FIGURE 8.3 – Inclusion pénétrable D dans un milieu homogène (a) ou dans un milieu aléatoire (b). La valeur moyenne de la vitesse est environ de $1.34 \cdot 10^8$ m/s et les variations sont comprises dans : $1.21 \cdot 10^8 \leq c \leq 1.56 \cdot 10^8$. La vitesse de propagation dans l'inclusion est de $1.73 \cdot 10^8$ m/s.

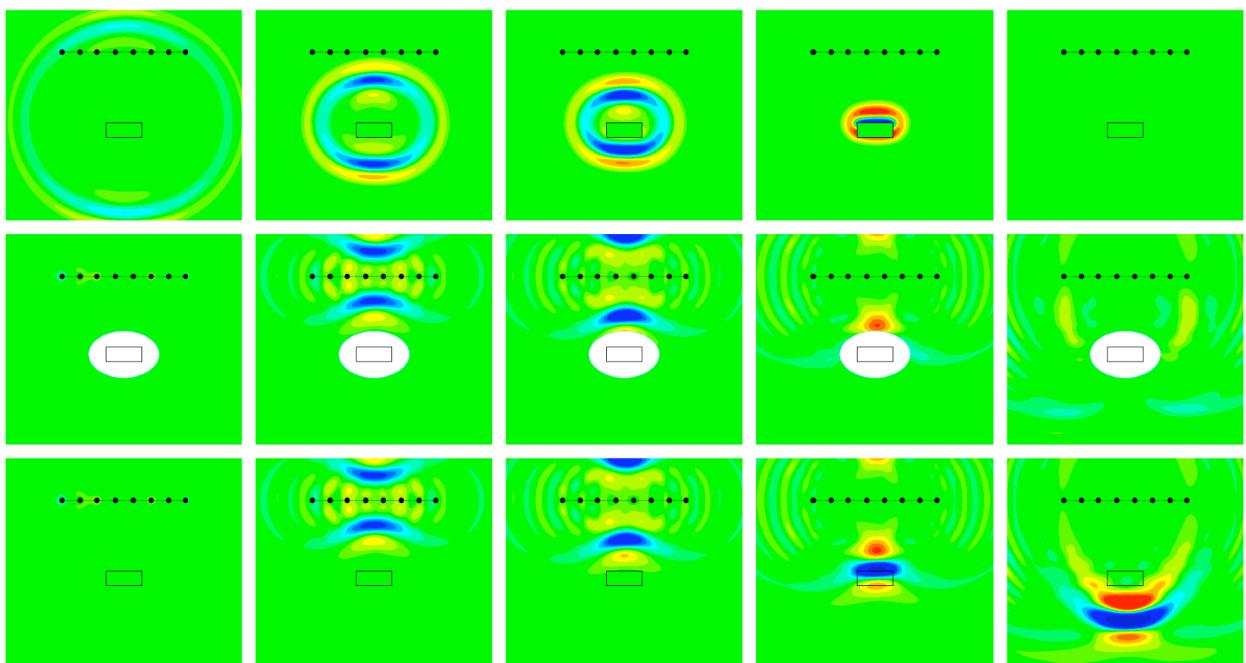
Nous voulons maintenant comparer la capacité de la méthode *TRAC* à reconstruire les signaux dans un milieu homogène dissipatif et dans un milieu aléatoire dissipatif. Remarquons que, puisque la ligne de transducteurs est à ouverture partielle et a un nombre fini de transducteurs, nous ne reconstituons les signaux que dans un cône de convergence. Nous présentons les résultats numériques pour une inclusion dure, associés aux milieux numériques de la FIGURE 8.2, sur la FIGURE 8.4a dans le cas d'un milieu homogène et sur la FIGURE 8.4b dans le cas d'un milieu aléatoire. Rappelons que, dans les deux cas, les expériences numériques de retournement temporel sont effectuées dans un milieu homogène anti-dissipatif.

Chaque figure est composée de trois lignes et cinq colonnes. La ligne du haut nous propose le champ diffracté exact pour référence. Il s'agit du champ diffracté direct que nous passons à l'envers. La ligne du milieu présente le champ diffracté reconstitué en utilisant la méthode *TRAC* avec un sous-domaine-test B en forme d'ellipse, englobant totalement l'inclusion. Enfin, la ligne du bas montre la reconstitution du champ diffracté par retournement temporel classique, c'est-à-dire sans sous-domaine B , ou $B = \emptyset$.

Chaque colonne représente une image instantanée de la solution calculée. La première colonne (à gauche) est l'instant initial de l'expérience numérique de retournement temporel, c'est-à-dire l'instant final du problème direct considéré. Cet instant correspond à la fin de la simulation directe pendant laquelle nous avons enregistré les données sur la LER. Ensuite, les colonnes 2 et 3 sont des images instantanées intermédiaires. Finalement, la dernière colonne

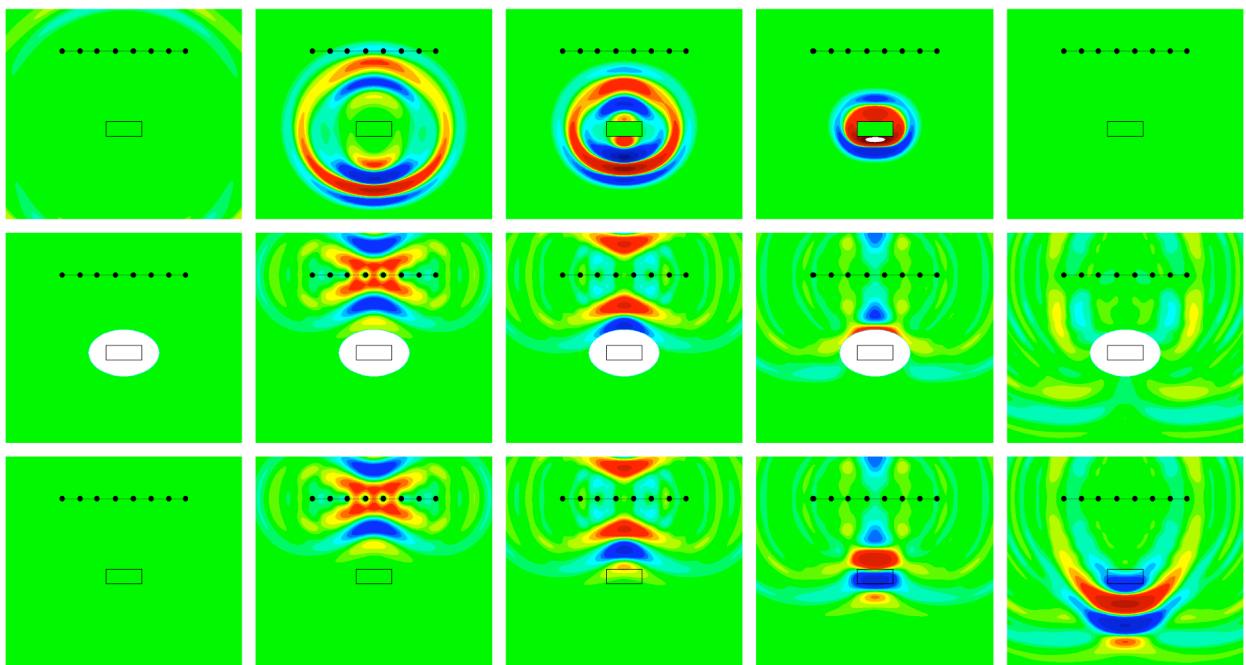


(a) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu homogène dissipatif.

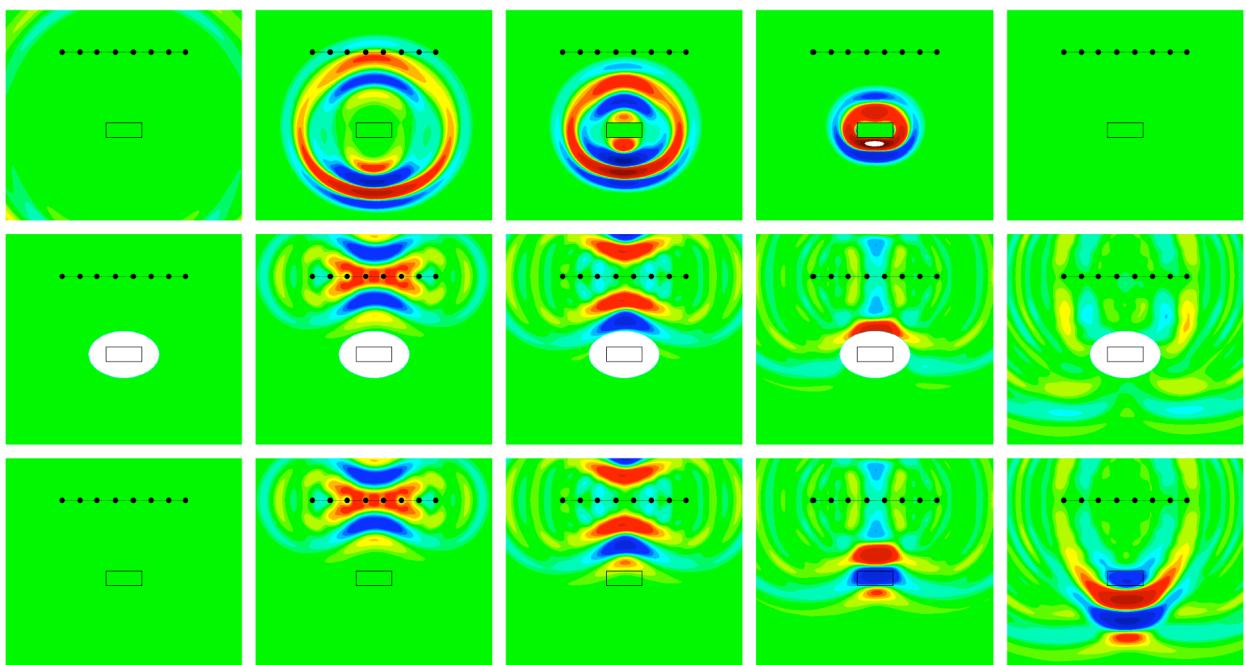


(b) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu aléatoire dissipatif.

FIGURE 8.4 – Reconstitution du champ diffracté par une inclusion D dure dans un milieu homogène dissipatif (a) ou dans un milieu aléatoire dissipatif (b). Ligne du haut : retournement temporel exact pour référence. Ligne du milieu : méthode *TRAC* avec un sous-domaine B en forme d'ellipse contenant l'inclusion D . Ligne du bas : retournement temporel classique. De gauche à droite : images instantanées de l'instant initial du TR (soit instant final du problème direct) vers l'instant final du TR (soit instant initial du problème direct). Niveau de bruit : 0 %.



(a) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu homogène dissipatif.



(b) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu aléatoire dissipatif.

FIGURE 8.5 – Reconstitution du champ diffracté par une inclusion D pénétrable dans un milieu homogène dissipatif (a) ou dans un milieu aléatoire dissipatif (b). Ligne du haut : retournement temporel exact pour référence. Ligne du milieu : méthode *TRAC* avec un sous-domaine B en forme d'ellipse contenant l'inclusion D . Ligne du bas : retournement temporel classique. De gauche à droite : images instantanées de l'instant initial du TR (soit instant final du problème direct) vers l'instant final du TR (soit instant initial du problème direct). Niveau de bruit : 0 %.

(à droite) montre l'instant final de l'expérience numérique de retournement temporel, c'est-à-dire l'instant initial du problème direct. Cet instant correspond au moment où la source commence à émettre, la condition initiale est supposée nulle.

Dans le cas d'une inclusion dure en milieu homogène dissipatif (FIGURE 8.4a), nous devons voir un signal convergeant vers l'inclusion d'après la première ligne. Sur les lignes du milieu et du bas, nous observons sur les trois premières colonnes un signal convergeant vers l'inclusion suivant le cône défini par la LER. À partir de la quatrième colonne, les cas se distinguent : avec la méthode *TRAC*, une grande partie du signal est absorbée dans le sous-domaine-test et il ne reste quasiment plus de signal à la fin de la simulation. En revanche, sur la ligne du bas, le signal ne s'annule pas, mais continue sa propagation vers l'infini en augmentant son amplitude, à cause du terme anti-dissipatif dans l'équation. Nous en déduisons que la méthode *TRAC* permet une meilleure reconstitution du champ diffracté que le retournement temporel classique.

De la même façon, nous considérons la reconstruction du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu aléatoire dissipatif sur la FIGURE 8.4b. Là aussi, nous sommes capables de reconstituer le champ diffracté avec la méthode *TRAC*. Avec le retournement temporel classique, nous observons à nouveau un signal partant vers l'infini à la fin de la simulation. Un point intéressant apparaît ici : en effet, étant donné que le profil de vitesse n'est plus homogène, cf. FIGURE 8.2b, le champ diffracté direct n'est plus symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Notons que, bien que la méthode *TRAC* et le retournement temporel classique soient effectués en milieu homogène, le champ diffracté reconstitué garde une légère asymétrie. Donc nous sommes à nouveau capables dans ce cas de reconstituer le champ, qui a été diffracté dans un milieu aléatoire, en faisant l'hypothèse d'un milieu homogène.

Dans le même esprit, nous proposons les résultats numériques de la reconstruction du champ diffracté par une inclusion pénétrable sur la FIGURE 8.5. Nous pouvons faire les mêmes commentaires que dans le cas d'une inclusion dure : la méthode *TRAC* permet une meilleure reconstruction des signaux lorsque le sous-domaine-test englobe correctement l'inclusion. De plus, lorsque le milieu d'origine est aléatoire, cf. FIGURE 8.3b, nous retrouvons l'asymétrie du champ diffracté dans sa reconstitution.

Nous tenons à faire remarquer que, lorsque nous effectuons la méthode *TRAC*, le signal à la fin de la simulation n'est pas totalement absorbé. En revanche, nous pouvons comparer les reconstructions en considérant le critère J_{CC} et son homologue, le critère relatif J_{CC}^{rel} , afin de déterminer si nous avons bien englobé l'inclusion D . Nous présentons les valeurs des critères dans le TABLEAU 8.4. Nous observons que nous sommes capables d'identifier

l'inclusion avec la méthode *TRAC*. Les meilleurs résultats sont pour l'inclusion pénétrable. En effet, dans le cas de l'identification de l'inclusion dure en milieu aléatoire, la valeur du critère relatif J_{CC}^{rel} est difficilement discriminante. Cependant, il est possible d'améliorer ces résultats, certainement au moyen d'un nouveau critère à définir.

Critère	Inclusion dure		Inclusion pénétrable	
	Milieu Homogène	Milieu Aléatoire	Milieu Homogène	Milieu Aléatoire
$J_{CC}(\emptyset)$	0,0796 %	0,1019 %	0,0153 %	0,0191 %
$J_{CC}(B)$	0,0249 %	0,0439 %	0,0038 %	0,0067 %
$J_{CC}^{rel}(B)$	3,198	2,321	3,984	2,867

TABLEAU 8.4 – Résultats du critère J_{CC} pour la reconstruction des champs diffractés par retournement temporel classique et par la méthode *TRAC* pour un sous-domaine B en forme d'ellipse englobant parfaitement l'inclusion. Deux types de milieu de propagation (dissipatif) : homogène et aléatoire. Deux types d'inclusion : dure et pénétrable. Comparaison des résultats par le critère relatif J_{CC}^{rel} .

8.2.2 Milieux stratifiés dissipatifs

Nous proposons à présent de considérer le cas de milieux stratifiés dissipatifs. Nous traitons deux types de milieux stratifiés : à deux couches (air+terre) ou à trois couches (air+terre+argile). Les profils de vitesse sont présentés sur la FIGURE 8.6, lorsque l'inclusion enfouie est dure, et sur la FIGURE 8.7, lorsque l'inclusion enfouie est pénétrable.

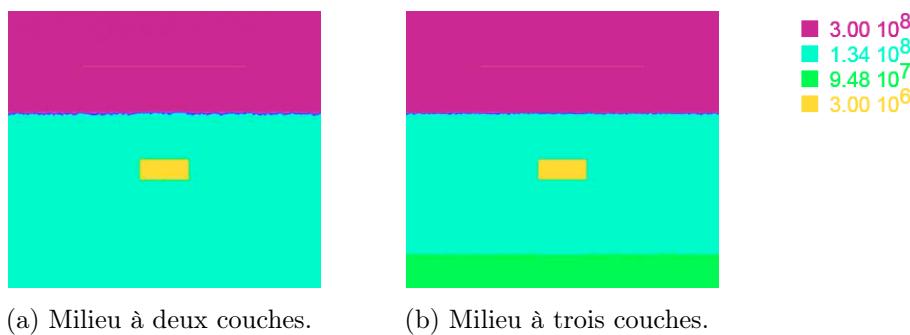


FIGURE 8.6 – Inclusion dure D dans un milieu stratifié à deux couches (a) ou à trois couches (b). La vitesse dans l'air est de $3 \cdot 10^8$ m/s, la vitesse dans la terre est d'environ : $1,34 \cdot 10^8$ m/s et la vitesse dans l'argile est d'environ $9,48 \cdot 10^7$ m/s. La vitesse de propagation dans l'inclusion est de $3 \cdot 10^6$ m/s.

Les FIGURES 8.8 et 8.9 montrent les solutions des problèmes de retournement temporel comme nous l'avons fait sur les FIGURES 8.4 et 8.5 : la ligne du haut nous propose le champ

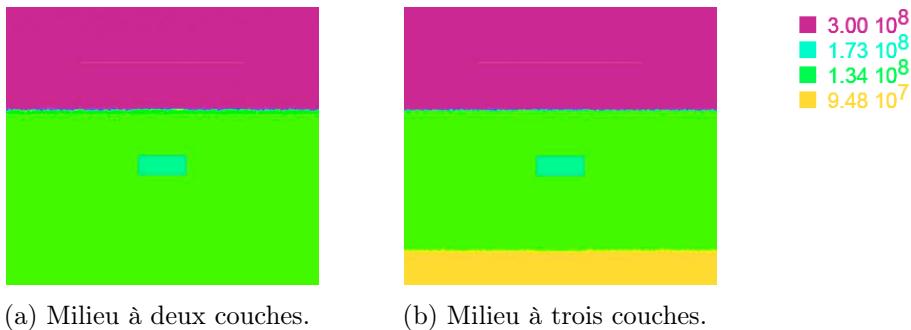


FIGURE 8.7 – Inclusion pénétrable D dans un milieu stratifié à deux couches (a) ou à trois couches (b). La vitesse dans l’air est de $3 \cdot 10^8$ m/s, la vitesse dans la terre est d’environ : $1,34 \cdot 10^8$ m/s et la vitesse dans l’argile est d’environ $9,48 \cdot 10^7$ m/s. La vitesse de propagation dans l’inclusion prend une valeur entre la vitesse de la terre et celle de l’air : $1,73 \cdot 10^8$ m/s.

diffracté exact pour référence. Il s’agit du champ diffracté direct que nous passons à l’envers. La ligne du milieu présente le champ diffracté reconstitué en utilisant la méthode *TRAC* avec un sous-domaine-test B en forme d’ellipse, englobant totalement l’inclusion. Enfin, la ligne du bas montre la reconstitution du champ diffracté par retournement temporel classique, c’est-à-dire sans sous-domaine B , ou $B = \emptyset$. De plus, chaque colonne représente une image instantanée de la solution calculée. La première colonne (à gauche) est l’instant initial de l’expérience numérique de retournement temporel, c’est-à-dire l’instant final du problème direct considéré. La dernière colonne (à droite) montre l’instant final de l’expérience numérique de retournement temporel, c’est-à-dire l’instant initial du problème direct.

Nous commençons par traiter le cas d’une inclusion dure enfouie dans un milieu stratifié dissipatif, cf. FIGURE 8.8. Nous rappelons que, dans nos expériences de retournement temporel numériques, le milieu est pris stratifié, avec la même disposition des couches, et anti-dissipatif.

Comme la vitesse change aux interfaces des strates, le champ diffracté subit différentes réflexions-réfractions au cours de la propagation directe. Nous devons alors avoir en tête le schéma de propagation que nous voulons reconstituer. Ainsi, le champ diffracté direct, que nous enregistrons sur la ligne d’émetteurs-récepteurs, se décompose de la façon suivante : d’abord, une onde divergente part de l’inclusion. Cette onde rencontre la première interface la plus proche : l’interface air/terre. Sur cette interface, l’onde est réfléchie en partie vers l’inclusion, l’autre partie est réfractée dans l’air et enregistrée sur la LER. Ensuite, comme l’inclusion est dure, l’onde, qui est revenue en arrière, se réfléchit à nouveau sur l’inclusion et repart vers la LER, où elle est réfractée en partie et enregistrée par la LER. L’autre

partie, qui est réfléchie, devient négligeable (inférieure à 1 % du front d'onde principal) et nous ne continuons pas à enregistrer les différents échos. De même, les signaux réfléchis et réfractés par la seconde interface terre/argile, lorsqu'elle existe, sont négligeables dans le cas de l'inclusion dure. Ils sont en effet majoritairement absorbés par le terme de dissipation. Par conséquent, le champ diffracté, que nous souhaitons reconstruire, doit se présenter de la façon suivante : d'abord un premier signal dû au premier écho lié à l'interface air/terre, puis le signal principal, le tout convergeant vers l'inclusion et s'annulant.

Nous illustrons les résultats sur la FIGURE 8.8. La première colonne correspond à l'instant initial de l'expérience numérique de retournement temporel avec des conditions initiales nulles. En effet, la fin de la simulation directe a lieu lorsque les signaux dans le domaine de calcul deviennent négligeables.

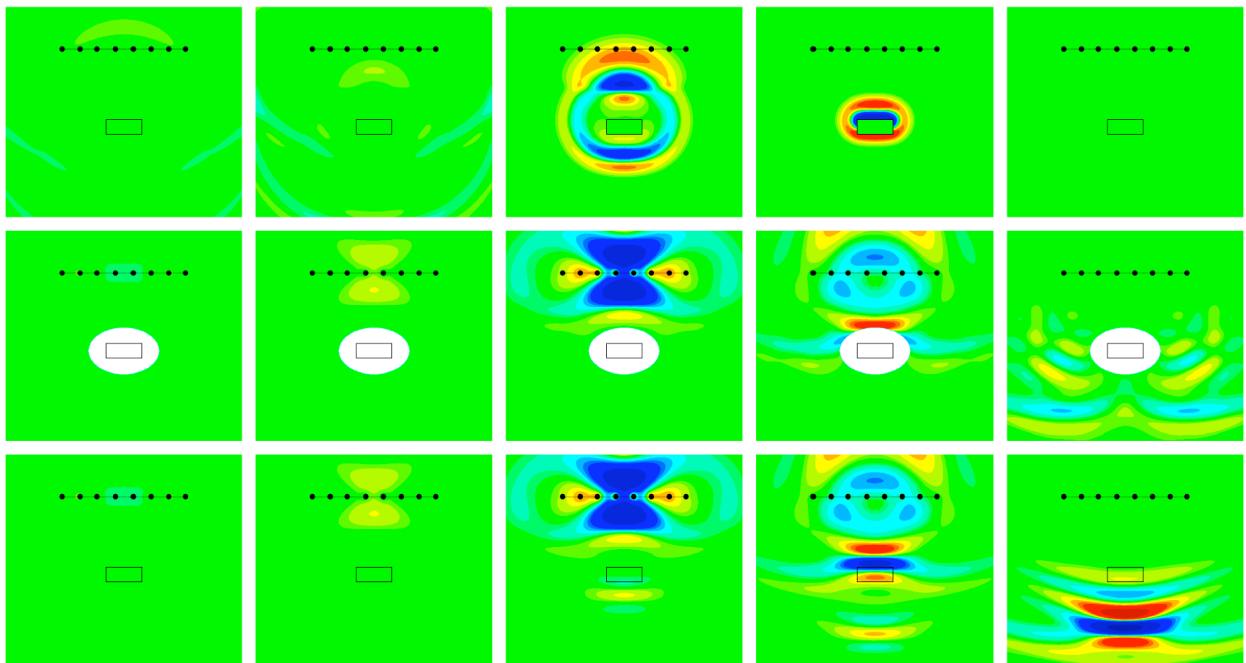
Ensuite, la colonne 2 montre l'écho dû à l'interface air/terre, que nous sommes capables de reconstituer, bien que le signal semble plus large. Sur la colonne 3, nous voyons le signal principal convergeant vers l'inclusion. Sur la colonne 4, le champ reconstitué est absorbé par la condition absorbante retournée temporellement imposée sur le sous-domaine B lorsque nous effectuons la méthode *TRAC*. En revanche, dans le cas du retournement temporel classique, un signal important reste dans le domaine.

Finalement, la dernière colonne (à droite) donne l'instant final de la simulation. Dans le cas du retournement temporel classique, un signal non négligeable se propage vers l'infini, en augmentant son amplitude grâce au terme d'anti-dissipation. En revanche, dans le cadre de la méthode *TRAC*, le champ est principalement absorbé et laisse des longues traînées dans le domaine de calcul. Cette reconstitution est donc moins bonne que dans le cas homogène dissipatif, d'autant plus que, si nous continuons la simulation, l'amplitude du résidu de signal va croître avec l'anti-dissipation. Néanmoins, le signal ressemble d'avantage au champ diffracté parfait, que dans le cas du retournement temporel classique.

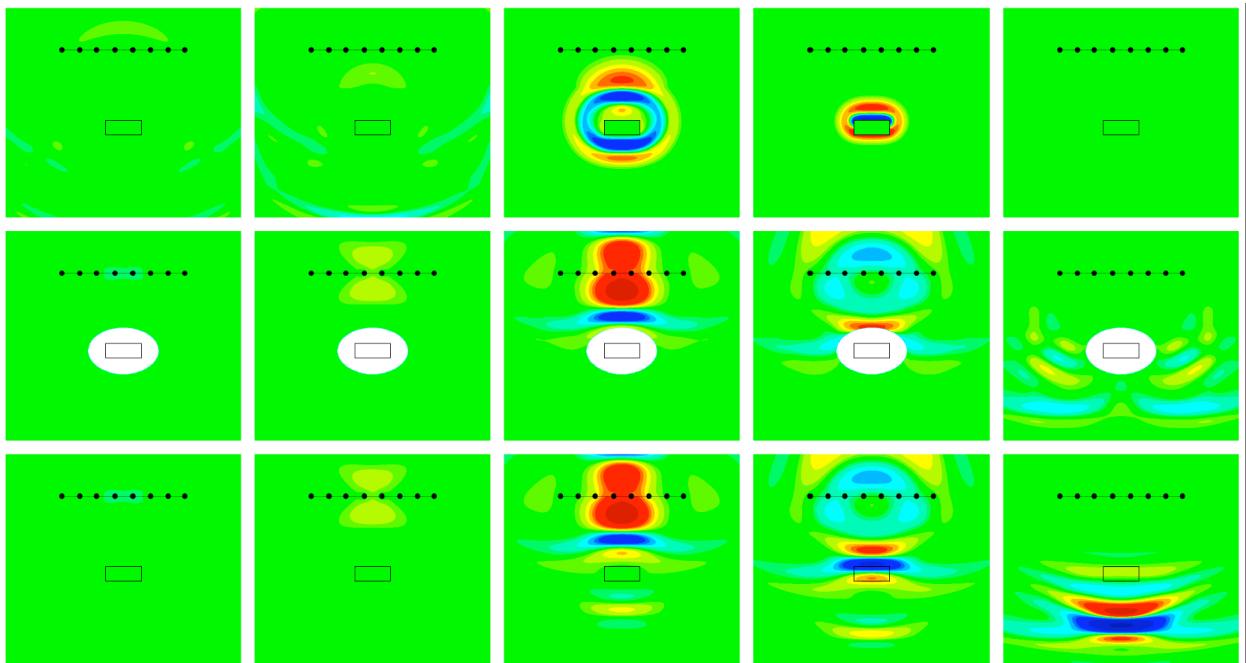
Nous effectuons des tests semblables dans le cas d'une inclusion pénétrable. Les résultats sont présentés sur la FIGURE 8.9. La disposition de cette figure est la même que pour la FIGURE 8.8.

Lorsque l'inclusion enfouie est pénétrable, la propagation du signal diffère du cas où l'inclusion enfouie est dure, donc totalement réfléchissante. Dans la suite, nous décrivons la propagation du signal émis dans un milieu stratifié à deux couches contenant une inclusion pénétrable, puis dans un milieu à trois couches contenant une inclusion pénétrable également.

Dans le cas d'un milieu stratifié à deux couches, le champ diffracté direct est émis par l'inclusion et se propage en une onde divergente. Au passage de l'interface air/terre,

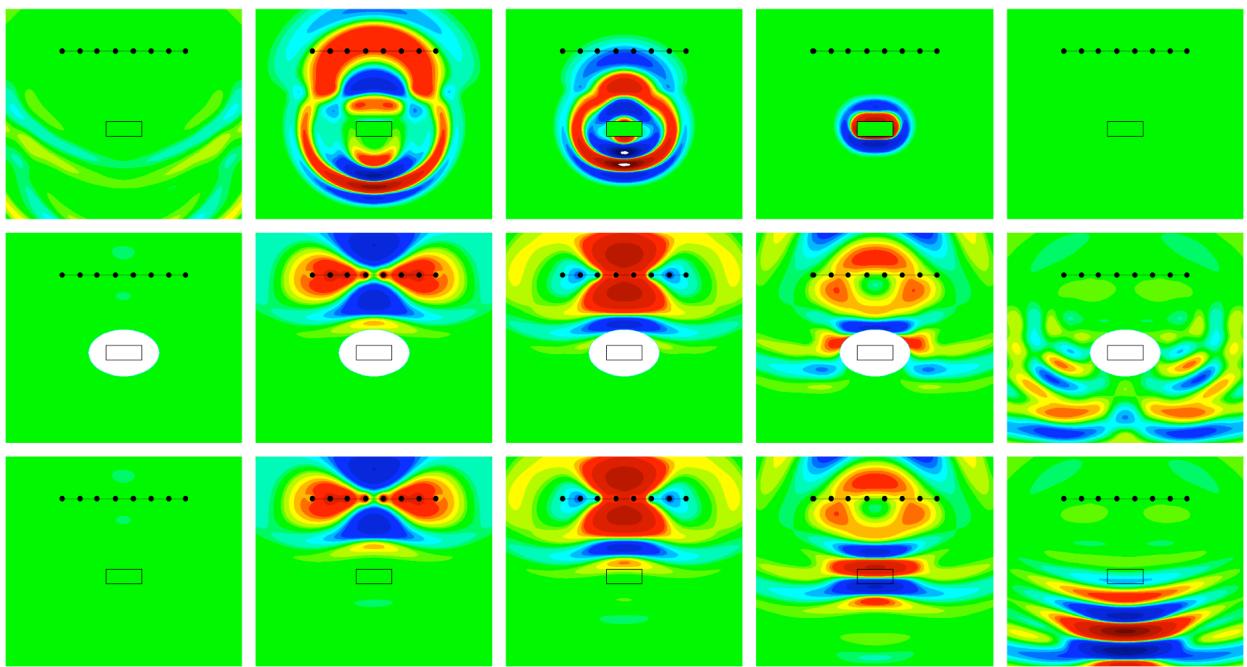


(a) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu à deux couches et dissipatif.

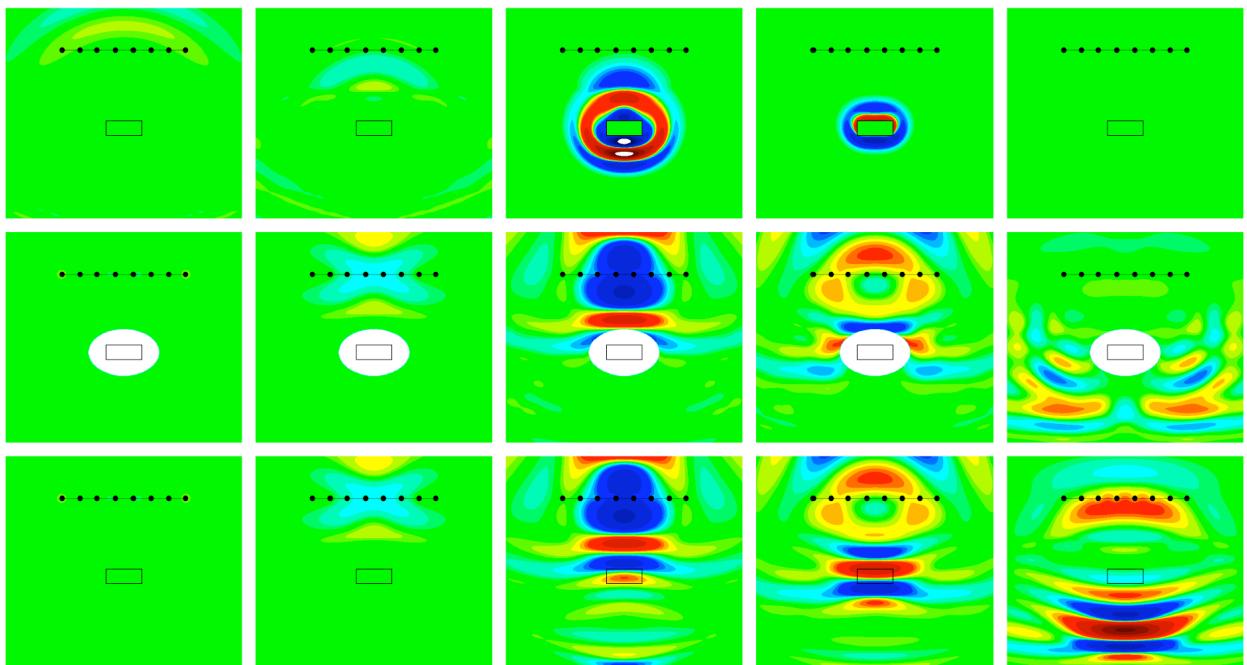


(b) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion dure dans un milieu à trois couches et dissipatif.

FIGURE 8.8 – Reconstitution du champ diffracté par une inclusion D dure dans un milieu stratifié à deux couches et dissipatif (a) ou dans un milieu stratifié à trois couches et dissipatif (b). Ligne du haut : retournement temporel exact pour référence. Ligne du milieu : méthode *TRAC* avec un sous-domaine B en forme d'ellipse contenant l'inclusion D . Ligne du bas : retournement temporel classique. De gauche à droite : images instantanées de l'instant initial du TR (soit instant final du problème direct) vers l'instant final du TR (soit instant initial du problème direct). Niveau de bruit : 0 %



(a) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu à deux couches, dissipatif.



(b) Reconstitution du champ diffracté par une inclusion pénétrable dans un milieu à trois couches, dissipatif.

FIGURE 8.9 – Reconstitution du champ diffracté par une inclusion D pénétrable dans un milieu stratifié à deux couches et dissipatif (a) ou dans un milieu stratifié à trois couches et dissipatif (b). Ligne du haut : retournement temporel exact pour référence. Ligne du milieu : méthode *TRAC* avec un sous-domaine B en forme d'ellipse contenant l'inclusion D . Ligne du bas : retournement temporel classique. De gauche à droite : images instantanées de l'instant initial du TR (soit instant final du problème direct) vers l'instant final du TR (soit instant initial du problème direct). Niveau de bruit : 0 %.

une partie de cette onde est réfractée et enregistrée sur la ligne de transducteurs. L'autre partie est réfléchie vers l'inclusion, qui cette fois-ci est pénétrable. Par conséquent, le signal réfléchi par l'inclusion est négligeable et nous observons qu'un seul front d'onde significatif. En retournement temporel, nous souhaitons alors reconstituer uniquement le front d'onde principal convergent.

Lors de la reconstruction du signal, cf. FIGURE 8.9a, la première colonne montre l'instant initial où la solution est nulle. Ensuite les colonnes 2, 3 et 4 présentent le champ convergeant vers l'inclusion. Finalement, la colonne 5 montre l'instant final où la solution doit s'annuler, car elle correspondrait à l'instant initial du problème direct. Cependant, pour le retournement temporel classique, nous avons naturellement le signal qui continue de se propager en un champ divergent. De plus, dans le cas de la méthode *TRAC*, où le sous-domaine B englobe totalement l'inclusion, nous remarquons qu'une partie importante du signal n'a pas été absorbée. Comme dans le cas de l'inclusion dure, la reconstruction n'est donc pas entièrement satisfaisante dans le cas d'un milieu stratifié à deux couches. Ceci est certainement dû au fait que la condition absorbante imposée sur le sous-domaine B ne prend pas en compte les échos multiples liés à l'interface. De plus, nous avons arrêté l'enregistrement des données bien avant que la totalité des échos se soit annulée, donc nous faisons également une erreur sur la condition initiale.

Dans le cas d'un milieu stratifié à trois couches, le champ diffracté direct est émis par l'inclusion et est confronté à deux interfaces : l'interface air/terre du côté des transducteurs et l'interface terre/argile en profondeur. De la première interface, nous enregistrons la partie réfractée du front principal, la partie réfléchie devenant négligeable par réflexion-réfraction et par la dissipation. Cette première étape est la même que dans le cas de l'interface air/terre du milieu stratifié à deux couches. Au même moment, le front principal, qui part en profondeur, est confronté à l'interface terre/argile. Il en résulte une partie réfractée, qui continue sa course en profondeur, et une partie réfléchie qui remonte vers l'inclusion. Dans sa remontée, l'onde réfléchie, résultant de l'interface terre/argile, rencontre l'inclusion et y subit quelques réflexions-réfractions sur les bords de l'inclusion. Une partie non négligeable est alors transmise vers les transducteurs après avoir au préalable traversé l'interface air/terre, et nous enregistrons de ce fait un écho, résultant de l'interface terre/argile en profondeur. Les autres échos intermédiaires et suivants sont négligeables car ils ont été absorbés par la dissipation ou ont perdu de leur force au cours des différentes réflexions-réfractions.

Les résultats sont présentés sur la FIGURE 8.9b. La première colonne présente l'instant initial de la simulation quand les transducteurs commencent à renvoyer les signaux retournés

en temps dans le milieu. La colonne 2 montre l'écho lié à l'interface terre/argile que nous arrivons à reconstituer correctement. Sur les colonnes 3 et 4, nous voyons le front principal qui converge vers l'inclusion après avoir subi une réflexion-réfraction sur l'interface air/terre. À la fin de la simulation, nous observons des images similaires au cas d'un milieu stratifié à deux couches. En effet, pour les mêmes raisons évoquées ci-avant, la reconstruction du champ diffracté n'est pas tout à fait satisfaisante. En revanche, nous remarquons que le signal restant à la fin de la méthode *TRAC* semble tout de même moins important dans le cas de trois couches que dans le cas de deux couches. Ceci est confirmé plus loin par le critère de corrélation.

Nous présentons rapidement les résultats du critère J_{CC} et de son équivalent relatif dans le TABLEAU 8.5. Les résultats sont mitigés car une valeur à 2,5 permet difficilement d'être discriminant. En revanche, nous remarquons la valeur plus importante prise par le critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas d'une inclusion pénétrable enfouie dans un milieu à trois couches. En effet, nous voyons ici l'importance de l'écho dû à l'interface en profondeur, qui a permis d'avoir plus d'information pour la reconstitution par retournement temporel. Tout comme dans le cas des milieux aléatoires du § 8.2.1, nous espérons obtenir une meilleure discrimination grâce à un nouveau critère à établir.

Critère	Inclusion dure		Inclusion pénétrable	
	2 couches	3 couches	2 couches	3 couches
$J_{CC}(\emptyset)$	0,1456 %	0,1182 %	0,0251 %	0,0306 %
$J_{CC}(B)$	0,0583 %	0,0464 %	0,0099 %	0,0082 %
$J_{CC}^{rel}(B)$	2,497	2,547	2,528	3,750

TABLEAU 8.5 – Résultats du critère J_{CC} pour la reconstruction des champs diffractés par retournement temporel classique et par la méthode *TRAC* pour un sous-domaine B en forme d'ellipse englobant parfaitement l'inclusion. Deux types de milieu stratifié de propagation (dissipatif) : à deux couches et à trois couches. Deux types d'inclusion : dure et pénétrable. Comparaison des résultats par le critère relatif J_{CC}^{rel} .

8.3 Discrimination entre une et deux inclusions

Nous avons effectué des tests numériques dans un milieu stratifié à deux couches et non-dissipatif. Ces tests numériques ont été réalisés par Jeaniffer Lissette Vides Higueros pendant son stage de Master 2 Recherche en 2011, au sein du Laboratoire Jacques-Louis Lions, sous la direction de Frédéric Nataf, cf. [VH11]. Pendant son stage, Jeaniffer a étudié notre méthode

dans le cas de milieux stratifiés non dissipatifs, et l'a appliquée plus spécifiquement à la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes, pour la configuration que nous avons présentée dans le § 7.3.2. Nous rappelons la configuration dans son milieu stratifié sur la FIGURE 8.10.

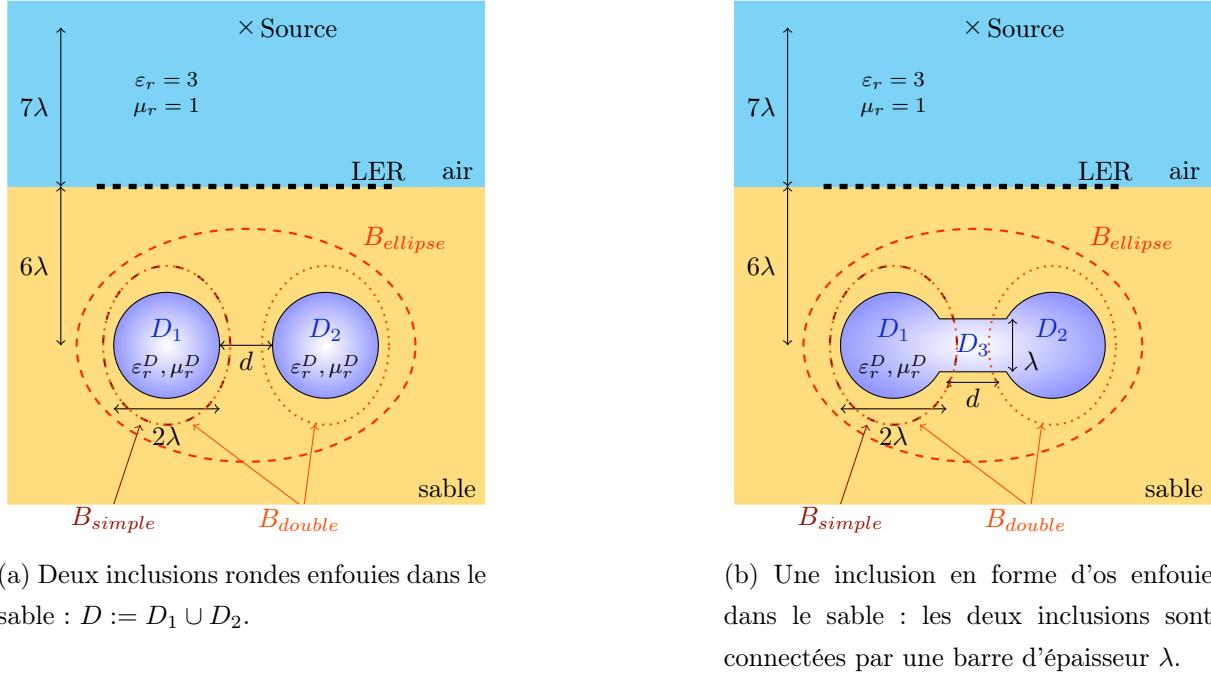


FIGURE 8.10 – Configuration des inclusions enfouies dans un milieu stratifié à deux couches (air+sable) et non dissipatif. Discrimination entre une seule inclusion et deux inclusions proches. (a) Les deux inclusions D_1 et D_2 sont rondes de rayon λ . (b) L'unique inclusion $D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$ en forme d'os renvoie aux deux inclusions D_1 et D_2 de (a) connectées par une barre D_3 d'épaisseur λ . Trois configurations de sous-domaines-test B pour détecter les inclusions : $B_{ellipse}$ englobant totalement D , B_{simple} englobant uniquement D_1 et B_{double} englobant D_1 et D_2 , manquant D_3 lorsqu'il existe. La ligne d'émetteurs-récepteurs est située à l'interface entre l'air et le sable.

Nous rappelons que, dans ce contexte, la source émet un signal de fréquence centrale 5 GHz, que la permittivité relative dans l'air est 1, tandis que la permittivité relative dans le sable est 3. Les inclusions peuvent être dures ou pénétrables, les valeurs des paramètres sont prises d'après le TABLEAU 7.6.

Les résultats obtenus avec le critère relatif J_{CC}^{rel} sont présentés dans les TABLEAUX 8.6, pour des inclusions dures, et 8.7, pour des inclusions pénétrables. Dans chaque tableau, nous comparons les résultats de discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes, lorsque ces dernières sont distantes, c'est-à-dire pour $d = 3\lambda/2$, ou lorsqu'elles sont proches, c'est-à-dire pour $d = \lambda/2$. Les tableaux sont tous composés de quatorze lignes

Inclusions dures		$d = 3\lambda/2$		$d = \lambda/2$	
Sous-domaine	Niveau de bruit	2 Inclusions	1 Inclusion	2 Inclusions	1 Inclusion
$B_{ellipse}$	0 %	5.26	10.28	9.29	9.39
	10 %	5.23	10.19	9.30	9.27
	20 %	5.18	10.54	9.66	9.31
	30 %	5.49	9.93	9.69	9.15
B_{simple}	0 %	1.04	0.99	0.91	1.02
	10 %	1.04	1.00	0.91	1.02
	20 %	1.04	1.01	0.91	1.02
	30 %	1.07	1.00	0.91	1.02
B_{double}	0 %	3.69	1.09	3.52	2.14
	10 %	3.67	1.09	3.56	2.12
	20 %	3.84	1.11	3.55	2.17
	30 %	3.73	1.10	3.60	2.10

TABLEAU 8.6 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en fer enfouies dans du sable. La LER est située à l'interface entre l'air, d'où la source émet, et le sable. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes : distantes, $d = 3\lambda/2$, ou proches, $d = \lambda/2$.

Inclusions pénétrables		$d = 3\lambda/2$		$d = \lambda/2$	
Sous-domaine	Niveau de bruit	2 Inclusions	1 Inclusion	2 Inclusions	1 Inclusion
$B_{ellipse}$	0%	5.24	8.55	8.43	8.76
	10%	5.21	8.41	8.49	8.51
	20%	5.21	8.61	8.47	8.69
	30%	5.07	8.01	8.27	9.24
B_{simple}	0%	0.99	0.95	0.90	1.10
	10%	0.99	0.94	0.90	1.10
	20%	0.99	0.94	0.91	1.11
	30%	1.00	0.94	0.90	1.12
B_{double}	0%	3.26	1.01	3.22	2.17
	10%	3.28	1.01	3.28	2.17
	20%	3.28	1.01	3.20	2.19
	30%	3.35	1.01	3.22	2.19

TABLEAU 8.7 – Résultats du critère relatif J_{CC}^{rel} dans le cas de mines en plastique enfouies dans du sable. La LER est située à l'interface entre l'air, d'où la source émet, et le sable. Discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes : distantes, $d = 3\lambda/2$, ou proches, $d = \lambda/2$.

et six colonnes.

La première ligne précise le type d'inclusion que nous considérons. La seconde explique le contenu de chaque colonne. Ensuite, il faut lire les lignes quatre par quatre pour les trois configurations de sous-domaines-test dans l'ordre : $B_{ellipse}$, B_{simple} et B_{double} .

La première colonne rappelle le sous-domaine-test utilisé pour effectuer la méthode *TRAC*. La deuxième colonne précise le niveau de bruit sur les données. Le bruit choisi varie de 0 % à 30 % par décade. Les colonnes 3 et 4 sont consacrées aux inclusions distantes, tandis que les colonnes 5 et 6 traitent des inclusions proches. Dans les colonnes impaires, nous présentons les valeurs du critère relatif J_{CC}^{rel} pour deux inclusions distinctes, alors que dans les colonnes paires, il s'agit des valeurs du critère relatif J_{CC}^{rel} pour une unique inclusion.

Pour les deux types d'inclusion, dures ou pénétrables, nous observons que la méthode *TRAC* permet de discriminer nettement entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes, lorsque $d = 3\lambda/2$. En effet, lorsque l'inclusion D est entièrement contenue dans le sous-domaine-test B , la valeur du critère relatif J_{CC}^{rel} est supérieure à 3, tandis que s'il reste une partie de l'inclusion D dans le domaine de calcul, la valeur du critère relatif J_{CC}^{rel} tourne autour de 1. En revanche, lorsque les inclusions sont plus proches, c'est-à-dire pour $d = \lambda/2$, il devient plus difficile de discriminer entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes en utilisant le sous-domaine-test B_{double} , tout en restant assez satisfaisant. Une fois encore, un nouveau critère pourrait permettre d'améliorer ces résultats.

D'autres résultats sur les milieux stratifiés et non-dissipatifs sont présentés dans le mémoire de stage de Jeaniffer Vides intitulé *Time Reversed Absorbing Conditions in Stratified Media*, dont la soutenance a eu lieu en juillet 2011.

Pour conclure, la méthode *TRAC*, utilisée sans modification liée aux milieux stratifiés, donne déjà des résultats de discrimination assez satisfaisants. Il est maintenant intéressant de poursuivre notre étude en adaptant la condition absorbante retournée temporellement au type de milieu dans lequel nous travaillons.

Conclusion

Nous concluons cette partie en résumant les différentes extensions de la méthode *TRAC* que nous avons étudiées.

Nous avons montré que la méthode *TRAC* peut s'appliquer à l'identification d'objets pour l'équation des ondes scalaire et pour l'équation de Helmholtz. Dans chacun des cas, nous avons établi deux critères de discrimination pour quantifier si le sous-domaine-test B englobe correctement l'inclusion D à détecter.

Ensuite, nous avons étendu la méthode *TRAC* au cas d'une ligne de transducteurs à ouverture partielle. Nous avons montré que la méthode *TRAC* permettait encore de reconstituer le champ diffracté. De plus, la méthode *TRAC* s'applique encore à l'identification d'objets et nous avons testé la méthode dans le cadre de la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes plus ou moins proches. Pour cela, nous avons dû établir un troisième critère, J_{CC} qui se révèle très robuste vis-à-vis du bruit sur les données enregistrées. Ce nouveau critère s'avère en effet prometteur dans la détection d'objet et une modification de ce critère devrait nous permettre d'améliorer significativement nos résultats de discrimination.

Par ailleurs, nous avons aussi confronté la méthode *TRAC* à des milieux hétérogènes et dissipatifs, pour approcher d'avantage à des applications concrètes telles que l'imagerie médicale, la géophysique ou la détection de mines. Là encore, le critère relatif J_{CC}^{rel} nous donne des résultats prometteurs.

Pour conclure cette partie, nous joignons le second article à paraître dans *Wave Motion* prochainement à propos de la méthode *TRAC* dans le cas d'une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture partielle, co-écrit avec F. Assous et F. Nataf. Nous y retrouvons la description de la méthode dans le cas de l'équation des ondes scalaire, puis nous montrons la capacité de la méthode à reconstruire le champ diffracté à partir de données enregistrées sur une ligne de transducteurs à ouverture partielle. Ensuite, nous présentons des résultats numériques pour l'identification d'objets et nous donnons les trois critères d'identification que nous avons étudiés. Enfin, nous appliquons la méthode *TRAC* à la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions distinctes.

Time Reverse Absorbing Condition in the Partial Aperture Case.

Auteurs Franck Assous^{*,†,★}, Marie Kray^{‡,§,★}, Frédéric Nataf^{§,‡,★}

Journal à paraître dans Wave Motion, Elsevier

Note accepté, disponible sur HAL

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00581291/fr/>

^{*} Department of Computer Sciences and Mathematics, Ariel University Center, 40700, Ariel, Israel

[†] Department of Mathematics, Bar-Ilan University, 52900, Ramat-Gan, Israel

[‡] UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France

[§] CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France

[★] franckassous@netscape.net, kray@ann.jussieu.fr, nataf@ann.jussieu.fr

Time Reversed Absorbing Condition in the Partial Aperture Case

F. Assous*, M. Kray†, F. Nataf†

Abstract

The time-reversed absorbing conditions (*TRAC*) method introduced in [AKNT10, AKNT] enables one to “recreate the past” without knowing the source which has emitted the signals that are back-propagated. It has been applied to inverse problems for the reduction of the computational domain size and for the determination, from boundary measurements, of the location and volume of an unknown inclusion. The method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. The aim of this paper is to extend the *TRAC* method to the partial aperture configuration and to discrete receivers with various spacing. In particular the *TRAC* method is applied to the differentiation between a single inclusion and a two close inclusion case. The results are fairly insensitive to noise in the data.

Contents

1	Introduction	1
2	Principle of the TRAC method	2
3	Recreate the past	5
4	Inverse problem	6
4.1	Criteria	9
4.1.1	Final time criterion	9
4.1.2	Absorbing boundary condition criterion	9
4.1.3	Cross correlation criterion	10
4.2	Test cases : numerical results	10
4.2.1	One inclusion	11
4.2.2	One inclusion vs. two inclusions	11
5	Conclusion	19

1 Introduction

Time reversal is a subject of very active research. The principle is to take advantage of the reversibility of wave propagation phenomena, for example in acoustics or electromagnetism in a non-dissipative but unknown medium, to back-propagate signals to the sources that emitted them. The initial experiment, see [FWCM91], was to refocus, very precisely, a recorded signal after passing through a barrier consisting of randomly distributed metal rods. Since then, numerous applications of this physical principle have been designed, see [Fin09] or for numerical

¹Bar Ilan University, franckassous@netscape.net

²University of Paris 6, nataf@ann.jussieu.fr, kray@ann.jussieu.fr

experiments [LMF⁺06] and references therein. The first mathematical analysis can be found in [BF02] for a homogeneous medium and in [CF97] and [BPZ02] for a random medium. In this study we do not consider random or inhomogenous media.

This paper is a follow up of [AKNT10, AKNT] in which the *TRAC* (Time-Reversed Absorbing Conditions) method was introduced. This method enables one to “recreate the past” without knowing the location and the properties of the inclusion which diffracted the signals that are back-propagated. This was made possible by removing a small region surrounding the scattering inclusion. This has two applications in inverse problems: the reduction of the size of the computational domain and the determination of the location of an unknown inclusion from boundary measurements. The first application is reminiscent of the redatuming method introduced in [Ber79]. In our case, we use the wave equation and not a paraxial or parabolic approximation. This extends the domain of validity of the redatuming approach. Concerning the second application there is a huge literature that deals with this inverse problem. We mention the MUSIC algorithm [The92] and its application to imaging [LD03], the sampling methods first introduced in [CK96], see the review paper [CCM00] and references therein, and the DORT method [PMSF96]. Mathematical analysis of this kind of approach can be found in [CK98]. These methods were developed in the time-harmonic domain except for the recent work [CHLM10] whereas the *TRAC* method is designed in both the time-dependent and harmonic domains. In the time domain, a well-known technique developed initially for earth imaging, is the reverse time migration *RTM*, [Cla85]. It consists in cross-correlating the incident field with the time reverse scattered field, see right part of figures (6–9).

In this paper we extend the *TRAC* method by considering partial or full aperture for discrete receivers with various spacing. This requires the introduction of two new cost-like functions. Notice that one of them combines the original *TRAC* method with *RTM*, see § 4.1.3. In particular we apply the *TRAC* method to the differentiation between a single inclusion and a two close inclusion case. We stress that in contrast to many inverse problem methods, our method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. Hard, soft and penetrable inclusions are treated in the same way. The outline of the paper is as follows. In section 2 we recall the principle of the *TRAC* method for the time dependent wave equation. In section 3, we demonstrate the capacity of the method to recreate the past from boundary measurements in the full or partial aperture case. In section 4, we introduce two new criteria for applying our method to inverse problems. As an illustration, we investigate the ability of the method to differentiate between one inclusion and two close ones. In these numerical examples, the physical parameters are related to iron or plastic mines. We notice that in all our tests, the method has proved to be quite insensitive with respect to noise in the data.

2 Principle of the TRAC method

In previous papers [AKNT10, AKNT], we introduced a new method that enables one to “recreate the past” without knowing the source which has emitted the signals that will be back-propagated. This was made possible by blending time reversal techniques and absorbing boundary conditions. After removing a small region enclosing the source, we introduced time reversed absorbing conditions (*TRAC*). Let us describe this approach now.

We consider an incident wave u^I impinging on an inclusion D characterized by a different propagation speed c which is constant outside the inclusion D . The total field u^T can be

decomposed into the incident and scattered field, so $u^T := u^I + u^S$. We consider the problem in d dimensions $d = 1, 2, 3$ and assume that the total field satisfies the wave equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^T}{\partial t^2} - c^2 \Delta u^T = 0 \text{ in } \mathbf{R}^d \\ (u^T - u^I)(t, \vec{x}) \text{ satisfies a Sommerfeld condition at } \infty \\ \text{homogeneous initial conditions.} \end{array} \right. \quad (1)$$

Let Ω denote a bounded domain that surrounds D with Γ_R as its boundary. We assume that the incident wave u^I is generated by a point source such that after a time T_f the total field u^T is negligible in the bounded domain Ω . Let v be a field that satisfies the wave equation.

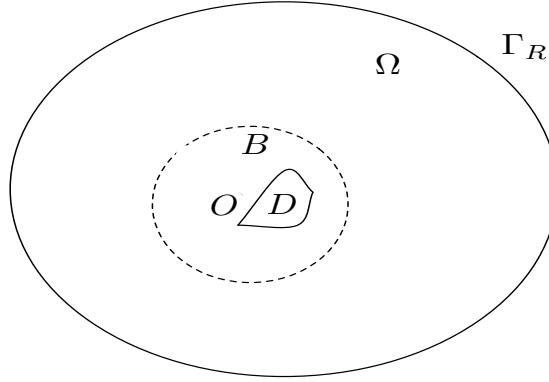


Figure 1: Geometry

We denote by v_R the corresponding time-reversed field that also satisfies the same physical equation, $v_R := v(T_f - t, \vec{x})$. We assume that we have recorded the value of the total field u^T on the boundary Γ_R that encloses domain Ω . Our goal is to derive a boundary value problem (BVP) whose solution is the time-reversed field. The physical properties of the inclusion or the exact location of the body are not known. The only things we know are the physical properties of the surrounding medium, in other words the propagation speed c outside D . There c is assumed to be a constant denoted c_0 . Thus, u_R^T satisfies the following equation

$$\frac{\partial^2 u_R^T}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta u_R^T = 0 \text{ in } (0, T_f) \times \Omega \setminus D. \quad (2)$$

We impose Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time-reversal of the recorded fields and zero initial conditions. The key point is that we lack a boundary condition on the boundary of the inclusion in order to define a well-posed BVP on the time-reversed field u_R^T in $\Omega \setminus D$. For inverse problems, the shape and/or location of the inclusion D is not known and sometimes the type of boundary condition (hard or soft inclusion) on the body is not known either.

To overcome these difficulties, the classical approach for example solves the problem (2) in the entire domain Ω , assuming that there is no inclusion D , see [LMF⁺06] and references therein. Denote by w_R^T this “approximate” time-reversed solution, we have in the entire domain Ω :

$$\frac{\partial^2 w_R^T}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta w_R^T = 0 \text{ in } (0, T_f) \times \Omega \quad (3)$$

with Dirichlet boundary conditions on Γ_R equal to the time reversal of the recorded fields and zero initial conditions. One can easily verify that this approximate time-reversed solution u_R^T differs from u_R^S .

In [AKNT10, AKNT], we derived a boundary value problem (*BVP*) whose solution is the time-reverse of the scattered field u_R^S . To derive a boundary value problem satisfied by u_R^S without knowing the physical properties of the inclusion D or its exact location, we introduce B a subdomain enclosing the inclusion D , see Figure 1. Then, we have to determine a specific boundary condition for u_R^S on the boundary ∂B so that the solution to this problem will coincide with u_R^S in the restricted domain $\Omega \setminus B$. In the three space dimension, we introduced the boundary condition named *TRAC* by

$$\text{TRAC}(u_R^S) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R^S(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^S(t, \cdot)) - c \frac{u_R^S(t, \cdot)}{r}. \quad (4)$$

Note, that due to the minus sign before the term u_R^S/r , the *TRAC* (4) is *not* the *BT*¹ [BT80] absorbing boundary condition. The time-reversed scattered field u_R^S satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_R^S}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta u_R^S = 0 \text{ in } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(u_R^S) = 0 \text{ on } \partial B \\ u_R^S(t, \vec{x}) = u^S(T_f - t, \vec{x}) \text{ on } \Gamma_R \\ \text{zero initial conditions.} \end{array} \right. \quad (5)$$

The *TRAC* is not only not the standard *BT*¹ *ABC* but also has an “anti absorbing” term $(-cu_R^S/r)$. A natural concern arises about the well-posedness of *BVP* (5). Although we have not developed a general theory, we prove an energy estimate for this problem in a special geometry, see [AKNT10]. After many computations we have never encountered stability problems. In [AKNT10, AKNT] a numerical procedure for inclusion identification was deduced from this formulation:

When the subdomain B encloses the inclusion D then, the solution in the restricted domain $\Omega \setminus B$ must be equal to the time reversed solution. Conversely, if the computed solution differs notably from the time reversed solution, it shows that the ball B does not enclose the inclusion D .

The formulation of (4) in two space dimensions is straightforward, see [BT80, BGT82]. In the above formula, it is sufficient to replace r by \sqrt{r} and $1/r$ by $1/(2r)$ and (4) reads:

$$\frac{\partial u_R^S}{\partial t} + c \frac{\partial u_R^S}{\partial n} - c \frac{u_R^S}{2r} = 0. \quad (6)$$

We have assumed so far, for sake of simplicity, that the surface B is a sphere or a circle. Since we are finding an approximate location of the inclusion this is usually sufficient. For an elongated body a ball can be replaced by an ellipse or spheroidal surface, see § 4.2. Absorbing boundary conditions for these cases have been developed in [MTH08, MT09, BDSG09]. For more general surfaces several absorbing conditions have been developed, for example [ABB99, KTU87]. Comparison between many options are presented in [MTH08, MT09]. As shown above, a first order *TRAC* method simply reverses the sign of the non-differentiated term of the corresponding first order absorbing boundary condition. Thus, a first order TRAC for a general bounding surface in two dimensions is given by:

$$\text{TRAC}(u_R^S) := \frac{\partial}{\partial t}(u_R^S(t, \cdot)) + c \frac{\partial}{\partial n}(u_R^S(t, \cdot)) - \frac{c\kappa}{2} u_R^S(t, \cdot) \quad (7)$$

where κ is the curvature of the bounding surface B .

3 Recreate the past

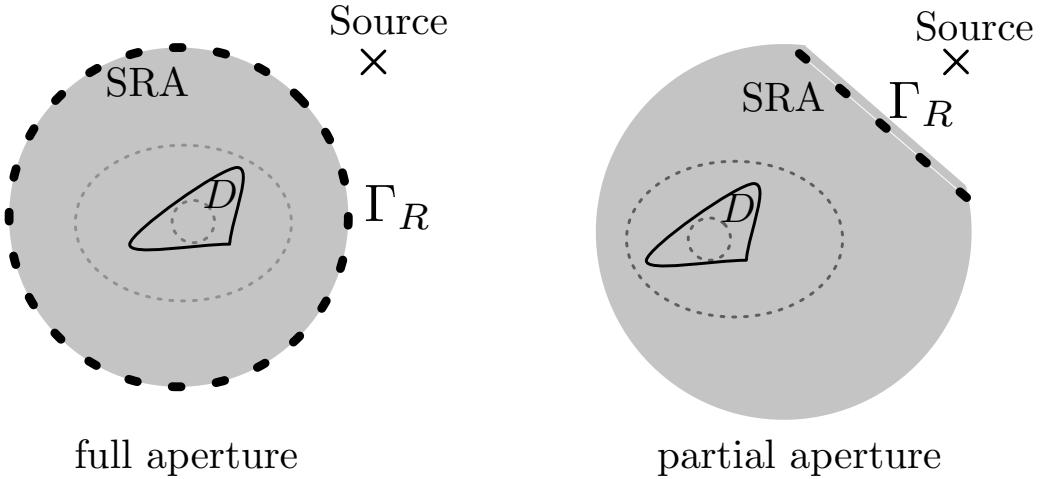


Figure 2: Configurations of the source-receiver array (SRA)

In the proof of concept paper [AKNT10, AKNT], we had already demonstrated the capacity of the TRAC method to recreate the past when the line of receivers Γ_R is continuous and encloses the bounded domain Ω as in the geometry shown in figure 1. For a domain B arbitrary located in Ω , we solve the following problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_R^S}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta v_R^S = 0 \text{ in } (0, T_f) \times \Omega \setminus B \\ \text{TRAC}(v_R^S) = 0 \text{ on } \partial B \\ v_R^S(t, \vec{x}) = u^S(T_f - t, \vec{x}) \text{ on } \Gamma_R \\ \text{zero initial conditions,} \end{array} \right. \quad (8)$$

with an *ad hoc* artificial boundary condition on the remaining part of the external boundary. When B encloses inclusion D , we know from the previous section that v_R^S coincides with the restriction of u_R^S to the domain $\Omega \setminus B$. Moreover the method proved to be quite insensitive to the level of noise in the data. Indeed, we added a Gaussian noise by replacing on Γ_R the recorded scattered field u^S with

$$u^S := (1 + \text{Coeff} * \text{randn}) * u^S, \quad (9)$$

where randn satisfies a centered reduced normal law and Coeff is the level of noise.

In this paper, in order to be closer to what happens in many real cases as in medical imaging, geophysics, mine detection, ..., we relax these assumptions in two ways:

- we consider a finite number of receivers spaced by a fraction of the central wavelength λ ;
- the aperture is reduced.

In order to create synthetic data, equation (1) is approximated by the FreeFem++ package [Hec10] which implements a finite element method in space. In this study we use a standard P^1 finite element method. The advancement in time is given by a second order central finite difference scheme so that it is time reversible also on the numerical level. The computational domain is a disk and we use an absorbing boundary condition on its external boundary in order to simulate an otherwise infinite domain. We report the results for receivers spaced by $\lambda/4$ and for both a full aperture and a 90° aperture, see figure 2. In both cases, we consider a soft inclusion in a homogeneous medium with a diameter λ . We first consider a full aperture case. In Fig. 3, we have several lines and five columns. Each column corresponds to a numerical time-reversed experiment and each line corresponds to a snapshot of the solution at a given time, in the domain shaded in figure 2. The top line corresponds to the initial time for the time-reversed problem, equivalent to $t = T_f$ for the forward problem. The last line is the solution at the final time of the reversed simulation which corresponds to the initial time $t = 0$ for the forward problem. In column one (namely the left column), we display for reference the perfect time reverse solution which is the reverse of the forward problem.

In columns two and three, we display the solution of the reversed problem (8) with a ball B which encloses the inclusion. In column two there is no noise in the recorded data on the source-receiver array (SRA) whereas in column three we have 30% noise. As expected, the sequences of snapshots are the restrictions to the domain $\Omega \setminus B$ of column one. At the expense of removing a domain enclosing the inclusion, we are able to recreate the past even with a high level of noise. This exemplifies an application of the *TRAC* method: when the ball B encloses the inclusion we are able to reconstruct the signal in a region that is closer to the inclusion than the line of receivers Γ_R . This allows the reduction of the size of the computational domain. In this respect, the method is related to the redatuming method, see [Ber79]. In columns four and five, we show the solutions of the reversed problem (8) with a ball B smaller than the soft inclusion with no noise and 30% noise respectively. In contrast to the previous cases, the sequence of snapshots differs significantly from column one after the reversed scattered field reached the inclusion. In figure 3, it corresponds to the three last lines.

In the second example we consider a partial aperture problem as depicted in figure 2. Figure 4 is organized the same as the previous one and can be read in the same way. Here again, when the domain B encloses inclusion D (columns two and three), we are able to recreate the past but this time only in the cone corresponding to the 90° aperture of the SRA. When the domain B does not enclose inclusion D (columns four and five), as in the full aperture case, the sequence of snapshots differs significantly from column one after the reversed scattered field reached the inclusion. Observe that the numerical simulations are quite insensitive to the level of noise.

4 Inverse problem

We have seen in the previous section that when the domain B encloses inclusion D , the TRAC method is able to recreate the past. But when the domain B does not enclose inclusion D , the solution of equation (8) does not coincide with the time reversed scattered field u_R^S . This property was used in a previous paper [AKNT10, AKNT] to locate the inclusion with a trial and error procedure based on moving the domain B . Indeed, by playing with the location and size of the subdomain B , it was possible to determine the location and volume of inclusion D . The method basically depended on designing a mathematical criterion that tests the computed solution of equation (8) to determine if it corresponds to the time reversed scattered field u_R^S or not of course without knowing u_R^S . In the next section, we introduce several criteria to solve the inverse problem.

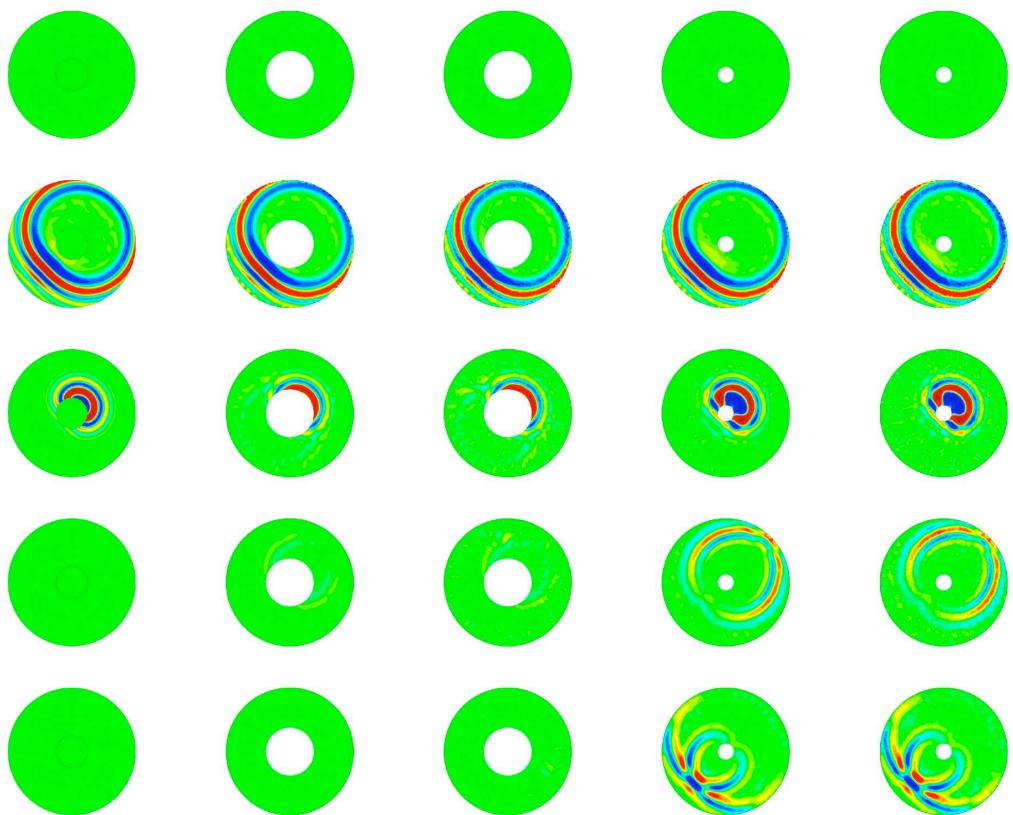


Figure 3: Snapshots for the *TRAC* method in the case of full aperture. Column 1: reverse of the forward problem, columns 2 (no noise) and 3 (30% noise): TRAC method when $D \subset B$, columns 4 (no noise) and 5 (30% noise): TRAC method when $D \not\subset B$.

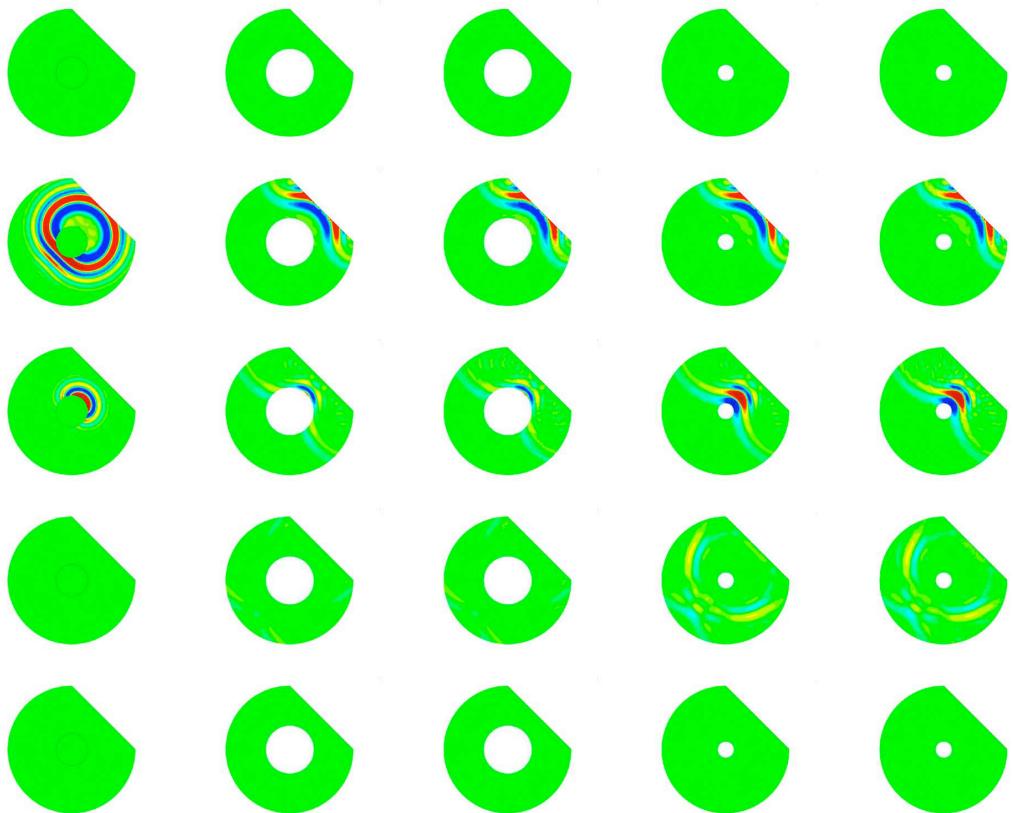


Figure 4: Snapshots for the *TRAC* method in the case of partial aperture. Column 1: reverse of the forward problem, columns 2 (no noise) and 3 (30% noise): *TRAC* method when $D \subset B$, columns 4 (no noise) and 5 (30% noise): *TRAC* method when $D \not\subset B$.

4.1 Criteria

We define three different criteria to assert that the domain B does not enclose inclusion D . The first criterion see § 4.1.1 was already introduced in [AKNT10, AKNT]. As we shall see, it works only for the full aperture case. The second and third criteria are effective for partial aperture.

4.1.1 Final time criterion

The first criterion named *final time criterion* uses the fact that at the final time the solution should be zero. Conversely, when the final solution is not zero (see columns four and five of figure 3), it proves that D is not included in domain B . This observation leads to an easy-to-compute criterion which is independent of the size of the domain:

$$J_{FT}(B) := \frac{\|v_R^S(T_f, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}}{\sup_{t \in [0, T_f]} \|u^I(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}} \quad (10)$$

which vanishes when the artificial domain encloses the inclusion. One could hope that when the criterion is zero, domain B encloses inclusion D . Criterion J_{FT} is normalized w.r.t. the strength of the incident field u^I . However, the computed reverse time scattered field v_R^S basically depends on the aperture of the SRA. A full aperture will give a stronger signal than a partial aperture. In order to get comparable figures, for a trial domain B instead of $J_{FT}(B)$ defined in (10), we introduce a relative criterion, in the same spirit as the signal-to-noise ratio (SNR),

$$J_{FT}^{rel}(B) := \frac{J_{FT}(\emptyset)}{J_{FT}(B)},$$

where $J_{FT}(\emptyset)$ is the final time criterion computed in absence of any trial domain B , the same way as in the classical approach in time reversal techniques. Note that in this case, criterion $J_{FT}(\emptyset)$ should be large. Consequently, when $J_{FT}^{rel}(B)$ is close to one, we infer that the domain B does not enclose the inclusion. In the opposite case, we can reasonably assume that when $J_{FT}^{rel}(B)$ is large, trial domain B encloses inclusion D . As we will see in section 4.2, this is true in practice only for a full aperture case. This motivates the design of two other criteria.

4.1.2 Absorbing boundary condition criterion

The second criterion is derived from the use of absorbing boundary conditions. Indeed, the basis of the method is that the time reversed scattered field u_R^S satisfies

$$\text{TRAC}(u_R^S) = 0 \quad (11)$$

at any point outside the inclusion. In equation (8), this relation is used on the boundary of the artificial domain B in order to compute v_R^S . If the domain B encloses inclusion D , u_R^S and v_R^S coincide and thus we have, up to approximation errors both in the absorbing condition and in the numerical scheme,

$$\text{TRAC}(v_R^S) = 0 \quad (12)$$

at any point outside the inclusion. Thus, we introduce a new criterion

$$J_{ABC}(B) := \frac{\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) v_R^S \right\|_{L^\infty((0, T_f) \times \Omega \setminus B)}}{\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) u^I \right\|_{L^\infty((0, T_f) \times \Omega)}}, \quad (13)$$

where r is a radial coordinate with the origin at the center of trial domain B . Since this center is somewhat arbitrary, we have dropped the curvature term which could be too large when the domain B is small. When trial domain B encloses inclusion D , the criterion $J_{ABC}(B)$ should be small. At the opposite, when part of inclusion D is outside B , J_{ABC} should be significantly larger. As for the previous criterion, we rather define a relative criterion

$$J_{ABC}^{rel}(B) := \frac{J_{ABC}(\emptyset)}{J_{ABC}(B)},$$

where $J_{ABC}(\emptyset)$ still denotes the case where there is no trial domain B . Results are shown in section 4.2.

4.1.3 Cross correlation criterion

This criterion is inspired from reverse time migration techniques, [Cla85]. It consists in cross-correlating the incident field u^I with the time reversed scattered field v_R^S . In classical applications of earth imaging, the following integral is computed as a function of $\vec{x} \in \Omega$

$$f(\vec{x}) := \int_{t=0}^{t=T_f} v_R^S(T_f - t, \vec{x}) \times u^I(t, \vec{x}) \, dt. \quad (14)$$

The function f images the discontinuities of the propagation speed $c(\vec{x})$, see [Cla85]. In this paper, we introduce the following related criterion

$$J_{CC}(B) := \frac{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} v_R^S(T_f - t, \cdot) \times u^I(t, \cdot) \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega \setminus B)}}{\left\| \int_{t=0}^{t=T_f} |u^I(t, \cdot)|^2 \, dt \right\|_{L^\infty(\Omega)}}, \quad (15)$$

where v_R^S is the solution to problem. When trial domain B encloses inclusion D , there is no discontinuity to be imaged in $\Omega \setminus B$ and the criterion $J_{CC}(B)$ should be small. At the opposite, when part of inclusion D is outside B , we note that the function f images this part. So that J_{CC} should be significantly larger. As for the two previous criteria, we rather define a relative criterion

$$J_{CC}^{rel}(B) := \frac{J_{CC}(\emptyset)}{J_{CC}(B)}, \quad (16)$$

where $J_{CC}(\emptyset)$ still denotes the case where there is no trial domain B . Results shown in section 4.2 will prove the robustness and effectiveness of this criterion.

4.2 Test cases : numerical results

In section 4.2.1, we validate and compare the three criteria in the case of one inclusion with full or partial aperture with noise in the data. We will see that J_{FT}^{rel} and J_{ABC}^{rel} are the criteria of choice for the full aperture case. For a partial aperture, the two other criteria J_{ABC}^{rel} and J_{CC}^{rel} are effective. We investigate in § 4.2.2 a more realistic test case with a partial aperture and an unknown number of scatterers. For different geometries of trial domain B , hard, soft or penetrable inclusions will be studied.

4.2.1 One inclusion

We consider a soft inclusion D and trial domains B that either enclose or are contained in D with full or partial aperture as described in section 3. We have four levels of noise from 0% to 30% and various spacings of the receivers from 0 (i.e. a continuous line of receivers) to $\lambda/2$, λ denoting the wavelength of the central frequency of the incident signal. The snapshots are depicted in figures 3 and 4 and the values of the criteria are given in tables 1 and 2.

For a full aperture case, we give in table 1 the values of the three different criteria first when trial domain B does not enclose inclusion D (columns three, four and five), then when B encloses D (columns six, seven and eight). We recall that the relative criteria close to one aims to indicate that trial domain B does not enclose inclusion D . At the opposite, a significant value of the relative criteria should indicate that trial domain B encloses inclusion D . In the latter case, the criterion is large but not infinite. This is due to numerical errors and the fact that the *TRAC* is not an exact absorbing boundary condition. In the left part of Table 1 which corresponds to $D \not\subseteq B$, all criteria are close to one and are quite insensitive to the spacing of the SRA or to the level of noise, even for 30% noise. In the right part of Table 1 which corresponds to $D \subset B$, the third criteria J_{CC}^{rel} is not sufficiently discriminating. This is due to the fact that the reverse time migration method which is the basis of the J_{CC}^{rel} is not a good imaging method in the case of full aperture (contrary to the partial aperture case below). We notice that criteria J_{FT}^{rel} and J_{ABC}^{rel} deteriorate with the noise level and the spacing of the SRA. They are discriminating in all cases even for 30% noise.

The corresponding results for a partial aperture case are given in Table 2. Now, the criterion J_{FT}^{rel} does not work in the sense that in both cases ($D \not\subseteq B$ and $D \subset B$) the criterion is close to one. As we see in Figure 4, at the final time of the reverse time simulation, the signal is zero even when domain B does not enclose inclusion D . This is due to the use of an artificial boundary condition on the external boundary of the domain not equipped with receivers, see problem (8). This does not occur in the full aperture case where a Dirichlet boundary condition is imposed on this external boundary due to the presence of receivers. Therefore, we will not use the criterion J_{FT}^{rel} in what follows when we consider only partial aperture examples. The two other criteria J_{ABC}^{rel} and J_{CC}^{rel} enable the discriminate between the cases $D \not\subseteq B$ and $D \subset B$. They are both nearly insensitive to the spacing between the receivers. In addition, the criterion J_{CC}^{rel} is very effective in this partial aperture case since it is particularly insensitive to noise in the data.

4.2.2 One inclusion vs. two inclusions

The aim of this second part is to investigate the ability of the *TRAC* method to discriminate a unique inclusion from two distinct close inclusions. This test is inspired by a more realistic setting. Our intent is to detect one or two iron or plastic mines in a background medium made of sand. The physical equation we use is a scalar wave equation derived from the Maxwell equations, as proposed in [AIL05]

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = 0, \quad (17)$$

where ε denotes the electric permittivity and μ the magnetic permeability so that $\varepsilon \mu c^2 = 1$. Both of these parameters can be expressed with an absolute value multiplied by a relative value

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \\ \mu &= \mu_0 \mu_r, \end{aligned}$$

SRA		$D \not\subseteq B$			$D \subset B$		
Spacing	Noise level	F.T.	A.B.C.	C.C.	F.T.	A.B.C.	C.C.
$\frac{\lambda}{2}$	0%	2.24	1.77	1.27	34.94	10.51	1.75
	10%	2.23	1.79	1.27	21.04	7.72	1.74
	20%	2.24	1.80	1.26	14.73	5.25	1.68
	30%	2.17	1.83	1.26	9.12	3.85	1.63
$\frac{\lambda}{3}$	0%	1.95	1.62	1.42	18.00	10.11	2.67
	10%	1.95	1.60	1.42	16.97	6.55	2.66
	20%	1.95	1.62	1.42	14.34	5.29	2.67
	30%	1.95	1.64	1.41	10.87	3.63	2.52
$\frac{\lambda}{4}$	0%	1.97	1.67	1.46	51.77	9.67	2.94
	10%	1.93	1.64	1.46	40.05	8.30	2.95
	20%	1.98	1.70	1.45	13.50	4.69	2.91
	30%	1.93	1.61	1.42	6.79	4.76	2.95
0	0%	1.84	1.67	1.58	68.25	9.31	3.09
	10%	1.85	1.66	1.58	29.67	7.43	3.09
	20%	1.90	1.77	1.59	13.75	5.75	3.11
	30%	1.75	1.62	1.59	5.06	3.71	3.06

Table 1: Comparison of the three relative criteria for a SRA with a full aperture, in the case of $D \not\subseteq B$ and $D \subset B$, for different level of noise and different spacing between the receivers in the SRA.

SRA		$D \not\subseteq B$			$D \subset B$		
Spacing	Noise level	F.T.	A.B.C.	C.C.	F.T.	A.B.C.	C.C.
$\frac{\lambda}{2}$	0%	0.76	2.97	1.07	1.26	5.66	4.99
	10%	1.01	2.89	1.07	1.85	5.20	4.97
	20%	1.15	2.61	1.06	0.90	3.36	4.94
	30%	1.30	2.02	1.06	1.71	2.66	5.44
$\frac{\lambda}{3}$	0%	0.99	2.89	1.01	1.73	11.06	6.88
	10%	1.08	2.73	1.02	1.01	7.21	7.03
	20%	1.78	2.76	1.03	1.55	5.70	7.11
	30%	1.58	2.34	1.02	1.38	4.14	6.71
$\frac{\lambda}{4}$	0%	1.14	2.96	0.98	2.02	13.13	7.40
	10%	1.52	2.62	0.97	1.26	8.38	7.29
	20%	1.77	2.73	0.97	2.09	5.50	7.35
	30%	1.38	2.36	0.99	1.17	4.28	7.62
0	0%	1.16	3.13	0.97	1.90	13.42	7.53
	10%	0.94	2.78	0.98	1.05	10.65	7.50
	20%	0.97	2.98	0.97	1.66	4.92	7.47
	30%	2.62	1.92	0.95	2.95	3.98	7.34

Table 2: Comparison of the three relative criteria for a SRA with a partial aperture, in the case of $D \not\subseteq B$ and $D \subset B$, for different level of noise and different spacing between the receivers in the SRA.

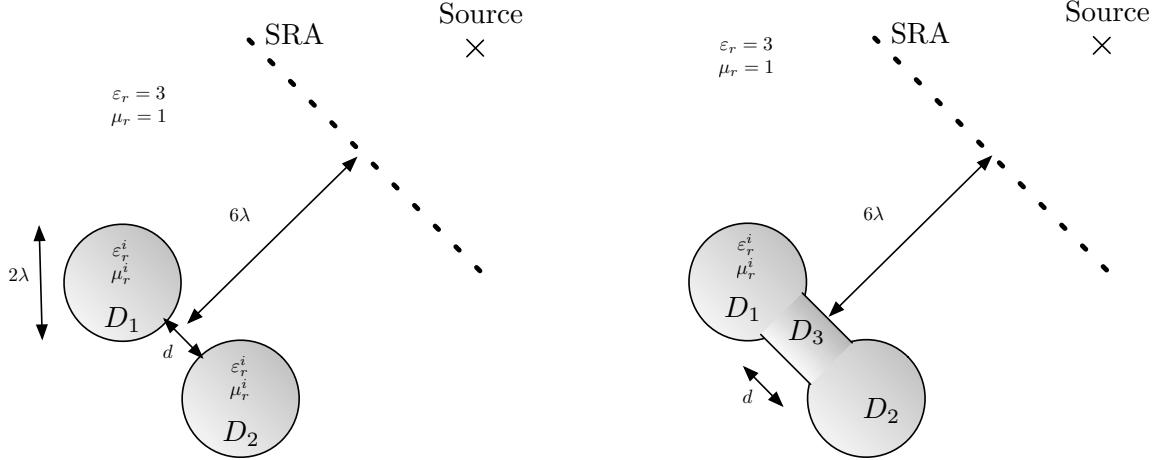


Figure 5: Geometric configuration for two distinct inclusions (left) and a unique inclusion (right). The electromagnetic constants of the inclusion are ε_r^i and μ_r^i .

where ε_0 and μ_0 are the electromagnetic constants of the vacuum

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m} & \simeq & 8.85 10^{-12} \text{ F/m} \\ \mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \text{ kg.m/(A.s)}^2 & \simeq & 12.57 10^{-7} \text{ kg.m/(A.s)}^2.\end{aligned}$$

As for the background and the mines, we consider parameters chosen as follows

	sand	iron mine	plastic mine
ε_r	3	1	1.5
μ_r	1	10,000	1

Globally the iron mine acts like a “hard” inclusion, with a velocity ratio

$$\frac{c_{\text{iron}}}{c_{\text{sand}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10000}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{10000}} \sim 0.017 \ll 1,$$

whereas the plastic mines are penetrable inclusions with a ratio velocity close to 1

$$\frac{c_{\text{plastic}}}{c_{\text{sand}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1.5}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{1.5}} = \sqrt{2} \sim 1.41.$$

The geometric configuration is depicted on Figure 5. The source is located at about 10λ from the center of the inclusions. Following [FW02], the frequency of the signal is 5 GHz. The length of the SRA is 5.65λ and the spacing between the receivers is $\lambda/4$, i.e. we have 23 receivers. We study the case of quite far apart inclusions corresponding to $d = 3\lambda/2$ and close inclusions corresponding to $d = \lambda/2$, where d is the distance between the inclusions. For both iron and plastic mines, we aim to distinguish two inclusions ($D := D_1 \cup D_2$) from one inclusion ($D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$), see Figure 5. In the following paragraphs, we first consider iron mines and then plastic mines.

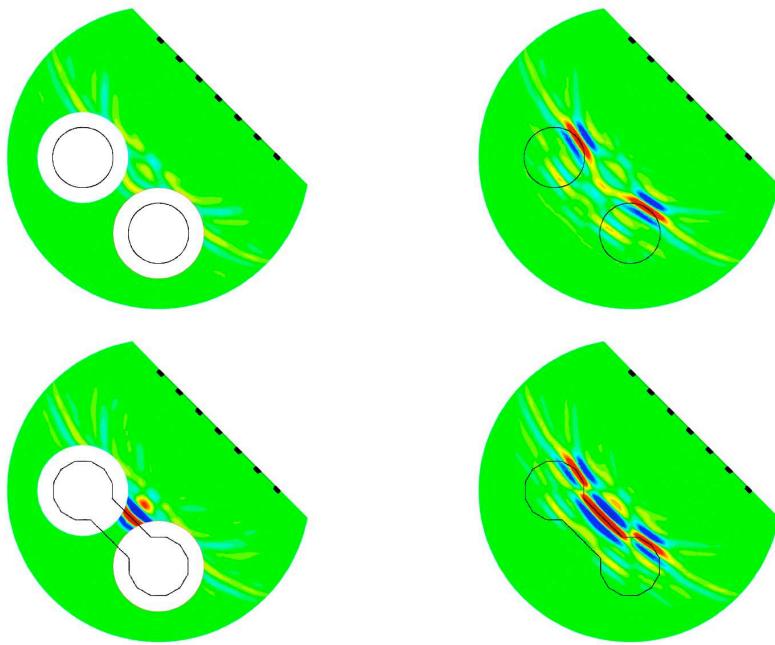


Figure 6: Imaging function (14) for distant iron mines, $d = 3\lambda/2$. Left column: B made of two connected components. Right column: $B = \emptyset$.

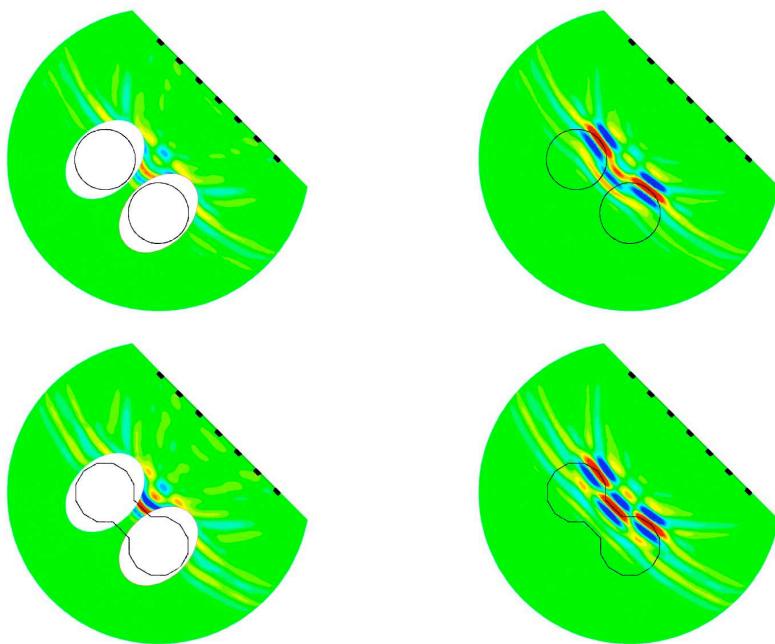


Figure 7: Imaging function (14) for close iron mines, $d = \lambda/2$. Left column: B made of two connected components. Right column: $B = \emptyset$.

Iron mines On Figure 6, we plot the values of the function f defined in equation (14) for $d = 3\lambda/2$. The first row corresponds to two distinct inclusions whereas the second row deals with a unique inclusion. The right column corresponds to the classical case where $B = \emptyset$. In the left column, we use a trial domain B made of two connected components. When there is no trial domain, the cross-correlation function f images decently the illuminated edges of the inclusions. Pictures on the left column illustrate the principle of the *TRAC* method. As expected, when trial domain B encloses the inclusions (top left picture), there is nearly no image. Otherwise, the illuminated edge of the part of the inclusion which is not embedded in B is correctly imaged (bottom left picture). Thus we are able to distinguish between one inclusion and two close ones, see below a quantitative analysis.

Figure 7 represents the same configuration but for a smaller d equals to $\lambda/2$. When there is no trial domain (right column), the imaging function f is not able to distinguish two inclusions (top right) from one inclusion (bottom right), due to the proximity of the inclusions. On the contrary when trial domain B encloses the inclusions (top left), the function f is significantly smaller than in the case where B leaves part of the inclusion (part of D_3) on the outside (bottom left picture). Note that due to the proximity of the inclusions, we have used trial domains made of two ellipses.

From a more quantitative point of view, we give in Tables 3 and 4 the values of the criteria J_{ABC}^{rel} and J_{CC}^{rel} for various levels of noise and trial domains B . In the first four rows of the tables, trial domain B is an ellipse that encloses inclusion D . In the four middle rows of the tables, D_2 is outside trial domain B . In the last four rows, the trial domain is made of two ellipses that contain respectively the two inclusions D_1 and D_2 but not D_3 in the case of a unique inclusion. In the latter case, we cannot uniquely define an origin to the trial domain. Consequently we cannot use the notion of radial derivative at any point in the computational domain and the criterion J_{ABC} is not clearly defined. Then, we put crosses in the tables when trial domain B is not simply connected. As in section 4.2.1, we give the values of the relative criteria J_{ABC}^{rel} and J_{CC}^{rel} . Recall that a relative criterion close to one aims to indicate that trial domain B does not enclose inclusion D . At the opposite, a significant value of the relative criterion should indicate that trial domain B encloses inclusion D . For distant mines (see Table 3), both criteria work as expected, the criterion J_{CC}^{rel} having the advantage to be reliable in all situations. It asserts that the *TRAC* method is able to distinguish a simply connected inclusion from an inclusion made of two connected components. When the distance d is smaller ($d = \lambda/2$, see Table 4), the results are similar. Nevertheless when the trial domain leaves part of the inclusion outside, the values in the bottom right of Table 4 indicate that it is more difficult but still possible to distinguish one inclusion from two close inclusions.

Plastic mines We now consider plastic mines where the reflectivity of the inclusions is small. Figures 8 and 9 are arranged as Figures 6 and 7 respectively. Let us first look at distant mines, see Figure 8. When there is no trial domain, the cross-correlation function f images decently the edges of the inclusions. The main difference with the iron mines is that the inclusions being penetrable we also image the back part of the inclusions. Pictures on the left column illustrate the principle of the *TRAC* method. When trial domain B encloses the inclusions (top left picture), there is no significant image. Otherwise, the edges of the part of the inclusion which is not embedded in B is correctly imaged (bottom left picture). Once again, we are able to distinguish between one inclusion and two close ones. A quantitative analysis will be given in what follows. We now consider the case of close plastic mines, see Figure 9. Due to the proximity of the inclusions, it is difficult to distinguish two inclusions (top right) from one

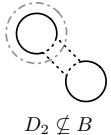
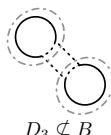
Trial Domain	Noise level	J_{ABC}^{rel}		J_{CC}^{rel}	
		2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
 $D \subset B_{ellipse}$	0%	8.13	11.86	4.78	7.32
	10%	5.89	7.41	4.69	7.35
	20%	5.18	4.86	4.76	7.36
	30%	3.69	3.72	4.62	7.21
 $D_2 \not\subseteq B$	0%	1.32	1.50	0.96	0.91
	10%	1.30	1.49	0.96	0.91
	20%	1.35	1.46	0.96	0.90
	30%	1.31	1.51	0.96	0.90
 $D_3 \not\subseteq B$	0%	×	×	5.52	1.07
	10%	×	×	5.48	1.07
	20%	×	×	5.55	1.06
	30%	×	×	5.22	1.06

Table 3: Results of two relative criteria in the case of distant iron mines, $d = 3\lambda/2$. Comparison in distinguishing one inclusion from two inclusions.

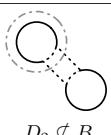
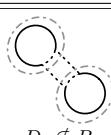
Trial Domain	Noise level	J_{ABC}^{rel}		J_{CC}^{rel}	
		2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
 $D \subset B_{ellipse}$	0%	12.88	13.67	8.13	9.49
	10%	8.48	11.00	8.22	9.49
	20%	6.24	7.88	8.43	9.56
	30%	3.80	4.48	8.33	9.57
 $D_2 \not\subseteq B$	0%	1.44	1.76	0.92	0.91
	10%	1.41	1.74	0.92	0.91
	20%	1.45	1.76	0.92	0.92
	30%	1.49	1.77	0.91	0.92
 $D_3 \not\subseteq B$	0%	×	×	3.36	1.55
	10%	×	×	3.33	1.54
	20%	×	×	3.32	1.55
	30%	×	×	3.34	1.56

Table 4: Results of two relative criteria in the case of close iron mines, $d = \lambda/2$. Comparison in distinguishing one inclusion from two inclusions.

inclusion (bottom right) in the absence of a trial domain. When trial domain B encloses the inclusions (top left), function f is visually smaller than in the case where B leaves part of the inclusion (part of D_3) on the outside (bottom left picture).

As for the values of the criteria, they are given in Tables 5 and 6 that are organized like Tables 3 and 4 respectively. For distant mines (see Table 5), although the inclusions are penetrable, the values are very similar to the case of iron mines. Both criteria work as expected, the criterion J_{CC}^{rel} still having the advantage of being reliable in all situations. The *TRAC* method is able to distinguish a simply connected penetrable inclusion from one made of two connected components. When the distance d is smaller ($d = \lambda/2$, see Table 6), like for the iron mines it is more difficult but still possible to distinguish one inclusion from two close inclusions.

Note also that in all these numerical experiments, we have used exactly the same methodology for both hard and penetrable inclusions. Moreover, from a quantitative point of view we observe that the values of the criteria are very similar in both cases of iron mines and plastic mines. This is due to our normalization based on the criteria obtained in the absence of a trial domain B , see formula (16). If one is interested in differentiating iron mines from plastic mines, it is sufficient to consider the non relative criterion J_{CC} , equation (15). Indeed, the strength of the field scattered by an iron mine is much larger than one scattered by a plastic mine. As an example we report in Table 7 the values of the non relative criterion J_{CC} in the case of close iron and plastic mines ($d = \lambda/2$) for one or two inclusions. The first four rows correspond to the classical approach $B = \emptyset$. One observes a factor of five between the iron and plastic mines for the same geometric configuration.

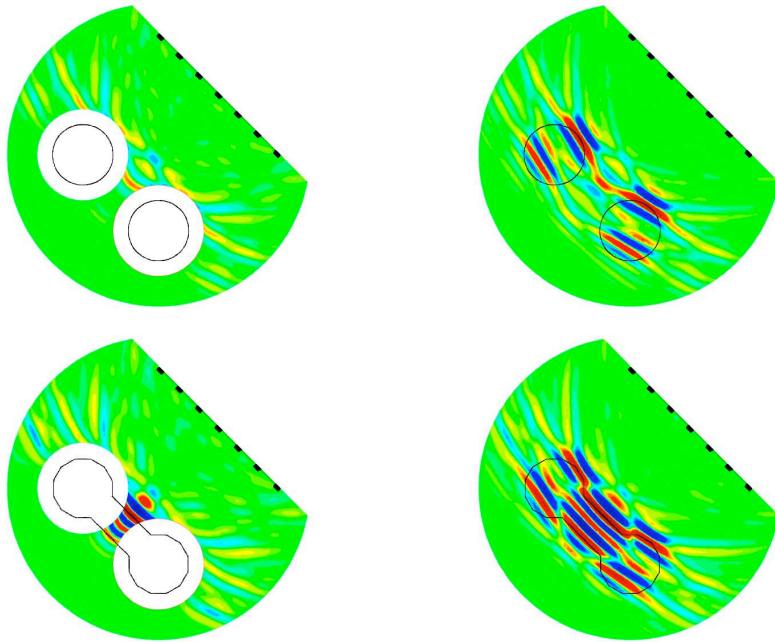


Figure 8: Imaging function (14) for distant plastic mines, $d = 3\lambda/2$

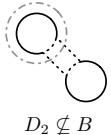
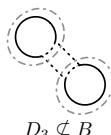
Trial Domain	Noise level	J_{ABC}^{rel}		J_{CC}^{rel}	
		2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
 $D \subset B_{ellipse}$	0%	6.29	10.42	4.68	7.00
	10%	5.58	7.70	4.68	7.04
	20%	4.49	3.41	4.66	7.00
	30%	3.28	3.15	4.77	7.33
 $D_2 \not\subseteq B$	0%	1.32	1.46	0.94	0.88
	10%	1.32	1.49	0.95	0.88
	20%	1.32	1.45	0.93	0.88
	30%	1.33	1.43	0.94	0.89
 $D_3 \not\subseteq B$	0%	×	×	4.88	0.92
	10%	×	×	4.89	0.92
	20%	×	×	4.91	0.93
	30%	×	×	4.54	0.92

Table 5: Results of two relative criteria in the case of distant plastic mines, $d = 3\lambda/2$. Comparison in distinguishing one inclusion from two inclusions.

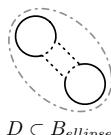
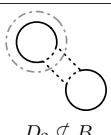
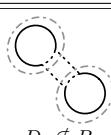
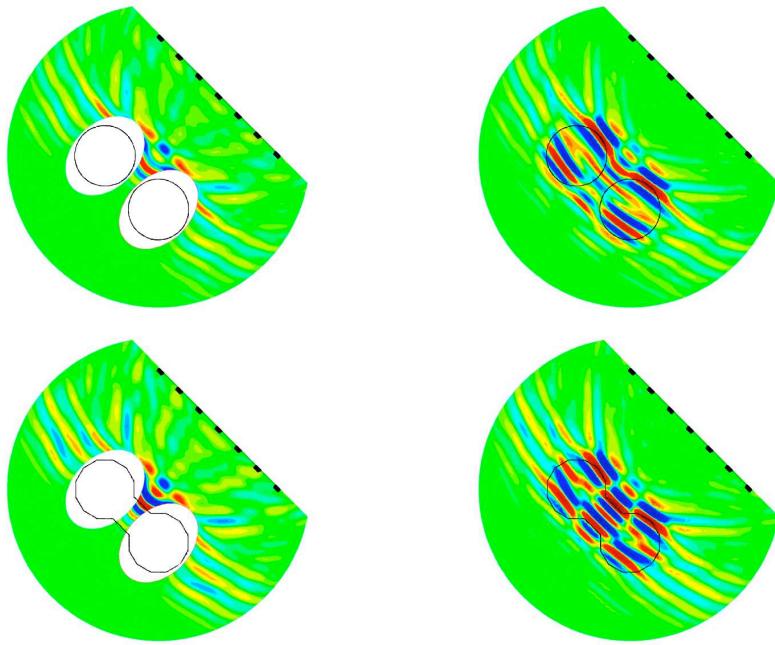
Trial Domain	Noise level	J_{ABC}^{rel}		J_{CC}^{rel}	
		2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
 $D \subset B_{ellipse}$	0%	10.47	11.24	7.82	8.72
	10%	8.61	8.16	7.88	8.63
	20%	4.99	4.58	7.65	8.36
	30%	3.28	3.39	8.09	8.81
 $D_2 \not\subseteq B$	0%	1.46	1.72	0.98	0.99
	10%	1.42	1.69	0.97	0.99
	20%	1.46	1.73	0.98	0.99
	30%	1.49	1.62	0.98	0.99
 $D_3 \not\subseteq B$	0%	×	×	3.25	1.70
	10%	×	×	3.20	1.71
	20%	×	×	3.27	1.68
	30%	×	×	3.25	1.69

Table 6: Results of two relative criteria in the case of close plastic mines, $d = \lambda/2$. Comparison in distinguishing one inclusion from two inclusions.

Figure 9: Imaging function (14) for close plastic mines, $d = \lambda/2$

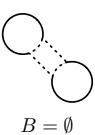
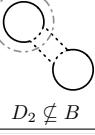
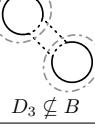
Trial Domain	Noise level	Iron Mines		Plastic Mines	
		2 inclusions	1 inclusion	2 inclusions	1 inclusion
 $B = \emptyset$	0%	31.67	33.24	5.70	6.85
	10%	31.85	33.23	5.68	6.85
	20%	31.70	33.46	5.69	6.83
	30%	31.67	33.50	5.65	6.82
 $D \subset B_{\text{ellipse}}$	0%	3.89	3.50	0.73	0.79
	10%	3.87	3.50	0.72	0.79
	20%	3.76	3.50	0.74	0.82
	30%	3.80	3.50	0.70	0.77
 $D_2 \not\subset B$	0%	34.41	36.42	5.80	6.94
	10%	34.50	36.42	5.83	6.90
	20%	34.45	36.42	5.79	6.90
	30%	34.88	36.42	5.76	6.89
 $D_3 \not\subset B$	0%	9.44	21.49	1.75	4.03
	10%	9.56	21.52	1.77	4.01
	20%	9.55	21.55	1.74	4.07
	30%	9.47	21.42	1.74	4.03

Table 7: Non relative criterion J_{CC} (equation (15)) for close iron vs. plastic mines. Comparison in distinguishing one inclusion from two inclusions for various trial domains.

5 Conclusion

This paper is a follow up of [AKNT10, AKNT] in which was introduced the *TRAC* (Time-Reversed Absorbing Conditions) method. It enables one to “recreate the past” without knowing

the location and the properties of the inclusion which diffracted the signals that are back-propagated. This was made possible by removing a small region surrounding the scattering inclusion. This has two applications in inverse problems: the reduction of the size of the computational domain and the determination of the location of an unknown inclusion from boundary measurements. In this paper we extend the method by considering partial or full aperture for discrete receivers with various spacing. This requires the introduction of two new criteria J_{ABC} and J_{CC} . In particular we apply the *TRAC* method to the differentiation between one inclusion and two close ones. We stress that in contrast to many methods in inverse problems, our method does not rely on any *a priori* knowledge of the physical properties of the inclusion. Hard, soft and penetrable inclusions are treated in the same way. Moreover, the method has proved to be quite insensitive with respect to noise in the data.

References

- [ABB99] Xavier Antoine, Helene Barucq, and A. Bendali. Bayliss-turkel like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229:184–211, 1999.
- [AIL05] Habib Ammari, Ekaterina Iakovleva, and Dominique Lesselier. A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency. *Multiscale Modeling and Simulation*, 3(3):597–628, 2005.
- [AKNT] F. Assous, M. Kray, F. Nataf, and E. Turkel. Time reversed absorbing condition: Application to inverse problem. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00491912/fr/>.
- [AKNT10] F. Assous, M. Kray, F. Nataf, and E. Turkel. Time reversed absorbing condition. *CR. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 2010. doi:10.1016/j.crma.2010.09.014.
- [BDSG09] Helene Barucq, Rabia Djellouli, and A. Saint-Guirons. Performance assessment of a new class of local absorbing boundary conditions for elliptical- and prolate spheroidal-shaped boundaries. *Appl. Numer. Anal.*, 59:1467–1498, 2009.
- [Ber79] J.R. Berryhill. Wave-equation datuming. *Geophysics*, 44(206):132944, 1979.
- [BF02] Claude Bardos and Mathias Fink. Mathematical foundations of the time reversal mirror. *Asymptot. Anal.*, 29(2):157–182, 2002.
- [BGT82] Alvin Bayliss, Max Gunzburger, and Eli Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, 42(2):430–451, 1982.
- [BPZ02] P. Blomgren, G. Papanicolaou, and H. Zhao. Super-resolution in time-reversal acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111:230–248, 2002.
- [BT80] A. Bayliss and E. Turkel. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(6):707–725, 1980.
- [CCM00] David Colton, Joe Coyle, and Peter Monk. Recent developments in inverse acoustic scattering theory. *SIAM Rev.*, 42(3):369–414 (electronic), 2000.
- [CF97] J. F. Clouet and J. P. Fouque. A time-reversal method for an acoustical pulse propagating in randomly layered media. *Wave Motion*, 25(4):361–368, 1997.

- [CHLM10] Q Chen, H Haddar, A Lechleiter, and P Monk. A sampling method for inverse scattering in the time domain. *Inverse Problems*, 26(8):085001, 2010.
- [CK96] David Colton and Andreas Kirsch. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. *Inverse Problems*, 12(4):383–393, 1996.
- [CK98] David Colton and Rainer Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [Cla85] Jon F. Claerbout. *Imaging the Earth's interior*. Blackwell, 1985.
- [Fin09] M. Fink. *Renversement du temps, ondes et innovation*. Ed. Fayard, 2009.
- [FW02] Christian Fischer and Werner Wiesbeck. Multistatic antenna configurations and image processing for mine-detection GPR. www.hdic.jmu.edu/dtif/Conferences/Ispra2/papers/fischer.pdf, 2002.
- [FWCM91] M. Fink, F. Wu, D. Cassereau, and R. Mallart. Imaging through inhomogeneous media using time reversal mirrors. *Ultrasonic Imaging*, 13(2):199 – 199, 1991.
- [Hec10] Frédéric Hecht. *FreeFem++*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Laboratoire J.L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, <http://www.freefem.org/ff++/>, 3.7 edition, 2010.
- [KTU87] Gregory Kriegsmann, Allen Taflove, and K.R. Umashankar. A new formulation of electromagnetic scattering using on surface radiation condition approach. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP35:153–161, 1987.
- [LD03] Sean K. Lehman and Anthony J. Devaney. Transmission mode time-reversal super-resolution imaging. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 2742, 2003.
- [LMF⁺06] C. Larmat, J.-P. Montagner, M. Fink, Y. Capdeville, A. Tourin, and E. Clévétré. Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great sumatra earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, 33, 2006.
- [MT09] Michael Medvinsky and Eli Turkel. On surface radiation conditions for an ellipse. *JCAM*, 234:1647–1655, 2009.
- [MTH08] Michael Medvinsky, Eli Turkel, and Ulrich Hetmaniuk. Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries. *J. Comput. Phys.*, 227(18):8254–8267, 2008.
- [PMSF96] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator: Application to detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 (4):2067–2076, 1996.
- [The92] C. W. Therrien. *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice- Hall, 1992.

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la méthode de retournement temporel avec conditions absorbantes, aussi appelée méthode *TRAC*, pour *Time Reversed Absorbing Condition* en anglais. Cette nouvelle méthode nous a permis de reconstituer des signaux par retournement temporel à partir de mesures au bord, sans connaissance a priori de la source. Contrairement aux techniques de retournement temporel classique, la méthode *TRAC* permet de « recréer le passé » en surmontant le problème de la limite de diffraction. Ceci est rendu possible en enlevant un sous-domaine B contenant entièrement l'inclusion D à l'origine du champ diffracté à reconstituer, et en appliquant sur le bord de B une condition aux limites absorbante retournée temporellement. Nous sommes alors capables de reconstruire parfaitement le champ diffracté dans le domaine de calcul tronqué $\Omega \setminus B$. Notons que cette méthode est numérique et que le sous-domaine B est artificiel.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons introduit la méthode *TRAC* pour un opérateur hyperbolique général dans le domaine temporel. Puis nous l'avons dérivée pour deux exemples : l'équation des ondes et les équations de Maxwell. Nous montrons aussi que la méthode *TRAC* s'écrit pour des problèmes dans le domaine fréquentiel. En utilisant la conjugaison de phase comme équivalent du retournement temporel dans le cas harmonique, nous avons réécrit la méthode *TRAC* dans le cas général, puis pour deux exemples : l'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell harmoniques.

Dans un premier temps, nous avons validé la méthode *TRAC* en dimension 1, à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Nous avons également démontré une estimation d'énergie dans une géométrie particulière en dimension 3, afin de montrer la stabilité de notre nouveau problème de retournement temporel avec *TRAC*.

Ensuite, nous avons présenté des résultats numériques effectués avec *TRAC* en dimension 2, dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Dans chacun des cas, nous avons été capables de reconstruire le champ diffracté par l'inclusion D en surmontant

le problème de la limite de diffraction observé en retournement temporel classique. Nous avons pu alors en déduire une première application à la méthode *TRAC* : la réduction de la taille du domaine de calcul. En effet, grâce à la méthode *TRAC*, nous sommes capables de déplacer virtuellement la ligne d'émetteurs-récepteurs de la frontière externe Γ_R , où sont situés les transducteurs, sur le bord du sous-domaine artificiel B . Ainsi, à partir des valeurs du champ reconstitué sur le bord de B , il est possible d'appliquer n'importe quelle technique de résolution de problèmes inverses dans un domaine de calcul plus petit, il s'agit alors de B , et à partir des mesures extrapolées sur le bord du nouveau domaine de recherche. Cette application est entre autre une alternative aux méthodes de *redatuming*, mais en utilisant l'équation étudiée complète. En effet, le *redatuming* nécessite de travailler avec l'approximation paraxiale du problème étudié et dépend par conséquent fortement de la validité de cette approximation.

Une seconde application apparaît à travers ces premiers tests numériques : l'identification d'objets. L'étude de cette application est l'objet de la seconde partie de la thèse. Le principe de l'identification d'objets est le suivant : si le sous-domaine B englobe l'inclusion D , alors le champ total (resp. diffracté) reconstitué, qui est très proche du retourné temporel du champ total (resp. diffracté), s'annule partout, en particulier dans le domaine de calcul $\Omega \setminus B$. Si au contraire, après avoir résolu le problème de retournement temporel, le champ reconstitué ne s'annule pas à la fin de la simulation, cela prouve que l'hypothèse faite sur le sous-domaine B contenant l'inclusion D est fausse.

Dans un premier temps, nous avons étudié cette seconde application pour une ligne d'émetteurs-récepteurs à ouverture totale. Nous avons établi deux critères dans le cas du domaine temporel : le critère de l'instant final J_{TF} et le critère de la condition absorbante J_{ABC} . Ces deux critères s'avèrent efficaces, mais ne sont valables qu'en ouverture totale. De plus, le critère J_{ABC} s'avère plus robuste vis-à-vis du bruit sur les données que le critère J_{TF} . De la même façon, nous avons établi deux critères dans le cas du domaine fréquentiel : le critère de la dérivée normale J_{DN} et le critère de la condition absorbante J_{ABC} , dans le même esprit que celui développé dans le domaine temporel. Là encore, les deux critères se révèlent efficaces, le critère J_{ABC} s'avérant plus robuste vis-à-vis du bruit sur les données que le critère J_{DN} . Notons, par ailleurs, que la méthode *TRAC* fonctionne pour tout type d'inclusions solides ou pénétrables.

Ensuite, afin d'approcher des cas réalistes, nous avons étudié la méthode *TRAC* pour une ligne de transducteurs à ouverture partielle, uniquement dans le domaine temporel. Pour cela, nous avons établi un nouveau critère, le critère de corrélation J_{CC} , les deux précédents

n'étant plus valables en ouverture partielle. Le critère J_{CC} se révèle très robuste vis-à-vis du bruit sur les données et permet de quantifier efficacement la présence d'une inclusion ou non dans le domaine de calcul. Nous l'avons utilisé pour la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions proches. De plus, nous avons effectué des premiers tests pour des milieux non-homogènes et dissipatifs, sans modification de la méthode par rapport au cas d'un milieu homogène. Les résultats sont moins précis que lorsque nous travaillons dans un milieu homogène. Ces tests mettent en évidence qu'un travail d'adaptation au cas hétérogène dissipatif est nécessaire. Notons, par ailleurs, que la condition absorbante retournée temporellement utilisée pour la discrimination entre une et deux inclusions est écrite pour un unique diffracteur. La méthode *TRAC* peut donc être améliorée en l'utilisant avec des conditions absorbantes retournées en temps dérivées pour des diffracteurs multiples.

Bibliographie

- [AB01] Xavier Antoine and Hélène Barucq. Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudodifferential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6) :1877–1905 (electronic), 2001.
- [AB05] Xavier Antoine and Hélène Barucq. Approximation by generalized impedance boundary conditions of a transmission problem in acoustic scattering. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(5) :1041–1059, 2005.
- [ABB99] Xavier Antoine, Hélène Barucq, and Abderrahmane Bendali. Bayliss-turkel like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229 :184–211, 1999.
- [ABM10] Rachid Ababou, Amvrossios C. Bagtzoglou, and Antoine Mallet. Anti-diffusion and source identification with the ‘RAW’ scheme : A particle-based censored random walk. *Environmental Fluid Mechanics*, 10(1-2) :41–76, 2010.
- [Abr97] Petter Abrahamsen. A Review of Gaussian Random Fields and Correlation Functions. *The report of Norsk Regnesentral/Norwegian Computing Center*, 1997. No 917, Oslo.
- [AIL05] Habib Ammari, Ekaterina Iakovleva, and Dominique Lesselier. A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency. *Multiscale Modeling and Simulation*, 3(3) :597–628, 2005.
- [AKN] Franck Assous, Marie Kray, and Frédéric Nataf. Time Reversed Absorbing Condition in the Partial Aperture Case. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00581291/en/>, submitted.
- [AKNT10] Franck Assous, Marie Kray, Frédéric Nataf, and Eli Turkel. Time reversed absorbing conditions. *Comptes Rendus Mathematiques*, 348(19-20) :1063–

- 1067, 2010.
- [AKNT11] Franck Assous, Marie Kray, Frédéric Nataf, and Eli Turkel. Time reversed absorbing condition : Application to inverse problem. *Inverse Problems*, 27, 2011.
- [AKP⁺96] Mark Asch, Werner Kohler, George Papanicolaou, Marie Postel, and Benjamin White. Statistical inversion from reflections of spherical waves by a randomly layered medium. *Waves Random Media*, 6(4) :293–334, 1996.
- [APRT08] Xavier Antoine, Bruno Pinçon, Karim Ramdani, and Bertrand Thierry. Far field modelling of electromagnetic time-reversal and application to selective focusing on small scatterers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 69(3), 2008.
- [BB09] Cédric Bellis and Marc Bonnet. Crack identification by 3d time-domain elastic or acoustic topological sensitivity. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(3) :124–130, 2009.
- [BD10] Laurent Bourgeois and Jérémie Dardé. A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem. *Inverse problems and imaging*, 4(3) :351–377, 2010.
- [BDSG09] Hélène Barucq, Rabia Djellouli, and Anne-Gaëlle Saint-Guirons. Performance assessment of a new class of local absorbing boundary conditions for elliptical- and prolate spheroidal-shaped boundaries. *Appl. Numer. Anal.*, 59 :1467–1498, 2009.
- [Ber79] John R. Berryhill. Wave-equation datuming. *Geophysics*, 44(206) :132944, 1979.
- [Ber84] John R. Berryhill. Wave-equation datuming before stack. *Geophysics*, 49(11) :2064–2066, 1984.
- [BF02] Claude Bardos and Mathias Fink. Mathematical foundations of the time reversal mirror. *Asymptot. Anal.*, 29(2) :157–182, 2002.
- [BGdCPT09] Liliana Borcea, F. González del Cueto, George Papanicolaou, and Chrysoula Tsogka. Filtering deterministic layer effects in imaging. *Multiscale Modeling and Simulation*, 7(3) :1267–1301, 2009.
- [BGT82] Alvin Bayliss, Max Gunzburger, and Eli Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, 42(2) :430–451, 1982.

- [BHEP10] Fahmi Ben Hassen, Klaus Erhard, and Roland Potthast. The singular sources method for 3d inverse acoustic obstacle scattering problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 75(1) :1–16, 2010.
- [BO05] Martin Burger and Stanley J. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *European Journal of Applied Mathematics*, 16(02) :263–301, 2005.
- [Bon11] Marc Bonnet. Fast identification of cracks using higher-order topological sensitivity for 2-d potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35 :223–235, 2011.
- [BPT03] Liliana Borcea, George Papanicolaou, and Chrysoula Tsogka. Theory and applications of time reversal and interferometric imaging. *Inverse Problems*, 19(6) :S139–S164, 2003.
- [BPTB02] Liliana Borcea, George Papanicolaou, Chrysoula Tsogka, and James Berryman. Imaging and time reversal in random media. *Inverse Problems*, 18(5) :1247, 2002.
- [BPZ02] Peter Blomgren, George Papanicolaou, and Hongkai Zhao. Super-resolution in time-reversal acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :230–248, 2002.
- [BT80] Alvin Bayliss and Eli Turkel. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(6) :707–725, 1980.
- [Bur01] Martin Burger. A level set method for inverse problems. *Inverse Problems*, 17(5) :1327, 2001.
- [CC06] Fioralba Cakoni and David L. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory : an introduction*. Interaction of mechanics and mathematics series. Springer, 2006.
- [CCM00] David Colton, Joe Coyle, and Peter Monk. Recent developments in inverse acoustic scattering theory. *SIAM Rev.*, 42(3) :369–414 (electronic), 2000.
- [CF97] Jean-François Clouet and Jean-Pierre Fouque. A time-reversal method for an acoustical pulse propagating in randomly layered media. *Wave Motion*, 25(4) :361–368, 1997.
- [Che01] Margaret Cheney. The linear sampling method and the MUSIC algorithm. *Inverse Problems*, 17(4) :591–595, 2001.

-
- [CHLM10] Qiang Chen, Houssem Haddar, Armin Lechleiter, and Peter Monk. A sampling method for inverse scattering in the time domain. *Inverse Problems*, 26(8) :085001, 2010.
- [CK96] David Colton and Andreas Kirsch. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. *Inverse Problems*, 12(4) :383–393, 1996.
- [CK07] Christian Clason and Michael V. Klibanov. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1) :1–23, 2007.
- [Cla85] Jon F. Claerbout. *Imaging the Earth’s interior*. Blackwell, 1985.
- [CM91] John C. Curlander and Robert C. McDonough. *Synthetic Aperture Radar*. Wiley, 1991.
- [CT10] Benjamin T. Cox and Bradley E. Treeby. Artifact trapping during time reversal photoacoustic imaging for acoustically heterogeneous media. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 29(2) :387–396, 2010.
- [dBO10] Maya de Buhan and Axel Osses. Logarithmic stability in determination of a 3d viscoelastic coefficient and a numerical example. *Inverse Problems*, 26(9) :95006–95043, 2010.
- [Dev00] Anthony J. Devaney. Super-resolution processing of multi-static data using time reversal and MUSIC. Northeast University Preprint, 2000.
- [dRF02] Julien de Rosny and Mathias Fink. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Phys. Rev. Lett.*, 89 (12), 2002.
- [EHS⁺10] H. Egger, M. Hanke, C. Schneider, J. Schöberl, and S. Zaglmayr. Adjoint-based sampling methods for electromagnetic scattering. *Inverse Problems*, 26(7) :074006, 17, 2010.
- [EM77] Björn Engquist and Andrew J. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.
- [FGPS07] Jean-Pierre Fouque, Josselin Garnier, George Papanicolaou, and Knut Sølna. *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*, volume 56 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, 2007.
- [Fin93] Mathias Fink. Time-reversal mirrors. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 26(9) :1333, 1993.

- [Fin08] Mathias Fink. Time-Reversal Acoustics. *Journal of Physics : Conference Series*, 118 :012001, 2008.
- [Fin09] Mathias Fink. *Renversement du temps, ondes et innovation*. Ed. Fayard, 2009.
- [FP01] Mathias Fink and Claire Prada. Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse Problems*, 17(1) :R1, 2001.
- [FW02] Christian Fischer and Werner Wiesbeck. Multistatic antenna configurations and image processing for mine-detection GPR. www.hdic.jmu.edu/dtif/Conferences/Ispra2/papers/fischer.pdf, 2002.
- [FWCM91] Mathias Fink, François Wu, Didier Cassereau, and Raoul Mallart. Imaging through inhomogeneous media using time reversal mirrors. *Ultrasonic Imaging*, 13(2) :199 – 199, 1991.
- [GK95] Marcus J. Grote and Joseph B. Keller. Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(2) :280–297, 1995. Perturbation methods in physical mathematics (Troy, NY, 1993).
- [GK96] Marcus J. Grote and Joseph B. Keller. Nonreflecting boundary conditions for time-dependent scattering. *J. Comput. Phys.*, 127(1) :52–65, 1996.
- [GK07] Marcus J. Grote and Christoph Kirsch. Nonreflecting boundary condition for time-dependent multiple scattering. *Journal of Computational Physics*, 221(1) :41–67, 2007.
- [GS11] Marcus J. Grote and Imbo Sim. Local nonreflecting boundary condition for time-dependent multiple scattering. *Journal of Computational Physics*, 230(8) :3135–3154, 2011.
- [Hec10] Frédéric Hecht. *FreeFem++*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Laboratoire J.L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, <http://www.freefem.org/ff++/>, 3.7 edition, 2010.
- [HL12] Houssem Haddar and Armin Lechleiter. A factorization method for a far-field inverse scattering problem in the time domain. À paraître dans *Communications in Partial Differential Equations*, 2012.
- [HR04] Christophe Hazard and Karim Ramdani. Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(3), 2004.

- [Ige08] Jan Igel. “The Small-Scale Variability of Electrical Soil Properties – Influence on GPR Measurements”. *12th International Conference on Ground Penetrating Radar*, 2008. June 16-19, Birmingham, UK.
- [Imp12] Sébastien Impériale. *Étude mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2012.
- [KG08] Andreas Kirsch and Natalia Grinberg. *The factorization method for inverse problems*. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press, 2008.
- [Kir02] Andreas Kirsch. The music-algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media. *Inverse Problems*, 18(4) :1025, 2002.
- [Kli02] Lulěk Klimeš. Correlation Functions of Random Media. *Pure and Applied Geophysics*, 159 :1811–1831, 2002.
- [KTU87] Gregory Kriegsmann, Allen Taflove, and Korada R. Umashankar. A new formulation of electromagnetic scattering using on surface radiation condition approach. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP35 :153–161, 1987.
- [LCW05] Claire D. Lines and Simon N. Chandler-Wilde. A time domain point source method for inverse scattering by rough surfaces. *Computing*, 75 :157–180, 2005. 10.1007/s00607-004-0109-8.
- [LD03] Sean K. Lehman and Anthony J. Devaney. Transmission mode time-reversal super-resolution imaging. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 2742, 2003.
- [LdRTF07] Geoffroy Lerosey, Julien de Rosny, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315(5815) :1120–1122, 2007.
- [Lec09] Armin Lechleiter. The factorization method is independent of transmission eigenvalues. *Inverse Problems and Imaging*, 3(1) :123–138, 2009.
- [LHXD07] Lanbo Liu, Kuang He, Xiongyao Xie, and Jun Du. Image enhancement with wave-equation redatuming : application to gpr data collected at public transportation sites. *Journal of Geophysics and Engineering*, 4 :139–147, 2007.
- [LL67] Robert Lattès and Jacques-Louis Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Travaux et Recherches Mathématiques. American Elseviers, 1967.

- [LL86] Lev D. Landau and Evgeniĭ M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Theoretical Physics. New York : Pergamon Press, 1986.
- [LMF⁺06] Carene Larmat, Jean-Paul Montagner, Mathias Fink, Yann Capdeville, Arnaud Tourin, and Eric Clévétré. Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great sumatra earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, 33, 2006.
- [Mon03] *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Numerical Analysis and Scientific Computation Series, Oxford Science Publications, 2003.
- [MT09] Michael Medvinsky and Eli Turkel. On surface radiation conditions for an ellipse. *JCAM*, 234 :1647–1655, 2009.
- [MTH08] Michael Medvinsky, Eli Turkel, and Ulrich Hetmaniuk. Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries. *J. Comput. Phys.*, 227(18) :8254–8267, 2008.
- [Mul05] Wim A. Mulder. Rigorous redatuming. *Geophysical Journal International*, 161(2) :401–415, 2005.
- [PF94] Claire Prada and Mathias Fink. Eigenmodes of the time reversal operator : a solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20(2) :151–163, 1994.
- [PFN10] Roland Potthast, Filippo M. Fazi, and Philip A. Nelson. Source splitting via the point source method. *Inverse Problems*, 26(4) :045002, 2010.
- [PMSF96] Claire Prada, Sébastien Manneville, Dimitri Spoliansky, and Mathias Fink. Decomposition of the time reversal operator : Application to detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(4) :2067–2076, 1996.
- [Pol01] Andrei Dmitrievich Polyanin. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. Chapman & Hall/CRC Press, 2001.
- [Pot06] Roland Potthast. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 22(2) :R1, 2006.
- [San96] Fadil Santosa. A level-set approach for inverse problems involving obstacles fadil santosa. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1 :17–33, 1996.

- [STX⁺05] Ralph Sinkus, Mickael Tanter, Tanja Xydeas, Stefan Catheline, Jeremy Bercoff, and Mathias Fink. Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by MR elastography. *23(2)* :159–165, 2005.
- [Tar88] Albert Tarantola. Theoretical background for the inversion of seismic waveforms including elasticity and attenuation. *Pure and Applied Geophysics*, 128 :365–399, 1988. 10.1007/BF01772605.
- [Tar05] Albert Tarantola. *Inverse Problem Theory And Methods For Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [The92] Charles W. Therrien. *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice- Hall, 1992.
- [VH11] Jeaniffer Lissette Vides Higueros. Time reversed absorbing conditions in stratified media. Master’s thesis, MathMods – Erasmus Mundus MSc Course, University of Nice Sophia-Antipolis, France, 2011.
- [XK08] Jianguo Xin and Michael V. Klibanov. Numerical solution of an inverse problem of imaging of antipersonnel land mines by the globally convergent convexification algorithm. *SIAM J. Scientific Computing*, pages 3170–3196, 2008.