
Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Introduction	1
I Cadre de l'étude et contexte scientifique	7
1 Contexte industriel	9
1 Cadre de l'étude	10
2 Dégradation des composites stratifiés	10
2.1 Description des composites stratifiés étudiés	10
2.2 Description des modes de dégradations	11
3 Caractéristiques des calculs réalisés	13
3.1 Modèle éléments finis	13
3.2 Schéma de résolution et temps de calcul	14
3.3 Critères de dimensionnement	15
3.4 Résultats obtenus et limitations	16
4 Bilan	17
2 Etude bibliographique	19
1 Modélisation du délaminage	20
1.1 Caractérisation du délaminage	20
1.2 Approches macroscopiques	21
1.3 Modélisation mésoscopique	25
1.4 Bilan	33
2 Modélisation des structures élancées	34
2.1 Difficultés numériques	34
2.2 Développement d'éléments de coques 3D	37
2.3 Représentation de fissures macroscopiques	42
2.4 Bilan	45
3 Approches multi-échelles et de sous-structuration	46
3.1 Méthodes de décomposition de domaine	46
3.2 Méthodes de superposition	51
3.3 Approches multi-échelles en temps	57

3.4	Bilan	63
II	Vers une méthode multi-échelle	65
3	Analyse du problème	67
1	Définition d'un cas d'étude	68
2	Équations du problème	68
2.1	Équations continues de la dynamique	69
2.2	Discretisation spatiale des équations	72
2.3	Discretisation temporelle des équations	74
3	Contraintes liées à l'utilisation du méso-modèle	74
3.1	Définition du pas de temps de calcul	74
3.2	Définition du maillage	77
4	Bilan et objectifs	79
4	Prédiction du délaminage par une méthode de décomposition de domaine	81
1	Définition du problème	82
1.1	Décomposition en sous-domaines du problème	82
1.2	Équations du problème	82
2	Application au cas test 2D	87
2.1	Définition des maillages et des calculs	87
2.2	Comparaison des résultats	89
3	Bilan et limitations	91
5	Choix d'une représentation macroscopique de coque 3D	93
1	Objectifs	94
2	Reconstruction des contraintes et déplacements 3D	94
2.1	Reconstruction du champ de contrainte	95
2.2	Reconstruction du champ de déplacement	98
3	Choix d'un élément	102
3.1	Définition de l'élément	102
3.2	Validation	103
4	Couplage des éléments $Q16$ avec le méso-modèle	109
4.1	Équations	109
4.2	Application	109
5	Bilan	118
6	Utilisation d'une échelle globale continue de coque	119
1	Principes généraux et équations du problème	120
1.1	Présentation générale de la méthode proposée	120
1.2	Équations du problème	122
2	Gestion des échelles spatiales	122
2.1	Analyse des difficultés	122

2.2	Différenciation des problèmes local et global	123
2.3	Illustrations	127
3	Gestion des échelles temporelles	130
3.1	Algorithme de résolution	130
3.2	Interpolation des vitesses du problème global	133
4	Bilan	137
Conclusions et perspectives		139
Bibliographie		143



Table des figures

1	Exemple de calculs de vulnérabilité (Airbus)	1
2	Exemple de structure industrielle standard soumise à des chocs à l’oiseau (Airbus)	2
1.1	Description d’un composite	11
1.2	Description des dégradations dans un stratifié	12
1.3	Exemple de choc de pneu sur un panneau composite : montage (a), zone impactée (b) et zone délaminée après le choc (c) (Airbus)	12
1.4	Exemple de maillage d’un panneau composite (Airbus)	13
1.5	Exemple de prise en compte d’une interface délaminante dans un maillage	16
2.1	Interfaces saines (a) et délaminées (b)	20
2.2	Modes de propagation : (a) ouverture, (b) cisaillement plan et (c) anti-plan	21
2.3	Configurations utilisées pour le calcul de ΔE dans les approches CCT et VCCT	24
2.4	Méso-modèle composite	25
2.5	Loi de comportement des interfaces cohésives	27
2.6	Loi de plasticité des interfaces cohésives	29
2.7	Base d’orthotropie de l’interface	29
2.8	Raccord entre des modèles 1D et 2D	35
2.9	Utilisation d’éléments de coques 3D	37
2.10	Définition des points de collocation dans un élément 3D	38
2.11	Définition des éléments de référence pour l’intégration d’un élément de coque 3D pour stratifiés [Klinkel <i>et al.</i> , 1999]	40
2.12	Notations [Parisich, 1995]	41
2.13	Représentation d’une fissure par les méthodes E-FEM (enrichissement des éléments) et X-FEM (enrichissement des nœuds)	43
2.14	Méthodes de décomposition de domaine	46
2.15	Illustration de l’algorithme associé à la méthode Latin	50
2.16	Méthode d’analyse locale/globale [Whitcomb, 1991]	52
2.17	Exemple de définition de domaines pour la méthode Arlequin	54
2.18	Définitions de grilles de résolution pour la résolution d’un problème avec la méthode multi-grille.	55
2.19	Niveaux de discrétisation et cycles de calcul	56
2.20	Partition par éléments et par nœuds	58
2.21	Principe de la méthode multi pas de temps [Gravouil et Combescure, 2001]	60

2.22	Raccord mortar (a) et optimum (b)	62
2.23	Utilisation de deux échelles spatiales	63
3.1	Définition du problème 2D	68
3.2	Problème de référence	69
3.3	Définition des plis et interface (a) et du repère lié à l'interface (b)	70
3.4	Loi de comportement tangentielle de l'interface	72
3.5	Définition d'un élément d'interface	73
3.6	Définition du problème dynamique unidimensionnel	75
3.7	Définition du problème test et zone délaminée en fin de calcul	78
3.8	Étude de raffinement de maillage	78
4.1	Décomposition en sous-domaines du stratifié	82
4.2	Discrétisation des frontières pour des maillages des plis non conformes (a) mortar, (b) optimum	84
4.3	Discrétisation temporelle dans les sous-domaines A et B	85
4.4	Définition du problème traité	87
4.5	Définition des maillages (a) de référence, (b) compatible, (c) incompatible	88
4.6	Evolution du front de délaminage (a) et de l'endommagement aux points A et B (b) dans le cas de maillages compatibles	89
4.7	Evolution du front de délaminage (a) et de l'endommagement aux points A et B (b) dans le cas de maillages incompatibles	90
4.8	Évolution au cours du temps des déformations sur les frontières entre sous-domaines (gauche : ϵ_{xx} , milieu : ϵ_{zz} , droite : ϵ_{xz})	90
5.1	Géométrie de la plaque	94
5.2	Élément $Q16$ dans ses configurations de référence et déformée	102
5.3	Définition des cas test de traction (a), flexion simple (b) et flexion pure (c)	104
5.4	Evolution de l'erreur en déplacement en bout de poutre en fonction de l'éclatement des éléments	104
5.5	Évaluation des coefficients a_{ij} (c.f. équation 5.38) pour les problèmes de traction (1 ^{re} ligne), flexion pure (2 ^e ligne) et flexion simple (3 ^e ligne) - Maillage C_2^B - Échelle log sur l'axe des ordonnées	105
5.6	Erreurs relatives sur les contraintes pour les problèmes de (a) traction, (b) flexion et (c) flexion simple.	106
5.7	Comparaison des solutions en déplacements, vitesse et accélération en bout de poutre entre les maillages de référence et $Q16$ (problème $e =$ $3mm, L = 45mm$)	107
5.8	Comparaison des solutions en déplacements, vitesse et accélération en bout de poutre entre les maillages de référence et $Q16$ (problème $e =$ $3mm, L = 80mm$)	107
5.9	Déformation ϵ_{xz} pour le problème $e = 3mm, L = 45mm$ en fin de calcul. (a) R_3^A , (b) C_1^A , (c) C_2^A , (d) C_3^A	108
5.10	Discrétisation de la frontière entre un domaine $Q16$ et un domaine $Q4$	109

5.11	Définition de l'exemple d'étude	110
5.12	Définition du maillage utilisé dans le calcul de référence	110
5.13	Déformée (a) et profil de délaminage (b) en fin de calcul pour le problème de référence	111
5.14	Évolution du front de délaminage dans les interfaces (numérotées de 1 à 9) en fonction du temps - Calcul de référence	112
5.15	Évolution de l'endommagement le long de l'interface médiane à l'instant d'initiation du délaminage	112
5.16	Évolution des multiplicateurs de Lagrange et de l'endommagement pour le calcul de référence	113
5.17	Maillage couplant des éléments $Q16$ avec le méso-modèle	113
5.18	Comparaison de l'évolution de l'endommagement dans l'interface médiane	114
5.19	Avancée du délaminage et déformation ϵ_{xz} pour les différents maillages : référence (1ère ligne), $l_{Q4} = 120mm$ (2ème ligne), $l_{Q4} = 80mm$ (3ème ligne), $l_{Q4} = 40mm$ (4ème ligne)	115
5.20	Discrétisation de la frontière entre deux modélisation de type méso-modèle et entre deux modélisations différentes	116
5.21	Évolution des multiplicateurs de Lagrange et de l'endommagement pour le calcul $l_{Q4} = 80mm$	117
6.1	Définition du problème multi-échelle considéré : maillages et discrétisations temporelles associées	120
6.2	Exemple de flexion simple et maillages : décomposition de domaine (D) et superposition (M)	123
6.3	Comparaison des déplacements en bout de poutre pour les différents maillages	123
6.4	Déformées des maillages global et local (amplification : $\times 10$)	125
6.5	Déplacements en bout de poutre pour la méthode modifiée	125
6.6	Comparaison des déformations en cisaillement dans le maillage local (a) et global (b)	126
6.7	Exemples 1D de référence (a) et multi-échelle (b)	128
6.8	Évolution du nombre d'itérations pour chaque pas de temps pour les différents problèmes	128
6.9	Évolution de la norme du résidu au cours des itérations pour un pas de temps	129
6.10	Comparaison des quantités cinématiques pour le cas du résidu R_λ (cas $E_l = E_G$)	129
6.11	Comparaison des quantités cinématiques pour le cas du résidu R_{IG} (cas $E_l = E_G$)	130
6.12	Interpolations linéaire et cubique des vitesses	133
6.13	Échelles temporelles associées aux maillages global et local	133
6.14	Comparaison des quantités cinématiques pour le calcul multi-pas de temps (interpolation linéaire des vitesses)	134

6.15	Solution en accélération sur la frontière Γ_1 dans les maillages global et local (interpolation linéaire) : (a) $N=5$, (b) $N=6$	135
6.16	Solution en accélération sur la frontière Γ_1 dans les maillages global et local (interpolation cubique)	136
6.17	Comparaison des quantités cinématiques pour le calcul multi-pas de temps (interpolation cubique des vitesses)	137

Introduction

La justification de la tenue des structures aéronautiques soumises à des chargements dynamiques tels que des impacts de débris de pneu, des chocs d'oiseau ou des situations de crash est primordiale pour la certification finale d'un avion. Pour chaque scénario, plusieurs jeux de paramètres doivent être considérés (angle d'impact, vitesse, masse...) et dans chaque cas, la vérification de critères de sécurité, tels que la non perforation ou la tenue résiduelle de la structure, doit être démontrée. Durant le processus de design, il est inenvisageable de réaliser des essais pour tester l'ensemble des configurations et fixer le design des différentes structures pour des questions de coût et de délais. Aussi, les méthodes de simulations numériques sont largement utilisées chez Airbus pour retenir la meilleure solution en terme de sécurité et de coût.

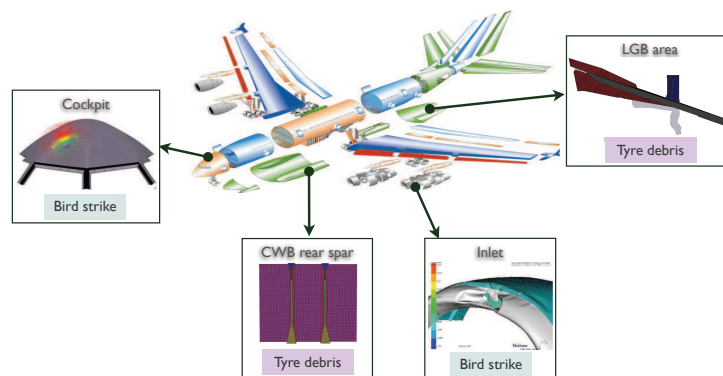


FIGURE 1: Exemple de calculs de vulnérabilité (Airbus)

L'utilisation croissante des matériaux composites dans les structures concernées par ces chargements dynamiques fait apparaître de nouveaux enjeux. En effet, le même niveau de confiance que dans le cas de structures métalliques doit pouvoir être apporté à des simulations de chocs sur des structures en composite. Cependant, représenter le comportement des composites stratifiés pour ces chargements requiert une bonne connaissance des phénomènes de dégradation. Dans le cas d'impact, le mode d'endommagement principal est le délaminage. Il présente la particularité d'être peu visible et peut parfois être très étendu. Dès lors, l'apport de la simulation numérique pour prédire ces délaminages est un point clé du dimensionnement, notamment pour la prédiction de la tenue résiduelle de la structure.

Les modèles éléments finis couramment utilisés chez Airbus pour la représentation des stratifiés sont des modèles de coques multi-couche permettant de représenter l'orthotropie du matériau. Les dégradations au sein du matériau sont prises en compte *via* des critères d'initiation, puis des lois d'évolution de l'endommagement dans les plis de l'empilement. Dans cette approche, le délaminage n'est pas modélisé. Cette modélisation macroscopique est valide jusqu'à l'apparition des premiers dommages dans la structure. Bien qu'incomplète, elle offre l'avantage de pouvoir mener des calculs sur des structures de grandes dimensions pour des coûts de calcul raisonnables, en terme de degrés de liberté et de temps de calcul. Néanmoins, afin d'améliorer la conception et les performances des structures en composite, la représentation du délaminage et sa prise en compte en cours de calcul sont souhaitables. Dès lors, une échelle de modélisation plus fine est nécessaire.

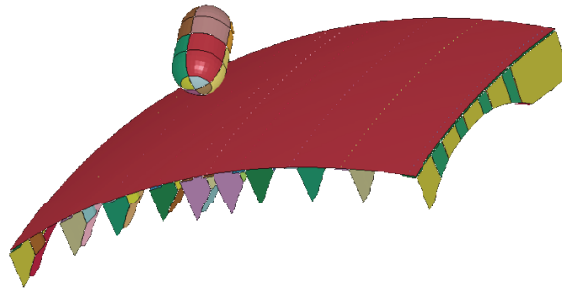


FIGURE 2: Exemple de structure industrielle standard soumise à des chocs à l'oiseau (Airbus)

Le méso-modèle composite présenté dans [Ladevèze, 1995] considère la structure composite stratifiée comme un empilement de plis homogènes et d'interfaces assurant le transfert des contraintes et déplacements entre les plis. La représentation effective dans le maillage des interfaces entre les plis du stratifié permet ainsi de modéliser explicitement le délaminage *via* leur dégradation [Allix et Ladevèze, 1992, Schellekens et de Borst, 1993]. L'utilisation de ce type de modélisation requiert le maillage de chaque pli du stratifié avec des éléments 3D et l'insertion d'éléments dédiés pour les interfaces. L'application d'un tel modèle à une structure industrielle similaire à celle présentée figure 2 conduit cependant à un nombre de degrés de liberté prohibitif. En effet, la longueur caractéristique de la *process zone*, zone en cours d'endommagement en pointe de délaminage, conduit à l'utilisation d'un maillage très fin pour pouvoir représenter correctement le phénomène. La bonne description du champ de contrainte dans cette zone peut ainsi conduire à l'utilisation de plusieurs éléments dans l'épaisseur de chaque pli du stratifié. Les tailles caractéristiques des éléments utilisés sont alors de l'ordre de 0.1mm . D'autre part, la présence des interfaces réduit considérablement le pas de temps de calcul dans le cas d'un schéma explicite, et conduit donc à une augmentation importante des itérations par rapport à des calculs classiques. Les calculs résultants de cette modélisation sont donc hors de portée des moyens de calcul actuels, et une approche spécifique doit être mise en œuvre.

Dès lors, l'objectif du travail présenté ici est de mettre en place une méthode de calcul

permettant de représenter correctement les phénomènes de dégradation dans le composite, tout en gardant des temps de calcul raisonnables. À terme, cette méthode devra fonctionner dans le logiciel de calcul Abaqus utilisé chez Airbus.

La spécificité des structures considérées est leur taille importante. La présence de ces fissures dans la structure modifie sa raideur, et a donc une incidence sur son comportement global. D'autre part, la longueur de la *process zone* est très faible devant les dimensions de la structure à modéliser. L'utilisation du méso-modèle n'est ainsi nécessaire que dans une partie restreinte de la structure, pour pouvoir représenter l'initiation et la propagation du délaminage.

Deux échelles de modélisation de la structure doivent dès lors être considérées : au niveau local pour prédire l'évolution des dégradations du matériau ; au niveau global pour rendre compte du comportement modifié de la structure. D'autre part, dans un cadre dynamique, ceci implique également de considérer des temps caractéristiques d'évolution différents dans chaque modèle local et global, et donc de pouvoir introduire des pas de temps différents.

Le méso-modèle n'étant nécessaire que dans une zone limitée de la structure, une modélisation de type coque peut être utilisée dans le reste de la structure. Pour faciliter un raccord avec des modèles 3D, des éléments de coque 3D paraissent pertinents pour représenter la structure à l'échelle macroscopique. La construction de tels éléments n'est cependant pas directe, et nécessite la mise en place d'une démarche spécifique afin d'éviter des phénomènes de blocage. L'enjeu est alors de pouvoir représenter de façon précise le champ de déformation dans la coque.

Deux approches sont couramment utilisées dans la littérature. La première solution consiste à adapter les éléments 3D linéaires classiques *via* des méthodes permettant de représenter correctement les déformations dans l'élément [Bathe et Dvorkin, 1984, Simo et Rifai, 1990]. L'autre choix possible est de repartir de la théorie des coques [Parisich, 1995].

Pour coupler les deux modélisations, on se propose de mettre en place une méthode multi-échelle en espace et en temps. En ce qui concerne le couplage en espace, des méthodes multi-échelles basées sur des décompositions de domaine constituent un premier point d'entrée [Mandel, 1993, Farhat et Roux, 1991, Ladevèze, 1999]. La particularité du problème conduit également à s'intéresser à des méthodes de type superposition. Dans ce cas là, un maillage raffiné est superposé, dans les zones d'intérêt, au maillage global de la structure étudiée [Whitcomb, 1991], [Guidault *et al.*, 2008]. Ces méthodes permettent ainsi de conserver le maillage global de la structure tout en précisant la modélisation d'une zone restreinte. Pour le cas qui nous intéresse ici, le comportement macroscopique de la structure est connu : c'est un comportement de coque. Conserver un maillage global de la structure pendant toute la durée du calcul impose que cette échelle macroscopique soit alors continue.

Le second point à prendre en compte concerne la discrétisation temporelle du problème et le schéma de résolution. En effet, des schémas explicites sont traditionnellement

utilisés pour résoudre les problèmes de choc. Dès lors, le pas de temps du calcul est fixé par le plus petit élément du maillage. Les méthodes de sous-cyclage [Belytschko *et al.*, 1979] ou mixtes en temps [Belytschko et Mullen, 1978, Hughes et Liu, 1978] permettent d'adapter schéma de résolution et pas de temps aux différentes zones de la structure. Les travaux de [Gravouil et Combescure, 2001] utilisent ces approches couplées avec une méthode de décomposition de domaine. Ils constituent le point de départ de l'étude présentée ici.

L'approche choisie consiste alors à utiliser un maillage global de la structure par des éléments de coque 3D, constituant une représentation continue du comportement macroscopique de la structure. La superposition de maillages utilisant une modélisation de type méso-modèle dans les zones d'intérêt de la structure permet alors de prévoir l'initiation et la propagation du délaminage dans la structure. Les conséquences des dégradations locales du matériau sont alors répercutées au niveau macroscopique par le calcul d'un résidu d'équilibre.

Le document est organisé comme suit :

- La première partie présente une étude bibliographique des différents points d'intérêt du problème.
 - Le chapitre 1 présente le contexte industriel de cette étude. Les chocs sur les stratifiés et les dégradations résultantes sont étudiées. Les simulations numériques actuellement réalisées sont détaillées en soulignant leurs limitations et les besoins industriels en terme de résultats.
 - Dans le chapitre 2, une étude bibliographique des modélisations du délaminage conduit à s'intéresser à deux échelles de modélisations du phénomène, macroscopique et mésoscopique. D'une part, représenter le délaminage à l'échelle macroscopique conduit à s'intéresser aux représentations de type coque des stratifiés. Les modes de représentation de fissures à cette échelle sont également considérés. D'autre part, l'utilisation d'une modélisation plus fine du stratifié conduit à l'étude de méthodes permettant de réduire les temps de calcul. Aussi, des approches de décomposition de domaine et multi-échelles en temps ou en espace sont considérées.
- La seconde partie du manuscrit présente les développements réalisés en s'appuyant sur l'étude bibliographique. Les exemples présentés ici sont des cas 2D.
 - Dans le chapitre 3, les équations du problème et les problématiques liées à l'utilisation d'un méso-modèle composite dans un cadre dynamique sont présentées. La finesse des maillages et les pas de temps nécessaires à une bonne représentation des phénomènes de dégradations sont notamment soulignés. Les tailles des modèles éléments finis dans le cas de structures industrielles sont alors prohibitifs.
 - Dans le chapitre 4, les équations d'une méthode multi pas de temps sont adaptées au cas du suivi de propagation du délaminage.

- Ceci conduit dans le chapitre 5 à la définition d'une représentation de coque 3D du stratifié. La taille des modèles éléments finis et les temps de calcul peuvent ainsi être réduits en utilisant ces éléments dans les parties de la structure éloignées de la zone de chargement. Une étude du couplage de ces éléments avec une description de type méso-modèle est réalisée : la qualité de représentation des phénomènes de dégradations est ainsi conservée. Cependant, le suivi du délaminage requiert une évolution de la modélisation en cours de calcul.
- Enfin, afin de s'affranchir de processus de remaillages, le chapitre 6 présente une méthode multi-échelle en espace et en temps. Cette approche est basée sur l'utilisation d'un maillage global de coque de la structure et de patchs locaux. Ces derniers sont activés dans les zones en cours de dégradation quand cela s'avère nécessaire et sont superposés au maillage global qui reste fixe au cours du calcul.

PREMIÈRE PARTIE

Cadre de l'étude et contexte scientifique

Sur une stratégie multi-échelle d'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire

Dans ce chapitre, le contexte industriel de l'étude est présenté. Dans un premier temps, les mécanismes de dégradations des composites stratifiés soumis à des chocs sont étudiés. Les simulations numériques réalisées chez Airbus pour ces cas sont ensuite présentées.

Sommaire

1	Cadre de l'étude	10
2	Dégradation des composites stratifiés	10
2.1	Description des composites stratifiés étudiés	10
2.2	Description des modes de dégradations	11
3	Caractéristiques des calculs réalisés	13
3.1	Modèle éléments finis	13
3.2	Schéma de résolution et temps de calcul	14
3.3	Critères de dimensionnement	15
3.4	Résultats obtenus et limitations	16
4	Bilan	17

1 Cadre de l'étude

Le travail présenté ici a pour origine une problématique industrielle. Le service “Vulnérabilité” d’Airbus a pour vocation l’étude des chargements dynamiques sur les différentes structures de l’avion, telles que le fuselage ou la voilure. Les études menées dans ce service constituent une aide au design des structures et un support pour la phase de certification de l’avion.

Les problèmes de crash et d’impact rentrent dans ce cadre. Pour les problèmes d’impact, les cas considérés sont des impacts d’oiseau ou de débris de pneu. Les principaux points à vérifier sont alors la non perforation des structures impactées et la tenue résiduelle de la structure après le choc. Ces deux points permettent d’une part d’assurer la sécurité des systèmes internes à l’avion situés derrière la structure impactée, et d’autre part de vérifier que les charges en vol peuvent encore être supportées par la structure. A titre d’exemple, une dizaine d’impacts d’oiseau par jour est recensée à travers le monde. Les principales zones d’impact sont le cockpit et le bord d’attaque des ailes.

Les moyens mis en place pour ces études sont des essais et des simulations numériques. Afin de réduire les coûts de développement, la part de la simulation numérique pour le dimensionnement des structures sous impact est devenue prépondérante : les études paramétriques et les différentes configurations envisagées sont étudiées par ce biais. La configuration finale retenue est justifiée soit par un essai, soit par une simulation numérique. Les simulations numériques sont alors utilisées seulement si les méthodes sont matures pour l’application considérée et ont été préalablement validées et corrélées avec des essais.

La part croissante des matériaux composites dans les structures considérées nécessite la mise en place d’approches dédiées afin de représenter au mieux les scénarios de dégradation de ces matériaux. L’utilisation de critères de rupture de pli permet de vérifier la non perforation des structures mais limite la description des dégradations. Des phénomènes tels que le délaminage, qui entraîne une réduction de raideur des structures, ne sont que rarement représentés et pris en compte dans les calculs. Le délaminage est alors représenté *via* des modèles simplifiés et à l’échelle macroscopique de la structure.

2 Dégradation des composites stratifiés

Dans cette partie, les matériaux qui seront considérés dans la suite de l’étude sont présentés afin de cerner les différents points à prendre en compte dans la modélisation. Les scénarios de dégradation du matériau sont notamment soulignés.

2.1 Description des composites stratifiés étudiés

Les composites considérés ici sont des stratifiés. Ils sont constitués par un empilement de plis élémentaires unidirectionnels (c.f. figure 1.1). Chaque pli est constitué de fibres

continues, qui peuvent être en carbone ou en verre, orientées dans la même direction et noyées dans une matrice en résine. Une zone riche en matrice, l'interface, assure la cohésion entre les plis de l'empilement. Les fibres ont un diamètre de l'ordre de $100\ \mu\text{m}$. L'épaisseur d'un pli est de l'ordre de $0,1\text{mm}$, et les stratifiés utilisés dans les structures aéronautiques ont des épaisseurs de quelques millimètres.

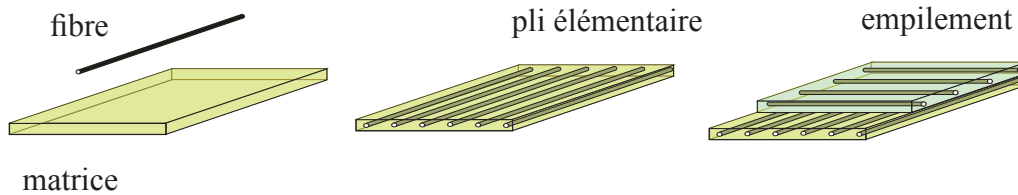


FIGURE 1.1: Description d'un composite

L'intérêt principal de ce type de matériau réside dans la possibilité d'adapter leurs propriétés mécaniques au chargement appliqué à la structure. En effet, l'orientation spécifique des fibres définit l'orientation du pli par rapport à la direction de chargement. Les propriétés mécaniques du stratifié sont directement liées à la séquence d'orientation des différents plis dans l'empilement. Dès lors, le matériau peut être défini pour tenir au mieux le chargement auquel il est destiné. Macroscopiquement, le stratifié a un comportement orthotrope.

2.2 Description des modes de dégradations

La structure spécifique des stratifiés entraîne des modes de dégradations particuliers qui ont été étudiés à travers de nombreuses campagnes expérimentales. Les différents scénarios sont présentés dans la figure 1.2.

A l'échelle du pli, deux principaux modes de dégradations continues peuvent apparaître. Les décohésions fibres / matrice résultent d'une dégradation de l'interface entre les deux constituants du pli. D'autre part, des microvides ou microfissures apparaissent dans la matrice. Ces dégradations sont essentiellement déclenchées par la présence de défauts de fabrication.

La coalescence de ces dégradations dans le pli conduit à l'apparition de fissures transverses, traversant toute l'épaisseur du pli. Ces fissures se propagent parallèlement aux fibres.

Ces fissures se propagent ensuite dans l'interface, zone riche en matrice située entre les plis, créant ainsi des micro-délaminages. Ce phénomène correspond à la séparation locale des plis de l'empilement. Ce micro-délaminage peut conduire à des délaminages de plus grande ampleur visibles à l'échelle macroscopique, correspondant à la séparation de plis adjacents dans le stratifié.

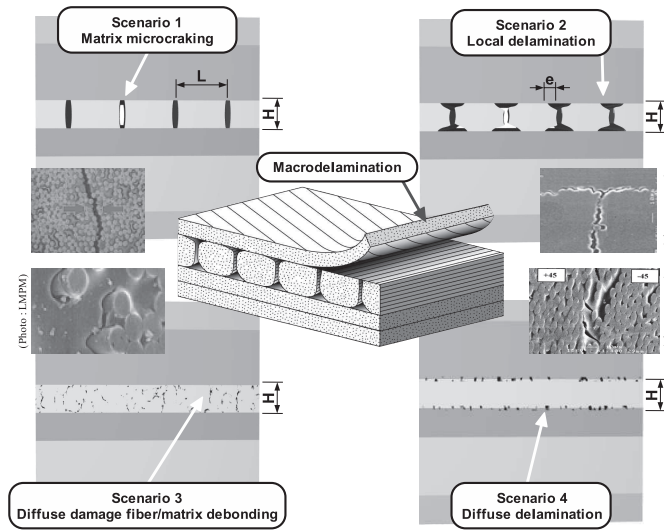


FIGURE 1.2: Description des dégradations dans un stratifié

Outre ce mécanisme de couplage entre fissuration transverse et délaminage, des sollicitations macroscopiques du stratifié peuvent engendrer des macro-délaminages. Les propriétés mécaniques de l'empilement sont alors considérablement réduites. C'est en particulier dans ce cadre que se place cette étude.

Enfin, dans chaque pli, les fibres sont chargées différemment en fonction de l'orientation des plis. Même si leur contrainte à rupture est élevée, elles peuvent cependant rompre dans le cas de sollicitations sévères de traction ou de compression. Les critères liés à ce phénomène restent une question ouverte, récemment étudiée dans [Hinton *et al.*, 2004].

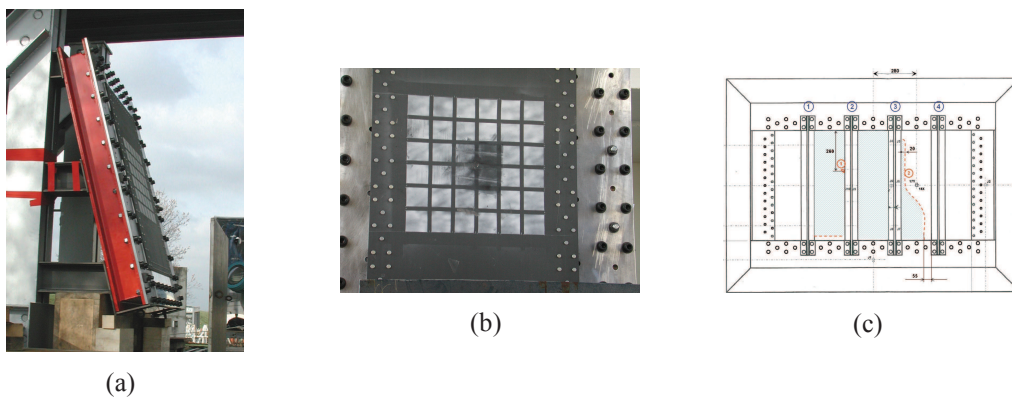


FIGURE 1.3: Exemple de choc de pneu sur un panneau composite : montage (a), zone impactée (b) et zone délaminiée après le choc (c) (Airbus)

Dans les structures aéronautiques, le délaminage est le phénomène de dégradation le plus problématique. Dans le cas de choc, il peut se propager sur des surfaces très importantes, s'étendant souvent au delà de la zone de chargement initial. Les ordres de grandeurs associés aux aires délaminées sont ainsi similaires à ceux de la structure impactée. De plus, le délaminage n'est pas forcément visible à l'oeil nu (c.f. figure 1.3). La capacité à prévoir son apparition dans le cas de chargement dynamique est donc indispensable pour vérifier la tenue des structures stratifiées.

3 Caractéristiques des calculs réalisés

Le logiciel éléments finis utilisé chez Airbus pour le calcul de choc est Abaqus/Explicit. Un exemple de maillage est donné dans la figure 1.4. Les structures considérées sont des coques, comportant un rayon de courbure. Leur épaisseur peut varier entre 2 et 10mm selon les zones de l'avion considérées.

Classiquement, des raidisseurs sont ajoutés à ces structures. Également en composite, leur épaisseur reste faible devant leur dimension dans le plan. Ils sont représentés explicitement dans le maillage éléments finis. Dans l'exemple présenté ici, l'espacement entre deux raidisseurs est d'environ 100mm, et les dimensions dans le plan d'environ 1m par 0,5m.

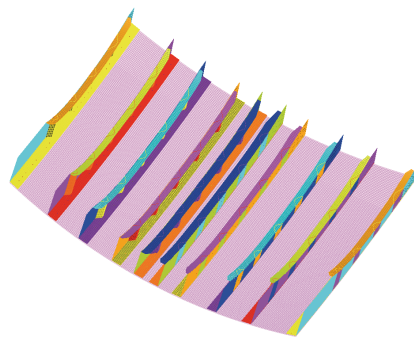


FIGURE 1.4: Exemple de maillage d'un panneau composite (Airbus)

3.1 Modèle éléments finis

Les stratifiés sont représentés avec des éléments de coque multi-couches. Dans ces éléments, un point d'intégration est défini pour chaque pli de l'empilement. Le comportement de chaque pli est ainsi pris en compte séparément. L'utilisation de ces éléments assure une représentation correcte de la cinématique globale de la structure étudiée en prenant en compte son caractère orthotrope. D'autre part, les coûts de calculs associés en terme de degrés de liberté restent raisonnables.

L'impacteur est représenté explicitement pour le calcul. Pour des problèmes d'impact d'oiseau, cette approche permet notamment de suivre l'écoulement de l'oiseau au cours du temps et de représenter ainsi l'évolution de la distribution des efforts en espace et en temps sur la structure considérée. Dans le cadre des certifications, la masse des impacteurs considérés est de 1,8 kg environ pour une vitesse initiale de l'ordre de 180 m/s.

La taille des éléments définissant la structure est généralement de 5mm par 5mm. Dans les zones de détails, le maillage doit être raffiné et les tailles caractéristiques des éléments sont alors plus faibles. Cette discrétisation conduit à des modèles comptant environ 100000 degrés de liberté pour l'exemple présenté ici. Dans le cas de structures plus grandes, les modèles peuvent atteindre jusqu'à 50 millions de degrés de liberté.

La définition des conditions aux limites constitue un point sensible dans ce genre de problème. En effet, la taille de la structure considérée influe de façon notable sur la représentativité des résultats. L'utilisation de structures de grande taille assure une meilleure représentation des phénomènes structuraux globaux. Les phénomènes parasites engendrés par les conditions aux limites sont en effet amoindris dans la zone d'intérêt du calcul. Cependant, traiter des structures de grande dimension conduit inévitablement à la manipulation de modèles éléments finis importants.

A contrario, une structure de taille réduite conduira à des modèles avec peu de degrés de liberté mais sera peu représentative du comportement réel.

3.2 Schéma de résolution et temps de calcul

La durée des chocs simulés est de l'ordre de 3ms. Pour résoudre ces problèmes de dynamique transitoire, des schémas de résolution explicite sont utilisés. Ils permettent en effet de limiter les coûts de calcul par l'utilisation de matrice masse diagonale.

Cependant, ces schémas sont conditionnellement stables, ce qui conduit à une limitation du pas de temps de calcul. Le calcul du pas de temps critique du calcul est directement lié au plus petit élément du maillage. Ce point peut être limitant dans de nombreux cas, notamment en présence de détails tels que des trous ou des congés, dans la structure. Le maillage doit en effet être raffiné dans ces zones, conduisant à l'utilisation d'éléments de taille caractéristique plus faible. Bien que ces détails représentent des zones très restreintes, le pas de temps de calcul pour l'ensemble de la structure est fixé par les éléments permettant de les décrire.

Pour les tailles de maille classiquement utilisées, le pas de temps de calcul est de l'ordre de 10^{-4} ms. Les temps de calcul sont de l'ordre de 24h (un seul processeur).

□ **Remarque :** Dans Abaqus, une fonction de sub-cycling est disponible. Elle permet de définir une zone réduite de la structure dans laquelle le maillage, plus fin, limiterait le pas de temps global. Des pas de temps différents sont alors utilisés dans cette zone et le reste de la structure, ce qui permet de réduire le nombre d'itérations et de diminuer ainsi les coûts de calcul. Nous reviendrons sur ce type d'approches dans la partie 3.3.

3.3 Critères de dimensionnement

La détection des dégradations dans les stratifiés est réalisée *via* l'utilisation de critères de rupture dans les plis. Différents critères existent dans la littérature et dans les codes commerciaux.

Les premiers critères mis en place sont dérivés des critères traditionnellement utilisés pour les matériaux métalliques, tel que le critère de Von Mises. Le critère de Tsai-Hill [Hill, 1950], [Azzi et Tsai, 1965], permet de prendre en compte les contraintes à rupture de l'empilement dans les différentes directions. Le matériau ne subit pas de dégradation tant que :

$$I = \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} < 1 \quad (1.1)$$

Des contraintes à rupture différentes en traction et en compression sont prises en compte dans les directions 1 et 2. Selon le signe des contraintes σ_{11} et σ_{22} , les grandeurs X et Y prennent la valeur des contraintes à rupture en traction ou en compression. La grandeur S correspond à la contrainte en rupture en cisaillement.

Le critère de Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971] prend une forme assez proche :

$$I = F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{33}\sigma_{12}^2 < 1 \quad (1.2)$$

Les différents coefficients ne sont plus fonction du signe des contraintes mais prennent directement en compte les contraintes à rupture des cas en traction et compression dans les directions 1 et 2.

Ces critères permettent de déterminer la rupture finale du composite et sont appliqués en post-traitement du calcul. L'apparition et la propagation des dégradations dans le matériau ne sont pas répercutées dans la structure au cours du calcul. Ils constituent cependant une indication pertinente sur les zones sensibles de la structure.

D'autres critères ont par la suite été développés et ont récemment été comparés dans [Hinton *et al.*, 2004]. L'un des critères étudié est celui de Hashin [Hashin, 1980], implanté dans de nombreux logiciels industriels de calcul, notamment dans Abaqus. Ce critère est couramment utilisé chez Airbus dans les simulations de choc sur des stratifiés. Ce critère permet de différencier la rupture de la fibre et de la matrice, et est en fait composé de 4 critères élémentaires :

- Rupture des fibres en traction : $I_t^f = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_t^f} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_L^{f2}} < 1$

- Rupture des fibres en compression : $I_c^f = \frac{\sigma_{11}}{Y_c^f} < 1$

- Rupture de la matrice en traction :

$$I_t^m = \left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{X_t^m} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_L^{m2}} + \left(\frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_T^{m2}} \right)^2 < 1 \quad (1.3)$$

– Rupture de la matrice en compression :

$$I_c^m = \frac{1}{Y_c^m} \left(\left(\frac{Y_c^m}{2S_T^m} \right)^2 - 1 \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2S_t^m} \right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_T^{m2}} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_L^{m2}} < 1 \quad (1.4)$$

Ce critère permet de détecter dans l'empilement les plis dans lesquels des ruptures de fibre ou de matrice apparaissent. Il peut être couplé avec une loi d'endommagement. Dans ce cas là, il est utilisé en tant que critère d'initiation de l'endommagement et couplé avec des lois appropriées.

3.4 Résultats obtenus et limitations

Les simulations utilisant des éléments de coques multi-couche permettent d'avoir accès à un certain nombre d'informations concernant les plis du stratifié, comme par exemple les déformations dans chaque pli. L'utilisation de critères présentés précédemment permet par exemple de déterminer les plis rompus au cours du calcul. En revanche, avec des approches de ce type, aucune information n'est disponible sur le délaminage, phénomène qui apparaît entre les plis du stratifié.

Pour combler cette lacune, une modélisation différente est parfois utilisée. Le stratifié est alors arbitrairement séparé en deux stratifiés, maillés chacun par des éléments de coque multi-couches. Des éléments cohésifs sont alors placés entre les deux coques ainsi créées (c.f. figure 1.5). Des lois d'endommagement dans les éléments cohésifs permettent alors de représenter le délaminage dans cette interface.

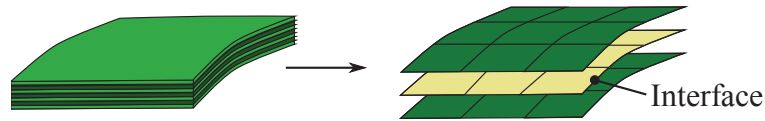


FIGURE 1.5: Exemple de prise en compte d'une interface délaminante dans un maillage

Ce type de modélisation permet d'avoir une information partielle et peu prédictive sur le délaminage. En effet, une seule et unique interface de l'empilement est alors considérée comme pouvant potentiellement subir des dégradations. Le choix qui est fait au moment du maillage sur l'emplacement de cette interface influe directement sur les résultats obtenus et ne permet pas de tenir compte des phénomènes de multi-délaminages observés pour de tels chargements.

4 Bilan

Le besoin industriel est d'avoir accès à une estimation des zones délaminées dans les structures composites stratifiées après un choc. Pour obtenir cette information, un effort de modélisation doit être réalisé, les outils utilisés actuellement ne permettant pas d'obtenir des résultats fiables. Cependant, les coûts de calcul doivent rester réalistes vis à vis des cycles de développement.

Le premier constat est que deux échelles spatiales de dégradations sont en jeu dans ce type de problème. D'un côté, à l'échelle du pli, des dégradations très localisées apparaissent. Ces dernières donnent lieu d'autre part à des zones délaminées qui sont elles très étendues. La conséquence macroscopique des dégradations à l'échelle du pli est alors une modification de la rigidité de la structure.

Le premier point à considérer est alors la définition d'un modèle pour prédire l'initiation puis la propagation du délaminage dans la structure. Pour ce point, différentes échelles spatiales de modélisation sont possibles. Elles sont présentées dans le chapitre 2-1.

Le principal effet du délaminage sur le comportement global de la structure est une modification de la raideur. Aussi, le deuxième point à étudier est le moyen de représenter macroscopiquement le comportement sain ou fissuré de la structure étudiée. Le chapitre 2-2 présente les problématiques liées aux éléments de coque 3D et les méthodes existantes pour représenter les fissures à l'échelle macroscopique.

Pour prendre en compte le délaminage dans le calcul, le recours à des modélisations plus fines du stratifié, à l'échelle mésoscopique, est indispensable. Dans ce type d'approche, chaque pli du stratifié est maillé par des éléments 3D et des éléments dédiés représentent les interfaces entre les plis. Il est alors intéressant d'évaluer la taille du modèle éléments finis obtenu.

Dans le cas d'une structure d'un mètre carré, composée d'une dizaine de plis d'une épaisseur de 0.1 mm , le nombre de degrés de liberté atteint 2 milliards. Pour des problèmes de dynamique, le pas de temps de calcul doit également être pris en compte. La taille des éléments des plis ainsi que la raideur des éléments d'interface sont pris en compte pour le calcul du pas de temps. Alors qu'avec des éléments de coque multi-couches, les pas de temps sont de l'ordre de 10^{-4} ms , les approches à l'échelle mésoscopique nécessitent des pas de temps de l'ordre de 10^{-5} ms .

Le dernier point à considérer est donc la réduction des coûts de calcul liés à cette modélisation du délaminage. Le chapitre 2-3 présente différentes techniques permettant de traiter ces points.

Dans cette partie, une étude bibliographique est réalisée sur les principaux aspects mis en jeu dans la résolution du problème posé. Dans un premier temps, les différentes modélisations proposées pour décrire le délaminage sont exposées. Les applications numériques associées à ces modèles conduisent alors à s'intéresser d'une part aux modèles de type coque et d'autre part aux méthodes multi-échelles.

Sommaire

1	Modélisation du délaminage	20
1.1	Caractérisation du délaminage	20
1.2	Approches macroscopiques	21
1.3	Modélisation mésoscopique	25
1.4	Bilan	33
2	Modélisation des structures élancées	34
2.1	Difficultés numériques	34
2.2	Développement d'éléments de coques 3D	37
2.3	Représentation de fissures macroscopiques	42
2.4	Bilan	45
3	Approches multi-échelles et de sous-structuration	46
3.1	Méthodes de décomposition de domaine	46
3.2	Méthodes de superposition	51
3.3	Approches multi-échelles en temps	57
3.4	Bilan	63

1 Modélisation du délaminage

Pour le problème que l'on souhaite traiter, le macro-délaminage est le principal mode de dégradation à représenter. Les différents types de modélisation sont liés au point de vue adopté pour le décrire.

À une échelle macroscopique, ce phénomène peut être vu comme une fissure dans l'épaisseur de la plaque. Des critères en contrainte permettent alors de prédire son initiation. Des approches issues de la mécanique de la rupture peuvent être utilisées pour définir la propagation du délaminage.

À une échelle mésoscopique, le délaminage peut être considéré comme la dégradation progressive d'une mince couche de matrice. Les modèles développés s'attachent alors à décrire la dégradation des interfaces du matériau par des lois de type endommagement ou plasticité.

Le délaminage est une conséquence des différentes dégradations qui apparaissent à l'échelle du pli du stratifié, les fissures transverses notamment. Aussi, une représentation explicite de ces scénarios dans les plis du stratifié permet une modélisation plus précise du processus de délaminage.

1.1 Caractérisation du délaminage

Le délaminage correspond à la séparation de plis adjacents d'un composite stratifié. Cette séparation physique correspond à la dégradation de la fine couche de matrice liant les plis du stratifié entre eux (c.f. figure 2.1). Ce phénomène entraîne une diminution de la raideur de la structure, qui peut conduire à sa ruine.

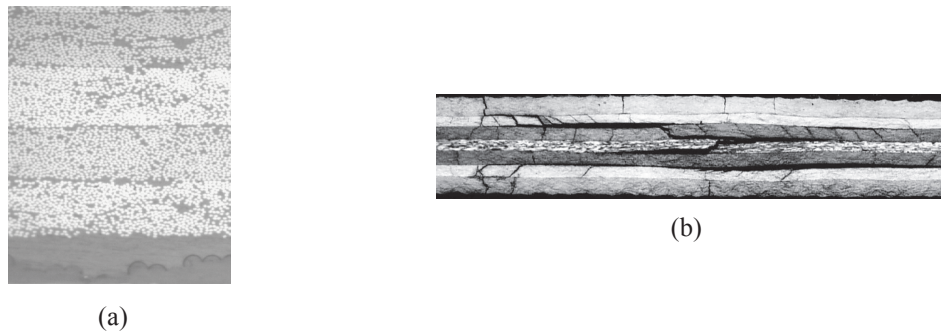


FIGURE 2.1: Interfaces saines (a) et délamínées (b)

Les phases d'initiation et de propagation sont traditionnellement différenciées.

L'initiation correspond physiquement à l'apparition de dégradations dans une interface saine. Deux causes principales peuvent alors être identifiées. Dans les zones de bord du stratifié, une concentration importante des contraintes hors plan apparaît dans une couche mince, provoquant la dégradation de l'interface [Wang et Choi, 1982]. C'est le cas de jonctions entre plaques stratifiées par exemple : les trous présents dans les plaques

constituent des zones de bord qui, sous chargement, peuvent être à l'origine de départ de délaminages.

D'autre part, les délaminages qui apparaissent dans une zone quelconque interne du composite sont causés par des phénomènes de microfissuration dans les plis. Lorsqu'elles les atteignent, ces microfissures se propagent le long des interfaces, créant ainsi des délaminages locaux, puis macroscopiques. Ce genre de phénomène peut apparaître par exemple lors de choc sur une structure stratifiée.

La caractérisation expérimentale du délaminage est ainsi basée sur des essais classiquement utilisés en mécanique de la rupture, et donnent accès aux taux de restitution d'énergie critique G_c associés aux modes d'avancée de la fissure : mode d'ouverture (mode I), de cisaillement plan (mode II) et antiplan (mode III) (c.f. figure 2.2). Des essais en mode mixte permettent de plus d'identifier d'éventuels phénomènes de couplage entre ces modes. Ces différents essais, appliqués aux matériaux composites, sont présentés dans [Lévêque, 1998].

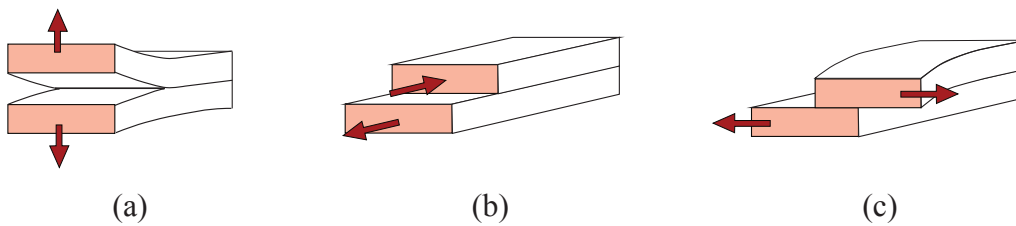


FIGURE 2.2: Modes de propagation : (a) ouverture, (b) cisaillement plan et (c) anti-plan

Dans le cas de choc sur des structures composites, le comportement dynamique global de la structure joue un rôle important dans la propagation du délaminage. Il est alors difficile de distinguer les effets dynamiques liés au matériau lui-même de ceux liés à la géométrie de la structure. Une donnée importante à considérer et prendre en compte est la vitesse de propagation du délaminage dans la structure. Dans le cas d'un essai en mode II, la valeur des taux de restitution d'énergie critique varie avec la vitesse d'avancée de la fissure dans le matériau [Guimard *et al.*, 2010].

1.2 Approches macroscopiques

Cette échelle de modélisation correspond directement aux observations expérimentales décrites plus haut. L'initiation et la propagation sont traitées séparément. Les modèles associés sont basés sur la définition de critères en contrainte pour la phase d'initiation. Pour la phase de propagation, des critères énergétiques issus de la mécanique de la rupture sont utilisés.

1.2.1 Modélisation de l'initiation

Les principaux critères pour prédire un départ de délaminage sont focalisés sur l'étude des bords libres. Ils permettent de comparer l'état de contrainte dans la structure avec les contraintes à rupture du matériau. Le critère défini dans [Brewer et Lagace, 1988] prend en compte l'ensemble des composantes du vecteur des contraintes normales, sous la forme :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{\sigma_{13}^R}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{\sigma_{23}^R}\right)^2 + \left(\frac{<\bar{\sigma}_{33}>_+}{\sigma_{33}^{R,t}}\right)^2 + \left(\frac{<\bar{\sigma}_{33}>_-}{\sigma_{33}^{R,c}}\right)^2 < 1$$

Les quantités σ_{ij}^R désignent les contraintes à rupture associées aux différents modes d'ouverture de fissure. Les quantités $\bar{\sigma}$ doivent être représentatives de l'état de contrainte dans la zone de bord considérée. Cependant, le calcul analytique du champ de contrainte montre des singularités, rendant impossible le calcul direct du champ de contrainte dans l'interface du matériau sur un bord de la structure. Partant de ce constat, [Nuismer et Whitney, 1974] définissent une longueur caractéristique l_c , qui correspond à la zone subissant des dégradations. La définition de cette longueur l_c diffère selon les auteurs. Par exemple, dans [Kim et Sony, 1984], les auteurs considèrent qu'elle dépend de l'épaisseur des plis adjacents alors que [Brewer et Lagace, 1988] la considèrent comme étant une caractéristique de l'interface, à définir expérimentalement.

Dès lors, deux solutions existent pour le calcul de la quantité $\bar{\sigma}$. Dans le premier cas, $\bar{\sigma}$ est défini comme la contrainte calculée à une distance l_c du bord du stratifié :

$$\bar{\sigma} = \sigma(l_c) \quad (2.1)$$

Les critères basés sur cette formule sont appelés *Point Stress*.

La seconde solution, qui correspond aux critères *Average Stress*, est basée sur le calcul d'une moyenne des contraintes dans la zone de bord définie par la grandeur l_c , soit :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \sigma dl \quad (2.2)$$

Une autre voie consiste, à l'instar de [Leguillon, 1999], à étudier la singularité du champ de contrainte sur un bord libre. Une analyse asymptotique permet alors de définir des facteurs d'intensité de contrainte de l'interface. Pour les stratifiés, ce calcul nécessite la prise en compte des micro-défauts sur le bord de la plaque : les facteurs d'intensité de contrainte ainsi définis sont alors fonction de l'épaisseur des plis du stratifié. Cette méthode se rapproche de celle proposée par [Irwin, 1957] pour modéliser la propagation de fissure.

1.2.2 Modélisation de la propagation

Les approches permettant de décrire la propagation du délaminage sont principalement issues de la mécanique de la rupture. Ces modèles assimilent le délaminage à une rupture fragile de l'interface, qui ne peut avoir que deux états, sain ou rompu. Des critères

énergétiques, tel le critère de Griffith [Griffith, 1924], permettent de décrire les conditions nécessaires à la propagation d'une telle fissure.

La comparaison du taux de restitution d'énergie G sur le front de délaminage avec un taux critique G_c permet de déterminer son avancée. Dans le cas des stratifiés, les critères classiquement utilisés couplent les taux de restitution d'énergie des différents modes de propagation du délaminage :

$$\left(\frac{G_I}{G_I^c}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{II}^c}\right)^\beta + \left(\frac{G_{III}}{G_{III}^c}\right)^\gamma > 1 \quad (2.3)$$

Les taux de restitution d'énergie critiques, G_I^c , G_{II}^c et G_{III}^c , peuvent être déterminés expérimentalement. Les coefficients de couplage α , β et γ permettent de moduler le poids donné à chaque mode de propagation. Suivant le matériau étudié, d'autres critères basés sur les mêmes quantités sont proposés [Benzeggagh et Aboura, 1991].

1.2.3 Exemple d'application numérique

L'application de la mécanique de la rupture aux calculs éléments finis a donné naissance aux méthodes de type *crack closure*. Ces méthodes ont tout d'abord été utilisées pour calculer la propagation de fissures dans des matériaux homogènes avant d'être appliquées aux stratifiés. Un maillage classique est utilisé, la propagation de la fissure dans le maillage conduisant à un remaillage par séparation des nœuds en jeu.

Deux variantes existent, toutes deux basées sur les travaux de [Irwin, 1957]. L'hypothèse principale consiste à supposer que l'énergie $\Delta E^o(\delta a)$ nécessaire à propager la fissure d'une longueur δa est identique à l'énergie $\Delta E^f(\delta a)$ nécessaire pour refermer une fissure de même longueur.

Dans la première variante de la méthode, notée CCT dans la figure 2.3, le calcul de l'énergie ΔE^o est mené *via* deux calculs éléments finis successifs. On considère ici la fissure à venir : dans l'état actuel cette fissure est maintenue fermée. Les efforts de réaction \underline{R} à la pointe de fissure sont tout d'abord calculés. Ils sont ensuite appliqués au problème ce qui permet de calculer les déplacements \underline{u}^R correspondants. L'énergie nécessaire pour maintenir la fissure fermée est alors estimée par :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \underline{R} \cdot \underline{u}^R \quad (2.4)$$

La seconde variante de la méthode, initialement proposée dans [Rybicki et Kanninen, 1977], est classiquement désignée par l'appellation *Virtual Crack Closure Technique* (c.f. figure 2.3). On considère ici que la fissure de longueur δa qui va se propager est identique à celle qui existe déjà dans la structure. Aussi, c'est l'énergie nécessaire à la refermeture de la fissure déjà existante qui est ici évaluée. Les efforts de réaction sont calculés comme précédemment en pointe de fissure courante, tandis que les déplacements sont ceux des

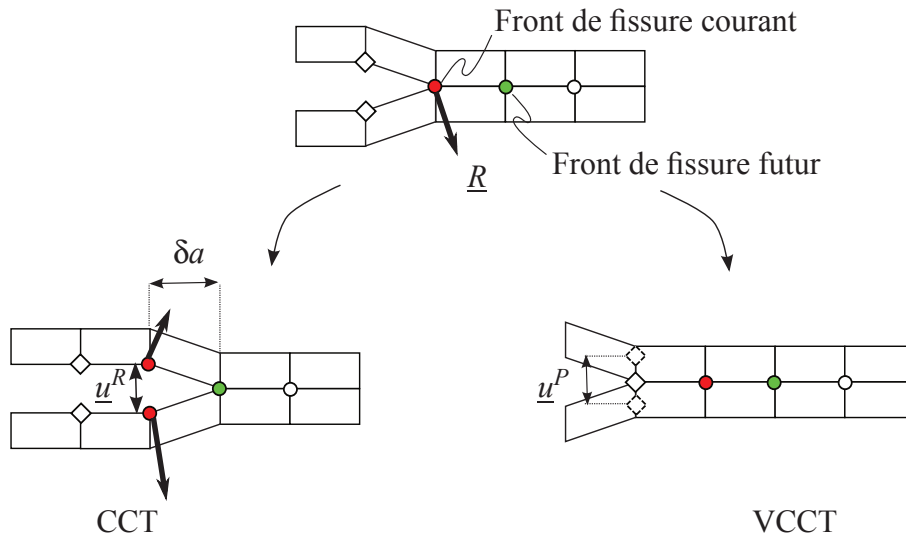


FIGURE 2.3: Configurations utilisées pour le calcul de ΔE dans les approches CCT et VCCT

nœuds en amont de la fissure :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \underline{R} \cdot \underline{u}^p \quad (2.5)$$

Dans les deux cas, l'expression des énergies ainsi calculées sert de base au calcul des taux de restitution d'énergie associés aux différents modes. Une revue détaillée du calcul du taux de restitution d'énergie G est réalisée dans [Krueger, 2004]. L'application d'un critère de Griffith tel que présenté plus haut permet alors de propager la fissure si nécessaire : les nœuds du maillage sont alors dédoublés sur toute la longueur de la fissure nouvellement créée.

Pour des stratifiés, le champ de contrainte est singulier en pointe de délaminage. L'application de la méthode *VCCT* peut être réalisée de deux façons pour contourner ce problème.

La première solution est de représenter explicitement l'interface dans le maillage avec des éléments 3D, similaires à ceux utilisés dans le reste du maillage mais possédant les caractéristiques mécaniques de l'interface. La fissure se propage alors dans un milieu homogène, prévenant ainsi d'éventuelles oscillations de la solution en pointe de fissure (voir par exemple [Raju *et al.*, 1988]). Le coût de calcul associé à cette solution est cependant important, la taille des éléments nécessaires au maillage de la zone de l'interface étant très faible.

Une autre solution est de conserver un maillage classique de la structure, mais de venir le raffiner en pointe de délaminage (voir par exemple [Krueger et Minguet, 2007]). La taille caractéristique des éléments doit cependant être choisie avec soin : trop grands, ils conduisent à une estimation erronée de G ; trop petits, ils entraînent une dépendance de la solution au maillage. D'autre part, des opérations de remaillage sont alors nécessaires à chaque avancée du délaminage.

□ **Remarque :** Ces méthodes sont basées sur des calculs globaux sur l'ensemble de la structure pour déterminer les efforts de réaction \underline{R} et les champs de déplacement \underline{u} nécessaires au calcul de ΔE . En présence de plusieurs fissures dans la structure, la question de l'interaction entre les fissures se posent alors.

• *Bilan*

À une échelle de modélisation macroscopique des stratifiés, les phénomènes d'initiation et de propagation du délaminage sont modélisés par des approches différentes. L'intérêt des critères d'initiation doit être souligné. Ils constituent en effet un outil intéressant pour repérer les zones à risque dans une structure.

En ce qui concerne la propagation, les techniques présentées ici conduisent à l'utilisation de maillages très raffinés en pointe de délaminage ainsi qu'à des remaillages, ce qui peut s'avérer coûteux sur de grandes structures. Enfin, le cas de la multifissuration peut être problématique, l'évaluation des critères énergétiques étant réalisée sur la structure toute entière et non uniquement en pointe de fissure.

1.3 Modélisation mésoscopique

À l'échelle mésoscopique, les interfaces sont explicitement représentées dans la modélisation. Le méso-modèle développé dans [Ladevèze, 1992] postule que le comportement du stratifié peut être représenté en utilisant deux entités élémentaires : le pli et l'interface, qui est dès lors considérée comme une entité à part entière dans le modèle (c.f. figure 2.4). Plis et interfaces disposent chacun de leur propre loi de comportement. Nous ne présentons ici que le comportement associé à l'interface.

Le rôle de l'interface est d'assurer le transfert des déplacements et des contraintes entre deux plis adjacents du stratifié. La représentation du délaminage passe alors par la définition d'une loi de comportement pour l'interface rendant compte des dégradations.

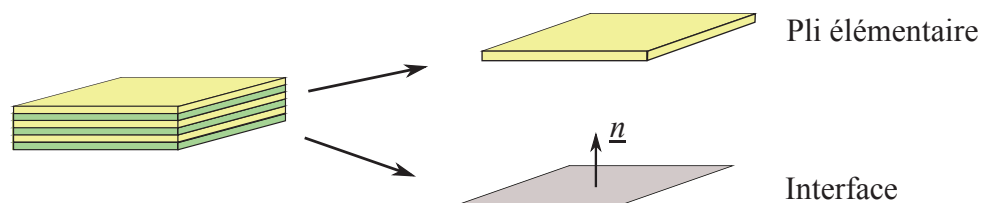


FIGURE 2.4: Méso-modèle composite

Deux familles de modélisation peuvent alors être distinguées. La différence entre ces deux approches réside dans la façon dont l'interface est considérée pour développer sa loi de comportement. La première famille est issue des modèles de zones cohésives et utilise des lois de comportement discrètes basées sur les grandeurs associées à la mécanique de la rupture. La seconde famille part du postulat que les interfaces sont des milieux continus

à part entière. L'utilisation de la mécanique continue de l'endommagement permet alors de décrire la dégradation des interfaces. Cette seconde voie de modélisation constitue un des ingrédients du méso-modèle développé dans [Ladevèze, 1992].

Les grandeurs utilisées pour définir une loi de comportement de l'interface sont les mêmes dans les deux cas. L'épaisseur physique des interfaces est très faible devant les épaisseurs des plis du stratifié. Aussi, les grandeurs associées à sa description sont classiquement le saut de déplacement $[u]$ entre les plis adjacents et les contraintes hors plan $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$, \underline{n} représentant le vecteur normal au plan de l'interface.

Physiquement, l'interface correspond à une zone riche en matrice. Les raideurs k_i^0 découlent directement des caractéristiques E_i^m de la matrice, et sont évaluées par :

$$k_i^0 = \frac{E_i^m}{e}$$

où e représente l'épaisseur physique de l'interface, classiquement de l'ordre de 1/10 de l'épaisseur des plis. Les raideurs associées aux interfaces sont donc très grandes, ce qui correspond à une cohésion parfaite entre les plis du stratifié.

1.3.1 Interfaces cohésives

Les modèles de zones cohésives, initialement mis en place dans [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962], considèrent que la zone en pointe de fissure possède des caractéristiques mécaniques dégradées. Contrairement à la mécanique de la rupture, une phase de transition existe donc entre l'état sain et l'état fissuré. L'application à la modélisation du délaminage consiste à assimiler l'interface entre les plis du stratifié à une zone cohésive.

La loi de comportement couramment associée aux zones cohésives est une loi bilinéaire liant la contrainte au saut de déplacement (c.f. figure 2.5). Initialement proposée dans [Hillerborg *et al.*, 1976] pour décrire la fissuration des bétons, des lois similaires ont par la suite été développées pour décrire le délaminage [Schellekens et de Borst, 1993, Alfano et Crisfield, 2001].

La première partie de la loi concerne la description d'une interface parfaite, que l'on peut assimiler à un comportement élastique. Elle correspond à une cohésion parfaite entre les deux plis adjacents et ne doit permettre que des déformations faibles dans l'interface.

La seconde partie de la loi décrit la phase de dégradation durant laquelle les contraintes diminuent progressivement quand $[u]$ augmente. Enfin, la rupture de l'interface se traduit par des tractions nulles sur les plis adjacents.

Pour modéliser les dégradations dans l'interface, des lois inspirées de la mécanique de l'endommagement [Alfano et Crisfield, 2001] ou de la plasticité [Hashagen et de Borst, 2000] sont classiquement utilisées.

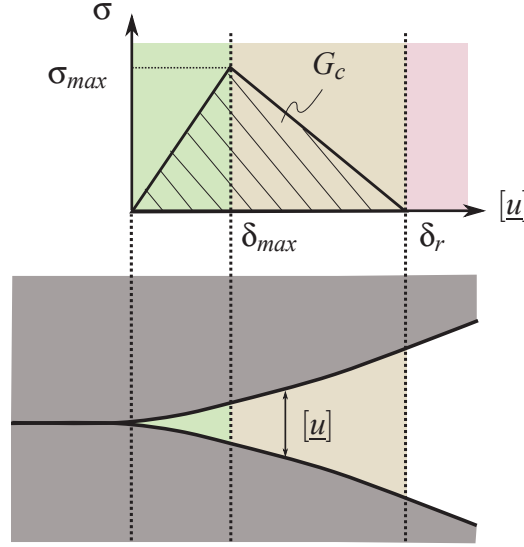


FIGURE 2.5: Loi de comportement des interfaces cohésives

Exemple de loi basée sur la mécanique de l'endommagement La loi discrète de l'interface peut prendre la forme suivante [Alfano et Crisfield, 2001] :

$$\begin{cases} \text{si } \max_{t < \tau}([u]) < \delta_{max}, & \sigma = k [u] \\ \text{si } \delta_{max} < \max_{t < \tau}([u]) < \delta_r, & \sigma = k(1 - d) [u], d \in [0, 1] \\ \text{si } \delta_r < \max_{t < \tau}([u]), & \sigma = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Le paramètre d correspond à l'endommagement de l'interface. Il est ici calculé à partir du saut de déplacement $[u]$ entre les plis [Alfano et Crisfield, 2001] :

$$d = \frac{\delta_r}{\delta_r - \delta_{max}} \left(\frac{\max_{t < \tau}(< [u] >_+) - \delta_{max}}{\max_{t < \tau}(< [u] >_+)} \right) \quad (2.7)$$

où $< \cdot >_+$ renvoie la partie positive de la quantité considérée. La prise en compte de l'histoire du matériau, *via* l'utilisation du plus grand saut de déplacement enregistré, assure l'irréversibilité du processus de dégradation.

Les différentes grandeurs nécessaires à la définition de la loi de comportement sont directement liées aux grandeurs issues de la mécanique de la rupture. σ_{max} correspond à la contrainte normale à rupture de l'interface. Les valeurs δ_{max} et δ_r sont choisies de telle sorte que l'énergie dissipée au cours de la phase de dégradation soit égale au taux de restitution d'énergie critique G_c [Jansson, 2002].

La prise en compte des différents modes de propagation du délaminage est assurée par la définition d'un saut de déplacement équivalent $[u]$, combinant les sauts de déplacement associés à chaque mode. L'utilisation d'un critère similaire à celui présenté dans

l'équation 2.3 permet alors de fixer les grandeurs $\hat{\delta}_{max}$ et $\hat{\delta}_r$ à utiliser dans la loi de comportement décrite dans l'équation 2.6.

Exemple d'utilisation de la plasticité Un autre moyen de représenter l'évolution progressive des dégradations dans l'interface est l'utilisation de lois inspirées de la plasticité [Hashagen et de Borst, 2000]. La phase de dégradation de l'interface est ainsi assimilée à une phase d'écrouissage. Deux grandeurs supplémentaires sont définies : σ_y correspond au début de la phase d'écrouissage ; σ_u correspond à la contrainte maximum entraînant la ruine du matériau. La loi définie diffère donc de la loi bilinéaire classique (c.f. figure 2.6).

Par analogie avec la théorie de la plasticité, le saut de déplacement est séparé en deux parties :

$$[\underline{u}] = [\underline{u}]^e + [\underline{u}]^f \quad (2.8)$$

où $[\underline{u}]^e$ correspond à la partie "élastique" du saut de déplacement, tandis que $[\underline{u}]^f$ décrit l'ouverture de la fissure, à rapprocher des déformations plastiques. La contrainte dans l'interface est alors évaluée par :

$$\underline{\sigma} = k([\underline{u}] - [\underline{u}]^f) \quad (2.9)$$

De même, une fonction de charge f est définie :

$$f(\underline{\sigma}, \lambda) = g(\underline{\sigma}) + \bar{\sigma} \quad (2.10)$$

λ représente le multiplicateur de plasticité et g une fonction pondérant les composantes du champ de contrainte. Enfin $\bar{\sigma}$ représente les contraintes équivalentes dans l'interface. On pourra noter que la fonction f prend directement en compte les différents modes de propagation du délaminage à travers les composantes des contraintes.

La vérification de l'inégalité $f < 0$ entraîne un comportement élastique de l'interface, sa non-vérification correspondant à un comportement plastique.

Finalement, la loi de comportement plastique associée à l'interface peut être résumée ainsi (c.f. figure 2.6) :

$$\begin{cases} \text{Si } \sigma < \sigma_y, & \sigma = k[\underline{u}] \\ \text{Si } \sigma_y < \sigma < \sigma_u, & \sigma = k([\underline{u}] - [\underline{u}]^f(f, \lambda)) \\ \text{Si } \sigma > \sigma_u, & \sigma = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

□ **Remarque :** Comme nous avons vu précédemment, cette loi peut être reliée à la mécanique de la rupture *via* l'énergie dissipée au cours de la phase d'écrouissage, qui correspond alors au taux de restitution critique G_c . La grandeur k utilisée dans la phase de cohésion ne correspond pas à une grandeur physique de l'interface, mais doit être vue

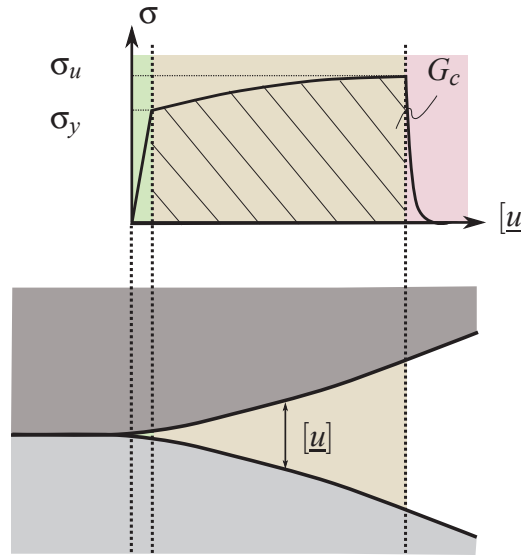


FIGURE 2.6: Loi de plasticité des interfaces cohésives

comme un coefficient de pénalisation. Cette partie de la loi ne doit pas participer à la dissipation d'énergie. Le coefficient k doit être choisi suffisamment grand pour vérifier ce principe. Cependant, une valeur trop élevée conduit à une oscillation de la solution [de Borst et Remmers, 2006].

D'autre part, pour des raisons numériques, le retour à 0 lorsque la contrainte atteint σ_u , ce qui correspond à la fissuration de l'interface, est traduit en réalité par un comportement adoucissant. Là encore, pour minimiser la contribution énergétique le retour à une valeur nulle doit se faire rapidement.

1.3.2 Interfaces endommageables

Dans l'approche développée au LMT, l'interface est considérée comme un milieu continu. Elle correspond physiquement à la zone riche en matrice située entre les plis du stratifié. A ce titre, la modélisation des dégradations dans l'interface est réalisée de manière similaire à celle des plis. La mécanique continue de l'endommagement permet ainsi de décrire la dégradation progressive des interfaces.

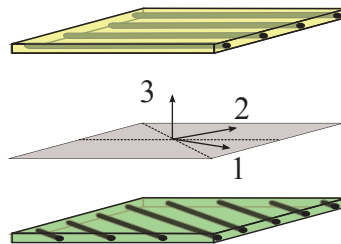


FIGURE 2.7: Base d'orthotropie de l'interface

Les interfaces sont alors considérées comme des entités surfaciques [Allix et Ladevèze, 1992]. Le comportement d'une interface est défini dans la base d'orthotropie locale (1, 2, 3) caractérisée par la direction 1, bissectrice des angles formés par les plis adjacents à l'interface (c.f. figure 2.7).

L'énergie de déformation associée à une interface saine est alors décrite par :

$$e_d = \frac{1}{2} \left(k_3^0 [\underline{u}]_3^2 + k_0^1 [\underline{u}]_1^2 + k_2^0 [\underline{u}]_2^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{33}^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_0^1} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0} \right) \quad (2.12)$$

Cette énergie s'exprime en fonction des sauts de déplacements et des raideurs surfaciques k_i^0 de l'interface.

Les dégradations dans l'interface sont représentées *via* des variables d'endommagement notées d_1 , d_2 et d_3 , associées au trois modes d'ouverture de l'interface. Dès lors, l'énergie de déformation de l'interface endommagée s'écrit :

$$e_d = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d_3)k_3^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_-^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{(1-d_1)k_0^1} + \frac{\sigma_{32}^2}{(1-d_2)k_2^0} \right) \quad (2.13)$$

Dans le cas de l'ouverture en mode I, l'ouverture et la fermeture de fissure sont considérées séparément, seule l'ouverture de fissure conduit à une évolution de l'endommagement. Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement sont classiquement définies par :

$$\begin{cases} Y_{d_3} = \frac{\partial e_d}{\partial d_3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d_3)^2 k_3^0} \\ Y_{d_1} = \frac{\sigma_{31}^2}{(1-d_1)^2 k_0^1} \\ Y_{d_2} = \frac{\sigma_{32}^2}{(1-d_2)^2 k_2^0} \end{cases} \quad (2.14)$$

La faible épaisseur de l'interface permet de faire l'hypothèse que l'endommagement se développe dans les 3 directions simultanément. On définit alors d tel que $d = d_1 = d_2 = d_3$. L'effort thermodynamique Y associé à d est défini par un couplage des efforts thermodynamiques Y_{d_i} :

$$Y = \sup_{t < \tau} \left(Y_{d_3}^\alpha + (\gamma_1 Y_{d_1})^\alpha + (\gamma_2 Y_{d_2})^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (2.15)$$

Les paramètres γ_i permettent de pondérer le rôle des modes d'ouverture dans l'évolution de l'endommagement. Des lois d'endommagement classiques peuvent être utilisées :

$$\begin{cases} f(Y) = \left(\frac{n}{1+n} \frac{Y}{Y_c} \right)^n & \text{et } d = f(Y) \text{ si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.16)$$

Le paramètre Y_c correspond à une énergie critique menant à la rupture de l'interface, directement liée aux taux d'énergie critique G_c associés aux modes d'ouverture.

L'atout majeur de ce type de modèle est l'utilisation d'une unique variable d'endommagement pour décrire le processus de dégradation. Dans le cas de modes mixtes, les taux de restitution d'énergie critique associés aux différents modes sont utilisés pour décrire l'endommagement [Allix et Corigliano, 1996].

Dans le cas de chargement dynamique, des travaux ont été menés par [Corigliano *et al.*, 2006] et [Allix et Deü, 1997]. Dans ce dernier cas, l'utilisation d'une loi d'endommagement à taux limité pour les interfaces endommageables permet de limiter la vitesse d'évolution de l'endommagement et de rendre compte des chargements dynamiques. Cette loi sera décrite dans la seconde partie.

1.3.3 Prise en compte des phénomènes microscopiques

Les différentes modélisations présentées précédemment prennent en compte uniquement le délaminage comme dégradation. Cependant, pour certaines séquences d'empilement, et dans certains cas de chargement, la prise en compte des dégradations dans les plis est indispensable pour avoir une représentation correcte des zones délaminées [Lévêque, 1998]. Des approches basées sur une représentation mésoscopique du stratifié (plis et interfaces), mais prenant en compte les dégradations dans les plis pour définir l'endommagement de l'interface ont ainsi été développées.

Une première approche permettant de lier l'endommagement des plis et des interfaces a été proposée dans [Guinard *et al.*, 2002]. L'endommagement dans l'interface est alors calculé à partir de la différence d'endommagement dans les plis adjacents :

$$d = \frac{d^+ + d^-}{2} \quad (2.17)$$

Dans [Lubineau *et al.*, 2006], une version améliorée du méso-modèle est proposée. Le calcul de l'endommagement de l'interface en mode I n'est pas modifié, tandis que l'endommagement en cisaillement est fonction des endommagements dans les plis adjacents ainsi que de l'endommagement en mode I. Dans ce cas, la réalisation de calculs à l'échelle microscopique, décrivant l'ensemble des processus de dégradation à l'échelle du pli, permet de déterminer un endommagement équivalent pour le pli. Ceci est réalisé *via* l'écriture d'une équivalence énergétique entre le modèle microscopique complet et le modèle mésoscopique.

Une autre approche consiste à introduire dans les plis une représentation explicite des fissures transverses. Ces dernières constituent en effet un des éléments déclencheurs du délaminage.

L'approche proposée dans [Van Der Meer et Sluys, 2010] introduit ainsi dans le calcul les fissures observées expérimentalement. Elles sont représentées dans le calcul grâce à la

méthode des nœuds fantômes. Cette méthode permet de représenter une fissure dans un maillage en dédoublant l'élément dans lequel la fissure apparaît. L'influence des fissures transverses sur les interfaces est prise en compte *via* une intégration aux nœuds des éléments d'interface. Les informations relatives aux fissures y sont en effet disponibles.

Dans les travaux de [Trovalet, 2010], les fissures sont représentées de manière discrète dans les plis et leur apparition est déterminée par le calcul de problèmes à l'échelle microscopique. Les calculs réalisés avec cette approche conduisent à des résultats proches de ceux observés expérimentalement.

1.3.4 Applications numériques

Le choix d'une modélisation mésoscopique du stratifié conduit naturellement à une description explicite de l'interface dans le maillage. Deux types de représentations se retrouvent dans la littérature.

Représentation explicite des interfaces La prise en compte des interfaces est classiquement réalisée *via* l'utilisation d'éléments dédiés. Les plis sont maillés avec des éléments 3D classiques ou des éléments de coques. Les éléments d'interface sont alors placés entre les plis. Ce type de modélisation se prête à l'utilisation de lois cohésive [Alfano et Crisfield, 2001] ou endommageable

Représentation des fissures Dans [de Borst et Remmers, 2006], le délaminage est considéré comme une fissure, orientée dans une structure de type plaque. A ce titre, l'interface n'est pas maillée explicitement par des éléments, mais est représentée dans les éléments de plaque avec la méthode X-FEM. Nous reviendrons sur les principes de cette méthode dans la section suivante.

Des éléments de coques 3D sont alors utilisés. Une loi de comportement semblable aux lois discontinues présentées plus haut permet alors de gérer l'ouverture de la fissure. Ce type de modèle permet d'éviter la représentation explicite de toutes les interfaces du stratifié, et conduit à un nombre de degrés de liberté moindre.

□ **Remarque :** Pour le type de problème présenté ici, la position des interfaces et des fissures est connue *a priori*. Cette particularité permet de placer des éléments dédiés avant le calcul et d'introduire des raideurs d'interface. Des méthodes similaires sont cependant utilisées pour d'autres types de matériaux pour lesquels le trajet de fissuration est plus complexe. La zone de fissuration n'étant pas connue *a priori*, les interfaces sont introduites dans le maillage au fur et à mesure du calcul [Pandolfi *et al.*, 2000], [Zhou *et al.*, 2005].

- *Bilan :*

Deux voies numériques sont ainsi possibles pour représenter le délaminage : représenter explicitement l'ensemble des interfaces du stratifié ou prendre en compte ce délaminage dans une représentation macroscopique de type coque du stratifié. Bien que la prise en compte du comportement microscopique des plis du stratifié conduise à des résultats plus précis, les coûts de calcul sont prohibitifs pour ces approches.

1.4 Bilan

Plusieurs critères doivent être pris en compte pour choisir la modélisation la mieux adaptée. Les délaminages que l'on souhaite représenter ici ont des aires importantes, qui peuvent être équivalentes à l'aire de la structure considérée. D'autre part, les problèmes considérés sont dynamiques. Enfin, les impacts sur des stratifiés génèrent fréquemment plusieurs fronts de délaminage dans la pièce.

Le choix d'une modélisation à l'échelle mésoscopique du matériau semble donc être adapté à ce type de problème. Deux approches sont alors envisageables. Une représentation complète de l'ensemble des interfaces du stratifié permet une représentation précise du processus de dégradation des interfaces. En outre, dans un cadre dynamique, la prise en compte de la séparation explicite des plis du stratifié permet une meilleure représentation des phénomènes. Ce type d'approche conduit cependant à des tailles de modèles éléments finis prohibitifs. Une méthode adaptée est donc nécessaire pour réduire les coûts de calcul.

La seconde approche est basée sur une représentation de la fissure dans la structure par le biais de méthodes telles que X-FEM ou E-FEM. Ce type de représentation ne requiert pas une représentation de l'ensemble des interfaces et conduit donc à des modèles de taille plus raisonnable.

Aussi, deux points seront considérés par la suite. D'une part les approches basées sur une représentation de type méso-modèle conduisent à considérer des méthodes de type décomposition de domaine ou multi-échelle afin de garder des coûts de calcul raisonnables. D'autre part, la représentation des fissures dans un maillage de type coque conduit à étudier les éléments de coques 3D, ceci afin de pouvoir représenter la fissure apparaissant dans l'épaisseur de la coque. Les méthodes permettant de représenter la fissure au sein des éléments de coque sont ensuite étudiées.

Dans cette étude, le macro-délaminage constitue le principal phénomène de dégradation. Aussi, les dégradations dans les plis ne seront pas considérés.

2 Modélisation des structures élancées

Les travaux présentés ici sont concentrés sur des structures stratifiées élancées. La représentation des structures élancées telles que les plaques ou les coques s'appuie sur des théories prenant en compte les particularités géométriques de ces structures (épaisseur faible devant les dimensions dans le plan). En utilisant des hypothèses sur l'état de contraintes dans de telles structures, elles conduisent à une définition spécifique de leur cinématique. Les théories les plus connues sont celles développées par Kirchhoff pour les plaques minces et celle de Reissner-Mindlin [Reissner, 1985], [Mindlin, 1951] pour les plaques épaisses. Pour les composites stratifiés, ces théories ont été reprises en prenant en compte l'empilement de plis élémentaires. Ainsi, la *Classical Laminate Theory* est basée sur la théorie de Kirchhoff-Love tandis que la *First Order Shear Deformation Theory* reprend les hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin.

L'application des théories citées ci-dessus à la construction d'éléments finis a conduit au développement de nombreux éléments [Yang *et al.*, 2000]. Deux grandes familles d'éléments peuvent être distinguées : les éléments plans et les éléments dit de coques 3D.

Les éléments plans sont largement utilisés. Ils décrivent le comportement de la surface moyenne de la plaque, et comportent des degrés de liberté en déplacement et en rotation. Leur utilisation permet de mener des calculs à moindre coût sur des structures de plaque. En effet, ces éléments peuvent avoir de grandes dimensions dans le plan, même si l'épaisseur réelle de la structure est faible.

Pour certains problèmes, le recours à une modélisation 3D est cependant indispensable. Deux approches peuvent alors être envisagées : le couplage de modélisation coque avec une modélisation 3D, ou l'utilisation d'éléments dits de coques 3D. Cette seconde approche permet en outre d'envisager une représentation macroscopique des fissures au sein des éléments, *via* les approches macroscopiques détaillées dans la section 1.

2.1 Difficultés numériques

L'utilisation d'une représentation 3D des structures élancées conduit à des difficultés numériques. Dans le cas de raccord entre des modèles plans et 3D, une mauvaise transmission d'information entre les deux types de modélisation peut entraîner la présence de contraintes parasites.

D'autre part, l'utilisation d'éléments 3D linéaires dans des configurations élancées conduit à des phénomènes de blocage que nous allons détailler.

2.1.1 Raccords de modèles coques et de modèles 3D

Les techniques de raccord entre des modélisations de dimensions différentes (2D/1D ou 3D/2D) sont essentiellement basées sur une continuité des déplacements entre les mo-

dèles. L'enjeu est alors d'imposer un champ de déplacement cohérent avec les deux discrétisations. Par la suite, pour simplifier le propos, nous considérons un raccord entre un maillage 1D et 2D (c.f. figure 2.8).

Le déplacement associé au maillage 1D est noté \underline{u} . Il est fonction des degrés de liberté en déplacement u dans la direction x et w dans la direction z , et en rotation θ .

Le déplacement d'un point M du maillage 2D est noté \underline{U} . Il s'exprime en fonction des degrés de liberté en déplacement U et W aux nœuds.

Une approche proposée dans les logiciels éléments finis commerciaux consiste à réaliser un raccord rigide entre les deux modèles. Au niveau du raccord, le déplacement du modèle 1D est imposé à l'ensemble des nœuds du maillage 2D. Bien qu'étant très simple à mettre en œuvre, ce raccord contraint le maillage 2D à conserver une épaisseur constante au niveau du raccord. Pour un coefficient de poisson non nul du matériau, des sur-contraintes apparaissent alors dans le maillage 2D.

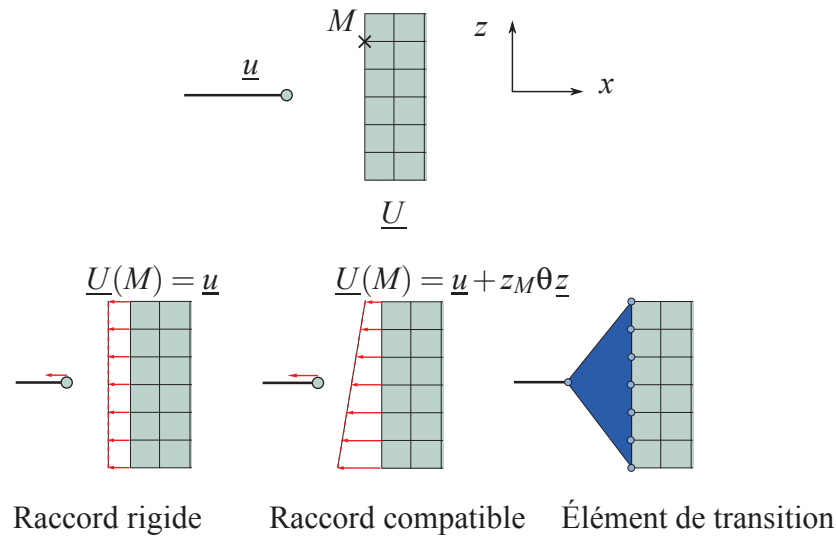


FIGURE 2.8: Raccord entre des modèles 1D et 2D

Une autre technique, conduisant à de meilleurs résultats, consiste à reconstruire les déplacements dans l'épaisseur de la structure à partir des degrés de liberté de l'élément de poutre, soit :

$$\underline{U}(M) = u\underline{x} + w\underline{z} + z_M\theta\underline{z} \quad (2.18)$$

Des exemples de raccords basés sur cette méthode sont présentés dans [Wyart *et al.*, 2007] pour un raccord entre plaques et modèle 3D, et dans [Allix *et al.*, 2006] pour un raccord entre poutre et modèle 3D.

Le raccord peut aussi être réalisé avec des éléments de transition. Dans ce cas, un élément spécifique est construit. Le nombre de nœuds de l'élément tient compte de la discrétisation utilisée dans chaque maillage, et les fonctions de forme sont compatibles avec

celles des deux modèles (voir par exemple [Gruttmann et Wagner, 1996, Schiermeier *et al.*, 1999]). Ces éléments ne sont cependant pas génériques et doivent être adaptés à chaque maillage utilisé et à chaque type d'élément.

Une autre voie qui peut être utilisée pour le raccord consiste à imposer la continuité des travaux sur la frontière entre les deux modèles [McCune *et al.*, 2000], soit :

$$Pu + Qw + M\theta = \int_A (\sigma_{xx} U + \tau_{xz} W) dA \quad (2.19)$$

où A désigne la section de la poutre considérée. P , Q et M représentent les efforts et moment généralisés dans le modèle 1D.

Cette expression permet alors d'écrire les degrés de liberté de poutre en fonction des degrés de liberté du modèle 2D. L'équilibre des contraintes et des déplacements est ainsi assuré entre les deux maillages.

Des solutions analytiques en contraintes sont cependant utilisées dans l'équation 2.19, ce qui limite l'utilisation de ce type de raccord à des cas simples.

2.1.2 Phénomènes de blocage

Les caractéristiques géométriques des plaques, à savoir une épaisseur faible devant les dimensions dans le plan, conduisent à des blocages. Ces phénomènes numériques correspondent à une mauvaise représentation du comportement de la structure.

Ils apparaissent essentiellement pour des éléments 3D possédant des fonctions de forme linéaires, mais sont aussi présents dans les éléments plans de plaque. Différentes causes sont clairement identifiées dans la littérature [Hauptmann *et al.*, 2001, Briassoulis, 1988].

- **Le blocage en cisaillement transverse**, ou *transverse shear locking*, résulte de l'incapacité d'éléments utilisant une interpolation linéaire des déplacements à représenter les déformations et contraintes de cisaillement transverse quand l'épaisseur devient très petite.
- **Le blocage de membrane**, ou *membrane locking*, correspond à l'apparition de déformations de membrane parasites. Ce phénomène est dû au couplage des déformations normales avec les déformations de cisaillement dans le plan.
- **Le blocage dans l'épaisseur**, ou *thickness locking*, apparaît lorsqu'une interpolation linéaire des déplacements w dans la direction de l'épaisseur de la plaque est utilisée. La déformation normale calculée est alors constante dans l'épaisseur, violant ainsi l'hypothèse de contrainte plane. En effet, cette hypothèse permet d'écrire ϵ_{zz} directement en fonction des déformations de membrane qui sont linéaires dans l'épaisseur. Cette incohérence conduit alors à un comportement trop raide de la plaque.

Afin de pallier ces difficultés, des méthodes numériques spécifiques à chacun de ces phénomènes ont été développées. Elles sont largement utilisées dans la littérature pour

développer des éléments finis de plaque aussi bien en 2D qu'en 3D. Ces différentes techniques sont décrites dans la section suivante.

• *Bilan :*

D'une part, une représentation correcte du comportement des structures minces par des éléments 3D passe par une représentation adaptée des déformations dans l'élément, et surtout conforme à la théorie. D'autre part, la qualité d'un raccord entre modèle 3D et modèle de type plaque dépend de la bonne représentation du champ de déplacement à la jonction entre les modèles.

Un élément de coque 3D représentant de façon précise à la fois les déplacements et les déformations semble donc nécessaire dans le problème que l'on souhaite traiter.

2.2 Développement d'éléments de coques 3D

Afin de prévenir les phénomènes de blocage, l'utilisation d'éléments 3D pour représenter des coques nécessite leur adaptation. Plusieurs voies sont alors possibles. Deux grandes familles de techniques sont présentes dans la littérature.

Une première famille consiste à réutiliser des éléments 3D linéaires classiques et à adapter leur comportement pour qu'ils puissent représenter correctement le comportement de structures élancées (c.f. par exemple [Klinkel et Wagner, 1997] et [Brank *et al.*, 2002]). L'objectif majeur est alors d'avoir une représentation correcte de l'évolution des contraintes et déformations dans l'épaisseur ou le plan de l'élément. Deux méthodes sont principalement utilisées, et souvent combinées, la méthode ANS (Assumed Natural Strain) et la méthode EAS (Enhanced Assumed Strain).

La seconde famille de méthodes consiste à construire l'élément en repartant de la théorie des plaques et en la modifiant éventuellement afin de prendre en compte leur épaisseur [Parisich, 1995].

2.2.1 Adaptation des éléments linéaires

Considérons un élément fini 3D linéaire classique. L'objectif est de modifier sa formulation de telle sorte que même déformé, il soit à même de représenter un comportement de type plaque (c.f. figure 2.9). Dans les deux méthodes présentées ici, le nombre de nœuds

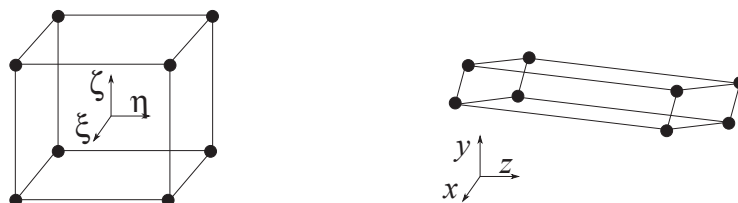


FIGURE 2.9: Utilisation d'éléments de coques 3D

de l'élément et ses fonctions de forme ne sont cependant pas modifiées.

La méthode ANS (Assumed Natural Strain) Initialement développée dans [Bathe et Dvorkin, 1984] pour empêcher le phénomène de blocage en cisaillement transverse dans des éléments plans, elle a ensuite été reprise pour formuler de nombreux éléments de coque 3D (voir par exemple [Parisch, 1995, Klinkel *et al.*, 1999, Ausserer et Lee, 1988, Bischoff et Ramm, 1997, Hauptmann *et al.*, 2001]). Le principe est de modifier l'expression des déformations transverses $\varepsilon_{\xi\xi}$ et $\varepsilon_{\eta\xi}$ afin de les forcer à varier linéairement dans le plan moyen de la plaque tout en restant constantes dans l'épaisseur.

Pour cela, des points de collocation, notés $M = \{A, B, C, D\}$ dans la figure 2.10, sont définis dans l'élément. Les déformations sont évaluées en ces points de l'élément à partir des déplacements aux nœuds et des fonctions de forme de l'élément. Ceci conduit à une nouvelle expression des déformations transverses :

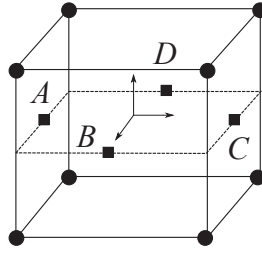


FIGURE 2.10: Définition des points de collocation dans un élément 3D

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi}(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \eta) \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^B + (1 + \eta) \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^D \\ \varepsilon_{\eta\xi}(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \xi) \bar{\varepsilon}_{\eta\xi}^A + (1 + \xi) \bar{\varepsilon}_{\eta\xi}^C \end{cases} \quad (2.20)$$

De la même façon, en utilisant des points de collocation dans la direction ζ , les déformations normales $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ peuvent être modifiées de façon à les contraindre à avoir une variation linéaire dans l'épaisseur de l'élément [Klinkel *et al.*, 1999]. Les phénomènes de blocage liés à une mauvaise représentation des déformations dans l'épaisseur sont ainsi supprimés.

Dès lors, le champ de déformation dans l'élément est défini sous forme matricielle par :

$$\varepsilon_e = Q \bar{\varepsilon} \quad (2.21)$$

où la matrice Q contient les interpolations nécessaires, ce qui conduit à l'expression suivante des puissances virtuelles élémentaires :

$$\forall(\underline{u}^*), \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^T(\underline{u}^*) Q^T C Q \bar{\varepsilon}(\underline{u}) d\Omega = p^{ext} \quad (2.22)$$

Sa discrétisation conduit à une expression modifiée de la matrice de raideur de l'élément, qui est dès lors capable de représenter les déformations de plaque.

La méthode EAS (Enhanced Assumed Strain) Cette méthode a été mise en place dans [Simo et Rifai, 1990] pour améliorer le comportement de membrane d'éléments plans. Le principe est d'enrichir les déformations de membrane de l'élément par un terme supplémentaire :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^c + \tilde{\varepsilon}_m$$

ε^c correspond aux déformations classiques, $\tilde{\varepsilon}$ est la partie enrichie des déformations. Une formulation variationnelle de type Hu-Washizu [Washizu, 1982] est alors utilisée :

$$\forall(\underline{u}^*, \underline{\varepsilon}^*), \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^c(\underline{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \tilde{\underline{\varepsilon}}^* d\Omega = \mathcal{P}^{ext} \quad (2.23)$$

La discrétisation du terme $\tilde{\varepsilon}$ conduit à la définition de degrés de liberté supplémentaires :

$$\tilde{\varepsilon} = M \cdot \alpha_e \quad (2.24)$$

Les fonctions d'interpolation M sont choisies de telle sorte que les déformations varient linéairement dans le plan (ξ, η) . D'autre part, l'évaluation de la partie enrichie des déformations est discontinue entre les éléments.

La discrétisation de l'équation 2.23 conduit alors à l'expression matricielle au niveau élémentaire :

$$\begin{bmatrix} K_e & L_e \\ L_e^T & H_e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_e \\ \alpha_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_e \\ h_e \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

où K_e correspond à la matrice raideur classique de l'élément, construite à partir des fonctions de forme des déplacements ; H_e est construite à partir des fonctions d'interpolation M associées aux degrés de liberté α_e ; L_e est une matrice de couplage entre les degrés de liberté u_e et α_e .

Les déformations $\tilde{\varepsilon}$ étant discontinues entre éléments, les degrés de liberté associés sont locaux à l'élément. Ils peuvent donc être condensés au niveau élémentaire, ce qui conduit à une formulation de l'élément en déplacement uniquement, sans recours à des degrés de liberté supplémentaires.

Exemple de construction d'élément pour les stratifiés Dans [Klinkel *et al.*, 1999], un élément de coque 3D pour les stratifiés est développé. Il est construit sur la base d'un élément brique linéaire, tel que celui représenté dans la figure 2.9. Les méthodes ANS et EAS sont combinées pour le formuler.

Les déformations transverses et de cisaillement transverse sont réécrites en utilisant la méthode ANS. D'autre part, les déformations normales sont réécrites par la même méthode, de telle sorte qu'elles soient constantes dans l'épaisseur de l'élément. Dans les

deux cas, des points de collocation sont définis sur la surface moyenne de l'élément de référence. Enfin, les déformations de membrane sont enrichies en utilisant la méthode EAS. Finalement, le champ de déformation ε de l'élément est de la forme :

$$\varepsilon = Q\bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}$$

L'utilisation de cette expression dans l'équation 2.23 conduit alors à l'expression suivante à discrétiser :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{u}^*, \underline{\alpha}_e^*), \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^T(\underline{u}^*) Q^T \mathbb{C} (Q\bar{\varepsilon}(\underline{u}) + M\alpha_e) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \underline{\alpha}_e^{*T} M^T \mathbb{C} (Q\bar{\varepsilon}(\underline{u}) + M\alpha_e) d\Omega = \mathcal{P}^{ext} \end{aligned}$$

où \mathbb{C} représente le comportement du matériau. Cette expression conduit à une équation matricielle du type de l'équation 2.25, où :

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{\Omega} Q^T \mathbb{C} Q d\Omega \\ L_e &= \int_{\Omega} Q^T \mathbb{C} M d\Omega \\ H_e &= \int_{\Omega} M^T \mathbb{C} M d\Omega \end{aligned} \quad (2.26)$$

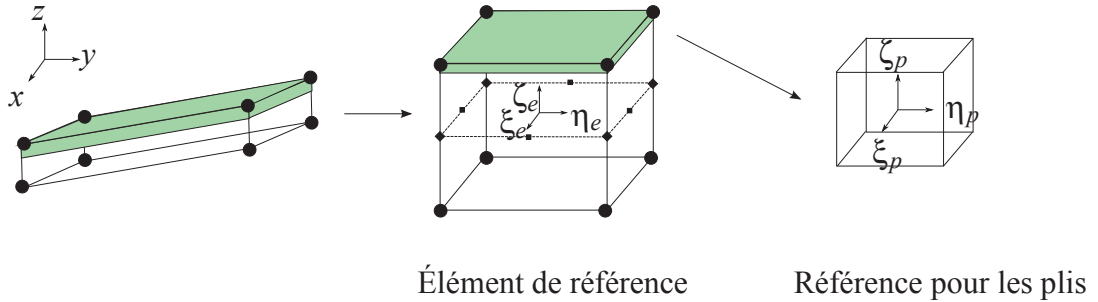


FIGURE 2.11: Définition des éléments de référence pour l'intégration d'un élément de coque 3D pour stratifiés [Klinkel *et al.*, 1999]

Pour des stratifiés, la difficulté vient de l'intégration du comportement dans l'épaisseur, celui-ci variant en fonction de l'orientation des plis. Dans [Klinkel *et al.*, 1999], l'intégration est réalisée pli par pli, ce qui nécessite de mettre en place l'équivalent d'un élément de référence pour le pli (c.f. figure 2.11) Par exemple, le calcul de K_e est réalisé de la façon suivante :

$$K_e = \sum_{plis} \left(\sum_{Gauss} \omega_g Q_g^T \mathbb{C}_p Q_g \det(J_p) \right) \det(J_e)$$

Les points de Gauss sont ainsi définis dans chaque pli du composite afin de pouvoir réaliser l'intégration. Cette approche est similaire à celle utilisée dans les éléments de coque multicouche.

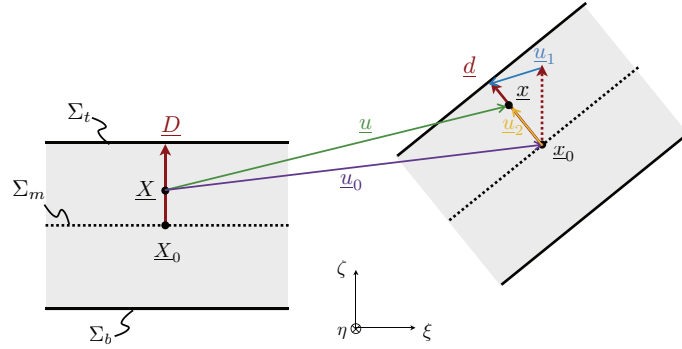


FIGURE 2.12: Notations [Parisch, 1995]

2.2.2 Modification de la théorie des plaques

Un autre moyen de construire des éléments 3D capables de représenter les comportements de coques est de repartir de la théorie des coques en enrichissant par exemple le champ de déplacement [Parisch, 1995]. Cette approche a été reprise dans [Hashagen et de Borst, 2000] pour les composites stratifiés.

Le champ de déplacement 3D est exprimé en ajoutant un terme quadratique en ζ afin de représenter la variation d'épaisseur de la plaque (c.f. figure 2.12) :

$$\underline{u} = \underline{u}^0(\xi, \eta) + \zeta \underline{u}^1(\xi, \eta) + (1 - \zeta^2) \underline{u}^2(\xi, \eta) \quad (2.27)$$

Le champ de déformation associé à ce déplacement est ainsi automatiquement linéaire en ζ . Les termes \underline{u}^0 , \underline{u}^1 et \underline{u}^2 dépendent exclusivement des coordonnées dans le plan (ξ, η) de la plaque, et représentent respectivement :

- \underline{u}^0 : le déplacement de la surface moyenne de la plaque, exprimé comme le déplacement moyen des surfaces supérieure et inférieure de la plaque,
- \underline{u}^1 : le déplacement du vecteur \underline{D} normal à la surface moyenne,
- \underline{u}^2 : le changement d'épaisseur de la plaque, colinéaire au vecteur \underline{d} , et mesuré par un paramètre supplémentaire w .

Les éléments construits à partir de cette expression des déplacements possèdent 8 nœuds, correspondant aux nœuds classiques d'un élément brique linéaire. Des degrés de liberté en déplacement sont associés à ces nœuds. Des nœuds supplémentaires internes sont ajoutés sur la surface moyenne de l'élément, auxquels sont associés des degrés de liberté d'allongement, correspondant au paramètre w .

La discrétisation des déplacements \underline{u} de l'équation 2.27 conduit à définir des fonctions de forme distinctes pour \underline{u}^0 , \underline{u}^1 et \underline{u}^2 dans le plan (ξ, η) . La dépendance en ζ des déplacements est directement fixée dans l'expression de \underline{u} . D'autre part, les degrés de liberté d'allongement w sont condensés au niveau élémentaire de façon à ne conserver que des degrés de liberté en déplacement dans l'élément.

Cependant, malgré cette formulation, il est nécessaire d'utiliser la méthode ANS pour supprimer le phénomène de blocage en cisaillement transverse.

- *Bilan*

Les éléments de coques 3D permettent de représenter le comportement des plaques en représentant explicitement leur épaisseur. Cependant, dans tous les cas, l'expression des déformations dans les éléments doit être modifiée pour éviter les phénomènes de blocage. Ceci est principalement dû à l'utilisation de fonctions de forme de degrés faible. L'utilisation des déplacements aux nœuds de l'élément n'est pas suffisant pour décrire correctement le champ de déformation. En effet, le parti pris est de limiter au maximum le nombre de nœuds de l'élément.

L'élément défini par Parisch décrit de façon plus riche le déplacement dans l'épaisseur de la plaque au prix de l'ajout de degrés de liberté internes à l'élément. Cependant, cette description n'est pas suffisamment riche pour s'affranchir totalement des méthodes d'adaptation des matrices raideurs.

2.3 Représentation de fissures macroscopiques

À une échelle macroscopique de représentation de la structure doit être associée une modélisation macroscopique des fissures présentes dans la structure. Par la suite, le traitement de la propagation de la fissure dans la structure ne sera pas abordé. On suppose que la position et l'orientation de la fissure dans la structure est déjà connue. La problématique ici est de pouvoir représenter cette fissure dans un maillage déjà existant. Deux grandes familles d'approches peuvent être distinguées.

L'approche la plus naturelle consiste à représenter explicitement la fissure dans le maillage. Dans le cas de coques, la fissure définie par le délaminage partage la coque existante en deux nouvelles coques. Cette approche permet une représentation précise de la nouvelle cinématique de la structure.

Afin de pallier ces problèmes, des techniques d'enrichissement de la cinématique des éléments ont été mises en place. Dans ce cas là, le maillage initial n'est pas modifié. Des degrés de liberté supplémentaires sont ajoutés soit aux nœuds du maillage, soit localement dans les éléments.

2.3.1 X-FEM

La méthode X-FEM (*eXtended Finite Element Method*) est basée sur la partition de l'unité [Babuska et Melenk, 1997]. Initialement proposée dans [Moës *et al.*, 1999], elle permet notamment de représenter une fissure existante en enrichissant par des degrés de liberté supplémentaires les nœuds des éléments traversés par la fissure.

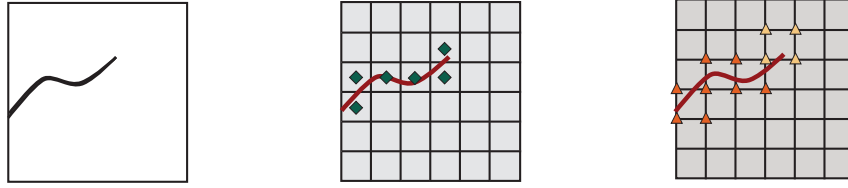


FIGURE 2.13: Représentation d'une fissure par les méthodes E-FEM (enrichissement des éléments) et X-FEM (enrichissement des nœuds)

Le champ de déplacement dans le maillage est composé de deux parties : la représentation éléments finis classiques du champ de déplacement dans un maillage sans fissure d'une part ; la représentation de la discontinuité des déplacements introduite par la présence de la fissure d'autre part. Soient N l'ensemble des nœuds du maillage et N_c l'ensemble des nœuds des éléments traversés par la fissure. Le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{u}(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \underline{u}_k + \sum_{i=1}^{N_c} \mathcal{H}(x) \varphi_i(x) \underline{a}_i \quad (2.28)$$

où φ sont les fonctions de forme éléments finis classiques, \underline{u}_k les degrés de liberté en déplacements, \underline{a}_i les degrés de liberté de "discontinuité" permettant de représenter la fissure. La fonction de Heaviside \mathcal{H} est définie par :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in \Omega_+ \\ -1 & \forall x \in \Omega_- \end{cases} \quad (2.29)$$

□ Remarque : La représentation du front de fissure est gérée par des degrés de liberté spécifiques et des fonctions permettant de représenter la solution en pointe de fissure dans les éléments contenant le front de fissure. Nous ne présentons ici que le volet permettant de représenter une fissure déjà existante dont l'emplacement est connu.

La taille du problème est augmenté du nombre de degrés de liberté nécessaires à la description de la fissure par rapport au problème non fissuré. Les degrés de liberté de déplacement et de discontinuité sont déterminés simultanément lors de la résolution. Cette méthode permet en outre un trajet de fissure continu d'un élément à l'autre.

Dans [Remmers, 2006], la X-FEM est utilisée en combinaison avec des éléments de coque 3D pour représenter le délaminage dans un stratifié de façon macroscopique. Les éléments de coque 3D permettent de représenter le comportement macroscopique de l'empilement en réduisant la nombre de degrés de liberté par rapport à une modélisation de type méso-modèle. L'enrichissement de la cinématique permet de représenter l'avancée de la fissure dans la structure. Dans le cas précis du délaminage, le chemin de propagation est connu puisqu'il suit les interfaces entre les plis. Aussi, un critère en contrainte sur le front de délaminage est utilisé pour propager le délaminage dans les éléments.

2.3.2 E-FEM

Les méthodes de type E-FEM (*Embedded Finite Elements Method*) introduisent des enrichissements au niveau élémentaire. Plusieurs voies sont alors possibles pour représenter la discontinuité. Dans [Jirasek, 2000], une classification est réalisée. La discontinuité peut être représentée soit par un enrichissement des déformations (type *SOS*) soit des déplacements (types *KOS* et *SKON*). La plupart des formulations de la littérature sont toutefois du dernier type. Dans tous les cas, la continuité des tractions est imposée en moyenne le long de la discontinuité.

Soient N l'ensemble des nœuds du maillage et E_c l'ensemble des éléments traversés par la fissure. La discontinuité est introduite dans le champ de déplacement sous la forme suivante [Oliver, 1996] :

$$\underline{u}(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \underline{u}_k + \sum_{e=1}^{E_c} \mathcal{M}_e(x) \beta_i \quad (2.30)$$

où β_i représentent les degrés de liberté élémentaires représentant la discontinuité et \mathcal{M}_e la fonction associée et définie par :

$$\mathcal{M}_e(x) = \mathcal{H}(x) - \sum_{n=1}^{N_e} \mathcal{H}(x_n) \varphi_n(x) \quad (2.31)$$

La résolution du problème conduit alors à des problèmes locaux sur les éléments pour déterminer les degrés de liberté β_i . À l'échelle globale de la structure, ces degrés de liberté n'apparaissent donc pas, et la taille du problème reste inchangée.

Les degrés de liberté β_i peuvent être considérés comme des sauts de déplacements dans l'élément. À l'origine, ce type de méthode a été introduite dans des éléments triangulaires, et le saut de déplacement était alors considéré comme constant le long de la discontinuité. Cette hypothèse conduit à une représentation non continue de la fissure d'un élément à l'autre. De plus, l'utilisation avec des éléments quadratiques ne permet pas de représenter correctement la cinématique de l'élément fissuré.

Des travaux ont ainsi été menés afin d'introduire des sauts de déplacement non constants le long de la fissure. Dans [Alfaia et al., 2003] une interpolation linéaire du saut de déplacement le long de la fissure est réalisée. Deux degrés de liberté sont alors nécessaires pour représenter la discontinuité. Les développements de cette approche pour la représentation du délaminage dans des stratifiés ont été menés dans [Armero et Linder, 2008]. Le recours à une interpolation linéaire du saut de déplacement le long de l'interface permet d'obtenir des résultats cohérents avec les observations expérimentales.

Cependant, pour améliorer la représentation cinématique de l'élément fissuré, la prise en compte des modes de corps rigides est nécessaire. Dans [Manzoli et Shing, 2006], pour définir la fissure dans l'élément, la déformation est ainsi séparée en deux parties : une partie décrivant la déformation du milieu continu de l'élément et une seconde partie

décrivant les déformations dues à la séparation de l'élément en deux parties. Là encore, deux degrés de liberté permettent de décrire la fissure créée.

- *Bilan*

L'utilisation de ces méthodes dans le cadre d'une prise en compte macroscopique du délaminage est intéressante car le maillage initial de la structure n'est pas modifié. Dans le cas des méthodes de type E-FEM, le caractère local des degrés de liberté supplémentaires nécessaire à la description de la fissure peut être un plus pour le problème que l'on souhaite traiter.

2.4 Bilan

La représentation macroscopique du stratifié doit d'une part assurer une représentation exacte du comportement de la structure et d'autre part permettre un couplage efficace et correct avec une modélisation 3D plus fine. Ce dernier point passe par une interpolation pertinente des déplacements dans l'élément.

Afin d'opérer un choix pertinent pour l'échelle globale de la structure, on s'attachera donc dans un premier temps à définir le champ de déplacement conforme à la théorie des plaques.

3 Approches multi-échelles et de sous-structuration

La résolution de problèmes de grande taille a conduit à la mise en place de techniques spécifiques pour diminuer les coûts de calcul. Par la suite, une distinction est réalisée entre les approches en espace et en temps. Les premières ont été initialement conçues pour des problèmes de statique en vue de traiter un grand nombre de degrés de liberté. Elles peuvent être néanmoins appliquées à des problèmes de dynamique. Les approches en temps prennent en compte également la discrétisation temporelle réalisée pour résoudre les problèmes de dynamique.

3.1 Méthodes de décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine sont toutes basées sur le même principe : séparer la structure étudiée en sous-domaines et interfaces afin de réaliser des calculs en parallèle et réduire les temps de calcul (c.f. figure 2.14). Le raccord entre les différents sous-domaines conduit à la résolution d'un problème grossier, sur l'ensemble des interfaces, permettant de transmettre les informations des sous-domaines à l'ensemble de la structure.

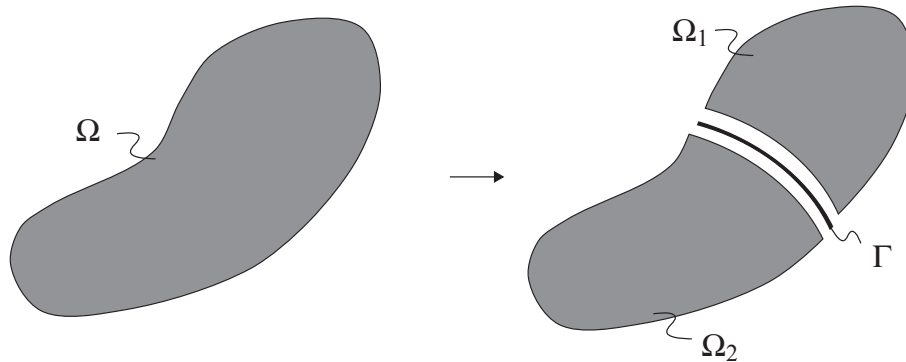


FIGURE 2.14: Méthodes de décomposition de domaine

Initialement développées pour traiter des problèmes de statique, ces approches sont applicables à des problèmes de dynamique. En effet, à chaque pas de temps t_{n+1} du calcul, le problème à traiter peut se ramener à un problème similaire à ceux rencontrés en statique, sous la forme :

$$\mathbb{A}\underline{x} = \underline{f} \quad (2.32)$$

où \mathbb{A} est une matrice, \underline{x} et \underline{f} des vecteurs, qui prennent les formes suivantes selon la nature du problème traité :

	Statique	Dynamique
\mathbb{A}	\mathbb{M}	$\mathbb{M} + \beta \Delta t^2 \mathbb{K}$
\underline{x}	\underline{u}	$\underline{\ddot{u}}_{n+1}$ (ou $\underline{u}_{n+1}, \underline{\dot{u}}_{n+1}$)
\underline{f}	$\underline{F}_{n+1}^{ext}$	$\underline{F}_{n+1}^{ext} + g(\underline{u}_n, \underline{\dot{u}}_n, \underline{\ddot{u}}_n)$

(2.33)

Les matrices \mathbb{K} et \mathbb{M} sont respectivement les matrices raideur et masse de la structure étudiée, tandis que \underline{F}^{ext} représente les efforts extérieurs appliqués au système. Enfin, pour le problème dynamique, une discrétisation temporelle permet de se ramener à l'équation 2.32. L'utilisation d'un schéma de Newmark conduit à calculer la solution au pas de temps t_{n+1} en fonction de la solution au pas t_n précédent, représenté ici par le terme g . Δt représente alors le pas de temps du calcul et β un paramètre du schéma de discrétisation temporelle. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre 3.

Trois familles de méthodes de décomposition de domaine sont présentes dans la littérature : les approches primales, les approches duales et les approches mixtes. La principale différence entre ces méthodes se situe au niveau du type de raccord réalisé entre les sous-domaines. Le système d'équation à résoudre peut, dans tous les cas, s'écrire sous la forme [Gosselet et Rey, 2006] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in [1, N], \mathbb{A}^s \underline{x}^s = \underline{f}^s + \underline{\lambda}^s \\ \text{Continuité des quantités cinématiques : } \sum_s \mathbb{C}^s \underline{x}^s = 0 \\ \text{Continuité des efforts d'interfaces : } \sum_s \mathbb{C}^s \underline{\lambda}^s = 0 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$\underline{\lambda}^s$ représente l'effort des sous-domaines adjacents sur le sous-domaine s . Les matrices \mathbb{C}^s permettent de récupérer les degrés de liberté du sous-domaine s situés sur les interfaces.

□ **Remarque :** L'extension des méthodes de décomposition de domaine à des problèmes de dynamique n'est cependant pas directe. Les questions de stabilité doivent notamment être prises en compte.

3.1.1 Approches primales

Dans les approches primales, les quantités cinématiques sont privilégiées pour réaliser le raccord : leur continuité est initialement supposée. L'équilibre des efforts $\underline{\lambda}$ est ensuite recherché. Après réorganisation des degrés de liberté en degrés de liberté internes, notés i , et d'interface, notés f , la condensation du problème sur les interfaces revient à résoudre le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_p \underline{x}_f = \underline{b}_p \\ \forall s \in [1, 2], \underline{x}_i^s = (\mathbb{A}_{ii}^s)^{-1} \left(\underline{f}^s - \mathbb{A}_{if}^s \underline{x}_f \right) \end{array} \right. \quad (2.35)$$

L'opérateur \mathbb{S}_p est le complément de Schur primal. Il est obtenu, tout comme le vecteur

\underline{b} , par élimination des degrés de liberté internes :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_p = \mathbb{A}_{ff} - \sum_{s=1}^2 \left(\mathbb{A}_{fi}^s (\mathbb{A}_{ii}^s)^{-1} \mathbb{A}_{if}^s \right) \\ \underline{b}_p = \underline{\lambda} - \sum_{s=1}^2 \left(\mathbb{A}_{fi}^s (\mathbb{A}_{ii}^s)^{-1} \underline{f}^s \right) \end{cases} \quad (2.36)$$

Le problème se ramène ainsi à un problème sur les interfaces, de taille plus faible que le problème d'origine, puisque seuls les degrés de liberté sur les interfaces sont concernés. La résolution du problème consiste alors à déterminer les quantités cinématiques de l'interface, \underline{x}_f . La solution interne à chaque sous-domaine est ensuite obtenue par post-traitement.

La résolution du problème d'interface passe par l'inversion de la matrice \mathbb{S}_p , qui peut s'avérer coûteuse. Ce constat a conduit à la mise en place de méthodes de résolution telle que la méthode BDD [Mandel, 1993]. L'objectif est alors de réduire le coût de calcul du problème d'interface. L'utilisation d'un préconditionneur permet dans un premier temps d'obtenir à moindre coût une approximation de l'inverse de \mathbb{S}_p . L'équilibre des efforts d'interface est ensuite obtenu *via* une méthode itérative de type gradient conjugué.

3.1.2 Approches duales

Dans les approches duales, c'est le champ d'effort sur les interfaces qui est privilégié. Les efforts sont supposés continus sur l'interface, et les quantités cinématiques associées sont recherchées. La condensation du problème aux interfaces conduit alors au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_d \underline{\lambda}_f = \underline{b}_d \\ \forall s \in [1, 2], \underline{x}^s = (\mathbb{A}_{ii}^s)^{-1} (\underline{f}^s - \mathbb{C}^s \underline{\lambda}_f) \end{cases} \quad (2.37)$$

L'opérateur \mathbb{S}_d est le complément de Schur dual. Comme précédemment, il est obtenu par élimination des degrés de liberté des sous-domaines :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_d = \sum_{s=1}^2 \left(\mathbb{C}^{sT} (\mathbb{A}^s)^{-1} \mathbb{C}^s \right) \\ \underline{b}_d = \sum_{s=1}^2 \left((\mathbb{A}_{ii}^s)^{-1} \underline{f}^s \right) \end{cases} \quad (2.38)$$

Les inconnues du problème d'interface sont ici les efforts sur les interfaces. Comme pour l'approche primale, le problème d'interface est tout d'abord résolu. Les solutions dans les sous-domaines sont obtenues par post-traitement de la solution aux interfaces.

En pratique, dans les problèmes de statique, le calcul de \mathbb{S}_d n'est pas direct. En effet, les matrices de raideur associées à des domaines flottants, i.e. sans conditions aux limites,

ne sont pas inversibles. Le recours à une matrice inverse généralisée \mathbb{K}^{s+} revient à définir les déplacements des interfaces à un mouvement de corps rigide près :

$$\underline{x}_f^s = \mathbb{K}^{s+} (\underline{f}^s - \mathbb{C}^s \underline{\lambda}_f) + \alpha^s \mathbb{R}^s \quad (2.39)$$

où \mathbb{R}^s représente l'ensemble des mouvements de corps rigide du sous-domaine, et α^s leur amplitude, qu'il reste alors à déterminer.

Dans la méthode FETI, (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) proposée dans [Farhat et Roux, 1991], une étape de projection permet de définir ces mouvements de corps rigides. L'utilisation d'une méthode itérative de type gradient conjugué est ensuite utilisée pour déterminer les déplacements d'interface. À ce titre, cette méthode peut être vue comme une méthode multi-échelle du point de vue des déplacements. Un enrichissement du problème d'interface a conduit au développement de la FETI-DP (*Dual - Primal*) : le problème de projection initial peut alors être vu comme un problème macroscopique enrichi.

L'extension de la méthode FETI à des problèmes de dynamique a été étudiée dans [Farhat et al., 1993, Farhat et al., 1995]. Dans ce cas là, le problème des sous-domaines flottants n'existe plus. Le recours à l'aspect multi-échelle de la FETI n'est plus nécessaire. D'autre part, la discrétisation temporelle utilisée dans les problèmes de dynamique permet de lier directement déplacements, vitesses et accélérations. Une seule de ces quantités cinématiques doit dès lors être déterminée.

3.1.3 Approches mixtes

Dans les approches mixtes, aucune quantité (cinématique ou d'effort) n'est privilégiée dans le problème d'interface. La recherche simultanée de la continuité de ces deux quantités est réalisée *via* la définition d'une nouvelle quantité d'interface, définie comme la combinaison linéaire des quantités cinématiques et d'effort :

$$\underline{\mu}_f = \underline{\lambda}_f + \mathbf{k} \underline{x}_f \quad (2.40)$$

Cette nouvelle inconnue est homogène à un effort. Le paramètre \mathbf{k} représente la raideur de l'interface. Il est intéressant de souligner que cette écriture permet de définir un comportement propre à l'interface.

Un problème condensé en fonction de cette nouvelle inconnue peut alors être défini, et prend la forme :

$$\mathbb{S}_m \underline{\mu}_f = \underline{b}_m \quad (2.41)$$

La matrice \mathbb{S}_m fait intervenir la matrice de Schur primale et la raideur de l'interface, de même que \underline{b}_m . La résolution du problème d'interface conduit donc au calcul de $\underline{\mu}_f$ puis par post-traitement aux quantités cinématiques \underline{x}_f et d'effort $\underline{\lambda}_f$ de l'interface.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature dans le cadre d'approches mixtes, telles que la FETI-2fields [Series *et al.*, 2003] et la méthode Latin. Nous développons ici à titre d'exemple la méthode Latin micro/macro [Ladevèze *et al.*, 2001], qui est un algorithme particulier de résolution des problèmes mixtes. En outre, cette méthode est multi-échelle en espace.

L'interface est considérée ici comme une sous-structure à part entière, comportant ses propres degrés de liberté cinématiques, \underline{W} , et en effort, \underline{F} , définis par :

$$\begin{cases} \underline{W} = \underline{x}|_{\Gamma} \\ \underline{F} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\Gamma} \end{cases} \quad (2.42)$$

Le caractère multi-échelle de la méthode est introduit au niveau des interfaces. Des quantités macroscopiques \underline{W}^M et \underline{F}^M sont définies : elles représentent classiquement les mouvements de corps rigides et les extensions des interfaces. Les quantités microscopiques associées sont définies de telle sorte qu'elles soient découplées des quantités macroscopiques :

$$\begin{cases} \underline{W} = \underline{W}^M + \underline{W}^m \\ \underline{F} = \underline{F}^M + \underline{F}^m \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{W} dS = \int_{\Gamma} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M dS + \int_{\Gamma} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m dS$$

Le caractère mixte de la méthode repose sur la vérification simultanée de la continuité des quantités macroscopiques cinématiques et en effort :

$$\begin{cases} \underline{W}_1^M = \underline{W}_2^M \\ \underline{F}_1^M + \underline{F}_2^M = 0 \end{cases}$$

Le problème d'interface à résoudre concerne alors uniquement les quantités macroscopiques. La matrice associée à la résolution de ce problème représente le comportement homogénéisé global de la structure.

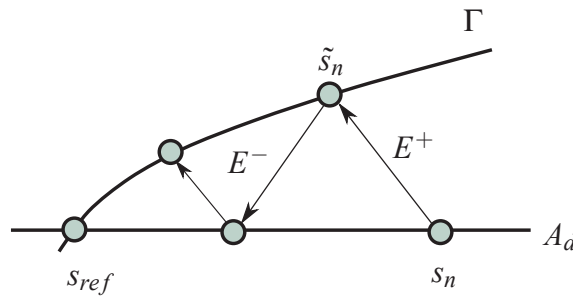


FIGURE 2.15: Illustration de l'algorithme associé à la méthode Latin

L'algorithme de résolution du problème ainsi défini est basé sur la séparation des équations en deux groupes, notés A_d et Γ :

- A_d regroupe les équations linéaires, éventuellement globales du problème,

- Γ rassemble les équations locales, éventuellement non linéaires.

La recherche de la solution est alors menée de façon itérative entre les deux groupes d'équations jusqu'à convergence (c.f. figure 2.15) : la solution finale vérifie alors l'ensemble des équations du problème. Le lien entre les deux groupes d'équations est réalisé *via* des directions de recherche (E^+ et E^-).

De par la définition des interfaces, des comportements complexes peuvent être introduits, comme la gestion du contact [Ladevèze *et al.*, 2002, Odièvre *et al.*, 2010] ou la prédiction de délaminage [Kerfriden *et al.*, 2009].

L'application de cette méthode dans un cadre dynamique a été réalisée dans [Odièvre *et al.*, 2010].

• *Bilan :*

Les méthodes de décomposition de domaine permettent de diminuer les temps de calcul efficacement. La condensation du problème sur les interfaces permet de réduire la taille des problèmes traités, et met ainsi en place un problème grossier sur l'ensemble de la structure.

Un point intéressant de la méthode Latin pour notre étude est la mise en place d'un problème macroscopique, et plus précisément la séparation d'échelle opérée. En effet, un comportement global de la structure peut ainsi être défini, ce qui peut s'avérer utile pour la prise en compte du comportement global de plaque d'une structure par exemple.

3.2 Méthodes de superposition

Plusieurs niveaux de modélisation sont parfois nécessaires pour représenter le comportement d'une structure. Les méthodes présentées ici proposent de venir superposer une modélisation plus fine dans les zones d'intérêt de la structure, sans modifier le maillage global de la structure.

3.2.1 Méthodes de réanalyse

Ces méthodes permettent de réaliser des analyses plus précises dans des zones restreintes de la structure à partir d'un calcul grossier sur une structure de taille plus importante. Elles ne sont pas basées à proprement parler sur une superposition de modèles, mais sur une substitution de la solution dans une zone donnée de la structure.

Méthodes d'analyse descendantes Les méthodes d'analyse descendantes sont classiquement utilisées dans l'industrie pour analyser le comportement d'une zone locale de la structure. Le principe est alors de réaliser un premier calcul sur la structure globale considérée, maillée grossièrement, puis de définir une zone réduite pour laquelle un calcul plus

précis est nécessaire. Un maillage raffiné, comportant tous les détails utiles, et une modélisation adaptée du matériau (plasticité, endommagement) sont alors utilisés pour mener un nouveau calcul. Les conditions aux limites sont alors directement tirées du calcul global et peuvent être soit des conditions en déplacement soit en effort.

Ce type de méthode permet ainsi de réaliser à moindre coût des simulations sur des zones sensibles d'une structure. Cependant, l'effet de la zone d'intérêt sur l'ensemble de la structure n'est pas pris en compte, le transfert d'informations ne se faisant que du maillage grossier vers le maillage local.

Méthodes d'analyse locale/globale Pour prendre en compte l'influence du comportement local sur la structure globale, des approches permettant le dialogue des deux échelles ont été mises en place. Dans [Whitcomb, 1991], une méthode d'analyse locale/globale est proposée. Deux maillages sont réalisés (c.f. figure 2.16) : un maillage global de l'ensemble de la structure, et un maillage local sur une zone d'intérêt. Ce second maillage peut non seulement être plus raffiné, mais comporter également des détails structurels qui n'apparaissent pas dans le modèle global. Cependant, maillages local et global doivent être compatibles.

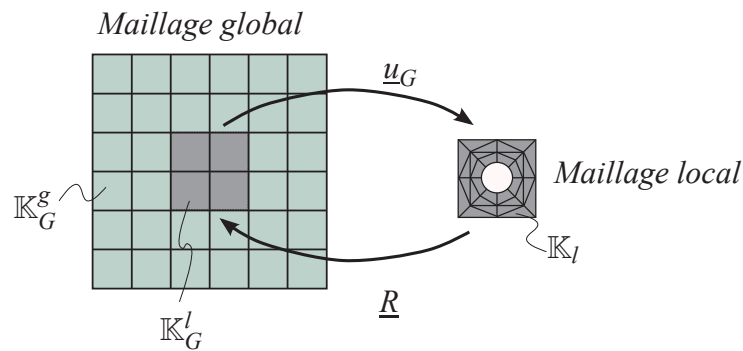


FIGURE 2.16: Méthode d'analyse locale/globale [Whitcomb, 1991]

Le calcul est alors réalisé ainsi :

- Résolution du problème sur le maillage global :

$$\left(\mathbb{K}_G^g + \mathbb{K}_G^l \right) \underline{u}_G = \underline{F}^{ext} \quad (2.43)$$

- Résolution du problème sur le maillage local :

$$\mathbb{K}_l \underline{u}_l = \underline{\lambda} \quad (2.44)$$

Les conditions aux limites $\underline{\lambda}$ imposées sur le bord du domaine sont les déplacements obtenus à l'étape globale.

- Calcul du résidu d'équilibre entre les deux solutions :

$$\underline{R} = (\mathbb{K}_G^g + \mathbb{K}_I) \underline{u} - \underline{F}^{ext} \quad (2.45)$$

où le vecteur des déplacements \underline{u} est un assemblage des solutions dans les zones locale et globale de la structure. La matrice raideur utilisée pour le calcul du résidu correspond à l'assemblage de la matrice raideur du maillage local dans la zone de superposition, et de la matrice raideur du maillage global dans le reste de la structure.

- Calcul d'une correction à apporter à la solution globale :

$$\begin{cases} \Delta \underline{u}_G = -(\mathbb{K}_G^g + \mathbb{K}_G^l)^{-1} \underline{R} \\ \underline{u}_G \leftarrow \underline{u}_G + \Delta \underline{u}_G \end{cases} \quad (2.46)$$

Après la correction de la solution globale, le calcul de la zone d'intérêt est à nouveau réalisé. Des itérations sont menées jusqu'à convergence.

La convergence de cette méthode est montrée à travers divers exemples pour lesquels le maillage local introduit une perte de raideur de la structure, notamment dans le cas de la présence de trous ou de l'utilisation de lois d'endommagement [Whitcomb et Woo, 1993a, Whitcomb et Woo, 1993b]. Dans le cas où le maillage local conduit à un raidissement de la structure, la convergence n'est plus assurée. La correction apportée à la solution locale doit alors être relaxée.

Dans [Gendre *et al.*, 2009], une approche similaire est adoptée afin de mettre en place une méthode de calcul locale/globale non intrusive. La solution du problème est alors définie de telle sorte que dans la zone de superposition des modèles, la solution soit celle du maillage local ; dans le reste de la structure, la solution est celle du maillage global. Deux types de raccord sont définis, le premier en déplacement et le second mixte. L'objectif principal de l'approche mise en place est de pouvoir utiliser ce type de méthode dans des logiciels commerciaux.

3.2.2 Méthode Arlequin

Introduite par [Ben Dhia, 1998], l'objectif de la méthode Arlequin est de réaliser le couplage de modèles de finesses différentes, aussi bien au niveau de la formulation que de la discrétisation éléments finis. Les deux domaines en présence ne sont pas raccordés sur une surface frontière mais dans un volume, ce qui implique qu'une partie de la structure est représentée par les deux modèles à la fois, c'est la zone de collage (c.f. figure 2.17). Dans cette partie de la structure, les deux modèles en présence sont mis en compétition *via* l'utilisation d'une pondération de leur contribution respective dans l'expression du principe des puissances virtuelles.

Considérons une structure linéaire Ω représentée par une modélisation grossière dans Ω_M et par une modélisation fine dans une zone Ω_m . La résolution de ce problème par la

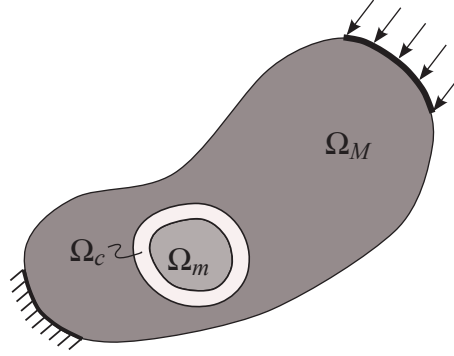


FIGURE 2.17: Exemple de définition de domaines pour la méthode Arlequin

méthode Arlequin conduit à définir trois ingrédients : une zone de collage Ω_c , un champ de pondération α et un espace médiateur \mathcal{M} .

La zone de collage entre les deux modèles correspond à la partie de la structure dans laquelle les deux modélisations cohabitent. C'est sur ce volume que le raccord entre les deux modèles est écrit.

Le champ de pondération α fixe la contribution énergétique de chaque modèle dans la zone de collage Ω_c . Il prend une valeur comprise entre 0, dans le domaine grossier, et 1, dans le domaine local. Le travail virtuel intérieur d'une solution $(\underline{u}^G, \underline{u}^l)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}), a(\underline{u}^G, \underline{u}^l, \underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}) &= \int_{\Omega_M} (1 - \alpha) \underline{\sigma}^G : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^{G*}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_m} \alpha \underline{\sigma}^l : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^{l*}) d\Omega \end{aligned}$$

La solution \underline{u}^l est définie dans Ω_m , \underline{u}^G est définie dans Ω_M . De même, en notant \underline{f}_d les efforts volumiques et \underline{F}^e les efforts surfaciques, le travail des efforts extérieurs l s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}), l(\underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}) &= \int_{\Omega_M} (1 - \alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{G*} d\Omega + \int_{\Omega_m} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{l*} d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_M} (1 - \alpha) \underline{F}^e \cdot \underline{u}^{G*} dS + \int_{\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_m} \alpha \underline{F}^e \cdot \underline{u}^{l*} dS \end{aligned}$$

Enfin, l'espace médiateur \mathcal{M} définit l'espace des multiplicateurs de Lagrange utilisés pour contrôler l'écart entre les solutions \underline{u}^l et \underline{u}^G dans la zone de collage. Classiquement, cet espace est choisi égal à $\mathcal{H}_1(\Omega_c)$.

Finalement, le problème consiste à trouver une solution $(\underline{u}^G, \underline{u}^l, \underline{\lambda})$ vérifiant :

$$\forall(\underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}, \underline{\lambda}^*), \begin{cases} a(\underline{u}^G, \underline{u}^l, \underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}) + \langle \underline{\lambda}, (\underline{u}^{G*} - \underline{u}^{l*}) \rangle = l(\underline{u}^{G*}, \underline{u}^{l*}) \\ \langle \underline{\lambda}^*, (\underline{u}^G - \underline{u}^l) \rangle = 0 \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathcal{H}_1(\Omega_c)$. Dès lors, la solution du problème s'écrit :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^G & \text{dans } \Omega_G \setminus \Omega_c \\ \underline{u}^l & \text{dans } \Omega_l \setminus \Omega_c \\ \alpha \underline{u}^l + (1 - \alpha) \underline{u}^G & \text{dans } \Omega_c \end{cases} \quad (2.47)$$

Plusieurs cas de figure sont possibles. Dans le cas d'un *zoom*, une modélisation fine est superposée à la modélisation existante dans une partie de la structure. La zone de collage Ω_c est alors confondue avec le modèle fin Ω_m . Dans le cas d'une *substitution*, une partie du maillage grossier Ω_M est remplacée par une modélisation fine Ω_m . La zone de collage doit être définie sur le pourtour de Ω_m . Enfin, pour la jonction entre deux modèles, la zone Ω_c représente la zone de recouvrement partiel des deux domaines considérés.

Cette méthode a été appliquée au suivi de fissure dans [Ben Dhia et Jamond, 2010]. Pour ce problème, un patch est défini en pointe de fissure et se déplace avec son avancée dans la structure. Le raccord est alors équivalent à une *substitution*.

Cependant, la méthode présente quelques difficultés. La qualité du raccord entre les deux modèles dépend de la zone de recouvrement et du choix de discrétisation de l'espace médiateur \mathcal{M} . D'autre part, la qualité de la solution obtenue dépend de la taille du patch utilisé.

3.2.3 Méthodes multi-grilles

Le principe des méthodes multi-grilles, initiées par [Fedorenko, 1964], est de superposer plusieurs échelles de discrétisation pour résoudre le problème. La résolution s'appuie sur des méthodes de résolution itératives, de type gradient conjugué ou Gauss Seidel. L'objectif de ces méthodes est d'améliorer la convergence du calcul en traitant les différentes longueurs d'onde de la solution finale séparément.

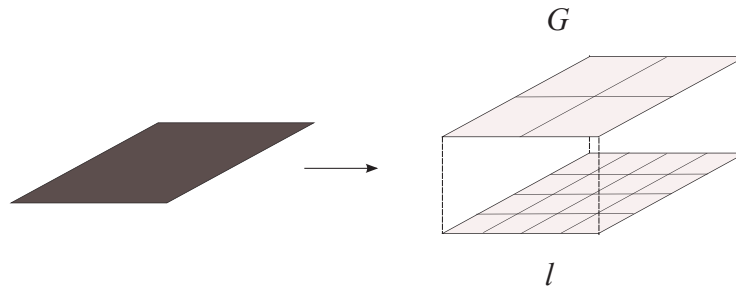


FIGURE 2.18: Définitions de grilles de résolution pour la résolution d'un problème avec la méthode multi-grille.

Considérons un problème élastique résolu sur deux grilles (c.f figure 2.18). La solution du problème s'écrit comme la somme des contributions de l'échelle fine et de l'échelle grossière :

$$\underline{u} = \underline{u}_G + \underline{u}_l$$

\underline{u}_G représente la solution sur la maille grossière, soit la solution à grande longueur de variation ; \underline{u}_I est la solution sur la maille fine, la solution à petite longueur de variation. Afin de faire communiquer les deux échelles de résolution, des matrices de restriction \mathbf{R} et de prolongement \mathbf{P} entre les deux échelles sont définies. La résolution du problème s'organise alors comme suit :

- *Échelle fine* :
 - Plusieurs itérations sont réalisées avec la méthode choisie. Cette opération de lissage conduit à une solution intermédiaire, dont l'erreur commise est à grande longueur de variation : \underline{u}_I^i
 - Le résidu d'équilibre sur l'échelle fine est alors calculé et restreint sur l'échelle grossière $\underline{R}_G = \mathbf{R}\underline{u}_I$.
- *Échelle grossière* :
 - Le problème de résidu sur l'échelle grossière est alors résolu, conduisant à une solution \underline{u}_G^i
 - La solution à l'échelle globale est ensuite prolongée sur l'échelle fine, et la solution sur l'échelle fine mise à jour : $\Delta\underline{u}_I^i = \mathbf{P}\underline{u}_G^i$ et $\underline{u}_I^{i+1} = \underline{u}_I^i + \Delta\underline{u}_I^i$
 - Si la solution à petite longueur de variation est modifiée, de nouvelles boucles d'itération sur l'échelle fine sont réalisées.

Le côté systématique de cette méthode présente de grands avantages : plusieurs niveaux de discrétisation peuvent ainsi être mis en œuvre. Suivant le type de problème considéré, le nombre de grilles peut être important. Dans [Rannou *et al.*, 2009], le calcul de suivi de fissure réalisé fait ainsi appel à 9 grilles successives. La X-FEM est utilisée sur la grille la plus fine pour prédire l'avancée de la fissure, les autres grilles permettant d'améliorer la convergence des calculs.

Pour les approches nécessitant plusieurs grilles, l'organisation du dialogue entre les différents niveaux de discrétisation conduit à la mise en place de cycles de calcul. Les cycles en V font dialoguer successivement les différentes échelles, tandis que les cycles en W font appel à des boucles d'itérations entre niveaux intermédiaires de discrétisation (c.f. figure 2.19).

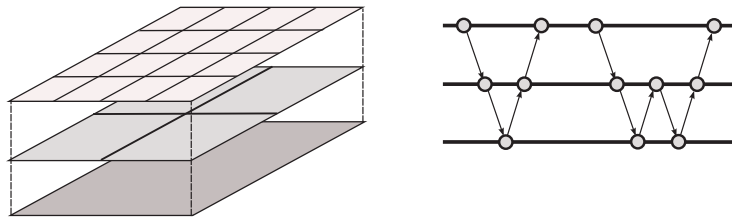


FIGURE 2.19: Niveaux de discrétisation et cycles de calcul

- *Bilan*

Les méthodes de superposition présentées ici permettent d'utiliser plusieurs niveaux de discrétisation spatiale pour résoudre le problème, ce qui constitue une approche intéressante pour le problème que nous souhaitons traiter.

Les méthodes de type local/global présentent l'avantage d'avoir deux niveaux de solutions, local et global. Le maillage global n'est jamais modifié, ce qui constitue un point intéressant. Les maillages utilisés doivent cependant être compatibles.

De même, dans le cas de la méthode Arlequin, l'utilisation de patch suivant le front de fissure réduit considérablement la zone de modélisation fine sans avoir recours au remaillage. Néanmoins, la zone de collage entre les deux modèles présente des difficultés de discrétisation : dans le cas de matériaux composite, un mauvais raccord peut conduire à des départs de délaminage parasite.

D'autre part, les méthodes multi-grilles permettent de superposer des niveaux de discrétisation spatiale différents, permettant ainsi d'accélérer la convergence des calculs. Il est cependant difficile de donner un sens physique aux grilles grossières. Cette approche peut être vue comme une sorte d'homogénéisation numérique.

3.3 Approches multi-échelles en temps

La majorité des problèmes de dynamique tels que les problèmes de choc ou de crash est résolue à l'aide de schéma de résolution de Newmark explicite. Bien que ce schéma permette de réduire les coûts de calcul, il est conditionnellement stable. Le pas de temps du calcul est alors piloté par le plus petit élément du maillage de la structure. Cependant, dans de nombreux problèmes, le maillage fin est restreint à une partie de la structure, et un pas de temps très petit est utilisé dans des zones de la structure où cela est inutile. Afin de pallier à ce problème, plusieurs voies ont été explorées.

3.3.1 Méthodes mixtes en temps

Les méthodes mixtes en temps permettent de coupler des schémas de résolution explicite et implicite. Le principe consiste alors à partitionner le maillage et à résoudre le problème dans chaque partition de façon différente. Deux grandes familles d'algorithme de résolution existent, selon si la partition de la structure est réalisée par éléments [Hughes et Liu, 1978] ou par nœuds [Belytschko et Mullen, 1978]. Pour ce type de méthodes, le pas de temps de calcul reste constant dans l'ensemble de la structure. Un maillage global de la structure est réalisé, la partition est effectuée après la mise en place du maillage.

Partition par éléments [Hughes et Liu, 1978] L'algorithme de résolution basé sur une partition par éléments consiste à séparer le maillage en deux groupes, que l'on notera I et

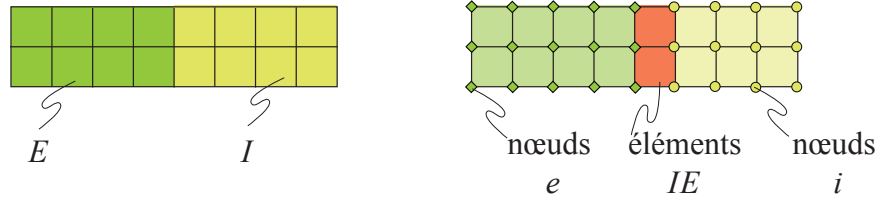


FIGURE 2.20: Partition par éléments et par nœuds

E (c.f. figure 2.20). Dans l'ensemble de la structure, les paramètres β et γ du schéma de résolution de Newmark sont identiques.

Les matrices masse et raideur de chaque groupe sont assemblées sur les éléments correspondant, et notées \mathbb{M}^I , \mathbb{M}^E , \mathbb{K}^I , \mathbb{K}^E . Il est important de noter ici que la structure totale possède des matrices masse \mathbb{M} et raideur \mathbb{K} correspondant à l'assemblage des matrices \mathbb{M}^I et \mathbb{M}^E , et \mathbb{K}^I et \mathbb{K}^E respectivement. A ce titre, l'équation à résoudre, discrétisée en espace, s'écrit :

$$\mathbb{M}\ddot{\underline{U}} + \mathbb{K}\underline{U} = \underline{F} \quad (2.48)$$

La distinction entre les deux groupes d'éléments intervient lors de la discrétisation en temps de cette équation. Au groupe d'élément I , un schéma de résolution implicite est attribué. Un schéma implicite modifié est attribué au groupe E , qui consiste en deux étapes de prédiction et correction.

Le problème final à résoudre sur la structure comporte alors deux étapes :

- Prédiction : $(\mathbb{M} + \beta\Delta t^2\mathbb{K}^I) \dot{\underline{U}}_{n+1} = \underline{F}_{n+1} - \mathbb{K}^p \underline{U}$
- Correction : $\underline{U}_{n+1} = {}^p\underline{U}_{n+1} + \beta\Delta t^2\ddot{\underline{U}}_{n+1}$

Cet algorithme de résolution attribue un schéma explicite au groupe d'éléments E dans le sens où la matrice raideur associée à la partition n'entre pas en compte dans le calcul de la prédiction. Cependant, contrairement à un schéma explicite traditionnel, la solution en déplacement au pas de temps t_{n+1} dépend de la solution en accélération à ce même pas de temps.

□ **Remarque :** La stabilité de ce schéma est assurée dès lors que la stabilité du schéma implicite d'une part et implicite modifié d'autre part est vérifiée.

Partition par nœuds [Belytschko et Mullen, 1978] Deux groupes de nœuds sont définis ici, notés i et e (c.f. figure 2.20). En conséquence, des éléments, notés IE , possèdent des nœuds appartenant aux deux groupes. Le groupe de nœuds e se voit attribuer un schéma de résolution explicite classique ($\beta = 0$, $\gamma = 1/2$), tandis qu'un schéma implicite est affecté au groupe i ($\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$).

La partition des nœuds conduit à une réorganisation des degrés de liberté de la struc-

ture et des équations sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}^e & 0 \\ 0 & \mathbb{M}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{U}}^e \\ \underline{\dot{U}}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}^e & \mathbb{K}^{ei} \\ \mathbb{K}^{ie} & \mathbb{K}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^e \\ \underline{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}^e \\ \underline{F}^i \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

La discrétisation en temps des degrés de liberté explicites e et implicites i conduit alors à l'expression suivante dans chaque partition :

$$\begin{cases} \underline{U}_{n+1}^e = 2\underline{U}_n^e - \underline{U}_{n-1}^e + \Delta t^2 \mathbb{M}^{e-1} (F_n - \mathbb{K}^e \underline{U}_n^e - \mathbb{K}^{ei} \underline{U}_n^i) \\ \underline{U}_{n+1}^i = \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbb{M}^i + \mathbb{K}^i \right)^{-1} \left(F_{n+1}^i - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbb{M}^i \underline{U}_n^i - \frac{4}{\Delta t} \mathbb{M}^i \underline{\dot{U}}_n^i - \mathbb{M}^i \underline{\ddot{U}}_n^i + \mathbb{K}^{ie} \underline{U}_{n+1}^e \right) \end{cases} \quad (2.50)$$

Pour les nœuds “explicites”, seules des quantités du pas de temps précédent sont nécessaires pour le calcul. Les nœuds “implicites” nécessitent cependant la connaissance de la quantité \underline{U}_{n+1}^e ce qui impose un ordre dans la résolution des équations : d’abord la résolution de la partie explicite, puis de la partie implicite.

□ **Remarque 1 :** Pour des pas de temps différents dans les parties explicites et implicites, des nœuds “d’interface” doivent être définis. Ils correspondent à une zone tampon entre les zones implicites et explicites. En effet, pour ces nœuds, un manque d’information apparaît, dû au retard de résolution dans la zone implicite. Ces nœuds ont alors un traitement double. Tant que des informations venant de la zone implicite existent, ils appartiennent au groupe “explicite” ; ils passent ensuite dans le groupe des nœuds implicites.

□ **Remarque 2 :** Pour ce schéma, on retrouve les mêmes conditions de stabilité que pour un schéma explicite classique.

3.3.2 Méthodes de sous-cyclage

Les méthodes de sous-cyclage, ou multi-pas de temps, ont été initialement proposées dans [Belytschko *et al.*, 1979]. Elles permettent d’utiliser des discrétisations temporelles différentes dans une même structure. Ces méthodes sont surtout utilisées dans le cadre de schéma de résolution explicite. L’objectif est alors de pouvoir résoudre à moindre coût des problèmes pour lesquels un maillage très raffiné est utilisé dans une zone restreinte de la structure. Dans ce cas là, c’est en effet la zone raffinée de la structure qui impose le pas de temps de calcul pour l’ensemble de la structure. Cette méthode permet alors de limiter le nombre d’itérations dans la zone de maillage “grossier”.

Une partition par nœuds est définie. Le choix des pas de temps dans les partitions est réalisé de telle sorte que :

$$\Delta T = N \Delta t < \Delta T^c$$

où Δt est le pas de temps de calcul dans la zone raffinée, ΔT^c le pas de temps critique de la zone grossière et N un entier. L'utilisation d'un schéma explicite pour les deux partitions implique que pour un pas de temps donné, seules les données du pas de temps précédent sont nécessaires. Cependant, dans la partition i , des informations sont manquantes pour les pas de temps intermédiaires. Une interpolation linéaire en temps des quantités est alors effectuée pour récupérer les données nécessaires au calcul dans la partie e .

Les méthodes mixtes en temps et de sous-cyclage ont par la suite été couplées pour permettre le couplage de schéma explicite et implicite en utilisant des pas de temps de calcul différents dans la structure [Belytschko *et al.*, 1985].

3.3.3 Méthode multi-pas de temps

L'approche suivie dans [Gravouil et Combescure, 2001] permet l'extension des méthodes de décomposition de domaine duales à des problèmes de dynamique. Le recours aux techniques de sous-cyclage et mixte en temps rend cette approche multi-échelle en temps. La décomposition de la structure en sous-domaine rend possible l'utilisation de maillages de nature et de raffinement différent.

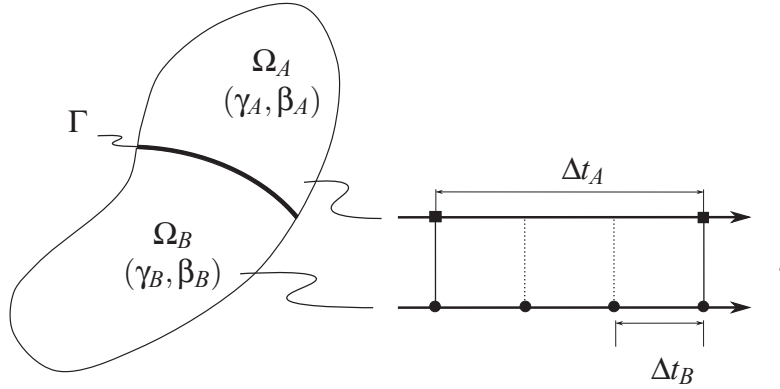


FIGURE 2.21: Principe de la méthode multi pas de temps [Gravouil et Combescure, 2001]

Considérons une structure décomposée en s sous-domaines. Le problème à résoudre est alors de la forme :

$$\begin{cases} \forall k \in [1, s], \mathbb{M}^k \ddot{\underline{U}}^k + \mathbb{K}^k \underline{U}^k = \underline{F}^{ext} + \mathbb{C}^{kT} \underline{\Lambda} \\ \sum_k \mathbb{C}^k \dot{\underline{U}}^k = \underline{0} \end{cases} \quad (2.51)$$

La deuxième équation représente la continuité des vitesses sur les frontières entre sous-domaines. La matrice \mathbb{C}^k permet dans chaque sous-domaine k de récupérer les degrés de liberté en vitesse des nœuds sur la frontière et d'assurer la continuité des vitesses avec les degrés de liberté en regard dans les sous-domaines adjacents. Le multiplicateur de Lagrange $\underline{\Lambda}$ est global sur l'ensemble des frontières de la structure.

L'application du schéma de Newmark (équation 3.21) à l'équation 2.51 permet de réécrire le problème discrétisé en espace et en temps :

$$\begin{cases} \forall k \in [1, s], \underbrace{(\mathbb{M}^k + \beta_k \Delta t_k^2 \mathbb{K}^k)}_{\tilde{\mathbb{M}}^k} \dot{\underline{U}}_{n_k+1}^k = F_{n_k+1}^{ext} - \mathbb{K} \underline{U}^{pk} + \mathbb{C}^{kT} \underline{\Delta}_{n+1} \\ \sum_k \mathbb{C}^k \dot{\underline{U}}^k = \underline{0} \end{cases} \quad (2.52)$$

La résolution du problème est alors réalisée en deux étapes :

- la résolution d'un problème dit *libre*, dans lequel on considère chaque sous-domaine séparément,
- la résolution d'un problème dit *lié*, dans lequel tous les sous-domaines sont recollés entre eux. Ce problème est global sur l'ensemble des frontières de la structure.

Pour cela, l'accélération est considérée comme la somme des solutions à ces deux problèmes :

$$\ddot{\underline{U}}_{n+1} = \ddot{\underline{U}}_{n+1}^{Free} + \ddot{\underline{U}}_{n+1}^{Link} \quad (2.53)$$

Ainsi, le problème 2.52 peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Problème libre : } & \forall k \in [1, s], \tilde{\mathbb{M}}^k \dot{\underline{U}}_{n+1}^{kFree} = F_{n_k+1}^{ext} - \mathbb{K} \underline{U}^{pk} \\ \text{Problème lié : } & \forall k \in [1, s], \tilde{\mathbb{M}}^k \dot{\underline{U}}_{n+1}^{kLink} = \mathbb{C}^{kT} \underline{\Delta}_j \\ & \underline{\Delta}_j = \mathbb{H}^{-1} \underline{B} \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{H} = -\sum_k \gamma_k \Delta t_k \mathbb{C}^k (\tilde{\mathbb{M}}^k)^{-1} \mathbb{C}^{kT} \\ \underline{B} = \sum_k \mathbb{C}^k \dot{\underline{U}}_j^{kFree} \end{cases} \quad (2.55)$$

Le vecteur \underline{B} représente le saut des vitesses obtenues dans la résolution des problèmes libres. Il doit être recalculé pour chaque pas de temps t_j où le problème lié est résolu.

La matrice \mathbb{H} est une matrice globale sur la structure, et relie les domaines adjacents entre eux. Elle peut être calculée une seule fois en début de calcul dans le cas où $\tilde{\mathbb{M}}^k$ n'est pas modifiée en cours de calcul (schéma de résolution explicite ou comportement linéaire). D'autre part, la forme de cette matrice dépend des schémas de résolution choisis dans les différents sous-domaines : pour des schémas de résolution explicites et des matrices masses diagonales, \mathbb{H}^{-1} est diagonale ; à l'inverse, l'utilisation de schéma implicite dans un ou plusieurs sous-domaines conduit à une matrice \mathbb{H}^{-1} pleine.

Cette méthode a initialement été mise en place pour des problèmes dans lesquels la zone d'intérêt est très restreinte. Pour un trop grand nombre de sous-domaines, la taille et la nature de la matrice \mathbb{H} entraînent des coûts de calcul importants.

Dans le cas où des pas de temps différents sont utilisés dans les sous-domaines, le problème lié est résolu pour chaque pas de temps fin. Une procédure semblable à celle

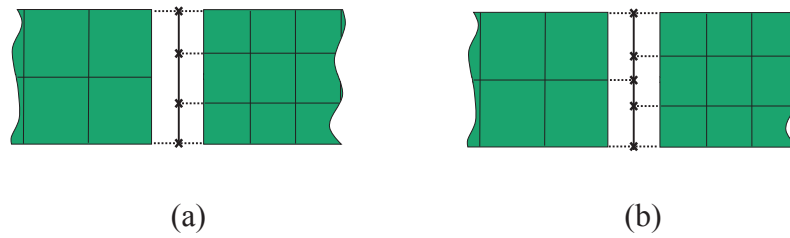


FIGURE 2.22: Raccord mortar (a) et optimum (b)

utilisée dans les méthodes de sous-cyclage présentées précédemment est alors mise en place.

D'autre part, un maillage plus fin peut être utilisé dans un des domaines, ce qui peut conduire à des maillages non coïncidents au niveau des frontières. Des raccords de type *mortar* (discrétisation de la frontière sur le maillage le plus fin), ou *optimum* (discrétisation sur l'ensemble des nœuds sur la frontière) peuvent alors être utilisés [Herry, 2002, Faucher et Combescure, 2003].

En chaque nœud de la frontière, les vitesses correspondant à chaque domaine doivent alors être estimées. Dans le cas de nœuds coïncidents, la valeur de la vitesse est directement connue. Dans le cas contraire, les fonctions de forme des éléments sont utilisées. Pour des éléments linéaires, ceci correspond à une interpolation linéaire en espace des vitesses sur la frontière.

La stabilité de ce schéma est étudiée dans [Combescure et Gravouil, 2002]. Pour préserver la stabilité et la précision des schémas utilisés dans les différents sous-domaines, l'énergie dissipée au niveau des frontières doit être nulle [Farhat *et al.*, 1993] : une production d'énergie entraîne des instabilités tandis qu'une dissipation d'énergie conserve la stabilité mais diminue la précision.

Plus précisément, pour des pas de temps de calcul identiques dans l'ensemble des sous-domaines, les conditions de stabilité sont inchangées dans le cas d'une continuité des vitesses ou des accélérations sur les frontières si le même paramètre γ est utilisé dans l'ensemble des sous-domaines. Pour une continuité des déplacements, des conditions de stabilité supplémentaires dans les sous-domaines apparaissent.

Dans le cas d'une continuité des vitesses aux frontières et pour des pas de temps différents dans les sous-domaines, la stabilité du schéma global dépend de la stabilité dans chaque sous-domaine. Cependant, l'utilisation d'une interpolation linéaire en temps des vitesses peut conduire à une dissipation d'énergie sur les frontières.

Dans [Gravouil et Combescure, 2003], les auteurs utilisent cette méthode en combinaison avec la méthode multi-grille. Le principe est alors de réaliser une décomposition de domaine de la structure en utilisant des maillages coïncidents, et de superposer une grille fine sur un des sous-domaines définis. Considérons un problème décomposé en deux sous-domaines Ω_A et Ω_B (c.f. figure 2.23). Un pas de temps et un schéma de résolution sont

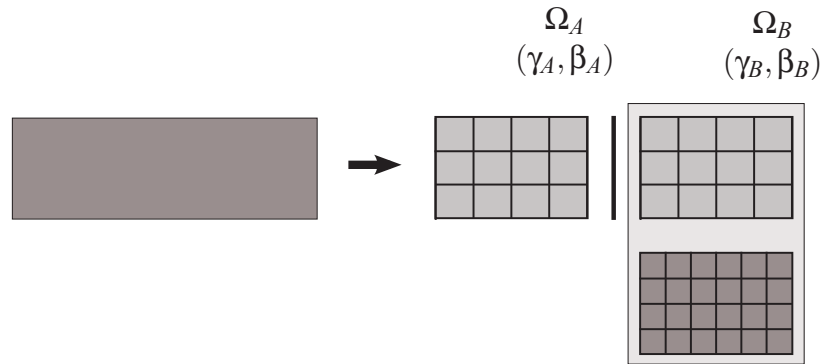


FIGURE 2.23: Utilisation de deux échelles spatiales

attribués à chaque sous-domaine. La résolution du problème est similaire à celle présentée plus haut, seul le problème libre du domaine Ω_B , où deux grilles sont superposées, est modifié.

Pour ce domaine, le pas de temps de calcul et le schéma de résolution sont identiques dans les deux grilles. A chaque pas de temps, le problème multi-grille est résolu tel que présenté dans la section 3.2.3. Le problème global n'est pas modifié : le raccord en vitesse est réalisé sur le maillage grossier.

• Bilan

Dans le cadre de notre étude, le couplage de discrétisations temporelles différentes est crucial pour réduire les coûts de calcul. L'utilisation de méthodes de ce type est un point de départ intéressant.

L'approche multi-grille, si elle permet de coupler des maillages de finesses différentes, ne semble cependant pas applicable telle quelle à notre problème. D'une part, la méthode présentée ici a été mise en place dans le cas d'un nombre limité de sous-domaines. Dans notre cas, le nombre de sous-domaines en jeu est potentiellement trop important pour que la méthode reste efficace. D'autre part, les mêmes remarques que pour les méthodes multi-grilles classiques sont applicables.

3.4 Bilan

Les approches présentées ici présentent toutes des avantages vis à vis du problème que nous souhaitons traiter. D'un point de vue numérique, les approches de type décomposition de domaine permettent de réduire les temps de calcul en divisant la structure globale, ce qui peut s'avérer très utile dans le cas de structures de taille industrielle.

De plus, les méthodes de superposition présentent l'avantage de pouvoir utiliser conjointement une modélisation globale grossière de la structure et une modélisation locale plus riche dans une zone restreinte. Dans ce cadre, il serait intéressant d'avoir accès d'une part à une réponse globale macroscopique de la structure, tout en pouvant évaluer de façon plus locale les zones délaminées de la structure.

Enfin, dans un cadre dynamique, les approches de type multi-domaine multi pas de temps font parties des plus avancées dans le domaine. Ce type d'approche sert donc de base au travail présenté ici.

DEUXIÈME PARTIE

Vers une méthode multi-échelle pour la prédiction du délaminage en dynamique

Sur une stratégie multi-échelle d'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire

Dans ce chapitre, les choix retenus pour la modélisation du stratifié sont présentés. Dans un premier temps, les équations de la dynamique et leur discrétisation spatiale et temporelle sont rappelées. Les conséquences, en terme de coût de calcul, de l'utilisation d'une méso-modélisation du stratifié sont présentées.

Sommaire

1	Définition d'un cas d'étude	68
2	Équations du problème	68
2.1	Équations continues de la dynamique	69
2.2	Discrétisation spatiale des équations	72
2.3	Discrétisation temporelle des équations	74
3	Contraintes liées à l'utilisation du méso-modèle	74
3.1	Définition du pas de temps de calcul	74
3.2	Définition du maillage	77
4	Bilan et objectifs	79

1 Définition d'un cas d'étude

La structure finale à calculer est une structure de type coque soumise à un choc d'oiseau, telle que celle présentée dans la partie 1. Pour calculer ce problème, l'oiseau est explicitement modélisé.

Une première simplification de ce problème consiste à considérer une partie de la structure, restreinte à l'intervalle entre deux raidisseurs (c.f. figure 3.1). Cette structure est alors assimilable à une plaque plane. Des conditions aux limites en appui simple permettent de prendre en compte la présence des raidisseurs.

L'impact de l'oiseau peut être représenté *via* un chargement équivalent. Pour être représentatif, deux paramètres doivent alors être pris en compte. D'une part la valeur de l'effort appliqué au cours du temps, d'autre part l'écoulement de l'oiseau, correspondant à une pression variable en espace.

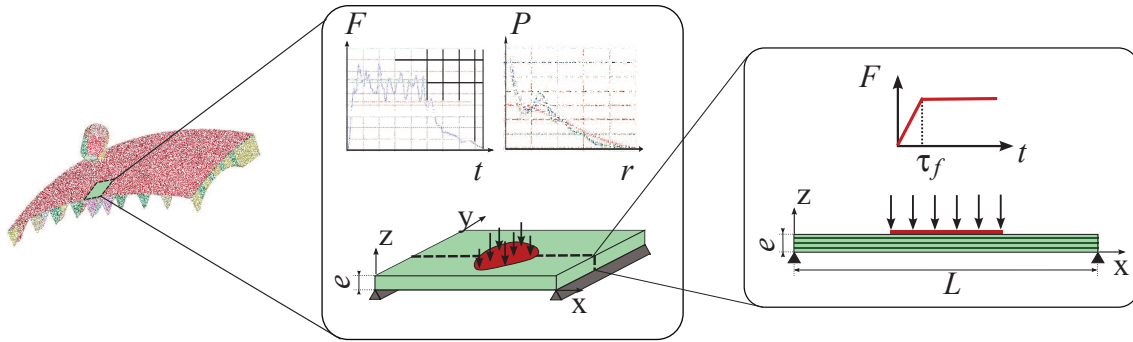


FIGURE 3.1: Définition du problème 2D

Une simplification du problème en un cas 2D revient alors à considérer une coupe de cette plaque, en faisant l'hypothèse de déformations planes. Le chargement imposé peut être considéré comme une rampe, de temps caractéristique τ_f , suivi d'un plateau où l'effort est considéré comme constant. Sur les exemples considérés par la suite, les ordres de grandeur de τ_f observés expérimentalement sont conservés. Les durées des chocs sont choisies de telle sorte que des dégradations apparaissent dans la structure.

Les cas considérés ici s'appuieront sur cette simplification. Ils sont tous construits sur le même principe, résumé dans la figure 3.1. On notera x la direction dans le plan de la plaque et z la direction normale.

2 Équations du problème

Dans cette section, les équations utilisées pour résoudre le problème de choc à l'oiseau sont présentées. La solution recherchée est fonction de l'espace et du temps.

2.1 Équations continues de la dynamique

Considérons une structure composite stratifiée occupant le domaine Ω et constituée de N_p plis adjacents notés P . On notera $\underline{f}^e(t)$ le chargement dynamique imposé à la structure sur une partie $\partial\Omega_f$ de sa frontière, \underline{u}_d le déplacement imposé sur une partie $\partial\Omega_u$ et \underline{f}_d l'effort volumique.

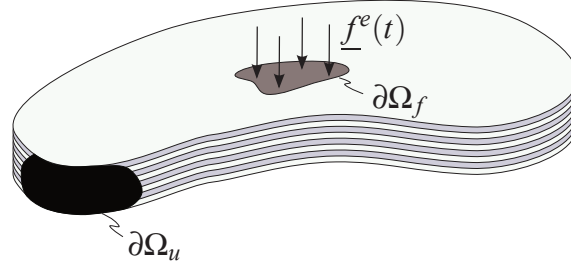


FIGURE 3.2: Problème de référence

Le stratifié est représenté en utilisant une modélisation à l'échelle mésoscopique [Ladevèze, 1995]. La structure est ainsi considérée comme un empilement de plis P et d'interfaces I_{P+P-} (c.f. figure 3.3). Le problème de référence dynamique s'écrit alors :

Trouver la solution $(\ddot{\underline{u}}(M,t), \underline{\sigma}(M,t))$ vérifiant les équations suivantes :

- **Équilibre dynamique :**

$$\forall \underline{u}^*, \int_{\Omega} (\rho \ddot{\underline{u}} - \underline{f}_d) \underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}^e \underline{u}^* dS \quad (3.1)$$

- **Conditions aux limites :**

- En déplacement : $\forall M \in \partial\Omega_u, \underline{u}(M,t) = \underline{u}_d$
- En effort : $\forall M \in \partial\Omega_f, \underline{\sigma}(M,t) \cdot \underline{n} = \underline{f}^e(M,t)$

- **Conditions initiales :**

$$\forall M \in \Omega, \quad \begin{aligned} \underline{u}(M,t_0) &= \underline{u}_0, \\ \dot{\underline{u}}(M,t_0) &= \underline{v}_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

- **Loi de comportement :**

- Des plis :

$$\forall M \in \Omega_{pli}, \forall t \in [0, T], \underline{\sigma} = \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \quad (3.3)$$

où \mathbb{C} représente le tenseur de Hooke associé au comportement des plis et $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$ le tenseur des déformations défini par :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}} \right)^T \right) \quad (3.4)$$

– Des interfaces :

$$\forall M \in \Omega_I, \underline{\sigma}_I \cdot \underline{n} = \mathbb{A}_{PP'} [\underline{u}] \quad (3.5)$$

où $\mathbb{A}_{PP'}$ représente le comportement des interfaces qui sera explicité plus loin.

Le comportement des plis est considéré par la suite comme linéaire élastique. Les interfaces sont définies comme des entités surfaciques entre les plis et assurent le transfert des contraintes et des déplacements entre les plis adjacents du composite. Elles n'ont pas d'épaisseur physique. La figure 3.3 précise le repère $(\underline{n}, \underline{t})$ lié à l'interface, que l'on notera $I_{P^+P^-}$. Les quantités relatives aux plis supérieur et inférieur sont indicées \cdot^+ et \cdot^- respectivement.

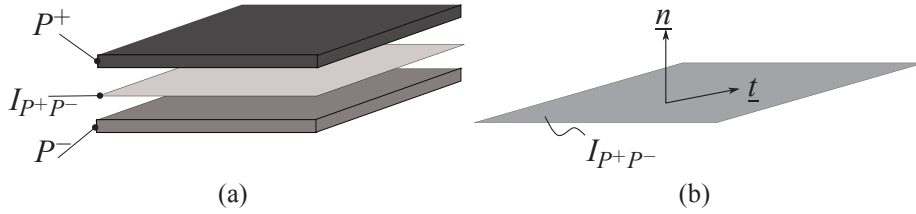


FIGURE 3.3: Définition des plis et interface (a) et du repère lié à l'interface (b)

La position de l'interface est définie par rapport à la position des plis adjacents. Elle correspond à la surface moyenne entre deux plis du stratifié, soit :

$$I_{P^+P^-} = \{ \underline{x} / \underline{x} = \frac{\underline{x}^+ + \underline{x}^-}{2} \} \quad (3.6)$$

De même, le saut de déplacement $[\underline{u}]$ dépend des déplacements entre les deux plis adjacents :

$$[\underline{u}] = \underline{u}^+ - \underline{u}^- = [u_n] \underline{n} + [u_t] \underline{t} \quad (3.7)$$

L'état de contrainte d'une interface est ainsi caractérisé par la contrainte $\sigma_I \cdot \underline{n}$. La loi de comportement associée, définie par l'opérateur $\mathbb{A}_{P^+P^-}$, lie le saut de déplacement $[\underline{u}]$ et la contrainte $\sigma \cdot \underline{n}$:

$$\begin{cases} (\sigma_I \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = \sigma_n = k_n^+(1 - d_n) < [u_n] >_+ + k_n^- < [u_n] >_- \\ (\sigma_I \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t} = \sigma_t = k_t(1 - d_t) [u_t] \end{cases} \quad (3.8)$$

Les paramètres k_n et k_t représentent respectivement les pseudo-raideurs normales et tangentielles de l'interface. Les opérateurs $< \cdot >_+$ et $< \cdot >_-$ renvoient respectivement la partie positive et négative de la grandeur considérée.

On notera dans l'équation 3.8 la différence de comportement introduite pour l'ouverture et la fermeture de fissure pour σ_n . L'ouverture de fissure entraîne une diminution de la

raideur induite par le paramètre d_n tandis qu'à la fermeture de la fissure, la raideur initiale est récupérée.

Les variables d_n et d_t permettent de décrire l'endommagement de l'interface dans les directions \underline{n} et \underline{t} . Cette valeur varie de 0 pour une interface saine à 1 pour une séparation complète des plis (délaminage). L'énergie de déformation de l'interface peut s'écrire comme :

$$e_d = \frac{1}{2} \left((1 - d_n) k_n^+ < [\underline{u}_n] >_+ + k_n^- < [\underline{u}_n] >_- + (1 - d_t) k_t [\underline{u}_t] \right) \quad (3.9)$$

Les forces thermodynamiques associées aux endommagements d_n et d_t sont définies en dérivant l'énergie de déformation par rapport à d_n et d_t respectivement :

$$\begin{cases} Y_n = \frac{\partial e_d}{\partial d_n} = \frac{1}{2} k_n^+ < [\underline{u}_n] >_+^2 \\ Y_t = \frac{1}{2} k_t [\underline{u}_t]^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Par hypothèse, les variables d'endommagement d_n et d_t seront considérées comme égales et notées dès lors d . La force thermodynamique Y associée à d est définie en couplant Y_n et Y_t :

$$Y = \sup_{t < \tau} \left(Y_n^\alpha + (\gamma Y_t)^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (3.11)$$

α et γ sont des paramètres matériau qui permettent de moduler l'influence des modes d'ouverture de fissure. Classiquement, le coefficient α est pris égal à 1. Le paramètre γ est identifiable par des essais en mode II et III.

L'évolution de l'endommagement est donnée par une loi à effet retard [Allix et Deü, 1997], décrite par :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_C} \left(1 - e^{-a < f(Y) - d >_+} \right) \text{ et } d = \int \dot{d} dt & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.12)$$

τ_C et a sont des paramètres du modèle. Ils peuvent être assimilés au temps minimal avant rupture et au caractère plus ou moins fragile de la rupture. La fonction f est définie à partir des efforts thermodynamiques :

$$f(Y) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{Y - Y_0}{Y_C - Y_0} \right)^\alpha \quad (3.13)$$

Les valeurs Y_0 et Y_C sont des valeurs critiques correspondant respectivement à l'initiation de l'endommagement et à la rupture. Elles peuvent être reliées directement aux sauts de déplacements correspondants (c.f. équation 3.10).

La figure 3.4 présente ainsi l'évolution de la contrainte $(\sigma_I \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$ en fonction du saut de déplacement tangentiel $[\underline{U}]_n$. À noter que dans le cas de couplage entre les endommagements normaux et tangentiels, les contraintes $(\sigma_I \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$ dépendent à la fois des sauts de déplacements $[\underline{U}]_n$ et $[\underline{U}]_t$.

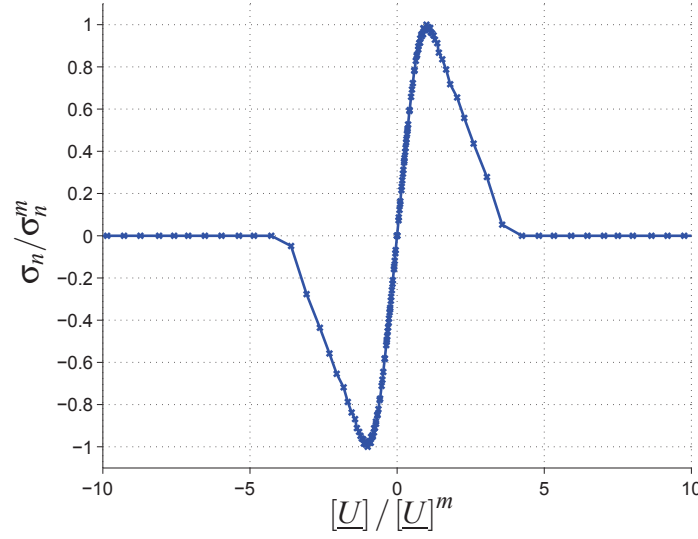


FIGURE 3.4: Loi de comportement tangentielle de l'interface

□ **Remarque :** Dans un cadre dynamique, l'utilisation d'une loi d'endommagement classique ne permet pas de prédire la vitesse de propagation du délaminage. Il existe en effet une vitesse limite, visible expérimentalement. L'utilisation d'une loi d'endommagement à taux limité, en bornant la vitesse d'évolution de l'endommagement, permet de reproduire les vitesses mesurées expérimentalement [Guimard *et al.*, 2010].

2.2 Discrétisation spatiale des équations

Une approximation éléments finis est utilisée pour résoudre le problème. Plis et interfaces sont considérés séparément.

Plis du stratifié La discrétisation des plis est assurée par des éléments finis linéaires. Dans les cas 2D étudiés ici, des éléments $Q4$ sont utilisés. Les déplacements sont alors approchés par :

$$\begin{cases} u_p(\underline{x}, t) = \mathbf{N}_l \{ \underline{U}(t) \} \\ \varepsilon(\underline{x}, t) = \mathbf{B}_l \{ \underline{U}(t) \} \end{cases} \quad (3.14)$$

\mathbf{N}_l et \mathbf{B}_l représentent respectivement les matrices des fonctions de forme et de leurs dérivées. $\{ \underline{U}(t) \}$ représente le vecteur des degrés de liberté en déplacement définis aux nœuds du maillage.

Interfaces délaminantes Un élément d'interface comporte 4 nœuds, correspondant aux nœuds des plis adjacents (c.f. figure 3.5). La discrétisation spatiale des interfaces est donc

directement liée à celle des plis. L'expression discrétisée du saut de déplacement $[\underline{u}]$ est obtenue à partir de l'équation 3.7. Les déplacements \underline{u}^+ et \underline{u}^- sont discrétisés à partir des degrés de liberté et des fonctions de forme des plis adjacents :

$$[\underline{u}] = \mathbf{L}\Phi\{\underline{U}(t)\} \quad (3.15)$$

Φ est une matrice contenant les fonctions de forme des éléments des plis et \mathbf{L} une matrice de localisation. Par analogie avec les éléments finis classiques, on notera $\mathbf{B}_i = \mathbf{L}\Phi$.

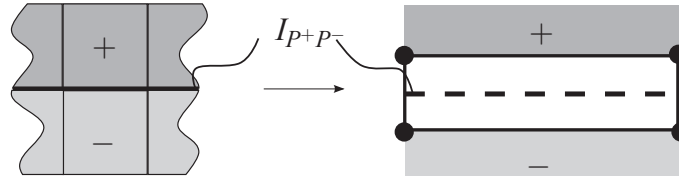


FIGURE 3.5: Définition d'un élément d'interface

Equation dynamique discrétisée Dans l'équation 3.1, il convient de séparer le comportement des interfaces et des plis. La discrétisation des plis conduit classiquement à la construction de matrices masse \mathbb{M} et raideur \mathbb{K} définies par :

$$\begin{cases} \mathbb{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_l^T \rho \mathbf{N}_l d\Omega \\ \mathbb{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_l^T \mathbb{C} \mathbf{B}_l d\Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

Le comportement des interfaces intervient dans la partie de l'équation relative à la matrice raideur \mathbb{K} . Comme dans [Pechnik, 2005] et [Guimard, 2009], un effort équivalent est calculé pour prendre en compte les interfaces délaminantes :

$$\underline{F}^i = \int_S \mathbf{B}_i^T \sigma \cdot \underline{n} dS \quad (3.17)$$

Il convient de traiter séparément les parties normale et tangentielle de la contrainte $\sigma \cdot \underline{n}$ afin de prendre en compte la différence de comportement (c.f. équation 3.8). Par exemple, la composante tangentielle des efforts de l'interface sera définie par :

$$\underline{F}_i = \left[\int_S \mathbf{B}_i^T (1-d) k_t \mathbf{B}_i dS \right] \{U(t)\} \quad (3.18)$$

Dans tous les cas, on peut se ramener à une expression du type :

$$\underline{F}^i = \mathbb{K}_i \{U(t)\} \quad (3.19)$$

où la matrice \mathbb{K}_i contient les différentes composantes du terme lié aux interfaces et prend en compte leur endommagement. En pratique, l'effort résultant $\underline{F}_i(t)$ est directement calculé sans construire la matrice \mathbb{K}_i .

L'équation dynamique discrétisée en espace conduit finalement à l'expression suivante :

$$\mathbb{M}\{\ddot{U}(t)\} + \mathbb{K}\{U(t)\} = \underline{F}^{ext}(t) - \underline{F}^i(t) \quad (3.20)$$

2.3 Discrétisation temporelle des équations

La discrétisation temporelle du problème est assurée en utilisant un schéma de Newmark [Newmark, 1959]. Les vitesses et déplacements au pas de temps t_{n+1} sont exprimés en fonction de la solution au pas de temps courant et au pas de temps précédent t_n par les relations :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{U}_n}_{^pU} + \beta \Delta t^2 \ddot{U}_{n+1} \\ \dot{U}_{n+1} = \underbrace{\dot{U}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}_n}_{^p\dot{U}} + \gamma \Delta t \ddot{U}_{n+1} \end{cases} \quad (3.21)$$

Les quantités pU et $^p\dot{U}$ sont appelées prédictors. Elles dépendent uniquement des quantités cinématiques calculées au pas de temps t_n précédent.

Ce schéma en temps est caractérisé par les coefficients β et γ qui définissent le type de schéma d'intégration utilisé. Un schéma explicite est caractérisé par $\beta = 1/2$ et $\gamma = 0$: ce schéma est utilisé dans les cas test présentés par la suite.

D'autre part, un schéma de Newmark explicite est conditionnellement stable. Le pas de temps Δt utilisé dans les calculs doit être inférieur à une valeur critique notée Δt_c . Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.

L'application du schéma de Newmark à l'équation 3.20 conduit à l'expression discrétisée en temps suivante :

$$(\mathbb{M} + \beta \Delta t^2 (\mathbb{K} + \mathbb{K}_i)) \{\ddot{U}\}_{n+1} = \underline{F}_{n+1}^{ext} - (\mathbb{K} + \mathbb{K}_i) \{^pU\}_{n+1} \quad (3.22)$$

Dans le cas d'un schéma explicite, l'effort \underline{F}^i dépend directement de la solution au pas n précédent. L'endommagement éventuel dans les interfaces peut ainsi être calculé directement à partir de la solution au pas de temps n . La discrétisation en temps de l'endommagement (c.f. équation 3.12) conduit à l'écriture suivante :

$$\begin{cases} d_{n+1} = d_n + \frac{\Delta t}{\tau_C} \left(1 - e^{-a < f(Y_{n+1}) - d_n >_+} \right) & \text{si } d_{n+1} < 1 \\ d_{n+1} = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.23)$$

3 Contraintes liées à l'utilisation du méso-modèle

Pour représenter correctement l'initiation et la propagation du délaminage, une attention particulière doit être portée à la discrétisation temporelle et spatiale du problème à traiter.

3.1 Définition du pas de temps de calcul

Le pas de temps du calcul est subordonné ici à deux conditions, l'une numérique, l'autre physique. D'une part, le choix d'un schéma de résolution temporel explicite exige un pas de temps de calcul inférieur au pas de temps critique du schéma. Ce choix assure un

calcul stable. D'autre part, la loi à effet retard qui gère l'évolution de l'endommagement dans les interfaces introduit un temps caractéristique τ_c . Le pas de temps choisi doit dès lors prendre en compte cette grandeur afin de décrire de façon pertinente l'évolution de l'endommagement dans l'interface.

3.1.1 Calcul du pas de temps critique

Dans un premier temps, intéressons-nous au pas de temps critique du schéma de résolution de Newmark explicite. Il est calculé à partir de la plus grande valeur propre du système [Belytschko et Hughes, 1983]. Afin de simplifier le calcul de ce pas de temps critique, cette valeur propre est classiquement majorée par la plus grande valeur propre parmi les éléments, ou encore par $\Delta t_c < l/c$, où l est la longueur caractéristique du plus petit élément du maillage et c la vitesse des ondes dans le matériau.

Dans le problème que nous souhaitons traiter, deux types d'éléments cohabitent, des éléments d'interface, sans épaisseur et sans masse, et des éléments classiques $Q4$. L'utilisation directe de la formule ci-dessus n'est dès lors plus possible. Un calcul spécifique du pas de temps critique doit être mis en place.

A titre d'exemple, considérons une structure barre de section S , encastree à une extrémité et soumise à un effort dynamique (c.f. figure 3.6), maillée par trois éléments barre. Le module d'Young dans les barres est noté E , la masse volumique ρ . Des éléments de type interface, sans épaisseur physique, sont insérés entre chaque élément barre. La raideur de l'interface est notée k .

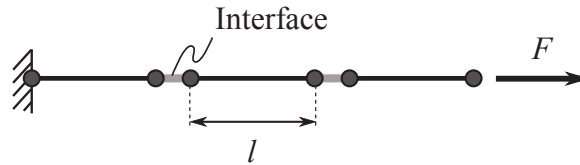


FIGURE 3.6: Définition du problème dynamique unidimensionnel

La prise en compte des interfaces nécessite la construction de la matrice \mathbb{K}_i décrite dans l'équation 3.19. La matrice assemblée du problème conduit ainsi à l'expression :

$$\mathbb{K}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} + kS & -kS & 0 & 0 & 0 \\ -kS & \frac{ES}{l} + kS & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{l} & \frac{ES}{l} + kS & -kS & 0 \\ 0 & 0 & -kS & \frac{ES}{l} + kS & -\frac{ES}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & \frac{ES}{l} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Pour obtenir un calcul simple du pas de temps critique, on va se ramener au calcul des valeurs propres élémentaires. Pour cela, la raideur d'une interface est scindée à part égale entre les deux éléments barre adjacents. Les matrices raideur et masse de l'élément modifié s'écrivent alors :

$$\mathbb{K}_{eq}^e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} + \frac{kS}{2} & -\frac{kS}{2} \\ -\frac{kS}{2} & \frac{ES}{l} + \frac{kS}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbb{M}_{eq}^e = \rho S l \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La valeur propre de l'élément ainsi modifié conduit alors à une expression du pas de temps critique prenant en compte la raideur de l'interface :

$$\Delta t_c^m = l \sqrt{\frac{\rho}{E + \frac{kl}{S}}} \quad (3.26)$$

L'utilisation de cette formule pour le calcul du pas de temps critique conduit à des calculs stables pour le problème présenté ici.

A titre de comparaison, sans prise en compte des éléments d'interface, le calcul classique du pas de temps critique conduit à la valeur du pas de temps critique classique pour des éléments barre, soit :

$$\Delta t_c^c = l \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Cette valeur du pas de temps est plus grande que Δt_c^m : l'utilisation de ce pas de temps conduit donc à des calculs instables.

On pourra noter dans l'équation 3.26 que plus l'interface est raide, plus le pas de temps critique est faible. A l'inverse, pour une interface très souple, on se rapproche du pas de temps critique classique Δt_c^c , la valeur limite $k = 0$ correspondant à l'absence d'interface dans le problème.

Cette estimation du pas de temps, même si elle se révèle exacte, nécessite la construction de la matrice raideur \mathbb{K}_i des interfaces, ce qui est d'une part inutile dans le calcul à suivre, et d'autre part coûteux en temps de calcul. Une estimation directe de ce pas de temps critique peut être réalisée par la méthode du pas de temps nodal utilisée par exemple dans le logiciel éléments finis Radioss [Pechnik, 2005] :

$$\Delta t_c < \min_{i,j} \sqrt{\frac{2m_{ij}}{k_{ij}}} \quad (3.27)$$

Les coefficients m_{ij} et k_{ij} représentent respectivement les termes de la matrice masse et raideur du problème étudié. Les matrices masses utilisées dans les calculs explicites étant diagonales, ce calcul est rapide car il nécessite uniquement le calcul de la diagonale de la matrice \mathbb{K}_i .

3.1.2 Prise en compte de la grandeur τ_c

La grandeur τ_c peut être assimilée à un temps caractéristique d'endommagement de l'interface. En effet, la loi d'endommagement à effet retard retenue pour l'interface introduit, *via* ce paramètre, une vitesse d'endommagement maximale $\dot{d} = 1/\tau_c$. Ainsi, le temps minimal pour que l'endommagement d'un point de l'interface passe de 0 à 1 correspond τ_c .

Ainsi, lors du choix d'un pas de temps de calcul, il convient de vérifier que celui-ci est inférieur à la grandeur τ_c . De cette façon, l'évolution de l'endommagement peut être suivie au cours du temps avec précision.

Les valeurs prises pour τ_c sont typiquement de l'ordre de $10^{-3}ms$. Dans les exemples présentés par la suite, les pas de temps critique sont de l'ordre de $10^{-5}ms$. Une discrétisation pertinente de l'évolution de l'endommagement est donc assurée.

3.2 Définition du maillage

Le suivi du délaminage dans les interfaces nécessite de décrire correctement l'évolution de l'endommagement dans la *process zone*, et donc de prêter une attention particulière à la discrétisation spatiale des interfaces. Une estimation de cette longueur pour une rupture en mode II est donnée dans [Guimard, 2009] :

$$l_a = \sqrt{\frac{Eh \left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right)}{k}} \quad (3.28)$$

où h est l'épaisseur du pli, E est le module d'Young des plis, k la raideur de l'interface, c la vitesse de propagation des ondes dans les plis, \dot{a} la vitesse d'avancée du délaminage dans l'interface.

La longueur de la *process zone* est ainsi directement liée à la raideur de l'interface : plus cette interface est raide, plus l_a est petite et donc plus la rupture sera brutale.

□ **Remarque :** Dans les gammes de vitesses étudiées ici, la longueur l_a de la *process zone* est indépendante de la vitesse de propagation du délaminage.

Considérons l'exemple présenté dans la figure 3.7 (a), constitué de deux plis et d'une interface. Le délaminage s'initie au niveau des conditions aux limites et se propage vers le centre de la plaque (c.f. figure 3.7 (b)).

La figure 3.8 présente d'une part l'évolution de l'endommagement au point d'initiation du délaminage et d'autre part l'évolution de l'endommagement le long de l'interface à l'instant d'initiation du délaminage. Les caractéristiques du calcul conduisent à une estimation de la longueur l_a de la *process zone* de $2mm$. Pour des maillages suffisamment fins, on retrouve la valeur de l_a calculée analytiquement (c.f. figure 3.8 (b)).

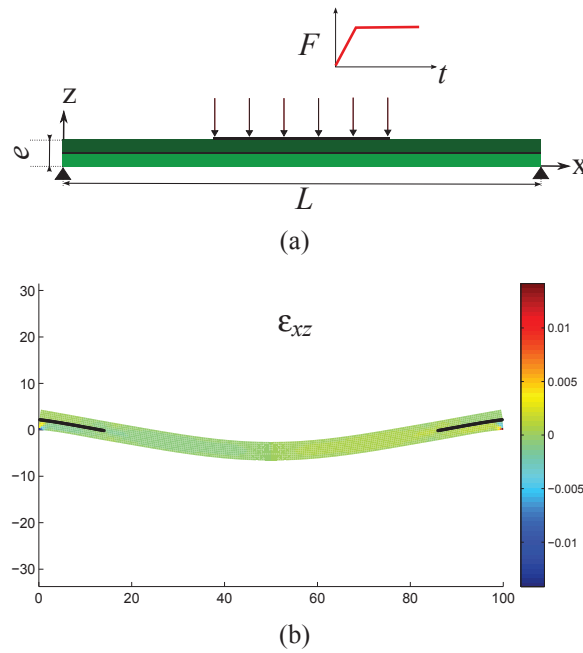


FIGURE 3.7: Définition du problème test et zone délaminée en fin de calcul

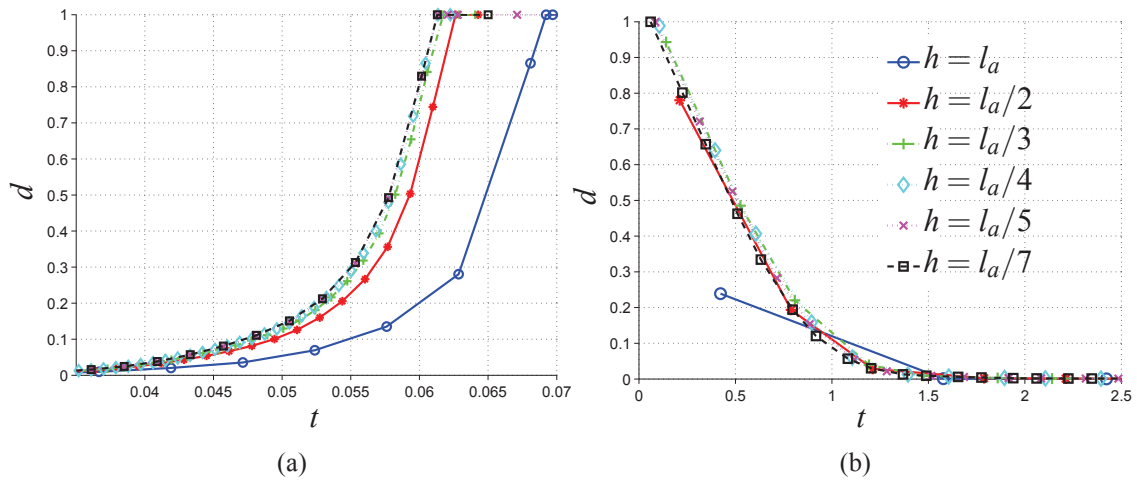


FIGURE 3.8: Étude de raffinement de maillage

Il est important de remarquer que le maillage à utiliser doit être très fin : à partir d'éléments de taille $l_a/3$, les résultats convergent (c.f. figure 3.8 (a)).

□ **Remarque :** La corrélation entre longueur analytique et calculée de la *process zone* est due ici au fait que le problème traité dans l'exemple comporte seulement 2 plis. Le problème traité est donc proche du cas considéré pour calculer la longueur l_a .

4 Bilan et objectifs

Dans cette partie, les difficultés liées à la prédiction du délaminage dans un cadre dynamique ont été soulignées. Les tailles de maille et les pas de temps d'un calcul explicite conduisent rapidement à des coûts de calcul prohibitifs, aussi bien en termes de degrés de liberté que de temps de calcul. L'objectif des travaux présentés par la suite est de proposer une approche permettant de réduire ces coûts de calcul tout en conservant une prédiction précise du délaminage.

La longueur caractéristique de la *process zone* est très faible devant les dimensions de la structure. C'est essentiellement cette zone qui doit être modélisée finement afin de prédire la propagation du délaminage. Au cours d'un calcul tel que celui présenté dans la partie 1, une grande partie de la structure conserve un comportement purement élastique pendant une durée relativement importante à l'échelle du calcul. Aussi, une représentation de type méso-modèle n'est pas nécessaire pendant tout le calcul.

Enfin, on peut remarquer qu'une fois le délaminage initié, des zones de la structure se retrouvent délaminées, mais ne voit plus leur endommagement modifié. Là encore, une modélisation de type méso-modèle devient superflue.

L'approche que l'on souhaite mettre en place est basée sur ces différentes observations. L'objectif final est d'utiliser une représentation globale continue de type coque sur l'ensemble de la structure. Cette modélisation, qui n'est jamais modifiée au cours du calcul, permet de conserver les habitudes de simulation et de maillage couramment utilisées chez Airbus et de réduire les coûts de calcul dans les zones non endommagées.

Les zones d'initiation et de propagation du délaminage étant très limitées dans l'espace, elles peuvent être modélisées séparément sous-forme de *patches*. Cette approche assure l'utilisation d'un modèle approprié dans les zones critiques de la structure tout en limitant au maximum le nombre de degrés de liberté du problème sans remaillage. Ces *patches* seront activés pour suivre le délaminage dans la structure.

Les zones délaminées lors d'un choc étant du même ordre de grandeur que la structure elle-même, il est important de prévoir une procédure pour désactiver les *patches* qui seront devenus inutiles et pour prendre en compte la fissure créée directement dans le maillage global. Dans le cas contraire, l'ensemble de la structure se retrouverait très rapidement maillée finement.

Plusieurs points doivent alors être étudiés. D'une part, les pas de temps de calcul pour les schémas explicites dépendent de la modélisation utilisée. L'utilisation du méso-modèle conduit notamment à des pas de temps très faibles. Dans des maillages de type coque, les pas de temps de calcul sont plus grands. Pour en tirer parti, une approche telle que la méthode multi pas de temps définie dans [Gravouil et Combescure, 2001] peut être utilisée.

D'autre part, la modélisation de type coque doit pouvoir assurer un couplage correct avec une modélisation 3D et permettre la prise en compte de fissure dans l'épaisseur. Pour

ces raisons, des éléments de coque 3D semblent plus appropriés.

La suite de cette partie s'organise de la façon suivante. Dans un premier temps, l'approche multi pas de temps est adaptée à l'utilisation du méso-modèle. Une modélisation de type coque est ensuite proposée. Le couplage du méso-modèle et du modèle de coque est testé. Enfin, une approche multi-échelle en temps et en espace est proposée, selon le principe décrit ci-dessus.

Prédiction du délaminage par une méthode de décomposition de domaine multi pas de temps

Dans ce chapitre, la méthode de décomposition de domaine multi pas de temps proposée dans [Gravouil et Combescure, 2001] est étudiée et adaptée au cas de la prédiction de l'initiation et de la propagation du délaminage en dynamique transitoire.

Sommaire

1	Définition du problème	82
1.1	Décomposition en sous-domaines du problème	82
1.2	Équations du problème	82
2	Application au cas test 2D	87
2.1	Définition des maillages et des calculs	87
2.2	Comparaison des résultats	89
3	Bilan et limitations	91

1 Définition du problème

Dans cette section, le problème de choc décrit dans la partie 3 est résolu en utilisant la méthode multi-pas de temps [Gravouil et Combescure, 2001]. Les équations de la méthode sont adaptées au cas du délaminage.

Afin de ne pas confondre *interfaces* délaminantes du méso-modèle et *interfaces* entre sous-domaines, ces dernières seront par la suite désignées par *frontières*.

1.1 Décomposition en sous-domaines du problème

La première étape consiste à décomposer la structure plaque en sous-domaines et frontières. Par la suite, les sous-domaines seront indicés par k et leur nombre total sera noté s . Au vue des particularités de la structure, les sous-domaines sont définis de telle sorte que les frontières entre sous-domaines soient perpendiculaires à la fibre moyenne de la plaque (c.f. figure 4.1). Les frontières correspondent alors à des sections de la plaque. De plus, chaque sous-domaine est assimilable à une plaque stratifiée.

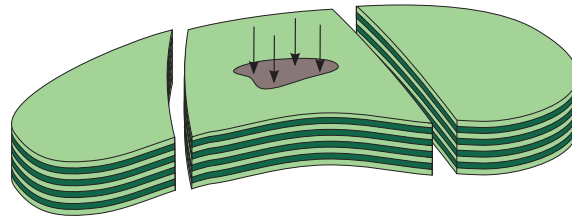


FIGURE 4.1: Décomposition en sous-domaines du stratifié

Le maillage est réalisé séparément dans chaque sous-domaine. La discrétisation des plis peut être différente d'un sous-domaine à l'autre : les maillages des plis peuvent être non coïncidents sur les frontières. Cependant, afin de suivre les délaminages dans la structure, les interfaces doivent être compatibles entre les domaines.

1.2 Équations du problème

Dans chaque sous-domaine, les équations du problème sont celles précisées dans l'équation 3.22. L'application de la méthode multi pas de temps conduit alors au système d'équation :

$$\begin{cases} \forall k \in [1, s], (\mathbb{M}^k + \beta_k \Delta t_k^2 \mathbb{K}^k) \{\ddot{U}\}_{n_k+1} = \begin{matrix} F_{n_k+1}^{ext} - F_{n_k+1}^i \\ -\mathbb{K}^k \{^p U\}_{n_k+1} + \mathbb{C}^{kT} \{\Lambda\}_{n_k+1} \end{matrix} \\ \sum_k \mathbb{C}^k \{U^k\}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Comme proposé dans [Gravouil et Combescure, 2001], le problème est alors résolu en deux étapes, en séparant la solution en accélération en deux parties (c.f. équations 2.53).

Sur une stratégie multi-échelle d'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire

Dans un premier temps, les problèmes d'équilibre dynamique sont résolus séparément dans chaque sous-domaine (problème *libre*) puis liés entre eux en imposant la continuité des vitesses aux frontières (problème *lié*).

L'application de l'équation 2.53 au schéma de Newmark défini dans l'équation 3.21 conduit à une partition des déplacements et vitesses en parties libres et liées :

$$\begin{cases} \underline{U}_{n_k+1}^k = \underbrace{p\underline{U}_{n_k+1}^k + \beta_k \Delta t_k^2 \ddot{U}_{n_k+1}^{k,Free}}_{\underline{U}_{n_k+1}^{k,Free}} + \underbrace{\beta_k \Delta t_k^2 \ddot{U}_{n_k+1}^{k,Link}}_{\underline{U}_{n_k+1}^{k,Link}} \\ \underline{\dot{U}}_{n_k+1}^k = \underbrace{p\underline{\dot{U}}_{n_k+1}^k + \gamma_k \Delta t_k \ddot{U}_{n_k+1}^{k,Free}}_{\underline{\dot{U}}_{n_k+1}^{k,Free}} + \underbrace{\gamma_k \Delta t_k \ddot{U}_{n_k+1}^{k,Link}}_{\underline{\dot{U}}_{n_k+1}^{k,Link}} \end{cases} \quad (4.2)$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un schéma de résolution explicite. Dans ce cas là, $\beta = 0$ et donc les déplacements dépendent uniquement de la solution au pas de temps précédent. Ceci a une conséquence directe sur le calcul des efforts d'interface \underline{F}^i qui peuvent être exprimés en fonction du saut de déplacement (c.f. équation 3.19) : ils sont directement définis par la solution au pas de temps précédent, et donc par la partie libre des déplacements $\underline{U}_{n_k+1}^{k,Free}$. Ces efforts apparaissent donc uniquement dans l'équation du problème libre, ce qui permet de simplifier le problème. Les interfaces délaminales n'apparaissent pas en effet dans le problème lié.

Le problème à résoudre prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \text{Problème libre : } \quad & \forall k \in [1, s], \mathbb{M}^k \underline{\ddot{U}}_{n_k+1}^{k,Free} = \underline{F}_{n_k+1}^{ext} - \underline{F}_{n_k+1}^i - \mathbb{K}^k p \underline{U}_{n_k+1}^k \\ \text{Problème lié : } \quad & \forall k \in [1, s], \mathbb{M}^k \underline{\ddot{U}}_{n_k+1}^{k,Link} = \mathbb{C}^{kT} \underline{\Delta}_{n_k+1} \\ & \underline{\Delta}_{n_k+1} = \mathbb{H}^{-1} \underline{B}_{n_k+1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La matrice \mathbb{H} est une matrice globale sur l'ensemble de la structure, et est définie par :

$$\mathbb{H} = - \sum_k \gamma_k \Delta t_k \mathbb{C}^k (\mathbb{M}^k)^{-1} \mathbb{C}^{kT} \quad (4.4)$$

D'autre part, le vecteur \underline{B}_{n_k+1} mesure l'écart des vitesses calculées pour le problème libre de part et d'autre de la frontière :

$$\underline{B}_{n_k+1} = \sum_k \mathbb{C}^k \underline{\dot{U}}_{n_k+1}^{k,Free} \quad (4.5)$$

Ainsi, pour le problème libre, les équations à résoudre sont identiques à celles présentées dans le chapitre 3. Pour la résolution du problème lié, l'utilisation de maillages non conformes pour les plis et de pas de temps différents dans les sous-domaines doit être considérée.

1.2.1 Traitement de maillages incompatibles

Considérons deux sous-domaines adjacents A et B dont les maillages sont incompatibles, i.e. les nœuds de part et d'autre de la frontière ne sont pas coïncidents (c.f. figure 4.2). On pourra cependant noter que, pour suivre le délaminage, les interfaces sont compatibles. L'équation de continuité des vitesses 4.1 en un point M de la frontière Γ peut s'écrire sous la forme :

$$\forall M \in \Gamma, \dot{u}^A(M) = \dot{u}^B(M) \quad (4.6)$$

Le premier point consiste à définir une discrétisation de la frontière Γ entre les sous-domaines. Des raccords *mortar* ou *optimum* peuvent être utilisés [Herry, 2002, Faucher et Combescure, 2003]. Dans le cas d'un raccord *mortar* (c.f. figure 4.2(a)), la discrétisation de l'interface est fixée par le maillage le plus fin. Pour un raccord *optimum*, les deux maillages sont pris en compte et la discrétisation de la frontière correspond à la réunion des deux maillages sur la frontière (c.f. figure 4.2(b)).

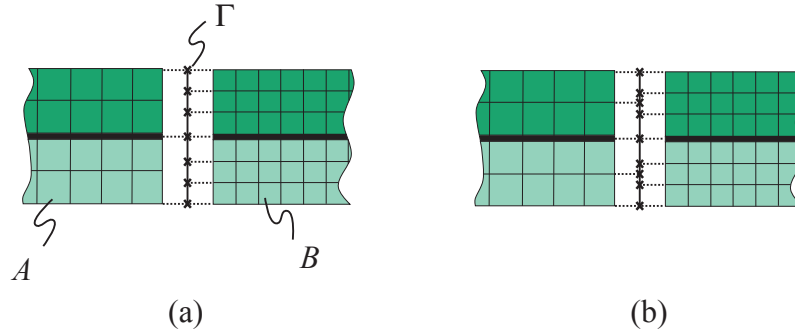


FIGURE 4.2: Discretisation des frontières pour des maillages des plis non conformes (a) mortar, (b) optimum

Le second point à prendre en compte est l'estimation des vitesses sur les nœuds de la frontière. Pour cela, il suffit d'utiliser les fonctions de forme des éléments du maillage. Ceci revient dans le cas présent à réaliser des interpolations linéaires en espace des vitesses des nœuds les plus proches. Ces interpolations sont prises en compte lors de la construction des matrices de localisation \mathbb{C} associées aux différents domaines.

Par la suite, des raccords de type *mortar* seront utilisés.

1.2.2 Traitement de pas de temps de calcul différents

Considérons un cas où des pas de temps différents sont utilisés dans les sous-domaines. Les équations 4.3 doivent être résolues à chaque pas de temps t_{n_k} . Notons Δt_k^c le pas de temps critique de calcul de chaque sous-domaine k . Afin de disposer d'instantanés de coïncidence au cours du calcul [Gravouil et Combescure, 2001], les pas de temps de chaque sous-domaine sont alors calculés à partir du pas de temps minimal sur l'ensemble des

sous-domaine, noté Δt_{min} (c.f. figure 4.3). Ils sont déterminés de telle sorte que :

$$\forall k \in [1, s], \exists N_k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \begin{cases} \Delta t_k < \Delta t_k^c \\ \Delta t_k = N_k \min_s (\Delta t_s) = N_k \Delta t_{min} \end{cases} \quad (4.7)$$

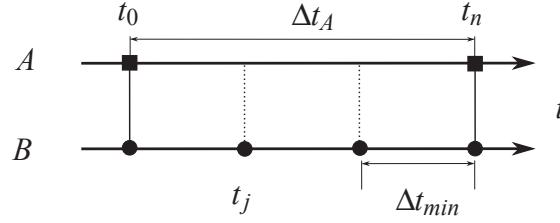


FIGURE 4.3: Discretisation temporelle dans les sous-domaines A et B

Le problème lié devant être résolu sur tous les pas de temps les plus fins, les solutions en vitesse pour l'ensemble des sous-domaines doivent être connues à chaque piquet de temps de calcul t_j du domaine le plus fin. Dans le domaine A , il est donc nécessaire d'évaluer les vitesses aux pas de temps t_j de l'échelle temporelle fine. Ces vitesses n'étant pas calculées, une interpolation linéaire en temps est réalisée entre les quantités calculées, similaire à celle adoptée dans les méthodes de sous-cyclage [Belytschko *et al.*, 1979] :

$$\dot{U}_j^k = \frac{t_n - t_j}{t_n - t_0} \dot{U}_0^k + \frac{t_j - t_0}{t_n - t_0} \dot{U}_n^k \quad (4.8)$$

Les multiplicateurs de Lagrange Λ peuvent ainsi être évalués sur l'échelle fine de discrétisation en temps (c.f. équation 4.3).

1.2.3 Mise en œuvre numérique

L'algorithme de résolution est présenté dans l'algorithme 1. L'avancée en temps se fait sur le pas de temps minimal du calcul. Pour avoir une solution complète dans le sous-domaine considéré, le problème lié doit être résolu pour chaque pas de temps de la discrétisation temporelle du sous-domaine. Ainsi, pour obtenir la solution complète dans les domaines possédant le pas de temps de calcul minimal, la solution libre des sous-domaines plus grossiers doit être estimée. Dans ces derniers, le problème lié n'est résolu qu'aux pas de temps t_n de coïncidence entre les discrétisations temporelles. Il faut alors disposer des solutions libres dans les sous-domaines fins.

Algorithm 1 Méthode multi pas de temps appliquée à une structure stratifiée

Initialisation :

- ☐ Chargement des maillages
- ☐ Calcul des pas de temps critiques de chaque sous-domaine
- ☐ Calcul des pas de temps de calcul

Boucle sur les pas de temps les plus fins**for** $t_j = 0 \dots \Delta t_{min} \dots T$ **do**Mise à jour du marqueur temporel général : $j_g = j_g + 1$ **Résolution des problèmes libres :**

Boucle sur les sous-domaines

for $k = 1 \dots N_{sd}$ **do****if** $j_k < j_g$ **then**

- ☐ Calcul des efforts d'interface
- ☐ Résolution de l'équilibre dynamique : $\mathbb{M}^k \ddot{\underline{U}}_{n_k+1}^{kFree} = \underline{F}_{n_k+1}^{ext} - \underline{F}_{n_k+1}^i - \mathbb{K}^k \underline{U}^{pk}$
- ☐ Mise à jour du marqueur temporel local : $j_k = j_k + N_k$

else

- ☐ Interpolation des vitesses sur les pas de temps non calculés

end if**end for****Résolution du problème lié :**

- ☐ Calcul des multiplicateurs de Lagrange : $\underline{\Lambda}_{j_g} = \mathbb{H}^{-1} \underline{B}_{j_g}$

for $k = 1 \dots N_{sd}$ **do****if** $j_k < j_g$ **then**

- ☐ Calcul des parties "liées" de la solution : $\mathbb{M}^k \ddot{\underline{U}}_{n_k+1}^{kLink} = \mathbb{C}^{kT} \underline{\Lambda}_{n_k+1}$
- ☐ Mise à jour de la solution : $\ddot{\underline{U}}_{j_g}^k = \ddot{\underline{U}}_{j_g}^{k,Free} + \ddot{\underline{U}}_{j_g}^{k,Link}$

end if**end for****end for**

2 Application au cas test 2D

L'objectif de cette partie est de valider l'approche de décomposition de domaine dans le cas d'une structure stratifiée modélisée par le méso-modèle. On vérifiera notamment si l'utilisation de pas de temps différents dans les sous-domaines, ou des discrétisations différentes, permettent de suivre correctement l'évolution du délaminage à travers les différents sous-domaines.

Considérons le même problème que celui proposé dans la partie 3.2 et rappelé dans la figure 4.4. La plaque est composée de deux plis de composite et d'une interface délaminante. Un chargement dynamique est appliqué au centre de la plaque.

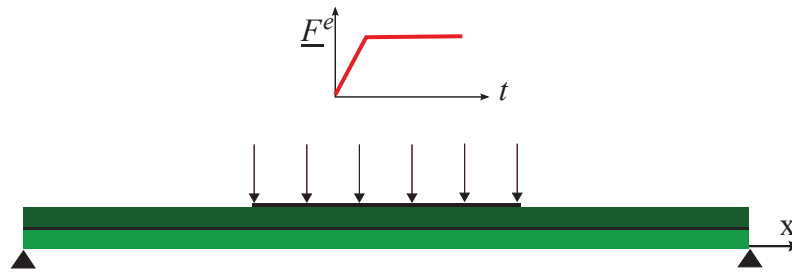


FIGURE 4.4: Définition du problème traité

2.1 Définition des maillages et des calculs

Les maillages utilisés sont résumés dans la figure 4.5. Le maillage de référence (c.f. figure 4.5(a)) est un maillage classique, les deux plis sont maillés séparément. Les deux maillages suivants sont réalisés en séparant le problème en trois sous-domaines. Dans le premier cas, des maillages identiques sont utilisés dans les trois sous-domaines (c.f. figure 4.5(b)). On désignera par la suite cette discrétisation par le terme de maillage compatible. Dans le second cas, un maillage plus grossier est utilisé dans le domaine central (c.f. figure 4.5(c)).

Maillages	Désignation calcul	Pas de temps	Nombre de degrés de liberté
Référence	ref	Δt_r	11232
Compatible	Comp1 Comp2	$\forall i, \Delta t_i = \Delta t_r$ $\Delta t_2 = \Delta t_r, \Delta t_1 = \Delta t_3 = 1/2\Delta t_r$	11266
Incompatible	Incomp1	$\Delta t_i = \Delta t_r$	9208

TABLE 4.1: Définition des calculs multi pas de temps

Les différents calculs sont résumés dans le tableau 4.1. Pour les maillages compatibles, la méthode est testée avec des pas de temps égaux dans les trois sous-domaines, puis avec des pas de temps plus faibles que le pas de temps critique dans les deux sous-domaines aux extrémités. Ceci permet de valider l'interpolation temporelle des vitesses qui est réalisée.

Dans le cas des maillages incompatibles, on pourra remarquer que la finesse des maillages varie peu entre les sous-domaines. En effet, afin de représenter correctement la cinématique de la plaque, le maillage doit rester fin, même au centre. De plus, le délaminage se propageant entre les sous-domaines, il faut un maillage suffisamment fin pour représenter correctement son avancée dans la structure. Comme précédemment, des pas de temps coïncidents puis différents sont utilisés dans les sous-domaines.

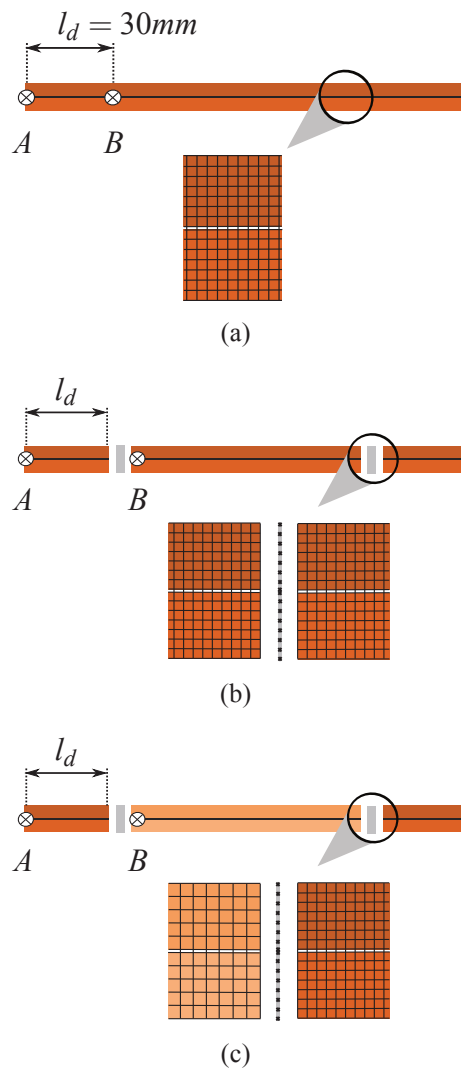


FIGURE 4.5: Définition des maillages (a) de référence, (b) compatible, (c) incompatible

2.2 Comparaison des résultats

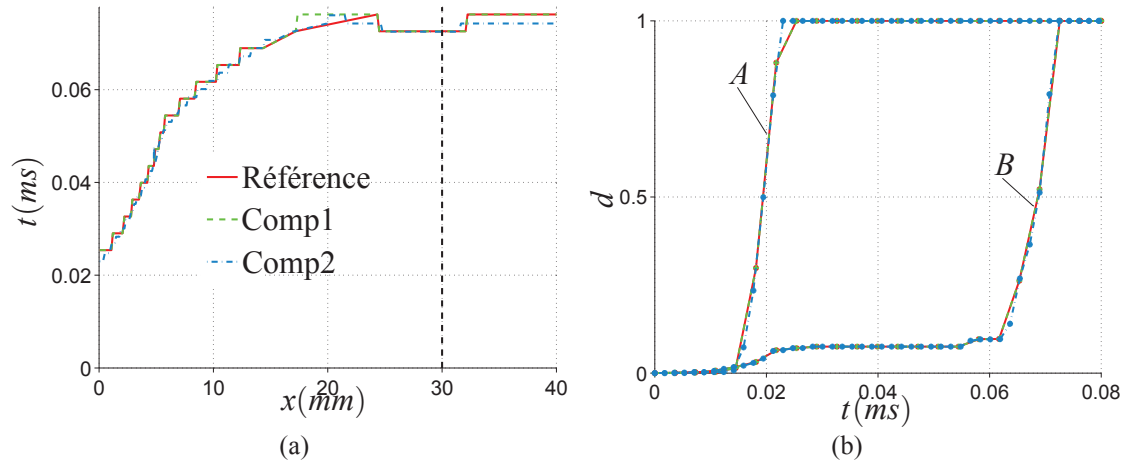


FIGURE 4.6: Evolution du front de délaminage (a) et de l'endommagement aux points A et B (b) dans le cas de maillages compatibles

Dans le cas de maillages compatibles, les résultats obtenus en appliquant la méthode de décomposition de domaine sont identiques à ceux du calcul de référence. La figure 4.6 (a) présente la propagation du délaminage dans l'interface, tandis que la figure 4.6(b) présente l'évolution de l'endommagement en deux points de l'interface définis dans la figure 4.5. Le point A correspond au point d'initiation du délaminage ; le point B correspond au premier point situé après la frontière entre sous-domaines.

La présence d'une frontière ne présente aucune difficulté pour le suivi du délaminage : l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine permet de suivre le délaminage d'un sous-domaine à l'autre. L'utilisation de pas de temps différents dans les différents domaines n'entraîne pas de difficultés particulières. De plus, les déformations au niveau de la frontière ne présentent pas de discontinuité (c.f. figure 4.8).

Pour les exemples utilisant des maillages incompatibles, les mêmes observations peuvent être faites (c.f. figure 4.7). Les différences qui apparaissent au niveau de l'évolution de l'endommagement restent limitées et apparaissent quand le délaminage atteint la zone centrale, maillée grossièrement. Le retard du délaminage est alors limité à quelques pas de temps.

Ainsi, il apparaît à travers ces exemples qu'imposer la continuité des vitesses entre les domaines est suffisant pour transmettre les informations relatives à l'interface d'un sous-domaine à l'autre.

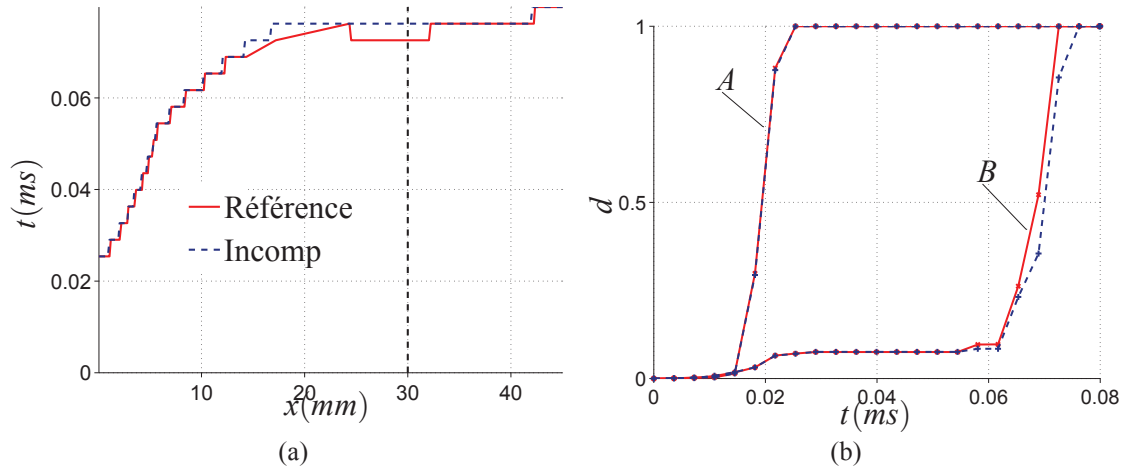


FIGURE 4.7: Evolution du front de délaminage (a) et de l'endommagement aux points A et B (b) dans le cas de maillages incompatibles

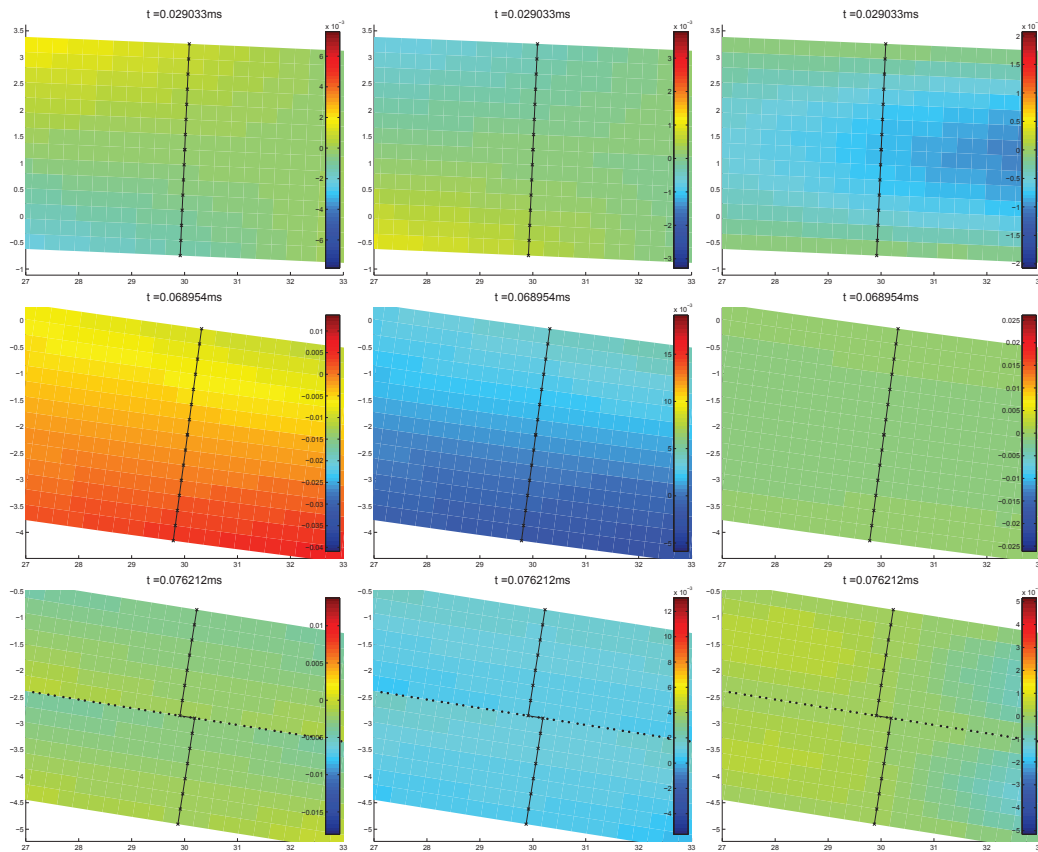


FIGURE 4.8: Évolution au cours du temps des déformations sur les frontières entre sous-domaines (gauche : ϵ_{xx} , milieu : ϵ_{zz} , droite : ϵ_{xz})

3 Bilan et limitations

L'utilisation de la méthode multi pas de temps pour le suivi du délaminage conduit à des résultats satisfaisants. L'initiation du délaminage est prédit avec précision, et la propagation de la fissure ainsi créée entre les sous-domaines est possible.

Cependant, cette approche seule ne peut suffire à traiter des problèmes de grande taille. En effet, la bonne représentation de la cinématique du problème impose l'utilisation d'un maillage fin : le nombre de degrés de liberté reste alors élevé. Le gain en temps de calcul est négligeable : l'utilisation d'un maillage raffiné impliquant des pas de temps de calcul proches, voire identiques, à ceux utilisés dans les zones de présence de délaminage.

Afin de gagner en degrés de liberté et en temps de calcul, une modélisation spécifique des zones non endommagées est alors nécessaire. Étant donné le type de structure étudiée, une représentation de type plaque ou coque permet de réduire le nombre de degrés de liberté ainsi que les pas de temps de calcul.

Choix d'une représentation macroscopique de coque 3D

Dans ce chapitre, une représentation de l'échelle globale de coque est définie. Dans un premier temps, les champs de contrainte et de déplacement exacts dans l'épaisseur de la plaque sont construits de façon analytique. Un élément permettant de les représenter correctement est alors choisi et validé.

Sommaire

1	Objectifs	94
2	Reconstruction des contraintes et déplacements 3D	94
2.1	Reconstruction du champ de contrainte	95
2.2	Reconstruction du champ de déplacement	98
3	Choix d'un élément	102
3.1	Définition de l'élément	102
3.2	Validation	103
4	Couplage des éléments $Q16$ avec le méso-modèle	109
4.1	Équations	109
4.2	Application	109
5	Bilan	118

1 Objectifs

L'objectif de cette partie est de choisir un élément permettant de représenter le comportement du stratifié à l'échelle macroscopique. Au vu des dimensions caractéristiques des structures étudiées, le stratifié peut être assimilé à une coque. L'élément défini dans cette partie sera utilisé pour réaliser un maillage global de la structure.

De plus, le couplage d'un élément de type coque avec une modélisation 3D du stratifié nécessite de prêter une attention particulière à la qualité du raccord entre les modèles. En effet, une mauvaise description du champ de contrainte à ce niveau peut entraîner une concentration de contraintes, et donc un départ de délaminage parasite dans le modèle 3D.

Le choix d'un élément 3D avec des inconnues de type déplacements est ainsi privilégié. Pour assurer son utilisation sur des zones importantes, l'élément doit être capable de représenter de façon quasi-exacte les contraintes et la cinématique de la structure mince étudiée. Une étude menée en statique a ainsi servi de base au choix de l'élément fini 3D correspondant. L'élément a été testé sur des cas simples afin de vérifier son comportement pour les situations 2D en déformations planes simplifiées étudiées ici

2 Reconstruction des contraintes et déplacements 3D

Soit une plaque stratifiée d'épaisseur constante $2h$ décrite par sa surface moyenne Σ_m (c.f. figure 5.1). Le nombre de plis de la plaque sera noté n_p . Cette plaque est soumise sur ces surfaces supérieure et inférieure, Σ^+ et Σ^- , à des chargements surfaciques p . Une partie de sa surface latérale Σ^l , notée Σ_f^l est soumise à un effort \underline{F}^l ; sur l'autre partie, notée Σ_u^l , les déplacements sont imposés.

Le problème à résoudre s'écrit alors :

- Equation d'équilibre : $\text{div}\sigma = \underline{0}$
- Chargements sur Σ^+ : $\sigma^+ = \underline{\tau}_c^+ + p^+ \underline{z}$
- Chargements sur Σ^- : $\sigma^- = \underline{\tau}_c^- + p^- \underline{z}$
- Chargements sur Σ_f^l : $\underline{F}^l = p^l \underline{z} + \underline{h}$
- Déplacements imposés Σ_u^l : $\underline{U} = 0, (\underline{U} \cdot \underline{z})_{,n} = 0$

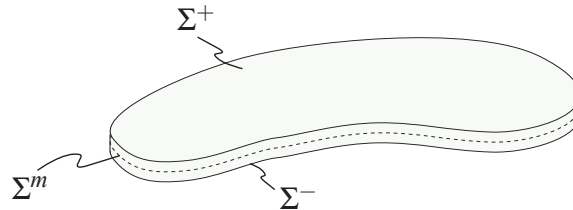


FIGURE 5.1: Géométrie de la plaque

Les équations de la théorie de Kirchhoff-Love sont le point de départ de l'étude menée ici. Appliquées à une structure stratifiée, elles constituent la *Classical Laminate Theory*.

La première hypothèse de cette théorie statue que tout segment normal à la surface moyenne Σ_m reste normal à Σ_m . Ceci conduit à une expression simplifiée des déplacements dans la plaque, qui sont définis à partir des déplacements de la surface moyenne Σ_m , notés \underline{V} dans le plan et w hors plan :

$$\underline{U}(m, z) = \underline{V}(m) + w(m)\underline{z} - z \underline{\text{grad}}_m(w(m)) \quad (5.1)$$

Cette expression des déplacements conduit à écrire les déformations planes $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ comme la somme des contributions de membrane $\underline{\gamma}$ et de courbure $\underline{\chi}$.

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\gamma} + z \underline{\chi} \text{ tel que } \begin{cases} \underline{\gamma} = \underline{\varepsilon}(\underline{V}) \\ \underline{\chi} = -\underline{\text{grad}}(\underline{\text{grad}}_m w) \end{cases} \quad (5.2)$$

La seconde hypothèse de la théorie de Kirchhoff-Love considère la contrainte normale au plan de la plaque, $\sigma \cdot \underline{z}$, comme nulle. Le champ de contrainte se réduit alors à la partie plane des contraintes, notée $\tilde{\sigma}$. Cette hypothèse permet alors de définir la matrice \mathbb{K}_{cp} liant les déformations et les contraintes planes :

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{K}_{cp} \underline{\tilde{\varepsilon}} \quad (5.3)$$

Dans le cas d'un stratifié, \mathbb{K}_{cp} dépend du pli considéré et varie donc dans l'épaisseur de la plaque. Le comportement global du stratifié peut alors s'exprimer à partir de l'effort \underline{N} et du moment \underline{M} résultant :

$$\begin{cases} \underline{N} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma} dz = \langle \mathbb{K}_{cp} \rangle \underline{\gamma} + \langle z \mathbb{K}_{cp} \rangle \underline{\chi} \\ \underline{M} = \int_{-h}^h z \tilde{\sigma} dz = \langle z \mathbb{K}_{cp} \rangle \underline{\gamma} + \langle z^2 \mathbb{K}_{cp} \rangle \underline{\chi} \end{cases} \quad (5.4)$$

L'opérateur $\langle \cdot \rangle$ renvoie la moyenne de la quantité considérée. Pour des stratifiés symétriques, le couplage entre les comportements de membrane et de courbure disparaît.

L'équilibre de la plaque stratifiée peut alors s'écrire en fonction des quantités résultantes :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}_m(\underline{\text{div}}_m \underline{M}) + h \underline{\text{div}}_m(\underline{\tau}_c^+ + \underline{\tau}_c^-) + (p^+ + p^-) = 0 \\ \underline{\text{div}}_m(\underline{N}) + (\underline{\tau}_c^+ + \underline{\tau}_c^-) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

2.1 Reconstruction du champ de contrainte

Considérons maintenant le champ de contrainte 3D dans la plaque. La partie hors plan du champ de contrainte, $\sigma \cdot \underline{z}$, est décomposée en cisaillement et contrainte normale :

$$\sigma \cdot \underline{z} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_c \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

L'équilibre 3D de la plaque peut alors se réécrire en prenant en compte les différentes composantes du champ de contrainte :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}_m \tilde{\sigma} + \underline{\sigma}_{c,z} = \underline{0} \\ \underline{\text{div}} \underline{\sigma}_c + \underline{\sigma}_{zz,z} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

L'intégration de ces équations dans l'épaisseur de la plaque et la prise en compte des conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure conduit à l'équation 5.5, équilibre généralisé des plaques.

D'autre part, il est possible à partir de cette expression de l'équilibre de définir le champ de contrainte dans chaque pli du stratifié :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \mathbb{K}_{cp}(\underline{\gamma} + z\underline{\chi}) \\ \underline{\sigma}_c = - \int_{-h}^z \underline{\text{div}}_m \tilde{\sigma} dz - \underline{\tau}_c^- \\ \sigma_{zz} = - \int_{-h}^z \underline{\text{div}}_m \underline{\sigma}_c dz - \underline{p}^- \end{cases} \quad (5.8)$$

Les contraintes ainsi définies vérifient l'équilibre 3D de la plaque et permettent de calculer le champ de contrainte en tout pli de l'empilement.

Pour une quantité a donnée, on peut définir les ordres de grandeurs suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial m} = o\left(\frac{a}{L}\right) \\ \frac{\partial a}{\partial z} = o\left(\frac{a}{h}\right) \end{cases} \quad (5.9)$$

où L se rapporte aux dimensions dans le plan de la plaque, et h à l'épaisseur. À partir des équations d'équilibre 5.8, une estimation des ordres de grandeur des contraintes de cisaillement et hors plan de la plaque conduit alors à :

$$\begin{cases} \|\underline{\sigma}_c\| = o\left(\frac{h}{L}\right)\|\tilde{\sigma}\| \\ \|\sigma_{zz}\| = o\left(\frac{h^2}{L^2}\right)\|\tilde{\sigma}\| \end{cases} \quad (5.10)$$

□ **Remarque :** Une approximation de ce champ de contrainte au premier ordre conduit ainsi au champ de contrainte suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} \\ \underline{\sigma}_c = \underline{0} \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

On retrouve ainsi les hypothèses du modèle de Kirchhoff-Love.

Flexion pure Pour développer le raisonnement plus avant, considérons le cas d'une plaque stratifiée en flexion pure. Le seul chargement est imposé sur la surface Σ_f^l , les efforts surfaciques sur les faces Σ^+ et Σ^- sont pris comme nuls. L'expression des déplacements est réduite à :

$$\underline{U}(m, z) = w(m)\underline{z} - z \underline{\text{grad}}_m(w(m)) \quad (5.12)$$

et les équations en efforts généralisés se réduisent à :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}_m(\underline{\text{div}}_m \underline{\mathbb{M}}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\text{div}}_m(\underline{\text{div}}_m(\underline{\chi})) = 0 \\ \underline{\mathbb{N}} = \underline{0} \end{cases} \quad (5.13)$$

Le champ de contrainte reconstruit peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = z \mathbb{K}_{cp} \underline{\chi} \\ \underline{\sigma}_c = - \left(\int_{-h}^z z \mathbb{K}_{cp} dz \right) \underline{\text{div}}_m(\underline{\chi}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, les calculs analytiques peuvent être encore développés. Le module d'Young est noté E et le coefficient de Poisson ν . La relation de comportement 3D s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} (\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I}_3) \quad (5.15)$$

Le comportement \mathbb{K}_{cp} défini en 5.3 peut alors s'écrire :

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{K}_{cp}(z\chi) = \frac{E}{1+\nu} \left(\tilde{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \mathbb{I}_2 \right) \quad (5.16)$$

La définition du moment résultant donné dans l'équation 5.4 permet d'exprimer $\underline{\mathbb{M}}$ en fonction des déplacements w de la plaque :

$$\underline{\mathbb{M}} = -\frac{2h^3}{3} \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(w(m))) + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta_m(w) \mathbb{I}_2 \right) \quad (5.17)$$

D'autre part, l'équation 5.4 permet d'écrire les contraintes $\tilde{\sigma}$ directement en fonction du moment résultant $\underline{\mathbb{M}}$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{3}{2h^3} z \underline{\mathbb{M}} \quad (5.18)$$

En introduisant l'expression développée de $\underline{\mathbb{M}}$ dans l'équation 5.18 et en utilisant l'équation 5.8, le champ complet des contraintes 3D peut être reconstruit :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = -z \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(w(m))) + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta_m(w) \mathbb{I}_2 \right) \\ \underline{\sigma}_c = \frac{1}{2} (z^2 - h^2) \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(\Delta_m(w)) \right) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Traction pure En considérant de même un problème de traction pure sur une plaque homogène isotrope, le champ de déplacement dans la plaque est réduit à la composante dans le plan :

$$\underline{U}(m, z) = \underline{V}(m) \quad (5.20)$$

Le moment généralisé \mathbb{M} s'annule et les contraintes $\tilde{\sigma}$ s'expriment directement en fonction des efforts généralisés :

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{N} \quad (5.21)$$

De plus, les équations d'équilibre 5.5 deviennent alors :

$$\underline{\text{div}}_m \mathbb{N} = \underline{0} \quad (5.22)$$

Le champ de contrainte 3D s'exprime alors :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\underline{\gamma} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{div} \underline{\gamma} \mathbb{I}_2 \right) \\ \underline{\sigma}_c = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

On obtient ainsi une expression du champ de contrainte 3D dans la plaque, sous les hypothèses de Kirchhoff-Love.

2.2 Reconstruction du champ de déplacement

Dans cette partie, le cas d'une plaque en flexion est considérée. La dérivation directe des déplacements donnés dans l'équation 5.12 ne permet pas d'obtenir le champ de contrainte exact de l'équation 5.19. La construction d'un déplacement cohérent avec le champ de contrainte est réalisée de façon itérative en évaluant l'erreur entre la solution 3D et la solution issue des déplacements. Une correction est alors apportée au champ de déplacement de façon à annuler l'erreur commise la plus grande [Allix et Dupleix-Couderc, 2009].

Les notations utilisées par la suite seront les suivantes :

- la solution de référence en contrainte sera notée σ^c . Cette solution correspond au champ de contrainte donné dans l'équation 5.14 pour une plaque stratifiée et dans l'équation 5.19 pour une plaque homogène isotrope ;
- la solution en déplacement à l'itération i sera notée ${}^i \underline{U}$;
- le champ de contrainte à l'itération i sera défini par ${}^i \hat{\sigma} = \mathbb{C}_{\underline{\underline{E}}}({}^i \underline{U})$.

2.2.1 Cas d'une plaque stratifiée

Le déplacement initial, \underline{U}^0 , correspond au déplacement de l'équation 5.12. Le champ de contrainte 3D déduit de ce déplacement s'écrit alors, pour chaque pli de l'empilement :

$$\begin{cases} {}^0\widehat{\sigma} &= \left(\widetilde{\mathbb{K}}(\cdot) - \frac{\mathbb{A}}{C} \text{Tr}(\mathbb{A}(\cdot)) \right) \left(-z \underline{\underline{\text{grad}}}_m \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(w) \right) \right) \\ {}^0\widehat{\sigma}_c &= 0 \\ {}^0\widehat{\sigma}_{zz} &= \text{Tr} \left[-z \mathbb{A} \underline{\underline{\text{grad}}}_m \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(w) \right) \right] \end{cases} \quad (5.24)$$

où $\widetilde{\mathbb{K}}$ correspond aux termes de la matrice de comportement 3D du pli relatifs au comportement dans le plan, \mathbb{A} au comportement en cisaillement transverse et C au comportement hors plan.

Ainsi, l'utilisation des déplacements de la théorie des plaques pour contruire le champ de contrainte conduit à une erreur sur σ_{zz} de l'ordre de $o(\|\widetilde{\sigma}^c\|)$. Pour diminuer cette erreur, on ajoute un terme correctif ${}^1\underline{W} = {}^1w(m, z)\underline{z}$ au champ de déplacement ${}^0\underline{U}$, tel que :

$${}^1\widehat{\sigma}_{zz} = 0 = C {}^1w_{,z} + \text{Tr} \left[\mathbb{A} \left(-z \underline{\underline{\text{grad}}}_m \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m(w(m)) \right) \right) \right] \quad (5.25)$$

Le terme correctif en déplacement dépend ainsi de z et varie dans l'épaisseur de la plaque en fonction du pli considéré :

$${}^1w = \int_{-h}^z \frac{1}{C(z)} \text{Tr} \left[\mathbb{A}(z) \left(-z \underline{\underline{\text{grad}}}_m \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m w \right) \right) \right] dz + c(m) \quad (5.26)$$

où la constante d'intégration $c(m)$ reste à déterminer. L'expression corrigée ${}^1\underline{U}$ du champ de déplacement conduit alors au champ de contrainte suivant :

$$\begin{cases} {}^1\widehat{\sigma} = {}^0\widehat{\sigma} \\ {}^1\widehat{\sigma}_c = \mathbb{A}(z) \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}}_m ({}^1w(m, z)) \right) \\ {}^1\widehat{\sigma}_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

${}^1\underline{W}$ ne modifiant que la partie normale des déplacements, le champ de contrainte ${}^0\widehat{\sigma}$ n'est pas modifié. Cependant, cette correction conduit à une erreur ${}^1\widehat{\sigma}_c$. L'ordre de grandeur de cette erreur dépend du terme $c(m)$. Elle est au maximum de $\frac{h}{l} o(\|\widetilde{\sigma}^c\|)$.

2.2.2 Cas d'une plaque homogène isotrope

Pour développer le raisonnement, le cas d'une plaque homogène isotrope est maintenant considéré.

Correction au premier ordre Comme pour la plaque stratifiée, le déplacement initial, \underline{U}^0 , correspond au déplacement de l'équation 5.1. Le champ de contrainte déduit de ce déplacement conduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} {}^0\widehat{\underline{\sigma}} = -z \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m({}^0w) \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta_m({}^0w) \mathbb{I}_2 \right) \\ {}^0\widehat{\underline{\sigma}}_c = \underline{0} \\ {}^0\widehat{\sigma}_{zz} = -z \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta_m({}^0w) \end{cases} \quad (5.28)$$

L'erreur la plus grande est commise sur la contrainte normale σ_{zz} , et est de l'ordre de ${}^oerr = o(\|\tilde{\sigma}^c\|)$. Un terme de correction ${}^1w \cdot \underline{z}$ est ajouté au champ de déplacement 5.1 et défini de telle sorte que ${}^1\widehat{\sigma}_{zz} = 0$, soit

$${}^1w, z = z \frac{\nu}{1-\nu} \Delta_m({}^0w) \Rightarrow {}^1w = \frac{z^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \Delta_m({}^0w) + c(m) \quad (5.29)$$

où c est une constante d'intégration qui sera précisée plus loin. L'expression du champ de déplacement corrigé ${}^1\underline{U}$ est alors :

$${}^1\underline{U} = (w(m) + {}^1w) \underline{z} - z \underline{\underline{\text{grad}}}_m (w(m) + {}^1w) \quad (5.30)$$

Le nouveau champ de contrainte déduit des déplacements ${}^1\underline{U}$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} {}^1\widehat{\underline{\sigma}} &= -z \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m (\underline{\underline{\text{grad}}}_m({}^0w) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta_m({}^0w) \mathbb{I}_2) \right) \\ {}^1\widehat{\underline{\sigma}}_c &= \frac{E}{2(1+\nu)} \underline{\underline{\text{grad}}}_m ({}^1w) \\ {}^1\sigma_{zz} &= 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Comme dans le cas de la plaque stratifiée, ${}^1w \cdot \underline{z}$ ne modifie que la partie normale des déplacements, le champ de contrainte plan ${}^0\widehat{\underline{\sigma}}$ n'est donc pas modifié. La correction ainsi apportée permet de retrouver des contraintes normales nulles. Cependant, une erreur de l'ordre de ${}^1e = \frac{h}{l} o(\|\tilde{\sigma}^c\|)$ est commise sur les contraintes en cisaillement.

Correction au second ordre De la même façon, un terme de correction ${}^2\underline{V}$ doit être apporté aux déplacements dans le plan de telle sorte que ${}^2\widehat{\underline{\sigma}}_c = 0$, ce qui conduit à l'expression de ${}^2\underline{V}$ et c :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{grad}}}_m c(m) = -h^2 \frac{1}{1-\nu} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_m (\Delta_m({}^0w)) \right) \\ {}^2\underline{V}, z(m, z) = z^2 \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \underline{\underline{\text{grad}}}_m (\Delta_m({}^0w)) \end{cases} \quad (5.32)$$

soit :

$$\begin{cases} c(m) = -\frac{h^2}{1-\nu} \Delta_m({}^0w) \\ {}^2\underline{V}(m, z) = z^3 \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \underline{\text{grad}}_m(\Delta_m({}^0w)) \end{cases} \quad (5.33)$$

Ainsi, le déplacement obtenu après cette correction est de la forme :

$$\begin{aligned} {}^2\underline{U}(m, z) = & \left({}^0w(m) + \frac{1}{1-\nu} \left(\nu \frac{z^2}{2} - h^2 \right) \underline{\text{grad}}_m(\Delta_m({}^0w)) \right) \underline{z} \\ & + \underline{\text{grad}}_m \left(-z {}^0w(m) + z^3 \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \Delta_m({}^0w) \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Le champ de contrainte correspondant s'écrit alors :

$$\begin{cases} {}^2\widehat{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left[\underline{\text{grad}}_m \left(\underline{\text{grad}}_m \left(-z {}^0w(m) + z^3 \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \Delta_m({}^0w) \right) \right) \right. \\ \quad \left. + z \frac{\nu}{1-\nu} \Delta_m({}^0w) \mathbb{I}_2 \right] \\ {}^2\widehat{\underline{\sigma}}_c = \frac{1}{2} (z^2 - h^2) \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \left(\underline{\text{grad}}_m(\Delta_m({}^0w)) \right) \\ {}^2\widehat{\sigma}_{zz} = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Il faut noter qu'une erreur de l'ordre de ${}^3e = \left(\frac{h}{l} \right)^3 o(\|\tilde{\sigma}^c\|)$ est commise sur les contraintes dans le plan associées à la théorie de Kirchhoff-Love. Une correction des déplacements au second ordre est suffisante.

On pourra noter que les champs ainsi reconstruits vérifient toutes les équations du problème, sauf les équations de bord de la plaque.

3 Choix d'un élément

Nous avons défini un champ de déplacement 3D permettant d'exprimer un champ de contrainte exact au second ordre issu de la théorie des plaques. Ceci peut être utilisé de deux façons : soit pour réaliser un raccord en déplacement entre des éléments de plaque classiques et une modélisation 3D, soit pour définir un élément de coque 3D avec des degrés de liberté en déplacement.

Le choix d'utiliser un élément de coque 3D s'impose ici. D'une part, le couplage avec une modélisation 3D sera directe. D'autre part, les fissures considérées prennent place dans l'épaisseur des plaques. L'introduction future d'une représentation simplifiée de ces fissures dans des éléments 3D paraît plus judicieuse.

3.1 Définition de l'élément

L'élément à utiliser dans notre problème doit être capable de représenter les déplacements obtenus en 5.35. Les exemples développés ici étant des exemples 2D, l'élément choisi sera un élément 2D, que l'on peut voir comme une poutre comportant une épaisseur explicite. L'élément $Q16$ est retenu. Cet élément possède 16 nœuds (c.f. figure 5.2)

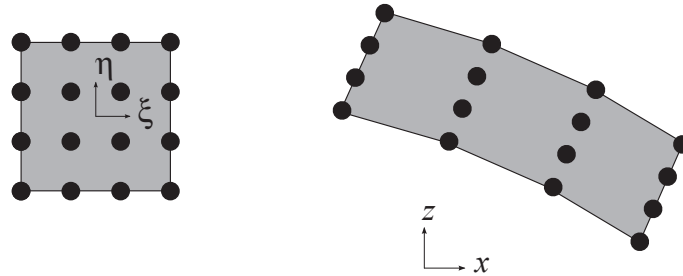


FIGURE 5.2: Élément $Q16$ dans ses configurations de référence et déformée

et des fonctions de forme cubiques dans les deux directions de l'espace, notées N_c . Ces dernières sont construites à partir des fonctions de forme de Lagrange cubiques unidimensionnelles. Ainsi, en tant qu'élément de Lagrange, les monômes ci-dessous sont représentés dans la discrétisation [Zienkiewicz et Taylor, 1967] :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & x & & z \\
 & & x^2 & & xz & & z^2 \\
 x^3 & & x^2z & & xz^2 & & z^3 \\
 & x^3z & & x^2z^2 & & xz^3 & \\
 & & x^3z^2 & & x^2z^3 & & \\
 & & & x^3z^3 & & &
 \end{array} \tag{5.36}$$

Il en résulte que l'intégration numérique exacte des matrices raideur et masse de l'élément requiert l'utilisation de 16 points de Gauss.

□ **Remarque** : Pour des problèmes 3D, l'élément équivalent au $Q16$ serait un élément à 64 nœuds, possédant des fonctions de forme cubiques dans les trois directions de l'espace. Dans ce cas là, des techniques de condensations doivent être envisagées pour réduire le nombre de degrés de liberté de l'élément.

Les déplacements dans l'élément peuvent ainsi s'écrire sous deux formes différentes. D'une part, les déplacements s'écrivent classiquement à partir des fonctions de forme et des degrés de liberté de l'élément :

$$\underline{u}(x, z) = \sum_i N_i^c \underline{u}_i \quad (5.37)$$

D'autre part, ils peuvent également s'exprimer dans la base des polynômes définie en 5.36 :

$$\underline{u}(x, z) = \sum_{\{i,j\}} x^i z^j a_{ij} \quad (5.38)$$

Les coefficients a_{ij} peuvent être exprimés à partir de combinaisons linéaires des degrés de liberté en déplacements dans l'élément en développant l'expression 5.37.

On pourra noter que certains monômes présents dans la discrétisation (c.f. 5.36) sont inutiles pour représenter correctement les déplacements. Par la suite, on vérifiera qu'ils ne constituent pas des termes parasites dans la solution, ce qui pourrait entraîner un blocage de l'élément.

3.2 Validation

L'objectif de cette section est de valider l'élément $Q16$ en statique et en dynamique. Pour cela, des problèmes académiques sont considérés (c.f. figure 5.3) et résolus par la méthode des éléments finis en utilisant des éléments $Q16$ et $Q4$. On vérifiera notamment que des phénomènes de blocage n'apparaissent pas dans les éléments $Q16$. Les maillages utilisés dans les calculs sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Type d'éléments	Type de problème					
	$e = 3mm, L = 45mm$			$e = 3mm, L = 80mm$		
	Maillages	Éléments épaisseur	Éléments longueur	Maillages	Éléments épaisseur	Éléments longueur
$Q16$	C_3^A	1	3	C_3^B	1	3
	C_2^A	1	2	C_2^B	1	2
	C_1^A	1	1	C_1^B	1	1
$Q4$	R_1^A	4	60	R_1^B	4	106
	R_2^A	8	120	R_2^B	8	213
	R_3^A	12	180	R_3^B	12	320

TABLE 5.1: Définition des maillages utilisés pour la validation du $Q16$.

Statique Les solutions analytiques de problèmes 2D de traction, flexion pure et flexion simple sont connues en déformations planes [Timoshenko et Goodier, 1970]. Tous les cas test considérés par la suite sont élastiques linéaires.

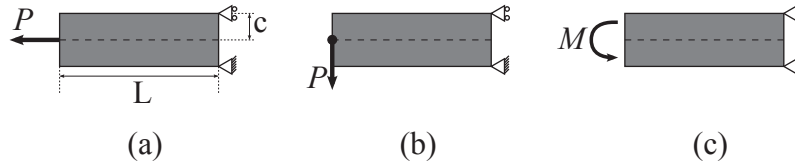


FIGURE 5.3: Définition des cas test de traction (a), flexion simple (b) et flexion pure (c)

La figure 5.4 résume les erreurs en déplacements en bout de poutre par rapport à la solution analytique pour les différents problèmes. Ces erreurs restent très faibles même pour de très grands élancements de l'élément.

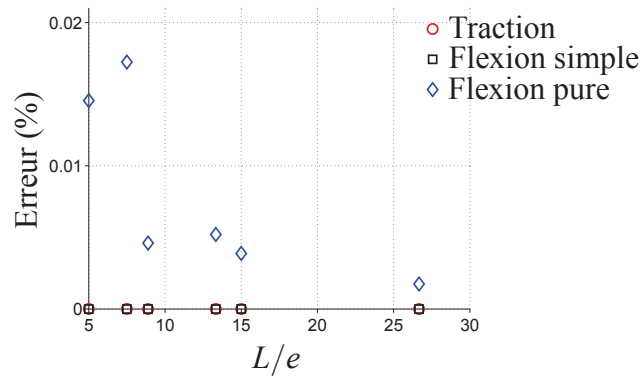


FIGURE 5.4: Evolution de l'erreur en déplacement en bout de poutre en fonction de l'élancement des éléments

Enfin, la figure 5.5 présente les coefficients \underline{a}_{ij} définis dans l'équation 5.38. Les valeurs analytiques de ces coefficients sont ici comparées à leur valeur issue des calculs. Le point important à vérifier ici est la valeur des termes dits "parasites", i.e. qui ne sont pas utiles à la description de la solution. Pour les trois problèmes académiques traités, ces termes restent petits devant les coefficients nécessaires à la description du comportement. Autrement dit, même si la description utilisée ici est plus riche que nécessaire, le comportement est décrit avec précision.

Le second point à vérifier est la bonne représentation des contraintes. La figure 5.6 résume les erreurs en contraintes aux points de Gauss des éléments pour les différents types de problème. Même pour de grands élancements, les erreurs en contraintes restent très faibles. Elles sont de plus localisées au niveau des conditions aux limites. Ces erreurs sont essentiellement dues à la différence entre les conditions aux limites analytiques et réelles dans le calcul éléments finis.

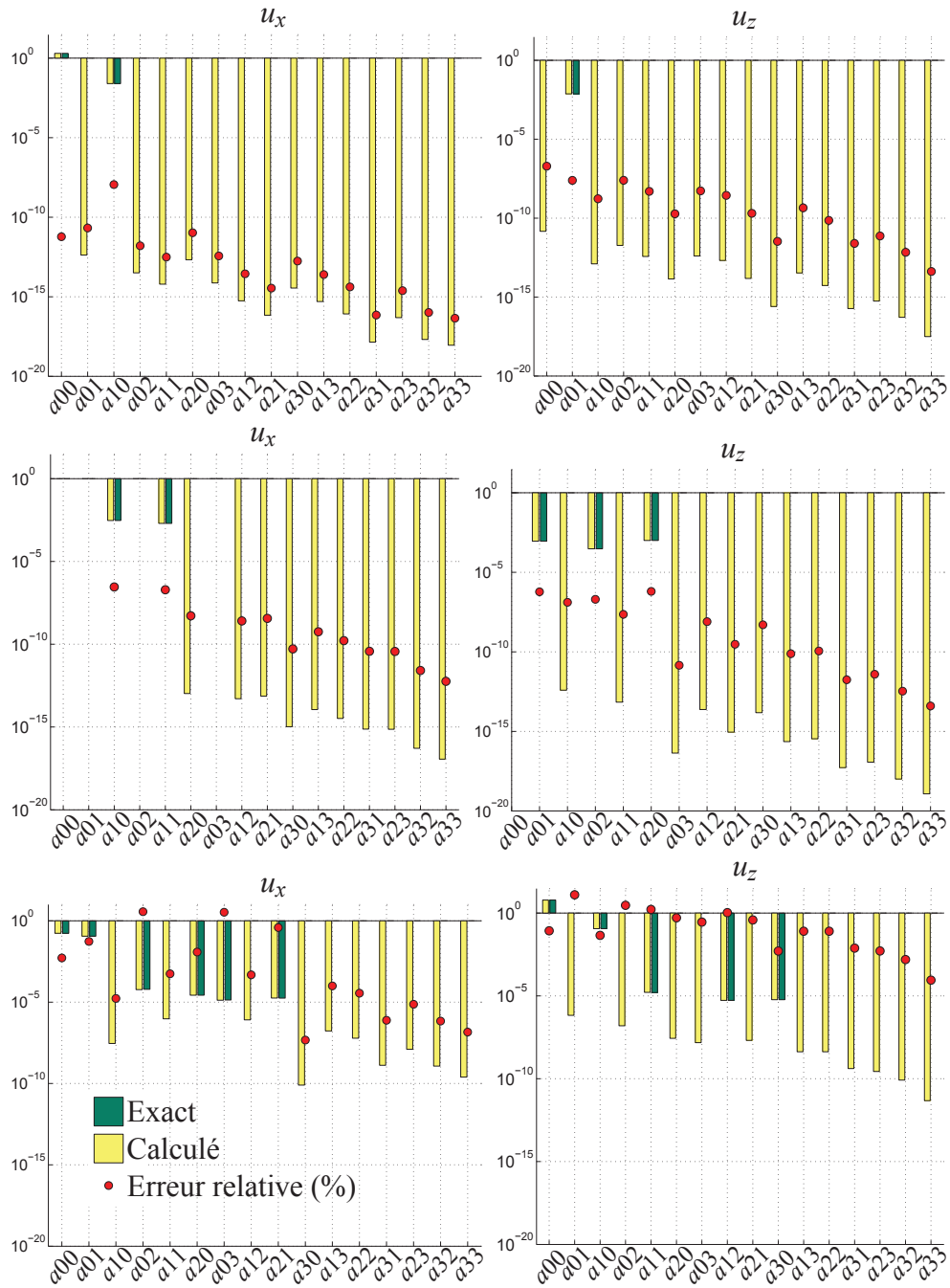


FIGURE 5.5: Évaluation des coefficients a_{ij} (c.f. équation 5.38) pour les problèmes de traction (1^{re} ligne), flexion pure (2^e ligne) et flexion simple (3^e ligne) - Maillage C_2^B - Échelle log sur l'axe des ordonnées

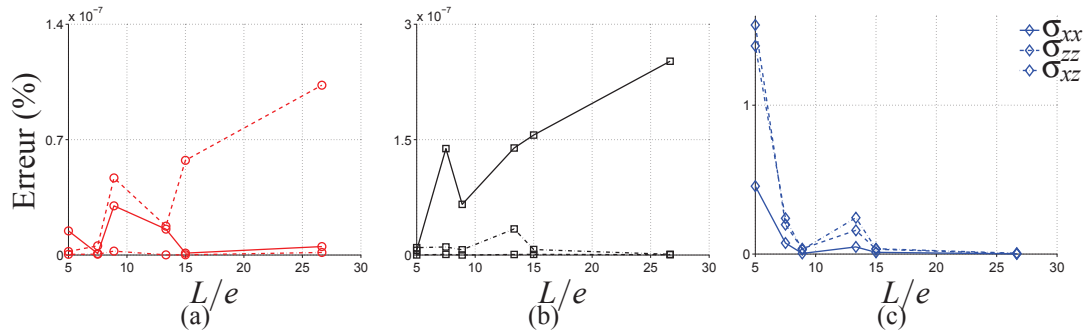


FIGURE 5.6: Erreurs relatives sur les contraintes pour les problèmes de (a) traction, (b) flexion et (c) flexion simple.

Dynamique Seul le problème de flexion simple est considéré ici. Les résultats présentés ici sont résolus avec un schéma explicite. Ceci implique la détermination du pas de temps critique du calcul. Dans le cas d'éléments linéaires, les formules approchées présentées dans la partie 3 permettent une approximation rapide de ce pas de temps. Pour des éléments d'ordre élevé, tels que les $Q16$, ces formules ne peuvent être utilisées [Bathe, 2006]. En effet, les nœuds internes de l'élément sont plus raides et les estimations utilisant des longueurs caractéristiques surestiment le pas de temps réel. Dès lors, pour calculer le pas de temps critique, il faut revenir à la définition et calculer la fréquence propre maximale parmi tous les éléments du maillage.

Le tableau 5.2 illustre ces remarques et présente l'évaluation du pas de temps critique pour un maillage $Q16$ avec les différentes méthodes évoquées dans le chapitre 3. Le pas de temps critique véritable est celui évalué avec la méthode utilisant les pulsations propres de l'élément. La formule du pas de temps nodal, retenue précédemment pour estimer les pas de temps critiques en présence d'interfaces, conduit ici à une surestimation du pas de temps critique, et donc à des calculs instables.

Les figures 5.8 et 5.7 présentent les résultats en déplacements, vitesses et accélérations pour les différents maillages. Les solutions en déplacements et en vitesses sont identiques

Méthode	Expression	Valeur estimée (ms)
Épaisseur de l'élément	$\Delta t_c = e/c$	$2.60 \cdot 10^{-4}$
Distance minimale entre les nœuds	$\Delta t_c = \frac{e/3}{c}$	$0.87 \cdot 10^{-4}$
Pas de temps nodal	$\Delta t_c = \min_{i,j} \sqrt{2m_{ij}/k_{ij}}$	$0.63 \cdot 10^{-4}$
Pulsation propre élémentaire	$\Delta t_c = \min_k (2/\omega_k^e)$	$0.51 \cdot 10^{-4}$

TABLE 5.2: Evaluation du pas de temps critique dans le cas du maillage C_3^B

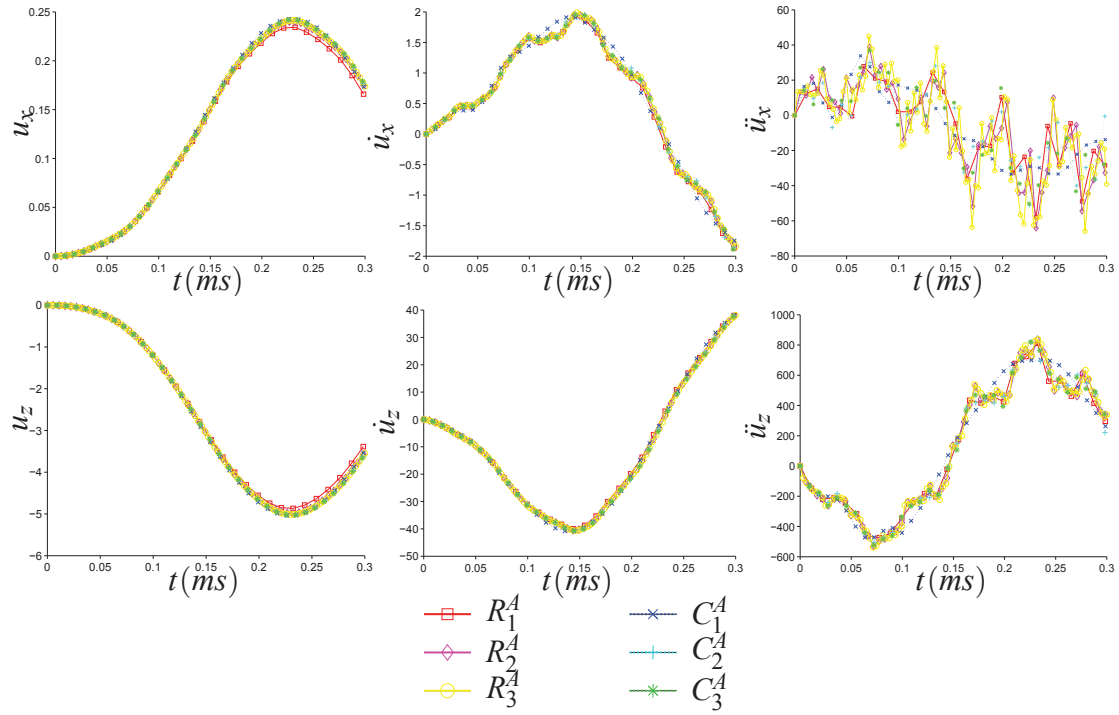


FIGURE 5.7: Comparaison des solutions en déplacements, vitesse et accélération en bout de poutre entre les maillages de référence et Q16 (problème $e = 3mm$, $L = 45mm$)

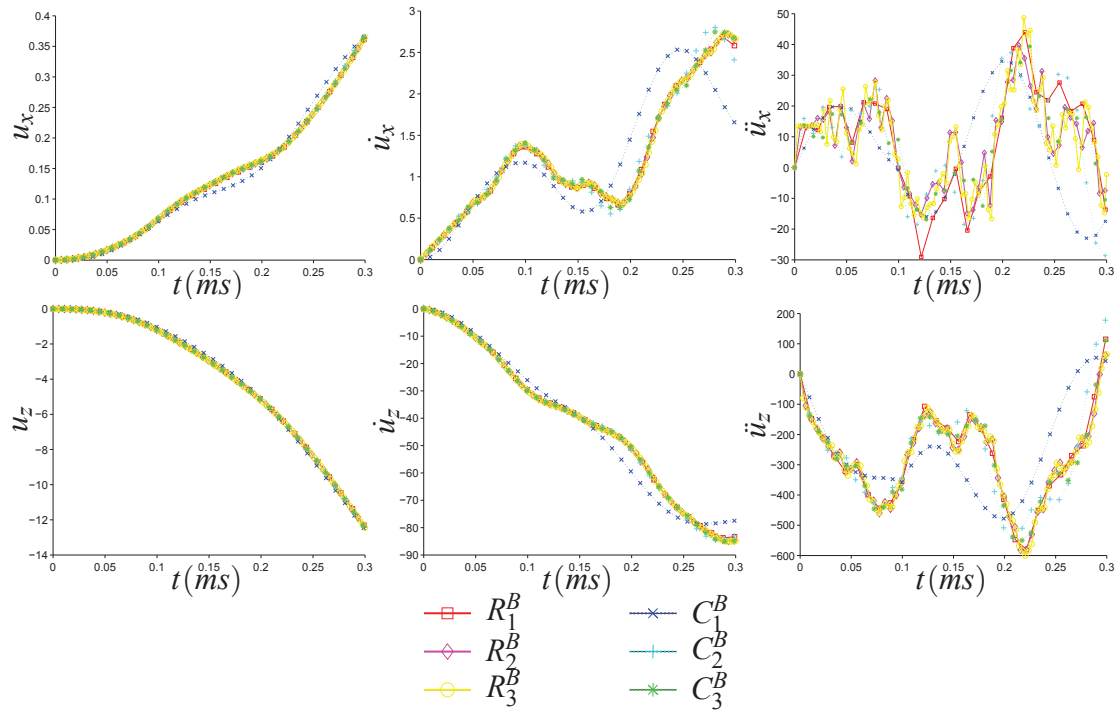


FIGURE 5.8: Comparaison des solutions en déplacements, vitesse et accélération en bout de poutre entre les maillages de référence et Q16 (problème $e = 3mm$, $L = 80mm$)

pour les différents maillages. On pourra noter des erreurs plus importantes dans les accélérations pour les maillages composés d'un unique élément. L'allure globale de l'accélération est capturée, mais pas les variations à plus petite longueur d'onde.

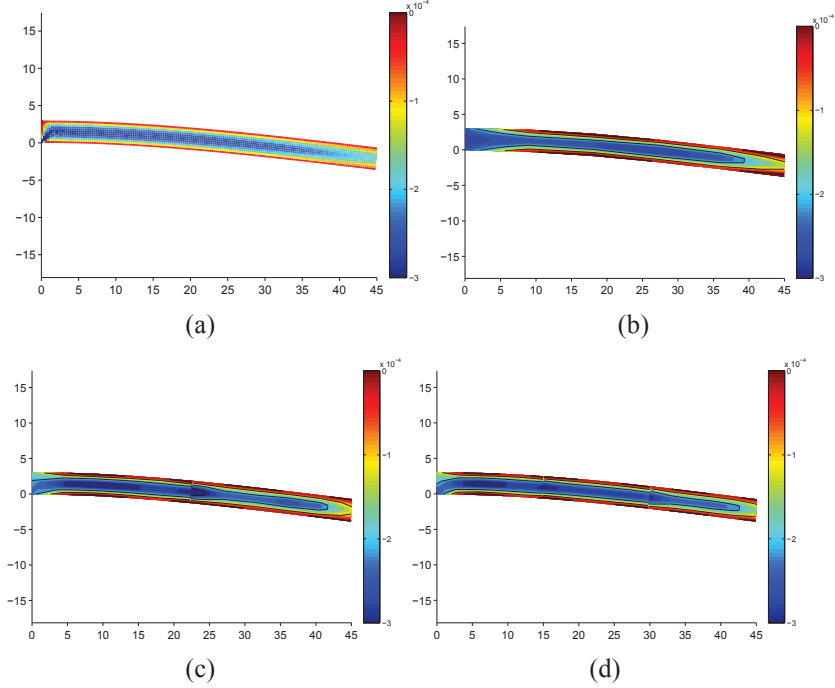


FIGURE 5.9: Déformation ε_{xz} pour le problème $e = 3mm$, $L = 45mm$ en fin de calcul. (a) R_3^A , (b) C_1^A , (c) C_2^A , (d) C_3^A

La figure 5.9 présente les déformations en cisaillement en fin de calcul pour les différents maillages. Des résultats semblables sont obtenus pour les maillages avec des éléments $Q4$ et $Q16$. On notera cependant pour le maillage C_1^A une différence notable au niveau de l'encastrement. Ceci confirme les différences constatées pour les accélérations.

3.2.1 Bilan

Les éléments $Q16$ qui sont testés ici permettent d'assurer une représentation précise du comportement des structures élancées. Même pour des élancements importants, les résultats obtenus sont très proches des solutions analytiques pour les différents problèmes en statique. Pour les problèmes de dynamique, les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus avec des maillages $Q4$.

4 Couplage des éléments $Q16$ avec le méso-modèle

La méthode définie dans le chapitre 4 est modifiée en introduisant des éléments $Q16$ définis plus haut. Leur utilisation est dédiée aux zones de la structure dans lesquelles aucun délaminage n'apparaît. Ceci permet de diminuer le nombre de degrés de liberté dans les zones non critiques de la structure tout en conservant une représentation précise du comportement de la zone.

4.1 Équations

L'utilisation d'éléments $Q16$ dans le maillage n'entraîne que peu de modifications dans les équations à utiliser. Le seul point à modifier concerne la résolution du problème global et le calcul du vecteur \underline{B} (c.f. équation 4.3).

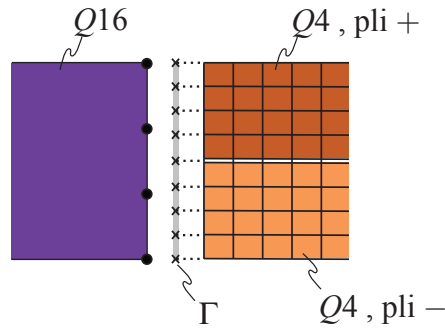


FIGURE 5.10: Discrétisation de la frontière entre un domaine $Q16$ et un domaine $Q4$

Considérons une frontière Γ entre un maillage réalisé avec des éléments $Q4$ et un maillage réalisé avec des éléments $Q16$ (c.f. figure 5.10). La discrétisation de la condition de continuité des vitesses sur Γ conduit à l'équation :

$$\forall x \in \Gamma, \mathbf{n}_l \{\dot{U}^1\}_{|\Gamma} = \mathbf{n}_c \{\dot{U}^2\}_{|\Gamma} \quad (5.39)$$

où \mathbf{n}_l et \mathbf{n}_c sont respectivement les fonctions linéaires et cubiques unidimensionnelles associées aux maillages $Q4$ et $Q16$ respectivement. Dès lors, la matrice de localisation \mathbb{C}^l pour le maillage $Q4$ n'est pas modifiée par rapport aux précédents problèmes. Cependant, la matrice \mathbb{C}^c associée au $Q16$ doit tenir compte de cette discrétisation. Les coefficients de la matrice sont ainsi calculés à partir des fonctions de forme \mathbf{n}_c le long de Γ .

4.2 Application

La méthode décrite ci-dessus est appliquée sur le cas 2D défini dans la figure 5.11. La structure 2D considérée est un stratifié constitué de 10 plis. Un effort réparti est appliqué au centre de la structure, son amplitude évolue avec le temps sous forme de rampe. Le temps caractéristique de l'évolution de l'effort est de 0,1ms pour une durée de choc de 0,15ms.

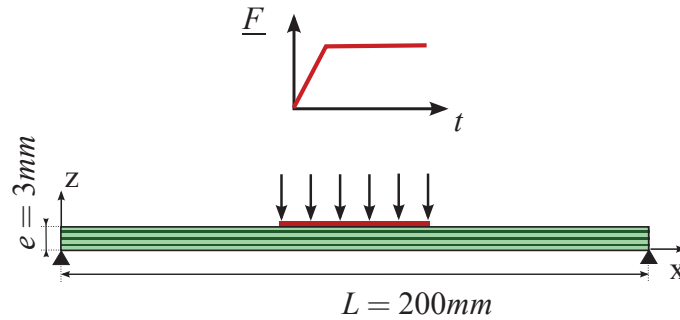


FIGURE 5.11: Définition de l'exemple d'étude

Afin d'illustrer le couplage d'un maillage $Q16$ avec un maillage plus fin de type méso-modèle, le calcul de ce problème est réalisé de différentes façons.

Dans un premier temps, un calcul de référence est réalisé. L'ensemble de la structure est maillée finement sur la base du méso-modèle.

Par la suite, des maillages prenant en compte la localisation de l'initiation puis de la propagation du délaminage sont réalisés. Les zones de la structure ne voyant pas le délaminage sont ainsi maillées avec des éléments $Q16$.

4.2.1 Calcul de référence

Pour le calcul de référence, le maillage est représenté dans la figure 4.2.1. La structure est décomposée en trois sous-domaines de longueurs égales. Dans chacun d'eux, un maillage explicite des plis est réalisé et des éléments d'interface sont utilisés entre chaque pli.

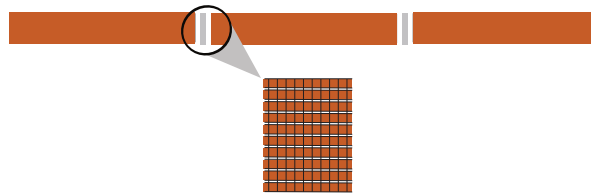


FIGURE 5.12: Définition du maillage utilisé dans le calcul de référence

Les principales caractéristiques du calcul sont résumées dans le tableau suivant :

Les raideurs d'interface sont choisies de telle sorte qu'une discrétisation d'un élément par pli soit suffisante pour représenter l'évolution du délaminage. La taille caractéristique des éléments dans les zones maillées en $Q4$ correspond à un dixième de l'épaisseur e de la plaque.

La figure 5.13 présente la déformée et les zones délaminées en fin de calcul. Le délaminage s'initie au centre de la plaque dans l'interface médiane, puis se propage vers les extrémités de la plaque. Des délaminages similaires apparaissent ensuite dans les autres

Δt	$1,66.10^{-5}ms$
degrés de liberté	26760
Temps CPU	18h
E_{plis}	200000 MPa
$k_n^+ = k_t$	30000 MPa/mm ²

TABLE 5.3: Caractéristiques du calcul de référence

interfaces délaminantes de l'empilement. On pourra noter également l'apparition de délaminages plus tardifs au niveau des conditions aux limites (c.f. figure 5.14).

La figure 5.15 présente l'évolution de l'endommagement le long de l'interface médiane à l'instant de l'initiation du délaminage. La longueur de la *process zone* pour ce problème est ainsi de l'ordre de 10mm.

Considérons l'interface médiane au niveau de la frontière Γ_1 , et plus particulièrement les efforts Λ qui sont appliqués sur les plis supérieurs et inférieurs pour réaliser le raccord entre sous-domaines. La figure 5.16 présente leur évolution au cours du temps. L'évolution de l'endommagement dans cette même interface au point le plus proche de Γ_1 est reportée.

La composante tangentielle appliquée est identique sur chacun des deux plis jusqu'à l'apparition d'endommagement dans l'élément d'interface contigu à la frontière. Des différences apparaissent avec l'apparition de l'endommagement et s'accroissent nettement avec l'arrivée du front de délaminage sur la frontière. En effet, tant que l'endommagement est nul, les nœuds des plis supérieurs et inférieurs sont confondus. Des informations identiques sont donc transmises pour ces nœuds au niveau de l'interface. Lorsque

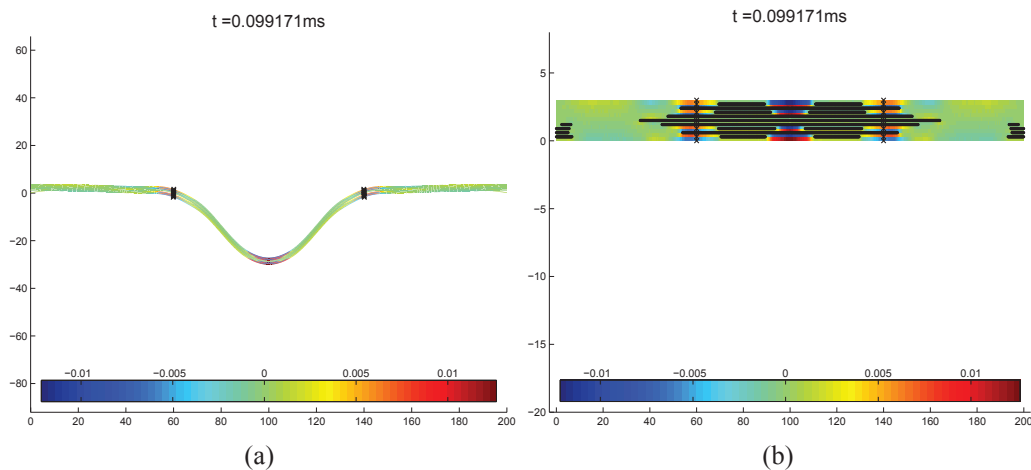


FIGURE 5.13: Déformée (a) et profil de délaminage (b) en fin de calcul pour le problème de référence

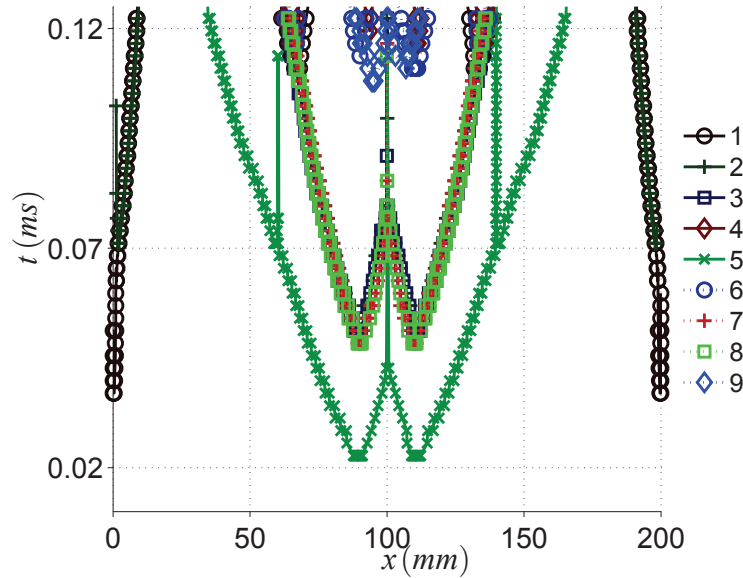


FIGURE 5.14: Évolution du front de délaminage dans les interfaces (numérotées de 1 à 9) en fonction du temps - Calcul de référence

l'endommagement augmente puis atteint 1, les deux nœuds ne sont plus confondus et des informations différentes transitent donc par la frontière. Des observations similaires peuvent être faites pour la composante normale.

Ainsi, les multiplicateurs de Lagrange permettent d'obtenir une information sur le délaminage dans la zone de la frontière dès que de l'endommagement apparaît dans l'élé-

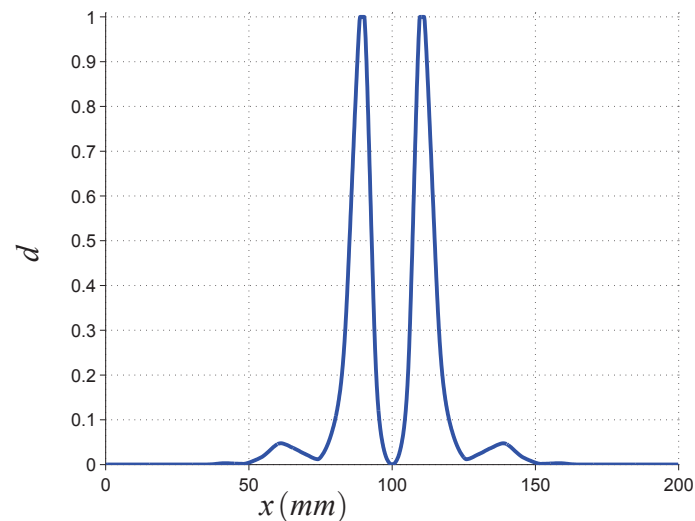


FIGURE 5.15: Évolution de l'endommagement le long de l'interface médiane à l'instant d'initiation du délaminage

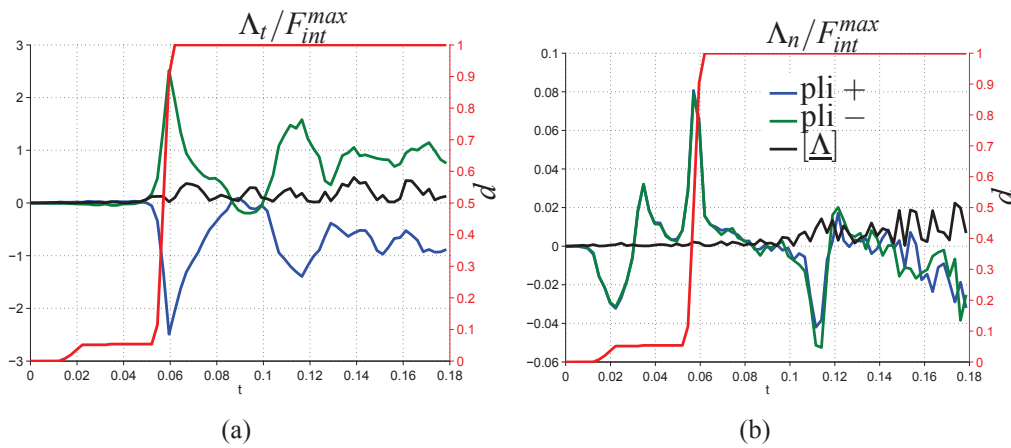


FIGURE 5.16: Évolution des multiplicateurs de Lagrange et de l'endommagement pour le calcul de référence

ment d'interface proche de cette frontière. Autrement dit, l'arrivée du délaminage peut être détectée quand le front de délaminage se situe à une distance égale à la longueur de la *process zone*. Dès lors, l'étude de l'évolution des multiplicateurs de Lagrange sur les frontières n'apportent pas d'informations pertinentes supplémentaires par rapport à l'utilisation de la longueur de la *process zone* en tant que critère.

4.2.2 Adaptation du maillage à la zone délaminée

L'objectif de cette partie est de réaliser un calcul identique au problème de référence présenté précédemment en utilisant un maillage fin uniquement dans les zones de la structure où l'initiation du délaminage a lieu (c.f. figure 5.17). Trois maillages différents sont réalisés, la différence se situant au niveau de la longueur l_{Q4} du domaine central. Dans cette zone, un maillage identique au calcul de référence est réalisé. Dans le reste de la structure, des éléments $Q16$ sont utilisés. Pour ces calculs, on arrêtera la comparaison

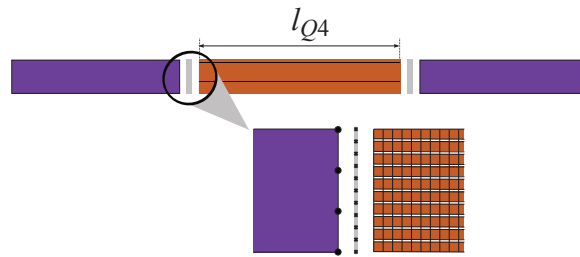


FIGURE 5.17: Maillage couplant des éléments $Q16$ avec le méso-modèle

avec le calcul de référence avant le départ du délaminage au niveau des appuis. Le tableau 5.4 résume les principales caractéristiques des calculs.

La figure 5.19 présente pour les différents calculs l'évolution du délaminage au cours du temps. Les figures 5.18 présentent la comparaison des aires délaminées dans l'inter-

	Zone adaptée	Cas limite	Cas défavorable
l_{Q4}	120mm	80mm	40mm
degrés de liberté	16100	10750	5470
Δt_2	$1,66 \cdot 10^{-5} ms$		
$\Delta t_1 = \Delta t_3$	$2\Delta t_2$		
Temps CPU	7,5h	6h	2,5h

TABLE 5.4: Caractéristiques des calculs couplant éléments $Q16$ et méso-modèle

face médiane et l'évolution de l'endommagement le long de cette même interface pour le même pas de temps de calcul. Les différents résultats sont analysés par la suite.

Zone adaptée Pour ce premier maillage, les longueurs des différentes zones du maillage sont définies de telle sorte que la zone délaminée n'atteigne jamais les frontières entre les sous-domaines.

Les résultats obtenus pour cet exemple sont identiques aux résultats du calcul de référence, aussi bien en terme d'instant d'initiation que d'aire délaminée à la fin du calcul (c.f. figure 5.18). L'utilisation d'éléments $Q16$ dans les zones non endommagées de la structure permet donc de représenter correctement la cinématique générale de ces zones et assure une prédiction correcte des dégradations dans la zone de la structure concernée. On pourra noter que, à qualité de résultat identique, le nombre de degrés de liberté est ici pratiquement divisé par deux, ainsi que le temps de calcul.

Cas limite : arrivée du délaminage sur une frontière Pour ce cas, la zone centrale est définie de telle sorte que le délaminage atteigne les frontières entre sous-domaines à la fin du calcul. La figure 5.18 montre que l'instant d'initiation du délaminage est si-

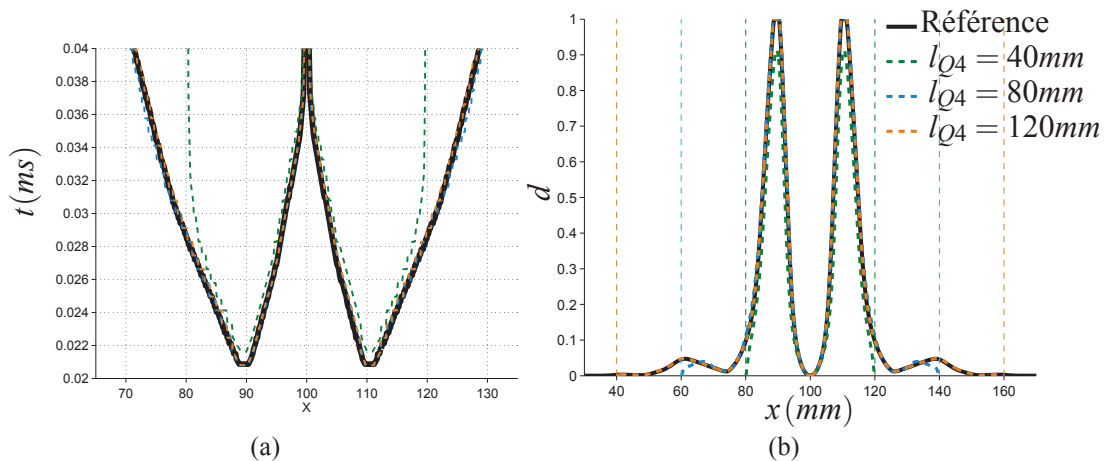


FIGURE 5.18: Comparaison de l'évolution de l'endommagement dans l'interface médiane

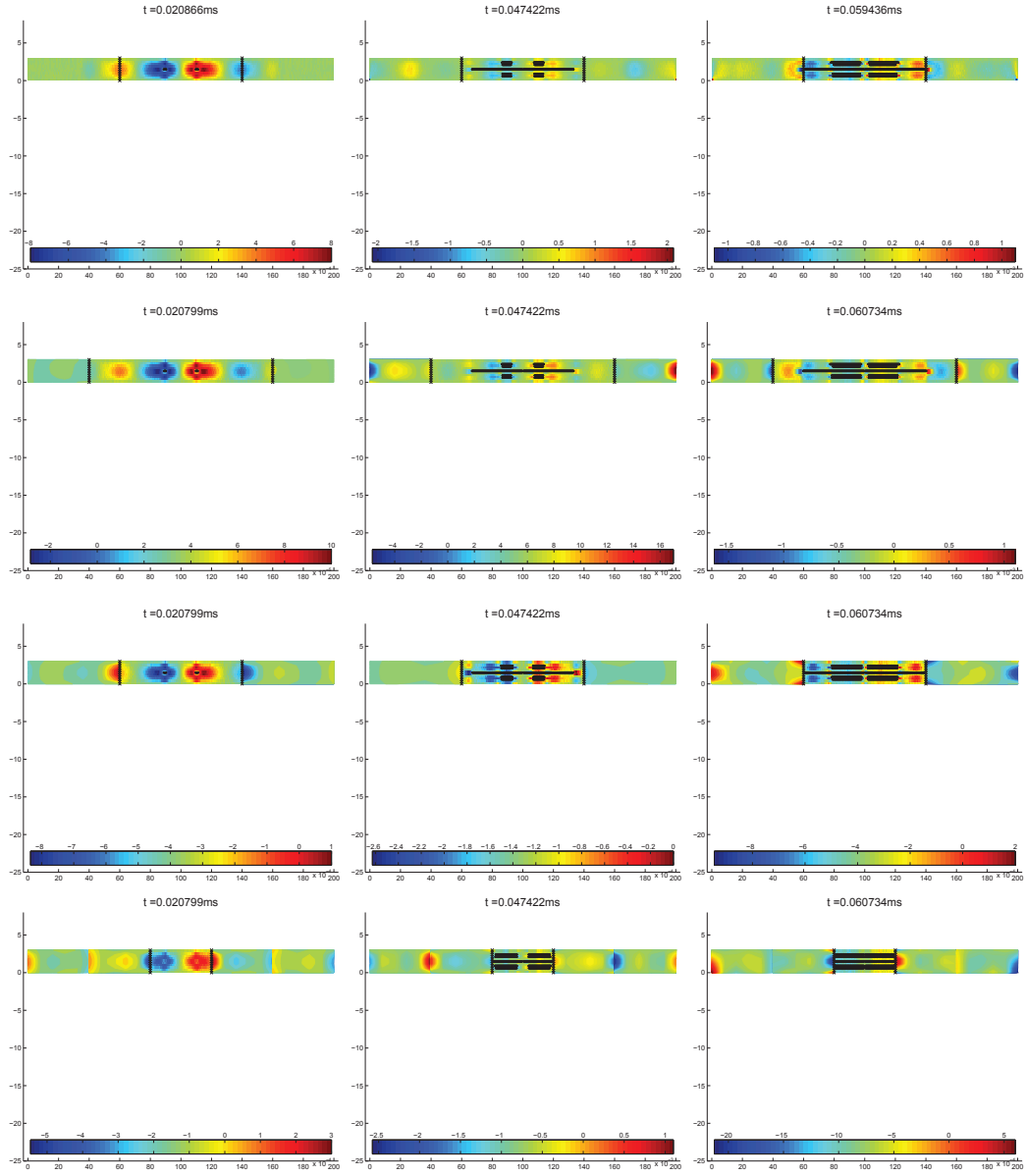


FIGURE 5.19: Avancée du délaminage et déformation ϵ_{xz} pour les différents maillages : référence (1ère ligne), $l_{Q4} = 120\text{mm}$ (2ème ligne), $l_{Q4} = 80\text{mm}$ (3ème ligne), $l_{Q4} = 40\text{mm}$ (4ème ligne)

miltaire au calcul de référence. On peut cependant noter une différence dans l'évolution de l'endommagement dans la zone proche des frontières entre sous-domaines (c.f. figure 5.18).

Considérons le raccord réalisé entre les modèles $Q4$ et $Q16$, et plus particulièrement ce qui se passe au niveau d'une interface (c.f. figure 5.20). Au début du calcul, les nœuds des plis supérieurs et inférieurs sont confondus, en particulier au niveau de la frontière. Dans le cas du raccord entre deux modélisations identiques, où des interfaces sont présentes de part et d'autre de la frontière, cela ne pose pas de problème : l'ouverture de l'interface d'un côté de la frontière est transmise au domaine adjacent.

Quand le raccord se fait entre le méso-modèle et des éléments $Q16$, l'interface est liée à une modélisation dans laquelle elle n'a pas de correspondance effective. Les nœuds de l'interface étant confondus en début de calcul, leur discrétisation sur la frontière Γ entre les sous-domaines est également confondue : il y a bien deux nœuds différents sur l'interface, mais superposés. Ayant les mêmes coordonnées, des vitesses identiques sont imposées aux deux nœuds de l'interface au cours du calcul. Ils sont ainsi artificiellement maintenus confondus. L'endommagement, piloté par le saut de déplacements entre les plis supérieurs et inférieurs, ne peut donc pas évoluer.

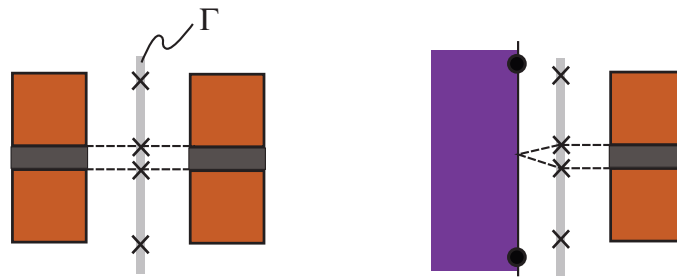


FIGURE 5.20: Discretisation de la frontière entre deux modélisation de type méso-modèle et entre deux modélisations différentes

Pour représenter correctement la propagation du délaminage, la modélisation doit être modifiée au moment opportun. Un premier indicateur de changement est la longueur de la *process zone*. Un critère de changement de modélisation peut en effet être le suivant : quand le front de délaminage est à une distance de la frontière égale à la longueur de la *process zone*, un changement de modélisation doit être réalisé dans la zone maillée avec des éléments $Q16$.

Pour le calcul de référence, nous avons vu que les multiplicateurs de Lagrange peuvent également constituer un indicateur. La figure 5.21 présente l'évolution des composantes tangentielle et normale de ces multiplicateurs. Comme précédemment, on considère ici les efforts Λ appliqués sur les plis supérieur et inférieur de l'interface médiane sur la frontière Γ_1 . L'évolution de l'endommagement dans l'interface la plus proche est reportée. Comme pour le calcul de référence, les multiplicateurs ne représentent pas un indicateur pertinent pour définir un changement de modélisation à l'approche du front de délami-

nage.

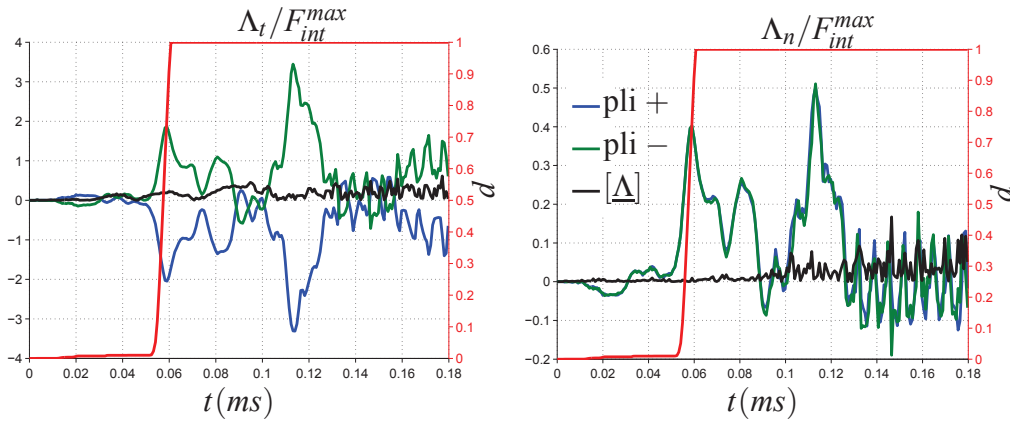


FIGURE 5.21: Évolution des multiplicateurs de Lagrange et de l'endommagement pour le calcul $l_{Q4} = 80mm$

Cas défavorable : non détection du changement de modélisation Pour ce dernier maillage, la longueur de la zone centrale est encore réduite. L'initiation du délaminage est alors retardée par rapport au calcul de référence. Le délaminage apparaissant dans l'interface médiane atteint très rapidement les frontières du domaine. De plus, des délaminages apparaissent dans l'ensemble des interfaces de l'empilement plus tôt que dans le calcul de référence (c.f. figure 5.19).

Pour cet exemple, la figure 5.18(b) montre que la totalité de la *process zone* n'est pas contenue dans le domaine central. Cet exemple montre ainsi que la description correcte de l'initiation du délaminage requiert l'utilisation d'un domaine maillé finement suffisamment grand pour que la totalité de la *process zone* soit définie.

4.2.3 Conclusions

Le couplage des éléments $Q16$ et du méso-modèle conduit à des résultats probants. L'instant et la localisation du délaminage sont prédits précisément, ainsi que les aires délaminées. Les éléments $Q16$ permettent donc de représenter correctement la cinématique globale de coque de la structure. Il faut cependant noter que quand le délaminage approche des frontières entre les domaine $Q4$ et $Q16$, la propagation du délaminage est faussée.

En effet, l'absence d'interfaces délaminantes dans les zones maillées par des éléments $Q16$ entraîne des sous-estimations des endommagements dans les zones proches des frontières. Des délaminages parasites au niveau des raccords sont ainsi évités.

Cette lacune de modélisation met en lumière deux points importants. D'une part, si la zone maillée avec des éléments $Q4$ est trop restreinte, le délaminage atteint rapidement les limites de modélisation. Son initiation risque d'autre part d'être mal estimée. Une

estimation de la longueur de la *process zone* est donc nécessaire pour définir une zone suffisamment grande.

D'autre part, un changement de modélisation doit être effectué pour pouvoir suivre la propagation du délaminage. Des critères doivent être mis en place pour détecter l'instant de ce changement. La longueur de la *process zone* semble être *a priori* un indicateur pertinent.

Enfin, des délaminages peuvent aussi s'initier dans des zones représentées avec une modélisation de coque comme nous l'avons vu dans l'exemple présenté ici. Un critère est alors nécessaire pour détecter ce cas de figure. Dans ces travaux, nous ne nous intéresserons pas à ce point, mais il est cependant important de le garder à l'esprit pour la mise en place de la méthode finale.

5 Bilan

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode de reconstruction des déplacements de plaque exacte à l'ordre deux. Ceci nous a permis de définir pour la suite de l'étude un élément Q_{16} , qualifié de coque 3D, permettant de représenter à moindre coût la cinématique globale du stratifié.

Sur un exemple, le couplage des modélisations "3D" et "coque" a été vérifié. Des limitations ont ainsi pu être identifiées quant au suivi du délaminage dans la structure. Un changement de modélisation est notamment nécessaire avant que le délaminage n'atteigne les frontières du domaine maillé finement. Avec la méthode présentée ici, ceci conduirait à un remaillage des zones maillées avec des éléments de coque et à un nouveau calcul des matrices de raideurs, masse et localisation nécessaires au calcul.

Afin d'éviter ce processus coûteux de remaillage, une méthode conservant la modélisation globale de coque est présentée dans le chapitre suivant.

Utilisation d'une échelle globale continue de coque pour le calcul multi-échelle temps-espace du délaminage

Afin d'éviter tout remaillage en cours de calcul, la méthode mise en place ici permet d'utiliser une échelle globale de coque sur l'ensemble de la structure étudiée avec des patches locaux, permettant de raffiner la modélisation. Les problématiques liées au couplage des échelles spatiales et temporelles sont soulignées et illustrées sur des exemples académiques.

Sommaire

1	Principes généraux et équations du problème	120
1.1	Présentation générale de la méthode proposée	120
1.2	Équations du problème	122
2	Gestion des échelles spatiales	122
2.1	Analyse des difficultés	122
2.2	Différenciation des problèmes local et global	123
2.3	Illustrations	127
3	Gestion des échelles temporelles	130
3.1	Algorithme de résolution	130
3.2	Interpolation des vitesses du problème global	133
4	Bilan	137

1 Principes généraux et équations du problème

L'objectif de la méthode présentée ici est de tirer parti de deux caractéristiques du problème à traiter. D'une part, les structures sont de type coque et ont des dimensions caractéristiques importantes. Des éléments de coque peuvent être utilisés. Ils permettent de limiter les coûts de calcul tout en assurant une représentation précise de la dynamique de la structure.

D'autre part, l'estimation précise des zones délaminées requiert l'utilisation d'une modélisation fine du matériau. La longueur caractéristique de la *process zone* du phénomène étant très petite devant les dimensions de la structure, nous avons vu dans le chapitre précédent que le maillage fin d'une zone restreinte est suffisant pour prédire précisément initiation et propagation.

1.1 Présentation générale de la méthode proposée

La méthode proposée ici est ainsi basée sur l'utilisation d'un maillage global de la structure, réalisé avec des éléments de coque 3D. Dans les zones d'intérêt de la structure, des patchs locaux utilisant le méso-modèle sont superposés au maillage coque existant. Ils permettent alors de décrire l'initiation puis la propagation du délaminage dans la structure. La figure 6.1 présente le type de maillage utilisé.

Par la suite, la zone de la structure maillée avec des éléments de type coque sera notée Ω_G et la zone maillée finement Ω_I . On notera Ω_G^g la partie de la structure où un unique maillage de coque existe, soit $\Omega_G^g = \Omega_G \setminus \Omega_I$. Enfin, on notera Γ l'ensemble des frontières entre le domaine global et le patch local.

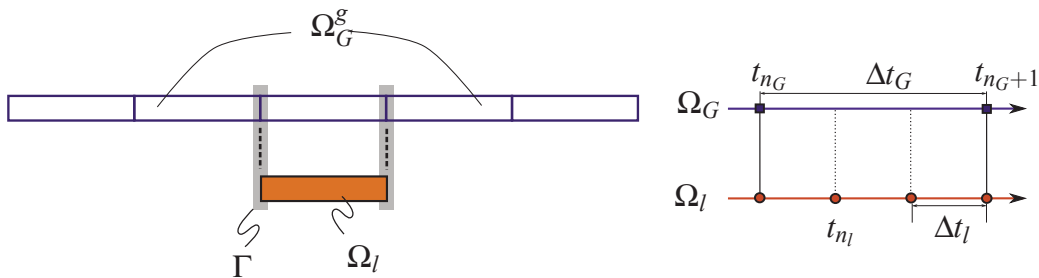


FIGURE 6.1: Définition du problème multi-échelle considéré : maillages et discrétisations temporelles associées

Le domaine global Ω_G est maillé par des éléments $Q16$. Dans le domaine local Ω_I , un maillage plus fin, utilisant des éléments linéaires $Q4$ et éventuellement des éléments d'interface, est réalisé. Les frontières entre les deux domaines sont notées Γ_i .

Gestion des échelles spatiales Au niveau spatial, on se propose de coupler les deux maillages au niveau des frontières communes, et de suivre ainsi une approche similaire à

celle adoptée dans [Whitcomb, 1991] et [Gendre *et al.*, 2009]. Les problèmes à traiter ici sont cependant des problèmes de dynamique transitoire.

Plusieurs choix de modélisation sont faits ici :

- les patches sont toujours coïncidents avec un élément de coque 3D du maillage global (c.f. figure 6.1) ;
- les frontières entre maillages sont orientées dans l'épaisseur de la coque. Autrement dit, le transfert d'information entre les deux modèles se fait uniquement dans l'épaisseur de la plaque, la frontière entre les modèles est toujours coïncidente avec un côté d'un élément de coque ;
- les efforts extérieurs et conditions aux limites sont appliqués uniquement sur le maillage global.

Ainsi, les informations transmises de l'échelle globale vers l'échelle locale doivent rendre compte de la cinématique globale de la structure. A l'inverse, les informations transmises depuis l'échelle locale vers l'échelle globale doivent refléter le changement de raideur éventuel de la structure, causé par le délaminage.

Gestion des échelles temporelles L'utilisation de schéma explicite conduit à des pas de temps critiques différents dans le maillage local et global. Afin de tirer parti de ce point, on se propose de conserver les pas de temps optimaux dans chacun des maillages et de s'inspirer des travaux de [Gravouil et Combescure, 2001] pour réaliser le couplage temporel entre les domaines.

Le pas de temps du domaine global sert de référence pour le calcul. La figure 6.1 présente la discrétisation temporelle associée à chaque maillage. Soit Δt_G le pas de temps lié au maillage global de la structure et Δt_l celui du maillage local. Comme précédemment, le pas de temps global est choisi de telle sorte qu'il soit un multiple du pas de temps local, tout en restant inférieur au pas de temps critique du maillage global (c.f. équation 4.7).

Évolution de la modélisation La propagation du délaminage dans la structure nécessite de considérer l'évolution de la modélisation au cours du calcul. D'une part, l'activation de nouveaux patches doit permettre de suivre l'avancée du délaminage dans la structure. D'autre part, la présence d'une fissure dans l'épaisseur de la plaque engendrant des modifications dans son comportement, les changements de raideurs doivent être répercutés dans le maillage global.

Ces deux points nécessitent la mise en place de critères pour décider d'activer ou désactiver des patches. Quand des patches sont désactivés, la fissure présente dans la structure doit être prise en compte dans le maillage global de coque, ce qui nécessite la mise en place d'une modélisation particulière de ce cas. Le travail présenté ici est concentré sur la mise en place du couplage entre les deux échelles de modélisation, ces deux points ne sont donc pas abordés ici. Ils représentent cependant des ingrédients indispensables pour la mise en place d'une méthode multi-échelle temps-espace complète de représentation du délaminage.

1.2 Équations du problème

Les équations du problème sont similaires à l'équation 4.1. La principale différence réside dans le fait qu'une distinction est réalisée entre les sous-domaines. On dispose désormais d'un domaine "global" associé au maillage global de la structure, et de sous-domaines "locaux" associés aux patches. Les équations de ces deux types de domaine sont alors considérées séparément. Pour développer les équations, on se place dans le cas d'un problème similaire à celui décrit dans la figure 6.1, c'est à dire ne comportant qu'un seul patch local.

$$\begin{cases} (\mathbb{M}^G + \beta_G \Delta t_G^2 \mathbb{K}^G) \{ \underline{\ddot{U}} \}_{n_G+1}^G = \underline{F}_{n_G+1}^{ext} - \mathbb{K}^G \{ {}^P \underline{U} \}_{n_G+1}^G + \underline{R}_{n_G+1}^G \\ (\mathbb{M}^l + \beta_l \Delta t_l^2 \mathbb{K}^l) \{ \underline{\ddot{U}} \}_{n_l+1}^l = -\mathbb{K}^l \{ {}^P \underline{U} \}_{n_l+1}^l + \underline{R}_{n_l+1}^l \\ \sum_k \mathbb{C}^k \{ \underline{\dot{U}}^k \}_{n_l+1} = \underline{0} \end{cases} \quad (6.1)$$

Les matrices \mathbb{C}^k représentent comme dans les chapitres précédents des matrices de localisation permettant de récupérer les degrés de liberté sur les frontières entre les maillages. Les termes $\underline{R}_{n_G+1}^G$ et $\underline{R}_{n_l+1}^l$ renvoient aux informations transmises entre les deux échelles.

La première question à étudier est alors le type d'information à transmettre entre les échelles. Dans un deuxième temps, il est important d'étudier la gestion de pas de temps de calcul différents dans les deux maillages considérés.

2 Gestion des échelles spatiales

Dans cette section, les pas de temps sont considérés comme étant égaux dans les deux maillages. L'objectif est ici de définir les quantités qui vont être transmises entre les deux échelles de modélisation au cours du calcul. On considérera par la suite l'exemple défini dans la figure 6.1.

Les informations transmises du maillage global vers le maillage local doivent permettre à ce dernier de se déformer selon la cinématique macroscopique de la structure. À l'inverse, les dégradations apparaissant dans le maillage local doivent être répercutées au niveau du maillage global pour représenter au mieux la cinématique macroscopique endommagée.

2.1 Analyse des difficultés

L'application directe de la méthode multi-pas de temps (c.f. équation 4.3) sur le maillage considéré ici conduit à des résultats erronés et à un comportement trop raide de la structure.

À titre d'illustration, considérons l'exemple d'une poutre en flexion (c.f. figure 6.2). Le maillage global est réalisé par des éléments $Q16$ et un maillage local est superposé dans la zone proche de l'encastrement (maillage M). La figure 6.3 présente le déplacement en bout de poutre comparé avec le calcul de référence d'une part, et le calcul avec

décomposition de domaine correspondant d'autre part (maillage D). Alors que la solution obtenue avec la méthode de décomposition de domaine multi pas de temps présentée précédemment est identique à la solution de référence, la solution issue du calcul avec une superposition des maillages donne des résultats très différents.

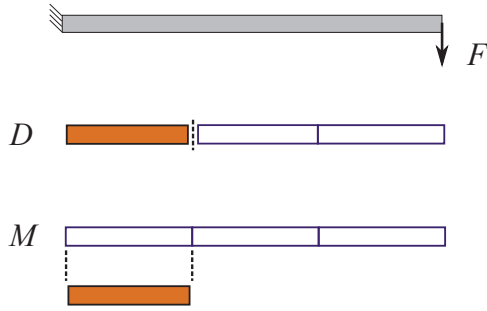


FIGURE 6.2: Exemple de flexion simple et maillages : décomposition de domaine (D) et superposition (M)

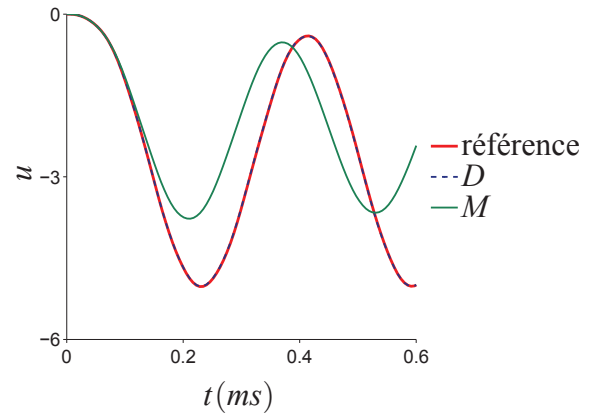


FIGURE 6.3: Comparaison des déplacements en bout de poutre pour les différents maillages

Considérons le premier pas de temps de calcul. La résolution des problèmes “libres” dans les domaines local et global conduit, dans le domaine global, à la solution exacte du problème pour ce pas de temps : $\dot{u}^{G,F} = \dot{u}^G$. Dans le domaine local, rien ne se passe puisqu’aucun effort n’est appliqué : $\dot{u}^{l,F} = 0$.

Le raccord entre les modèles est réalisé lors de la résolution du problème “lié”. La continuité des vitesses est alors imposée au niveau des frontières entre les deux domaines. Le saut de vitesse \underline{B} entre les deux solutions du problème “libre” est ainsi calculé, et sert de base pour le calcul des efforts Λ à appliquer, qui peuvent être exprimés sous la forme :

$$\Lambda = m_{eq} \frac{\dot{u}^G}{\Delta t} \quad (6.2)$$

où m_{eq} est homogène à une masse et Δt est le pas de temps du calcul. L’application de ces efforts à chacun des domaines conduit ainsi au calcul d’un terme correctif qui va venir modifier la solution du problème global, soit : $\widetilde{\dot{u}^G} = \dot{u}^G + \dot{u}^{G,cor}$. La solution calculée à l’issue du processus pour le problème global ne correspond donc pas à la solution réelle recherchée. Une adaptation de la méthode utilisée jusqu’à présent doit donc être réalisée.

2.2 Différenciation des problèmes local et global

Une approche similaire est conservée, mais la résolution des problèmes local et global sont différenciés.

Dans le problème global, la solution est séparée en deux parties. La première, notée $\underline{u}^{G,p}$ correspond à la solution élastique du problème. Pour un comportement purement

élastique, cette solution est exacte, les éléments ayant été choisis dans l'optique de représenter la solution de coque exacte. Le maillage local n'est alors pas pris en compte. La seconde partie de la solution, $\underline{u}^{G,c}$ correspond à une correction éventuelle apportée par le maillage local. La solution du problème global s'écrit donc :

$$\underline{u}_{n+1}^G = \underline{u}_{n+1}^{G,p} + \underline{u}_{n+1}^{G,c} \quad (6.3)$$

Pour le problème local, on conserve la séparation de la solution en une partie libre et une partie liée :

$$\underline{u}_{j+1}^l = \underline{u}_{j+1}^{l,F} + \underline{u}_{j+1}^{l,L} \quad (6.4)$$

2.2.1 Résolution du problème local

On se place ici à un pas de temps t_{n+1} du calcul et on suppose que l'on dispose de la solution $\underline{u}^{G,p}$ pour ce même pas de temps.

La résolution du problème "libre" consiste alors à résoudre l'équation :

$$\mathbb{M}^l \ddot{\underline{U}}_{n+1}^{l,F} = -\underline{F}_{n+1}^i - \mathbb{K}^l \underline{U}_{n+1}^{p,l} \quad (6.5)$$

où \underline{F}^i représente les efforts des interfaces présentes dans le maillage. On pourra noter l'absence d'effort extérieur dans cette équation, ceux-ci étant appliqués uniquement sur le maillage global.

Pour le problème "lié", les vitesses du problème global $\dot{\underline{u}}_{n+1}^{G,p}|_{\Gamma}$ sont imposées sur les frontières Γ , ce qui revient à résoudre les équations :

$$\begin{cases} \mathbb{M}^l \ddot{\underline{U}}_{n+1}^{l,L} = \mathbb{C}^{lT} \underline{\Delta}_{n+1} \\ \mathbb{C}^l \dot{\underline{U}}_{n+1}^l + \mathbb{C}^G \dot{\underline{U}}_{n+1}^{G,p} = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

En introduisant l'équation 6.4 dans l'équation ci-dessous, les équations à résoudre deviennent :

$$\begin{cases} \mathbb{M}^l \ddot{\underline{U}}_{n_l+1}^{l,L} = \mathbb{C}^{lT} \underline{\Delta}_{n_l+1} \\ \underline{\Delta}_{n_l+1} = \mathbb{H}^{l-1} \underline{B}_{n_l+1}^l \end{cases} \quad (6.7)$$

La matrice \mathbb{H}^l est une matrice concernant l'ensemble des frontières du domaine local avec le maillage global. Elle est définie par :

$$\mathbb{H}^l = \gamma_l \Delta t \mathbb{C}^l (\mathbb{M}^l)^{-1} \mathbb{C}^{lT} \quad (6.8)$$

Le vecteur \underline{B}^l permet de mesurer l'écart entre la solution en vitesse du problème global et du problème local :

$$\underline{B}_{n_l+1}^l = \mathbb{C}^l \dot{\underline{U}}_{n_l+1}^{l,F} + \mathbb{C}^G \dot{\underline{U}}_{n_l+1}^{G,p} \quad (6.9)$$

□ **Remarque :** La forme de la matrice \mathbb{H}' est semblable à la matrice \mathbb{H} définie dans les chapitres précédents dans le cas d'une décomposition de domaine classique. Il est important de souligner que la matrice utilisée ici ne dépend cependant que des quantités relatives au maillage local. En effet, les vitesses du domaine global sont considérées comme des données, et non comme une variable incomplète à corriger.

Illustration : Considérons le problème de flexion défini dans la figure 6.2. Le problème local est maintenant résolu selon la méthode décrite ci-dessus. La solution globale ne tient pas compte de la solution locale.

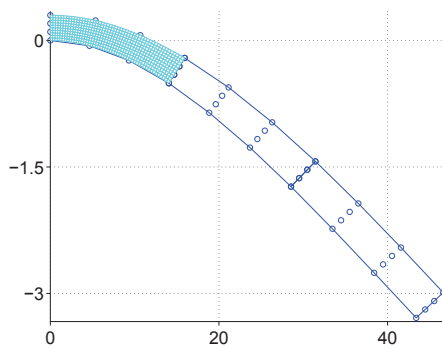


FIGURE 6.4: Déformées des maillages global et local (amplification : x10)

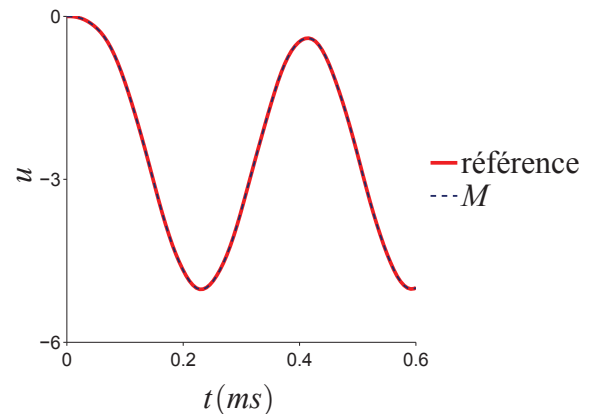


FIGURE 6.5: Déplacements en bout de poutre pour la méthode modifiée

La figure 6.4 présente la superposition des déformées des maillages local et global. Plusieurs points peuvent ainsi être soulignés :

- réaliser un transfert d'information au niveau de la frontière dans l'épaisseur de la coque est suffisant pour déformer le maillage local et assurer la représentation du comportement local ;
- choisir d'imposer les vitesses calculées dans le problème global au maillage local est un choix permettant de représenter correctement la déformée ;
- imposer les conditions aux limites au maillage global est suffisant pour assurer des conditions aux limites similaires dans le maillage local.

D'autre part, la représentation exacte de la solution globale est conservée (c.f. 6.5) : les déplacements en bout de poutre sont maintenant similaires à ceux du calcul de référence.

Enfin, la figure 6.6 présente une comparaison des champs de déformation en cisaillement dans les deux maillages. Dans le maillage local, les déformations obtenues sont similaires à celles que l'on peut observer dans le maillage global.

2.2.2 Correction apportée au problème global

La modification des caractéristiques mécaniques dans le problème local doit être répercutée dans le problème global. Pour évaluer l'écart entre solutions locale et globale,

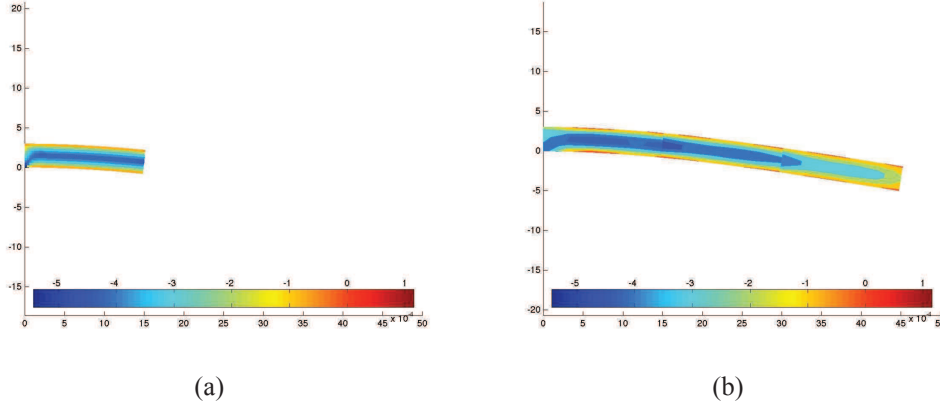


FIGURE 6.6: Comparaison des déformations en cisaillement dans le maillage local (a) et global (b)

un résidu d'équilibre est alors calculé.

Considérons le problème défini dans la figure 6.1. On se place à l'instant t_{n+1} , où l'on dispose de la solution globale $\underline{\dot{U}}_{n+1}^{G,p}$ et de la solution locale $\underline{\dot{U}}_{n+1}^l$. À ce stade du calcul, ces solutions vérifient respectivement les équilibres locaux et globaux suivants :

$$\begin{aligned} \text{Équilibre local : } \quad \mathbb{M}^l \underline{\dot{U}}_{n+1}^l &= -\underline{F}_{n+1}^i - \mathbb{K}^l \underline{U}_{n+1}^{pl} + \mathbb{C}^{lT} \underline{\Delta}_{n+1} \\ \text{Équilibre global : } \quad \mathbb{M}^G \underline{\dot{U}}_{n+1}^{G,p} &= \underline{F}_{n+1}^{ext} - \mathbb{K}^{Gp} \underline{U}_{n+1}^G \end{aligned} \quad (6.10)$$

La prise en compte des résultats du domaine local dans le domaine global passe par la correction de la solution globale. Les questions qui se posent concernent alors la nature du résidu à calculer entre les deux solutions, et à quel instant apporter la correction calculée.

2.2.3 Nature du résidu

Dans l'approche suivie dans [Gendre *et al.*, 2009], le résidu d'équilibre est calculé en comparant les efforts de réaction des maillages local et global le long de la frontière entre les modélisations. Dans le cas d'un problème de dynamique, le résidu équivalent s'écrit donc :

$$\underline{R}_\lambda = \mathbb{C}^{GT} \left(\mathbb{M}_c^G \{ \underline{\dot{U}}^G \} + \mathbb{K}_c^G \{ \underline{U}^G \} - \underline{F}^{ext} \right) + \mathbb{C}^{lT} \left(\mathbb{M}^l \{ \underline{\dot{U}}^l \} + \mathbb{K}^l \{ \underline{U}^l \} \right) \quad (6.11)$$

Un autre approche consiste à évaluer si la solution obtenue dans le domaine local vérifie l'équilibre global. Pour cela, on introduit dans l'équilibre du problème global la solution locale calculée, soit :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^{G*}, \underline{R}_{IG}(\underline{u}^{G*}) &= \int_{\Omega_{Gg}} \rho \underline{\ddot{u}}^G \underline{u}^{G*} d\Omega + \int_{\Omega_{Gg}} \underline{\underline{\sigma}}^G : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{G*}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_l} \rho \underline{\ddot{u}}^l \underline{u}^{G*} d\Omega + \int_{\Omega_l} \underline{\underline{\sigma}}^l : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{G*}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}^e \underline{u}^{G*} dS \end{aligned} \quad (6.12)$$

La discrétisation éléments finis conduit alors à l'expression matricielle :

$$\underline{R}_G = \mathbb{M}_c^G \{\ddot{U}^G\} + \mathbb{K}_c^G \{U^G\} + \mathbb{M}^{lG} \{\ddot{U}^l\} + \mathbb{K}^{lG} \{U^l\} - \underline{F}^{ext} \quad (6.13)$$

où les matrices \mathbb{M}_c^G et \mathbb{K}_c^G représentent les matrices masse et raideur du maillage global de coque assemblées dans le domaine Ω_G^g . Les matrices \mathbb{M}^{lG} et \mathbb{K}^{lG} sont des matrices de couplage entre les discrétisations coque et 3D, définies par :

$$\begin{cases} \mathbb{M}^{lG} = \int_{\Omega_l} \rho N^{GT} N^l d\Omega \\ \mathbb{K}^{lG} = \int_{\Omega_l} B^{GT} \mathbb{C} B^l d\Omega \end{cases} \quad (6.14)$$

où N^G, N^l sont les fonctions de forme associées aux éléments des maillages global et local respectivement ; B^G, B^l sont les matrices des dérivées de ces fonctions de forme ; \mathbb{C} est la matrice de comportement du matériau considéré.

L'avantage de cette seconde approche est la prise en compte de la discrétisation du domaine global dans le calcul du résidu, ce qui permet de comparer des quantités macroscopiques dans le calcul du résidu.

2.2.4 Nature de la correction

Comme pour le problème local, la correction $\ddot{u}_{n+1}^{G,c}$ est calculée en appliquant le chargement résiduel \underline{R}_{n+1} sur le problème global, soit :

$$\mathbb{M}^G \ddot{u}_{n+1}^{G,c} = \underline{R}_{n+1} \quad (6.15)$$

Les corrections en vitesse et déplacements s'écrivent alors, en reprenant le schéma de Newmark :

$$\begin{cases} \underline{u}_{n+1}^{G,c} = \gamma \Delta t_G \ddot{u}_{n+1}^{G,c} \\ \underline{u}_{n+1}^{G,c} = \beta \Delta t_G^2 \ddot{u}_{n+1}^{G,c} \end{cases} \quad (6.16)$$

Dans le cas d'un schéma explicite ($\beta = 0$), la correction s'applique uniquement aux vitesses et accélérations. Les déplacements sont impactés uniquement au pas de temps suivant.

2.3 Illustrations

Les exemples présentés ici sont basés sur un cas test 1D (c.f. figure 6.7). Dans un premier temps, le même pas de temps est utilisé dans les maillages global et local.

Deux cas sont considérés : $E_l = E_G$ et $E_l = 1/2 E_G$. Les résultats des calculs multi-échelles sont comparés à la solution du problème de référence mono-échelle associé défini dans la figure 6.7. L'arrêt des itérations pour un pas de temps est fixé par un critère, basé sur la comparaison entre les efforts résiduels calculés et l'effort extérieur appliqué à la structure au pas de temps considéré. Dans les deux cas présentés ici, le résidu à la fin des itérations est de l'ordre de $10^{-4} F^{ext}$.

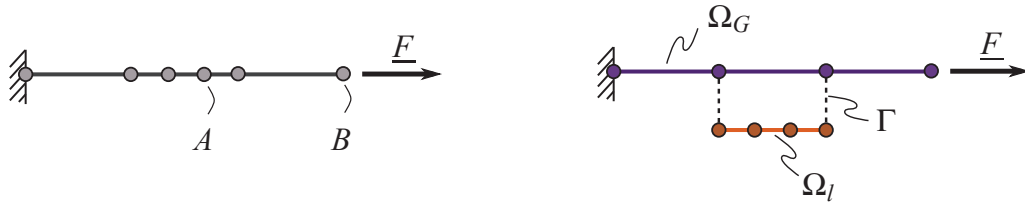


FIGURE 6.7: Exemples 1D de référence (a) et multi-échelle (b)

Dans le cas où $E_l = E_G$, la solution du problème global est la solution recherchée, le problème local n'apporte donc aucun renseignement supplémentaire. Le nombre d'itérations sur chaque pas de temps est alors très faible pour les deux types de résidus (c.f. figure 6.8). Quand $E_l = 1/2E_G$, le nombre d'itérations est plus important. Le comportement global et le comportement local sont alors différents, et la modification de rigidité du maillage local doit être répercutée au niveau global. Le taux de convergence pour les deux résidus est semblable (c.f. figure 6.9).

Les figures 6.10 et 6.11 présentent les déplacements, vitesses et accélérations pour le calcul de référence et les calculs multi-échelles en 2 nœuds du maillage (définis dans la figure 6.7). Le calcul réalisé avec le résidu de type R_λ présente des résultats similaires au calcul de référence, notamment au niveau des déplacements et des accélérations.

On pourra noter que les résultats obtenus avec le résidu de type R_{lG} présentent des

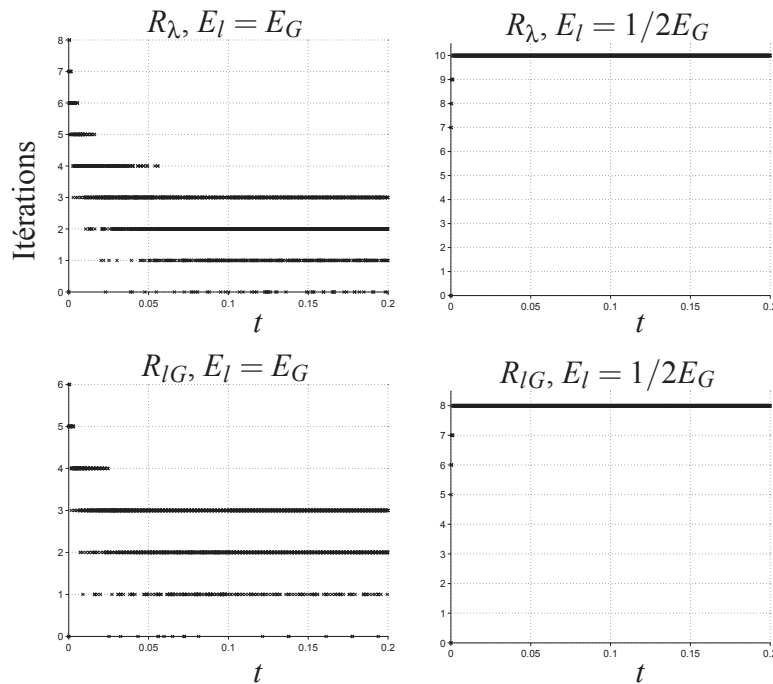


FIGURE 6.8: Évolution du nombre d'itérations pour chaque pas de temps pour les différents problèmes

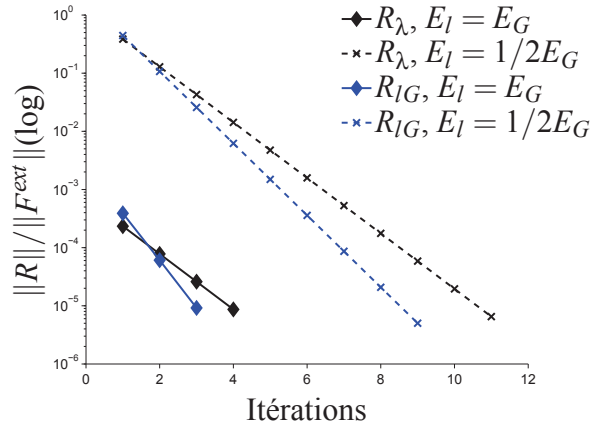


FIGURE 6.9: Évolution de la norme du résidu au cours des itérations pour un pas de temps

différences relativement importantes par rapport au calcul de référence. On pourra notamment noter un décalage temporel de la solution par rapport au calcul de référence.

Ainsi, la solution obtenue avec le résidu de type \underline{R}_λ permet d'obtenir de meilleurs résultats.

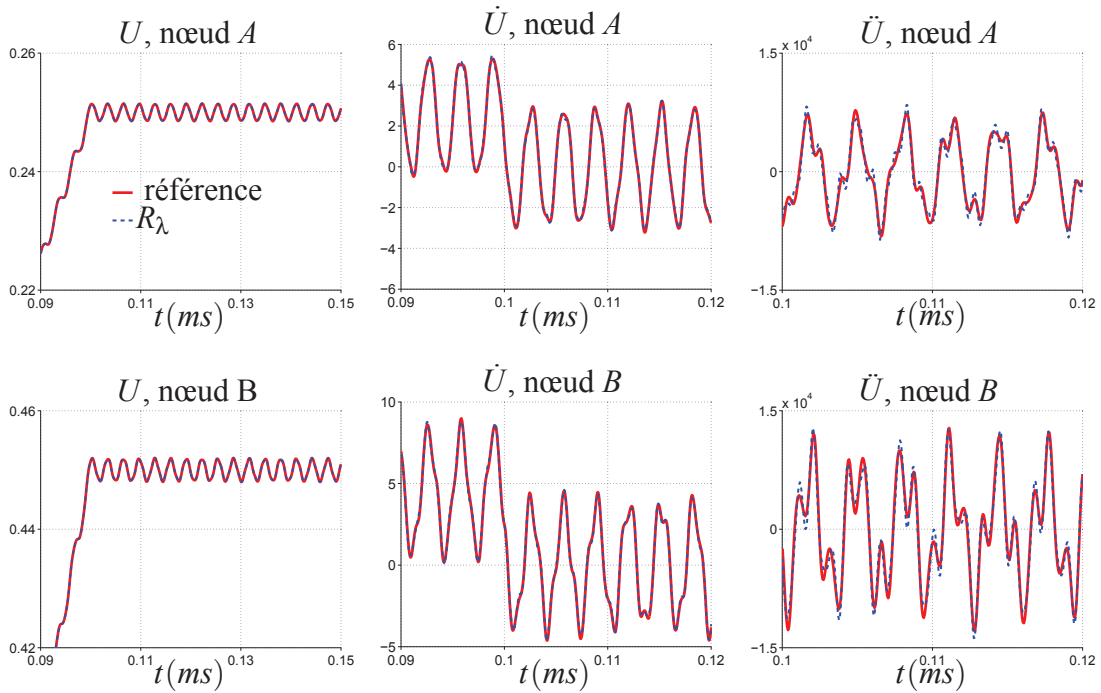


FIGURE 6.10: Comparaison des quantités cinématiques pour le cas du résidu R_λ (cas $E_l = E_G$)

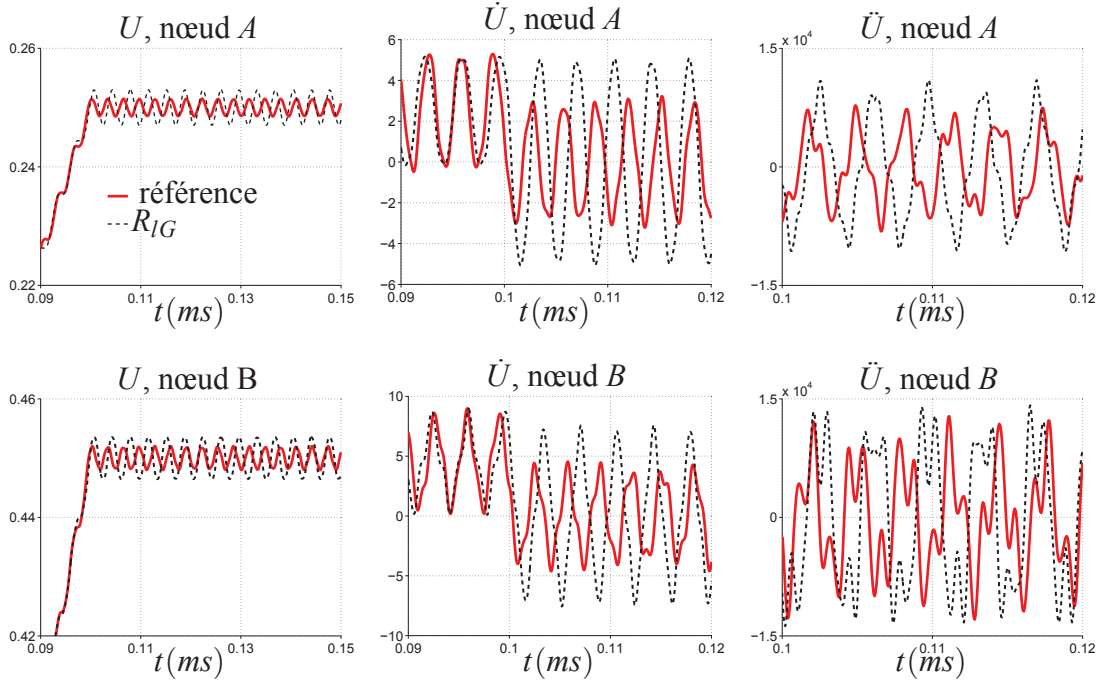


FIGURE 6.11: Comparaison des quantités cinématiques pour le cas du résidu R_{IG} (cas $E_l = E_G$)

3 Gestion des échelles temporelles

Considérons maintenant une discrétisation temporelle différente dans les maillages local et global. Le pas de temps dans le maillage local sera noté Δt_l , celui dans le maillage global Δt_G .

3.1 Algorithme de résolution

Les pas de temps sont définis tels que :

$$\begin{cases} \Delta t_l < \Delta t_l^c \\ \Delta t_G = N \Delta t_l \text{ tel que } \Delta t_G < \Delta t_G^c \end{cases} \quad (6.17)$$

où Δt_l^c et Δt_G^c sont les pas de temps critiques dans chacun des maillages, et N un entier. On se place ainsi dans les conditions de stabilité décrites dans [Combescure et Gravouil, 2002].

L'avancée du calcul dans le temps est pilotée par la discrétisation temporelle du problème global. Considérons un cycle de calcul entre t_{n_G} et t_{n_G+1} . Dans un premier temps, le calcul est réalisé sur le maillage global, ce qui permet d'obtenir une solution $\underline{u}^{G,p}$ associée au maillage global au pas de temps t_{n_G+1} . Ces résultats sont ensuite utilisés pour résoudre le problème dans le maillage local sur la discrétisation temporelle fine du problème. Lorsque les problèmes local et global disposent des solutions au pas de temps

global t_{n_G+1} , une correction peut être apportée à la solution globale si nécessaire.

L'algorithme de résolution est décrit dans l'algorithme 2. On pourra noter que la correction de la solution globale entraîne des itérations sur le problème local. En effet, le calcul de la solution locale est basé sur les vitesses calculées dans le problème global. Une modification de la solution globale affecte donc la solution locale.

Algorithm 2 Méthode multi-échelle en espace et en temps*Initialisation :*

- ☐ Chargement des maillages
- ☐ Calcul des pas de temps de calcul Δt_l et $\Delta t_G = N\Delta t_l$

Boucle sur les pas de temps Δt_G **while** $t < T$ **do****■ Résolution du problème global :****if** $j_g \neq j$ **then**

- ☐ Résolution du problème global : $\mathbb{M}^G \underline{\ddot{U}}_{j_g} = \underline{F}_{j_g}^{ext} - \mathbb{K}^{Gp} \underline{U}^G$
 - ☐ Mise à jour du marqueur temporel global : $j_g = j_g + N$
- end if**

*Jusqu'à convergence des calculs***while** $\|R_{j_g}\| > \alpha$ **do****■ Résolution du problème local : itérations sur les pas de temps locaux Δt_l** **for** $il = 1 \dots N$ **do**

- ☐ Interpolation des vitesses globales sur les pas de temps locaux
- ☐ Calcul des multiplicateurs de Lagrange : $\underline{\Lambda}_{j_l} = \mathbb{H}^{l-1} \underline{B}_{j_l}$
- ☐ Résolution du problème "libre" : $\mathbb{M}^l \underline{\ddot{U}}_{j_l}^{l,F} = -\mathbb{K}^{lp} \underline{U}^l$
- ☐ Résolution du problème "lié" : $\mathbb{M}^l \underline{\ddot{U}}_{j_l}^{l,L} = \mathbb{C}^{lT} \underline{\Lambda}_{j_l}$
- ☐ Mise à jour de la solution : $\underline{\ddot{U}}_{j_l}^l = \underline{\ddot{U}}_{j_l}^{l,F} + \underline{\ddot{U}}_{j_l}^{l,L}$
- ☐ Mise à jour du marqueur temporel local : $j_l = j_l + 1$

end for**■ Correction du problème global :**

- ☐ Évaluation du résidu :

$$\underline{R}_{j_g} = (\mathbb{M}_c^G \{\ddot{U}^G\} + \mathbb{K}_c^G \{U^G\} - \underline{F}^{ext}) + (\mathbb{M}^{lG} \{\ddot{U}^l\} + \mathbb{K}^{lG} \{U^l\})$$

if $\|\underline{R}_{j_g}\| > \alpha$ **then**

- ☐ Résolution du problème résiduel : $\mathbb{M}^G \underline{\ddot{U}}_{j_g}^{G,c} = \underline{R}_{j_g}$
- ☐ Correction de la solution : $\underline{\ddot{U}}_{j_g}^G = \underline{\ddot{U}}_{j_g}^G + \underline{\ddot{U}}_{j_g}^{G,c}$
- ☐ Mise à jour du marqueur temporel local : $j_l = j_l - N$

else

- ☐ Mise à jour du marqueur temporel : $t = t + \Delta t_G$

end if**end while****end while**

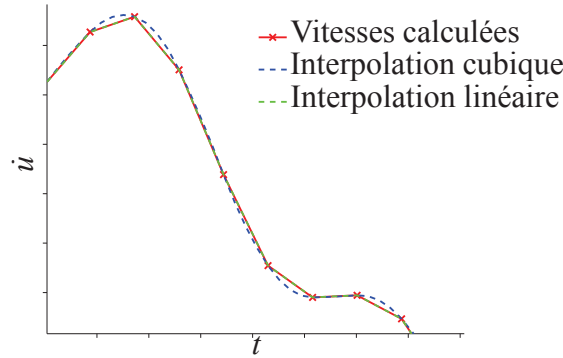


FIGURE 6.12: Interpolations linéaire et cubique des vitesses

3.2 Interpolation des vitesses du problème global

Le problème global n'est résolu que sur les pas de temps globaux Δt_G . Aussi, pour pouvoir résoudre le problème local sur tous les pas de temps fins Δt_l , la solution en vitesse du problème global sur les frontières entre sous-domaines doit être évaluée. Dans le cas du schéma de résolution multi-échelle mis en place ici, deux approximations différentes de ces vitesses sont envisagées (c.f. figure 6.12).

Pour illustrer les propos, un problème 1D défini dans la figure 6.13 sera utilisé.

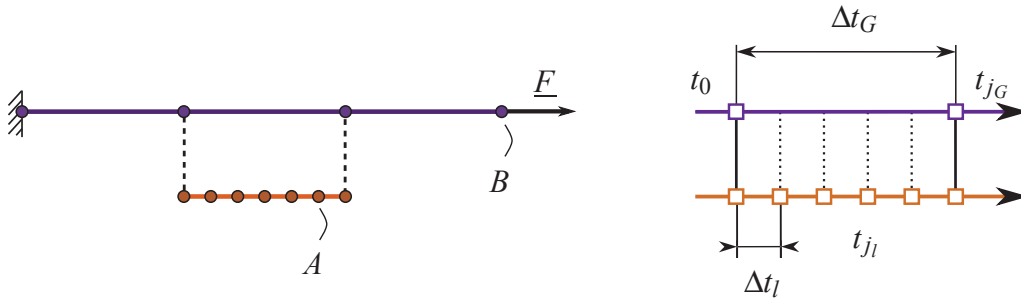


FIGURE 6.13: Échelles temporelles associées aux maillages global et local

3.2.1 Interpolation linéaire des vitesses

De la même façon que dans les chapitres 4 et 5, les vitesses du problème global sont interpolées linéairement en temps, soit :

$$\dot{U}^G(t_{j_l}) = \frac{t_{j_G} - t_{j_l}}{\Delta t_G} \dot{U}^G(t_0) + \frac{t_{j_l} - t_0}{\Delta t_G} \dot{U}^G(t_{j_G}) \quad (6.18)$$

Ce type d'interpolation revient à considérer l'accélération constante sur l'intervalle de temps Δt_G .

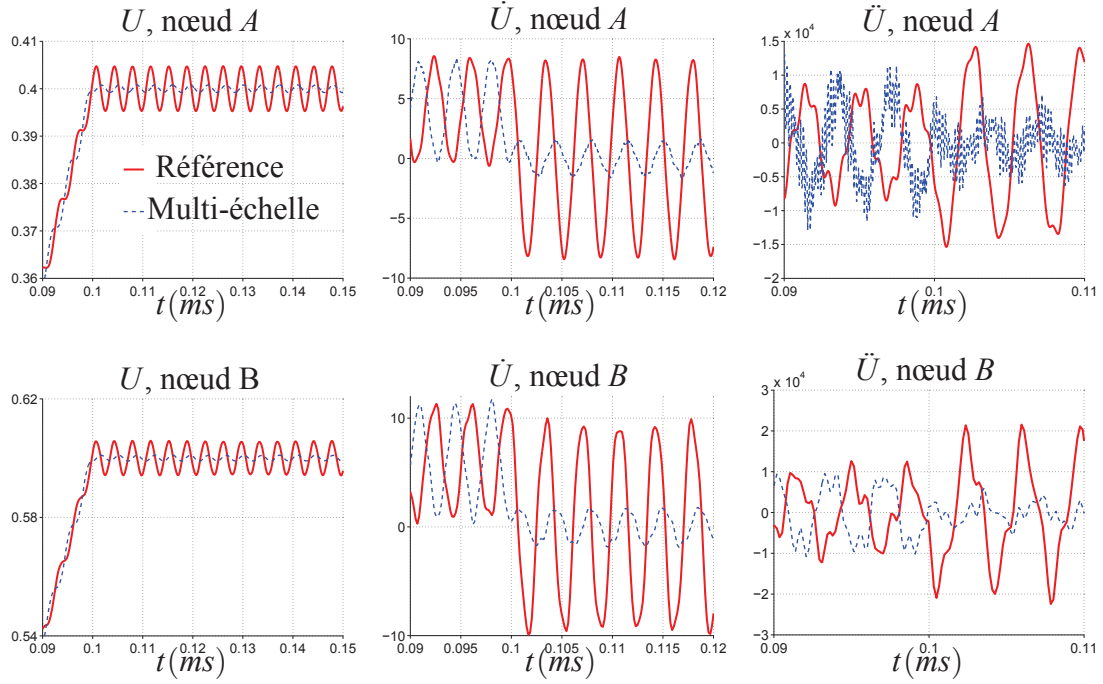


FIGURE 6.14: Comparaison des quantités cinématiques pour le calcul multi-pas de temps (interpolation linéaire des vitesses)

La figure 6.14 présente une comparaison des solutions en déplacement, vitesse et accélération entre les problèmes de référence et multi-échelle.

Des différences importantes apparaissent sur les différentes quantités cinématiques considérées. Au niveau des déplacements, la valeur moyenne est notamment estimée correctement, mais les oscillations dues au caractère dynamique du problème sont atténuées.

Au niveau des accélérations, des oscillations importantes apparaissent dans le cas du nœud A , intérieur au domaine local : la solution obtenue oscille autour de la solution de référence recherchée. Ces oscillations se retrouvent dans tout le domaine local, en particulier au niveau des frontières (c.f. figure 6.15). Sur un pas de temps Δt_G , au lieu d'être constantes, les accélérations du maillage local oscillent entre une valeur maximale et minimale.

Pour expliquer ce phénomène, considérons un nœud du maillage local sur la frontière Γ . On notera : $\Delta t_G = N\Delta t_l$, et t_{j_l} un instant quelconque sur la discrétisation temporelle locale défini par $t_{j_l} = N_l\Delta t_l$.

On impose la vitesse de la solution globale sur le problème local. Cette vitesse est estimée par une interpolation linéaire en temps (c.f. équation 6.18), qu'on peut réécrire comme :

$$\dot{u}_l = \frac{N - N_l}{N} \dot{u}_0 + \frac{N_l}{N} \dot{u}_N \quad (6.19)$$

Le schéma de Newmark (équation 3.21) et l'expression des vitesses ci-dessus per-

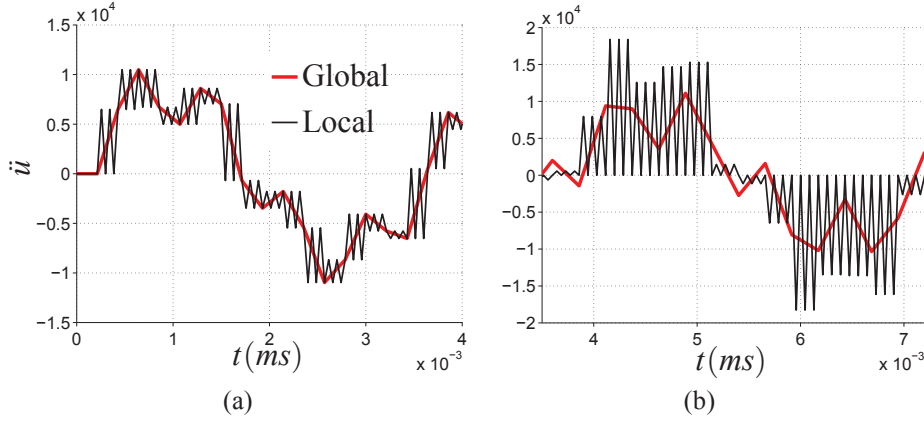


FIGURE 6.15: Solution en accélération sur la frontière Γ_1 dans les maillages global et local (interpolation linéaire) : (a) $N=5$, (b) $N=6$

mettent d'écrire l'accélération au pas de temps t_{j+1} sous la forme :

$$\ddot{u}_{l+1} = \frac{1}{\gamma \Delta t_G} (\dot{u}_N - \dot{u}_0) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ddot{u}_l \quad (6.20)$$

Considérons maintenant le cas d'un schéma de Newmark explicite, soit $\gamma = 1/2$. En écrivant \ddot{u}_l comme précédemment, on obtient alors :

$$\begin{cases} \ddot{u}_{l+1} &= \ddot{u}_{l-1} \\ \frac{\ddot{u}_{l+1} + \ddot{u}_l}{2} &= \frac{\dot{u}_N - \dot{u}_0}{\Delta t_G} = \bar{\ddot{u}} \end{cases} \quad (6.21)$$

Autrement dit, avec un schéma explicite et une interpolation linéaire des vitesses, la moyenne des accélérations sur un pas de temps local est égale à l'accélération moyenne sur l'intervalle de temps Δt_G . D'autre part, les accélérations oscillent entre deux valeurs. On retrouve donc bien ce qu'on peut observer sur la figure 6.15.

□ **Remarque :** On pourra noter que dans le cas où N est pair, on obtient : $\ddot{u}_N = \ddot{u}_0 = 0$. Dans ce cas là, la solution en accélération oscille donc entre 0 et $2\bar{\ddot{u}}$ (c.f. figure 6.15(b)).

3.2.2 Interpolation cubique des vitesses

Afin d'améliorer les résultats et d'éviter ces oscillations dues au schéma d'intégration, une interpolation cubique des vitesses est maintenant réalisée. Ne disposant d'informations qu'aux deux instants t_0 et t_{jG} , on définit la vitesse à l'instant t_{j_l} à partir des vitesses et accélérations par :

$$\dot{U}^G(t_{j_l}) = T_1 \dot{U}^G(t_0) + T_2 \ddot{U}^G(t_0) + T_3 \dot{U}^G(t_{jG}) + T_4 \ddot{U}^G(t_{jG}) \quad (6.22)$$

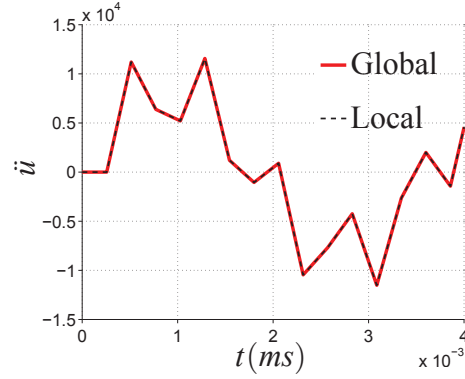


FIGURE 6.16: Solution en accélération sur la frontière Γ_1 dans les maillages global et local (interpolation cubique)

où les termes T_i sont les fonctions d'interpolation temporelle quadratiques suivantes :

$$s = \frac{t_{jl} - t_0}{\Delta t_G} \text{ et } \begin{cases} T_1 = 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ T_2 = \Delta t_G (s - 3s^2 + s^3) \\ T_3 = 3s^2 - 2s^3 \\ T_4 = \Delta t_G (-s^2 + s^3) \end{cases} \quad (6.23)$$

Évaluer les vitesses globales sur l'échelle temporelle fine par ce moyen permet ainsi de tirer parti de l'ensemble des informations disponibles sur l'échelle temporelle grossière.

La figure 6.16 présente la solution en accélération pour les problèmes global et local sur la frontière Γ_1 . Les oscillations ont disparues. Sur un pas de temps Δt_G , les accélérations dans le domaine local sont linéaires par rapport au temps.

La figure 6.17 présente les résultats en déplacement, vitesse et accélération des problèmes de référence et multi-échelle en bout de poutre et en un nœud du maillage local. Les solutions obtenues en déplacements sont maintenant identiques au problème de référence. Les résultats obtenus en vitesse et en accélération sont également améliorés par rapport au calcul utilisant une interpolation linéaire des vitesses, notamment au niveau des accélérations. Les oscillations de la solution sont en effet moins importantes.

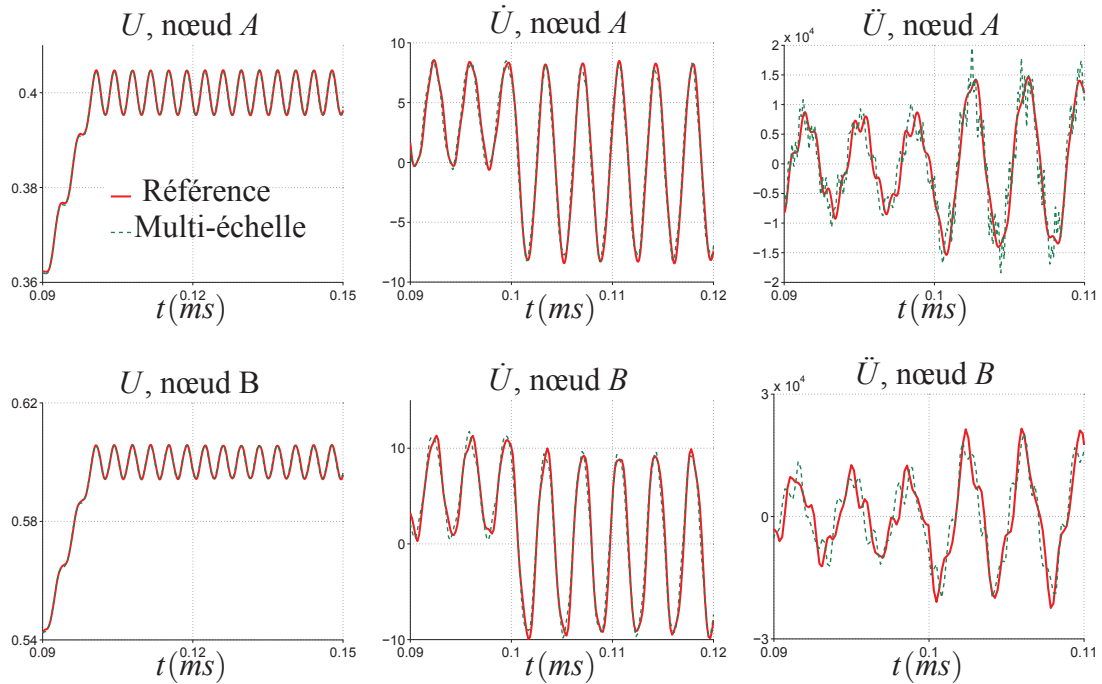


FIGURE 6.17: Comparaison des quantités cinématiques pour le calcul multi-pas de temps (interpolation cubique des vitesses)

4 Bilan

Dans cette partie, les principales idées pour le développement d'une méthode multi-échelle en temps et en espace ont été présentées. Les premiers calculs sur des cas unidimensionnels montrent des résultats encourageants. Ils ont de plus permis de souligner les problèmes liés à la mise en place complète de la méthode, notamment au sujet de l'estimation des quantités globales sur l'échelle fine et de la synchronisation des calculs.

Une évolution importante de la méthode sera la répercussion à l'échelle globale de la structure des modifications de raideur observées dans le maillage local. En effet, dans la méthode présentée ici, seules les quantités cinématiques du problème global sont corrigées. La désactivation du maillage local sans mise à jour des propriétés mécaniques du problème global entraînerait donc des résultats erronés.

Conclusions et perspectives

La principale idée à l'origine de cette thèse est qu'il est possible de réaliser le calcul précis de l'apparition et du développement de grands délaminages de structures composites sous impact en s'appuyant sur les progrès récents des approches multi-échelles. Aussi, dans le cadre de ces travaux, une stratégie multi-échelle en espace et en temps dédiée au calcul d'impact sur des structures composites a été proposée. Cette approche répond aux besoins industriels en termes de coûts de calcul et de prédictivité des résultats.

L'analyse du problème à traiter a orienté le travail vers une analyse couplée à deux échelles. Contrairement aux méthodes de décomposition de domaine classiques, l'échelle macroscopique est ici connue et facilement identifiable. Cette description macroscopique, issue de la théorie des plaques ou coques, doit rester inchangée pendant tout le calcul. Cette contrainte constitue l'originalité de l'approche envisagée, mais en engendre les principales difficultés.

Aussi, la stratégie proposée permet de tirer parti des différentes échelles du problème, aussi bien au niveau spatial que temporel, en mettant en place une échelle globale continue sur l'ensemble de la structure *via* l'utilisation d'un maillage de coque 3D. Dans les zones où cela s'avère nécessaire, un maillage local de type méso-modèle est superposé, permettant de déterminer les dégradations subies par le stratifié. L'utilisation de pas de temps de calcul différents et adaptés dans les domaines local et global permet en outre de réduire les itérations temporelles liées à la résolution du problème global. Le couplage entre les deux modélisations est assuré *via* l'échange d'informations sur les frontières. L'avantage de cette méthode par rapport à des méthodes de décomposition de domaine est la conservation tout au long du calcul d'un maillage fixe global et continu de la structure.

Dans un premier temps, l'application de méthodes de décomposition de domaine classiques au suivi du délaminage a été étudiée. Les limites de ces méthodes pour ce type de problème ont ainsi été mises en lumière : si le caractère prédictif des calculs est conservé, la taille des modèles générés reste importante sans simplification des zones non dégradées.

Ce constat a ainsi conduit à la mise en place d'une représentation de coque 3D du stratifié, pour représenter les sous-domaines de la structure non dégradés en cours de calcul. L'élément ainsi défini permet de réduire le nombre de degrés de liberté tout en conservant une description correcte de la cinématique de la coque. Le choix d'éléments de coque "3D" est justifié par la localisation des fissures dans l'épaisseur des structures.

De plus, la qualité du couplage entre les deux types de modélisation est ainsi assurée : l'élément de coque 3D choisi permet une représentation correcte à la fois des champs de contrainte et de déplacement.

D'autre part, dans le cadre d'un schéma de résolution explicite, ce type d'élément permet l'utilisation d'un pas de temps de calcul plus grand. Le choix de la méthode multi pas de temps développée dans [Gravouil et Combescure, 2001] pour résoudre le problème permet de coupler les échelles de discrétisation temporelle des deux domaines et conduit à des résultats conformes aux calculs de référence.

Cependant, bien que permettant une réduction conséquente des coûts de calcul, l'utilisation d'éléments de coque 3D en combinaison avec une méthode de décomposition de domaine présente des limites. La propagation du délaminage dans la structure peut en effet s'étendre jusqu'à des sous-domaines initialement non concernés par les dégradations, et donc maillés par des éléments de coque 3D. Le suivi du délaminage dans de tels sous-domaines requiert alors l'application de procédures de remaillage, introduisant une méso-modélisation.

L'amélioration de la stratégie passe alors par l'abandon de la méthode de décomposition de domaine et par l'utilisation d'une échelle globale continue sur l'ensemble de la structure. La superposition de maillages locaux dans les zones d'intérêt permet alors d'utiliser une modélisation plus fine du matériau de façon restreinte et de s'affranchir du remaillage. Le couplage spatial des deux domaines est réalisé par transfert d'informations. Des quantités cinématiques sont transmises du domaine global vers le domaine local, tandis que des efforts résiduels sont transférés du domaine local vers le domaine global. Ce deuxième point permet seulement une prise en compte partielle des dégradations locales dans le domaine global, aucune mise à jour des caractéristiques matériau n'étant réalisée.

Le recours à des discrétisations temporelles différentes dans les domaines local et global a une influence sur le transfert des informations. D'une part, les quantités cinématiques du domaine global doivent être estimées sur l'échelle temporelle locale, plus fine, pour mener à bien les calculs dans le domaine local. D'autre part, le transfert des efforts résiduels vers le domaine global ne peut avoir lieu que pour les pas de temps effectivement calculés. Toute correction de la solution globale conduit alors à des itérations à l'intérieur d'un pas de temps jusqu'à convergence entre les solutions globale et locale.

Les premières études ont permis la compréhension des problèmes liés à la mise en place de la méthode. Néanmoins, à l'issue de ces travaux, les perspectives de recherche restent ouvertes.

En premier lieu, la stratégie proposée doit être finalisée afin de la rendre opérationnelle au niveau industriel. Le premier point à traiter concerne la gestion des domaines locaux. L'activation automatique des patchs locaux dans la structure passe par la définition de critères pertinents, soit pour prédire l'initiation d'un nouveau délaminage, soit pour suivre un délaminage existant dans la structure. Les critères en contrainte classiquement utilisés sont une voie d'étude possible. D'autre part, afin de limiter la taille des modèles, la désactivation des domaines locaux devenus superflus en cours de calcul passe par la prise en

compte des fissures existantes au sein du maillage global. Les voies à explorer sont alors les approches de type fortes discontinuités d'une part (X-FEM, E-FEM), la mise en place de raideur équivalente d'autre part.

De plus, l'extension de la méthode à l'utilisation du méso-modèle amélioré ou à des problèmes en grandes transformations doit être envisagée.

L'utilisation de la méthode dans un cadre industriel nécessite son adaptation à des problèmes 3D. Un choix devra notamment être fait au niveau des éléments utilisés dans le maillage de coque : utilisation d'éléments de coques multi-couches ou extension de l'élément Q16 choisi dans le cadre 2D.

Enfin, l'implémentation de la stratégie dans un code industriel constitue une avancée majeure et une étape indispensable vers son utilisation industrielle. La première étape consiste alors à définir les points d'entrée possibles dans le logiciel. On pourra noter par exemple dans Abaqus/Explicit la présence de méthodes de sous-cyclage, utilisant des techniques assez proches de celles appliquées pour le couplage des échelles temporelles dans la stratégie proposée.

Bibliographie

- [Alfaiate *et al.*, 2003] ALFAIATE, J., SIMONE, A. et SLUYS, L. (2003). Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, 40:5799–5817.
- [Alfano et Crisfield, 2001] ALFANO, G. et CRISFIELD, M. (2001). Finite elements interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 50:1701 – 1736.
- [Allix *et al.*, 2006] ALLIX, O., BARANGER, E. et BLANCHARD, L. (2006). An efficient strategy for the calculation of end effects on composite pipes : The thermoelastic case. *Composite Structures*, 76:291–302.
- [Allix et Corigliano, 1996] ALLIX, O. et CORIGLIANO, A. (1996). Modelling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture*, 77:111–140.
- [Allix et Deü, 1997] ALLIX, O. et DEÜ, J.-F. (1997). Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45(1):1148–1155.
- [Allix et Dupleix-Couderc, 2009] ALLIX, O. et DUPEIX-COUDERC, C. (2009). *New Trends In Thin Structures : Formulation, Optimization and Coupled Problems*, volume 519 de *CISM*, chapitre A plate theory as a mean to compute precise 3D solutions including edge effects and related issues. Springer.
- [Allix et Ladevèze, 1992] ALLIX, O. et LADEVÈZE, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Computers and Structures*, 22:235–242.
- [Armero et Linder, 2008] ARMERO, F. et LINDER, C. (2008). New finite elements with embedded strong discontinuities in the finite deformation range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:3138–3170.
- [Ausserer et Lee, 1988] AUSSERER, M. et LEE, S. (1988). An 18 nodes solid shell element for thin shell analysis. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 26:1345–1364.
- [Azzi et Tsai, 1965] AZZI, V. et TSAI, S. (1965). Anisotropic strength of components. *Experimental Mechanics*, 5:286–288.
- [Babuska et Melenk, 1997] BABUSKA, I. et MELENK, J. (1997). The partition of unity method. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 40:727–758.
- [Barenblatt, 1962] BARENBLATT, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 190:4785–4803.

- [Bathe, 2006] BATHE, K. (2006). *Finite elements procedure*. Prentice-Hall Engineering/Science/Mathematics.
- [Bathe et Dvorkin, 1984] BATHE, K. et DVORKIN, E. (1984). A continuum mechanics based 4 nodes shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88.
- [Belytschko et Hughes, 1983] BELYTSCHKO, T. et HUGHES, T. (1983). *Computational Methods in Transient Analysis*. North-Holland.
- [Belytschko et Mullen, 1978] BELYTSCHKO, T. et MULLEN, R. (1978). Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 12(10):1575–1586.
- [Belytschko et al., 1985] BELYTSCHKO, T., SMOLINSKI, P. et LIU, W. (1985). Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3):281–297.
- [Belytschko et al., 1979] BELYTSCHKO, T., YEN, H. J. et MULLEN, R. (1979). Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17:259–275.
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques : la méthode arlequin. *Compte Rendu Académie des Sciences de Paris*, 326(2b):899–904.
- [Ben Dhia et Jamond, 2010] BEN DHIA, H. et JAMOND, O. (2010). On the use of X-FEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1403–1414.
- [Benzeggagh et Aboura, 1991] BENZEGGAGH, M. et ABOURA, Z. (1991). Délaminages modes I et II de composites à renfort tissu sollicités à faibles et grandes vitesses. *Journal de Physique III*, pages 1927–1951.
- [Bischoff et Ramm, 1997] BISCHOFF, M. et RAMM, E. (1997). Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 40:4427–4449.
- [Brank et al., 2002] BRANK, B., KORELC, J. et IBRAHIMBEGOVIC, A. (2002). Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation. *Computers and Structures*, 80:699–717.
- [Brewer et Lagace, 1988] BREWER, J. C. et LAGACE, P. A. (1988). Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials*, 22:1141–1155.
- [Briassoulis, 1988] BRIASSOULIS, D. (1988). Machine locking of degenerated shell elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 26:1749–1768.
- [Combescure et Gravouil, 2002] COMBESCURE, A. et GRAVOUIL, A. (2002). A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1129–1157.

- [Corigliano *et al.*, 2006] CORIGLIANO, A., MARIANI, S. et PANDOLFI, A. (2006). Numerical analysis of rate-dependent dynamic composite delamination. *Composites Science and Technology*, 66:766–775.
- [de Borst et Remmers, 2006] de BORST, R. et REMMERS, J. (2006). Computational modelling of delamination. *Composites Science and Technology*, 66:713–722.
- [Dugdale, 1960] DUGDALE, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100–104.
- [Farhat *et al.*, 1995] FARHAT, C., CHEN, P. et MANDEL, J. (1995). A scalable lagrange multiplier based domain decomposition method for time-dependent problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 38:3831–3853.
- [Farhat *et al.*, 1993] FARHAT, C., CRIVELLI, L. et GÉRADIN, M. (1993). On the spectral stability of time integration algorithms for a class of constrained dynamics problems. In *AIAA 34th Structural Dynamics Meeting*.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 32:1205–1227.
- [Faucher et Combescure, 2003] FAUCHER, V. et COMBESCURE, A. (2003). A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:509–533.
- [Fedorenko, 1964] FEDORENKO, R. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4:227–235.
- [Gendre *et al.*, 2009] GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(4):515–572.
- [Gravouil et Combescure, 2001] GRAVOUIL, A. et COMBESCURE, A. (2001). Multi time step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 50:199–225.
- [Gravouil et Combescure, 2003] GRAVOUIL, A. et COMBESCURE, A. (2003). Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 58:1545–1569.
- [Griffith, 1924] GRIFFITH, A. (1924). The theory of rupture. In *International Congress of Applied Mechanics*, pages 55–63.
- [Gruttmann et Wagner, 1996] GRUTTMANN, F. et WAGNER, W. (1996). Coupling of 2 and 3D composite shell elements in linear and non linear applications. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 129:271–287.

- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399.
- [Guimard, 2009] GUIMARD, J.-M. (2009). *Contribution à la modélisation de l'absorption d'énergie dans les composites stratifiés par fragmentation et délaminage sous sollicitations dynamiques*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Guimard *et al.*, 2010] GUIMARD, J.-M., ALLIX, O., PECHNIK, N. et THÉVENET, P. (2010). Characterization and modeling of rate effects in the dynamic propagation of mode-II delamination in composite laminates. *International Journal of Fracture*.
- [Guinard *et al.*, 2002] GUINARD, S., ALLIX, O., GUÉDRA-DEGEORGES, D. et VINET, A. (2002). A 3D damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science and Technology*, 62:585–589.
- [Hashagen et de Borst, 2000] HASHAGEN, F. et de BORST, R. (2000). Numerical assessment of delamination in fibre metal laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185:141–159.
- [Hashin, 1980] HASHIN, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, 47:329–334.
- [Hauptmann *et al.*, 2001] HAUPTMANN, R., DOLL, S., HARNAU, M. et SCHWEIRZERHOF, K. (2001). "Solid-shell" elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials. *Computers and Structures*, 79:1671–1685.
- [Herry, 2002] HERRY, B. (2002). *Développement d'une approche multiéchelle parallèle pour la simulation de crash automobile*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Hill, 1950] HILL, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- [Hillerborg *et al.*, 1976] HILLERBORG, A., MODEER, M. et PETERSON, P. E. (1976). Analysis of crack formation and growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782.
- [Hinton *et al.*, 2004] HINTON, M., SODEN, P. et KADDOUR, A. (2004). *Failure criteria in fiber-reinforced polymer composites : the World Wide Failure Exercise*. Elsevier.
- [Hughes et Liu, 1978] HUGHES, T. et LIU, W. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, 45:371 – 374.
- [Irwin, 1957] IRWIN, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3):361–364.
- [Jansson, 2002] JANSSON, N. E. (2002). *Modelling of delamination growth in composite structures*. Thèse de doctorat, Chalmers University of Technology.
- [Jirasek, 2000] JIRASEK, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:307–330.

- [Kerfriden *et al.*, 2009] KERFRIDEN, P., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 33(3):343–362.
- [Kim et Sony, 1984] KIM, R. Y. et SONY, S. R. (1984). Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites. *Journal of Composite Materials*, 18:70–76.
- [Klinkel *et al.*, 1999] KLINKEL, S., GRUTTMANN, F. et WAGNER, W. (1999). A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures. *Computers and Structures*, 71:43–62.
- [Klinkel et Wagner, 1997] KLINKEL, S. et WAGNER, W. (1997). A geometrical nonlinear brick element based on the EAS method. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 40:4529–4545.
- [Krueger, 2004] KRUEGER, R. (2004). Virtual crack closure technique : history, approach and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 57:109–143.
- [Krueger et Minguet, 2007] KRUEGER, R. et MINGUET, P. (2007). Analysis of composite skin-stiffener debond specimens using a shell/3D modelling technique. *Composite Structures*, 81:41–59.
- [Ladevèze, 1995] LADEVÈZE, P. (1995). A damage computational approach for composites : Basic aspects and micromechanical relations. *Computational Mechanics*, 17:142–150.
- [Ladevèze, 1992] LADEVÈZE, P. (1992). A damage computational method for composite structures. *Computers and Structures*, 44(1):79–87.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer-Verlag.
- [Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 52:121–138.
- [Ladevèze *et al.*, 2002] LADEVÈZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4869–4891.
- [Leguillon, 1999] LEGUILLON, D. (1999). A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. *International Journal of Fracture*, 100:105–120.
- [Lévêque, 1998] LÉVÊQUE, D. (1998). *Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Lubineau *et al.*, 2006] LUBINEAU, G., LADEVÈZE, P. et MARSAL, D. (2006). Towards a bridge between the micro and the mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66:698–712.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:233–241.

- [Manzoli et Shing, 2006] MANZOLI, O. et SHING, P. (2006). A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures*, 84:742–757.
- [McCune et al., 2000] MCCUNE, R. W., ARMSTRONG, G. C. et ROBINSON, D. J. (2000). Mixed-dimensional coupling in finite element models. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 49:725–750.
- [Mindlin, 1951] MINDLIN, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38.
- [Moës et al., 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 46:131–150.
- [Newmark, 1959] NEWMARK, M. (1959). A method of computation for structural dynamics. In *Proceedings of ASCE* 85.
- [Nuismer et Whitney, 1974] NUISMER, R. J. et WHITNEY, J. M. (1974). Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials*, 8:253–265.
- [Odièvre et al., 2010] ODIÈVRE, D., BOUCARD, P. et GATUINGT, F. (2010). A parallel, multiscale domain decomposition method for the transient dynamic analysis of assemblies with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1297–1306.
- [Oliver, 1996] OLIVER, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 39:3601–3623.
- [Pandolfi et al., 2000] PANDOLFI, A., GUDURU, P. R. et ORTIZ, M. (2000). Three-dimensional cohesive-element analysis and experiments of dynamic fracture in c300 steel. *International Journal of Solids and Structures*, 37:3733–3760.
- [Parisch, 1995] PARISCH, H. (1995). A continuum based shell theory for non-linear applications. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 38:1855–1883.
- [Pechnik, 2005] PECHNIK, N. (2005). Modélisation du comportement dynamique des structures composites : synthèse 2005. Rapport technique, EADS-IW.
- [Raju et al., 1988] RAJU, I. S., CREWS, J. H. et AMINPOUR, M. A. (1988). Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, 30(3):383–396.
- [Rannou et al., 2009] RANNOU, J., GRAVOUIL, A. et BAÏETTO-DUBOURG, M. (2009). A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 77:581–600.
- [Reissner, 1985] REISSNER, E. (1985). Reflexions on the theory of elastic plates. *Appl. Mech. Rev.*, 38:1453–1464.

- [Remmers, 2006] REMMERS, J. (2006). *Discontinuities in materials and structures, a unifying computational approach*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology.
- [Rybicki et Kanninen, 1977] RYBICKI, E. F. et KANNINEN, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*, 9:931–938.
- [Schellekens et de Borst, 1993] SCHELLEKENS, J. et de BORST, R. (1993). A non-linear finite element approach for the analysis of mode I free edge delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30(9):1239–1253.
- [Schiermeier et al., 1999] SCHIERMEIER, J. E., KANSAKAR, R. K., RANSOM, J. B. et STROUD, W. J. (1999). Interface elements in global/local analysis - Part 3 : shell-to-solid transition. In *The 1999 MSC worldwide aerospace conference*.
- [Series et al., 2003] SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F.-X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange, application au calcul de structure, cas du contact. In *Actes du 6^e colloque national en calcul des structures*.
- [Simo et Rifai, 1990] SIMO, J. et RIFAI, M. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 29:1595 – 1638.
- [Timoshenko et Goodier, 1970] TIMOSHENKO, S. et GOODIER, J. (1970). *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill.
- [Trovalet, 2010] TROVALET, M. (2010). *Sur un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Tsaï et Wu, 1971] TSAÏ, S. et WU, E. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5:58–80.
- [Van Der Meer et Sluys, 2010] VAN DER MEER, F. P. et SLUYS, L. (2010). Mesh-independent modeling of both distributed and discrete matrix cracking in interaction with delamination in composite. *Engineering Fracture Mechanics*, 77:719–735.
- [Wang et Choi, 1982] WANG, S. S. et CHOI, I. (1982). Boundary-layer effects in composite laminates – Part I : free-edge stress singularities. *International Journal of Composite Materials*, 49:541–548.
- [Washizu, 1982] WASHIZU, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd edition*. Pergamon Press Ltd, Oxford.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(4):1027–1031.
- [Whitcomb et Woo, 1993a] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993a). Application of iterative global/local finite element analysis - Part 1 : linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:745–756.
- [Whitcomb et Woo, 1993b] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993b). Application of iterative global/local finite element analysis - Part 2 : Geometrically non-linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:757–766.

- [Wyart *et al.*, 2007] WYART, E., COULON, D., DUFLOT, M., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2007). A substructured FE-shell/XFE-3D method for crack analysis in thin-walled structures. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 72:757–779.
- [Yang *et al.*, 2000] YANG, H., SAIGAL, S., MASUD, A. et KAPANIA, R. (2000). A survey of recent shell finite elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 47:101–127.
- [Zhou *et al.*, 2005] ZHOU, F., MOLINARI, J.-F. et SHIOYA, T. (2005). A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(9):1383–1410.
- [Zienkiewicz et Taylor, 1967] ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L. (1967). *The finite element method*, volume 1. McGraw-Hill.