

TABLE DES MATIERES

FISAORANA	i
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIERES	v
NOTATIONS	x
LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES	xiii
INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME	1
CHAPITRE 1 THEORIES SUR L’OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Historique et évolution de Programmation linéaire	3
1.3 Définition de programmation linéaire (PL)	3
1.3.1 Quelques définitions	3
1.3.2 Notations et définitions.....	4
1.4 Géométrie de la programmation linéaire	6
1.4.1 Ensembles convexes, cônes, hyperplans, polyèdres et polytopes.....	6
1.4.2 Propriétés	6
1.4.3 Géométrie du programme linéaire	8
1.5 Optimisation sous contraintes.....	10
1.6 Algorithme en programmation linéaire	11
1.6.1 Genèse de l’algorithme de PPL	12
1.6.2 Les domaines d’application	14
1.6.3 Formulation ou modélisation d’un PPL.....	15
1.7 Théorie de la complexité en programmation linéaire.....	20
1.7.1 Complexité	21
1.7.2 Complexité d’un problème et d’un algorithme.....	22
1.7.3 Classes de complexité.....	24
1.8 Identification des contraintes redondantes	25
1.8.1 Méthode des limites	29

1.8.2 Méthode de programmation linéaire.....	31
1.8.3 Méthode déterministe	34
1.8.4 Méthode heuristique	41
1.8.5 Earlier method.....	44
1.9 Conclusion	45
CHAPITRE 2 LES ELEMENTS DE BASE DE LA THEORIE TOPO- GEOMETRIQUE MZ LES CLASSES D'OBJET DE MZ.....	46
2.1 Introduction.....	46
2.2 Les objectifs alimentés	46
2.2.1 Définitions et premiers exemples.....	46
2.2.2 Les scalaires	49
2.2.3 Les indexes	49
2.3 Les objets élémentaires.....	50
2.3.1 Les espace des décisions	50
2.3.2 Postulat.....	52
2.4 Les opérations sur les décision-action.....	52
2.4.1 Amplificateur d'une décision-action	53
2.4.2 Addition de deux decision-actions.....	53
2.4.3 Axe de recherche partant d'une decision-action X_0 et de direction le vecteur decision- action V	54
2.4.4 Plan de recherche partant d'une decision-actions X_0 et de directions V_1 et V_2	54
2.4.5 Cone de recherche de sommet X_0 et de direction V_1, V_2, \dots, V_k où V_1, V_2, \dots, V_k sont des vecteurs decisions.....	55
2.5 Les contraintes techniques	55
2.6 Les contraintes de non-négativité	56
2.6.1 Cône de non-négativité.....	56
2.6.2 Face de non-négativité	57
2.6.3 Axes de non-négativité	57
2.7 Relation entre objet MZ.....	57
2.7.1 Relation entre un point-décision et une zone de contraintes techniques	58

2.7.2 Relation entre un axe de recherche $R(X_0, V)$ et une zone de contraintes technique ZCT_i	67
2.7.3 Relation entre un cône plan de recherche $C(X_0, V_1, V_2)$ avec V_1 et V_2 linéairement indépendants et une zone de contraintes technique ZCT_i	73
2.7.4 Recherche suivant un axe $R(X_0, V)$ dans la zone de non négativité ZNN	74
2.8 Conclusion	81
CHAPITRE 3 INTERSECTION ET PARALLELISME ENTRE CONTRAINTES TECHNIQUES ET LE CONE DE NON NEGATIVITE	82
3.1 Introduction	82
3.2 Projection de l'origine O sur la frontière de ZCT_i	83
3.2.1 Cas où Ω_i se trouve à l'extérieur de C_0^+	84
3.2.2 Cas où $JN \neq \emptyset$ et $JP \neq \emptyset$	99
3.2.3 Cas où Ω_i se trouve à l'intérieur de C_0^+	100
3.3 Intersection entre ZCT_i et l'axe de recherche $R(O, U_k)$	101
3.4 Parallélisme entre deux zones de contraintes techniques	102
3.5 Etude de cas de parallélisme entre deux zones de contraintes techniques différentes avec le langage MZ	106
3.5.1 cas où $(\Omega_i \in C_0^+)$ et $(\Omega_j \in C_0^+)$ et $(\Omega_i \neq \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i$ avec $\alpha < 0)$ et $(\Omega_i$ plus proche de 0 que $\Omega_j)$	116
3.5.2 Cas où $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i = \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i$ avec $\alpha > 0)$	129
3.5.3 Cas où $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i = \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i$ avec $\alpha < 0)$	135
3.6 Conclusion	135
CHAPITRE 4 PSEUDO-PARALLELISME ENTRE DEUX ZONES DE CONTRAINTES TECHNIQUES DANS C_0^+	136
4.1 Introduction	136
4.2 Pseudo-parallélisme entre deux zones de contraintes techniques	136
4.3 Pseudo-parallélisme dans C_0^+	137
4.4 Intersection entre HP (A_i, b_i) et $R(O, U_k)$ ou $R(O, -U_k)$	138
4.4.1 Cas où Ω_i se trouve dans $C_0^+ \setminus \{0\}$	138
4.4.2 Cas où $\Omega_i \in (\overline{C_0^+} / C_0^-) \setminus \{0\}$	143
4.5 Résumés	147
4.5.1 Résumé 1	147

4.5.2 Résumé 2	149
4.6 Pseudo- parallélisme pour une contrainte donnée « i ».....	152
4.6.1 Disposition de $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i	152
4.6.2 Cas où $HP(A_i, b_i)$ intersecte tous les $R(O, U_k)$	155
4.6.3 Pseudo-parallélisme entre ZCT_i et ZCT_j plus proche de O	155
4.6.4 Pseudo-parallélisme entre ZCT_i et ZCT_j plus éloignés de O	162
4.6.5 Cas où $HP(A_i, b_i)$ intersecte $R(O, U_{k1}), R(O, U_{k2}), \dots, R(O, U_{kn})$ et pour les autres k ...	167
4.7 Conclusion	174
CHAPITRE 5 APPLICATIONS SUR LA DÉTECTION DES CONTRAINTES REDONDANTES	175
5.1 Méthode des limites	175
5.1.1 Algorithme MÉTHODE DES LIMITES.....	175
5.1.2 Complexité.....	178
5.2 Méthode de programmation lineaire.....	179
5.2.1 Algorithme	179
5.2.2 Complexité.....	183
5.3 Méthode déterministe.....	184
5.4 Méthode de STOJKOVIC et STANIMIROVIC.....	188
5.5 Méthode heuristique.....	190
5.6 Méthodes géométriques	192
5.6.1 Hypothèses sur les contraintes	192
5.6.2 Méthodes numériques.....	194
5.6.3 Matrice des contraintes à termes de signe quelconque.....	205
5.6.4 Algorithme général.....	207
5.6.5 Matrice des contraintes à termes de signe quelconque.....	215
5.6.6 Algorithme général.....	217
5.7 Méthode topo-géométrique.....	219
5.7.1 Localisation de Ω_i	221
5.7.2 Illustrations	225
5.7.3 Algorithme général.....	227

5.7.4 Complexité.....	230
5.8 Conclusion	231
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	231
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	234
ANNEXES	237
FICHE DE RENSEIGNEMENT	259
RESUME	260

NOTATIONS

1. Minucules lettrines

a_{ij}	Eléments de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice A
a_{ik}	Coefficient de la variable k de la ième contrainte
b_i	Second membre ou seuil de la contrainte i
x_i	Variables de décision
u_k	Variable d'écart associée à la kième contrainte

2. Majuscules lettrines

A_i	Points ou vecteurs de composantes les coefficients des variables de la contraintes i
A	Matrice des coefficients
X	Décision-action- vecteur
X_o	Point de décision
AX	Produit entre la matrice des coefficients A et le vecteur inconnu X
Arg	Argument
ANN	Axe de Non-Négativité
B	Boule
B_f	Boule fermée
$B(x,r)$	Boule ouverte de centre x et de rayon r
Co^+	Cône de non-négativité
Co^-	Cône de négativité
$Co(S)$	Enveloppe convexe de S
Card()	Cardinal
Cpc	Complexité dans le pire des cas
Cm	Complexité moyenne
D()	Distance
Diam(A)	Diamètre d'une partie A
FC	Forme Canonique
Fr ()	Frontière

FNN	Face de Non-Négativité
H	Ensemble de tous les indices des contraintes
HP()	HyperPlan
I	Ensemble des indices associés à l'ensemble des variables de base ou hors base initiale
J	Ensemble des indices associés aux variables initiales de base
Inf	La valeur minimale d'un ensemble
K	Le corps d'un espace vectoriel
Li	Limite inferieure
Max	Maximum
Min	Minimum
P	Polyèdre
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	Ensemble de n-uplets de nombres réels
$R(O, U_k)$	k-ième axe de non négativité issu de l'origine O
$R(O, -U_k)$	k-ième axe de négativité issu de l'origine O
R	Rayon
Sup	Superieure ou valeur supérieure
Ta	Topologie induite
U_i	Limite superieure
V	Voisinage
V	Espace vectoriel
X_o	Centre de la boule ouverte

3. Minuscules grecques

β Béta

α Alpha

4. Majuscules grecques

Σ Somme

Φ Vide

Θ Matrice intercepte

Π Produit

5. Notations spéciales

\exists	Il existe
\in	Appartient
\notin	N'appartient pas
\neq	Différent
\subset	Inclu
\cup	Union
\cap	Intersection
Ω_i	Projection du centre O d'un repère dans un hyperplan HP(A _i ,b _i)
Ω_j	Projection du centre O d'un repère dans un hyperplan HP(A _j ,b _j)
$>$	Supérieure
\geq	Supérieure ou égale
$<$	Inferieure
\leq	Inferieure ou égale
\wedge	Et
$\langle A, B \rangle$	Produit scalaire entre les deux vecteurs A et B
\forall	Quelque soit
$[a ; b]$	Intervalle de borne inférieure a et de borne supérieure b

6. Abréviations

PLNE	Programmation Linéaire en Nombres Entiers
PL	Programmation Linéaire
PPL	Problème de Programmation Linéaire
MZ	Modélisation topo-géométrique Marc et Zo
ZCT	Zone de Contraintes Techniques

LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES

1. Liste des tableaux

Tableau 1.01 : <i>Tableau 1 du Simplexe</i>	35
Tableau 1.02 : <i>Tableau simplexe</i>	39
Tableau 1.01 : <i>Tableau optimal</i>	181
Tableau 1.02 : <i>Tableau optimal après transformation</i>	182
Tableau 1.03 : <i>Premier tableau de l'exemple</i>	184
Tableau 1.04 : <i>Deuxième tableau de l'exemple</i>	185
Tableau 1.05 : <i>Troisième tableau de l'exemple</i>	185
Tableau 1.06 : <i>Deuxième tableau de l'exemple après transformation</i>	187
Tableau 1.07 : <i>Troisième tableau de l'exemple après transformation</i>	187
Tableau 1.08 : <i>Tableau des resultats de l'exemple test STOJKOVIC</i>	189

2. Liste des figures

Figure 1.01 <i>Deux ensembles convexes et un ensemble non convexe</i>	6
Figure 1.02 <i>Enveloppes convexes de points et d'un ensemble</i>	7
Figure 1.03 <i>Deux cones non convexes et un cone convexe</i>	8
Figure 1.04 <i>Hyperplan et demi-plan $x \in H$, $x_1 \notin H^-$, $x_2 \in H^+$</i>	8
Figure 1.05 <i>Hyperplan support 'un ensemble convexe C</i>	9
Figure 1.06 <i>Polyédre convexe et polytope</i>	10
Figure 2.01 <i>Illustration de l'hyperplan HP $(-U_i, 0)$</i>	75
Figure 2.02 <i>Mur conique de non-negativité</i>	78
Figure 2.03 <i>Illustration proposition 2.6</i>	80
Figure 2.04 <i>Illusration proposition 2.07</i>	81
Figure 3.01 <i>Cone de non-negativité</i>	85
Figure 3.02 <i>Cone non negatif</i>	86
Figure 3.03 <i>Illustration proposition 3.03</i>	87
Figure 3.04 <i>Cas 1 de proposition 3.03</i>	88
Figure 3.05 <i>Illustration de lemme 3.01</i>	89
Figure 3.06 <i>Illustration lemme 3.02</i>	91

Figure 3.07 <i>Cas lemme 3.02</i>	92
Figure 3.08 <i>Illustration lemme 3.03</i>	95
Figure 3.09 <i>Illustration proposition 3.04</i>	97
Figure 3.10 <i>Cas 1 proposition 3.04</i>	98
Figure 3.11 <i>Cas 2 proposition 3.04</i>	99
Figure 3.12 <i>Illustration proposition 3.05</i>	100
Figure 3.13 <i>Illustration lemme 3.05</i>	105
Figure 3.14 <i>Illustration de cas de parallelisme entre 2 ZCTi</i>	107
Figure 3.15 <i>Illustration cas 1 lemme 3.06</i>	108
Figure 3.16 <i>Illustration cas 2 lemme 3.06</i>	110
Figure 3.17 <i>Illustration proposition 3.10</i>	111
Figure 3.18 <i>Illustration de la proposition 3.11</i>	112
Figure 3.19 <i>Illustration proposition 3.12</i>	113
Figure 3.20 <i>Illustration cas 1 proposition 3.13</i>	116
Figure 3.21 <i>Illustration cas 2 proposition 3.13</i>	119
Figure 3.22 <i>Illustration lemme 3.07</i>	121
Figure 3.23 <i>Illustration lemme 3.08</i>	123
Figure 3.24 <i>Illustration lemme 3.09</i>	125
Figure 3.25 <i>Illustration lemme 3.10</i>	127
Figure 3.26 <i>Illustration proposition 3.16</i>	129
Figure 3.27 <i>Illustration proposition 3.17</i>	131
Figure 3.28 <i>Illustration proposition 3.16 et proposition 3.17 cas ou $\alpha < 0$</i>	134
Figure 4.01 <i>Cas où Ω_i se trouve dans $C0+ \setminus \{0\}$</i>	137
Figure 4.02 <i>Illustration de la proposition 4.01</i>	136
Figure 4.03 <i>Cas où $A_i \in C0+$</i>	138
Figure 4.04 <i>Illustration de la proposition 4.02</i>	142
Figure 4.05 <i>Illustration de la proposition 4.03</i>	143
Figure 4.06 <i>Illustration de la proposition 4.04</i>	144
Figure 4.07 <i>Illustration de la proposition 4.05</i>	145
Figure 4.08 <i>HP (A_i, b_i) de ZCTi est dans $C0+$</i>	151

Figure 4.09 $H(A_i, b_i)$ est parallèle aux axes de recherche $R(O, U_k)$ et $R(O, -U_k)$	152
Figure 4.10 projection Ω_i de O sur $H(A_i, b_i) = 0$	152
Figure 4.11 $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i est dans $\bar{C}_0^+ \setminus C_0^-$	153
Figure 4.12 $HP(A_i, b_i)$ intersecte tous les $R(O, U_k)$	154
Figure 4.13 Illustration du théorème 4.01	158
Figure 4.14 Illustration du théorème 4.02	158
Figure 4.15 Illustration du corollaire 4.02	161
Figure 4.16 Illustration du corollaire 4.03	165
Figure 4.17 $HP(A_i, b_i)$ intersecte $R(O, U_{k1}), R(O, U_{k2}), \dots, R(O, U_{kn})$ et pour les autres k	166
Figure 4.18 Illustration de la proposition 4.08	167
Figure 4.19 Illustration de la proposition 4.09	168
Figure 4.20 $HP(A_i, b_i)$ contient O et $A_i \in C_0^+ \setminus C_0^-$	168
Figure 4.21 ZCT_j est pseudo-parallèle à la zone ZCT_i	169
Figure 4.22 Illustration de l'intersection des zones de contraintes dans	170
Figure 4.23 Illustration de la proposition 4.12	172
Figure 5.01 Résolution graphique d'une inéquation : $c_1x_1 + c_2x_2 \leq l$	195
Figure 5.02 Plan dans $C_0^+ : 2x + 3y + z = 10$	196
Figure 5.03 Une contrainte redondante	197
Figure 5.04 Région admissible non vide	199
Figure 5.05 Une contrainte redondante	207
Figure 5.06 Région admissible non vide	209
Figure 5.07 Projection de l'origine	219
Figure 5.08 Deux contraintes concourantes	220
Figure 5.09 Contraintes parallèles	221
Figure 5.10 Une contrainte redondante	224
Figure 5.11 Une autre contrainte redondante	225
Figure 5.12 Deux contraintes non redondantes	225
Figure 5.13 Deux autres contraintes non redondantes	226

INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME

L'objectif, dans sa définition ou dans la recherche de son obtention demeure éternellement le trait d'union de tout être humain que ce soit individuel ou de groupe (association, organisation, entreprise, ...) sur cette terre. Toutefois, l'atteinte de cet objectif ne constitue en rien la fin mais au contraire ouvre un autre point d'union qui n'est autre que son optimisation. Un état qui assure le développement et la pérennisation des activités humaines. Ainsi, nombreuses sont depuis tout le temps les études ou recherches qui se focalisent dans ce domaine.

La branche de la mathématique est la plus sollicitée dans cet axe de recherche. Les différentes recherches établies dans le domaine reposaient sur la détermination de la solution optimale.

Problématique

Force est de constater que les coûts de ces différentes approches variaient. La problématique qui se pose alors est : «Comment minimiser les coûts de résolution du problème de programme linéaire ? ».

De nombreux travaux ont été apparus qui d'une manière générale recherchaient à simplifier les différentes contraintes associées à l'optimisation de l'objectif : c'est la recherche des contraintes redondantes. Autrement dit la détermination des contraintes inutiles qui n'affectent pas la solution optimale mais réduisent de manière conséquente le coût de résolution d'un problème de programmation linéaire.

C'est dans cette perspective que l'idée de projet de thèse est née et nous a amenée à choisir le

Sujet

“Modélisation topo-géométrique MZ (Marc et Zo) de recherche de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire”.

Objectif

La thèse dans son essence vise à apporter d'une manière générale une nouvelle approche de la recherche de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire.

Nombreux sont les travaux réalisés dans ce domaine mais ils utilisaient dans la plupart des cas le domaine de l'analyse, de l'algèbre matricielle ou du combinatoire.

Résultat attendu

Ainsi au terme de cette recherche, nous établissons un nouveau modèle ou un algorithme qui permet de rechercher des contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire : le modèle topo-géométrique MZ.

Méthodologie

Dans sa base la modélisation topo-géométrique MZ utilise comme son nom l'indique, la théorie de la topologie et de la géométrie vectorielle. Elle est surtout axée sur l'étude comparative géométrique deux à deux des hyperplans associés au problème de programmation linéaire.

La présentation comprend les parties suivantes :

- Le chapitre 1 présente dans un premier temps l'historique et la genèse du problème de PL et l'état de l'art.
- Puis dans un second temps le chapitre 2 étale la formulation théorique base du nouveau modèle de recherche de contraintes redondantes et les objets alimentés
- Par la suite dans un troisième temps, le chapitre 3 décrit l'application du modèle Topo-géométrique MZ dans la recherche de contraintes redondantes pures.
- Dans un quatrième temps, nous avancerons dans le chapitre 4 la démarche de recherche de contraintes pseudo-redondantes par le même modèle Topo-géométrique MZ.
- Enfin le chapitre 5 développe la simulation de la nouvelle théorie et le compare avec quelques démarches déjà existantes et présentés également dans cet ouvrage comme un état de l'art. La complexité des algorithmes est abordée pour servir dans la comparaison entre les différentes recherches de la détection de contraintes redondantes.

CHAPITRE 1

THEORIES SUR L'OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

1.1 Introduction

Ce chapitre constitue la base de la thèse étalée à travers la genèse, l'état de l'art sur l'optimisation sous contraintes, l'aspect technique mathématique du problème de "PL et la complexité de l'algorithme.

1.2 Historique et évolution de Programmation linéaire

Les premiers mathématiciens qui se sont occupés dudit problèmes, que l'on ne nommait pas encore à l'époque « programmes linéaires » (P.L.), sont :

- Laplace (1749-1827) et le baron Fourier.
- Le russe Kantorovitch en 1939 a imaginé une méthode inspirée des multiplicateurs de Lagrange, classiques en mécanique, pour résoudre des « programmes de transport ».
- La contribution décisive a été l'invention de l'algorithme du SIMPLEXE, développé à partir de 1947 notamment par G.B. Dantzig et le mathématicien V. Neumann.
- Au milieu des années 80, l'indien N. Karmarkar a proposé une nouvelle méthode créée aux Bell Laboratories qui permettait de résoudre de très gros problèmes linéaires, par une démarche « intérieure » au polyèdre des solutions admissibles.

1.3 Définition de programmation linéaire (PL)

1.3.1 Quelques définitions

Selon W.J. Baumaul [1.01], la programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction à objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires. Elle vise à sélectionner parmi différentes actions celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.

R. Dorfman [1.02] et P. Samuelson [1.03], ajoutent que la programmation linéaire est une méthode de détermination du meilleur plan d'action pour réaliser des objectifs donnés dans une situation où les ressources sont limitées. C'est donc une méthode de résolution du

problème économique, soit dans le cadre d'une économie globale, soit dans celui du secteur public, soit dans une entreprise particulière.

Globalement et pratiquement, la programmation linéaire traite d'une manière générale d'un problème d'allocation de ressources limitées parmi des activités concurrentes et ce d'une façon optimale. La grande variété de situations auxquelles la programmation linéaire peut s'appliquer est remarquable. Cela va de l'affectation de personnel à certaines tâches au problème de la répartition de ressources brutes limitées pour la production de plusieurs objets.

La programmation linéaire emploie un modèle mathématique qui décrit le problème réel. L'adjectif "linéaire" indique que toutes les fonctions mathématiques de ce modèle sont linéaires tandis que le terme "programmation" signifie essentiellement planification. Ainsi, la programmation linéaire consiste à planifier certaines activités soumises à des restrictions en vue d'un rendement optimal, c'est-à-dire en vue d'un résultat qui atteint le but visé parmi plusieurs solutions alternatives réalisables.

1.3.2 Notations et définitions

Le problème général de programmation linéaire est la recherche de l'optimum (minimum ou maximum) d'une fonction linéaire de n variables x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) liées par des équations ou inéquations linéaires appelées contraintes.

Parmi les contraintes, on distingue généralement celles du type $x_j \geq 0$ (ou $x_j \leq 0$), imposant à une partie ou à l'ensemble des variables d'être non négatives (ou non positives). Les variables peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles satisfaisant aux contraintes.

On peut toujours supposer que certaines des inéquations ont été multipliées par -1 de façon que toutes les inégalités soient dans le même sens (\geq par exemple), et que certaines des variables ont été remplacées par leurs opposées pour que les contraintes du type $x_j \geq 0$ ou $x_j \leq 0$ soient toutes des conditions de non négativité. La formulation algébrique de la définition précédente est alors:

$$\text{Minimiser (ou maximiser)} \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = p + 1, p + 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

$$x_j \text{ quelconque}, \quad j = q + 1, q + 2, \dots, n,$$

où les constantes c_j , a_{ij} et b_i sont des nombres réels.

On se réfère à la forme linéaire : $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

à minimiser comme étant la fonction objective (ou la fonction de coût ou de critères) et aux équations

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i,$$

et

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

comme étant les contraintes. Pour une solution réalisable x , une contrainte d'inégalité est dite active ou saturée si la contrainte est satisfaite avec égalité.

Ce modèle de programmation linéaire est présenté de manière générale comme un problème d'allocation des ressources limitées parmi des activités concurrentes et ce d'une façon optimale. On y retrouve donc m types de ressources et n types d'activités; en général, m est beaucoup plus petit que n . Évidemment, les ressources sont nécessaires pour réaliser les activités et les premières sont en quantité limitée (le vecteur b); par conséquent, l'allocation des ressources doit être faite de manière optimale c'est-à-dire, de façon à optimiser la mesure de performance z .

Dans ce modèle, les éléments a_{ij} , b_i , et c_j constituent la quantité de ressources dépensées de type i pour la réalisation d'une activité de type j , la quantité de ressources limitées de type i et la performance obtenue lors de la réalisation d'une activité de type j , respectivement.

Tous les développements ultérieurs dans ce cours seront établis sous la condition fondamentale de non-négativité de l'ensemble des variables, condition qui est imposée a priori

dans la plupart des problèmes économiques, et à laquelle on peut d'ailleurs toujours se ramener. Les méthodes de calcul s'appuient sur cette condition de non-négativité et font jouer aux contraintes $x_j \geq 0$ un rôle particulier.

1.4 Géométrie de la programmation linéaire

Cette section a pour but principal de définir les notions géométriques mais également leur interprétation algébrique qui seront nécessaires à la compréhension des solutions algorithmiques utilisées en programmation linéaire. En particulier, nous verrons que la notion de convexité et la géométrie des polyèdres et polytopes vont jouer un rôle prépondérant en programmation linéaire.

1.4.1 Ensembles convexes, cônes, hyperplans, polyèdres et polytopes

Définition 1.01

Un sous-ensemble $C \subset V$ d'un espace vectoriel V est **convexe** si et seulement si:

$$\forall x \in C, \forall y \in C \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (1.01)$$

Cette définition signifie qu'un ensemble C est convexe si le segment joignant deux de ses points quelconques est contenue dans l'ensemble C .

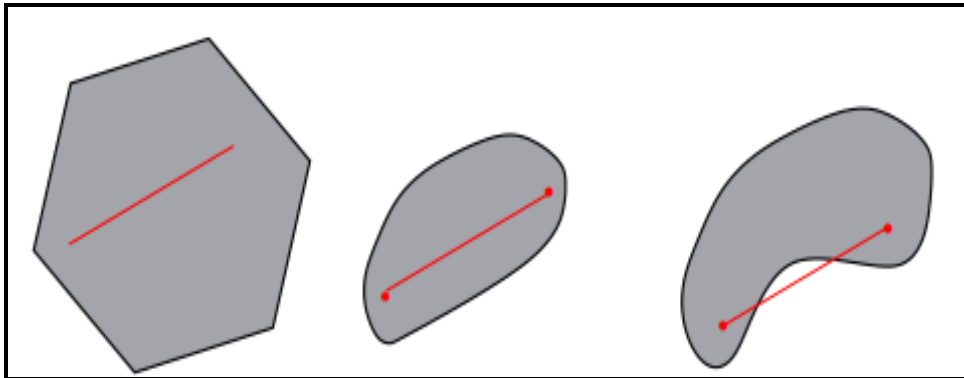


Figure 1.01 : Deux ensembles convexes et un ensemble non convexe

1.4.2 Propriétés

- L'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles convexes est un ensemble convexe.
 $C = \bigcap C_i, i=1,2,\dots, n$ est convexe.
- Si C est convexe et $\beta \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\beta C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \beta c, c \in C\} \text{ est convexe.}$$

- Si C, D sont deux sous-ensembles convexes de V alors l'ensemble :
 $C + D = \{x \in \mathbb{R}^n : x = c + d, c \in C, d \in D\}$ est convexe.

Définition 1.02

Soient $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, une **combinaison convexe** de x_1, \dots, x_k est le vecteur

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad (1.02)$$

Définition 1.03

Soit $S \subset V$, l'**enveloppe convexe** de S , notée $\text{co}(S)$, est l'ensemble défini comme l'intersection de tous les ensembles convexes contenant S . L'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe de V contenant S .

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i : x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\} \quad (1.03)$$

L'enveloppe convexe des vecteurs $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\text{co}\{x_1, \dots, x_k\}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (2.1).

Remarque

L'enveloppe convexe d'un nombre fini de vecteurs de \mathbb{R}^n est un ensemble convexe.

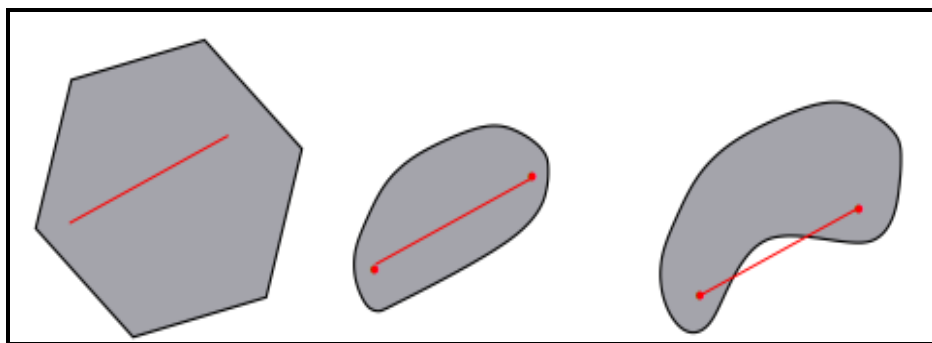


Figure 1.02 : Enveloppes convexes de points et d'un ensemble

Définition 1.04

Un sous-ensemble $K \subset V$ est un **cône** si et seulement si

$$\forall x \in K, \lambda \geq 0, \lambda x \in K. \quad (1.04)$$

Un cône qui possède la propriété de convexité est **un cône convexe**.

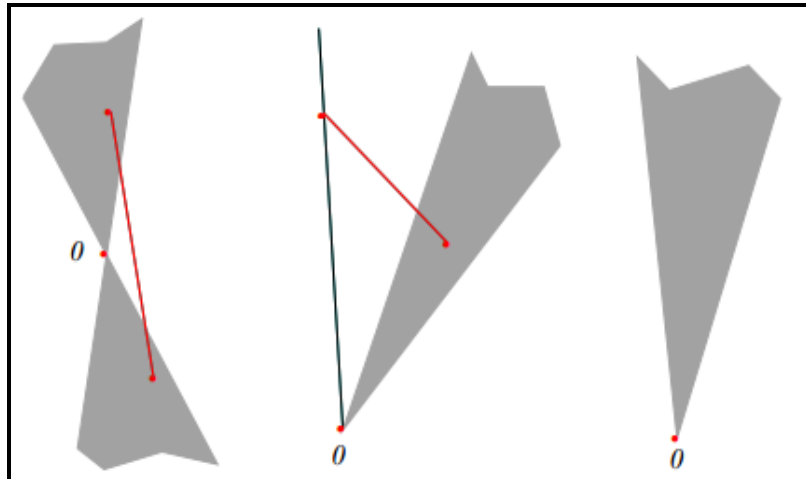


Figure 1.03 : Deux cones non convexes et un cone convexe

1.4.3 Géométrie du programme linéaire

Définition 1.05

Soit $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. L'ensemble défini par :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = c\} \quad (1.05)$$

est **un hyperplan** de \mathbb{R}^n

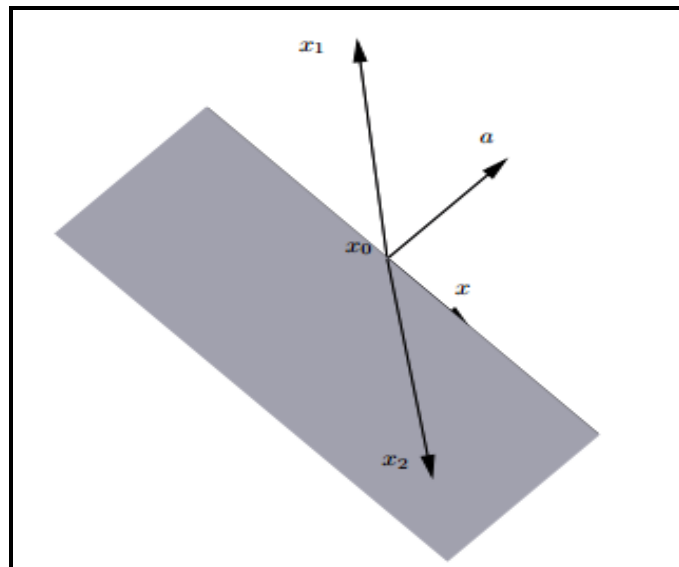


Figure 1.04 : Hyperplan et demi-plan $x \in H$, $x_1 \notin H^-$, $x_2 \in H^+$

H est une variété linéaire de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n . Un hyperplan est la frontière du demi-plan correspondant et le vecteur a est perpendiculaire à l'hyperplan.

Définition 1.06

Soient $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. On considère l'hyperplan :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = c\} \quad (1.06)$$

On définit alors, à partir de H les **demi-plans fermés** positif et négatif, donnés par :

$$\begin{aligned} H_+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq c\} \\ H_- &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \geq c\} \end{aligned} \quad (1.07)$$

qui sont des espaces convexes.

Définition 1.07

Un **hyperplan support** d'un ensemble convexe C tel que $\text{int}(C) \neq \emptyset$ en un point $x \in \partial C$ ou frontière de C est défini par :

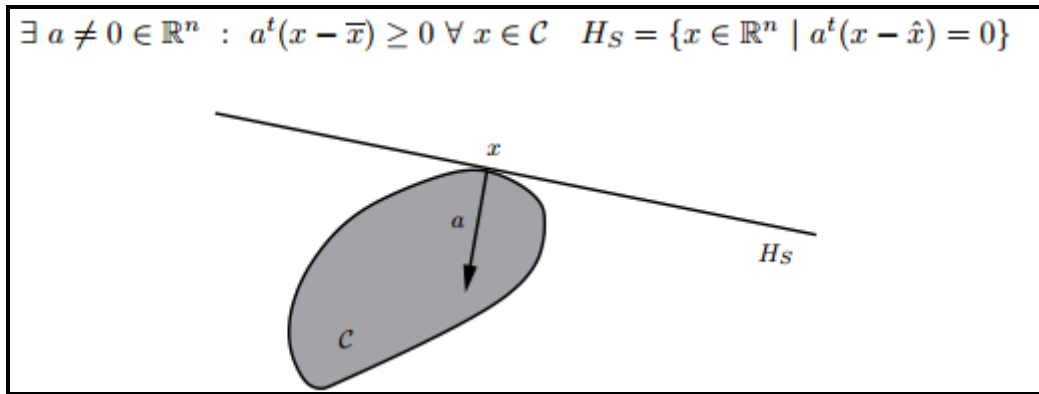


Figure 1.05 : Hyperplan support d'un ensemble convexe C

Définition 1.08

Un **polyèdre** $P \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble décrit par

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \preceq c\} \quad (1.08)$$

où $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ et $c \in \mathbb{R}^r$.

Définition 1.09

Un polyèdre est formé comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est **borné** s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que la valeur absolue de chaque composante de chaque élément de S est plus petite que K .

Définition 1.10

Un polyèdre convexe et borné est un **polytope convexe**.

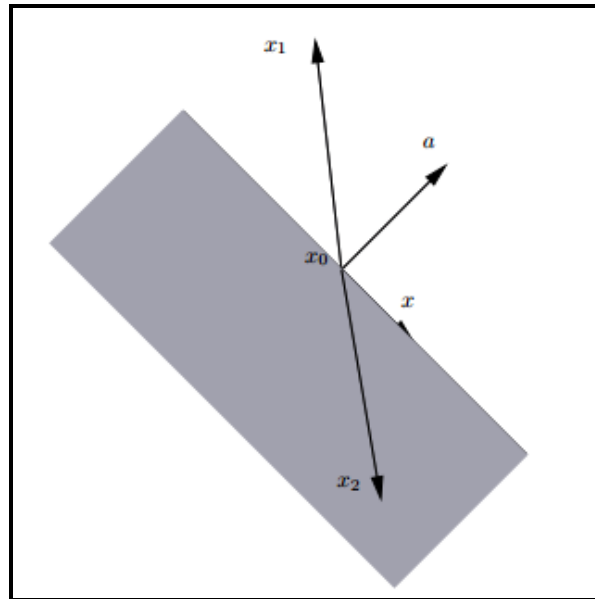


Figure 1.06 Polyèdre convexe et polytope

Ce qui précède permet de définir une des propriétés fondamentales des problèmes de programmation linéaire utilisée en particulier par la méthode du simplexe.

1.5 Optimisation sous contraintes

Nous allons maintenant retracer le problème de programmation linéaire sous son aspect purement mathématique plus exactement algébrique.

Un problème d'optimisation sous contraintes concerne essentiellement les programmes mathématiques de la forme,

Optimiser $f(x)$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} g_i(x) \leq a_i, i = 1 : k \\ h_i(x) \geq b_i, i = k + 1 : m \end{cases}$$
$$x \in S$$

où $f : E \rightarrow K$, la fonction-objectif à maximiser ou à minimiser, K est un corps, \mathbb{R} ou \mathbb{C} ,

E est un K -espace vectoriel euclidien de dimension n .

$g_i: E \rightarrow K$, fonction exprimant les conditions d'exigences maximales.

$h_i: E \rightarrow K$, fonction exprimant les conditions d'exigences minimales.

Comme E est isomorphe à \mathbb{R}^n , on peut toujours identifier E à \mathbb{R}^n .

$S \in \subset \mathbb{R}^n$, éventuellement, $S \in \subset Z^n$, l'ensemble des variables.

Un vecteur \bar{x} , $x \in S$ assurant les contraintes est une solution réalisable du problème.

En notant \bar{S} , l'ensemble des solutions réalisables, \bar{S} peut être vide et le problème n'a pas de solution.

Si $\bar{S} \neq \emptyset$, il existe au moins une solution x^* où $f(x^*)$ est maximale ou minimale.

Une relaxation consiste à supprimer une contrainte du problème : c'est le cas de redondance de la contrainte.

Dans cet ouvrage, nous nous intéressons aux problèmes d'optimisation linéaire, plus précisément de programmations linéaires de la forme :

Optimiser $Z = \langle c, x \rangle$

sous les contraintes

$$\begin{cases} A_1 \cdot x \leq b_1 \\ A_2 \cdot x \geq b_2 \end{cases} \\ \text{avec } x \geq 0 \\ c \in R^n, b_1 \in R^k, b_2 \in R^{m-k}$$

A_1 une matrice $n \times k$,

A_2 une matrice $n \times (m - k)$,

1.6 Algorithme en programmation linéaire

En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire *PL* sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes qui représentent les conditionnalités sont toutes linéaires. La programmation linéaire est alors un domaine

central de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les plus faciles du fait que toutes les contraintes y étant linéaires. Beaucoup de problèmes réels de la recherche opérationnelle peuvent être exprimés comme un problème de *PL*. Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires.

Le terme programmation linéaire suppose que les solutions à trouver doivent être représentées en variables réelles. S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème, on parle de programmation linéaire en nombres entiers.

La programmation consiste alors à déterminer disons n -variables afin d'optimiser l'objectif linéaire sous différentes contraintes traduites dans la pratique sous forme d'inégalités ou égalités, étant donné que ces dernières nécessitent l'utilisation des ressources ou moyens limités dans l'obtention de l'objectif. Le nombre de contraintes allant de 1 à m . De telles contraintes permettent d'inclure des contraintes de signe, ou l'adoption de l'écriture matricielle.

D'un point de vue géométrique, comme nous l'avons déjà présenté plus haut, les contraintes linéaires forment un polyèdre convexe. Si la fonction objectif est elle aussi linéaire, tous les optimaux locaux sont également des optimaux globaux.

De nombreuses difficultés peuvent se présenter dans la recherche ou le calcul de cet objectif, pour ne citer que les deux cas où il n'existe pas de solution optimale. Le premier est lorsque les contraintes se contredisent mutuellement (par exemple). Dans un tel cas, le polytope est vide et il n'y a pas de solution optimale puisqu'il n'y a pas de solution du tout. Le PL est alors infaisable ou incompatible.

Une autre situation où le polyèdre est non-borné dans la direction définie par la fonction objectif. Dans ce cas, il n'y a pas de solution optimale puisqu'il est possible de construire des solutions satisfaisant les contraintes avec des valeurs arbitrairement élevées (ou basses) de la fonction objectif.

1.6.1 Genèse de l'algorithme de PPL

Quant à la recherche ou la détermination de l'objectif, l'algorithme du simplexe de G. Dantzig [1.04] est le plus connu pour résoudre les problèmes de PL en construisant tout d'abord une solution réalisable qui est un sommet du polytope puis en se déplaçant selon

les arêtes du polytope pour atteindre des sommets pour lesquels la valeur de l'objectif est de plus en plus grande, jusqu'à atteindre l'optimum. Bien que cet algorithme soit efficace en pratique et qu'il soit assuré de trouver l'optimum, sa démarche dans le pire cas peut être mauvaise. Il est ainsi possible de construire un PL pour lequel la méthode du simplexe requiert un nombre d'étapes exponentiel en la taille du problème.

Le premier algorithme polynomial pour la *PL* a été proposé par L. Khachiyan [1.05] en 1979. Il est basé sur la méthode de l'ellipsoïde en optimisation non linéaire précédemment proposée par N. Shor [1.06] . Cette méthode est elle-même une généralisation de la méthode de l'ellipsoïde en optimisation convexe due à A. Nemirovski [1.07] .

Cependant, l'efficacité pratique de l'algorithme de L. Khachiyan [1.08] est décevante : l'algorithme du simplexe est pratiquement toujours plus performant. En revanche, ce résultat a encouragé la recherche dans les méthodes de point intérieur. Par opposition à l'algorithme du simplexe qui considère uniquement la frontière du polytope définie par les contraintes, les méthodes de point intérieur évoluent à l'intérieur du polytope.

En 1984, N. Karmarkar [1.09] propose la méthode projective. C'est le premier algorithme efficace à la fois en théorie et en pratique. Sa complexité dans le pire cas est polynomiale et les expérimentations sur les problèmes pratiques montrent que la méthode peut raisonnablement être comparée à l'algorithme du simplexe. Depuis lors, plusieurs méthodes de point intérieur ont été proposées et étudiées. Une des méthodes les plus célèbres est la méthode prédictive/corrective qui fonctionne très bien en pratique même si son étude théorique est encore imparfaite.

Pour la résolution pratique de problèmes de PL ordinaires, il est actuellement commun de considérer comme équivalentes les (bons) codes basés sur les méthodes dérivées du simplexe ou du point intérieur. De plus, pour la résolution de problèmes de grande taille, une technique comme la création de colonnes peut se révéler extrêmement efficace.

Les solveurs basés sur la PL sont de plus en plus utilisés pour l'optimisation de divers problèmes industriels tels que l'optimisation des flux de transports ou la planification de la production. Toutefois, les modèles de PL se révèlent insuffisants pour représenter de nombreux problèmes, la programmation linéaire en nombres entiers (*PLNE*) permet alors de modéliser un grand nombre de problèmes supplémentaires.

Quand on utilise le Solveur d'Excel, par exemple, pour résoudre les problèmes de Simplexe, on établit toutes les équations en donnant, par défaut, une valeur de 1, à tous les inconnus. Cela permet de calculer le bénéfice de la solution et l'utilisation des ressources dans les contraintes linéaires. C'est ensuite le travail du Solveur de changer les valeurs des variables pour maximiser, ou minimiser, selon le cas, la fonction objectif.

L'avantage du Solveur d'Excel est qu'il est à la portée de tous et relativement facile à utiliser comparativement aux logiciels qui résolvent des problèmes de programmation linéaire comme ou Simplex, par l'entrée des données sous forme matricielle qui peut être rébarbative à beaucoup d'utilisateurs.

Coté application, la programmation linéaire est essentiellement utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques, dans le vocabulaire de la recherche opérationnelle). Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans des réseaux) que dans les secteurs d'industrie : industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transports (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance.

1.6.2 Les domaines d'application

La technique de la programmation linéaire est couramment appliquée dans l'industrie pétrolière. C'est l'une des industries, si ce n'est la principale qui utilise quotidiennement la PL (programmation linéaire). Elle est considérée comme l'outil qui permet au raffineur de faire la détermination optimale de production d'une raffinerie. Pour ce faire, le programme doit tenir compte d'un certain nombre de contraintes telles que :

- les bruts disponibles, leurs rendements et les qualités des coupes,
- les spécifications des produits à fabriquer,
- les limitations de débouchés pour certains produits,
- les capacités des unités,
- les modes de réglages des installations, – les capacités de stockage disponibles.

La *PL* peut également être utilisée dans d'autres domaines du raffinage, par exemple :

- les calculs de la composition optimale des mélanges de produits (carburants, gasoils, fuels) en tenant compte des spécifications.
- l'optimisation dans l'utilisation des installations,
- les calculs de l'obtention du meilleur préchauffage des bruts et des charges,
- la détermination du meilleur équilibre "vapeur-électricité" d'une raffinerie.

En dehors des raffineries, on peut utiliser la *PL* dans la recherche opérationnelle pour :

- bâtir des plans à long/moyen et court termes d'une compagnie pétrolière,
- optimiser le fonctionnement d'une flotte de tankers et la mise en place des produits.

Ces différents éléments suscités et constatés nous ont emmenés à procéder à la réalisation de cette étude.

1.6.3 Formulation ou modélisation d'un PPL

Nous présentons ci-dessous des notions de base de :

1.6.3.1 Modélisation

La modélisation d'un problème linéaire consiste à identifier:

- les variables.
- Les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables.
- L'objectif visé (optimisation).

1.6.3.2 Les étapes de modélisation

- La détermination des variables de décision

les variables x_1, x_2, \dots, x_n sont appelées des variables de décision ou variables réelles du problème.

- La détermination des contraintes :

La contrainte peut être assimilée à un obstacle tel que les limitations techniques scientifiques, économiques, les lois de la nature, les délais, etc.

- La détermination de la fonction objectif (économique)

La fonction objectif (économique) est une fonction qui permet de déterminer l'optimum (max de profit /min des Coût)

Le but du problème d'optimisation est alors de minimiser ou de maximiser cette fonction jusqu'à l'optimum, par différents procédés comme la méthode graphique.

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type:

$$\text{Max(ou min)} z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

où les coefficients c_1, \dots, c_n doivent avoir une valeur bien déterminée et peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Cette thèse a pour objet de présenter une nouvelle approche théorique baptisée modélisation topo-géométrique MZ, une théorie qui permet d'améliorer la compréhension et la résolution de la classe de problème appelé problème de programmation linéaire PPL.

Comme les PPL que nous avons en vue sont ceux issus de domaine d'activité humaine telles que les affaires, la production, l'économie, la santé, l'armée, etc... En plus de la rigueur mathématique adoptée, les objets (mathématiques) faisant partie des modèles construits avec cette théorie auront des significations (sens) sémantiques bien précises, au lieu d'être des objets mathématiques abstraits.

Sous la forme canonique un problème PPL peut être algébriquement formulée de la façon suivante :

Trouver les inconnues $(x_j), j = 1 : n$ élément de \mathbb{R}^n qui maximisent

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{1.09}$$

Où les $(c_j), j = 1 : n$ sont des éléments de \mathbb{R} ,
et qui satisfont les contraintes suivantes :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i \quad (1.10)$$

Et les a_{ij} et b_i sont des éléments de \mathbb{R} .

Les inconnues réelles (x_i) sont en réalité des variables de décision. Les relations (1.09) et (1.10) sont des contraintes logiques et matérielles caractérisant le problème à résoudre. Dans la suite nous les appellerons forme canonique (FC) les relations (1.09) et (1.10) traduisant le fait que dans la réalité les valeurs négatives des variables de décisions n'ont pas de sens.

1.6.3.3 Contraintes techniques :

Dans le cadre de notre étude, chaque variable de décision (x_i) représente une décision quantitative bien déterminée, se rapportant à une unité de mesure bien déterminée. Ce ne sont donc pas de simples variables réelles mathématiques abstraites. De plus, les valeurs numériques des coefficients dépendent entièrement des unités de mesures adoptées pour les variables de décision, lesquelles unités de mesure ont été décidées par le modélisateur.

Tous les éléments du problème PPL tels que :

- la valeur de n appelée démonstrative du problème
- les valeurs de m représentant le nombre des contraintes
- les coefficients $(c_j), j = 1 : n, (x_{ij}), i = 1 : m$ et $(b_i), i = 1 : m$

sont déterminés ou calculés par les modélisateurs. La tâche de résolution d'un problème de la programmation linéaire ne pose incontestablement aucune difficulté car il y a des méthodes pratiques pour le résoudre, en plus de cela on peut utiliser des logiciels très efficaces pour la résolution tel que MATLAB, EXCEL, SOLVER, LINDO ,...etc. Mais la problématique repose sur les calculs en termes de coûts ou plus précisément de temps de réalisation. Le professeur G. B. Dantzig [1.10] a remarqué qu'étant une construction humaine le modèle peut contenir des erreurs structurelles qui ont rendu très difficiles, voir même impossible, les tâches de solveurs ou autres progiciels depuis plus de six décennies. Des efforts importants ont été déployés pour mettre au point des outils permettant de détecter et de corriger ces erreurs.

Certains chercheurs vont jusqu'à vouloir automatiser cette opération, tandis que d'autres sont d'avis que, à la fin du compte, il faut que la correction finale revienne au modélisateur. Et nous sommes d'accord avec ces derniers. Ces outils, qu'ils soient entièrement automatisés ou non, sont appelés "présolve", ce qui, traduit en français donnerait "outil de pré-résolution". Cet instrument est connu dans le domaine de la recherche par le "presolving".

Le presolving ou techniques de pré-traitement constituent une vaste catégorie de méthodes utilisées pour transformer un système donné d'un programme linéaire de recueillir certaines informations utiles à ce sujet. L'objectif principal de presolving est alors de simplifier le système établi par la plus sophistiquée mais souvent laborieux algorithmes tels que la coupe-avion ou branch-and-bound algorithme. Presque tous les solveurs modernes, à la fois libre (par exemple, CPLEX [1.11], 2009; N. Hauser [1.12] et al., 1994; et commerciaux (par exemple, FICO [1.13], 2009; Gurobi, [1.14] 2009; se sont investis dans un sens ou dans un autre. Bixby et al. [1.15] (2000) affirment que seul presolving accélère le temps de solution sur les systèmes de référence par un facteur de 2. Une autre fonction importante d'un présolve est d'analyser la structure du système et de recueillir des informations qui seront utiles lorsque le problème est résolu.

Presolving est également utile à des fins de modélisation comme elle peut être utilisée pour la détection des erreurs évidentes. Il peut, par exemple, informer l'utilisateur si certaines contraintes ou limites sur les variables font le système impossible. Par ailleurs, il détecte si certaines variables auront arbitrairement des valeurs infinies dans une solution.

De telles informations peuvent aider le chercheur à améliorer la description du système et de corriger les erreurs. Enfin le presolving peut parfois renseigner le chercheur sur l'existence des valeurs des variables utilisées dans le modèle qui peuvent causer des problèmes numériques pour la suite de l'algorithme utilisé.

Pour rendre plus court, nous adoptons. Le terme "présolve" (prononcer pré-solve).

Globalement la plupart des outils à présolve existant actuellement sont destinés à résoudre les problèmes suivants :

Les redondances dont la détection et l'élimination permettent de réduire le nombre m des contraintes.

Les situations d'infaisabilité qui permettent d'inciter à soumettre les problèmes infaisables au solveur.

Les variables non bornées (infinies)

Les variables fixes, dont l'élimination permet de réduire les nombres n des inconnues.

En plus de ces problèmes, reconnaissons qu'un solveur est basé sur un algorithme bien déterminé qui exige qu'on lui fournisse une solution initiale admissible. Or, force est de constater que la recherche d'un tel point, qui notons-le, n'est pas unique, est une opération très difficile et malgré cette situation, cette opération est presque ignorée théoriquement. Ce cas est toujours intégré dans les solveurs. Cette négligence est prouvée par le fait que le nombre de publication académique s'y rapportant est très réduit par rapport aux nombres des recherches académiques traitant de la modélisation et de la recherche proprement dite de la solution optimale.

Par ailleurs, la redondance dans la programmation mathématique est généralement occasionnée par le désir du chercheur d'apporter un maximum d'informations sur le problème ou de ne pas omettre des éléments essentiels dans la formulation de la forme canonique. Elle peut alors se produire dans la phase de formulation, en particulier dans le système de grande taille. Il est possible à cet effet que le chercheur perd de vue l'ensemble du problème.

Or, l'existence de la redondance permet d'avoir plus de détails sur un problème donné. La redondance peut parfois donner lieu à certaines propriétés intéressantes dans la théorie. Une situation illustrée par les travaux de A. Charne [1.16] sur l'ajout des contraintes et de variables pour passer d'un problème de programmation linéaire à un problème de transport.

Ainsi l'étude de la contrainte redondante s'ouvre des situations de confusions. En effet, si l'ensemble de toutes les contraintes dans un problème de programmation linéaires sont redondantes, la résolution est simple et plus rapide. Généralement, la première conséquence de la redondance dans la programmation mathématique qui vient à l'esprit est l'effet qu'elle a sur le processus de résolution dudit problème. En somme dans un problème de programmation nous pouvons éviter l'inclusion de la redondance. Cependant,

la recherche des contraintes redondantes peut s'avérer très coûteux de par le genre du problème et la méthode utilisée pour la détection. Nous serons alors confrontés à trois options claires :

- ne rien faire
- identifier la redondance
- identifier et éliminer la redondance.

Nombreux sont les articles qui ont été écrits sur la redondance au cours des vingt dernières années et générant des problèmes connexes. Ces documents présentent généralement des méthodes sur l'identification des contraintes redondantes. Une branche qui sera étoffée à travers cette étude.

1.7 Théorie de la complexité en programmation linéaire

Un langage de programmation est une séquence de codes exprimant des commandes reconnues par une machine et traduit en langage de la machine et un programme informatique est une suite d'opérations pouvant être exécutées par une machine. les étapes de conception d'un programme informatique sont :

- identifier le problème : les données à l'entrée et les résultats à la sortie,
- organiser les actions par une écriture de l'algorithme
- traduire cet algorithme en langage de programmation
- compiler le programme pour qu'il puisse être exécutable

Une affectation est une instruction qui permet d'attribuer une valeur à une variable.

Les instructions d'affectation, de lecture et d'écriture sont des instructions séquentielles.

Une instruction conditionnelle permet d'exécuter ou non un bloc d'instructions selon le résultat d'un test.

La complexité d'un algorithme est en temps, le nombre d'opérations élémentaires effectuées pour traiter une donnée de taille n , en mémoire, l'espace mémoire nécessaire pour traiter une donnée de taille n .

Un type abstrait est un triplet composé :

- d'un nom,

- d'un ensemble de valeurs,
- d'un ensemble d'opérations définies sur ces valeurs.

1.7.1 Complexité

La présentation de cette sous section ne veut ni complètement rigoureux ni exhaustive mais a pour objectif d'exposer les principales définitions permettant d'aborder des questions élémentaires de complexité des algorithmes de résolution des problèmes de PL du point de vue pratique. On pourra se rapporter pour un exposé plus complet sur la théorie de complexité en programmation linéaire.

La théorie de complexité en programmation en général, étudie les ressources en termes de temps de calculs et d'espace mémoire nécessaire à la résolution d'un problème par un ordinateur. En particulier, elle a pour objet de définir des grandes classes de problèmes en fonction de leur complexité dans la résolution. Pour réaliser cette classification, il faut définir précisément et formellement les problèmes d'algorithme afin de ce que l'on entend par complexité. Un problème général définit comme une question à résoudre pour l'ensemble des paramètres ou de variables libres dont les valeurs ne sont pas spécifiées. Un jeu de données est obtenu en attribuant des valeurs particulières à l'ensemble de ces paramètres. La théorie de complexité s'applique particulièrement aux problèmes de décision plutôt qu'aux problèmes d'optimisation. Dans le premier cas, il s'agit pour le problème une solution de type oui/non ou 0/1 comme réponse à la question posée. Le problème de décision est défini alors comme une fonction de l'ensemble des données vers $\{0,1\}$. Il est toujours possible de transformer le problème d'optimisation en problème de décision et d'y appliquer la théorie de complexité.

Un algorithme est défini de manière générale comme une procédure composée d'étapes élémentaires c'est-à-dire une suite finie d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème donné. C'est une procédure de calcul bien définie qui prend en entrée un ensemble de valeurs et qui délivre en sortie un ensemble de valeurs.

Définition 1.11

Un algorithme A est dit **résoudre un problème P**, s'il peut être appliqué pour n'importe quel jeu de données I et P est garanti à un programme d'ordinateur écrit dans un langage particulier.

Définition 1.12

Un algorithme est **correct** si pour toute instance du problème, il se termine et produit une sortie correcte.

Définition 1.13

Une heuristique est une procédure de calcul correcte pour certaines instances du problème (c'est-à-dire termine ou produit une sortie correcte)

Comme exemple d'algorithme, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le *PGCD* de deux nombres dont on ne connaît pas la factorisation.

L'efficacité d'un algorithme est mesurée par son coût (complexité) en temps et en mémoire. Dans la portée générale, la théorie de complexité nécessite de définir précisément le modèle de machine utilisée. Citons par exemple la machine de Turing¹ déterministe, la machine de Turing non déterministe, ou la machine de V. Neumann [1.17]. Les notions présentées dans cette section sont principalement dans le cadre de machine de Turing et de l'arithmétique rationnelle.

Cherchant en général l'algorithme le plus efficace pour résoudre un problème donné, il est naturel d'essayer de définir une mesure de cette efficacité. Le temps d'exécution de l'algorithme défini comme une fonction de la taille du jeu de données du problème à résoudre est généralement le facteur dominant déterminant l'efficacité pratique d'un algorithme dans la résolution d'un problème donné. La taille du jeu de données dépend quand à elle du schéma de codage retenu pour l'entrée des données.

Le calcul de complexité en temps sera donc dépendant du modèle de la machine et du schéma de codage utilisé. Toutefois, la théorie générale de la complexité et les quelques éléments présentés ici restent valides en dépit de ces différences si l'on garde à l'esprit que les résultats sont obtenus pour un codage particulier et un modèle de machine utilisé.

1.7.2 Complexité d'un problème et d'un algorithme

Soit un algorithme A résolvant un problème P sur les données I . On définit $V(I)$ in \mathbb{N} mesurant la longueur de l'écriture des données I au moyen de l'alphabet fini (ensemble fini de symboles).

¹ Modèle abstrait du fonctionnement des appareils mécaniques de calcul, tel un ordinateur et sa mémoire. Ce modèle est imaginé par Alan Turing.

$V(I)$ représente la taille du problème, c'est à dire la taille mémoire nécessaire afin de stocker l'ensemble des données I du problème P .

Par exemple, en programmation linéaire (sous forme standard), les données sont constituées par les éléments du triplet (A,b,c) . La taille n (parfois également m) de la matrice A définit la dimension du problème PL . De plus, on associe la complexité $c(A,I) \in \mathbb{N}$ à la paire (A,I) pour mesurer le nombre d'étapes élémentaires de la résolution du problème P sur les données I à l'aide de l'algorithme A .

Différents types de complexités sont usuellement utilisées dans le domaine de l'analyse de complexité : complexité dans le pire des cas, complexité moyenne, complexité asymptotique, etc.... Seuls les deux premiers types sont définis dans ce document. La majorité des calculs de complexité se fondent sur l'analyse dans le pire des cas.

Définition 1.14

Le calcul de complexité dans le pire des cas consiste à déterminer une borne supérieure sur le temps d'exécution requis pour résoudre un problème donné avec n'importe quel jeu de données I .

Formellement, si tout jeu de données I appartient à l'ensemble de I_P ², alors **la complexité dans le pire des cas** se définit comme

$$C_{pc}(A) = \sup_{I \in I_P} c(A,I) \quad (1.11)$$

Toutefois, l'analyse de complexité de certains algorithmes (algorithme du simplexe en est un exemple typique) a montré de nombreux écarts entre la complexité calculée dans le pire des cas et les performances relevées pour certains jeux de données typiques. Pour pallier à ce défaut, les algorithmes peuvent être également caractérisés par une complexité moyenne.

Définition 1.15

On suppose que l'ensemble des données possibles est noté I_P et que l'on dispose d'une distribution de probabilité sur I_P , alors **la complexité moyenne** de l'algorithme A est calculée par :

². Ensemble des données possibles et seulement possibles

$$C_m(A) = E(I) \in I_P [c(A, I)] \quad (1.12)$$

1.7.3 Classes de complexité

Définition 1.16

Un algorithme A résolvant **un problème P est polynomial** si pour toute donnée I, il existe un polynome Q tel que

$$c(A, I) = O(Q(v(I))) \quad (1.13)$$

Cela signifie qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$c(A, I) \leq k.Q(v(i)) \quad (1.14)$$

Un algorithme pour lequel une telle constante k n'existe pas est appelé **algorithme en temps exponentiel**.

Notons P la classe des problèmes polynomiaux.

Le modèle de calcul pour définir la classe P est la machine de Turing déterministe. La notation usuelle pour la complexité polynomiale $c(A, I)$ est donnée par $O(p_1 \propto p_2 \dots)$ où les p_i sont des paramètres du problème P. La notation signifie que $c(A, I)$ se comporte comme le monôme $p_1 \propto p_2 \dots$ quand les p_i tendent vers l'infini.

La classe des algorithmes des polynomiaux est considérée de manière générale comme une classe d'algorithmes efficaces en pratique et la classe des problèmes P comme une classe de problèmes faciles à résoudre.

Définition 1.17

Un problème est dit appartenir à la **classe NP**, s'il ne peut être résolu en temps polynomial par une machine de Turing non déterministe.

Un des questionnements majeurs en théorie de complexité concerne la question $P = NP$?

De manière non rigoureuse, on peut définir la classe P, la classe des problèmes qui peuvent être résolus rapidement alors que la classe NP est celle des problèmes dont une solution peut être valide rapidement. La seule relation clairement identifiée entre les deux classes est $P \subseteq NP$ puisque les machines de Turing déterministe forment une sous classe

des machines de Turing non déterministes. Si $N \neq NP$, alors une autre sous classe de problèmes peut être définie. Afin de définir cette classe de manière rigoureuse, il est nécessaire d'introduire la notion de transformation polynomiale.

Définition 1.18

Un problème P se **transforme en temps polynomial** en problème P' (avec la notation $P \propto P'$), s'il existe un algorithme en temps polynomial tel que la solution, pour un jeu de données I de P , est identique à la solution pour un jeu de données I' de P' .

Deux problèmes P et P' seront polynomialement équivalents si $P \propto P'$ et $P' \propto P$.

La signification principale d'une transformation polynomiale d'un problème est liée essentiellement au résultat suivant :

Lemme 1.01

Si $P \propto P'$, alors $P \in P \rightarrow P' \in P'$

Un problème NP-complet est un problème pour lequel on ne connaît pas d'algorithme correct efficace, c'est-à-dire réalisable en temps et en mémoire.

Définition 1.19

Un problème P est dit **NP-complet** si $P \in NP$ et pour tout problème $P' \in NP$, alors P et P' sont polynomialement équivalents.

Un exemple de problème NP complet est donné par celui du problème de décision du voyageur de commerce.

De manière informelle, la classe P peut être considérée comme la classe des problèmes les plus faciles à résoudre de NP , alors que la classe des problèmes NP-complet regroupait la classe des problèmes les plus difficiles à résoudre de NP . Enfin, si l'on ne se limite pas à la classe des problèmes NP , on peut définir une dernière classe.

1.8 Identification des contraintes redondantes

De nombreux chercheurs ont proposé différents algorithmes pour identifier les contraintes redondantes et les retirer de l'étude afin d'obtenir un modèle réduit pour la programmation linéaire.

En 1965, Zionts [1.18] suggérait quelques améliorations à la mise en œuvre de la méthode de démarrage, mais pas au point de vue pratique.

En outre, un certain nombre de méthodes qui traitent la redondance ont été mises au point, dont la plus connue est celle de la méthode d'énumération géométrique. La principale caractéristique de cette méthode d'énumération géométrique est la création d'un certain nombre de situations dans lesquelles la redondance peut être reconnue immédiatement sans plus de calculs.

En 1971, Lisy [1.19] a utilisé les règles établies par Zionts [1.20] pour identifier toutes les contraintes redondantes dans des systèmes de contraintes linéaires.

T. Gal [1.21] développe cette approche par l'ajout des règles pour les situations dans lesquelles les contraintes peuvent être immédiatement identifiées comme étant non redondantes. Il a proposé une autre méthode pour classer les contraintes aussi bien les contraintes redondantes que nécessaires.

Ils produisent des résultats qui sont inconditionnellement incorrects. Ils améliorent à cet effet des itérations d'un algorithme de programmation linéaire.

Par ailleurs Brearly et Al. [1.22] ont proposé une méthode simple pour identifier les contraintes redondantes à partir d'un système de contraintes linéaires. Cette méthode consiste à analyser les limites inférieures et supérieures des variables.

Telgan [1.23] a proposé une méthode déterministe pour identifier les contraintes redondantes par l'utilisation de ratio minimal comme dans la méthode du simplexe.

Stojkovic et Stanimirovic [1.24] proposaient une méthode pour identifier les contraintes redondantes par le principe du maximum et minimum.

Paulraj et Al. [1.25] ont également présenté une méthode heuristique pour identifier les contraintes redondantes en utilisant l'interception des contraintes de matrice de problème de programmation linéaire.

De leur côté, Gutman et Ioslovich [1.26] ont décrit une nouvelle approche pour pré traiter les problèmes à grande échelle non négatif afin de réduire les dimensions considérablement en définissant et en supprimant les contraintes redondantes et les

variables. Ce test est applicable à tous les non négatifs à grande échelle de problème de programmation linéaire avec des contraintes de groupe. Des contraintes de groupe qui ne contiennent uniquement que des zéros ou des uns comme coefficients des inéquations ou équations des contraintes. Il s'agit ici d'un cas de problème de programmation linéaire à variable entière. Les contraintes et variables sont supprimées par un test primal ou dual. Cette méthode est applicable aux contraintes du problème du sac à dos.

Une contrainte est redondante si elle peut être supprimée d'un système de contraintes linéaires sans changer la région faisable ou le domaine de solution acceptable.

Examinons le système suivant de m -contraintes d'inégalité linéaire à n -variable ($m \geq n$).

$$A.X \leq b \quad (1.15)$$

$$X \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, X \in \mathbb{R}^n, 0 \in \mathbb{R}^n$$

Soit

$$A_i.X \leq b_i \text{ la } i\text{-ème contrainte du système}$$

et soit

$S = \{X \in \mathbb{R}^n / A_i.X \leq b_i, X \geq 0\}$, le domaine de solutions acceptables associées au système (1.15).

soit

$S_k = \{X \in \mathbb{R}^n / A_i.X \leq b_i, X \geq 0\}, i \neq k$, le domaine de solutions acceptables associées à la contrainte $A_i.X \leq b_i, i \neq k$.

La k -ème contrainte $A_k.X \leq b_k$ est redondante pour le système (1.15) si et seulement si

$$S = S_k.$$

Définition 1.20

La contrainte $A_i.X \leq b_i$ est **faiblement redondante** si elle est redondante et $A_i.X = b_i$ pour tout $X \in S$.

Définition 1.21

La contrainte $A_i.X \leq b_i$ est **fortement redondante** si elle est redondante et $A_i.X < b_i$ pour tout $X \in S$.

Définition 1.22

La contrainte obligatoire est celle qui passe par le point solution optimale. Elle est également appelée contrainte pertinente.

Définition 1.23

La contrainte non contraignante est qui ne passe pas par la solution optimale. Mais elle peut délimiter le domaine de solutions acceptables.

Définition 1.24

La k-ème **contrainte** est **redondante** si

$$\bigcap_{i=1}^m ZCT_i \subset ZCT_k$$

Définition 1.25

Le système de **contrainte** est **incompatible** si

$$\bigcap_{i=1}^m ZCT_i = \emptyset$$

De nombreuses méthodes sont disponibles dans la littérature pour identifier les contraintes redondantes dans les problèmes de programmation linéaire. Nous développons dans cette thèse cinq méthodes que nous jugeons les plus connues :

- Méthode des limites
- Méthode de programmation linéaire
- Méthode déterministe
- Méthode de Stojkovic et Stanimirovic
- Méthode heuristique

1.8.1 Méthode des limites

Brearley et al.[1.27] ont proposé pour identifier les contraintes redondantes pour un problème de programmation linéaire (PPL) avec des variables bornées. Cette méthode consiste à déterminer les limites inférieures et supérieures des variables. Les limites inférieure et supérieure de chaque contrainte sont calculées et comparées avec le coté droit de cette contrainte afin de décider si c'est une contrainte redondante ou non.

1.8.1.1 Procédure de la méthode

À partir de la forme canonique du problème de PPL, on détermine les limites inférieures L_i et les limites supérieures U_i de chaque contrainte i . Considérons le modèle de programmation linéaire :

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{i=1}^k a_{ij} x_j &\leq b_i & a_{ij} x_j &\leq b_i, \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq k \\ \sum_{i=k+1}^m a_{ij} x_j &\leq b_i & a_{ij} x_j &\geq b_i, \text{ pour tout } i, k+1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Avec $l_j \leq x_j \leq u_j$ pour tout $j, 1 \leq j \leq n$

Etape 1.

Lemme 1.02

Les limites inférieures et supérieures de chaque premier membre d'une contrainte i sont données par les formules :

$$U_i = \sum_{j \in P_i} a_{ij} u_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} l_j$$

$$L_i = \sum_{j \in P_i} a_{ij} l_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} u_j$$

Où $P_i = \{ j; a_{ij} > 0 \}$ et $N_i = \{ j; a_{ij} < 0 \}$, L_i est peut être nulle et U_i est peut être ∞ .

Démonstration :



Considérons une contrainte

$$\sum_{i=1}^k a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ ou } \sum_{i=k+1}^m a_{ij}x_j \geq b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m$$

Notons $P_i = \{j; a_{ij} > 0\}$ et $N_i = \{j; a_{ij} < 0\}$

$$U_i = \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot u_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \cdot l_j \geq \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot x_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \cdot x_j = \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot x_j$$

U_i est la borne supérieure de $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$.

$$L_i = \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot l_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \cdot u_j \leq \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot x_j + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \cdot x_j = \sum_{j \in P_i} a_{ij} \cdot x_j$$

L_i est la borne inférieure de $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$

♦

Etape 2.

Proposition 1.01

Si $U_i \leq b_i$ pour $i = 1, 2, \dots, k$, alors la contrainte i telle que $\sum_{j=1}^k u_j \cdot x_j \leq b_i$ est redondante.

De même si $L_i \geq b_i$ pour $i = k + 1, 2, \dots, n$, alors la contrainte i telle que:

$$\sum_{j=k+1}^m u_j \cdot x_j \geq b_i \text{ est redondante.}$$

Démonstration :

♣

D'après le lemme 1.02, U_i est la borne supérieure de $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$,

donc si $U_i \leq b_i$,

alors

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_0 \leq U_i \leq b_i$$

pour tout $X_0 = (x_0_1, \dots, x_0_m) \in \prod_{i=1}^m [l_i; u_i]$

Donc pour la contrainte $i, \prod_{j=1}^m [l_j; u_j] \subset C_0^+$ et la contrainte i est redondante.

Dans le cas où

$$bi \leq Li \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} . x0_j$$

Pour tout $X_0 = (x0_1, \dots, x0_m) \in \prod_{i=1}^m [l_i; u_i]$

On a aussi

Et pour la contrainte $i \prod_{j=1}^m [l_j; u_j] \subset C_0^+$, la contrainte i est redondante.

♦

1.8.1.2 Extension de la méthode

Pour reconnaître les contraintes redondantes, le côté gauche de chaque contrainte est optimisé sous réserve des autres contraintes. L'objectif optimal valeur fonctionnelle est comparé avec la valeur côté droite de contraintes correspondants à décider s'il est redondant ou non. Dans cette méthode, la fonction économique du PPL n'est pas prise en compte.

Dans cette méthode, la fonction économique n'intervient pas et toutes les variables de décision sont bornées. Nous proposons une méthode de recherche des bornes avec des méthodes géométriques ou topo géométrique dans le chapitre 4.

1.8.2 Méthode de programmation linéaire

La méthode consiste à enlever une contrainte dans le système et tester si la valeur économique reste la même.

Considérons le PPL :

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

sous les contraintes

(1.16)

ou le PPL :

sous les contraintes

(1.17)

Proposition 1.02

Démonstration :

♣

solution $S_0 = \{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$ avec le système (1.16).

$$a_{m+1,1}x_1^{(0)} + a_{m+1,2}x_2^{(0)} + \dots + a_{m+1,n}x_n^{(0)} \geq b_{m+1}; S_0 \notin ZCT_{m+1}$$
$$S_0 \notin \bigcap_{i=1}^{m+1} ZCT_i.$$

◆

Corollaire 1.01

Dans le système (1.17), si on ajoute une contrainte $a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n \geq b_{m+1}$ et si avec la solution optimale

$$S_1 = \{x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}, a_{m+1,1}x_1^{(1)} + a_{m+1,2}x_2^{(1)} + \dots + a_{m+1,n}x_n^{(1)} \geq b_{m+1},$$

alors la solution S_1 n'est plus optimale et la contrainte ajoutée n'est pas redondante.

Démonstration :

♣

Considérons la contrainte supplémentaire $a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n \geq b_{m+1}$ et la solution

$$S_1 = \{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} \text{ avec le système (1.16).}$$

Si

$$a_{m+1,1}x_1^{(0)} + a_{m+1,2}x_2^{(0)} + \dots + a_{m+1,n}x_n^{(0)} \geq b_{m+1}; S_1 \notin ZCT_{m+1}$$

et aussi

$$S_1 \notin \bigcap_{i=1}^{m+1} ZCT_i$$

♦

1.8.2.1 Procédure de la méthode

Soit P le problème de programmation linéaire donné. Soit P_i le problème de programmation linéaire sans la contrainte i (ou $A_i X \leq b_i$).

Etape 1.

Calculer la valeur optimale de la la fonction économique pour le problème P_i par la méthode du simplexe. Notons par z_i la valeur de cette la fonction économique optimale du problème P_i .

Etape 2.

Si $z_i \leq b_i$ alors la contrainte i ou $A_i X \leq b_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ est redondante. Sinon, la contrainte i n'est pas redondante.

1.8.2.2 Inconvénients de la méthode

La méthode de programmation linéaire pour détecter les contraintes redondantes nécessite la résolution par simplexe. L'idée de présolve est dépassée d'autant plus que la fonction économique tient un rôle très important dans cette méthode. Ce qui n'est pas très pratique si les coefficients économiques changent. Dans la suite, les méthodes sont encore basées sur le simplexe mais plus intéressantes en ne considérant que les tableaux donnant des résultats partiels.

1.8.3 Méthode déterministe

Telgan [1.28] a mis au point un algorithme pour identifier les contraintes redondantes et implicites des principes d'égalité dans le système de contraintes linéaires en utilisant le minimum de critère de rapport comme dans la méthode du simplexe.

Considérons le PPL :

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

sous les contraintes

[illegible]

avec $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Sous forme standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} maxZ = c_1x_1 + ... + c_n x_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + e_2 = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + e_m = b_m \end{array} \right.$$

(1.18)

avec $x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_m \geq 0$

Définition 1.16

Une variable de base est une variable prenant une valeur non nulle dans le tableau et **une variable hors base** est celle qui prend la valeur nulle. Dans un problème de maximisation avec des contraintes d'exigences maximales, les premières variables de base sont les variables d'écart.

Disposition matricielle

$E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^0$ vecteur unitaire de \mathbb{R}^m et $\{E_1, \dots, E_m\}$ base de \mathbb{R}^m .

Tableau 1.01 : Tableau 1 du simplexe

Base		X_1	X_2	X_3	U_1	U_2	U_3	U_4	RHS
U_1		a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	0	b_1
U_2		a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	0	b_2
U_3		a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	0	b_3
U_4		a_{41}	a_{42}	a_{43}	0	0	0	1	b_4

Equation matricielle

$$A.X^N + I.X^B = b$$

Avec
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, X^N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X^B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.17

Le coût marginal d'une variable hors base est le coût d'attribution d'une unité pour cette variable. C'est aussi l'augmentation de la fonction économique si on attribue d'une unité cette variable.

Proposition 1.03

Une variable hors base est une variable susceptible d'entrer dans la base ou variable entrante si son coût marginal est strictement négatif.

Démonstration :

♣

La fonction économique :

$$Z = {}^t c.X = {}^t c_B.X^B + {}^t c_N.X^N.$$

Comme

$$X^B = B^{-1}(b - A.X^N), Z = {}^t c_B.(B^{-1}(b - A.X^N)) + {}^t c_N.X^N.$$

$$Z = {}^t c_B.B^{-1}b + ({}^t c_N - {}^t c_B.B^{-1}A).X^N$$

♦

Notons le vecteurs des coûts réduits

$$L^N = {}^t c_N - {}^t c_B.B^{-1}A$$

Si pour tout $j = n : n + m$, toutes les composantes $L_j^N \leq 0$, il n'est pas possible d'augmenter Z et la solution de base maximise Z .

S'il existe $j_0, j_0 \in \{n; n + m\}$ tel que $L_{j_0}^N > 0$, alors on peut augmenter Z en introduisant $x_{j_0}^N$ dans la base est une variable entrante.

On choisit

$$j_o = \arg \max_{j=n:n+m} \{L_j^N > 0\}.$$

La variable entrante étant choisie, la condition $x_{j_0}^N > 0$ nécessite $\frac{a_{ij_0}}{b_i} \geq 0$

La variable sortante $x_{j_1}^B, j_1 = 1 : n$ est telle que :

$$j_1 = \arg \min_{i=1:m} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij_0}} > 0 \right\}$$

Si x_1 est une variable entrante et la variable sortante est indiquée par

$$\min \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_1}{a_{11}} \right\}$$

Supposons que e_2 est la variable sortante. La base est :

$$\{U_1, X_1, U_3, U_4\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Soit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a_{11}}{a_{21}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{a_{21}} & 0 & 0 \\ 1 - \frac{a_{31}}{a_{21}} & 0 & 0 \\ 1 - \frac{a_{41}}{a_{21}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$B^{-1}A.X^N + B^{-1}.X^B = B^{-1}.b$$

qui équivaut à

$$A^{(1)}.X^N + I.X^B = b^{(1)}$$

$$X^B = \begin{pmatrix} e_1 \\ x_1 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.18

Une solution de base réalisable est dite **dégénérée** si au moins une des variables de base est nulle.

1.8.3.1 Procédure de la méthode

Supposons qu'une solution réalisable de base est donnée, ainsi que le tableau simplexe partiel correspondant.

Soit y_{ij} les entrées de ce tableau avec y_{j0} le coté droit des coefficients et soient x_j^B et x_j^N les deux variables représentant respectivement la variable de base et la variable hors base du PPL.

Soit H l'ensemble de tous les indices des contraintes qui permettent d'identifier celles qui sont redondantes ou non.

Tous les indices de contraintes doivent être identifiés comme soient redondantes ou soient non redondantes.

Soit e_i la variable d'écart associée à la i -ème contrainte.

On peut alors établir le tableau ci-dessous:

Tableau 1.02 : Tableau simplexe

c_j	c_1	c_2		0	0		0	-
base	x_1	x_2	...	e_1	e_2	...	e_k	Q
x_1^B	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	y_{1j+1}	...	y_{1n}	y_{10}
x_2^B	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	y_{1j+1}	...	y_{1n}	y_{10}
.
x_k^B	y_{k1}	y_{k2}	...	y_{kj}	y_{kj+1}	...	y_{kn}	y_{k0}
Z_j	a_1	a_2	...	a_j	a_{j+1}	...	a_n	Z
$C_j - Z_j$	c_1	c_2	...	0	0	...	0	

Etape 1.

Si la solution est non dégénérée, tous les $e_k = x_j^N$ correspondent aux inégalités non redondantes, retirer k de H et passer à l'étape 3.

Etape 2.

Dans une solution dégénérée, vérifier que pour toutes les variables hors base, $e_k = x_l^N$ avec $l \in H$, la propriété $y_{il} \geq 0$ pour tous i avec $y_{i0} = 0$.

Si cela est vraie, alors la contrainte $A_k.X \leq b_k$ n'est pas redondante et retirer k de H.

Etape 3.

Vérifier que pour toutes les variables de base x_l^B où $l \in H$, la propriété $y_{lj} \leq 0$ est vraie pour tous les j .

Si cela est vrai, alors la contrainte $A_l.X \leq b_l$ est redondante, et l doit être retiré de H.

Etape 4.

Vérifier que pour toutes les variables de base x_l^B où $l \in H$ la propriété :

$$y_{10}/y_{1s} = \min_i \{y_{i0}/y_{is}, y_{is} > 0\} \text{ est atteinte en un unique } l \text{ pour certains } s.$$

Si cela est vrai, la contrainte $A_l \leq b_l$ n'est pas redondante, et on retire l de H .

Etape 5.

Si $H = \emptyset$, alors on arrête. Sinon, passer à l'étape 6.

Etape 6.

S'il n'y a pas de variable de base $e_k = x_l^B$ avec $l \in H$, on introduit une nouvelle variable hors base x_j^N , $k \in H$ (par exemple avec le plus petit index j) dans la base et on continue avec l'étape 7.

Etape 7.

Sélectionner une variable de base $e_k = x_i^B$ avec $i \in H$ (par exemple, le plus petit index i) et déterminer de nouveau une nouvelle variable entrante ou dans le programme avec $y_{ip} = \max y_{ij}$.

On revient à l'étape 1.

Cette méthode proposée Stojkovic et Stanimirovic [1.29] est une simple méthode qui vérifie l'existence d'un point selle x de la matrice de la théorie de jeu associé au problème, en appliquant les principes de max-min et du min-max plus précisément dans la recherche de stratégie dominée.

1.8.3.2 Procédure de la méthode

Etape 1.

Calculer :

$$d_{ij} = a_{ij}/b_i, i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Etape 2.

Proposition 1.04

Si

$$\max_{i=1:n} \min_{j=1:n} d_{ij} = \max_{i=1:n} \min_{j=1:n} d_{ij}$$

alors il n'y a pas de contraintes redondantes.

Arrêter.

Corollaire 1.01

S'il existe k et l tels que $d_{kj} \leq d_{lj}$, pour tous les $j = 1, \dots, n$ alors la k ème contrainte est redondante.

1.8.4 Méthode heuristique

Paulraj et Al. [1.30] ont proposé une méthode heuristique pour identifier la contrainte redondante à l'aide de la matrice intercepte de contraintes d'un PPL.

1.8.4.1 Procédure de la méthode

Etape 1.

Soit I l'ensemble des indices associés à l'ensemble des variables de base ou hors base initiale.

Posons alors $I = \{1, 2, \dots, n + m\}$.

Soit J sur l'ensemble des indices associés aux variables initiales de base. $J = \{1, 2, \dots, n\}$

Etape 2.

Construire une matrice intercepte " Θ " à l'aide de la relation suivante :

$$\theta_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0, \text{ pour } i \in I, j \in J$$

Etape 3.

Déterminer la variable entrante de la façon suivante :

$$(i) \quad \text{Calculer } z_j - c_j = c_B \cdot B^{-1} \cdot (a_j - c_j)$$

pour toutes les variables hors base.

$$aj = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t.$$

(ii) Soit $\beta_j = \min_{i \in I} g_{ji}$, pour $j \in J, i \in I$.

(iii) Calculer $z'_j - c'_j = \beta_j \cdot (z_j c_j)$ pour $j \in J$

Etape 4.

(i) Soit $z'_k - c'_k = \min_{j \in J} \{z'_j - c'_j\}$

(ii) Si $z'_k - c'_k \geq 0$, alors le problème n'a pas de contrainte redondante.

(iii) Sinon, enlever l'élément k de l'ensemble J, c'est-à-dire on a

$$J = J - k.$$

(iv) Soit $g_{kl} = \min_{i \in I} g_{ki} = \beta_k$

(v) Enlever l'élément l de l'ensemble I,

c'est-à-dire : $I = I - l$.

(vi) Trouver p tels que $\min_{l \in I} g_{pl} = \beta_p$ pour $p \in J$.

Dans l'affirmative, prenons un p de J et considérons

$$J = J - p.$$

Etape 5.

Si $J = \emptyset$, passer à l'étape 6. Sinon, revenir à l'étape 4.

Etape 6.

Si $J = \emptyset$, alors le problème n'a pas de contraintes redondantes et arrêter.

Sinon, toutes les contraintes associées à $i \in I$ qui coupent l'axe de coordonnées de j vérifiant la condition $g_{ji} \geq \max_{j \in J} \beta_j$ où $i \in I$ et $j = 1, 2, \dots, N$ sont redondantes.

1.8.4.2 Méthode proposée

Une méthode de détermination des contraintes redondantes proposée par Sumathi et Balachander [1.31] est développée dans cette section.

1.8.4.3 Procédure de la méthode

Considérons le PPL :

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, 1 \leq i \leq m \\ 0 \leq x_j &\leq u_j, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Etape 1.

Soit

$$R_i = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} c_j^t}{a_{ij}^2}$$

$$a_{ij} > 0, c_j > 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Etape 2.

Sélectionnons la contrainte la plus obstructive correspondant à k, tel que :

$$k = \underset{1 \leq i \leq m}{\operatorname{argmin}} i (R_i).$$

Etape 3.

La contrainte $A_u X \leq b_u$ est redondante si $\theta_u^k \langle b_u$, ou θ_u^k est une valeur optionnelle du problème LP_u^k défini par :

$$\max \alpha_u^k = A_u X$$

Sous les contraintes :

$$A_k X \leq b_k, \text{ et } 0 \leq X \leq U.$$

1.8.5 Earlier method

Cette méthode est proposée par Ioslovich [1.31] pour identifier les contraintes redondantes. Remarquons que cette méthode nécessite plus de calculs en termes de variables et de durée d'obtention de contrainte redondante.

1.8.5.1 Procédure de la méthode

Pour tout $i = 1, 2, \dots, m$, résoudre le PPL :

$$\text{Max } \alpha_i^f = \alpha_i . x$$

sous les contraintes

$$c^T . x \leq Z_i$$

et

$$0 \leq x \leq u$$

Proposition 1.04

Si $\alpha_i^f < b_i$, alors la i -ème contrainte est redondante.

Etape 1.

Résoudre le PPL pour trouver les valeurs de Z_i .

$$\max Z_i = c^T . x$$

Sous la contrainte $\alpha_i \leq b_i$.

Etape 2.

Déterminer y_u et y_u' .

Etape 3.

Calculer

$$\max Z_u = c^T . X$$

Sous les contraintes :

$$y_u x \leq y_u' b \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq U.$$

Etape 4.

Déduire,

$$Z_j = \min(Z_{il}, Z_u) \quad \text{où} \quad Z_{il} = \min Z_i.$$

1.9 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de survoler le cadre théorique de la thèse notamment la topologie et la géométrie vectorielle qui constituent la base fondamentale de cette étude dénommée ” Modélisation topo-géométrique MZ de recherche de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire”. Des résultats de travaux de recherche dans le domaine de l’étude ont été présentés et montrent l’ouverture de cet axe de recherche en terme d’optimisation.

Dans la méthode des limites, les variables de décision doivent être bornées. Dans le cas contraire, pour avoir les bornes, on revient à la méthode classique du simplexe, ce qui n’a aucun intérêt dans l’optique du présolve.

Dans la méthode de programmation linéaire pour détecter les contraintes redondantes, on résout entièrement le problème pour déterminer le profit maximal en tant que référence dans les comparaisons. La détection dépend donc de la fonction économique ce qui n’est pas dans Le cadre de présolve.

CHAPITRE 2

LES ELEMENTS DE BASE DE LA THEORIE TOPO-GEOMETRIQUE MZ, LES CLASSES D'OBJETS DE MZ

2.1 Introduction

Ce chapitre constitue le fondement de cette thèse. Nous y présenterons d'abord en détails toutes les classes d'objet mathématiques du plus simple au plus compliquées, permettant de modéliser le concept réel à la prise de décision. En même temps que la présentation de chaque classe, nous analyserons les opérations et relations existantes; la représentation des contraintes techniques par des demi-espaces affines constitue la partie la plus importante de ce chapitre. Ce second chapitre fait également l'objet du développement de nos articles :

- M.T. Andrianarizaka, M. Robinson, H.Z. Andriamanohisoa, "Modèle topogéométrique MZ", MADA-ETI, ISSN: 2220-0673, Vol.2, 2016.

- M.T. Andrianarizaka, M. Robinson, H.Z. Andriamanohisoa, "Topo-geometric model MZ: Feeder Objects, International Journal of Engineering research and Technology (IJERT), ISSN: 2278-0181, Vol.7 Issue 03, March 2018

2.2 Les objectifs alimentés

2.2.1 Définitions et premiers exemples, ouverts

Définition 2.01

Une **topologie** sur un ensemble X est un sous-ensemble O de $P(X)$ satisfaisant les trois axiomes suivants:

1. $\emptyset \in O$ et $X \in O$
2. la réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ de toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de O est un élément de O ;
3. L'intersection $U \cap U_0$ de deux éléments U et U_0 de O est encore un élément de O .

Un **espace topologique** est un ensemble muni d'une topologie. Les éléments d'une topologie O sur X s'appellent les **ouverts** pour la topologie O .

Formellement, un espace topologique est donc une paire (X, O) où X est un ensemble et O est un sous-ensemble de $P(X)$ satisfaisant aux axiomes précédents. Souvent, lorsque

la topologie est sous-entendue, on note simplement $X = (X, O)$ et on dit “soit X un espace topologique”. De même l’expression, “soient X un espace topologique et U un ouvert de X ” signifie que X est muni d’une topologie O et que U est ouvert pour cette topologie.

Remarque

On peut remplacer l’axiome 3 par l’axiome équivalent suivant : l’intersection de toute famille finie d’éléments de O est encore un élément de O (le vérifier par récurrence).

Exemple 2.01

Topologie d’un espace métrique

Rappelons qu’un espace métrique est une paire (X, d) où X est un ensemble et

$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une application, appelée distance,

telle que $\forall x, y, z \in X$, on ait:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, la boule ouverte de centre x est de rayon ε est l’ensemble

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

On définit alors

$$O = \{U \in P(X) \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \varepsilon) \subset U\}$$

Alors O est une topologie sur X (le vérifier !), appelée la topologie induite par la distance d . Tout espace métrique (X, d) est donc muni d’une topologie, appelée la topologie associée à la distance d , et dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes (vérifier).

Remarque.

Soit X un ensemble. On dit que deux distances d et d_0 sur X sont équivalentes s’il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha d(x, y) \leq d_0(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

Si les distances d et d_0 sont équivalentes, alors les topologies sur X définies par d et d_0 sont les mêmes.

En effet :

Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$,

Notons :

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}, \text{ et } B_0(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d_0(x, y) < \varepsilon\}$$

Soient $\alpha, \beta > 0$ vérifiant les relations précédentes.

On a alors:

$$B(x, \varepsilon) \subset B_0(x, \beta\varepsilon) \text{ et } B_0(x, \varepsilon) \subset B(x, \alpha^{-1}\varepsilon)$$

Soit U un ouvert pour la topologie définie par d et $x \in U$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$ et donc, par la deuxième inclusion précédente, on a:

$$B_0(x, \alpha\varepsilon) \subset B(x, \varepsilon) \subset U;$$

ce qui montre que U est ouvert par la topologie associée à la distance d_0 . De même on montre qu'un ouvert pour la topologie associée à la distance d_0 est ouvert pour la topologie associée à la distance d .

Exemple 2.02

Topologie d'un espace vectoriel normé

Rappelons qu'un espace vectoriel normé (evn) est une paire $(E, \|\cdot\|)$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une application, appelée norme, telle que $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on ait

$$1. \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Si $E = (E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, la formule

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.01)$$

définit une distance sur E , et ainsi une topologie sur E , appelée la topologie induite par la norme de E .

Par exemple, les formules suivantes définissent des normes sur \mathbb{R}^n ,

$$(x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n) :$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|), \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|, \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_0$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que:

$$\forall x \in E, \alpha \|x\|_0 \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_0$$

Il est immédiat que les distances associées à des normes équivalentes soient équivalentes, et ainsi les topologies associées à des normes équivalentes sont équivalentes. On peut vérifier que les normes précédentes définies sur \mathbb{R}^n sont équivalentes.

2.2.2 Les scalaires

On entend par scalaire tout nombre réel, symboliquement un scalaire sera représenté par une lettre de l'alphabet latin ou grecque ou minuscule.

Exemple : $x, y, z, \dots, \alpha, \dots$

2.2.3 Les indexes

C'est un nombre entier positif ou nul, que nous attacherons à un objet d'un modèle, en guise d'identificateur unique. Symboliquement les indexes seront représentés par i, j, k, \dots

Pour représenter les valeurs possibles d'un index on utilisera les notions suivantes.

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ pour signifier que l'index } i \text{ varie de } 1 \text{ jusqu' à } n.$$

Quand un objet x d'un modèle est un index on écrit :

$$(x_i)_{i=1, \dots, n}$$

qui est une représentation condensée de :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{il} \end{pmatrix}$$

Un objet peut avoir deux indexes comme identificateurs. C'est le cas par exemples des matrices.

On la représente par

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$$

qui désigne la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pour exploiter pleinement les indexes, on utilisera également le symbole \sum (somme)

Ainsi, pour représenter

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

On écrira tout simplement :

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

2.3 Les objets élémentaires

2.3.1 Les espace des décisions

Reprenons les problèmes PPL, sous sa forme connue qui consiste à trouver les inconnues-réelles x_1, x_2, \dots, x_n

qui maximisent :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{2.02}$$

Et qui satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_n \end{cases} \quad (2.03)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.04)$$

où les coefficients:

$$\begin{aligned} (c_j)_{j=1, \dots, n} \\ (a_{ij})_{i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n} \quad \text{sont des éléments de } \mathbb{R} \\ (b_i)_{i=1, n} \end{aligned}$$

Chaque ligne des conditions (2.03) est appelée contrainte technique.

Les conditions (2.04) sont appelées contraintes de non-négativité.

Définition 2.02

On appelle **décision-action** tout n-uplet :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{où } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ sont des éléments de } \mathbb{R}.$$

On la notera par la suite :

$$(x_j)_{j=1, \dots, n}$$

Mathématiquement, on voit que c'est un élément de \mathbb{R}^n relativement à une base donnée. C'est aussi un point de l'espace affine \mathbb{R}^n relativement à un repère donné.

Une décision action sera représentée par un point affine. Ce qui nous amène à la définition repère de décision-action.

Notation : une décision action est notée par une lettre grecque au majuscule : A, B, X, Y

Définition 2.03

Nous appelons **repère de décision-action**, le repère géométrique orthonormé positif, noté :

$$(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

Rattaché au problème PPL sur-mentionné. Dans ce repère l'origine géométrique O a une signification particulière : il représente la décision de ne rien faire, c'est-à-dire, que si

$$O = \begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ x_{on} \end{pmatrix}, \quad x_{o1} = x_{o2} = x_{o3} = \dots = x_{on} = 0$$

A chaque variable de décision x_j correspond le vecteur unitaire U_j .

L'espace affine \mathbb{R}^n , muni du repère $(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$ est appelé espace des décisions relatif au problème PPL à résoudre.

Malgré cette ressemblance frappante avec la géométrie affine euclidienne, nous présenterons d'emblée un aspect limitatif.

2.3.2 Postulat

Dans la théorie topo-géométrique MZ, le repère affine orthonormé de l'espace de décision action du problème PPL à résoudre est unique.

Ce postulat signifie que :

- le concept de changement de base n'existe pas.
- le concept de changement d'origine n'existe pas.

Cependant suite à une analyse presolve il se peut que n change, ce qui modifie complètement le problème PPL.

2.4 Les opérations sur les décision-action

Soit un problème PPL donné.

D'après la définition 2.01 une décision est représentée par un point de l'espace de décision-actions et /ou par un vecteur de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

Cette double nature (à la fois affine et vectorielle) des décision-actions est très importante.

Elle permet d'exprimer :

La création d'autres décision-actions à partir des décision-actions existantes.

La recherche d'autres décision-actions suivant une direction donnée.

2.4.1 Amplificateur d'une décision-action

Soit l'espace de décision-action relatif au repère (O, U_1, \dots, U_n) .

Soit X_0 une décision action et α un nombre réel positif donné.

On appelle amplificateur de X_0 à l'aide de α , la génération d'une décision-action X telle que :

$$X = \alpha X_0 \quad \text{vectoriellement.}$$

Mathématiquement, il s'agit donc du multiplicateur de vecteur X_0 par le scalaire α .

2.4.2 Addition de deux decision-actions

Soit X_0 et X_1 deux décision-actions dans un problème PPL.

On appelle addition de X_0 et X_1 la création d'une nouvelle décision-action X telle que

$$X = X_0 + X_1 \quad \text{vectoriellement.}$$

Remarque

La combinaison de 2.3.1 et 2.3.2 nous permet de modéliser le concept de combinaison conique de deux ou plusieurs décision-actions.

Soient les décision-actions X_1, X_2, \dots, X_k

On appelle combinaison conique de ces décisions, la nouvelle décision X définie par

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des nombres réels positifs ou nuls.

Remarque

De la remarque précédente, il est clair que la décision satisfait la contrainte (2.04) si elle est une combinaison conique des U_1, U_2, \dots, U_n c'est-à-dire :

$$X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n \quad \text{avec} \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \text{et} \quad \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$$

Montrons que la réciproque est vraie

Soit X une décision-action satisfaisant la contrainte (2.04)

$$X = (x_j)_j \text{ avec } x_j \geq 0$$

Or

$$(x_j) = \sum_{j=1}^n x_j U_j \quad \text{avec} \quad x_j \geq 0$$

2.4.3 Axe de recherche partant d'une décision-action X_0 et de direction le vecteur décision-action V

Soient X_0 et V des décision-actions.

On appelle axe de recherche partant de X_0 et de direction U l'ensemble des décision-actions, noté $\mathbb{R}(X_0, V)$ défini par :

$$\mathbb{R}(X_0, V) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } X = X_0 + \alpha V, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \geq 0\} \quad (2.05)$$

Mathématiquement, il s'agit du rayon affine issu de X_0 et de vecteur directeur U

Conceptuellement, l'idée de recherche est justifiée par le fait qu'en pratique, tout solveur est basé sur un algorithme de recherche en partant d'un point initial.

Ainsi, à partir d'une décision-actions X_0 donnée, et une direction de recherche V données, on peut « sonder » les points de l'univers des décisions qui vont satisfaire les contraintes (2.03) et (2.04).

Cette idée de recherche n'est pas confinée à une direction de recherche uniquement. On peut également adopter simultanément deux direction de recherche V_1 et V_2 . D'où le concept de « plan de recherche », partant de X_0 et de direction V_1 et V_2 .

2.4.4 Plan de recherche partant d'une décision-actions X_0 et de directions V_1 et V_2

Soit X_0 un point décision-action V_1 et V_2 deux vecteurs décision-actions.

On appelle plan de recherche partant de X_0 et de direction V_1 et V_2 , l'ensemble noté :

$$P(X_0, V_1, V_2)$$

défini comme suit :

$$P(X_0, V_1, V_2) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \text{ où } \alpha_1 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \alpha_2 \in \mathbb{R}^+ \} \quad (2.06)$$

Essayons de généraliser

2.4.5 Cone de recherche de sommet X_0 et de direction V_1, V_2, \dots, V_k où V_1, V_2, \dots, V_k sont des vecteurs decisions

Soit X_0 un point décision-action associé à un PPL

Soit V_1, V_2, \dots, V_k , k vecteur de decision-action du même problème PPL.

On appelle cone de sommet X_0 et de directions V_1, V_2, \dots, V_k , l'ensemble de decision action noté $C(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$ défini comme suit :

$$C(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k, \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, k\} \quad (2.07)$$

Remarquons tout de suite que les axes de recherche et les plans de recherche ne sont que des cas particuliers des axes de recherche.

2.5 Les contraintes techniques

Dans la pratique toute décision action entraine toujours un impact. Dans le domaine de la programmation linéaire, on peut distinguer deux catégories d'impact :

- les impact-performances.
- les impacts ressources.

Dans cette thèse, nous nous occupons uniquement des impact-ressources.

Définition 2.04

Soit X un point décision action d'un problème PPL donné. Soit V un vecteur nul de \mathbb{R}^n .

On appelle **impact ressource** selon V , le produit scalaire de X avec V dans \mathbb{R}^n noté :

$$\mathfrak{I}(X, V) = \langle X, V \rangle \quad (2.08)$$

où $\langle X, V \rangle$ désigne le produit scalaire de X avec V .

Le vecteur V est appelé vecteur V de consommation unitaire de la ressource donnée.

Définition 2.05

Dans notre théorie, nous supposons qu'une contrainte qu'elle soit logique ou matérielle peut être associée à une ressource qui soit toujours limitée dans le problème PPL associé.

Soit $A = (a_j)_{j=1,\dots,n}$ un vecteur V de consommation d'une ressource donnée.

Soit b la valeur limite de la ressource, on appelle zone de respect de la consommation de la ressource limitée par b l'ensemble noté $ZR(A, b)$ définie par :

$$ZR(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \prec A, X \succ \leq b\} \quad (2.09)$$

En géométrie affine, cet ensemble n'est autre que le demi-espace négative délimité par l'hyperplan affine noté $\mathcal{H}(A, b)$ définie par

$$HP(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \prec A, X \succ = b\} \quad (2.10)$$

NB: Le vecteur A n'est pas une décision action il est lié a une ressource donnée et permet de calculer l'impact d'une décision action X sur cette ressource

2.6 Les contraintes de non-négativité

Les contraintes de non- négativité traduisent le fait que les décisions élémentaires x_i où $i=1,\dots, n$ doivent être non négatives :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1,2,\dots, n$$

Remarquons tout de suite que les relations :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1,2,\dots, n$$

peuvent s'écrire :

$$-x_i \leq 0 \quad \forall i=1,2,\dots, n$$

Expression équivalente à:

$$\langle -U_i, X \rangle \leq 0$$

Par conséquent, une contrainte de non-négativité peut être, également considérée comme une contrainte ressource délimitée par $ZR = (-U_i, 0)$ appelé zone de non négativité ZNN_i .

Cependant la combinaison de toutes les contraintes de non-négativité a une signification géométrique particulière que nous appelons « cône de non-négativité »

2.6.1 Cône de non-négativité

On appelle cône de non-négativité noté C_0^+ le cône de recherche issu du point-décision O et de direction de tous les vecteurs décisions :

$$U_i, i = 1, 2, \dots, n$$

géométriquement on a :

$$\begin{aligned} C_o^+ &= \left\{ X \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } X = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i \text{ où } \alpha_i \geq 0 \right\} \\ &= \text{Cône}(O, U_1, U_2, \dots, U_n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Remarque :

Il est évident que :

$$C_o^+ = \bigcap_{i=1}^i ZNN_i$$

2.6.2 Face de non-négativité

Rappelons que le repère topo géométrique du problème PPL, est immuable $(O, U_0, U_2, \dots, U_n)$
Cela veut dire qu'on ne peut pas changer la place d'un vecteur U_i de ce repère, pour tout i ,
pour tout $i=1, 2, \dots, U_n$

On appelle face de non-négativité, noté FNN_i et l'ensemble de point décision défini comme suit

$$FNN_i = \left\{ \begin{array}{l} P(0, U_1, U_n) \text{ pour } i = 1 \\ P(O, U_{i-1}, U_i) \text{ pour } i = 2, 3, \dots, n \end{array} \right\}$$

2.6.3 Axes de non-négativité

Pour tout $i=1, 2, \dots, n$, on appelle axe de non-négativité, ANN_i l'ensemble de point décision définit comme suit :

$$ANN_i = R(O, U_i) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

Remarquons qu'à NN_i n'est autre que l'axe de recherche partant de O et de direction U_i .

2.7 Relation entre objet MZ

Les relations que nous allons décrire dans cette section sont celles de base. Les relations plus complexes seront traitées dans le chapitre suivant.

De plus les combinaisons entre point-décisions et point-vecteurs ont été déjà vues. Par conséquent, nous allons seulement traiter les points suivants :

- La relation entre un point-décision et une zone de contraintes-techniques.
- La relation entre un axe de recherche et une zone de contraintes techniques.
- La relation entre un plan de recherche et une zone de contraintes technique.

2.7.1 Relation entre un point-décision et une zone de contraintes techniques

Etant donné qu'un point-décision est représenté par un point et qu'une zone de contraintes techniques est représentée par un demi-espace, donc un ensemble de point décision, la relation essentielle même basique entre une de ces deux classes d'objet est la relation ensembliste d'appartenance.

Soit X_0 un point décision et $ZCT(A, b)$ une zone de contraintes
la relation :

$$X_0 \in ZCT(A, b) \text{ signifie que } \langle A, X_0 \rangle \leq b$$

Etant donné que dans le modèle de problème PPL les contraintes sont indexées, c'est à dire numérotés de 1 à n, les zones de contraintes techniques correspondants seront également notées :

$$ZCT_i \quad i=1,2,\dots, n$$

Ce qui permet de représenter le système de techniques de la façon suivante.

Soit X_0 un point-décision satisfaisant toutes les contraintes techniques du problème.

On a :

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Ce qui peut s'écrire :

$$X_0 \in ZCT_i \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

D'où

$$X_0 \in \bigcap_{i=1}^m ZCT_i \tag{2.13}$$

Relation qui est une base de l'analyse des redondances et de l'infaisabilité.

De plus quand X_0 n'appartient pas à un ZCT_i on dit aussi que X_0 est un extérieur à ZCT_i comme le terme extérieur et son opposé intérieur ont une connotation topologique, nous allons rappeler les définitions topologiques de ces termes.

2.7.1.1 Projection d'un point à un hyperplan

Soit la zone de contraintes techniques de ZCT_i délimitée par l'hyperplan HP (A_i, b_i) et soit X_0 un point décision quelconque.

On appelle projection de X_0 sur l'hyperplan HP (A_i, b_i), le point noté X'_0 tel que :

X'_0 appartient à HP (A_i, b_i) et $\overrightarrow{X_0 X'_0}$ colinéaire au vecteur A_i .

X'_0 est donc l'intersection de HP (A_i, b_i) avec la droite passant par X_0 et de vecteur directeur A_i .

Démonstration :

♣

Mathématiquement cette droite est définie par :

$$X \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } X = X_0 + \alpha A_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

L'intersection s'écrit donc,

$$\begin{aligned} X'_0 &= X_0 + \alpha A_i \\ \langle A_i, X'_0 \rangle &= b_i \\ \langle A_i, X_0 + \alpha A_i \rangle &= b_i \\ \langle A_i, X_0 \rangle + \alpha \langle A_i, A_i \rangle &= b_i \\ \Rightarrow \alpha \langle A_i, A_i \rangle &= b_i - \langle A_i, X_0 \rangle \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$X'_0 = X_0 + \left[\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right] A_i \quad (2.14)$$

♦

De plus la distance, entre X_0 et X'_0 noté $d(X_0, X'_0)$ est égale à :

$$\begin{aligned}
d(X_o, X'_o) &= \left| \frac{b_i - \langle A_i, X_o \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right| \sqrt{\langle A_i, A_i \rangle} \\
d(X_o, X'_o) &= \left| \frac{b_i - \langle A_i, X_o \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \right|
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

Cette distance est aussi appelée distance du point X_o à l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$.

2.7.1.2 Orientation du vecteur A_i par rapport à ZCT_i

Considérons l'orientation du vecteur A_i à travers la proposition ci »dessous :

Proposition 2.01

Le vecteur A_i est toujours orienté de l'intérieur vers l'extérieur de ZCT_i

Démonstration :

♣

Soit X_o un point de ZCT_i qui n'appartient pas à l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$:

$$X_o \in ZCT_i \quad \text{et} \quad X_o \notin HP(A_i, b_i)$$

Soit X'_o la projection de X_o sur $HP(A_i, b_i)$

on a :

$$\begin{aligned}
X'_o &= X_o + \left(\frac{b_i - \langle A_i, X_o \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right) A_i \\
\overrightarrow{X_o X'_o} &= \left[\frac{b_i - \langle A_i, X_o \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right] A_i
\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre $\overrightarrow{X_o X'_o}$ et A_i donne :

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{X_o X'_o}, A_i \rangle &= \left(\frac{b_i - \langle A_i, X_o \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right) \langle A_i, A_i \rangle \\
\langle \overrightarrow{X_o X'_o}, A_i \rangle &= b_i - \langle A_i, X_o \rangle
\end{aligned}$$

Or

$$X_o \in ZCT_i$$

ce qui signifie :

$$\langle A_i, X_o \rangle \leq b_i$$

et

$$X_0 \notin HP(A_i, b_i)$$

Donc

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i$$

Par conséquent on a :

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$$

D'où

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$$

Finalement on obtient la relation suivante

$$\langle \overrightarrow{X_0 X_0'}, A_i \rangle > 0$$

♦

2.7.1.3 Orientation d'un vecteur décision par rapport à ZCT_i

Soit V un vecteur décision, et soit ZCT_i une zone de contraintes technique V est parallèle à HP (A_i, b_i) c'est à dire à la frontière de ZCT_i.

2.7.1.3.1 Orientation extérieure

On dit que V a une orientation extérieure par rapport à ZCT_i si $\langle V, A_i \rangle$ est strictement positif.

2.7.1.3.2 Orientation parallèle

On dit que V a une orientation parallèle par rapport à ZCT_i, si $\langle V, A_i \rangle$ est égal à 0.

Remarque :

La qualification « parallèle » se réfère au fait que V est parallèle à HP (A_i ; b_i), c'est-à-dire à la frontière ZCT_i.

2.7.1.3.3 Orientation intérieure

On dit que v a une orientation intérieure par rapport a ZCT_i si $\langle V, A_i \rangle$ est strictement négatif.

2.7.1.4 Caractérisation d'un point intérieur de ZCT_i

Proposition 2.02

X_0 est un point intérieur de ZCT_i si et seulement si :

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$$

Démonstration :



a) Soit X_0 un point intérieur à ZCT_i

D'après 2.7.1.3.1, il existe un réel strictement positif r tel que la boule de centre X_0 et de rayon r est entièrement contenu dans ZCT_i .

Logiquement, cela veut dire que si X_0' désigne la projection de X_0 sur HP (A_i ; b_i), alors la distance entre X_0 et X_0' est égale à :

$$\frac{|b_i - \langle A_i, X_0 \rangle|}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Et que

$$r \leq \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

or r est strictement positif, donc

$$\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \quad \text{est également strictement positif d'où,}$$

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle \quad \text{est aussi strictement positif.}$$

Par conséquent

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$$

b) Réciproquement, soit X_0 un point de ZCT_i tel que $\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$

Montrons que c'est un point intérieur de ZCT_i .

Soit X_0' la projection de X_0 sur l'hyperplan. Nous avons vu que :

la distance entre X_0 et X_0' est égale :

$$\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Posons

$$r = \frac{1}{2} \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

On a

$$r > 0$$

Il est évident que la boule de centre X_0 et de rayon r est entièrement inclus dans ZCT_i , ce qui veut dire que X_0 est un point intérieur de ZCT_i

♦

2.7.1.4.1 Point frontière de S

Un point $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit point frontière de S si :

- X_0 est un élément de S et ;
- Quel que soit le réel strictement positif r , la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r contient à la fois des éléments de S autres que X_0 et des éléments de \overline{S} (le complément de S dans l'espace affine euclidien \mathbb{R}^n).

2.7.1.4.2 Frontière de S

Soit S un ensemble non vide dans l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$. On appelle frontière de S l'ensemble noté $Fr(S)$ contenant tous les points frontières de S.

2.7.1.4.3 Caractérisation des points frontières de ZCT_i

Proposition 2.03

$$Fr(ZCT_i) = HP(A_i; b_i)$$

Démonstration :

♣

Montrons que :

$$Fr(ZCT_i) \subset HP(A_i, b_i)$$

Soit X_0 un élément de $Fr(ZCT_i)$, cela signifie que X_0 est aussi un élément de ZCT_i donc

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i$$

Si $X_0 \notin HP(A_i, b_i)$, cela veut dire que

$$\langle A_i, X_0 \rangle \neq b_i$$

D'où

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i,$$

signifiant que X_0 est un point intérieur de ZCT_i .

Ce qui contredit le fait que X_0 est un point de frontière de ZCT_i .

Réciproquement :

$$HP(A_i, b_i) \subset Fr(ZCT_i)$$

Soit X_0 un point de $HP(A_i ; b_i)$ ce qui signifie que :

$$\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$$

Soit r un réel quelconque strictement positif .

Soit X_1 le point défini par :

$$X_1 = X_0 + \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Notons que la distance entre X_0 et X_1 est égale à $\frac{r}{2}$ qui est strictement inférieur à r .

De plus, d'après la proposition 2.01, A_i est toujours orienté vers l'extérieur de ZCT_i donc X_1 n'appartiennent pas à ZCT_i .

Donc X_1 appartient à la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r .

Finalement montrons que la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r contient des points de ZCT_i autre que X_0 .

Soit X_2 le point défini par :

$$X_2 = X_0 - \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle A_i, X_2 \rangle &= \langle A_i, X_0 - \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \rangle \\
&= \langle A_i, X_0 \rangle - \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \langle A_i, A_i \rangle \\
\langle A_i, X_2 \rangle &= \langle A_i, X_0 \rangle - \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

or

$$\langle A_i, X_0 \rangle = b_i \Rightarrow \langle A_i, X_2 \rangle = b_i - \frac{r}{2}$$

Comme

$$r > 0 \Rightarrow \frac{r}{2} > 0$$

D'où

$$b_i - \frac{r}{2} < b_i$$

On peut donc écrire :

$$\langle A_i, X_2 \rangle < b_i$$

Ce qui signifie que :

X_2 appartient à ZCT_i

En résumé, quel que soit le réel strictement positif r , la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r contient à la fois des éléments de ZCT_i autres que X_0 et des éléments de ZCT_i .

Ceci montre que X_0 est un point frontière de ZCT_i .

Finalement, en combinant a) et b) de cette section on a :

$$\begin{aligned}
Fr(ZCT_i) &\subset HP(A_i, b_i) \\
\text{et} \\
Fr(ZCT_i) &\supset HP(A_i, b_i)
\end{aligned}$$

On a donc

$$Fr(ZCT_i) = HP(A_i, b_i)$$

♦

Proposition 2.04

La zone de contraintes technique ZCT_i est ensemble topologiquement fermée.

Démonstration :

♣

Soit X_0 un point n'appartenant pas à ZCT_i (où ZCT_i désigne le complément de ZCT_i dans l'espace affine R^n).

Comme

$$X_0 \notin ZCT_i$$

alors

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i$$

Soit X_0' la projection de X_0 sur HP ($A_i ; b_i$). Nous avons montré que :

la distance entre X_0 et X_0' est égale à :

$$\frac{|b_i - \langle A_i, X_0 \rangle|}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}.$$

Or

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i \Rightarrow b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

donc

$$\begin{aligned} |b_i - \langle A_i, X_0 \rangle| &= -(b_i - \langle A_i, X_0 \rangle) \\ &= \langle A_i, X_0 \rangle - b_i \end{aligned}$$

La distance entre X_0 et la frontière $HP(A_i, b_i)$ est donc égale à :

$$\frac{\langle A_i, X_0 \rangle - b_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Posons :

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle A_i, X_0 \rangle - b_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Il est aisé de montrer que la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r est entièrement contenue dans $\overline{ZCT_i}$.

Par conséquent $\overline{ZCT_i}$ est ouvert.

Donc ZCT_i est fermée.



En résumé de la proposition 2.03 et proposition 2.04, chaque zone de contraintes techniques ZCT_i est fermé et sa frontière n'est autre que l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$.

2.7.2 Relation entre un axe de recherche $R(X_0, V)$ et une zone de contraintes technique ZCT_i

Considérons une zone de contraintes technique ZCT_i . Soit également le rayon $R(X_0, V)$ issu de X_0 et de direction vecteur V , représentant un axe de recherche. Cette relation est basée sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle, \quad \alpha \text{ est l'inconnu.}$$

Démonstration :



Etant donné que les deux objets sont des ensembles de points décisions, la principale combinaison que l'on peut imaginer entre eux est l'intersection. De plus, comme la zone de contrainte technique est fermée et de frontière l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$, nous allons nous intéresser beaucoup plus à l'intersection du rayon $R(X_0, V)$ avec cette frontière $HP(A_i, b_i)$. En effet, si X_0 se trouve à l'extérieur de ZCT_i , alors une telle intersection nous donne le point d'entrée de l'extérieur vers l'intérieur de ZCT_i le long du rayon. Par contre, si X_0 se trouve à l'intérieur de ZCT_i , elle donne le point de sortie de ZCT_i .

Notons par I ce point d'intersection : comme I appartient à $R(X_0, V)$

On a

$$I = X_0 + \alpha V \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

Comme I appartient aussi à $HP(A_i, b_i)$, on peut écrire :

$$\langle A_i, I \rangle = b_i$$

En combinant ces deux relations, on a

$$\langle A_i, X_0 + \alpha V \rangle = b_i$$

En développant, on obtient

$$\langle A_i, X_0 \rangle + \alpha \langle A_i, V \rangle = b_i$$

qui est une équation où α est l'inconnue.

Cette équation donne :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle \quad (2.16)$$

L'existence et l'unicité de α dépendent des valeurs de $b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$ et de $\langle A_i, V \rangle$, donc de X_0 et de V .

♦

2.7.2.1 Cas où X_0 se trouve à l'extérieur de ZCT_i et où V n'est pas orienté vers l'intérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

n'a pas de solution.

Démonstration :

♣

Ce cas se traduit mathématiquement par :

$$\begin{cases} \langle A_i, X_0 \rangle > b_i \\ \langle A_i, V \rangle \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i$$

entraîne que

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

De plus comme

$$\alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

Ce qui est impossible.

Dans ce cas il n'existe pas.

♦

2.7.2.2 Cas où X_0 se trouve à l'extérieur de ZCT_i et où V est orienté vers l'intérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

a une solution unique.

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} > 0$$

Démonstration :

♣

On a :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle < 0$$

Ce qui donne

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} > 0$$

qui est en plus une valeur unique.

♦

Dans ce cas on dit qu'on a un point d'entrée unique en partant de X_0 , et en se déplaçant le long de l'axe de $R(X_0, V)$.

2.7.2.3 Cas où X_0 se trouve sur ZCT_i et où V est orienté vers l'extérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

admet une solution nulle.

Démonstration :

♣

Ce cas se traduit par :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle > 0$$

La seule solution possible est :

$$\alpha = 0$$

Signifiant que,

$$I = X_0$$

♦

2.7.2.4 Cas où X_0 se trouve sur la frontière de ZCT_i et ou V est orienté parallèlement à $HP(A_i; b_i)$

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

a une infinité de solutions.

Démonstration :

♣

Mathématiquement on traduit ce cas par :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0$$

et $\langle A_i, V \rangle = 0$

Ce qui nous donne une infinité de solution. En fait, $R(X_0, V)$ est inclus dans $HP(A_i; b_i)$, et l'intersection n'est autre que $R(X_0, V)$.

♦

2.7.2.5 Cas où X_0 se trouve sur la frontière de ZCT_i et ou V est orienté vers l'intérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

a une solution unique

$$I = X_0$$

Démonstration :

♣

Dans ce cas

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle < 0$$

Ce qui entraîne que

$$\alpha = 0$$

C'est-à-dire $I = X_0$, solution unique

♦

2.7.2.6 Cas où X_0 se trouve à l'intérieur de ZCT_i et où V est orienté vers l'extérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

a une solution unique

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle}$$

Démonstration :

♣

Ce cas se traduit par :

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle > 0$$

Ce qui entraîne que

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$$

D'où la solution unique

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} \quad (2.17)$$

♦

2.7.2.7 Cas où X_0 se trouve à l'intérieur de ZCT_i et où V est orienté parallèlement ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

n'a pas de solution.

Démonstration :

♣

Comme pour le cas précédent, on a :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$$

Mais

$$\langle A_i, V \rangle = 0$$

Ce qui conduit à une impossibilité, signifiant que $R(X_0, V)$ n'interceptera jamais la frontière de ZCT_i

♦

2.7.2.8 Cas où X_0 se trouve à l'intérieur de ZCT_i et où V est orienté vers l'intérieur de ZCT_i

L'équation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

n'a pas de solution.

Démonstration :



Comme précédemment,

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle > 0$$

Dans ce cas, l'équation en α

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

n'a pas de solution positive, signifiant que $R(X_0, V)$ n'interceptera jamais la frontière de ZCT_i .



2.7.2.9 Algorithme de détermination de l'intersection d'un axe de recherche $R(X_0, V)$ avec la zone de contraintes technique ZCT_i

Les huit cas précédents peuvent être résumés dans l'algorithme suivant :

- Cas où il n'existe pas d'intersection.
- Pas d'intersection : \emptyset
- Cas où $\langle A_i, X_0 \rangle > b_i$ et $\langle A_i, V \rangle < 0$

On a un point d'intersection unique

$$\left\{ X_0 + \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} V \right\}$$

- Cas où $\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$ et $\langle A_i, V \rangle > 0$

Solution unique : $\{X_0\}$

- Cas où $\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$ et $\langle A_i, V \rangle < 0$

Solution unique

$$\left\{ X_0 + \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} V \right\}$$

-Cas où $\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$ et $\langle A_i, V \rangle \geq 0$

Pas de solution : \emptyset

2.7.3 Relation entre un cône plan de recherche $C(X_0, V_1, V_2)$ avec V_1 et V_2 linéairement indépendants et une zone de contraintes technique ZCT_i

Comme pour la section 2.7.2, ces deux objets sont des ensembles de points décisions, la présente section va donc décrire leur intersection.

Soit I un tel point. Il est donc de la forme :

$$I = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \quad \text{avec } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ positifs.}$$

De plus comme I appartient à la frontière de ZCT_i , on peut écrire :

$$\langle A_i, I \rangle = b_i$$

Ce qui entraîne que :

$$\langle A_i, X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \rangle = b_i$$

D'où

$$\langle A_i, X_0 \rangle + \alpha_1 \langle A_i, V_1 \rangle + \alpha_2 \langle A_i, V_2 \rangle = b_i$$

Soit

$$\alpha_1 \langle A_i, V_1 \rangle + \alpha_2 \langle A_i, V_2 \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

Qui est une équation linéaire à deux inconnues, α_1 et α_2 positives.

Comme pour 2.6.2, l'existence et l'unicité des solutions à ce problème dépendent des trois objets X_0, V_1 et V_2 .

- Pour X_0 , il y a trois situations possibles : être en dehors de ZCT_i , ou être sur la frontière de ZCT_i ou être à l'intérieur de ZCT_i .

- Pour V_1 , il y a trois possibilités : être orienté vers l'extérieur ZCT_i de ou être orienté parallèlement à ZCT_i ou être orienté vers l'intérieur de ZCT_i

- Pour V_2 les possibilités sont les mêmes que pour V_1 .

2.7.4 Recherche suivant un axe $R(X_0, V)$ dans la zone de non négativité ZNN

La zone de non négativité ZNN a été définie comme

$$ZNN = \bigcap_{j=1}^n ZNN_j$$

où

$$ZNN_i = ZR(-U_i, \emptyset) \quad (2.18)$$

Conceptuellement, cela signifie qu'on assimile ZNN_i à une zone de contrainte-ressource, et si un point X_0 appartient à ZNN_i , donc X_0 satisfait la contrainte associée à ZNN_i . C'est donc une situation d'étape.

Le concept de recherche sous-entend qu'il y a une situation ou état de dépôt, et qu'à partir de cette situation, on se déplace vers une autre situation ou état. Et nous avons déjà vu que cette recherche, quand elle est linéaire, peut être modélisée par le concept d'axe de recherche partant d'un point donné et se déplaçant suivant un vecteur donné $R(X_0, V)$

Dans cette section, le point de départ de la recherche est le point X_0 , qui est supposé être localisé dans la zone de non-négativité ZNN. Comme les nouvelles décisions trouvées doivent impérativement restées dans ZNN, il est logique d'étudier les conditions dans lesquelles cette recherche nous conduit hors de ZNN.

Et comme pour le cas des zones de contraintes techniques ZCT_i , nous aurons besoin de définir le concept de frontière dans ZNN.

Pour ZNN_i , il n'y a aucun problème.

En effet,

$$Fr(ZNN_i) = HP(-U_i, 0)$$

étant donné que ZNN_i n'est qu'un demi- affine délimité par l'hyperplan $HP(-U_i, 0)$.

Nous avons alors la figure 2.01 suivante :

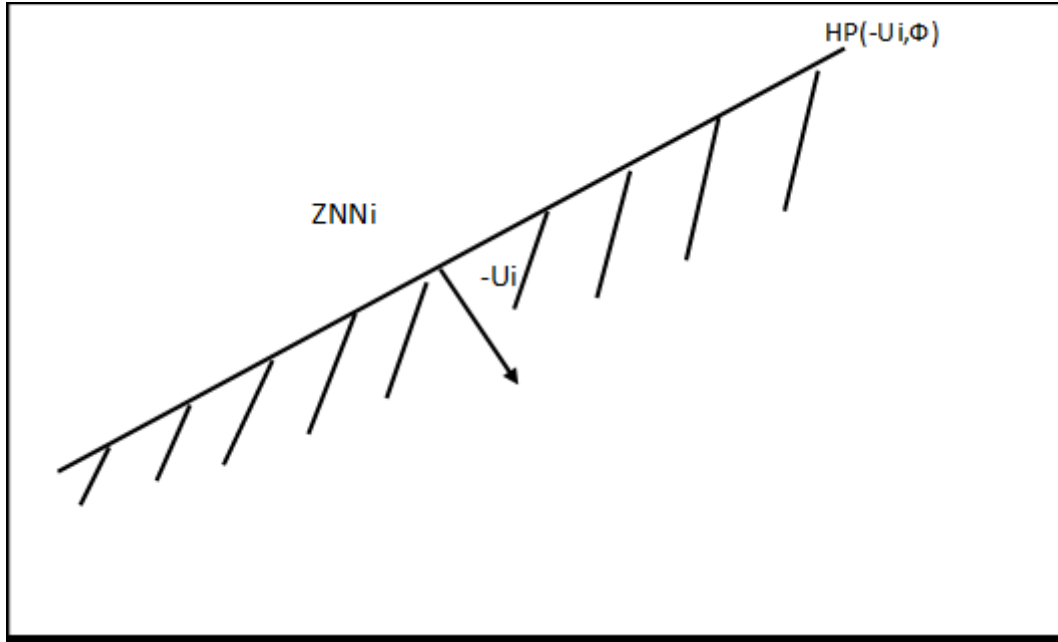


Figure 2.01: Illustration de l'hyperplan $HP(-U_i, 0)$

Et comme $HP(-U_i, 0)$ est inclus dans ZNN_i , on sait que ZNN_i est une zone fermée.

–

2.7.4.1 Frontière de la zone de non-négativité ZNN_i

Proposition 2.05

$$Fr(ZNN) = \bigcup_{j=1}^n \left(HP(-U_j, 0) \cap C_0^+ \right)$$

Démonstration :

♣

Il suffit de démontrer que pour tout j , $HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ est une fonction de ZNN .

Etape 1 :

Montrons que tout point X de $HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ est un point frontière de ZNN .

Soit R un réel positif quelconque. Il s'agit de montrer que la boule ouverte de centre X et de rayon r noté $B(X_0, r)$, contient à la fois, un élément de ZNN autre que X et un élément de ZNN autre que X .

Dans $x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$

Le fait que $X \in HP(-U_j, 0) \cap C_0$ signifie que :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n \quad \text{et que} \quad x_j \geq 0$$

prenons le point $X' = (x'_i)_{i=1, \dots, n}$ définie comme suit :

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{pour tout } i \neq j \\ -1/2 & \text{pour tout } i = j \end{cases}$$

de même prenons le point $X'' = (x''_i)_{i=1, \dots, n}$ définit comme suit :

$$x''_i = \begin{cases} x_i & \text{pour tout } i \neq j \\ +1/2 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

Il est évident que :

$$X' \notin ZNN \quad \text{et} \quad X'' \in ZNN$$

De plus il est également évident que :

$$X' \in B(X, r) \quad \text{et} \quad X'' \in B(X, r)$$

Ce qui montre que la boule ouverte $B(x, r)$ contient à la fois le point X' qui est l'élément en dehors de ZNN et le point X'' qui est le élément dans ZNN , et il est évident que X' est différent de X et que X'' est différent de X .

Par conséquent X est un point frontière de ZNN .

Etape2

Montrons que $HP(-U_j, \emptyset) \cap C_0^+$

Et qu'en résumé, $HP(-U_j, \emptyset)$ est bel et bien une frontière de ZNN et leur réunion est aussi une frontière de ZNN .

De plus soit X un point de ZNN tel que : $X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_o^+$

Cela signifie que : $X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_o^+$

Etant donné que $C_0^+ = ZNN$,

cela signifie que $X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_o^+$

Posons X^j la projection de X sur $HP(-U_j, 0)$ et d_j la distance entre X et X_j .

Comme $X^j \neq X \quad \forall j = 1, \dots, n$

alors

alors $d_j \neq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Posons $r = \frac{1}{2} \min(d_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$

Il est évident que $r > 0$ et que la boule ouverte $B(X, r)$ est incluse dans ZNN

Par conséquent,

$$\bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_o^+ = Fr(ZNN)$$

♦

Remarque

$HP(-U_j, 0) \cap Co^+$ n'est autre que le cône $C(O, U_1, U_2, \dots, U_{j-1}, U_{j+1}, \dots, U_n)$

On va l'appeler « mur conique de non-négativité j » noté $MCNN_j$.

Démonstration :

♣

$$MCNN_j = HP(-U_j, 0) \cap Co^+$$

$$\text{et } ZNN = \bigcup_{j=1}^n MCNN_j$$

On peut alors illustrer ce cas par la figure 2.02 :

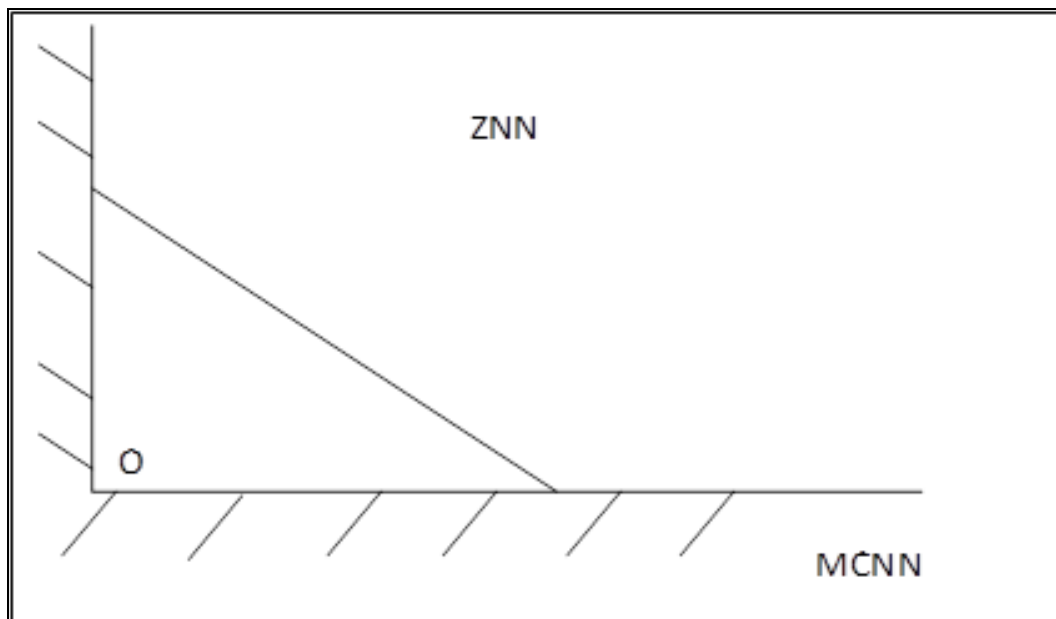


Figure 2.02 : *Mur conique de non-negativité*

En d'autres termes, la frontière ZNN n'est autre que la réunion de mur conique de non-négativité.

Remarquons de plus que

$$\text{MCNN}_j \subset \text{HP}(U_j, 0)$$

$$\text{Donc} \quad \text{MCNN}_j \subset \text{Fr}(\text{ZNN}_j)$$

♦

2.7.4.2 Point de sortie de ZNN en suivant $R(X_0, V)$

Proposition 2.06

On suppose que X_0 se trouve dans ZNN. Etant donné que ZNN est fermé, le point de sortie n'est autre que le point de contact ou intersection entre $R(X_0, V)$ et $\text{Fr}(\text{ZNN}_j)$.

Démonstration :

♣

Soit F_j le point de $R(X_0, V)$ et $\text{Fr}(\text{ZNN}_j)$, qui n'est autre que $\text{HP}(-U_j, 0)$

$$I_j \in R(X_0, V)$$

donc I_j est la forme

$$I_j = X_0 + \alpha_j V \quad \text{avec} \quad \alpha_j \geq 0$$

De même

$$I \in \text{HP}(-U_j, 0),$$

donc il vérifie l'équation :

$$\langle -U_j, I \rangle = 0 \quad \text{où} \quad \langle U_j, I_j \rangle = 0$$

D'où

$$\langle U_j, X_0 + \alpha_j V \rangle = 0$$

$$\langle U_j, X_0 \rangle + \alpha_j \langle U_j, V \rangle = 0$$

Finalement, on obtient l'équation en α_j

$$\alpha_j \langle U_j, V \rangle = -\langle U_j, X_0 \rangle$$

avec la condition $\alpha_j \geq 0$

En nous basant sur les résultats de la section 2.5.2, nous pouvons dire que l'axe de recherche $R(X_0, V)$ ne nous conduit en dehors de ZNN_j que si V est orienté vers l'extérieur de ZNN_j ,

c'est-à-dire si $\langle -U_j, V \rangle > 0$,

auquel cas,
$$\alpha_j = \frac{-\langle U_j, X_0 \rangle}{\langle U_j, V \rangle} \quad (2.19)$$

Représentons graphiquement ce cas à travers la figure 2.03 ci-après :

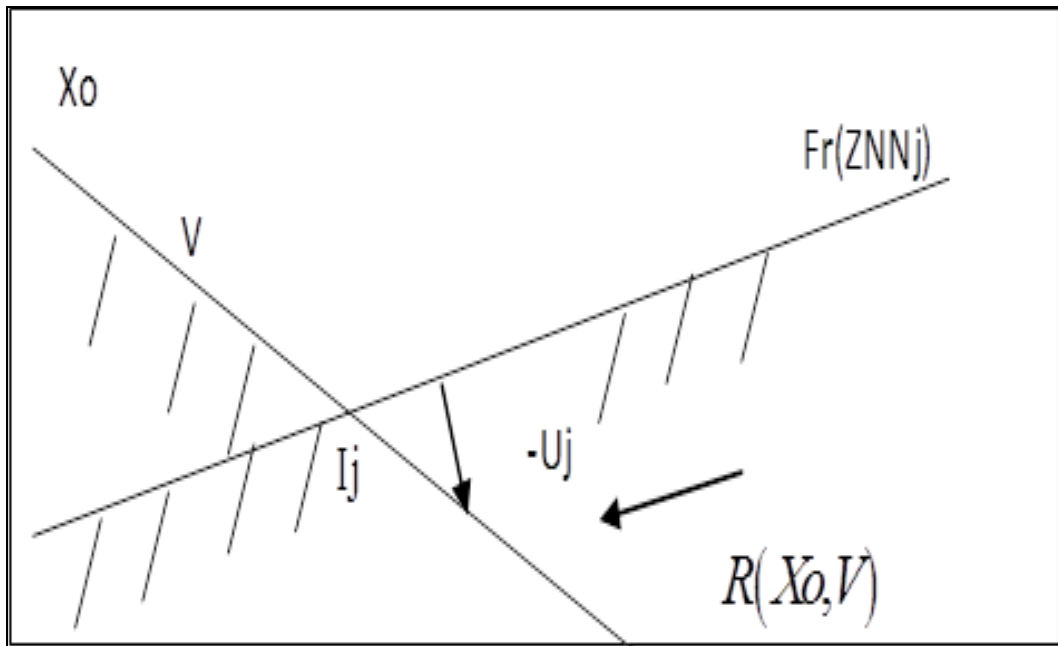


Figure 2.03 : *Illustration proposition 2.6*

Posons :

$$X_0 = (X_o^i)_{i=1, \dots, n}$$

$$V = (v_i)_{i=1, \dots, n} \quad \text{et} \quad \langle U_j, X_0 \rangle = x_i^o \\ \langle U_i, V \rangle = v_j$$

L'expression de α_j devient :

$$\alpha_j = \frac{-x_i^o}{v_j} \quad (2.20)$$

qui est bien non-négatif,

car

$$x_i^o \geq 0 \quad \text{et} \quad v_j < 0$$

♦

2.7.4.3 Point de sortie de ZNN suivant $R(X_0, V)$

On suppose que X_0 se trouve dans ZNN. Toujours en se basant sur les résultats antérieurs $R(X_0, V)$ ne nous conduit vers l'extérieur d'au moins un ZNN_j , c'est-à-dire qu'il existe un j tel que $v_j < 0$ en notant :

$$V = (v_j)_{j=1, \dots, n}.$$

Notons par $IN(V)$, l'ensemble des indices j tels que $v_j < 0$.

$$IN(V) = \{j \in [1, n] \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad v_j < 0\}$$

D'où la proposition :

Proposition 2.07

L'axe de recherche $R(X_0, V)$ ne soit dans la zone de non-négativité ZNN que si $IN(V)$ est non vide. Dans ce cas, le point de sortie I est donné par :

$$I = X_0 + \alpha V,$$

où

$$\alpha = \min_{j \in \text{In}(V)} \left\{ \frac{-x_i^o}{v_j} \right\} \quad (2.21)$$

Démonstration :

♣

Considérons la figure ci-dessous

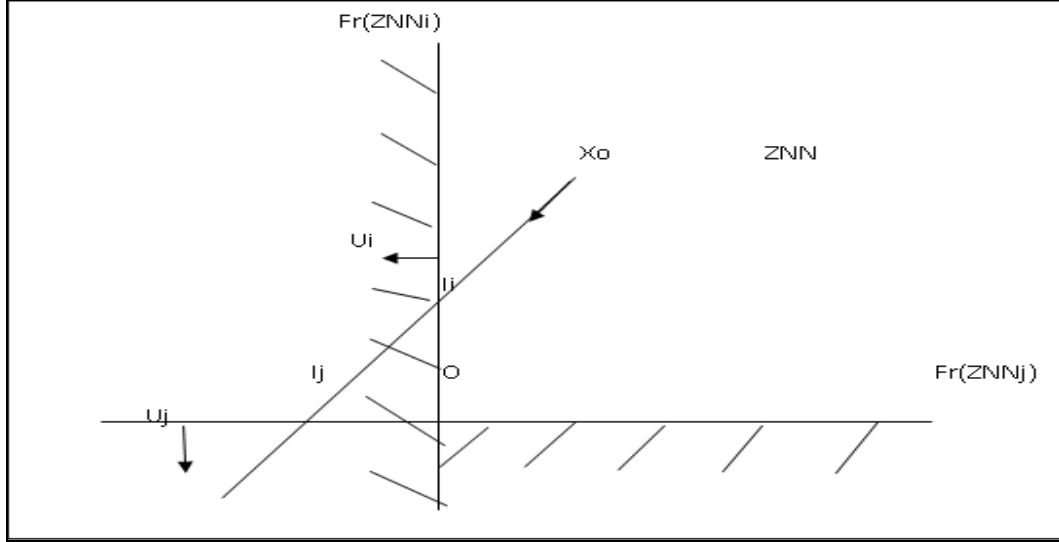


Figure 2.04 : *Illustration proposition 2.07*

Etant donné que $R(X_0, V)$ est un ensemble totalement ordonné, le point de sortie de I tel que

$$\begin{aligned} I &= \min(I_j) \\ j &\in \text{IN}(V) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $I_j = X_0(X_i^o)V$

La Démonstration est immédiate d'après la figure ci-dessus. Le point de sortie I n'est autre que le premier le plus petit I_j .

♦

2.8 Conclusion

A travers ce second chapitre, nous avons présenté toutes Les classes d'objets mathématiques nécessaires à la modélisation topo-géométrique MZ et les objectifs alimentés associés. Les définitions topo-géométriques ainsi que les opérations et propriétés classiques des contraintes du PPL définissant les hyperplans sont évoqués, permettant par la suite d'aborder le cœur de la thèse dans le chapitre trois suivant.

CHAPITRE 3

INTERSECTION ET PARALLELISME ENTRE CONTRAINTES TECHNIQUES ET LE CONE DE NON NEGATIVITE

3.1 Introduction

Le présent chapitre, développera les premiers cas de redondance, d'incompatibilité et de réduction de nombre de variables de décision et à la fin du chapitre nous traiterons le cas du parallélisme.

Pour montrer l'importance de ce chapitre, rappelons que le problème initial concerne les contraintes d'un problème PPL, qui s'expriment algébriquement comme suit :

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq b_i ; \quad i = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad x_j \geq 0, \quad \forall j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Posons :

$$A_i = (a_{ij})_{j=1,2,\dots,n} \quad \text{et} \quad X = (x_j)_{j=1,\dots,n}$$

Les contraintes techniques :

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq b_i$$

Equivalent à :

$$X \in ZCT_i \quad \text{où} \quad ZCT_i = \{ X \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad \langle A_i, X \rangle \leq b_i \}$$

La relation :

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Equivaut donc à :

$$X \in ZCT_i \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, m$$

D'où

$$X \in \bigcap_{i=1}^m ZCT_i$$

De plus, on a vu que les n contraintes de non négativité équivalent à $X \in \mathbf{C}_0^+$

En résumé, toutes les contraintes du problème PPL signifient,

$$X \in \left(\bigcap_{i=1}^m ZCT_i \right) \cap C_0^+ \quad (3.01)$$

Dans notre théorie, décrire et expliquer les contraintes d'un problème PPL reviennent donc à étudier les intersections entre $m+1$ objets :

- Les m , objets ZCT_i .
- Et n objet C_0^+ .

De par l'associativité et la commutativité de l'intersection, on peut écrire

$$\left(\bigcap_{i=1}^m ZCT_i \right) \cap C_0^+ = \bigcap_{i=1}^m (ZCT_i \cap C_0^+) \quad (3.02)$$

D'où l'intérêt particulier d'étudier l'intersection de chaque ZCT_i avec le cône C_0^+ .

3.2 Projection de l'origine O sur la frontière de ZCT_i

Dans la suite nous notons par Ω_i , la projection de l'origine O sur HP (A_i, b_i) qui n'est autre que la frontière de ZCT_i .

Proposition 3.01

La projection Ω_i de l'origine O sur la frontière de ZCT_i existe toujours. De plus elle est unique.

Démonstration :

♣

Ω_i se trouve sur la droite passant par O et perpendiculaire à HP (A_i, b_i) . Or cette droite n'est autre que la droite affine passant par O et de vecteur directeur A_i .

$$\Omega_i = 0 + \alpha A_i \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.03)$$

Comme

$$\Omega_i \in HP(A_i, b_i)$$

On peut écrire :

$$\langle A_i, \Omega_i \rangle = b_i \quad (3.04)$$

Ce qui donne :

$$\langle A_i, 0 + \alpha A_i \rangle = b_i,$$

C'est-à-dire

$$\langle A_i, 0 + \alpha \langle A_i, A_i \rangle \rangle = b_i$$

Or

$$\langle A_i, 0 \rangle = 0 \quad \text{on a} \quad \alpha \langle A_i, A_i \rangle = b_i$$

D'autre part,

$$\langle A_i, A_i \rangle \neq 0 ;$$

Par conséquent, on a :

$$\alpha = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \quad (3.05)$$

Qui existe toujours et est unique.

Et

$$\Omega_i = 0 + \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \quad (3.06)$$

♦

Du point de vue topo-géométrique, on peut distinguer 3 cas :

- Cas où Ω_i se trouve à l'extérieur de \mathbf{C}_0^+
- Cas où Ω_i et O sont confondus
- Cas où Ω_i est un point intérieur de \mathbf{C}_0^+

3.2.1 Cas où Ω_i se trouve à l'extérieur de \mathbf{C}_0^+

Proposition 3.02

La projection Ω_i de O sur la frontière de \mathbf{ZCT}_i se trouve à l'extérieur de \mathbf{C}_0^+ s'il existe une indice $j \in [1, n]$ tel que :

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} < 0 \quad (3.07)$$

Démonstration :

♣

Illustrons le cas par la figure ci-après :

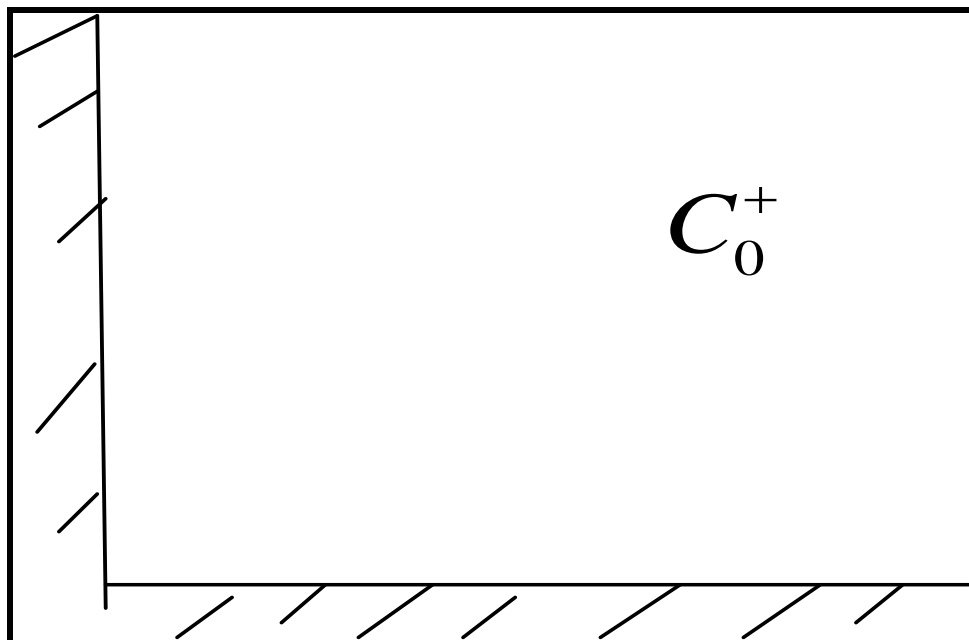


Figure 3.01 : Cone de non-negativité

Précisons d'abord la signification de la forme à l'extérieur de C_0^+ .

Posons :

$$\Omega_i = (w_{ij})_{j=1, \dots, n}$$

Et

$$A_i = (a_{ij})_{j=1, \dots, n}$$

on a :

$$w_{ij} = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n \quad (3.08)$$

$$\Omega_i \in C_0^+, \quad \text{signifie} \quad w_{ij} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Autrement dit,

$$\forall j \in [1, n], \quad w_{ij} \geq 0$$

Donc $\Omega_i \notin C_0^+$,

signifie $\exists j \in [1, n] \quad w_{ij} < 0$

♦

Cependant, cette proposition ne suffit pas à elle seule à expliquer les situations de redondance ou d'impossibilité.

Symboliquement, dans le langage ensembliste l'extérieur de C_0^+ peut-être noté.

$$\overline{C_0^+} = \{X \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } \exists j \in [1, n] \text{ et } x_j \leq 0\} \text{ où } X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$$

Définition 3.01

on appelle cône négatif, noté C_0^- , l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ défini par

$$C_0^- = \{X \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } x_i < 0 \quad \forall_j \in [1, n]\} \text{ où } X = (x_j)_{j=1, \dots, n} \quad (3.09)$$

D'après (3.09), il est évident que : $\forall X \in C_0^-, \quad X \in \overline{C_0^+}$,

ce qui veut dire que :

$$C_0^- \subset \overline{C_0^+}$$

On peut donc diviser la région C_0^+ en deux sous-régions topo-géométriques distincts. L'une C_0^- et l'autre qui n'est autre que $C_0^+ \setminus C_0^-$. $(C_0^+ \setminus C_0^-)$ symbolise le complémentaire de C_0^- dans C_0^+ . D'où l'illustration à travers la figure 3.02 :

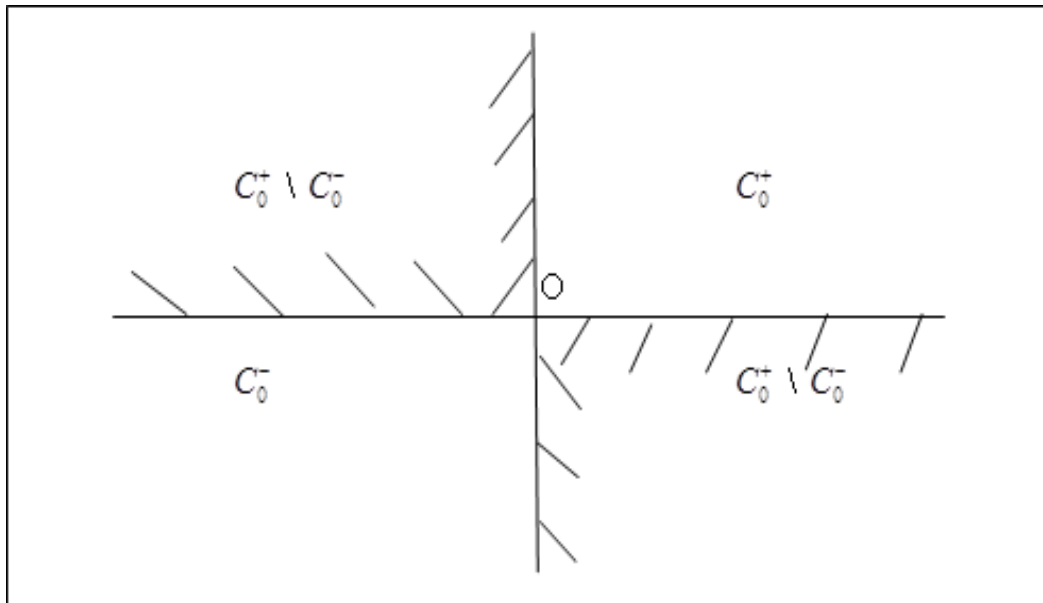


Figure 3.02 : Cone non negatif

Remarquons de plus que l'origine O n'appartient ni à C_0^- ni à C_0^+ .

Proposition 3.03

Si Ω_i se trouve dans C_0^- alors

$$\forall j \in [1, n] \quad \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} < 0 \quad (3.10)$$

La figure 3.03 ci-après illustre ce cas.

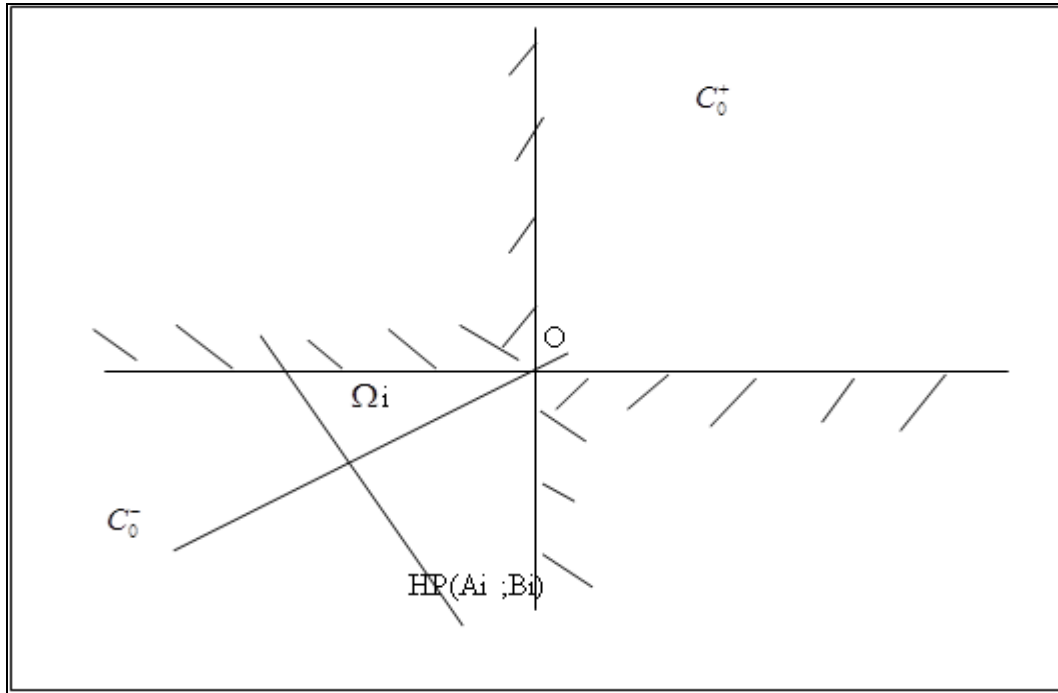


Figure 3.03 : Illustration proposition 3.03

Deux sous-cas peuvent se présenter

Lemme 3.01

Si $\forall j \in [1, n] ; a_{ij} < 0$ alors $b_i > 0$ donc $ZCT_i \cap C_0^+ = C_0^+$

Démonstration :

♣

Soit la figure 3.04 qui représente graphiquement ce cas du lemme 3.01

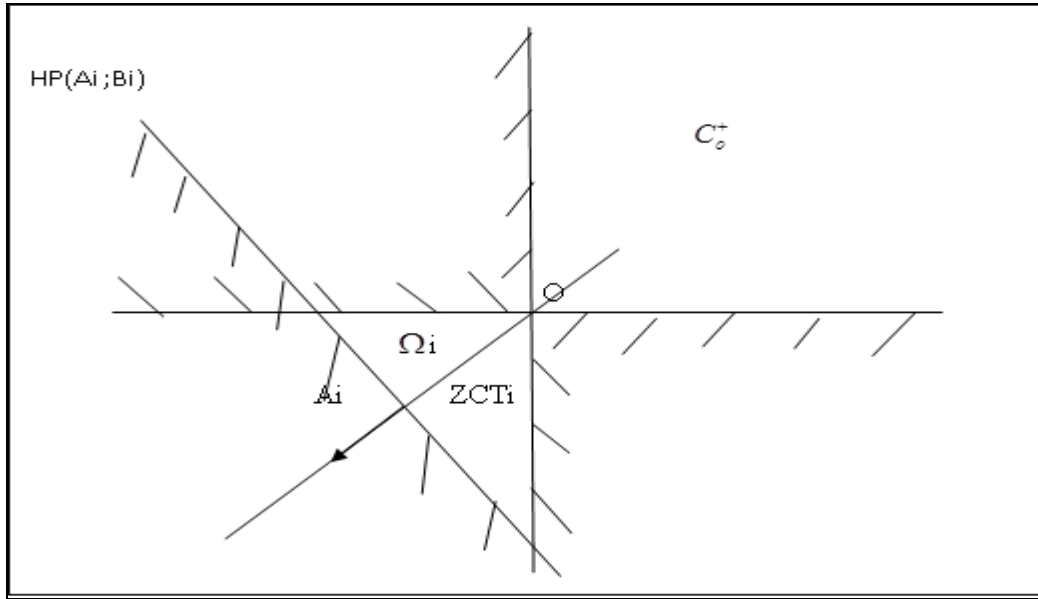


Figure 3.04 Cas 1 de proposition 3.03

Montrons que

$$C_0^+ \subset ZCT_i$$

Soit $X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$ un élément de C_0^+

On a donc

$$\forall j \in [1, n]; x_j \geq 0,$$

donc

$$\forall j \in [1, n] \quad a_{ij} \cdot x_j \leq 0$$

D'où

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0 \quad \text{or} \quad b_i > 0$$

Soit

$$\langle A_i, X \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0 < b_i,$$

C'est à dire que :

$$X \in ZCT_i$$

Ce qui prouve que :

$$C_0^+ \subset ZCT_i$$

D' où :

$$ZCT_i \cap C_o^+ = C_o^+$$

C'est un cas de redondance de la contrainte i. Elle peut-être enlever du système de contrainte du problème PPL.

♦

Lemme 3.02

Si $\forall j \in [1, n] \ a_{ij} \geq 0$ alors $ZCT_i \cap C_o^+ = \emptyset$, le problème n'a pas de solution.

Démonstration :

♣

Considérons la représentation graphique 3.05 de ce cas

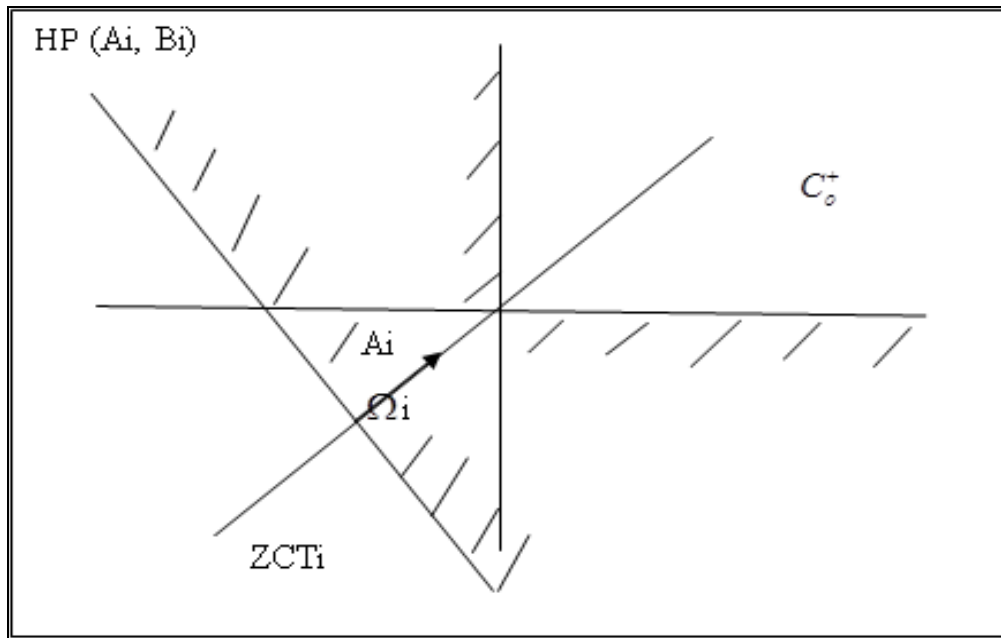


Figure 3.05 : Illustration de lemme 3.01

Montrons que :

$$ZCT_i \cap C_o^+ = \emptyset$$

Soit X un élément de $ZCT_i \cap C_o^+$.

Donc :

$$X \in ZCT_i \text{ et } X \in C_o^+,$$

Ce qui signifie

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i \quad \text{et} \quad X \in C_0^+$$

Posons

$$X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$$

Donc

$$\langle A_i, X \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i < 0$$

Alors

$$X \in C_0^+ \quad \text{entraîne que} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0,$$

C'est-à-dire

$$\langle A_i, X \rangle \geq 0$$

Or

$$\langle A_i, X \rangle < 0. \quad \text{Ce qui est impossible.}$$

Donc

$$ZCT_i \cap C_0^+ = \emptyset$$

Le problème PPL n'a pas de solution.

♦

Lemme 3.03

Si Ω_i se trouve dans C_0^+/C_0^- alors

$$HP(A_i, b_i) \cap C_0^+ \neq \emptyset \quad \text{et} \quad ZCT_i \cap C_0^+ \neq \emptyset$$

Démonstration :

♣

Dans ce cas on a $\exists j \in [1, n]$ tel que :

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} < 0 \tag{3.11}$$

Et

$\exists j \in [1, n]$ tel que :

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} > 0 \quad (3.12)$$

Analysons $HP(A_i, b_i) \cap C_0^+$ plus précisément. Etudions les intersections

$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k)$

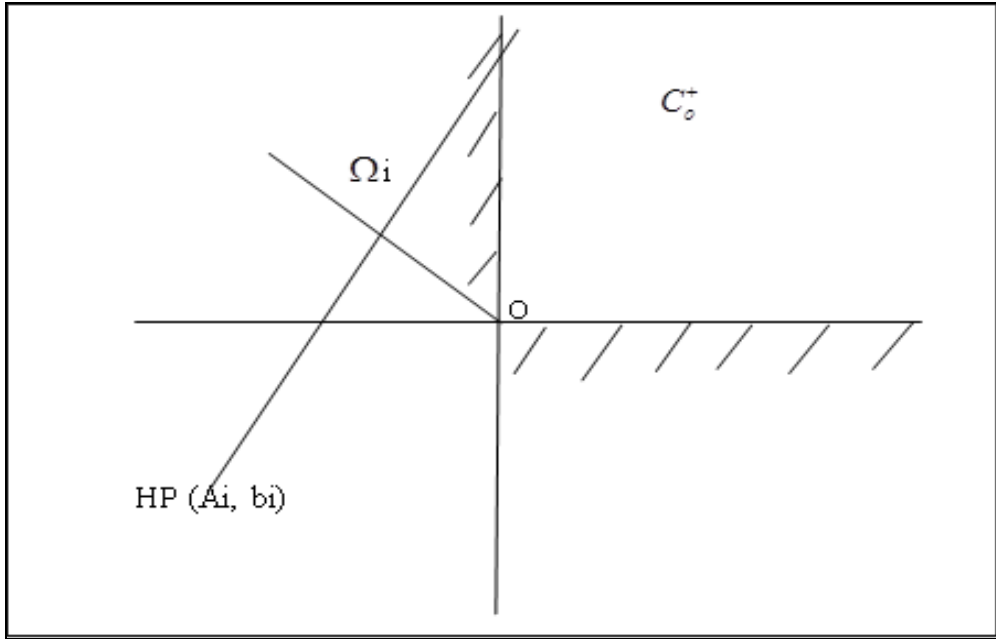


Figure 3.06 : Illustration lemme 3.02

Où $R(O, U_k)$ et l'axe de recherche partent de O et de direction U_k .

Soit X élément de $HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k)$

On peut écrire :

$$\langle A_i, X \rangle = b_i \quad \text{et} \quad X = \alpha U_k \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0$$

D où

$$\langle A_i, U_k \rangle = b_i,$$

sachant que :

$$A_i = (a_{ij})_{j=1, \dots, n}$$

On a

$$\alpha \cdot a_{ik} = b_i \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0 \quad (3.13)$$

Notons par :

$$IN = \left\{ j \in [1, n] \quad tel \quad que \quad \frac{b_i}{< A_i, A_i >} a_{ij} < 0 \right\}$$

$$IP = \left\{ j \in [1, n] \quad tel \quad que \quad \frac{b_i}{< A_i, A_i >} a_{ij} > 0 \right\}$$

et

$$IZ = \left\{ j \in [1, n] \quad tel \quad que \quad \frac{b_i}{< A_i, A_i >} a_{ij} = 0 \right\}$$

on a

$$IN \cup IP \cup IZ = [1, n]$$

D'après (3.11)

$$IN \neq \emptyset$$

et d'après (3.12)

$$IP \cup IZ \neq \emptyset$$

Si $IP = \emptyset$ alors, il n'existe aucun $k \in [1, n]$ tel que :

$$\alpha \cdot a_{ik} = b_i \quad et \quad \alpha \geq 0$$

Ce qui signifie que dans cas : $\forall k \in [1, n]$

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

Par conséquent

$$HP(A_i, A_i) \cap C_0^+ = \emptyset$$

Et on a également

$$HP(A_i, b_i) \cap C_0^+ = \emptyset$$

Dans cette situation on a aussi deux sous cas :

$$\forall j \in [1, n] \quad a_{ij} \leq 0, \quad - \quad \forall j \in [1, n] \quad a_{ij} \geq 0$$

Ce cas implique que

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ij} \leq 0 \quad \text{et} \quad b_i > 0$$

Par représentation graphique, nous avons la figure 3.07 suivante :

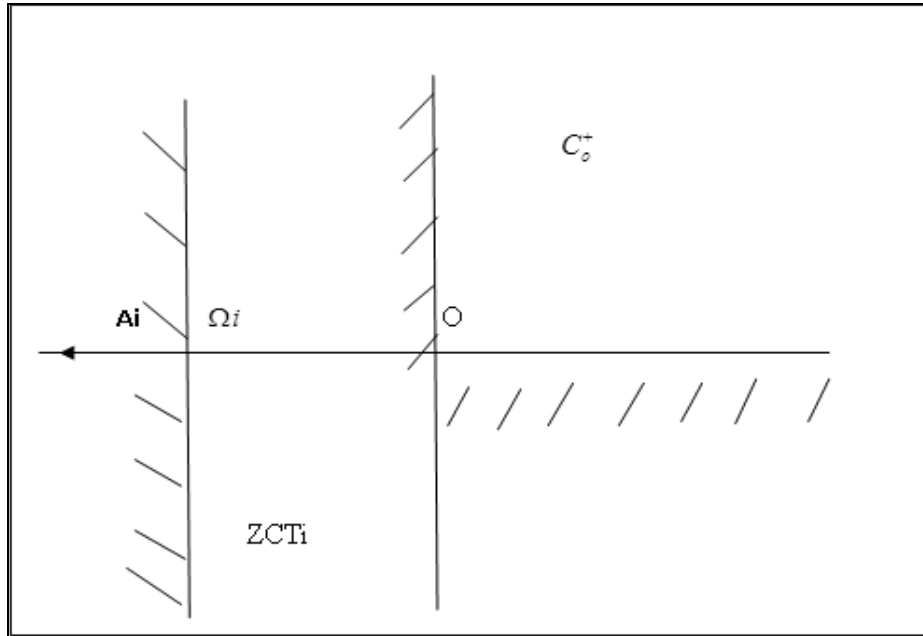


Figure 3.07 : Cas lemme 3.02

Montrons que C_0^+ est inclus dans ZCT_i .

Soit $X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$ un élément de C_0^+

On a donc :

$$\forall j \in [1, n] \quad x_j \geq 0$$

ce qui entraîne que

$$\forall j \in [1, n], \quad a_{ij} \cdot x_j \leq 0$$

D où

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq 0$$

Or

$$b_i > 0$$

donc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i$$

C'est à dire

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i,$$

donc

$$X \in ZCT_i$$

Soit

$$C_0^+ \subset ZTC_i \quad \text{et} \quad ZCT_i \cap C_0^+ = C_0^+.$$

La contrainte i est redondante.

♦

Lemme 3.04

Si $\forall j \in [1, n] \quad a_{ij} \geq 0$ et $b_i < 0$. Alors $ZCT_i \cap C_0^+ = \emptyset$, le problème n'a pas de solution.

Démonstration :

♣

Si X est un élément de $ZCT_i \cap C_0^+$ donc $X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$,

On peut écrire :

$$\langle A_i, X \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

avec

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, n]. \quad \text{et} \quad a_{ij} \geq 0, \quad \forall j \in [1, n]$$

entraîne que

$$a_{ij} x_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, n].$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0 \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i < 0$$

et on a

$$0 > b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0$$

C'est une impossibilité, donc

$$ZCT_i \cap C_0^+ = \emptyset.$$

Le problème PPL n'a pas de solutions.

♦

Illustrons le cas $IP \neq \emptyset$ par la figure ci-dessous

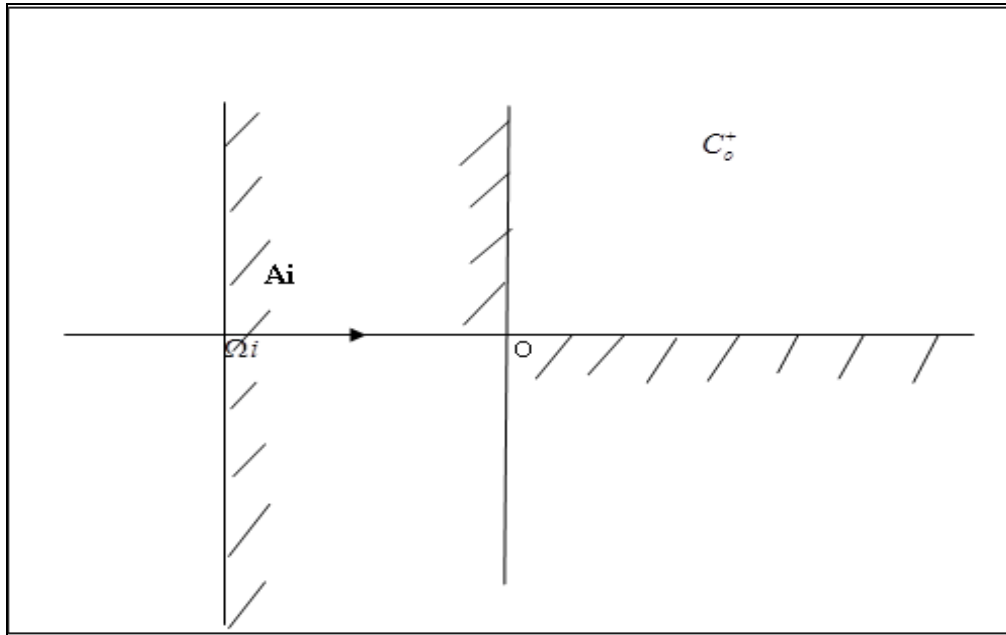


Figure 3.08 : *Illustration lemme 3.03*

Lemme 3.05

Si $IP \neq \emptyset$, alors il existe un $k \in [1, n]$ tel que :

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} a_{ik} > 0$$

C'est à dire que b_i et a_{ik} sont de même signes et différents de zéro. Dans ce cas l'équation (3.13) admet une solution unique :

$$\alpha = \frac{b_i}{a_{ik}} \quad (3.14)$$

Signifiant que

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) \neq \emptyset$$

où $R(O, U_k)$ est l'axe de recherche partant de O et de direction U_k .

Démonstration :



Soit X un élément de $HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k)$

On peut écrire :

$$\langle A_i, X \rangle = b_i \quad \text{et} \quad X = \alpha U_k \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0$$

D'où

$$\langle A_i, \alpha U_k \rangle = b_i.$$

Sachant que

$$A_i = (a_{ij})_{j=1, \dots, n}$$

on a :

$$\alpha \cdot a_{ik} = b_i \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

Entrainant que

$$HP(A_i, b_i) \cap Co^+ \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \text{que} \quad ZCT_i \cap C_0^+ \neq \emptyset$$



A travers ce cas, on a épuisé toutes les possibilités du cas où Ω_i se trouve à l'extérieur de C_0^+ .

Proposition 3.04

Si Ω_i et O sont confondus alors $ZCT_i \cap C_0^+ = C_0^+$. La contrainte i est redondante.

Démonstration :



Si $b_i = 0$, posons :

$$JN = \{j \in [1, n] \text{ tel que } a_{ij} < 0\}$$

$$JZ = \{j \in [1, n] \text{ tel que } a_{ij} = 0\}$$

$$JP = \{j \in [1, n] \text{ tel que } a_{ij} > 0\}$$

On a :

$$JN \cup JZ \cup JP = [1, n]$$

Comme

$$A_i \neq 0 \quad \text{alors} \quad JN \cup JP \neq \emptyset$$

Ce qui signifie que JN et JP ne peuvent pas être simultanément vide.

Si $JN = \emptyset$

Donc

$JP \neq \emptyset$ entraîne $\exists k$ telque $a_{ik} > 0$

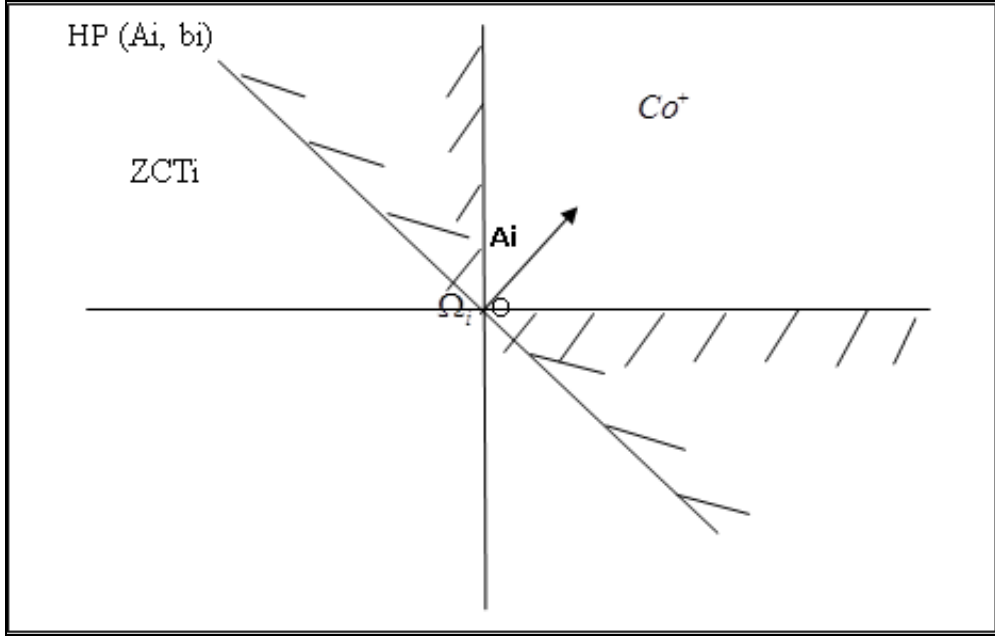


Figure 3.09 : Illustration proposition 3.04

Déterminons $ZCT_i \cap C_0^+$

Soit

$$X \in ZCT_i \cap C_0^+, X = (X_j)_{j=1, \dots, n}$$

On a :

$$\langle A_i, X \rangle \leq 0 \quad \text{car} \quad X \in ZCT_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} \sum_{j \in JP} a_{ij} x_j \leq 0 \\ a_{ij} > 0 \quad \forall j \in JP \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in JP \end{cases}$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$x_j = 0 \quad \forall j \in JP \quad \text{et} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j \in JZ \cup JN$$

La dimension du problème PPL est réduite du coordonné de JP, $JP \neq \emptyset$.

Nous avons alors la représentation graphique suivante :

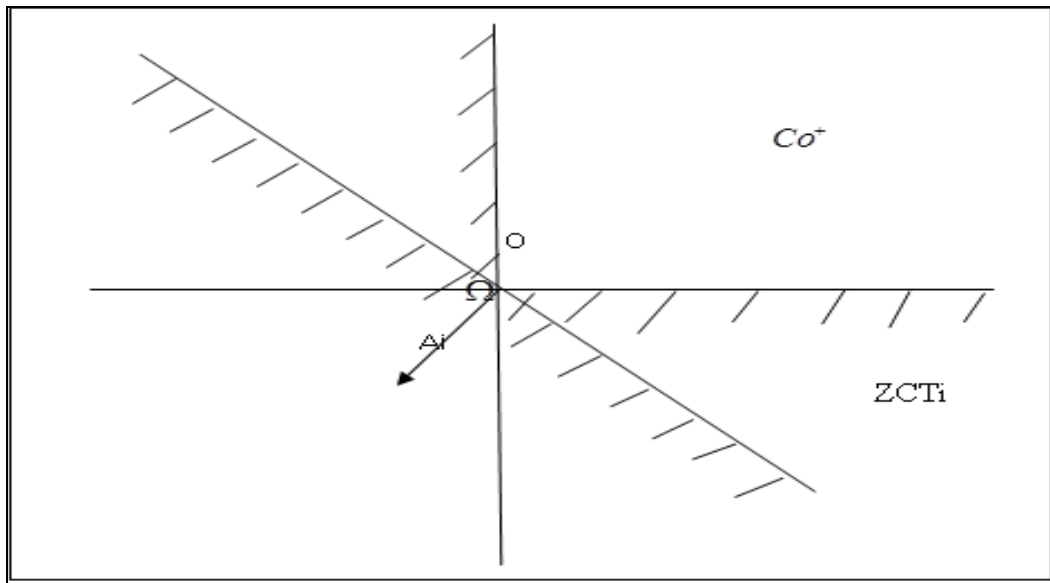


Figure 3.10 : Cas 1 proposition 3.04

Montrons que $C_0^+ \subset ZCT_i$. Soit $X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$ un élément de C_0^+ .

On a :

$$\forall k \in [1, n], x_k \geq 0.$$

Donc :

$$\forall j \in [1, n] \quad a_{ij} x_j \leq 0$$

on a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0$$

C'est-à-dire

$$\langle A_i, X \rangle \leq 0 \text{ signifiant que } X \in ZCT_i.$$

Donc

$$ZCT_i \cap C_0^+ = C_0^+.$$

La contrainte i est redondante.

♦

Nous pouvons établir la figure 3.11 suivante pour illustrer la proposition 3.04 :

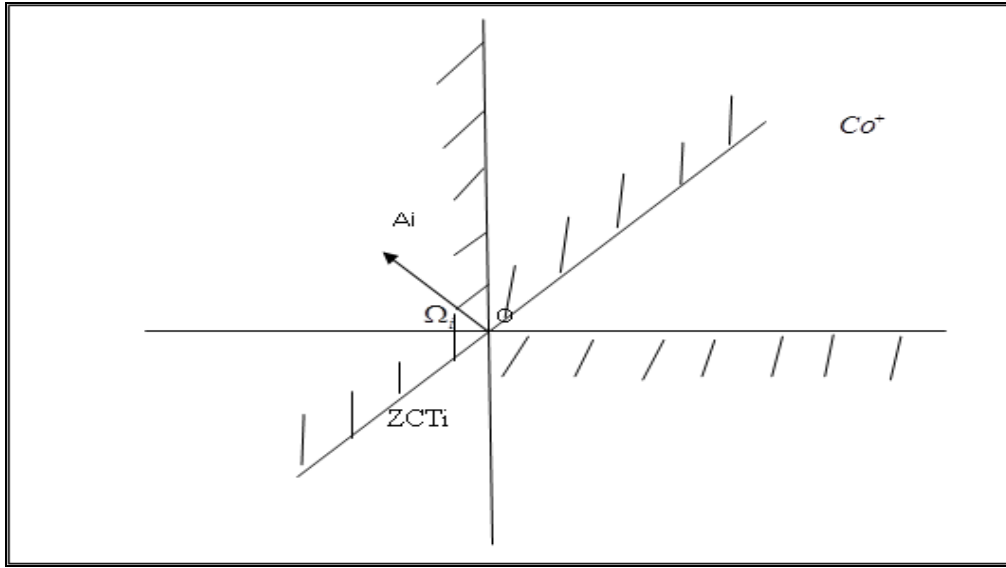


Figure 3.11 : Cas 2 proposition 3.04

3.2.2 Cas où $JN \neq \emptyset$ et $JP \neq \emptyset$

Dans ce cas, il est intéressant de déterminer parmi les U_k ; lesquels sont vers l'intérieur de ZCT_i et lesquels sont orientés vers son extérieur et finalement lesquels ont une orientation parallèle à ZCT_i

Proposition 3.05

L'orientation du vecteur de décision U_k par rapport à ZCT_i est :

- Intérieur si a_{ik} est strictement négatif
- Parallèle si a_{ik} est nulle
- Extérieur si a_{ik} est strictement positif

Démonstration :



Comme

$$\langle A_i, U_k \rangle = a_{ik} \text{ pour tout } k \in [1, n].$$

Pareillement : $JN \neq \emptyset$ et $JP \neq \emptyset$

Certains a_{ik} sont strictement négatifs tandis que d'autres sont strictement positifs.

Enfin si $JZ \neq \emptyset$, certains a_{ik} sont strictement nuls

3.2.3 Cas où Ω_i se trouve à l'intérieur de C_0^+

C'est le cas le plus général qu'on rencontre dans un modèle bien construit. Il n'engendre ni redondance ni impossibilité. Le seul cas intéressant est celui où deux contraintes technique se réduisent à la relation de la forme : $x_k = b_k > 0$

Une situation qui nous permet d'enlever la dimension n_k du modèle.

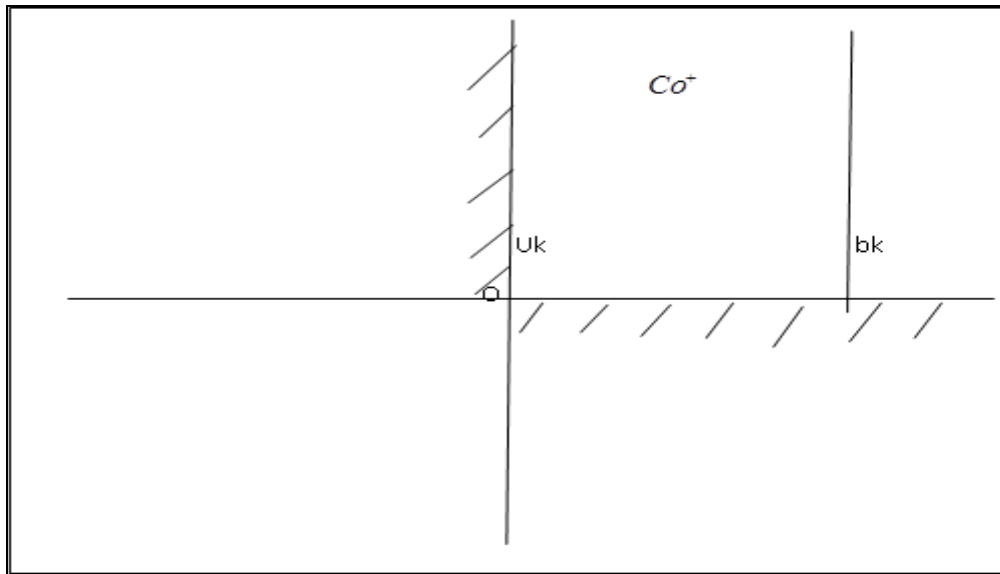


Figure 3.12 : Illustration proposition 3.05

Caractérisons tout d'abord ce cas.

$$\Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} - A_i$$

Le fait que $\Omega_i \in C_0^+$ signifie que :

Quel que soit j élément de $[1, n]$, b_i et a_{ij} sont de même signes.

Remarquons de plus que $b_i \neq 0$

De plus, comme nous les verrons dans les contraintes suivantes, il est très simple et très important de déterminer l'intersection de ZCT_i avec $R(O, U_k)$, $k \in [1, n]$ plus précisément de l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$ frontière de la zone de contrainte technique ZCT_i avec l'axe de recherche $R(O, U_k)$.

Proposition 3.06

L'origine O appartient à ZCT_i si b_i est strictement positif.

Démonstration :

♣

On a toujours :

$$\langle A_i, 0 \rangle = 0$$

Si $b_i > 0$ cela veut dire que :

$$\langle A_i, 0 \rangle = 0 \quad \text{donc} \quad \langle A_i, 0 \rangle \leq b_i$$

Soit

$$0 \in ZCT_i.$$

Si

$$b_i < 0, \quad \text{alors} \quad b_i < \langle A_i, 0 \rangle$$

donc

$$0 \notin ZCT_i$$

♦

3.3 Intersection entre ZCT_i et l'axe de recherche $R(O, U_k)$

Plus précisément, nous allons étudier les points de sortie ou d'entrée de l'axe de recherche $R(O, U_k)$ dans ZCT_i .

On suppose qu'on est dans le cas où l'origine O se trouve dans ZCT_i .

Soit I_k le point de sortie ou d'entrée,

on a :

$$I_k = \alpha U_k \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0$$

De plus

$$\langle A_i, I_k \rangle = b_i.$$

ce qui donne

$$\langle A_i, \alpha U_k \rangle = b_i$$

d'où

$$\alpha a_{ik} = b_i \geq 0 \tag{3.17}$$

Comme

$b_i \geq 0$ alors tous les a_{ij} sont de même signe que b_i .

Proposition 3.07

Si $a_{ik} \neq 0$ alors le point de sortie ou d'entrée I_k existe et est définie par :

$$I_k = \frac{b_i}{a_{ik}} U_k$$

Si $a_{ik} = 0$ alors le point I_k n'existe pas.

Démonstration :

♣

De (3.17), si $a_{ik} \neq 0$ alors $\alpha = \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$ car b_i et a_{ik} sont de même signes.

Sinon il n'existe aucun $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \cdot 0 = 0 = b_i \neq 0$

♦

3.4 Parallélisme entre deux zones de contraintes techniques

Au début de ce chapitre, nous avons établi que, montrer ou décrire et expliquer le système de contraintes d'un problème PPL revient à étudier les intersections entre $m+1$ objets :

- Les m objets ZCT_i
- L'objet C_0^+

Et nous avons étudié les m intersections $ZCT_i \cap C_0^+$.

Nous allons maintenant laisser de côté C_0^+ et considérer $\bigcap_{i=1}^m ZCT_i$, c'est-à-dire l'intersection d'un nombre fini de régions dans \mathbb{R}^n . De façons exhaustives, on pourrait envisager d'étudier leurs intersections deux à deux, puis trois à trois, etc... Cependant nous allons nous limiter à l'intersection deux à deux de ces objets, toujours dans le but de détecter les redondances et les impossibilités éventuelle, objet de notre thèse.

Du point de vue combinatoire, on a donc à analyser $C_m^2 = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$ intersections

$$ZCT_i \cap ZCT_j \quad \text{avec} \quad i \in [1, m], j \in [1, m] \text{ et } i \neq j.$$

Définition 3.02

Soient i et j deux éléments distincts de $[1, m]$. On dit que ZCT_i et ZCT_j sont parallèles si leurs hyperplans frontières sont parallèles, c'est-à-dire $HP(A_i, b_i)$ et $HP(A_j, b_j)$ sont parallèles s'il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que $A_j = \alpha A_i$.

Posons :

$$A_i = (a_{ik})_{k=1, \dots, n} \quad \text{et} \quad A_j = (a_{jk})_{k=1, \dots, n}$$

La relation :

$$A_j = \alpha A_i \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ peut s'écrire :}$$

$$a_{jk} = \alpha a_{ik} \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n$$

Proposition 3.08

S'il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que pour tout $k \in [1, n]$, $a_{jk} = \alpha a_{ik}$, alors les zones de contraintes techniques ZCT_i et ZCT_j sont parallèles.

Proposition 3.09

Soient $i \neq j$ et ZCT_i et ZCT_j parallèles.

Soient Ω_i la projection de O sur ZCT_i et Ω_j la projection de O sur ZCT_j alors O, Ω_i, Ω_j sont alignés.

Démonstration :

♣

Supposons que ZCT_i et ZCT_j sont parallèles.

On a

$$\Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \tag{3.18}$$

Et

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\langle A_j, A_j \rangle} A_j \tag{3.19}$$

Comme ZCT_i et ZCT_j sont parallèles,

on a :

$$A_j = \alpha A_i$$

avec $\alpha \neq 0$

D'où

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\langle A_i, \alpha A_i \rangle} \alpha A_i$$

donc

$$\Omega_j = \frac{1}{\alpha} \frac{b_j}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \quad (3.20)$$

Deux cas peuvent se présenter : soit $b_i = 0$, soit $b_i \neq 0$

Cas où $b_i = 0$

Dans ce cas $\Omega_i = 0$ donc les 3 points ne forment que deux points, et il est évident que deux points de sont toujours alignés

Cas où $b_i \neq 0$

on peut écrire :

$$\Omega_j = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{b_j}{b_i} \cdot \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i$$

d'où

$$\Omega_j = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{b_j}{b_i} \cdot \Omega_i.$$

Ce qui signifie que :

O, Ω_i , Ω_j sont alignés

♦

Lemme 3.06

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Démonstration :

♣

Il suffit de considérer la figure 3.13 qui présentent les hyperplans frontières des deux zones de contraintes techniques et les projections de l'origine O sur les deux hyperplans ainsi que les vecteurs normaux A_i et A_j aux hyperplans $HP(A_i, b_i)$ et $HP(A_j, b_j)$

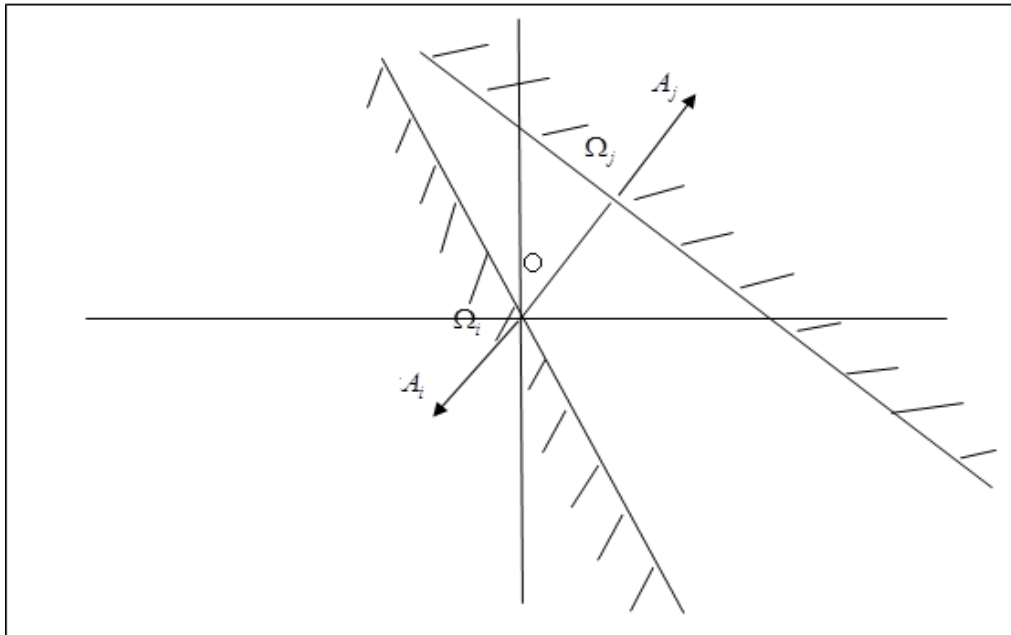


Figure 3.13 : Illustration lemme 3.05

Comme O et Ω_i sont confondues, les trois points O, Ω_i et Ω_j sont alignés.

Et pourtant on voit bien qu'il n'existe aucun $\alpha \neq 0$ tel que

$$A_j = \alpha A_i$$

Or, cette figure correspond au cas où b_i est égal à 0

Montrons que si b_i et b_j sont tous les deux nuls,

alors la réciproque est vraie.

Dans ce cas ni Ω_i ni Ω_j n'est confondu à O .

Comme O, Ω_i, Ω_j sont alignés et distincts deux à deux, il existe un scalaire $\beta \neq 0$ tel que :

$$\Omega_j = \beta \Omega_i$$

De (3.18) et (3.19)

on a :

$$\frac{b_j}{\langle A_i, A_i \rangle} A_j = \beta \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i$$

D'où

$$A_j = \beta \frac{b_i}{b_j} \frac{\langle A_j, A_j \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i$$

Posons

$$\alpha = \beta \frac{b_i}{b_j} \frac{\langle A_j, A_j \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

Comme

$$\beta \neq 0; \quad b_i \neq 0 \text{ et } b_j \neq 0,$$

On a :

$$\alpha \neq 0 \text{ et } A_j = \alpha A_i.$$

Donc

ZCT_i et ZCT_j sont parallèles

♦

Remarque :

Rappelons que le principal but de ce chapitre n'est pas le parallélisme de soi, mais plutôt d'expliquer les cas de parallélisme qui engendrent une redondance ou une incompatibilité.

3.5 Etude de cas de parallélisme entre deux zones de contraintes techniques différentes avec le langage MZ

Nous jugeons pertinent d'étudier de manière exhaustive tous les cas de parallélisme entre deux zones de contraintes technique différents et ce en utilisant le langage MZ c'est-à-dire en utilisant les objets de notre théorie et leurs propriétés.

Pour cela, nous allons classier ces cas en fonction des positions de Ω_i et de Ω_j par rapport aux régions que nous avons définis dans la définition 3.01. Nous pouvons illustrer par la figure 3.14 suivante

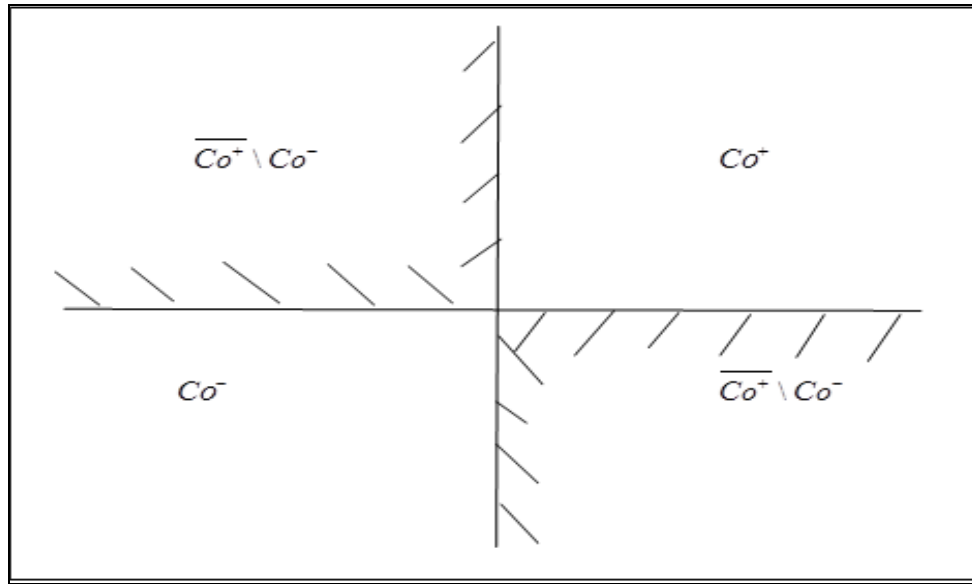


Figure 3.14 : Illustration de cas de parallélisme entre 2 ZCTi

Remarquons tout d'abord que dans cette définition on a trois zones distincts et non quatre

Dans cette perspective, les cas suivants se présentent :

Cas I Ω_i et Ω_j sont dans C_0^+

Cas II Ω_i et Ω_j sont dans C_0^-

Cas III $\Omega_i = \Omega_j = 0$

Cas IV Ω_i dans C_0^+ et Ω_j dans C_0^-

Cas V Ω_i et Ω_j sont dans $\overline{C_0^+} \setminus C_0^-$

De plus, sauf pour le cas III, nous distinguons deux sous cas :

$$\Omega_i \neq \Omega_j \quad \text{et} \quad \Omega_i = \Omega_j$$

Et pour chacun de ces deux sous-cas, les sous-sous-cas suivants se présentent :

- A_i et A_j sont orientés dans le même sens ($\alpha > 0$) et

- A_i et A_j sont orientés dans deux sens contraires ($\alpha < 0$)

Lemme 3.07

Si $(\Omega_i \in C_0^+)$ et $(\Omega_j \in C_0^+)$ et $(\Omega_i \neq \Omega_j)$ et A_i et A_j sont orientés dans le même sens

Alors $ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_i$, c'est-à-dire que la contrainte j est redondante.

Démonstration :

♣

a) Illustrons cette situation par la figure 3.15 ci-après :

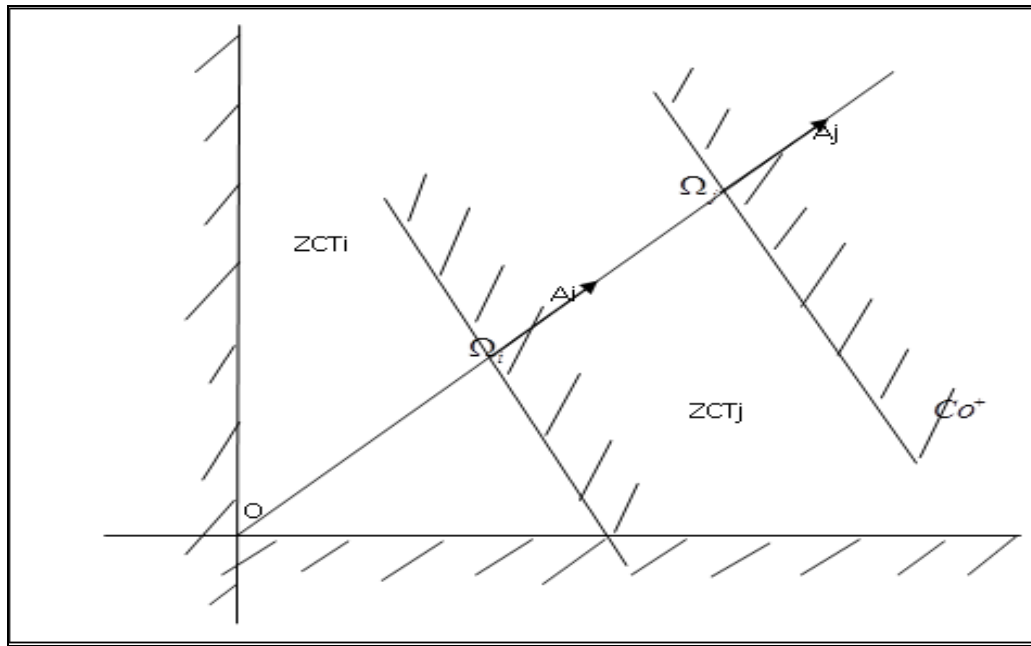


Figure 3.15 : Illustration cas 1 lemme 3.06

On remarque que Ω_i et Ω_j appartiennent au même axe de recherche $R(O, A_i)$ où $R(O, A_j)$, qui est un ensemble totalement ordonné .

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que Ω_i precede Ω_j dans $R(O, A_i)$

C'est-à-dire

Si $\Omega_i = \alpha_i A_i$, $\alpha_i \neq 0$ et $\Omega_j = \alpha_j A_i$, $\alpha_j \neq 0$ et $\alpha_i < \alpha_j$

$$\Rightarrow A_i = \frac{1}{\alpha_j} \Omega_j$$

d'où :

$$\Omega_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \Omega_j, \quad \text{or} \quad \alpha_i < \alpha_j \quad \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\alpha_j} < 1$$

Et

$$\langle A_j, \Omega_i \rangle = \left\langle A_j, \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \Omega_i \right\rangle = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \langle A_j, \Omega_j \rangle$$

Puisque

$$\langle A_j, \Omega_j \rangle = b_j$$

On a :

$$\langle A_j, \Omega_j \rangle = \frac{\alpha_j}{\alpha_j} b_j \quad \text{et} \quad \text{comme} \quad \frac{\alpha_i}{\alpha_j} < 1,$$

Alors on a

$$\langle A_j, \Omega_j \rangle < b_j, \quad \text{donc} \quad \langle A_j, \Omega_i \rangle = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \langle A_j, \Omega_j \rangle < b_j$$

Ce qui signifie que Ω_i se trouve à l'intérieur de ZCT_j .

Montrons de plus que ZCT_i est inclus dans ZCT_j .

Soit X un élément quelconque de ZCT_i . On a les propriétés suivantes qui permettent d'établir la figure 3.16 :

$$\begin{aligned} \langle A_i, X \rangle &\leq b_i \\ \langle A_j, X \rangle &= \langle A_j, \Omega_i + (X - \Omega_i) \rangle \\ \langle A_j, X \rangle &= \langle A_j, \Omega_i \rangle + \langle A_j, (X - \Omega_i) \rangle \end{aligned} \tag{3.21}$$

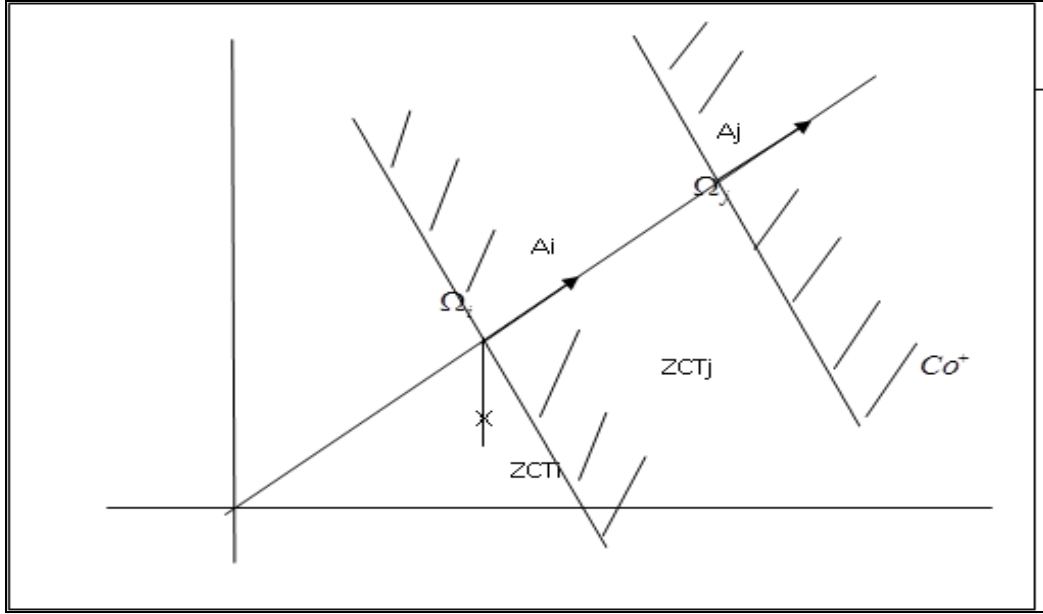


Figure 3.16 : Illustration cas 2 lemme 3.06

Comme $X \in ZCT_i$ alors $\langle A_i, (X - \Omega_i) \rangle \leq 0$

Comme $X \in ZCT_i$ alors $\langle A_j, (X - \Omega_i) \rangle < 0$

$$\Rightarrow \alpha \langle A_i, (X - \Omega_i) \rangle \leq 0 \text{ car } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \langle \alpha A_i, (X - \Omega_i) \rangle < 0$$

Or

$$A_i = \alpha A_j,$$

on a donc

$$\langle A_j, (X - \Omega_i) \rangle \leq 0$$

De la relation (3.21)

On obtient :

$$\langle A_i, X \rangle \leq \langle A_i, \Omega_i \rangle$$

Or

$$\langle A_j, \Omega_i \rangle < b_j, \text{ alors } \langle A_j, X \rangle < b_j \text{ c'est-à-dire } X \in ZCT_j$$

Donc

$$ZCT_i \subset ZCT_j.$$

Et dans ce cas :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_i,$$

Signifiant que la contrainte j est une contrainte redondante

◆

Proposition 3.10

Soit Ω_i la projection de O sur ZCT_i et Ω_j celle de O sur ZCT_j . S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$A_j = \alpha A_i \text{ et que } \langle \Omega_i, \Omega_i \rangle < \langle \Omega_j, \Omega_j \rangle$$

alors ZCT_j est redondant si A_i et $A_j \in C_0^+$ et ZCT_i est redondant si A_i et $A_j \in C_0^-$.

Démonstration :

♣

Considérons le cas de figure ci-dessous :

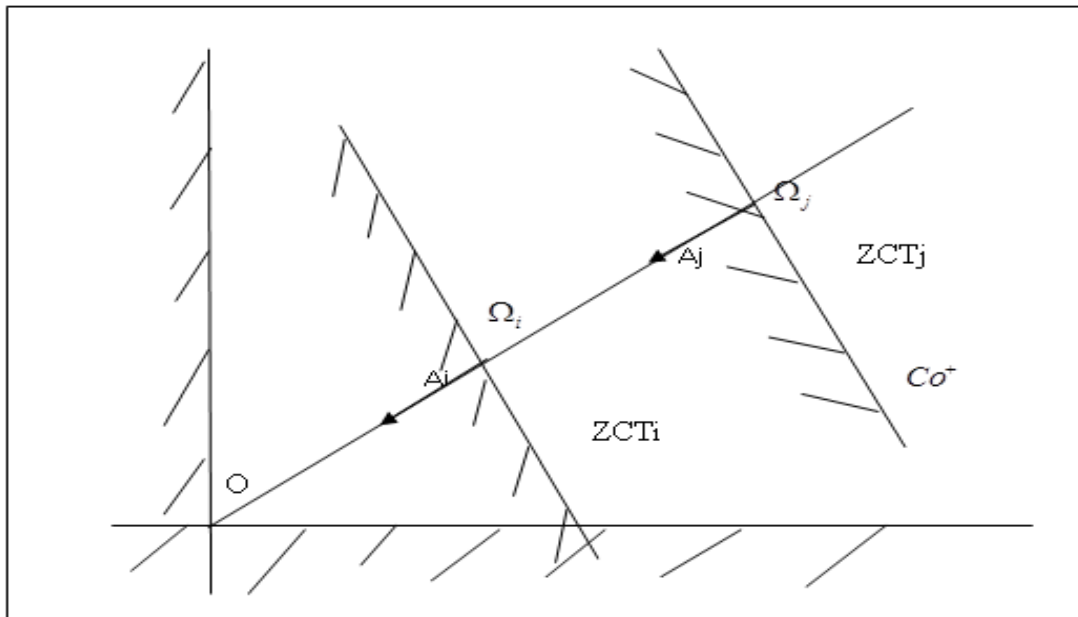


Figure 3.17 : *Illustration proposition 3.10*

Comme dans le cas précédent :

On suppose que Ω_i est plus proche de O que Ω_j ($\langle \Omega_i, \Omega_i \rangle < \langle \Omega_j, \Omega_j \rangle$)

Et $A_i \in C_0^-$ et $A_j \in C_0^-$.

Par un raisonnement analogue au précédent on démontre facilement que :

$$ZCT_j \subset ZCT_i$$

Et par conséquent :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_j$$

Cette fois-ci c'est la contrainte i qui est redondante

♦

Résumons Ω_i plus proche de O que Ω_j . Ce qui veut dire que :

$$\langle \Omega_i, \Omega_i \rangle < \langle \Omega_j, \Omega_j \rangle$$

Or

$$\Omega_i \in C_0^+ \text{ et } \Omega_j \in C_0^+$$

signifie :

$$\text{Pour tout } k \in [1, n] \begin{cases} W_{ik} > 0 \\ W_{jk} > 0 \end{cases}$$

Proposition 3.11

Si $(\Omega_i \in C_0^+)$ et $(\Omega_j \in C_0^+)$ et $(\Omega_i = \Omega_j)$ d'une part et A_i et A_j sont orientés dans le même sens d'autre part, alors :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_i = ZCT_j$$

Les deux contraintes ne font qu'une.

Démonstration :

♣

Considérons la figure 3.18

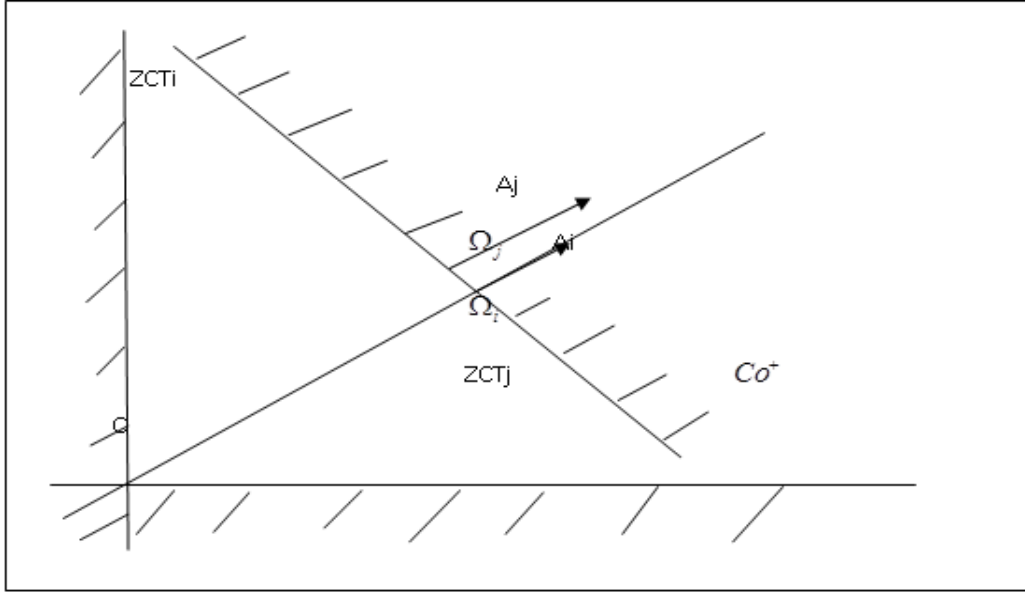


Figure 3.18 : Illustration de la proposition 3.11

Analytiquement, on a d'après (3.18) et (3.19)

$$\Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \in C_0^+$$

Et

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\langle A_j, A_j \rangle} A_j \in C_0^+$$

Donc

$$A_j = \alpha A_i \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

Et

$$A_i \in C_0^+ \quad \text{et} \quad A_i \in C_0^+ \Rightarrow b_i > 0 \quad \text{et} \quad b_j > 0$$

Le fait que

$$\Omega_i = \Omega_j$$

Entraine que

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i = \frac{b_j}{\langle \alpha A_j, \alpha A_j \rangle} \alpha A_j$$

C'est-à-dire

$$\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i = \frac{1}{\alpha} \frac{b_j}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i$$

D'où

$$b_i = \frac{1}{\alpha} b_j \quad (3.22)$$

Dans ce cas il est facile de voir que :

$$ZCT_i = ZCT_j$$

Et que

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_i = ZCT_j$$

Les deux contraintes ne font qu'une en fait.

C'est la redondance. On ne garde qu'une d'entre elles

♦

Remarque : Ce cas est très rare dans la pratique

Proposition 3.12

Soit Ω_i la projection de O sur ZCT_i et Ω_j celle de O sur ZCT_j .

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $A_j = \alpha A_i$, et que Ω_i et $\Omega_j \in C_0^+$ ainsi que $b_i = \frac{1}{\alpha} b_j$,

alors

$$ZCT_i = ZCT_j$$

Démonstration :

♣

On combine la démarche de la démonstration précédente avec la suivante :

Considérons la figure 3.19 :

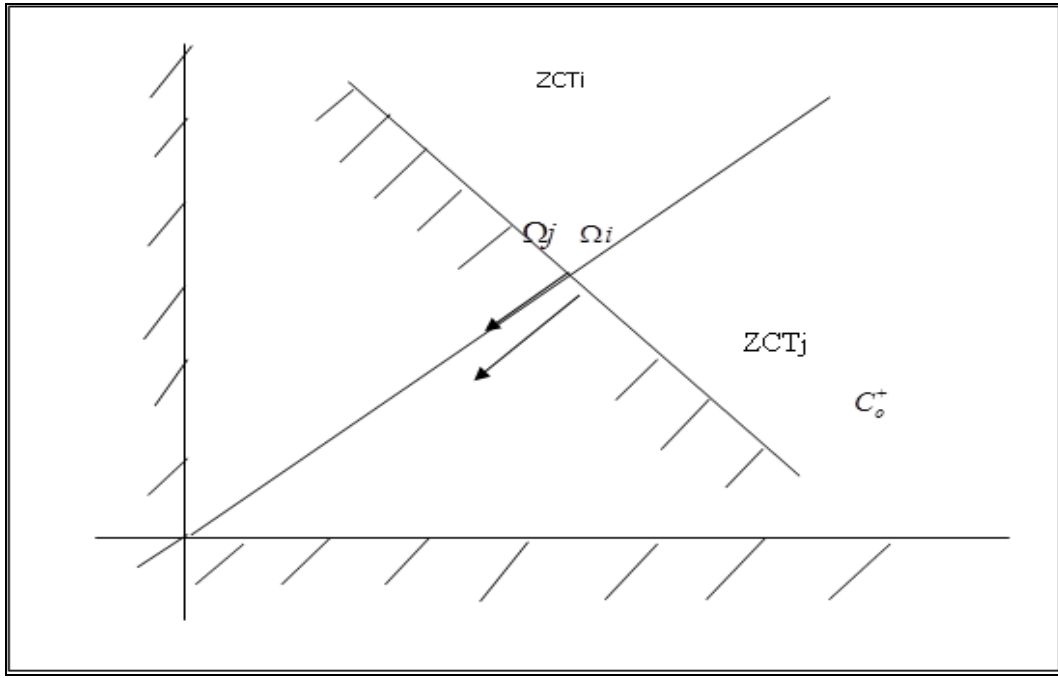


Figure 3.19 *Illustration proposition 3.12*

Comme précédemment, ce cas est également très rare analytiquement.

On peut le modéliser à travers le système.

La figure 3.19 illustre bien dans le plan les dispositions des hyperplan frontières des zones de contraintes techniques ZCTi et ZCTj ainsi les projections Ω_i et Ω_j de l'origine O qui sont confondus.

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \in C_0^+ \\ \Omega_j = \frac{b_j}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \in C_0^+ \\ A_i \in C_0^- \\ A_j \in C_0^- \\ A_j = \alpha A_i \text{ avec } \alpha > 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

D'où

$$b_i < 0 \text{ et } b_j < 0$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i &= \frac{b_j}{\langle A_j, A_j \rangle} A_j \\
&= \frac{b_j}{\langle \alpha A_i, \alpha A_i \rangle} \alpha A_i \\
&= \frac{1}{\alpha} \frac{b_j}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$b_i = \frac{1}{\alpha} b_j$$

Et ce qu'il fallait démontrer

♦

3.5.1 cas où $(\Omega_i \in C_0^+)$ et $(\Omega_j \in C_0^+)$ et $(\Omega_i \neq \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i)$ avec $\alpha < 0$ et $(\Omega_i$ plus proche de 0 que $\Omega_j)$

Proposition 3.13

Soit Ω_i la projection de O sur ZCT_i et Ω_j celle de O sur ZCT_j .

S'il existe un scalaire $\alpha < 0$ tel que :

$$A_j = \alpha A_i, \quad \text{et que} \quad \Omega_j \in C_0^+,$$

alors ZCT_i et ZCT_j sont deux contraintes en conflits.

Si de plus Ω_i est plus proche de O que Ω_j

et que $A_i \in C_0^+$,

alors le problème de PL n'a pas de solution.

Remarque importante

Jusqu'ici nous avons analysé le parallélisme entre ZCT_i et ZCT_j dans le cas où Ω_i et Ω_j se trouvent tous les deux dans C_0^+ . Logiquement portant, ce cas englobe la situation où Ω_i et Ω_j se trouvent exactement sur O.

Cependant si tous deux se trouvent simultanément sur O, il se peut que A_i et A_j appartiennent à $\overline{C_0^+} / C_0^-$, cas que nous allons voir dans une section ultérieure.

Démonstration

♣

a) $\underline{A_i} \in C_0^+$

Illustrons cette situation à travers la figure 3.20 suivante :

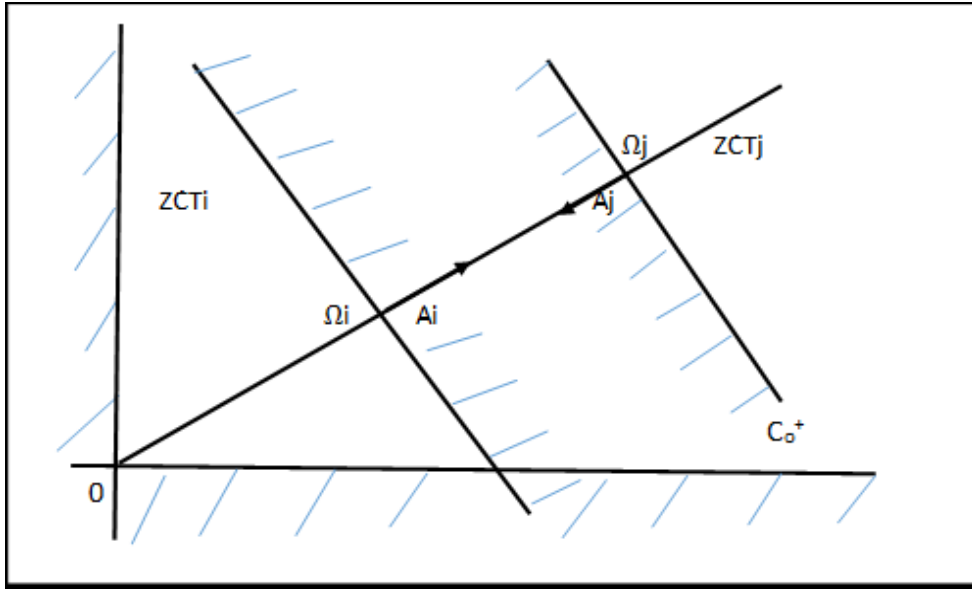


Figure 3.20 : Illustration cas 1 proposition 3.13

On suppose également que Ω_i est plus proche de O que Ω_j .

Caractérisons tout cela analytiquement.

On a :

$$\Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i = b_i \frac{A_i}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\langle A_i, A_j \rangle} A_j \quad \text{avec} \quad A_j = \alpha A_i \quad \text{et} \quad \alpha < 0,$$

D'où

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\langle \alpha A_i, A_j \rangle} \alpha A_i$$

En factorisant

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\alpha} \cdot \frac{A_i}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

Passons aux longueurs, c'est à dire aux normes

$$\|\Omega_i\| = |b_i| \cdot \frac{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}{\langle A_i, A_i \rangle} = |b_i| \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

de même

$$\|\Omega_j\| = \frac{|b_j|}{|\alpha|} \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Comme Ω_i est plus proche de O que Ω_j

cela veut dire que :

$$\|\Omega_i\| < \|\Omega_j\|$$

Soit

$$|b_i| \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} < \frac{|b_j|}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

D'où

$$|b_i| < \frac{|b_j|}{|\alpha|} \quad (3.24)$$

Dans notre cas, on a :

$$A_i \in C_0^+$$

et

$$\Omega_i = \frac{b_i A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \in C_0^+$$

D'où

$$b_i \geq 0$$

De même

$$A_i \in C_0^- \quad \text{et} \quad \Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^+$$

d'où

$$b_j < 0$$

(3.24) devient alors :

$$b_i < \frac{-b_j}{-\alpha}$$

C'est-à-dire

$$b_i < \frac{b_j}{\alpha}$$

Ce qui entraîne que :

$$\alpha b_i > b_j \quad (3.25)$$

Soit maintenant X un élément quelconque de ZCT_i donc :

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i$$

D'où

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \geq \alpha b_i \quad \text{car} \quad \alpha < 0$$

Soit

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \geq \alpha b_i,$$

C'est-à-dire :

$$\langle A_j, X \rangle \geq \alpha b_i$$

Et d'après

$$\langle A_j, X \rangle > b_j,$$

On obtient:

$$X \notin ZCT_j \quad \text{donc} \quad X \in ZCT_i$$

En conséquence,

$$ZCT_i \subset ZCT_j \quad \text{d'où} \quad ZCT_i \cap ZCT_i \neq \emptyset$$

b) $A_i \in C_0^-$

Ce qui entraîne que $A_j \in C_0^+$

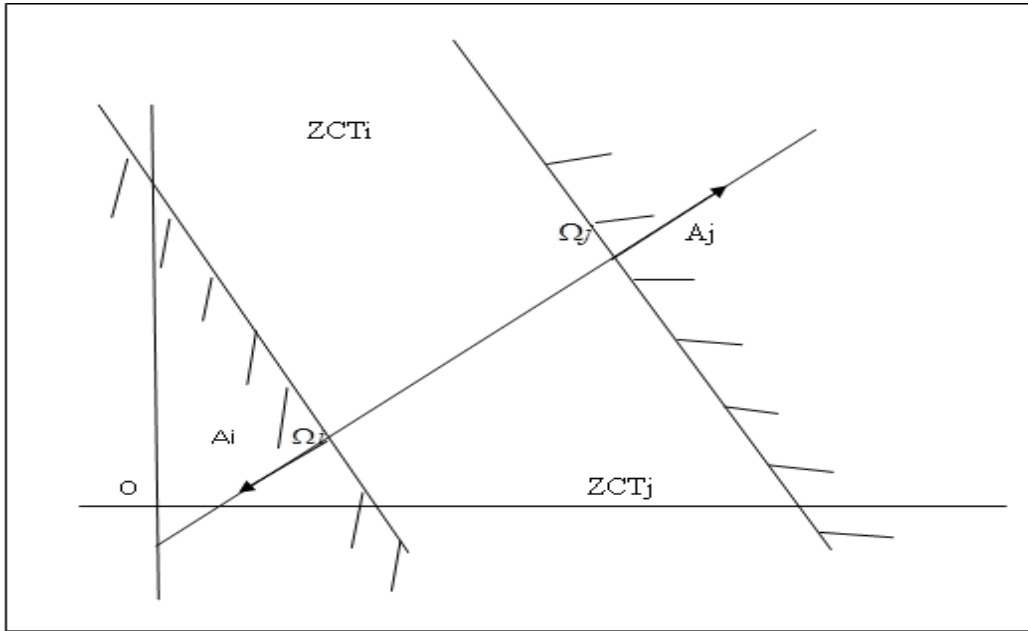


Figure 3.21 : Illustration cas 2 proposition 3.13

$$A_i \in C_0^- \text{ et } \Omega_i = \frac{b_i A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \in C_0^+ \text{ entraine que } b_i \leq 0$$

De meme

$$A_j \in C_0^+ \text{ et } \Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^+ \text{ entraine que } b_j > 0 \quad (3.26)$$

La relation (3.24) devient alors

$$-b_i < \frac{b_j}{-\alpha}.$$

Comme

$$-\alpha > 0 \text{ alors } (-\alpha) \cdot (-b_i) < b_j$$

donc

$$\alpha b_i < b_j$$

Montrons maintenant que dans ce cas

$$ZCT_i \cap ZCT_j \neq \emptyset$$

Montrons que :

$$\Omega_i \in ZCT_j$$

On a :

$$\langle A_i, \Omega_i \rangle = b_i \quad \text{car} \quad \Omega_i \text{ se trouve sur } HP(A_i, b_i)$$

On a donc

$$\alpha < A_i \Omega_i \geq \alpha b_i$$

C'est-à-dire

$$< \alpha A_i \Omega_i \geq \alpha b_i$$

Soit :

$$< A_{ji} \Omega_i \geq \alpha b_i \text{ et d'après (3.26)}$$

$$< A_i \Omega_i \geq < b_i \text{ signifiant que } \Omega_i \in ZCT_j$$

donc, finalement on a:

$$\Omega_i \in ZCT_i \cap ZCT_j.$$

D'où

$$ZCT_i \cap ZCT_j \neq \emptyset$$

♦

Proposition 3.14

Soit Ω_i la projection de O sur ZCT_i et Ω_j la projection de O sur ZCT_j .

Si Ω_i est plus proche de O que Ω_j .

Si A_i et A_j sont tels :

$$A_i = \alpha A_j \text{ avec } \alpha > 0, \text{ alors}$$

Si $A_i \in C_0^-, ZCT_j$ ou la contrainte j est redondante

Si $A_i \in C_0^-, ZCT_i$ ou la contrainte i est redondante

Lemme 3.08

Si $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i \neq \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i \text{ avec } \alpha > 0)$ et $A_i \in C_0^-$ donc $A_j \in C_0^-$

Alors :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_i$$

Autrement dit la contrainte j est redondante.

Démonstration :

♣

Soit la figure ci-après

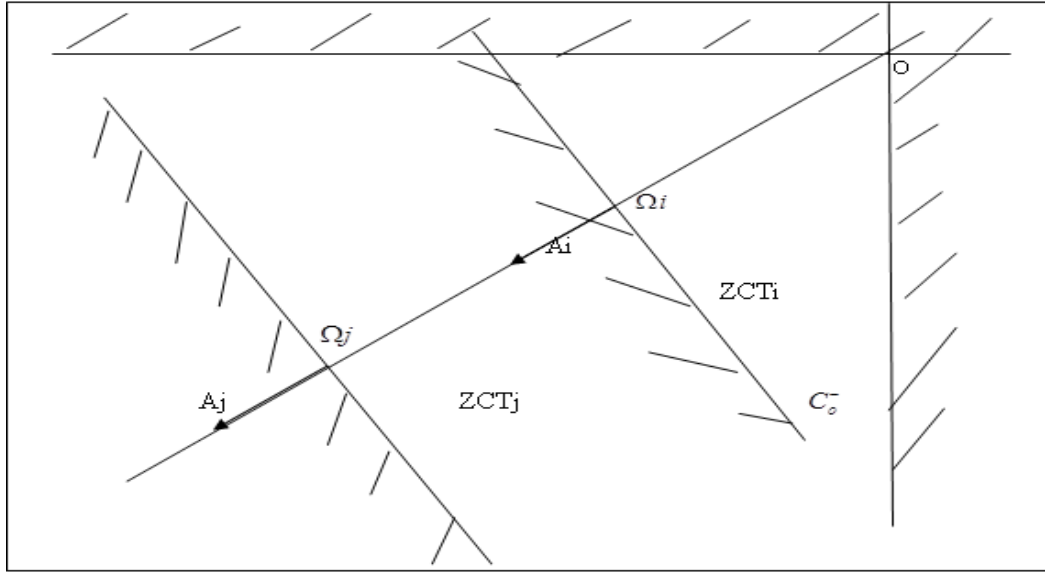


Figure 3.22 Illustration lemme 3.07

Comme toujours nous supposons que Ω_i est plus proche de O que Ω_j ce qui veut dire que la relation (3,24) est toujours valide.

Ici

$$A_i \in C_0^- \text{ et } \Omega_i = \frac{b_i}{\langle A_i, A_i \rangle} A_i \in C_0^-. \text{ Ce qui entraine que } b_i > 0$$

De même

$$A_j \in C_0^- \text{ et } \Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^- \text{ ce qui antraine que } b_j > 0$$

$$\text{de plus comme } \alpha > 0, \text{ la relation (3.24) devient : } b_i < \frac{b_j}{\alpha}. \text{ D où } \alpha b_i < b_j \quad (3.27)$$

Dans ce cas montrons que ZCT_i est inclu dans ZCT_j .

Soit X un élément quelconque de ZCT_i , on a :

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i,$$

Comme

$$\alpha > 0$$

on a :

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \leq \alpha b_i$$

C'est-à-dire

$$\langle \alpha A_i, X \rangle \leq \alpha b_i$$

Or

$$\alpha A_i = A_j,$$

D'où

$$\langle A_j, X \rangle \leq \alpha$$

et on a :

$$\langle A_j, X \rangle < b_i$$

ce qui veut dire que X appartient également ZCT_j .

Donc,

$$ZCT_i \subset ZCT_j.$$

D'où

$$ZCT_i = ZCT_j$$

Signifiant que dans ce cas, la contrainte ZCT_j est redondante.

♦

Lemme 3.09

Si $A_i \in C_0^+$ donc $A_j \in C_0^+$., on a :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_j$$

La contrainte i est redondante.

Démonstration :

♣

Considérons la figure

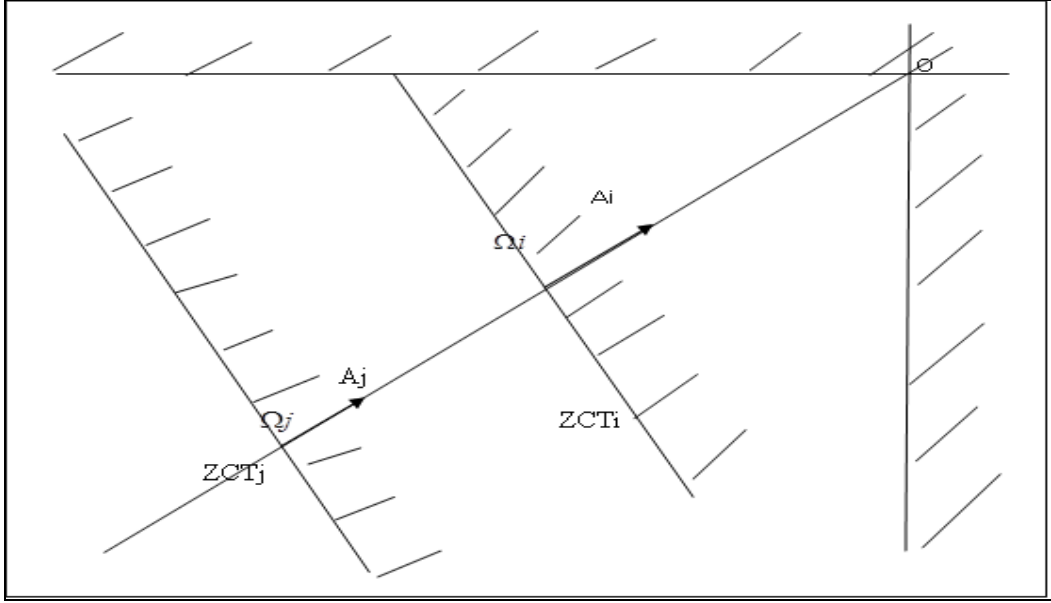


Figure 3.23 *Illustration lemme 3.08*

Comme $A_i \in C_0^+$ et $\Omega_i = \frac{A_i, A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \in C_0^-$ entraîne que

$$b_i < 0 \quad (3.28)$$

La relation (3.24) devient donc:

$$-b_i < \frac{-b_j}{\alpha} \Rightarrow b_i > \frac{b_j}{\alpha}$$

Montrons que ZCT_j est inclus dans ZCT_i .

Soit X un élément quelconque de ZCT_j . On a:

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_j$$

Comme $\alpha > 0$ alors

$$\frac{1}{\alpha} > 0,$$

et on a :

$$\frac{1}{\alpha} \langle A_j, X \rangle \leq \frac{1}{\alpha} b_j = \frac{b_j}{\alpha}$$

d'où

$$\langle \frac{1}{\alpha} A_j, X \rangle \leq \frac{b_j}{\alpha}$$

Or

$$A_j = \alpha A_i.$$

Donc

$$A_i = \frac{1}{\alpha} A_j.$$

on a alors :

$$\langle A_i, X \rangle \leq \frac{b_j}{\alpha}$$

Ce qui combiné avec (3.28), donne :

$$\langle A_i, X \rangle < b_i$$

Signifiant que X appartient aussi appartient à ZCT_i . On a donc :

$$ZCT_j \subset ZCT_i$$

D'où :

$$ZCT_i \cap ZCT_j = ZCT_j.$$

La contrainte i est redondante.

♦

Lemme 3.10

Si $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i \neq \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i \text{ avec } \alpha < 0)$. Si $A_i \in C_0^-$
alors $A_j \in C_0^+$

Démonstration:

♣

Illustrons le cas par la figure 3.24 suivante:

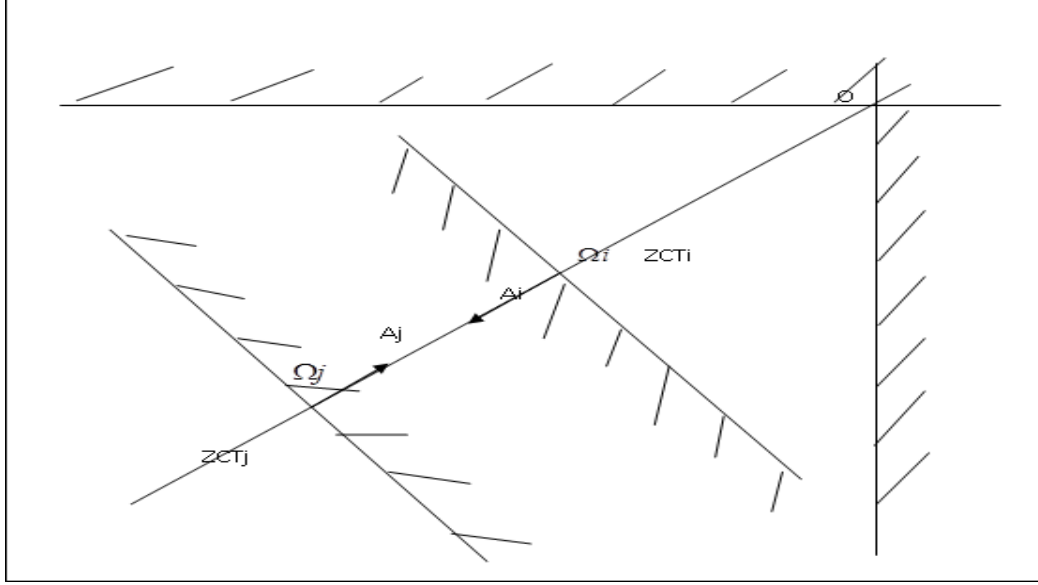


Figure 3.24 : *Illustration lemme 3.09*

$$A_i \in C_0^- \quad \text{et} \quad \Omega_i = \frac{b_i A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \in C_0^- \quad \text{entraîne que} \quad b_i > 0$$

$$A_j \in C_0^+ \quad \text{et} \quad \Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^- \quad \text{entraîne que} \quad b_j < 0$$

Comme $\alpha < 0$, la relation (3.24) devient :

$$b_i < \frac{-b_j}{-\alpha},$$

C'est-à-dire :

$$b_i < \frac{b_j}{\alpha}$$

Donc

$$A_j \in C_0^+$$

♦

Proposition 3.15

Soit Ω_i la projection de O sur ZCT_i , et Ω_j celle de O sur ZCT_j avec Ω_i plus proche de O que Ω_j . Si A_i et A_j sont tels que $A_j = \alpha A_i$ avec $\alpha < 0$ alors ZCT_i et ZCT_j sont des contraintes incompatibles si $A_i \in C_0^-$.

Démonstration

♣

Montrons que $ZCT_j \cap ZCT_i = \emptyset$.

Soit X un élément quelconque de ZCT_j donc :

$$\langle A_j, X \rangle \leq b_j$$

Comme $\alpha < 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha} \langle A_j, X \rangle \geq \frac{b_j}{\alpha},$$

C'est-à-dire

$$\langle \frac{1}{\alpha} A_j, X \rangle \geq \frac{b_j}{\alpha}$$

Or

$$\frac{1}{\alpha} A_j = A_i, \quad \text{d'où} \quad \langle A_i, X \rangle \geq \frac{b_j}{\alpha}$$

Finalement on a :

$$\langle A_i, X \rangle > b_i$$

Signifiant que

$$X \notin ZCT_i \text{ ou } X \in \overline{ZCT_i}$$

Donc

$$ZCT_j \subset \overline{ZCT_i}$$

D'où

$$ZCT_j \cap ZCT_i \subset \overline{ZCT_i} \cap ZCT_i = \emptyset$$

Soit

$$ZCT_j \cap ZCT_i = \emptyset, \quad \text{le problème n'a pas de solution.}$$

♦

Lemme 3.10

Si $(A_i \in C_0^+)$ et $(A_j \in C_0^-)$ et $\Omega_j = b_j A_i \in C_0^-$ alors $ZCT_i \cap ZCT_j \neq \emptyset$

Démonstration :

♣

Considérons la figure 3.25 ci-dessous :

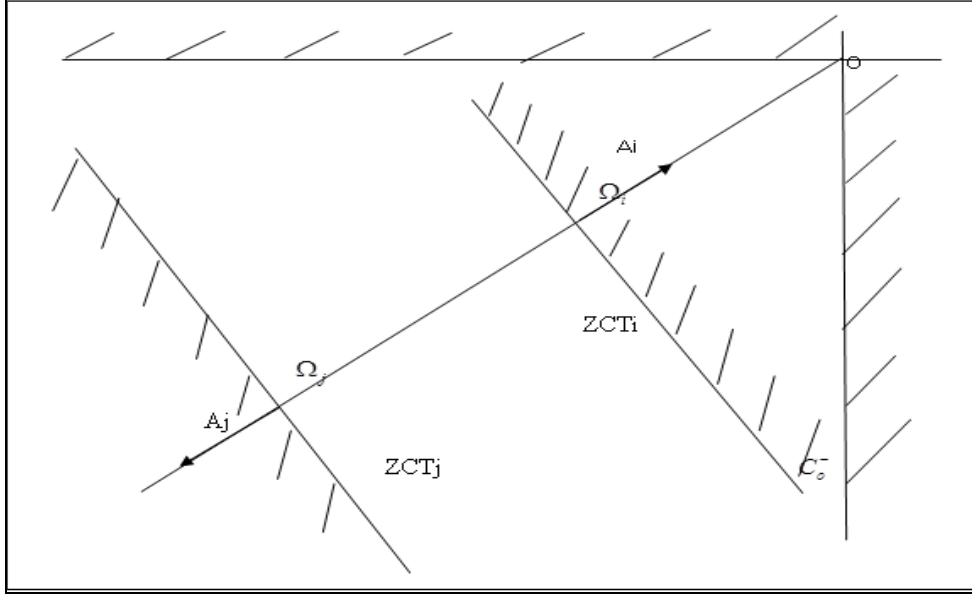


Figure 3.25 : Illustration lemme 3.10

$A_i \in C_0^+$ donc $A_j \in C_0^-$ entraine que $b_i < 0$

De même $A_j \in C_0^-$ et $\Omega_j = b_j A_i \in C_0^-$ entraine que $b_j > 0$

Comme $\alpha < b$, la relation (3.24) devient :

$$-b_i < \frac{b_j}{-\alpha} . \text{ Or } (-\alpha) > 0$$

alors

$$(-\alpha)(-b_i) < b_j$$

C'est-à-dire

$$\alpha b_i < b_j \quad (3.29)$$

Montrons que Ω_i appartient aussi à ZCT_j . Ω_i appartient à ZCT_i , ou plus précisément à

HP (A_i, b_i) donc :

$$\langle A_i, \Omega_i \rangle = \alpha b_i$$

Ce qui entraine que :

$$\alpha \langle A_i, \Omega_i \rangle = \alpha^2 b_i$$

C'est-à-dire :

$$\langle \alpha A_i, \Omega_i \rangle = \alpha b_i$$

comme

$$A_j = \alpha A_i,$$

Donc

$$\langle A_j, \Omega_i \rangle = \alpha b_i$$

on a :

$$\langle A_j, \Omega_i \rangle \langle b_j$$

signifiant que

Ω_i appartient aussi à ZCT_j .

On peut donc écrire :

$$ZCT_i \cap ZCT_j \neq \emptyset$$

♦

3.5.2 Cas où $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i = \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i)$ avec $\alpha > 0$

Proposition 3.16

$A_i \in C_0^-$ donc $A_j \in C_0^-$

Soit Ω_i la projection O sur la zone de contraintes technique ZCT_i et Ω_j celle de O sur la zone de contrainte technique ZCT_j , avec Ω_i et Ω_j confondus.

Si A_i et A_j sont tels que $A_j = \alpha A_i$, avec $\alpha > 0$, c'est à dire que les vecteurs normaux des deux hyperplans sont parallèles alors :

$$ZCT_i = ZCT_j.$$

Les deux zone de contraintes ne font qu'une. Ce qui correspond à un cas de redondance entre les deux contraintes

Démonstration :

♣

Nous pouvons traduire les hypothèses de la proposition 3.16 à travers la figure 3.26 ci-dessous:

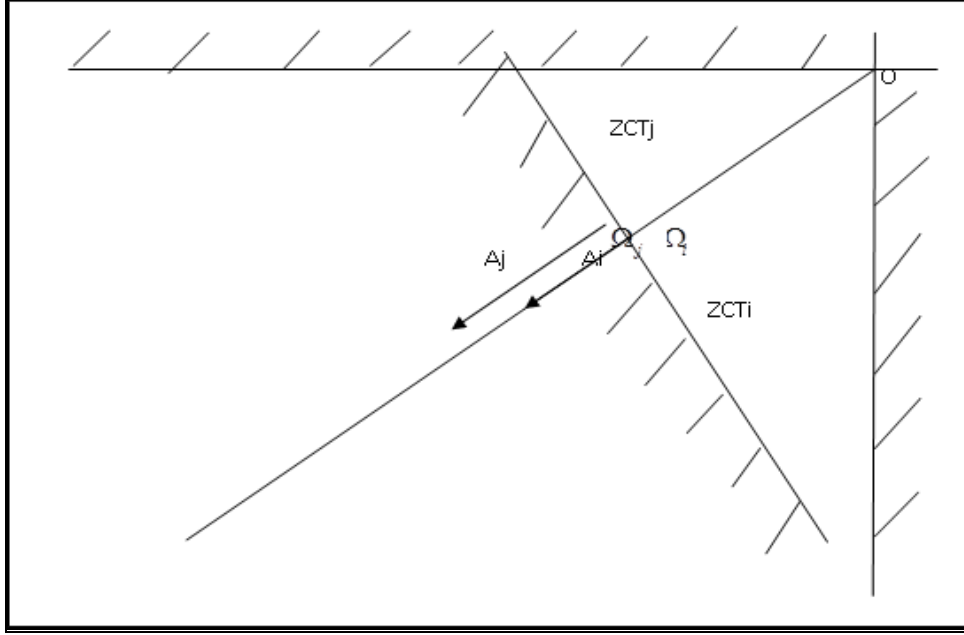


Figure 3.26 : *Illustration proposition 3.16*

$A_i \in C_0^-$ entraine que $b_i \succ 0$.

$A_j \in C_0^-$ et $\Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^-$ entraine que $b_j \succ 0$.

De plus $\Omega_i = \Omega_j$, ce qui donne :

$$\frac{b_i A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} = \frac{b_j}{\alpha} \frac{A_i}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

D'où :

$$b_i = \frac{b_j}{\alpha} \quad (3.30)$$

Montrons que :

$$ZCT_i = ZCT_j.$$

Soit X un élément de ZCT_i .

On a :

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i$$

Comme $\alpha \succ 0$, on a :

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \leq \alpha b_i$$

C'est-à-dire que :

$$\langle \alpha A_i, X \rangle \leq \alpha b_i$$

Or

$$\alpha A_i = A_j \quad \text{et d'après (3.30),}$$

Alors :

$$\alpha b_i = b_j$$

D'où

$$\langle A_j, X \rangle \leq b_j,$$

Signifiant que

$$X \in ZCT_j$$

Donc

$$ZCT_i \subset ZCT_j$$

Soit X un élément de ZCT_j ,

on a :

$$\langle A_j, X \rangle \leq b_j$$

Comme

$$\alpha > 0$$

on a :

$$\frac{1}{\alpha} \langle A_i, X \rangle \leq \frac{b_j}{\alpha}.$$

C'est-à-dire :

$$\langle \frac{1}{\alpha} A_i, X \rangle \leq \frac{b_j}{\alpha}$$

Or

$$A_i = \frac{1}{\alpha} A_j$$

et d'après (4.14), on tire :

$$b_i = \frac{1}{\alpha} b_j$$

On peut donc écrire :

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i \quad \text{signifiant que } X \text{ appartient aussi à } ZCT_i.$$

Donc

$$ZCT_j \subset ZCT_i$$

En résumé, on a :

$$ZCT_i \subset ZCT_j \text{ et } ZCT_j \subset ZCT_i$$

Ce qui veut dire que :

$$ZCT_i = ZCT_j$$

♦

Proposition 3.17

Si $A_i \in C_0^+$ et $A_j \in C_0^+$ tels $\Omega_i \in C_0^-$ et $\Omega_j \in C_0^-$ alors

$$ZCT_i = ZCT_j$$

Démonstration

♣

Considérons la figure

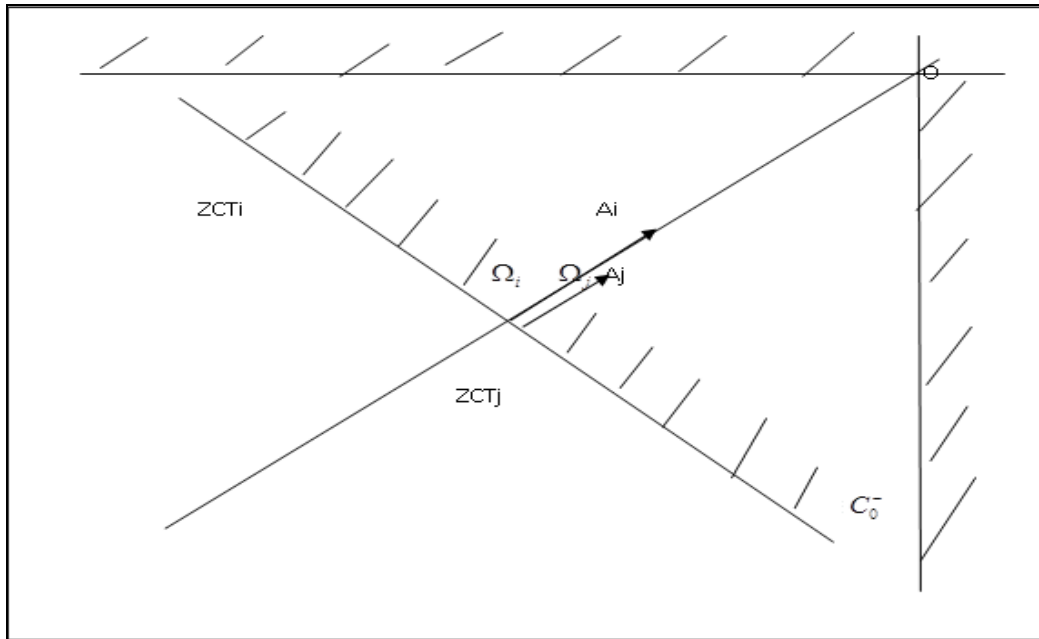


Figure 3.27 : Illustration proposition 3.17

$$A_i \in C_0^+ \text{ et } \Omega_i = \frac{b_i A_i}{\langle A_i, A_i \rangle} \in C_0^-$$

entraîne que :

$$b_i \leq 0$$

De même,

$$A_j \in C_0^+ \quad \text{et} \quad \Omega_j = \frac{b_j A_j}{\langle A_j, A_j \rangle} \in C_0^-,$$

Montrons que :

$$ZCT_i = ZCT_j$$

Soit X un élément de ZCT_i ,

On a :

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i$$

On peut écrire :

$$\langle A_i, X \rangle \leq \frac{b_i}{\alpha},$$

comme

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \leq b_i,$$

Donc

$$\alpha \langle A_i, X \rangle \leq b_j.$$

C'est-à-dire :

$$\langle \alpha A_i, X \rangle \leq b_j$$

soit

$$\langle A_j, X \rangle \leq b_j$$

Car

$$A_j = \alpha A_i$$

ce qui veut dire que X appartient aussi à ZCT_j .

D'où

$$ZCT_i \subset ZCT_j.$$

Soit X un élément de ZCT_j ,

on a :

$$\langle A_j, X \rangle \leq b_j$$

Or d'après (4.14)

$$b_i = \frac{b_j}{\alpha}$$

et comme $\alpha > 0$

on peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha} \langle A_j, X \rangle \leq \frac{b_j}{\alpha} = b_i$$

D'où

$$\left\langle \frac{1}{\alpha} A_j, X \right\rangle \leq b_i.$$

Ce qui veut dire que

$$\langle A_i, X \rangle \leq b_i \quad \text{car} \quad A_j = A_i$$

Donc X est aussi un élément de ZCT_i .

D'où

$$ZCT_j \subset ZCT_i.$$

En résumé, on a :

$$ZCT_i \subset ZCT_j \quad \text{et} \quad ZCT_j \subset ZCT_i$$

Ce qui donne finalement :

$$ZCT_i = ZCT_j$$

♦

3.5.3 Cas où $(\Omega_i \in C_0^-)$ et $(\Omega_j \in C_0^-)$ et $(\Omega_i = \Omega_j)$ et $(A_j = \alpha A_i \text{ avec } \alpha < 0)$

Les deux propositions précédentes restent valables et peuvent s'illustrer à travers la figure 3.28 :

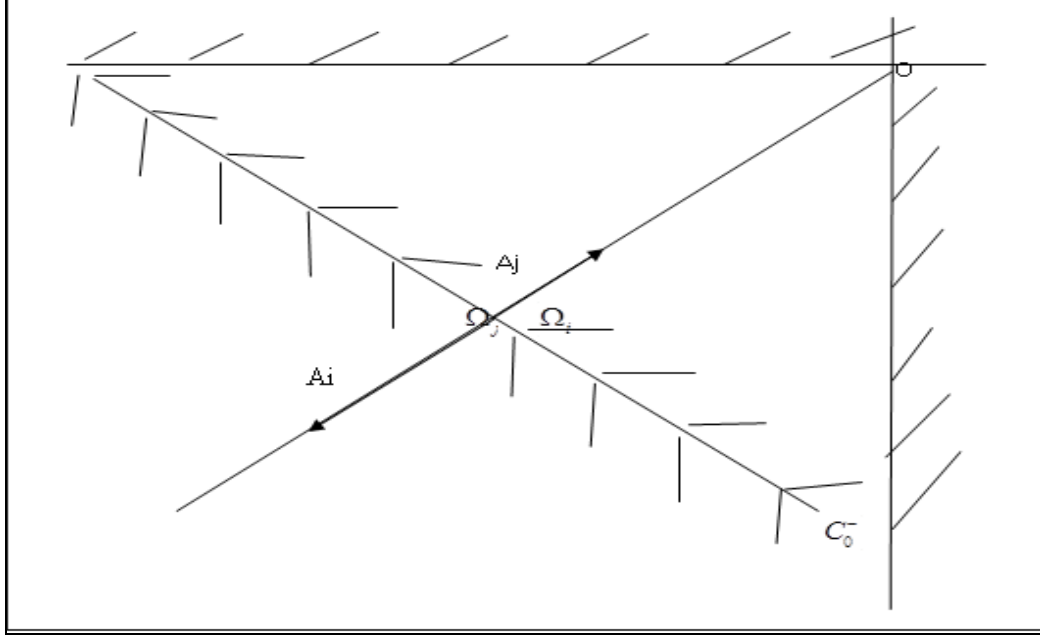


Figure 3.28 : Illustration proposition 3.16 et proposition 3.17 cas ou $\alpha < 0$

3.6 Conclusion

A travers le chapitre 3, les cas réels de détection de redondances de contraintes de problème de PL sont abordés par la nouvelle théorie modélisation topo-géométrique MZ. L'étude de possibilité de redondance entre deux contraintes quelconques générant les zones de contraintes ZCT_i et ZCT_j respectivement délimités par les hyperplans $H(A_i, b_i)$ et $H(A_j, b_j)$ ont fait la première application du modèle. Au terme de ce chapitre, l'étude de cas de parallélisme montre également la possibilité d'existence de redondance des contraintes.

CHAPITRE 4

PSEUDO-PARALLELISME ENTRE DEUX ZONES DE CONSTRAINTES TECHNIQUES DANS C_0^+

4.1 Introduction

Au début du chapitre précédent, montrer que décrire et expliquer le système de contrainte d'un problème PPL revient à étudier les intersections entre $m+1$ objets :

- Les m objets ZCT_i
- L'objet C_0^+

Et nous avons étudiés les m intersections $ZCT_i \cap C_0^+$.

Dans le présent chapitre, nous allons laisser de côté C_0^+ et considérer $\bigcap_{i=1}^m ZCT_i$, c'est-à-dire l'intersection d'un nombre fini de région dans \mathbb{R}^n . De façons exhaustives, on pourrait envisager d'étudier leurs intersections deux à deux, puis trois à trois, etc...Cependant nous allons nous limiter à l'intersection deux à deux de ces objets, toujours dans le but de détecter les redondances et les impossibilités éventuelle, objet de notre thèse.

Du point de vue combinatoire, on a donc à analyser $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ intersections $ZCT_i \cap ZCT_j$ avec $i \in [1, m], j \in [1, m]$ et $i \neq j$.

4.2 Pseudo-parallélisme entre deux zones de contraintes techniques

Cette section décrit le pseudo-parallélisme entre deux zones de contraintes techniques et explique comment ce parallélisme peut dégénérer en une redondance ou une incompatibilité entre les deux zones en question. Ces redondances et incompatibilités peuvent être qualifiés d'absolues en ce sens qu'elles ne dépendent pas des positions relatives des deux zones par rapport à C_0^+ .

Elles sont vraies dans \mathbb{R}^n notons de plus que le terme « parallélisme » décrit une situation topo-géométrique : les frontières des deux zones étudiées sont parallèles dans le vrai sens géométrique, et nous savons que, en conséquences elles ne se rencontrent jamais, c'est à dire que leurs intersections sont vides.

Or, dans la pratique, nous ne nous intéressons pas à toutes les situations possibles et improbables, c'est-à-dire à \mathbb{R}^n , mais uniquement à celles qui sont au moins non-négatives,

c'est à dire au moins C_0^+ . La question suivante se pose alors : « est-ce que le parallélisme topo-géométrique est la seule relation entre deux zones de contraintes techniques qui peuvent engendrer un état de redondance ou d'incompatibilité ? »

Notre réponse à cette question est « NON », et ce chapitre a donc pour objectif de montrer qu'il existe une autre relation, que nous appelons « pseudo parallélisme dans C_0^+ » entre deux zones de contraintes techniques qui peut engendrer le même résultat que le vrai parallélisme.

Pour cela, au lieu d'étudier simplement $ZCT_i \cap ZCT_j$ comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous allons nous focaliser sur l'analyse de l'intersection entre $(ZCT_i \cap C_0^+)$ et $(ZCT_j \cap C_0^+)$. Et il va de soi que nous nous intéressons qu'aux ZCT donc l'intersection avec C_0^+ est non vide. et nous avons dans le chapitre 3, en notant par Ω_i et Ω_j les projections respectives de l'origine O sur ZCT_i et ZCT_j , on obtient les cas suivants :

- Ω_i et Ω_j se trouvent dans C_0^+ .
- Ω_i et Ω_j se trouvent dans $(\bar{C}_0^+ \setminus C_0^-) \setminus \{O\}$.

4.3 Pseudo-parallélisme dans C_0^+

Définition 4.01

Soit ZCT_i et ZCT_j deux ZCT dans un problème de PL donné, de frontières respectives $HP(A_i, b_i)$ et $HP(A_j, b_j)$.

On dit que ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèles dans C_0^+ si :

$$(HP(A_i, b_i) \cap C_0^+) \cap (HP(A_j, b_j) \cap C_0^+) = \emptyset$$

Remarque

D'après cette définition, $HP(A_i, b_i)$ et $HP(A_j, b_j)$ ne sont pas nécessairement disjoint dans \mathbb{R}^n . Pour tout entier, ils ne le sont que dans C_0^+ .

De cette définition, il est logique d'étudier en premier l'objet $HP(A_i, b_i) \cap C_0^+$, qui, comme nous allons le voir dans le présent chapitre est un objet complexe.

Rappelons d'abord que :

$$C_0^+ = C(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

C'est à dire le cône de sommet O et de vecteurs U_1, \dots, U_n .

Et à partir de cette remarque, nous allons commencer par étudier l'intersection d'un hyperplan $HP(A_i, b_i)$ avec un axe de recherche $R(O, U_k)$ ou $R(O, -U_k)$, $k \in [1, n]$.

4.4 Intersection entre $HP(A_i, b_i)$ et $R(O, U_k)$ ou $R(O, -U_k)$

Cette intersection a été étudiée en détails dans le chapitre 3 où l'axe de recherche est noté $R(X_0, V)$.

Notons par $I_{i,k}$ ce point d'intersection, on a :

$$X_0 = 0 \text{ et } V = U_k \text{ ou } V = -U_k$$

Posons $A_i = (a_{i,k})$ $k \in [1, n]$

$$\langle A_i, X_0 \rangle = \langle A_i, 0 \rangle = 0$$

$$\text{Ou} \quad \begin{cases} \langle A_i, V \rangle = \langle A_i, U_k \rangle = a_{i,k} & \text{ou} \\ \langle A_i, V \rangle = \langle A_i, -U_k \rangle = -a_{i,k} \end{cases}$$

4.4.1 Cas où Ω_i se trouve dans $C_0^+ \setminus \{0\}$

Nous pouvons représenter cette situation à travers la figure 4.01 ci-dessous:

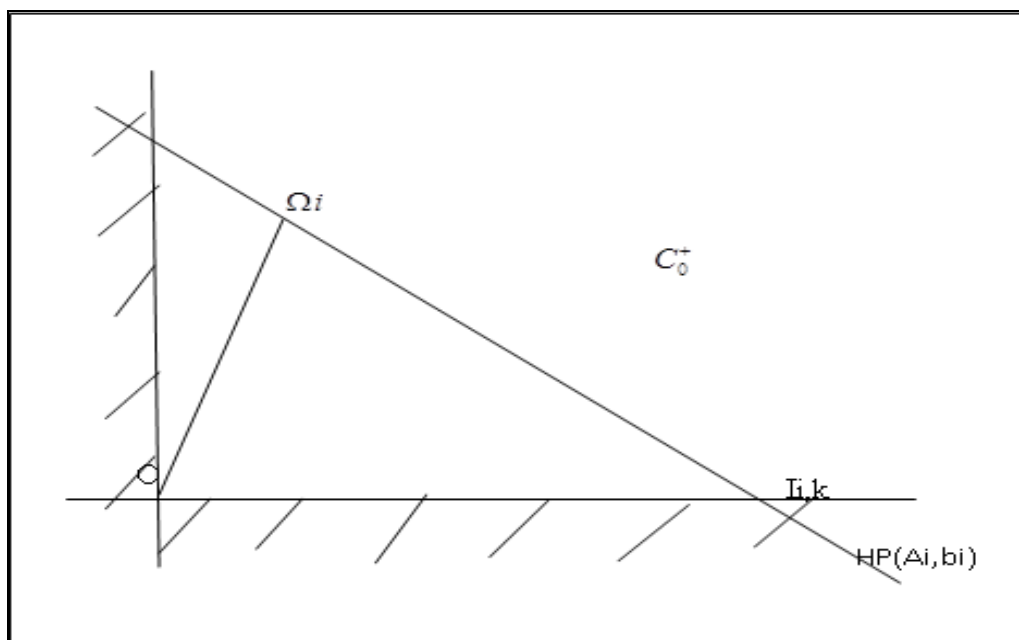


Figure 4.01 : Cas où Ω_i se trouve dans $C_0^+ \setminus \{0\}$

Dans ce cas on a :

- soit $A_i \in C_0^+$

- soit $A_i \in C_0^-$

4.4.1.1 Cas où $A_i \in C_0^+$

Proposition 4.01

Si $a_{i,k} > 0$, alors le point d'intersection entre HP (A_i, b_i) et R (O, U_k) est défini par :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} \cdot U_k \quad (4.01)$$

Tandis que l'intersection entre HP (A_i, b_i) et R $(O, -U_k)$ n'existe pas

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \quad (4.02)$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases}$$

Démonstration :

♣

Comme $A_i \in C_0^+$, on a $O \in ZCT_i$, la figure 4.02 ci-dessous illustre cette situation :

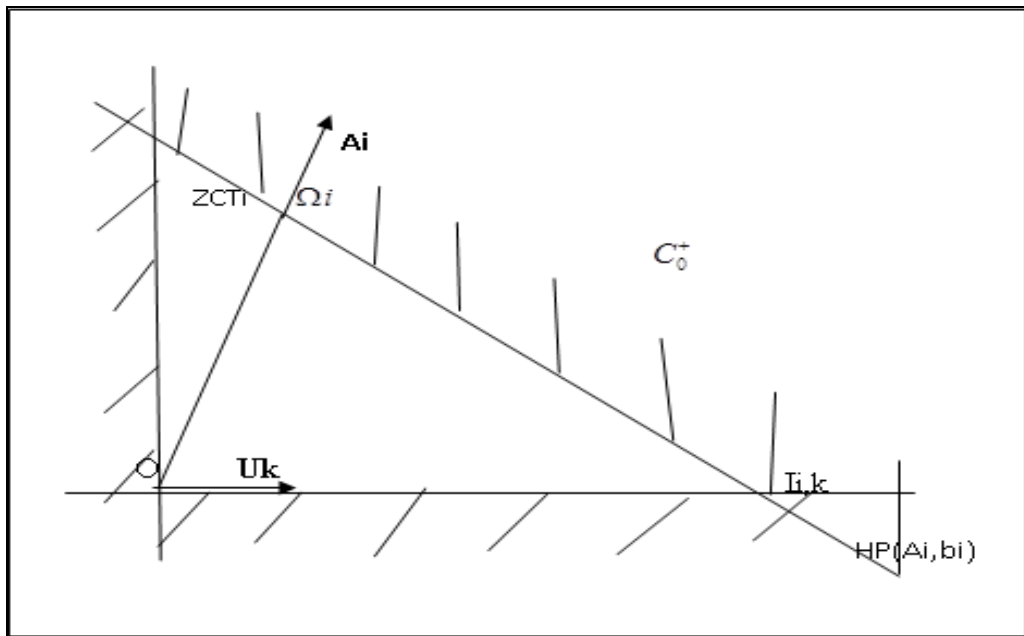


Figure 4.02 : Illustration de la proposition 4.01

On a donc

$$\langle A_i, U_k \rangle = a_{i,k} \geq 0 \quad (4.03)$$

Et

$$\langle A_i, -U_k \rangle = -a_{i,k} \leq 0$$

De plus comme

$$O \in ZCT_i$$

alors

$$\langle A_i, 0 \rangle < b_i \quad (4.04)$$

soit

$$0 < b_i$$

Cherchons I_k et I'_k

Tels que :

$$I_k = HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) \quad \text{et} \quad I'_k = HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k)$$

Donc

$$I_{i,k} = \alpha_{i,k} U_k \quad \text{et} \quad I'_{i,k} = -\alpha'_{i,k} U_k$$

Comme I_k et I'_k appartiennent à $HP(A_i, b_i)$

on a :

$$\langle A_i, I_{i,k} \rangle = b_i \quad \text{et} \quad \langle A_i, I'_{i,k} \rangle = b_i$$

Soit

$$\langle A_i, \alpha_{i,k} U_k \rangle = b_i \quad \text{et} \quad \langle A_i, -\alpha'_{i,k} U_k \rangle = b_i$$

D'où

$$\left\{ \alpha_{i,k} a_{i,k} = b_i \quad \text{et} \quad -\alpha'_{i,k} a_{i,k} = b_i \right\}$$

$$\alpha_{i,k} \geq 0 \text{ et } \alpha'_{i,k} \geq 0. \quad (4.05)$$

D'après (4.04) $b_i > 0$, les sous-cas suivants se présentent :

Comme $a_{i,k} > 0$,

$$\alpha_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} \quad \text{et} \quad \alpha'_{i,k} \quad \text{n'existent pas}$$

alors, le point d'intersection entre $HP(A_i, b_i)$ et $R(O, U_k)$ a pour expression :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} \cdot U_k$$

Tandis que l'intersection entre $HP(A_i, b_i)$ et $R(O, -U_k)$ est vide

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, on a une absurdité $0 = b_i > 0$, donc :

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases}$$

◆

4.4.1.2 Cas où $A_i \in C_0^+$

Les points d'intersection de l'hyperplan $H(A_i, b_i)$ avec les axes de recherche existent.

Notons les par $I_{i,k}$ et $I_{i,k'}$.

Nous pouvons représenter graphiquement cette situation par la figure ci-après:

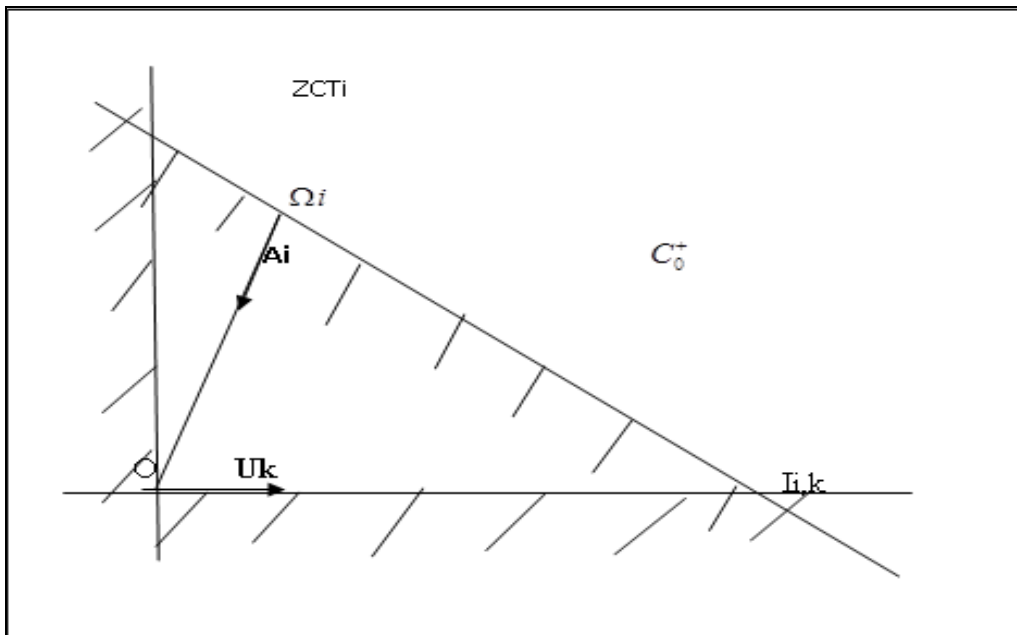


Figure 4.03 : Cas où $A_i \in C_0^+$

Cas où $O \notin ZCT_i$

Nous pouvons établir la proposition suivante.

Proposition 4.02

Si $a_{i,k} < 0$, alors

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

Et on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad (4.06)$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases} \quad (4.07)$$

Démonstration :

♣

$O \notin ZCT_i$ signifie que :

$$\langle A_i, O \rangle > b_i,$$

C'est à dire $0 > b_i$ ou $b_i < 0$

Les relations (4.05) deviennent alors :

Si $a_{i,k} < 0$, alors $\alpha_{i,k} = \frac{b_i}{a_i}$ et $\alpha'_{i,k}$ n'existe pas

et on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Et

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$ alors la relation (4.05) est une absurdité, donc

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases}$$

♦

4.4.2 Cas où $\Omega_i \in (\overline{C_0^+ / C_0^-}) \setminus \{0\}$

Cette situation est représentée par la figure ci-après :

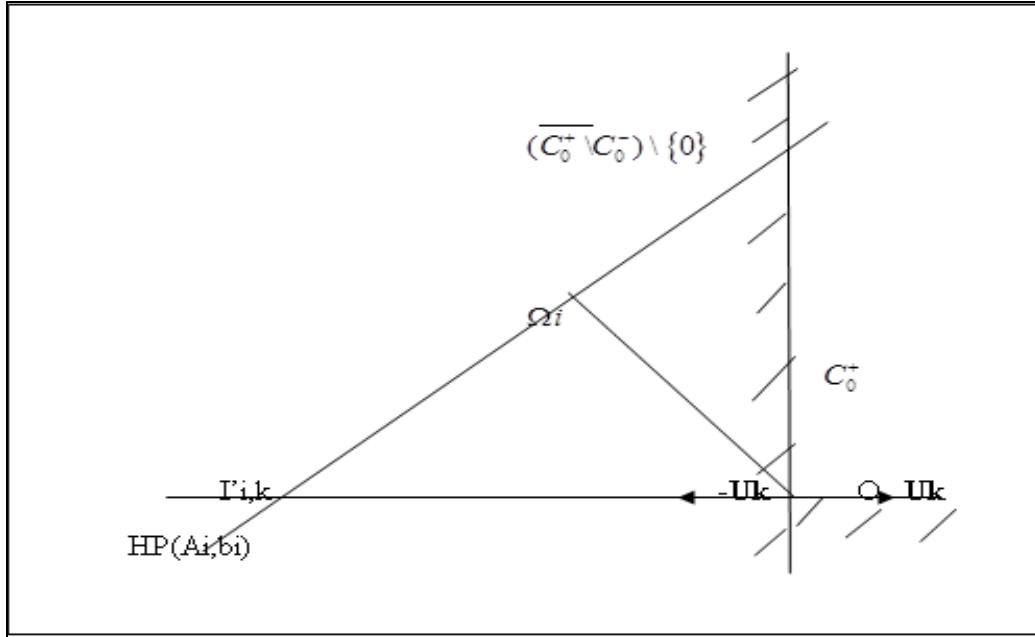


Figure 4.04 : Illustration de la proposition 4.02

4.4.2.1. Cas où $O \in ZCT_i$

De la même façon on a la proposition.

Proposition 4.03

Si $a_{i,k} < 0$, alors

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

Et on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases}$$

Démonstration :

♣

Considérons la figure 4.05 :

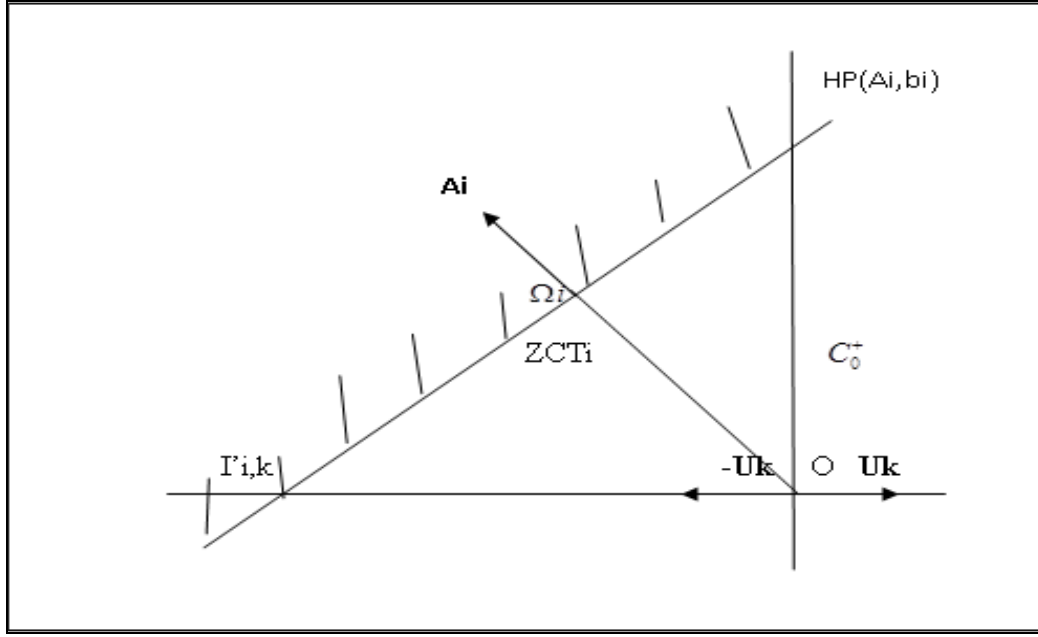


Figure 4.05 : Illustration de la proposition 4.03

Dans ce cas $\langle A_i, O \rangle < b_i$ c'est à dire $b_i > 0$, donc

Comme $\langle A_i, -U_k \rangle \geq 0$ alors $-a_{i,k} \geq 0$, ou $a_{i,k} \leq 0$ (4.08)

Si $a_{i,k} < 0$ alors le point d'intersection entre HP (A_i, b_i) et R $(O, -U_k)$ existe et on a d'après (4.05) :

$$I'_{i,k} = \frac{-b_i}{a_{i,k}} (-U_k),$$

c'est à dire

$$I'_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

alors que

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, l'absurdité des deux équations de (4.05) établit:

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

$$\text{et } HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

♦

4.4.2.2 Cas où $O \notin ZCT_i$

Nous pouvons illustrer cette situation par la figure ci-après :

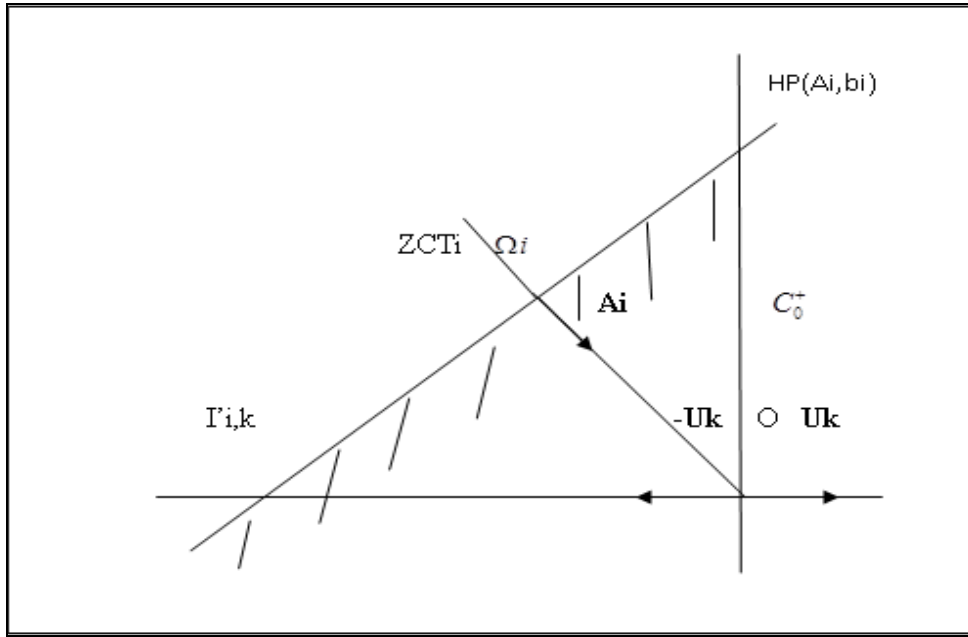


Figure 4.06 : Illustration de la proposition 4.04

Proposition 4.04

Si $a_{i,k} > 0$, alors le point d'intersection $I'_{i,k}$ entre $HP(A_i, b_i)$ et $R(O, -U_k)$ existe et on a :

$$I'_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Tandis que :

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \quad \text{et} \quad HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

Démonstration :

♣

Comme $O \notin ZCT_i$, dans ce cas on a :

$$\langle A_i, 0 \rangle > b_i$$

c'est à dire

$$b_i < 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, -U_k \rangle \leq 0,$$

donc

$$-a_{i,k} \leq 0 \quad \text{ou} \quad a_{i,k} \geq 0$$

soit alors

$$b_i < 0 \quad \text{et} \quad a_{i,k} \geq 0$$

Si $a_{i,k} > 0$, alors le point d'intersection $I'_{i,k}$ entre HP (A_i, b_i) et R $(O, -U_k)$ existe d'après (4.05) et on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Tandis que :

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, on a l'absurdité des deux équations de la relation (4.05), alors :

$$HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \quad \text{et} \quad HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset$$

♦

4.4.3 Cas où $\Omega_i = 0$

Cette situation est illustrée par le graphique 4.07 suivante :

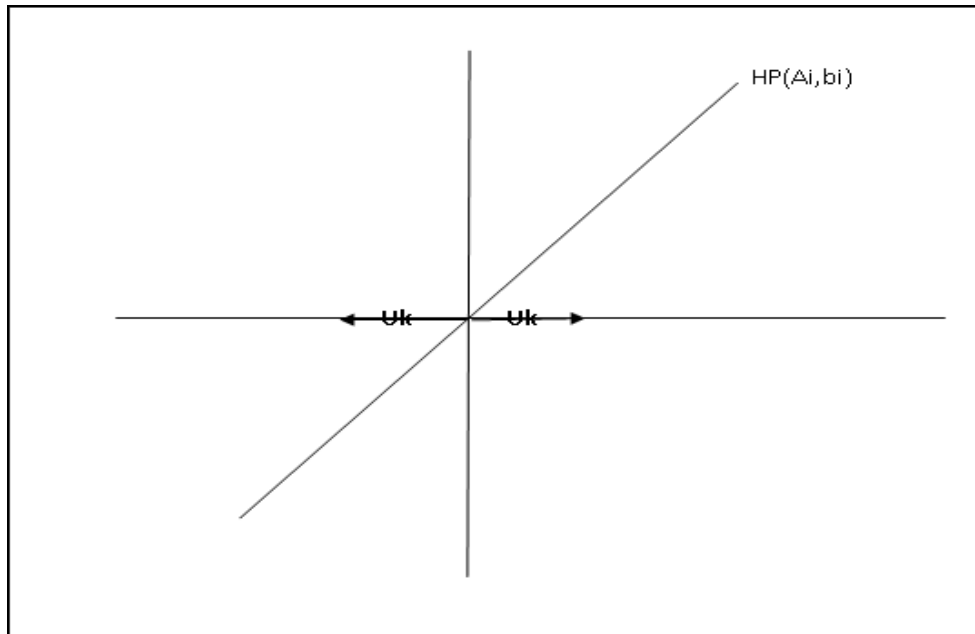


Figure 4.07 : Illustration de la proposition 4.05

Proposition 4.05

Supposons que $\Omega_i = 0$, nous avons les éventualités suivantes :

Si $a_{i,k} \neq 0$, alors

$$I_{i,k} = I'_{i,k} = 0 \quad (4.09)$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors il existe une infinité de $I_{i,k}$ et $I'_{i,k}$.

Donc on a :

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = R(O, U_k) \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = R(O, -U_k) \end{cases}$$

Démonstration :

♣

Si $a_{i,k} > 0$,

alors le point d'intersection $I'_{i,k}$ entre $HP(A_i, b_i)$ et $R(O, U_k)$ existe d'après (4.05)

et on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Comme

$$\Omega_i = 0 = \langle A_i, 0 \rangle = b_i,$$

on a :

$$I_{i,k} = 0 \text{ et donc } I'_{i,k} = 0 \text{ avec l'axe de recherche } R(O, -U_k)$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$R(O, U_k) \text{ et } R(O, -U_k) \text{ sont contenus dans } HP(A_i, b_i)$$

donc on a une infinité de solutions $I_{i,k}$ et $I'_{i,k}$.

♦

4.5 Résumés

De par ce que nous avons vu, on peut établir les concis suivants :

4.5.1 Résumé 1

- Cas où Ω_i se trouve dans $C_0^+ \setminus \{0\}$

Cas où $A_i \in C_0^+ \Rightarrow b_i > 0$ et $a_{i,k} > 0$ ($O \in ZCT_i$)

Si $a_{i,k} > 0$, alors

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

$$\text{et } I_{i,k} \in \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$I_{i,k} \in \emptyset$$

$$I'_{i,k} \in \emptyset$$

- Cas où $A_i \in C_0^+$ et $a_{i,k} < 0$ et $b_i < 0$ ($0 \notin ZCT_i$)

Si $a_{i,k} < 0$, alors

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad \text{et} \quad I'_{i,k} \in \emptyset$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$I_{i,k} \in \emptyset \quad \text{et} \quad I'_{i,k} \in \emptyset$$

- Cas où Ω_i se trouve dans $(C_0^+ / C_0^-) \setminus \{0\}$

Cas où $0 \in ZCT_i$

Alors $b_i > 0$ et $a_{i,k} \leq 0$

Si $a_{i,k} < 0$

Alors $I_{i,k} \in \emptyset$ donc $I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$

Si $a_{i,k} = 0$

$$I_{i,k} \in \emptyset \quad \text{et} \quad I'_{i,k} \in \emptyset$$

- Cas où $0 \notin ZCT_i$ c'est-à-dire $b_i < 0$ et $a_{i,k} \geq 0$

Si $a_{i,k} > 0$

Alors

$$I_{i,k} \in \emptyset \quad \text{et} \quad I'_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$I_{i,k} \in \emptyset \quad \text{et} \quad I'_{i,k} \in \emptyset$$

Cas où $\Omega_i = 0$

Si $a_{i,k} \neq 0$, alors

$$I_{i,k} = I'_{i,k} = 0$$

Si $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = R(O, U_k) \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = R(O, -U_k) \end{cases}$$

Toutefois ces différents éléments peuvent être encore synthétisés en un second résumé.

4.5.2 Résumé 2

Dans la pratique, les données immédiatement accessibles sont A_i et b_i , ou plus précisément $a_{i,k}$, $k \in [1; n]$ et les b_i .

Il est donc logique de classifier tous ces cas en fonction de $a_{i,k}$ et b_i .

- Cas où $b_i > 0$ et $a_{i,k} > 0$

Le point d'intersection $I_{i,k}$ de l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$ et l'axe de recherche $R(O, U_k)$ est défini par :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

- Cas où $b_i < 0$ et $a_{i,k} < 0$

Le point d'intersection $I_{i,k}$ de l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$ et l'axe de recherche $R(O, U_k)$ est défini par :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

- Cas où $b_i < 0$ et $a_{i,k} > 0$

Le point d'intersection $I_{i,k}$ de l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$ et l'axe de recherche $R(O, U_k)$ est défini par :

$$I'_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 4.06

Soit $I_{i,k}$ l'intersection de HP (A_i, b_i) avec R (O, U_k) et $I'_{i,k}$ son intersection avec R ($O, -U_k$).

- Si b_i et $a_{i,k}$ sont non nuls et de même signe, alors :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

- Si b_i et $a_{i,k}$ sont non nuls et de signe contraire, alors :

$$I'_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

- Si $b_i = 0$ et $a_{i,k} \neq 0$, alors

$$I_{i,k} = I'_{i,k} = 0$$

- Si $b_i = 0$ et $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} R(O, U_k) \subset HP(A_i, b_i) \\ R(O, -U_k) \subset HP(A_i, b_i) \end{cases}$$

- Si $b_i \neq 0$ et $a_{i,k} = 0$, alors

$$\begin{cases} HP(A_i, b_i) \cap R(O, U_k) = \emptyset \\ HP(A_i, b_i) \cap R(O, -U_k) = \emptyset \end{cases}$$

Comme nous le verrons dans les sections qui vont suivre, les points $I_{i,k}$ et $I'_{i,k}$ jouent un rôle très important dans l'analyse des pseudo-parallélismes entre zones de contraintes techniques.

Proposition 4.07

Notons par Y_i l'ensemble de tous les points d'intersection $I_{i,k}$ et $I'_{i,k}$ de l'hyperplan HP (A_i, b_i) respectivement avec les axes de recherche R (O, U_k) et R ($O, -U_k$) pour une ressource i donnée, c'est-à-dire à ZCT _{i} .

On a :

$$\text{Card}(Y_i) \leq n$$

Démonstration :

♣

D'après la proposition 4.06, pour chaque dimension k associée à l'axe de recherche R(O, U_k) on a les possibilités suivantes :

- Soit $I_{i,k}$ existe.
- Soit I'_{ik} existe.
- Soit ni $I_{i,k}$ ni I'_{ik} n'existent.

Cela signifie que pour chaque dimension k, on a au plus une intersection avec l'axe (O, U_k).
Et il se peut que cette intersection n'existe pas.

Notons donc par n_k le nombre d'intersection avec l'axe de recherche R (O, U_k), on a :

$$0 \leq n_k \leq 1$$

Ce qui donne :

$$\text{Card}(Y_i) = \sum_{k=1}^n n_k$$

$$\sum_{k=1}^n 0 \leq \text{Card}(Y_i) \leq \sum_{k=1}^n n_k$$

$$\Rightarrow 0 \leq \text{Card}(Y_i) \leq n$$

♦

En notant respectivement par J_i et J'_i , le nombre de point d'intersection avec les axes de recherche R (O, U_k) et R (O, $-U_k$), on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.01

$$0 \leq \text{card}(J_i) + \text{card}(J'_i) \leq n$$

Démonstration :

♣

En notant respectivement par n_k et n'_k le nombre de points d'intersection de $HP(A_i, b_i)$ avec les axes de recherche R (O, U_k) et R (O, $-U_k$), on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (n_k + n'_k) \leq \sum_{k=1}^n 1$$

Donc

$$0 \leq \sum_{k=1}^n n_k + \sum_{k=1}^n n'_k \leq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \text{card}(J_i) + \text{card}(J'_i) \leq n$$

♦

En résumé à chaque ressource i peut correspondre au plus n points d'intersection $I_{i,k}$ ou $I'_{i,k}$ avec les n axes dimensionnels.

Par la suite, nous allons discerner, pour chaque ressource donnée i , les conditions de pseudo-parallélisme avec les autres ressources j .

4.6 Pseudo- parallélisme pour une contrainte donnée « i »

Du point de vue topo-géométrique, la frontière $HP(A_i, b_i)$ de la zone de contrainte ZCT_i peut être placé dans l'espace \mathbb{R}^n de différentes façons suivantes :

4.6.1 Disposition de $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i

Nous pouvons voir les sous-cas

4.6.1.1 $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i est dans C_0^+

Représentons graphiquement cette situation à travers la figure 4.08 suivante :

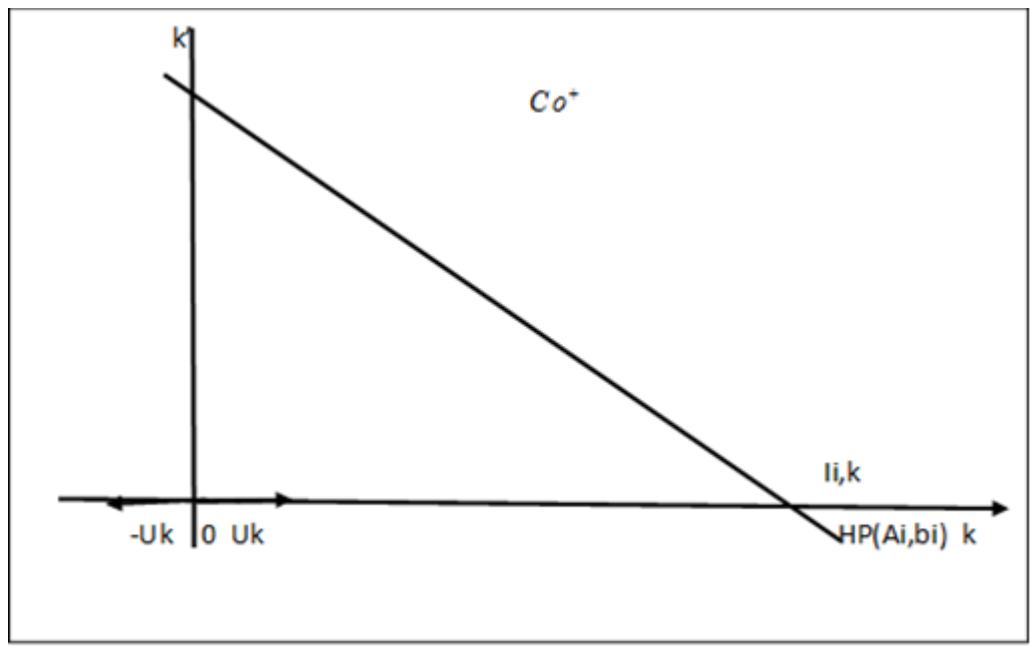


Figure 4.08 : $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i est dans C_0^+

C'est le cas où $Card(J_i) = n$,

c'est-à-dire $I_{i,k}$ existe pour un k donné,

Donc

$$Card(J'_i) = \Phi$$

4.6.1.2 $H(A_i, b_i)$ est parallèle aux axes de recherche $R(O, U_k)$ et $R(O, -U_k)$

La figure 4.09 illustre ce cas :

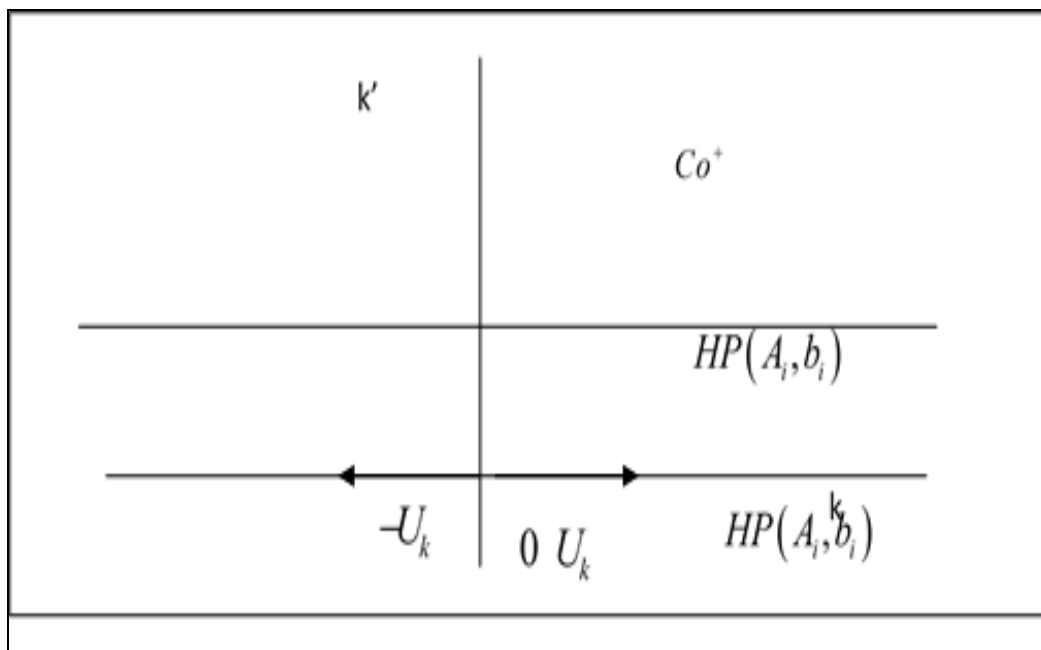


Figure 4.09 : $H(A_i, b_i)$ est parallèle aux axes de recherche $R(O, U_k)$ et $R(O, -U_k)$

C'est le cas où $I_{i,k}$ et $I'_{i,k}$ n'existent pas pour un k donné.

4.6.1.3 La projection Ω_i de O sur $H(A_i, b_i)$ est 0

Cette situation est représentée par la figure suivante :

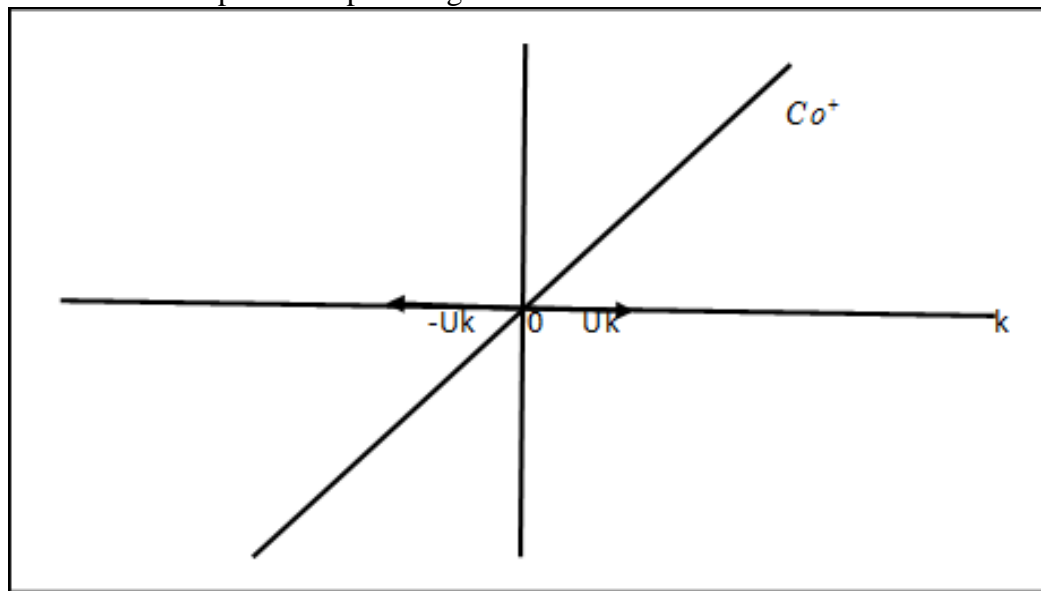


Figure 4.10 : projection Ω_i de O sur $H(A_i, b_i) = 0$

C'est le cas où $I_{i,k} = I'_{i,k} = 0$ pour un k donné.

4.6.1.4 HP (A_i, b_i) de ZCT_i est dans $\overline{C}_0^+ \setminus C_0^-$

Illustrons la disposition de l'hyperplan HP(A_i,b_i) à travers et son intersection avec les axes de recherches R(O,U_k) par la figure 4.11 ci-après

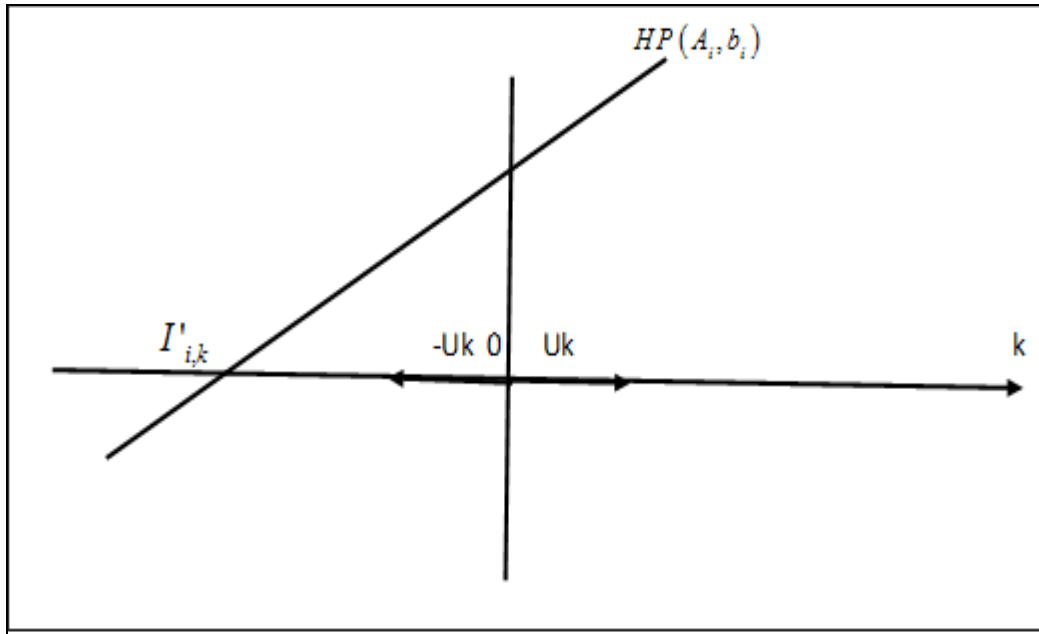


Figure 4.11 : $HP(A_i, b_i)$ de ZCT_i est dans $\overline{C}_0^+ \setminus C_0^-$

C'est le cas où $Card(J'_i) = n$

c'est-à-dire

$I'_{i,k}$ existe pour un k donné

Donc

$$Card(J_i) = \Phi.$$

Pour chacune de ces quatre entrées du zone de contrainte technique ZCT_i, nous allons décrire les zones de contraintes techniques ZCT_j qui lui sont pseudo-parallèles.

Considérons dans ce cas les possibilités d'intersections de l'hyperplan HP(A_i, b_i) frontière de la zone de contrainte technique avec l'axe de recherche R(O, U_k).

4.6.2 Cas où $HP(A_i, b_i)$ intersecte tous les $R(O, U_k)$

Reprenons la figure qui illustre cette situation,

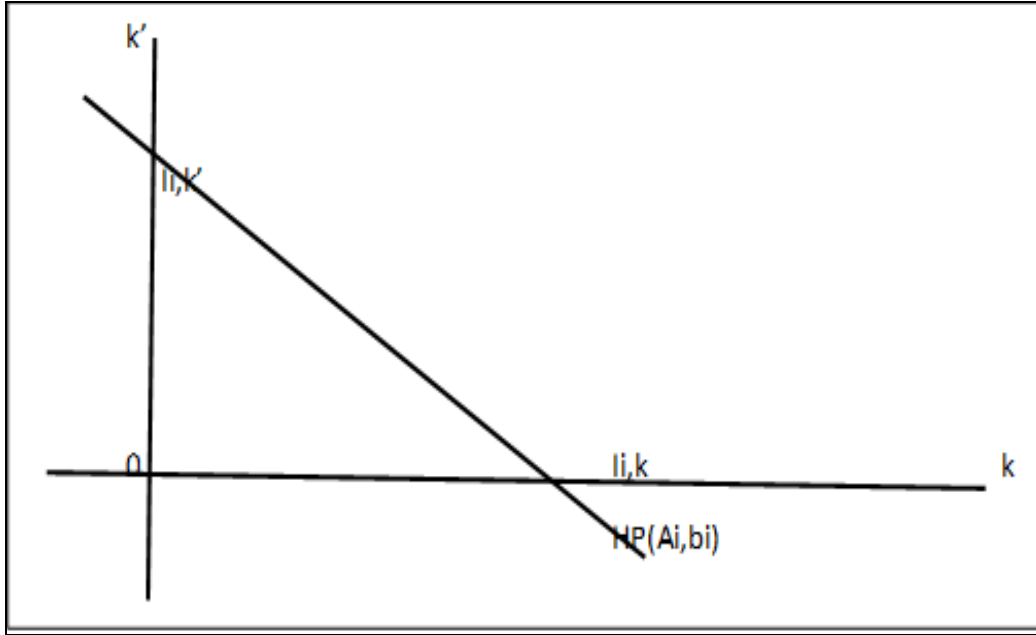


Figure 4.12 : $HP(A_i, b_i)$ intersecte tous les $R(O, U_k)$

Dans ce cas, il existe deux types de ZCT_j qui sont pseudo- parallèles à ZCT_i :

- Celles qui sont plus proches de O que ZCT_i .
- Celles qui sont plus éloignés O que ZCT_j .

Définition 4.02

On dit que la contrainte ZCT_j associé à l'hyperplan $HP(A_j, b_j)$ est plus proche de O que la contrainte ZCT_i associé à l'hyperplan $H(A_i, b_i)$ si la projection Ω_j de O sur ZCT_j est plus proche de O que la projection de Ω_i de O sur ZCT_i .

Nous allons développer le cas le plus proche de O.

4.6.3 Pseudo-parallélisme entre ZCT_i et ZCT_j plus proche de O

Dans ce cas, on a les lemmes suivants :

Lemme 4.01

$$HP(A_i, b_i) \cap Co^+ = conv(J_i)$$

$$HP(A_j, b_j) \cap Co^+ = conv(J_j)$$

$\text{conv}(J_i)$ et $\text{conv}(J_j)$ étant respectivement la partie convexe de l'ensemble (J_i) et l'ensemble (J_j) .

Démonstration :

♣

Il suffit de démontrer l'égalité pour le cas de i .

Soit X un élément de $HP(A_i, b_i) \cap Co^+ \quad X \in Co^+.$

X est de la forme :

$$X = \sum_{k=1}^n x_k U_k \quad \text{avec } x_k \text{ non-négative}$$

Or pour chaque $k \in [1, n]$ on a d'après (4.03) :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad \text{avec} \quad \frac{b_i}{a_{i,k}} > 0$$

On déduit que :

$$U_k = \frac{a_{i,k}}{b_i} I_{i,k}$$

On a alors :

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \frac{a_{i,k}}{b_i} I_{i,k}$$

Posons

$$\alpha_{i,k} = x_k \frac{a_{i,k}}{b_i}$$

Comme x_k et $\frac{a_{i,k}}{b_i}$ sont ≥ 0 alors $\alpha_{i,k} \geq 0$

Nous pouvons alors détailler les calculs en évaluant la valeur des sommes des coefficients.

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Calculons $\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} &= \sum_{k=1}^n x_k \frac{a_{i,k}}{b_i} \\
&= \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} \\
&= \frac{1}{b_i} \langle A_i, X \rangle
\end{aligned}$$

Or

$$X \in HP(A_i, b_i)$$

D'où

$$\langle A_i, X \rangle = b_i$$

Et on tire :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} = 1$$

En résumé,

$$X = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} I_{i,k} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} = 1$$

signifiant que :

$$X \in \text{conv}(J_i)$$

Réciproquement,

Soit $X \in \text{conv}(J_i)$, X est de la forme :

$$X = \sum_{k=1}^n \alpha_k I_{i,k}$$

$$\text{Avec} \quad \alpha_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

Or on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad \forall k \in [1, n]$$

$$\text{avec} \quad \frac{b_i}{a_{i,k}} > 0$$

D'où

$$X = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \tag{4.10}$$

Posons

$$\begin{aligned}
X_k &= \alpha_k \frac{b_i}{a_{i,k}} \\
\Rightarrow \langle A_i, X \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \frac{b_i}{a_{i,k}} \right) a_{i,k} \\
&= b_i \sum_{k=1}^n \alpha_k
\end{aligned}$$

Or d'après (4.09)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 ,$$

Ce qui donne :

$$\langle A_i, X \rangle = b_i ,$$

Ce qui signifie

$$X \in HP(A_i, b_i)$$

De plus

$$\alpha_k > 0 \quad \text{et} \quad \frac{b_i}{a_{i,k}} \geq 0$$

$$\text{d'où} \quad x_k \geq 0$$

Donc

$$X_k = \alpha_k \frac{b_i}{a_{i,k}} \quad \text{et} \quad X \in Co^+$$

Plus précisément :

$$X \in HP(A_i, b_i) \cap C_0^+$$

Et on a finalement :

$$\text{conv}(J_i) \subset HP(A_i, b_i) \cap C_0^+$$

Ce qui démontre que :

$$HP(A_i, b_i) \cap C_0^+ = \text{conv}(J_i).$$

♦

Théorème 4.01

Si tous les $I_{j,k}$ existent et que pour tout k , $I_{j,k}$ est plus proche de O que $I_{i,k}$, alors ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallelè dans C_0^+ .

Démonstration

♣

Illustrons ce cas par la figure 4.13:

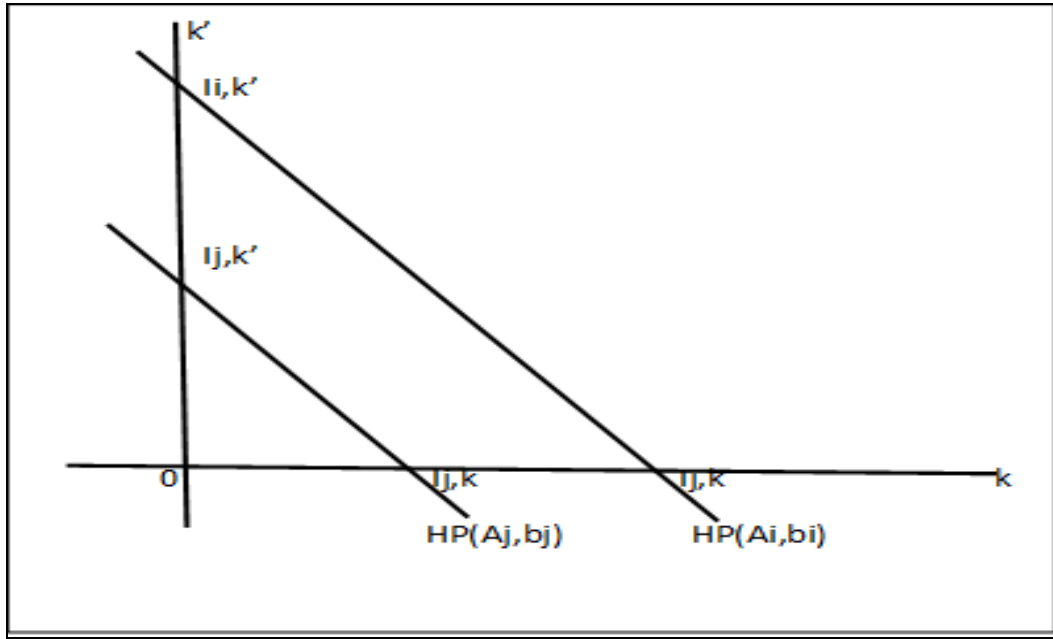


Figure 4.13 : Illustration du théorème 4.01

Dans cette situation on a :

$$HP(A_i, b_i) \cap C_0^+ = \text{conv}(J_i) \quad \text{et} \quad HP(A_j, b_j) \cap C_0^+ = \text{conv}(J_j)$$

Supposons qu'il existe un point

$$X = (x_k), \quad k \in [1, n] \quad \text{tel que :}$$

$$X \in (HP(A_i, b_i) \cap C_0^+) \cap (HP(A_j, b_j) \cap C_0^+)$$

c'est-à-dire

$$X \in \text{conv}(J_i) \quad \text{et} \quad X \in \text{conv}(J_j)$$

On a alors :

$$X = \sum_{k=1}^n x_{i,k} I_{i,k}$$

$$\text{avec } x_{i,k} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_{i,k} = 1 \quad (4.11)$$

Et

$$X = \sum_{k=1}^n x_{j,k} I_{j,k} \quad \text{avec} \quad x_{j,k} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_{j,k} = 1 \quad (4.12)$$

Comme pour tout $k \in [1 ; n]$, on a :

$$I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

et

$$I_{j,k} = \frac{b_j}{a_{j,k}} U_k$$

L'expression de X devient :

$$X = \sum_{k=1}^n x_{i,k} \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

$$X = \sum_{k=1}^n x_{j,k} \frac{b_j}{a_{j,k}} U_k$$

Comme $(U_k), \quad k \in [1; n]$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , on a par identification des différentes composantes que :

Pour tout $k \in [1; n]$, on a :

$$x_{i,k} \frac{b_i}{a_{i,k}} = x_{j,k} \frac{b_j}{a_{j,k}} \quad (4.13)$$

Comme $I_{j,k}$ est supposé plus proche de O que $I_{i,k}$.

Ce qui veut dire que

$$\frac{b_j}{a_{j,k}} U_k \quad \text{est plus proche de O que} \quad \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Donc

$$\frac{b_j}{a_{j,k}} < \frac{b_i}{a_{i,k}} \quad \text{pour tout } k \in [1; n]$$

Comme

$$x_{i,k} > 0 \quad \text{pour tout } k \in [1, n],$$

on a :

$$x_{i,k} \frac{b_j}{a_{i,j}} < x_{i,k} \frac{b_i}{a_{i,k}}$$

D'où, d'après (4.13),

$$x_{i,k} \frac{b_j}{a_{j,k}} < x_{j,k} \frac{b_j}{a_{j,k}}$$

Et on déduit que :

$$x_{i,k} < x_{j,k} \quad \text{pour tout } k \in [1, n]$$

Soit, en sommant à gauche et à droite

$$\sum_{k=1}^n x_{i,k} < \sum_{k=1}^n x_{j,k}$$

Et finalement d'après (4.11) et (4.12) on a :

$$1 < 1$$

Ce qui est absurde.

Aucun X n'appartient à $\text{conv}(J_i) \cap \text{conv}(J_j)$

Ce qui démontre :

$$\text{conv}(J_i) \cap \text{conv}(J_j) = \emptyset$$

Engendrant que :

$$(HP(A_i, b_i) \cap C_0^+) \cap (HP(A_j, b_j) \cap C_0^+) = \emptyset$$

C'est-à-dire les deux zones de contraintes techniques ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèles.

♦

4.6.4 Pseudo-parallélisme entre ZCT_i et ZCT_j plus éloignés de O

Après avoir étudié le pseudo-parallélisme des zones de contraintes plus proche de O , nous allons maintenant analyser le comportement du pseudo-parallélisme pour les contraintes les plus éloignées de O . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.02

Si tous les $I_{j,k}$ existent et que pour tout k , $I_{j,k}$ est plus éloignés de O que $I_{i,k}$ alors la zone de contrainte ZCT_i délimité par l'hyperplan $H(A_i, b_i)$ et la zone de contrainte ZCT_j délimité par l'hyperplan $H(A_j, b_j)$ sont pseudo-parallèle dans Co^+ .

Démonstration :

♣

Ce cas est identique au cas précédent on intervertissant le rôle de i et celui de j et s'illustre par la figure ci-après :

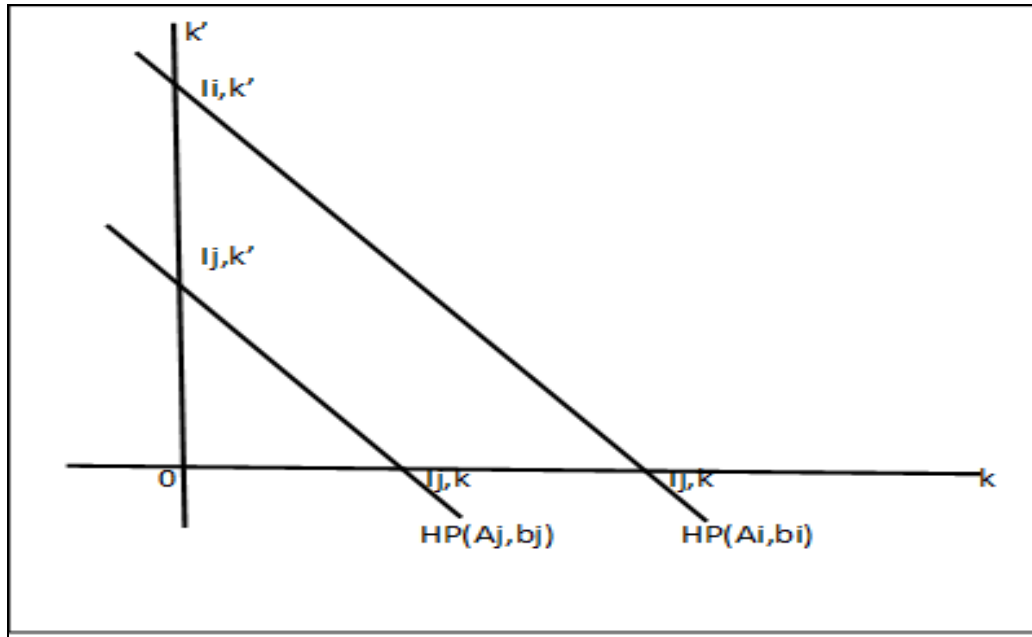


Figure 4.14 : Illustration du théorème 4.02

Dans cette situation on a :

$$HP(A_i, b_i) \cap Co^+ = \text{conv}(J_i) \quad \text{et} \quad HP(A_j, b_j) \cap Co^+ = \text{conv}(J_j)$$

Supposons qu'il existe un point

$$X = (x_k), \quad k \in [1; n] \quad \text{tel que} \quad X \in (HP(A_j, b_j) \cap Co^+) \cap (HP(A_i, b_i) \cap Co^+)$$

C'est-à-dire

$$X \in \text{conv}(J_j) \quad \text{et} \quad X \in \text{conv}(J_i)$$

On a alors :

$$X = \sum_{k=1}^n x_{j,k} I_{j,k} \quad \text{avec} \quad x_{j,k} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_{j,k} = 1 \quad (4.14)$$

Et

$$X = \sum_{k=1}^n x_{i,k} I_{i,k} \quad \text{avec} \quad x_{i,k} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_{i,k} = 1 \quad (4.15)$$

Comme

$$I_{j,k} = \frac{b_j}{a_{j,k}} U_k \quad \text{et} \quad I_{i,k} = \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad \text{pour tout } k,$$

On a alors :

$$X = \sum_{k=1}^n x_{jk} \frac{b_j}{a_{j,k}} U_k \quad \text{et} \quad X = \sum_{k=1}^n x_{i,k} \frac{b_i}{a_{i,k}} U_k$$

Comme $(U_k) \quad k \in [1; n]$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , on a

Pour tout $k \in [1, n]$:

$$x_{jk} \frac{b_i}{a_{i,k}} = x_{i,k} \frac{b_i}{a_{i,k}} \quad (4.16)$$

Or $I_{i,k}$ est supposé plus proche de O que $I_{j,k}$.

Signifie que :

$$\frac{b_i}{a_{i,k}} U_k \quad \text{est plus proche de O que} \quad \frac{b_j}{a_{j,k}} U_k$$

Donc

$$\frac{b_i}{a_{i,k}} < \frac{b_j}{a_{j,k}} \quad \text{pour tout } k \in [1, n]$$

Comme

$$x_{j,k} > 0 \quad \text{pour tout } k \in [1, n],$$

On a :

$$x_{j,k} \frac{b_i}{a_{i,k}} < x_{j,k} \frac{b_j}{a_{j,k}}$$

D'où, d'après (4.16),

$$x_{j,k} \frac{b_j}{a_{j,k}} < x_{i,k} \frac{b_j}{a_{j,k}}$$

Donc

$$x_{j,k} < x_{i,k} \quad \text{pour tout } k \in [1, n]$$

Soit

$$\sum_{k=1}^n x_{j,k} < \sum_{k=1}^n x_{i,k}$$

Et finalement d'après (4.14) et (4.15) on a :

$$1 < 1$$

Ce qui est absurde

Ce qui démontre

$$\text{conv}(J_j) \cap \text{conv}(J_i) = \emptyset$$

Signifiant que

$$HP(A_j, b_j) \cap (Co^+) \cap (HP(A_i, b_i) \cap (Co^+)) = \emptyset$$

C'est-à-dire que

Les deux zones de contraintes techniques ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèles

♦

Corollaire 4.02

Si tous les $I_{j,k}$ existent sauf pour un $k_0 \in [1 ; n]$ et que aucun $I'_{j,k}$ n'existe. Si pour les $I_{j,k}$ qui existent, $I_{j,k}$ est plus éloigné de O que $I_{i,k}$ alors ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèle dans C_0^+ .

Démonstration :

♣

On peut illustrer ce cas par la figure ci-après :

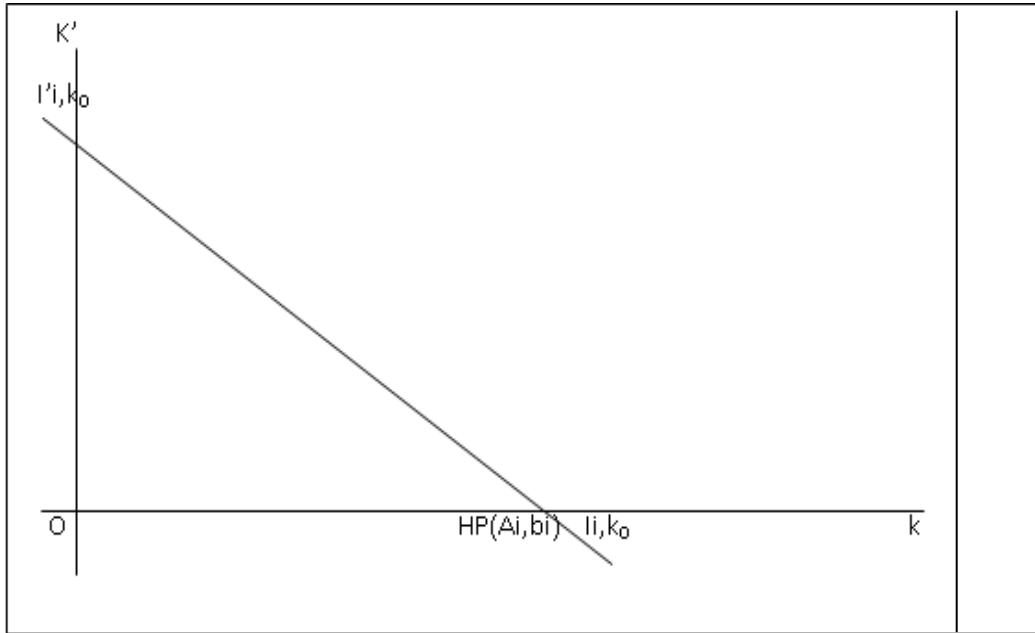


Figure 4.15 : Illustration du corollaire 4.02

On sait que si I_{j,k_0} existe alors :

$$I_{j,k_0} = \frac{b_j}{a_{j,k_0}} U_{k_0} = \alpha_{j,k_0} U_{k_0}$$

En posant

$$\alpha_{j,k_0} = \frac{b_j}{a_{j,k_0}}$$

I_{j,k_0} n'existe pas signifie que:

$$a_{j,k_0} \rightarrow 0 \text{ en gardant le meme signe car } I_{j,k} \text{ n'existe pas}$$

donc

$$\alpha_{j,k_0} \rightarrow +\infty$$

Or

$$I_{j,k} \text{ est plus éloigné } I_{i,k},$$

C'est-à-dire :

$$I_{j,k} \succ I_{i,k}$$

Cette inégalité reste vraie si $a_{j,k_0} \rightarrow 0$ c'est-à-dire $\alpha_{j,k_0} \rightarrow +\infty$

Donc pour tout k , on a:

$$I_{j,k} \text{ est plus éloigné que } I_{i,k}$$

D'après le théorème 4.02, on a la zone de contrainte ZCT_j pseudo-parallèle à la zone de contrainte ZCT_i .

♦

Corollaire 4.03

S'il n'existe aucun $I'_{j,k}$ et si pour chaque $I_{j,k}$ qui existe, $I_{j,k}$ est plus éloigné de O que $I_{i,k}$ alors ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèle dans C_0^+ .

Démonstration :

♣

Ce cas est une extension du corollaire 4.02. Au lieu d'avoir un seul k_0 , on a $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$ avec $r < n$ tels que $I'_{j,k_1}, I'_{j,k_2}, I'_{j,k_3}, \dots, I'_{j,k_r}$ n'existent pas.

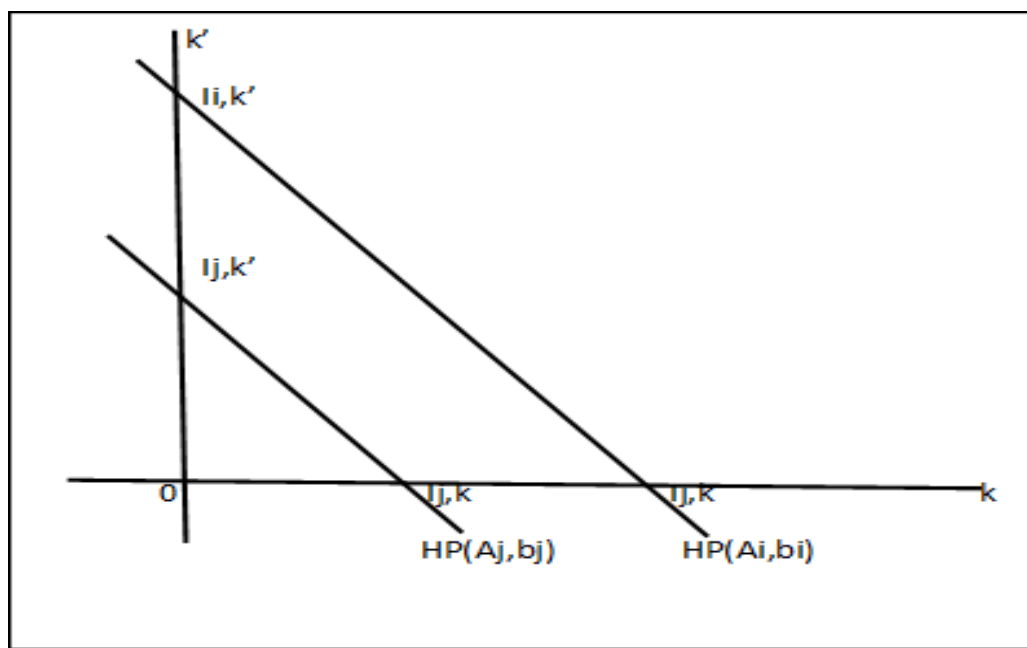


Figure 4.16 : Illustration du corollaire 4.03

♦

4.6.5 Cas où HP (A_i, b_i) intersecte $R(O, U_{k1}), R(O, U_{k2}), \dots, R(O, U_{kn})$ et pour les autres k

On peut illustrer cette situation par la figure ci-dessous :

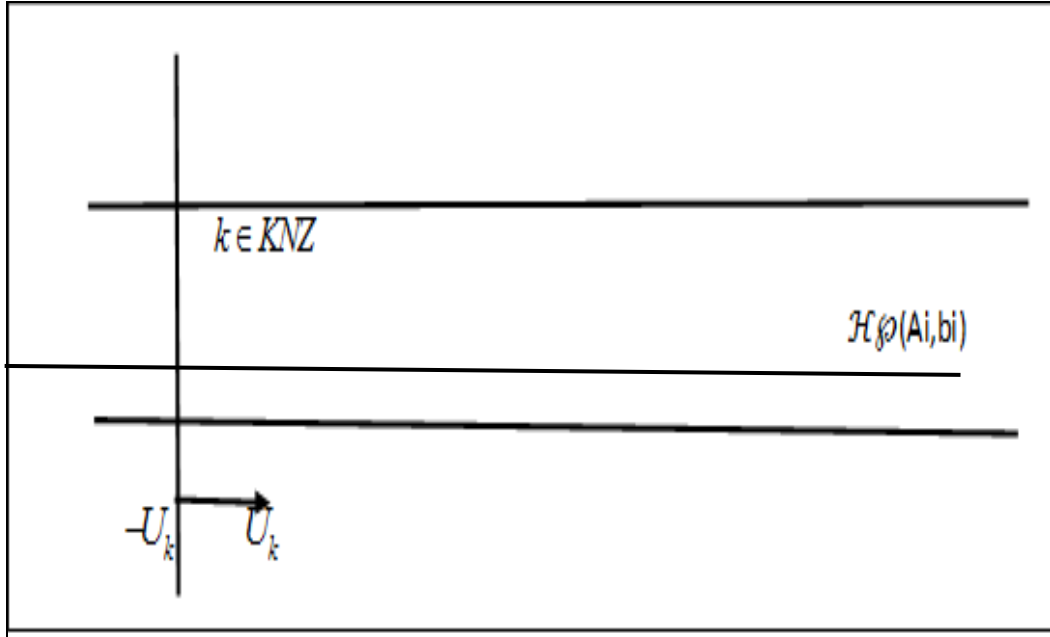


Figure 4.17 : HP (A_i, b_i) intersecte $R(O, U_{k1}), R(O, U_{k2}), \dots, R(O, U_{kn})$ et pour les autres k

C'est le cas où $b_i \neq 0$ et qu'il existe certains k pour lesquels $a_{i,k} = 0$

On a donc

$$a_{i,k1} \neq 0, a_{i,k2} \neq 0, \dots, a_{i,kn} \neq 0$$

Pour tous les autres k ,

$$a_{i,k} = 0$$

Notons

$$KNZ_i = \{ k / 1 \leq k \leq n \text{ et } a_{i,k} > 0 \} \quad \text{et} \quad KZ_i = \{ k / 1 \leq k \leq n \text{ et } a_{i,k} = 0 \}$$

On a :

$$KNZ \cup KZ = [1, n]$$

Remarquons d'abord que

$$KNZ_i = \emptyset \quad \text{équivaldrait à} \quad A_i = 0$$

Ce qui est impossible.

Donc on a toujours : $KNZ_i \neq \emptyset$

De plus comme $I_{i,k}$ existe pour tout $k \in \text{KNZ}_i$, $a_{i,k} b_i > 0$

Rappelons que

$$I_{i,k} = a_{i,k} U_k \quad \forall k \in \text{KNZ}$$

Comme pour le cas précédent, il existe deux types de zone de contrainte ZCT_j qui sont pseudo-parallèle avec la zone de contrainte ZCT_i :

Celles qui sont plus proches de O que ZCT_i .

Celles qui sont plus éloignés de O que ZCT_i .

Proposition 4.08

Si pour tout $k \in \text{KNZ}_i$, $I_{i,k}$ existe et que $I_{j,k}$ est plus proche de O que $I_{i,k}$.

Si pour certains $k \in \text{KZ}_i$, $I_{i,k}$ existe et pour tous les autres ni $I_{j,k}$ ni $I'_{j,k}$ n'existe.

Alors les deux zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i sont pseudo-parallèle dans C_0^+ .

Démonstration :

♣

Nous pouvons illustrer ce cas par la figure 4.18 :

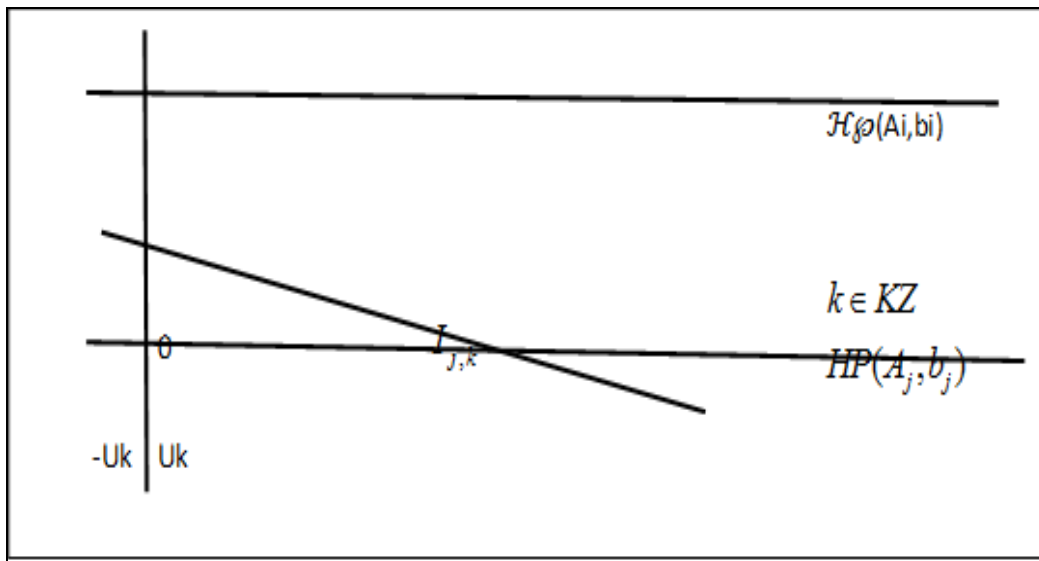


Figure 4.18 : Illustration de la proposition 4.08

Procédons par récurrence :

Pour un seul k_1 , la proposition est vraie d'après le corollaire 4.01.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang r , plus précisément pour les k_1, k_2, \dots, k_r ,

En passant au supérieur et en utilisant le corrolaire 4.03, nous démontrons la proposition 4.08.

Proposition 4.09

- Si pour tout $k \in \text{KNZ}$ $I_{j,k}$ existe que $I_{j,k}$ est plus éloigné de O que $I_{i,k}$.
- Si pour certains $k \in \text{KZ}$ $I'_{j,k}$ existe et que pour tous les autres $k \in \text{KNZ}$, ni $I_{j,k}$ ni $I'_{j,k}$ n'existe

Alors les deux zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i sont pseudo-parallèle dans C_0^+ .

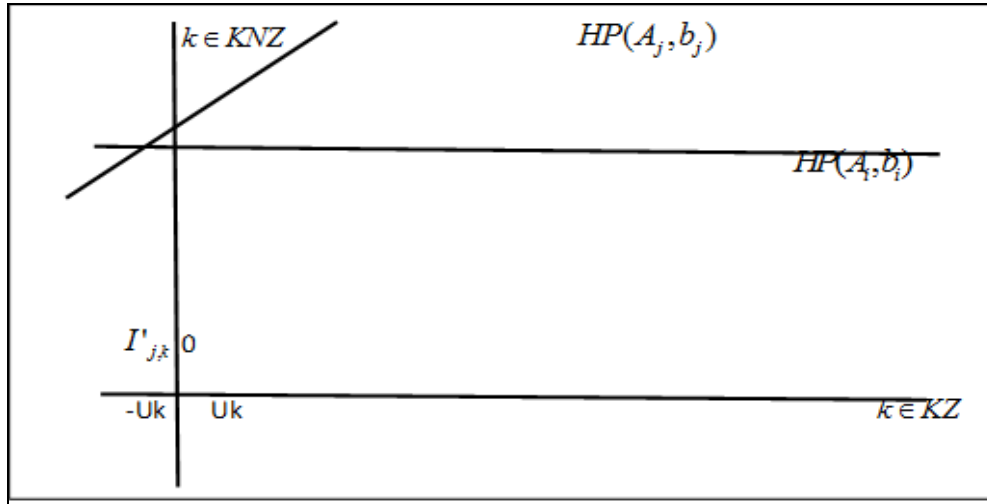


Figure 4.19 : Illustration de la proposition 4.09

Démonstration :

♣

La démonstration de la proposition 4.09, nécessite la considération de plusieurs cas et sous-cas qu'on développera tous.

Cas où $HP(A_i, b_i)$ contient O et $A_i \in C_0^+ \setminus C_0^-$

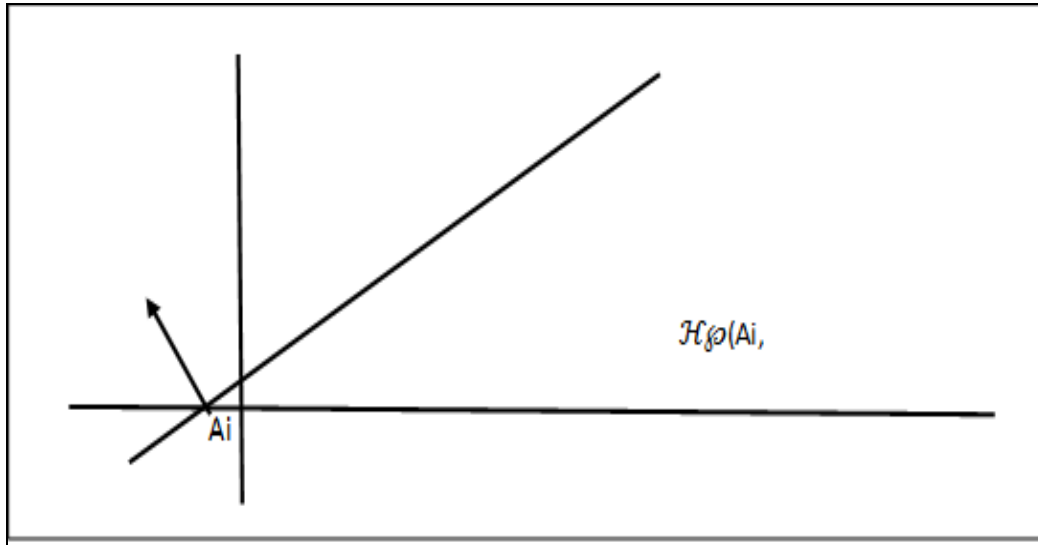


Figure 4.20 : $HP(A_i, b_i)$ contient O et $A_i \in C_0^+ \setminus C_0^-$

Posons $A_i = (a_{i,k})_{k=1, \dots, n}$

C'est le cas où

- $b_i = 0$
- \nexists tq $a_{ik} = 0$
- \exists des k ou $a_{ik} > 0$
- $\exists k$ tel que $a_{i,k} < 0$

Posons

$$K^+(i) = \{k \in [1, n] \text{ tq } a_{ik} > 0\}$$

$$K^-(i) = \{k \in [1, n] \text{ tq } a_{ik} < 0\}$$

On a

$$K^+ \cup K^- = [1, n]$$

Dans ce cas, il existe 3 situations où la zone de containte ZCT_j est pseudo-parallèle à la zone de contrainte ZCT_i .

Illustrons d'abord l'une des situations par la figure ci-après

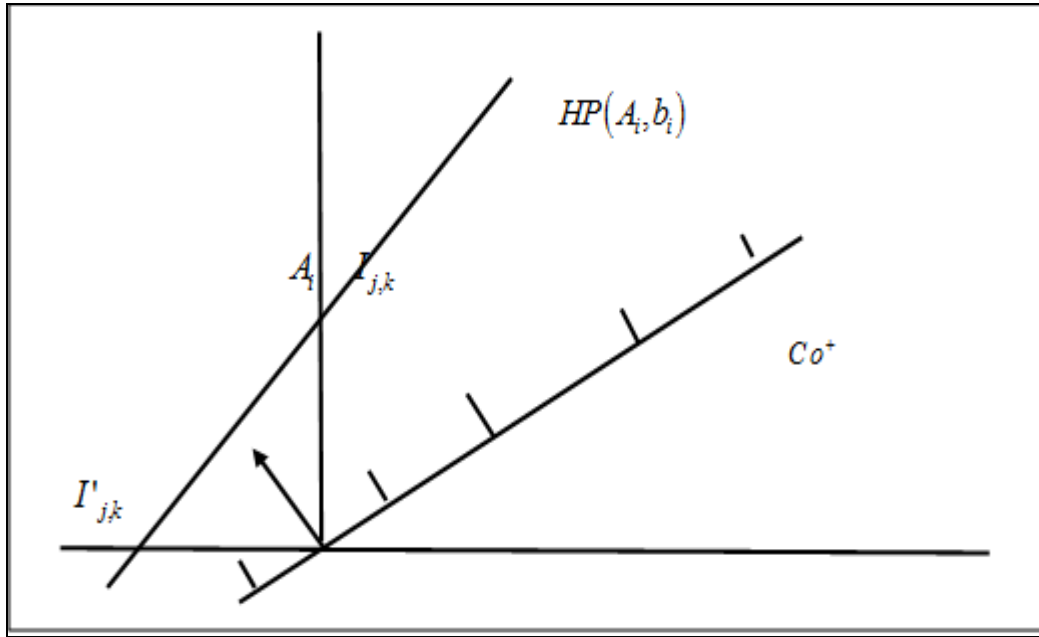


Figure 4.21 : ZCT_j est pseudo-parallèle à la zone ZCT_i .

Nous pouvons deduire les éventualités qui conduisent au pseudo-parallélisme des deux zones de contraintes:

- Si $A_j \in C_0^+ \setminus C_0^-$
- Si $b_j > 0$ et si $\begin{cases} K^+(i) = K^+(j) \\ K^-(i) = K^-(i) \end{cases}$
- Si $\max_{k \in K^-(j)} \{\|OI'_{j,k}\|\} < \min_{k \in K^+(i)} \{\|OI_{j,k}\|\}$

Alors les deux zones de contraintes ZCT_i et ZCT_j sont pseudo-parallèle dans C_0^+ car elles se rencontrent seulement dans C_0^- .

La figure 4.22 permet d'agrémenter cette condition.

Nous pouvons voir facilement à travers ce cas la signification du pseudo-parallélisme de deux zones de contraintes délimitées par les deux hyperplans.

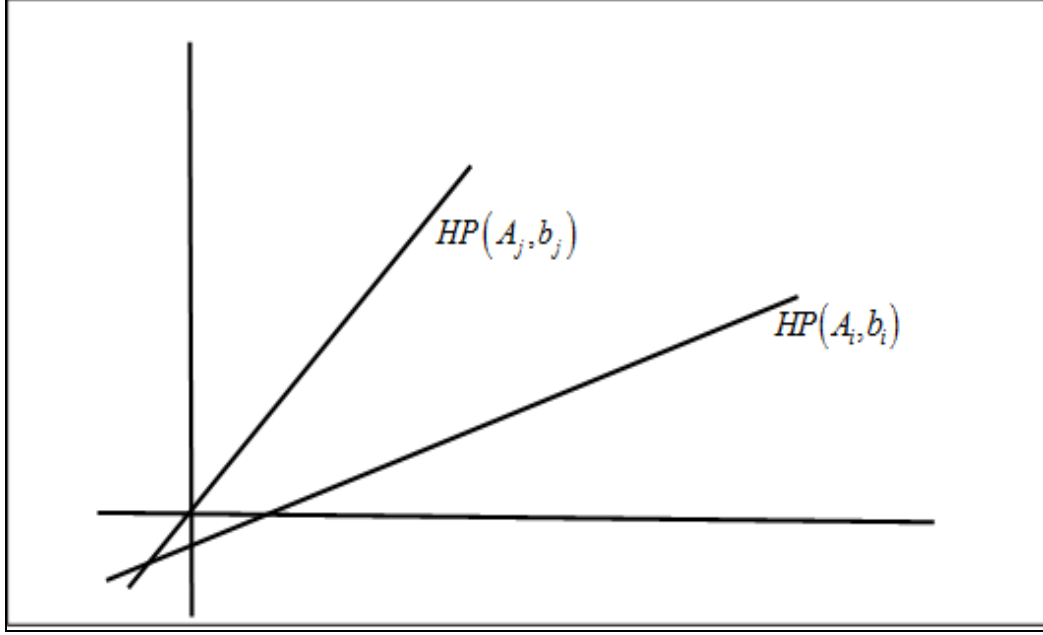


Figure 4.22 : Illustration de l'intersection des zones de contraintes dans C_o^-

Nous pouvons par ailleurs observer le cas où l'une des deux zones de contraintes passe par l'origine. Donc,

- Si $b_j = 0$
- Si $A_j \neq A_i$
- Si $A_j \in Co^+ \setminus Co^-$

On peut dans cette situation parler également que les deux zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i sont pseudo-parallèles dans Co^+ . En effet,

Si $A_j \in \overline{Co^+} \setminus Co^-$, on peut considérer les cas suivants :

- Si $b_j < 0$
- Si $\begin{cases} K^+(i) = K^+(j) \\ K^-(i) = K^-(j) \end{cases}$
- Si $\max \{ \|OI_{j,k}\| \} \leq \min \{ \|OI_{j,k}\| \} \mid k \in K^+(i)$

Les deux zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i ne peuvent être que pseudo-parallèle dans Co^+ .

Considérons maintenant le cas où $k \in K_1$.

Nous pouvons obtenir la figure 4.23 :

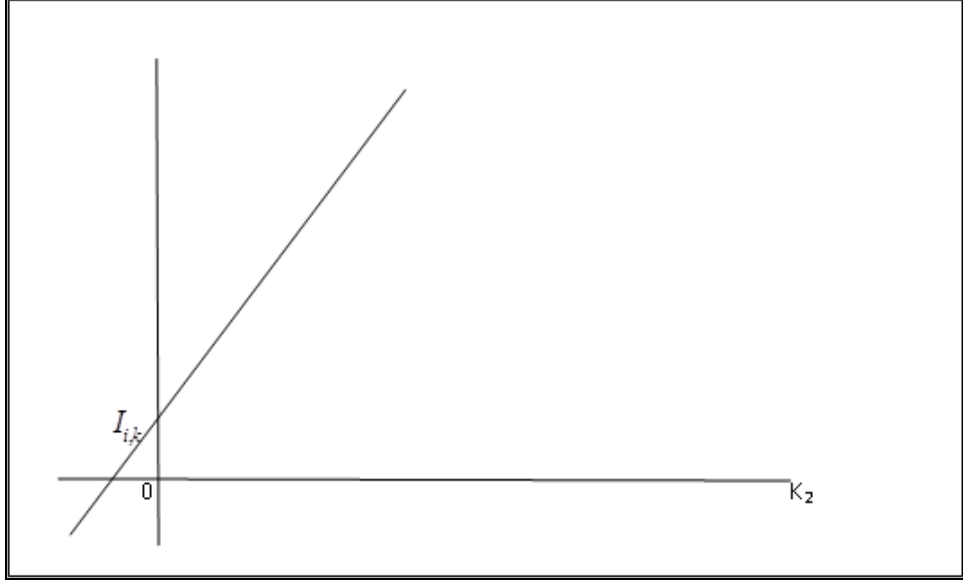


Figure 4.23 : *Illustration de la proposition 4.12*

Donc, on peut établir que :

$$(a_{i,k} \cdot b_i > 0 \text{ pour } k \in K(i,1)) \text{ et } (a_{i,k} \cdot b_i < 0 \text{ pour } k \in K(i,2))$$

Pareillement, si les conditions ci-après sont vérifiées, nous pouvons avancé une situation de pseudo-parallélisme entre les deux zones de contraintes délimitées respectivement par les hyperplans $HP(A_i, b_i)$ et $HP(A_j, b_j)$.

$$\text{Si } \begin{cases} K(j,1) = K(i,1) \\ K(j,2) = K(i,2) \end{cases}$$

$$\text{Si } \forall (k_1, k_2) \in K(i,1) \cdot K(i,2) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{OI_{i,k_1}}{OI'_{i,k_1}} \right\| > \left\| \frac{OI_{j,k_2}}{OI'_{j,k_2}} \right\|$$

Donc les deux zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i sont pseudo-parallèle dans C_0^+ .

Par ailleurs, si les égalités suivantes sont établies, c'est-à-dire

$$\text{Si } K(j,1) = K(i,1) \quad \text{et} \quad K(j,2) = K(i,2) \quad \text{et} \quad \text{si } \forall (k_1, k_2) \in K(i,1) \cdot K(i,2),$$

on a :

$$\left\| \frac{OI_{i,k_2}}{OI'_{i,k_1}} \right\| > \left\| \frac{OI'_{j,k_2}}{OI_{j,k_1}} \right\|$$

Nous pouvons parler également de pseudo-parallélisme des zones de contraintes ZCT_j et ZCT_i dans C_0^+ . Ces différents résultats découlent immédiatement du théorème de Thallès et de la propriété de la réduction des angles correspondants.



4.7 Conclusion

Après avoir identifié, analysé les cas de contraintes purement redondantes c'est-à-dire le cas où les hyperplans sont parallèles au sens géométrique du terme dans le chapitre 3, nous avons développé dans ce chapitre 4 d'autres possibilités de redondances mais qui ne vérifient pas pour autant les propriétés géométriques. En effet, ces dernières peuvent bien se rencontrer en dehors du cône de non-négativité C_0^+ définis par les différents hyperplans générés par le modèle de programmation linéaire. De telles contraintes sont dénommées contraintes pseudo-parallèles. Nombreux sont les cas de pseudo-parallélisme dans l'espace à n dimensions. Nous avons uniquement abordé les cas les plus usités. Les autres cas peuvent être analysés dans la production de publications ou articles en postdoctoral.

Le chapitre 4 a permis de voir de façon explicite les contraintes pseudo-parallèles. Ces situations ont été éclairées par différentes représentations graphiques dans ce chapitre. Etant donné les difficultés voire l'impossibilité de tracer ces figures à n dimensions, nous avons retenu une face du cône des zones de solutions acceptables. Dans ce cas la représentation dans le plan formé les axes de recherche (O, U_k) et (O, U_k') nous a permis de mener à bien les démarches, proposition ou théorème d'identification des contraintes pseudo-parallèle.

L'objet de la thèse a été donc abordé à travers les chapitre 3 et chapitre 4, nous allons dans le chapitre 5 suivant établir la simulation de ce modèle MZ topo-géométrique à travers des hyperplans de dimensions assez faibles qu'on augmentera petit à petit pour voir l'efficacité et l'efficience d'un tel modèle par rapport aux autres de techniques de recherche redondantes. Rappelons que la plupart des recherches de contraintes trouvés par les chevrons dans ce domaine utilise dans la plupart des temps la théorie de points intérieurs de Karmarkar.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS SUR LA DÉTECTION DES CONSTRAINTES REDONDANTES

Dans ce chapitre, nous appliquons toutes les méthodes connues dans l'état de l'art du chapitre I, ainsi que les méthodes que nous proposons dans cette thèse : la méthode géométrique et topo géométrique.

Pour chaque méthode, un algorithme est avancé et est appliqué sur un exemple. Le calcul de complexité classique permet de voir l'efficacité de chaque algorithme.

5.1 Méthode des limites

Dans cette méthode, nous considérons d'abord les cas où toutes les contraintes sont de type \leq avec des seconds membres strictement positifs. Les coefficients sont de signe quelconque et les variables de décision sont bornées.

Les cas où au moins une variable n'est pas bornée, la méthode géométrique permet de trouver une majoration qui est peut être éventuellement $+\infty$.

Si les bornes supérieures des variables ne sont pas données, on peut les déterminer à partir d'une méthode géométrique en considérant le fait que sur leurs demi axes positifs, on compare les bornes supérieures des contraintes.

Pour les contraintes de type " \geq ", on exploite les mêmes déterminations des bornes mais la comparaison est dans l'autre sens. Il en est de même pour une situation post optimale où les seconds membres sont modifiés.

Dans l'algorithme La matrice réduite A_I est décomposé de deux matrices de même dimension. Cette technique permet de calculer plus rapidement les bornes.

5.1.1 Algorithme MÉTHODE DES LIMITES

Entrée: matrice A d'ordre $m \times n$ des coefficients des premiers membres des contraintes et le vecteur b des seconds membres des contraintes.

Sortie: réduction de la matrice A en matrice A_I

Debut algo

1- Construire les vecteurs u bornes supérieures des variables et l bornes inférieures des variables.

2- Construire les matrices A^- issue de A dont les termes positifs sont remplacés par 0 et A^+ issue de A dont les termes négatifs sont remplacés par 0.

$$2.1 \quad a_{ij}^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} \geq 0 \\ 1 & \text{si non.} \end{cases} \quad \text{et de la matrice } A^- \text{ obtenue par produit terme à terme } A \cdot A^-$$

$$2.2 \quad a_{ij}^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} \leq 0 \\ 1 & \text{si non.} \end{cases} \quad \text{et de la matrice } A^+ \text{ obtenue par produit terme à terme } A \cdot A^+$$

3- Calculer les minimums L_i et maximums U_i des contraintes par les formules :

$$U_i = \sum_{j \in J} a_{ij}^+ \cdot u_j + \sum_{j \in J} a_{ij}^- \cdot l_j$$

$$L_i = \sum_{j \in J} a_{ij}^- \cdot l_j + \sum_{j \in J} a_{ij}^+ \cdot u_j$$

4-Tester pour chaque contrainte $U_i - b_i$.

4.1 Si $U_i - b_i \leq 0$, la contrainte i est redondante.

4.2 Sinon, il n'y a pas de redondance.

Fin algorithme

Exemple 5.01

Considérons le PPL :

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 12 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 1 \leq x_3 \leq 2 \\ 1 \leq x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_5 \leq 1 \\ 0 \leq x_6 \leq 2 \end{cases}$$

Saisie des données

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Saisie des bornes

$$l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Decomposition de A en A^+ et A^-

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determination des bornes

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \\ 14 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comparaison des valeurs pour le test de redondance

En comparant

$$U = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \\ 14 \\ 22 \end{pmatrix} \text{ avec } b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ on peut deduire que la première et la quatrième}$$

contraintes sont redondantes.

Dans cet exemple, si la première et la quatrième contrainte sont de type \geq , elles ne sont pas redondantes.

Dans une situation où les seconds membres sont modifiés, la comparaison est immédiate.

Cette méthode est beaucoup plus complexe pour un *PPL* à variables entières voire inapplicable.

5.1.2 Complexité

La complexité de l'algorithme est calculée sur les tests de comparaison des termes des matrices.

- La saisie des matrices est un $O(n.m)$
- Le test des termes est un $O(n.m)$
- Les calculs des L_i et U_i sont des $O(n)$
- le test de redondance est $O(1)$

Et finalement l'algorithme est un $O(n.m)$, ce qui est raisonnable. Si $n = 100$ et $m = 100$, l'ordre de calcul est entre 10^4 et 10^5 .

Si les bornes des variables ne sont pas données, leurs détermination à partir de la méthode géométrique entraînent des calculs supplémentaires mais de l'ordre pratiquement constant et est négligeable par rapport aux calculs matriciels.

5.2 Méthode de programmation lineaire

L'algorithme de résolution de *PPL* est appliqué après transformation de la forme canonique en forme standard.

Le *PPL* à variables entières est résolu

5.2.1 Algorithme

5.2.1.1 Resolution d'un PL

Entrée: A la disposition matricielle de la forme standard. B la première base.

Sortie: valeurs des variables de décision

Début algorithme

Déterminer le coût marginal le plus grand négatif pour la variable entrante :

$$k = \operatorname{argmin} [a_{mj} < 0, 1 \leq j \leq n]$$

Déterminer le plus petit quotient caractéristique pour la variable sortante :

$$l = \operatorname{argmin} \left[\frac{b_i}{a_{ij}} > 0, 1 \leq i \leq n \right]$$

Construire la nouvelle base B en remplaçant la colonne de la variable sortante par la colonne de la variable entrante.

Calculer le produit matriciel entre l'inverse de la base et la matrice principale des contraintes : $A = B^{-1}.A$.

Tester s'il y a de coût marginal négatif,

Si oui, revenir à 2.

Sinon, déduire la solution.

Fin algorithme _____

5.2.1.2 Méthode PI

Entree : A la disposition matricielle de la forme standard

Sortie : A1 la matrice réduite.

Début algorithme _____

Appliquer le programme résolution PL à A.

Pour $i = 1 : m$, supprimer la i -ème contrainte pour avoir la matrice A1

Appliquer le programme résolution PL à A1.

Si la solution est la même, la i -ème contrainte est redondante, on garde A1 et on continue pour les autres contraintes.

Sinon on continue pour les autres contraintes.

Fin pour

Fin algorithme _____

Exemple 5.02

Considérons le PPL :

$$\max Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{avec } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La forme standard est :

$$\max Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + e_1 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + e_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 + e_3 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + e_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + e_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0 \end{cases}$$

e_1, e_2, e_3, e_4 et e_5 sont les variables d'écart caractéristiques respectives des contraintes et la première solution est :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \quad \text{avec} \quad e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 10.$$

La disposition matricielle du problème PPL est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où la dernière ligne est la ligne des coûts marginaux.

La première base est constituée des vecteurs colonnes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et Z :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans un problème de maximisation, un coût marginal négatif indique une variable entrante dans la base. La colonne x_1 par exemple.

Les quotients caracteristiques sont calculès par des divisions terme à terme de la dernière colonne Q des quantités³ et de la colonne des variables entrante.

$$qc = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le plus petit q_c strictement positif indique la variable sortante soit e_5 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La nouvelle matrice est obtenue par:

$$B^{-1}.A.$$

Le tableau donnant la solution optimale est :

Tableau 5.01 : Tableau optimal

Ase	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	Z	Q
x_2	-0.5	1	1	-0.5	0.5	0	1	0	0	0	-0.5	0	5
e_2	-1	1	0	-2	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
x_3	0.5	0	0	1.5	0.5	0	0	0	1	0	-0.5	0	5
x_4	-1.5	1	0	-2.5	0.5	0	1	0	0	1	-1.5	0	5
x_1	2	0	0	2	1	1	-1	0	0	0	1	0	0
Z_i	0	1	0	-1	1	0	1	0	0	0	0	1	10

³ . seconds membres des contraintes

Considérons maintenant le système où on a enlevé la première contrainte :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tableau donnant la solution optimale est :

Tableau 5.02 : *Tableau optimal après transformation*

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	e_2	e_3	e_4	e_5	Z	Q
x_3	0	2.5	1	$\frac{1}{1.5}$	1.5	1	1.5	0	0	0	$\frac{1}{1}$	5
x_4	0	0.5	0	0.5	0.5	0	0.5	1	0	$\frac{1}{1}$	0	5
e_4	0	1.5	0	$\frac{1}{1.5}$	1.5	1	0.5	0	1	$\frac{1}{1}$	0	5
x_1	1	-1	0	2	0	0	-1	0	0	1	0	0
Z_i	0	6	0	0	5	1	5	6	0	$\frac{1}{7}$	1	10

On remarque que le profit maximum est le même. On peut dire que la première contrainte est redondante.

Dans cet exemple, il y a dégénérescence : en continuant le traitement, le profit diminue et le tableau n'est pas optimal.

Dans la suite, il est plus intéressant d'étudier la méthode déterministe basée toujours sur la méthode classique du simplexe.

5.2.2 Complexité

Dans un PPL,

$$\max c^T \cdot X$$

sous les contraintes

$$A \cdot X \leq b$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in (\mathbb{R}^m)^*, c \in \mathbb{R}^n, X \in (\mathbb{R}^n)^*$$

on ajoute m -variables d'écart dans sa forme standard.

$$\begin{cases} \max c^T \cdot X \\ A \cdot X + I_m E = b \end{cases}$$

$E \in \mathbb{R}^{n^*}$ S'il n'y pas de dégénérescence, dans le pire des cas, on a $\binom{m+n}{m}$ recherches de pivots : le nombre de bases possibles.

Pour chaque pivot, la transformation est de l'ordre $O(m)$. le nombre d'opération est donc de l'ordre de $(m+n)(m+n-1) \dots (m+1)$ donc de l'ordre de m^n .

Au pire des cas, la résolution d'une *PPL* est de l'ordre exponentiel. Si $n = m = 100$, la complexité est de 100^{100} ce qui est impossible à réaliser.

5.3 Méthode déterministe: Algorithme

Entrée : matrice A .

Sortie :

Début algorithme_____

1. Saisie de la matrice principale des contraintes.
2. Détermination de la variable entrante
 - 2.1 Calcul des coûts réduits
 - 2.2 Test des coûts réduits
3. Détermination de la variable sortante
 - 3.1 Calcul des quotients caractéristiques
 - 3.2 Test des quotients caractéristiques
4. Réduction de la matrice principale des contraintes.
5. Test de dégénérescence des variables

Si à la ligne i $b^{(1)} i = 0$

Tester $a^{(1)}_{ij}$

Si pour tout j , $a^{(1)}_{ij} \leq 0$, la contrainte i est redondante.

Sinon la contrainte i n'est pas redondante.

Fin si.

Fin algorithme

Exemple 5.03

$$\max Z = 4X_1 + 2X_2 + X_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 30 \\ 3X_1 + X_2 + X_3 \leq 26 \\ X_2 + X_3 \leq 13 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 45 \end{cases}$$

avec $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Soit le premier tableau du simplexe :

RHS est associé au second membre du système de la forme canonique.

Tableau 5.03 : *Premier tableau de l'exemple*

X_1	X_2	X_3	E_1	E_2	E_3	E_4	Q
2	1	1	1	0	0	0	30
3	1	1	0	1	0	0	26
0	1	1	0	0	1	0	13
1	2	1	0	0	0	1	45
-4	-2	-1	0	0	0	1	0

On divise les valeurs de la colonne RHS par la colonne de X_1 et considérons le minimum positif des valeurs obtenues.

On a :

$$\min[15, 26/3, +\infty, 45] = 26/3 = 8.66,$$

qui est associé à la deuxième ligne correspondant à la variable de base U_2 . X_1 est une variable entrante et U_2 est la variable sortante.

Donc, la contrainte (2) n'est pas redondante.

Ainsi, H devient $H = \{1, 3, 4\}$

Tableau 5.04 : *Deuxième tableau de l'exemple*

Base	X_1	X_2	X_3	U_1	U_2	U_3	U_4	RHS
U_1	0	$1/3$	$1/3$	1	$-2/3$	0	0	$38/3$
X_1	1	$1/3$	$1/3$	0	$1/3$	0	0	$26/3$
U_3	0	1	1	0	0	1	0	13
U_4	0	$5/3$	$2/3$	0	$-1/3$	0	1	$109/3$

Si X_2 est une variable entrante, la variable sortante est indiquée par :

$$\min[38, 26, 13, 109/3] = 13, \text{ soit } U_3.$$

Donc, la contrainte (3) n'est pas redondante, et H devient :

$$H = \{1, 4\}.$$

Tableau 5.05 : *Troisième tableau de l'exemple*

Base	X_1	X_2	X_3	U_1	U_2	U_3	U_4	RHS
U_1	0	0	0	1	$-2/3$	$-1/3$	0	$25/3$
X_1	1	0	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	$13/3$
X_2	0	1	1	0	0	1	0	13
U_4	0	0	-1	0	$-1/3$	$-5/3$	1	$44/3$

Étape 1

$X_1 > 0$, $X_2 > 0$, et $X_3 > 0$ sont des solutions non redondantes.

Étape 2.

Si nous prenons U_3 , X_1 le pivot est impossible.

Choisissons U_4 , X_1 et le maximum $-1/3, 5/3, 2/3 = 5/3$ qui correspond à la deuxième colonne.

Donc, le pivot est à l'intersection de la ligne 4 et la colonne 2.

En procédant de la même façon que précédemment, nous obtenons la table 3.

Étape 3.

La première et la dernière ligne ont toutes des valeurs négatives ou nulles.

Étape 4.

On divise les valeurs de la colonne RHS par la première et considérons le minimum des valeurs obtenues

On a : $\text{Min } [15, 8.66, 45] = 8.66$,

qui est associé à la deuxième ligne.

Donc, la contrainte (2) n'est pas redondante.

Ainsi, H devient : $H = \{1, 3, 4\}$.

Étape 5.

$H = \emptyset$. En conséquence, les contraintes (1) et (4) sont redondantes.

Étape 6.

On reprend et on continue

Étape 7.

Sélectionnons U_1 et calculons le maximum $2, 1, 1 = 2$, qui correspond à la colonne, on déduit le pivot à l'intersection de la ligne 2 et la colonne 1.

Itération 2. Divisons de nouveau les valeurs de RHS par la seconde colonne et prenons le minimum $[30, 26, 13, 22.5] = 13$, qui correspond à la troisième ligne.

On déduit que la contrainte (3) n'est pas redondante. Donc,

$$H = \{1, 4\}.$$

Tableau 5.06 : Deuxième tableau de l'exemple après transformation

Base	X_1	X_2	X_3	U_1	U_2	U_3	U_4	RHS
U_1	2	0	0	1	0	-1	0	27
U_2	3	0	0	0	1	-1	0	13
X_2	0	1	1	0	0	1	0	13
U_4	1	0	-1	0	0	-2	1	19

Tableau 5.07 : Troisième tableau de l'exemple après transformation

	U_2	X_2	X_3	RHS
U_1	-2/3	1/3	1/3	38 / 3
X_1	1/3	1/3	1/3	26 / 3
U_3	0	1	1	13
U_4	-1/3	5/3	2/3	109/3

5.4 Méthode de STOJKOVIC et STANIMIROVIC : Algorithme TEST

Entrée : matrice $A = (a_{ij})$ et vecteur $b = (b_i)$

Sortie : matrice réduite A_1

Début algorithme _____

1. Calculer $d_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i}$
2. Calculer les vecteurs $m_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ et $M_i = \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$.
3. Calculer les réels $M_j = \max_{1 \leq i \leq m} m_i$ et $m_j = \min_{1 \leq i \leq m} M_i$.
4. Tester si $M_j = m_j$

4.1 Si oui pas de redondance

4.2 Sinon, détecter les k -ème et l -ème contraintes telles que $d_{kj} \leq d_{lj}$ pour tout

$1 \leq j \leq n$, et déduire que la k -ème contrainte est redondante.

Fin algorithme

Exemple 5.04

Etape 1.

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 2/120 & 1/60 & 1/30 \\ 3/104 & 1/52 & 1/26 \\ 0/52 & 1/26 & 1/13 \\ 1/180 & 2/90 & 1/45 \end{pmatrix} \quad (5.01)$$

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0.01666 & 0.01666 & 0.0333 \\ 0.02885 & 0.01923 & 0.0385 \\ 0.0 & 0.0385 & 0.0769 \\ 0.0055 & 0.0222 & 0.0222 \end{pmatrix}$$

$$\min_{1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} 0.01666 \\ 0.01923 \\ 0 \\ 0.0055 \end{pmatrix} \text{ et } \max_{1 \leq i \leq 4} = (0.02885 \quad 0.0385 \quad 0.0769)$$

D'où le tableau:

Tableau 5.08 : *Tableau des resultats de l'exemple test STOJKOVIC*

	$U2$	$X2$	$X3$	RHS
$U1$	$-2/3$	$-1/3$	0	$25/3$
$X1$	$1/3$	$-1/3$	0	$13/3$
$U3$	0	1	1	13
$U4$	$1/3$	$-5/3$	-1	$44/3$

Etape 2.

Calculons les valeurs:

$$\max \min d_{ij} = 0.01923, 1 < i < 4 \text{ et } 1 < j < 3$$

$$\min \max d_{ij} = 0.02855$$

$$\max \min d_{ij} \leq \min \max d_{ij}, 1 < j < 3 \text{ et } 1 < i < 4$$

On a :

$$\max \min d_i = \min \max d_{ij}$$

pour tous les i et j vérifiant $1 < i < 3$ et $1 < j < 4$ $1 < i < 4$

Nous avons alors au moins une contrainte redondante dans ce problème.
Comme $d_{ij} < d_{2j}$, pour $j = 1, 2, 3$, donc la contrainte (1) est redondante

5.5 Méthode heuristique: Algorithme PAULRAJ

Entrée : matrice $A = (a_{ij})_{ij}$, vecteur $b = (b_i)$

Sortie : matrice réduite A_1

Début algorithme _____

Calculer la matrice

$$\theta_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0.$$

Calculer

$$Z_j = \theta_{ij} B^{-1} a_j$$

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T.$$

Fin algorithme _____

Exemple 5.05

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$b^T = (30 \ 26 \ 13 \ 45)$$

$$U^T = (25 \ 20)$$

Étape 2.

Nous avons alors

$$R_1 = 1.83$$

$$R_2 = 1.36$$

$$R_3 = 1.5$$

Étape 3.

Nous pouvons calculer

$$k = \operatorname{argmin}_i \{R_i\}, i = 1, 2, 3$$

$$k=2$$

En résolvant les différents problèmes de programmation linéaire LP_1^2, LP_3^2 et LP_4^2 , on a :

$$LP_1^2 = \max \theta_1^2 = 2x_1 + x_2 + x_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 26 \\ 0 \leq x_1 \leq 8.67 \\ 0 \leq x_2 \leq 13 \\ 0 \leq x_3 \leq 13 \end{cases}$$

$$LP_3^2 = \max \theta_3^2 = x_2 + x_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 26 \\ 0 \leq x_1 \leq 8.67 \\ 0 \leq x_2 \leq 13 \\ 0 \leq x_3 \leq 13 \end{cases}$$

Et le second problème PPL

$$LP_4^2 = \max \theta_4^2 = x_2 + x_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 26 \\ 0 \leq x_1 \leq 8.67 \\ 0 \leq x_2 \leq 13 \\ 0 \leq x_3 \leq 13 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\theta_1^2 = 24$$

$$\theta_3^2 = 20$$

$$\theta_4^2 = 37$$

Comme $\theta_1^2 < 30$ et $\theta_4^2 < 45$,

on déduit que les contraintes 1 et 4 sont redondantes.

5.6 Méthodes géométriques

Dans cette section, nous considérons selon les différents cas de contraintes, les algorithmes pour la redondance et l'existence de solution dans la programmation linéaire.

5.6.1 Hypothèses sur les contraintes

On distingue deux cas où : les coefficients dans les contraintes sont d'une part positifs et d'autre part de signes quelconques.

Chaque coefficient est supposée non nul sinon, on le remplace par un ε suffisamment petit de telle sorte que $\frac{1}{\varepsilon}$ soit assez grand.

Pour chaque cas, on examine la situation où toutes les contraintes sont des disponibilités de ressources ou d'exigences maximales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \end{cases} \quad (5.01)$$

suivie de la situation où toutes les contraintes sont des exigences minimales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k \end{cases} \quad (5.02)$$

et enfin pour le cas mixte où il y a à la fois des contraintes d'exigences maximales et d'exigences minimales :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2nm}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n \geq b_{k+1} \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,n}x_n \geq b_{k+2} \\ \dots \\ a_{k+p,1}x_1 + a_{k+p,2}x_2 + \dots + a_{k+p,n}x_n \geq b_{k+p} \end{cases} \quad (5.03)$$

Les variables de décision sont positives. Si une variable de décision x_i est négative, on la remplace par $-x'_i$ où $x'_i \geq 0$.

Si une variable x_i est de signe quelconque, on la remplace par $x'_i - x''_i$ où $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Les seconds membres des contraintes sont positifs.

Proposition 5.01

Les seconds membres des contraintes peuvent toujours être ramenés à l'unité.

Démonstration :

♣

Il suffit de diviser tous les coefficients dans chaque contraintes par leur second membre.

Avec le système de contraintes, on le nouveau système :

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \leq 1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \leq 1 \\ c_{k+1,1}x_1 + c_{k+1,2}x_2 + \dots + c_{k+1,n}x_n \geq 1 \\ c_{k+2,1}x_1 + c_{k+2,2}x_2 + \dots + c_{k+2,n}x_n \geq 1 \\ \dots \\ c_{k+p,1}x_1 + c_{k+p,2}x_2 + \dots + c_{k+p,n}x_n \geq 1 \end{cases} \quad (5.04)$$

Où

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i} \quad \text{pour tous } 1 \leq i \leq k+p, 1 \leq j \leq n.$$

◆

5.6.2 Méthodes numériques

L'idée principale dans l'implémentation informatique est de considérer les plans de coordonnées dans l'espace \mathbb{R}^n où il y a n variables de décision.

Le système de contraintes (5.01), est disposé dans la matrice principale des contraintes

$$A1 = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & 1 & 1 \\ c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système de contraintes (5.02), est disposé dans la matrice principale des contraintes

$$A = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & -1 & 1 \\ c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{11}c_{12}\dots c_{1n} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La comparaison des termes des variables de décision entre les lignes permet soit :

- de déterminer l'existence de la redondance,
- de déterminer l'inexistence de la région des solutions admissibles.

5.6.2.1 Contraintes d'exigences maximales

Proposition 5.02

Chaque inverse du coefficient de la variable représente sa valeur maximale dans son axe issue de la contrainte.

Démonstration :



Dans la i -ème contrainte :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq 1$$

si $x_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ sauf j_0 , alors $x_{j_0} \leq \frac{1}{c_{j_0}}$.

$\frac{1}{c_{j_0}}$ est la coordonnée du point d'intersection de l'hyperplan défini par la contrainte i avec l'axe de x_{j_0} .

Dans l'étude, on commence par considérer deux variables et on l'étendra par récurrence pour n - variables.

Soit le système de contraintes (5.01) :

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \leq 1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \leq 1 \end{cases}$$

Avec la disposition matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 1 & 1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



5.6.2.1.1 Comparaison de deux contraintes

Considérons le système de deux contraintes :

Le point origine est une solution et la région qui la contient est la région solution

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{1j}x_j \leq 1 \\ \sum_{j=1}^n c_{2j}x_j \leq 1 \end{cases} \quad (5.05)$$

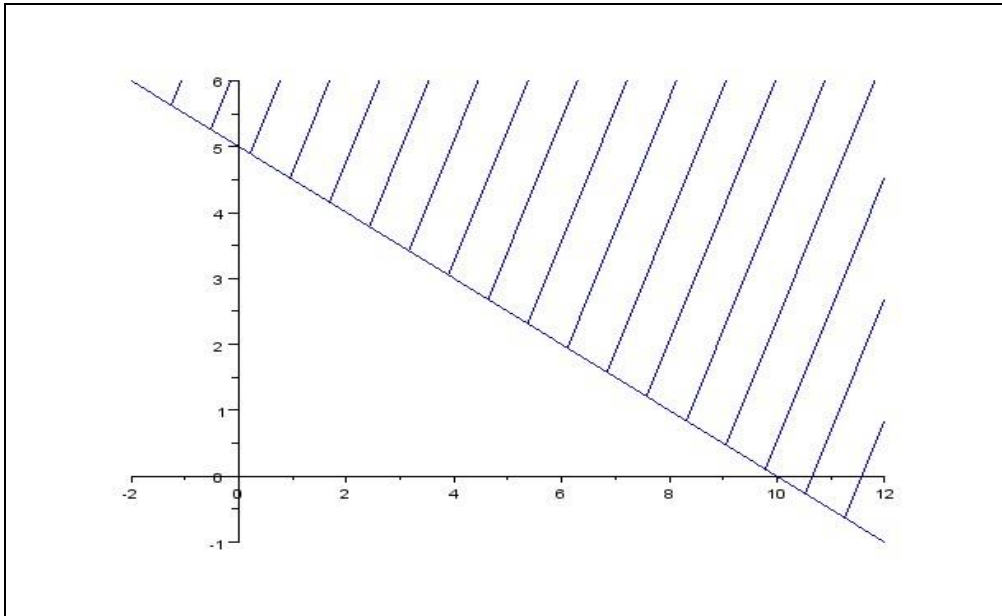


Figure 5.01 : Résolution graphique d'une inéquation : $c_1x_1 + c_2x_2 \leq 1$

Le point origine et la région qui la contiennent déterminent la région solution.

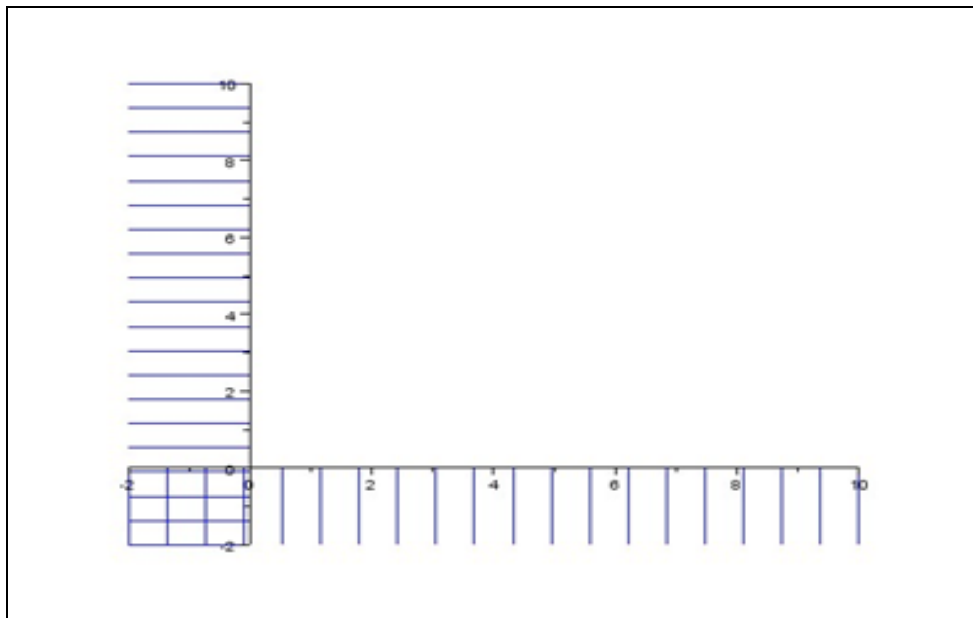


Figure 5.02 : Plan dans $C_0^+ : 2x + 3y + z = 10$

Proposition 5.03

Le système de contrainte (5.05) a au moins une solution non nulle.

Démonstration :

♣

Considérons $a = \max(c_{i1}, 1 \leq i \leq k)$ strictement positif.

Le point $X_0 = (1/a, 0, \dots, 0)$ est une solution pour toutes les contraintes.

En effet, pour toute contrainte, on a:

$$c_{i1} \times \frac{1}{a} + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = c_{i1} \times \frac{1}{a} \leq 1 \text{ ,.}$$

♦

Proposition 5.04

Si pour tout $j, 1 \leq j \leq n, \frac{1}{c_{1j}} \leq \frac{1}{c_{2j}}$ ou $c_{2j} \leq c_{1j}$, alors la contrainte $\sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \leq 1$ est redondante.

Dans ce cas, on remplace c_{2j} par 0 pour tout $1 \leq j \leq n$.

Démonstration :

♣

Soit $X_0 = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ une solution de la contrainte $\sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \leq 1$

Alors

$$\sum_{j=1}^n c_{1j} x_{ij} \leq 1$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n c_{2j} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n c_{1j} x_{ij} \leq 1$$

Toute solution issue de la première contrainte est aussi solution issue de la deuxième contrainte.

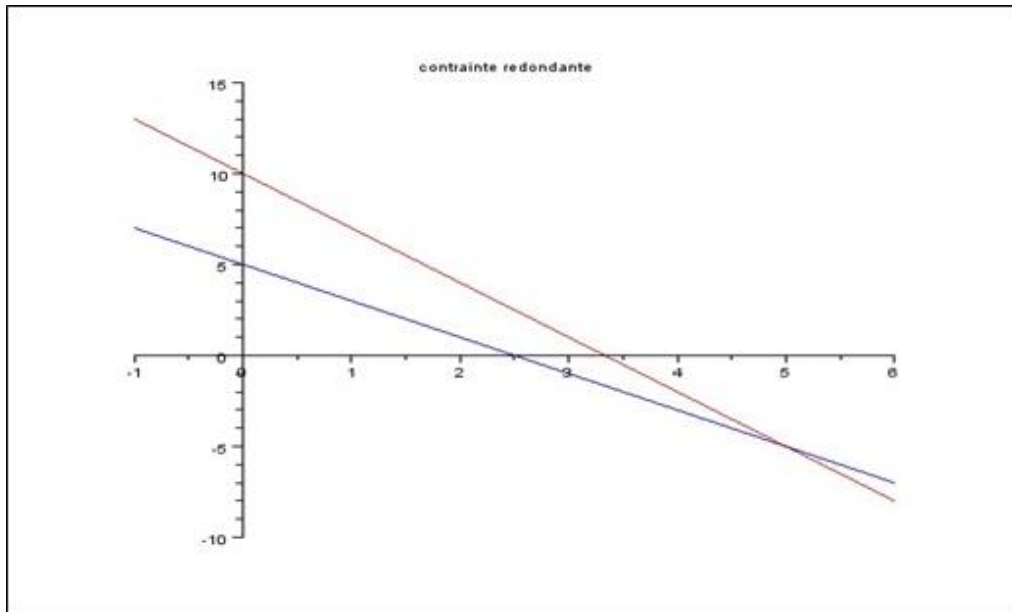


Figure 5.03 : *Une contrainte redondante*

◆

5.6.2.1.2 Comparaison de trois contraintes

Lemme 5.01

Dans le système d'équations

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 1 \end{cases}$$

Si $(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0$,

alors les droites se coupent en un point $A(\alpha_1; \alpha_2)$ tel que $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

Démonstration :

♣

Notons,

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{22} + c_{21}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= (c_{11} - c_{21})c_{22} + c_{21}(c_{22} - c_{12}) \\ &= (c_{11} - c_{21})c_{22} - c_{21}(c_{12} - c_{22}) \\ &= (c_{12} - c_{22}) \left[\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} c_{22} - c_{21} \right] \end{aligned}$$

Comme

$$(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0$$

donc

$$\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{12} - c_{22}} \prec 0 \quad \text{et aussi} \quad \frac{c_{11} - c_{21}}{c_{12} - c_{22}} c_{22} - c_{21} \prec 0$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{\Delta} = - \frac{1}{\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} c_{22} - c_{21}} \succ 0$$

De même,

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= c_{11}c_{22} - c_{11}c_{12} + c_{11}c_{12} - c_{21}c_{12} \\ &= (c_{22} - c_{12})c_{11} + c_{12}(c_{11} - c_{21}) \\ &= (c_{22} - c_{12})c_{11} - c_{12}(c_{21} - c_{11}) \\ &= (c_{21} - c_{11}) \left[\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12} \right] \end{aligned}$$

Comme

$$(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0$$

Donc

$$\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} \prec 0 \quad \text{et aussi} \quad \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12} \prec 0$$

D'où

$$\alpha_2 = \frac{c_{11} - c_{21}}{\Delta} = - \frac{1}{\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12}} \succ 0$$

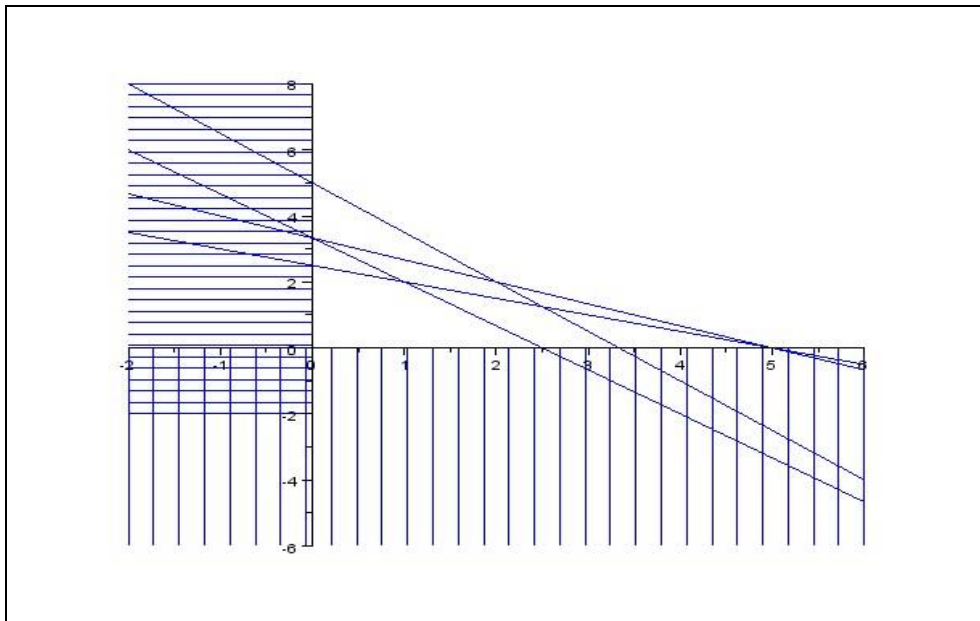


Figure 5.04 : *Région admissible non vide*

le système associé à la figure étant:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 10 \end{cases}$$

L'origine est toujours solution



Proposition 5.05

Dans le système

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \leq 1 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Si le système d'équations

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 1 \end{cases}$$

admet un point d'intersection $A(\alpha_1; \alpha_2)$, avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ alors

la contrainte $c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1$ est redondante si $c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 \leq 1$.

Démonstration :



D'après le lemme 5.01

$$\alpha_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{\Delta} > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{c_{11} - c_{21}}{\Delta} > 0$$

avec

$\Delta = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \neq 0$, le point $A(\alpha_1; \alpha_2)$ est solution de

Si

$$\begin{aligned} c_{31}x_1 + c_{32}x_2 &\leq 1 \\ c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Alors

$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1$ est redondante.

◆

5.6.2.1.3 Algorithme pour plusieurs contraintes

ALGORITHME DETECTION

Entrée: A matrice des coefficients $n \times k$

Sortie: redondance

Debut algo

Saisir la matrice A

Transformer la matrice A en matrice A_1

Pour $i=1$ à k , comparer les termes de chaque colonne pour deux lignes si $c_{ij} \leq c_{lj}$ pour tout j alors la j -ème contrainte est redondante sinon il n'y a pas de redondance

Fin pour i .

Fin algo;

Exemple 5.06

Soit le système d'équation:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice A est réduite à :

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système de contraintes à :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

5.6.2.2 Contraintes d'exigences minimales

Soit le système de contraintes :

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \geq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \geq 1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \geq 1 \end{cases}$$

5.6.2.2.1 Comparaison de deux contraintes

Considérons le système de deux contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{1j}x_j \geq 1 \\ \sum_{j=1}^n c_{2j}x_j \geq 1 \end{cases}$$

(5.06)

Proposition 5.06

Si pour tout j , $1 \leq j \leq n$, $\frac{1}{c_{1j}} \geq \frac{1}{c_{2j}}$ ou $c_{2j} \geq c_{1j}$, alors la contrainte :

$$\sum_{j=1}^n c_{2j}x_j \leq 1 \text{ est redondante.}$$

Dans ce cas, on remplace c_{2j} par 0 pour tout $1 \leq j \leq n$.

Démonstration :

♣

Soit $X_0 = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ une solution de la contrainte $\sum_{j=1}^n c_{1j}x_j \leq 1$

Alors

$$\sum_{j=1}^n c_{1j}x_{ij} \geq 1 \text{ et donc } \sum_{j=1}^n c_{2j}x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n c_{1j}x_{ij} \leq 1$$

Toute solution issue de la première contrainte est aussi solution issue de la deuxième contrainte.

♦

Proposition 5.07

Le système de contrainte (5.02) a au moins une solution non nulle.

Démonstration :

♣

Considérons

$$a = \min(c_{i1}, 1 \leq i \leq k) \quad \text{strictement positif.}$$

Le point $X_0 = (1/a, 0, \dots, 0)$ est une solution pour toutes les contraintes.

En effet, pour toute contrainte,

$$c_{i1} \times \frac{1}{a} + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{ik} \times 0 = c_{i1} \times \frac{1}{a} \geq 1$$

♦

5.6.2.2 Algorithme pour plusieurs contraintes

Algo détection (A matrice des coefficients $n \times k$)

Début

Saisir la matrice A.

Transformer la matrice A en matrice A_1 pour $i=1$ à k

Comparer les termes de chaque colonne pour deux lignes si $c_{ij} \geq c_{lj}$ pour tout j alors la j -ème contrainte est redondante sinon il n'y a pas de redondance fin pour i

Fin algo;

Exemple 5.07

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est réduite à

$$AI = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système de contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

Donc les contraintes associées à la première et la troisième inéquation sont redondantes.

5.6.2.3 Contraintes mixtes

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \leq 1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \leq 1 \\ c_{k+1,1}x_1 + c_{k+1,2}x_2 + \dots + c_{k+1,n}x_n \geq 1 \\ c_{k+2,1}x_1 + c_{k+2,2}x_2 + \dots + c_{k+2,n}x_n \geq 1 \\ \dots \\ c_{k+p,1}x_1 + c_{k+p,2}x_2 + \dots + c_{k+p,n}x_n \geq 1 \end{cases}$$

et supposons qu'il n'y a pas de redondance.

Notons:

$$M_j = \max(c_{ij}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n) \quad \text{et} \quad m_j = \min(c_{ij}, k+1 \leq i \leq k+p, 1 \leq j \leq n)$$

Proposition 5.08

Si pour tout j , $M_j < m_j$ alors, la région des solutions admissibles est vide.

Démonstration :

♣

En effet, il suffit de considérer le système :

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \geq 1 \end{cases}$$

Si pour tout j , $1 \leq j \leq n$, $c_{2j} < c_{1j}$, alors
il n'y a pas de solution.

Exemple 5.08

Soit le système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

On peut déduire le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases} \quad (5.07)$$

il n'y a pas de redondance.

De même pour le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases} \quad (5.08)$$

♦

Avec une contrainte du système (5.07) et une contrainte du système (5.08), on peut affirmer que la région des solutions admissibles est la même donc il n'y a pas de redondance.

5.6.3 Matrice des contraintes à termes de signe quelconque

5.6.3.1 Contraintes d'exigences maximales

Lemme 5.01

Pour toutes contraintes du type :

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n \leq 1,$$

le point $O = (0,0,\dots,0)$ est toujours solution quels que soient les coefficients $c_{ij}, 1 \leq j \leq n$ et s'il existe $k, 1 \leq k \leq n$ tel que a_{ik} négatif, alors la partie positive de l'axe des x_k est toujours solution.

Démonstration :

♣

En procédant au produit scalaire des deux vecteurs, on a:

$$c_{i1} \times 0 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = 0 \leq 1 \text{ est toujours vraie.}$$

S'il existe k tel que c_{ik} est négatif, par exemple $k = 1$, alors

$$c_{i1} \times x_1 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = c_{i1} \times x_1 \leq 1 \text{ et } x_1 \geq 0 \geq \frac{1}{c_{i1}} \text{ est toujours vraie.}$$

♦

Lemme 5.02

Dans le système (5.01), s'il existe une contrainte contenant un et un seul coefficient négatif c_{ij} , alors la contrainte est redondante si pour tout $k \neq i$ et pour tout $l \neq j$, $c_{il} \leq c_{kl}$.

Démonstration :

♣

Considérons l'inégalité :

$$c_{il} \leq c_{kl} \longleftrightarrow \frac{1}{c_{il}} \geq \frac{1}{c_{kl}}$$

Ce qui nous permet d'établir que:

$$c_{k1} \frac{1}{c_{i1}} + c_{k2} \frac{1}{c_{i2}} + \dots + c_{kn} \frac{1}{c_{in}} \leq c_{k1} \frac{1}{c_{k1}} + c_{k2} \frac{1}{c_{k2}} + \dots + c_{kn} \frac{1}{c_{kn}} \leq 1$$

♦

Proposition 5.09

Dans le système (5.02), si tous les coefficients d'une contrainte sont négatifs, alors la contrainte est redondante.

Démonstration :

♣

D'après les lemmes 5.03 et 5.04, tous les axes de coordonnées sont dans la région des solutions admissibles.



5.6.3.2 Contraintes d'exigences minimales

Lemme 5.03

Dans le système de contraintes (5.02), quels que soient les coefficients, la région des solution admissibles ne contient pas le point O.

Démonstration :



Il suffit de remarquer que :

Si $c_{ij} < 0$, $c_{i1} \times x_1 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = 0 > 1$ est absurde.

Proposition 5.10

Dans le système de contraintes (5.02) si tous les coefficients d'une contrainte sont négatifs, alors la région des solutions admissibles est vide.



Démonstration :



D'après le lemme 5.04, la condition de positivité des variables de décision ne peut pas être satisfaite.



5.6.3.3 Contraintes mixtes

Dans un système de contraintes mixtes, il faut séparer le système de contraintes d'exigences minimales et le système de contraintes d'exigences maximales.

Les contraintes redondantes si elles existent, sont étudiées dans chaque système. Par contre l'existence de la région des solutions admissibles est étudiée dans le système général.

5.6.4 Algorithme général

Saisir la matrice principale des contraintes dans laquelle l'avant dernière colonne est constituée de 1 pour une contrainte d'exigence maximale et de -1 pour une contrainte d'exigence minimale.

5.6.4.1 Comparaison de trois contraintes

Lemme 5.04

Dans le système d'équations

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 1 \end{cases}$$

Si $(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0$, alors les droites se coupent en un point $A(\alpha_1; \alpha_2)$ tel que $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

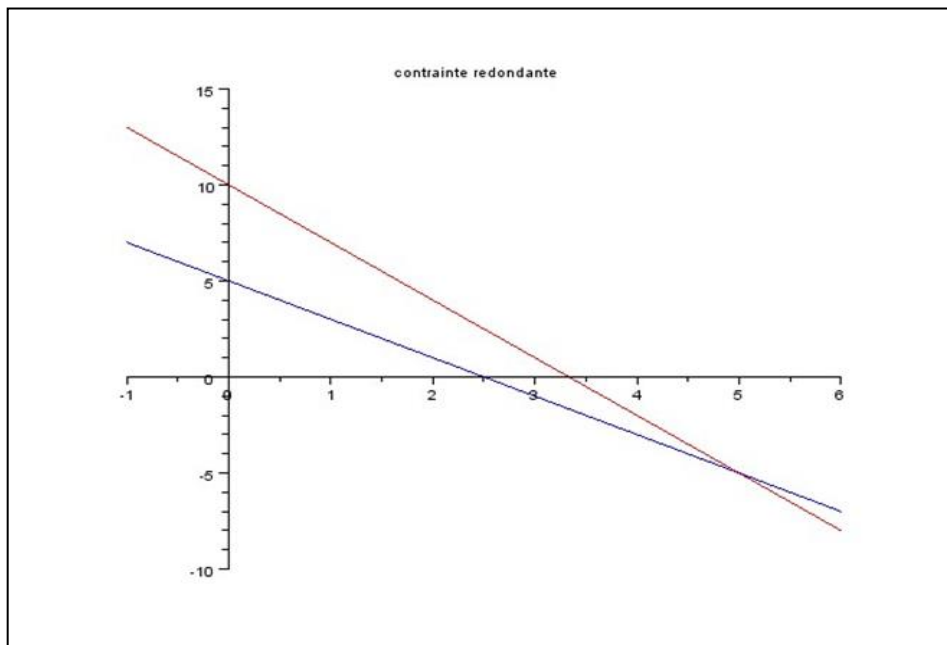


Figure 5.05 : Une contrainte redondante

Démonstration :

♣

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{22} + c_{21}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= (c_{11} - c_{21})c_{22} + c_{21}(c_{22} - c_{12}) \\ &= (c_{11} - c_{21})c_{22} - c_{21}(c_{12} - c_{22}) \\ &= (c_{12} - c_{22}) \left[\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} c_{22} - c_{21} \right] \end{aligned}$$

.

Comme

$$(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0 \text{ donc } \frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} < 0$$

et aussi

$$\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} c_{22} - c_{21} < 0$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{\Delta} = \frac{1}{\frac{c_{11} - c_{21}}{c_{22} - c_{12}} c_{22} - c_{21}} > 0$$

De même,

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{22} + c_{21}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= (c_{22} - c_{12})c_{11} + c_{12}(c_{11} - c_{21}) \\ &= (c_{22} - c_{12})c_{11} - c_{12}(c_{21} - c_{11}) \\ &= (c_{21} - c_{11}) \left[\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12} \right] \end{aligned}$$

.

Comme $(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) < 0$

donc

$$\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} < 0$$

et aussi

$$\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12} < 0$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{11} - c_{21}}{\Delta} = \frac{1}{\frac{c_{22} - c_{12}}{c_{21} - c_{11}} c_{11} - c_{12}} > 0$$

♦

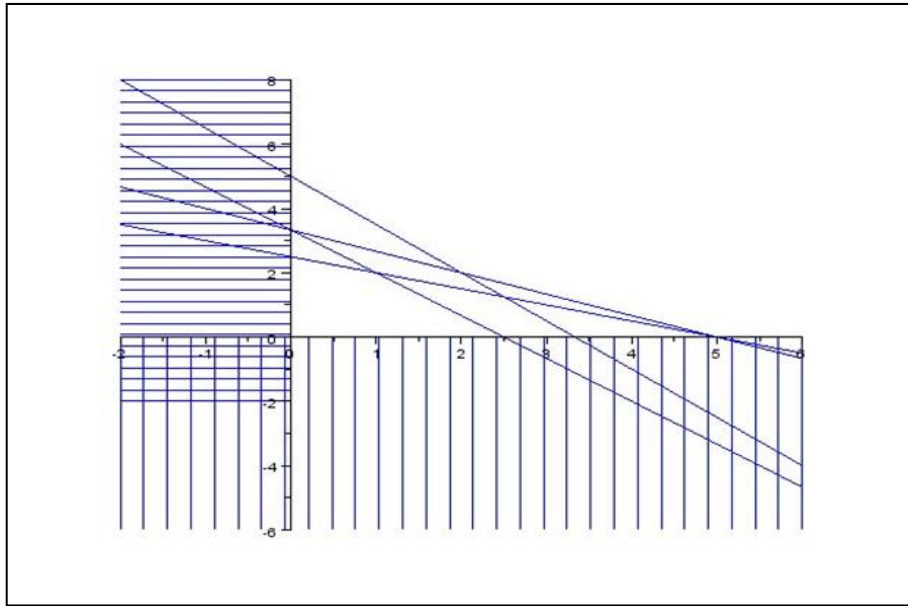


Figure 5.06 : Région admissible non vide

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 10 \end{cases}$$

L'origine est toujours solution.

Proposition 5.11

Dans le système
$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \leq 1 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Si le système d'équations
$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 1 \end{cases}$$
 admet un point d'intersection $A(\alpha_1; \alpha_2)$,

avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ alors la contrainte $c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1$ est redondante si $c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 \leq 1$

Démonstration :

♣

D'après le lemme 5.05

$$\alpha_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{\Delta} > 0 \text{ et } \alpha_2 = \frac{c_{11} - c_{21}}{\Delta} > 0 \text{ avec } \Delta = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \neq 0$$

le point $A (\alpha_1; \alpha_2)$ est solution de

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1 \text{ si } c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 \leq 1.$$

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 \leq 1 \text{ est redondante.}$$

◆

5.6.4.2 Algorithme pour plusieurs contraintes

Algo détection (A matrice des coefficients $n \times k$)

Début _____

saisir la matrice A

Transformer la matrice A en matrice A1

Pour $i=1$ à k , comparer les termes de chaque colonne pour deux lignes.

Si $c_{ij} \leq c_{1j}$, pour tout j .

Aors la j -ème contrainte est redondante.

Sinon il n'y a pas de redondance.

Fin pour i

Fin algo; _____

Exemple 5.09

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est réduite à

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système de contraintes à

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

5.6.4.2.1 Comparaison de deux contraintes

Considérons le système de deux contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \geq 1 \\ \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \geq 1 \end{cases} \quad (5.09)$$

Proposition 5.12

Si pour tout j , $1 \leq j \leq n$, $\frac{1}{c_{1j}} \geq \frac{1}{c_{2j}}$ où $c_{2j} \geq c_{1j}$, alors la contrainte $\sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \leq 1$

est redondante.

Dans ce cas, on remplace c_{2j} par 0 pour tout $1 \leq j \leq n$.

Démonstration :

♣

Soit $X_0 = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ une solution de la contrainte $\sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \leq 1$, alors $\sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \geq 1$ et donc

$$\sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \geq \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \leq 1$$

Toute solution issue de la première contrainte est aussi solution issue de la deuxième contrainte.

♦

Proposition 5.13

Le système de contrainte (5.02) a au moins une solution non nulle.

Démonstration :

♣

Considérons $a = \min (c_{i1}, 1 \leq i \leq k)$ strictement positif.

Le point $X_0 = (1/a, 0, \dots, 0)$ est une solution pour toutes les contraintes.

En effet, pour toute contrainte $c_{i1} \times \frac{1}{a} + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = c_{i1} \times \frac{1}{a} \geq 1$.

♦

5.6.4.2.2 Algorithme pour plusieurs contraintes

Algo détection (A matrice des coefficients $n \times k$)

Début _____

Saisir la matrice A

Transformer la matrice A en matrice A1

Pour $i=1$ à k

Comparer les termes de chaque colonne pour deux lignes si $c_{ij} \geq c_{lj}$ pour tout j alors la j -ème contrainte est redondante sinon il n'y a pas de redondance

Fin pour i

Fin algo; _____

Exemple 5.10

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

Sous forme matricielle,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est réduite à

$$AI = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système de contraintes à :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

5.6.4.3 Contraintes mixtes

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \leq 1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \leq 1 \\ c_{k+1,1}x_1 + c_{k+1,2}x_2 + \dots + c_{k+1,n}x_n \geq 1 \\ c_{k+2,1}x_1 + c_{k+2,2}x_2 + \dots + c_{k+2,n}x_n \geq 1 \\ \dots \\ c_{k+p,1}x_1 + c_{k+p,2}x_2 + \dots + c_{k+p,n}x_n \geq 1 \end{cases}$$

et supposons qu'il n'y a pas de redondance.

Notons

$$M_j = \max (c_{ij}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n) \text{ et } m_j = \min(c_{ij}, k+1 \leq i \leq k+p, 1 \leq j \leq n)$$

Proposition 5.14

Si pour tout j , $M_j < m_j$ alors, la région des solutions admissibles est vide.

Démonstration :

♣

En effet, il suffit de considérer le système

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \geq 1 \end{cases}$$

Si pour tout j , $1 \leq j \leq n$, $c_{2j} < c_{1j}$, alors il n'y a pas de solution.

♦.

Exemple 5.11

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

Dans le système :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

il n'y a pas de redondance.

De même pour le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Avec une contrainte du système (5.10) et une contrainte du système (5.11), on peut affirmer que la région des solutions admissibles est vide.

5.6.5 Matrice des contraintes à termes de signe quelconque

5.6.5.1 Contraintes d'exigences maximales

Lemme 5.05

Pour toutes contraintes de type :

$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq 1$, le point $O = (0,0,\dots,0)$ est toujours solution quels que soient les coefficients c_{ij} , $1 \leq j \leq n$ et s'il existe k , $1 \leq k \leq n$ tel que a_{ik} négatif, alors la partie positive de l'axe des x_k est toujours solution.

Démonstration :

♣

On a :

$$c_{i1} \times 0 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = 0 \leq 1 \text{ est toujours vraie.}$$

S'il existe k tel que c_{ik} est négatif, par exemple $k = 1$, alors

$$c_{i1} \times x_1 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = c_{i1} \times x_1 \leq 1 \text{ et } x_1 \geq 0 \geq \frac{1}{c_{i1}} \text{ est toujours vraie.}$$

♦.

Lemme 5.06

Dans le système (5.01), s'il existe une contrainte contenant un et un seul coefficient négatif c_{ij} , alors la contrainte est redondante si pour tout $k \neq i$ et pour tout $l \neq j$, $c_{il} \leq c_{kl}$.

Démonstration :

♣

On a :

$$c_{il} \leq c_{kl} \Leftrightarrow \frac{1}{c_{il}} \geq \frac{1}{c_{kl}},$$

$$c_{k1} \frac{1}{c_{i1}} + c_{k2} \frac{1}{c_{i2}} + \dots + c_{kn} \frac{1}{c_{in}} \leq c_{k1} \frac{1}{c_{k1}} + c_{k2} \frac{1}{c_{k2}} + \dots + c_{kn} \frac{1}{c_{kn}} \leq 1$$

♦.

Proposition 5.15

Dans le système (5.01), si tous les coefficients d'une contrainte sont négatifs, alors la contrainte est redondante.

Démonstration :

♣

D'après les lemmes 5.05 et 5.06, tous les axes de coordonnées sont dans la région des solutions admissibles.

♦.

5.6.5.2 Contraintes d'exigences minimales

Lemme 5.07

Dans le système de contraintes (5.02), quels que soient les coefficients, la région des solutions admissibles ne contient pas le point O.

Démonstration :



Si $c_{ij} < 0$, alors $c_{i1} \times x_1 + c_{i2} \times 0 + \dots + c_{in} \times 0 = 0 > 1$ est absurde.

♦.

Proposition 5.16

Dans le système de contraintes (5.02), si tous les coefficients d'une contrainte sont négatifs, alors la région des solutions admissibles est vide.

Démonstration :



D'après le lemme 5.07, la condition de positivité des variables de décision ne peut pas être satisfaite.

♦.

5.6.5.3 Contraintes mixtes

Dans un système de contraintes mixtes, il faut séparer le système de contraintes d'exigences minimales et le système de contraintes d'exigences maximales.

Les contraintes redondantes si elles existent, sont étudiées dans chaque système. Par contre l'existence de la région des solutions admissibles est étudiée dans le système général.

5.6.6 Algorithme général

Saisir la matrice principale des contraintes dans laquelle l'avant dernière colonne est constitué de 1 pour une contrainte d'exigence maximale et de -1 pour une contrainte d'exigence minimale.

Diviser pour chaque ligne, tous les termes par le dernier terme de sorte que la dernière colonne de la matrice principale des contraintes n'est constituée de 1.

Réarranger les lignes de telle sorte que dans la matrice, le groupe de contraintes d'exigences minimales suive le groupe des contraintes d'exigences maximales.

5.6.6.1 Algorithme Réduction

Entrée : A matrice des coefficients $n \times k$)

Sortie: A' matrice de coefficients de taille réduite

Début algorithme _____

Début_saisir la matrice A

Transformer la matrice A en matrice A1

Réarranger la matrice A en matrice A2 (matrice $n \times (k_1 + k_2)$) où les contraintes d'exigences minimales au nombre de k_2 suivent les contraintes d'exigences maximales au nombre de k_1

Pour $i=1 : k_1$

Détecter les signes des termes des contraintes maximales

Si tous les termes d'une contrainte sont négatifs, la contrainte est redondante Sinon comparer les termes de chaque colonne pour deux contraintes si $c_{ij} \geq c_{1j}$ pour tout j alors la j-ème contrainte est redondante et la j-ème contrainte est enlevée.

Sinon il n'y a pas de redondance

fin pour i

pour $i=k_1 + 1 : k_2$

Détecter les signes des termes des contraintes minimales

Si tous les termes d'une contrainte sont négatifs, la région des solutions admissibles est vide et l'algorithme s'arrête.

Sinon comparer les termes de chaque colonne pour deux contraintes si $c_{ij} \leq c_{1j}$ pour tout j alors la j-ème contrainte est redondante et la j-ème contrainte est enlevée.

Sinon comparer les termes de chaque colonne pour trois contraintes.

Fin pour i

Soit on s'arrête,

Soit la matrice A3 est réduite à la matrice A4 en enlevant les contraintes redondantes.

Fin algorithme

5.6.6.2 Complexité

La méthode géométrique est plus simple à réaliser mais plus complexe dans l'exécution. La méthode topo-géométrique permet une exécution moins complexe pour la détection des contraintes redondantes ou l'incompatibilité des contraintes.

En effet, la transformation de A en A1 est un $O(n \times m)$.

Il y a $\binom{m}{2}$ comparaisons de contraintes.

Il y a n -comparaisons des termes entre deux contraintes.

Dans la comparaison des contraintes, au pire des cas, il y a $\frac{m \times (m-1) \times n}{2}$ opérations donc un $O(m^2 \times n)$.

Finalement, l'algorithme est d'ordre polynomial.

Si $n = 100$ et $m = 100$, l'ordre de calcul est de 10^6 qui est assez considérable.

5.7 Méthode topo-géométrique

Considérons le système;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \end{cases}$$

En posant $\vec{u}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$

$$\text{pour } 1 \leq i \leq k \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

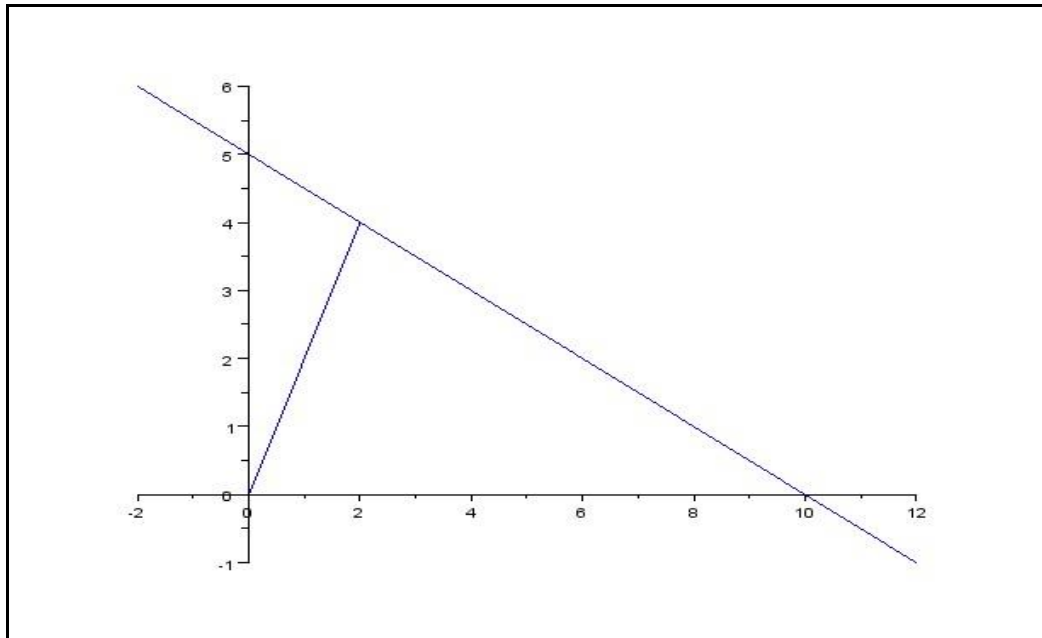


Figure 5.07 : *Projection de l'origine*

On peut toujours supposer que les $\vec{u}_i, 1 \leq i \leq k$ sont normés.

En effet, il suffit de remplacer :

$$u_{ij} \quad \text{par} \quad \frac{u_{ij}}{\sum_{j=1}^n u_{ij}^2} \quad \text{et} \quad b_i \quad \text{par} \quad \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n u_{ij}^2} .$$

\vec{u}_i est un vecteur normal unitaire à l'hyperplan $HP(\vec{u}_i, b_i)$ défini par l'équation:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Définition 5.01

Une condition suffisante pour qu'une contrainte k soit redondante est s'il existe une contrainte S_1 telle que:

$$S_1 \subset S_k.$$

Définition 5.02

Une condition suffisante pour qu'une programmation linéaire n'ait de solution est qu'il existe deux contraintes k et l telles que

$$S_l \cap S_k = \emptyset.$$

5.7.1 Localisation de Ω_i

Ω_i est la projection de l'origine sur la frontière de l'hyperplan $HP(\vec{u}_i, b_i)$.

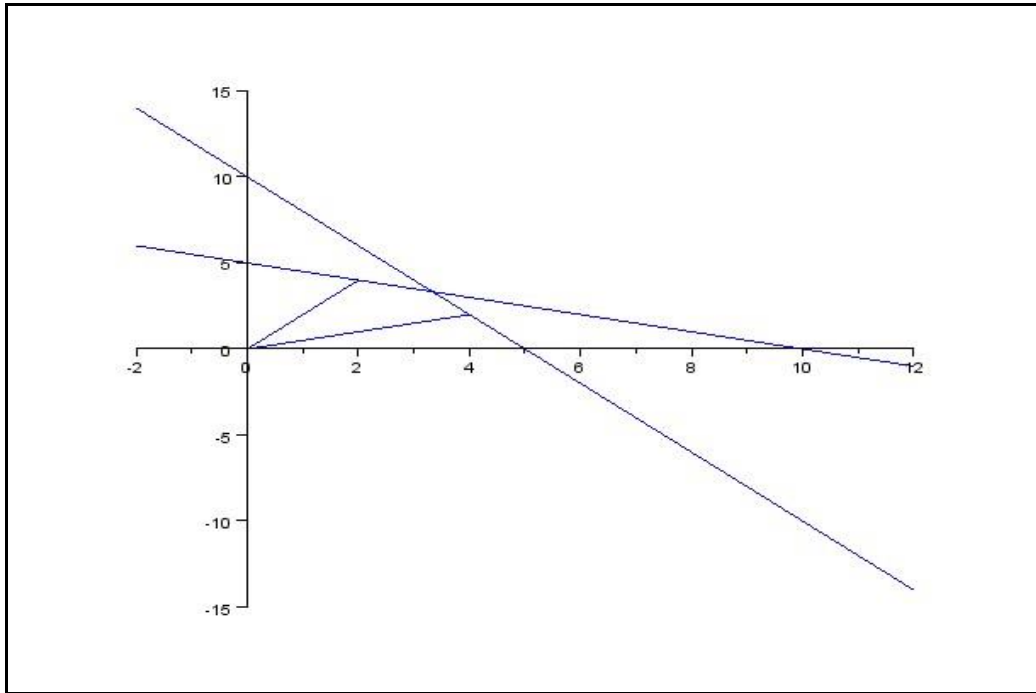


Figure 5.08 : Deux contraintes concourantes

Dans la notation, $HP(\vec{u}_i, b_i) = HP(A_i, b_i)$ où $\vec{OA}_i = \vec{u}_i$. $\vec{o}\Omega_i = \alpha \vec{u}_i$ avec $\alpha = \langle \vec{o}\Omega_i, \vec{u}_i \rangle = b_i$

I_{ik} est le point d'intersection de $HP(A_i, b_i)$ avec l'axe de recherche $R(0, \vec{u}_i)$.

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{a_{ik}}{b_i} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

La k-ème coordonnées est non nul si $a_{ik} \neq 0$.

$$N_i = \{j, j = 1 : n | a_{ij} > 0\}.$$

$$P_i = \{j, j = 1 : n | a_{ij} < 0\}.$$

$S_i = \{X \in \mathbb{R}^n | A_i.X \leq b_i, X \geq 0\}$ est le domaine des solutions acceptables associé à la contrainte i.

Lemme 5.08

Si pour tout $j, 1 \leq j \leq n, a_{ij} > 0$, alors $\Omega_i \in C_0^+$.

Démonstration :

♣

$$\text{En effet, } \vec{O}\Omega_i = \begin{pmatrix} b_i.a_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i.a_{in} \end{pmatrix} \text{ et pour tout } j = 1 : n, b_i.a_{ij} > 0$$

♦

Lemme 5.09

O, Ω_i et Ω_j sont alignés si $\vec{O}\Omega_i$ est colinéaire à $\vec{O}\Omega_j$ si et seulement si $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ ou $\vec{u}_i = -\vec{u}_j$.

Démonstration :

♣

u_i et u_j sont unitaires et il existe α tel que $u_i = \alpha.u_j$.

$$|u_i| = |\alpha|. |u_j| = 1 \text{ et } |\alpha| = 1 \text{ soit } \alpha = \pm 1$$

Proposition 5.17

Si O, Ω_k et Ω_l sont alignés dans C_0^+ , alors la contrainte :

$$\sum_j^n a_{kj}x_j \leq b_k \text{ est redondante si } b_k \geq b_l.$$

♦

Démonstration :

♣

D'après le lemme 5.07,

Pour tout $1 \leq j \leq n$, $a_{kj} = a_{lj}$ et $\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \leq b_l \leq b_k$

Nous avons alors la figure 5.09 ci-dessous:

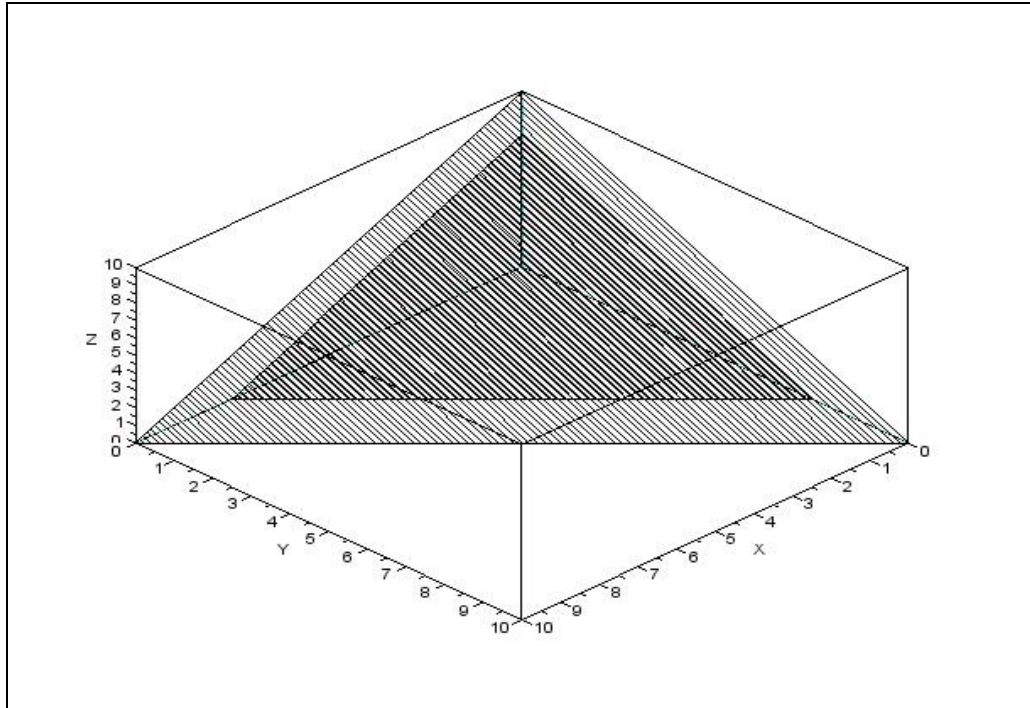


Figure 5.09 : Contraintes parallèles

Les système associé au graphique est:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5 \end{cases}$$

Les deux contraintes sont parallèles. L'une est redondante

♦

Proposition 5.18

Si pour tout j , $j = 1, \dots, n$, $a_{ij} < 0$, alors $\Omega_i \in C_0^-$

et la contrainte: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ est redondante.

Démonstration :

♣

En effet, $\vec{\Omega}_i = \begin{pmatrix} b_i \cdot a_{i1} \\ \vdots \\ b_i \cdot a_{in} \end{pmatrix}$ et pour tout $j = 1 : n$, $b_i \cdot a_{ij} < 0$.

Les coordonnées de Ω_i sont négatives et $\Omega_i \in C_0^-$

♦

Lemme 5.10

S'il existe au moins un j , $j = 1 : n$, tel que $a_{ij} < 0$ et un $k \neq j$, $k = 1 : n$, tel que $a_{ik} > 0$, alors $\Omega_i \in \bar{C}_0^+ \setminus C_0^-$.

Proposition 5.19

Dans le système:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{cases}$$

si $\frac{b_2}{a_{21}} \geq \frac{b_1}{a_{11}} > 0$ et $a_{12} > 0$, $a_{22} < 0$ alors

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ est redondante.

Démonstration :

♣

En effet, d'après le lemme 5.07

$$\Omega_1 \in C_0^+ \quad \text{et} \quad \Omega_2 \in \bar{C}_0^+ \setminus C_0^- \cdot \frac{b_2}{a_{21}} \geq \frac{b_1}{a_{11}} > 0$$

Ce qui veut dire que:

$$a_{12} \cdot \frac{b_2}{a_{21}} + 0 \cdot a_{21} \geq a_{11} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} = b_1 \quad \text{et} \quad I_{21} \notin S_1 \quad \text{et} \quad S_1 \subset S_2.$$

♦

Proposition 5.20

Plus généralement, si

$$\Omega_k \in \bar{C}_0^+ \setminus C_0^-.$$

et pour tout

$$j \in P_k \cap P_l, \quad l \neq k, \quad \frac{b_k}{a_{kj}} \geq \frac{b_l}{a_{lj}},$$

alors la contrainte k est redondante.

5.7.2 Illustrations

Les figures ci-dessous permettent de distinguer les cas de redondances

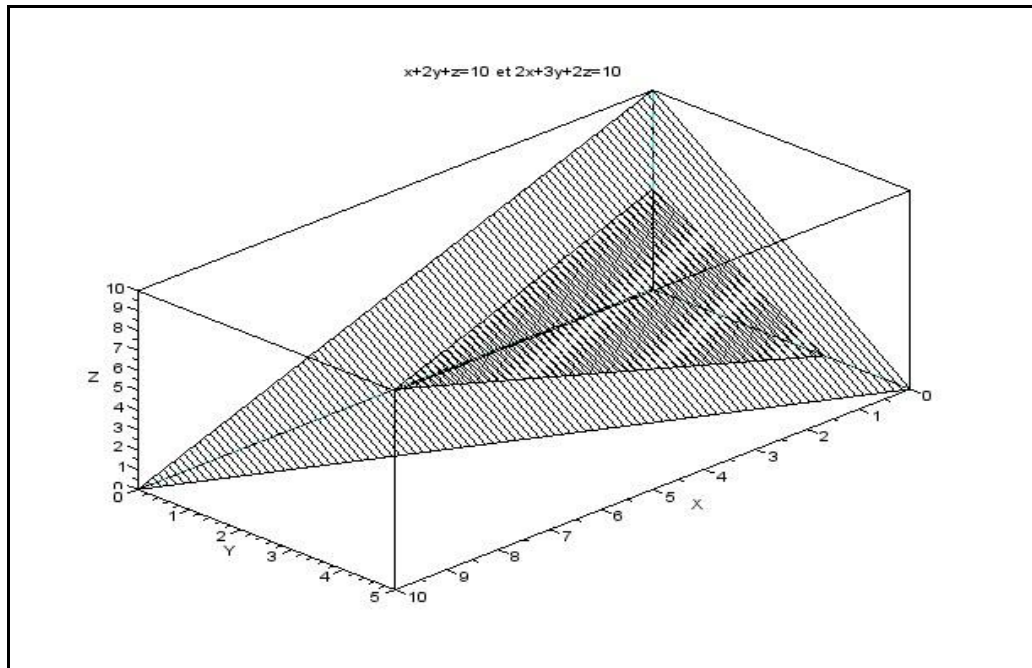


Figure 5.10 : Une contrainte redondante

Les deux contraintes sont pseudo-parallèles. L'une est donc redondante car dans C_0^+ , les deux hyperplans n'ont pas de points d'intersection.

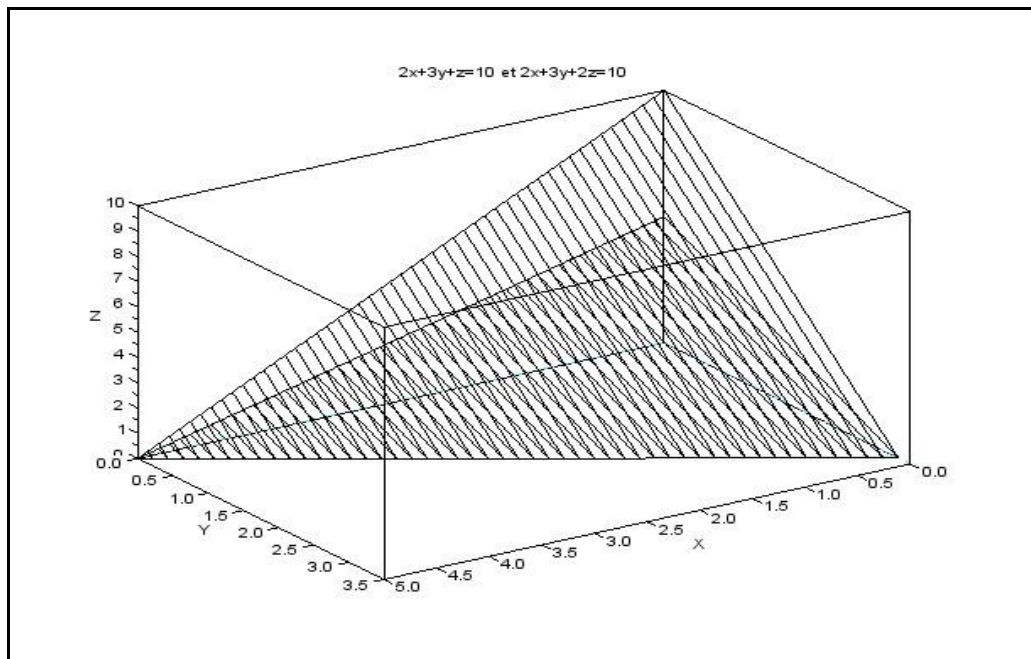


Figure 5.11 : Une autre contrainte redondante

Les deux contraintes sont encore pseudo-parallèles avec les mêmes points d'intersection sur quelques axes de recherche. L'une au dessus est redondante.

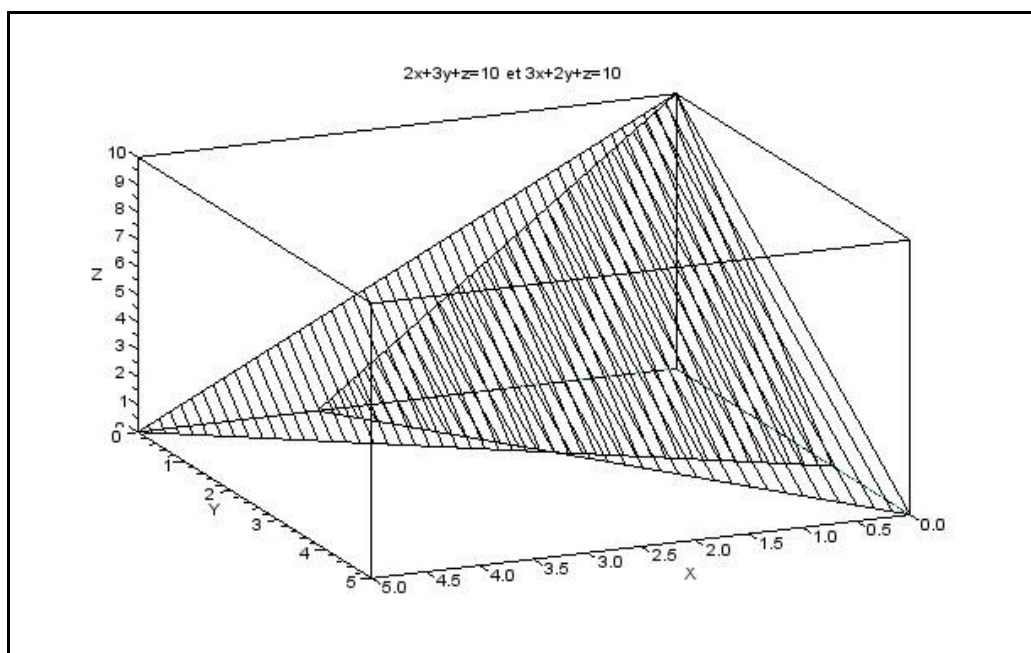


Figure 5.12 : Deux contraintes non redondantes

Les deux hyperplans se rencontrent sur un plan de coordonnées. Il n'y a pas de redondance.

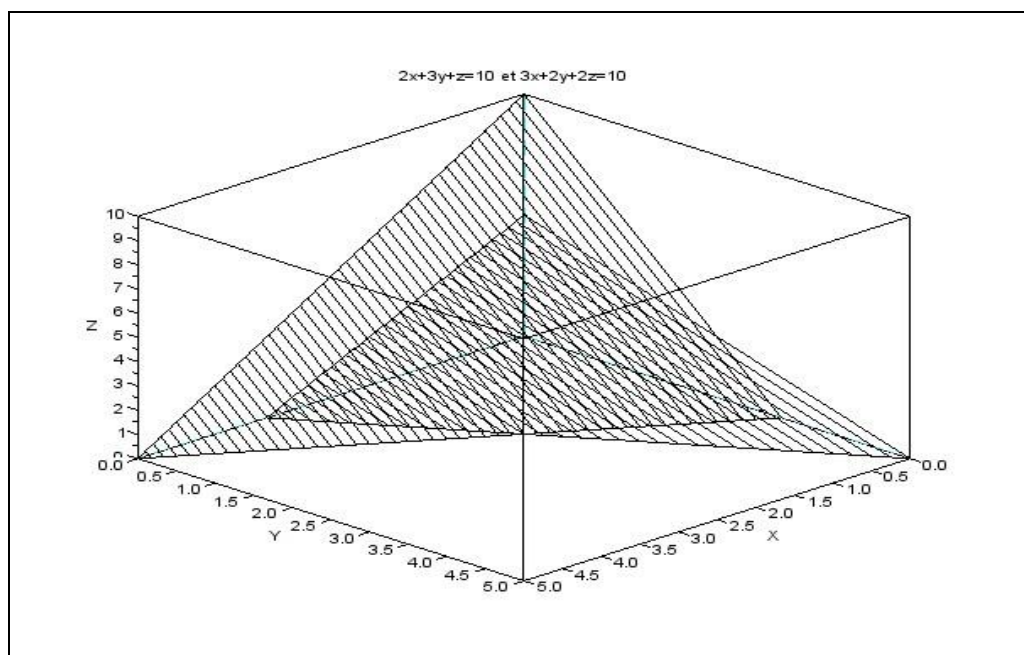


Figure 5.13 : Deux autres contraintes non redondantes

Sur presque dans tous les axes de recherches, les hyperplans se rencontrent. Il suffit que deux d'entre eux se rencontrent pour qu'il n'y ait pas de redondance.

5.7.3 Algorithme général

L'algorithme se déroule en trois étapes :

- Saisie des données
- Test des données
- Constatation

Il est basé sur les calculs matriciels.

5.7.3.1 Algo Topo-Géométrie

Entrée: A matrice des coefficients $n \times k$

Sortie :

Debut algo

Saisir les matrices A et b, normaliser la matrice A.

Calculer la matrice Ω des Ω_i , projection du point O sur l'hyperplan $HP(A_i, b_i)$.

Exprimer pour chaque ligne la matrice carrée I_i d'ordre n des intersections I_{ik} de $HP(A_i, b_i)$ avec les axes de recherche $R(0, u_i)$.

Tester les colonnes de Ω .

Si tous les termes de la colonne j de O sont négatifs, la contrainte j est redondante et on enlève cette contrainte.

Sinon, on compare les colonnes I_k^j et I_l^j des matrices I_k et I_l .

Si tous les termes de I_k^j sont inférieurs aux termes de I_l^j , alors la contrainte l est redondante et on enlève cette contrainte.

Sinon, il n'y a pas de redondance.

Fin pour si

Fin

algorithme

Exemple 5.11

Considérons le système:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10 \end{cases}$$

Saisie des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Normalisation de matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{\sqrt{31}} & \frac{3}{\sqrt{31}} & \frac{3}{\sqrt{31}} & \frac{4}{\sqrt{31}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{5}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{15}} \\ \frac{10}{\sqrt{31}} \\ \frac{10}{\sqrt{7}} \\ \frac{10}{\sqrt{11}} \\ \frac{10}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Matrice des projections Ω_i

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{30}{31} & \frac{20}{7} & \frac{20}{\sqrt{11}} & 2 \\ 2 & \frac{30}{31} & \frac{10}{7} & \frac{30}{11} & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{30}{\sqrt{31}} & \frac{10}{\sqrt{7}} & \frac{10}{\sqrt{11}} & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{40}{\sqrt{31}} & \frac{10}{\sqrt{7}} & \frac{50}{\sqrt{11}} & 1 \end{pmatrix}$$

Tous les termes de Ω sont positifs.

Matrices des intersections I

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$I_5 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

5.7.3.2 Resultats

Tous les termes de I_1 sont inférieurs aux termes de I_2 , donc la deuxième contrainte est redondante et on retire cette contrainte dans le système.

Tous les termes de I_3 sont inférieurs aux termes de I_4 , donc la quatrième contrainte est redondante et on retire également cette contrainte dans le système.

Tous les termes de I_3 sont inférieurs aux termes de I_5 , donc la cinquième contrainte est redondante et on enlève cette contrainte dans le système.

Finalement, le système des contraintes est réduit à :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \end{cases}$$

Les contraintes associées aux inéquations (2), (4) et (5) sont redondantes.

5.7.3.3 Autres résultats

Supposons que la première contrainte est telle que :

$$-x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 10,$$

alors tous les termes de Ω_1 sont négatifs et du coup, cette contrainte est redondante.

Par contre, si l'un au moins des termes de la deuxième contrainte est négatif, par exemple :

$$-3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 10$$

cette contrainte n'est plus redondante. En effet, la première coordonnée de Ω_2 est négative, et la comparaison ne donne rien de concrète.

L'incompatibilité n'est étudiée que dans les cas où il existe des contraintes d'exigences minimales.

Dans ce cas, si tous les termes d'une contrainte sont négatifs, en d'autres termes les coordonnées de Ω_i sont négatives et Ω_i est dans C_0^- , il y a incompatibilité.

5.7.4 Complexité

Le produit scalaire est un $O(n)$.

La normalisation de la matrice nécessite $m \times n$ opérations.

La matrice des projections est obtenue en $m \times n$ -opérations.

De même, la matrice carrée des projections est obtenue en $m \times n$ -opérations.

La comparaison des termes est de l'ordre de $m \times \binom{n}{2} m \times n^2$ opérations.

5.8 Conclusion

Nous avons établi à l'issue de ce chapitre V que dans la méthode des limites, les variables de décision doivent être bornées. Dans le cas contraire, pour avoir les bornes, on revient à la méthode classique du simplexe, ce qui n'a aucun intérêt dans l'optique du présolve.

Quant à la méthode de programmation linéaire pour détecter les contraintes redondantes, on résoud entièrement le problème pour déterminer le profit maximal en tant que référence dans les comparaisons. La détection dépend donc de la fonction économique ce qui n'est plus dans le cadre de présolve.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons développé à travers ce travail une composante du domaine de la recherche de résolution de problème de programmation linéaire qui reste encore ouvert. Cette constituante touche surtout la minimisation du coût de résolution d'un tel problème. De nombreux chercheurs ont travaillé sous de différentes dimensions depuis le XIX^e siècles par des approches mathématiques mais l'apogée est au milieu des années cinquantes. G. Dantzig était l'un des grands chercheurs qui marquait cette reprise par la fameuse méthode du simplexe.

Une reprise de cet élan de résolution de problème de programmation linéaire a été marquée de nouveau par N. Karmarkar dans les années quatre vingt par l'introduction de la théorie des points intérieurs.

La présente thèse dénommée « Modélisation topo-géométrique MZ de recherche de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire » où le MZ représente les initiaux des prénoms des deux promoteurs de la méthode Marc et Zo a développé une méthode de recherche de contraintes redondantes utilisant à la fois la topologie et la géométrie. L'esprit de base à cet effet est alors la représentation graphique des contraintes qui sont associées à la fonction objectif, plus précisément qui lient les différentes variables définissant l'objectif. Cette méthode topo-géométrique MZ a permis d'une part d'identifier les contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire, d'autre part donc de minimiser le coût de résolution dudit problème car la ou les contrainte redondante va être enlever du système et réduit en conséquence le coût de résolution.

Force est de constater que la représentation graphique n'est profitable que pour le cas de nombre de variables assez faible de l'ordre de deux ou trois. Pour remédier à de tel problème le modèle topo-géométrique MZ fait appel à la topologie et aux différents types de figures géométriques dans un espace à plusieurs dimensions, notamment les polyèdres, les hyperplans,

La thèse dans cette démarche d'utilisation du modèle topo-géométrique MZ distingue le cas de vraies contraintes redondantes entre deux décision-actions et le cas de pseudo contraintes rendondantes qui sont décrits respectivement dans le chapitre 3 et le Chapitre 4.

La simulation apportée au chapitre 5 et l'étude de la complexité comparées avec d'autres résultats empiriques permettent d'avancer que le modèle topo-géométrique MZ derecherche

de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire est une démarche qui contribue à la minimisation du coût de résolution d'un problème linéaire.

Applications

Les domaines d'application des problèmes de programmation linéaire don de la recherche de contraintes redondantes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans des réseaux) que dans les secteurs de l'industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transports (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance.

La technique de la programmation linéaire est couramment appliquée dans l'industrie pétrolière. C'est l'une des industries, si ce n'est la principale qui utilise quotidiennement la PL (programmation linéaire). Elle est considérée comme l'outil qui permet au raffineur de faire la détermination optimale de production d'une raffinerie. Pour ce faire, le programme doit tenir compte d'un certain nombre de contraintes telles que bruts disponibles, leurs rendements et les qualités des coupes, spécifications des produits à fabriquer, limitations de débouchés pour certains produits, capacités des unités, modes de réglages des installations, capacités de stockage disponibles dont certaines peuvent être redondantes entre elles.

La PL donc la recherche de contraintes redondantes peut également être utilisée dans d'autres domaines du raffinage, par exemple :

- calculs de la composition optimale des mélanges de produits (carburants, gasoils, fuels) en tenant compte des spécifications.

- l'optimisation dans l'utilisation des installations,

- calculs de l'obtention du meilleur préchauffage des bruts et des charges,

- détermination du meilleur équilibre «vapeur-électricité» d'une raffinerie.

En dehors des raffineries, on peut utiliser la PL dans la recherche opérationnelle pour :

- bâtir des plans à long/moyen et court termes d'une compagnie pétrolière,

- optimiser le fonctionnement d'une flotte de tankers et la mise en place des produits.

Toutefois, ce modèle topo-géométrique MZ de recherche de contraintes redondantes dans un

problème de programmation linéaire présente ses limites dans la thèse car elle n'a été utilisée que pour l'étude de cas de deux contraintes délimitées par deux hyperplans.

Perspectives

L'ouverture de la recherche dans cet axe repose alors sur :

- la détermination de contraintes redondantes dans le cas de la considération de trois contraintes ;

- La récurrence sur l'observation de plusieurs contraintes voire de toutes les contraintes qui sont associées à un problème de programmation linéaire dans cette démarche de recherche de contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire par le modèle développé MZ ou autres.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1.01] W. J. Baumaul, “*Economic theory and operations analysis*”. Englewoo Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.,. Pp. x, 438. 1961
- [1.02] R. Dorfman et P. A. Samuelson, “ *Linear programming and economics analysis*”, McGraw-Hill, Tokyo 1958.
- [1.03] P. A. Samuelson, R. Dorfman, “ *Linear programming and economics analysis*”, McGraw-Hill, Tokyo 1958.
- [1.04] G. B. Dantzig, « *Applications et prolongements de la programmation linéaire.* » Dunod, Paris, 1966. Linear programming. Springer, New York, USA, 1997.
- [1.05] L. G. Khachiyan, «*Polynomial algorithms in linear programming*», Zh. Vychisl. Mat.Fiz. 20:1, pp51–68, U.S.S.R. 1980
- [1.06] N.Z. Shor, «*Class of global minimum bounds of polynomial functions.* » Cybernetics, 23(6):731-734, 1987.
- [1.07] A. Nemirovski, “ *Robust optimization*”, Prindeton Unversity Press 41, 2009.
- [1.08] L. G. Khachiyan, «*Polynomial algorithms in linear programming*», Zh. Vychisl. Mat. Mat.Fiz. 20:1 pp. 51–68; U.S.S.R. 1980
- [1.09] N. Karmarkar. «*A new polynomial-time algorithm for linear Programming*». Combinatorica, Volume 4, Issue 4, pp 373–395.1984.
- [1.10] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, «*Linear programming*». Springer, New York USA, 1997.
- [1.11] Achterberg 2009, « *SCIP: solving constraint integer programs*», Publication of the Mathematical Optimization Society Volume 1, Issue 1, pp 1–4120 January 2009
- [1.12] G.L. Nemhauser et al, « *A Branch-and-Price Algorithm for the Generalized Assignment Problem*». Martin Savelsbergh Georgia Institute of Technology School of Industrial and Systems Engineering Atlanta,USA. 1994

- [1.13] FICO, « *Xpress-Mosel user guide* ». Published by Dash Optimization Ltd Copyright Dash Associates 1998-2003.
- [1.14] Gurobi, « *Gurobi optimizer reference manual* ». Version 4.0, Gurobi Optimization, Copyright c 2009.
- [1.15] Bixby et al v. KBR 2000, Inc. et al, No. 3:2009cv00632 - Document 528 (D. Or. 2012)
- [1.16] A. Charnes and W. W. Cooper, « *Management model and Industrial Application of Linear Programming* » Vol. I and II Wiley, New York, 1961.
- [1.17] V. Neumann, « *Springer and Mathematical Programming Society* ». Springer, 2009
- [1.18] Zions, « *Taille de réduction techniques de programmation linéaire et leurs Applications* ». Thèse, Carnegie Institute of Technology, 1965.
- [1.19] Lisy, « *Metody omezeni nalezini vulohach pro programovani redundantnich Ekonomicko Matematic linerniho.* ». Obzor, vol. 7, no 3, pp. 285-298, 1971.
- [1.20] Zions, « *Taille de réduction techniques de programmation linéaire et leurs Applications* ». Thèse, Carnegie Institute of Technology, 1965.
- [1.21] Gal, « *Faiblement contraintes redondantes et leur impact sur l'après analyse Optimale* ». European Journal of Operational Research, vol.60, pp. 315-326, 1979.
- [1.22] A. L et L.. Brearley, G. Mitra, and H. P. Williams, « *Analysis of mathematical programming problems priority applying the simplex algorithm* » Mathematical Programming, vol. 8, pp. 54-83, 1975.
- [1.23] J. Telgen « *Identification des contraintes redondantes et implicite des principes* » Coal Newsletter, Vol. 2, 1980.
- [1.24] Stojkovic et Stanimirovic, « *Two Direct méthodes dans linéaire ogramming* » European Journal of Operational Research, vol. 131, no 2, pp. 417-439, 2001.
- [1.25] Paulraj et al. Chellappan Paulraj, C. et T. R. Natesan, « *Une approche heuristique pour identification des contraintes redondantes dans les modèles de programmation linéaire* ». International Journal of Computer mathématiques,

- vol. 83, no 8-9, pp. 675-683, 2006.
- [1.26] I. Ioslovich, « *Robust reduction of a class of large-scale linear programs* ». Siam journal of optimization, vol.12,no.1, pp.262 – 282, 2001.
- [1.27] A.L. Brearley, G. Mitra, and H. P.Williams, « *Analysis of mathematical programming problems priorto applying the simplex algorithm* ». Mathematical Programming, vol. 8, pp. 54–83, 1975.
- [1.28] Telgen, « *Identification des contraintes redondantes et implicite des principes d'égalité dans système de contraintes linéaires* ». Management Science , vol. 29, no 10, pp. 1209-1222, 1983.
- [1.29] S. Paulraj, C. Chellappan et T. R. Natesan, « *Une approche heuristique pour identification des contraintes redondantes dans les modèles de programmation linéaire* ». International Journal of Computer mathématiques, vol. 83, no 8-9, pp. 675-683, 2006.
- [1.30] P.Sumathi et P. Balachander, “*A New Tactic for Finding Irrelevant Constraints in Linear Programming Problems*”, International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 6, Issue 3, ISSN 2229-5518, March-2015
- [1.31] I.Ioslovich, « *Robust reduction of a class of large-scale linear programs* ». Siam journal of optimization, vol.12,no.1, pp.262 – 282, 2001.

ANNEXES

MADA-ETI, ISSN 2220-0673, Vol.2, 2016, www.madarevues.gov.mg

MODELE TOPO-GEOMETRIQUE MZ : CONCEPT DE BASE

Andrianarizaka Marc Tiana,¹ Robinson Matio,² Andriamanohisoa Hery Zo³.

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénieur et de l'Innovation (ED-STII)

Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Application (EAD-SCA)

Université d'Antananarivo

¹methiana@yahoo.fr, ²mat-robinson2000@yahoo.fr, ³aheryzo@gmail.com

Résumé : Cet article présente le concept de base du modèle TOPO-GEOMETRIQUE MZ sur la recherche des contraintes redondantes dans la résolution des problèmes de programmation linéaire. Il décrit quelques travaux déjà menés dans le domaine et les classes d'objet mathématiques du plus simple au plus compliquées, permettant de modéliser le concept réel de la prise de décisions. Les notions globales sur la redondance des contraintes d'un problème de programmation linéaire, les éléments ou objets mathématiques de bases nécessaires pour l'élaboration du modèle « Topo-géométrie MZ » sont développées également dans cet article.

Mots clés : Programmation linéaire, contraintes, contraintes redondantes, algorithme.

Abstract: This paper presents the basic concept of the TOPO-GEOMETRIC MZ model on the search for redundant constraints in the solving of linear programming problems. He describes some work already carried out in the field and mathematical object classes from the simplest to the most complicated, allowing to model the real concept of the decision-making. The general notions on the constraint redundancy of a linear programming problem, the basic mathematical elements or objects necessary for the development of the "Topo-geometric MZ" model are also developed in this article.

Keywords: Linear programming, constraints, redundant constraints, algorithm.

1 INTRODUCTION

De nombreux chercheurs ont proposé différents algorithmes pour identifier les contraintes redondantes en vue de les retirer de l'étude pour obtenir un modèle réduit pour la programmation linéaire. En 1965, Zions suggérait quelques améliorations à la mise en œuvre de la méthode de démarrage, mais qui n'a pas permis d'atteindre une valeur pratique. Par ailleurs, un certain nombre de méthodes qui traitent la redondance ont été mises au point, dont la plus connue est celle de la méthode d'énumération géométrique se basant sur la

création d'un certain nombre de situations dans lesquelles la redondance peut être reconnue immédiatement sans plus de calculs.

En 1971, Lisy a utilisé les règles établies par Ziont pour identifier toutes les contraintes redondantes dans des systèmes de contraintes linéaires. Gal développe cette approche par l'ajout de règles pour les situations dans lesquelles les contraintes peuvent être immédiatement identifiées comme étant non redondantes. Il a proposé une autre méthode pour classer les contraintes aussi bien les contraintes redondantes que nécessaires. Ils produisent des

résultats qui sont inconditionnellement corrects. Plus tard Caron et al. combinent les méthodes ci-dessus par ajout de règles de Traitement de la dégénérescence.

Par ailleurs, Brearly et al. ont proposé une méthode simple pour identifier les contraintes redondantes à partir d'un système de contraintes linéaires. Cette méthode consiste à analyser les limites inférieures et supérieures des variables. Telgen a proposé une méthode déterministe pour identifier les contraintes redondantes par l'utilisation de ratio minimal comme dans la méthode du simplex. Stojkovic et Stanimirovic proposaient une méthode pour identifier les contraintes redondantes par l'application du principe de maximum et minimum. Paulraj et al. ont également présenté une méthode heuristique pour identifier les contraintes redondantes en utilisant l'interception des contraintes de matrice de problème de programmation linéaire. De leur côté, Gutman et Ioslovich ont décrit une nouvelle approche pour prétraiter les problèmes à grande échelle non négatif afin de réduire les dimensions considérablement en définissant et en supprimant les contraintes redondantes et les variables. Ces différents travaux ne peuvent que justifier l'intérêt de la recherche nouveaux modèles ou techniques de recherche de contraintes redondantes dans l'optique de la minimisation du coût de la résolution d'un problème de programmation linéaire.

2 Contraintes redondantes

Une contrainte redondante est une contrainte qui peut être supprimé d'un système de contraintes linéaires sans changer la région faisable.

Examiner le système suivant de m et contraintes d'inégalité linéaire non négatif n - variables ($m \geq n$) :

$$AX \leq B, \quad X \geq 0, \quad (1.1)$$

Où $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $X \in R^n$, et $0 \in R^n$.

Soit,

$A_i x \leq b_i$ la i ème contrainte du système (1.1) et

$$S = \{X \in R^n / A_i x \leq b_i, X \geq 0\}$$

le domaine de solution acceptable associée au système (1.1).

Soit

$$S_k = \{X \in R^n / a_i X \leq b_i, X \geq 0, j \neq k\}$$

le domaine de solution acceptable associé à la contrainte $a_i X \leq b_i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq k$ du système.

La k ème contrainte :

$A_k X \leq b_k \quad (1 \leq K \leq m)$ est redondante pour le système (1.1) si et seulement si $S = S_k$.

Définition 2.1.

Les contraintes redondantes peuvent être classées comme faiblement et fortement contraintes redondantes

Contraintes faiblement redondantes

La contrainte $A_i X \leq b_i$ est faiblement redondante si elle est redondante et

$$A_i X = b_i \text{ pour } X \in S.$$

Contraintes fortement redondantes

La contrainte $A_i X \leq b_i$ est fortement superflue si elle est redondante et

$$A_i X < b_i \text{ pour tous } X \in S.$$

Contrainte obligatoire

La contrainte obligatoire est celle qui passe par le point solution optimale. Il est également appelé contrainte pertinente.

Contrainte non contraignante

La contrainte non contraignante est celle qui ne passe pas par la solution optimale. Mais elle peut délimiter le domaine de solution acceptable.

1.1 Les objets mathématiques du modèle topogéométrique MZ

1.0.1 Les scalaires

Tout nombre réel symboliquement un scalaire sera représenté par une lettre de l'alphabet latin ou grecque au minuscule.

Exemple : $x, y, z, \dots, \alpha, \dots$

1.0.2 Les indexes

C'est un nombre entier positif ou nul, que nous attacherons à un objet d'un modèle, en guise d'identificateur unique. Symboliquement les indexes seront représenter par i, j, k, \dots

- Pour représenter les valeurs possibles d'un indexes on utilisera la notions suivantes :

$i=1, 2, \dots, n$ pour signifier que l'indexe i varie de 1 jusqu'à n .

- Quand un objectif x modèle est indexé on écrit :

$$(xi)_{i=1, \dots, n}$$

qui est une représentation condensée de :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Un objet peut avoir deux indexes comme identificateurs. C'est le cas par exemples des matrices.

On la représente par $(a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ qui désigne la

$$\text{matrice : } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pour exploiter pleinement les indexes, on utilisera également le symbole \sum (somme)

Ainsi, pour représenter $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ on

écrira tout simplement $\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$

Une décision-action est dite admissible si elle satisfait tous les contraintes (1.2) et (1.3)

1.1 les objets élémentaires

1.1.1 Les espaces des décisions

Reprenons les problèmes PPL, sous sa forme connu trouver les inconnues-réelles x_1, x_2, \dots, x_n qui maximisent :

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

Et qui satisfont les conditions suivantes :

i)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

ii)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.3)$$

où les coefficients:

$$(c_j)_{j=1, \dots, n}; (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}; \text{ et } (b_i)_{i=1, \dots, m} \text{ sont des éléments de } \mathbb{R}$$

Chaque ligne des conditions (1.2) est appelé contraintes technique. Les conditions (1.3) sont appelées contraintes de non-négativité.

2.1.1 définition1 : décision-action-points-vecteurs

On appelle décision-action tout n-uplet :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{où } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ sont des éléments de } \mathbb{R}$$

On la notera par la suite :

$$(x_j)_{j=1, \dots, n}$$

Mathématiquement, on voit que c'est un élément de \square^n relativement à une base donnée. C'est aussi un point de l'espace affine \square^n relativement à un repère donné.

Une décision action sera représentée par un point affine. Ce qui nous amène à la définition repère de décision-action

Notation : une décision action est notée par une lettre grecque au majuscule.

2.1.2 définition2 : repère de décision - action – espace de décision

Nous appelons repère de décision-action, le repère géométrique orthonormé positif, noté :

$$(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

rattaché au problème PPL sur-mentionné. Dans ce repère l'origine géométrique O a une signification particulière : il représente la décision de ne rien faire, c'est-à-dire, que si O est présenté par :

$$\begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \vdots \\ x_{on} \end{pmatrix}, \quad x_{o1} = x_{o2} = x_{o3} = \dots = x_{on}$$

A chaque variable de décision x_j correspond la valeur unitaire U_j .

L'espace affine élément de \square^n , muni du repère $(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$ est appelé espace des décisions relatif au problème PPL à résoudre.

Malgré cette ressemblance frappante avec la géométrie affine euclidienne, nous présenterons d'abord un aspect limitatif.

2.1.3 postulat 1

Dans la théorie topogéométrique MZ (TGMZ)

Le repère affine orthonormé de l'espace de décision action du problème PPL à résoudre est unique.

Ce postulat signifie que :

- Le concept de changement de base n'existe pas.
- Le concept de changement d'origine n'existe pas.

2.2 opération sur les décision-action

Soit un problème PPL donné.

D'après 2.1.1 une décision est représentée par un point de l'espace des décisions action, et par un vecteur de l'espace vectoriel \square^n .

Cette double nature (à la fois affine et vectorielle) des décisions action est très importante, elle permet d'exprimer :

- La création d'une autre décision action repère partir de décisions action existantes.
- La « recherche » d'une autre décision action suivant une direction donnée.

2.2.1 amplification d'une décision action

Soit l'espace de la décision action relative au repère $(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$.

Soit X_o une décision action et α un nombre réel positif donné.

On appelle « amplification de X_o à l'aide de α », la génération d'une décision action X telle que vectoriellement :

$$X = \alpha X_o$$

Mathématiquement il s'agit donc la multiplication du vecteur X_o par le scalaire α .

2.2.2 additions de deux décisions action

Soient X_o et X_1 deux décisions action dans un PPL. On appelle addition de X_o et X_1 , la création d'une nouvelle décision action X telle que vectoriellement :

$$X = X_o + X_1$$

Remarque1 : la combinaison de 2.2.1 et 2.2.2 nous permet de modéliser le concept de « combinaison » combinatoire de deux ou plusieurs décisions action

Soit les décisions actions X_1, X_2, \dots, X_k . On appelle combinaison conique de ces décisions actions, la nouvelle décision X définie par :

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ soit des nombres réel positif ou non

Remarque 2

De la remarque précédente, il est clair que la décision satisfait les contraintes (2.3) si elle est une combinaison conique de U_1, U_2, \dots, U_n .

C'est à dire :

$$X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n \quad \text{avec} \\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$$

Montrons que la réciproque est vraie.

Soit X une décision action satisfait la contrainte (1.3)

$$X = (x_i) \quad \text{avec} \quad x_i \geq 0 \quad \forall_{ji} = 1, \dots, n$$

or

$$(x_j) = \sum_{j=1}^n x_j U_j \quad \text{avec} \quad x_j \geq 0$$

CQFD

2.2.3 axes de recherche partant d'une décision action X_0 et de direction vecteur de décision action

Soit X_0 et V des décisions actions. On appelle axe de recherche portant de X_0 et de direction U ensemble des décisions actions noté $\mathcal{R}(X_0, V)$ définie par :

$$\mathcal{R}(X_0, V) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } X = X_0 + \alpha V, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

Mathématiquement il s'agit du rayon affine issu de X_0 et de vecteur directeur U .

Conceptuellement l'idée de recherche est justifié par le fait qu' on pratique, tout solveur et basé sur un algorithme de recherche en partant d'une point initial ainsi, à partir d'une décision action X_0 donnée, et une direction de recherche V donnée, on

peut « sonder » les point de l'unité des décision qui vont satisfaire les contraintes (1.2) et (1.3).

Cette idée de recherche n'est pas confiné à une direction de recherche uniquement. on peut également adopter simultanément deux direction de recherche V_1 et V_2 . D'où le concept de plan de recherche portrait de X_0 et de direction V_1 et V_2 .

Relation d'ordre dans un axe de recherche :

$$\mathcal{R}(X_0, V) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } X = X_0 + \alpha V, \text{ où } \alpha \geq 0\}$$

On peut définir dans cet ensemble ma relation binaire notée \leq comme suit

Soit X_1 et X_2 deux point de décision action dans

$\mathcal{R}(X_0, V)$ tel que :

$$X_1 = X_0 + \alpha_1 V$$

et

$$X_2 = X_0 + \alpha_2 V$$

Avec $\alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_2 \geq 0$

On dit que X_1 est plus petit que X_2 et on note

$$X_1 \leq X_2 \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ dans } \mathbb{R}^+.$$

Il est facile de démontrer que cette relation est une relation d'ordre K dans $\mathcal{R}(X_0, V)$, X_0 étant le plus petit élément.

2.2.5 Cône de recherche issu de X_0 et de direction V_1, V_2, \dots, V_k ou V_1, V_2, \dots, V_k sont des vecteur décision action

Soit X_0 un point décision action assuré à un PPL.

Soient V_1, V_2, \dots, V_k k-vecteurs décision action de même problème PPL.

Soient V_1, V_2, \dots, V_k , l'ensemble de décision action noté $\mathcal{C}(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$ et définie comme suit :

$$\mathcal{C}(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k, \alpha_i \geq 0\}$$

Remarquons tout de suite que les plans de recherche ne sont que des cas particuliers de la recherche.

2.2.6 Plan de recherche partant d'une décision action X_0 et de direction V_1 et V_2

Soit X_0 un point décision-action et V_1 et V_2 deux vecteurs décision action de \mathbb{R}^n .

On appelle plan de recherche partant de X_0 et de direction V_1 et V_2 l'ensemble noté $P(X_0, V_1, V_2)$ définie comme suit :

$$P(X_0, V_1, V_2) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+\}$$

CONTRAINTES TECHNIQUES

Dans la pratique toute décision action entraîne toujours un impact. Dans le domaine de la programmation linéaire, on peut distinguer deux catégories d'impact :

- Les impact-performances.
- Les impacts ressources.

Dans cet article, nous nous occupons uniquement des impact-ressources.

2.3.1 définitions 1 : impact ressource

Soit X un point décision action d'un problème PPL donné. Soit V un vecteur non décision de \mathbb{R}^n .

On appelle impact ressource selon V , le produit scalaire de X avec V dans \mathbb{R}^n noté :

$$\mathfrak{I}(X, V) = \langle X, V \rangle$$

où $\langle X, V \rangle$ désigne le produit scalaire de X avec V . le vecteur V est appelé vecteur V de consommation de la ressource donnée.

2.3.2 définition2 : contraintes-ressources

Dans notre théorie, nous supposons qu'une contraintes qu'elle soit logique ou matérielle peut

être associé à une ressource qui soit toujours limitée dans le problème PPL associé.

Soit $A = (a_j)_{j=1, \dots, n}$ un vecteur V de consommation d'une ressource donnée.

Soit b la valeur limite de la ressource on appelle zone de respect de la consommation de la ressource limitée par b l'ensemble noté $ZR(A, b)$ définie par :

$$ZR(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \langle A, X \rangle \leq b\}$$

En géométrie affine, cet ensemble n'est autre que le demi-espace négative délimité par l'hyperplan affine noté $\mathcal{H}(A, b)$ définie par

$$\mathcal{H}(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \langle A, X \rangle = b\}$$

NB : le vecteur A n'est pas une décision action il est lié à une ressource donnée et permet de calculer l'impact une décision action X sur cette ressource

2.4 Contraintes de non-négativité

Les contraintes de non-négativité traduisent le fait que les décisions élémentaires x_i où $i=1, \dots, n$ doivent être non négatives :

$$x_i \geq 0 \text{ pour tout } i=1, 2, \dots, n$$

Remarquons tout de suite que les relations :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

peuvent s'écrire :

$$x_i \leq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

expression équivalente à :

$$\langle -U_i, X \rangle \leq 0$$

Par conséquent, une contraintes de non-négativité peut être, également considérée comme une contraintes ressource délimitée par $ZR = (-U_i, 0)$ appelé zone de non négativité ZNN_i .

Cependant la combinaison de toutes les contraintes de non-négativité a une signification géométrique

particulière que nous appelons « cône de non-négativité »

2.4.2 Cône de non-négativité

On appelle cône de non-négativité noté C_o^+ le cône de recherche issu du point-décision O et de direction tous les vecteurs décisions :

$$U_i, i=1,2,\dots,n$$

géométriquement on a :

$$C_o^+ = \left\{ X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i \text{ où } \alpha_i \geq 0 \right\} = \text{Cône}(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

Remarque

Il est évident que :

$$C_o^+ = \bigcap_{i=1}^n ZNN_i$$

2.4.3 Face de non-négativité

Rappelons que le repère topo géométrique du problème PPL, est immuable (0, U₀, U₂, ..., U_n)

Cela veut dire qu'on ne peut pas changer la place d'un vecteurs U_i de ce repère, pour tout i=1, 2, ..., n

On appelle face de non-négativité, noté FNN_i et l'ensemble de point décision défini comme suit

$$FNN_i = \left\{ \begin{array}{l} P(0, U_1, U_n) \text{ pour } i=1 \\ P(O, U_{i-1}, U_i) \text{ pour } i=2, 3, \dots, n \end{array} \right\}$$

2.4.4 Axes de non-négativité

Pour tout i=1,2,..., n, on appelle axes de non-négativité, ANN_i l'ensemble de point décisions défini comme suit :

$$ANN_i = R(O, U_i) \quad i=1,2,\dots,n$$

Remarquons qu'ANN_i n'est autre que l'axe de recherche partant de O et de direction U_i.

2.5 Relation entre objets MZ

Les relations que nous allons décrire dans cette section sont celles de base. Les relations plus complexes seront traitées dans le chapitre suivant.

De plus les combinaisons entre point-décisions et point-vecteurs ont été déjà vues. Par conséquent nous allons seulement traiter les points suivants :

- La relation entre un point-décision et une zone de contraintes-techniques.
- La relation entre un axe de recherche et une zone de contraintes techniques.
- La relation entre un plan de recherche et une zone de contraintes technique.

2.5.1 Relation entre un point-décision et une zone de contraintes techniques

Etant donné qu'un point-décision est représenté par un point et qu'une zone de contraintes techniques est représentée par un demi-espace, donc un ensemble de point décision, la relation essentielle même basique entre une d ces deux classes d'objet est la relation ensemblistes d'appartenance.

Soit X_o un point décision et ZCT (A, b) une zone de contraintes la relation :

$$X_o \in ZCT(A, b) \text{ signifie que } \langle A, X_o \rangle \leq b$$

Etant donné que dans le modèle de problème PPL les contraintes sont indexées ; c'est à dire numérotés de 1 à m, les zones de contraintes techniques correspondants seront également notées :

$$ZCT_i \quad i=1,2,\dots,n$$

Ce qui permet de représenter le système de techniques de la façon suivante.

Soit X_o un point-décision satisfaisant toutes les contraintes techniques du problème.

On a :

$$\langle A_i, X_o \rangle \leq b_i \text{ pour } i=1,2,\dots,n$$

Ce qui peut s'écrire :

$$X_o \in ZCT_i \text{ pour tout } i=1,2,\dots,n$$

D'où

$$Xo \in \bigcap_{i=1}^m ZCTi \quad (1.4)$$

Relation qui est une base de l'analyse des redondances et de l'infaisabilité.

De plus quand Xo n'appartient pas à un $ZCTi$ on dit aussi que Xo est un extérieur à $ZCTi$ comme le terme extérieur et son opposé intérieur ont une connotation topologique, nous allons rappeler les définitions topologique de ces termes.

2.5.1.1 Projection d'un point à un hyperplan

Soit la zones de contraintes techniques de $ZCTi$ délimitée par l'hyperplan $\mathcal{H}\phi(Ai, bi)$ et soit Xo un point-point décision quelconque.

On appelle projection de Xo sur l'hyperplan $\mathcal{H}\phi(Ai, bi)$, le point noté $X'o$ tel que :

$X'o$ appartient à $\mathcal{H}\phi(Ai, bi)$

et $\overline{XoX'o}$ colinéaire au vecteur Ai .

$X'o$ est donc l'intersection de $\mathcal{H}\phi(Ai, bi)$ avec la droite passant par Xo et de vecteur directeur Ai .

Mathématiquement cette droite est définie par :

$$X \in \square tq X = Xo + \alpha Ai, \alpha \in \square$$

L'intersection s'écrit donc,

$$X'o = Xo + \alpha Ai$$

$$\langle Ai, X'o \rangle = bi$$

$$\langle Ai, Xo + \alpha Ai \rangle = bi$$

$$\langle Ai, Xo \rangle + \alpha \langle Ai, Ai \rangle = bi$$

$$\Rightarrow \alpha \langle Ai, Ai \rangle = bi - \langle Ai, Xo \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle}$$

Finalement, on a :

$$X'o = Xo + \left[\frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle} \right] Ai$$

De plus la distance est appelé, entre Xo et $X'o$ noté $d(Xo, X'o)$ est égal à :

$$d(Xo, X'o) = \left| \frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle} \right| \sqrt{\langle Ai, Ai \rangle}$$

$$d(Xo, X'o) = \left| \frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\sqrt{\langle Ai, Ai \rangle}} \right|$$

Cette distance est aussi appelé distance du point Xo à l'hyperplan $\mathcal{H}\phi(Ai, bi)$.

2.5.1.2 Orientation du vecteur Ai par rapport à $ZCTi$

Soit Xo un point de $ZCTi$ qui n'appartient pas à l'hyperplan $HP(Ai, bi)$:

$$Xo \in ZCTi \quad \text{et} \quad Xo \notin HP(Ai, bi)$$

Soit $X'o$ la projection de Xo sur $HP(Ai, bi)$ on a :

$$X'o = Xo + \left(\frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle} \right) Ai$$

$$\overline{XoX'o} = \left[\frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle} \right] Ai$$

Le produit scalaire entre $\overline{XoX'o}$ et Ai donne :

$$\langle \overline{XoX'o}, Ai \rangle = \left(\frac{bi - \langle Ai, Xo \rangle}{\langle Ai, Ai \rangle} \right) \langle Ai, Ai \rangle$$

$$\langle \overline{XoX'o}, Ai \rangle = bi - \langle Ai, Xo \rangle$$

Or

$Xo \in ZCTi$ ce qui signifie :

$$\langle Ai, Xo \rangle \leq bi \quad \text{et} \quad Xo \notin HP(Ai, bi)$$

ce qui signifie $\langle Ai, Xo \rangle \leq bi$

Par conséquent on a :

$$\langle Ai, Xo \rangle < bi$$

D'où

$$b_i < A_i, X_o > > 0$$

Finalement on obtient la relation suivante :

$$< \overline{X_o X_o'}, A_i > > 0$$

D'où la proposition :

Proposition 2.1

Le vecteur A_i est toujours orienté de l'intérieur vers l'extérieur de ZCTi

2.5.1.3 Orientation d'un vecteur décision par rapport à ZCTi

Soit V un vecteur décision, et soit ZCTi une zone de contraintes technique V est parallèle à $\mathcal{H}\phi(A_i, b_i)$ c'est à dire à la frontière de ZCTi

2.5.1.3.1 Orientation extérieure

On dit que V a une orientation extérieure par rapport à ZCTi si $< V, A_i >$ est strictement positif.

2.5.1.3.2 Orientation parallèle

On dit que V a une orientation parallèle par rapport à ZCTi, si $< V, A_i >$ est égal à 0.

Bibliographies

- [1]. Zions, S 1965, "Size reduction techniques of linear programming and their applications", Ph.D. Thesis, Carnegie Institute of Technology.
- [2] T. Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on post optimal analysis," *European Journal of Operational Research*, vol. 60, pp. 315–326, 1979.
- [3] A. L. Brearley, G. Mitra, and H. P. Williams, "Analysis of mathematical programming problems prior to applying the simplex algorithm," *Mathematical Programming*, vol. 8, pp. 54–83, 1975.
- [4] J. Lisy, "Metody pro nalezeni redundantnich omezeni v ulohach linarniho programovani. Ekonomicko, MatematicS," *Obzor*, vol. 7, no. 3, pp. 285–298, 1971.
- [5] N. V. Stojkovic and P. S. Stanimirovic, "Two direct methods in linear programming," *European*

Remarque :

La qualification « parallèle » se réfère au fait que V est parallèle à $\mathcal{H}\phi(A_i; b_i)$, c'est-à-dire à la frontière ZCTi.

Conclusion

Cet article nous a permis de relater les éléments fondamentaux du Modèle topo-géométrique MZ sur la recherche des contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire. Les propriétés géométriques sont incontournables dans cette démarche et nous ont permis de proposer des définitions et de dégager quelques propositions.

Journal of Operational Research, vol. 131, no. 2, pp. 417–439, 2001.

[6] J. Telgen, "Identifying redundant constraints and implicit equalities in system of linear constraints," *Management Science*, vol. 29, no. 10, pp. 1209–1222, 1983.

[7] P. O. Gutman and I. Isolovich, "Robust redundancy determination and evaluation of the dual variables of linear programming problems in the presence of uncertainty, on the generalized wolf problem: preprocessing of nonnegative large scale linear programming problems with group constraints," *Technion-Israel Institute of Technology*, vol. 68, no. 8, pp. 1401–1409, 2007.

[8] T. Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on post optimal analysis," *European Journal of Operational Research*, vol. 60, pp. 315–326, 1979.

Topo-Geometric Model MZ: Fedeed Objects

Andrianarizaka Marc Tiana,
Doctoral School in Engineering and Innovation Science and
Technology (ED-STII)
Doctoral Research Team for Cognitive Science
and Application (EAD-SCA)
University of Antananarivo, MADAGASCAR

Robinson Matio,
Doctoral School in Engineering and Innovation Science and
Technology (ED-STII)
Doctoral Research Team for Cognitive Science and
Application (EAD-SCA)
University of Antananarivo, MADAGASCAR

Andriamanohisoa Hery Zo,
Doctoral School in Engineering and Innovation Science and Technology (ED-STII)
Doctoral Research Team for Cognitive Science and Application (EAD-SCA)
University of Antananarivo, MADAGASCAR

Summary : The Topo-geometric approach MZ requires notions of both vector geometry and affine geometry, and also uses topology concepts to transform the elementary notions of presenting a linear program problem. These different forms or presentation models of problems related to the Topo-geometric approach MZ are initially presented in this article and will be followed by elementary results demonstrated by the use of the supported objects of the supported model. Thus, this article is the precursor of the determination of redundant constraints by the Topo-geometric model MZ. The energized objects will thus constitute the language of the proofs of the subsequent propositions.

Keywords : Linear programming, mathematical writing of the model, writing of the Topo-geometric model MZ, algorithm.

1 INTRODUCTION

This paper constitutes the basis of the Topo-geometric model MZ in search of redundant constraints in a problem of linear programming. This article follows the work on the Topo-Geometric MZ model published in MADA-ETI, ISSN 2220-0673, Vol.2, 2016, www.madarevues.gov.mg which develops the basic concept of Topo-geometric models, and presents the powered objects in search of the redundant constraints of a linear programming problem. All the mathematical object classes will first be presented from the simplest to the most complicated, to model the real concept allowing the decision making. Together with the presentation of each class, the existing operations and relationships will be analyzed; the representation of technical constraints by affine half-spaces is the most important part of this work.

2 THE MEAN OBJECTIVES

2.1 The scalars

A scalar is any real number. Symbolically, a scalar will be represented with a Latin or Greek or lowercase letter.
Examples: $x, y, z, \dots, \alpha, \dots$

2.2 Indexes

It is a positive or null integer that will be attached to an object of a model, as a unique identifier. Symbolically the indexes will be represented by i, j, k, \dots

To represent the possible values of an index, the following notions will be used:

$i = 1, 2, \dots, n$ meaning that the index i varies from 1 to n .

When an objective x of a model is an index, one writes:

$$(x_i)_{i=1, \dots, n}$$

which is a condensed representation of :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :$$

An object can have two indexes as identifiers. This is the case with matrices, for example.

It is represented by

$$(a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

which designates the matrix :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

To fully exploit the indexes, the symbol \sum (summation) will also be used.

So, to represent

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

it will be simply written:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

3 THE ELEMENTARY OBJECTS

3.1 Decision spaces

Take again the problems LPP in its known form which consists of finding the unknown-real x_1, x_2, \dots, x_n , and maximize:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (3.01)$$

And which satisfy the following

$$\text{conditions : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (3.02)$$

$$\text{i) } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3.03)$$

where the coefficients:

$$(c_j) j = 1, \dots, n$$

$$(a_{ij}) i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$$(b_i) i = 1, \dots, m$$

Each line of the conditions (3.02) is called a technical constraint.

Conditions (3.03) are called non-negativity constraints.

Definition 3.01: decision-action-point-vectors

We call decision-action any n-tuple :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ Whose } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ are elements of } \mathbb{R}$$

It will be noted later :

$$(x_j) j = 1, \dots, n$$

Mathematically, we see that it is an element of \mathbb{R}^n relative to a given base. It is also a point in the affine space \mathbb{R}^n relative to a given landmark.

An action decision will be represented by an affine point. Which brings us to the decision-action definition?

Notation : an action decision is noted using a capital Greek letter: A, B, X, Y

Definition 3.02: decision marker - action - decision space

We call decision-action benchmark, the positive orthonormal geometric benchmark, noted :

$$(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

related to the aforementioned LPP problem. In this reference, the geometric origin O has a particular meaning : it represents the decision to do nothing, that is, if

$$O = \begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \vdots \\ x_{on} \end{pmatrix}, \quad x_{o1} = x_{o2} = x_{o3} = \dots = x_{on} = 0$$

To each decision, variable x_j corresponds the unit vector U_j .

The affine space \mathbb{R}^n , equipped with the reference $(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$ is called the decision space relating to the LPP problem to be solved.

Despite this striking resemblance to Euclidean affine geometry, a limiting aspect will be presented from the start.

3.2 Postulate

In the topo-geometric theory MZ, the orthonormal affine frame of the decision space action of the problem LPP to be solved is unique.

This assumption means that :

- The concept of basic change does not exist.
- The concept of change of origin does not exist.

However, following a presolved analysis, it may be possible that n changes, which completely modifies the LPP problem.

4 OPERATIONS ON ACTION-DECISIONS

Given an LPP problem, according to definition 3.01, a decision is represented by a point in the decision-action space and / or by a vector of the vector space \mathbb{R}^n . This dual nature (both affine and vectorial) of decision-actions is very important.

It allows to express :

The creation of other stock-decisions based on existing stock-decisions

The search for other decision-actions according to a given direction.

4.1 Amplifier of an action decision

Let the decision-action space relate to the reference.

Let X_0 be an action decision and α a given positive real number.

We call amplifier of X_0 using α , the generation of an action decision X such that

$$X = \alpha X_0$$

Mathematically, it is therefore the multiplier of vector X_0 by the scalar α

4.2 Addition of two decision-actions

Let X_0 and X_1 be two decision-actions in a LPP problem.

The addition of X_0 and X_1 is called the creation of a new action decision X such that

$$X = X_0 + X_1$$

Note 4.01

The combination of 2.3.1 and 2.3.2 allows us to model the conic combination concept of two or more action-decisions. Let the decision-actions X_1, X_2, \dots, X_k .

The conic combination of these decisions is the new decision X defined by:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ are positive real numbers or zero.

Note 4.02

From the previous remark, it is clear that the decision satisfies the constraint (2.03) if it is a conic combination of U_1, U_2, \dots, U_n , that is to say:

$$X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n \text{ with } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$$

Let's show that it is reciprocal and true.

Let X be an action decision satisfying the constraint (2.03)

$$X = (x_{ji}) \text{ with } x_{ji} \geq 0$$

but

$$(x_j) = \sum_{j=1}^n x_j U_j \text{ with } x_j \geq 0$$

4.3 Search axe defined by decision-action X_0 and direction the vector decision-action V

Let X_0 and V be action-decisions.

We call search axis starting from X_0 and direction U the set of decision actions, noted $\mathbb{R}(X_0, V)$ defined by

$$\mathbb{R}(X_0, V) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_0 + \alpha V, \text{ with } \alpha \in \mathbb{R} \text{ and } \alpha \geq 0\}$$

Mathematically, it is the affine ray derived from X_0 and the vector V .

Conceptually, the research idea is justified by the fact that in practice, any solver is based on a search algorithm starting from an initial point.

Thus, from a given decision-action X_0 , and a given search direction V , one can search the points in the universe of decisions that will satisfy the constraints (3.02) and (3.03).

This research idea is not confined to a single research direction. It is also possible to adopt simultaneously two search directions V_1 and V_2 . Hence the concept of "research plan". Starting from X_0 and direction V_1 and V_2 .

4.4 Plan of research starting from a decision-action X_0 and directions V_1 and V_2

Let X_0 be a decision-action point and V_1 and V_2 two decision-action vectors of it.

We call search plane starting from X_0 and directions V_1 and V_2 , the set noted $P(X_0, V_1, V_2)$ defined as follows :

$$P(X_0, V_1, V_2) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \text{ where } \alpha_1 \in \mathbb{R}^+ \text{ and } \alpha_2 \in \mathbb{R}^+\}$$

By generalizing, we have :

4.5 Research of X_0 direction and V_1, V_2, \dots, V_k vectors decisions

Let X_0 be a decision-action point associated with a LPP.

Let V_1, V_2, \dots, V_k , k decision- action vectors of the same problem LPP.

We call vertex cone X_0 and directions V_1, V_2, \dots, V_k , the action decision set denoted:

$C(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$ defined as follows:

$$C(X_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$$

It should be noted at once that research axes and research plans are only special cases of research axes.

5 THE TECHNICAL CONSTRAINTS

In practice, any action-decision always has an impact. In the field of linear programming, two categories of impacts can be distinguished :

- Impact-performance.
- Resource impacts.

In this study, we only deal with the impact-resources.

Definition 5.01 resource impact

Let X be an action decision point of a given LPP problem. Let V be a null vector of \mathbb{R}^n . We call resource impact according to V , the scalar product of X and V in \mathbb{R}^n noted:

$$\mathfrak{I}(X, V) = \langle X, V \rangle$$

Where $\langle X, V \rangle$ denotes the scalar product U with V .

The vector V is called unit consumption vector V of the given resource.

Definition 5.02 constraint resources

In our theory, we assume that a constraint that is logical or material may be associated with a resource that is always limited in the associated LPP problem.

Let $A = (a_j)_{j=1, \dots, n}$ be a vector V of consumption of a given resource.

Let b be the limit value of the resource, the zone of respect of the consumption of the resource limited by b is the set noted $ZR(A, b)$ defined by :

$$ZR(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \langle A, X \rangle \leq b\} \quad (5.01)$$

In affine geometry, this set is none other than the negative half-space delimited by the noted affine hyperplane. $HP(A, b)$ defined by:

$$HP(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^n / \langle A, X \rangle = b\} \quad (5.02)$$

NB: The vector A is not an action-decision it is linked to a given resource and allows to calculate the impact of an action X decision on this resource

6 The constraints of non-negativity

The non-negativity constraints translate the fact that the elementary decisions x_i , where $i = 1, \dots, n$ must be non-negatives, is :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Let us note immediately that the relations :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

can be written:

$$x_i \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Expression equivalent to:

$$\langle -U_i, X \rangle \leq 0$$

Therefore, a non-negativity constraint can also be considered as a resource constraint delimited by $ZR = (-U_i, 0)$ called non-negativity zone ZNN_i .

However the combination of all non-negativity constraints has a particular geometric meaning that we call " non-negativity cone ".

6.1 non-negativity cone

We call non-negativity cone noted C_0^+ the cone of search from point-decision O and direction of all decision vectors :

$$U_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Geometrically we have:

$$C_0^+ = \left\{ X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i \text{ where } \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (6.01)$$

$$= \text{Cone}(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

Note 6.01:

It is obvious that $C_0^+ = \bigcap_{i=1}^n \text{ZNN}_i$

6.2 Non-negativity face

It is to be recalled that the geometric topo reference of the LPP problem is immutable $(O, U_0, U_2, \dots, U_n)$.

This means that we cannot change the place of a vector U_i of this reference, for all i , for all $i = 1, 2, \dots, n$.

We call the non-negativity face, denoted by FNN_i , the decision point set defined as follows:

$$\text{FNN}_i = \left\{ \begin{array}{l} P(O, U_1, U_n) \text{ for } i = 1 \\ P(O, U_{i-1}, U_i) \text{ for } i = 2, 3, \dots, n \end{array} \right\}$$

6.3 Non-negativity axes

For all $i = 1, 2, \dots, n$, we call non-negativity axis, ANN_i , the set of decision point defined as follows :

$$\text{ANN}_i = \{R(O, U_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\} \quad (6.02)$$

Note that ANN_i is none other than the search axis starting from O and with the direction U_i .

Recall the concept of redundant constraints.

7 REDUNDANT CONSTRAINTS

A redundant constraint is a constraint which can be deleted from a system of linear constraints without changing the feasible region or acceptable solution area.

If we look at the next system of m and n constraints of linear inequality, no negative ($m \geq n$), we can adopt the matrix writing:

$$AX \leq B, \quad X \geq 0, \quad (7.01)$$

But

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

And $0 \in \mathbb{R}^n$.

Let

$$AT_i \leq b_i$$

be the i^{th} constraint of system (7.01) and let

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n / AT_i X \leq b_i, X \geq 0\}$$

The acceptable solution area associated with the system (7.01).

Let

$$S_k = \{X \in \mathbb{R}^n / AT_i X \leq b, X \geq 0, i \neq k\}$$

The acceptable solution area associated to the constraint :

$$A_i X \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m, i \neq k$$

of the system .

The k^{th} constraint :

$$A_k X \leq b_k \quad (1 \leq k \leq m)$$

is redundant for the system (7.01) if and only if

$$S = S_k.$$

Definition 7.01

Redundant constraints can be classified as weak and strong redundant constraints. 1.3.2

Low redundancy constraints

The constraint $AT_i X \leq b_i$ is

weakly redundant if she is redundant and

$$AT_i X = b_i \quad \text{for all } X \in S.$$

8 RELATIONSHIP BETWEEN MZ OBJECTS

The relationships described in this section are the basic ones. More complex relationships will be discussed in the next chapter.

Moreover, the combinations between point-decisions and point-vectors have already been seen. Therefore, only the following points will be dealt with:

- The relation between a decision-point and a constraint-technical zone.

- The relation between a research axis and a zone of technical constraints.

- The relation between a research plan and a zone of technical constraints.

8.1 Relationship between a decision-point and a technical constraint zone

Since a point-decision is represented with a point, and a zone of technical constraints is represented by a half-space, a set of decision-point, the essential same basic relation between one of these two object classes, is the ensemblist relation of belonging.

Let X_0 be a decision point and $ZCT(A, b)$ a constraint zone. The relationship

$$X_0 \in ZCT(A, b) \quad \text{means} \quad \langle A, X_0 \rangle \leq b$$

Since in the LPP problem model, the constraints are indexed, i.e. numbered from 1 to n , the corresponding technical constraints areas will also be noted. :

$$ZCT_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

This makes it possible to represent the system of techniques as follows:

Let X_0 be a decision-point satisfying all the technical constraints of the problem.

We have :

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

This can be written :

$$X_0 \in ZCT_i \quad \text{For everything } i = 1, 2, \dots, n$$

From where,

$$X_0 \in \bigcap_{i=1}^n ZCT_i \quad (8.01)$$

Relationship that is a basis for redundancy and infeasibility analysis.

Moreover, when X_0 does not belong to a ZCT_i , we also say that X_0 is exterior to ZCT_i as the outer term, and its inner opposite has a topological connotation, the topological definitions of these terms will be recalled.

8.1.1 Projection of a point on a hyperplane

Let ZCT_i be the area of technical constraints delimited by the HP hyperplane (A_i, b_i) and let X_0 be any decision-point. We call projection of X_0 on the hyperplane HP (A_i, b_i) , the point noted X'_0 such that :

X_0 belongs to HP (A_i, b_i) and is collinear to the vector A_i . X'_0 is the intersection of HP (A_i, b_i) with the straight line passing through X_0 and whose direction vector is A_i .

Proof :

♣

Mathematically this right is defined by :

$X \in \mathbb{R}^n$ with $X = X_0 + \alpha A_i$ $\alpha \in \mathbb{R}$

The intersection is written,

$$X'_0 = X_0 + \alpha A_i$$

$$\langle A_i, X'_0 \rangle = b_i$$

$$\langle A_i, X_0 + \alpha A_i \rangle = b_i$$

$$\langle A_i, X_0 \rangle + \alpha \langle A_i, A_i \rangle = b_i$$

$$\Rightarrow \alpha \langle A_i, A_i \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

Finally, we have :

$$X'_0 = X_0 + \left[\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right] A_i \quad (8.02)$$

♦

Moreover, the distance between X_0 and X'_0 denoted $d(X_0, X'_0)$ is equal to :

$$d(X_0, X'_0) = \left| \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right| \sqrt{\langle A_i, A_i \rangle} \quad (8.03)$$

$$d(X_0, X'_0) = \left| \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \right|$$

This distance is also called the distance from the point X_0 to the hyperplane HP (A_i, b_i) .

8.1.2 Orientation of the vector A_i with respect to ZCT_i

Proposition 8.01

The vector is always oriented from inside to outside of ZCT_i .

Proof:

♣

Let X_0 a ZCT_i point that does not belong to the hyperplane HP (A_i, b_i) :

$$X_0 \in ZCT_i \quad \text{and} \quad X_0 \notin HP(A_i, b_i)$$

Is X'_0 the projection of X_0 on $HP(A_i, b_i)$

We have :

$$X'_0 = X_0 + \left(\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right) A_i$$

$$\overrightarrow{X_0 X'_0} = \left[\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right] A_i$$

The product of $\overrightarrow{X_0 X'_0}$ with A_i is :

$$\langle \overrightarrow{X_0 X'_0}, A_i \rangle = \left(\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} \right) \langle A_i, A_i \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{X_0 X'_0}, A_i \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

but $X_0 \in ZCT_i$

which means :

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i \quad \text{and} \quad X_0 \notin HP(A_i, b_i)$$

So $\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i$

Therefore we have: $\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$

From where $b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$

Finally we get the following relation:

$$\langle \overrightarrow{X_0 X'_0}, A_i \rangle > 0$$

♦ 8.1.3

Direction of a decision vector with respect to ZCT_i

Let V be a decision vector, and let ZCT_i be a technical constraint zone V parallel to HP (A_i, b_i) , that is to say at the ZCT_i boundary.

8.1.3.1 External orientation

We say that V has an external orientation with respect to ZCT_i , if $\langle V, A_i \rangle$ is strictly positive.

8.1.3.2 Parallel orientation

We say that V has a parallel orientation with respect to ZCT_i , if $\langle V, A_i \rangle$ is equal to 0.

Note 8.01:

The qualification "parallel" refers to the fact that V is parallel to HP (A_i, b_i) , that is to say at the ZCT_i border.

8.1.3.3 Internal orientation

We say that V has an internal orientation with respect to ZCT_i , if $\langle V, A_i \rangle$ is strictly negative.

8.1.4 Characterization of an Inner Point of ZCT_i

Proposition 8.02

X_0 is an inner point of ZCT_i if and only if :

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$$

Proof:

♣

a) Let X_0 be a point inside ZCT_i .

According to 2.7.1.3.1, there exists a strictly positive reality r such that the ball whose center is X_0 and with a radius r is entirely contained in ZCT_i .

Logically, this means that if X_0' designates the projection of X_0 on $HP(A_i, b_i)$, then the distance between X_0 and X_0' is equal to :

$$\frac{|b_i - \langle A_i, X_0 \rangle|}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

And

$$r \leq \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \text{ but } r \text{ is strictly positive,}$$

$$\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \text{ is strictly positive from where}$$

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle \text{ is also strictly positive.}$$

b) Reciprocally, X_0 is a point of ZCT_i such that $\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$

Let us show that this is an inside point of ZCT_i .

Let X_0' be the projection of X_0 on the hyperplane. We saw that :

The distance between X_0 and X_0' is equal to:

$$\frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Let

$$r = \frac{1}{2} \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

We have $r > 0$;

and it is obvious that the ball whose center is X_0 and radius r is entirely included in ZCT_i , which means that X_0 is an internal point of ZCT_i .

♦

8.1.4.1 S border point

A point $X_0 \in \mathbb{R}^n$ is said to be a border point of S if :

X_0 is an element of Set ;

Whatever the positive real number r is, the open ball of center X_0 and radius r contains both elements of S other than X_0 and elements of \bar{S} (the complement of S in Euclidean affine space \mathbb{R}^n).

8.1.5 S border

Let S be a non-empty set in the Euclidean affine space with the orthonormal coordinate system

$(O, U_1, U_2, \dots, U_n)$. We call the boundary of S the set noted $Fr(S)$ containing all the boundary points of S.

Proposition 8.03

We characterize the border points of the ZCT_i by:

$$Fr(ZCT_i) = HP(A_i, b_i)$$

Proof:

♣

Let's first show the first inclusion :

$$Fr(ZCT_i) \subset HP(A_i, b_i)$$

Let X_0 be an element of $Fr(ZCT_i)$, that means that X_0 is also an element of ZCT_i so,

$$\langle A_i, X_0 \rangle \leq b_i$$

If $X_0 \notin HP(A_i, b_i)$, this means that $\langle A_i, X_0 \rangle \neq b_i$

From where,

$$\langle A_i, X_0 \rangle < b_i, \text{ meaning that } X_0 \text{ is an inner point of}$$

ZCT_i , which contradicts the fact that X_0 is a border point of ZCT_i .

Reciprocal :

$$HP(A_i, b_i) \subset Fr(ZCT_i)$$

Let X_0 be a point of $HP(A_i, b_i)$ which means that :

$$\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$$

Let r be any strictly positive real number and X_1 the point defined by :

$$X_1 = X_0 + \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Note that the distance between X_0 and X_1 is equal to $\frac{r}{2}$,

which is strictly less than r .

Moreover, according to Proposition 8.01, A_i is always oriented towards the outside of ZCT_i so X_1 do not belong to ZCT_i .

So X_1 belongs to the open ball of center X_0 and radius r .

Finally, let us show that the open ball of center X_0 and radius r contains points of ZCT_i other than X_0 .

Let X_2 the point defined by :

$$X_2 = X_0 - \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

We obtain:

$$\begin{aligned} \langle A_i, X_2 \rangle &= \langle A_i, X_0 - \frac{r}{2} \cdot \frac{A_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \rangle \\ &= \langle A_i, X_0 \rangle - \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \langle A_i, A_i \rangle \\ \langle A_i, X_2 \rangle &= \langle A_i, X_0 \rangle - \frac{r}{2} \end{aligned}$$

But

$$\langle A_i, X_0 \rangle = b_i \Rightarrow \langle A_i, X_2 \rangle = b_i - \frac{r}{2}$$

As

$$r > 0 \Rightarrow \frac{r}{2} > 0$$

From where

$$b_i - \frac{r}{2} < b_i$$

We can write :

$$\langle A_i, X_2 \rangle < b_i$$

Which means that X_2 belongs to ZCT_i .

In summary, every strictly positive real number r in the open ball of center X_0 and radius r contains both elements of ZCT_i other than X_0 and elements of ZCT_i .

This means that X_0 is a frontier point of ZCT_i .

Finally, in combination with the two way, we have :

$$Fr(ZCT_i) \subset HP(A_i, b_i)$$

and

$$Fr(ZCT_i) \supset HP(A_i, b_i)$$

So we have

$$Fr(ZCT_i) = HP(A_i, b_i)$$

Proposition 8.04

The zone of technical constraints ZCT_i is topologically closed.

Proof :

♣

Let X_0 be a point not belonging to ZCT_i (where ZCT_i denotes the complement of ZCT_i in the affine space).

As

$$X_0 \notin ZCT_i$$

So

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i$$

Let X_0' be the projection of X_0 on $HP(A_i, b_i)$. We showed that :

The distance between X_0' and X_0 is equal to :

$$\frac{|b_i - \langle A_i, X_0 \rangle|}{\sqrt{A_i, A_i}}$$

but

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i \Rightarrow b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

so

$$\begin{aligned} |b_i - \langle A_i, X_0 \rangle| &= -(b_i - \langle A_i, X_0 \rangle) \\ &= \langle A_i, X_0 \rangle - b_i \end{aligned}$$

The distance between X_0 and the border $HP(A_i, b_i)$ is equal to :

$$\frac{\langle A_i, X_0 \rangle - b_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}}$$

Let :

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle A_i, X_0 \rangle - b_i}{\sqrt{\langle A_i, A_i \rangle}} \text{ be}$$

It is easy to show that the open ball of center X_0 and radius r is entirely contained in $\overline{ZCT_i}$.

Therefore $\overline{ZCT_i}$ is open.

So ZCT_i is closed.

In summary of Proposition 8.03 and Proposition 8.04, each zone of ZCT_i technical constraints is closed and their boundary is none other than the hyperplane $HP(A_i, b_i)$.

8.2 Relationship between a search axis $R(X_0, V)$ and a technical constraint zone ZCT_i

Consider an area of ZCT_i technical constraints. Let also be the radius $R(X_0, V)$ coming from X_0 and direction vector V , representing a search axis. This relationship is based on the existence and uniqueness of the solution of the equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle, \quad \alpha \text{ is the unknown.}$$

Proof:

♣

Since the two objects are sets of decision points, the main combination that can be imagined between them is the intersection. In addition, since the area of technical constraint is closed and the hyperplane $HP(A_i, b_i)$ is closed, we will be much more interested in the intersection of the radius $R(X_0, V)$ with this boundary $HP(A_i, b_i)$. Indeed, if X_0 is outside of ZCT_i , then such an intersection gives us the point of entry from the outside to the inside of ZCT_i along the radius. On the other hand, if X_0 is inside ZCT_i , it gives the exit point of ZCT_i .

Let I denote this point of intersection : as I belongs to $R(X_0, V)$

$$\text{We have } I = X_0 + \alpha V \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

Since I also belongs to $HP(A_i, b_i)$, we can write :

$$\langle A_i, I \rangle = b_i$$

By combining these two relationships, we have

$$\langle A_i, X_0 + \alpha V \rangle = b_i$$

By developing, we get

$$\langle A_i, X_0 \rangle + \alpha \langle A_i, V \rangle = b_i$$

which is an equation where α is the unknown.

This equation gives :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle \quad (8.04)$$

The existence and uniqueness of α depend on the values of $b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$ and $\langle A_i, V \rangle$, hence X_0 and V .

8.2.1 Where X_0 is outside ZCT_i and where V is not facing inwards from ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has no solution.

Proof:

♣

This case is mathematically translated by :

$$\begin{cases} \langle A_i, X_0 \rangle > b_i \\ \langle A_i, V \rangle \geq 0 \end{cases} \text{ and } \langle A_i, X_0 \rangle > b_i$$

leads that,

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

Also as

$$\alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0$$

which is impossible.
In this case I do not exist.

8.2.2 Where X_0 is outside ZCT_i and where V is inward ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has a unique solution.

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} > 0$$

Proof:

♣

We have :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle < 0 \text{ et } \langle A_i, V \rangle < 0$$

which gives

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} > 0$$

which is in addition a unique value.

In this case we say that we have a single point of entry starting from X_0 , and moving along the axis of $R(X_0, V)$.

8.2.3 Where X_0 is on ZCT_i and where V is outside ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

admits a null solution.

Proof:

♣

This case results in :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0 \text{ and } \langle A_i, V \rangle > 0$$

The only solution available is :
 $\alpha = 0$

Meaning that,

$$I = X_0$$

8.2.4 Where X_0 is on the ZCT_i border and where V is parallel oriented to
HP (A_i, b_i)

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has an infinity of solutions.

Proof :

♣

Mathematically we translate this case by :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0 \text{ and } \langle A_i, V \rangle = 0$$

This gives us infinity of solutions. In fact, $R(X_0, V)$ is included in HP (A_i, b_i), and the intersection is none other than $R(X_0, V)$.

8.2.5 Where X_0 is on the ZCT_i border and where V is inward ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has a unique solution.

Proof :

♣

In this case

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle = 0 \text{ et } \langle A_i, V \rangle < 0$$

which leads to

$$\alpha = 0$$

That is to say $I = X_0$, unique solution.

8.2.6 Where X_0 is inside ZCT_i and where V is outside ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has a unique solution

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle}$$

Proof :

♣

This case results

$$\text{in } \langle A_i, X_0 \rangle < b_i \text{ et } \langle A_i, V \rangle > 0 :$$

Which leads to:

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$$

Hence the unique solution

$$\alpha = \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} \quad (2.12)$$

8.2.7 Case where X_0 is inside ZCT_i and where V is parallel oriented to ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has no solution.

Proof :

♣

As in the previous case, we have :

$$b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0 \text{ but } \langle A_i, V \rangle = 0$$

Which leads to an impossibility, meaning that $R(X_0, V)$ will never intercept the border of ZCT_i .

8.2.8 Where X_0 is inside ZCT_i and where V is inward ZCT_i

The equation :

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has no solution.

Proof :

As recently,
 $b_i - \langle A_i, X_0 \rangle > 0$ and $\langle A_i, V \rangle > 0$

In this case, the equation

$$\alpha \langle A_i, V \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

has no positive solution, meaning that $R(X_0, V)$ will never intercept the border of ZCT_i .

8.2. 9 Algorithm for determining the intersection of a search axis $R(X_0, V)$ with the technical constraint zone ZCT_i
The previous eight cases can be summarized in the following algorithm :

- Case where there is no intersection.

No intersection :

- Case with

$$\langle A_i, X_0 \rangle > b_i \text{ and } \langle A_i, V \rangle < 0$$

We have a single point of intersection

$$\left\{ X_0 + \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} V \right\}$$

- If $\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$ and $\langle A_i, V \rangle > 0$.

There is unique solution :

$$\{X_0\}$$

-If $\langle A_i, X_0 \rangle = b_i$ and $\langle A_i, V \rangle < 0$.

There is unique solution:

$$\left\{ X_0 + \frac{b_i - \langle A_i, X_0 \rangle}{\langle A_i, V \rangle} V \right\}$$

-If $\langle A_i, X_0 \rangle < b_i$ and $\langle A_i, V \rangle \geq 0$

No solution : \emptyset

8.3 Relationship between a search-plane $C(X_0, V_1, V_2)$ with linearly independent V_1 and V_2 and a ZCT_i technical constraints zone

As for section 8.2, these two objects are sets of decision points, so this section will describe their intersection.

Let I be such a point. It is thus of the form :

$$I = X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \text{ with } \alpha_1 \text{ and } \alpha_2 \text{ are positives.}$$

More like I belongs to the border of ZCT_i , we can write :

$$\langle A_i, I \rangle = b_i$$

Which leads to :

$$\langle A_i, X_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \rangle = b_i$$

From where

$$\langle A_i, X_0 \rangle + \alpha_1 \langle A_i, V_1 \rangle + \alpha_2 \langle A_i, V_2 \rangle = b_i$$

Let

$$\alpha_1 \langle A_i, V_1 \rangle + \alpha_2 \langle A_i, V_2 \rangle = b_i - \langle A_i, X_0 \rangle$$

which is a linear equation with two unknowns variables, α_1 et α_2 positive.

As for 2.6.2, the existence and uniqueness of the solutions to this problem depend on the three objects X_0, V_1 et V_2 .

- For X_0 , there are three possible situations : to be outside of ZCT_i , or be on the border of ZCT_i or be inside of ZCT_i .

- For V_1 there are three possibilities : be outward facing from ZCT_i or be oriented parallel to ZCT_i or be oriented towards the inside of ZCT_i

- For V_2 the possibilities are the same as for V_1 .

All in all, we have $3 \times 3 \times 3$, that is to say, 27 possible cases to be made.

8.4 Search along an axis $R(X_0, V)$ in the ZNN non negativity zone

The ZNN non-negativity zone has been defined as

$$ZNN = \bigcap_{j=1}^n ZNN_j$$

where

$$ZNN_j = ZR(-U_j, \emptyset) \quad (8.05)$$

Conceptually, this means that we assimilate ZNN_j to a resource constraint zone, and if a X_0 point belongs to ZNN_j this means that X_0 satisfies the constraint associated with ZNN_j . It is therefore a stage situation.

The concept of research implies that there is a situation or state of deposition, and that from this situation, one move to another situation or state. And we have already seen that this research, when it is linear, can be modeled by the concept of axis of research starting from a given point and moving according to a given vector $R(X_0, V)$

In this section, the starting point of the search is the point X_0 , which is supposed to be located in the ZNN non-negativity zone. Since the new decisions found must have remained in ZNN, it is logical to study the conditions under which this search leads us out of ZNN. And as in the case of ZCT_i technical constraint zones, we will need to define the boundary concept in ZNN.

For ZNN_i , there is no problem.

Indeed,

$$Fr(ZNN_i) = HP(-U_i, 0)$$

given that ZNN_i is only half affine delimited by the hyperplane $HP(-U_i, 0)$.

And as $HP(-U_i, 0)$ is included in ZNN_i , we know that ZNN_i is a closed area.

8.4.1 Frontier of the ZNN_i non-negativity zone

Proposition 8.05

$$Fr(ZNN) = \bigcup_{j=1}^n (HP(-U_j, 0) \cap C_0^+)$$

Proof :

♣

It suffices to show that for every j , $HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ is a function of ZNN.

Step 1:

Let us show that every X point of $HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ is a border point of ZNN.

Let r be any positive real number. This is to show that the open ball of center X and radius r denoted $B(X, r)$, contains both an element of ZNN other than X and an element of ZNN other than X is:

$$X = (x_i)_{i=1 \dots n}$$

The fact that $X \in HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ means that

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{and that} \quad x_j \geq 0$$

Let us take the point $X' = (x'_i)_{i=1 \dots n}$ defined as follows :

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{for all } i \neq j \\ -\frac{1}{2} & \text{if } i = j \end{cases}$$

Similarly let us take the point:

$X'' = (x''_i)_{i=1 \dots n}$ defines as follows :

$$x''_i = \begin{cases} x_i & \text{for all } i \neq j \\ +\frac{1}{2} & \text{if } i = j \end{cases}$$

It is obvious that :

$$X' \in \text{ZNN and has } X'' \in \text{ZNN}$$

Moreover, it is also obvious that :

$$X' \in B(X, r) \text{ and } X'' \in B(X, r)$$

This shows that the open ball $B(X, r)$ contains both the point X' which is the element outside ZNN and the point X'' which is the element in ZNN, and it is obvious that X' is different from X and that X'' is different from X . Therefore X is a border point of ZNN.

2nd step:

Let us show that $HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$

And in summary, $HP(-U_j, 0)$ is indeed a ZNN border and their meeting is also a border of ZNN.

In addition, let X be a point of ZNN such that :

$$X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$$

It means that :

$$X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$$

Given that $C_0^+ = \text{ZNN}$, it means that

$$X \notin \bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$$

Let X^j be the projection of X on $HP(-U_j, 0)$ and d_j the distance between X and X_j .

As

$$X^j \neq X \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Then $d_j \neq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Let

$$r = \frac{1}{2} \min(d_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

It is obvious that $r > 0$ and that the open ball

$B(X, r)$ is included in ZNN.

There fore,

$$\bigcup_{j=1}^n HP(-U_j, 0) \cap C_0^+ = Fr(\text{ZNN})$$

Note 8.02

$HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$ is the cone

$$C(O, U_1, U_2, \dots, U_{j-1}, U_{j+1}, \dots, U_n)$$

We will call it " conic wall of non-negativity j Noted $MCNN_j$.

Proof :

♣

$$MCNN_j = HP(-U_j, 0) \cap C_0^+$$

$$\text{et } \text{ZNN} = \bigcup_{j=1}^n MCNN_j$$

In other words, the ZNN border is none other than the conic wall meeting of non-negativity.

Note further that

$$MCNN_j \subset HP(U_j, 0)$$

So

$$MCNN_j \subset Fr(\text{ZNN}_j)$$

8.4.2 Exit point of ZNN following $R(X_0, V)$

Proposition 8.06

We assume that X_0 is in ZNN. Since ZNN is closed, the exit point is the point of contact or intersection between $R(X_0, V)$ and $Fr(\text{ZNN}_j)$.

Proof

♣

Let F_j be the point

of $R(X_0, V)$ et $Fr(\text{ZNN}_j)$ which is none other than $HP(-U_j, 0)$,

$$I_j \in R(X_0, V), \text{ so } I_j \text{ is the form}$$

$$I_j = X_0 + \alpha_j V \quad \text{with } \alpha_j \geq 0$$

Similarly

$$I \in HP(-U_j, 0),$$

So we check the equation :

$$\langle -U_j, I \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \langle U_j, I_j \rangle = 0$$

From where, $\langle U_j, X_0, \alpha_j V \rangle = 0$
 $\langle U_j, X_0 \rangle + \alpha_j \langle U_j, V \rangle = 0$

Finally, we obtain the equation:

$$\alpha_j \langle U_j, V \rangle = -\langle U_j, X_0 \rangle$$

with the condition $\alpha_j \geq 0$.

Based on the results of section 5.2, we can say that the research axis $R(X_0, V)$ leads us outside of ZNNj only if V is oriented outside ZNNj, that is, if

$$\langle -U_j, v \rangle > 0,$$

in which case,

$$\alpha_j = \frac{-\langle U_j, X_0 \rangle}{\langle U_j, V \rangle} \quad (8.06)$$

Let $X_0 = (X_0^i)_{i=1, \dots, n}$

$$V = (v_i)_{i=1, \dots, n} \quad \text{and} \quad \langle U_j, X_0 \rangle = x_j^0 \\ \langle U_j, V \rangle = v_j$$

The expression of α_j becomes :

$$\alpha_j = \frac{-x_j^0}{v_j} \quad (8.07)$$

Which is good non-negative because $x_j^0 \geq 0$ and $v_j < 0$.

8.4.3 ZNN exit point following $R(X_0, V)$

We assume that X_0 is in ZNN. Still based on previous results, $R(X_0, V)$ leads us out of at least one

ZNNj, that is, there exists a j such that $v_j < 0$ noting :

$$V = (v_j)_{j=1, \dots, n}.$$

Let $IN(V)$ denote the set of indices j such that $v_j < 0$.

$$IN(V) = \{j \in [1, n] \text{ tel que } v_j < 0\}$$

Hence the proposal :

Proposition 8.07

The research axis is in the non-negativity zone ZNN only if $IN(V)$ is non-empty. In this case, the exit point I is given by :

$$I = X_0 + \alpha V,$$

$$\text{Or} \quad \alpha = \min_{j \in IN(V)} \left\{ \frac{-x_j^0}{v_j} \right\} \quad (8.08)$$

Proof:

♣

Given that $R(X_0, V)$ is a totally ordered set, the exit point of I such that verify:

$$I = \min(I_j) \\ j \in IN(V) \quad \text{where} \quad I_j = X_0 + \alpha_j V \quad (8.09)$$

The Proof is immediate. The output point I is none other than the first smallest I_{j_0} .

9 CONCLUSION

Through this article, we presented all the art mathematical object classes required for topo-geometric modeling MZ and the mean objectives associated with Topo-geometric definitions, as well as the conventional operations and properties of constraints LPP defining hyperplanes, are mentioned.

REFERENCES

- [1] Zionts, S 1965 "Size reduction technology of linear programming and Their Applications", PhD Thesis, Carnegie Institute of Technology.
- [2] T. Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on optimal post analysis," European journal of operational R FSS, vol. 60, pp. 315-326 1979.
- [3] G. Brearley, G. Mitra, HP and Williams, "Analysis of mathematical programming problems prior to Applying the simplex algorithm," Mathematical Programming, Vol. 8, pp. 54-83, 1975.
- [4] N.V. Stojkovic and PS Stanimirovic, "Two Direct methods in linear programming," European Journal of Operational Research, Vol. 131, no. 2, pp. 417-439 2001.
- [5] J. Telgen, "Identifying redundant constraints and implicit Equalities in system of linear constraints," Management Science, Vol. 29, no. 10, pp. 1209-1222, 1983.
- [6] T.Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on optimal post analysis," European Journal of Operational Research, vol. 60, pp. 315-326 1979.
- [7] S. Paulraj, P. Sumathi, "A Comparative Study of Redundant constraints Identification Methods in Linear Programming Problems", Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 723402, 2.

IJERT

International Journal of
Engineering Research & Technology
ISSN : 2278 - 0181, www.ijert.org
(Published by : ESRSA Publication)



Certificate Of Publication

This is to certify that

Andrianarizaka Marc Tiana

Has published a research paper entitled

Topo-Geometric Model MZ: Feeded Objects

In IJERT, Volume. 7, Issue. 3, March - 2018



Registration No: IJERTV7IS030092

Date: 22-03-2018

A handwritten signature in black ink.

Chief Editor, IJERT

International Journal of
Engineering Research & Technology

FICHE DE RENSEIGNEMENTS



Nom : ANDRIANARIZAKA

Prénom : Marc Tiana

Adresse de l'auteur : Lot VF 61 Ankazotokana Antananarivo

Téléphone : 033 12 194 04

034 13 063 84

E-mail : mcthiana@yahoo.fr

Titre de la thèse :

**« MODELISATION TOPO-GEOMETRIQUE MZ DE RECHERCHE DE
CONTRAINTES REDONDANTES DANS UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION
LINEAIRE »**

Nombre de pages : 277

Nombre de tableaux : 10

Nombres de figures : 74

Mots clés : Optimisation, programmation linéaire ; contraintes ; contraintes redondantes ;
minimisation de coûts de résolution.

Directeur de Thèse : M. ANDRIAMANOHISOA Hery Zo

Téléphone : 034 10 339 43

E-mail : aheryzo@gmail.com

Co-Directeur de Thèse : M. ROBISON Matio

Téléphone : 033 11 457 86

E-mail : mat-robinson2000@yahoo.fr

RESUME

Cette thèse portant sur « La modélisation topo-géométrique MZ de la recherche de contraintes redondantes des problèmes de programmation linéaires » utilise l'approche inductive dans le domaine de la recherche. Cette nouvelle théorie évoquée dans cette étude puise sa source sur les problèmes ouverts de résolution ou optimisation d'un problème linéaire à grande dimension. Les difficultés de résolution de ces derniers reposent surtout sur le coût de la détection de la solution optimale notamment en termes de temps. Les différents travaux de recherches menés montraient qu'une des possibilités de la minimisation de ce temps de calcul de la solution optimale est la recherche des contraintes redondantes. C'est dans ce sens que la thèse est réalisée pour apporter une nouvelle théorie de détection de contraintes redondantes qui pourrait minimiser la durée de la recherche de la solution optimale dans un PPL.

Mots clés : Optimisation, programmation linéaire ; contraintes ; contraintes redondantes ; minimisation de coûts de résolution

ABSTRACT

This thesis on "MZ topo-geometric modeling of the search for redundant constraints of linear programming problems" uses the inductive approach in the field of research. This new theory evoked in this study draws its source from the open problems of resolution or optimization of a large dimensional linear problem. The difficulties of resolving these latter are mainly based on the cost of detecting the optimal solution, in particular in terms of time. The various research studies showed that one of the possibilities of minimizing this computing time of the optimal solution is the search for redundant constraints. There is the reason that the thesis is realized to bring a new theory of detection of redundant stresses that could minimize the duration of the search for the optimal solution in a PPL.

Keywords: Optimization, linear programming; constraints; redundant constraints; minimization of resolution costs