

## Sommaire

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>I - PRINCIPES DE L'APPROCHE MODULAIRE CONTRAST</b>	<b>7</b>
<b>I.1 Problèmes de grande taille</b>	<b>8</b>
I.1.1 Hypothèses	8
I.1.2 Notations	8
I.1.3 Problème	9
I.1.4 Résolution	9
I.1.5 Difficultés	9
<b>I.2 Méthodes de décomposition de domaine</b>	<b>11</b>
I.2.1 La méthode du complément de Schur	11
I.2.2 La méthode duale	12
I.2.3 Les méthodes mixtes	13
<b>I.3 Principe de l'approche proposée</b>	<b>14</b>
I.3.1 Décomposition de la structure	14
I.3.2 Problème mécanique sur les deux entités créées	15
I.3.3 Schéma itératif de résolution	16
I.3.4 Discrétisation	21
I.3.5 Choix des paramètres de direction de recherche	25
I.3.6 Contrôle du calcul	25
<b>I.4 Conclusion</b>	<b>26</b>
<b>II - MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE ET INFORMATIQUE - PREMIÈRES ILLUSTRATIONS</b>	<b>27</b>
<b>II.1 Mise en œuvre numérique de la méthode</b>	<b>28</b>
II.1.1 Implantation dans CASTEM 2000	28
II.1.2 Organisation des données	29
II.1.3 Déroulement d'un calcul - Algorithme	29
II.1.4 Particularités relatives aux interfaces	31
<b>II.2 Comportement du logiciel - Exemple simple</b>	<b>32</b>
II.2.1 Comportement de l'algorithme	32
II.2.2 Influence des paramètres	33
<b>II.3 Conditions aux limites</b>	<b>36</b>
II.3.1 Prise en compte des conditions aux limites	36
II.3.2 Exemple	37
<b>II.4 Traitement d'un problème à grand nombre de degrés de liberté</b>	<b>43</b>

<b>III - TRAITEMENT DES NON LINÉARITÉS DE CONTACT</b>	<b>47</b>
<b>III.1 Problèmes de contact unilatéral avec et sans frottement</b>	<b>48</b>
III.1.1 Données et hypothèses du problème	48
III.1.2 Contact unilatéral sans frottement	49
III.1.3 Lois de frottement	50
III.1.4 Problèmes statiques ou monotones quasi-statiques	53
III.1.5 Approche incrémentale du problème de frottement de Coulomb	54
III.1.6 Résolution du problème de contact	55
III.1.7 Analogie avec les problèmes de plasticité	61
III.1.8 Eléments de contact	62
III.1.9 Quelques problèmes numériques avec les éléments finis	63
<b>III.2 Interface de contact unilatéral avec ou sans frottement</b>	<b>64</b>
III.2.1 Problèmes et hypothèses	64
III.2.2 Résolution	67
III.2.3 Interprétation en terme de Lagrangien augmenté	68
<b>III.3 Validation du traitement des non-linéarités de contact</b>	<b>73</b>
III.3.1 Sensibilité de l'algorithme au passage adhérence-glissement	73
III.3.2 Exemple test - Lopin en compression biaxiale	74
<b>III.4 Non-linéarité de type "joint élastomère unilatéral"</b>	<b>77</b>
III.4.1 Joint élastomère à comportement non-linéaire unilatéral	77
III.4.2 Interface "joint élastomère non-linéaire"	77
III.4.3 Exemple de comportement	79
III.4.4 Exemple simple	79
<b>III.5 Bilan sur les modèles d'interface</b>	<b>81</b>
<b>IV - EXEMPLES INDUSTRIELS D'ASSEMBLAGES DE STRUCTURES TRIDIMENSIONNELLES - FONCTIONNEMENT ET PERFORMANCES DU LOGICIEL CONTRAST</b>	<b>83</b>
<b>IV.1 Bride avec vis radiales (comportement)</b>	<b>84</b>
IV.1.1 Modélisation	84
IV.1.2 Transmission des efforts par adhérence	86
IV.1.3 Transmission des efforts par obstacle (cisaillement des vis)	87
IV.1.4 Comportement itératif particulier	88
<b>IV.2 Bride avec vis radiales (étude du chargement)</b>	<b>89</b>
IV.2.1 Modélisation	89
IV.2.2 Chargement axial	90
<b>IV.3 Bride conique</b>	<b>93</b>
IV.3.1 Description du problème.	93
IV.3.2 Chargement radial.	95
<b>IV.4 Comparaison avec un code de calcul - Assemblage boulonné</b>	<b>97</b>
<b>IV.5 Comparaison avec un code de calcul - Bride rivetée</b>	<b>101</b>

<b>V - ASSEMBLAGES PAR LIAISONS AVEC MAILLAGES NON-COMPATIBLES</b>	103
<b>V.1 Principes généraux de la connexion de maillages</b>	104
V.1.1 Méthodes générales	104
V.1.2 Méthodes de décomposition de domaine	105
<b>V.2 Approche proposée</b>	105
V.2.1 Problème à l'étape locale	106
V.2.2 Discrétisations	106
V.2.3 Résolution de l'étape globale	108
V.2.4 Construction des matrices de projection	110
<b>V.3 Comparaison sur un exemple simple</b>	111
<b>V.4 Exemple - Assemblage boulonné</b>	112
V.4.1 Problème	112
V.4.2 Comparaison	115
<b>V.5 Conclusions</b>	117
<b>VI - COMPORTEMENT DE L'APPROCHE CONTRAST SUR CALCULATEUR PARALLÈLE</b>	119
<b>VI.1 Version parallèle de l'algorithme</b>	120
<b>VI.2 Exemple - différentiel automobile</b>	122
<b>VI.3 Conclusions et perspectives</b>	127
<b>CONCLUSIONS</b>	129
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	133

# INTRODUCTION

## Introduction

La simulation du comportement d'assemblages de structures complexes devient de plus en plus courante en bureau d'étude. Pour valider certains paramètres de conception, soit le comportement global de l'assemblage est étudié, soit un élément à optimiser est étudié au sein de l'assemblage, pour modéliser au mieux les actions mécaniques auxquelles il est soumis. Malheureusement, l'analyse d'assemblages de structures - même à comportement élastique - peut conduire à de sérieuses difficultés, en particulier lorsque la présence de nombreuses zones de contact unilatéral, avec ou sans frottement, rend le comportement globalement non-linéaire.

Actuellement, l'analyse de ce type d'assemblages se fait, en général, par la méthode des éléments finis. Cependant, réaliser une discrétisation fine d'une géométrie complexe soumise à un chargement réaliste conduit à un modèle éléments finis comportant un grand nombre de degrés de liberté et qui est difficile à mettre en œuvre et à manipuler. De plus, les résolutions classiques des problèmes de contact, par pénalité [PERIC & OWEN, 1992], par multiplicateurs de Lagrange [BATHE & CHAUDHARY, 1985] ou par éléments de contact [CESCOTTO & CHARLIER, 1993], entraînent généralement un surcoût numérique très important quand le nombre de conditions est grand. En effet, pour les problèmes de frottement, les tailles d'incrément de chargement utilisées doivent souvent être petites pour assurer la convergence [RAOUS et al, 1995 ; KIKUCHI & ODEN, 1983]. Ainsi, la détermination d'une solution de bonne qualité nécessite la résolution de problèmes de grandes tailles entraînant des coûts numériques considérables. De plus, les codes Eléments Finis classiques - qui sont des outils de simulation généraux - ne permettent pas de modéliser simplement la réalité technologique, c'est-à-dire les joints d'étanchéité, les jeux initiaux, les boulons précontraints, les nervures... Ainsi, la mise en œuvre et la détermination d'une bonne solution (en déplacement et en contrainte) pour de tels assemblages conduisent généralement à des coûts de calcul importants et à des délais trop longs pour permettre une boucle d'optimisation dans un bureau d'étude.

La présente étude, initiée au Département Mécanique des Structures de AÉROSPATIALE en 1990, a pour objectif de construire un outil de calcul robuste et simple d'emploi, apte à analyser rapidement et de façon fiable les situations complexes d'assemblages de structures. La solution proposée dans [LADEVÈZE, 1990 ; LADEVÈZE & MAUREL, 1990] est basée sur la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) et sur une décomposition des assemblages en sous-structures et en interfaces. L'approche de décomposition de domaine utilisée est une approche mixte qui, contrairement aux méthodes primales [ROUX, 1990 ; ROECK ET AL, 1992] et aux méthodes duales [FARHAT ET AL, 1994], traite à égalité les efforts et les déplacements bords. Dans les situations simples, elle s'identifie aux approches décrites dans [LIONS P.L., 1990 ; GLOWINSKI & LE TALLEC, 1990 ; LADEVÈZE J., 1985]. L'approche s'inscrit dans une

formulation et une stratégie adaptées à l'utilisation d'ordinateurs à architecture parallèle. Cependant, dans l'étude présentée, ce qui est recherché dans le parallélisme est, avant tout, une grande modularité et une grande flexibilité dans la description du problème.

Les premiers travaux réalisés [BLANZÉ et al, 1992 ; 1993 ; 1996], en collaboration avec AÉROSPATIALE et la DRET, ont montré la faisabilité de la méthode pour des problèmes 2D axisymétriques. Dans ce cadre, l'approche a permis des analyses "simplifiées" tout en prenant en compte les non-linéarités dues au contact (décollement, adhérence et glissement) et au matériau (joint). Une modélisation simplifiée ("homogénéisée") des éléments technologiques (boulons précontraints, nervures...) était utilisée pour permettre un calcul axisymétrique. Les éléments de structures étaient représentés à l'aide d'un nombre réduit d'éléments finis, aux fonctions de base enrichies (vérifiant l'équilibre interne en moyenne), et la solution obtenue donnait le comportement "moyen" de l'assemblage.

Le travail présenté dans ce document est une extension de l'approche aux modélisations tridimensionnelles. Cette étude a aussi été menée dans le cadre d'une collaboration avec AÉROSPATIALE ayant pour thème l'analyse de brides de lanceurs [BLANZÉ et al, 1995 ; 1996]. Les difficultés engendrées par cette approche 3D sont l'augmentation rapide du nombre d'inconnues des problèmes (due à la modélisation de la géométrie et des éléments technologiques) et le traitement de conditions de contact et de frottement sur des interfaces bidimensionnelles. De plus, les phases de post-traitement ne sont plus aussi aisées que pour des représentations planes.

Le traitement de modélisations tridimensionnelles a donc conduit à un élargissement des ambitions et des possibilités de l'approche par rapport au cahier des charges initial. Elle est maintenant appelée "approche CONTRAST" (**CON**tact **TR**idimensionnel dans les **AS**semblages en **ST**atique). La stratégie développée peut, selon les paramètres, être soit une approche simplifiée soit une approche dont les résultats sont comparables à ceux donnés par une méthode éléments finis traditionnelle. En effet, les éléments de structure sont modélisés à l'aide de maillages éléments finis classiques et peuvent être décrits finement même s'ils sont complexes. Il en va de même pour les éléments technologiques tels que les boulons, les vis ou les rivets, dont on peut décrire précisément la géométrie et donc le comportement. La décomposition en sous-structures permet de réduire la taille de la modélisation (encombrement des matrices de rigidité) par rapport à une approche éléments finis classique basée sur la même discrétisation. L'algorithme permet, de plus, une réduction des coûts de calcul engendrés, même sur ordinateur séquentiel. Pour le post-traitement, la représentation par éléments finis permet d'utiliser des outils performants existant sur des codes industriels.

Les non-linéarités de type contact (avec ou sans frottement - avec ou sans jeu) sont traitées de façon mixte et locale en variable d'espace par l'intermédiaire d'une loi de comportement associée à une interface dont la géométrie peut être complexe. Cette approche permet, contrairement aux techniques classiques, de ne pas introduire de variables supplémentaires (multiplicateurs de Lagrange) dans la résolution des problèmes globaux. De plus, le nombre de conditions de contact influe peu sur le temps de calcul, comme il le fait pour la méthode des statuts, par exemple. Dans l'étude réalisée, nous nous sommes placés dans le cas de chargements monotones quasi-statiques et les conditions de frottement sont traitées par une méthode en déplacement [DUVAUT & LIONS, 1972] : seule la solution à l'instant final est recherchée.

Pour des exemples d'assemblages complexes, plusieurs comparaisons avec les codes de calcul industriels ABAQUS et CASTEM 2000 sont présentées. Elles valident le traitement des non-linéarités de contact et montrent l'efficacité de l'approche face à des problèmes incluant de nombreuses zones de contact unilatéral avec ou sans frottement. Pour les exemples réalisés, des réductions jusqu'à un facteur dix sur la taille des problèmes et un facteur cinquante sur les temps de calcul ont été observées.

Un logiciel prototype (portant le même nom que l'approche) a été développé jusqu'à un stade pré-industriel en s'appuyant sur les fonctionnalités pré- et post-processeur du code de calcul CASTEM 2000 (développé par le CEA). Le logiciel prototype CONTRAST utilise le parallélisme intrinsèque de l'approche pour créer une base de données d'éléments d'assemblage - ayant éventuellement été modélisés indépendamment les uns des autres - et de liaisons entre ces éléments. Ainsi, une modification de géométrie, de conditions aux limites ou de comportement de liaison n'a qu'une influence "locale" sur la description du problème et n'entraîne pas une réanalyse complète.

Lorsque les géométries sont complexes, les modélisations tridimensionnelles entraînent un nouveau problème associé à la difficulté de réaliser des maillages identiques (compatibles) de part et d'autre d'une interface sur deux maillages volumiques 3D différents. Pour améliorer la souplesse des analyses, la possibilité d'utiliser des maillages non-compatibles [FARHAT & ROUX, 1994 ; QUIROZ, 1993 ; SASSI, 1993] sur les liaisons entre les différents éléments de l'assemblage a été introduite dans le logiciel prototype. Ceci permet de simplifier la phase de discrétisation (maillage) du problème et de découpler complètement les modélisations des divers éléments de l'assemblage.

Plusieurs exemples de géométries de brides, proposés par AÉROSPATIALE, ont été étudiés à l'aide de cette approche. Ce mémoire en présente quelques-uns qui font intervenir des liaisons par vis, boulons ou rivets, pour lesquelles la présence de zones de contact avec

frottement donne au comportement un aspect fortement non linéaire. Ce côté non linéaire est accentué par le fait que la présence de jeux dans l'assemblage engendre, selon les charges, des modes de transmission des efforts soit par adhérence soit par cisaillement des éléments de liaison.

L'approche proposée, présentant un parallélisme intrinsèque, s'adapte naturellement à une utilisation sur calculateurs à architecture parallèle. On présente, ici, sur ordinateur parallèle à mémoire distribuée, les premiers calculs d'assemblages tridimensionnels complexes à plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté et présentant un très grand nombre de conditions de contact. Cette dernière étude est à rapprocher d'autres travaux menés au LMT sur l'élaboration de formulations et de stratégies parallèles à fort contenu mécanique [LADEVÈZE, 1996 ; LADEVÈZE & LORONG, 1992]. Ici, les difficultés majeures concernent les problèmes de contacts tridimensionnels. Dans [COGNARD, 1996], des non-linéarités de type viscoplastique sont envisagées pour des simulations de structures sous chargements cycliques. Une variante multi-échelles, particulièrement intéressante lors de l'utilisation de nombreux processeurs, est présentée dans [DUREISSEIX & LADEVÈZE, 1996].





# **CHAPITRE I :**

## **PRINCIPES DE L'APPROCHE**

### **MODULAIRE CONTRAST.**

Après avoir mis en place le cadre et les notations, ce chapitre présente les problèmes posés par les modélisations tridimensionnelles à comportement linéaire : complexité des géométries et des modèles, grand volume de données, encombrement mémoire important et coûts de calcul prohibitifs. Les méthodes de décomposition de domaines, qui essaient de pallier ces problèmes, sont présentées. Elles tentent de découpler le traitement des domaines, permettent une réduction des encombrements et sont fortement orientées vers l'utilisation de calculateurs à architecture parallèle (qui peuvent permettre des gains en temps importants et l'utilisation d'un espace mémoire de très grande taille).

Les principes de l'approche utilisée sont ensuite détaillés. Elle est basée sur une décomposition particulière des assemblages qui donne aux interfaces un rôle majeur. La formulation utilisée pour mettre en place une stratégie de résolution itérative est issue de la méthode LATIN et présente un fort parallélisme. Ce dernier est principalement utilisé, dans ce travail, pour introduire une certaine modularité qui facilite la description et la résolution de gros problèmes. Cette approche a tout d'abord fait l'objet d'une étude de faisabilité pour des problèmes 2D axisymétriques, pour lesquels elle permettait des calculs simplifiés de comportement d'assemblages.

Ce chapitre présente l'extension des techniques développées pour des problèmes 2D et les choix particuliers effectués pour l'adaptation de cette approche aux modélisations tridimensionnelles. Maintenant appelée "approche CONTRAST" (**CON**tact **TR**idimensionnel dans les **A**ssemblages en **ST**atique), elle peut, nous allons le voir, donner des résultats comparables à ceux d'une méthode éléments finis traditionnelle.

## I.1 Problèmes de grande taille

### I.1.1 Hypothèses

On considère un domaine  $\Omega$  soumis à des forces de volume  $\underline{f}_d$  et à des efforts surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie  $\Gamma_2$  de sa frontière, la partie complémentaire  $\Gamma_1$  étant soumise à des déplacements  $\underline{U}_d$  imposés (Fig. I-1). On se place sous l'hypothèse des petites perturbations et dans le cadre de chargements quasi-statiques (ce qui permet de négliger les effets d'accélération) sans contact unilatéral. Le problème étudié est stationnaire et le comportement du matériau est supposé linéaire.

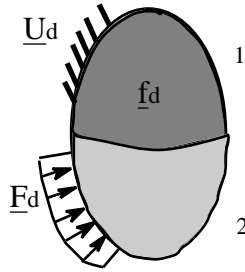


Figure I-1

### I.1.2 Notations

Le champ de déplacement  $\underline{U} = \underline{U}(\mathbf{M})$  est recherché dans un espace vectoriel  $\mathbf{U}$  défini sur  $\Omega$  et sur lequel une certaine régularité est imposée. Les conditions de régularité décrites dans [DUVAUT & LIONS, 1972] sont utilisées.

Un champ de déplacement  $\underline{U}^* = \underline{U}^*(\mathbf{M})$  est dit cinématiquement admissible à zéro (C.A. à 0) s'il vérifie des conditions de déplacement nul sur le bord  $\Gamma_1$ . L'espace vectoriel  $\mathbf{U}_0$  est alors défini :

$$\mathbf{U}_0 = \{ \underline{U}^* \in \mathbf{U}, \underline{U}^*|_{\Gamma_1} = 0 \}$$

Un champ de déplacement  $\underline{U} = \underline{U}(\mathbf{M})$  est dit cinématiquement admissible (C.A.) s'il vérifie les liaisons (les déplacements sur le bord  $\Gamma_1$  sont égaux à  $\underline{U}_d$ ).

$$\underline{U}|_{\Gamma_1} = \underline{U}_d \text{ et } \underline{U} \in \mathbf{U}$$

Un champ de contrainte  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\mathbf{M})$  est dit statiquement admissible (S.A.) s'il vérifie les équations d'équilibre (principe des puissances virtuelles) :

$$\begin{aligned} \underline{U}^* &\in \mathbf{U}_0, \\ \text{Tr} [ \underline{\sigma} \cdot (\underline{U}^*) ] d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\Gamma_2} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS, \end{aligned}$$

où  $(\underline{U}^*)$  représente le champ de déformation engendré par le champ de déplacement  $\underline{U}^*$ .

### I.1.3 Problème

Le problème à résoudre s'écrit alors :

Trouver  $\{\underline{U}, \underline{U}^*\}$  tel que :

$\underline{U}$  soit C.A. :

$$\underline{U}|_{\Gamma_1} = \underline{U}_d \text{ et } \underline{U}|_{\Gamma_2} = \underline{U}_0$$

soit S.A. :

$$\underline{U}^*|_{\Gamma_1} = \underline{U}_0$$

$$\text{Tr}[\underline{\sigma}(\underline{U}^*)] d = \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d + \frac{1}{2} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS$$

$\{\underline{U}, \underline{U}^*\}$  vérifie la relation de comportement :

$$\underline{\sigma} = \underline{K}(\underline{U}) \text{ où } \underline{K} \text{ est l'opérateur de Hooke.}$$

### I.1.4 Résolution

Dans tous les codes de calcul industriels, ce type de problème linéaire est classiquement résolu par la méthode des éléments finis [ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1991]. En remplaçant le champ de contrainte par son expression en fonction du champ de déplacement, la formulation en déplacement obtenue est :

Trouver  $\underline{U}$  C.A. tel que :

$$\underline{U}^*|_{\Gamma_1} = \underline{U}_0$$

$$\text{Tr}[\underline{K}(\underline{U}) (\underline{U}^*)] d = \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d + \frac{1}{2} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS$$

Une discrétisation en espace  $\underline{U} = \{\underline{N}\}^T \{u\}$  (où  $\{\underline{N}\}$  contient les fonctions d'interpolation sur les éléments utilisés et  $\{u\}$  est le vecteur de déplacements nodaux recherché) est introduite. Le système linéaire à résoudre, issu de la formulation en déplacement, est alors du type :

$$[\underline{K}]\{u\} = \{f\}$$

où  $\{f\}$  est le vecteur de forces nodales appliquées (ou forces généralisées) et  $[\underline{K}]$  la matrice de rigidité du système (qui est un assemblage de matrices de rigidité élémentaires sur les éléments

de la discrétisation). Le système linéaire a la taille du nombre d'inconnues nodales (degrés de liberté). La résolution se fait par factorisation de la matrice, par une méthode de type Cholesky, par exemple.

### I.1.5 Difficultés

Dans le cas de modélisations tridimensionnelles, la complexité de la géométrie et la recherche d'une solution de bonne qualité conduisent à utiliser une discrétisation fine et donc à introduire un grand nombre d'éléments. Les systèmes linéaires engendrés deviennent très rapidement gigantesques (plusieurs centaines de milliers d'équations).

A titre d'exemple, on montre sur la figure I-2, l'évolution du nombre de degrés de liberté quand le nombre d'éléments augmente, pour un maillage 2D en quadrangles à 8 nœuds et pour un maillage 3D en cubes à 20 nœuds.

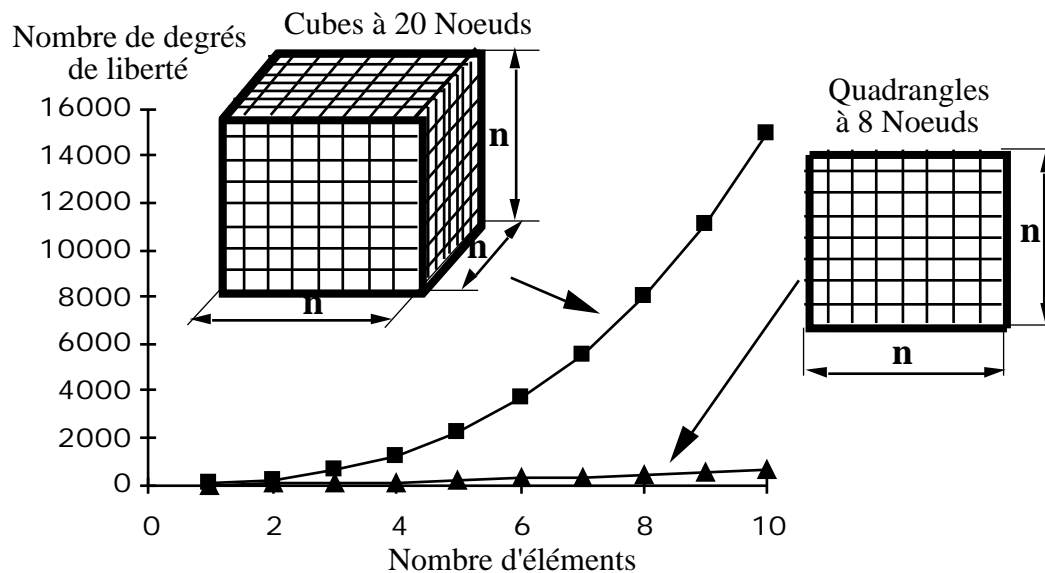


Figure I-2 : Comparaison des tailles des problèmes 2D et 3D.

Les problèmes posés sont alors multiples. La mise en place du modèle géométrique fin et du modèle de calcul contenant autant d'inconnues amène à manipuler de très grosses quantités d'informations. De plus, la matrice de rigidité, une fois assemblée, occupe un espace mémoire très important, souvent plus grand que celui disponible sur les calculateurs courants. Son stockage et sa factorisation deviennent délicats. Des écritures sur disques sont donc nécessaires et ralentissent fortement le processus.

Il est alors nécessaire, pour de telles modélisations, de générer des outils facilitant l'entrée et la manipulation des données et conduisant à des encombrements mémoire réduits.

## I.2 Méthodes de décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine sont développées pour le traitement de problèmes de grande taille (grand nombre de degrés de liberté) pour des comportements linéaires ou localement non-linéaires. Elles sont maintenant utilisées pour une grande variété de problèmes. Avec les possibilités nouvelles apportées par les calculateurs à architecture parallèle, elles ont pris un essor important. En effet, le partitionnement du domaine engendré est bien orienté vers le développement d'algorithmes adapté à ces ordinateurs. De plus, il conduit à une réduction de l'encombrement total des matrices de rigidité.

Deux grandes classes de méthodes existent : les approches avec recouvrement des domaines entre eux et celles sans recouvrement. Les dernières sont les plus utilisées de nos jours et sont celles auxquelles nous allons nous intéresser. Parmi ces méthodes, trois types d'approches existent : les méthodes primales (ou dites du complément de Schur), les méthodes duales et les méthodes mixtes.

Pour la présentation de ces approches, nous considérons simplement un domaine décomposé en deux sous-domaines  $E$  et  $E'$ , en faisant apparaître une interface  $EE'$  (Fig. I-3).

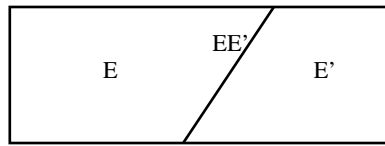


Figure I-3 : Décomposition du domaine

### I.2.1 La méthode du complément de Schur

Cette méthode est basée sur une condensation du problème sur les interfaces entre les domaines, sur lesquelles la continuité en déplacement est constamment vérifiée [DE ROECK et al, 1992 ; ROUX, 1990].

#### I.2.1.1 Condensation sur les interfaces

Après renumérotation des degrés de liberté associés à l'intérieur de  $E$  et de  $E'$  et à l'interface  $EE'$ , le problème discrétisé par éléments finis  $[K]\{q\} = \{F\}$  est écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_E] & 0 & [K_{EE'}] \\ 0 & [K_{E'}] & [K_{EE'}] \\ [K_{EE'}] & [K_{EE'}] & [K_{EE'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_E\} \\ \{u_{E'}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_E\} \\ \{f_{E'}\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}$$

Après élimination des inconnues  $\{u_E\}$  et  $\{u_{E'}\}$ , le problème devient :

$$\begin{aligned} & ([K] - [K_E][K_E]^{-1}[K_E] - [K_{E'}][K_{E'}]^{-1}[K_{E'}])\{u\} \\ & = \{f\} - [K_E][K_E]^{-1}\{f_E\} - [K_{E'}][K_{E'}]^{-1}\{f_{E'}\} \end{aligned}$$

qui est écrit sous la forme :

$$[S]\{u\} = \{f_S\}$$

où  $[S]$  est appelée matrice du complément de Schur.

Ce problème a une taille réduite au nombre d'inconnues présentes dans  $\{u\}$  et, après résolution, les inconnues  $\{u_E\}$  et  $\{u_{E'}\}$  sur les deux domaines sont obtenues en post-traitement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\{u_E\} &= [K_E]^{-1}(\{f_E\} - [K_E]\{u\}) \\ \{u_{E'}\} &= [K_{E'}]^{-1}(\{f_{E'}\} - [K_{E'}]\{u\})\end{aligned}$$

### **I.2.1.2 Résolution**

Le problème condensé étant de petite taille, il peut être résolu directement [ESCAIG et al, 1994]. Dans ce cas, l'approche est qualifiée de "méthode des sous-structures" et est bien connue en mécanique. Néanmoins, la construction de la matrice du complément de Schur, nécessite l'obtention explicite des matrices  $[K_E]^{-1}$  et  $[K_{E'}]^{-1}$ . Cette opération n'est pas classique pour un code de calcul et peut s'avérer très coûteuse. De plus, la matrice  $[S]$  est très souvent "pleine", contrairement aux matrices utilisées par la méthode des éléments finis. Son traitement est donc particulier.

Une idée est donc d'utiliser, pour résoudre le problème condensé, des stratégies itératives qui ne nécessitent pas le calcul explicite de  $[S]$ , mais uniquement celui de ses produits par des vecteurs. C'est le cas pour les méthodes de type gradient conjugué pour lesquelles les calculs de ces produits sont même complètement parallélisables et dont l'efficacité peut être améliorée par un préconditionnement [De ROECK & LE TALLEC, 1990].

Certains cherchent, néanmoins, à utiliser la méthode directe pour profiter de sa robustesse et de son adaptativité à tous types de problèmes. De plus, elle permet, dans certains cas, de créer des bibliothèques de sous-structures ayant déjà été calculées et donc d'introduire une certaine modularité dans l'utilisation. Pour cela, des méthodes efficaces sont élaborées pour la construction de la matrice du complément de Schur. C'est le cas, par exemple, de la méthode multi-frontale [DUFF, 1986].

### **I.2.2 La méthode duale**

Dans cette approche, la continuité en déplacement est imposée par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange [FARHAT & ROUX, 1994]. L'équilibre en effort est assuré sur l'interface, c'est la discontinuité en déplacement qui diminue au cours des itérations. Elle est donc la méthode duale de la précédente. Le problème se ramène au système suivant qui donne les multiplicateurs :

$$\begin{bmatrix} [B_E] & -[B_{E'}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_E]^{-1} & 0 \\ 0 & [H_{E'}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_E]^T \\ -[B_{E'}]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [B_E] & -[B_{E'}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_E]^{-1} & 0 \\ 0 & [H_{E'}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f_E\} \\ \{f_{E'}\} \end{Bmatrix}$$

$$\text{où } [H_E] = \begin{bmatrix} [K_E] & [K_E] \\ [K_E] & [K^{(E)}] \end{bmatrix} \text{ et } [H_{E'}] = \begin{bmatrix} [K_{E'}] & [K_{E'}] \\ [K_{E'}] & [K^{(E')}] \end{bmatrix}$$

en séparant, dans  $[K]$ , la contribution des éléments appartenant à  $E$  et qui jouxtent  $E$ , de ceux qui jouxtent  $E'$ . C'est-à-dire :  $[K] = [K^{(E)}] + [K^{(E')}]$ . Les termes  $[B_E]$  et  $[B_{E'}]$  sont des matrices de restriction des multiplicateurs aux interfaces.

[FARHAT & ROUX, 1994] utilise cette approche pour la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) et propose, en plus, la possibilité de connecter des maillages non-compatibles. Cette opération est réalisée à l'aide d'une représentation particulière des multiplicateurs de Lagrange sur l'interface (cf. §V.1.2).

### I.2.3 Les méthodes mixtes

Dans cette dernière approche, les solutions approchées, obtenues au cours des itérations, ne vérifient a priori ni la continuité en déplacement ni l'équilibre en effort sur les interfaces. C'est le cas de l'approche que nous utilisons pour l'étude d'assemblages de structures tridimensionnelles.

D'autres approches mixtes, qui s'identifient à la nôtre dans le cas de liaisons parfaites ou de contact sans frottement entre les sous-domaines, sont proposées. L'une utilise une extension de l'algorithme de Schwarz aux cas de décomposition sans recouvrement [LIONS P.L., 1990] et deux autres utilisent une formulation par lagrangien augmenté [GLOWINSKI & LE TALLEC, 1990 ; LADEVÈZE J., 1985]



### I.3 Principe de l'approche proposée

#### I.3.1 Décomposition de la structure

La structure élastique considérée est décomposée en sous-structures dans le but de rompre la globalité du problème. Cette décomposition est obtenue à partir de deux entités mécaniques différentes : les sous-structures  $E$  et les interfaces  $EE'$  ( $EE'$  est l'interface entre les sous-structures  $E$  et  $E'$ ). Les interfaces réalisent les liaisons entre les sous-structures mais aussi entre les sous-structures et l'extérieur pour la prise en compte des conditions aux limites. Nous discutons de l'intérêt de cette approche au chapitre II. La structure complète considérée est donc représentée par un ensemble de sous-structures qui ne communiquent qu'avec leurs interfaces voisines (Fig. I-4).

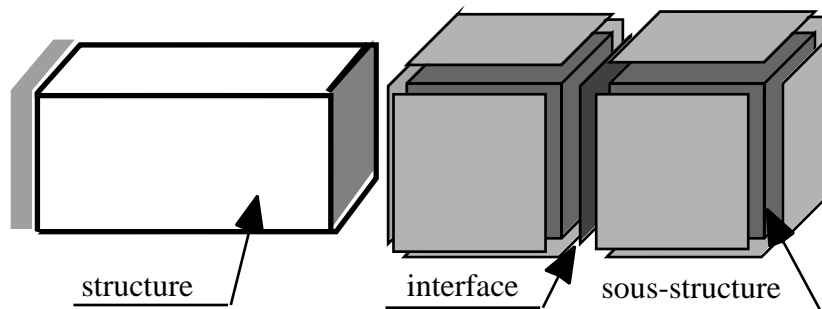


Figure I-4 : Décomposition d'une structure.

Dans cette approche et contrairement aux techniques classiques de décomposition de domaine, les interfaces ne sont pas uniquement des objets fictifs engendrés par la décomposition. Ce sont des entités mécaniques à part entière qui disposent de leurs propres inconnues et de leurs propres équations d'équilibre et de comportement. Elles sont les éléments clés de l'approche, car le fait qu'à une même interface puissent être associés divers comportements différents introduit une grande flexibilité des modélisations réalisées.

Pour cette présentation des principes de l'approche CONTRAST, nous ne considérons que des structures élastiques et non des assemblages (qui sont présentés au chapitre III). Un comportement de liaison parfaite est donc associé aux interfaces entre sous-structures.

Un champ de déplacement  $\underline{W}^E$  et un champ d'effort  $\underline{F}^E$  représentent l'interaction entre une sous-structure et une interface ( $\underline{F}^E$  étant l'action de l'interface sur la sous-structure) (Fig. I-5). Ces deux champs sont définis sur les interfaces et sur les frontières des sous-structures.

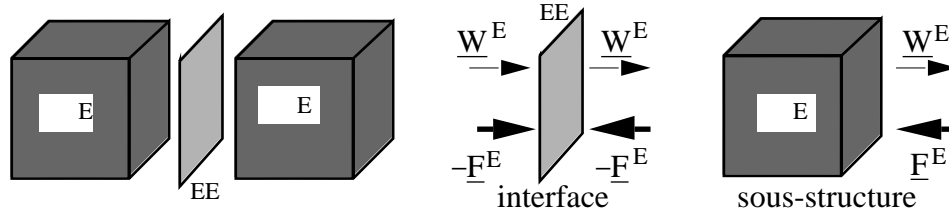


Figure I-5 : Champs d'effort et de déplacement sur l'interface.

### I.3.2 Problème mécanique sur les deux entités créées

#### I.3.2.1 Problème mécanique sur une sous-structure

On considère un comportement linéaire des matériaux sous l'hypothèse des petites perturbations. Le chargement est considéré comme étant quasi-statique et les effets d'accélération sont négligés.  $\underline{f}_d$  représente les forces de volume. Une sous-structure ne communiquant qu'avec des interfaces, des efforts  $\underline{F}^E$  et des déplacements  $\underline{W}^E$  sont imposés sur toute sa frontière  $\Gamma^E$  (Fig. I-6).

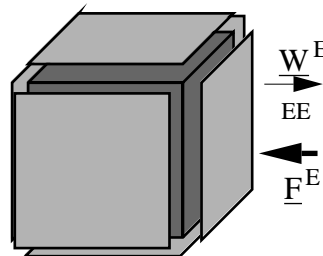


Figure I-6 : Problème sur une sous-structure.

La solution est recherchée dans l'espace vectoriel  $\underline{U}^E$  défini sur  $\Gamma^E$  et sur lequel les conditions de régularité sont imposées. De même  $\underline{U}_0^E = (\underline{U}^*, \underline{U}^E, \underline{U}^*|_{\Gamma^E} = 0)$  est défini.

Sur chaque sous-structure  $\Gamma^E$  (Fig. I-5), le problème à résoudre est de trouver  $\{\underline{U}^E, \underline{F}^E\}$  tel que :

- Liaison cinématique :  $\underline{U}^E|_{\Gamma^E} = \underline{W}^E, \underline{U}^E \in \underline{U}^E,$

- Equation d'équilibre :  $\underline{U}^* \in \underline{U}_0^E$

$$\int_{\Gamma^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E(\underline{U}^*)] d\Gamma = \int_{\Gamma^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Gamma + \int_{\Gamma^E} \underline{F}^E \cdot \underline{U}^* dS,$$

- Loi de comportement :  $\underline{\sigma}^E = \underline{K}(\underline{U}^E)$  ( $\underline{K}$  : tenseur de Hooke).

$\underline{U}^E$  et  $\underline{E}$  représentent respectivement le champ de déplacement et le tenseur des contraintes dans  $E$ .

### I.3.2.2 Problème mécanique sur une interface

Pour chaque interface  $EE'$ , les équations dépendent du comportement de la liaison à modéliser. Ces équations mettent en jeu les champs d'effort et de déplacement de part et d'autre de l'interface (Fig. I-7). Elles sont locales en variables d'espace et peuvent être écrites sous forme d'une relation de comportement éventuellement non-linéaire en tout point  $M$  de  $EE'$ :

$$R(\underline{W}^E(M), \underline{F}^E(M) ; \underline{W}^{E'}(M), \underline{F}^{E'}(M)) = 0 \quad M \in EE'$$

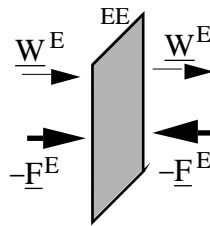


Figure I-7 : Problème sur une interface.

Par exemple, pour une liaison parfaite, cette relation est composée de deux équations :

$$\begin{aligned} \underline{W}^E(M) &= \underline{W}^{E'}(M) && \text{continuité des déplacements (comportement)} \\ \underline{F}^E(M) + \underline{F}^{E'}(M) &= 0 && \text{équilibre en effort} \end{aligned}$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on abandonne la notation "(M)".

### I.3.3 Schéma itératif de résolution

L'approche proposée est basée sur les principes de la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) [LADEVEZE, 1996]. Cette méthode, introduite par P. Ladevèze en 1984, est une stratégie générale pour traiter des problèmes non-linéaires d'évolution. Elle n'est pas basée sur les schémas de résolution habituels. Ses nombreuses applications (en élastoplasticité, en viscoplasticité sous chargement cyclique, en dynamique, en grandes transformations, ...) ont montré son efficacité et les réductions en coût de calcul qu'elle apporte par rapport aux techniques classiques. La présente étude se place dans une situation dégénérée de la méthode LATIN : le problème d'évolution en temps n'est pas considéré et on ne cherche que la solution du problème à l'instant final. Notre approche n'utilise donc qu'une partie des concepts de la méthode LATIN.

### I.3.3.1 Séparation des équations

Le premier point de la méthode LATIN est de séparer les difficultés dans le but d'éviter la simultanéité du caractère global et du caractère non-linéaire du problème. Ainsi, on prend en compte les propriétés mécaniques des équations pour les séparer en deux groupes :

- **Les équations locales en variable d'espace et éventuellement non-linéaires**, d'une part, et
- **Les équations linéaires et éventuellement globales en variable d'espace**, de l'autre.

On appelle  $\mathbf{s} = (\mathbf{u}, \mathbf{W}; \mathbf{f}, \mathbf{F})$  l'ensemble des inconnues du problème et  $\mathbf{S}$  l'espace fonctionnel correspondant. De par la décomposition introduite,  $\mathbf{s}$  est la réunion d'inconnues  $\mathbf{s}^E$  associées à chacune des sous-structures :

$$\mathbf{s} = (\mathbf{u}, \mathbf{W}; \mathbf{f}, \mathbf{F}) = \bigcup_E \{ \mathbf{s}^E = (\mathbf{u}^E, \mathbf{W}^E; \mathbf{f}^E, \mathbf{F}^E) ; \mathbf{s}^E \text{ définis sur } \Omega^E \}.$$

$\Gamma$  est la variété éventuellement non-linéaire de  $\mathbf{S}$  associée à la vérification du premier groupe d'équations.

$$\mathbf{s} \in \Gamma \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{s}^E \text{ vérifie} \\ \bullet \mathbf{R}(\mathbf{W}^E, \mathbf{F}^E; \mathbf{W}^{E'}, \mathbf{F}^{E'}) = 0, \end{array} \right. \quad \mathbf{M} \in \mathbf{E}^{E'}.$$

$\mathbf{A}_d$  est la variété linéaire de  $\mathbf{S}$  associée à la vérification du second groupe d'équations. Les équations définissant  $\mathbf{A}_d$  sont choisies semi-globales en variables d'espace, c'est-à-dire qu'elles ne sont globales que par sous-structure et c'est là tout l'intérêt de l'approche. Cela permet d'introduire une certaine modularité dans l'approche et d'autoriser facilement le calcul parallèle.

$$\mathbf{s} \in \mathbf{A}_d \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{s}^E \text{ vérifie :} \\ \bullet \text{ la liaison cinématique,} \\ \bullet \text{ l'équation d'équilibre,} \\ \bullet \text{ la relation de comportement sur } \Omega^E. \end{array} \right.$$

La solution cherchée est l'intersection des variétés  $\mathbf{A}_d$  et  $\Gamma$  : elle vérifie toutes les équations du problème.

Remarques :

- Dans les applications habituelles de la méthode LATIN [LADEVÈZE, 1996], la relation de comportement du matériau des sous-structures  $\Omega^E$  est à vérifier par les éléments appartenant à la variété  $\Gamma$ . Ici, cette relation de comportement est linéaire : il est naturel de la faire vérifier par les solutions appartenant à la variété  $\mathbf{A}_d$ .

- Le problème associé aux équations qui définissent  $\mathbf{A}_d$  est inhabituel : des conditions aux limites à la fois en effort ( $\mathbf{F}^E$ ) et en déplacement ( $\mathbf{W}^E$ ) sont imposées sur les bords des sous-structures.

La dernière remarque induit le fait qu'il est nécessaire d'introduire d'autres équations pour résoudre les problèmes. Ces équations supplémentaires sont appelées "directions de recherche" et sont décrites dans la suite.

### I.3.3.2 Schéma itératif de résolution

Le deuxième point de la stratégie consiste à utiliser un schéma itératif à deux étapes (une étape locale et une étape semi-globale). Les deux directions de recherche introduites sont : une direction ( $\mathbf{E}^+$ ) de "montée" pour l'étape locale et une direction ( $\mathbf{E}^-$ ) de "descente" pour l'étape globale. La résolution d'une itération est conduite comme suit :

#### Etape locale :

A partir d'un élément  $\mathbf{s}_n$   $\mathbf{A}_d$  connu, on cherche  $\hat{\mathbf{s}}_{n+\frac{1}{2}}$   $\Gamma$  en utilisant la direction de recherche de l'étape locale (Fig. I-8). Le problème à résoudre est tel que :

$$\begin{array}{l|l} \hat{\mathbf{s}}_{n+\frac{1}{2}} & \Gamma \\ \hline (\hat{\mathbf{s}}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{s}_n) & \mathbf{E}^+ \end{array}$$

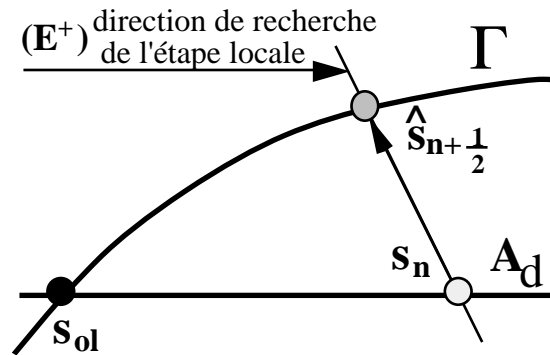


Figure I-8 : Etape locale

#### Etape semi-globale :

A partir d'un élément  $\hat{\mathbf{s}}_{n+\frac{1}{2}}$   $\Gamma$  connu, on cherche  $\mathbf{s}_{n+1}$   $\mathbf{A}_d$  en utilisant la direction de recherche de l'étape semi-globale (Fig. I-9). Le problème à résoudre est tel que :

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{s}_{n+1} & \mathbf{A}_d \\ \hline (\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+\frac{1}{2}}) & \mathbf{E}^- \end{array}$$

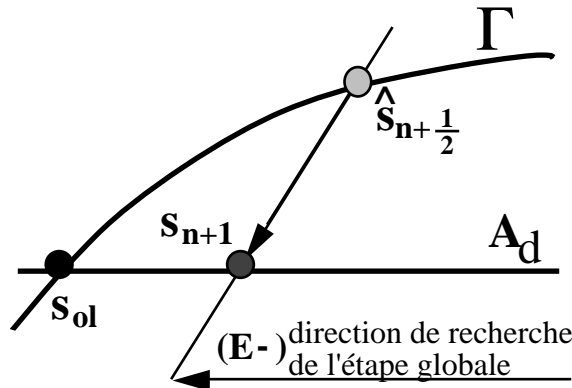


Figure I-9 : Etape semi-globale

Le processus itératif conduisant à la solution du problème est donc le suivant : à partir d'un élément initial  $s_0$ , le processus converge, par une succession d'étapes locales et semi-globales (Fig. I-10), vers l'élément solution  $s_{sol}$  qui est l'intersection des deux ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$ . Il vérifie ainsi toutes les équations du problème.

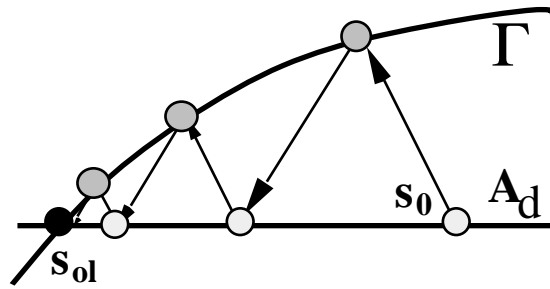


Figure I-10 : Schéma itératif

De par la construction de la variété  $\Gamma$ , les équations à résoudre à l'étape locale ne mettent en jeu que les quantités bord  $\underline{F}^E$  et  $\underline{W}^E$ . Ainsi, les directions de recherche  $(E^+)$  et  $(E^-)$  sont des équations qui ne portent que sur ces quantités.

Les sous-structures ne communiquent avec leur environnement qu'à travers des interfaces. Une solution  $s_0$  identiquement nulle sur toutes les sous-structures est un élément de  $A_d$ . Cet élément  $s_0$  est celui qui est considéré pour l'initialisation.

Remarque :

- Des conditions suffisantes (sur les directions de recherche) pour assurer la convergence sont données dans [LADEVÈZE, 1996].

- Dans la suite, la résolution des deux étapes d'une itération donnant l'élément  $s_{n+1}$  à partir de l'élément  $s_n$  est décrite en détail. Pour alléger les notations, on note simplement  $\hat{s} = \hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$ .

### I.3.3.3 Résolution de l'étape locale

La direction de recherche adoptée ( $\mathbf{E}^+$ ) est associée à un opérateur constant  $\mathbf{k}_0$ . Le choix de cet opérateur est détaillé au paragraphe I.3.6 et son influence est étudiée au paragraphe II.2.2.1. Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{s}} & \Gamma & \\ (\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_n) & \mathbf{E}^+ & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{W}}^E, \hat{\mathbf{F}}^E, \hat{\mathbf{W}}^{E'}, \hat{\mathbf{F}}^{E'}) = 0 \\ \hat{\mathbf{F}}^E - \mathbf{F}_n^E = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^E - \mathbf{W}_n^E) \\ \hat{\mathbf{F}}^{E'} - \mathbf{F}_n^{E'} = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^{E'} - \mathbf{W}_n^{E'}) \end{array} \right. \begin{array}{l} EE' \\ EE' \end{array}$$

Dans le cas de la liaison parfaite, par exemple, les équations à résoudre sont :

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \hat{\mathbf{F}}^E - \mathbf{F}_n^E = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^E - \mathbf{W}_n^E) \\ \bullet \hat{\mathbf{F}}^{E'} - \mathbf{F}_n^{E'} = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^{E'} - \mathbf{W}_n^{E'}) \\ \bullet \hat{\mathbf{W}}^E - \hat{\mathbf{W}}^{E'} = 0 \\ \bullet \hat{\mathbf{F}}^E + \hat{\mathbf{F}}^{E'} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} EE' \\ EE' \\ M \\ EE' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{direction de recherche} \\ \hat{\mathbf{s}} \quad \Gamma \end{array}$$

La solution s'obtient directement, et de façon explicite :

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \hat{\mathbf{W}}^E = \hat{\mathbf{W}}^{E'} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_n^E + \mathbf{W}_n^{E'}) - \frac{1}{2} \mathbf{k}_0^{-1} (\mathbf{F}_n^E + \mathbf{F}_n^{E'}) \\ \bullet \hat{\mathbf{F}}^E = - \hat{\mathbf{F}}^{E'} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_n^E - \mathbf{F}_n^{E'}) + \frac{1}{2} \mathbf{k}_0 (\mathbf{W}_n^{E'} - \mathbf{W}_n^E) \end{array} \right. \begin{array}{l} M \\ EE' \end{array}$$

Les équations à résoudre à l'étape locale ne mettent en jeu que les champs d'effort et de déplacement de part et d'autre de chaque interface. Les calculs sont donc locaux en variable d'espace et indépendants par interface.

Dans le chapitre III, la résolution de l'étape locale est présentée pour des comportements non-linéaires d'interface (contact unilatéral et joint élastomère).

### I.3.3.4 Résolution de l'étape semi-globale

La direction de recherche choisie ( $\mathbf{E}^-$ ) est, elle-aussi, associée à l'opérateur  $\mathbf{k}_0$  sur l'interface :

$$(\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}) \quad \mathbf{E}^- \quad \mathbf{F}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{F}}^E = - \mathbf{k}_0 (\mathbf{W}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{W}}^E) \quad EE'$$

En exprimant  $\mathbf{F}_{n+1}^E$  en fonction de  $\mathbf{W}_{n+1}^E$  et des quantités  $\hat{\mathbf{F}}^E$  et  $\hat{\mathbf{W}}^E$ , solutions de l'étape locale précédente, on obtient le problème suivant :

Trouver  $\underline{U}_{n+1}^E$   $\underline{U}^E$  tel que  $\underline{U}^* = \underline{U}^E$ ,

$${}^E\text{Tr}[\mathbf{K}(\underline{U}_{n+1}^E)(\underline{U}^*)]d + {}^E\mathbf{k}_0 \underline{U}_{n+1}^E \cdot \underline{U}^* dS = {}^E\mathbf{f}_d \cdot \underline{U}^* d + {}^E\tilde{\mathbf{F}} \underline{U}^* dS$$

où  $\tilde{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}^E + \mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{W}}^E$  (densité d'effort surfacique sur  $\Gamma_E$ )

Le problème donnant  $\underline{U}_{n+1}^E$  est un problème classique de calcul des structures avec une densité de force de volume et une densité d'efforts surfaciques sur  $\Gamma_E$ . Il a une solution unique et peut être résolu de diverses manières. Le choix de la méthode de résolution fait l'objet du paragraphe suivant. Les autres inconnues du problème sont déduites de  $\underline{U}_{n+1}^E$  :

$$\begin{aligned} \underline{F}_{n+1}^E &= \mathbf{K}_{n+1}^E \underline{U}_{n+1}^E = \mathbf{K}(\underline{U}_{n+1}^E) \\ \underline{W}_{n+1}^E &= \underline{U}_{n+1}^E|_{\Gamma_E} \\ \underline{F}_{n+1}^E &= \hat{\mathbf{F}}^E - \mathbf{k}_0(\underline{W}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{W}}^E) \end{aligned}$$

Les équations à résoudre à l'étape semi-globale ne mettent en jeu que des quantités relatives à chaque sous-structure séparément. Les calculs sont donc globaux par sous-structures (ou semi-globaux) et indépendants. De plus, la décomposition en sous-structures permet d'obtenir des problèmes de petite taille lors de cette résolution.

### I.3.4 Discrétisation

Dans les premières applications de l'approche pour des problèmes 2D axi-symétriques [LADEVÈZE et MAUREL, 1990], une sous-structure était représentée à l'aide d'un seul élément fini dont les fonctions de base étaient enrichies d'un contenu mécanique (une vérification en moyenne de l'équilibre interne). Les champs d'effort  $\underline{F}_n^E$  et  $\hat{\mathbf{F}}^E$  et de déplacement  $\underline{W}_n^E$  et  $\hat{\mathbf{W}}^E$  étaient tous discrétisés de la même manière : à l'aide d'une représentation éléments finis compatible avec celle donnée pour les sous-structures. L'étape locale était résolue aux points d'intégration sur les maillages des interfaces.

Le traitement de modélisations tridimensionnelles nous a conduit à opter pour une discrétisation par plusieurs éléments finis classiques de chacune des sous-structures. Ceci permet de réaliser une représentation aussi fine que possible des géométries 3D et d'utiliser des outils performants de pré-traitement (maillage) et de post-traitement (visualisation) existants. De plus, le raffinement des maillages des sous-structures devient un nouveau paramètre de l'approche jouant sur la qualité de la solution obtenue à convergence.

[DUREISSEIX et LADEVÈZE, 1996] présente une étude détaillée de l'effet du choix des discrétisations sur la solution à convergence. Cette étude amène à discrétiser  $\underline{F}_n^E$ ,  $\hat{\mathbf{F}}^E$  et  $\hat{\mathbf{W}}^E$  avec



un degré d'interpolation de moins que celui des déplacements. La quantité  $\hat{\underline{W}}^E$  peut alors s'interpréter comme une déformation associée à l'effort  $\hat{\underline{F}}^E$ . Cette approche conduit à une solution à convergence, en effort et en déplacement, de meilleure qualité que la solution usuelle éléments finis. De plus, elle semble particulièrement bien adaptée à l'utilisation de maillages incompatibles sur les interfaces. Néanmoins, la mise en œuvre de cette technique étant plus complexe, elle n'a pas encore été implantée dans le logiciel basé sur l'approche CONTRAST.

#### I.3.4.1 Choix de la représentation des fonctions $\underline{W}$

Dans le cas de maillages compatibles de part et d'autre d'une interface (le cas des maillages non-compatibles est étudié au chapitre V), le maillage d'une interface est le même que celui des bords des sous-structures en liaison. Les champs  $\underline{W}_n^E$  et  $\hat{\underline{W}}^E$  sont discrétisés, sur ce maillage, à l'aide de la représentation éléments finis classique.

#### I.3.4.2 Choix de la représentation des fonctions $\underline{F}$

Les champs  $\underline{F}$  peuvent être discrétisés de plusieurs manières différentes. Plusieurs choix de discrétisation, et leurs effets, sont étudiés dans [LORONG, 1994].

*Représentation éléments finis stricte.*

$\underline{F}$  est représenté de façon discrète par un vecteur forces généralisées.

Cette approche conduit à des solutions qui convergent vers la solution du problème éléments finis non sous-structuré. Elle a l'inconvénient de conduire à un problème global par interface à l'étape locale qui n'est pas parallélisable. En effet, il n'est pas possible de dissocier les nœuds communs à plusieurs interfaces, sur lesquels un traitement particulier est à effectuer.

De plus, dans le cadre d'interfaces modélisant le contact unilatéral, cette approche interdit l'utilisation d'éléments finis de degré 2 sur l'interface. En effet, pour de tels éléments (quadrangles à 8 nœuds ou triangles à 6 nœuds), les forces généralisées associées à une répartition de pression constante, par exemple, sont de signes opposés sur les nœuds coins et sur les nœuds milieux d'arête. Ceci empêche toute vérification des conditions de contact associées aux signes des efforts nodaux.

*Représentation à partir des contraintes normales.*

Les champs  $\underline{F}$  sont représentés par un véritable champ éléments finis et calculés par :

$$\underline{F}_{n+1}^E = \underline{E}_{n+1} \underline{n} \quad (\underline{n} \text{ est la normale sortante au bord de la sous-structure}),$$

plutôt que par la direction de recherche à la fin de l'étape globale.

Cette approche conduit à des solutions qui convergent vers une solution proche mais différente de la solution du problème éléments finis non sous-structuré. Elle a l'avantage de fournir des problèmes locaux indépendants par interfaces mais possède un taux de convergence médiocre vers la solution du problème non sous-structuré. De plus, les champs  $\underline{F}$  sont discontinus entre les éléments de l'interface, et ne peuvent être prolongés facilement en tout point, ce qui interdit la possibilité de construire des interfaces présentant des maillages incompatibles.

*Représentation identique à celle de  $\underline{W}$ .*

Ce choix est suggéré par les équations des directions de recherche qui relient les champs  $\underline{F}$  et les champs  $\underline{W}$  par des relations linéaires. Cette approche a l'avantage d'être de mise en œuvre aisée et de conduire vers la solution usuelle du problème éléments finis. De plus, ces champs sont continus et définis en tout point des interfaces, et nous verrons que cette discrétisation autorise la gestion simple de maillages incompatibles. Enfin, ils représentent des répartitions d'efforts et non des forces nodales. Cela permet d'utiliser tous types d'éléments pour la discrétisation des interfaces dans le cadre de liaisons de type contact unilatéral (cf. III.1.9).

Cette représentation est celle qui a été utilisée dans la suite.

#### I.3.4.3 Résolution de l'étape locale

A partir de ces discrétisations, les champs  $\underline{F}_n^E$ ,  $\underline{\hat{F}}^E$ ,  $\underline{W}_n^E$  et  $\underline{\hat{W}}^E$  sont connus en tout point d'une interface. Il y a donc différents choix possibles des points utilisés pour l'écriture et la résolution de l'étape locale. Les points choisis, ici, sont les nœuds du maillage de l'interface. Ce choix se justifie pour la résolution de problèmes de contact, lorsque les maillages sont grossiers et les fonctions de base linéaires : la vérification des conditions de non-pénétration sur les nœuds assure la non pénétration en tout point de l'interface (ce qui ne serait pas le cas pour une écriture aux points d'intégration).

La résolution se fait sur les inconnues nodales  $\{f_n^E\}$ ,  $\{\hat{f}^E\}$ ,  $\{w_n^E\}$  et  $\{\hat{w}^E\}$  telles que :

$$\begin{aligned} \underline{F}_n^E &= \{N\}^T \{f_n^E\} \text{ et } & \underline{\hat{F}}^E &= \{N\}^T \{\hat{f}^E\} \\ \underline{W}_n^E &= \{N\}^T \{w_n^E\} \text{ et } & \underline{\hat{W}}^E &= \{N\}^T \{\hat{w}^E\} \end{aligned}$$

où  $\{N\}$  représente les fonctions de base des éléments d'interface qui sont les mêmes que celles des éléments des bords des sous-structures.

Ainsi, cette discrétisation donne, pour la résolution d'une étape locale, autant de problèmes locaux indépendants qu'il y a de nœuds sur les maillages des interfaces.

#### I.3.4.4 Résolution de l'étape globale

Une discrétisation éléments finis,

$$\underline{U}_{n+1}^E = \{N\}^T \{u_{n+1}^E\}$$

$$(\underline{U}_{n+1}^E) = [B] \{u_{n+1}^E\}$$

conduit, sur chaque sous-structure, au problème global suivant :

$$[[K^E] + [k^E]] \{u_{n+1}^E\} = \{f_{n+1}^E\}$$

$$[K^E] = \int_E [B]^T \mathbf{K} [B] d \quad (\text{rigidité éléments finis élastique})$$

$$[k^E] = \int_E \{N\} \mathbf{k}_0 \{N\}^T dS \quad (\text{rigidité bord})$$

$$\{f_{n+1}^E\} = \int_E \{N\}^T \{f_d\} d + \int_E \{N\}^T \{\tilde{f}\} dS \quad (\text{forces généralisées})$$

La matrice  $[K^E]$  a une forme complètement classique et peut ainsi être construite avec des outils existants. Seul le terme  $[k^E]$  est non-classique, mais il est uniquement local sur les bords des sous-structures et sa construction est rapide. Elle se fait sous forme d'assemblage de matrices élémentaires. De plus, sa présence élimine les éventuels problèmes d'indétermination par mouvements de solides rigides qui peuvent exister dans des problèmes de contact unilatéral avec jeu, par exemple.

La matrice  $[[K^E] + [k^E]]$  est constante au cours des itérations, seul le second membre d'efforts  $\{f_{n+1}^E\}$  change. Ainsi, l'assemblage et la factorisation de ces matrices de rigidité ne sont réalisés qu'une seule fois, avant la première itération. Ces opérations peuvent se faire à l'aide d'outils performants d'assemblage et de factorisation existant dans un code de calcul par éléments finis.

### I.3.5 Choix des paramètres de direction de recherche

La figure I-11 présente une interprétation physique, pour le cas de la liaison parfaite, de l'opérateur  $\mathbf{k}_0$  intervenant dans les directions de recherche aux deux étapes de l'algorithme. Les composantes de l'opérateur  $\mathbf{k}_0$  agissent à la manière de ressorts par l'intermédiaire desquels sont appliqués les déplacements  $\underline{W}$  en tout point M de l'interface.

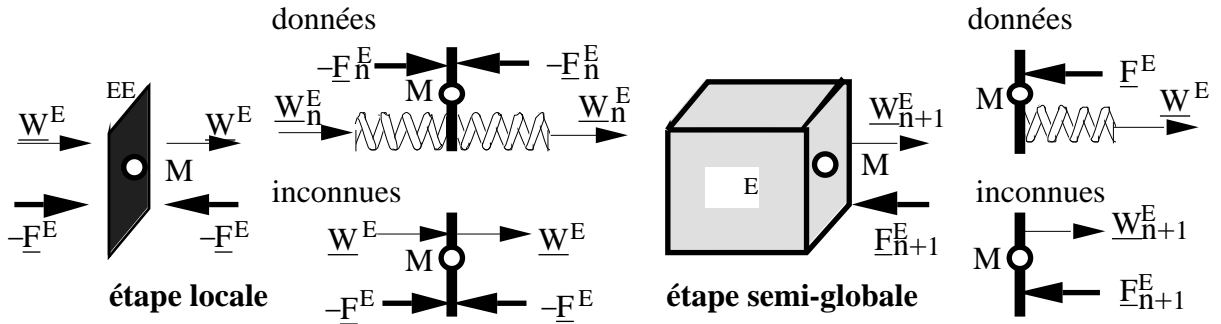


Figure I-11 : Interprétation "physique" des directions de recherche.

Cette interprétation et les différents tests réalisés pour des structures à comportement élastique [LORONG, 1994] conduisent au choix suivant pour l'opérateur  $\mathbf{k}_0$  :

$$\mathbf{k}_0 = E \cdot \begin{pmatrix} 1/L_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_z \end{pmatrix} (x,y,z) \quad (x,y,z) \text{ Repère de l'étude}$$

où E est le module d'Young du matériau et  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  sont les longueurs caractéristiques de la structure dans les 3 directions x, y et z.

Ce choix permet de limiter le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence. Dans certaines configurations, des choix spécifiques de cet opérateur donnent de meilleurs résultats. Néanmoins, comme on le montre au chapitre II, une petite modification, autour d'une valeur "optimale" n'a qu'une faible influence sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence. En fait, pour simplifier, l'opérateur  $\mathbf{k}_0$  est souvent pris sous la forme :  $\mathbf{k}_0 = k \cdot \mathbf{I}_d$  : avec  $\mathbf{I}_d$  l'opérateur identité et  $k = E/L$  un scalaire positif (avec E, module d'Young des matériaux et L, la plus grande longueur de la structure).

### I.3.6 Contrôle du calcul

On peut construire des indicateurs d'erreur basés sur la non-satisfaction des relations de comportement des interfaces par une solution approchée  $\mathbf{s}_n$  de l'étape globale qui vérifie déjà toutes les autres équations. Dans le cas de l'élasticité, un indicateur d'erreur en énergie simple est construit à partir des champs surfaciques. Ainsi, l'indicateur d'erreur global utilisé est :

$$= \frac{\|\mathbf{s}_n^E - \hat{\mathbf{s}}^E\|^2}{\|\mathbf{s}_n^E\|^2 + \|\hat{\mathbf{s}}^E\|^2} \quad \text{où} \quad \|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{k}_0^{-1} \mathbf{F} \mathbf{d} \mathbf{S} + \mathbf{W}^T \mathbf{k}_0 \mathbf{W} \mathbf{d} \mathbf{S}.$$

Cet indicateur caractérise la distance entre les deux solutions  $\mathbf{s}_n^E$  et  $\hat{\mathbf{s}}^E$ . Lorsque l'algorithme converge, il tend vers zéro au cours des itérations car  $\mathbf{s}_n^E$  et  $\hat{\mathbf{s}}^E$  sont confondues à convergence.

De la même manière, des indicateurs locaux par point de calcul, par interface ou par sous-structure peuvent être définis.

## I.4 Conclusion

Cette présentation de l'approche proposée pour l'étude d'assemblages tridimensionnels montre la simplicité de mise en œuvre et les premiers avantages engendrés. Les choix effectués pour la discrétisation conduisent à la possibilité d'utiliser un grand nombre d'outils existants pour les méthodes éléments finis classiques. Ainsi, il est naturel et simple de chercher à insérer cette approche dans un code de calcul industriel pour profiter de procédures performantes et optimisées. Ceci fait l'objet du chapitre suivant où l'on présente l'implantation de l'approche CONTRAST dans le code de calcul CASTEM 2000 (développé par le Département des Etudes Mécaniques et Thermiques du Commissariat Français à l'Energie Atomique).

# **CHAPITRE II :**

## **MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE**

### **ET INFORMATIQUE.**

#### **PREMIÈRES ILLUSTRATIONS.**

Avant de présenter le traitement des non-linéarités de contact, il est nécessaire de valider et d'illustrer le comportement de l'approche CONTRAST sur des exemples de structures tridimensionnelles à comportement linéaire.

Ce chapitre présente la mise en œuvre numérique et informatique de l'approche CONTRAST qui a conduit à la réalisation du logiciel prototype du même nom. Les particularités numériques pratiques de l'approche et les choix effectués pour son implantation au sein du code de calcul industriel CASTEM 2000 sont exposés.

Des exemples simples, sur des structures à comportement linéaire, montrent le comportement itératif de la méthode, l'influence du paramètre de direction de recherche ainsi que l'influence du nombre et de la forme des sous-structures.

Les conditions aux limites sont prises en compte d'une manière particulière par ce logiciel. Les champs d'effort et de déplacement imposés sont donnés sur des "extérieurs" (ou "bâtis") qui sont en liaison avec les sous-structures. Cette approche est bien adaptée à une introduction simple des conditions aux limites sur des problèmes sous-structurés. De plus, elle permet d'obtenir des matrices de rigidité des sous-structures indépendantes des conditions aux limites appliquées.

Enfin, nous présentons le comportement du logiciel pour des problèmes linéaires de très grande taille. Un exemple montre les réductions de l'encombrement mémoire des modélisations et du coût de calcul apportées par l'approche CONTRAST par rapport à un calcul éléments finis classique.

## II.1 Mise en œuvre numérique de la méthode

### II.1.1 *Implantation dans CASTEM 2000*

Le logiciel prototype CONTRAST (**CON**tact **TR**idimensionnel dans les **AS**semblages en **ST**atique) a été développé dans l'environnement du code de calcul de type industriel CASTEM 2000 (développé au CEA [VERPEAUX et al, 1988]). Ceci permet d'utiliser directement les fonctionnalités du pré- et du post-processeur du code (bibliothèque d'éléments, génération de maillage, visualisation, sorties graphiques ...). Une première étude d'implantation de l'approche a été réalisée en n'utilisant que le langage utilisateur GIBIANE de CASTEM 2000. Elle a servi à définir une base de données adaptée aux problèmes, avant l'écriture de routines FORTRAN insérées directement au cœur du code pour augmenter les performances de l'algorithme.

Ce code de calcul fonctionnant sur la base d'une structure de données orientée objets (objet MAILLAGE, objet CHAMP PAR POINT, ...), de nouveaux objets associés à la méthode ont été créés pour faciliter le développement. Ces objets ne sont, en fait, que des regroupements d'objets GIBIANE standard et leur utilisation est transparente pour l'utilisateur. De plus, des opérateurs associés à l'algorithme ainsi que des procédures pré- et post-processeur appropriées ont été développés afin que l'utilisateur puisse profiter pleinement de la souplesse de la méthode aussi bien au niveau de l'entrée des données qu'au niveau du traitement des résultats. De gros efforts ont été réalisés de manière à ce que toutes les opérations de pré-traitement associées à la recherche des interfaces et à la construction de leurs géométries soient complètement automatiques (cf §II.1.4).

En ce qui concerne le post-traitement, un système de choix par menus a été mis en place et de nombreuses options de visualisation ont été créées de manière à rendre convivial le dépouillement des résultats. De plus, ces outils ont facilité le développement et la mise au point du logiciel. Toutes les figures présentées dans ce mémoire ont été obtenues directement en sortie du post-processeur.

Une documentation "en ligne", un manuel d'utilisation [CHAMPANEY & COGNARD, 1996] et de nombreux exemples d'application commentés ont été créés pour faciliter l'utilisation.

### II.1.2 Organisation des données

Les grandes lignes de la base de données interne (transparente pour l'utilisateur) utilisée sont présentées sur la figure II-1. Les différentes informations sont stockées sous forme d'un segment (DONNEES) qui pointe sur des segments classiques de CASTEM 2000.

<b>SEGMENT DONNEES</b>	<b><u>OBJETS</u></b>
<b>NBSS</b> nombre de sous-structures	
<b>NBEX</b> nombre d'extérieurs	
<b>NBIN</b> nombre d'interfaces	
caractéristiques des sous-structures <b>integer POISOU(NBSS) → DONSOU</b>	<b>DONSOU</b> : Formulation géométrique et mécanique des sous-structures
caractéristiques des extérieurs <b>integer POIEXT(NBEX) → DONEXT</b>	<b>DONEXT</b> : Formulation géométrique et mécanique des extérieurs
caractéristiques des interfaces <b>integer DOINTE(10,NBIN)</b>	
résultats de l'étape locale <b>integer POILOC(NBIN) → DONLOC</b>	<b>DONLOC</b> : Résultats de l'étape locale
résultats de l'étape globale <b>integer POIGLO(NBSS) → DONGLO</b>	<b>DONGLO</b> : Résultats de l'étape globale
caractéristiques des liaisons <b>integer POILIA → DONLIA</b>	<b>DONLIA</b> : Caractéristiques des liaisons
<b>END SEGMENT</b>	

Figure II.1 : Base de données utilisée par l'algorithme.

Un système de stockage plus simple des données dans des objets GIBIANE standard de type TABLEs (objet de stockage multi-niveaux de CASTEM 2000) aurait pu être utilisé pour générer la base de données. Ce système aurait, sans doute, été plus simple d'utilisation, mais ces TABLEs auraient dû être décodées à chaque itération. En effet, pour introduire de la souplesse dans l'utilisation du logiciel, il est possible d'interrompre le processus itératif pour contrôler la qualité de la modélisation et de la solution, puis de le poursuivre. Ainsi, les opérateurs qui effectuent le traitement de l'étape locale et de l'étape globale, sont complètement découplés et décodent la base de données à chaque itération.

Les résultats (champs de déplacement sur les sous-structures, champs de déplacement et d'effort sur les interfaces, ...), sont stockés dans des TABLEs pour les diverses itérations sauvegardées. Ces TABLEs sont lues et exploitées par les procédures de post-traitement.

### II.1.3 Déroulement d'un calcul - Algorithme

Les calculs se déroulent selon le processus suivant (Fig. II-2) :



Algorithme	Remarques
<b>Pré-processeur</b>	
Génération de la géométrie. →	Les maillages des sous-structures sont créés indépendamment les uns des autres.
Définition du modèle EF et des caractéristiques matérielles des sous-structures. →	Chaque sous-structure peut avoir des caractéristiques différentes de celles des autres.
Définition des caractéristiques des extérieurs. →	Les champs de déplacement ou d'effort imposés sont mis en place.
Recherche automatique de la géométrie des sous-structures de liaison. →	L'utilisateur peut alors vérifier la géométrie.
Définition des caractéristiques des liaisons (direction de recherche).	
Définition des types de liaison entre les sous-structures. →	Liaison parfaite, contact unilatéral, déplacement imposé, effort imposé ...
<b>Initialisation</b>	
boucle sous-structures	
calcul des rigidités élémentaires	
factorisation de la rigidité globale	
mise à zéro des champs	
fin de boucle	
<b>Itérations</b>	
boucle itérations	
boucle interfaces	
projections	
ETAPE LOCALE (indicateur d'erreur)	
fin de boucle	
test de convergence	
boucle sous structures	
ETAPE GLOBALE	
fin de boucle	
fin de boucle	
<b>Post-processeur</b> →	Présentation par menus.
Visualisation de la structure éclatée →	Sous-structures et interface.
Visualisation de l'évolution de l'indicateur d'erreur au cours des itérations	Sur tout ou partie de la structure et pour toute itération sauvegardée.
Visualisation de la structure déformée →	
Visualisation des contraintes et des déformations. →	Sur tout ou partie de la structure et pour toute itération sauvegardée.
Visualisation de l'évolution des contraintes, déformations et déplacements au cours des itérations en un point d'une sous-structure.	

Figure II-2 : Déroulement des calculs.

#### II.1.4 Particularités relatives aux interfaces

Dans le cadre de méthodes basées sur une décomposition de la structure, il est absolument indispensable que la détermination de la géométrie des interfaces soit complètement automatique et quasiment transparente pour l'utilisateur. Sans ce traitement, les gains amenés par ces méthodes se feraient au détriment de la simplicité de modélisation. Pour les approches utilisant un décomposeur automatique performant (par exemple [FARHAT, 1988]), ce traitement est effectué par le décomposeur à partir de la géométrie globale de la structure.

Dans le logiciel prototype CONTRAST, la décomposition de la géométrie se fait, pour l'instant, manuellement car les interfaces principales sont celles qui existent naturellement entre les divers éléments de l'assemblage. Un module a donc été ajouté pour construire automatiquement la géométrie (et le maillage) des interfaces à partir des maillages des sous-structures. Il construit aussi les maillages des interfaces entre sous-structures et extérieurs (par l'intermédiaire desquelles seront imposées les conditions aux limites).

Ce module commence par trier les sous-structures éventuellement en liaison à partir de leurs encombrements maximums. Ensuite, par une boucle sur les éléments des enveloppes des maillages des sous-structures, les maillages des interfaces sont construits en reconnaissant les éléments géométriquement confondus. Il va sans dire qu'une telle procédure n'est possible que lorsque les maillages sont compatibles et que lorsqu'il n'y a pas de jeux initiaux entre les sous-structures. Dans ce dernier cas, la géométrie de l'interface doit être entrée manuellement, et il subsiste un choix quant à cette géométrie ; ce cas particulier est traité au chapitre III. La reconnaissance d'interface pour des maillages non-compatibles est décrite au chapitre V.

Pour les interfaces entre sous-structures, un comportement "parfait" (continuité des déplacements et équilibre des efforts) est imposé par défaut lors de la reconnaissance. Cela permet de n'avoir à déclarer que les comportements particuliers par la suite. En effet, le sous-découpage des éléments de l'assemblage - qui va générer des liaisons "parfaites" - n'est que fictif et permet simplement une réduction de l'encombrement des matrices de rigidité. Il est donc naturel que ce sous-découpage n'entraîne pas un surcroît d'effort de modélisation.

Lorsque le comportement d'une interface nécessite la connaissance d'une normale en tout point (comme dans le cas du contact - voir chapitre III), celle-ci est construite automatiquement à partir des fonctions de forme associées au maillage, au moment de l'initialisation.

Les données relatives aux interfaces (normale, jeux, coefficients de frottement ou d'adhérence, rigidité, épaisseur de joint, ...) sont stockées dans un champ sur les points de l'interface. Ainsi, toutes ces données peuvent être variables entre les différents points.

## II.2 Comportement du logiciel - Exemple simple

Sur cet exemple de poutre en traction (Fig. II-3), on présente le comportement itératif de l'algorithme ainsi que l'influence des paramètres : influence du paramètre  $k_0$  de direction de recherche et influence du découpage en sous-structures sur la taille du problème.

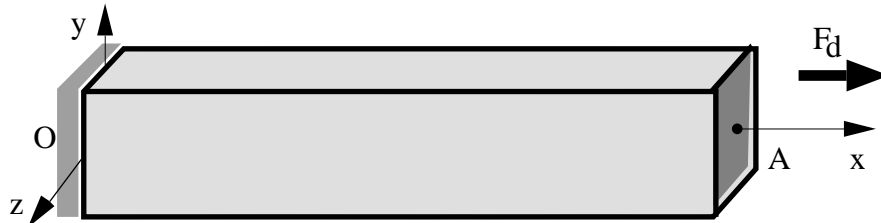


Figure II-3: Poutre en traction.

Les caractéristiques de la poutre sont les suivantes :

- longueur : 40 mm, section :  $10 \times 10 \text{ mm}^2$ ,
- module d'Young  $E = 200 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$
- répartition de pression appliquée : 100 Mpa.

### II.2.1 Comportement de l'algorithme

Pour étudier le comportement de l'algorithme, un maillage de la poutre comportant 864 éléments cubiques à 20 nœuds est utilisé (soit 19968 degrés de liberté (ddl)). La figure II-4 présente la décomposition adoptée pour ce problème (32 sous-structures et 68 interfaces). Sous-structures et interfaces disposent de leurs propres maillages qui sont, ici, compatibles sur les interfaces.

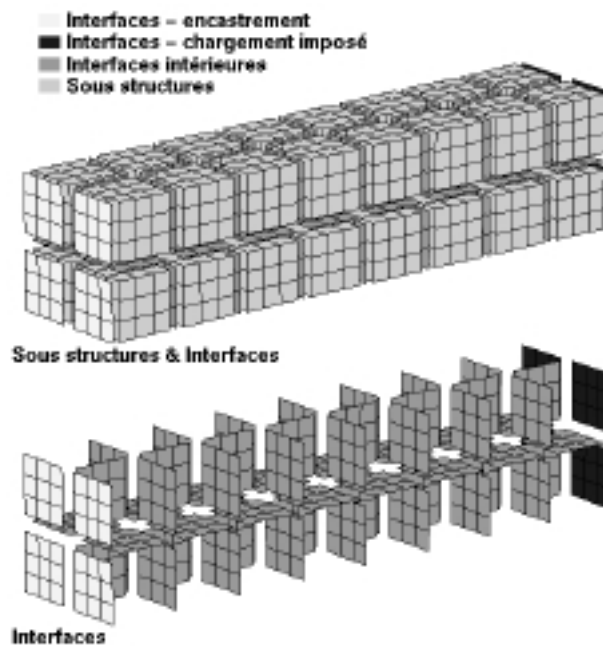


Figure II-4 : Découpage de la poutre

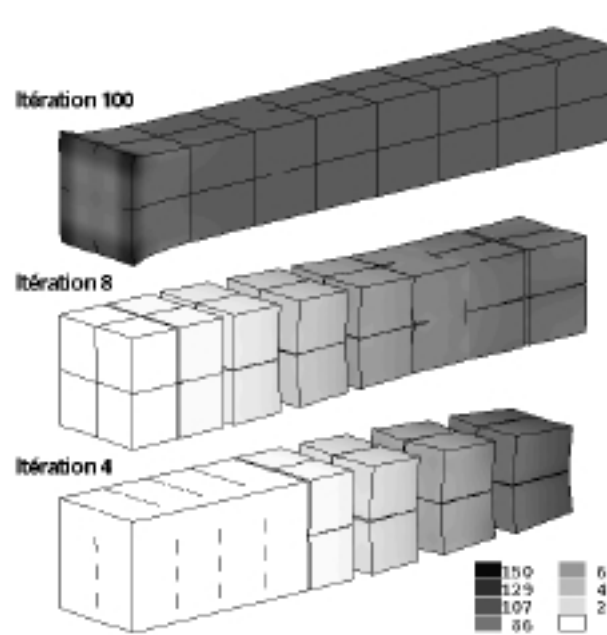


Figure II-5 : Contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  (en MPa) - Structure déformée

La figure II-5 présente l'évolution, pour quelques itérations, de la contrainte axiale dans la barre. Cette contrainte est tracée pour les solutions de l'étape globale qui vérifient l'équilibre des sous-structures. Il n'y a donc pas, aux premières itérations, continuité des efforts ni des déplacements sur les interfaces. Dans la suite de ce mémoire, toutes les solutions en déformées ou en contraintes seront tracées pour ces solutions.

On visualise ici le comportement itératif de l'algorithme : les informations “efforts” et “déplacements” sont transmises de sous-structure en sous-structure par l'intermédiaire des interfaces. Bien sûr, pour un tel exemple, le nombre d'itérations pour atteindre la convergence dépend du nombre de sous-structures dans la longueur de la poutre.

### II.2.2 Influence des paramètres

Pour cet exemple de poutre en traction, on montre l'influence des paramètres de découpage en sous-structures ainsi que du paramètre  $\mathbf{k}_0$  de direction de recherche.

#### II.2.2.1 Influence du paramètre de direction de recherche

En règle générale et pour simplifier,  $\mathbf{k}_0$  est choisi tel que  $\mathbf{k}_0 = k \cdot \mathbf{I}_d$ .  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité et  $k$  est un scalaire positif. Dans la pratique, on prend  $k=E/L$  ( $E$  : module d'Young et  $L$  : longueur caractéristique de la structure) ; cette valeur est appelée valeur optimale de  $k$  : elle présente, en général, les meilleures caractéristiques de convergence. On présente l'influence de ce paramètre en étudiant les trois cas suivants  $k=E/L$ ,  $k=1.5 \cdot E/L$  et  $k=0.5 \cdot E/L$ .

La figure II-6 présente l'évolution de l'indicateur d'erreur au cours des itérations pour les trois valeurs de  $k$ . On remarque que, après un certain nombre d'itérations, la vitesse de convergence est identique pour les trois cas.

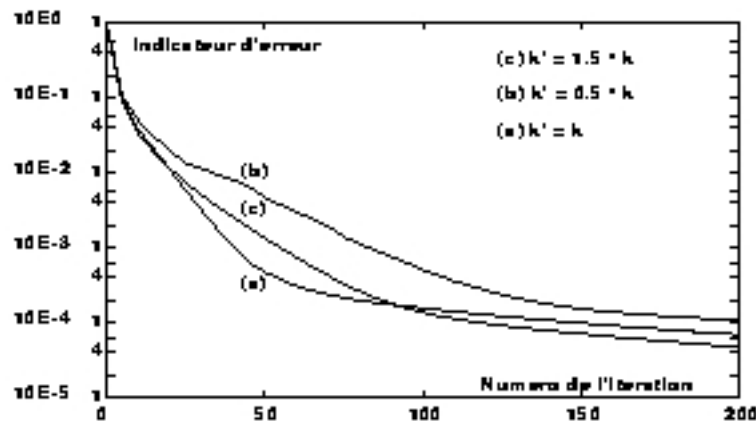
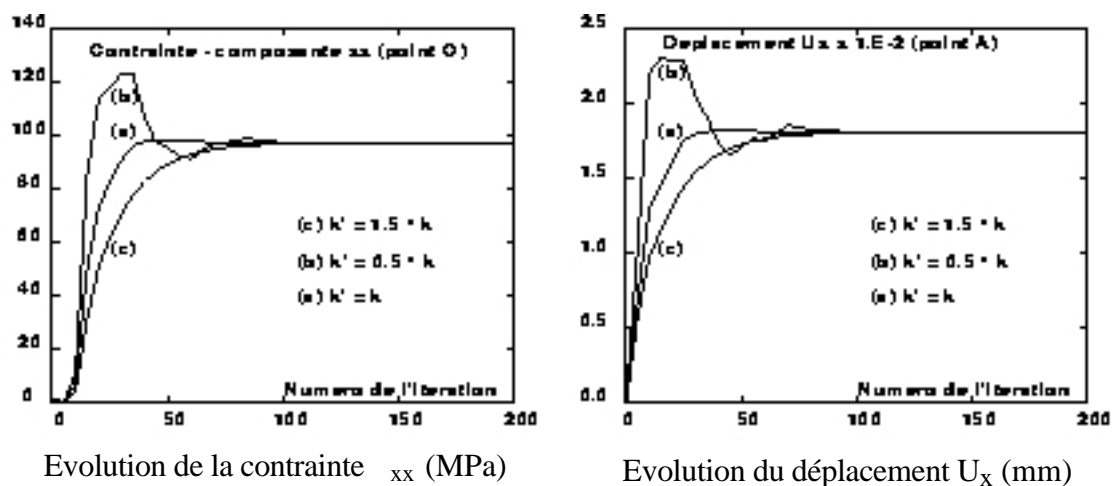


Figure II-6 : Evolution de l'erreur en fonction du numéro de l'itération.

La figure II-7 présente, pour les trois valeurs de  $k$ , l'évolution, au cours des itérations, de la contrainte axiale en un point situé à l'encastrement (point O) ainsi que l'évolution du déplacement d'un point de l'extrémité chargée (point A). La valeur  $k=E/L$  est celle qui converge le plus rapidement vers une solution stabilisée en déplacement et en contrainte. Pour la valeur de  $k$  la plus faible, la structure semble plus rigide et l'algorithme converge plus lentement vers la solution. Pour la valeur de  $k$  plus élevée, la structure semble plus souple et l'algorithme oscille autour de la solution finale.



Evolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (MPa)

Evolution du déplacement  $U_x$  (mm)

Figure II-7 : Résultats en fonction du numéro de l'itération.

Néanmoins, on constate que, pour ces trois valeurs de  $k$ , les nombres d'itérations pour atteindre la convergence ne sont pas très différents. Dans la pratique et pour des cas de structures complexes, il est plus difficile d'obtenir la valeur optimale de  $k$ . On choisit donc une valeur  $E/L'$ , avec  $E'$  module d'Young et  $L'$  la plus grande longueur de la structure, tout en

sachant que ce choix n'entraîne pas de forte augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence.

#### II.2.2.2 Influence du découpage

Sur ce même exemple de poutre, on étudie l'influence de la forme et du nombre de sous-structures engendrées par la décomposition sur la taille du problème. La figure II-8 présente les sept décompositions envisagées. On considère la poutre non découpée (1 sous-structure), trois découpages en 8 sous-structures et trois découpages en 32 sous-structures.

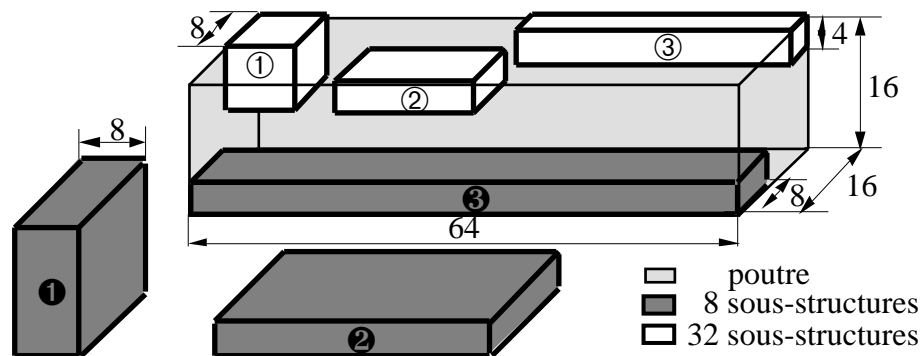


Figure II-8 : Découpages de la poutre.

Le tableau II-1 regroupe, pour ces différents découpages, la forme (exprimée en nombre d'éléments cubiques à 20 nœuds dans les 3 directions x-y-z), le nombre de degrés de liberté et l'encombrement de la matrice de rigidité pour chaque sous-structure. Il donne aussi l'encombrement du problème complet (somme des tailles des matrices) et la diminution d'encombrement par rapport au calcul direct (1 sous-structure).

nombre de sous-structures	forme des sous-structures	nb de ddl par sous-structure	encombrement par s-s (Mo)	encombrement total (Mo)	taille s-s / taille dir
1	64-16-16	217 923	6 168	6 168	1
8 (①)	8-16-16	29 427	440	3 514	0.57
8 (②)	32-4-16	31 227	258	2 062	0.33
8 (③)	64-4-8	32 235	149	1 193	0.19
32 (④)	8-8-8	8 019	66	2 121	0.34
32 (⑤)	16-4-8	8 331	39	1 238	0.20
32 (⑥)	32-4-4	8 835	25	808	0.13

Tableau II-1: Taille du problème pour différents découpages en sous-structures.

Ces résultats sont aussi présentés sur la figure II-9. On constate une très forte diminution de l'encombrement du problème (jusqu'à un facteur 10 sur la taille des matrices de rigidité) alors que le nombre de degrés de liberté supplémentaires engendrés par le découpage (les nœuds étant dupliqués sur les interfaces) augmente très peu (moins d'une fois et demi le nombre de ddl initial).

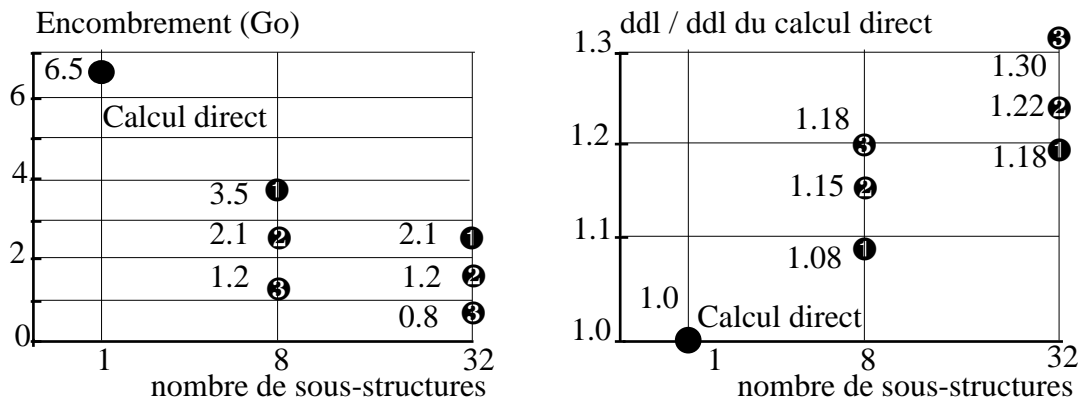


Figure II-9: Taille du problème pour différents découpages en sous-structures.

## II.3 Conditions aux limites

### II.3.1 Prise en compte des conditions aux limites

Un choix a été fait quant à la manière d'imposer les conditions aux limites du problème. Elle sont traitées par l'intermédiaire d'interfaces entre les sous-structures et des "extérieurs" (ou "bâtis") sur lesquels sont imposées ces conditions aux limites. Ces "extérieurs" sont des sous-structures à part entière pour lesquelles le traitement à l'étape globale est :

pour les efforts imposés :  $\underline{F}_n^E = \underline{F}_d$

et  $\underline{W}_n^E = \underline{\hat{W}}^E - \mathbf{k}_0^{-1}(\underline{F}_n^E - \underline{\hat{F}}^E)$  (direction de recherche)

pour les déplacements imposés :  $\underline{W}_n^E = \underline{U}_d$

et  $\underline{F}_n^E = \underline{\hat{F}}^E - \mathbf{k}_0(\underline{W}_n^E - \underline{\hat{W}}^E)$  (direction de recherche)

On peut, bien sûr, imposer des déplacements dans une direction et des efforts dans une autre. Les interfaces qui relient les sous-structures et les bâtis ont un comportement de type liaison parfaite ou de type contact unilatéral.

Les avantages apportés par cette manière de décrire les conditions aux limites sont les suivants :

- Il n'est pas nécessaire d'introduire d'inconnues supplémentaires (multiplicateurs de Lagrange) pour traiter les conditions de déplacements imposés.
- Quel que soit le type de conditions aux limites imposées sur une structure, la matrice de rigidité du problème discrétisé reste inchangée. Ceci permet de résoudre plusieurs types de conditions pour une seule factorisation des matrices de rigidité des sous-structures. Un exemple tirant parti de cet avantage est présenté au paragraphe II.3.2.
- Les conditions aux limites sont données globalement sous forme d'un champ sur les extérieurs (qui peuvent être en liaison avec plusieurs sous-structures) et non pas sous-structure par sous-structure. La modélisation des conditions aux limites n'est donc pas compliquée par le découpage du problème.
- Lorsqu'un décomposeur automatique est utilisé (voir [FARHAT, 1988], par exemple), les conditions aux limites sont imposées avant le découpage et sont indépendantes de la décomposition.

Par contre, les conditions en déplacement ne sont pas imposées exactement à chaque étape globale sur une sous-structure. Le nombre d'itérations pour obtenir la convergence augmente donc par rapport à une approche les imposant exactement (par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange, par exemple).

### **II.3.2 Exemple**

Il s'agit de l'exemple d'une éprouvette de traction biaxiale utilisée au L.M.T. [BATISSE et al, 1994 ; COGNARD et al, 1996]. Sa géométrie a été optimisée de manière à obtenir des contraintes homogènes dans la partie centrale. Ses dimensions sont 230 x 230 x 8 mm, l'épaisseur de la partie centrale étant de 3 mm. Les caractéristiques du matériau élastique utilisé sont : module Young  $E = 200$  GPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Cette éprouvette est chargée à l'extrémité des peignes (qui forment le système d'accrochage à la machine de traction). Ces charges (efforts ou déplacements) imposés  $Q_x$  et  $Q_y$  sont différentes suivant les axes X et Y. La géométrie est présentée sur la figure II-10 et le chargement sur la figure II-11 en représentation plane.

Pour l'exemple proposé le chargement est composé de déplacements imposés : 0,4 mm pour  $Q_x$  et 2 mm pour  $Q_y$ .



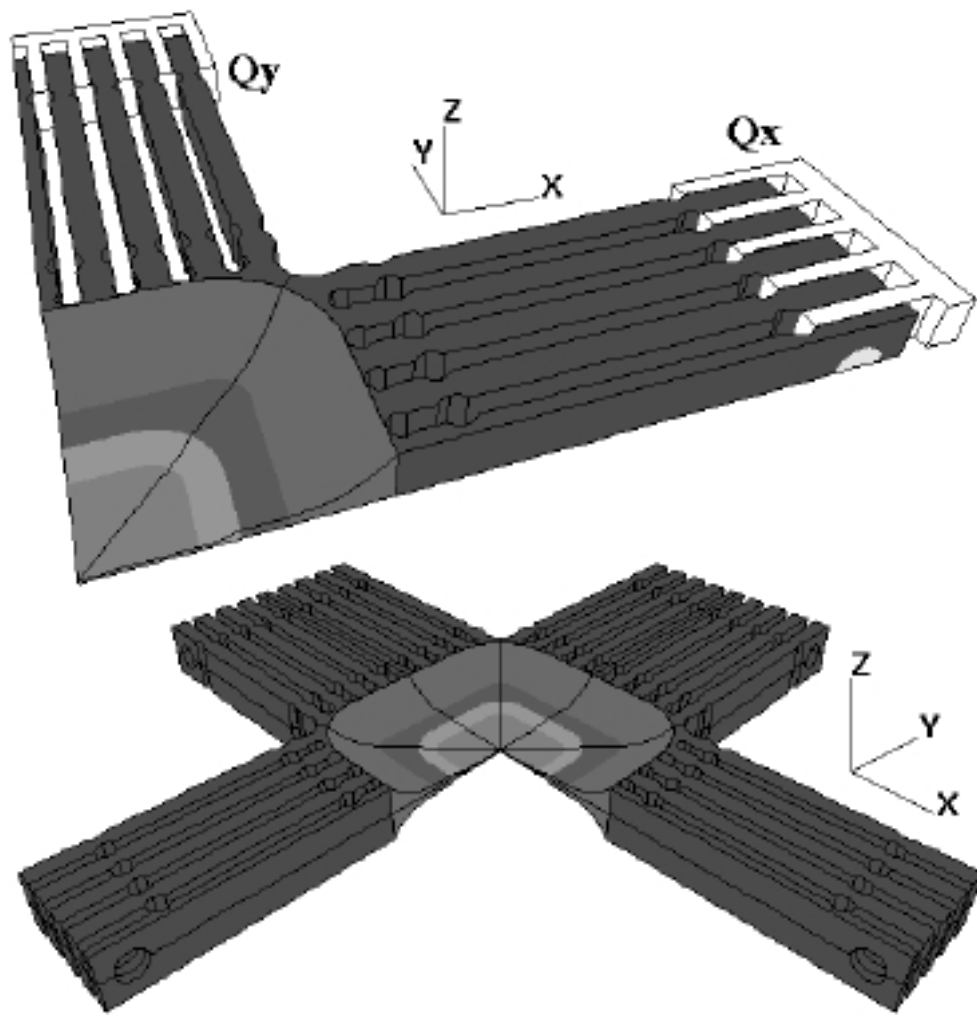


Figure II-10 : Epreuve biaxiale : Géométrie

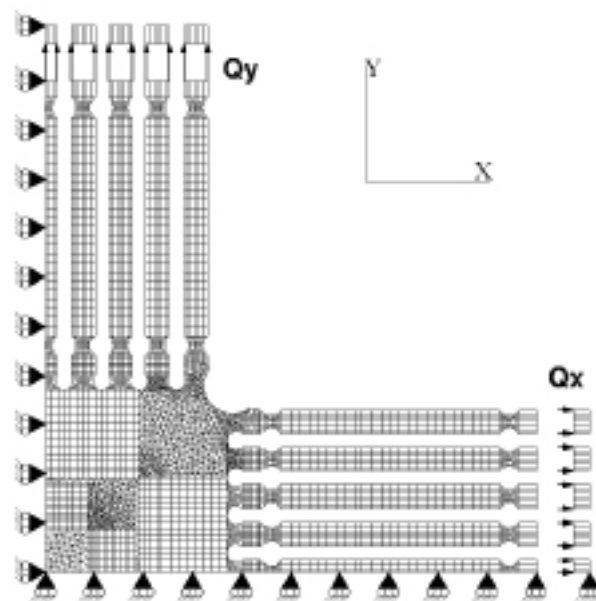


Figure II-11 : Epreuve biaxiale : Chargement

La géométrie présente quatre plans de symétrie ( $xOy$ ), ( $yOz$ ), ( $xOz$ ) et ( $uOz$ ) (Fig. II-12). Par contre, le chargement n'en présente que trois ( $xOy$ ), ( $yOz$ ) et ( $xOz$ ). Pour limiter la taille du modèle, on peut obtenir la solution sur le huitième de l'éprouvette à partir de deux calculs sur le seizième (partie S) (Fig. II-12) :

- Chargement  $Q_s = (Q_x + Q_y)/2$  avec conditions de symétrie dans le plan ( $uOz$ ).
- Chargement  $Q_a = (Q_x - Q_y)/2$  avec conditions d'antisymétrie dans le plan ( $uOz$ ).

Pour obtenir la solution sur la géométrie complète, la stratégie suivante :

Si  $P_S$  est un point de S et  $P_T$  son symétrique dans T, le déplacement  $\underline{W}(P_S)$  du point  $P_S$  se décompose en un déplacement du cas symétrique  $\underline{W}(P_S) \cdot \underline{U}$  et un déplacement anti-symétrique  $\underline{W}(P_S) \cdot \underline{V}$  où ( $\underline{U}, \underline{V}$ ) est un repère lié au plan de symétrie :

$$\underline{W}(P_S) = (\underline{W}(P_S) \cdot \underline{U}) \cdot \underline{U} + (\underline{W}(P_S) \cdot \underline{V}) \cdot \underline{V}$$

$\underline{W}'(P_T)$  est le déplacement du point  $P_T$  dans la partie S :

$$\underline{W}'(P_T) = (\underline{W}(P_S) \cdot \underline{U}) \cdot \underline{U} - (\underline{W}(P_S) \cdot \underline{V}) \cdot \underline{V}$$

On obtient alors le déplacement réel du point  $P_T$  dans la partie T ( $\underline{W}(P_T)$ ) en effectuant la symétrie du déplacement  $\underline{W}'(P_T)$  par rapport au plan ( $uOz$ ).

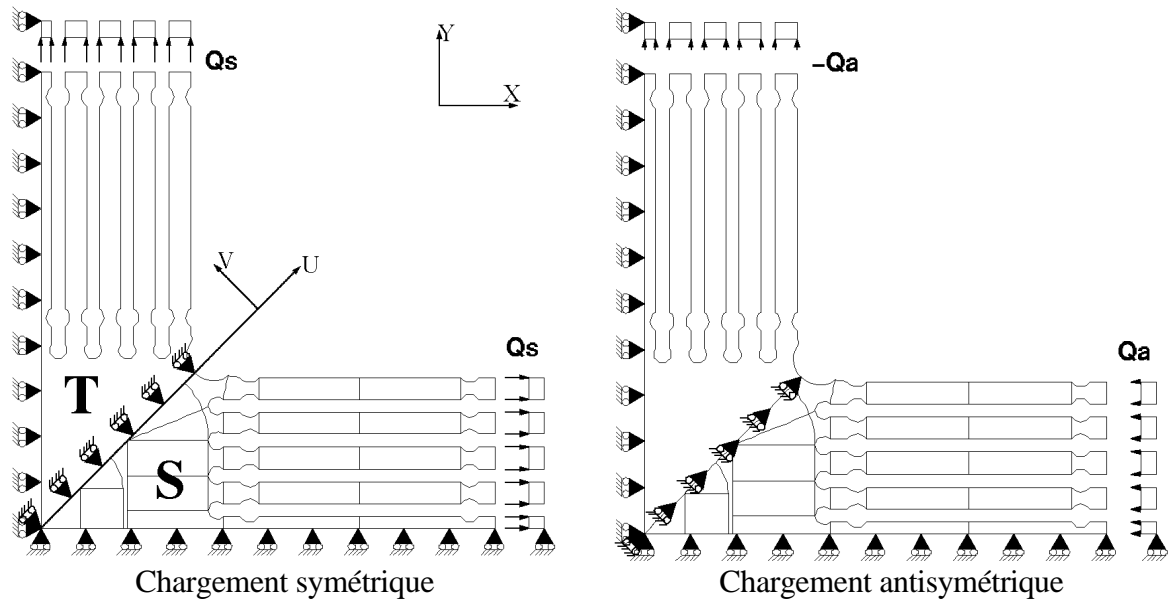


Figure II-12 : Chargements.

Les conditions aux limites étant prises en compte par l'intermédiaire d'interfaces (y compris les conditions de symétrie et d'antisymétrie, il est possible d'effectuer ces deux calculs, à partir d'une seule factorisation des matrices de rigidité du seizième de l'éprouvette.

Caractéristiques d'un calcul :

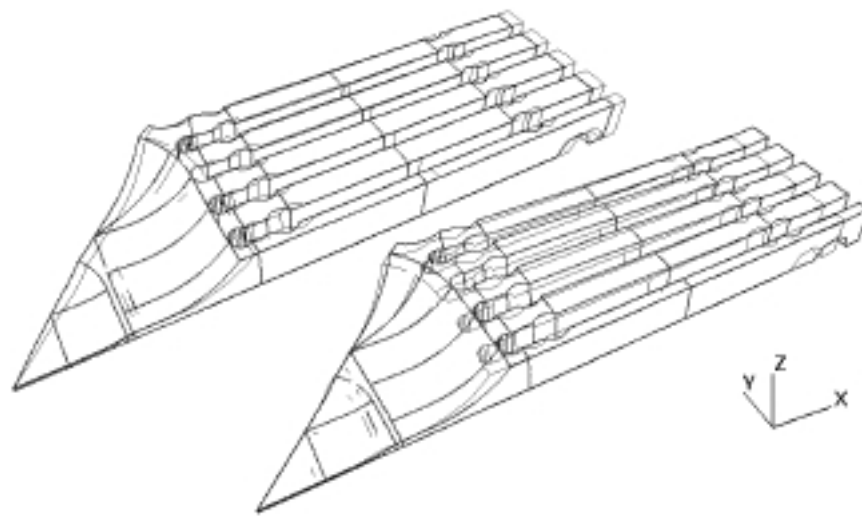
Décomposition : 31 sous-structures et 81 interfaces (Fig. II-18).

Maillage : 4544 éléments (3276 cubes à 8 nœuds et 1268 prismes à 6 nœuds).

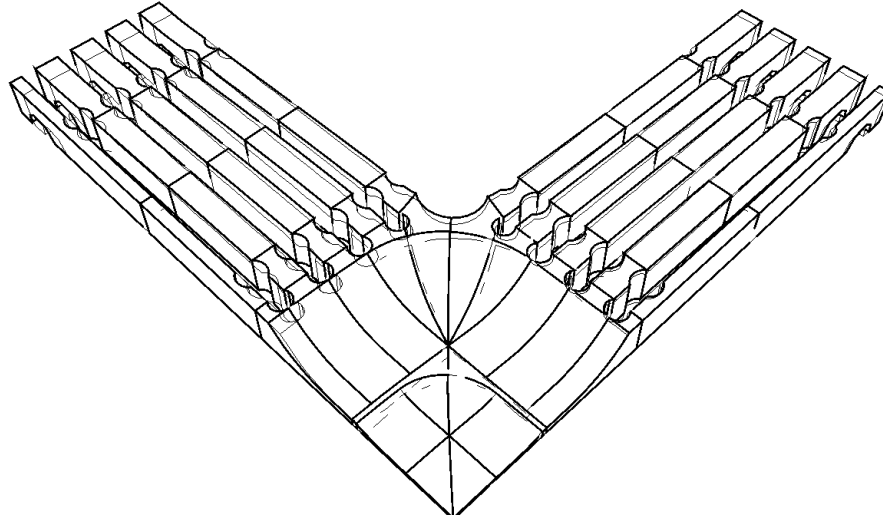
22761 degrés de liberté.

Résolution :           Initialisation : 19s CPU                           (station de travail HP735)  
                          200 itérations : 182s CPU

Après obtention des champs de déplacement sur cette portion de l'éprouvette et pour ces deux cas de chargement, (Fig. II-13, II-14) on obtient le résultat, par post-traitement, sur le huitième et sur le seizième de l'éprouvette (Fig. II-13).



Chargements symétrique et antisymétrique



Modèle complet

Figure II-13 : Déformées.

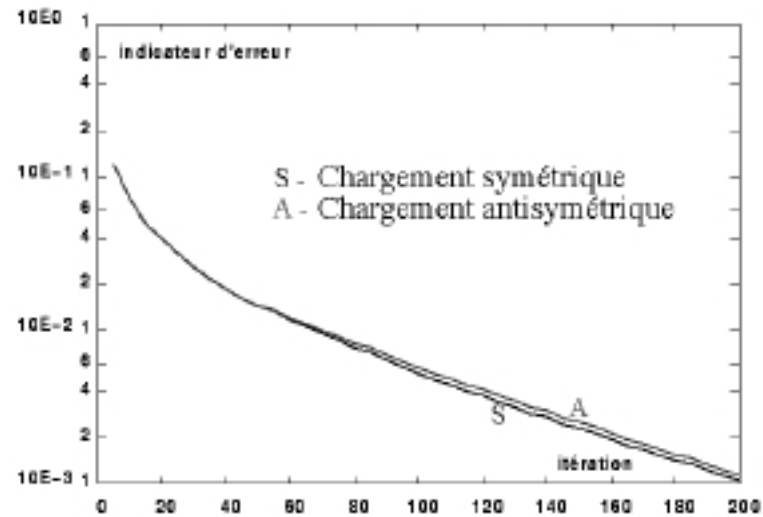
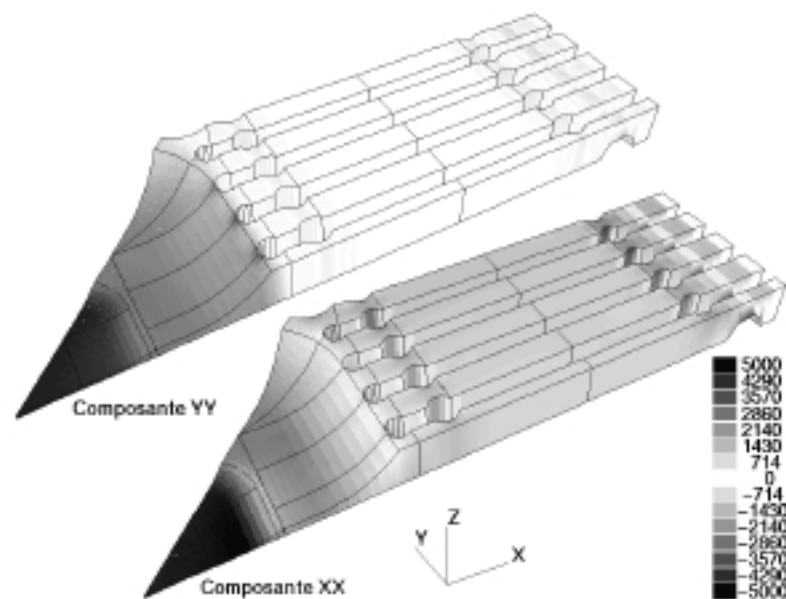
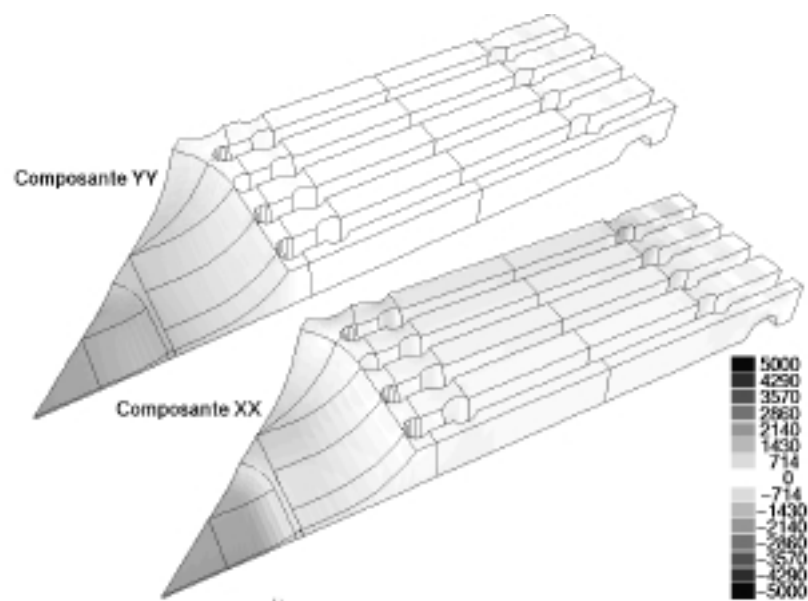
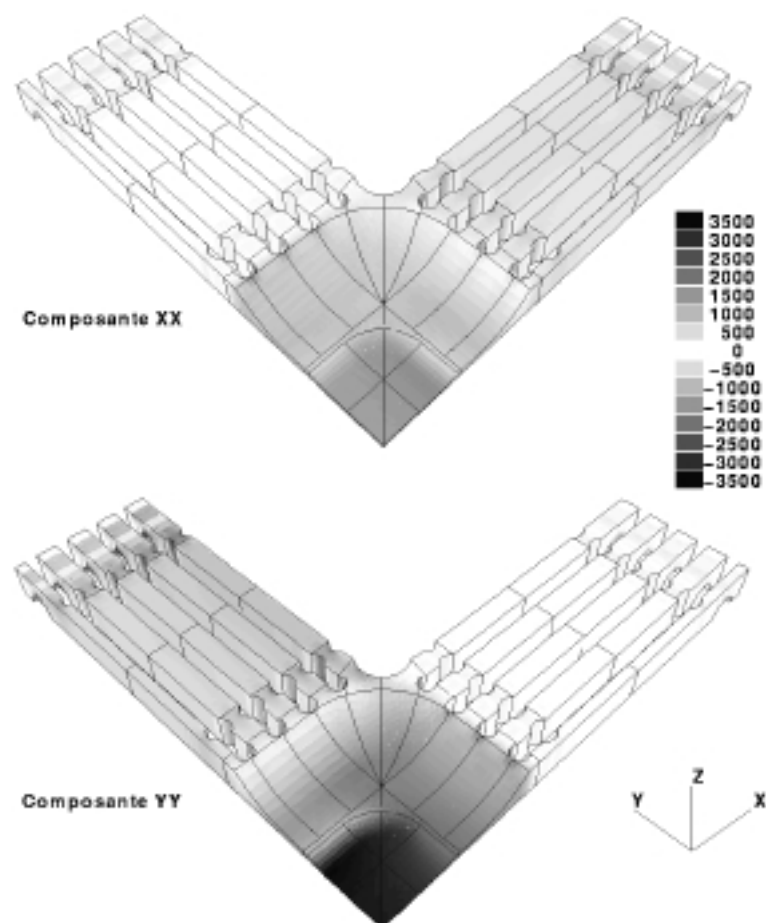


Figure II-14 : Indicateur d'erreur pour les deux calculs.

Les figures II-15 et II-16 présente, pour ces deux cas de chargement, les répartitions de contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sur la portion de l'éprouvette étudiée. On montre, figure II-17, ces résultats étendus par post-traitement au huitième de l'éprouvette.

Figure II-15 : Contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  (Chargement symétrique).

Figure II-16 : Contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  (Chargement antisymétrique)Figure II-17 : Contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sur le modèle complet.

Sur cet exemple, on obtient, grâce à cette approche, une très forte réduction de la taille de la modélisation, d'une part en étudiant une portion plus petite du modèle et d'autre part grâce à la réduction des tailles des matrices de rigidité associée à la décomposition en sous-structures (une réduction par un facteur 3 a été constatée sur cette géométrie).

## II.4 Traitement d'un problème à grand nombre de degrés de liberté

Le comportement de l'approche est étudié ici lorsque le nombre de degrés de liberté des problèmes linéaires augmente [CHAMPANEY et al, 1996]. De plus, une comparaison avec une résolution directe du même problème non sous-structuré est présentée.

Cet exemple a été réalisé sur la géométrie d'éprouvette de traction biaxale décrite au paragraphe précédent. Dans ce cas, les chargements sont considérés comme étant équilibrés dans les deux directions et un seizième seulement de l'éprouvette est étudié. Des déplacements ( $U_d = 1$  mm) sont imposés sur une portion de chacun des trous percés dans les peignes. La géométrie est décomposée en 31 sous-structures équilibrées en taille et 81 interfaces (Fig. II-18).

Le tableau II-2 donne les caractéristiques des trois maillages différents utilisés. Il précise le nombre de degrés de liberté et d'éléments pour le maillage non-décomposé et pour chacune des sous-structures. Les tailles des problèmes (exprimées en terme d'encombrement mémoire des matrices de rigidité) sont données pour un stockage "ligne de ciel" de la matrice (sachant qu'un stockage de type "morse" peut les réduire).

	Calcul direct			Sous-structuration		
	d.d.l.	éléments	taille	d.d.l. (/s-s)	éléments (/s-s)	taille totale
maillage 1	175740	11961	2160 Mo	6573	364	750 Mo
maillage 2	259077	18471	4000 Mo	10011	600	1350 Mo
maillage 3	340734	24764	6400 Mo	12687	800	2130 Mo

Tableau II-2 : Caractéristiques des différents maillages utilisés.

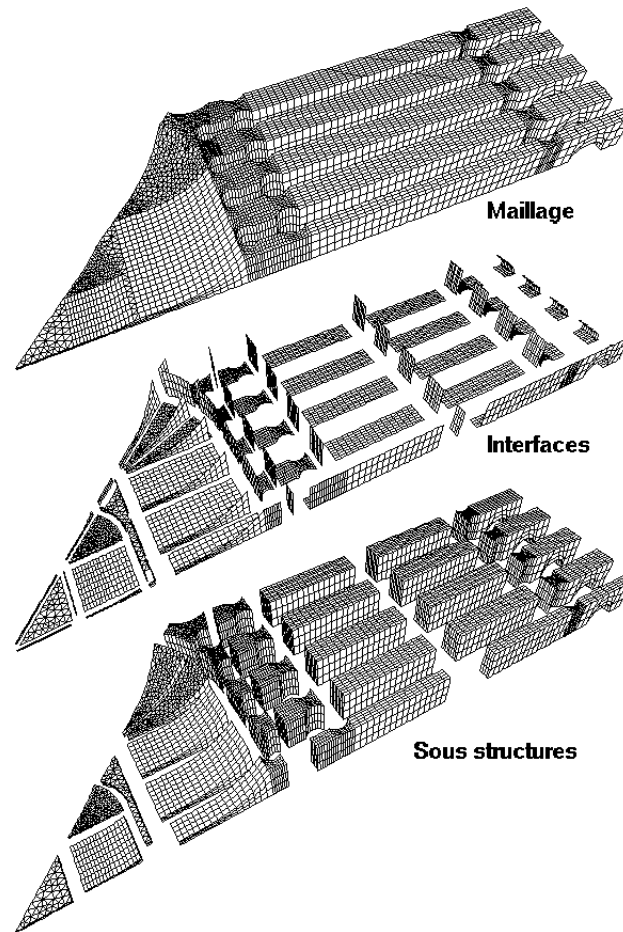


Figure II-18 : Epreuve de traction biaxiale (maillage 1 avec 175740 d.d.l.)

Pour cet exemple (avec un paramètre de direction de recherche tel que  $k = E / L_0$  avec  $L_0 = 230$  mm), une bonne solution est obtenue après 100 itérations (Figures II-19, II-20).

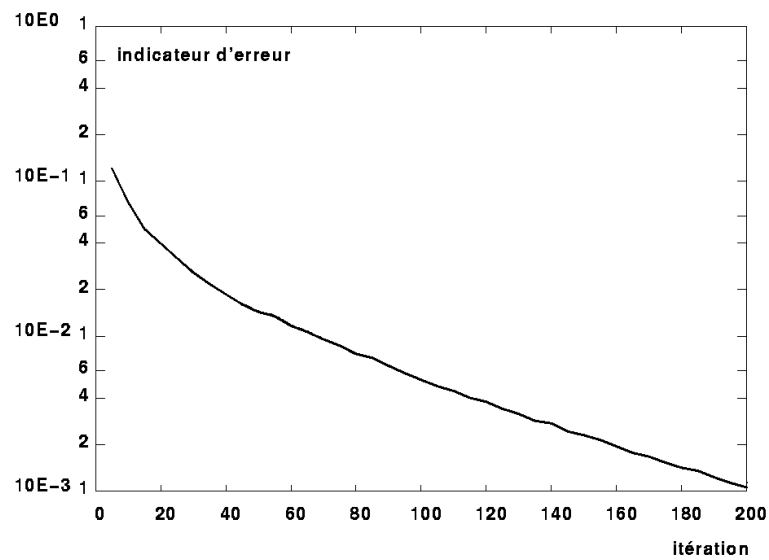


Figure II-19 : Evolution de l'indicateur d'erreur au cours des itérations.

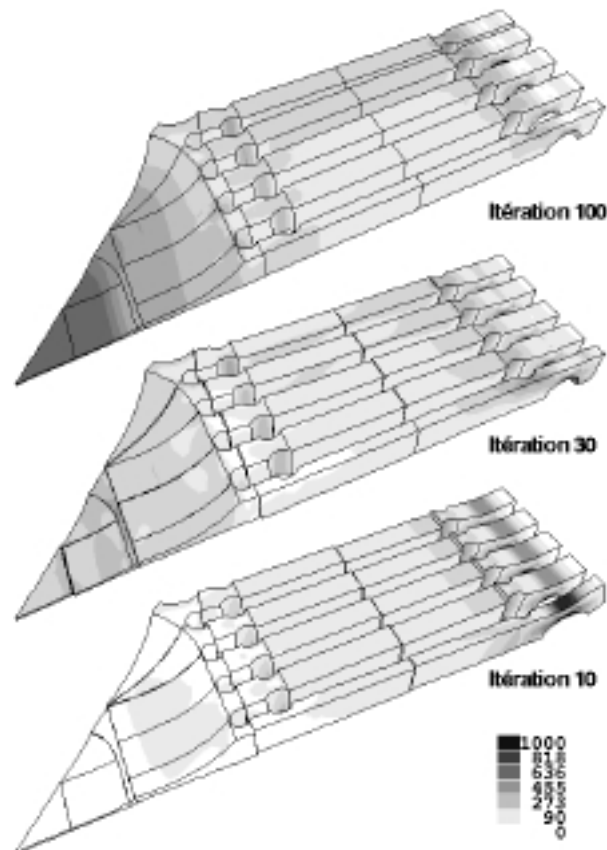


Figure II-20 : Contrainte équivalente de Mises (en MPa).

Les coûts de calcul sont comparés avec une méthode directe de résolution du problème non sous-structuré. Etant donné la taille de ces modélisations, les calculs ont été menés par J.Y. COGNARD sur le CRAY-C90 de l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique) à ORSAY. La figure II-21 présente les résultats de ces comparaisons. Ils ne sont qu'indicatifs car l'algorithme qu'utilise notre approche n'est pas optimisé pour le CRAY-C90 dont l'efficacité est due, en majeure partie, à la vectorisation.

Cependant, on retrouve, pour ces grands problèmes, les gains en réduction de l'encombrement et en temps de calcul apportés par l'approche. De plus, il est important de remarquer que, lorsque la taille du problème augmente, l'encombrement des matrices de rigidité du problème sous-structuré augmente moins vite que celui du problème direct. Il en va de même pour les coûts de calcul.



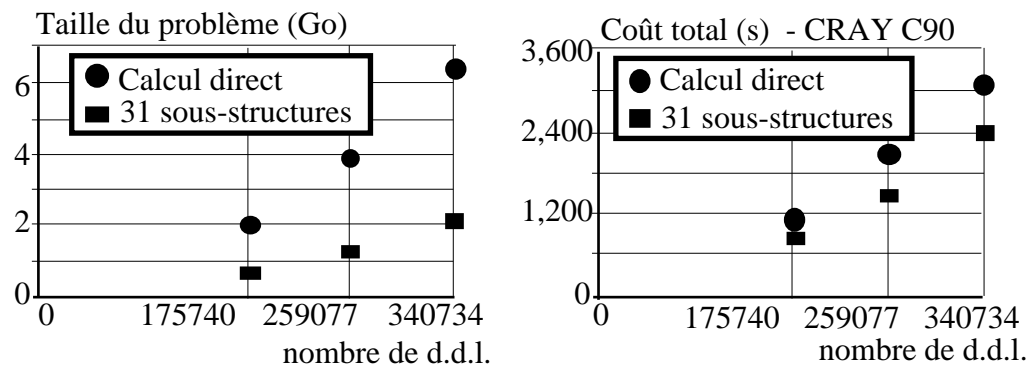


Figure II-21: Coûts des différents calculs.

# **CHAPITRE III :**

## **TRAITEMENT DES**

### **NON LINÉARITÉS DE CONTACT.**

La prise en compte de conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement engendre des non-linéarités très fortes. Face à ces problèmes, la littérature propose de nombreuses méthodes de résolution, des plus simples aux plus complexes. Cette quantité d'approches s'explique, sans doute, par le fait que chacune s'applique à un problème précis, mais aucune n'est vraiment efficace pour toutes les situations et les problèmes de contact. Ce chapitre présente la modélisation de ces problèmes à la manière de [DUVAUT & LIONS, 1972], quelques unes des techniques classiques de résolution et les difficultés qu'elles rencontrent.

Nous présentons, ensuite, le traitement des conditions de contact et de frottement par l'approche CONTRAST, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'un comportement d'interface adapté. Nous adoptons une "vision simplifiée" du phénomène de frottement, pour des problèmes statiques en petites perturbations, et nous présentons ses limitations et une analogie, pour un cas simple, avec l'une des techniques classiques. Plusieurs comparaisons avec des codes de calculs industriels reconnus et avec des résultats de la littérature valident ce traitement et montrent la faisabilité et l'efficacité de l'approche face à des problèmes pour lesquels les conditions de contact portent sur un très grand nombre de degrés de liberté. L'efficacité de l'approche se traduit par des gains en coût et en temps de calcul sur des modélisations complexes.

Le fin du chapitre présente le traitement des non-linéarités de type joint élastomère. Nous effectuons un bilan sur les comportements d'interface implantés dans le logiciel prototype CONTRAST et sur les multiples perspectives offertes par les modèles d'interfaces.

### III.1 Problèmes de contact unilatéral avec et sans frottement

#### III.1.1 Données et hypothèses du problème

Le problème de contact formulé ci-dessous se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. La zone de contact éventuelle et sa géométrie sont supposées connues et n'évoluent pas au cours du temps. Les matériaux des corps en présence ont des comportements supposés élastiques linéaires.

Deux domaines  $E$  et  $E'$  sont susceptibles de venir en contact sur une zone  $c = E \cap E'$  (Fig. III-1). L'ensemble des deux domaines  $\Omega = E \cup E'$  est soumis à des conditions de déplacements imposés  $\underline{U}_d$  sur une zone  $\Gamma_1 = \Gamma_1^E \cup \Gamma_1^{E'}$  de sa frontière (différente de  $c$ ) et à des efforts imposés  $\underline{F}_d$  sur la zone  $\Gamma_2 = \Gamma_2^E \cup \Gamma_2^{E'}$  complémentaire à  $\Gamma_1$ .  $\Omega$  est soumis à des forces de volumes  $\underline{f}_d$ .

Soit  $\underline{U} = (\underline{U}^E, \underline{U}^{E'})$  /  $\underline{U} = \underline{U}_d$  sur  $\Gamma_1$

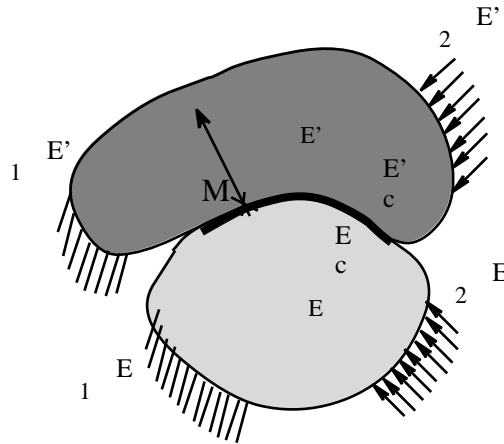


Figure III-1 : Problème de contact

$\underline{N}$  est la normale connue en tout point de la zone de contact  $c$ . Elle est orientée de  $E$  vers  $E'$ . Les restrictions du champ de déplacement  $\underline{U}$  du domaine  $\Omega$  sur les bords  $\Gamma_c^E$  et  $\Gamma_c^{E'}$  sont respectivement :

$$\underline{U}_c^E = U_N^E \underline{N} + \underline{U}_T^E \quad \text{et} \quad \underline{U}_c^{E'} = U_N^{E'} \underline{N} + \underline{U}_T^{E'}$$

Sur la zone de contact, le solide  $E$  (resp.  $E'$ ) est soumis à une action  $\underline{F}_c^E$  (resp.  $\underline{F}_c^{E'}$ ) de la part du solide  $E'$  (resp.  $E$ ). Ces champs d'efforts sont définis de la manière suivante :

$$\underline{F}_c^E = F_N^E \underline{N} + \underline{F}_T^E \quad \text{et} \quad \underline{F}_c^{E'} = F_N^{E'} \underline{N} + \underline{F}_T^{E'}$$

De plus, les notations suivantes sont utilisées :

$U_N = (U_N^{E'} - U_N^E)$ , le saut de déplacement normal.

$\underline{U}_T = (\underline{U}_T^{E'} - \underline{U}_T^E)$ , le saut de déplacement tangentiel.

### III.1.2 Contact unilatéral sans frottement

#### III.1.2.1 Loi de contact unilatéral sans frottement

Les conditions de contact unilatéral sans frottement sur  $\overset{EE'}{c}$  s'écrivent sous la forme du problème suivant :

$U_N \leq 0$	: possibilité de décollement.
$F_N = F_N^E = -F_N^{E'} \leq 0$	: efforts normaux de compression.
$\underline{F}_T = \underline{F}_T^E = -\underline{F}_T^{E'} = 0$	: pas de frottement.
$U_N \cdot F_N = 0$	: condition complémentaire.

La dernière condition indique que lorsqu'il y a décollement, les efforts normaux sont nuls et que lorsque ces efforts sont non nuls, il n'y a pas décollement.

#### III.1.2.2 Formulation variationnelle du problème de contact sans frottement

La formulation variationnelle [DUVAUT et LIONS, 1972] du problème de contact sans frottement est la suivante :

$\mathbf{K}$ , sous-ensemble convexe fermé de  $\mathbf{U}$  est défini tel que :

$$\mathbf{K} = \{ \underline{U} \in \mathbf{U} / U_N \leq 0 \text{ sur } \overset{EE'}{c} \}$$

Le problème d'inéquation variationnelle à résoudre est le suivant :

Trouver $\underline{U} \in \mathbf{K}$ tel que $\forall \underline{V} \in \mathbf{K}$ ,
$a(\underline{U}, \underline{V} - \underline{U}) - (f, \underline{V} - \underline{U}) \leq 0$
avec $a(\underline{U}, \underline{V}) = \int_{\Omega} (\underline{U})_{,i} (\underline{V})_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{K}(\underline{U}) : \mathbf{K}(\underline{V}) d\Omega$
$(f, \underline{V}) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{V} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \underline{F}_d \cdot \underline{V} dS$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème sont assurées.

L'opérateur d'élasticité  $\mathbf{K}$  étant symétrique, la forme  $a(.,.)$  l'est aussi et le problème précédent est équivalent au problème d'optimisation sous contrainte suivant :

Trouver $\underline{U} \in \mathbf{K}$ tel que $\forall \underline{V} \in \mathbf{K}$ , $J(\underline{U}) \leq J(\underline{V})$
avec $J(\underline{V}) = \frac{1}{2} a(\underline{V}, \underline{V}) - (f, \underline{V})$

### III.1.2.3 Introduction d'un jeu initial

Pour la situation précédente, la taille de la zone de contact ne peut que diminuer. Un jeu initial peut être introduit entre les points de deux surfaces "susceptibles" d'être en contact, de manière à ce que la zone de contact puisse augmenter au cours du chargement. La formulation change peu, mais une difficulté géométrique apparaît. En effet, les deux surfaces en contact peuvent, maintenant, présenter des géométries différentes. Dans un problème écrit dans la configuration non déformée, il faut choisir judicieusement une normale et des limites pour les zones de contact, de façon à ne pas trop introduire d'erreur sur la solution finale.

Les conditions de contact unilatéral sans frottement avec jeu  $j$  en tout point de  $\frac{EE'}{c}$  s'écrivent alors sous la forme du problème suivant :

$U_N - j \geq 0$	: possibilité de décollement et de jeu.
$F_N = F_N^E = - F_N^{E'} \geq 0$	: efforts normaux de compression.
$F_T = F_T^E = - F_T^{E'} = 0$	: pas de frottement.
$(U_N - j) \cdot F_N = 0$	: condition complémentaire.

Il est naturel d'ajouter des hypothèses de petites perturbations sur  $j$  pour garder la cohérence du problème.

### III.1.3 Lois de frottement

Il existe un grand nombre de modèles de lois de frottement. La plus utilisée dans les codes de calcul est, sans conteste, la loi de Coulomb. Cette loi est pourtant critiquée à cause de son manque de sens physique et des problèmes mathématiques qu'elle pose. De nombreuses autres lois de frottement, plus "physiques", peuvent être introduites [ODEN & PIRES, 1983].

#### III.1.3.1 Loi de Coulomb

Lorsqu'il y a contact en un point, la loi de Coulomb donne une relation entre la vitesse de glissement et l'effort tangentiel en fonction de l'intensité de celui-ci. Cette relation définit deux états possibles :

Adhérence :

$$\text{si } \|\underline{F}_T\| \leq \mu \|\underline{F}_N\| \quad \text{alors } \dot{\underline{U}}_T = 0$$

Glissement :

$$\text{si } \|\underline{F}_T\| = \mu \|\underline{F}_N\| \quad \text{alors il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{\underline{U}}_T = -\lambda \underline{F}_T$$

L'effort de contact est alors à l'intérieur du cône de frottement de Coulomb (Fig. III-3) et la vitesse de glissement a une direction opposée à celle de l'effort tangentiel. En définissant, dans le cas du glissement :

$$\dot{\underline{U}}_T = \dot{U}_T \frac{\underline{F}_T}{\|\underline{F}_T\|} \quad \text{et} \quad \underline{F}_T = F_T \frac{\underline{F}_T}{\|\underline{F}_T\|}$$

le graphe de la loi de Coulomb est représenté sur la figure III-2.

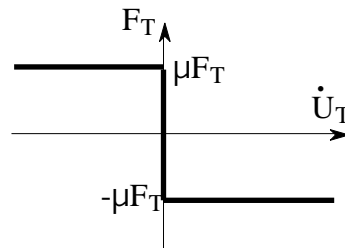


Figure III-2 : Loi de frottement de Coulomb

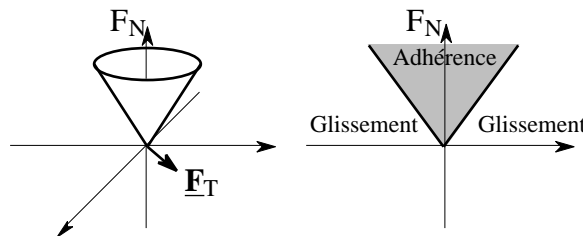


Figure III-3 : Cône de frottement de Coulomb

### III.1.3.2 Adoucissement de la loi de Coulomb

Les expressions des conditions d'adhérence et de glissement, données par la loi de Coulomb, ne sont pas des fonctions biunivoques de la vitesse de glissement. Cela peut conduire à des difficultés pour les techniques classiques de résolution. Pour cela, des lois de frottement adoucies, proches de celle de Coulomb, sont utilisées.

Un exemple est l'introduction d'un glissement élastique dans la zone d'adhérence (Fig. III-4), justifié par une déformation élastique des aspérités sur la zone de contact. Pour que la loi reste proche de celle de Coulomb, le coefficient  $k_e$  doit être suffisamment grand, mais sa présence ne doit pas entraîner un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité du système. Cela en fait un paramètre difficile à régler.

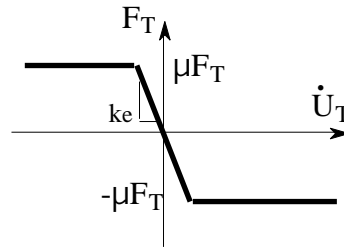


Figure III-4 : Loi de frottement de Coulomb modifiée

### III.1.3.3 Loi de Norton-Hoff

La loi de frottement de Norton-Hoff est une loi en puissance qui lie de façon biunivoque l'effort tangentiel et la vitesse de glissement. Elle peut donc être facilement utilisée par des algorithmes d'intégration de loi de comportement. Elle s'écrit :

$$\underline{F}_T = -\mu |\underline{F}_N| \cdot \|\underline{\dot{U}}_T\|^{p-1} \underline{\dot{U}}_T$$

et son graphe est donné sur la figure III-5.

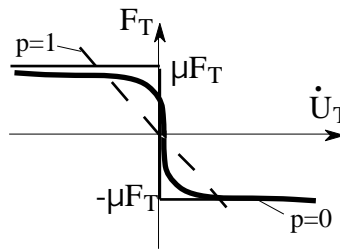


Figure III-5 : Loi de frottement de Norton-Hoff

Lorsque  $p=0$ , cette loi est équivalente à celle de Coulomb.

### III.1.4 Problèmes statiques ou monotones quasi-statiques

#### III.1.4.1 Loi de Coulomb en statique

Dans le cas de problèmes statiques, le problème de frottement de Coulomb peut être formulé en déplacement en intégrant [DUVAUT et LIONS, 1972] :

Adhérence :

$$\text{si } \|\underline{E}_T\| \leq \mu |F_N| \quad \text{alors } \underline{U}_T = 0$$

Glissement :

$$\text{si } \|\underline{E}_T\| = \mu |F_N| \quad \text{alors il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \underline{U}_T = - \lambda \underline{E}_T$$

[DUVAUT et LIONS, 1972] montre que cette formulation reste valable pour les problèmes quasi-statiques lorsque le module des efforts appliqués reste croissant.

#### III.1.4.2 Formulation variationnelle associée

La formulation variationnelle [DUVAUT et LIONS, 1972] du problème de contact sans frottement, pour des chargements statiques ou monotones quasi-statiques, est la suivante :

$\mathbf{K}$ , sous-ensemble convexe fermé de  $\mathbf{U}$  est défini tel que :

$$\mathbf{K} = \{ \underline{U} \in \mathbf{U} / U_N \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c^{EE'} \}$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver  $\underline{U} \in \mathbf{K}$  tel que  $\underline{V} \in \mathbf{K}$ ,

$$a(\underline{U}, \underline{V} - \underline{U}) - (f, \underline{V} - \underline{U}) + i(\underline{V}, \underline{U}) - i(\underline{U}, \underline{U}) \leq 0$$

avec  $a(\underline{U}, \underline{V})$  et  $(f, \underline{V})$  définis précédemment

$$i(\underline{U}, \underline{V}) = \int_{\Gamma_c^{EE'}} \mu |F_N(\underline{U})| \cdot \|\underline{V}_T^E - \underline{V}_T^E\| dS = \int_{\Gamma_c^{EE'}} \mu |F_N(\underline{U})| \cdot \|\underline{V}_T\| dS$$

Ce problème est complexe à cause de la présence du terme non-différenciable  $i(\underline{U}, \underline{V})$ . De plus, l'existence et l'unicité (pour des coefficients de frottement petits) de la solution, ne peuvent être montrées [DUVAUT, 1980] que pour une forme régularisée du problème. Cette régularisation porte sur la densité de force de réaction  $F_N(\underline{U})$  (car il est difficile de donner un sens à  $|F_N(\underline{U})|$ ) qui est remplacée par le simple quotient d'une force par une surface. La notion de frottement non-local est utilisée ici [ODEN & PIRES, 1983].



Ce problème régularisé est alors équivalent au problème de point fixe sur le seuil de glissement suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver le point fixe de l'application } \mu |F_N(\underline{U})|, \text{ où } \underline{U} \text{ est solution} \\ & \text{unique du problème de minimisation suivant :} \\ & \text{trouver } \underline{U} \in \mathbf{K} \text{ tel que } \underline{V} \in \mathbf{K}, \quad J(\underline{U}) = J(\underline{V}) \\ & \text{avec } J(\underline{V}) = \frac{1}{2} a(\underline{V}, \underline{V}) - (f, \underline{V}) + j(\underline{V}) \\ & \text{où } j(\underline{V}) = \int_{\Gamma_c} ||\underline{V}_T|| \, dS \end{aligned}$$

### III.1.5 Approche incrémentale du problème de frottement de Coulomb

La solution du problème dépendant du chemin suivi, il n'est pas toujours possible de considérer des conditions de frottement sans tenir compte de leur évolution au cours du temps. Ce problème est généralement traité par une approche incrémentale : une discrétisation en temps est introduite ( $t_i, i=1, \dots, n$ ). Elle correspond à  $n$  différents pas de chargement. A chaque pas de temps, le chargement suivant est appliqué :

$$\begin{aligned} \underline{F}_d(t_i) &= \underline{F}_d^i = \underline{F}_d^{i-1} + \underline{F}_d^{i-1} \text{ et } \underline{f}_d(t_i) = \underline{f}_d^i = \underline{f}_d^{i-1} + \underline{f}_d^{i-1} \\ \underline{U}_d(t_i) &= \underline{U}_d^i = \underline{U}_d^{i-1} + \underline{U}_d^{i-1} \end{aligned}$$

Rappelons que le problème incrémental de frottement de Coulomb se formule :

Adhérence :

$$\text{si } ||\underline{F}_T^i|| \leq \mu |F_N^i| \text{ alors } \underline{U}_T^i = \underline{U}_T^{i-1} - \underline{U}_T^i = 0$$

Glissement :

$$\text{si } ||\underline{F}_T^i|| = \mu |F_N^i| \text{ alors il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \underline{U}_T^i = - \lambda \underline{F}_T^i$$

Le problème incrémental de contact unilatéral est :

$$\underline{U}_N^i \geq 0, \quad F_N^i \leq 0, \quad \underline{U}_N^i \cdot F_N^i = 0$$

Ou bien :

$$\underline{U}_N^i \leq \underline{U}_N^{i-1}, \quad F_N^i \leq 0, \quad (\underline{U}_N^i + \underline{U}_N^{i-1}) \cdot F_N^i = 0$$

Ainsi, à chaque pas de temps, une inéquation variationnelle (ou bien le problème de point fixe équivalent), portant sur des incréments, est à résoudre [LEBON, 1989].

### **III.1.6 Résolution du problème de contact**

Nous avons rappelé que le traitement des conditions de contact et des conditions de frottement (en statique, en quasi-statique ou d'évolution sous forme incrémentale) conduit à des problèmes formulés en terme d'inéquations variationnelles. Pour la résolution, l'inéquation variationnelle engendrée est très souvent transformée, après suppression des conditions cinématiques et introduction de variables duales, en une équation variationnelle. Il existe un grand nombre de techniques de résolution de ces problèmes, issues du domaine de l'optimisation. Certaines d'entre elles (point fixe, relaxation projetée, gradient projeté, pénalisation et multiplicateur de Lagrange) sont présentées ici. Les codes de calcul par éléments finis utilisent principalement la méthode de pénalisation ou celle des multiplicateurs de Lagrange qui peuvent s'implanter facilement. Cependant, ces deux approches rencontrent des difficultés. La première est très sensible au paramètre de pénalisation et conduit à l'utilisation de matrices de rigidité mal conditionnées. La deuxième semble assez peu robuste, en particulier lorsque des conditions de frottement sont prises en compte.

Pour pallier ces difficultés, des techniques d'optimisation non-linéaire sophistiquées sont utilisées. Elles peuvent être classées en deux groupes : celles qui traitent le problème par une succession de sous-problèmes contraints et celles qui le traitent par une succession de sous-problèmes non contraints. Parmi les méthodes de la première catégorie, celles dites de "programmation mathématique" sont les plus courantes [KLARBRING, 1986]. Une succession de sous-problèmes de minimisation dans un sous-espace restreint est résolue par le processus itératif. Dans un cadre général, ces sous-problèmes concernent les équations d'équilibre linéarisées soumises à des contraintes elles-aussi linéarisées.

Les méthodes de Lagrangien augmenté [ARORA et al, 1991] partent de la fonctionnelle lagrangienne classique et y ajoutent des termes de pénalisation appropriés qui ne sont pas nécessairement infinis pour assurer la vérification des contraintes. La méthode de pénalisation est utilisée pour générer une base de multiplicateur de Lagrange. Chacune des itérations sur les multiplicateurs conduit à un sous-problème non contraint qui ne nécessite pas de modification majeure de l'architecture d'un code existant. La méthode que nous utilisons pour le traitement des conditions de contact s'apparente à cette dernière technique et une analogie est donnée au chapitre III.

Quelques unes de ces méthodes classiques de résolution sont présentées ici, de manière non exhaustive, dans un cadre "éléments finis" :

Une discrétisation du champ de déplacement est introduite la manière suivante :

$$\underline{U} = \{N\}^T \{u\},$$

et le problème à résoudre est le suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{U} \quad \mathbf{H}(\underline{U} = \{N\}^T \{u\}) \text{ tel que} \\ J(\underline{U}) \quad J(\underline{V}) \quad \underline{V} \quad \mathbf{H} \text{ tel que } (\underline{V} = \{N\}^T \{v\}) \\ \text{avec } J(\underline{V}) = \frac{1}{2} \{v\}^T [K] \{v\} - \{v\}^T \{F\} \\ \text{et } \mathbf{H} = \{ \underline{V} \quad \underline{U} \text{ tel que } [B] \{v\} - \{g\} = 0). \end{array} \right.$$

### III.1.6.1 Méthode de (sur-) relaxation projeté

Cette méthode est présentée dans [RAOUS et al, 1998] dans le cadre d'une utilisation de l'algorithme de Gauss Seidel sur-relaxé projeté (sur les conditions unilatérales). Il s'agit d'un procédé diagonal pour lequel il est nécessaire que les inconnues soient découplées dans les conditions unilatérales (que la matrice  $[B]$  soit diagonale). Ceci peut être obtenu par un changement de variables (voir [LEBON, 1989]). Dans la suite, ce changement de variables est réalisé, les termes diagonaux de  $[B]$  sont notés  $b_i$ , et le sous-ensemble  $\mathbf{H}_i$  est tel que :

$$\mathbf{H}_i = \{v \quad \mathbf{R} \text{ tel que } b_i v - g_i = 0\}$$

Partant de  $\{u^0\} = \{u_1^0, \dots, u_N^0\}^T$  et supposant  $\{u^n\}$  connu,  $u_i^{n+1}$  est calculé de proche en proche pour  $i = 1, \dots, N$ .

On définit  $u_i^{n+1}$  comme la solution de

$$J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) = J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n), \quad v_i \in \mathbf{H}_i$$

Dans  $\mathbf{R}$ , il s'agit d'un problème très simple à une dimension :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{k_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} u_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^N k_{ij} u_j^n \right)$$

projeté dans  $\mathbf{H}_i$  c'est-à-dire :

$$\text{si } b_i u_i^{n+1} - g_i > 0 \text{ alors } b_i u_i^{n+1} - g_i = 0 \quad (\text{sans sommation sur l'indice } i)$$

Pour accélérer la convergence, une méthode de sur-relaxation peut être utilisée :  $u_i^{n+1/2}$  est alors défini comme solution de :

$$J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) - J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) = 0, \quad v_i \in \mathbf{H}_i$$

C'est-à-dire :

$$u_i^{n+1/2} = \frac{1}{k_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} u_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^N k_{ij} u_j^n \right)$$

et puis :  $u_i^{n+1} = (1 - \alpha) u_i^n + \alpha u_i^{n+1/2}$  projeté dans  $\mathbf{H}_i$

Pour que la méthode soit convergente, il faut que  $\alpha \in ]0, 2[$

### III.1.6.2 Méthode du gradient projeté

Dans [BEAUMIER et RAOUS, 1987], sont proposées une approche gradient projeté et une approche gradient conjugué projeté. [DILINTAS et al, 1998] propose une approche gradient conjugué projeté avec préconditionnement.

La méthode du gradient projeté s'écrit de la manière suivante (à l'itération  $k$ ) :

$$\{u^{k+1}\} = \{u^k\} + \mu^k \{R^k\} \quad \text{avec } \{R^k\} = \{F\} - [K]\{u^k\} \text{ et } \mu^k = \frac{\{R^k\}^T \{R^k\}}{\{R^k\}^T [K] \{R^k\}}$$

puis projection sur  $\mathbf{H}$ , c'est-à-dire :

$$\text{si } b_i u_i^{n+1} < g_i \text{ alors } b_i u_i^{n+1} = g_i \quad (\text{sans sommation sur l'indice } i)$$

La méthode du gradient conjugué projeté s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{u^{k+1}\} &= \{u^k\} + \alpha^k \{w^k\} \quad \text{où } \{w^{k+1}\} = \{R^{k+1}\} + s^k \{w^{k+1}\} \\ \text{avec } \alpha^k &= \frac{\{R^k\}^T \{R^k\}}{\{R^k\}^T [K] \{R^k\}}, \quad \{R^k\} = \{F\} - [K]\{u^k\} \text{ et } s^k = \frac{\|\{R^k\}\|^2}{\|\{R^k\}^{-1}\|^2} \end{aligned}$$

puis projection sur  $\mathbf{H}_i$ .

Ces méthodes, connues pour leur robustesse (surtout lorsqu'il y a préconditionnement), ne nécessitent pas la détermination de paramètres particuliers (coefficient de pénalisation, de relaxation, ...). Néanmoins, la projection sur le convexe  $\mathbf{H}$  perturbe la relation de conjugaison des directions du gradient conjugué, mais la convergence semble rester satisfaisante.

### III.1.6.3 Méthode de pénalisation

La formulation avec pénalité est obtenue à partir de la fonctionnelle  $J$  à laquelle est ajouté un terme faisant intervenir un paramètre qui pénalise les contraintes unilatérales :

$$J'(\underline{U}) = J(\underline{U}) + \int_c \frac{EE'}{c} (U_N - j)^2 dS$$

Le problème de minimisation peut alors être résolu par des algorithmes de type Newton-Raphson. Néanmoins, pour que les conditions de contact soit vérifiées correctement, il faut que le paramètre de pénalisation soit élevé. Cela conduit à un mauvais conditionnement des matrices de rigidité.

### III.1.6.4 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La formulation lagrangienne est obtenue à partir de la fonctionnelle  $J$  à laquelle est ajouté un terme faisant intervenir des variables duales, multiplicateurs de Lagrange, qui sont en fait les efforts de contact.

$$J''(\underline{U}) = J(\underline{U}) + \int_c (U_N - j) \underline{N} dS$$

Après discrétisation, le problème de point selle suivant est obtenu :

$$\begin{array}{|l} \text{Max (} \quad \text{Min } J''(\{u\}, \{\lambda\}) \\ \{ \lambda \} \geq 0 \quad \{u\} \\ \text{avec } J''(\{u\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{F\} - ([B] \{u\} - \{g\})^T \{ \lambda \} \end{array}$$

La minimisation par rapport à  $\{u\}$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J''}{\partial \{u\}} &= 0 \Rightarrow [K] \{u\} - \{F\} - [B]^T \{ \lambda \} = 0 \\ &\Leftrightarrow \{u\} = [K]^{-1} (\{F\} + [B]^T \{ \lambda \}) \end{aligned}$$

En exprimant  $\{u\}$  en fonction de  $\{ \lambda \}$ , le nouveau problème de minimisation sous contrainte sur les multiplicateurs est obtenu :

$$\begin{array}{|l} \text{Min (} \frac{1}{2} \{ \lambda \}^T [A] \{ \lambda \} - \{ \lambda \}^T \{C\} - D) \\ \{ \lambda \} \geq 0 \\ \text{avec } [A] = [B][K]^{-1}[B]^T \quad \{C\} = [B][K]^{-1}\{F\} - \{g\} \quad D = \frac{1}{2} \{F\}^T [K]^{-1} \{F\} \end{array}$$

Ce problème a l'avantage d'avoir une taille qui correspond au nombre de conditions de contact imposées. Un inconvénient de l'approche est que des zéros apparaissent sur la diagonale de la matrice de rigidité, empêchant toute résolution par une méthode de type Cholesky, par exemple. Pour pallier ce problème, plusieurs multiplicateurs peuvent être associés à une même condition [VERPEAUX et al, 1988] ou bien un terme supplémentaire (dans lequel  $\epsilon$  est grand) peut être ajouté à la fonctionnelle.

$$J''(\underline{U}) = J(\underline{U}) + \int_c \frac{EE'}{c} (\underline{U}_N - j) \underline{N} \, dS - \frac{1}{2} \int_c \frac{EE'}{c} (\underline{U}_N - j)^2 \, dS$$

Cette dernière approche est qualifiée de méthode du Lagrangien perturbé [SIMO et al, 1985] et se rapproche de la méthode de pénalité pour la résolution du problème réduit aux multiplicateurs.

#### III.1.6.5 Méthode du Lagrangien augmenté

Cette méthode est une combinaison des deux précédentes [SIMO & LAURSEN, 1992 ; FENG, 1995]. Ici, le paramètre de pénalisation est utilisé pour générer une base de multiplicateurs de Lagrange.

$$J^*(\underline{U}) = J(\underline{U}) + \int_c \frac{EE'}{c} (\underline{U}_N - j) \underline{N} \, dS + \int_c \frac{EE'}{c} (\underline{U}_N - j)^2 \, dS$$

Les algorithmes utilisés pour résoudre ce problème sont souvent ceux du type UZAWA, où, à chaque itération, une correction du multiplicateur est apportée à partir du paramètre de pénalité et de la valeur de la violation de la contrainte.

#### III.1.6.6 Méthodes de point fixe (ou méthode des statuts)

Il existe un très grand nombre de méthodes de point fixe, mais le principe est toujours le même et suit l'algorithme suivant [VERPEAUX et CHARRAS, 1994]:

- 1) Résoudre le problème en imposant toutes les conditions de contact.
- 2) Détecter (par un test en effort ou en déplacement) les contacts qui n'ont pas lieu d'être.
- 3) Relâcher les relations qui leur sont associées.
- 4) Résoudre le problème avec les nouvelles conditions et reprendre à 2).

Cet algorithme itère jusqu'à stationnarité, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'entre deux itérations successives, il n'y ait plus de changement de statut des conditions. Cet algorithme ayant parfois des difficultés à atteindre la convergence, il arrive qu'il soit nécessaire à l'étape 3) de ne relâcher les conditions qu'une à une : la vitesse de convergence est alors diminuée. Les contraintes peuvent être imposées par pénalité ou par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange.

#### **III.1.6.7** *Conclusions sur les techniques de résolution*

La plupart de ces approches mettent en œuvre un calcul itératif sur le problème complet. Il apparaît donc intéressant, pour limiter les coûts numériques, d'essayer de réduire la taille de ce problème. Une méthode couramment utilisée est de condenser le problème sur les degrés de liberté qui interviennent dans les conditions de contact. Cette opération est réalisée dans la plupart des codes de calcul industriels. La technique de condensation utilisée est celle décrite au chapitre I, pour laquelle il apparaît que la construction de la matrice condensée est très coûteuse quand le nombre de degrés de liberté sur les interfaces est grand. Ainsi, lorsqu'un grand nombre de conditions de contact est à imposer (comme dans le cas d'assemblages tridimensionnels complexes), la construction de cette matrice peut entraîner des coûts numériques plus importants que ceux du processus itératif qui suit. C'est pour cette raison qu'à l'heure actuelle, le traitement des problèmes de contact par un code de calcul n'est réellement efficace que lorsque le nombre et la taille des zones de contact sont restreints.

De plus, parmi toutes ces méthodes, il est important de remarquer que la plupart ne vérifie qu'une seule partie des conditions de contact. Les approches de type pénalisation ne contrôlent que les relations en déplacement, celles du type multiplicateurs ne contrôlent que les relations en effort. Cela peut conduire à des problèmes sérieux sur la solution comme le montre le paragraphe III.1.9. En revanche, les approches dites "mixtes", comme celles par Lagrangien augmenté, vérifient toutes les relations.

### III.1.7 Analogie avec les problèmes de plasticité

[CURNIER, 1984] propose une théorie générale pour les problèmes de contact avec frottement inspirée des théories classiques de plasticité.

En décomposant la distance entre les points des deux domaines :

$$\begin{aligned}
 \underline{D} &= \underline{D}^{E'} - \underline{D}^E \\
 &= \underline{D}^a + \underline{D}^g \\
 &= (\underline{D}_N^a + \underline{D}_N^g)\underline{N} + (\underline{D}_T^a + \underline{D}_T^g) \\
 &= \underline{D}_N \underline{N} + \underline{D}_T
 \end{aligned}$$

les indices a et g indiquent respectivement les termes d'adhérence et les termes de glissement. Les composantes normales des termes d'adhérence et de glissement ne sont pas classiques et sont introduites uniquement pour effectuer un traitement simultané des conditions de contact et des conditions de frottement. Un glissement cumulé est défini de la manière suivante :

$$\underline{D}^c = \int_0^t d\underline{D}^c \quad \text{où } d\underline{D}^c = ||d\underline{D}_T^g||.$$

A ces quantités cinématiques, sont associées les quantités dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 \underline{D}^a &\rightarrow \underline{F} : \text{force de frottement} \\
 \underline{D}^g &\rightarrow \underline{F}^g : \text{force de déchirement} \\
 \underline{D}^c &\rightarrow \underline{F}^c : \text{force d'usure.}
 \end{aligned}$$

Les lois d'état sont choisies sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \underline{F} &= \underline{P}\underline{D}^a & \text{où } \underline{P} &\text{représente l'élasticité des aspérités.} \\
 \underline{F}^g &= \underline{Q}\underline{D}^g & \text{où } \underline{Q} &\text{est un opérateur de rugosité.} \\
 \underline{F}^c &= \underline{Q}\underline{D}^c & \text{où } \underline{Q} &\text{est un module de rugosité.}
 \end{aligned}$$

Elles sont analogues aux lois élastique, d'écrouissage cinématique et d'écrouissage isotrope rencontrées en plasticité. La composante normale de  $\underline{D}^g$  n'intervenant pas, ces lois sont, en fait :

$$\begin{aligned}
 \underline{F}_N &= \underline{P}_N \underline{D}_N^a & \text{et } \underline{F}_T &= \underline{P}_T \underline{D}_T^a \\
 \underline{F}_N^g &= 0 \cdot \underline{D}_N^g & \text{et } \underline{F}_T^g &= \underline{Q}_T \underline{D}_T^g \\
 \underline{F}^c &= \underline{Q} \underline{D}^c.
 \end{aligned}$$



Le critère de glissement (ou critère de frottement) est écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\underline{D}^a, \underline{D}^g, D^c) &< 0 && \text{Contact et adhérence} \\ &= 0 && \text{jeu ou glissement} \end{aligned}$$

ou bien (les lois d'état étant inversibles) sous la forme plus appropriée au problème :

$$f(\underline{F}, \underline{F}^g, F^c) = 0$$

Pour un problème en frottement parfait (loi de Coulomb), le critère choisi est :

$$f(\underline{F}, \underline{F}^g, F^c) = 0 \text{ si } \begin{cases} F_N = 0 & \text{contact} \\ \|\underline{E}_T\| + \mu F_N - a = 0 & \text{glissement} \end{cases}$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement et  $a$  un éventuel coefficient d'adhésion. L'utilisation d'une norme différente pour  $\|\underline{E}_T\|$  permet d'introduire des conditions de frottement anisotropes dans le plan de glissement.

Pour un problème en frottement avec usure, le critère choisi est :

$$f(\underline{F}, \underline{F}^g, F^c) = 0 \text{ si } \begin{cases} F_N = 0 & \text{contact} \\ (\underline{E}_T - \underline{F}^g)^2 + (\mu F_N - F^c) = 0 & \text{glissement.} \end{cases}$$

La direction du glissement est gouvernée par les lois de glissement, dérivant de  $(\underline{F}, \underline{F}^g, F^c)$  qui est la fonction indicatrice du convexe  $f(\underline{F}, \underline{F}^g, F^c) = 0$  :

$$\underline{\dot{D}}^a = \frac{\underline{F}}{F}; \quad \underline{\dot{D}}^g = \frac{\underline{F}^g}{F^g}; \quad \dot{D}^c = \frac{F^c}{F^c}; \quad 0; \quad f = 0,$$

où  $\underline{\dot{D}}^a$  exprime la colinéarité de l'incrément de glissement avec la normale sortante au potentiel  $\phi$ .

Ces lois, dérivant toutes du même potentiel, caractérisent un modèle de frottement standard généralisé. Différentes formes peuvent être envisagées pour  $\phi$  [CURNIER, 1984].

Pour la résolution du problème, les différentes méthodes d'intégration des lois de comportement peuvent être utilisées. [GIANNAKOPOULOS, 1989] propose, par exemple, une méthode de type "return mapping".

### III.1.8 *Eléments de contact*

A partir des formulations précédentes et en particulier de celle analogue à un problème de plasticité, un grand nombre d'auteurs proposent la mise en place d'éléments finis dit "de contact" [CESCOTTO & CHARLIER, 1993 ; NSANGOU, 1981 ; PARISCH, 1989]. Le problème est alors de construire une matrice de rigidité appropriée qui peut changer avec les statuts des éléments ou bien de construire une matrice tangente.

### III.1.9 *Quelques problèmes numériques avec les éléments finis*

Les problèmes de contact sont, le plus souvent, résolus sur des discrétisations par éléments finis linéaires. En effet, pour les éléments d'ordre supérieur, la vérification des conditions de contact aux nœuds n'entraîne pas forcément la vérification de ces conditions en tout point de la zone de contact (Fig III-6).

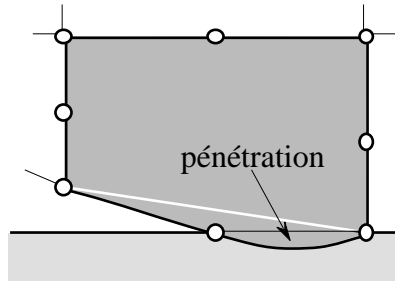


Figure III-6 : Violation des conditions de contact

Un autre problème est rencontré par les méthodes (du type multiplicateurs de Lagrange) qui contrôlent les conditions de non pénétration sur le signe des efforts nodaux de contact. Ce problème apparaît sur les bords des éléments de type cube à 20 nœuds, par exemple. En effet, à une répartition de pression uniforme correspondent des forces généralisées (ou nodales) dont le signe varie entre les différents nœuds (Fig III-7). Les solutions obtenues par ces méthodes peuvent être aberrantes. Ces problèmes ne sont pas rencontrés dans les méthodes basées sur des conditions en saut de déplacement ou sur le signe des pressions de contact.

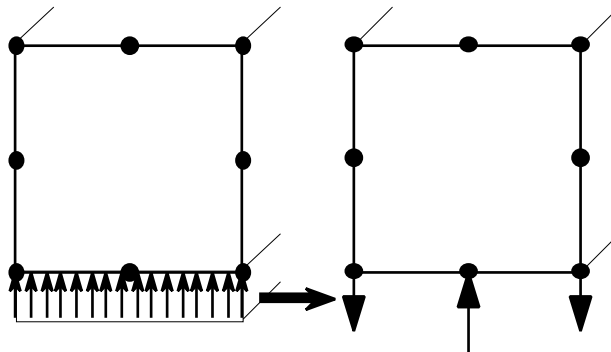


Figure III-7 : Forces généralisées sur les éléments cubiques à 20 nœuds

Au vu de ces problèmes, il est souvent préconisé d'utiliser uniquement des éléments linéaires pour traiter les problèmes de contact. Néanmoins, il semble que l'erreur due à la violation de la condition de non-pénétration soit quand même faible (lorsque les maillages sont fins) comparée au surcroît de qualité de la solution apporté par les éléments d'ordre supérieur.

## III.2 Interface de contact unilatéral avec ou sans frottement

### III.2.1 Problèmes et hypothèses

#### III.2.1.1 Décomposition incluant des interfaces de contact

Les interfaces modélisant des liaisons par contact interviennent dans l'étude d'assemblages de structures. L'assemblage complet considéré est, lui aussi, représenté par un ensemble de sous-structures qui ne communiquent qu'avec leurs interfaces voisines. Une telle décomposition d'un assemblage est réalisée en deux étapes. Une première séparation des éléments de l'assemblage fait intervenir des interfaces modélisant les liaisons réelles entre ces différents éléments (contact, frottement, jeu, ...). Ensuite, chaque élément est éventuellement décomposé en sous-structures et les interfaces engendrées modélisent alors des liaisons parfaites (Fig. III-8).

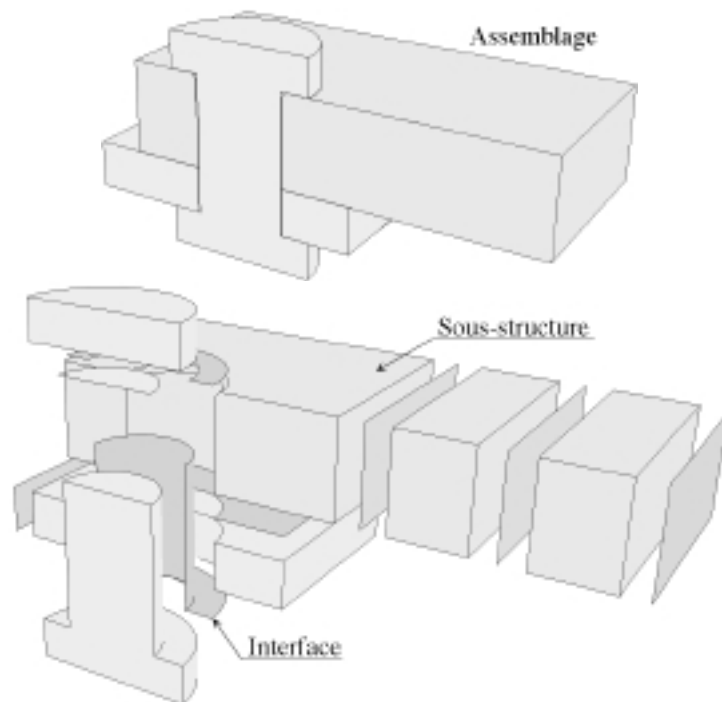


Figure III-8 : Décomposition d'un assemblage.

### III.2.1.2 Définition de la géométrie du contact

Deux sous-structures  $E$  et  $E'$  sont en contact unilatéral avec éventuellement un jeu initial et des conditions de frottement. La zone candidate au contact, supposée connue, définit l'interface  $EE'$  (Fig. III-9). En tout point  $M$ ,  $\underline{N}$  est la normale à  $EE'$  dirigée de  $E$  vers  $E'$  et  $\underline{P}$  est l'opérateur de projection tangentielle. Le champ de déplacement  $\underline{W}^E$  et le champ d'effort  $\underline{F}^E$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\underline{W}^E &= (\underline{N} \cdot \underline{W}^E) \underline{N} + \underline{W}^E \\ \underline{F}^E &= (\underline{N} \cdot \underline{F}^E) \underline{N} + \underline{F}^E\end{aligned}$$

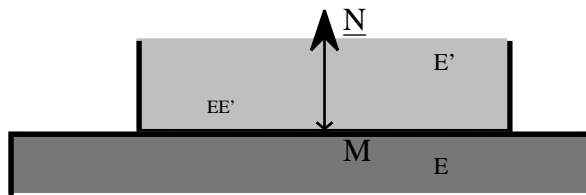


Figure III-9 : Interface de contact

Dans le cas du contact avec jeu, se pose le problème classique de la détermination ou du choix de l'orientation de la normale en un point de contact. Ici, cette direction est celle de la normale à l'interface qui est un milieu bidimensionnel. Le problème est donc reporté sur le choix de la géométrie de l'interface, sachant que, comme il y a un jeu initial, cette géométrie ne peut être construite automatiquement. La surface choisie pour être interface peut appartenir à l'une ou à l'autre des deux sous-structures ou bien peut être une surface intermédiaire (figure III-10).

On appelle  $j = j(M)$  le jeu initial connu, dans la direction de la normale  $\underline{N}$  en tout point  $M$  de l'interface.

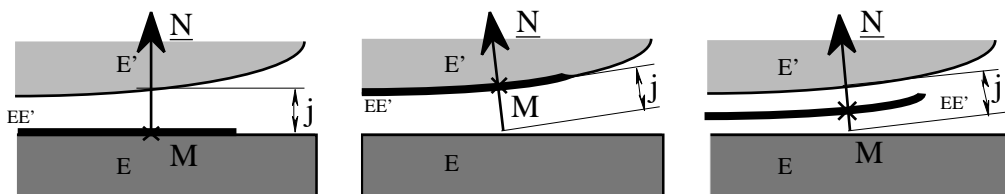


Figure III-10 : Choix possibles pour la géométrie de l'interface de contact.

### III.2.1.3 Condition de frottement

Une loi de frottement de type Coulomb avec un coefficient  $\mu$  (supposé constant et positif) est considérée. La formulation en déplacement à la manière de [DUVAUT & LIONS, 1972] est utilisée ; les cas de chargement sont donc statiques ou monotones quasi-statiques. L'approche CONTRAST utilise donc une vision simplifiée du problème de frottement et le problème résolu donne les zones d'adhérence et de glissement en fin de chargement.

### III.2.1.4 Problème à résoudre

Remarques :

- Pour la définition des directions de recherche, la forme  $\mathbf{k}_0 = k \cdot \mathbf{I}_d$  (Avec  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité et  $k$  un scalaire positif), définie pour les liaisons parfaites, est conservée.

$$\text{- Les notations utilisées sont: } \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbf{W}}^{EE'} = \hat{\mathbf{W}}^{E'} - \hat{\mathbf{W}}^E \\ \mathbf{W}_n^{EE'} = \mathbf{W}_n^{E'} - \mathbf{W}_n^E \end{array} \right.$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Décollement :

$$\text{Si } \underline{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{EE'} > j, \quad \text{alors } \hat{\mathbf{F}}^E = \hat{\mathbf{F}}^{E'} = 0.$$

Contact :

$$\text{Si } \underline{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{EE'} = j, \quad \text{alors } \hat{\mathbf{F}}^{E'} + \hat{\mathbf{F}}^E = 0 \text{ et } \hat{\mathbf{F}}^E \underline{\mathbf{N}} = 0;$$

Si condition de frottement :

*Adhérence* :

$$\text{Si } \|\hat{\mathbf{F}}^E\| < \mu \underline{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^E \quad \text{alors } (\hat{\mathbf{W}}^{E'} - \hat{\mathbf{W}}^E) = 0$$

*Glissement* :

$$\text{Si } \|\hat{\mathbf{F}}^E\| = \mu \underline{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^E \quad \text{alors il existe } \lambda > 0 \\ \text{tel que } (\hat{\mathbf{W}}^{E'} - \hat{\mathbf{W}}^E) = - \lambda \hat{\mathbf{F}}^E$$

Sinon :

$$\hat{\mathbf{F}}^E = \hat{\mathbf{F}}^{E'} = 0$$

A ces équations sont ajoutées les directions de recherche :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\mathbf{F}}^E - \mathbf{F}_n^E = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^E - \mathbf{W}_n^E) \\ \hat{\mathbf{F}}^{E'} - \mathbf{F}_n^{E'} = \mathbf{k}_0 (\hat{\mathbf{W}}^{E'} - \mathbf{W}_n^{E'}) \end{array} \right. \quad EE'$$

### III.2.2 Résolution

Une solution explicite est obtenue, en tout point de l'interface, en deux phases : par un calcul suivant la normale, puis dans le plan tangent.

Suivant la normale, un indicateur scalaire  $C_n$  (calculé à partir de la solution  $\underline{s}_n$  connue) permet d'obtenir la solution :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{\hat{W}}^E - j) - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) \\ &= \frac{1}{2} \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} - \frac{j}{2} - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) \\ &= \frac{1}{2} \underline{N} \cdot \underline{W}_n^{EE'} - \frac{j}{2} - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{F}_n^{E'} - \underline{F}_n^E) \text{ connu (par les directions de recherche)} \end{aligned}$$

S'il y a décollement :

$$\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} > j \text{ et } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = 0 \text{ donc } C_n > 0$$

S'il y a contact :

$$\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} = j \text{ et } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = -\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = 0 \text{ donc } C_n = 0$$

En fonction du signe de  $C_n$ , la solution suivant la normale est obtenue directement (Tab. III-1) :

Décollement : $C_n > 0$	Contact : $C_n = 0$
$\underline{\hat{F}}^E = \underline{\hat{F}}^{E'} = 0$ $\underline{\hat{W}}^E = \underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{F}_n^E$ $\underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{W}_n^{E'} - \frac{1}{k} \underline{F}_n^{E'}$	$\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = -\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = k C_n$ $\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \frac{1}{2} \underline{N} \cdot \{ (\underline{W}_n^E + \underline{W}_n^{E'} - j) - \frac{1}{k} (\underline{F}_n^E + \underline{F}_n^{E'}) \}$ $\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E + j$

Tableau III-1 : Conditions de contact

Dans le cas du contact, il faut déterminer la solution dans le plan tangent.

Un indicateur vectoriel de glissement  $\underline{G}_n$  (calculé de la même manière que  $C_n$ ) permet d'obtenir la solution :

$$\begin{aligned} \underline{G}_n &= \frac{1}{2} k \underline{\hat{W}}^{EE'} - \frac{1}{2} (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) \\ &= \frac{1}{2} k \underline{W}_n^{EE'} - \frac{1}{2} (\underline{F}_n^{E'} - \underline{F}_n^E) \text{ connu (par les directions de recherche)}. \end{aligned}$$

On pose :  $g = \mu |\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E|$ .

S'il y a adhérence :

$$\underline{\hat{W}}^{EE'} = 0 \text{ et } \|\underline{\hat{F}}^E\| = -\|\underline{\hat{F}}^{E'}\| = g \text{ donc } \|\underline{G}_n\| = g.$$

S'il y a glissement :

$$\underline{\hat{W}}^{EE'} = -\underline{\hat{F}}^E, >0 \text{ et } \|\underline{\hat{F}}^E\| = g \text{ donc } \|\underline{G}_n\| > g.$$

On obtient directement la solution dans le plan tangent en fonction de la valeur de  $\|\underline{G}_n\|$  (Tab. III-2):

Adhérence : $\ \underline{G}_n\  \leq g$	Glissement : $\ \underline{G}_n\  > g$
$\underline{\hat{F}}^E = - \underline{\hat{F}}^{E'} = \underline{G}_n$ $\underline{\hat{W}}^E = \underline{W}_n^E + \frac{1}{k} (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}_n^E)$ $\underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{\hat{W}}^E$	$\underline{\hat{F}}^E = - \underline{\hat{F}}^{E'} = g \frac{\underline{G}_n}{\ \underline{G}_n\ }$ $\underline{\hat{W}}^E = \underline{W}_n^E + \frac{1}{k} (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}_n^E)$ $\underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{W}_n^{E'} + \frac{1}{k} (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}_n^{E'})$

Tableau III-2 : Conditions de glissement

Le traitement de la liaison "contact unilatéral avec frottement" n'est donc ni plus compliqué, ni plus long que le traitement de la liaison "parfaite" ou de la liaison "contact unilatéral sans frottement".

De plus, un problème majeur rencontré par les techniques classiques de résolution des problèmes de frottement de Coulomb est d'obtenir la direction du glissement dans les modélisations tridimensionnelles. Ici, cette direction est issue du résultat de l'étape globale précédente, c'est-à-dire de la solution qui vérifie l'équilibre des sous-structures.

### III.2.3 Interprétation en terme de Lagrangien augmenté

Pour effectuer une analogie avec une méthode de résolution des problèmes de contact formulés en terme de Lagrangien augmenté, nous étudions le cas d'une seule sous-structure en contact sans frottement avec un bâti fixe rigide.

#### III.2.3.1 Contact sans frottement avec un bâti

Un domaine est soumis à des forces de volume  $\underline{f}_d$  et à des efforts surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie  $\Gamma_2$  de sa frontière, la partie  $\Gamma_1$  étant soumise à des déplacements  $\underline{U}_d$  imposés. Sur la partie complémentaire  $\Gamma_c$ , le domaine est en contact unilatéral sans frottement avec un bâti B (Fig. III-11).

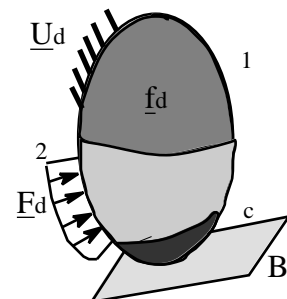


Figure III-11

Le problème est résolu par l'approche CONTRAST à l'aide d'une seule sous-structure ( $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ ) qui présente une interface de type "contact unilatéral sans frottement" avec le bâti fixe rigide B. L'étude ne porte que sur l'interface de contact et son comportement suivant la direction normale sortante  $\underline{N}$  à  $\mathcal{S}$ .

Dans ce cas simple, la résolution de l'étape locale est obtenue à partir de l'indicateur scalaire  $C_n$  qui prend la forme :

$$C_n = -\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E + \frac{1}{k} \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = -\underline{N} \cdot \underline{W}_n^E + \frac{1}{k} \underline{N} \cdot \underline{F}_n^E \quad \text{par la direction de recherche.}$$

La solution dépend du signe de  $C_n$  (Tab. III-3):

<b>Décollement</b> : $C_n > 0$ car $\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E < 0$ et $\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = 0$	<b>Contact</b> : $C_n \leq 0$ car $\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = 0$ et $\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E \leq 0$
$\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = 0$ $\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \underline{N} \cdot \underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{N} \cdot \underline{F}_n^E = -C_n$	$\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = 0$ $\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \cdot \underline{F}_n^E - k \underline{N} \cdot \underline{W}_n^E = k C_n$

Tableau III-3 : Conditions de contact avec un bâti fixe

C'est-à-dire que :

$$\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \langle -C_n \rangle_- = \langle \underline{N} \cdot \underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{N} \cdot \underline{F}_n^E \rangle_-$$

### III.2.3.2 Formulation du problème en déplacement par Lagrangien augmenté

Par une formulation en déplacement, le problème à résoudre est le problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{array}{|l} \text{Min} \quad (J(\underline{U}^E)) \\ \underline{U}^E \text{ C.A.} \\ \text{avec la condition : } \underline{N} \cdot \underline{U}^E \leq 0 \text{ sur } \mathcal{C} \end{array} \\ & \text{avec } J(\underline{U}^E) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\underline{U}^E) \mathbf{K} (\underline{U}^E)] + \int_{\mathcal{D}} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS \end{aligned}$$

où  $\underline{U}^E$  C.A. (cinématiquement admissible) signifie  $\underline{U} = \underline{U}|_{\mathcal{S}_1} = \underline{U}_d$ .



En introduisant sur  $\Gamma_c$  un champ supplémentaire :

$$\underline{N} \cdot \underline{U}^E = \hat{\varphi}^E \text{ et } \hat{\varphi}^E \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c,$$

le problème sans liaison équivalent est, avec le multiplicateur  $-F^E$ ,

$$\begin{cases} \text{Min} & (J''(\underline{U}^E, \hat{\varphi}^E, F^E)) \\ \underline{U}^E \text{ C.A., } \hat{\varphi}^E, F^E \\ \text{avec la condition : } & \hat{\varphi}^E \geq 0 \end{cases}$$

avec  $J''(\underline{U}^E, \hat{\varphi}^E, F^E) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\underline{U}^E)\mathbf{K}(\underline{U}^E)] d - \int_{\Gamma_d} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_d} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS$

$$- \int_{\Gamma_c} F^E (\underline{N} \cdot \underline{U}^E - \hat{\varphi}^E) dS$$

Le multiplicateur introduit est  $-F^E \geq 0$  de manière à ce que  $F^E$  corresponde à l'effort de contact sur l'interface introduit dans notre approche.

On obtient le Lagrangien augmenté à l'aide du facteur de pénalisation  $k > 0$ :

$$\begin{cases} \text{Min} & (J^*(\underline{U}^E, \hat{\varphi}^E, F^E)) \\ \underline{U}^E \text{ C.A., } \hat{\varphi}^E, F^E \\ \text{avec la condition : } & \hat{\varphi}^E \geq 0 \end{cases}$$

avec  $J^*(\underline{U}^E, \hat{\varphi}^E, F^E) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\underline{U}^E)\mathbf{K}(\underline{U}^E)] d - \int_{\Gamma_d} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_d} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS$

$$- \int_{\Gamma_c} F^E (\underline{N} \cdot \underline{U}^E - \hat{\varphi}^E) dS + \int_{\Gamma_c} \frac{k}{2} (\underline{N} \cdot \underline{U}^E - \hat{\varphi}^E) \cdot (\underline{N} \cdot \underline{U}^E - \hat{\varphi}^E) dS$$

### III.2.3.3 Résolution par un algorithme de type Uzawa projeté

Pour résoudre ce problème de point-selle, on utilise un algorithme de type Uzawa dans sa variante nommée ALG3 dans [FORTIN & GLOWINSKI, 1982] (le même problème est résolu dans [FRANCHOMME et al, 1989] avec la variante ALG2). Cet algorithme présente deux augmentations successives du multiplicateur :

Connaissant  $\hat{\mathbf{v}}_{n-1/2}^E$  et  $\hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_n^E$  est recherché tel que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{aligned} & -\frac{\mathbf{J}^*}{\underline{\mathbf{U}}^E}(\underline{\mathbf{u}}_n^E, \hat{\mathbf{v}}_{n-1/2}^E, \hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E) = 0, \text{ soit} \\ & \text{div } \mathbf{K}(\underline{\mathbf{u}}_n^E) + \underline{\mathbf{f}}_d = 0 \text{ dans } \Omega \\ & \mathbf{K}(\underline{\mathbf{u}}_n^E)\underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{F}}_d \text{ sur } \Gamma_2 \\ & \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{K}(\underline{\mathbf{u}}_n^E)\underline{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E - k(\underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E - \hat{\mathbf{v}}_{n-1/2}^E) \text{ sur } \Gamma_c \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Etape Globale

puis  $\mathbf{F}_n^E$  tel que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{aligned} & -\mathbf{F}_n^E = -\hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E + k \frac{\mathbf{J}^*}{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{u}}_n^E, \hat{\mathbf{v}}_{n-1/2}^E, \hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E), \text{ soit} \\ & -\mathbf{F}_n^E = -\hat{\mathbf{f}}_{n-1/2}^E + k(\underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E - \hat{\mathbf{v}}_{n-1/2}^E) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

La détermination de  $\hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E$  se fait par projection de la direction

$$-\frac{\mathbf{J}^*}{\underline{\mathbf{V}}}(\underline{\mathbf{u}}_n^E, \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E, \mathbf{F}_n^E) = 0$$

sur la condition de contact  $\hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E \leq 0$ . L'algorithme est donc qualifié d'algorithme d'UZAWA "projeté".

$\hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E$  est donc obtenu tel que :

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{aligned} & -\frac{\mathbf{J}^*}{\underline{\mathbf{V}}}(\underline{\mathbf{u}}_n^E, \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E, \mathbf{F}_n^E) = 0 \text{ et} \\ & \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E \leq 0, \text{ soit} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E = \left( \frac{-1}{k} \mathbf{F}_n^E + \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E \right) \text{ et } \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E \leq 0, \text{ soit}$$

$$\left| \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E = \left\langle \frac{-1}{k} \mathbf{F}_n^E + \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E \right\rangle_- \right.$$

Etape Locale

puis  $\hat{\mathbf{f}}_{n+1/2}^E$  tel que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{aligned} & -\hat{\mathbf{f}}_{n+1/2}^E = -\mathbf{F}_n^E + k \frac{\mathbf{J}^*}{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{u}}_n^E, \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E, \mathbf{F}_n^E), \text{ soit} \\ & -\hat{\mathbf{f}}_{n+1/2}^E = -\mathbf{F}_n^E + k(\underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E - \hat{\mathbf{v}}_{n+1/2}^E) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

En appelant  $\mathbf{V}_n^E = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^E$ , les deux étapes d'une itération de l'approche CONTRAST apparaissent. Les deux approches coïncident donc dans ce cas particulier.

Remarques :

- De même que pour l'approche CONTRAST, cet algorithme classique présente une dépendance de la vitesse de convergence au facteur de pénalisation  $k$ .
- Une analogie identique peut être écrite dans le cas du contact unilatéral sans frottement entre deux sous-structures déformables.

- Dans l'analogie précédente, le problème de contact est résolu en utilisant (par souci de simplification) un comportement d'interface de type "contact unilatéral avec un bâti" qui ne fait pas apparaître "d'extérieur" (Cf. §II.3). Dans le logiciel CONTRAST, ce problème est résolu par l'introduction d'une interface de type "contact unilatéral" (cf. §III.2) entre la sous-structure et un "extérieur", sur lequel sont imposées des conditions de déplacement nul à l'étape globale. Ceci conduit à un algorithme légèrement différent de celui présenté ci-dessus.

### III.3 Validation du traitement des non-linéarités de contact

#### III.3.1 Sensibilité de l'algorithme au passage adhérence-glissement

Pour évaluer la capacité de l'algorithme à détecter le passage de l'adhérence au glissement, un exemple simple a été réalisé. Il est caractérisé par des conditions homogènes sur la zone de contact et il n'admet pas de solution dans le cas du glissement.

Il s'agit de deux sous-structures, en forme de "coin", en contact unilatéral avec frottement entre leurs faces inclinées (Fig. III-12).

Les caractéristiques de la modélisation sont les suivantes :

Dimensions : 50x20x30 mm.

Matériau :  $E = 200\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Paramètre de direction de recherche  $k = 5000$ .

Maillage : 500 éléments cubiques à 8 nœuds, 2376 degrés de liberté.

Résolution : 41s CPU pour 300 itérations : (station de travail HP735).

Le coefficient de frottement étant de 0,1 (angle de frottement  $5,711^\circ$ ), on étudie la solution en fonction de l'angle d'inclinaison de la surface de contact. Lorsque cet angle est supérieur à l'angle de frottement, on passe en mode de glissement, il n'y a plus de solution : l'algorithme ne converge pas.

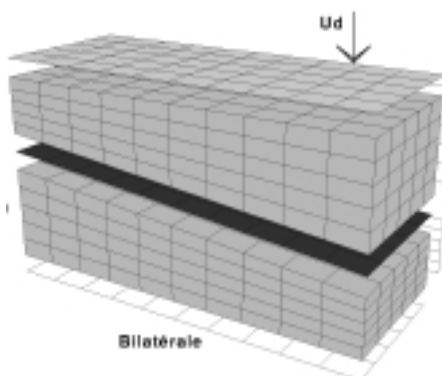


Figure III-12 : Problème.

Coefficient de frottement 0,1

Angle de frottement  $5,711^\circ$

Angle d'inclinaison

5,705      5,716

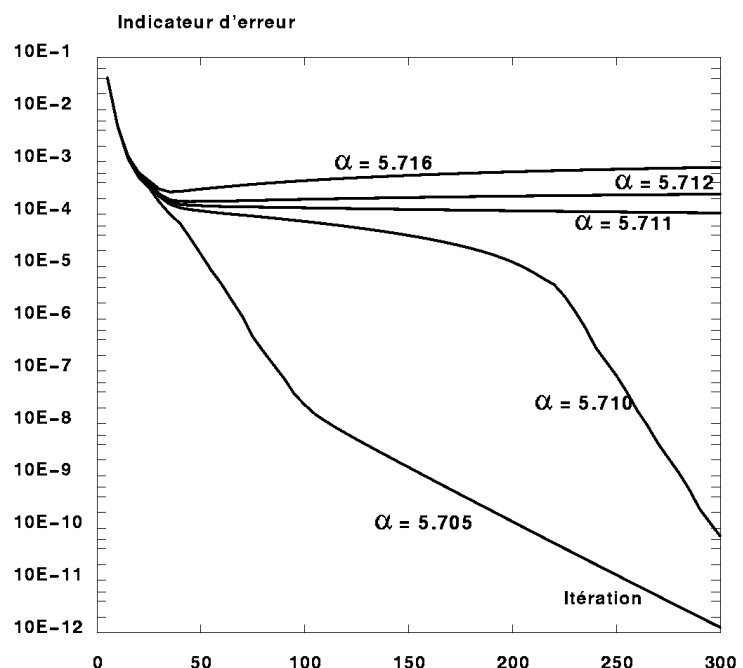


Figure III-13 : Indicateur d'erreur au cours des itérations en fonction de l'angle d'inclinaison.

Dès lors que  $\mu$  devient supérieur à 5,711 ( $\mu = 5,712$ ), l'indicateur d'erreur ne diminue pas au cours des itérations : l'algorithme ne converge pas (Fig. III-13). On a donc une très bonne sensibilité au passage adhérence-glissement.

### III.3.2 Exemple test - Lopin en compression biaxiale

Cet exemple est couramment étudié pour valider des procédures de traitement des contacts unilatéraux [RAOUS et al, 1988 ; FENG, 1995]. Il a été proposé comme cas test par le GRECO "Grandes déformations et Endommagement" en 1988. Il s'agit d'un lopin élastique en compression biaxiale et en contact unilatéral avec frottement ( $\mu=1$ ) sur l'une de ses faces (Fig. III-14). Ce cas test, étudié en déformation plane, présente la particularité de développer, sur une même surface de contact, une zone d'adhérence, une zone de glissement et une zone de décollement (Fig. III-14 et III-15).

La moitié du lopin est modélisée à l'aide de  $32 \times 16 = 512$  éléments quadrilatères à 4 nœuds. Une comparaison est effectuée avec le code de calcul ABAQUS [PAWTUCKET, 1994] sur la répartition d'efforts normaux et tangentiels le long de la ligne de contact. En ce qui concerne notre étude, une seule sous-structure est utilisée.

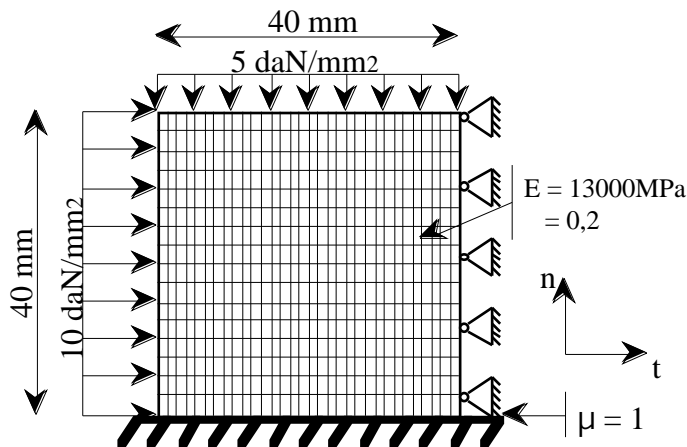


Figure III-14 : Problème et maillage

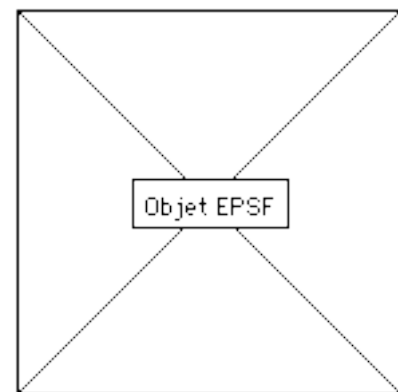


Figure III-15 : Déformée (x300)

On retrouve les résultats connus, aussi bien en terme de forces généralisées de réactions qu'en terme de longueur des trois zones caractéristiques (Fig. III-16):

Décollement : 3,75mm - 3 nœuds  
 Glissement : 18,75mm - 15 nœuds  
 Adhérence : 17,5mm - 15 nœuds

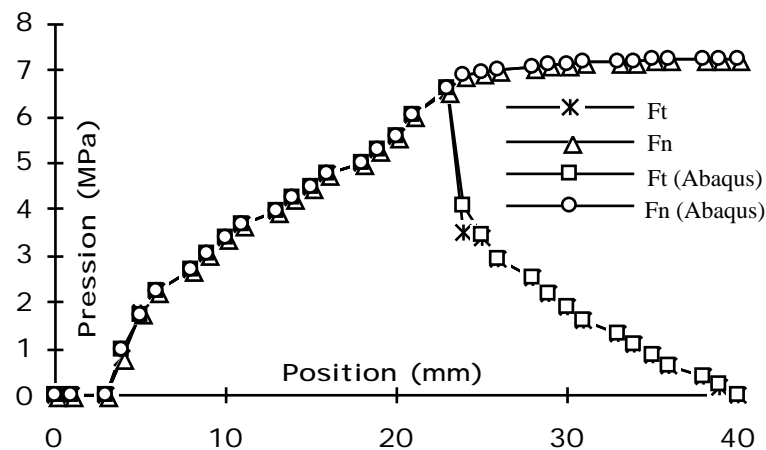


Figure III-16 : Efforts normaux et tangentiels.

Ces résultats sont identiques à ceux donnés par [RAOUS et al, 1988] et plus récemment par [FENG, 1995]. La même comparaison a été effectuée avec le code de calcul CASTEM 2000 (version 1996) qui traite les conditions de contact et de frottement en 2D par multiplicateurs de Lagrange [COMBESCURE et al, 1988].

La figure III-17 présente l'influence du nombre d'éléments sur la zone de contact sur la répartition des efforts normaux et tangentiels. Dans tous les cas, pour 8x8, 16x8, 32x8, 64x8 et 128x8 éléments, la relation entre l'effort normal et l'effort tangential est bien vérifiée, dans la zone de glissement. Par contre, un nombre important d'éléments est nécessaire pour bien représenter les différentes zones.

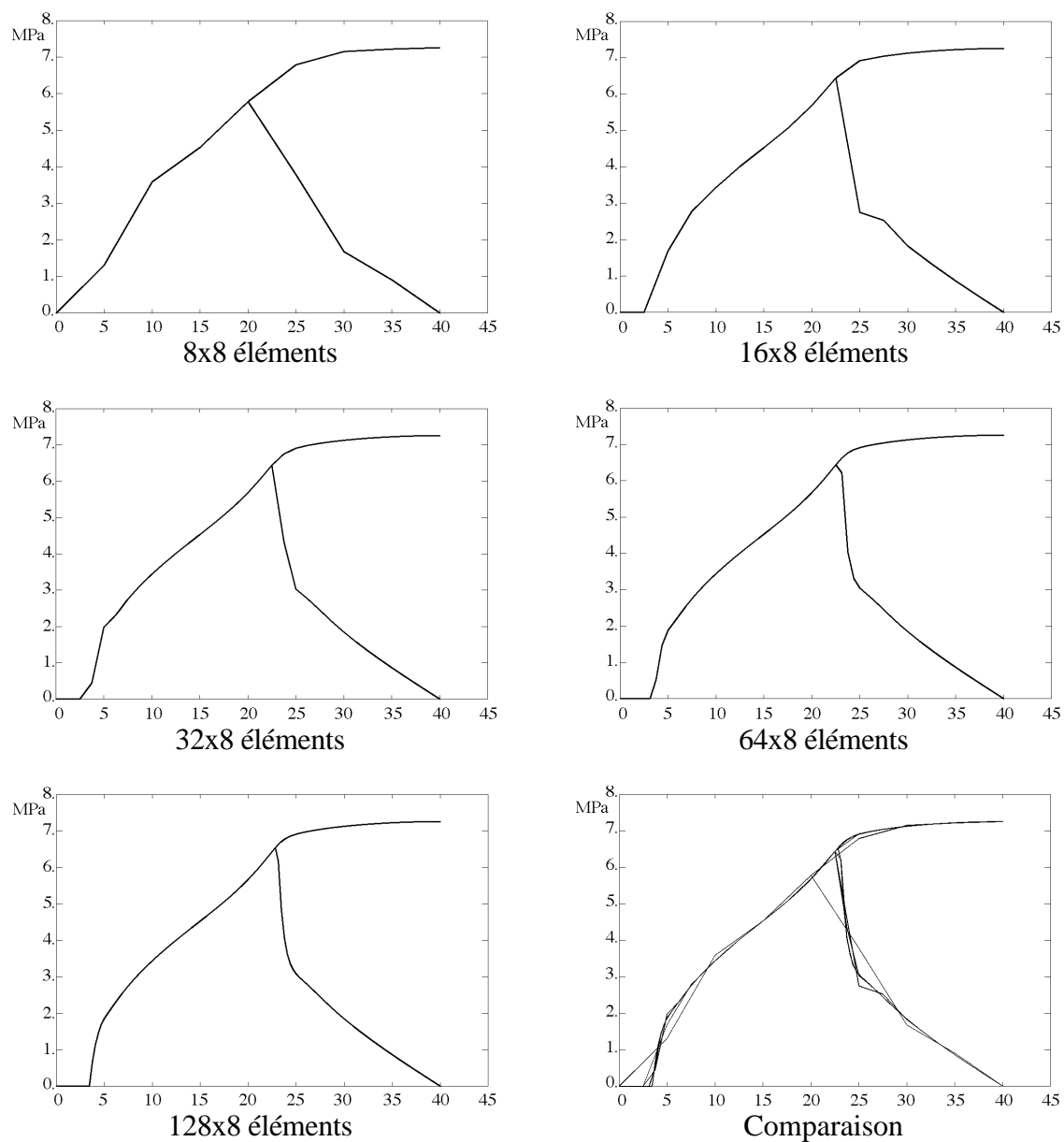


Figure III-17 : Influence de la taille des éléments sur la répartition des efforts

### III.4 Non-linéarité de type "joint élastomère unilatéral"

Nous cherchons à modéliser simplement le comportement de liaisons pour lesquelles un élément joint (assurant une fonction d'étanchéité) est interposé entre deux pièces en contact. Pour cela, la prise en compte, par un comportement d'interface, des non-linéarités de type "joint élastomère unilatéral" est présentée ici.

#### III.4.1 Joint élastomère à comportement non-linéaire unilatéral

On considère le comportement en compression d'un lopin d'élastomère modélisé de la façon suivante (Fig. III-18):

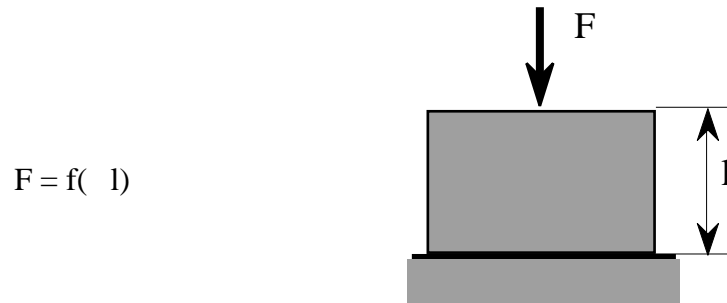


Figure III-18 : Lopin d'élastomère

Pour modéliser le comportement unilatéral de ce joint on considère que :

<u>Décollement</u> :	Si $l = 0$ ,	alors $F = 0$
<u>Ecrasement</u> :	Si $l < 0$ ,	alors $F = f(l)$

Pour éviter d'éventuels problèmes de stabilité sur l'asymptote à l'écrasement maximal, on peut écrire :

<u>Décollement</u> :	Si $l = 0$ ,	alors $F = 0$
<u>Ecrasement</u> :	Si $L_{\max} < l < 0$ ,	alors $F = f(l)$
<u>Ecrasement maxi</u> :	Si $l = -L_{\max}$ ,	alors $F = f(-L_{\max})$

#### III.4.2 Interface "joint élastomère non-linéaire"

On considère deux sous-structures E et E' entre lesquelles existe une interface de type "Joint unilatéral non-linéaire". On s'intéresse, ici, uniquement au comportement suivant la normale  $\underline{N}$  à l'interface. En utilisant les notations définies précédemment, les équations qui décrivent le comportement de ce type d'interface (et qui sont à résoudre à l'étape locale) sont :

$$\text{En utilisant la notation : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{W}}^{EE'} = \hat{\underline{W}}^{E'} - \hat{\underline{W}}^E \\ \underline{W}_n^{EE'} = \underline{W}_n^{E'} - \underline{W}_n^E \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
\text{Décollement :} & \quad \text{Si } \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} > 0, & \text{alors } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = 0 \\
\text{Ecrasement :} & \quad \text{Si } V_e < \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} \leq 0, & \text{alors } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = -\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} \text{ et } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = f(\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'}) \\
\text{Ecrasement maxi :} & \quad \text{Si } \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} = V_e, & \text{alors } \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'}
\end{aligned}$$

Où  $V_e$  définit l'écrasement maximal du joint.

Les deux directions de recherche doivent aussi être vérifiées.

$$\begin{cases} \underline{\hat{F}}^E - \underline{F}_n^E = \mathbf{k}_0 (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}_n^E) \\ \underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}_n^{E'} = \mathbf{k}_0 (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}_n^{E'}) \end{cases}$$

On se place dans le cas où  $\mathbf{k}_0 = k \cdot \mathbf{I}_d$ . Avec  $\mathbf{I}_d$  l'opérateur identité et  $k$  un scalaire positif.

On considère la quantité scalaire  $C_n$  qui donne l'état (décollement ou écrasement) à la fin de l'étape globale, en tout point de l'interface et suivant la normale :

$$\text{Soit } C_n = \frac{1}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{\hat{W}}^E) - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) = \frac{1}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{W}}^{EE'}) - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E)$$

Cette quantité est définie sur des quantités inconnues, mais calculable par l'intermédiaire des directions de recherche :

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{W}}^{EE'}) - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) = \frac{1}{2} \underline{N} \cdot (\underline{W}_n^{EE'}) - \frac{1}{2k} \underline{N} \cdot (\underline{F}_n^{E'} - \underline{F}_n^E) \\
\text{Décollement :} & \quad > 0 & \quad = 0 & \quad \parallel & \quad C_n > 0 \\
\text{Ecrasement :} & \quad \frac{1}{2} V_e < 0 & \quad \frac{1}{k} F_e < 0 & \quad \parallel & \quad \frac{1}{2} V_e + \frac{1}{k} F_e < C_n \leq 0 \\
\text{Ecrasement maxi :} & \quad \frac{1}{2} V_e & \quad \frac{1}{k} F_e & \quad \parallel & \quad C_n = \frac{1}{2} V_e + \frac{1}{k} F_e
\end{aligned}$$

L'état étant déterminé, la résolution se fait simplement :

Si décollement :

$$\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \underline{N} \cdot (\underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{F}_n^E) \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{N} \cdot (\underline{W}_n^{E'} - \frac{1}{k} \underline{F}_n^{E'}) \end{cases}$$

Si écrasement :

$$\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = -\underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = f(\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'})$$

$$\begin{aligned}
\text{alors} \quad k \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} + 2f(\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'}) + \underline{N} \cdot ((\underline{F}_n^{E'} - \underline{F}_n^E) - k(\underline{W}_n^{EE'})) &= 0 \\
\rightarrow \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} &
\end{aligned}$$

Résolution d'un problème non-linéaire en chaque point

$$\text{puis} \quad \left| \begin{array}{l} \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = - \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = f(\underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'}) \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \underline{N} \cdot \underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{N} \cdot (\underline{F}_n^E - \underline{\hat{F}}^E) \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E + \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} \end{array} \right.$$

Si écrasement maximal :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = - \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = - > \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} = V_e \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^E = - \underline{N} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = f(V_e) \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E = \underline{N} \cdot \underline{W}_n^E - \frac{1}{k} \underline{N} \cdot (\underline{F}_n^E - \underline{\hat{F}}^E) \\ \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{E'} = \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^E + \underline{N} \cdot \underline{\hat{W}}^{EE'} \end{array} \right.$$

### III.4.3 Exemple de comportement

Pour un joint de type caoutchouc, on prend  $f$  sous la forme (Fig. III-19):

$$f(\delta) = A \frac{1}{h_0 - \delta}$$

où  $h_0$  est l'épaisseur du joint et  $A$  sa raideur.

Les données sont  $h_0$ ,  $A$  et  $V_e = x\% (V_e)$  définies en tout point de l'interface.

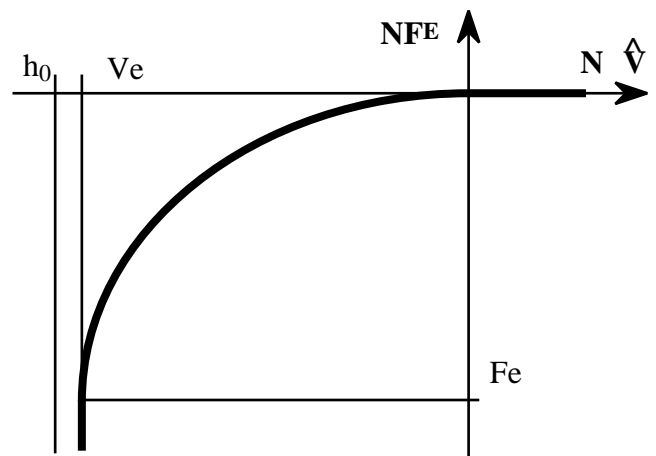


Figure III-19 : Comportement

### III.4.4 Exemple simple

Cet exemple très simple présente le comportement d'un assemblage incluant un joint élastomère. Deux portions de barreau, entre lesquels est placé un joint, sont soumises à un chargement en compression (Fig. III-20).

Les caractéristiques de la modélisation sont les suivantes :

Dimensions : 20x10x10 mm.

Chargement dans la direction  $x$  et symétries dans les 2 autres directions.

Matériau :  $E = 200\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Caractéristiques du joint :  $ep. = 1\text{mm}$ ,  $A=10\text{ MPa}$ ,  $V_e = 99\%$ .

Paramètre de direction de recherche  $k = 5000$ .

Maillage : 2 éléments cubiques à 20 nœuds, 120 degrés de liberté.

Résolution : 0,6s CPU pour 50 itérations (station de travail HP735).

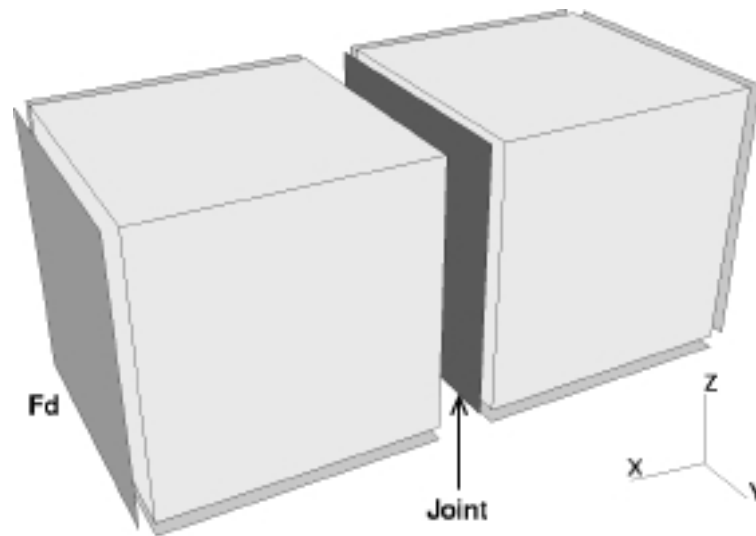


Figure III-20 : Joint en compression

La figure III-21 présente l'évolution du déplacement d'un point de l'extrémité chargée du barreau lorsque l'effort de compression appliqué varie. Cette évolution est obtenue par différents calculs (avec les mêmes matrices de rigidité factorisées) pour chacune des charges appliquées. On retrouve pour cette structure le comportement du joint présenté au paragraphe III.4.3.

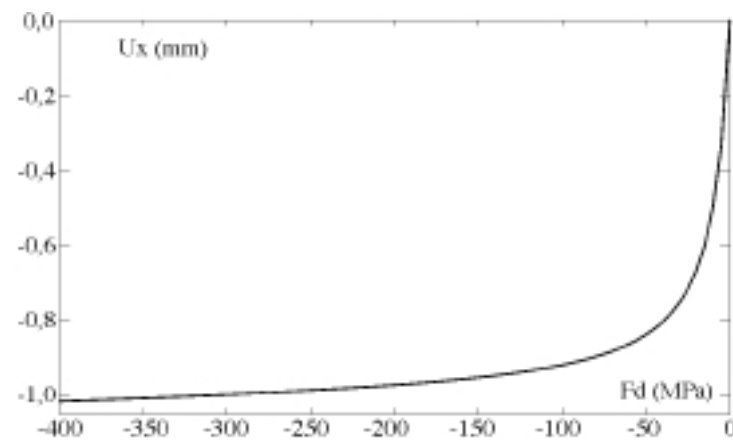


Figure III-21 : Comportement de la structure

### III.5 Bilan sur les modèles d'interface

Le comportement des interfaces s'écrit sous la forme d'une relation :

$$\mathbf{R}(\underline{\mathbf{W}}^E, (\underline{\mathbf{F}}^E, \underline{\mathbf{W}}^{E'}, \underline{\mathbf{F}}^{E'}) = 0$$

De multiples modèles de comportement d'interface peuvent être envisagés. La figure III-18 présente ceux implantés dans le logiciel CONTRAST. Les différents comportements suivant la normale et dans le plan tangent en un point de l'interface peuvent être associés pour donner des types de liaison : parfaite, glissière, contact unilatéral avec ou sans frottement...

Dans ce tableau, on utilise, pour simplifier, les notations suivantes :

$\underline{\mathbf{N}}$ ,	normale orientée de $E$ vers $E'$ ,
$\mathbf{V}_n = \underline{\mathbf{N}} \cdot (\underline{\mathbf{W}}^{E'} - \underline{\mathbf{W}}^E)$ ,	le saut de déplacement normal,
$\mathbf{V}_t = \ (\underline{\mathbf{W}}^{E'} - \underline{\mathbf{W}}^E) - \mathbf{V}_n \underline{\mathbf{N}}\ $ ,	la norme du saut de déplacement tangentiel,
$\mathbf{F}_n = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{E'} = - \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^E$ ,	l'effort normal,
$\mathbf{F}_t = \  \underline{\mathbf{F}}^E - \mathbf{F}_n \underline{\mathbf{N}} \ $ ,	la norme de l'effort tangentiel.

Les interfaces peuvent modéliser des situations plus complexes que celles de simples liaisons entre deux éléments. Elles aussi sont utilisées pour modéliser de façon précise des comportements d'éléments technologiques. Comme nous l'avons montré au paragraphe III.4, un comportement d'interface peut prendre en compte la présence d'un joint entre deux pièces assemblées. La précontrainte d'une vis, d'un rivet ou d'un boulon est imposée au travers du comportement d'une interface entre le corps et la tête. L'effet du comportement non-linéaire d'un boulon fortement précontraint, par exemple, peut être pris en compte par ses interfaces de liaison avec les autres éléments, alors que son matériau est considéré comme élastique dans le calcul.

De plus, lorsque l'étude ne porte pas de façon précise sur un élément technologique de liaison, la présence de celui-ci peut être simulée au moyen d'un comportement d'interface, sans qu'il ne soit modélisé réellement. Un exemple de boulon précontraint décrit par une interface est présenté dans [BLANZÉ et al, 1995] pour des problèmes 2D axisymétriques.

Ces exemples ne sont pas limitatifs et l'utilisateur est libre d'envisager de multiples autres situations. De plus, insistons sur le fait que l'introduction d'un nouveau modèle de comportement d'interface n'entraîne que l'ajout d'équations de l'étape locale et donc ne représente qu'une modification mineure de la base de données et du code CONTRAST.

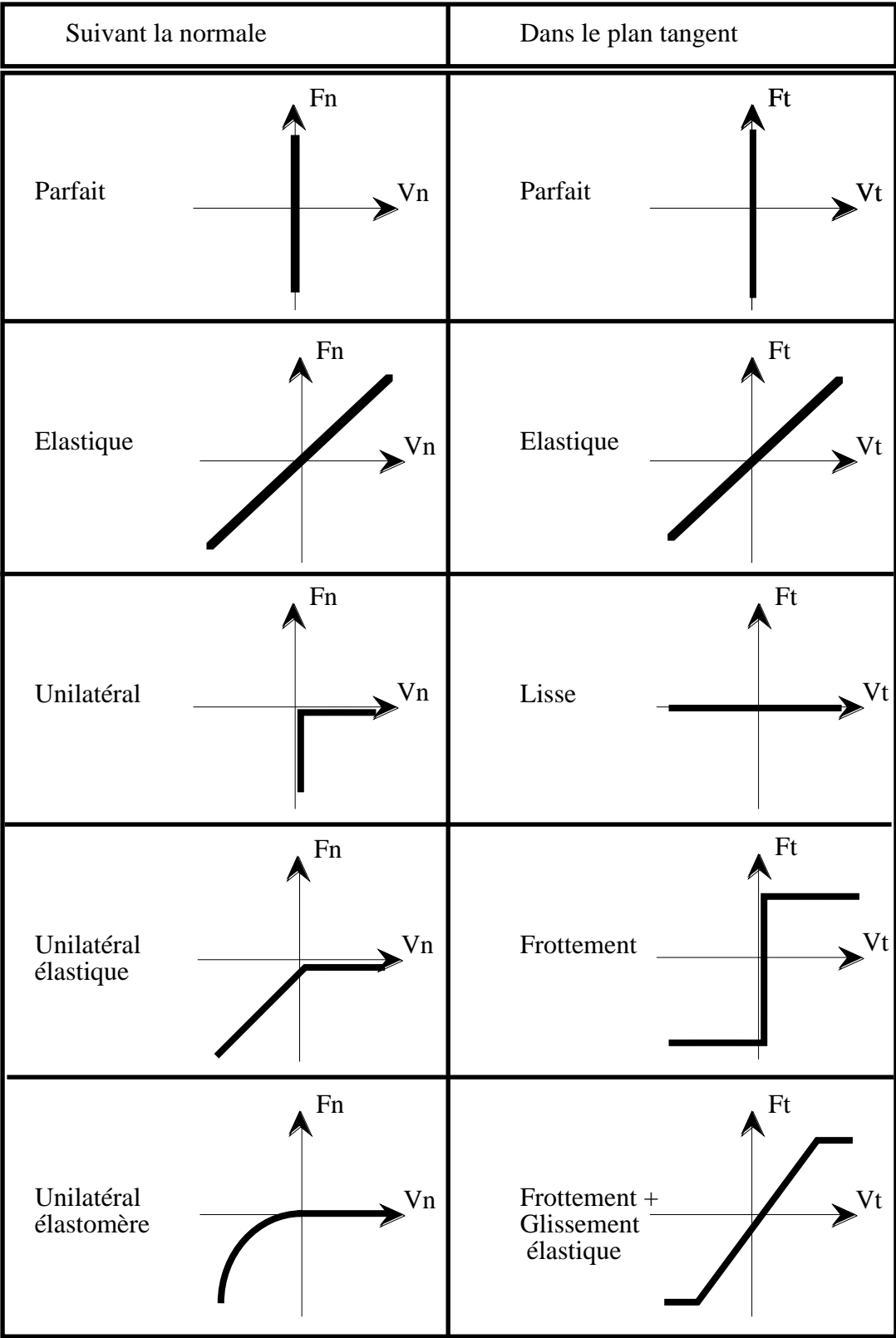


Figure III-18 : Comportement des interfaces

# **CHAPITRE IV :**

## **EXEMPLES INDUSTRIELS D'ASSEMBLAGES**

### **DE STRUCTURES TRIDIMENSIONNELLES :**

#### **FONCTIONNEMENT ET PERFORMANCES**

#### **DU LOGICIEL CONTRAST.**

Ce chapitre présente des simulations d'assemblages de structures tridimensionnelles complexes menées à l'aide du logiciel prototype CONTRAST. Ces problèmes concernent des assemblages de type "bride" par vis, boulons et rivets précontraints, étudiés en collaboration avec AÉROSPATIALE. Le but de ces simulations est de détecter les modes de transmission des efforts (adhérence ou cisaillement des éléments de liaison) en fonction du niveau des chargements appliqués sur ces brides. De plus, la ruine de telles structures étant souvent due à la défaillance des éléments de liaison, nous nous intéressons aux niveaux de contraintes atteints dans les vis, les boulons ou les rivets.

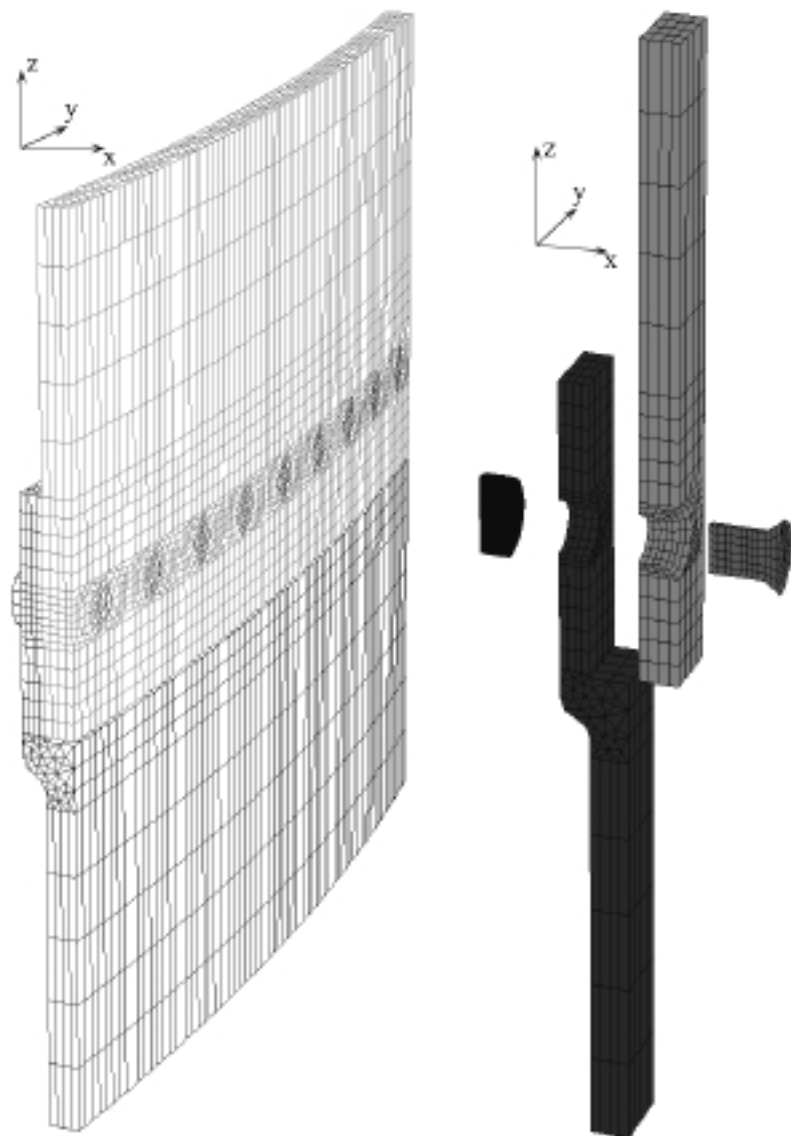
Des modèles utilisant de grands nombres de degrés de liberté sont nécessaires pour modéliser correctement ces problèmes d'assemblage. La souplesse et la modularité de modélisation apportées par l'approche CONTRAST prennent ici toute leur importance. La mise au point des simulations est réalisée sur des maillages initiaux grossiers et le calcul final est mené sur des maillages fins, de manière à obtenir un maximum de précision sur les résultats. Les études de l'effet des niveaux de chargement sont réalisées en utilisant plusieurs cas de charge.

De plus, ces exemples illustrent le comportement de l'approche CONTRAST face à des problèmes de grande taille, comportant de nombreuses zones de contact unilatéral avec frottement. Deux comparaisons avec le code de calcul industriel ABAQUS présentent les gains apportés par l'approche en terme de simplicité de gestion des données et de réduction des encombrements et des temps de calcul.

## IV.1 Bride avec vis radiales (comportement)

### IV.1.1 Modélisation

Il s'agit d'un exemple de bride réalisant la liaison entre deux cylindres de diamètre approximatif 2300 mm. La liaison complète est réalisée par l'intermédiaire de vis à têtes fraisées implantées radialement. L'assemblage est soumis à un flux axial à une de ses extrémités et à un déplacement axial imposé nul à l'autre. La figure VI-1 présente une portion de l'assemblage.



Assemblage  
Figure IV-1 : Bride vis radiales : assemblage. Décomposition

Caractéristiques de l'assemblage :

- 180 vis Ø10 mm précontraints 450Mpa (alésages Ø10.9 mm).
- Cylindres Ø extérieur 2300 mm, ép. équivalente 8 mm :  $E = 70000 \text{ Mpa}$ ,  $\nu = 0,3$ .
- Coefficient de frottement 0,15 pour tous les contacts.

Pour des raisons de symétrie, on étudie seulement une portion de l'assemblage. La figure IV-1 présente la décomposition qui a été réalisée. La précontrainte de 450 MPa des vis est imposée par l'intermédiaire de l'interface entre la vis et sa tête.

Caractéristiques des calculs :

Décomposition : 4 sous-structures et 13 interfaces.

Maillage : 1464 éléments (944 cubes et 520 prismes).

Calcul initial (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- 5898 degrés de liberté.

- Résolution : Initialisation 11,5s CPU (station de travail HP735)  
300 itérations 87s CPU

Calcul final (cubes à 20 nœuds et prismes à 15 nœuds) :

- 21903 degrés de liberté.

- Résolution : Initialisation 152s CPU (station de travail HP735)  
300 itérations 906s CPU



### IV.1.2 Transmission des efforts par adhérence

On étudie deux cas de chargement différents (deux valeurs du flux : 150 puis 380 kN/m) tels que pour l'un, on ait transmission des efforts par adhérence et pour l'autre, par obstacle (cisaillement des vis).

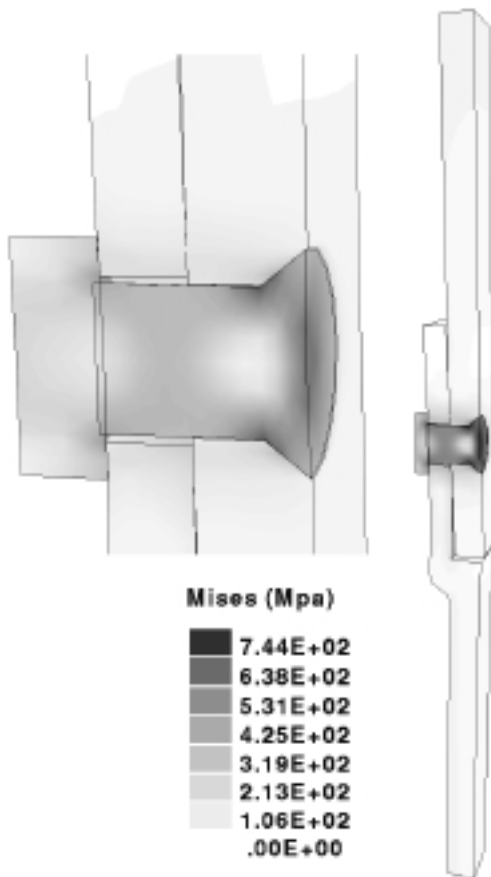


Figure IV-2 : Contrainte équivalente pour une transmission des efforts par adhérence.

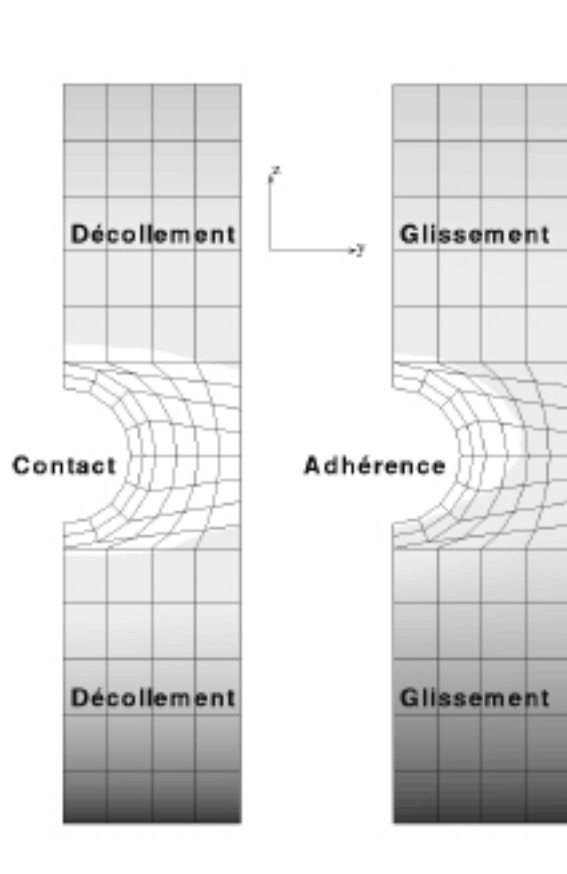


Figure IV-3 : Décollement et glissement axial sur la zone de contact entre les deux cylindres.

Pour le premier cas de chargement (flux de 150 kN/m), on obtient les résultats en contrainte équivalente de Mises présentés figure IV-2. La figure IV-3 montre le décollement et le glissement axial sur la zone de contact. On voit ainsi la zone d'adhérence par l'intermédiaire de laquelle les efforts sont transmis.

### IV.1.3 Transmission des efforts par obstacle (cisaillement des vis)

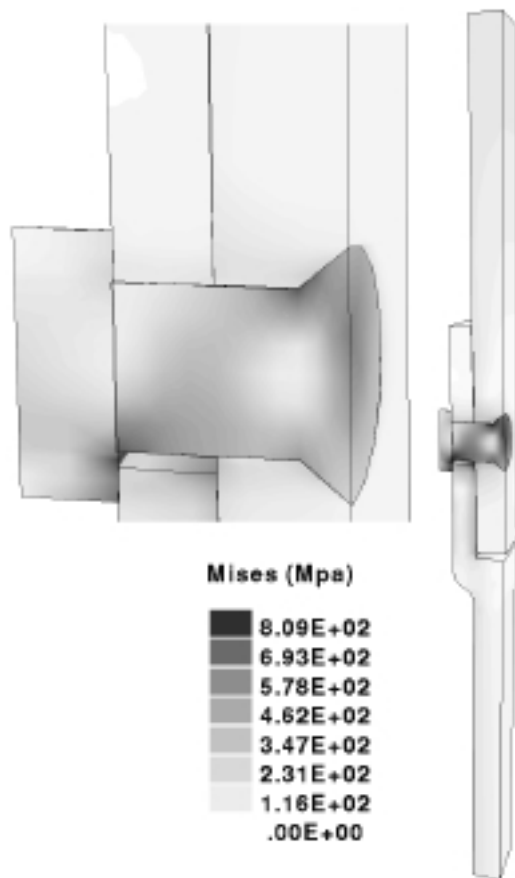


Figure IV-4 : Contrainte équivalente pour une transmission des efforts par obstacle.

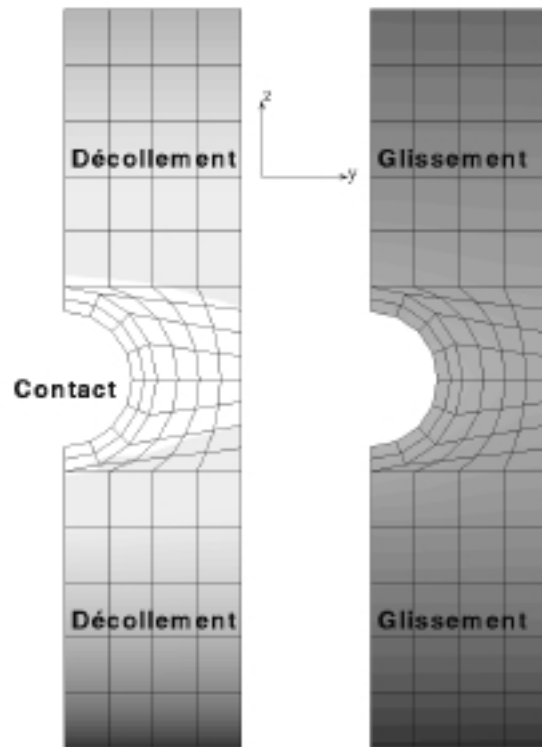


Figure IV-5 : Décollement et glissement axial sur la zone de contact entre les deux cylindres

Pour le deuxième cas de chargement (flux de 380 kN/m), on obtient les résultats en contrainte équivalente de Mises présentés figure IV-4. La figure IV-5 montre le décollement et le glissement axial sur la zone de contact. On voit ainsi qu'il y a eu glissement sur toute la surface de contact. Les vis sont venues en contact avec leur logement.

#### IV.1.4 Comportement itératif particulier

Dans le cas d'une transmission des efforts par adhérence, on montre la manière dont l'algorithme converge vers la solution, lorsque le paramètre de direction de recherche  $k$  est mal adapté.

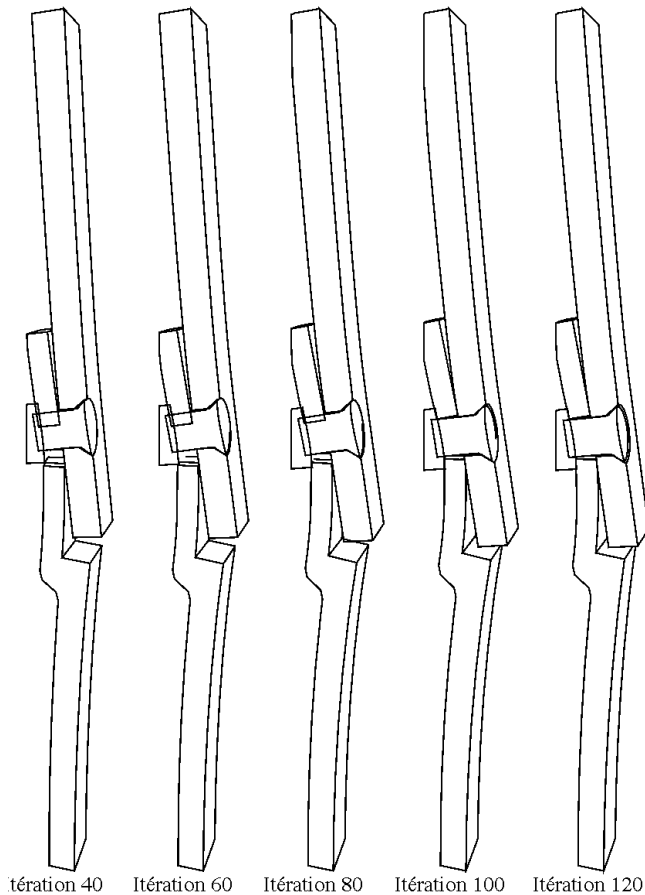


Figure IV-6 : Evolution de la déformée au cours des itérations ( $k$  faible).

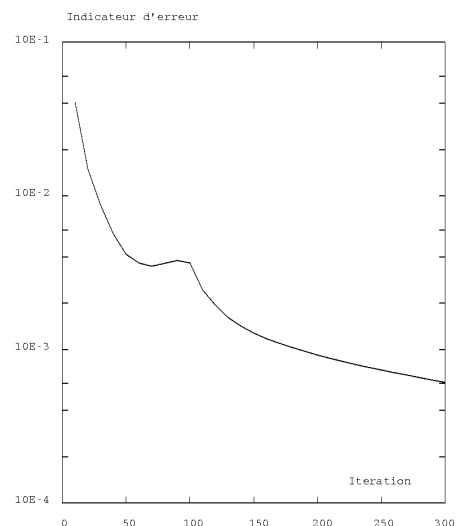


Figure IV-7 : Indicateur d'erreur

Pour des valeurs de  $k$  trop faibles, l'algorithme converge d'abord vers la solution en glissement sur toute la l'interface puis vers la solution en adhérence. Pour l'exemple étudié (Fig. IV-6), la solution en adhérence n'est obtenue qu'à partir de la centième itération. La figure IV-7 montre l'indicateur d'erreur qui croît juste avant le changement automatique de solution puis décroît.

## IV.2 Bride avec vis radiales (étude du chargement)

### IV.2.1 Modélisation

Il s'agit du même exemple de bride, mais la géométrie a été modifiée (Fig. IV-8) de façon à prendre en compte des actions entraînant un moment dans l'assemblage. Les efforts sont donc appliqués sur un appui interne au cylindre. L'assemblage est soumis à un flux axial sur cet appui et à un déplacement axial imposé nul à l'autre extrémité. La figure IV-8 présente une portion de l'assemblage.

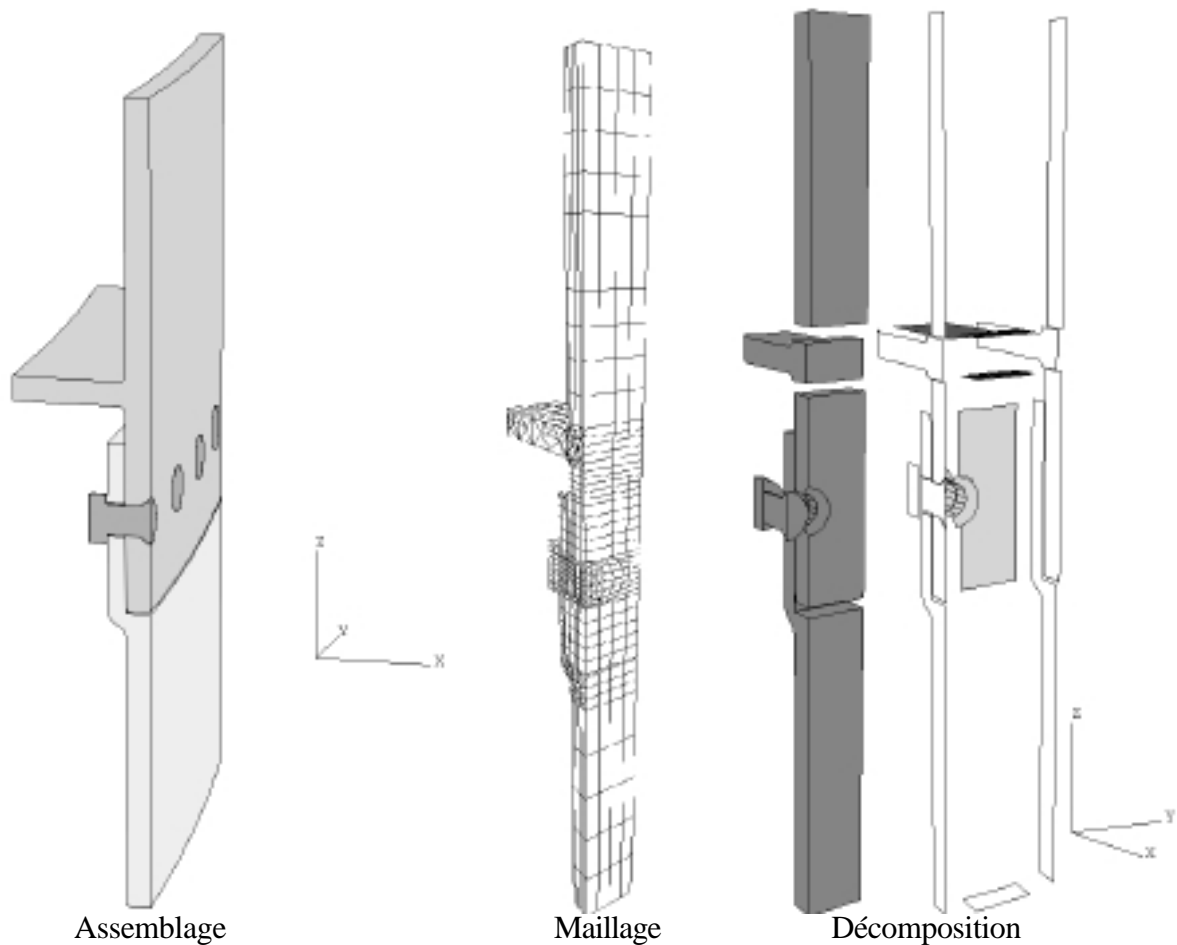


Figure IV-8 : Bride vis radiales.

Caractéristiques de l'assemblage :

- 180 vis Ø10 mm précontraintes 450Mpa (alésages Ø10.9 mm).
- Cylindres Ø extérieur 2300 mm, ép. équivalente 8 mm :  $E = 70000 \text{ Mpa}$ ,  $\nu = 0,3$ .
- Coefficient de frottement 0,2 sur tous les contacts.
- Appui situé à 40 mm au dessus de la ligne des vis.

Pour les mêmes raisons de symétrie, on étudie seulement une portion de l'assemblage. La figure IV-8 présente la décomposition qui a été réalisée.

Caractéristiques des calculs :

Décomposition : 6 sous-structures et 22 interfaces.

Maillage : 1944 éléments (1104 cubes et 840 prismes).

Calcul initial (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- 7578 degrés de liberté.

- Résolution : Initialisation : 14s CPU (station de travail HP735)

300 itérations : 96s CPU

Calcul final (cubes à 20 nœuds et prismes à 15 nœuds) :

- 28377 degrés de liberté.

- Résolution : Initialisation : 178s CPU (station de travail HP735)

300 itérations : 1242s CPU

#### IV.2.2 *Chargement axial*

Pour étudier le comportement de l'assemblage, on fait varier le flux axial appliqué sur l'appui entre -270 et 270 N/mm ainsi que la position du point d'application sur l'appui de façon à modifier le moment induit. La figure IV-9 montre les allures des déformées pour deux flux de 100 N/mm et -100 N/mm appliqués tout les deux à 14,5 mm de la ligne neutre des coques.

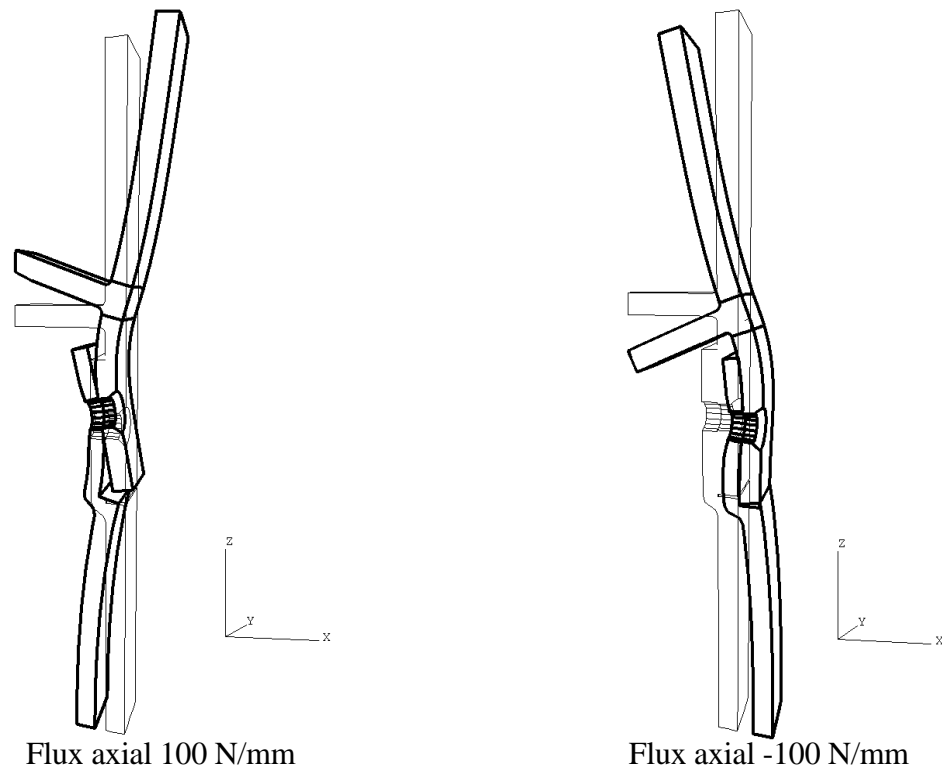
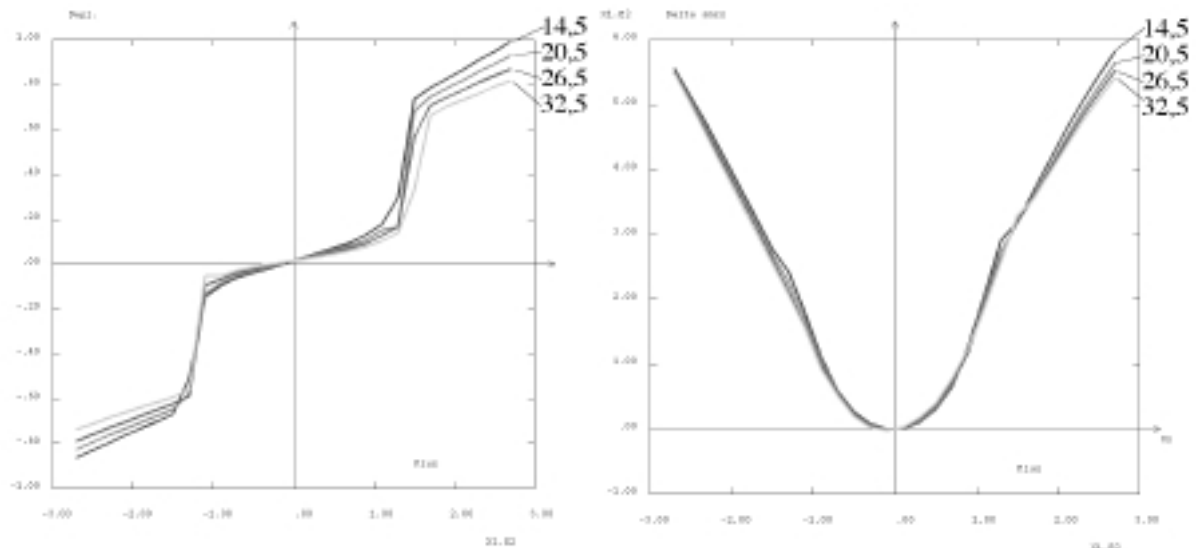


Figure IV-9 : Déformées (x50).

Pour quatre positions différentes du point d'application (14.5, 20.5, 26.5 et 32.5 mm de la ligne neutre des coques), la figure IV-10 donne l'évolution du déplacement axial pour un point situé dans la section supérieure de l'assemblage. Le saut visible sur ces courbes correspond au passage d'une transmission des efforts par adhérence à une transmission des efforts par cisaillement des vis. La figure IV-10 présente aussi l'évolution de l'augmentation par rapport au serrage initial de la contrainte axiale maximale dans le corps des vis.

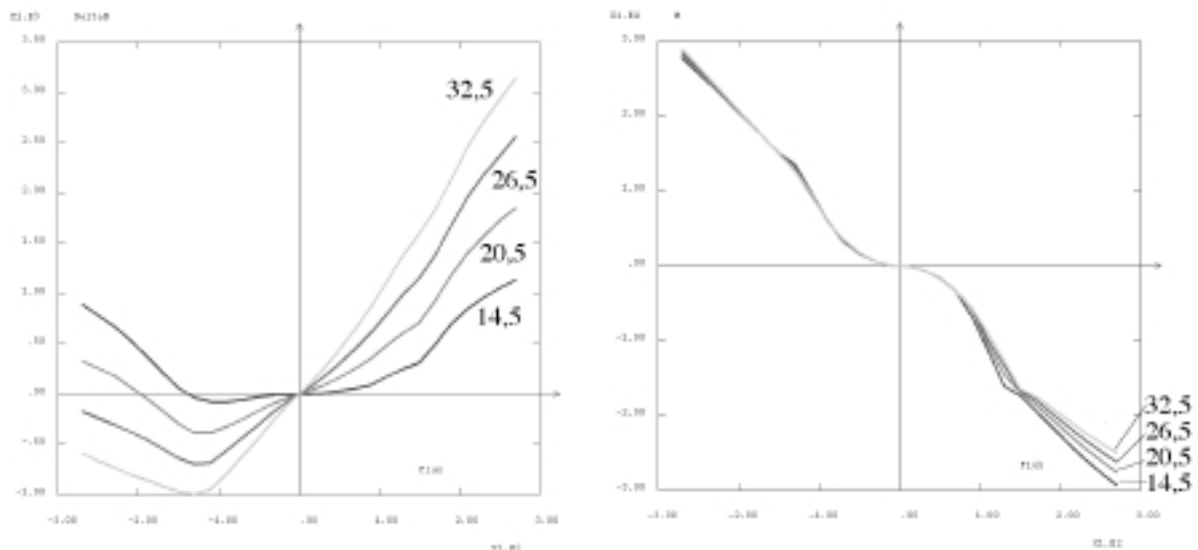


Déplacement d'un point de  
la section supérieure

Accroissement de contrainte axiale  
dans les vis

Figure IV-10 : Evolution pour un flux axial variant de -270 à 270 N/mm.

La figure IV-11 présente l'évolution de l'effort axial et du moment de flexion dans les vis dans les mêmes cas de chargement que précédemment. On peut remarquer que le moment de flexion reste faible lorsque les efforts sont transmis par adhérence et que dans le cas des flux négatifs, l'effort axial diminue lorsque les efforts sont transmis par cisaillement des vis. Ceci étant dû au fait que les deux cylindres sont plaqués l'un contre l'autre dans ce cas de chargement (voir déformées).

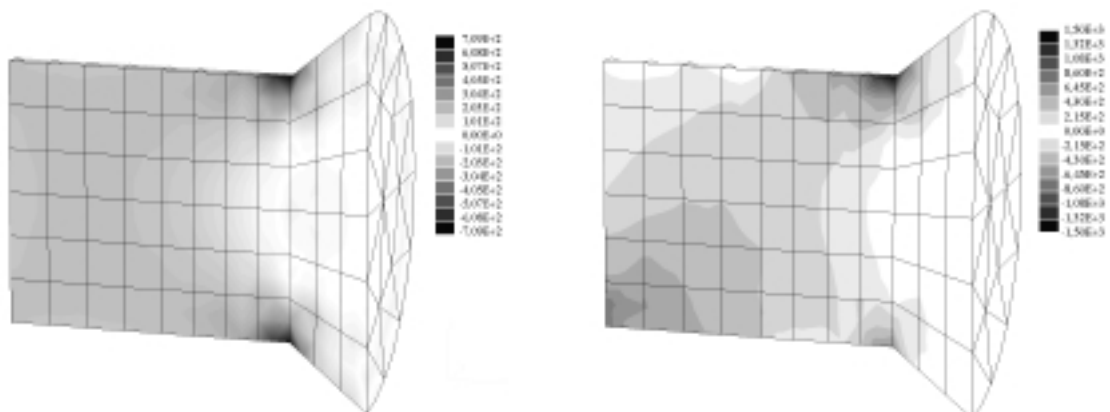


Accroissement d'effort axial dans la vis

Moment de flexion dans la vis

Figure IV-11 : Evolution pour un flux axial variant de -270 à 270 N/mm.

La figure IV-12 présente les répartitions de contraintes axiales dans les vis, sans chargement externe sur l'assemblage (uniquement la précontrainte) et pour un chargement axial de 270N/mm. Uniquement soumises à la précontrainte, les vis sont en traction quasiment pure tandis que pour un chargement externe de 270N/mm, les effets de flexion apparaissent. Les zones les plus chargées de ces vis sont les bases des têtes sur lesquelles apparaît une concentration de contrainte. Les résultats en contrainte axiale maximale, donnés pour les vis, ne tiennent pas compte de cette concentration de contrainte qui devrait être étudiée par une autre analyse sur une géométrie décrite plus finement.



Sans chargement

Flux axial 270 N/mm

Figure IV-12 : Contrainte axiale dans les vis (Mpa).

### IV.3 Bride conique.

#### IV.3.1 Description du problème.

Il s'agit d'un exemple de bride entre deux portions de coques coniques (Fig. IV-13). La bride assure la liaison entre les portions de coques et une pièce intermédiaire liée à des éléments internes. Les efforts sont appliqués sur cette pièce intermédiaire et des chargements axiaux et radiaux sont envisagés. Pour cette étude, la portion de coque inférieure est supposée encastree à sa base.

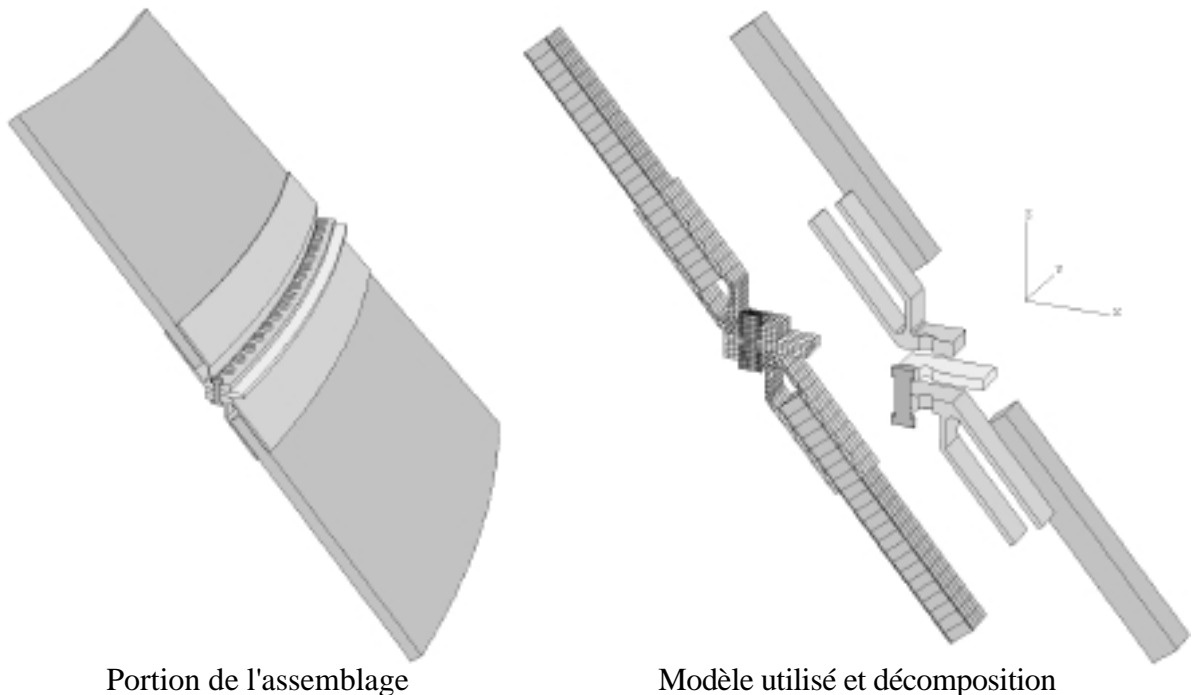


Figure IV-13 : Bride sur coques coniques.

Caractéristiques de l'assemblage :

- Inclinaison des coques :  $40^\circ$
- Diamètre ligne des boulons:  $\varnothing 3936$  mm
- 360 boulons  $\varnothing 8$  mm (alésage  $\varnothing 8,5$  mm) précontraints 300 Mpa.
- Longueur de coques en dehors des brides 300 mm
- Matériaux :
  - Brides :  $E = 70000$  Mpa,  $\nu = 0,3$
  - Boulons:  $E = 200000$  Mpa,  $\nu = 0,3$
  - Coques :
    - Alu :  $E = 70000$  Mpa,  $\nu = 0,3$
    - "NIDA"
 

$E1 = 4000$ Mpa,	$E2 = 100$ Mpa, $E2 = 100$ Mpa
$\nu_{12} = 0,15$ ,	$\nu_{13} = 0,15$ , $\nu_{23} = 0,15$
$G12 = 4$ Gpa,	$G13 = 0,1$ Gpa, $G23 = 4$ Gpa



- Coefficients de frottement :           Alu/Acier : 0,15  
   Alu/Alu : 0,15
- Diamètre position d'application des efforts sur la pièce intermédiaire : Ø4000 mm

Pour des raisons de symétrie, on étudie un seul secteur angulaire de l'assemblage.

### Caractéristiques des calculs :

Décomposition : 8 sous-structures et 26 interfaces.

Maillage : 3110 éléments (1274 cubes et 1836 prismes).

Calcul initial (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- 11394 degrés de liberté.
- Résolution : Initialisation : 21s CPU (station de travail HP735)  
300 itérations : 132s CPU

Calcul final (cubes à 20 nœuds et prismes à 15 nœuds) :

- 43407 degrés de liberté.
- Résolution : Initialisation : 390s CPU (station de travail HP735)
- 300 itérations : 2715s CPU

### IV.3.2 Chargement radial.

Pour une valeur de flux radial (270 N/mm), la figure IV-14 présente les allures des déformées de la portion d'assemblage étudiée et de la zone incluant les brides, la pièce intermédiaire. Elle présente aussi la répartition de contrainte axiale  $\sigma_{zz}$  dans les brides et dans le boulons.

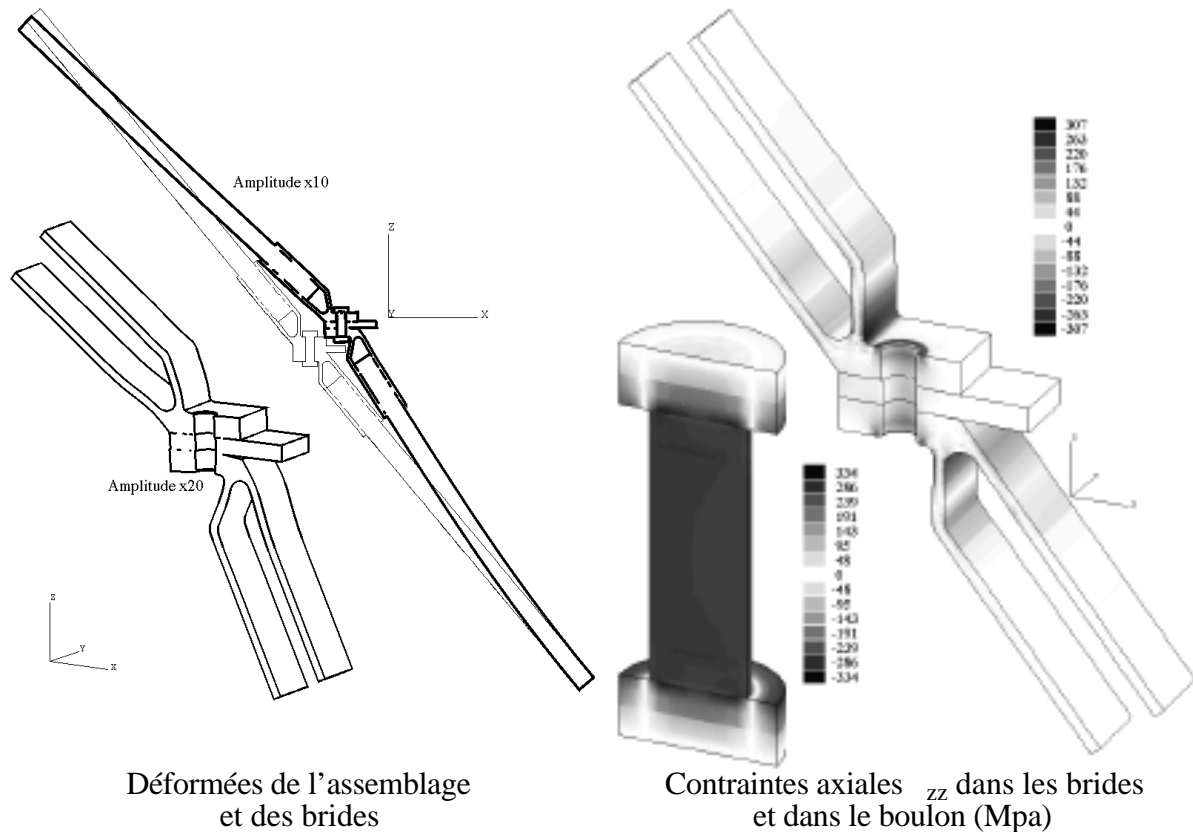
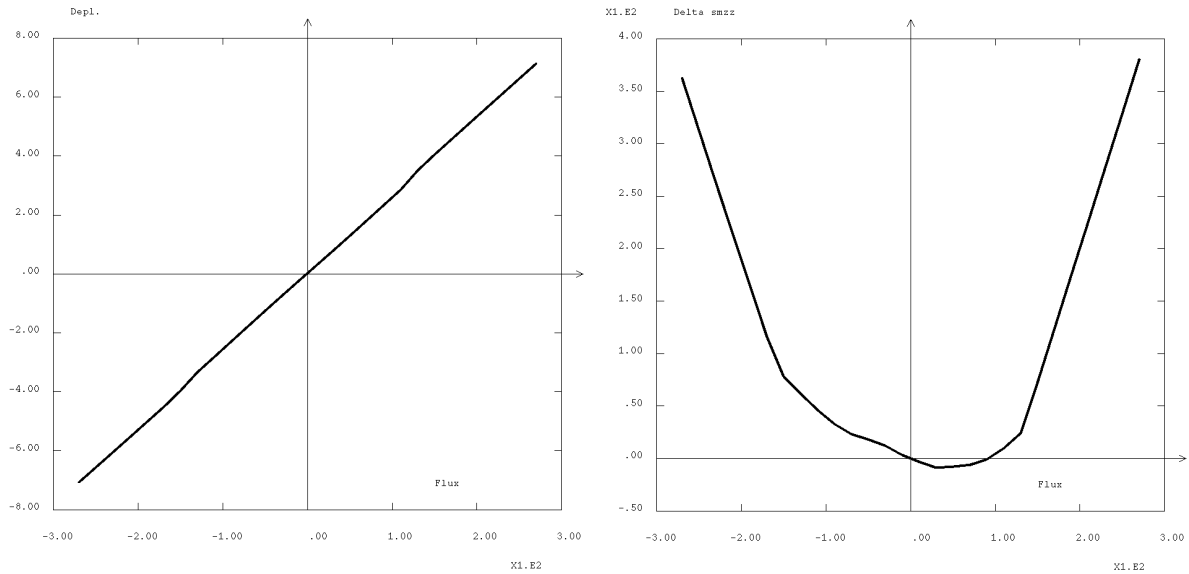


Figure IV-14 : Pour un flux radial de 270 N/mm.

On considère un flux radial (variant de -270 à 270 N/mm) appliqué sur la pièce intermédiaire. Pour ce chargement, la figure IV-15 présente l'évolution du déplacement d'un point situé dans la zone de chargement. Le comportement est quasiment linéaire ; on distingue simplement un petit saut de déplacement dû au passage d'une transmission des efforts par adhérence à une transmission des efforts par cisaillement des boulons. La figure IV-15 présente, aussi, la variation (par rapport à la précharge) de la contrainte axiale maximale dans les boulons ; cette variation est fortement non linéaire dans l'intervalle de chargement où les efforts sont transmis par adhérence.

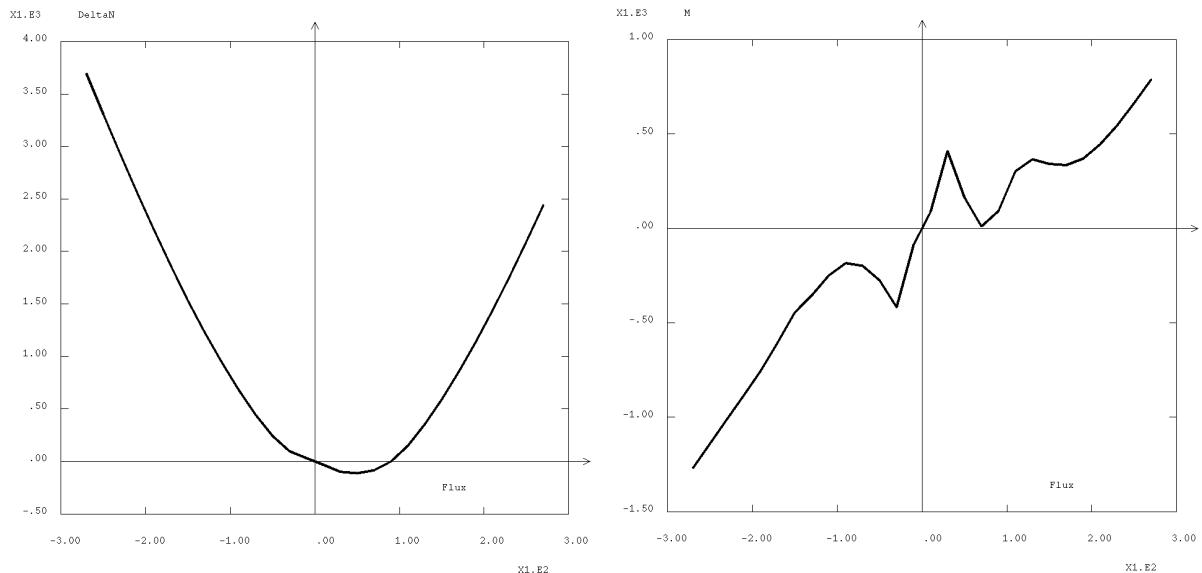


Déplacement radial d'un point  
de la surface de chargement (mm).

Variation de contrainte axiale dans le boulon  
par rapport à la précharge (Mpa).

Figure IV-15 : Evolution pour un flux radial variant de -270 à 270 N/mm.

Pour le même chargement radial variant de -270 à 270 N/mm, la figure IV-16 présente la variation (par rapport à la précharge) de l'effort normal et la variation du moment fléchissant dans les boulons ; ces variations sont, elles-aussi, fortement non linéaires dans l'intervalle de chargement où les efforts sont transmis par adhérence. Dans cette zone, où la pièce intermédiaire glisse entre les brides, le moment fléchissant, lui, est fortement perturbé. Dans cette zone, les brides ont tendance à s'ouvrir puis à se refermer pour s'ouvrir à nouveau.



Variation d'effort axial dans le boulon  
par rapport à la précharge (N).

Moment fléchissant  
dans le boulon (Nmm).

Figure IV-16 : Evolution pour un flux radial variant de -270 à 270 N/mm.

#### IV.4 Comparaison avec un code de calcul - Assemblage boulonné

Cet exemple d'assemblage boulonné (Fig. IV-17) est le support d'une comparaison du traitement des conditions de contact unilatéral et de frottement avec le code de calcul industriel ABAQUS. La figure IV-18 présente le maillage utilisé (réalisé à l'aide de CASTEM 2000 puis transféré dans ABAQUS) pour le calcul ABAQUS et pour le calcul par l'approche CONTRAST. Une deuxième comparaison a été réalisée sur la même géométrie mais avec un maillage comportant près de 30000 degrés de liberté.

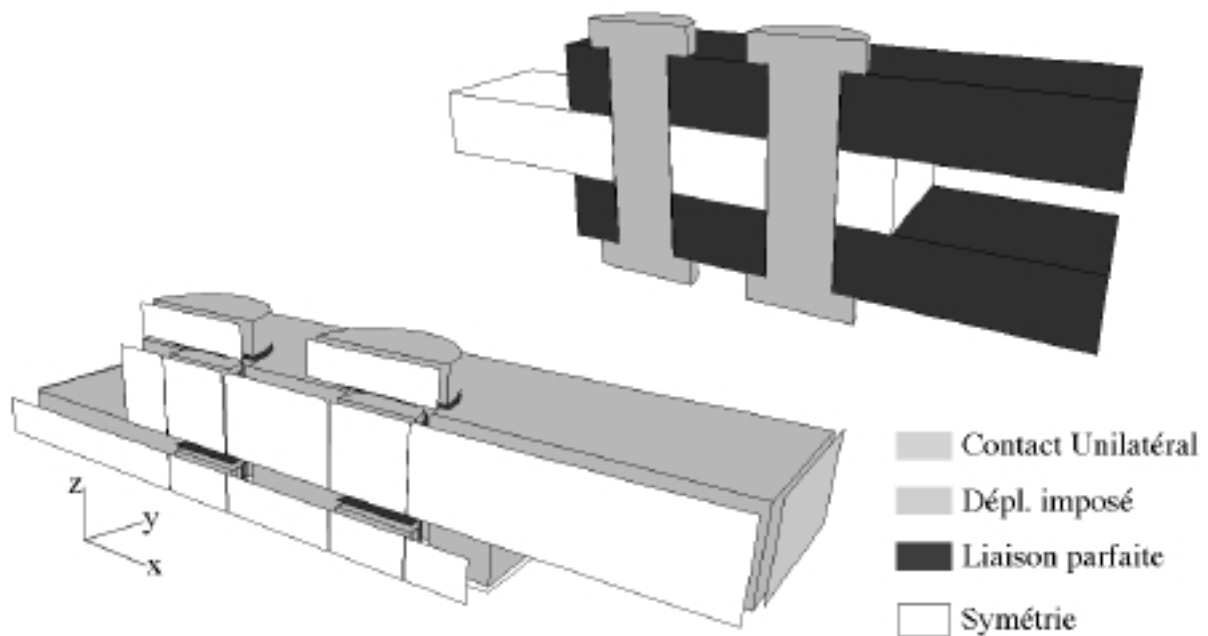


Figure IV-17 : Assemblage boulonné.

Les caractéristiques de la modélisation sont les suivantes :

Dimensions maximales de la structure: 250x40x70 mm.

Précharges des boulons imposées par un pré-allongement de 0,05 mm.

Déplacement imposé suivant x à l'extrémité de la plaque supérieure : 0,1mm.

Matériaux :  $E = 200\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Coefficient de frottement sur toutes les zones de contact :  $\mu = 0,3$ .

Paramètre de direction de recherche  $k = 1000$ .

Caractéristiques des calculs :

Décomposition : 8 sous-structures et 24 interfaces.

Maillage 1 : (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- 2576 éléments (154 cubes et 2422 prismes).

- 5190 degrés de liberté.

Maillage 2 : (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- 12696 éléments (856 cubes et 11840 prismes).
- 27078 degrés de liberté.

La modélisation du contact unilatéral avec frottement est réalisée, dans ABAQUS, à l'aide d'éléments "GAP" [PAWTUCKET, 1994] qui sont des éléments de contact nœud à nœud. Il est nécessaire d'autoriser un glissement élastique de  $10^{-5}$  mm (la plus petite valeur possible) pour assurer la convergence. En laissant l'algorithme gérer seul la taille des incréments de chargement, 23 pas sont effectués.

Les conditions aux limites sont choisies telles que la transmission des efforts entre les plaques se fasse par adhérence. La figure IV-18 présente la déformée des deux plaques, obtenue par ABAQUS.

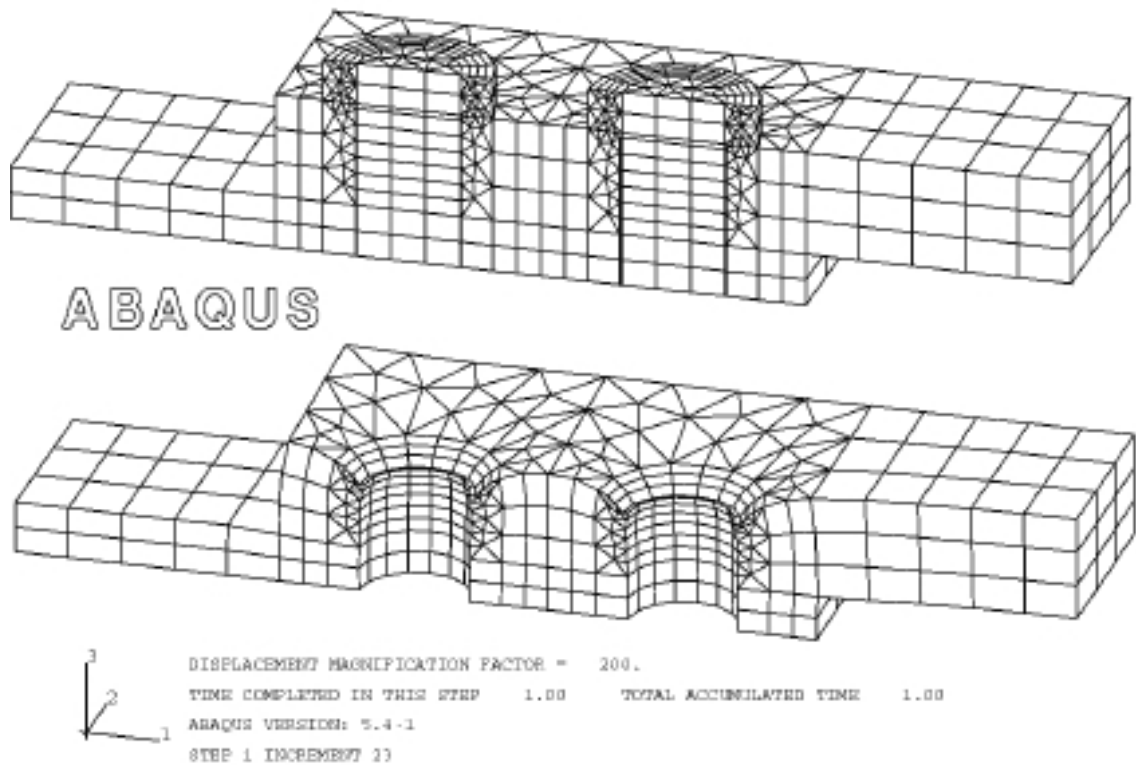
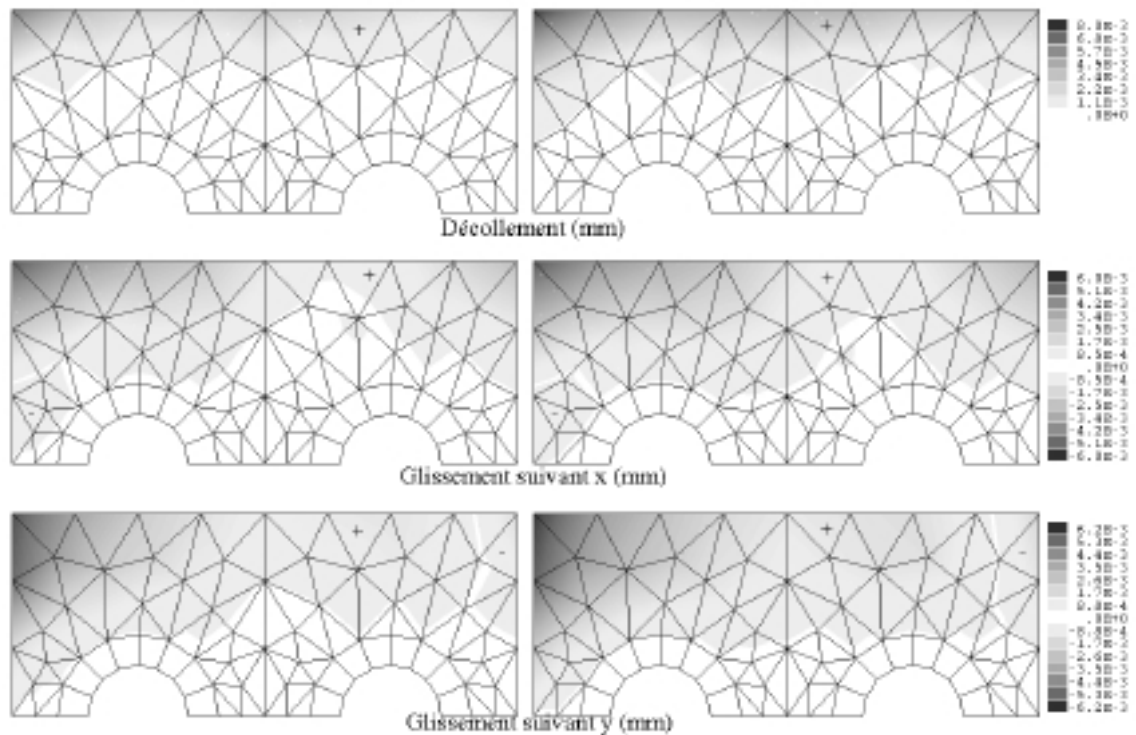


Figure IV-18 : Assemblage et déformée (x200) par calcul ABAQUS.

La figure IV-19 montre, sur la surface de contact, les isovaleurs de décollement et de glissement obtenues par l'approche CONTRAST et par ABAQUS. Les deux résultats sont proches, mais la taille de la zone de glissement obtenue par ABAQUS est un peu plus grande du fait du glissement élastique autorisé.

Pour rester dans le cadre des hypothèses formulées pour le traitement des conditions de frottement dans notre approche (cf. §III.2.1), nous nous sommes assurés que le chargement au niveau des zones de contact reste monotone croissant. Cela se traduit par le fait que, pour le calcul ABAQUS, après les premiers pas de chargement, aucune itération n'est réalisée sur les conditions de contact et de frottement : les statuts des nœuds en contact n'évoluent plus.



Résultats ABAQUS

Résultats approche modulaire

Figure IV-19 : Comparaison sur le glissement et le décollement.

Le tableau IV-1 montre la réduction de la taille du problème traité par l'approche CONTRAST : réduction du nombre d'inconnues pour les problèmes globaux (pas de multiplicateurs de Lagrange) et réduction de l'encombrement des matrices de rigidité. Il montre aussi, la réduction du temps de calcul pour les deux maillages testés. Ce facteur de réduction augmente avec le nombre de degrés de liberté.

	ABAQUS				Approche CONTRAST			
	Nb d.d.l.	Taille (Mo)	Nb. incr.	temps CPU (s)	Nb d.d.l.	Taille (Mo)	Nb. iter.	temps CPU (s)
maillage 1	6 140	15	23	673	5 190	1	200	55
maillage 2	31 137	260	26	35 000	27 078	50	200	720

Tableau IV-1 : Encombrement et temps de résolution (problème avec frottement).

Le tableau IV-2 présente les mêmes résultats pour un calcul sans frottement. La transmission des efforts se fait alors par cisaillement des boulons. Dans ce cas, aucune approximation n'est réalisée par l'approche CONTRAST et les résultats sont identiques à ceux obtenus par ABAQUS. Les nombres de degrés de liberté et les encombrements utilisés par les deux approches restent les mêmes que ceux donnés pour les calculs avec frottement. Le gain en temps de calcul apporté par l'approche CONTRAST est plus faible mais reste important.

	ABAQUS				Approche CONTRAST			
	Nb d.d.l.	Taille (Mo)	Nb. incr.	temps CPU (s)	Nb d.d.l.	Taille (Mo)	Nb. iter.	temps CPU (s)
maillage 1	6 140	15	1	115	5 190	1	150	43
maillage 2	31 137	260	1	3850	27 078	50	150	570

Tableau IV-2 : Encombrement et temps de résolution (problème sans frottement).

#### IV.5 Comparaison avec un code de calcul - Bride rivetée

Un dernier exemple de comparaison est réalisé à partir d'une géométrie de bride proposée par AÉROSPATIALE (Fig. IV-20) (Cette géométrie fait l'objet d'une clause de confidentialité et ne peut être décrite en détail ici). Il s'agit d'une bride boulonnée rivetée sur des cylindres raidis. Le même maillage, réalisé par CASTEM 2000, est utilisé pour les deux approches (ABAQUS et approche modulaire) ; il comporte 10328 éléments linéaires (5524 cubes à 8 nœuds et 4804 prismes à 6 nœuds).

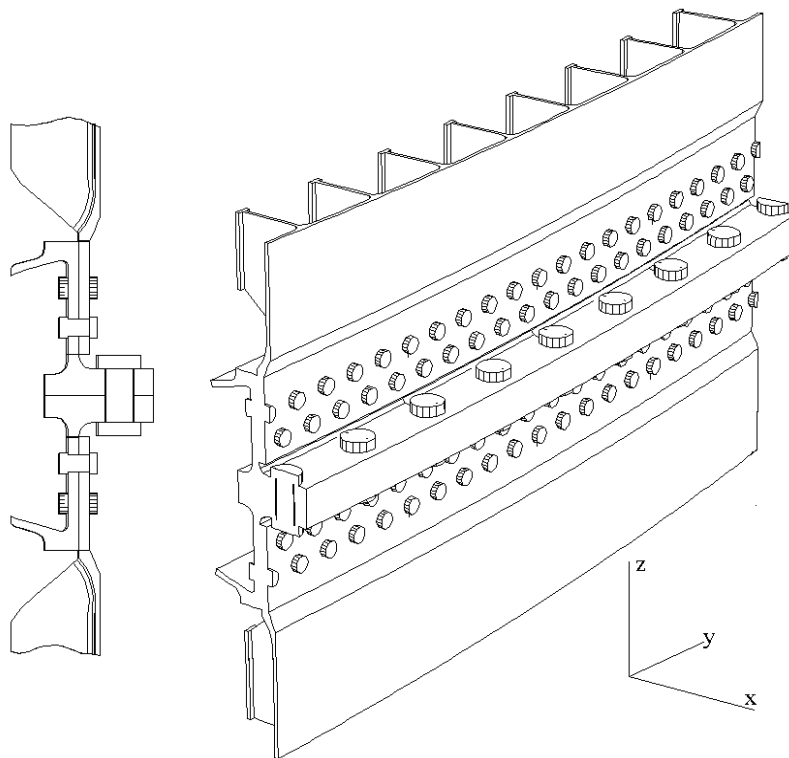


Figure IV-20 : Problème.

Pour cet exemple, une portion seulement de la géométrie est étudiée en tenant compte des symétries de répétition de la géométrie et de l'axisymétrie du chargement. Les déplacements axiaux sont imposés nuls sur la surface inférieure et un déplacement axial de 1 mm est imposé sur la surface supérieure. Les rivets et les boulons sont précontraints et on prend en compte le contact entre les deux brides, entre les brides et les cylindres et entre les éléments, les rivets et les boulons. Pour l'approche modulaire, le modèle est décomposé en 38 sous-structures et 95 interfaces. Deux types de calcul ont été comparés : un calcul sans frottement sur les zones de contact et un calcul avec frottement.



Le tableau IV-3 donne les tailles des modélisations et les temps de résolution pour les deux types de calcul traités par les deux approches. On retrouve les résultats précédents : l'approche modulaire apporte une très forte réduction de l'encombrement des matrices de rigidité et une réduction du nombre d'inconnues du problème. La forte réduction de l'encombrement permet d'obtenir, pour cet exemple, un problème dont les données sont contenues en mémoire centrale de la machine. Dans le cas du calcul ABAQUS, un débordement sur disque est nécessaire ; le temps associé à ces accès disque n'est pas inclus dans les temps CPU indiqués mais il l'est dans les temps "Elaps" (ou temps "Horloge"), qui correspondent au temps "d'attente devant la machine". On remarque une forte réduction des temps de calcul apportée par l'approche modulaire, y compris dans le cas du calcul sans frottement.

	ABAQUS	Approche CONTRAST
Nbre de d.d.l.	49856 (y compris mult. de Lagrange)	41436 (38 s-struct. - 95 interfaces)
Encombrement	747 Mo	30 Mo
Calcul sans frottement	1 incrément de chargement 6 itérations de contact Résolution : 9050s CPU (2,5h CPU - 4h "Horloge")	500 itérations Initialisation : 320s CPU (5mn) 500 itérations : 1350s CPU (22mn) (soit 2,7s CPU/itération)
Calcul avec frottement	20 incréments de chargement 28 itérations de contact Résolution : 123200s CPU (34h CPU - 57h "Horloge")	600 itérations Initialisation : 320s CPU (5mn) 600 itérations : 1620s CPU (27mn) (soit 2,7s CPU/itération)

Tableau IV-3 : Encombrement et temps de résolution.

En terme de qualité des solutions obtenues, les solutions des deux calculs sans frottement sont équivalentes. Néanmoins, les conditions aux limites et les conditions de contact sont difficiles à imposer dans ABAQUS (conditions sur des ensembles de nœuds ou de faces d'éléments décrits par leurs numéros...). Il peut subsister des erreurs de modélisation qui font que, par exemple, on constate une non-symétrie, qui n'a pas lieu d'être, de la solution ABAQUS par rapport au plan de contact entre les brides. Ces problèmes de modélisation apparaissent et sont même amplifiés dans le cas des calculs avec frottement. Malheureusement, la mise au point des conditions aux limites de la modélisation ABAQUS est très lourde et nécessite de nombreux calculs.

L'objet de cet exemple est de comparer les coûts des deux approches et ne saurait être qu'indicatif en raison des problèmes rencontrés.

# **CHAPITRE V :**

## **ASSEMBLAGES PAR LIAISONS**

### **AVEC MAILLAGES NON-COMPATIBLES.**

Le calcul d'assemblages tridimensionnels est confronté à un problème majeur, et bien connu, issu de la discrétisation par éléments finis. Pour atteindre une forte modularité, il est souhaitable que les éléments d'un assemblage puissent être modélisés et maillés de manière complètement indépendante. Il est alors impossible d'obtenir des discrétisations identiques de part et d'autre d'une interface de liaison entre ces éléments.

Il paraît donc important de pouvoir résoudre des problèmes d'assemblages faisant intervenir des disparités de discrétisation sur les liaisons (maillages "non-compatibles" ou "incompatibles"). Quelques auteurs s'intéressent à ces difficultés et proposent plusieurs solutions. Certaines solutions, basées sur des relations simples entre les degrés de liberté, peuvent générer des problèmes de blocage qui entraînent de grosses erreurs sur la solution.

Une remarque importante doit être formulée : la connexion de maillages incompatibles ne doit pas entraîner un surcroît de travail pour l'utilisateur et doit être, si possible, transparente. Il serait, en effet, mal venu d'avoir à fournir plus d'efforts pour résoudre le problème incompatible que pour le rendre compatible.

Nous proposons une approche basée sur un équilibre "en moyenne" des interfaces, qui conduit à une réalisation simple. Elle est simple de mise en œuvre et n'entraîne que peu de modification du code existant. De plus, cette approche conserve le rôle de l'interface en tant qu'entité mécanique et reste compatible avec tous les comportements d'interface existant dans le logiciel CONTRAST.

## V.1 Principes généraux de la connexion de maillages

### V.1.1 Méthodes générales

Dans le cadre de méthodes d'éléments finis en déplacement sans décomposition de domaine, le principe général de connexion de maillages incompatibles (voir [QUIROZ, 1993] par exemple) est d'écrire une relation linéaire entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface puis d'imposer cette relation dans les équations d'équilibre du problème. Elle peut être imposée par diverses méthodes :

- Méthode d'élimination directe : Une partie des degrés de liberté connectés sont écrits en fonction des autres à l'aide des relations à imposer puis éliminés dans les équations d'équilibre.
- Méthode de pénalisation : Les relations sont imposées à l'aide d'un facteur de pénalisation de telle sorte que plus la valeur du facteur est élevée, plus les relations sont vérifiées. Cette méthode entraîne des problèmes numériques lorsque le facteur de pénalisation est élevé.
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange : Des inconnues supplémentaires, homogènes à des efforts, sont ajoutées sur l'interface de façon à forcer les relations à imposer.
- Méthode du Lagrangien augmenté : Cette méthode est une combinaison des deux précédentes pour laquelle il n'est pas nécessaire que le facteur de pénalisation soit très élevé pour que les relations soient imposées correctement [SASSI, 1993].

De même, il existe diverses méthodes pour écrire les relations de connexion entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface :

- Collage homogène : une relation linéaire directe est écrite entre un ddl d'un nœud d'un maillage et ceux de l'élément de l'autre maillage en face duquel il est placé. Cette méthode nécessite une bonne compatibilité géométrique entre les deux surfaces et peut entraîner des problèmes de blocage (voir exemple §V.4).
- Utilisation d'une discrétisation intermédiaire sur l'interface elle-même. Dans ce cas, une interpolation des déplacements sur l'interface est choisie et deux approches peuvent être utilisées pour la connexion :
  - liaison discrètes : réalisation d'un collage homogène de chaque bord avec l'interface, puis élimination des degrés de liberté de l'interface.
  - liaison continues : les écarts entre les champs de déplacement sur les bords et celui sur l'interface sont minimisés (par moindres carrés, par exemple), ce qui donne deux relations entre lesquelles les degrés de liberté de l'interface sont éliminés. Cette approche a l'avantage d'assouplir les conditions de connexion et donc d'éviter les éventuels blocages.

### V.1.2 Méthodes de décomposition de domaine

Dans le cadre de méthodes de décomposition de domaine, les sous-structures sont indépendantes et les conditions de recollement (en effort ou en déplacement) sont traitées par un problème local sur les interfaces. Ces approches sont donc bien adaptées à l'utilisation de maillages incompatibles, puisque seul ce problème local doit être étendu de manière à recoller deux discrétisations différentes.

Un exemple de cette capacité de ces approches est fourni par la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) [FARHAT & ROUX, 1994]. Cette méthode duale de décomposition de domaine (cf. §I.2.2) effectue un recollement du déplacement sur l'interface par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Que les discrétisations soient compatibles ou non, une approximation polynomiale par morceaux des multiplicateurs est utilisée :

$$\lambda_j^i(\xi) = \sum_{i=0}^p \lambda_j^i \xi^i \quad \text{où } \xi \text{ est l'abscisse curviligne sur le morceau } j \text{ de l'interface.}$$

De plus, cette représentation du multiplicateur peut être raffinée de manière adaptative (en fonction d'un critère en saut de déplacement) au cours des itérations du gradient conjugué.

Cette approche est aussi utilisée pour des problèmes d'analyse modale où elle est à rapprocher de la méthode de Craig and Bampton [FARHAT & GÉRADIN, 1994].

## V.2 Approche proposée

Dans notre cas, l'approche de gestion des maillages incompatibles qui est recherchée doit rester compatible avec l'utilisation de tous les comportements de liaison existant dans le logiciel prototype CONTRAST. De plus, il est souhaitable que les outils développés pour la reconnaissance automatique de la géométrie des interfaces fonctionnent toujours dans ce cas.

Ainsi, pour chercher à conserver la souplesse apportée par cette recherche automatique des géométries, le logiciel se limite, pour l'instant, à la gestion de maillages incompatibles plans, pour lesquels cette recherche se fait simplement. Dans les autres cas, il est difficile de déterminer cette géométrie sans présupposer de la nature du support géométrique (cylindre, sphère, cône...) de l'interface. Des études sont en cours pour autoriser la recherche automatique pour ce type de problèmes. Néanmoins, l'approche développée dans les paragraphes suivants est valable pour tout type de configuration.

### V.2.1 Problème à l'étape locale

Pour les directions de recherche, la forme  $\mathbf{k}_0 = k \cdot \mathbf{I}_d$  (Avec  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité et  $k$  un scalaire positif), définie pour les autres liaisons, est conservée.

Sur l'interface  $EE'$  (Fig. V-1) le problème posé à l'étape locale est le suivant : connaissant  $(\underline{W}_n^E; \underline{F}_n^E)$  et  $(\underline{W}_n^{E'}; \underline{F}_n^{E'})$ , trouver  $(\hat{\underline{W}}^E; \hat{\underline{F}}^E)$  et  $(\hat{\underline{W}}^{E'}; \hat{\underline{F}}^{E'})$  tels que :

$$\begin{cases} R(\hat{\underline{W}}^E, \hat{\underline{F}}^E, \hat{\underline{W}}^{E'}, \hat{\underline{F}}^{E'}) = 0 \\ \hat{\underline{F}}^E - \underline{F}_n^E = k(\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}_n^E) \\ \hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}_n^{E'} = k(\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}_n^{E'}) \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{cases} \underline{W}_n^E = \underline{U}_n^E|_{EE'} & \text{et } \underline{F}_n^E \text{ est calculé à partir de } \underline{W}_n^E \text{ et de la direction de recherche} \\ \underline{W}_n^{E'} = \underline{U}_n^{E'}|_{EE'} & \text{et } \underline{F}_n^{E'} \text{ est calculé à partir de } \underline{W}_n^{E'} \text{ et de la direction de recherche} \end{cases}$$

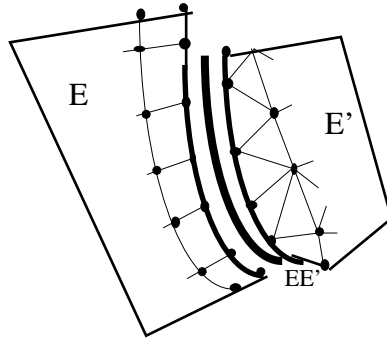


Figure V-1 : Problème.

### V.2.2 Discrétisations

Les notations suivantes sont utilisées :  $E$  (resp.  $E'$ ) est la géométrie décrite par l'ensemble des éléments de l'enveloppe de  $E$  (resp.  $E'$ ) qui ont une intersection avec  $EE'$ .

Les quantités suivantes sont définies :

$$\begin{cases} \underline{V}_n^E = \underline{U}_n^E|_{E'} \\ \underline{V}_n^{E'} = \underline{U}_n^{E'}|_{E} \end{cases}$$

et des discrétisations, issues de celles données dans les deux sous-structures en présence, sont disponibles :

$$\begin{cases} \underline{V}_n^E = \{N\}^T \{v_n^E\} \\ \underline{V}_n^{E'} = \{N'\}^T \{v_n^{E'}\} \end{cases}$$

où  $\{N\}$  sont les fonctions de base sur les éléments de  $E$  et  $\{N'\}$ , les fonctions de base sur les éléments de  $E'$ .

Pour un problème continu, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{W}_n^E = \underline{V}_n^E \\ \underline{W}_n^{E'} = \underline{V}_n^{E'} \end{array} \right|_{EE'}$$

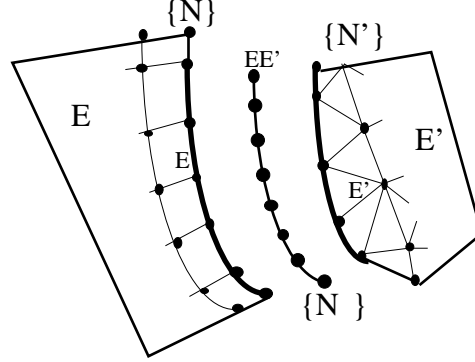


Figure V-2 : Interpolation

L'espace vectoriel  $\underline{U}$ , dans lequel sont imposées des conditions de régularité, est défini sur  $EE'$ . En écrivant l'équilibre en moyenne de l'interface sous la forme :

$$\int_{EE'} \underline{W}^* \cdot (\underline{\hat{F}}^E + \underline{\hat{F}}^{E'}) dS = 0, \quad \underline{W}^* \in \underline{U}$$

$$\text{soit} \quad \int_{EE'} \underline{W}^* \cdot \{ (k(\underline{\hat{W}}^E - \underline{V}_n^E) + \underline{F}_n^E) + (k(\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{V}_n^{E'}) + \underline{F}_n^{E'}) \} dS = 0,$$

$$\underline{W}^* \in \underline{U} \quad (\text{en utilisant les directions de recherche})$$

$$\text{soit} \quad \int_{EE'} \underline{W}^* \cdot \{ (k(\underline{\hat{W}}^E - \underline{V}_n^E) + \underline{F}_n^E) + (k(\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{V}_n^{E'}) + \underline{F}_n^{E'}) \} dS = 0,$$

$$\underline{W}^* \in \underline{U}$$

seule la discrétisation de  $\underline{V}_n^E$  et  $\underline{V}_n^{E'}$  est imposée.

Le fait de choisir une discrétisation sur l'interface  $EE'$  à laquelle sont associées les fonction de base  $\{N\}$  :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{W}^* = \{N\}^T \{w^*\} \\ \underline{\hat{W}}^E = \{N\}^T \{\hat{w}^E\} \text{ et } \underline{\hat{F}}^E = \{N\}^T \{\hat{f}^E\} \\ \underline{\hat{W}}^{E'} = \{N\}^T \{\hat{w}^{E'}\} \text{ et } \underline{\hat{F}}^{E'} = \{N\}^T \{\hat{f}^{E'}\} \\ \underline{W}_n^E = \{N\}^T \{w_n^E\} \text{ et } \underline{F}_n^E = \{N\}^T \{f_n^E\} \\ \underline{W}_n^{E'} = \{N\}^T \{w_n^{E'}\} \text{ et } \underline{F}_n^{E'} = \{N\}^T \{f_n^{E'}\} \end{array} \right|$$

conduit, sur l'interface, à un problème identique à celui obtenu pour des maillages compatibles (c'est-à-dire résolu nœud à nœud) si les projections

$$\left| \begin{array}{l} \underline{W}_n^E = \underline{V}_n^E \big|_{EE'} \\ \underline{W}_n^{E'} = \underline{V}_n^{E'} \big|_{EE'} \end{array} \right|$$

sont traduites, en moyenne, par :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{EE'} \underline{W}^* \cdot (\underline{W}_n^E - \underline{V}_n^E) dS = 0, \quad \underline{W}^* = \underline{U} \\ \int_{EE'} \underline{W}^* \cdot (\underline{W}_n^{E'} - \underline{V}_n^{E'}) dS = 0, \quad \underline{W}^* = \underline{U} \end{array} \right|,$$

c'est-à-dire, après discrétisation :

$$\left| \begin{array}{l} [\underline{M}_w] \{w_n^E\} = [\underline{Q}] \{v_n^E\} \\ [\underline{M}_w] \{w_n^{E'}\} = [\underline{Q}'] \{v_n^{E'}\} \end{array} \right| \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} [\underline{Q}] = \int_{EE'} \{N\} \{N\}^T dS \\ [\underline{Q}'] = \int_{EE'} \{N\} \{N'\}^T dS \\ [\underline{M}_w] = \int_{EE'} \{N\} \{N\}^T dS \end{array} \right|$$

En effet, l'équilibre en moyenne sur l'interface devient :

$$\int_{EE'} \{w^*\}^T \{N\} \left\{ (k(\{N\}^T \{\hat{w}^{E'}\} - \{N\}^T \{v_n^E\}) + \{N\}^T \{f_n^E\}) + (k(\{N\}^T \{\hat{w}^{E'}\} - \{N'\}^T \{v_n^{E'}\}) + \{N\}^T \{f_n^{E'}\}) \right\} dS = 0,$$

et avec la projection :

$$\int_{EE'} \{w^*\}^T \{N\} \{N\}^T dS \left\{ k(\{\hat{w}^{E'}\} - \{w_n^E\}) + \{f_n^E\} + k(\{\hat{w}^{E'}\} - \{w_n^{E'}\}) + \{f_n^{E'}\} \right\} = 0.$$

Soit :

$$k(\{\hat{w}^{E'}\} - \{v_n^E\}) + \{f_n^E\} + k(\{\hat{w}^{E'}\} - \{v_n^{E'}\}) + \{f_n^{E'}\} = 0$$

La résolution est alors réalisée nœud à nœud sur le maillage de l'interface.

Cette discrétisation conserve le rôle de l'interface en tant qu'entité mécanique. Elle dispose, en plus, de son propre maillage auquel est associée sa propre discrétisation, éventuellement différente de celle des sous-structures en présence. Cette approche peut d'ailleurs être utilisée pour des maillages compatibles, pour lesquels on veut donner un rôle particulier à l'interface.

### V.2.3 Résolution de l'étape globale

Pour simplifier, la résolution de l'étape globale est présentée pour une sous-structure  $E$  avec une seule interface  $EE'$ . A cette étape, le problème à résoudre est le suivant :

$$\text{Trouver } \underline{U}_{n+1}^E \quad \underline{U}^E \text{ tel que } \underline{U}^* \quad \underline{U}^E, \underline{W}^* \quad \underline{U} \text{ .}$$

$$\left| \begin{array}{l} \int_E \text{Tr}[\mathbf{K} (\underline{U}_{n+1}^E) (\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{EE'} \underline{W}^* \cdot \underline{F}_{n+1}^E dS \\ \text{avec } \underline{U}^* \text{ et } \underline{W}^* \text{ tels que :} \\ \int_{EE'} \underline{V}^* \cdot (\underline{W}^* - \underline{U}^*) dS = 0, \quad \underline{V}^* \quad \underline{U} \text{ .} \end{array} \right.$$

Après discrétisation, le problème devient :

$$\{u^*\}[\mathbf{K}]\{u_{n+1}^E\} = \{w^*\}^T[\mathbf{M}_w]\{f_{n+1}^E\}$$

$$\text{avec } \left| \begin{array}{l} [\mathbf{M}_w]\{w^*\} = [\mathbf{Q}]\{u^*\}, \text{ direction de recherche.} \\ \{f_{n+1}^E\} = \{\tilde{f}\} - k_0\{w_{n+1}^E\}, \text{ direction de recherche.} \\ [\mathbf{K}] \text{ rigidité élastique classique de la sous-structure.} \end{array} \right.$$

soit

$$\{u^*\}[\mathbf{K}]\{u_{n+1}^E\} + k\{w^*\}^T[\mathbf{M}_w]\{w_{n+1}^E\} = \{w^*\}^T[\mathbf{M}_w]\{\tilde{f}\}$$

soit

$$\{u^*\}[\mathbf{K}]\{u_{n+1}^E\} + k\{V^*\}^T[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{M}_w][\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{Q}]\{V_{n+1}^E\} \\ = \{V^*\}^T[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{M}_w]\{\tilde{f}\}$$

soit

$$\{u^*\}[\mathbf{K}]\{u_{n+1}^E\} + k\{V^*\}^T[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{Q}]\{V_{n+1}^E\} = \{V^*\}^T[\mathbf{Q}]^T\{\tilde{f}\}$$

soit le problème simple à résoudre :

$$[\mathbf{K}']\{u_{n+1}^E\} = \{\tilde{f}\}$$

$$\text{avec } \left| \begin{array}{l} [\mathbf{K}'] = ([\mathbf{K}] + k[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{Q}]) \\ \{\tilde{f}\} = [\mathbf{Q}]^T\{\tilde{f}\} \end{array} \right.$$

puis  $\{V_{n+1}^E\} = \text{restriction de } \{u_{n+1}^E\} \text{ sur } E$

puis  $\{w_{n+1}^E\} = [\mathbf{M}_w]^{-1}[\mathbf{Q}]\{V_{n+1}^E\}$  et  $\{f_{n+1}^E\} = \{\tilde{f}\} - k\{w_{n+1}^E\}$

Les matrices  $[\mathbf{K}']$  sont, là encore, constantes au cours des itérations. La matrice  $[\mathbf{M}_w]$  est symétrique définie positive et donc inversible. Cette approche nécessite le calcul explicite de  $[\mathbf{M}_w]^{-1}$  dont la taille correspond au nombre de degrés de liberté sur l'interface. Ce nombre étant souvent faible, le calcul de  $[\mathbf{M}_w]^{-1}$  n'est pas très coûteux et n'est réalisé qu'une seule fois.

La prise en compte de maillages non compatibles sur les interfaces n'entraîne donc pas de modification majeure de l'algorithme. Les changements concernent uniquement le calcul des matrices de rigidité bord, le calcul des seconds membres et les restrictions sur les bords.



Ces calculs ne sont pas plus complexes que ceux réalisés dans le cas de maillages compatibles. La taille des problèmes à résoudre sur les sous-structures et sur les interfaces ne changent pas.

De plus, tous les comportements d'interface implantés dans le logiciel prototype CONTRAST sont utilisables dans ces situations et la gestion des maillages incompatibles est transparente pour l'utilisateur.

#### V.2.4 Construction des matrices de projection

Le problème posé par cette approche est le calcul de la matrice  $[Q] = \int_{\Gamma} \{N\} \{N\}^T dS$ , qui nécessite l'intégration sur le maillage de l'interface de produits de fonctions définies, d'une part, sur le maillage du bord (les fonctions  $\{N\}$ ) et, d'autre part, sur le maillage de l'interface (les fonctions  $\{N\}$ ). Dans le cas de problèmes bidimensionnels, pour lesquels le maillage interface est unidimensionnel, ce problème se résout simplement en effectuant un changement de variable ramenant les fonctions dans l'espace de référence des éléments de l'interface. Dans le cas de maillages interface bidimensionnels, les éléments du maillage bord n'ont pas forcément une forme adéquate pour l'intégration une fois ramenés dans l'espace de référence d'un élément de l'interface. Dans le cadre de l'approche CONTRAST, ce problème a été résolu de la manière suivante.

En un point d'intégration d'un élément de l'interface, la valeur de la fonction  $\{N\}$  est connue. La donnée des coordonnées réduites  $(\xi, \eta)$  de ce point d'intégration, conduit immédiatement à ses coordonnées  $(x, y)$  dans la base globale, à partir desquelles sont calculées (en résolvant un petit problème non linéaire) les coordonnées réduites  $(\xi', \eta')$  du point coïncidant sur un élément de maillage du bord (Fig. VI-3). La valeur de la fonction  $\{N\}$  en ce point est alors connue. Ici,  $(x, y)$  sont les coordonnées du point dans l'espace bidimensionnel associé à l'interface.

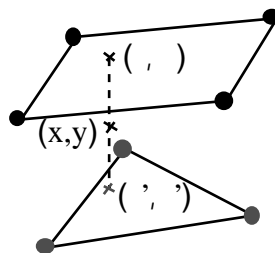


Figure V-3 : Calcul des matrices  $[Q]$

Il est important de remarquer que cette approche, comme les autres, peut entraîner des erreurs d'interpolation lorsque les discrétisations des deux bords sont très différentes et lorsque des éléments d'un bord ne sont pas complètement géométriquement inclus dans l'interface. Des études sont en cours pour optimiser la discrétisation de l'interface dans le but de minimiser ces erreurs.

### V.3 Comparaison sur un exemple simple

Il s'agit d'un exemple très simple de deux cubes en liaison parfaite. Le cube ayant la plus grande section est encastré à sa base et on impose un déplacement vertical sur la face supérieure de l'autre (Fig. V-4).

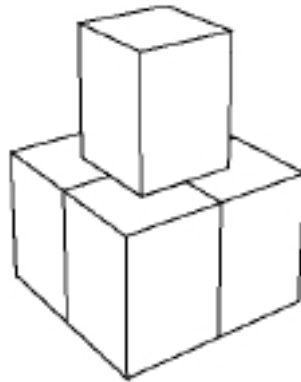


Figure V-4 : problème.

La solution obtenue par l'approche proposée est comparée à une solution de référence (maillages compatibles avec plus d'éléments) et à une solution obtenue par collage homogène (relations entre les degrés de liberté imposées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange).

Les caractéristiques de la modélisation sont les suivantes :

Dimensions maximales de la structure: 20x20x20 mm.

Déplacement vertical imposé 0,05 mm.

Matériaux :  $E = 200\text{GPa}$  et  $\nu = 0$ .

Maillages incompatibles : 5 éléments cubiques 8 nœuds (78 degrés de liberté).

Maillages compatibles : 20 éléments cubiques 8 nœuds (204 degrés de liberté).

Paramètre de direction de recherche :  $k = 10000$ .

La figure V-5 présente des comparaisons sur les déformées en coupe des trois solutions. La solution obtenue par collage homogène semble bien continue mais l'interface est "rigidifiée" et toutes les déformations transversales ont été bloquées. La continuité en déplacement est moins bien assurée par l'approche CONTRAST mais le comportement global de la structure est bien représenté.

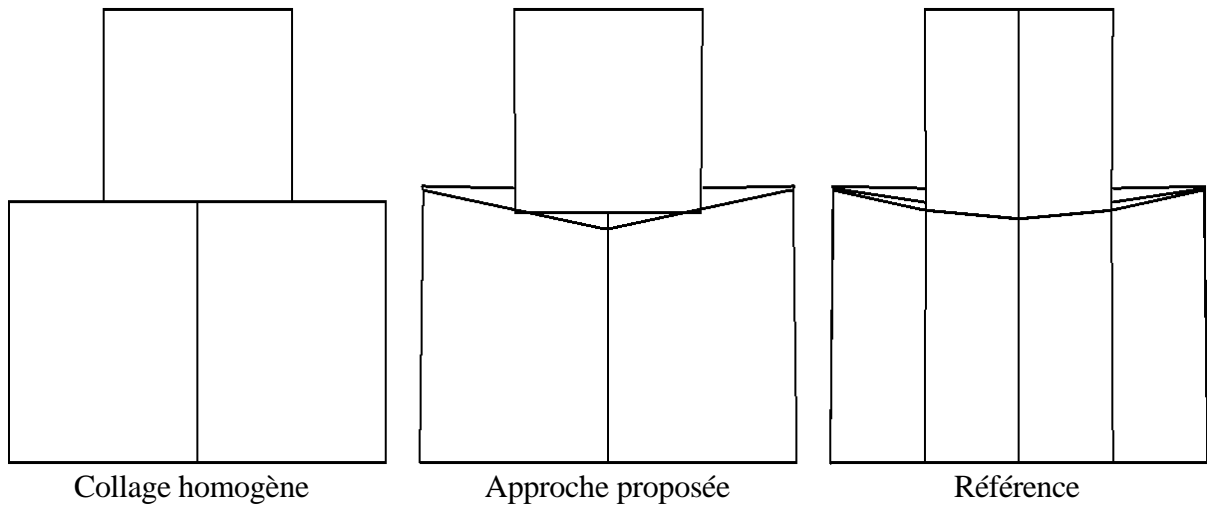


Figure V-5 : Déformées en coupe (x300).

## V.4 Exemple - Assemblage boulonné

### V.4.1 Problème

L'exemple présenté au paragraphe IV.4 est repris avec, cette fois, un seul boulon et une plaque intermédiaire plus large que les deux autres. Les efforts sont toujours transmis par adhérence entre les plaques. Le quart de la structure est étudié et les maillages incompatibles utilisés sont présentés sur la figure V-6.

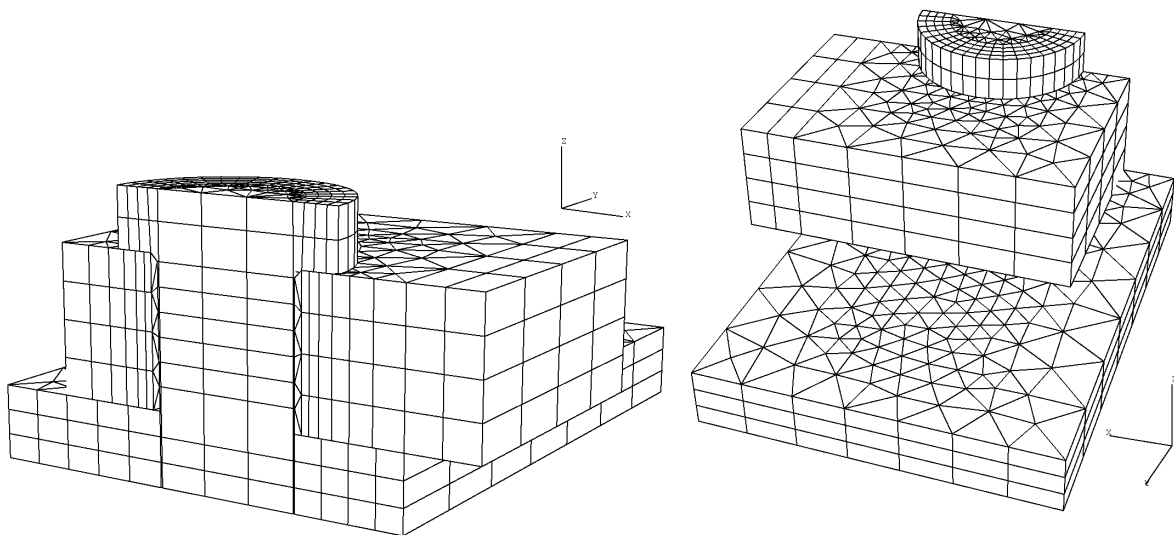


Figure V-6 : Assemblage boulonné : maillages incompatibles.

Les caractéristiques de la modélisation sont les suivantes :

Dimensions maximales de la structure: 100x100x50 mm.

Précharge du boulon imposée par un pré-allongement de 0,02 mm.

Déplacement imposé suivant x à l'extrémité de la plaque supérieure : 0,05mm.

Matériaux :      Plaque supérieure      :  $E = 200\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Plaque inférieure :  $E = 150\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Boulon :  $E = 300\text{GPa}$  et  $\nu = 0,3$ .

Coefficient de frottement sur toutes les zones de contact :  $\mu = 0,3$ .

Paramètre de direction de recherche  $k = 2000$ .

Les interfaces utilisées sont présentées sur la figure V-7. Il y a incompatibilité des maillages sur les interfaces de contact unilatéral avec frottement entre les deux plaques et entre la plaque supérieure et la tête du boulon.

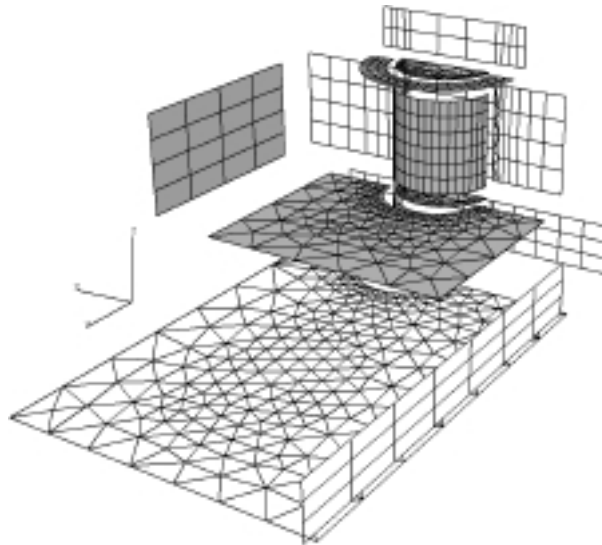


Figure V-7 : Interfaces.

On effectue une comparaison avec le même problème d'assemblage présentant des maillages compatibles aux interfaces (Fig. V-8).

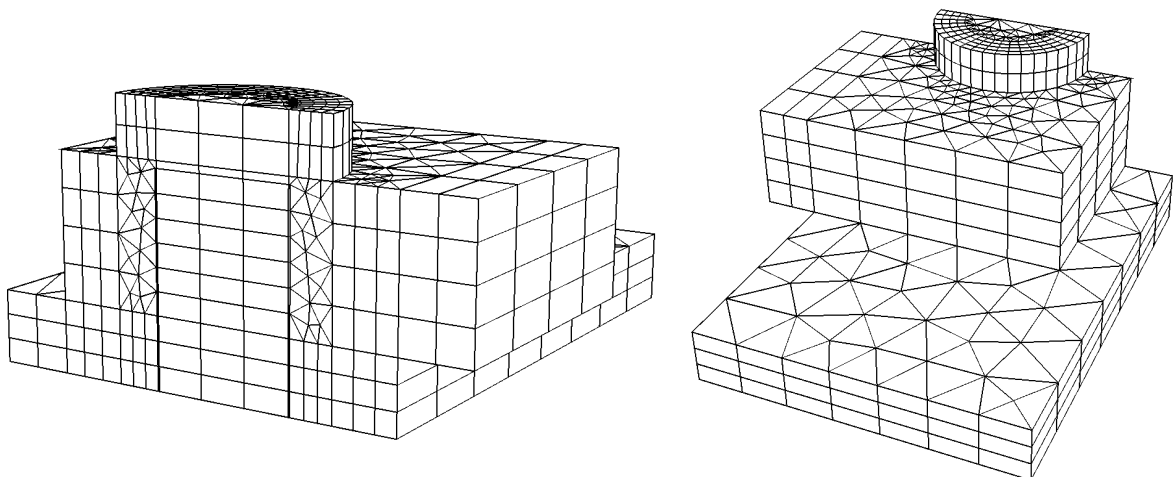


Figure V-8 : Assemblage boulonné : maillages compatibles.

Caractéristiques des calculs :

Décomposition : 5 sous-structures et 15 interfaces.

Maillages incompatibles (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- Maillage : 3318 éléments (192 cubes et 3126 prismes).
- 8226 degrés de liberté.
- Résolution : Initialisation : 54s CPU (station de travail HP735)  
100 itérations : 85,2s CPU

Maillages compatibles (cubes à 8 nœuds et prismes à 6 nœuds) :

- Maillage : 3070 éléments (372 cubes et 2698 prismes).
- 8016 degrés de liberté.
- Résolution : Initialisation : 22s CPU (station de travail HP735)  
100 itérations : 51,5s CPU

La figure V-9 présente l'évolution de l'indicateur d'erreur pour les deux calculs effectués. On note une bonne convergence de l'algorithme pour cet exemple pour lequel la continuité entre les maillages incompatibles est difficile à assurer car de nombreux éléments ne sont pas complètement inclus sur les interfaces.

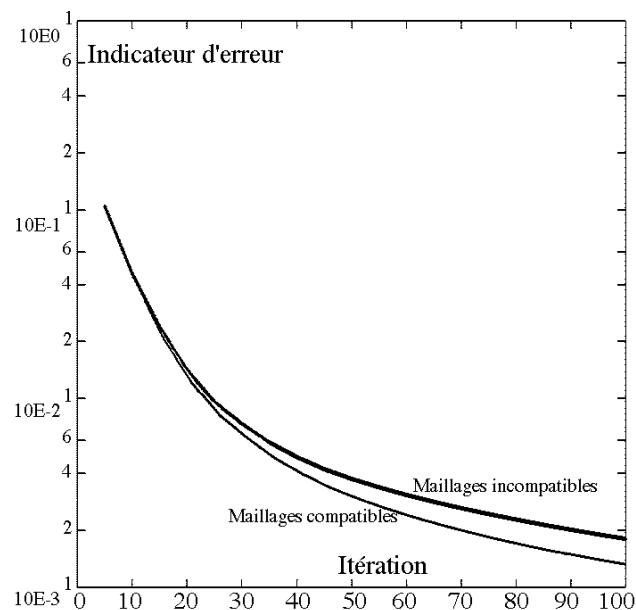


Figure V-9 : Indicateur d'erreur au cours des itérations pour les deux calculs.

Les figures V-10 et V-11 présentent l'allure des géométries déformées avec une forte amplification pour le calcul avec maillages incompatibles. On remarque une bonne continuité des déplacements aux interfaces.

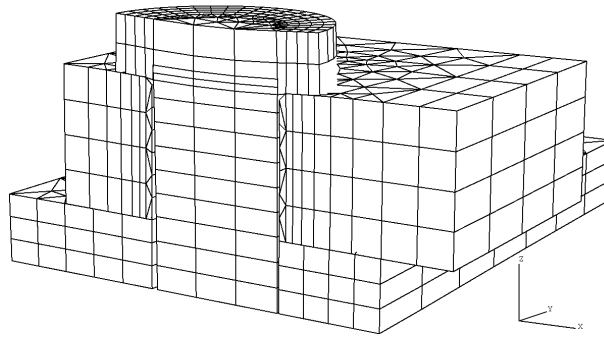


Figure V-10 : Déformées sur le modèle complet (amplitude x100).

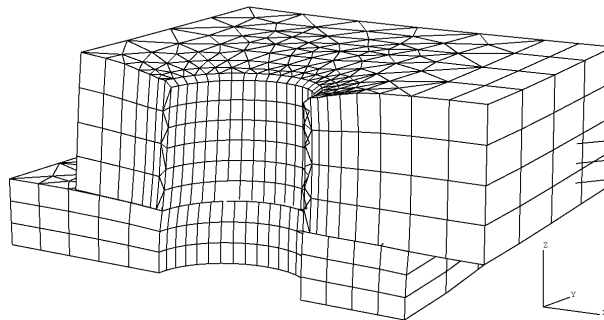
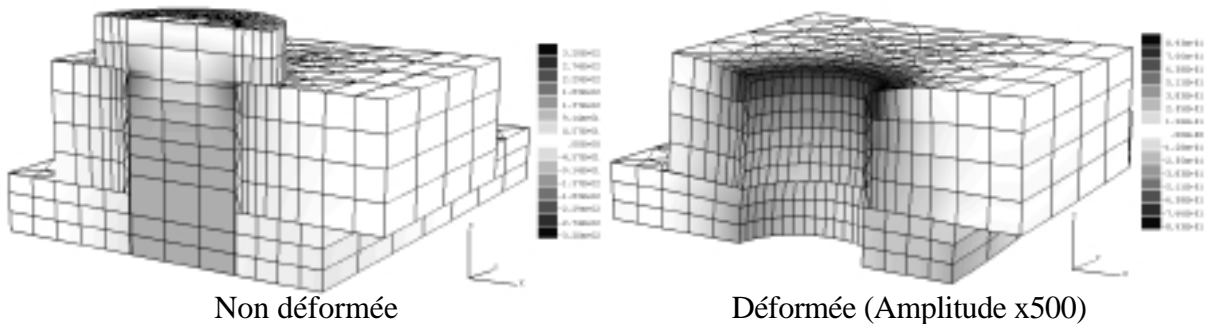


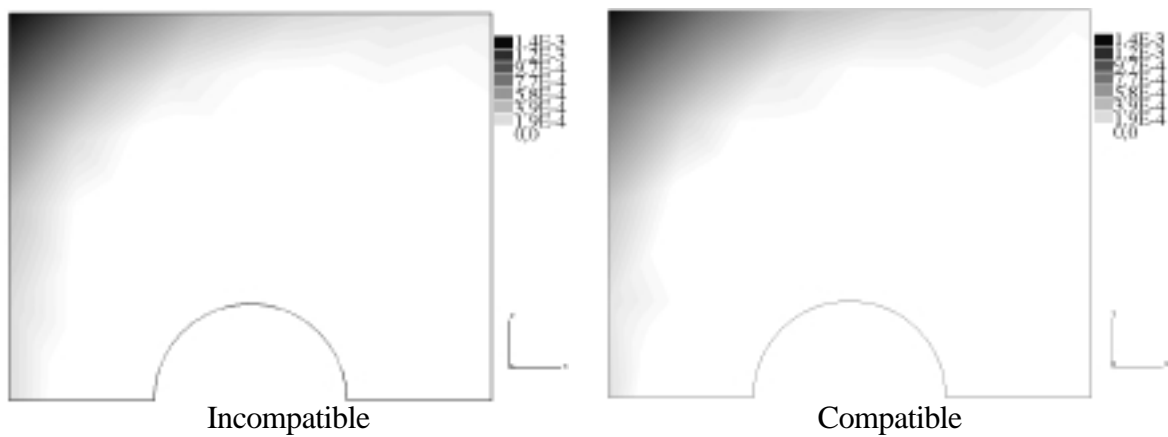
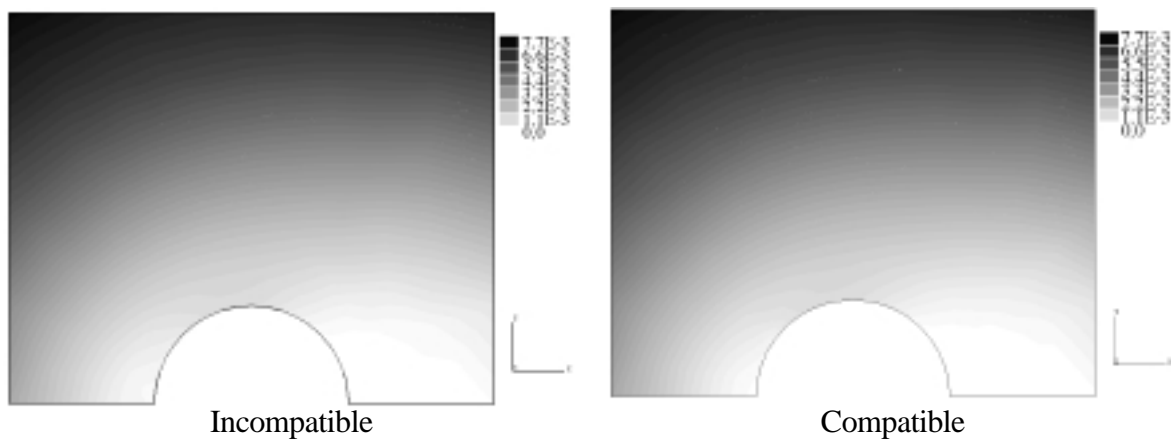
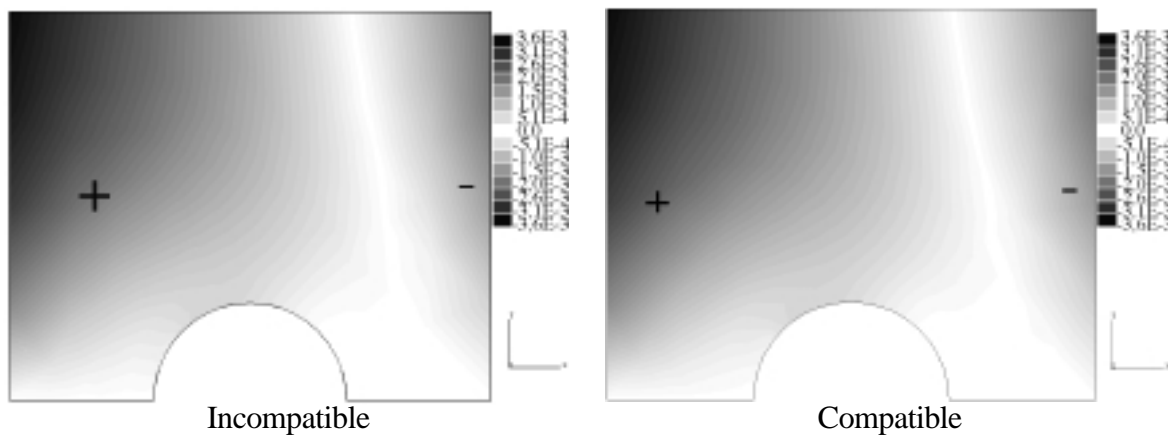
Figure V-11 : Déformées sur les plaques (amplitude x500).

La figure V-12 présente la répartition des contraintes  $zz$  dans la structure. On remarque une bonne continuité des contraintes normales sur les interfaces. De plus, les champs de contraintes ne sont pas perturbés par la présence des incompatibilités de maillage.

Figure V-12 : Contraintes  $zz$  sur le modèle complet et sur les plaques.

#### V.4.2 Comparaison

On s'intéresse maintenant à l'interface de contact unilatéral avec frottement entre les plaques pour comparer les répartitions de décollement (Fig. V-13), de glissement (Fig. V-14 et V-15) et de pression de contact (Fig. V-16).

Figure V-13 : Décollement  $z$  (mm).Figure V-14 : Glissement  $x$  (mm).Figure V-15 : Glissement  $y$  (mm).

Une très bonne correspondance entre les solutions est obtenue pour le décollement et le glissement. Par contre, pour la solution avec maillages incompatibles, le champ de pression de contact est perturbé à l'intersection entre la zone de contact entre les plaques et les zones de contact entre les plaques et le boulon. L'allure de la répartition et les niveaux de pression sont néanmoins bien représentés.

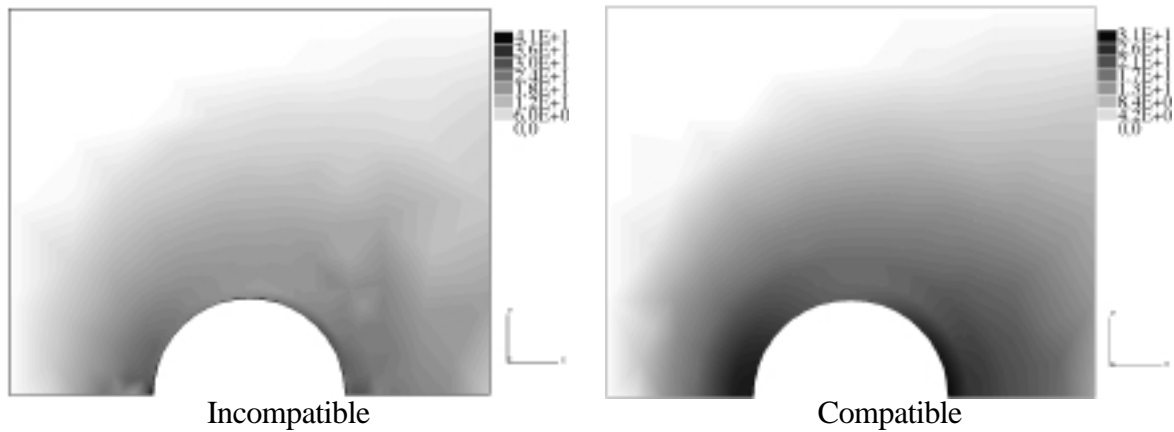


Figure V-16 : Pression de contact (Mpa).

### V.5 Conclusions

L'approche proposée pour s'affranchir des problèmes d'incompatibilité de maillage donne de bons résultats, même sur des géométries complexes. De plus, elle ne modifie que très légèrement l'algorithme et est toujours compatible avec tous les comportements de liaison existants.

Néanmoins, la construction du maillage de l'interface à partir des maillages incompatibles des sous-structures n'est pas automatique. En fait, lorsque l'un des maillages bords est géométriquement inclus dans l'autre, il est automatiquement pris comme maillage interface. Sinon, l'utilisateur doit définir un maillage annexe qui est celui de l'interface. Il reste donc des efforts à fournir pour autoriser et automatiser la gestion de tout type d'incompatibilité de maillage : maillages non plans et fortes différences entre les deux discrétisations en présence.





# **CHAPITRE VI :**

## **COMPORTEMENT DE**

### **L'APPROCHE CONTRAST**

### **SUR CALCULATEUR PARALLÈLE.**

Les chapitres précédents ont montré l'aspect parallèle de la stratégie et de la formulation utilisées. Cette caractéristique est principalement exploitée pour introduire souplesse et modularité dans la définition et la gestion des données, ainsi que dans le post-traitement. De plus, la décomposition en sous-structures permet de réduire la taille des problèmes et l'algorithme de résolution utilisé en séquentiel entraîne une réduction des coûts de calcul par rapport aux techniques classiques de résolution.

Néanmoins, lorsque les tailles des modélisations deviennent trop grandes (plus d'une centaine de milliers de degrés de liberté), la taille des matrices de rigidité factorisées du problème dépasse celle disponible en mémoire centrale. Un débordement sur disque est possible mais les caractéristiques de l'algorithme sont fortement dégradées surtout si ce débordement doit intervenir à chaque itération. Pour de tels problèmes, l'utilisation de calculateurs à architecture parallèle peut alors devenir très intéressante. Ce chapitre montre comment l'approche s'adapte facilement à l'utilisation de tels ordinateurs et un exemple de calcul d'assemblage complexe illustre ces nouvelles possibilités de l'approche CONTRAST.

## VI.1 Version parallèle de l'algorithme

A l'étape locale, des calculs locaux indépendants sont effectués sur les interfaces. De même, la résolution de l'étape globale fait intervenir des problèmes indépendants par sous-structure. L'algorithme est donc naturellement parallèle. De plus, les factorisations des matrices de rigidité des sous-structures peuvent aussi être effectuées de manière indépendante.

Sur ordinateur parallèle, pour limiter le nombre de communications entre processeurs, une sous-structure et ses interfaces avoisinantes sont affectées à un processeur [LADEVÈZE & LORONG, 1993]. Cette technique de parallélisation conduit à une duplication de certains calculs locaux sur les interfaces, mais ceci n'est pas pénalisant compte-tenu du faible coût de ces calculs. Sur ordinateur à mémoire distribuée, l'échange d'informations entre sous-structures voisines (champ de déplacement  $\underline{W}^E$ ) est réalisé par envoi de messages. L'estimation de la qualité de la solution (indicateur d'erreur ) nécessite la contribution de tous les processeurs, mais ce calcul n'est pas utile à chaque itération et ne nécessite l'échange que de peu d'informations.

Pour un problème donné, l'augmentation du nombre de sous-structures permet de réduire l'encombrement associé aux matrices de rigidité. Alors, lorsque le nombre de processeurs disponibles n'est pas suffisant, chaque programme, associé à un processeur, doit gérer plusieurs sous-structures. Cette technique permet de bien répartir la charge sur les processeurs mais conduit à un algorithme parallèle plus complexe.

Une version parallèle du logiciel prototype CONTRAST, adaptée à l'utilisation de calculateurs à mémoire distribuée, a été réalisée, en collaboration avec J.Y. COGNARD et D. DUREISSEIX [COGNARD, 1996 ; CHAMPANEY et al, 1996]. La différence majeure entre les deux implantations de l'approche est due au fait que, pour l'un, un seul programme a accès à l'ensemble des sous-structures alors que, pour l'autre, un programme n'a accès qu'à une partie des sous-structures et aux numéros des sous-structures avoisinantes. L'organisation des calculs étant différente, chaque version dispose de son propre système de gestion des opérations, décrit sur la figure VI-1.

SEQUENTIEL	PARALLELE
1 processeur $\leftrightarrow$ toutes les sous-structures	1 processeur $\leftrightarrow$ 1 ensemble de sous-structures
Boucle sur toutes les sous-structures ( $E$ )   Factorisation de $[[K^E]+[k^E]]$ Fin de boucle  Boucle sur les itérations   Boucle sur les interfaces ( $EE'$ )     <b>Etape locale</b> (Indicateur d'erreur) Fin de boucle  Test de convergence  Boucle sur toutes les sous-structures ( $E$ )     <b>Etape globale</b> $[[K^E]+[k^E]] \{u^E\} = \{F^E\}$ Fin de boucle  Fin de boucle	Boucle sur les sous-structures affectées   Factorisation de $[[K^E]+[k^E]]$ Fin de boucle  Boucle sur les itérations   Boucle sur les interfaces affectées ( $EE'$ )     interface interne $\leftarrow$ <u>message</u>     <b>Etape locale</b> (Indicateur d'erreur) Fin de boucle Test de convergence $\leftrightarrow$ <u>messages</u> (contribution de chaque sous-structure) Boucle sur les sous-structures affectées     <b>Etape globale</b> $[[K^E]+[k^E]] \{u^E\} = \{F^E\}$ Fin de boucle Boucle sur les interfaces affectées     interface interne $\rightarrow$ <u>message</u> Fin de boucle Fin de boucle

Figure VI-1 : Algorithmes séquentiel et parallèle.

Plusieurs tests ont été effectués sur l'IBM SP2 du C.E.A. à Saclay (France). Ce calculateur comporte 16 processeurs disposant chacun de 128 Mo de RAM. Le système PVM (Parallel Virtual Machine System) [SUNDERAM et al, 1994] est utilisé pour gérer l'envoi de messages entre les différents processeurs.

## VI.2 Exemple - différentiel automobile

Il s'agit d'un différentiel automobile (Fig. VI-2), pour lequel sont uniquement modélisés le boîtier, la couronne, le chapeau, les 12 vis de fixation de la couronne et les 6 vis de fixation du chapeau (Fig. VI-3) [CHAMPANEY et al, 1995].

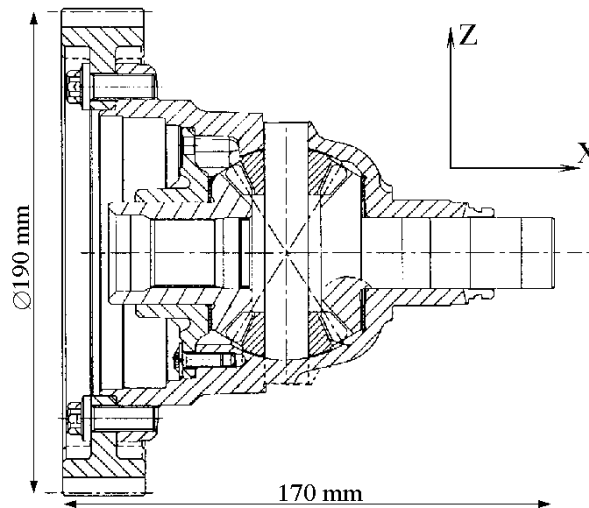


Figure VI-2 : Différentiel

La denture hélicoïdale de la couronne n'est pas modélisée. Les actions mécaniques extérieures sur la couronne sont supposées concentrées sur une seule dent. Ces actions sont prises en compte par l'intermédiaire d'une répartition d'efforts (Fig. VI-5). Les actions des satellites et des planétaires sur le boîtier sont modélisées par des répartitions d'efforts uniformes sur les zones de contact. L'amplitude et la direction de tous ces efforts extérieurs sont paramétrées par le couple appliqué et par la géométrie des dentures. Les actions des roulements à billes sur le boîtier sont modélisées par l'intermédiaire de liaisons de type "contact unilatéral sans frottement" (Fig. VI-4). L'axe des satellites (non modélisé) est supposé encastré et en contact unilatéral avec le boîtier.

Les précontraintes des vis sont imposées par l'intermédiaire d'interfaces adaptées, situées entre le corps et la tête de vis. Les sollicitations mécaniques associées à la rotation d'ensemble sont aussi prises en compte. Des interfaces de type contact unilatéral avec frottement sont utilisées pour modéliser les liaisons entre les différents composants (boîtier, couronne, chapeau et vis).

Six modélisations différentes ont été réalisées : trois maillages différents et deux décompositions par maillage. Un maillage paramétré décomposé du quart de la géométrie a été réalisé à l'aide du mailleur de CASTEM 2000. Le chargement ne présentant pas de symétrie, la géométrie complète a été obtenue à partir de ce maillage initial. Les trois maillages utilisés sont générés en faisant varier les paramètres de taille des éléments.

Le premier découpage en 39 sous-structures est la décomposition minimale de l'assemblage : le boîtier, le chapeau, la couronne, 18 corps de vis et 18 têtes. Les symétries du modèle géométrique ont servi de base pour effectuer le second découpage en 84 sous-structures (Fig. VI-6) et 223 interfaces (Fig. VI-7). De plus, pour réaliser le dernier niveau de découpage, le décomposeur automatique de C. FARHAT [FARHAT, 1988], implanté dans CASTEM 2000 par D. DUREISSEIX, a été utilisé.

La mise au point a été effectuée sur ordinateur séquentiel à l'aide du logiciel CONTRAST. Ce dernier réalise le pré et le post-traitement des calculs effectués en parallèle.

Le tableau VI-1, présente les caractéristiques des différents maillages adoptés et l'encombrement de l'ensemble des matrices de rigidité pour les différents découpages. Ces résultats montrent que l'augmentation du nombre de sous-structures permet de réduire considérablement l'encombrement du problème.

	nombre de ddl	encombrement pour 4 sous-structures	encombrement pour 39 sous-structures
maillage 1	35 136	128 Mo	31 Mo
maillage 2	129 924	1 391 Mo	310 Mo
maillage 3	236 976	4 574 Mo	790 Mo

Tableau VI-1 : Caractéristiques des différents problèmes.

Pour un couple appliqué de 2 000 Nm et une vitesse de rotation de 2000 tr/min, la convergence est atteinte après 200 itérations. La figure VI-9 donne les contraintes équivalentes de Mises à l'itération 200 tracées sur le boîtier et sur le chapeau. La figure VI-10 donne les contraintes axiales ( $\sigma_{xx}$ ) sur les vis et sur la couronne. Cette figure donne la répartition de pression de contact entre la couronne et le boîtier (liaison avec frottement).

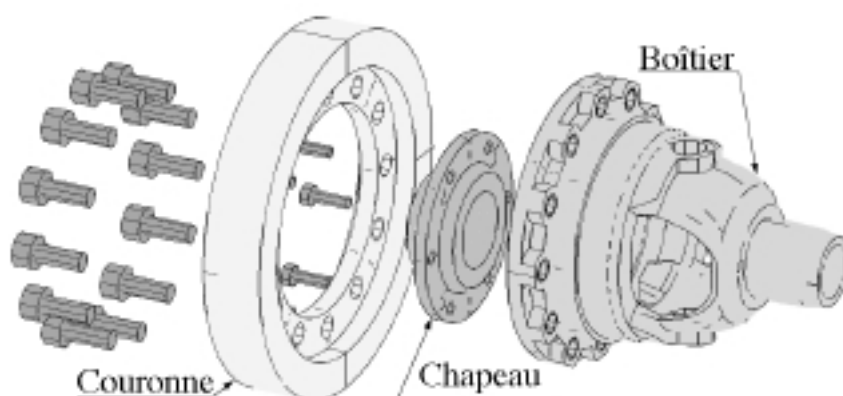


Figure VI-3 : Eléments du différentiel modélisés

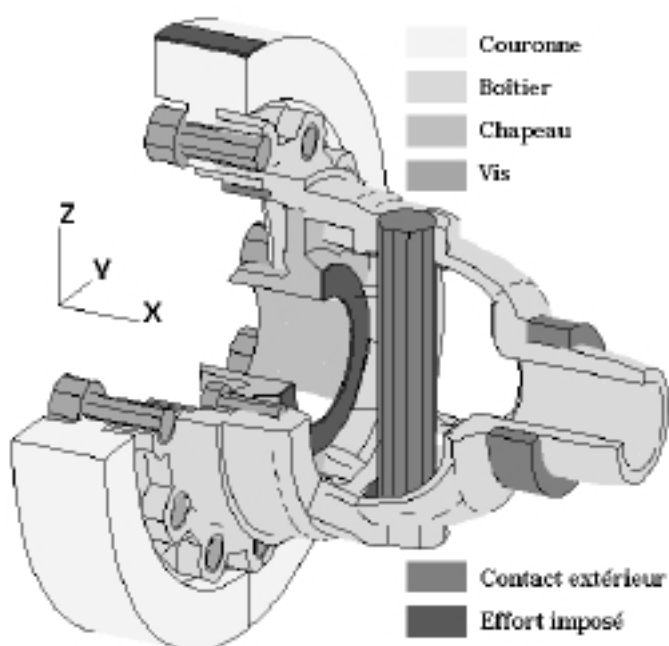
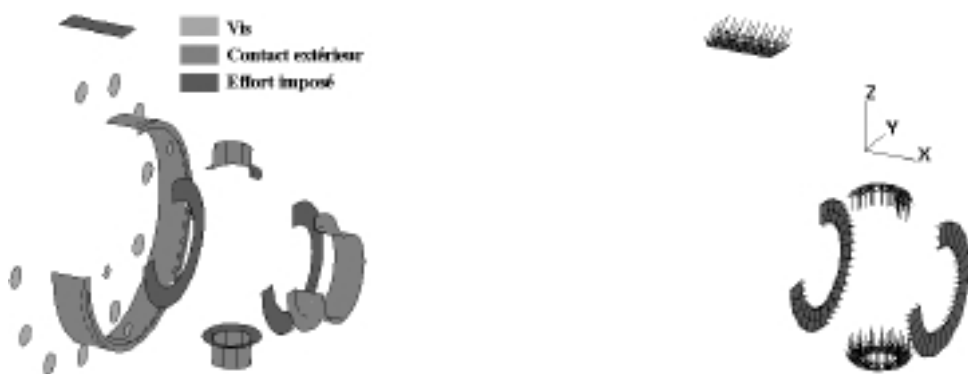


Figure VI-4 : 3/4 du modèle



Interfaces modélisant le chargement

Modélisation des efforts imposés

Figure VI-5 : Modélisation du chargement.

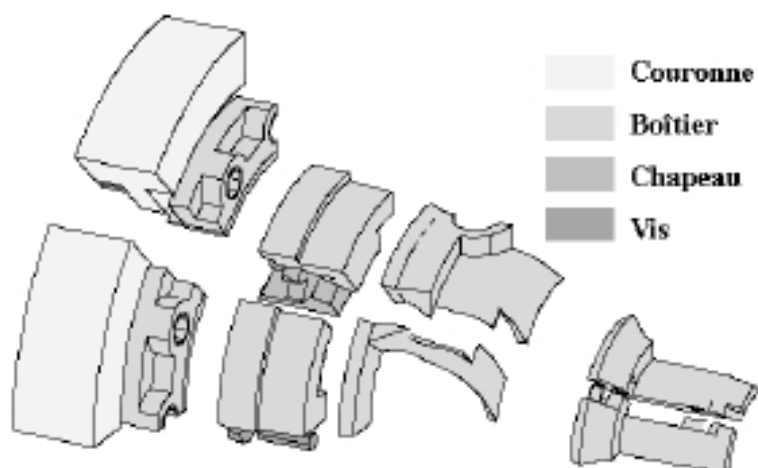


Figure VI-6 : Décomposition en 84 sous-structures (1/4 du modèle)

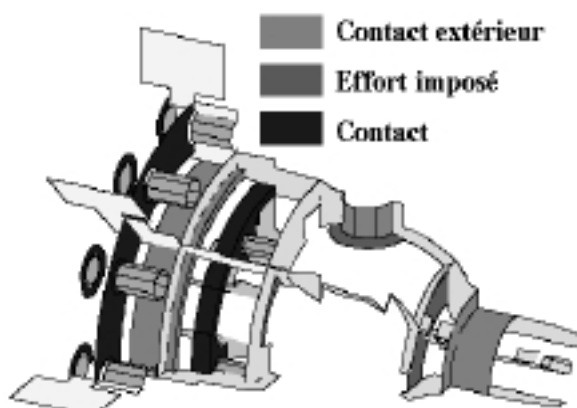
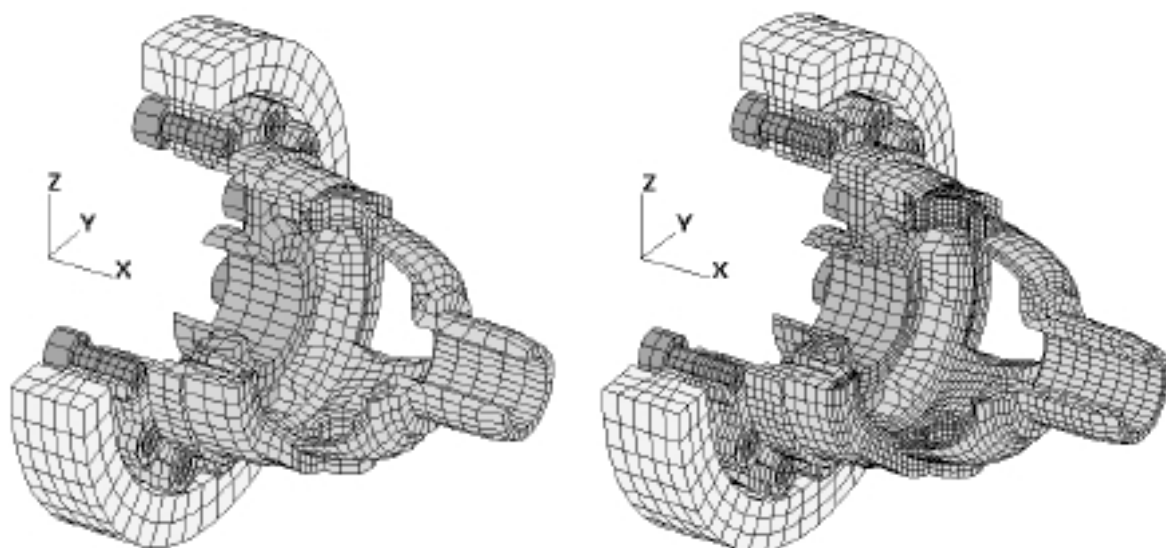


Figure VI-7 : Interfaces pour une décomposition en 84 sous-structures (1/4 du modèle)



Maillage 1 : 35 136 ddl (éléments linéaires)  
 Maillage 2 : 129 924 ddl (éléments  
 quadratiques)

Maillage 3 : 236 976 ddl (éléments  
 quadratiques)

Figure VI-8 : Différents maillages utilisés.



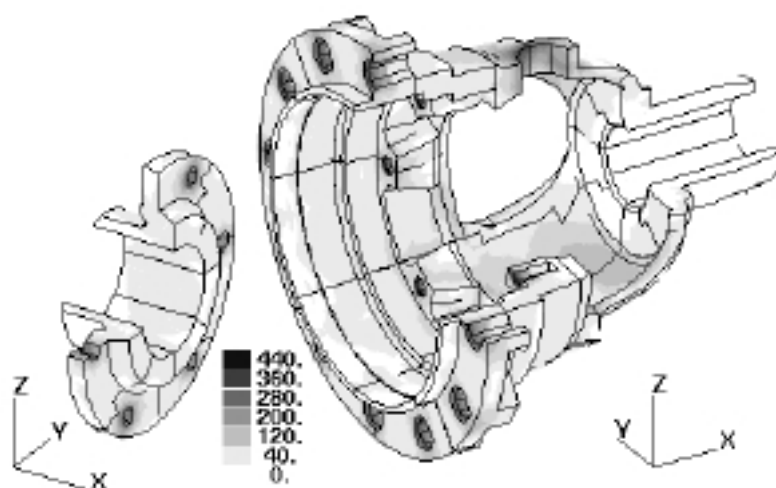


Figure VI-9 : Contrainte équivalente de Mises (Mpa)

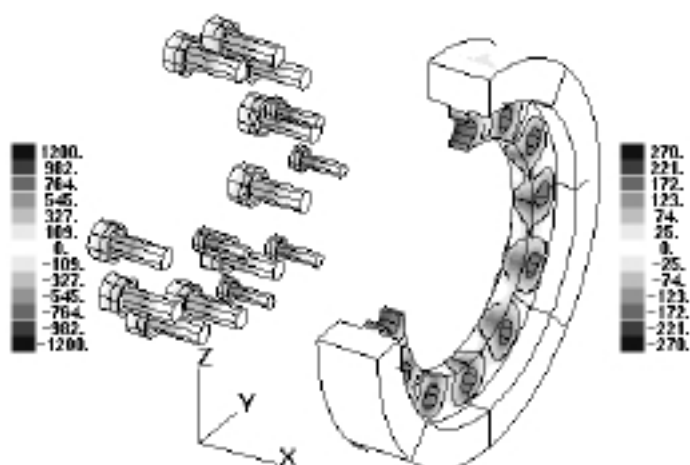
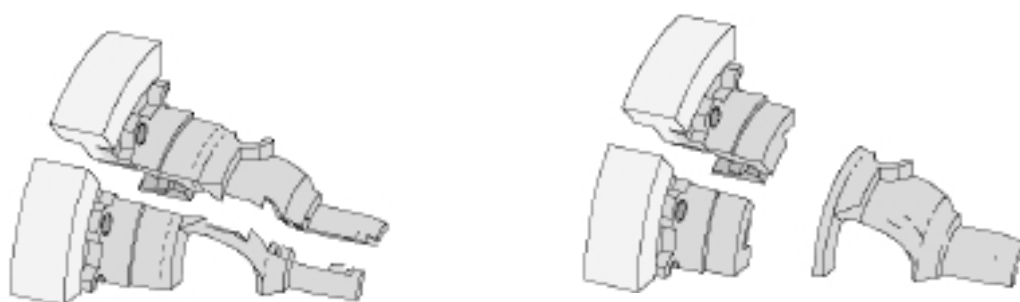


Figure VI-10 : Contrainte axiale (Mpa)



Pour 8 processeurs

Pour 12 processeurs

Figure VI-11 : Sous-structures affectées aux différents processeurs (1/4 du modèle).

La figure VI-11 montre, sur un quart du différentiel et pour la deuxième décomposition, de quelle façon les sous-structures ont été groupées pour un fonctionnement avec 8 et 12 processeurs.

Le temps de calcul CPU cumulé en fonction du nombre de processeurs pour le modèle à 35136 ddl (Fig. VI-12) montre que le coût des communications est relativement faible (pour un processeur, il n'y a pas de communication). La figure VI-12 présente aussi le temps CPU cumulé en fonction de la taille de la modélisation pour l'utilisation de 12 processeurs. Il est important de noter que le coût total augmente de façon quasi-linéaire avec la taille du problème.

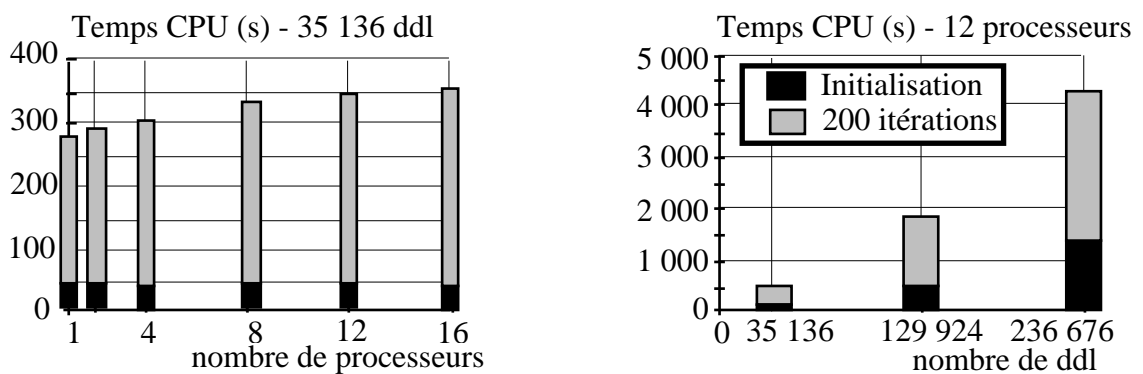


Figure VI-12 : Temps CPU cumulé (s).

### VI.3 Conclusions et perspectives

L'adaptation de l'approche CONTRAST sur ordinateur parallèle est simple et n'entraîne que peu de modifications du logiciel. La souplesse, la modularité et l'efficacité de l'approche, mises en évidence pour des utilisations séquentielles, sont conservées. Le regroupement de plusieurs sous-structures par processeur permet de mieux équilibrer les tâches et de réduire les communications. L'exemple industriel d'assemblage proposé, à grand nombre de degrés de liberté et à comportement non-linéaire, montre l'efficacité de l'approche parallèle sur des problèmes complexes et coûteux.

D'autres exemples, étudiés par D. DUREISSEIX et J.Y. COGNARD, ont montré que l'approche continue de bien se comporter pour des problèmes linéaires et non linéaires de tailles encore plus importantes. Pour augmenter les performances, en présence de grands nombres de sous-structures sur ordinateurs massivement parallèles, des techniques d'accélération de convergence, permettant une diffusion plus rapide des informations entre les sous-structures, sont en cours d'étude. Pour l'utilisation de nombreux processeurs, une variante multi-échelles de l'approche, est proposée dans [DUREISSEIX & LADEVÈZE, 1996].



## CONCLUSIONS

Nous avons présenté les problèmes posés par l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles avec un intérêt particulier pour les assemblages par contact avec frottement, incluant un nombre important d'éléments de liaisons. Pour ces problèmes de calcul des structures, que les méthodes éléments finis classiques ont du mal à traiter, une description fine de tous les éléments et de tous les comportements de liaison est nécessaire. L'approche modulaire CONTRAST, que nous proposons, est particulièrement bien adaptée à ce type de problèmes.

Le développement de cette approche a été mené en collaboration avec AÉROSPATIALE - Les Mureaux et a pour but l'étude d'assemblages de type "bride". Nous avons présenté les dernières extensions adaptées aux modélisations tridimensionnelles. Pour ces modélisations, nous nous sommes placés dans un cadre éléments finis, de manière à profiter d'outils de pré-traitement (maillage, bibliothèque d'éléments, ...) et de post-traitement (visualisation, ...) existants. Ce travail a abouti à la mise en œuvre du logiciel prototype CONTRAST qui est implanté dans le code de calcul CASTEM 2000.

Une décomposition des assemblages est réalisée et fait apparaître deux types d'entités mécaniques : les sous-structures et les interfaces. Ces deux entités communiquent entre elles par l'intermédiaire de champs d'effort et de déplacement. Les interfaces jouent un rôle majeur de par les modèles qui leur sont associés, qui permettent de modéliser simplement un grand nombre de situations complexes.

Le plus important des intérêts de l'approche CONTRAST est, sans doute, la modularité et la flexibilité apportée dans la gestion des données et dans la description du problème. Chaque élément de l'assemblage peut être considéré indépendamment des autres et les liaisons entre les éléments sont décrites par l'intermédiaire de comportements associés uniquement aux interfaces. Ainsi, comme le montrent les exemples proposés, la modification d'un élément ou d'une liaison n'entraîne pas une réanalyse complète du problème.

La décomposition en sous-structures permet de réduire la taille des matrices de rigidité et donc l'encombrement mémoire nécessaire au stockage. Des réductions en coût et en temps de calcul sont observées par rapport aux approches éléments finis usuelles, même sur des problèmes d'élasticité linéaire.

Nous avons montré comment et avec quelle simplicité la méthode traite les problèmes comportant de nombreuses zones de contact avec frottement : le contact est traité localement sous forme d'une loi de comportement mixte associée à une interface et ce traitement est aussi simple que celui d'une liaison parfaite. Les exemples étudiés ont montré le bon comportement et la robustesse de la méthode face à ces problèmes. De plus, des comparaisons avec le code de calcul industriel ABAQUS valident cette approche et montrent le gain en temps et en

encombrement mémoire qu'elle apporte sur ce type de problèmes. Des exemples complexes de géométries de brides, pour lesquels les effets de contact et de frottement engendrent un comportement fortement non linéaire de la structure, confirment les possibilités de la méthode face à des problèmes industriels.

De manière à simplifier les modélisations, l'approche CONTRAST propose la possibilité d'utiliser des interfaces entre des maillages non-compatibles, ce qui simplifie fortement la discrétisation des problèmes. La technique employée cherche à conserver la flexibilité naturelle de l'approche et de ce fait ne peut pas encore traiter tout type d'incompatibilité : seuls les maillages incompatibles plans sont pris en compte.

Enfin, l'approche CONTRAST, présentant un parallélisme naturel, s'adapte bien à l'utilisation de calculateurs parallèles à mémoire distribuée. Nous avons montré la simplicité de son implantation sur de tels ordinateurs ainsi que le gain en temps de calcul obtenu pour des problèmes à très grand nombre de degrés de liberté. Des travaux sont en cours pour améliorer le comportement sur ordinateurs parallèles lorsque le nombre de sous-structures est très important.

Les développements en cours concernent la généralisation du traitement des maillages non-compatibles à tout type de géométrie d'interface. De plus, une discrétisation simple des efforts et des déplacements sur les interfaces est utilisée. Une autre discrétisation, ayant un sens plus physique, est à l'étude et semble bien adaptée à la gestion de maillages non-compatibles.

Par ailleurs, les problèmes de frottement sont abordés par l'approche CONTRAST avec une vision simplifiée. Des travaux en cours ont pour but de traiter le problème d'évolution associé au frottement, de manière à prendre en compte des cycles de charge et décharge sur les structures.

L'approche CONTRAST, dans la version présentée, se limite à des problèmes statiques. Néanmoins, les problèmes de dynamique et en particulier les problèmes de chocs sont d'importance pour les assemblages de structures. En effet, la détérioration des éléments de liaison (boulons, vis, rivets, ...), sous l'action d'un choc modifie très fortement le comportement de l'assemblage, en introduisant des jeux par exemple. Un développement futur concernera l'extension de l'approche CONTRAST à ces problèmes de dynamique.

Enfin, les sous-structures possèdent un comportement élastique linéaire et les seules non-linéarités sont concentrées sur les interfaces. Bien que le comportement non-linéaire d'un élément puisse être simulé par une interface, cette approche reste limitative. Certains modes de ruine extrêmes des assemblages ne sont donc pas simulables. L'extension de l'approche CONTRAST à des problèmes où les structures ont un comportement plastique ou viscoplastique est donc à envisager.



# **BIBLIOGRAPHIE**



## Bibliographie

- ARORA, J.S., CHAHANDE, A.I. et PAENG, J.K., "*Multiplier methods for engineering optimization*", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 32, 1485-1525, 1991.
- BATISSE, R., DIFANT-JAECKELS, H., CURIE, F. et VIRELY, J.M., "*Biaxial high cycle fatigue test on a gas transmission pipeline steel*", Proceedings of Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue, St Germain en Laye, 129-142, 1994.
- BLANZÉ, C., DANWÉ, R., LADEVÈZE, P., MAUREL, PH., "*A New Simplified Method For The Analysis Of 2D Structures*", XXVIIIth International Congress of Theoretical & Applied Mechanics, HAIFIA, ISRAEL, 1992.
- BLANZÉ, C., DANWÉ R., LADEVÈZE, P., MOREAU, J.P., "*Une méthode pour l'étude d'assemblage des structures massives*", Actes du premier Colloque national en calcul des structures, Giens, 1104-1113, Hermes, 1993.
- BLANZE, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J.Y. et LADEVÈZE, P., BLANCHARD, P. et MOREAU, J.P. "*Une approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles. Applications au calcul de brides*", Actes du deuxième Colloque national en calcul des structures, Giens, 347-352, Hermes, 1995.
- BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J.Y. et LADEVÈZE, P., "*A modular approach to structure assembly computations*", Eng. Comput., Vol. 13, n°1, 15-32, 1996.
- BEAUMIER, N. et RAOUS, M. "*Méthode de gradient conjugué pour les problèmes de contact unilatéraux*", Actes du 8ème Congrès Français de Mécanique, 434-435, Nantes, 1987.
- CESSOTTO, S. et CHARLIER, R., "*Frictional contact finite elements based on mixed variational principles*", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 36, 1681-1701, 1993.
- CHAMPANEY, L., COGNARD, J.Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P., "*3D structure assembly analysis with a modular approach suited to parallel computations*", Proceedings of "28th International Symposium on Automotive Technology and Automation", 285-292, 1995.
- CHAMPANEY, L., COGNARD, J.Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P., "*Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method*", Computational Mechanics, à paraître, 1996.
- CHAMPANEY, L. et COGNARD, J.Y., "*Manuel d'utilisation du logiciel prototype CONTRAST*", LMT Cachan, Mai, 1996.
- COGNARD, J.Y., "*Simulation sur ordinateur à architecture parallèle de structures viscoplastiques sous chargement cycliques*", Rev. Eur. Eléments Finis, Vol. 5, n°1, 101-119, 1996.
- COGNARD, J.Y., FEUARDENT, V. et VIRELY, J.M., "*Optimisation d'une structure pour essais mécaniques biaxiaux*", Proceeding of First International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Nantes, France, 1996.
- COMBESCURE, A., MILLARD, A. et VERPEAUX, P., "*Numerical method in the CASTEM system for the treatment of contact problems involving friction*", Journal de mécanique théorique et appliquée, special issue, n°1 to vol 7, 111-128, 1988.

- CURNIER, A., *"A theory of friction"*, Int. J. Solids Structures, vol 20, n°7, 637-647, 1984.
- DILINTAS, G., LAURENT-GENOUX, P. et TRYSTRAM, D., *"A conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral contact problems"*, Comput. Struct., Vol. 29, n°4, 675-880, 1988.
- DUFF, I.S., *"Parallel implementation of multifrontal schemes"*, Parallel Computing, Vol. 3, 193-204, 1986.
- DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P., *"Parallel and multi-level strategies for structural analysis"*, Actes du colloque ECCOMAS, Paris, 1996.
- DUVAUT, G. et LIONS, J. L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972
- DUVAUT, G., *"Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb"*, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 290, Ser. A, 263-265, 1980
- ESCAIG, Y., VAYSSADE, M. et TOUZOT, G., *"Une méthode de décomposition de domaines multifrontale multiniveaux"*, Rev. Eur. Eléments Finis, Vol. 3, n° 3, 311-337, 1994.
- FARHAT, C., *"A simple and efficient automatic FEM domain decomposer"*, Comp. Struct., Vol. 28, 579-602, 1988.
- FARHAT, C. et ROUX, F.X., *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances (ODEN J.T., ed), North-Holland, 1994.
- FARHAT, C. et GÉRADIN, M., *"On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructure"*, Comp. Struct., Vol 51, n°5, 459-473, 1994.
- FENG, Z.Q., *"2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context"*, Com. Numer. Methods Eng., Vol. 11, 409-416, 1995.
- FORTIN, M. et GLOWINSKI, R., *Les méthodes de Lagrangien augmenté*, Dunod, Paris, 1982.
- FRANCHOMME, P., RICARD, A., OUDIN, J. et RAVALAND, Y., *"Simulation du contact 2D dans SYSTUS par la méthode du Lagrangien Augmenté"*, Actes du colloque STRUCOME 89, Paris, 187-198, 1989.
- GIANNAKOPOULOS, A.E., *"The return mapping method for the integration of friction constitutive relations"*, Comp. Struct., Vol 32, n°1, 157-167, 1989.
- GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P., *"Augmented Lagrangian Interpretation of the Non-overlapping Schwarz Alternating Method"*, Domain decomposition methods, SIAM, Philadelphia, 224-231, 1990.
- QUIROZ, L., *"Connexion des maillages hétérogènes dans la méthode des éléments finis"*, Thèse de doctorat, Université de Liège, 1993.
- KIKUCHI, N., et ODEN, J.T., *"Contact problems in elastostatics"*, Finite Element (ODEN, J.T. et CAREY, G. eds), Vol. 4., Ch. 5, 1983.
- KLARBRING, A., *"A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction"*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 58, 175-20, 1986.

- LADEVÈZE, J. *"Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaine"*, Actes du Troisième Colloque Tendances actuelles en calcul des structures, 893-907, Pluralis, 1985.
- LADEVÈZE, P., *"Une nouvelle méthode pour l'analyse des structures massives"*, Note technique AÉROSPATIALE, STS/T3 n°45 465, Mars, 1990.
- LADEVÈZE, P., *Mécanique non linéaire des structures : Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Hermes, Paris, 1996.
- LADEVÈZE, P. et LORONG, Ph., *"Formulations et stratégies "parallèles" pour l'analyse non linéaire des structures"*, Actes du Premier Colloque national en calcul des structures, Giens, 910-919, Hermes, 1993.
- LADEVÈZE, P. et LORONG, Ph., *"A large time increment approach with domain decomposition technique for mechanical non linear problems"*, Comput. Meth. Appl. Sc. Engng, 569-578, 1992.
- LADEVÈZE, P. et MAUREL, PH., *"Mise en œuvre numérique d'une nouvelle méthode pour l'analyse des structures massives"*, Note technique AÉROSPATIALE, TK/S n°47 542, Septembre, 1990.
- LEBON, F., *"Résolution numérique de problèmes de frottement de Coulomb. Accélération de convergence par une méthode multigrilles interne"*, Thèse de doctorat, Université de Provence - Aix-Marseille I, 1989.
- LIONS, P. L., *"On the Schwarz Alternating Method III. A variant for non-overlapping sub-domains"*, Proceedings of Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Chan, T., Glowinski, R., Périaux, J. and Windlun, O. eds) , SIAM, Philadelphia, 1990.
- LORONG, P., *"Sur une approche parallèle pour le calcul des structures. Comportement sur calculateurs parallèles"*, Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 1994.
- NSANGOU, T., *"Résolution par éléments finis de problèmes de contact tridimensionnels avec frottement"*, Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, 1981.
- PARISH, H., *"A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis"*, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 28, 1803-1812, 1989.
- PAWTUCKET, RI: HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN, INC., ABAQUS/Standard Version 5.4 Manuals, 1994.
- ODEN, J.T., et PIRES, E.B., *"Non local and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity"*, J. Applied Mechanics, vol 50, 67-76, 1983.
- RAOUS, M., CHABRAN, P. et LEBON, F., *"Numerical method for frictional contact problems and applications"*, Journal de mécanique théorique et appliquée, special issue, n°1 to vol 7, 111-128, 1988.
- RAOUS, M., JEAN, M. et MOREAU, J.J. (édité par), Proceedings of the Second Contact Mechanics International Symposium, New York, Plenum Press, 1995.
- DE ROECK, Y.H. et LE TALLEC, P., *"Analysis and test of a local domain decomposition preconditioner"*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Domain decomposition Methods, 112-128, 1990.

- DE ROECK, Y.H., LE TALLEC, P. et VIDRASCU, M., "*A domain decomposed solver for non-linear elasticity*", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 99, 187-207, 1992.
- ROUX, F.X., "*Méthodes de résolution par sous-domaines en statique*", *La recherche Aérospatiale*, N°1, 37-48, 1990.
- SASSI, T., "*Méthodes de décomposition de domaines pour la résolution de problème d'élasticité non-linéaire avec maillages incompatibles*", Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1993.
- SIMO, J. C., WRIGGERS, P. et TAYLOR, R.L., "*A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 50, 163-180, 1985.
- SIMO, J. C. et LAURSEN, T. A., "*An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction*", *Comput. Struct.* 42, 97-116, 1992.
- SUNDERAM, V.S., GEIST, G.A., DONGARRA, J. et MANCHEK, R., "*The PVM concurrent computing system: Evolution, experiences, and trends*", *Parallel Computing* 20, 531-545, 1994.
- VERPAUX, P., CHARRAS, T. et MILLARD, A., "*CASTEM 2000 une approche moderne du calcul des structures*", *Calcul des structures et intelligence artificielle* (FOUET, J.M., LADEVÈZE, P., OHAYON, R., Eds.), Pluralis, 261-271, 1988.
- VERPAUX, P. et CHARRAS, T., *Les contacts unilatéraux dans CASTEM 2000*, Rapport DMT94-662, CEA, 1994.
- ZIENKIEWICZ, O.C. et TAYLOR, R.L., *The finite element method*, 4th edition, Mac Graw Hill, London, 1991.
- ZHONG, Z. et MACKERLE, J., "*Static contact problems - a review*", *Engng Comput.*, Vol 9, 3-37, 1992.

